
Generalizaciones de la teoría de integrabilidad de Darboux para campos de vectores polinomiales

Yudy Marcela Bolaños Rivera

Departamento de Matemáticas.
Universidad Autónoma de Barcelona.

Directores:
Dr. Jaume Llibre
Dra. Claudia Valls

Mayo de 2013.

Generalizaciones de la teoría de
integrabilidad de Darboux para campos de
vectores polinomiales

Yudy Marcela Bolaños Rivera

Memoria presentada para aspirar
al grado de Doctor en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas.
Universidad Autónoma de Barcelona.

Certificamos que esta memoria ha sido
realizada bajo nuestra supervisión.

Mayo de 2013.

Dr. Jaume Llibre.

Dra. Claudia Valls.

Agradecimientos

Es un buen momento para reconocer y agradecer a todas las personas e instituciones que han hecho posible llevar a término el desarrollo de este trabajo.

En el transcurso de estos años de estudio me he ido familiarizando y asimilando conocimientos sobre el tema de esta memoria. Todo eso está muy bien. Pero no menos importante son las personas que he encontrado a lo largo de este camino y que me han acompañado. Comienzo por mencionar al profesor Jaume Llibre, le agradezco por aceptarme para realizar esta tesis doctoral bajo su dirección. Sus orientaciones oportunas y certeras, su ejemplo de trabajo y su persona han sido para mí un gran estímulo y un gran medio de aprendizaje. Muchas gracias por su apoyo académico, por su tiempo, por su disponibilidad y por su comprensión. Estas lecciones también han sido muy valiosas y es lo que ha hecho posible la realización de este trabajo. También deseo agradecer sinceramente a Claudia Valls por la oportunidad de compartir con ella parte de este camino, a pesar de las distancias he notado su disposición de ayuda, le agradezco sus oportunos aportes y el ánimo que me ha dado en el desarrollo de este trabajo.

Al personal académico y administrativo del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona también quiero agradecer por haberme brindado todo el apoyo técnico necesario, además por el trato amable y cercano que he encontrado en todas las personas con las que me he relacionado.

Finalmente, tengo presente a muchas personas que en una forma indirecta pero importante han contribuido en esta etapa de mi vida. No puedo dejar de agradecer el apoyo de mi familia, mis padres y hermanos. Gracias por su confianza y por su solicitud. Y a la “familia” que he encontrado aquí durante esta estancia en España, con la que he compartido estos años. Gracias por brindarme el apoyo material y moral que he necesitado. Ha sido un gran regalo que me ha facilitado llegar hasta el final de esta experiencia.

Capítulo 1

Introducción

En esta memoria tratamos aspectos relacionados básicamente con la Teoría de Integrabilidad de Darboux de los campos de vectores polinomiales. En el capítulo 1 presentamos una introducción general sobre esta teoría de integrabilidad e introducimos los cinco capítulos siguientes en las cinco secciones de este primer capítulo. En los capítulos 2 y 3 trabajamos con campos vectoriales polinomiales de \mathbb{R}^{n+1} y en los restantes estudiamos campos vectoriales polinomiales de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 .

1.1. Integrales primeras racionales para campos de vectores polinomiales sobre hipersuperficies regulares algebraicas de \mathbb{R}^{n+1}

Sea $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ el anillo de polinomios en las variables x_1, \dots, x_{n+1} con coeficientes reales y sea \mathcal{X} el *campo vectorial polinomial de grado m* en \mathbb{R}^{n+1} dado por

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{n+1} P_i(x_1, \dots, x_{n+1}) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $P_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ para $i = 1, \dots, n+1$ tales que el máximo de sus grados es m . Para describir el campo \mathcal{X} también usamos la notación $\mathcal{X} = (P_1, \dots, P_{n+1})$.

Denotemos por $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ el anillo de los polinomios complejos en las variables x_1, \dots, x_{n+1} . Sea $f = f(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}] \setminus \mathbb{C}$. Decimos que $\{f = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una *hipersuperficie algebraica invariante del campo vectorial \mathcal{X}* si existe algún polinomio $K \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ tal que

$$\mathcal{X}f = \sum_{i=1}^{n+1} P_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf, \quad (1.1)$$

el polinomio $K = K(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ se llama el *cofactor* de $f = 0$.

Sean $h, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ y asumamos que h y g son primos relativos en el anillo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ o que $h \equiv 1$. Un *factor exponencial* $F(x_1, \dots, x_{n+1})$ del campo vectorial polinomial \mathcal{X} es una función exponencial de la forma $e^{g/h}$ tal que para algún polinomio $K \in \mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ satisface $\mathcal{X}F = KF$, donde $\mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ denota el conjunto de los polinomios de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ de grado a lo más $m - 1$. Al igual que antes, decimos que K es el *cofactor* del factor exponencial F .

Sea $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto y denso en \mathbb{R}^{n+1} . Decimos que una función real $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 localmente no constante, es una *integral primera* del campo vectorial polinomial \mathcal{X} sobre U si $H(x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ es constante para todos los valores de t para los cuales la solución $(x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ de \mathcal{X} está definida sobre U . Si además H es una función racional en las variables x_1, \dots, x_{n+1} entonces H es llamada una *integral primera racional* del campo vectorial \mathcal{X} sobre U .

Una función $I = I(x_1, \dots, x_{n+1}, t) : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un *invariante Darboux* del campo vectorial polinomial \mathcal{X} sobre U si $I(x_1(t), \dots, x_{n+1}(t), t)$ es constante para todos los valores de t para los cuales la solución $(x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ de \mathcal{X} está definida sobre U y si tiene la forma

$$I = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} e^{st},$$

donde $f_1 = 0, \dots, f_p = 0$ son hipersuperficies algebraicas invariantes de \mathcal{X} , F_1, \dots, F_q son factores exponenciales de \mathcal{X} , $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{C}$ y $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

El siguiente resultado proporciona los elementos básicos de la Teoría de integrabilidad de Darboux en \mathbb{R}^{n+1} que usaremos en esta memoria.

Teorema 1.1. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} definido en \mathbb{R}^{n+1} de grado m admite p hipersuperficies algebraicas invariantes irreducibles $f_i = 0$ con cofactores K_i para $i = 1, \dots, p$ y q factores exponenciales $F_j = \exp(g_j/h_j)$ con cofactores L_j para $j = 1, \dots, q$.*

(a) *Existen $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ no todos cero tales que*

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0,$$

si y sólo si la función (multi-valuada) $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}$ es una integral primera de \mathcal{X} .

(b) *Si $p + q \geq \binom{n+m}{n+1} + 1$, entonces existen $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ no todos cero tal*

$$\text{que } \sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0.$$

1.1 Integrales primeras racionales para campos de vectores polinomiales sobre hipersuperficies regulares algebraicas de \mathbb{R}^{n+1} **3**

(c) Existen $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ no todos cero tales que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -s$ para algún $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si y sólo si la función $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} \exp(st)$ es un invariante Darboux del campo vectorial \mathcal{X} .

(d) El campo vectorial \mathcal{X} tiene una integral primera racional si, y sólo si

$$p + q \geq \binom{n+m}{n+1} + n + 1.$$

En consecuencia todas las trayectorias están contenidas en hipersuperficies algebraicas invariantes.

Las afirmaciones (a), (b) y (c) del Teorema 1.1 se deben a Darboux [8] usando sólo hipersuperficies algebraicas invariantes. Incluyendo, además factores exponenciales fueron probadas por Christopher y Llibre [4].

En 1979 Jouanolou [14], haciendo uso de la Geometría Algebraica, proporcionó una demostración de la afirmación (d). Christopher y Llibre [4] dieron una demostración corta y elemental de la afirmación (d) en dimensión dos. Más tarde Llibre y Zhang [27] usando únicamente herramientas de Álgebra Lineal proporcionaron una demostración más corta y fácil que la de Jouanolou en dimensión arbitraria. En el capítulo 2 de esta memoria nosotros estudiamos la integrabilidad racional de los campos vectoriales polinomiales definidos sobre hipersuperficies regulares algebraicas de \mathbb{R}^{n+1} , esto es, queremos hallar condiciones que determinen la existencia de una integral primera racional para esta clase de campos vectoriales. Concretamente utilizando las ideas desarrolladas en [27] encontramos el número de hipersuperficies algebraicas invariantes necesarias para que un campo vectorial definido sobre una hipersuperficie regular algebraica posea una integral primera racional.

Sea Ω una *hipersuperficie algebraica de grado d* dada por

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : G(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0\},$$

donde $G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es un polinomio de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ de grado d . La hipersuperficie Ω es *regular* si el gradiente de G no se anula sobre Ω . Decimos que \mathcal{X} *define un campo vectorial polinomial sobre la hipersuperficie regular algebraica Ω* si satisface que

$$\mathcal{X}G = (P_1, \dots, P_{n+1}) \cdot \nabla G = 0,$$

sobre todos los puntos de Ω .

Sea $f(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}] \setminus \mathbb{C}$. Decimos que $\{f = 0\} \cap \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una *hipersuperficie algebraica invariante del campo vectorial \mathcal{X} sobre Ω* (o simplemente una *hipersuperficie algebraica invariante sobre Ω*) si satisface

- (i) Existe un polinomio $K \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ llamado *cofactor* de $f = 0$ sobre Ω tal que

$$\mathcal{X}f = \sum_{i=1}^{n+1} P_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf \quad \text{sobre } \Omega,$$

- (ii) las dos hipersuperficies $f = 0$ y Ω se intersecan transversalmente; es decir, $\nabla G \wedge \nabla f \neq 0$ sobre la hipersuperficie $\{f = 0\} \cap \Omega$, donde \wedge denota el producto vectorial de dos vectores de \mathbb{R}^{n+1} .

Un *factor exponencial del campo vectorial polinomial* \mathcal{X} sobre la hipersuperficie Ω es una función exponencial de la forma $F(x_1, \dots, x_{n+1}) = e^{g/h}$ con $h, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ primos relativos en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ o $h \equiv 1$, tal que para algún polinomio $K \in \mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ satisface $\mathcal{X}F = KF$ sobre todos los puntos (x_1, \dots, x_{n+1}) de Ω . Decimos que F tiene *cofactor* K .

Sea $D \subset \Omega$ un abierto de medida de Lebesgue total en Ω . Decimos que una función $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 localmente no constante es una *integral primera del campo vectorial polinomial* \mathcal{X} sobre Ω si $H(x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ es constante para todos los valores de t para los cuales la solución $(x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ de \mathcal{X} está definida sobre D . Cuando H es una función racional en las variables x_1, \dots, x_{n+1} entonces H se llama *integral primera racional* del campo vectorial \mathcal{X} sobre Ω .

Una función $I = I(x_1, \dots, x_{n+1}, t) : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un *invariante Darboux* del campo vectorial polinomial \mathcal{X} sobre Ω si $I(x_1(t), \dots, x_{n+1}(t), t)$ es constante para todos los valores de t para los cuales la solución $(x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ de \mathcal{X} está definida sobre D y si tiene la forma

$$I = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} e^{st},$$

donde $f_1 = 0, \dots, f_p = 0$ son hipersuperficies algebraicas invariantes de \mathcal{X} sobre Ω , F_1, \dots, F_q son factores exponenciales de \mathcal{X} sobre Ω , $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{C}$ y $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

El siguiente teorema proporciona algunos resultados de la teoría de integrabilidad de Darboux aplicada a campos vectoriales polinomiales de \mathbb{R}^{n+1} definidos sobre hipersuperficies algebraicas regulares, se debe a Llibre y Zhang [25].

Teorema 1.2. *Sea Ω una hipersuperficie algebraica regular de grado d en \mathbb{R}^{n+1} . Supongamos que el campo vectorial polinomial \mathcal{X} sobre Ω de grado m tiene p hipersuperficies algebraicas invariantes $\{f_i = 0\} \cap \Omega$ con cofactores K_i para $i = 1, \dots, p$ y q factores exponenciales $F_j = \exp(g_j/h_j)$ con cofactores L_j para $j = 1, \dots, q$.*

- (a) *Existen $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ no todos cero tales que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$ sobre todos los puntos de Ω , si y sólo si la función Darbouxiana (multi-valorada) $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}$ es una integral primera de \mathcal{X} sobre Ω .*

1.1 Integrales primeras racionales para campos de vectores polinomiales sobre hipersuperficies regulares algebraicas de \mathbb{R}^{n+1} 5

(b) Si $p + q \geq \binom{n+m}{n+1} - \binom{n+m-d}{n+1} + 1$, entonces existen $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ no todos cero tal que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$ sobre Ω .

(c) Existen $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ no todos cero tales que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -s$ sobre Ω para algún $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si y sólo si $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} e^{st}$, es un invariante Darboux del campo vectorial \mathcal{X} sobre Ω .

Aunque existen resultados acerca de la integrabilidad de campos vectoriales definidos sobre hipersuperficies regulares algebraicas (ver Teorema 1.2), en el caso de las integrales primeras racionales de campos vectoriales definidos sobre hipersuperficies no se conocía ninguna condición que permitiera determinar su existencia, como se puede observar si comparamos los Teoremas 1.1 y 1.2. Solamente en el caso particular de campos vectoriales polinomiales definidos sobre las cuádricas y el 2-toro Llibre y Rodriguez [24] proporcionaron un resultado que permite obtener para estos casos una integral primera racional (ver Teorema 1.3).

En la Figura 1.1 se presentan las nueve cuádricas consideradas en el Teorema 1.3 y sus formas canónicas que utilizaremos en este trabajo. El 2-toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y la expresión algebraica del mismo utilizada en el Teorema 1.3 se muestran en la Figura 1.2.

Teorema 1.3. *Sea Ω una de las nueve cuádricas de la Figura 1.1 o el 2-toro de la Figura 1.2. Supongamos que el campo vectorial polinomial \mathcal{X} sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de grado m admite p curvas algebraicas invariantes $\{f_i = 0\} \cap \Omega$ con cofactores K_i para $i = 1, \dots, p$ y q factores exponenciales $F_j = \exp(g_j/h_j)$ con cofactores L_j para $j = 1, \dots, q$. Si Ω es una de las nueve cuádricas, el campo vectorial \mathcal{X} sobre Ω tiene una integral primera racional en las variables x, y, z si, y sólo si $p+q \geq 3$ y $p+q \geq m^2+2$. Si Ω es el 2-toro, entonces el campo vectorial \mathcal{X} sobre Ω tiene una integral primera racional en las variables x, y, z y $\mu = \sqrt{x^2+y^2}$ si, y sólo si $p+q \geq 3$ y $p+q \geq 2m^2-4m+6$.*

A continuación presentamos el resultado principal del capítulo 2. Con él extendemos los resultados estándar de la teoría de integrabilidad de Darboux para campos vectoriales polinomiales en \mathbb{R}^{n+1} definidos sobre hipersuperficies regulares algebraicas.

Teorema 1.4. *Sea Ω una hipersuperficie regular algebraica de grado d en \mathbb{R}^{n+1} . El campo vectorial polinomial \mathcal{X} sobre Ω de grado $m > 0$ admite*

$$N(n, m, d) + n = \binom{n+m}{n+1} - \binom{n+m-d}{n+1} + n$$

hipersuperficies regulares algebraicas invariantes irreducibles en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ si, y sólo si \mathcal{X} tiene una integral primera racional sobre Ω .

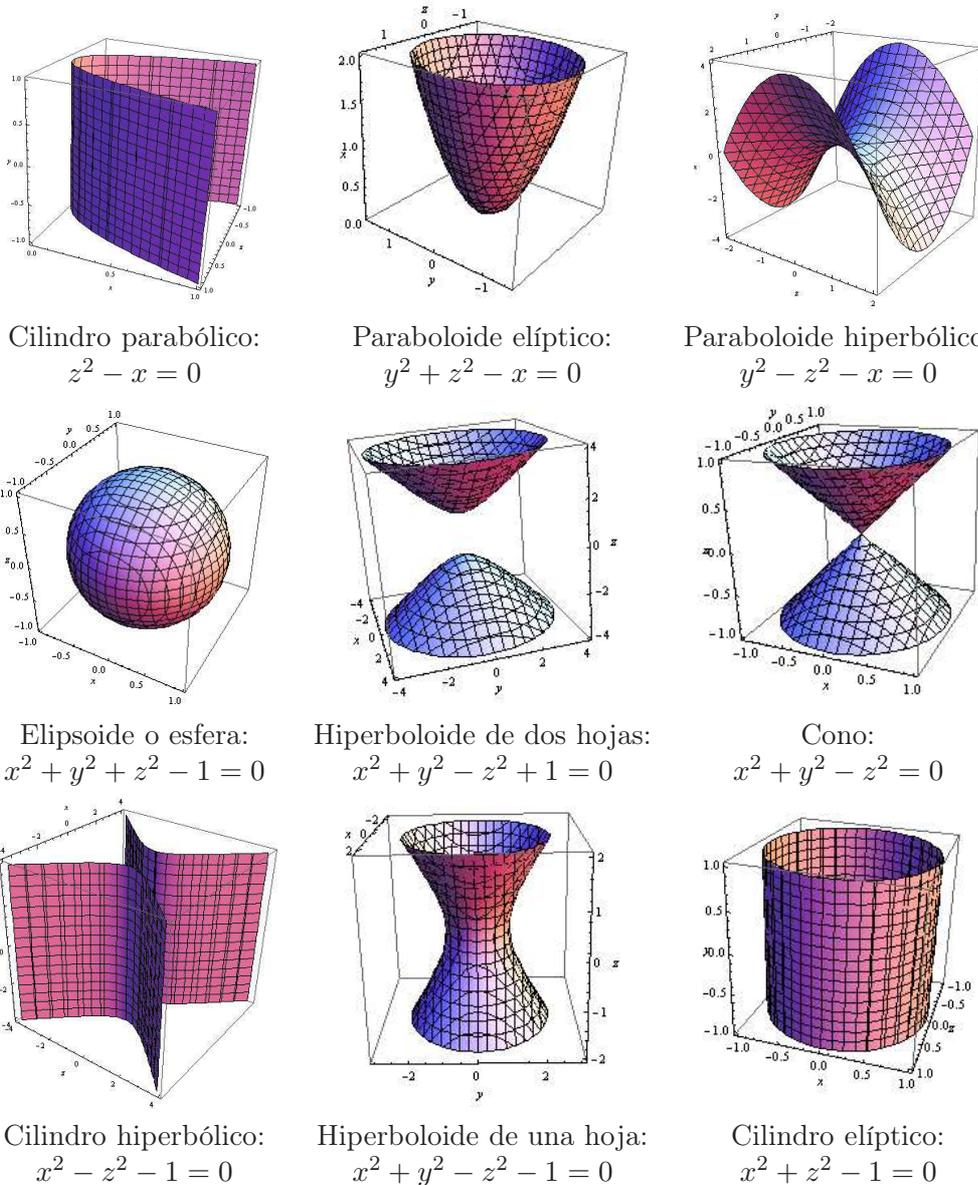
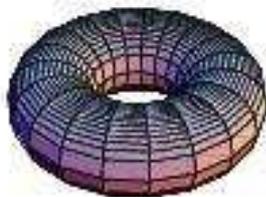


Figura 1.1: Las cuádricas y sus formas canónicas.

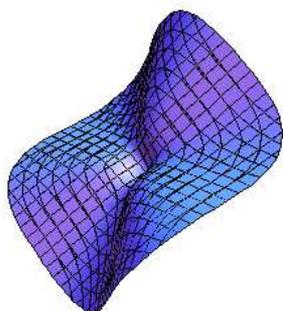
Finalmente aplicamos el Teorema 1.4 a campos vectoriales polinomiales definidos sobre algunas superficies regulares algebraicas. Para el caso de las cuádricas reproducimos los resultados del Teorema 1.3 a partir del Teorema 1.4. En la Figura 1.3 se muestran otras superficies: la superficie de Fermat, la superficie de Clebsch, la superficie de Goursat y la superficie Racor y proporcionamos el valor de $N(n, m, d) + n$ para cada una de estas superficies. El capítulo 2 se organiza de la siguiente manera. En la sección 2.1 proporcionamos algunas definiciones elementales. En la sección 2.2 presentamos algunos resultados auxiliares que necesitaremos después. En la sección 2.3 enunciamos y demostramos la extensión del resultado de Jouanolou a campos vectoria-

1.1 Integrales primeras racionales para campos de vectores polinomiales sobre hipersuperficies regulares algebraicas de \mathbb{R}^{n+1} 7

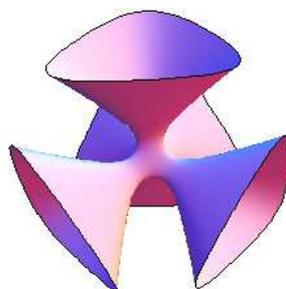


$$z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 = 1 \text{ para } a > 1.$$

Figura 1.2: El 2-toro y una expresión algebraica del mismo.



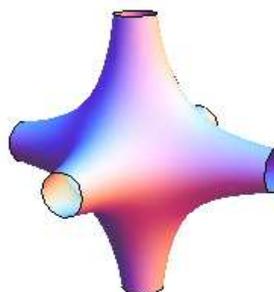
Cúbica de Fermat:
 $x^3 + y^3 + z^3 = 1,$
 $d = 3, \quad (3m^2 - 3m + 6)/2.$



Superficie de Clebsch:
 $x^3 + y^3 + z^3 + 1 - (x + y + z + 1)^3 = 0,$
 $d = 3, \quad (3m^2 - 3m + 6)/2.$



Superficie de Goursat:
 $x^4 + y^4 + z^4 - (x^2 + y^2 + z^2) = 1,$
 $d = 4, \quad 2m^2 - 4m + 6.$



Superficie Racor:
 $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 1,$
 $d = 4, \quad 2m^2 - 4m + 6.$

Figura 1.3: Algunas superficies algebraicas, su ecuación, su grado y la expresión de $N(2, m, d) + 2$ del Teorema 1.4 para cada superficie.

les polinomiales sobre hipersuperficies algebraicas regulares de \mathbb{R}^{n+1} , esto es se demuestra el Teorema 1.4. Por último, aplicamos el resultado anterior a campos vectoriales definidos sobre una cuádrlica o un 2-toro (sección 2.4) y sobre las superficies algebraicas de la Figura 1.3 (sección 2.5).

1.2. Sobre el número de esferas n -dimensionales invariantes en campos vectoriales polinomiales de \mathbb{R}^{n+1}

Sea $\mathcal{X} = (P_1, \dots, P_{n+1})$ un campo vectorial polinomial de \mathbb{R}^{n+1} donde cada $P_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ con $i = 1, \dots, n+1$ es un polinomio de grado m_i . Sea $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{n+1})$ el *grado* del campo polinomial, asumiremos sin pérdida de generalidad que $m_1 \geq \dots \geq m_{n+1}$.

Varios autores han estudiado el número máximo de rectas invariantes que admiten los campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} en \mathbb{R}^2 en función de su grado. Sabemos que para campos vectoriales de grado $(2, 2)$ el número máximo de rectas invariantes es 5, X. Zhang [35] y Sokulski [31] probaron que el número máximo de rectas invariantes reales para campos vectoriales polinomiales en \mathbb{R}^2 de grados $(3, 3)$ y $(4, 4)$ son 8 y 9 respectivamente. Después Artés, Grünbaum y Llibre [1] demostraron el siguiente resultado para campos vectoriales en \mathbb{R}^2 de grado (m, m) .

Teorema 1.5. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^2 de grado $\mathbf{m} = (m, m)$ tiene un número finito de rectas invariantes.*

- (a) *El número de rectas invariantes de \mathcal{X} es a lo más $3m - 1$.*
- (b) *El número de rectas invariantes paralelas de \mathcal{X} es a lo más m .*
- (c) *El número de rectas invariantes diferentes de \mathcal{X} que pasan por un mismo punto es a lo más $m + 1$.*

Sea W un subespacio vectorial del espacio de los polinomios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ generado por los polinomios v_1, \dots, v_l . Si v_1, \dots, v_l es una base de W definimos la *hipersuperficie algebraica extáctica* de \mathcal{X} asociada a W por

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ \mathcal{X}(v_1) & \mathcal{X}(v_2) & \dots & \mathcal{X}(v_l) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathcal{X}^{l-1}(v_1) & \mathcal{X}^{l-1}(v_2) & \dots & \mathcal{X}^{l-1}(v_l) \end{pmatrix} = 0,$$

donde $\mathcal{X}^j(v_i) = \mathcal{X}^{j-1}(\mathcal{X}(v_i))$.

La *multiplicidad de un hiperplano invariante* $f = 0$ es el mayor entero positivo k tal que f^k divide al polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ con W generado por $1, x_1, \dots, x_{n+1}$ (ver [5] y [26]). Cuando estudiamos el número máximo de hiperplanos invariantes que pasan a través de un punto de un campo vectorial polinomial \mathcal{X} , haciendo una traslación de este punto podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que éste es el origen. Entonces la *multiplicidad de un hiperplano invariante a través del origen* se define como el mayor entero positivo k tal que f^k divide al polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ con W generado por x_1, \dots, x_{n+1} .

Más tarde Llibre y Medrado [19] en el siguiente teorema generalizaron los resultados del Teorema 1.5 para campos vectoriales polinomiales en \mathbb{C}^{n+1} .

Teorema 1.6. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{C}^{n+1} con $n \geq 1$ de grado $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{n+1})$ con $m_1 \geq \dots \geq m_{n+1}$ tiene un número finito de hiperplanos invariantes.*

- (a) *El número de hiperplanos invariantes de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más*

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k \right) + \binom{n+1}{2} (m_1 - 1). \quad (1.2)$$

- (b) *El número de hiperplanos invariantes paralelos de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más m_1 .*

- (c) *El número de hiperplanos invariantes diferentes de \mathcal{X} que pasan por un mismo punto teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más*

$$\left(\sum_{k=1}^n m_k \right) + \binom{n}{2} (m_1 - 1) + 1. \quad (1.3)$$

En el capítulo 3 queremos extender los resultados sobre las cotas superiores para el número de hipersuperficies algebraicas invariantes que un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^{n+1} puede alcanzar, específicamente obtenemos las cotas superiores para el número máximo de esferas n -dimensionales invariantes, y para el número máximo de esferas n -dimensionales invariantes concéntricas de \mathcal{X} en función del grado de \mathcal{X} .

Primero proporcionamos una cota superior para el número máximo de circunferencias invariantes de campos vectoriales bidimensionales, y también para el número máximo de circunferencias invariantes concéntricas. Posteriormente lo extendemos a esferas n -dimensionales y probamos que dichas cotas no se pueden alcanzar.

Sea $f = (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_{n+1} - a_{n+1})^2 - r^2 = 0$ una esfera n -dimensional. Con el fin de encontrar cotas superiores para este tipo de hipersuperficies algebraicas invariantes usamos el concepto de hipersuperficie algebraica exacta.

La *multiplicidad de una circunferencia invariante* $f = 0$ es el mayor entero positivo k tal que f^k divide al polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ con W generado por $1, x, y, x^2, y^2$. Cuando estudiamos el número máximo de circunferencias invariantes concéntricas de un campo vectorial polinomial \mathcal{X} , haciendo una traslación del centro podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que el centro está en el origen de coordenadas. Entonces la *multiplicidad de una circunferencia invariante con centro en el origen* $f = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ es el mayor entero positivo k tal que f^k divide al polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ con W generado por $1, x^2, y^2$.

Los dos resultados principales obtenidos en el capítulo 3 son los siguientes.

Teorema 1.7. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^2 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ con $m_1 \geq m_2$ tiene un número finito de circunferencias invariantes.*

- (a) *El número de circunferencias invariantes de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más $4m_1 + m_2 - 2$.*
- (b) *El número de circunferencias invariantes concéntricas de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más $m_1 + [(m_2 + 1)/2]$. Aquí $[x]$ denota la función parte entera de $x \in \mathbb{R}$.*

La multiplicidad de una esfera invariante $f = 0$ es el mayor entero positivo k tal que f^k divide el polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ con W generado por los polinomios $1, x_1, \dots, x_{n+1}, x_1^2, \dots, x_{n+1}^2$.

Teorema 1.8. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^{n+1} con $n \geq 1$ de grado $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{n+1})$ tiene un número finito de esferas invariantes.*

- (a) *El número de esferas invariantes de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más*

$$\left[\frac{1}{2} \left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} 2m_k \right) + \binom{2(n+1)}{2} (m_1 - 1) + (n+1) \right) \right].$$

- (b) *El número de esferas invariantes concéntricas de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más*

$$\left[\frac{1}{2} \left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k \right) + \binom{n+1}{2} (m_1 - 1) + (n+1) \right) \right].$$

Observemos que el resultado del Teorema 1.7 para el número máximo de circunferencias invariantes es análogo al que proporciona el Teorema 1.5 para el número máximo de rectas invariantes de un campo vectorial polinomial \mathcal{X} de \mathbb{R}^2 en función de su grado, aunque el grado de los polinomios que definen el campo no es igual. También el Teorema 1.8 se corresponde con el Teorema 1.6 proporcionándonos una cota superior para el número máximo de esferas invariantes e hiperplanos invariantes, respectivamente, que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} de \mathbb{R}^{n+1} puede tener en función de su grado.

La organización del capítulo 3 es la siguiente. En las secciones 3.1 y 3.2 introducimos el concepto de hipersuperficie algebraica extáctica, se prueban algunas de sus propiedades que se utilizarán posteriormente y se enuncian algunos resultados donde este concepto se usa. Finalmente en la sección 3.3 proporcionamos el número máximo de circunferencias invariantes de campos vectoriales bidimensionales y su extensión a dimensión $n + 1$.

1.3. Sobre el número de cónicas invariantes de campos vectoriales polinomiales definidos en una cuádrlica

En el capítulo 4 trabajamos con campos vectoriales polinomiales en \mathbb{R}^3 , concretamente estudiamos campos definidos sobre cuádrlicas. Sea \mathcal{X} un campo vectorial polinomial de \mathbb{R}^3 de grado (m_1, m_2, m_3) y supongamos que \mathcal{X} tiene una cuádrlica invariante \mathcal{Q} , entonces decimos que \mathcal{X} es un *campo vectorial polinomial definido sobre la cuádrlica \mathcal{Q}* . Esta definición coincide con la definición de un campo definido sobre una superficie regular algebraica dada en la sección 1.2 para todas las cuádrlicas, con la excepción del cono.

Un plano invariante de \mathcal{X} interseca \mathcal{Q} en una cónica invariante. El objetivo principal del capítulo 4 es estudiar el número máximo de cónicas invariantes de este tipo que puede tener el campo vectorial polinomial \mathcal{X} en función de los grados m_1 , m_2 y m_3 . Si la cónica es no degenerada entonces es una elipse, una parábola o una hipérbola. Si es degenerada, entonces está formada por dos rectas que se cortan en un punto, por dos rectas paralelas, o por una recta doble.

El estudio del número máximo de distintas clases de curvas algebraicas invariantes en \mathbb{R}^2 , de distintas clases de superficies algebraicas invariantes en \mathbb{R}^3 , y de distintas clases de hipersuperficies algebraicas en \mathbb{R}^{n+1} ha sido estudiado recientemente por algunos autores. Así el número máximo de rectas invariantes que un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 puede tener en función de su grado ha sido estudiado en [1, 31, 35]. El número máximo de ciclos límites algebraicos que un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 puede tener ha sido estudiado en [21, 22, 36]. El número máximo de meridianos y paralelos invariantes para campos vectoriales polinomiales sobre un 2-toro ha sido considerado en [20, 23]. El número máximo de hiperplanos (respectivamente esferas S^{n+1}) invariantes que los campos vectoriales polinomiales pueden tener en \mathbb{R}^{n+1} ha sido obtenido en [19].

En el capítulo 4 trabajaremos con las nueve cuádrlicas reales presentadas en la Figura 1.1 junto con sus formas canónicas.

Una característica que poseen algunas de las cuádrlicas es la de ser superficies regladas. Una superficie es *reglada* [11, 13] si por cada punto de la misma, existe una recta contenida en ella. Las superficies regladas se generan por el movimiento de una recta, denominada generatriz, manteniéndose en contacto con otra u otras rectas, denominadas directrices, cumpliendo además en su desplazamiento ciertas condiciones particulares. Una superficie es *doblemente reglada* si por cada uno de sus puntos pasan dos generatrices. De las nueve cuádrlicas reales seis de ellas son regladas, estas son: el cilindro parabólico, el cilindro elíptico, el cilindro hiperbólico, el cono, el hiperboloide de una hoja y el paraboloid hiperbólico. Además el hiperboloide de una hoja y el paraboloid hiperbólico son superficies doblemente regladas.

El capítulo 4 se organiza como sigue. Estudiamos en secciones separadas los campos vectoriales definidos en cada una de las nueve cuádricas y mostramos los resultados obtenidos sobre el número de cónicas degeneradas y no degeneradas invariantes que se obtienen para estos campos. Para las seis cuádricas regladas encontramos una cota para el número máximo de rectas invariantes. Finalmente probamos si estas cotas son alcanzables o no.

Los resultados principales del capítulo 4 se resumen en los siguientes teoremas. En el primero se muestran los resultados correspondientes al número de cónicas degeneradas y en el segundo, las cotas para el número máximo de cónicas no degeneradas.

Teorema 1.9. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre una de las nueve cuádricas tiene un número finito de cónicas degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. En la Tabla 1.1 mostramos el número máximo de cónicas degeneradas invariantes, contenidas en planos invariantes, cuando \mathcal{X} está definido en la cuádrica correspondiente. Además, para los seis primeros casos estas cotas son alcanzables.*

Teorema 1.10. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre una de las nueve cuádricas tiene un número finito de cónicas no degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. En la Tabla 1.2 mostramos el número máximo de cónicas no degeneradas invariantes, contenidas en planos invariantes, cuando \mathcal{X} está definido en la cuádrica correspondiente. Además, para los tres primeros casos estas cotas son alcanzables.*

1.4. Integrales primeras Liouvillianas para sistemas cuadráticos con una silla integrable

En el capítulo 5 estudiamos los sistemas cuadráticos que poseen una silla integrable. Un sistema diferencial polinomial cuadrático o simplemente un *sistema cuadrático* es un sistema diferencial polinomial en \mathbb{R}^2 de la forma

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1.4)$$

donde $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$ y el máximo de los grados de P y Q es 2.

Un campo polinomial (1.4) es *integrable* si existe una integral primera definida en un abierto denso de \mathbb{R}^2 .

Los sistemas cuadráticos han sido ampliamente estudiados en los últimos cien años y se han publicado más de mil artículos sobre ellos (ver por ejemplo [29, 33, 34]). Aunque estos sistemas son considerados como una de las familias más fáciles entre los sistemas diferenciales polinomiales su estudio no es trivial, así por ejemplo todavía permanece abierto el problema de clasificar todos los campos vectoriales integrables de dimensión dos.

Cuádrlica	Número máximo de cónicas
Cilindro parabólico	$2m_3$ rectas si ninguna recta invariante es doble, m_3 rectas si todas las rectas invariantes son dobles, y entre m_3 y $2m_3$ rectas si hay alguna recta invariante doble.
Cilindro elíptico e hiperbólico	$2m_3 - 2$ rectas si ninguna recta invariante es doble, $m_3 - 1$ rectas si todas las rectas invariantes son dobles, y entre $m_3 - 1$ y $2m_3 - 2$ rectas si hay alguna recta invariante doble.
Cono	$3m_1$ rectas o puntos si $m_1 \geq m_2$, $3m_2$ rectas o puntos si $m_1 \leq m_2$.
Hiperboloide de una hoja	$m_1 + 1$ rectas si $m_1 \geq m_2$, $m_2 + 1$ rectas si $m_1 \leq m_2$,
Paraboloide hiperbólico	$2 + m_2$ rectas si $m_2 \geq m_3$, $2 + m_3$ rectas si $m_2 \leq m_3$.
Paraboloide elíptico	$5m_2 + m_3$ puntos si $m_2 \geq m_3$, $m_2 + 5m_3$ puntos si $m_2 \leq m_3$.
Elipsoide e Hiperboloide de dos hojas	$5m_1 + m_2 - 3$ puntos si $m_1 \geq m_2$, $m_1 + 5m_2 - 3$ puntos si $m_1 \leq m_2$.

Tabla 1.1: Número máximo de cónicas degeneradas de un campo vectorial definido sobre una cuádrlica.

Una *silla débil* es una silla hiperbólica tal que la traza de su parte lineal es cero. Más concretamente, de los artículos [2, 6, 10, 15] tenemos que si un sistema cuadrático posee una silla débil entonces vía una transformación afín este sistema puede ser escrito en la forma

$$\dot{x} = x + ax^2 + bxy + cy^2, \quad \dot{y} = -y - kx^2 - lxy - my^2,$$

con una silla débil en el origen. Además, se dice que el origen es una *silla integrable* si

$$\begin{aligned} L_1 &= lm - ab = 0, \\ L_2 &= kb(2m - b)(m + 2b) - cl(2a - l)(a + 2l) = 0, \\ L_3 &= (ck - lb)[acl(2a - l) - bkm(2m - b)] = 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas condiciones, los sistemas cuadráticos con una silla integrable pueden ser reducidos a las siguientes cinco familias de sistemas

Cuádrlica	Número máximo de cónicas	
Cilindro parabólico	$3m_2 + 3m_3 - 2$ $m_2 + 5m_3$	parábolas si $m_2 \geq m_3 + 1$, parábolas si $m_2 \leq m_3 + 1$.
Cilindro elíptico/ hiperbólico	$3m_2 + 3m_3 - 5$ $m_2 + 5m_3 - 5$	elipses/hipérbolas si $m_2 \geq m_3$, elipses/hipérbolas si $m_2 \leq m_3$.
Cono	$5m_1 + m_2 - 4$ $m_1 + 5m_2 - 4$	cónicas si $m_1 \geq m_2$, cónicas si $m_1 \leq m_2$.
Hiperboloide de una hoja	$5m_1 + m_2 - 3$ $m_1 + 5m_2 - 3$	cónicas si $m_1 \geq m_2$, cónicas si $m_1 \leq m_2$.
Paraboloide hiperbólico	$m_2 + 5m_3$ $5m_2 + m_3$	cónicas si $m_2 \leq m_3$, cónicas si $m_2 \geq m_3$.
Paraboloide elíptico	$2m_2 + m_3$ $m_2 + 2m_3$ $5m_2 + m_3$ $m_2 + 5m_3$	parábolas si $m_2 \geq m_3$, parábolas si $m_2 \leq m_3$ y, parábolas o elipses si $m_2 \geq m_3$, parábolas o elipses si $m_2 \leq m_3$.
Elipsoide e Hiperboloide de dos hojas	$5m_1 + m_2 - 3$ $m_1 + 5m_2 - 3$	cónicas si $m_1 \geq m_2$, cónicas si $m_1 \leq m_2$.

Tabla 1.2: Número máximo de cónicas no degeneradas de un campo vectorial definido sobre una cuádrlica

cuadráticos [2],

$$\dot{x} = x - 2ckx^2 + xy + cy^2, \quad \dot{y} = -y - kx^2 - ckxy + 2y^2, \quad (1.5)$$

$$\dot{x} = x + mx^2 + xy + cy^2, \quad \dot{y} = -y - cx^2 - xy - my^2, \quad (1.6)$$

$$\dot{x} = x + lmx^2 + xy + cy^2, \quad \dot{y} = -y - cl^3x^2 - lxy - my^2, \quad (1.7)$$

$$\dot{x} = x + ax^2 + cy^2, \quad \dot{y} = -y - kx^2 - my^2, \quad (1.8)$$

$$\dot{x} = x + ax^2 + 2mxy + cy^2, \quad \dot{y} = -y - kx^2 - 2axy - my^2. \quad (1.9)$$

Recientemente estos tipos de sillas han sido estudiadas por varios autores Cai Sulin [6], Joyal y Rousseau [15], y Artés, Llibre y Vulpe [2]. Estos últimos autores caracterizaron los retratos de fase de todos los sistemas cuadráticos con una silla integrable, pero no calcularon sus integrales primeras. En este capítulo damos las expresiones explícitas para las integrales primeras de cada familia de estos sistemas cuadráticos.

Sea W un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 simplemente conexo. Una función \mathcal{C}^1 localmente no nula $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ es un *factor integrante inverso* del sistema (1.4) sobre W si ésta es una solución de la ecuación diferencial parcial lineal

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \text{div}(P, Q)V,$$

donde $\text{div}(P, Q) = \partial P / \partial x + \partial Q / \partial y$ es la divergencia del campo vectorial $\mathcal{X} = (P, Q)$ asociado al sistema (1.4).

Recordemos que un sistema diferencial polinomial (1.4) con un factor integrante inverso $V = V(x, y) : W \rightarrow \mathbb{R}$ posee una integral primera dada por

$$H(x, y) = \int \frac{P(x, y)}{V(x, y)} dy + g(x),$$

donde g se escoge de modo que $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{Q}{V}$.

Es conocido que todos los sistemas cuadráticos con una silla integrable poseen una integral primera Liouvillianas, ver por ejemplo [2]. Una *integral primera Liouvillianas* es una integral primera que se puede expresar por medio de cuadraturas de funciones elementales. De hecho, la teoría de integrabilidad de Darboux permite estudiar todas las integrales Liouvillianas, para más detalles ver [30]. Nosotros encontramos las integrales primeras Liouvillianas de cada una de las familias (1.5)–(1.9) encontrando un factor integrante inverso polinomial para cada una de ellas. El teorema siguiente proporciona dichas integrales primeras.

Teorema 1.11. *Las siguientes afirmaciones se cumplen.*

(a) *Una integral primera del sistema (1.5) es*

$$\begin{aligned} & \frac{V_{11}^3}{V_{12}^2} \quad \text{si } 1 + c^2k \neq 0, \\ & \frac{4cx + 6x^2 + c^2(1 - 4y + 6y^2)}{V_{11}^2} \quad \text{si } 1 + c^2k = 0. \end{aligned}$$

(b) *Una integral primera del sistema (1.6) es*

$$\begin{aligned} & V_{21}^{c+m-1} V_{22}^{c-m} \quad \text{si } m \neq c, 1 - c, 3c - 1, c \neq 1/2, \\ & (2c - 1)(x + y) - \log |V_{22}| \quad \text{si } m = c \neq 1/2, \\ & (2c - 1)(c(2c - 1)(x^2 + y^2) + (-4c^2 + 6c - 2)xy + 2c(x + y)) + \\ & 2c \log |V_{21}| \quad \text{si } m = 1 - c \neq 1/2, \\ & \frac{1}{V_{21}^2} (2(2c - 1)(2c + (1 - 2c)^2x)y + c(3 + 4(2c - 1)x)) + 2c \log |V_{21}| \\ & \text{si } m = 3c - 1 \neq 1/2, \\ & \frac{1}{V_{22}} (4V_{22} - 8 + (2m - 1)^2(x^2 + (2m + 1)xy + y^2) - 8V_{22} \log |2V_{22}|) \\ & \text{si } c = 1/2, m \neq 1/2, \end{aligned}$$

además si $m = c = 1/2$, el sistema (1.6) coincide con el sistema (1.9) con $a = k = 1/2$.

(c) *Una integral primera del sistema (1.7) es*

$$\frac{V_{32}^{m-cl}}{V_{31}^{m+cl-1}} \quad \text{si } m \neq cl, 1-cl, 3cl-1, 2cl \neq 1,$$

$$\frac{1}{V_{32}} (4c(2V_{32} - 8c) + (2m-1)^2(x^2 + 2c(2m+1)xy + 4c^2y^2) - 16cV_{32} \log |2V_{32}|) \quad \text{si } 2cl \neq 1, m \neq 1/2,$$

$$(2cl-1)(lx+y) - \log |V_{32}| \quad \text{si } m = cl, 2cl \neq 1,$$

$$(2cl-1)((-2+2cl(3-2cl))xy + 2c(lx+y) + c(2cl-1)(l^2x^2 + y^2)) + 2c \log |V_{31}| \quad \text{si } m = 1-cl, 2cl \neq 1,$$

$$\frac{1}{V_{31}^2} [-16c^3l^4x^2 + 2x(lx-1) + 8c^2l^2x(3lx-1 + c(-12l^2x^2 + 8lx-1))] + \frac{2}{V_{31}} (x + 4c^2l^2x + c(2-4lx)) + 2c \log |V_{31}| \quad \text{si } m = 3cl-1, 2cl \neq 1,$$

además si $m = 1/2$, el sistema (1.7) coincide con el sistema (1.9) con $a = 1/(4c)$ y $k = 1/(8c^2)$.

(d) Una integral primera del sistema (1.8) es

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(x + ax^2 + cr_i^2) \log |y - r_i|}{f(r_i)}$$

donde $f(r) = 3c(am - ck)r^2 + 2(ac + m^2 - ckmx + am^2x)r + a(am - ck)x^2 + 3(am - ck)x + 2m$ y r_1, r_2 y r_3 son las tres raíces del siguiente polinomio en la variable r

$$(-c^2k + acm)r^3 + (ac + m^2 - ckmx + am^2x)r^2 + (2m - 3ckx + 3amx - ackx^2 + a^2mx^2)r + (2ax + a^2x^2 + kmx^2 - ck^2x^3 + akmx^3 + 1).$$

(e) Una integral primera del sistema Hamiltoniano (1.9) es

$$kx^3 + 3ax^2y + 3mxy^2 + cy^3 + 3xy.$$

El capítulo 5 se organiza de la siguiente manera. En la sección 5.1 introducimos el concepto de silla integrable, damos todos los sistemas cuadráticos con una silla integrable e introducimos la noción de integral primera Liouvilliana. En la sección 5.2 obtenemos los inversos de los factores integrantes polinomiales para los sistemas cuadráticos con una silla integrable. Finalmente proporcionamos las integrales primeras Liouvillianas de las cinco familias de sistemas cuadráticos con una silla integrable (1.5)–(1.9).

1.5. Retratos de fase de los sistemas cuadráticos Lotka–Volterra con un invariante Darboux en el disco de Poincaré

En el capítulo 6 estudiamos los sistemas diferenciales polinomiales cuadráticos Lotka–Volterra que tienen un invariante Darboux y caracterizamos para cada uno de ellos sus retratos de fase globales en el disco de Poincaré.

Un sistema cuadrático Lotka–Volterra tiene la forma

$$\dot{x} = x(ax + by + c), \quad \dot{y} = y(Ax + By + C), \quad (1.10)$$

donde a, b, c, A, B, C son constantes. El sistema (1.10) y su generalización a dimensión n se llaman *sistemas Lotka–Volterra* porque Lotka y Volterra fueron los primeros en estudiarlos [18, 32]. Más tarde estos sistemas diferenciales fueron estudiados por Kolmogorov [16], y después algunos autores les llamaron *sistemas Kolmogorov*. Existen muchos fenómenos naturales que pueden ser modelados por estos sistemas diferenciales tales como el tiempo de evolución de especies en conflicto en biología [12, 28], las reacciones químicas, la física del plasma [17], la hidrodinámica [3], la dinámica [7], la economía etc.

Nosotros estudiamos los sistemas cuadráticos (1.10) que poseen un invariante Darboux. Conocer una integral primera de un sistema diferencial en el plano tiene un interés especial porque permite calcular las expresiones explícitas de las trayectorias del sistema. Sin embargo, cuando no podemos calcular una integral primera es útil determinar si el sistema tiene un invariante Darboux. En términos generales, con una integral primera podemos describir completamente el retrato de fase de un sistema diferencial plano, mientras que con un invariante Darboux solamente podemos describir su comportamiento asintótico, esto es, los conjuntos ω - y α -límite de sus trayectorias en el disco de Poincaré, esto es en el plano \mathbb{R}^2 añadiendo su frontera \mathbb{S}^1 del infinito, para más detalles véase la sección 6.2.

El primer resultado que presentamos es la caracterización de los sistemas cuadráticos Lotka–Volterra (1.10) que tienen un invariante Darboux.

Teorema 1.12. *Los sistemas cuadráticos Lotka–Volterra (1.10) que tienen un invariante Darboux son*

$$\dot{x} = x(ax + by + c), \quad \dot{y} = Cy \quad \text{con } C \neq 0, \quad (1.11)$$

o

$$\dot{x} = x \left(-A \frac{l_2}{l_1} x - B \frac{l_2}{l_1} y + c \right), \quad \dot{y} = y(Ax + By + C) \quad \text{con } l_1 \neq 0. \quad (1.12)$$

Sus invariantes Darboux son $e^{-Ct} y$ y $e^{(-cl_1 - Cl_2)t} x^{l_1} y^{l_2}$, respectivamente, donde l_1 y l_2 son constantes.

Los dos teoremas siguientes caracterizan los retratos de fase globales en el disco de Poincaré de todos los sistemas (1.11) y (1.12) respectivamente. Para conseguir esta clasificación hemos utilizado varios conceptos como la compactificación de Poincaré, las separatrices, las regiones canónicas y la clasificación de sistemas cuadráticos homogéneos reales planos debida a Date [9].

Teorema 1.13. *El retrato de fase de cualquier sistema cuadrático Lotka–Volterra (1.11) es topológicamente equivalente a una de las 7 configuraciones de la Figura 1.4.*

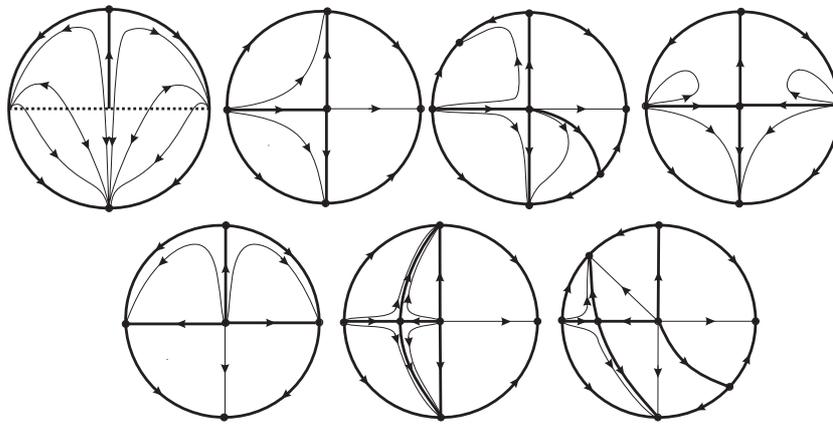


Figura 1.4: Retratos de fase del sistema (1.11).

Teorema 1.14. *El retrato de fase de cualquier sistema cuadrático Lotka–Volterra (1.12) es topológicamente equivalente a una de las 42 configuraciones de las Figuras 1.4 y 1.5.*

El capítulo 6 se organiza como sigue. Primero damos algunos conceptos básicos sobre los sistemas cuadráticos Lotka–Volterra que poseen un invariante Darboux (sección 6.1). En la sección 6.2 obtenemos la caracterización de los sistemas cuadráticos (1.10). Las dos secciones siguientes contienen las nociones sobre la compactificación de Poincaré (sección 6.3), las separatrices y las regiones canónicas (sección 6.4) que necesitaremos más adelante. En la sección 6.5 presentamos los resultados que usaremos de la clasificación de los sistemas diferenciales polinomiales homogéneos cuadráticos desarrollada por Date [9]. Finalmente, en las secciones 6.6 y 6.7 caracterizamos los retratos de fase globales de los sistemas Lotka–Volterra con un invariante Darboux (1.11) y (1.12), ver los Teoremas 1.13 y 1.14 respectivamente.

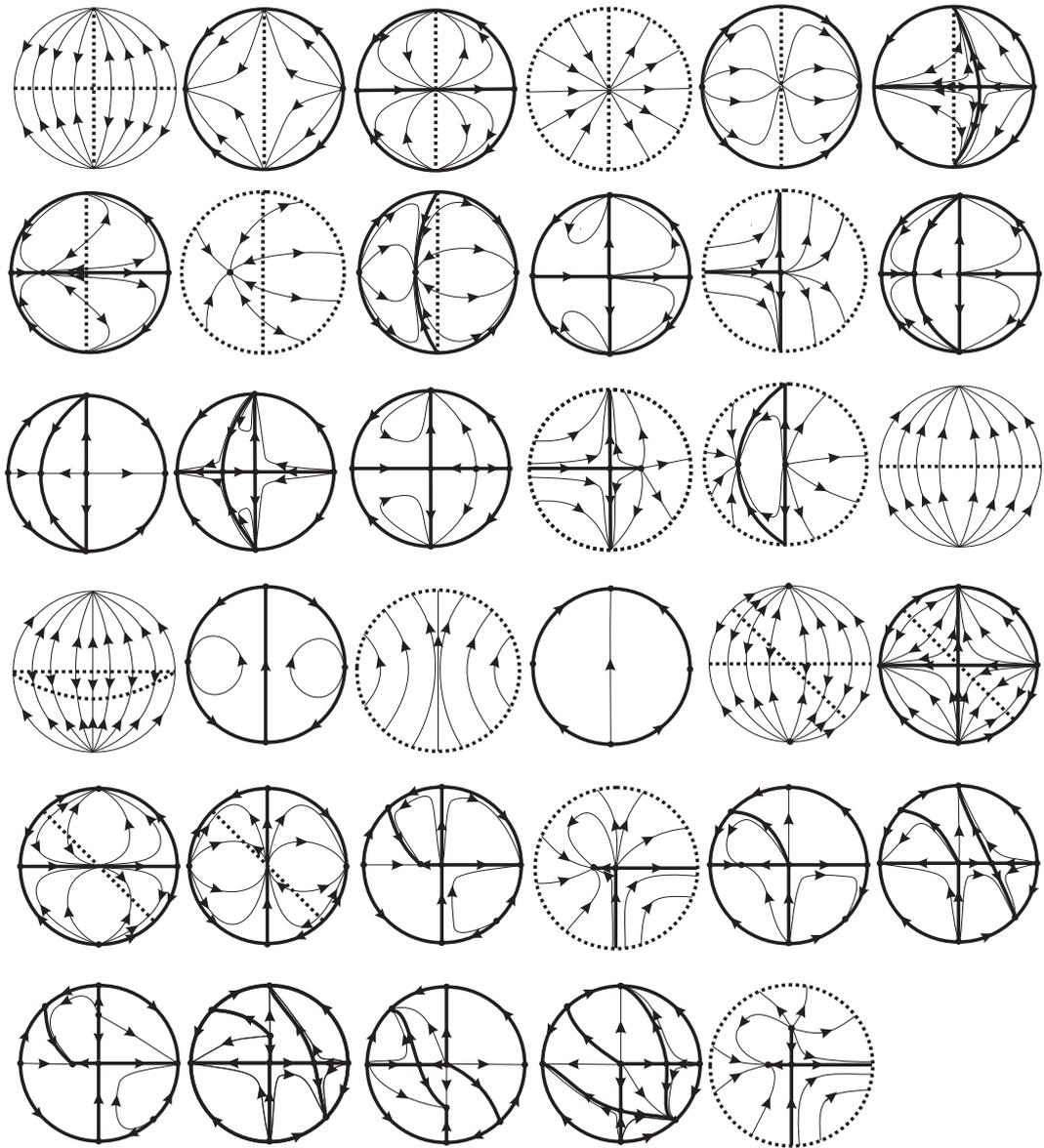


Figura 1.5: Retratos de fase del sistema (1.12).

1.6 Referencias

- [1] J.C. ARTÉS, B. GRÜNBAUM Y J. LLIBRE, *On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems*, Pacific J. of Mathematics **184** (1998), 207–230.
- [2] J.C. ARTÉS, J. LLIBRE Y N. VULPE, *Quadratic systems with an integrable saddle: A complete classification in the coefficient space \mathbb{R}^{12}* , por aparecer en J. Differential Equations.
- [3] F. H. BUSSE, *Transition to turbulence via the statistical limit cycle route*, Synergetics, Springer Verlag, 1978, pp 39.
- [4] C. CHRISTOPHER Y J. LLIBRE, *Algebraic aspects of integrability for polynomial systems*, Qual. Theory Dynam. Syst. **1** (1999), 71–95.
- [5] C. CHRISTOPHER, J. LLIBRE Y J.V. PEREIRA, *Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields*, Pacific J. of Mathematics **229** (2007), 63–117.
- [6] CAI SULIN, *The weak saddle and separatrix cycle of a quadratic system*, Acta Math. Sinica **30** (1987), 553–559 (en Chino).
- [7] F. CAO Y J. JIANG, *The classification on the global phase portraits of two-dimensional Lotka-Volterra system*, J. Dynam. Differential Equations **20** (2008), 797–830.
- [8] G. DARBOUX, *De l'emploi des solutions particulières algébriques dans l'intégration des systèmes d'équations différentielles algébriques*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **86** (1878), 1012–1019.
- [9] T. DATE, *Classification and analysis of two-dimensional real homogeneous quadratic differential equation systems*, J. Differential Equations **32** (1979), 311–334.
- [10] H. DULAC, *Détermination et intégration d'une certaine classe d'équation différentielles ayant pour point singulier un centre*, Bull. Sciences Math. Sér. 2, **32** (1908), 230–252.
- [11] W. L. EDGE, *The Theory of Ruled Surfaces*, Cambridge, University Press. Review: Bull. Amer. Math. Soc. **37** (1931), 791–793.

-
- [12] J. GUO Y X. LIANG, *The minimal speed of traveling fronts for the Lotka-Volterra competition system*, J. Dynam. Differential Equations **23** (2011), 353–363.
- [13] D. HILBERT Y S. COHN-VOSSEN *The Second-Order Surfaces §3 in Geometry and the Imagination*, New York: Chelsea, 12–19, 1999.
- [14] J.P. JOUANOLOU, *Equations de Pfaff algébriques*, Lectures Notes in Mathematics 708, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1979.
- [15] P. JOYAL Y C. ROUSSEAU, *Saddle quantities and applications*, J. Differential Equations **78** (1989), 374–399.
- [16] A. KOLMOGOROV, *Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza*, Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari **7** (1936), 74–80.
- [17] G. LAVAL Y R. PELLAT, *Plasma Physics*, Proceedings of Summer School of Theoretical Physics, Gordon and Breach, NY, 1975.
- [18] A. J. LOTKA, *Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. **6** (1920), 410–415.
- [19] J. LLIBRE Y J.C. MEDRADO, *On the invariant hyperplanes for d-dimensional polynomial vector fields*, J. of Physics A: Math. Gen. **40** (2007), 8385–8391.
- [20] J. LLIBRE Y J.C. MEDRADO, *Limit cycles, invariant meridians and parallels for polynomial vector fields on the torus*, Bull. Sci. Math., **135** (2011), 1–9.
- [21] J. LLIBRE, R. RAMIREZ Y M. SADOVSKAIA, *On the 16th Hilbert problem for algebraic limit cycles*, J. Differential Equations, **248** (2010), 1401–1409.
- [22] J. LLIBRE, R. RAMIREZ Y M. SADOVSKAIA, *On the 16th Hilbert problem for algebraic limit cycles on nonsingular algebraic curves*, J. Differential Equations, **250** (2010), 983–999.
- [23] J. LLIBRE Y S. REBOLLO, *Invariant parallels, invariant meridians and limit cycles of polynomial vector fields on some 2-dimensional algebraic tori in \mathbb{R}^3* , por aparecer, 2011.
- [24] J. LLIBRE Y G. RODRÍGUEZ, *Darboux integrability of polynomial vector fields on 2-dimensional surfaces*, J. of Bifurcation and Chaos **12** (2002), 2821–2833.
- [25] J. LLIBRE Y X. ZHANG, *Darboux integrability of real polynomial vector fields on regular algebraic hypersurfaces*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **51** (2002), 109–126.

-
- [26] J. LLIBRE, X. ZHANG, *Darboux Theory of Integrability in \mathbb{C}^n taking into account the multiplicity*, J. of Differential Equations **246** (2009), 541–551.
- [27] J. LLIBRE, X. ZHANG, *Rational first integrals in the Darboux theory of integrability in \mathbb{C}^n* , Bulletin des sciences mathématiques **134** (2010), 189–195.
- [28] R. M. MAY, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton NJ, 1974.
- [29] J.W. REYN, A bibliography of the qualitative theory of quadratic systems of differential equations in the plane, Delf University of Technology, <http://ta.twi.tudelft.nl/DV/Staff/J.W.Reyn.html>, 1997.
- [30] M.F. SINGER, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 673–688.
- [31] J. SOKULSKI, *On the number of invariant lines of polynomial vector fields*. Nonlinearity **9** (1996), 479–485.
- [32] V. VOLTERRA, *Lecons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la vie*, Gauthier Villars, Paris, 1931.
- [33] YE YANQIAN Y OTROS, *Theory of Limit Cycles*, Transl. Math. Monographs **66**, Amer. Math. Soc., Providence, 1984.
- [34] YE YANQIAN, *Qualitative Theory of Polynomial Differential Systems*, Shangai Scientific & Technical Publishers, Shangai, 1995 (en Chino).
- [35] X. ZHANG, *Number of integral lines of polynomial systems of degree three and four*, J. of Nanjing University (Mathematical Biquarterly) **10** (1993), 209–212.
- [36] X. ZHANG, *The 16th Hilbert problem on algebraic limit cycles*, J. Differential Equations **251** (2011), 1778–1789.

Capítulo 2

Integrales primeras racionales de campos vectoriales polinomiales sobre hipersuperficies regulares algebraicas de \mathbb{R}^{n+1}

En muchas ramas de las ciencias aplicadas aparecen ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Para un sistema diferencial o un campo vectorial definido en \mathbb{R}^2 la existencia de una integral primera determina por completo su retrato de fase. En \mathbb{R}^n con $n > 2$ la existencia de una integral primera de un campo vectorial reduce el estudio de su dinámica en una dimensión, con tiempo real o complejo, respectivamente. Así que surge una pregunta natural: Dado un campo vectorial sobre \mathbb{R}^n , ¿cómo reconocer si este campo vectorial tiene una integral primera? Hasta ahora, esta pregunta no tiene respuestas satisfactorias. Muchos métodos se han utilizado para estudiar la existencia de integrales primeras de campos vectoriales. Algunos de estos métodos están basados en: las simetrías de Noether [4], la teoría de integrabilidad de Darboux [5], las simetrías de Lie [13], el análisis de Painlevé [2], el uso de pares de Lax [9], el método directo [6, 7], el método de análisis de compatibilidad lineal [14], el procedimiento de inserción de Carleman [1, 3], el formalismo quasimonomial [2], etc. En el caso de campos vectoriales polinomiales e integrales primeras racionales la mejor respuesta a esta pregunta fue dada por Jouanolou [8] en 1979 dentro de la teoría de integrabilidad de Darboux. Esta teoría de integrabilidad establece un vínculo entre la integrabilidad de campos vectoriales polinomiales y el número de hipersuperficies algebraicas invariantes que ellos poseen.

La Teoría de Integrabilidad de Darboux para campos vectoriales polinomiales de \mathbb{R}^n muestra que la existencia de un número apropiado de hipersuperficies algebraicas invariantes de un campo vectorial determina una integral primera de tipo Darboux para dicho campo. Específicamente, Darboux [5] en 1878 demostró que si un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^n de grado m tiene por lo menos $\binom{m+n-1}{n} + 1$ hipersuperficies algebraicas inva-

riantes entonces posee una integral primera, que se puede calcular usando estas hipersuperficies algebraicas invariantes. En 1979 Jouanolou [8] mostró, utilizando técnicas sofisticadas de la Geometría Algebraica, que si el número de hipersuperficies algebraicas invariantes de un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^n de grado m es por lo menos $\binom{n+m-1}{n} + n$, entonces el campo vectorial tiene una integral primera racional, que también se puede calcular utilizando hipersuperficies algebraicas invariantes.

En [11] Llibre y Zhang extendieron la teoría de integrabilidad de Darboux de \mathbb{R}^{n+1} a campos vectoriales polinomiales regulares definidos sobre hipersuperficies algebraicas de \mathbb{R}^{n+1} (ver Teorema 1.2). Sin embargo, para el caso de las integrales primeras racionales de campos vectoriales definidos sobre hipersuperficies no conocíamos ninguna condición que permitiera determinar su existencia, como se puede observar si comparamos los Teoremas 1.1 y 1.2. Solamente para el caso particular de campos vectoriales polinomiales definidos sobre las cuádricas y el 2-toro, Llibre y Rodriguez [10] obtuvieron un resultado que permite obtener para estos casos una integral primera racional (ver Teorema 1.3).

El objetivo de este capítulo es extender el resultado de Jouanolou sobre la existencia de integrales primeras racionales de campos vectoriales polinomiales de \mathbb{R}^{n+1} a campos vectoriales polinomiales definidos sobre hipersuperficies algebraicas regulares de \mathbb{R}^{n+1} .

En [12] Llibre y Zhang dieron una prueba más corta y más fácil del resultado dado por Jouanolou usando solamente Álgebra Lineal.

Nuestro trabajo en este capítulo consiste en utilizar las ideas de [12] para ampliar el resultado de Jouanolou a los campos vectoriales polinomiales definidos sobre hipersuperficies algebraicas regulares de \mathbb{R}^{n+1} . Así nuestra extensión del resultado de Jouanolou completa los resultados estándar de la teoría de integrabilidad de Darboux caracterizando la existencia de integrales primeras racionales para dichos campos vectoriales.

En efecto todos los resultados presentados aquí pueden extenderse a campos vectoriales polinomiales en \mathbb{C}^{n+1} pero trabajando con integrales primeras meromórficas. Nosotros presentaremos los resultados en \mathbb{R}^{n+1} .

Este capítulo fue publicado en el artículo:

Y. BOLAÑOS Y J. LLIBRE, *Rational first integrals for polynomial vector fields on algebraic hypersurfaces of \mathbb{R}^{n+1}* , International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 22, No. 11 (2012) 1250270 (11 páginas).

El capítulo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2.1 damos algunas definiciones elementales. En la sección 2.2 presentamos algunos resultados auxiliares que necesitaremos después. En la sección 2.3 enunciamos y demostramos la extensión del resultado de Jouanolou a campos vectoriales polinomiales sobre hipersuperficies algebraicas regulares de \mathbb{R}^{n+1} . Finalmente aplicamos el resultado anterior a campos vectoriales definidos sobre una cuádrica o un 2-toro (sección 2.4) y a algunas otras superficies algebraicas (sección 2.5).

2.1. Conceptos básicos

Sea Ω una *hipersuperficie algebraica de grado d* dada por

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : G(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0\},$$

donde $G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es un polinomio de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ de grado d . Sin pérdida de generalidad, por el Teorema de la función implícita, podemos suponer que $x_{n+1} = g(x_1, \dots, x_n)$ para todo $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Omega$ excepto quizás en un conjunto de medida de Lebesgue cero, con $g : \pi(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 siendo $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección a lo largo del eje x_{n+1} , esto es $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$.

La hipersuperficie Ω es *regular* si el gradiente de G no se anula sobre Ω . En todo el capítulo todas las hipersuperficies que aparezcan serán hipersuperficies regulares algebraicas.

Sea $\mathcal{X} = (P_1, \dots, P_{n+1})$ un *campo vectorial polinomial* de \mathbb{R}^{n+1} dado por

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{n+1} P_i(x_1, \dots, x_{n+1}) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde P_i , para $i = 1, \dots, n+1$, es un polinomio de grado a lo más m . Diremos que \mathcal{X} *define un campo vectorial polinomial sobre la hipersuperficie regular* Ω si satisface que

$$\mathcal{X}G = (P_1, \dots, P_{n+1}) \cdot \nabla G = 0,$$

sobre todos los puntos de Ω .

El campo vectorial \mathcal{X} sobre Ω , excepto en un conjunto de medida de Lebesgue cero, también se escribirá usando $x_{n+1} = g(x_1, \dots, x_n)$ como $\tilde{\mathcal{X}} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)$ tal que $\tilde{\mathcal{X}}\tilde{G} = 0$. En general, la notación \tilde{f} aplicada a una función cualquiera $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ representa la función f restringida a Ω , es decir,

$$\tilde{f} = \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)),$$

donde $(x_1, \dots, x_n) \in \pi(A)$.

Sea B un abierto de \mathbb{R}^{n+1} (o respectivamente Ω). Denotaremos por μ_B la *medida de Lebesgue de \mathbb{R}^{n+1} (o respectivamente Ω) restringida a B* , así $\mu_B(A)$ es la medida de Lebesgue del conjunto $A \subset B$. Decimos que la medida de Lebesgue de A es *total en B* o simplemente *total* si $\mu_B(B \setminus A)$ es cero.

Sean $H_i : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, p$ funciones de clase C^1 definidas en \mathbb{R}^{n+1} excepto quizás en un conjunto de medida de Lebesgue cero. Decimos que H_1, \dots, H_p son *k -funcionalmente independientes en Ω* si el rango de la matriz $n \times p$ formada por los gradientes $\nabla \tilde{H}_1(x), \dots, \nabla \tilde{H}_p(x)$ es k para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \pi(\Omega)$ con la excepción quizás de un conjunto de medida de Lebesgue cero en $\pi(\Omega)$. Si H_1, \dots, H_p son *p -funcionalmente independientes en Ω* diremos simplemente que son *funcionalmente independientes en Ω* . Claro

está diremos que H_1, \dots, H_p son *funcionalmente dependientes* en Ω si no son funcionalmente independientes en Ω .

Sea $D \subset \Omega$ un abierto de medida de Lebesgue total en Ω . Diremos que la funci3n $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 es una *integral primera del campo vectorial polinomial \mathcal{X} sobre Ω* si $\mathcal{X}H = 0$ sobre D , o tambi3n $\tilde{\mathcal{X}}\tilde{H} = 0$ sobre $\pi(D)$. Si además H es una funci3n racional en las variables x_1, \dots, x_{n+1} de \mathbb{R}^{n+1} , entonces decimos que H es una *integral primera racional del campo vectorial \mathcal{X} sobre Ω* .

2.2. Resultados preliminares

Antes de presentar la extensi3n del resultado de Jouanolou a campos de vectores polinomiales sobre hipersuperficies algebraicas, que mencionamos en la introducci3n, necesitamos probar el siguiente resultado auxiliar.

Teorema 2.1. *Sean H_1, \dots, H_p integrales primeras de clase C^2 de un campo vectorial polinomial \mathcal{X} de \mathbb{R}^{n+1} sobre la hipersuperficie $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Supongamos que H_1, \dots, H_p definidas sobre un subconjunto D de Ω de medida total en Ω , son k -funcionalmente independientes sobre Ω . Sin p3rdida de generalidad podemos suponer que H_1, \dots, H_k son funcionalmente independientes.*

- (a) *Para cada $s \in \{k + 1, \dots, p\}$ existen funciones $C_{s1}(x), \dots, C_{sk}(x)$ de clase C^1 definidas sobre un subconjunto de medida de Lebesgue total en Ω tal que*

$$\nabla H_s(x) = C_{s1}(x)\nabla H_1(x) + \dots + C_{sk}(x)\nabla H_k(x).$$

- (b) *Para cada $s \in \{k + 1, \dots, p\}$ y $j \in \{1, \dots, k\}$ la funci3n $C_{sj}(x)$ (si no es constante) es una integral primera de \mathcal{X} sobre Ω .*

Demostraci3n. (a) Por hip3tesis los vectores gradientes $\nabla \tilde{H}_1(x), \dots, \nabla \tilde{H}_k(x)$ son linealmente independientes para todo $x \in \pi(D)$, y para cada $s \in \{k + 1, \dots, p\}$ el vector $\nabla \tilde{H}_s(x)$ es linealmente dependiente de $\nabla \tilde{H}_1(x), \dots, \nabla \tilde{H}_k(x)$ para todo x en un conjunto \tilde{D} de medida de Lebesgue total en $\pi(D)$. Por lo tanto existen funciones $\tilde{C}_{s1}(x), \dots, \tilde{C}_{sk}(x)$ definidas en \tilde{D} tal que

$$\nabla \tilde{H}_s(x) = \tilde{C}_{s1}(x)\nabla \tilde{H}_1(x) + \dots + \tilde{C}_{sk}(x)\nabla \tilde{H}_k(x).$$

De donde se obtiene el sistema de tamaño $n \times k$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{H}_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{H}_k(x)}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{H}_1(x)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial \tilde{H}_k(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_{s1}(x) \\ \vdots \\ \tilde{C}_{sk}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{H}_s(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \tilde{H}_s(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Como la dimensión de Ω es n , el número máximo de integrales primeras independientes del campo vectorial sobre Ω es a lo más $n-1$, esto es $k \leq n-1$. Así del sistema (2.1) podemos extraer un subsistema cuya matriz asociada $A_s(x)$ de tamaño $k \times k$ tiene determinante distinto de cero. Supondremos que esta matriz $A_s(x)$ está formada por las filas i_1, \dots, i_k de la matriz de (2.1). Podemos aplicar la Regla de Cramer y encontrar las soluciones del subsistema con matriz $A_s(x)$, esto es

$$\tilde{C}_{si}(x) = \frac{\det A_s^i(x)}{\det A_s(x)},$$

donde $A_s^i(x)$ es la matriz que se obtiene reemplazando la i -ésima columna de $A_s(x)$ por el vector columna $\left(\frac{\partial \tilde{H}_s(x)}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial \tilde{H}_s(x)}{\partial x_{i_k}} \right)^T$.

Dado que las funciones \tilde{H}_j con $j = 1, \dots, p$ son integrales primeras de clase C^2 y están definidas en el conjunto \tilde{D} de medida de Lebesgue total en Ω , las funciones $\tilde{C}_{s1}(x), \dots, \tilde{C}_{sk}(x)$ definidas sobre \tilde{D} son de clase C^1 , lo que completa la prueba de la afirmación (a).

(b) Sea $x \in \tilde{D}$. Para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, de (2.1) tenemos

$$\frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial x_i} = \tilde{C}_{s1} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_i} + \dots + \tilde{C}_{sk}(x) \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial x_j} = \tilde{C}_{s1} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_j} + \dots + \tilde{C}_{sk}(x) \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_j}.$$

Derivamos estas dos ecuaciones con respecto a x_j y x_i respectivamente y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial x_i} &= \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_i} + \tilde{C}_{s1} \frac{\partial^2 \tilde{H}_1}{\partial x_j \partial x_i} + \dots + \frac{\partial \tilde{C}_{sk}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_i} + \tilde{C}_{sk} \frac{\partial^2 \tilde{H}_k}{\partial x_j \partial x_i}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial x_j} &= \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_j} + \tilde{C}_{s1} \frac{\partial^2 \tilde{H}_1}{\partial x_i \partial x_j} + \dots + \frac{\partial \tilde{C}_{sk}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_j} + \tilde{C}_{sk} \frac{\partial^2 \tilde{H}_k}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Restando estas dos ecuaciones resulta

$$\frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \tilde{C}_{sk}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{C}_{sk}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_i} = 0. \quad (2.2)$$

Puesto que $k \leq n-1$, consideramos dos casos. Primero supongamos que $k = n-1$. De (2.2) obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\left(\frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \tilde{C}_{sk}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{C}_{sk}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_i} \right) \right. \\ &\cdot \left. \sum_{\sigma(k_1, k_2, \dots, k_{n-2})} (-1)^{\tau(ij k_1, k_2 \dots k_{n-2})} \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_{k_1}} \frac{\partial \tilde{H}_3}{\partial x_{k_2}} \dots \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_{k_{n-2}}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde σ es una permutación de $\{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$. El segundo sumando lo hacemos sobre todas las permutaciones posibles y τ evaluado sobre una permutación de $\{1, \dots, n\}$ es el número mínimo de transposiciones que llevan la permutación a la identidad.

La igualdad (2.3) la podemos escribir como

$$0 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_j} - \frac{\tilde{C}_{s1}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_i} \right) \sum_{\sigma(k_1, \dots, k_{n-2})} (-1)^{\tau(ij k_1 \dots k_{n-2})} \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_{k_1}} \dots \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_{k_{n-2}}} +$$

$$\dots + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial \tilde{C}_{sk}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_j} - \frac{\tilde{C}_{sk}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_i} \right) \sum_{\sigma(k_1, \dots, k_{n-2})} (-1)^{\tau(ij k_1 \dots k_{n-2})} \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_{k_1}} \dots \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_{k_{n-2}}}.$$

Usando la regla de Laplace para el cálculo de un determinante tenemos,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_j} - \frac{\tilde{C}_{s1}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_i} \right) \sum_{\sigma(k_1, \dots, k_{n-2})} (-1)^{\tau(ij k_1 \dots k_{n-2})} \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_{k_1}} \dots \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_{k_{n-2}}}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{H}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_3}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{H}_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

y para $l = 2, \dots, k$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial \tilde{C}_{sl}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{H}_l}{\partial x_j} - \frac{\tilde{C}_{sl}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{H}_l}{\partial x_i} \right) \sum_{\sigma(k_1, \dots, k_{n-2})} (-1)^{\tau(ij k_1 \dots k_{n-2})} \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_{k_1}} \dots \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_{k_{n-2}}}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{C}_{sl}}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{C}_{sl}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{C}_{sl}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{H}_l}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_l}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{H}_l}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{H}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_3}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{H}_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo tanto la ecuación (2.3) se puede escribir como

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{H}_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4)$$

De (2.4) tenemos que para cada $x \in \tilde{D}$, el vector $\nabla \tilde{C}_{s1}$ pertenece al espacio vectorial $(n-1)$ -dimensional generado por $\nabla \tilde{H}_1(x), \dots, \nabla \tilde{H}_{n-1}(x)$ denotado por $\mathcal{P}_{n-1}(x)$ puesto que $k = n-1$ y $\nabla \tilde{H}_1(x), \dots, \nabla \tilde{H}_k(x)$ son linealmente independientes.

Por la definición de integral primera en Ω , para cada $x \in \tilde{D}$ tenemos

$$\frac{\partial \tilde{H}_j(x)}{\partial x_1} \tilde{P}_1(x) + \cdots + \frac{\partial \tilde{H}_j(x)}{\partial x_n} \tilde{P}_n(x) = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, n-1.$$

Así, para cada $x \in \tilde{D}$ el vector $\tilde{\mathcal{X}}(x)$ es ortogonal al espacio $\mathcal{P}_{n-1}(x)$ y en consecuencia $\nabla \tilde{C}_{s1}$ es ortogonal a $\tilde{\mathcal{X}}(x)$, esto es

$$\frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_1} \tilde{P}_1(x) + \cdots + \frac{\partial \tilde{C}_{s1}(x)}{\partial x_n} \tilde{P}_n(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \tilde{D}.$$

Esto prueba que la función \tilde{C}_{s1} (si no es constante) es una integral primera del campo vectorial $\tilde{\mathcal{X}}$ definida sobre \tilde{D} , esto es, C_{s1} es una integral primera de \mathcal{X} sobre Ω .

Se pueden usar argumentos similares para probar que las funciones \tilde{C}_{sj} (si no son constantes) son también integrales primeras de \mathcal{X} sobre Ω para $j = 2, \dots, k$. Por lo tanto la afirmación (b) está probada para $k = n-1$.

Ahora trabajando de forma similar al caso $k = n-1$ supongamos $k < n-1$. Teniendo en cuenta que H_1, \dots, H_k son funcionalmente independientes en D tenemos que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{C}_{s1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k,$$

en lugar de (2.4). Esto significa que para todo $x \in \tilde{D}$, $\nabla \tilde{C}_{s1}$ pertenece al espacio vectorial k -dimensional generado por $\{\nabla \tilde{H}_1(x), \dots, \nabla \tilde{H}_k(x)\}$, denotado por $\mathcal{P}_k(x)$.

Puesto que las funciones $\tilde{H}_j(x)$ para $j = 1, \dots, k$ son integrales primeras del campo vectorial $\tilde{\mathcal{X}}$, el vector $\tilde{\mathcal{X}}(x)$ es ortogonal a $\nabla \tilde{C}_{s1}(x)$ para cada $x \in D$. Por lo tanto la función \tilde{C}_{s1} (si no es constante) es una integral primera del campo \mathcal{X} sobre Ω .

Utilizando argumentos similares se puede mostrar que las funciones \tilde{C}_{sj} para $j = 2, \dots, k$, son también integrales primeras de \mathcal{X} sobre Ω . Esto completa la demostración de la parte (b) del teorema. □

2.3. Extensión del resultado de Jouanolou

Como hemos mencionado antes, Jouanolou [8] en 1979, usando herramientas de la Geometría Algebraica, mostró que si el número de hipersuperficies algebraicas invariantes de un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^n de grado m es por lo menos $\binom{n+m-1}{n} + n$, entonces el campo vectorial tiene una integral primera racional. En [12] Llibre y Zhang usando solamente el Álgebra Lineal dieron una demostración más corta y fácil que la de Jouanolou.

A continuación ampliamos el resultado de Jouanolou a campos de vectores polinomiales definidos sobre hipersuperficies regulares algebraicas, extendiendo la demostración de [12] a estos campos. Esto es proporcionaremos las condiciones necesarias para establecer la existencia de una integral primera racional para campos vectoriales polinomiales de \mathbb{R}^{n+1} sobre hipersuperficies regulares algebraicas.

Sea $f(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}] \setminus \mathbb{C}$. Decimos que $\{f = 0\} \cap \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una *hipersuperficie algebraica invariante del campo vectorial \mathcal{X} sobre Ω* (o simplemente una *hipersuperficie algebraica invariante sobre Ω*) si satisface

- (i) Existe un polinomio $K \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ llamado el *cofactor* de $f = 0$ sobre Ω tal que

$$\mathcal{X}f = \sum_{i=1}^{n+1} P_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf \quad \text{sobre } \Omega;$$

- (ii) las dos hipersuperficies $f = 0$ y Ω se intersecan transversalmente; es decir, $\nabla G \wedge \nabla f \neq 0$ sobre la hipersuperficie $\{f = 0\} \cap \Omega$, donde \wedge denota el producto vectorial de dos vectores de \mathbb{R}^{n+1} .

Observamos que en la definición de hipersuperficie algebraica invariante $f = 0$ permitimos que ésta sea compleja, es decir $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}] \setminus \mathbb{C}$. Esto se debe a que algunas veces, para campos polinomiales reales, la existencia de una integral primera puede ser forzada por la existencia de hipersuperficies algebraicas invariantes complejas. Así, algunas veces la integrabilidad real se puede deber a la estructura compleja subyacente. Si el campo vectorial polinomial \mathcal{X} es real y tiene una hipersuperficie algebraica invariante

compleja, entonces sabemos que su conjugada debe ser también una hipersuperficie algebraica invariante. Como la integral primera que proporciona la Teoría de Darboux usa pares conjugados de dichas funciones la integral primera obtenida es real.

Sean f y g dos polinomios de $\mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Decimos que f y g están relacionados, $f \sim g$, si coinciden sobre Ω , esto es, si existe un polinomio h de grado a lo más $m - d - 1$ tal que $f - g = hG$. Esta relación define el espacio cociente $\mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]/\sim$. Denotamos su dimensión, llamada la *dimensión de $\mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ sobre Ω* , por $N = N(n, m, d)$.

Proposición 2.2. *La dimensión de $\mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]/\sim$ es*

$$N = N(n, m, d) = \binom{n+m}{n+1} - \binom{n+m-d}{n+1}.$$

Demostración. Sean f y g polinomios en $\mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Entonces $f \sim g$ si $f - g = hG$ para algún polinomio h de grado a lo más $m - d - 1$. El conjunto de polinomios h que satisface esta propiedad forma el subespacio lineal $\mathbb{C}_{m-d-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ de $\mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Así la relación \sim determina el espacio cociente $\mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]/\mathbb{C}_{m-d-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ cuyas clases de equivalencia vienen dadas por

$$[g] = \{f \in \mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}] : f - g = hG\}.$$

Así,

$$\dim \mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]/\mathbb{C}_{m-d-1}[x_1, \dots, x_{n+1}] = \dim \mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}] - \dim \mathbb{C}_{m-d-1}[x_1, \dots, x_{n+1}].$$

Ahora usando el resultado conocido que $\mathbb{C}_r[x_1, \dots, x_{n+1}]$ es un espacio \mathbb{C} -lineal de dimensión $\binom{n+1+r}{r} = \binom{n+1+r}{n+1}$ terminamos la prueba de la proposición. \square

Decimos que una *hipersuperficie algebraica invariante $f = 0$ es irreducible en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$* si el polinomio f es irreducible en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$.

Ahora mostraremos el resultado principal de este capítulo para el que hemos extendido las ideas de [12]. Este teorema proporciona las condiciones que determinan si un campo vectorial polinomial definido sobre una hipersuperficie algebraica invariante Ω admite o no una integral primera racional sobre Ω .

Teorema 2.3. *Sea Ω una hipersuperficie algebraica regular de grado d en \mathbb{R}^{n+1} . Un campo vectorial polinomial \mathcal{X} sobre Ω de grado m admite $N(n, m, d) + n$ hipersuperficies algebraicas invariantes irreducibles en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ si, y sólo si \mathcal{X} tiene una integral primera racional sobre Ω .*

Demostración. Primero supongamos que el campo vectorial polinomial \mathcal{X} tiene una integral primera racional H sobre Ω dada por

$$H(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{g_1(x_1, \dots, x_{n+1})}{g_2(x_1, \dots, x_{n+1})}, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Omega,$$

con $g_1, g_2 \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ y $h_1 = H(y_1, \dots, y_{n+1})$ para algún $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \Omega$. Definamos

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = g_1(x_1, \dots, x_{n+1}) - h_1 g_2(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

Notamos que todos los puntos (x_1, \dots, x_{n+1}) contenidos en la hipersuperficie $f = 0$ satisfacen que $H(x_1, \dots, x_{n+1}) = h_1$. Dado que H es una integral primera de \mathcal{X} sobre Ω , sobre las trayectorias del campo contenidas en Ω , H se mantiene constante. Así, los puntos sobre $f = 0$ corresponden a trayectorias del campo vectorial \mathcal{X} sobre Ω . Esto es, la hipersuperficie algebraica $f = 0$ está formada por trayectorias de \mathcal{X} , con lo cual obtenemos que $f = 0$ es una hipersuperficie algebraica invariante de \mathcal{X} sobre Ω . Puesto que para cada $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \Omega$ podemos definir una hipersuperficie algebraica invariante del campo vectorial \mathcal{X} sobre Ω , obtenemos la prueba de la parte “si” del teorema.

Ahora probaremos la parte “sólo si”. Sean $f_i(x) = 0$ para $i = 1, \dots, N+n$ hipersuperficies algebraicas invariantes del campo vectorial polinomial \mathcal{X} sobre Ω con cofactor $K_i(x)$. Entonces $\mathcal{X}f_i(x) = K_i(x)f_i(x)$ sobre Ω , esto es $\mathcal{X}f_i(x)|_\Omega = K_i(x)|_\Omega f_i(x)|_\Omega$. Por lo tanto podemos asumir que $K_i(x) \in \mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]/\sim$. Denotamos por q la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]/\sim$ generado por $\{K_1(x), \dots, K_{N+n}(x)\}$. Entonces, por la Proposición 2.2 tenemos que $q \leq N$. Con el objetivo de simplificar la prueba y la notación asumiremos que $q = N$ y que $K_1(x), \dots, K_N(x)$ son linealmente independientes en $\mathbb{C}_{m-1}[x_1, \dots, x_{n+1}]/\sim$. Cuando $q < N$ la prueba podría ser similar usando los mismos argumentos.

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ existe un vector $(\sigma_{j1}, \dots, \sigma_{jN}, 1) \in \mathbb{C}^{N+1}$ tal que

$$\sigma_{j1}K_1(x) + \dots + \sigma_{jN}K_N(x) + K_{N+j}(x) = 0, \quad (2.5)$$

sobre Ω . De la definición de hipersuperficie algebraica invariante $\{f_j = 0\}$ tenemos que $K_j = \mathcal{X}f_j/f_j$. Entonces de (2.5) obtenemos

$$\sigma_{j1} \frac{\mathcal{X}(f_1(x))}{f_1(x)} + \dots + \sigma_{jN} \frac{\mathcal{X}(f_N(x))}{f_N} + \frac{\mathcal{X}(f_{N+j}(x))}{f_{N+j}(x)} = 0.$$

Como $\mathcal{X}(f_j^{\sigma_j}) = \sigma_j f_j^{\sigma_j-1} \mathcal{X}(f_j)$ tenemos $\frac{\mathcal{X}(f_j^{\sigma_j})}{f_j^{\sigma_j}} = \sigma_j \frac{\mathcal{X}(f_j)}{f_j}$. Luego

$$\frac{\mathcal{X}(f_1^{\sigma_{j1}})}{f_1^{\sigma_{j1}}} + \dots + \frac{\mathcal{X}(f_N^{\sigma_{jN}})}{f_N^{\sigma_{jN}}} + \frac{\mathcal{X}(f_{N+j})}{f_{N+j}} = 0,$$

$$\mathcal{X}(\log f_1^{\sigma_{j1}}) + \dots + \mathcal{X}(\log f_N^{\sigma_{jN}}) + \mathcal{X}(\log f_{N+j}) = 0,$$

$$\mathcal{X}(\log(f_1^{\sigma_{j1}} \dots f_N^{\sigma_{jN}} f_{N+j})) = 0,$$

para $j = 1, \dots, n$ sobre Ω . Esto significa que $H_j = \log(f_1^{\sigma_{j1}} \dots f_N^{\sigma_{jN}} f_{N+j})$ para $j = 1, \dots, n$ son integrales primeras del campo \mathcal{X} sobre algún subconjunto conveniente $D_1 \subset \Omega$ con medida de Lebesgue total en Ω .

Veamos que las n integrales primeras H_j 's son funcionalmente dependientes sobre cualquier subconjunto de Ω con medida de Lebesgue positiva. De lo contrario existe un subconjunto medible de Lebesgue $D_2 \subset \Omega$ con medida positiva en Ω tal que las funciones H_j 's son funcionalmente independientes en D_2 . Entonces de la definición de integral primera tenemos

$$\frac{\partial \tilde{H}_j(x)}{\partial x_1} \tilde{P}_1(x) + \dots + \frac{\partial \tilde{H}_j(x)}{\partial x_n} \tilde{P}_n(x) = 0,$$

para $j = 1, \dots, n$ y para todo $x \in \pi(D_2)$. Además, de la independencia funcional este sistema lineal homogéneo de tamaño $n \times n$ tiene solución única $\tilde{P}_j(x) = 0$ para $j = 1, \dots, n$ sobre $\pi(D_2)$, y en consecuencia el campo vectorial $\mathcal{X} = 0$ en Ω . Esto contradice el hecho que \mathcal{X} tiene grado $m > 0$.

Definimos $r(x) = \text{rango}\{\nabla \tilde{H}_1(x), \dots, \nabla \tilde{H}_n(x)\}$ y $k = \text{máx}\{r(x) : x \in \pi(D_1)\}$. Entonces existe un subconjunto abierto \mathcal{O} de $\pi(D_1)$ tal que $k = r(x)$ para todo $x \in \mathcal{O}$ y $k < n$. Así, las n integrales primeras H_j 's son k -funcionalmente independientes sobre Ω . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k,$$

para todo $x \in \mathcal{O}$.

Por el Teorema 2.1 (a) para cada $x \in \mathcal{O} \subset D_1$ existen $C_{s1}(x), \dots, C_{sk}(x)$ tales que

$$\nabla H_s(x) = C_{s1}(x) \nabla H_1(x) + \dots + C_{sk}(x) \nabla H_k(x), \quad (2.6)$$

para cada $s = k+1, \dots, n$. Y por el Teorema 2.1 (b) tenemos que las funciones $C_{sj}(x)$ (si no son constantes) para $j \in \{1, \dots, k\}$ son integrales primeras de \mathcal{X} sobre $\mathcal{O} \subset \Omega$.

Como $H_i = \log(f_1^{\sigma_{i1}} \dots f_N^{\sigma_{iN}} f_{N+i})$ tenemos que ∇H_i es un vector de funciones racionales. Además los vectores $\nabla H_1(x), \dots, \nabla H_k(x)$ son linealmente independientes para cada $x \in \mathcal{O}$ entonces resolviendo el sistema (2.6) obtenemos una única solución (C_{s1}, \dots, C_{sk}) sobre \mathcal{O} para cada $s = k+1, \dots, n$. De modo que cada función C_{sj} para $j = 1, \dots, k$ y $s = k+1, \dots, n$ es racional. Como \mathcal{O} es un subconjunto abierto de Ω y C_{sj} es racional, debería satisfacer la última ecuación en Ω excepto quizás en un subconjunto de medida de Lebesgue cero donde C_{sj} no está definida. Y de aquí si alguna de las funciones C_{sj} 's no es constante, ésta es una integral primera racional de \mathcal{X} sobre Ω .

Ahora probaremos que alguna función C_{sj} no es constante. La ecuación (2.6) implica que si todas las funciones C_{s1}, \dots, C_{sk} son constantes entonces

$$H_s(x) = C_{s1}H_1(x) + \dots + C_{sk}H_k(x) + \log C_s,$$

para $s = k + 1, \dots, n$. De modo que

$$\begin{aligned} \log(f_1^{\sigma_{s1}} \dots f_N^{\sigma_{sN}} f_{N+s}) &= C_{s1} \log(f_1^{\sigma_{11}} \dots f_N^{\sigma_{1N}} f_{N+1}) + \dots \\ &+ C_{sk} \log(f_1^{\sigma_{k1}} \dots f_N^{\sigma_{kN}} f_{N+k}) + \log C_s. \end{aligned}$$

De esta última ecuación obtenemos

$$f_1^{\sigma_{s1}} \dots f_N^{\sigma_{sN}} f_{N+s} = (f_1^{\sigma_{11}} \dots f_N^{\sigma_{1N}} f_{N+1})^{C_{s1}} \dots (f_1^{\sigma_{k1}} \dots f_N^{\sigma_{kN}} f_{N+k})^{C_{sk}} C_s,$$

y por tanto

$$f_{N+s} = C_s f_1^{C_{s1}\sigma_{11} + \dots + C_{sk}\sigma_{k1} - \sigma_{s1}} \dots f_N^{C_{s1}\sigma_{1N} + \dots + C_{sk}\sigma_{kN} - \sigma_{sN}} f_{N+1}^{C_{s1}} \dots f_{N+k}^{C_{sk}},$$

para todo $s \in \{k + 1, \dots, n\}$. Esto contradice el hecho que los polinomios f_1, \dots, f_{N+n} son irreducibles distintos por pares. \square

2.4. Cuando Ω es una cuádrica o un 2-toro

Sabemos que las cuádricas pueden ser clasificadas en diecisiete tipos. Existen cinco tipos de cuádricas imaginarias, llamadas el elipsoide, cono y cilindro imaginario, dos planos que se intersectan y dos planos paralelos. Dado que estamos trabajando con campos vectoriales polinomiales reales sobre superficies reales, omitiremos estas cinco cuádricas previas. De las doce cuádricas reales existen tres que son formadas por planos, dos planos que se intersectan, dos planos paralelos y un plano doble. Puesto que el estudio de la teoría de integrabilidad de Darboux de los campos vectoriales polinomiales sobre estas superficies se reduce al estudio clásico de la teoría de integrabilidad de Darboux de campos vectoriales polinomiales planos, omitimos estos tres tipos de cuádricas. En resumen solamente consideramos las nueve cuádricas restantes. En la Figura 1.1 se presentan estas nueve cuádricas y sus formas canónicas. Notemos que mediante cambios afines la ecuación que define una cuádrica se puede escribir en su forma canónica. Por consiguiente, el estudio de la teoría de integrabilidad de Darboux de campos vectoriales polinomiales sobre estas nueve cuádricas se puede restringir a tomar para cada una de estas cuádricas su forma canónica.

En el Teorema 1.3 del capítulo 1 presentamos las extensiones de la Teoría de integrabilidad de Darboux a campos vectoriales definidos sobre una cuádrica o sobre un 2-toro dando así las condiciones que garantizan la existencia de una integral primera racional de un campo vectorial polinomial definido sobre una de estas superficies. Ahora aplicaremos el Teorema 2.3 cuando Ω es una cuádrica ($d = 2$) o un 2-toro ($d = 4$) y verificaremos que estos dos

resultados coinciden. Esto es, calcularemos el número de curvas algebraicas invariantes necesarias para obtener una integral primera racional de un campo vectorial polinomial \mathcal{X} de grado m en \mathbb{R}^3 cuando éste se define sobre una cuádrica o sobre un 2-toro.

Por la Proposición 2.2, $N(n, m, d) = \binom{n+m}{n+1} - \binom{n+m-d}{n+1}$. Para las cuádricas, $n+1 = 3$, $d = 2$ y $m \geq 3$, con lo cual

$$N(2, m, 2) = \binom{2+m}{3} - \binom{m}{3} = m^2.$$

En el caso del 2-toro, $n+1 = 3$, $d = 4$, $m \geq 5$ y así

$$N(2, m, 4) = \binom{2+m}{3} - \binom{m-2}{3} = 2m^2 - 4m + 4.$$

Del Teorema 2.3 resulta que el número de curvas algebraicas invariantes que garantizan la existencia de una integral primera racional es $N(2, m, 2) + 2 = m^2 + 2$ para el caso de un campo vectorial polinomial de grado $m \geq 3$ definido sobre una cuádrica. Si el campo vectorial polinomial de grado $m \geq 5$ se define sobre un 2-toro el número mínimo de curvas algebraicas invariantes es $N(2, m, 4) + 2 = 2m^2 - 4m + 6$. Estos resultados coinciden con los del Teorema 1.3.

2.5. Algunas superficies algebraicas Ω

Ahora mostramos algunos ejemplos de superficies algebraicas que nos permiten aplicar el Teorema 2.3 a campos vectoriales en \mathbb{R}^3 definidos sobre estas superficies. En cada uno de los casos presentados queremos determinar el número de curvas algebraicas invariantes necesarias para garantizar la existencia de una integral primera racional.

2.5.1. Cúbica de Fermat

Consideremos que $\Omega = \{G = 0\}$ es la superficie cúbica de Fermat [15], esto es $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Es fácil ver que esta superficie es regular en \mathbb{R}^3 dado que ∇G se anula sólo en el origen pero este punto no está sobre la superficie. Esta superficie se representa en la Figura 1.3.

Usando la Proposición 2.2 calculamos $N(n, m, d)$. En este caso tenemos que $n = 2$, $m \geq 4$ y $d = 3$. Así,

$$\begin{aligned} N(2, m, 3) &= \binom{m+2}{3} - \binom{m-1}{3} \\ &= \frac{(m+2)(m+1)m}{6} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} \\ &= \frac{1}{2}(3m^2 - 3m + 2). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Entonces de (2.7) y por el Teorema 2.3 podemos concluir que el número de curvas algebraicas invariantes necesarias para que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} de grado $m \geq 4$ definido sobre la superficie cúbica de Fermat posea una integral primera racional es $N(2, m, 3) + 2 = \frac{1}{2}(3m^2 - 3m + 6)$.

2.5.2. Superficie de Clebsch

Sea $\Omega = \{G = 0\}$ la superficie de Clebsch [16] dada por

$$x^3 + y^3 + z^3 + 1 - (x + y + z + 1)^3 = 0.$$

Su gradiente es

$$\nabla G = (3x^2 - 3(1 + x + y + z)^2, 3y^2 - 3(1 + x + y + z)^2, 3z^2 - 3(1 + x + y + z)^2),$$

el cual se anula en los puntos $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$. Puesto que ninguno de estos puntos están sobre la superficie obtenemos que G es regular. Esta superficie se presenta en la Figura 1.3.

En este caso tenemos $n = 2$, $m \geq 4$ y $d = 3$. Así $N(n, m, d)$ corresponde al mismo valor obtenido para la superficie de Fermat en (2.7). Entonces por el Teorema 2.3 podemos concluir que el número de curvas algebraicas invariantes necesarias para que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} de grado $m \geq 4$ definido sobre la superficie de Clebsch posea una integral primera racional es $N(2, m, 3) + 2 = \frac{1}{2}(3m^2 - 3m + 6)$.

2.5.3. Superficie de Goursat

Sea $\Omega = \{G = 0\}$ la superficie de Goursat [17] dada por

$$x^4 + y^4 + z^4 - (x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

Su gradiente es el vector

$$\nabla G = (-2x + 4x^3, -2y + 4y^3, -2z + 4z^3),$$

el cual se anula en 27 puntos que no pertenecen a la superficie. Por lo tanto Ω es una superficie regular. Esta superficie está representada en la Figura 1.3. Aquí tenemos que $n = 2$, $m \geq 5$ y $d = 4$, de modo que $N(n, m, d)$ corresponde al valor encontrado para el caso del 2-toro, es decir $N(2, m, 4) = 2m^2 - 4m + 4$.

Entonces el número de curvas algebraicas invariantes necesarias para que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} de grado $m \geq 5$ definido sobre la superficie de Goursat Ω posea una integral primera racional es $N(2, m, 4) + 2 = 2m^2 - 4m + 6$, de acuerdo al Teorema 2.3.

2.5.4. Superficie Racor

Veamos que la superficie Racor $G(x, y, z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 1$ es regular en \mathbb{R}^3 . Su gradiente es $\nabla G = (2x(y^2 + z^2), 2y(x^2 + z^2), 2z(x^2 + y^2))$. Puesto que ∇G no se anula en ningún punto sobre la superficie obtenemos que G es regular. Esta superficie está representada en la Figura 1.3.

En este caso tenemos que $n = 2$, $m \geq 5$ y $d = 4$. Así, el número de curvas algebraicas invariantes necesarias para que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} de grado $m \geq 5$ definido sobre la superficie algebraica G posea una integral primera racional es el mismo que obtuvimos para la superficie de Goursat.

Integrales primeras racionales de campos vectoriales polinomiales
40 sobre hipersuperficies regulares algebraicas de \mathbb{R}^{n+1}

2.6 Referencias

- [1] R.F.S. ANDRADE Y A. RAUTH, *The Lorenz model and the method of Carleman embedding*, Phys. Lett. A **82** (1981), 276–278.
- [2] T.C. BOUNTIS, A. RAMANI, B. GRAMMATICOS Y B. DORIZZI, *On the complete and partial integrability of non-Hamiltonian systems*, Phys. A **128** (1984), 268–288.
- [3] T. CARLEMAN, *Application de la théorie des équations intégrales linéaires aux systèmes d'équations différentielles non linéaires*, Acta Math. **59** (1932), 63–87.
- [4] F. CANTRIJN Y W. SARLET, *Generalizations of Noether's theorem in classical mechanics*, SIAM Rev. **23** (1981), 467–494.
- [5] G. DARBOUX, *De l'emploi des solutions particulières algébriques dans l'intégration des systèmes d'équations différentielles algébriques*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **86** (1878), 533–536, 584–589, 1012–1014.
- [6] H.J. GIACOMINI, C.E. REPETTO Y O.P. ZANDRON, *Integrals of motion of three-dimensional non Hamiltonian dynamical systems*, J. Phys. A **24** (1991), 4567–4574.
- [7] J. HIETARINTA, *Direct methods for the search of the second invariant*, Phys. Rep. **147** (1987), 87–154.
- [8] J.P. JOUANOLOU, *Equations de Pfaff algébriques*, Lectures Notes in Mathematics 708, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1979.
- [9] P.D. LAX, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Commun. Pure Appl. Math. **21** (1968), 467–490.
- [10] J. LLIBRE Y G. RODRÍGUEZ, *Darboux integrability of polynomial vector fields on 2-dimensional surfaces*, J. of Bifurcation and Chaos **12** (2002), 2821–2833.
- [11] J. LLIBRE Y X. ZHANG, *Darboux integrability of real polynomial vector fields on regular algebraic hypersurfaces*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **51** (2002), 109–126.

-
- [12] J. LLIBRE Y X. ZHANG, *Rational first integrals in the Darboux theory of integrability in \mathbb{C}^n* , Bulletin des Sciences mathématiques **134** (2010), 189–195.
- [13] P.J. OLVER, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, New York, 1986.
- [14] J.M. STRELCYN Y S. WOJCIECHOWSKI, *A method of finding integrals for three-dimensional dynamical systems*, Phys. Lett. A **133** (1988), 207–212.
- [15] L. NESS, *Curvature on the Fermat cubic*, Duke Mathematical Journal **45** (4) (1978), 797–807.
- [16] F. HIRZEBRUCH, *The Hilbert modular group for the field $Q(\sqrt{5})$, and the cubic diagonal surface of Clebsch and Klein*, Russian Math. Surveys **31** (5) (1976), 96–110,
- [17] E. GOURSAT, *Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier*. Ann. Sci. École Norm. Sup. **4** (1897), 159–200.

Capítulo 3

Sobre el número de esferas n -dimensionales invariantes en campos vectoriales polinomiales de \mathbb{R}^{n+1}

Sea \mathcal{X} el *campo vectorial polinomial* definido por

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{n+1} P_i(x_1, \dots, x_{n+1}) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde cada P_i es un polinomio de grado m_i en las variables x_1, \dots, x_{n+1} con coeficientes en \mathbb{R} . Sea $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{n+1})$ el *grado* del campo polinomial, asumiremos sin pérdida de generalidad que $m_1 \geq \dots \geq m_{n+1}$. Recordamos que el *sistema diferencial polinomial* en \mathbb{R}^{n+1} de grado \mathbf{m} asociado al campo \mathcal{X} es

$$\frac{dx_i}{dt} = P_i(x_1, \dots, x_{n+1}), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Hemos visto en la sección 1.1 (capítulo 1) que la existencia de un número de hipersuperficies algebraicas invariantes suficientemente grande garantiza la existencia de una integral primera para un campo vectorial polinomial \mathcal{X} que puede ser calculada explícitamente. Como es usual $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ denota el anillo de polinomios en las variables x_1, \dots, x_{n+1} con coeficientes en \mathbb{C} . Recordamos que una *hipersuperficie algebraica invariante* para \mathcal{X} es una hipersuperficie $f = f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$ con $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ tal que para algún polinomio $K \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ tenemos que $\mathcal{X}f = \nabla f \cdot \mathcal{X} = Kf$. El polinomio K es el *cofactor* de la hipersuperficie algebraica invariante $f = 0$. Notamos que si el campo vectorial tiene grado \mathbf{m} entonces cualquier cofactor tiene a lo más grado $m_1 - 1$. Si el grado de f es 1 la hipersuperficie $f = 0$ es un hiperplano invariante. Aquí nosotros estudiaremos las hipersuperficies algebraicas $f = (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_{n+1} - a_{n+1})^2 - r^2 = 0$ que sean *esferas n -dimensionales invariantes*.

En la sección 3.1 introducimos el concepto de hipersuperficie algebraica extáctica. Luego presentamos algunos resultados actuales sobre el número máximo de hiperplanos invariantes que puede tener un campo vectorial en \mathbb{R}^{n+1} (sección 3.2) y finalmente, en la sección 3.3, proporcionamos el número máximo de circunferencias invariantes de campos vectoriales bidimensionales y su extensión a dimensión $n + 1$.

El trabajo desarrollado en este capítulo ha sido publicado en el artículo:

Y. BOLAÑOS Y J. LLIBRE, *On the number of n -dimensional invariant spheres in polynomial vector fields of \mathbb{C}^{n+1}* , J. Applied Analysis and Computation **1** (2011), 173–182.

3.1. Hipersuperficie algebraica extáctica

Introducimos una de las mejores herramientas para buscar hipersuperficies algebraicas invariantes. Sea W un subespacio vectorial del espacio de los polinomios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ generado por los polinomios v_1, \dots, v_l . La *hipersuperficie algebraica extáctica* de \mathcal{X} asociada a W es

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_l \\ \mathcal{X}(v_1) & \mathcal{X}(v_2) & \cdots & \mathcal{X}(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathcal{X}^{l-1}(v_1) & \mathcal{X}^{l-1}(v_2) & \cdots & \mathcal{X}^{l-1}(v_l) \end{pmatrix} = 0, \quad (3.1)$$

donde $\{v_1, \dots, v_l\}$ es una base de W , $l = \dim(W)$ es la dimensión de W y $\mathcal{X}^j(v_i) = \mathcal{X}^{j-1}(\mathcal{X}(v_i))$. Por las propiedades de los determinantes y de la derivación sabemos que la definición de hipersuperficie algebraica extáctica es independiente de la base de W escogida.

La noción de hipersuperficie algebraica extáctica $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es importante aquí por dos razones. Primero porque nos permite detectar cuando una hipersuperficie algebraica $f = 0$ con $f \in W$ es invariante por el campo vectorial polinomial \mathcal{X} (ver la próxima proposición [3] para campos vectoriales polinomiales en \mathbb{C}^2 ; la extensión a \mathbb{R}^{n+1} es fácil y es la que aquí presentamos). Segundo porque nos permite definir y calcular fácilmente la multiplicidad de las hipersuperficies algebraicas invariantes.

Proposición 3.1. *Sea \mathcal{X} un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^{n+1} y sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ finitamente generado con $\dim(W) > 1$. Entonces para cada hipersuperficie algebraica invariante $f = 0$ del campo vectorial \mathcal{X} , con $f \in W$, f es un factor del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$.*

Demostración. Sea $f = 0$ una hipersuperficie algebraica invariante de \mathcal{X} tal que $f \in W$. Como hemos observado, la elección de la base de W no juega ningún papel en la definición de la hipersuperficie extáctica, por consiguiente podemos tomar $v_1 = f$ en (3.1).

Probamos por inducción que $\mathcal{X}^k(f) = K_k f$ donde K_k es un polinomio para $k = 1, 2, \dots$. En efecto, si $k = 1$ tenemos que $\mathcal{X}(f) = K_1 f$ siendo K_1 el cofactor de la hipersuperficie algebraica invariante $f = 0$. Supongamos que $\mathcal{X}^k(f) = K_k f$ donde K_k es un polinomio, y veamos el caso $k + 1$. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^{k+1}(f) &= \mathcal{X}(\mathcal{X}^k(f)) = \mathcal{X}(K_k f) = \mathcal{X}(K_k) f + K_k \mathcal{X}(f) \\ &= (\mathcal{X}(K_k) + K_k K_k) f = K_{k+1} f.\end{aligned}$$

Por consiguiente f aparece en todos los términos de la primera columna de la matriz de (3.1) y por lo tanto f es un factor del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$. \square

3.2. Hiperplanos invariantes

El número de rectas invariantes para campos vectoriales polinomiales en \mathbb{R}^2 ha sido estudiado por varios autores, ver [1]. Conocemos que para campos vectoriales polinomiales de grado $(2, 2)$ el número máximo de rectas invariantes es 5. Zhang Xiang [7] y Sokulski [6] probaron que el número máximo de rectas invariantes reales para campos vectoriales polinomiales en \mathbb{R}^2 de grados $(3, 3)$ y $(4, 4)$ son 8 y 9 respectivamente. Posteriormente, Llibre y Medrado [4] generalizaron estos resultados para campos vectoriales polinomiales en \mathbb{C}^{n+1} . Los dos teoremas siguientes muestran estos resultados, pero antes de presentarlos daremos dos definiciones.

La *multiplicidad de un hiperplano invariante* $f = 0$ es el mayor entero positivo k tal que f^k divide al polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ con W generado por $1, x_1, \dots, x_{n+1}$ (ver [3] y [5]). Cuando estudiamos el número máximo de hiperplanos invariantes que pasan por un mismo punto de un campo vectorial polinomial \mathcal{X} , haciendo una traslación de este punto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que éste es el origen. Entonces la *multiplicidad de un hiperplano invariante que pasa por el origen* se define como el mayor entero positivo k tal que f^k divide al polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ con W generado por x_1, \dots, x_{n+1} .

Teorema 3.2. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{C}^{n+1} con $n \geq 1$ de grado $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{n+1})$ con $m_1 \geq \dots \geq m_{n+1}$ tiene un número finito de hiperplanos invariantes.*

- (a) *El número de hiperplanos invariantes de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más*

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k \right) + \binom{n+1}{2} (m_1 - 1). \quad (3.2)$$

- (b) *El número de hiperplanos invariantes paralelos de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más m_1 .*

- (c) *El número de hiperplanos invariantes diferentes de \mathcal{X} que pasan por un mismo punto teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más*

$$\left(\sum_{k=1}^n m_k \right) + \binom{n}{2} (m_1 - 1) + 1. \quad (3.3)$$

Teorema 3.3. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^{n+1} con $n \geq 1$ de grado $\mathbf{m} = (m, \dots, m)$ tiene un número finito de hiperplanos invariantes.*

- (a) *El número de hiperplanos invariantes de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más*

$$(n+1)m + \binom{n+1}{2} (m-1),$$

y esta cota superior es alcanzada por algún \mathcal{X} .

- (b) *El número de hiperplanos invariantes paralelos de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más m , y esta cota superior es alcanzada por algún \mathcal{X} .*

- (c) *El número de hiperplanos invariantes diferentes de \mathcal{X} que pasan por un mismo punto teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más*

$$nm + \binom{n}{2} (m-1) + 1,$$

y esta cota superior es alcanzada por algún \mathcal{X} .

3.3. Esferas invariantes

En la sección anterior presentamos los resultados conocidos sobre el número máximo de hiperplanos invariantes que admite un campo vectorial polinomial, ahora estudiaremos el número máximo de esferas n -dimensionales invariantes que un campo vectorial polinomial puede alcanzar.

3.3.1. Circunferencias invariantes

Queremos encontrar una cota superior para el número máximo de esferas n -dimensionales invariantes que un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^{n+1} puede tener. Comenzaremos este estudio analizando primero el caso \mathbb{R}^2 . Es decir, dado un campo vectorial polinomial $\mathcal{X} = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ con P y Q polinomios en x e y de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$, $m_1 \geq m_2$ y $f(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 =$

0 una circunferencia de centro (a, b) y radio $r > 0$, vamos a encontrar una cota superior para el número de circunferencias invariantes f del campo vectorial polinomial \mathcal{X} y determinar si esta cota es alcanzable o no dentro de la clase de todos los campos vectoriales polinomiales con grado (m_1, m_2) .

La *multiplicidad de una circunferencia invariante* $f = 0$ es el mayor entero positivo k tal que f^k divide al polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ con W generado por $1, x^2, x, y^2, y$. Cuando estudiamos el número máximo de circunferencias invariantes concéntricas de un campo vectorial polinomial \mathcal{X} , haciendo una traslación del centro podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que el centro es el origen. Entonces la *multiplicidad de una circunferencia invariante con centro en el origen* $f = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ es el mayor entero positivo k tal que f^k divide al polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ con W generado por $1, x^2, y^2$.

Teorema 3.4. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^2 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ con $m_1 \geq m_2$ tiene un número finito de circunferencias invariantes.*

- (a) *El número de circunferencias invariantes de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más $4m_1 + m_2 - 2$.*
- (b) *El número de circunferencias invariantes concéntricas de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más $m_1 + [(m_2 + 1)/2]$. Aquí $[x]$ denota la función parte entera de $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Para probar la afirmación (a) definimos $W = \text{gen}\{1, x^2, x, y^2, y\}$ el subespacio \mathbb{C} -vectorial del espacio vectorial $\mathbb{C}[x, y]$ de los polinomios con coeficientes complejos en las variables x e y . Entonces si $f = 0$ es una circunferencia, $f \in W$.

Por la Proposición 3.1 si $f = 0$ es una circunferencia invariante de \mathcal{X} , entonces f es un factor del polinomio

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = \det \begin{pmatrix} 1 & x^2 & x & y^2 & y \\ 0 & \mathcal{X}(x^2) & \mathcal{X}(x) & \mathcal{X}(y^2) & \mathcal{X}(y) \\ 0 & \mathcal{X}^2(x^2) & \mathcal{X}^2(x) & \mathcal{X}^2(y^2) & \mathcal{X}^2(y) \\ 0 & \mathcal{X}^3(x^2) & \mathcal{X}^3(x) & \mathcal{X}^3(y^2) & \mathcal{X}^3(y) \\ 0 & \mathcal{X}^4(x^2) & \mathcal{X}^4(x) & \mathcal{X}^4(y^2) & \mathcal{X}^4(y) \end{pmatrix} = \det(a_{ij}). \quad (3.4)$$

Notamos que el grado del polinomio a_{ij} de la matriz anterior verifica que $\text{grado}(a_{ij}) = \text{grado}(a_{i-1j}) + m_1 - 1$ si $i = 2, 3, 4, 5$ y $j = 2, 3, 4, 5$. En efecto cada vez que aplicamos el campo a un polinomio, el grado del nuevo polinomio se determina por el primer término que multiplica P_1 (polinomio de grado mayor) y disminuye en 1 por la derivada al aplicar el campo. Así por ejemplo como el grado de $\mathcal{X}(x)$ es m_1 el grado de $\mathcal{X}^2(x)$ es $2m_1 - 1$.

Teniendo en cuenta que $m_1 \geq m_2$ y la definición de determinante tenemos que el grado del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es

$$(4m_1 - 2) + (3m_1 - 2) + (m_1 + m_2) + m_2 = 8m_1 + 2m_2 - 4.$$

Notamos que el grado anterior corresponde al grado del polinomio $\mathcal{X}^4(x^2)\mathcal{X}^3(x)\mathcal{X}^2(y^2)\mathcal{X}(y)$, el cual es uno de los polinomios del desarrollo del determinante (3.4), que corresponde a una permutación de cuatro elementos de grado máximo.

Como el polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ puede tener a lo más la mitad de factores de la forma $f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$ que su grado, por la Proposición 3.1 obtenemos la afirmación (a) del teorema.

Ahora consideramos un conjunto de circunferencias concéntricas. Haciendo un cambio de coordenadas apropiado podemos considerar que las ecuaciones de estas circunferencias tienen la forma $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Luego todas estas circunferencias pueden ser escritas en la forma $f = 0$ con $f \in W$, donde W es el \mathbb{C} -subespacio vectorial de $\mathbb{C}[x, y]$ generado por $1, x^2, y^2$. Por consiguiente por la Proposición 3.1 si $f = 0$ es una de estas circunferencias, entonces f es un factor de

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = \det \begin{pmatrix} 1 & x^2 & y^2 \\ 0 & \mathcal{X}(x^2) & \mathcal{X}(y^2) \\ 0 & \mathcal{X}^2(x^2) & \mathcal{X}^2(y^2) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

De modo que el grado del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $2m_1 + m_2 + 1$ y por tanto se cumple la afirmación (b) del teorema. \square

Corolario 3.5. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^2 de grado $\mathbf{m} = (m, m)$ tiene un número finito de circunferencias invariantes.*

- (a) *El número de circunferencias invariantes de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más $5m - 2$.*
- (b) *El número de circunferencias invariantes concéntricas de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más $[(3m + 1)/2]$.*

Demostración. La demostración se obtiene mediante un cálculo sencillo aplicando el Teorema 3.4. \square

A continuación mostraremos que la cotas dadas por el teorema anterior no son alcanzables. Para esto necesitaremos el siguiente lema [2]. Recordemos que una *curva algebraica* $f = f(x, y) = 0$ es *no singular* si no existen puntos en los cuales f y sus primeras derivadas f_x y f_y sean todas cero.

Lema 3.6. *Supongamos que un sistema diferencial polinomial tiene una curva algebraica invariante no singular $f = 0$. Si $(f_x, f_y) = 1$, entonces el sistema diferencial polinomial puede ser escrito en la forma*

$$\dot{x} = Af + Cf_y, \quad \dot{y} = Bf - Cf_x, \quad (3.6)$$

donde A, B y C son polinomios adecuados.

Proposición 3.7. *Las cotas dadas por el Teorema 3.4 no son alcanzables.*

Demostración. Probaremos que ningún campo vectorial cuadrático alcanza la cota $4m_1 + m_2 - 2$ para el número de circunferencias invariantes que posee. También probaremos esto para la cota $m_1 + [(m_2 + 1)/2]$ correspondiente al número de circunferencias invariantes concéntricas.

Supongamos que un campo vectorial cuadrático \mathcal{X} posee una circunferencia invariante, haciendo un cambio afín de coordenadas, si es necesario, la circunferencia puede trasladarse al origen y tener la forma $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Por lo tanto el Lema 3.6 establece que el sistema diferencial cuadrático asociado al campo \mathcal{X} puede ser escrito en la forma (3.6) con $A, B \in \mathbb{R}$ y $C = (ax + by + c)/2$, esto es

$$\dot{x} = A(x^2 + y^2 - 1) + y(ax + by + c), \quad \dot{y} = B(x^2 + y^2 - 1) - x(ax + by + c), \quad (3.7)$$

que tiene la circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$ invariante.

Vamos a ver que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B = 0$. Si $B = 0$ ya tenemos lo que queremos. Supongamos que $B \neq 0$. Entonces cambiamos las variables (x, y) por las variables

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con $\cos \theta = A/\sqrt{A^2 + B^2}$ y $\sin \theta = -B/\sqrt{A^2 + B^2}$. El sistema cuadrático (3.7) en las nuevas variables se convierte en

$$\dot{X} = \bar{A}(X^2 + Y^2 - 1) + Y(\bar{a}X + \bar{b}Y + \bar{c}), \quad \dot{Y} = -X(\bar{a}X + \bar{b}Y + \bar{c}), \quad (3.8)$$

donde

$$\bar{A} = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \bar{a} = \frac{aA + bB}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \bar{b} = \frac{Ab - aB}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \bar{c} = c.$$

Notamos que renombrando los coeficientes de este sistema cuadrático obtenemos el sistema cuadrático (3.7) con $B = 0$. De modo que podemos trabajar con el sistema cuadrático

$$\dot{x} = A(x^2 + y^2 - 1) + y(ax + by + c), \quad \dot{y} = -x(ax + by + c). \quad (3.9)$$

Consideramos la circunferencia de centro (p, q) y de radio r , esto es $f(x, y) = (x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2$. Si f es una circunferencia invariante de \mathcal{X} entonces se verifica $\mathcal{X}f = Kf$, donde $K = K(x, y) = Dx + Ey + F$. Por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} [A(x^2 + y^2 - 1) + y(ax + by + c)]2(x - p) - x(ax + by + c)2(y - q) = \\ (Dx + Ey + F)[(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Analizaremos los dos casos que nos interesan, las soluciones donde se obtienen circunferencias invariantes concéntricas y, en el caso general las soluciones que

dan lugar a todas las circunferencias invariantes que puede tener el campo vectorial cuadrático \mathcal{X} .

Para el caso de las circunferencias invariantes concéntricas tenemos $p = q = 0$. Entonces de la ecuación (3.10) resulta

$$2Ax^3 + 2Axy^2 - 2Ax = Dx^3 + Dxy^2 - Dr^2x + Ex^2y + Ey^3 - Er^2y + Fx^2 + Fy^2 - Fr^2,$$

con lo cual $D = 2A$, $2A = Dr^2$, $E = 0$ y $F = 0$. Si $A \neq 0$, $D = Dr^2$ de modo que $r = 1$.

Si $A = 0$ entonces también $D = 0$ y el sistema resultante asociado al campo vectorial \mathcal{X} es $\dot{x} = y(c + ax + by)$, $\dot{y} = -x(c + ax + by)$ que tiene todas las circunferencias $f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$ con $r > 0$ arbitrario, invariantes. Por consiguiente este campo vectorial tiene infinitas circunferencias invariantes y estos campos no están considerados en el Teorema 3.4.

En consecuencia, un campo vectorial cuadrático puede tener como máximo una circunferencia invariante concéntrica.

Las soluciones reales no triviales distintas de la circunferencia unidad que obtenemos resolviendo la ecuación (3.10) son

- (i) $a = 0, b = -D, c = \frac{1}{2}D(r^2 - 2), A = \frac{D}{2}, E = 0, F = 0, q = -1, p = 0$, esto es obtenemos la circunferencia invariante $f(x, y) = x^2 + (y+1)^2 - r^2$ para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2}D(x^2 + y^2 - 1) + y \left(-Dy + \frac{1}{2}D(r^2 - 2) \right), \\ \dot{y} &= -x \left(-Dy + \frac{1}{2}D(r^2 - 2) \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

- (ii) $a = 0, b = -D, c = \frac{1}{2}D(2 - r^2), A = \frac{D}{2}, E = 0, F = 0, q = 1, p = 0$, esto es obtenemos la circunferencia invariante $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 - r^2$ para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2}D(x^2 + y^2 - 1) + y \left(-Dy + \frac{1}{2}D(2 - r^2) \right), \\ \dot{y} &= -x \left(-Dy + \frac{1}{2}D(2 - r^2) \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

- (iii) $a = 0, b = -D, c = \frac{D(1 + q^2 - r^2)}{2q}, A = \frac{D}{2}, E = 0, F = 0, p = 0$, esto es obtenemos la circunferencia invariante $f(x, y) = x^2 + (y - q)^2 - r^2$ para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2}D(x^2 + y^2 - 1) + y \left(\frac{D(1 + q^2 - r^2)}{2q} - Dy \right), \\ \dot{y} &= -x \left(-Dy + \frac{D(1 + q^2 - r^2)}{2q} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Así los sistemas (3.11), (3.12) y (3.13) poseen dos circunferencias invariantes. En consecuencia, hemos probado que el número máximo de circunferencias invariantes para un campo vectorial cuadrático es dos. \square

Corolario 3.8. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^2 de grado $(2, 2)$ tiene un número finito de circunferencias invariantes.*

- (a) *El número de circunferencias invariantes de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más 2.*
- (b) *El número de circunferencias invariantes concéntricas de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más 1.*

Demostración. La prueba se sigue inmediatamente de la prueba de la Proposición 3.7. \square

3.3.2. Esferas invariantes

En esta sección generalizamos los resultados de la sección anterior a campos vectoriales polinomiales en \mathbb{R}^{n+1} .

La *multiplicidad de una esfera invariante* $f = (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_{n+1} - a_{n+1})^2 - r^2 = 0$ es el mayor entero positivo k tal que f^k divide el polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ con W generado por $1, x_1^2, x_1, \dots, x_{n+1}^2, x_{n+1}$.

Teorema 3.9. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^{n+1} con $n \geq 1$ de grado $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{n+1})$ tiene un número finito de esferas invariantes.*

- (a) *El número de esferas invariantes de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más*

$$\left[\frac{1}{2} \left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} 2m_k \right) + \binom{2(n+1)}{2} (m_1 - 1) + (n+1) \right) \right]. \quad (3.14)$$

- (b) *El número de esferas invariantes concéntricas de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más*

$$\left[\frac{1}{2} \left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k \right) + \binom{n+1}{2} (m_1 - 1) + (n+1) \right) \right]. \quad (3.15)$$

Demostración. Definamos W como el subespacio \mathbb{C} -vectorial de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ generado por $1, x_1^2, x_1, x_2^2, x_2, \dots, x_{n+1}^2, x_{n+1}$. Entonces si $f = 0$ es una esfera, $f \in W$.

Por la Proposición 3.1 si $f = 0$ es una esfera invariante de \mathcal{X} , entonces f es un factor del polinomio

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^2 & x_1 & \cdots & x_{n+1}^2 & x_{n+1} \\ 0 & \mathcal{X}(x_1^2) & \mathcal{X}(x_1) & \cdots & \mathcal{X}(x_{n+1}^2) & \mathcal{X}(x_{n+1}) \\ 0 & \mathcal{X}^2(x_1^2) & \mathcal{X}^2(x_1) & \cdots & \mathcal{X}^2(x_{n+1}^2) & \mathcal{X}^2(x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathcal{X}^{2(n+1)}(x_1^2) & \mathcal{X}^{2(n+1)}(x_1) & \cdots & \mathcal{X}^{2(n+1)}(x_{n+1}^2) & \mathcal{X}^{2(n+1)}(x_{n+1}) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Notamos que para $k = 1, \dots, n+1$, el grado de los polinomios $\mathcal{X}(x_k)$, $\mathcal{X}^2(x_k)$, $\mathcal{X}^3(x_k)$, \dots , $\mathcal{X}^{2(n+1)}(x_k)$ son m_k , $m_1 + m_k - 1$, $2(m_1 - 1) + m_k$, \dots , $(2(n+1) - 1)(m_1 - 1) + m_k$ respectivamente, y el grado de los polinomios $\mathcal{X}(x_k^2)$, $\mathcal{X}^2(x_k^2)$, $\mathcal{X}^3(x_k^2)$, \dots , $\mathcal{X}^{2(n+1)}(x_k^2)$ son $m_k + 1$, $m_1 + m_k$, $2(m_1 - 1) + m_k + 1$, \dots , $(2(n+1) - 1)(m_1 - 1) + m_k + 1$. En general, tenemos que $\mathcal{X}^d(x_k) = (d - 1)(m_1 - 1) + m_k$ y $\mathcal{X}^d(x_k^2) = (d - 1)(m_1 - 1) + m_k + 1$ para $d = 1, \dots, 2(n+1)$.

Teniendo en cuenta que $m_1 \geq \dots \geq m_{n+1}$ y la definición de determinante tenemos que el grado del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es el grado de uno de los polinomios del determinante (3.16) que corresponde a una permutación de $2n + 2$ de sus elementos con grado maximal, el cual está dado por la expresión

$$\mathcal{X}^{2(n+1)}(x_1^2) \mathcal{X}^{2(n+1)-1}(x_1) \mathcal{X}^{2(n+1)-2}(x_2^2) \mathcal{X}^{2(n+1)-3}(x_2) \cdots \mathcal{X}^4(x_n^2) \mathcal{X}^3(x_n) \mathcal{X}^2(x_{n+1}^2) \mathcal{X}(x_{n+1}).$$

Notamos que el grado del polinomio anterior es

$$\begin{aligned} & [(2(n+1) - 1)(m_1 - 1) + m_1 + 1] + [(2(n+1) - 2)(m_1 - 1) + m_1] + \\ & [(2(n+1) - 3)(m_1 - 1) + m_2 + 1] + [(2(n+1) - 4)(m_1 - 1) + m_2] + \cdots \\ & + [3(m_1 - 1) + m_n + 1] + [2(m_1 - 1) + m_n] + [(m_1 - 1) + m_{n+1} + 1] + \\ & m_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} 2m_k \right) + \binom{2(n+1)}{2} (m_1 - 1) + (n+1). \end{aligned}$$

Como el polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ puede tener a lo más la mitad de factores de la forma $f = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_{n+1} - a_{n+1})^2 - r^2$ que su grado, por la Proposición 3.1 obtenemos la afirmación (a) del teorema.

Ahora consideremos un conjunto de esferas n -dimensionales invariantes concéntricas. Haciendo un cambio de coordenadas apropiado podemos considerar que las ecuaciones de estas esferas tienen la forma $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - r^2 = 0$. Luego todas estas esferas se pueden escribir en la forma $f = 0$ con $f \in W$, donde W es el \mathbb{C} -subespacio vectorial de $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ generado por $1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n+1}^2$. De modo que por la Proposición 3.1 si $f = 0$ es una

de estas esferas, entonces f es un factor de

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n+1}^2 \\ 0 & \mathcal{X}(x_1^2) & \mathcal{X}(x_2^2) & \cdots & \mathcal{X}(x_{n+1}^2) \\ 0 & \mathcal{X}^2(x_1^2) & \mathcal{X}^2(x_2^2) & \cdots & \mathcal{X}^2(x_{n+1}^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \mathcal{X}^{n+1}(x_1^2) & \mathcal{X}^{n+1}(x_2^2) & \cdots & \mathcal{X}^{n+1}(x_{n+1}^2) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Teniendo en cuenta que $m_1 \geq \cdots \geq m_{n+1}$ y la definición de determinante obtenemos que el grado del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es el grado de uno de los polinomios del determinante (3.17) que corresponde a una permutación de $n+1$ de sus elementos con grado maximal, el cual está dado por la expresión

$$\mathcal{X}^{n+1}(x_1^2) \mathcal{X}^n(x_2^2) \mathcal{X}^{n-1}(x_3^2) \cdots \mathcal{X}^2(x_n^2) \mathcal{X}(x_{n+1}^2).$$

Así el grado del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es

$$(n(m_1-1)+m_1+1)+((n-1)(m_1-1)+m_2+1)+\cdots+(m_1+m_n)+(m_{n+1}+1) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} m_k \right) + \binom{n+1}{2} (m_1 - 1) + (n+1),$$

y por tanto el número de esferas invariantes concéntricas de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades está dado por la ecuación (3.13). \square

Corolario 3.10. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^{n+1} de grado $\mathbf{m} = (m, \dots, m)$ tiene un número finito de esferas invariantes.*

(a) *El número de esferas invariantes de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más*

$$\left\lceil \frac{1}{2}(n+1)(3m+2n(m-1)) \right\rceil.$$

(b) *El número de esferas invariantes concéntricas de \mathcal{X} teniendo en cuenta sus multiplicidades es a lo más*

$$\left\lceil \frac{n+1}{2} \left(m + \frac{n(m-1)}{2} + 1 \right) \right\rceil.$$

Demostración. La demostración se obtiene mediante un cálculo sencillo aplicando el Teorema 3.9. \square

3.4 Referencias

- [1] J.C. ARTÉS, B. GRÜNBAUM Y J. LLIBRE, *On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems*, Pacific J. of Mathematics **184** (1998), 207–230.
- [2] C. CHRISTOPHER, J. LLIBRE, C. PANTAZI Y X. ZHANG, *Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems*, J. of Physics A: Math. Gen. **35** (2002), 2457–2476.
- [3] C. CHRISTOPHER, J. LLIBRE Y J.V. PEREIRA, *Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields*, Pacific J. of Mathematics **229** (2007), 63–117.
- [4] J. LLIBRE Y J.C. MEDRADO, *On the invariant hyperplanes for d-dimensional polynomial vector fields*, J. of Physics A: Math. Gen. **40** (2007), 8385–8391.
- [5] J. LLIBRE Y X. ZHANG, *Darboux Theory of Integrability in \mathbb{C}^n taking into account the multiplicity*, J. of Differential Equations **246** (2009), 541–551.
- [6] J. SOKULSKI, *On the number of invariant lines of polynomial vector fields*. Nonlinearity **9** (1996), 479–485.
- [7] X. ZHANG, *Number of integral lines of polynomial systems of degree three and four*, J. of Nanjing University (Mathematical Biquarterly) **10** (1993), 209–212.

Capítulo 4

Sobre el número de cónicas invariantes de campos vectoriales polinomiales definidos en una cuádrica

En este capítulo trabajamos con *campos vectoriales polinomiales en \mathbb{R}^3* ,

$$\mathcal{X} = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

donde P , Q y R son polinomios de grado m_1 , m_2 y m_3 respectivamente en las variables x, y, z con coeficientes en \mathbb{R} . Así $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ es el *grado* del campo vectorial polinomial. Suponemos que \mathcal{X} tiene una cuádrica invariante. En este caso decimos que \mathcal{X} es un *campo vectorial polinomial definido sobre esta cuádrica*.

Un plano invariante de \mathcal{X} interseca a la cuádrica invariante en una cónica invariante. El objetivo principal de este capítulo es estudiar el número máximo de cónicas invariantes de este tipo que puede tener el campo vectorial polinomial \mathcal{X} en función de los grados m_1 , m_2 y m_3 . Si la cónica es no degenerada entonces es una elipse, una parábola o una hipérbola. Si es degenerada, entonces está formada por dos rectas que se cortan en un punto, por dos rectas paralelas, o por una recta doble.

El estudio del número máximo de clases de curvas invariantes en \mathbb{R}^2 , de clases de superficies invariantes en \mathbb{R}^3 , y de clases de hipersuperficies invariantes en \mathbb{R}^n ha sido estudiado recientemente por varios autores. Así el número máximo de rectas invariantes que un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 en función de su grado puede tener, ha sido estudiado en [1, 9, 12]. El número máximo de ciclos límites algebraicos que puede tener un campo vectorial en \mathbb{R}^2 ha sido estudiado en [6, 7, 13]. El número máximo de meridianos y paralelos invariantes para campos vectoriales polinomiales sobre un toro 2-dimensional ha sido considerado en [5, 8]. El número máximo de hiperplanos invariantes de campos vectoriales polinomiales en \mathbb{R}^n ha sido determinado en

[4]. En el capítulo anterior hemos ampliado estos resultados para el número máximo de circunferencias invariantes de campos vectoriales polinomiales en \mathbb{R}^2 y también para el número de esferas n -dimensionales invariantes en el caso de campos vectoriales en \mathbb{R}^{n+1} . En este capítulo encontramos cotas superiores para el número máximo de cónicas invariantes que están contenidas en planos invariantes para los campos vectoriales polinomiales de \mathbb{R}^3 definidos sobre las cuádricas.

El capítulo 4 se organiza como sigue. Estudiamos en secciones separadas los campos vectoriales definidos en cada una de las nueve cuádricas y mostramos los resultados obtenidos respecto al número de cónicas degeneradas y no degeneradas invariantes que se obtienen para estos campos. Para las seis cuádricas regladas encontramos una cota para el número máximo de rectas invariantes. Finalmente probamos si estas cotas son alcanzables o no. Este capítulo será publicado en el artículo:

Y. BOLAÑOS, J. LLIBRE Y C. VALLS, *On the number of invariant conics for the polynomial vector fields defined on quadrics*, Bull. Sci. math. (2013), <http://dx.doi.org/10.1016/j.bulsci.2013.04.003>.

4.1. Conceptos preliminares

Sea \mathcal{Q} una cuádrica dada por $\mathcal{Q} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : G(x, y, z) = 0\}$, donde $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es un polinomio de grado 2. Decimos que \mathcal{X} define un *campo vectorial polinomial sobre la cuádrica \mathcal{Q}* si $\mathcal{X}G = (P, Q, R) \cdot \nabla G = 0$ sobre todos los puntos de \mathcal{Q} . Aquí, como es usual ∇G denota el gradiente de la función G .

Denotemos por $\mathbb{R}[x, y, z]$ el anillo de todos los polinomios en las variables x, y, z con coeficientes en \mathbb{R} . Sea $f(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z] \setminus \mathbb{R}$. Decimos que $\{f = 0\} \cap \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ es una *curva algebraica invariante del campo vectorial \mathcal{X} sobre \mathcal{Q}* (o simplemente una *curva algebraica invariante de \mathcal{X}*) si se satisface:

(i) Existe un polinomio $K \in \mathbb{R}[x, y, z]$ tal que

$$\mathcal{X}f = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial z} = Kf \quad \text{sobre } \mathcal{Q}.$$

El polinomio K es el *cofactor* de $f = 0$ sobre \mathcal{Q} ; y

(ii) las dos superficies $f = 0$ y \mathcal{Q} tienen intersección transversal; esto es $\nabla G \wedge \nabla f \neq 0$ sobre la curva $\{f = 0\} \cap \mathcal{Q}$, donde \wedge denota el producto interior de dos vectores de \mathbb{R}^3 .

Notemos que si el campo vectorial \mathcal{X} tiene grado \mathbf{m} , entonces cualquier cofactor tiene grado a lo más $\max\{m_1, m_2, m_3\} - 1$.

Al igual que en el capítulo 3 utilizaremos el concepto de superficie algebraica extáctica que nos permitirá estudiar el número máximo de superficies

algebraicas invariantes que el campo vectorial \mathcal{X} definido sobre \mathcal{Q} admite (para más detalles ver sección 3.1). En el capítulo anterior también usamos el concepto de multiplicidad de un hiperplano o una esfera n -dimensional invariante, aquí ampliamos este concepto aplicado a una superficie invariante. Decimos que la *multiplicidad de una superficie algebraica invariante* $f = 0$ con $f \in W$ es el mayor entero positivo k tal que f^k divide al polinomio exacto $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ cuando $\varepsilon_W(\mathcal{X}) \neq 0$, en otro caso la multiplicidad es infinita. Aquí W es un subespacio vectorial del espacio de los polinomios $\mathbb{R}[x, y, z]$.

En el capítulo 1 presentamos la Teoría de integrabilidad de Darboux de campos vectoriales polinomiales definidos sobre las nueve cuádricas reales dadas en la Figura 1.3: cilindro parabólico, cilindro elíptico, cilindro hiperbólico, cono, hiperboloide de una hoja, paraboloides hiperbólico, paraboloides elíptico, elipsoide o esfera y hiperboloide de dos hojas. También presentamos sus formas canónicas y observamos que para este estudio no es restrictivo utilizar la forma canónica correspondiente a cada una de ellas. En todo el resto de este capítulo también tratamos con estas nueve cuádricas reales y usamos sus formas canónicas: $z^2 - x = 0$, $x^2 + z^2 - 1 = 0$, $x^2 - z^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, $y^2 - z^2 - x = 0$, $y^2 + z^2 - x = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ y $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$.

Una característica que poseen algunas de las cuádricas es la de ser superficies regladas, este concepto lo utilizaremos en las secciones siguientes. Una superficie es *reglada* [2, 3] si por cada punto de la misma, existe una recta contenida en ella. Las superficies regladas se generan por el movimiento de una recta, denominada generatriz, manteniéndose en contacto con otra u otras rectas, denominadas directrices, cumpliendo además en su desplazamiento ciertas condiciones particulares. Una superficie es *doblemente reglada* si por cada uno de sus puntos pasan dos generatrices. De las nueve cuádricas reales seis de ellas son regladas, estas son: el cilindro parabólico, el cilindro elíptico, el cilindro hiperbólico, el cono, el hiperboloide de una hoja y el paraboloides hiperbólico. Además el hiperboloide de una hoja y el paraboloides hiperbólico son superficies doblemente regladas.

Como nos interesa estudiar el número de cónicas invariantes que se obtienen de la intersección de planos invariantes con una cuádrica debemos recordar (ver [10]) cuándo una cónica es degenerada o no degenerada y qué tipo de cónica es.

Proposición 4.1. *Sea $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ la ecuación de una cónica y consideremos*

$$d_1 = \begin{vmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{vmatrix} \quad y \quad d_2 = \begin{vmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{vmatrix}.$$

La cónica es no degenerada si $d_1 \neq 0$. En este caso la cónica es una hipérbola si y sólo si $d_2 < 0$, una parábola si y sólo si $d_2 = 0$ o una elipse si y sólo si $d_2 > 0$. Si la cónica es degenerada ($d_1 = 0$), tenemos que es un par de

rectas que se intersecan si y sólo si $d_2 < 0$, un par de rectas paralelas si y sólo si $d_2 = 0$ o solamente un punto si y sólo si $d_2 > 0$. En el caso de rectas paralelas ($d_2 = 0$), éstas son distintas y reales si $E^2 - 4CF > 0$, dobles si $E^2 - 4CF = 0$, y distintas e imaginarias si $E^2 - 4CF < 0$.

4.2. Cilindro Parabólico

Vamos a trabajar con la siguiente forma canónica $z^2 - x = 0$ del cilindro parabólico. Sea \mathcal{X} un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^3 definido sobre él. Veremos que las cónicas que se obtienen al intersecar un cilindro parabólico con un plano son rectas y parábolas.

En las subsecciones siguientes hallamos una cota superior del número de rectas y parábolas invariantes obtenidas al intersecar un plano invariante con el cilindro parabólico para campos vectoriales polinomiales que estén definidos sobre él en función del grado del campo vectorial.

4.2.1. Rectas invariantes

Hemos mencionado antes que el cilindro parabólico es una superficie reglada. En efecto, si la intersección del cilindro parabólico con un plano paralelo al eje y no es vacía, ésta es una recta doble o dos rectas paralelas al eje y . A continuación proporcionamos algunos resultados preliminares.

Lema 4.2. *Todas las rectas contenidas en el cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ son paralelas al eje y .*

Demostración. Probaremos que cualquier recta que no sea paralela al eje y no puede estar contenida en el cilindro parabólico $z^2 - x = 0$.

Sea $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un punto del cilindro parabólico $z^2 - x = 0$. Consideremos una recta en \mathbb{R}^3 no paralela al eje y que pasa por (x_0, y_0, z_0) . Sea (a, b, c) con $a^2 + c^2 \neq 0$ su vector director. Su ecuación vectorial está dada por

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Probaremos que la recta (4.1) no está contenida en el cilindro parabólico. De la ecuación (4.1), $(x, y, z) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$ y si (x, y, z) es un punto del cilindro parabólico, entonces $(z_0 + \lambda c)^2 - (x_0 + \lambda a) = 0$ para todo λ . De modo que $z_0^2 + 2\lambda c z_0 + \lambda^2 c^2 - x_0 - \lambda a = 0$. Como $z_0^2 - x_0 = 0$ tenemos que $2z_0 c + \lambda c^2 - a = 0$. Si $c \neq 0$, esta última igualdad se verifica para un único $\lambda = \frac{a - 2z_0 c}{c^2}$. Si $c = 0$ llegamos a una contradicción con el hecho que $a^2 + c^2 \neq 0$ y por tanto $a \neq 0$. En consecuencia hemos probado que todas las rectas contenidas en el cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ son paralelas al eje y . □

Lema 4.3. *Todo plano no paralelo al eje y corta al cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ en una parábola.*

Demostración. Sea $ax + by + cz + d = 0$ con $b \neq 0$ la ecuación de un plano no paralelo al eje y que interseca al cilindro parabólico.

Si $c \neq 0$, entonces $z = -\frac{ax + by + d}{c}$. Reemplazando en $z^2 - x = 0$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección que viene dada por

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + (2ad - c^2)x + 2bdy + d^2 = 0.$$

Aplicando la Proposición 4.1 obtenemos que $d_1 = -\frac{b^2c^4}{4} \neq 0$ y $d_2 = 0$. De modo que, la cónica es una parábola.

Sea ahora $c = 0$. Si $a \neq 0$, de la ecuación del plano $x = -\frac{by + d}{a}$. Reemplazando en $z^2 - x = 0$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección $az^2 + by + d = 0$. En este caso $d_1 = -\frac{ab^2}{4} \neq 0$ y $d_2 = 0$, de modo que la cónica es una parábola. Si $c = a = 0$, la ecuación del plano toma la forma $y = -\frac{d}{b}$. La intersección del cilindro parabólico con este plano es una parábola. En consecuencia, el lema está probado. \square

Proposición 4.4. *La cónica intersección de un cilindro parabólico con un plano es una parábola, una recta doble, o un par de rectas paralelas.*

Demostración. Por el Lema 4.2, dado un plano paralelo al eje y que corta al cilindro parabólico, su intersección es una recta doble o dos rectas paralelas. Si el plano no es paralelo al eje y , sabemos por el Lema 4.3, que éste interseca al cilindro parabólico en una parábola. \square

Denotamos por $\mathcal{X} = (P, Q, R)$ el campo vectorial polinomial definido sobre el cilindro parabólico $\mathcal{Q} = \{G = z^2 - x = 0\}$. Tenemos que

$$\mathcal{X} \cdot \nabla G = 0 \text{ sobre todos los puntos del cilindro parabólico } G = 0.$$

De lo anterior obtenemos $P = 2zR$, así $\mathcal{X} = (2zR, Q, R)$. Si $m_1 = \text{grado } P$, $m_2 = \text{grado } Q$ y $m_3 = \text{grado } R$, entonces $m_1 = m_3 + 1$.

Proposición 4.5. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el cilindro parabólico que poseen infinitas rectas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Como nos interesa estudiar las rectas invariantes de un campo vectorial polinomial \mathcal{X} contenidas en el cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ sólo nos hace falta considerar los planos paralelos al eje y cuya ecuación tiene la forma $ax + bz + c = 0$. Si este plano es invariante por \mathcal{X} sus rectas intersección con el cilindro parabólico también serán invariantes por \mathcal{X} . En consecuencia por la Proposición 3.1 y el Lema 4.2 una condición necesaria para que \mathcal{X} posea

infinitas de estas rectas invariantes es que $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 0$ con $W = \langle 1, x, z \rangle$. Sabemos que el polinomio extáctico $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ está definido por

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = \begin{vmatrix} 1 & x & z \\ 0 & \mathcal{X}(x) & \mathcal{X}(z) \\ 0 & \mathcal{X}^2(x) & \mathcal{X}^2(z) \end{vmatrix}. \quad (4.2)$$

Dado que $\mathcal{X}(x) = 2zR$ y $\mathcal{X}(z) = R$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^2(x) &= \mathcal{X}(2zR) = 2\mathcal{X}(z)R + 2z\mathcal{X}(R) \\ &= 2R^2 + 4z^2R_xR + 2zR_yQ + 2zR_zR, \text{ y} \\ \mathcal{X}^2(z) &= \mathcal{X}(R) = 2zRR_x + QR_y + RR_z. \end{aligned}$$

Así,

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = \mathcal{X}(x)\mathcal{X}^2(z) - \mathcal{X}(z)\mathcal{X}^2(x) = 2R^3. \quad (4.3)$$

Por tanto $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 0$ si y sólo si $R = 0$. Entonces podemos definir \mathcal{X} como el campo vectorial cuyo sistema diferencial asociado está dado por

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = Q, \quad \dot{z} = 0.$$

Como $\dot{x} = 0$, los planos $f = x + c = 0$ con $c \in \mathbb{R}$ son invariantes por \mathcal{X} . Todos los planos $f = 0$ son paralelos al eje y , de modo que intersecan al cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ en un par de rectas paralelas o en una recta doble (Proposición 4.4). Por lo tanto el campo vectorial \mathcal{X} posee infinitas rectas invariantes. \square

Teorema 4.6. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre el cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ tiene un número finito de rectas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces el número máximo de rectas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes diferentes paralelos al eje y es a lo más*

- (a) $2m_3$ si ninguna recta invariante es doble.
- (b) m_3 si todas las rectas invariantes son dobles.
- (c) entre m_3 y $2m_3$ si hay alguna recta invariante doble.

Demostración. El polinomio extáctico del campo vectorial \mathcal{X} asociado a $W = \langle 1, x, z \rangle$ está dado por la ecuación (4.3) y de aquí, por la Proposición 3.1, cualquier plano invariante paralelo al eje y debe dividir a R^3 , luego también a R . Como el grado de R es m_3 , R tiene como máximo m_3 factores lineales, de modo que \mathcal{X} puede tener a lo más m_3 planos invariantes. Por lo tanto, una cota superior para el número de rectas invariantes de \mathcal{X} paralelas al eje y contenidas en dichos planos invariantes es $2m_3$ si no existen rectas dobles, m_3 si todas las rectas son dobles y está entre $2m_3$ y m_3 si hay alguna recta doble. \square

Proposición 4.7. *Las hipótesis del Teorema 4.6 se verifican siempre que $m_3 \geq 1$ y las cotas que proporciona son alcanzables.*

Demostración. Por la ecuación (4.3), si $\mathcal{X} = (P, Q, R)$ con $R = k$, $k \in \mathbb{R}$, es un campo vectorial definido sobre el cilindro parabólico, entonces $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 2k^3$ con $W = \langle 1, x, z \rangle$. Puesto que cualquier plano invariante paralelo al eje y , $ax + bz + c = 0$, debe satisfacer que $ax + bz + c$ divide al polinomio extáctico $2k^3$ (ver Proposición 4.1), no pueden existir tales planos invariantes. Luego $m_3 \geq 1$.

Ahora probamos que si $m_3 \geq 1$ las cotas son alcanzables. Sea $f_l = a_l x + b_l z + c_l$ con $a_l, b_l, c_l \in \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, m_3$ y los planos $f_l = 0$ distintos entre sí. Consideremos un campo vectorial polinomial \mathcal{X} con sistema asociado

$$\dot{x} = 2z \prod_{l=1}^{m_3} f_l, \quad \dot{y} = q, \quad \dot{z} = \prod_{l=1}^{m_3} f_l, \quad (4.4)$$

donde $q \in \mathbb{R}$. Vamos a probar que $f_l = 0$ para todo $l = 1, \dots, m_3$ es un plano invariante de \mathcal{X} . En efecto, $\mathcal{X}f_l = K_l f_l$ con $K_l = (2a_l z + b_l) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{m_3} (a_j x + b_j z + c_j)$.

Por tanto el sistema diferencial (4.4) posee a lo más $2m_3$ rectas paralelas invariantes contenidas en planos paralelos al eje y o m_3 rectas dobles invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos paralelos al eje y tal y como afirma el Teorema 4.6.

En particular si $R = \prod_{l=1}^{m_3} (x-l)$ entonces la intersección del cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ con cada uno de los planos $x-l = 0$ donde $l = 1, \dots, m_3$ son las dos rectas invariantes de \mathcal{X} paralelas al eje y dadas por $(x, y, z) = (l, \lambda, \pm\sqrt{\lambda})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $l = 1, \dots, m_3$. Por lo tanto obtenemos en total a lo más $2m_3$ rectas invariantes de \mathcal{X} contenidas en los m_3 planos invariantes $x-l = 0$.

Supongamos ahora que la recta $\{f_j = 0\} \cap \{y = 0\}$ es tangente a la parábola $\{z^2 - x = 0\} \cap \{y = 0\}$ y que las rectas $\{f_l = 0\} \cap \{y = 0\}$ con $l \neq j$ cortan a la parábola $\{z^2 - x = 0\} \cap \{y = 0\}$ en dos puntos. Entonces el sistema diferencial (4.4) en el plano $f_j = 0$ de \mathbb{R}^3 tiene una recta invariante doble sobre el cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ de \mathbb{R}^3 , y $2m_3 - 2$ rectas invariantes simples sobre el mismo cilindro. En total, tenemos $2m_3 - 1$ rectas invariantes sobre el cilindro parabólico. Procediendo de esta manera podemos obtener cualquier número de rectas invariantes comprendido entre m_3 y $2m_3$. Por lo tanto las cotas dadas por el Teorema 4.6 son alcanzables. \square

4.2.2. Parábolas invariantes

De acuerdo con la prueba de la Proposición 4.4 si la intersección del cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ con un plano no paralelo al eje y no es vacía entonces es una parábola. Ahora estudiaremos el número de éstos planos que

son invariantes por \mathcal{X} y esto nos permitirá obtener una cota para el número máximo de parábolas invariantes que contienen.

Proposición 4.8. *Existen campos vectoriales polinomiales definidos sobre el cilindro parabólico que poseen infinitas parábolas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ cuyo sistema diferencial asociado está dado por

$$\dot{x} = 2z^2, \quad \dot{y} = -z(1 + 2z), \quad \dot{z} = z.$$

Vamos a ver que los planos $f = x + y + z + d = 0$ con $d \in \mathbb{R}$ son invariantes por \mathcal{X} . Un cálculo sencillo verifica que $f = 0$ es un plano invariante de \mathcal{X} con cofactor $K = 0$ para todo $d \in \mathbb{R}$. Ningún plano $f = 0$ es paralelo al eje y , de modo que éstos planos intersecan al cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ en una parábola (Proposición 4.4). Por lo tanto el campo vectorial \mathcal{X} posee infinitas parábolas invariantes. \square

Teorema 4.9. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre un cilindro parabólico tiene un número finito de parábolas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces el número máximo de parábolas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades, es a lo más*

$$\begin{array}{ll} 3m_2 + 3m_3 - 2 & \text{si } m_2 \geq m_3 + 1, \\ m_2 + 5m_3 & \text{si } m_2 \leq m_3 + 1. \end{array}$$

Demostración. Sea $ax + by + cz + d = 0$ un plano que interseca al cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ y consideremos $W = \langle 1, x, y, z \rangle$. El polinomio extáctico de \mathcal{X} asociado a W está dado por

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & \mathcal{X}(x) & \mathcal{X}(y) & \mathcal{X}(z) \\ 0 & \mathcal{X}^2(x) & \mathcal{X}^2(y) & \mathcal{X}^2(z) \\ 0 & \mathcal{X}^3(x) & \mathcal{X}^3(y) & \mathcal{X}^3(z) \end{vmatrix}. \quad (4.5)$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{X}(x) = 2zR$, $\mathcal{X}(y) = Q$ y $\mathcal{X}(z) = R$, calculamos el polinomio (4.5), con la ayuda de un manipulador algebraico, en este caso el mathematica, y resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon_W(\mathcal{X}) = & 2R(-2R^3Q_zR_z + 2QR^2R_z^2 + R^4Q_{zz} - QR^3R_{zz} + R^3Q_zQ_y - \\ & 3QR^2R_zQ_y + QR^2Q_y^2 - 3QR^2Q_zR_y + 5Q^2RR_zR_y - 4Q^2RQ_yR_y + \\ & 3Q^3R_y^2 + 2QR^3Q_{yz} - 2Q^2R^2R_{yz} + Q^2R^2Q_{yy} - Q^3RR_{yy} + 2R^4Q_x - \\ & 4zR^3R_zQ_x + 2zR^3Q_yQ_x - 6zQR^2R_yQ_x - 2QR^3R_x - 4zR^3Q_zR_x + \\ & 8zQR^2R_zR_x - 6zQR^2Q_yR_x + 10zQ^2RR_yR_x - 8z^2R^3Q_xR_x + \\ & 8z^2QR^2R_x^2 + 4zR^4Q_{xz} - 4zQR^3R_{xz} + 4zQR^3Q_{xy} - 4zQ^2R^2R_{xy} + \\ & 4z^2R^4Q_{xx} - 4z^2QR^3R_{xx}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

De la ecuación (4.6) obtenemos que los grados de los monomios del polinomio extáctico son $m_2 + 5m_3 - 2$, $2m_2 + 4m_3 - 2$, $3m_2 + 3m_3 - 2$, $m_2 + 5m_3 - 1$, $2m_2 + 4m_3 - 1$, $m_2 + 5m_3$. Así,

$$\text{grado}(\varepsilon_W(\mathcal{X})) = \text{máx}\{3m_2 + 3m_3 - 2, 2m_2 + 4m_3 - 1, m_2 + 5m_3\}.$$

Notemos que $3m_2 + 3m_3 - 2 \geq 2m_2 + 4m_3 - 1$ si $(3m_2 + 3m_3 - 2) - (2m_2 + 4m_3 - 1) \geq 0$, o equivalentemente si $m_2 \geq m_3 + 1$. También, si $m_2 \geq m_3 + 1$, $2m_2 + 4m_3 - 1 \geq m_2 + 5m_3$. Por lo tanto, el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $3m_2 + 3m_3 - 2$ si $m_2 \geq m_3 + 1$, y de una manera similar se obtiene que el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $5m_3 + m_2$ si $m_2 \leq m_3 + 1$. En consecuencia de acuerdo con la Proposición 3.1, el número máximo de planos invariantes (contando sus multiplicidades) que intersecan al cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ es $3m_2 + 3m_3 - 2$ si $m_2 \geq m_3 + 1$ o $5m_3 + m_2$ si $m_2 \leq m_3 + 1$. Esto es, obtenemos las cotas que proporciona el teorema para el número de parábolas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes de \mathcal{X} . \square

Proposición 4.10. *La cota proporcionada por el Teorema 4.9 es alcanzable.*

Demostración. Consideremos un campo vectorial polinomial \mathcal{X} definido sobre el cilindro parabólico $z^2 - x = 0$ cuyo sistema diferencial asociado está dado por

$$\dot{x} = 2z, \quad \dot{y} = (y + 1)^m, \quad \dot{z} = 1, \quad \text{con } m \geq 1.$$

El polinomio extáctico (4.6) asociado a \mathcal{X} es $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 2m(2m - 1)(y + 1)^{3m-2}$. Sea $f = y + 1$, es fácil ver que $f = 0$ interseca al cilindro en una parábola y es un plano invariante de \mathcal{X} con cofactor $K = (y + 1)^{m-1}$, esto es $\mathcal{X}f = Kf$. Además \mathcal{X} definido sobre el cilindro parabólico no puede tener más planos invariantes (ver Proposición 3.1). Por lo tanto \mathcal{X} tiene una única parábola contenida en un plano invariante, que coincide con la cota dada por el Teorema 4.9. \square

4.3. Cilindro Elíptico

Vamos a trabajar con la siguiente forma canónica $x^2 + z^2 - 1 = 0$ del cilindro elíptico. Consideremos un campo vectorial polinomial \mathcal{X} de \mathbb{R}^3 definido sobre él. Veremos que los tipos de cónicas que se obtienen al intersecar el cilindro elíptico con un plano son rectas y elipses.

En las subsecciones siguientes hallamos una cota superior para el número máximo de estas rectas y elipses invariantes de \mathcal{X} definido sobre el cilindro elíptico, dependiendo de los grados m_1 , m_2 y m_3 del campo vectorial \mathcal{X} .

4.3.1. Rectas invariantes

El cilindro elíptico es una superficie reglada. Veamos qué tipos de rectas contiene.

Lema 4.11. *Todas las rectas contenidas en el cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$ son paralelas al eje y .*

Demostración. Vamos a ver que cualquier recta que no sea paralela al eje y no puede estar contenida en el cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$.

Sea $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un punto del cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$. Consideremos una recta en \mathbb{R}^3 no paralela al eje y que pasa por (x_0, y_0, z_0) . Sea (a, b, c) con $a^2 + c^2 \neq 0$ su vector director y $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ su ecuación vectorial, entonces $(x, y, z) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$. Probaremos que esta recta no está contenida en el cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$. Si (x, y, z) es un punto del cilindro, entonces

$$(x_0 + \lambda a)^2 + (z_0 + \lambda c)^2 - 1 = 0, \text{ para todo } \lambda. \quad (4.7)$$

De (4.7) y puesto que $x_0^2 + z_0^2 - 1 = 0$ resulta

$$\lambda(\lambda(a^2 + c^2) + 2(ax_0 + cz_0)) = 0. \quad (4.8)$$

Sea $\lambda \neq 0$. Entonces la igualdad (4.8) se verifica para $\lambda = \frac{-2(ax_0 + cz_0)}{a^2 + c^2}$, y por tanto la ecuación (4.7) se cumple sólo para un valor de λ . En consecuencia, esto prueba que todas las rectas contenidas en el cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$ son paralelas al eje y . \square

Proposición 4.12. *La cónica intersección de un cilindro elíptico con un plano es una recta doble, un par de rectas paralelas, o una elipse.*

Demostración. Consideremos el cilindro elíptico de ecuación $x^2 + z^2 - 1 = 0$ y un plano que lo interseque. Si el plano es paralelo al eje y , éste interseca al cilindro elíptico en una recta doble o dos rectas paralelas. Por el Lema 4.11 sabemos que el cilindro elíptico no contiene ninguna recta no paralela al eje y , de modo que cualquier otro plano no paralelo al eje y podría intersecar al cilindro elíptico en una elipse, en una parábola o en una hipérbola. Dado que la intersección es una curva cerrada, ésta no podría ser una parábola o una hipérbola. Entonces un plano no paralelo al eje y sólo puede cortar a este cilindro en una elipse. En consecuencia la intersección de un cilindro elíptico y un plano, si no es vacía, es una recta doble, dos rectas paralelas al eje y , o una elipse. \square

Sea $\mathcal{X} = (P, Q, R)$ un campo vectorial polinomial definido sobre el cilindro elíptico $\mathcal{Q} = \{G = x^2 + z^2 - 1 = 0\}$. Entonces $xP = -zR$ y $m_1 = m_3$.

Proposición 4.13. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el cilindro elíptico que poseen infinitas rectas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Sea $W = \langle 1, x, z \rangle$. El polinomio extático $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ está dado por la ecuación (4.2). Vamos a determinar \mathcal{X} tal que $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 0$, dado

que buscamos que \mathcal{X} posea infinitas rectas invariantes. Como $\mathcal{X}(x) = P$ y $\mathcal{X}(z) = R$, entonces $\mathcal{X}^2(x) = \mathcal{X}(P) = PP_x + QP_y + RP_z$ y $\mathcal{X}^2(z) = \mathcal{X}(R) = PR_x + QR_y + RR_z$. Además, teniendo en cuenta que $xP = -zR$ resulta $xP_x = -zR_x - P$, $xP_y = -zR_y$ y $xP_z = -R - zR_z$. Así,

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = \mathcal{X}(x)\mathcal{X}^2(z) - \mathcal{X}(z)\mathcal{X}^2(x) = (x^2 + z^2) \left(\frac{R}{x}\right)^3. \quad (4.9)$$

De modo que $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 0$ si y sólo si $R = 0$. En consecuencia podemos definir \mathcal{X} como el campo vectorial cuyo sistema diferencial asociado está dado por

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = Q, \quad \dot{z} = 0.$$

Como $\dot{x} = 0$, los planos $f = x + c = 0$ con $c \in \mathbb{R}$ son invariantes por \mathcal{X} . Dado que todos los planos $f = 0$ son paralelos al eje y , ellos intersecan al cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$ en un par de rectas paralelas o en una recta doble (Proposición 4.12). Por lo tanto el campo vectorial \mathcal{X} posee infinitas rectas invariantes. \square

Teorema 4.14. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre el cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$ tiene un número finito de rectas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces el número máximo de rectas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes distintos paralelos al eje y es a lo más*

- (a) $2m_3 - 2$ si ninguna recta invariante es doble.
- (b) $m_3 - 1$ si todas las rectas invariantes son dobles.
- (c) entre $m_3 - 1$ y $2m_3 - 2$ si hay alguna recta invariante doble.

Demostración. Como vamos a estudiar las rectas invariantes sólo nos hace falta considerar los planos paralelos al eje y . Sea $W = \langle 1, x, z \rangle$. El polinomio extático de \mathcal{X} asociado a W está dado por la ecuación (4.9). Como $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es un polinomio, R debe ser divisible por x , o sea que existe un polinomio R_1 de grado $m_3 - 1$ tal que $R = xR_1$, y por lo tanto el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $3(m_3 - 1) + 2$. Así el número de planos invariantes distintos de \mathcal{X} , es a lo más $m_3 - 1$. Más concretamente el número máximo de rectas invariantes contenidas en estos planos invariantes es $m_3 - 1$ si todas las rectas son dobles y $2m_3 - 2$ en caso que no haya ninguna recta doble. Esto es, obtenemos las cotas que proporciona el teorema. \square

Proposición 4.15. *Las cotas que proporciona el Teorema 4.14 son alcanzables.*

Demostración. Sea $f_l = a_l x + b_l z + c_l$ con $a_l, b_l, c_l \in \mathbb{R}$ para todo $l = 1, \dots, m_3 - 1$ y los planos $f_l = 0$ distintos entre sí. Sea \mathcal{X} un campo vectorial polinomial definido sobre el cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$ cuyo

sistema diferencial asociado es

$$\dot{x} = -z \prod_{l=1}^{m_3-1} f_l, \quad \dot{y} = q, \quad \dot{z} = x \prod_{l=1}^{m_3-1} f_l, \quad (4.10)$$

con $q \in \mathbb{R}$. No es difícil comprobar que todos los planos $f_l = 0$ son invariantes por \mathcal{X} , esto es $\mathcal{X}f_l = K_l f_l$ donde $K_l = -(a_l z + b_l x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{m_3-1} (a_j x + b_j z + c_j)$.

De modo que el sistema posee a lo más $2m_3 - 2$ rectas paralelas invariantes o $m_3 - 1$ rectas dobles invariantes contenidas en los planos paralelos al eje y $f_l = 0$ con $l = 1, \dots, m_3 - 1$, lo cual coincide con las cotas dadas por el Teorema 4.14.

En particular si $R = \prod_{l=2}^{m_3-1} (x - 1/l)$ entonces la intersección del cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$ con cada uno de los planos $x - 1/l = 0$ donde $l = 2, \dots, m_3$ son las dos rectas invariantes de \mathcal{X} paralelas al eje y dadas por $(x, y, z) = \left(\frac{1}{l}, \lambda, \pm \frac{\sqrt{l^2 - 1}}{l}\right)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $l = 2, \dots, m_3$. Por lo tanto obtenemos en total a lo más $2m_3 - 2$ rectas invariantes de \mathcal{X} contenidas en los $m_3 - 1$ planos invariantes $x - 1/l = 0$.

Supongamos que la recta $\{f_j = 0\} \cap \{y = 0\}$ es tangente a la circunferencia $\{x^2 + z^2 = 1\} \cap \{y = 0\}$ y que las rectas $\{f_l = 0\} \cap \{y = 0\}$ con $l \neq j$ cortan a la circunferencia $\{x^2 + z^2 = 1\} \cap \{y = 0\}$ en dos puntos. Entonces el sistema diferencial (4.10) en el plano $f_j = 0$ de \mathbb{R}^3 tiene una recta invariante doble sobre el cilindro elíptico $x^2 + z^2 = 1$ de \mathbb{R}^3 , y $2m_3 - 2$ rectas invariantes simples sobre el mismo cilindro. En total tenemos $2m_3 - 1$ rectas invariantes sobre el cilindro elíptico. Procediendo de esta manera podemos obtener un número de rectas invariantes comprendido entre $m_3 - 1$ y $2m_3 - 2$. En consecuencia las cotas dadas por el Teorema 4.14 son alcanzables. \square

4.3.2. Elipses invariantes

De acuerdo con la prueba de la Proposición 4.12 si la intersección del cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$ con un plano no paralelo al eje y no es vacía entonces es una elipse.

Proposición 4.16. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el cilindro elíptico que poseen infinitas elipses invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial sobre el cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$ cuyo sistema diferencial asociado es

$$\dot{x} = -z, \quad \dot{y} = z - x, \quad \dot{z} = x.$$

Es fácil verificar que los planos $f = x + y + z + d = 0$ con $d \in \mathbb{R}$ son invariantes por \mathcal{X} con cofactor $K = 0$ para todo $d \in \mathbb{R}$. Ningún plano $f = 0$ es paralelo al eje y , de modo que intersecan al cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$ en una elipse. Por lo tanto \mathcal{X} posee infinitas elipses invariantes. \square

Teorema 4.17. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre un cilindro elíptico tiene un número finito de elipses invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces el número máximo de elipses invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades, es a lo más*

$$\begin{aligned} 3m_2 + 3m_3 - 5 & \quad \text{si } m_2 \geq m_3, \\ m_2 + 5m_3 - 5 & \quad \text{si } m_2 \leq m_3. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $W = \langle 1, x, y, z \rangle$. El polinomio extáctico de \mathcal{X} asociado a W está dado por la ecuación (4.5).

Como $xP = -zR$ se sigue que $xP_x = -zR_x - P$, $xP_y = -zR_y$ y $xP_z = -R - zR_z$. Además, $\mathcal{X}(x) = P$, $\mathcal{X}(y) = Q$ y $\mathcal{X}(z) = R$, teniendo en cuenta esto y con ayuda del *mathematica* realizamos los cálculos correspondientes y obtenemos el polinomio extáctico

$$\begin{aligned} \varepsilon_W(\mathcal{X}) = & \\ & -\frac{1}{x^6} (x^2 + z^2) R (-3xzR^4Q_z + 3xzQR^3R_z - 2x^3R^3Q_zR_z + \\ & 2x^3QR^2R_z^2 + x^3R^4Q_{zz} - x^3QR^3R_{zz} - 3xzQR^3Q_y + x^3R^3Q_zQ_y - \\ & 3x^3QR^2R_zQ_y + x^3QR^2Q_y^2 + 3xzQ^2R^2R_y - 3x^3QR^2Q_zR_y + \\ & 5x^3Q^2RR_zR_y - 4x^3Q^2RQ_yR_y + 3x^3Q^3R_y^2 + 2x^3QR^3Q_{yz} - 2x^3Q^2R^2R_{yz} + \\ & x^3Q^2R^2Q_{yy} - x^3Q^3RR_{yy} - x^2R^4Q_x + 2z^2R^4Q_x + 2x^2zR^3R_zQ_x - \\ & x^2zR^3Q_yQ_x + 3x^2zQR^2R_yQ_x + x^2QR^3R_x - 2z^2QR^3R_x + 2x^2zR^3Q_zR_x - \\ & 4x^2zQR^2R_zR_x + 3x^2zQR^2Q_yR_x - 5x^2zQ^2RR_yR_x - 2xz^2R^3Q_xR_x + \\ & 2xz^2QR^2R_x^2 - 2x^2zR^4Q_{xz} + 2x^2zQR^3R_{xz} - 2x^2zQR^3Q_{xy} + \\ & 2x^2zQ^2R^2R_{xy} + xz^2R^4Q_{xx} - xz^2QR^3R_{xx}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

De esta expresión obtenemos que los grados de los monomios del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ son $m_2 + 5m_3 - 3$, $2m_2 + 4m_3 - 3$ y $3m_2 + 3m_3 - 3$. Así,

$$\text{grado}(\varepsilon_W(\mathcal{X})) = \max\{m_2 + 5m_3 - 3, 2m_2 + 4m_3 - 3, 3m_2 + 3m_3 - 3\}.$$

Podemos ver que si $m_2 \geq m_3$ se cumplen las desigualdades siguientes

$$3m_2 + 3m_3 - 3 \geq 2m_2 + 4m_3 + 1 \geq m_2 + 5m_3 + 1.$$

Por lo tanto el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $3m_2 + 3m_3 - 3$ si $m_2 \geq m_3$, y de una manera similar se obtiene que el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $m_2 + 5m_3 - 3$ si $m_2 \leq m_3$. En consecuencia de acuerdo con la Proposición 3.1, el número máximo de planos invariantes reales (contando sus multiplicidades) que intersecan al cilindro elíptico $z^2 + x^2 - 1 = 0$ es $3m_2 + 3m_3 - 5$ si $m_2 \geq m_3$, ó $m_2 + 5m_3 - 5$ si $m_2 \leq m_3$, y de aquí el teorema se sigue. \square

Proposición 4.18. *La cota proporcionada por el Teorema 4.17 es alcanzable.*

Demostración. Consideremos un campo vectorial polinomial \mathcal{X} sobre el cilindro elíptico $x^2 + z^2 - 1 = 0$ cuyo sistema diferencial asociado es

$$\dot{x} = -z(y+1)^{m-1}, \quad \dot{y} = (y+1)^m, \quad \dot{z} = x(y+1)^{m-1}.$$

La cota dada por el Teorema 4.17 para el número máximo de elipses invariantes de \mathcal{X} contenidas en sus planos invariantes es $6m - 5$. El polinomio extáctico (4.11) asociado a \mathcal{X} es

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = -2(x^2 + z^2)(y+1)^{6m-5}. \quad (4.12)$$

Sea $f = y + 1$, entonces $f = 0$ interseca al cilindro en una elipse y es un plano invariante de \mathcal{X} con cofactor $K = (y+1)^{m-1}$. Como \mathcal{X} sobre el cilindro elíptico no puede tener más planos invariantes reales (ver Proposición 3.1) y la multiplicidad de $f = 0$ es $6m - 5$, obtenemos que la cota del Teorema 4.17 se alcanza. \square

4.4. Cilindro Hiperbólico

Vamos a trabajar con la siguiente forma canónica $x^2 - z^2 - 1 = 0$ del cilindro hiperbólico. Sea \mathcal{X} un campo vectorial polinomial de \mathbb{R}^3 definido sobre él. Veremos que los tipos de cónicas que se obtienen al intersecar el cilindro hiperbólico con un plano son rectas e hipérbolas.

En las subsecciones siguientes hallamos una cota superior para el número máximo de rectas e hipérbolas invariantes que viven en planos invariantes de \mathcal{X} definido sobre un cilindro hiperbólico, dependiendo de los grados m_1 , m_2 y m_3 del campo vectorial \mathcal{X} .

4.4.1. Rectas invariantes

Como hemos mencionado antes el cilindro hiperbólico es una superficie reglada. Veremos que las rectas que éste contiene son paralelas al eje y como sucede con las dos cuádrlicas que hemos estudiado antes.

Lema 4.19. *Todas las rectas contenidas en el cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ son paralelas al eje y .*

Demostración. Sea (x_0, y_0, z_0) un punto del cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$. Mostraremos que la recta no paralela al eje y que pasa por (x_0, y_0, z_0) de ecuación $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a^2 + c^2 \neq 0$, no pertenece al cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$. Entonces $(x, y, z) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$. Si (x, y, z) es un punto del cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ se debe cumplir que

$$(x_0 + \lambda a)^2 - (z_0 + \lambda c)^2 - 1 = 0 \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

De (4.13) y dado que $x_0^2 - z_0^2 - 1 = 0$ resulta

$$\lambda(\lambda(a^2 - c^2) + 2(ax_0 - cz_0)) = 0. \quad (4.14)$$

Supongamos $\lambda \neq 0$. Entonces si $a \neq \pm c$, la igualdad (4.14) se verifica para $\lambda = \frac{2(cz_0 - ax_0)}{a^2 - c^2}$. Por lo tanto la ecuación (4.13) se cumple sólo para un valor de λ . Si $a = \pm c$ de la ecuación (4.14) obtenemos $2a\lambda(x_0 \pm z_0) = 0$, lo cual implica $a = 0$ o $x_0 = \pm z_0$. El caso $a = 0$ no puede ser pues hemos supuesto $0 \neq a^2 + c^2 = 2a^2$. Así que $x_0 = \pm z_0$ pero entonces el punto (x_0, y_0, z_0) no pertenece al cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$. En consecuencia todas las rectas no paralelas al eje y no pertenecen al cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$. \square

Lema 4.20. *Todo plano no paralelo al eje y corta al cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ en una hipérbola.*

Demostración. Sea $ax + by + cz + d = 0$ con $b \neq 0$ la ecuación de un plano no paralelo al eje y .

Si $c \neq 0$, entonces $z = -\frac{ax + by + d}{c}$. Reemplazando en $x^2 - z^2 - 1 = 0$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección

$$(c^2 - a^2)x^2 - 2abxy - b^2y^2 - 2adx - 2bdy - c^2 - d^2 = 0.$$

Aplicando la Proposición 4.1 obtenemos $d_1 = b^2c^4 \neq 0$ y $d_2 = -b^2c^2 < 0$. De modo que la cónica obtenida es una hipérbola.

Sea ahora $c = 0$. Si $a \neq 0$ tenemos $x = -\frac{by + d}{a}$. Reemplazando en $z^2 - x^2 - 1 = 0$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección que viene dada por $b^2y^2 - a^2z^2 + 2bdy + d^2 - a^2 = 0$. En este caso $d_1 = b^2a^2 \neq 0$ y $d_2 = -b^2 < 0$. Así la cónica es una hipérbola. Si $c = a = 0$, la ecuación del plano toma la forma $y = -\frac{d}{b}$, por lo que la intersección de este plano y el cilindro también es una hipérbola. Así, la cónica intersección del cilindro hiperbólico $z^2 - x^2 - 1 = 0$ y un plano no paralelo al eje y es una hipérbola. \square

Proposición 4.21. *La cónica intersección de un cilindro hiperbólico con un plano es una recta doble, un par de rectas paralelas, o una hipérbola.*

Demostración. Por el Lema 4.19 si el plano es paralelo al eje y , éste interseca al cilindro hiperbólico en una recta doble o dos rectas paralelas; y, por el Lema 4.20 sabemos que cualquier otro plano no paralelo al eje y interseca al cilindro hiperbólico en una hipérbola. \square

Si $\mathcal{X} = (P, Q, R)$ está definido sobre el cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ se debe cumplir que $xP = zR$ y $m_1 = m_3$.

Proposición 4.22. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el cilindro hiperbólico que poseen infinitas rectas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Sea $W = \langle 1, x, z \rangle$. El polinomio extáctico de \mathcal{X} asociado a W está dado por la ecuación (4.2). Para que \mathcal{X} posea infinitas rectas invariantes contenidas en el cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$, $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 0$. Teniendo en cuenta que $xP = zR$ obtenemos $xP_x = zR_x - P$, $xP_y = zR_y$ y $xP_z = R + zR_z$; por tanto

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = -(x^2 - z^2) \left(\frac{R}{x} \right)^3. \quad (4.15)$$

Luego, $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 0$ si y sólo si $R = 0$. En consecuencia podemos definir \mathcal{X} como el campo vectorial con sistema diferencial asociado

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = Q, \quad \dot{z} = 0.$$

Los planos $f = x + c = 0$ con $c \in \mathbb{R}$ son invariantes por \mathcal{X} . Como todos ellos son paralelos al eje y intersecan al cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ en un par de rectas paralelas o en una recta doble (Proposición 4.21). Por lo tanto \mathcal{X} posee infinitas rectas invariantes. \square

Teorema 4.23. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre el cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ tiene un número finito de rectas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades “esenciales” (ver demostración). Entonces el número máximo de rectas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes distintos paralelos al eje y es a lo más*

- (a) $2m_3 - 2$ si ninguna recta invariante es doble.
- (b) $m_3 - 1$ si todas las rectas invariantes son dobles.
- (c) entre $m_3 - 1$ y $2m_3 - 2$ si hay alguna recta invariante doble.

Demostración. Como vamos a estudiar las rectas invariantes sólo nos hace falta considerar los planos paralelos al eje y . Sea $W = \langle 1, x, z \rangle$. El polinomio extáctico de \mathcal{X} asociado a W está dado por la ecuación (4.15). Como $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es un polinomio entonces R debe ser divisible por x , o sea que $R = xR_1$ para algún polinomio R_1 con $\text{grado}(R_1) = m_3 - 1$, y por lo tanto el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $3(m_3 - 1) + 2$. Puesto que los planos $x - z = 0$ y $x + z = 0$ no intersecan al cilindro hiperbólico obtenemos que el número máximo de planos invariantes reales de \mathcal{X} es a lo más $m_3 - 1$, sin contar las multiplicidades debidas al exponente 3 que aparece en (4.15). Más concretamente el número máximo de rectas invariantes contenidas en estos planos invariantes es $m_3 - 1$ si todas las rectas son dobles y $2m_3 - 2$ en caso que no haya ninguna recta doble. Así, obtenemos las cotas que proporciona el teorema. \square

Proposición 4.24. *Las cotas que proporciona el Teorema 4.23 son alcanzables.*

Demostración. Consideremos $\mathcal{X} = (P, Q, R)$ un campo vectorial polinomial definido sobre el cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ cuyo sistema diferencial asociado es

$$\dot{x} = z \prod_{l=1}^{m_3-1} f_l, \quad \dot{y} = q, \quad \dot{z} = x \prod_{l=1}^{m_3-1} f_l, \quad (4.16)$$

donde $f_l = a_l x + b_l z + c_l$ con $a_l, b_l, c_l, q \in \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, m_3 - 1$ y los planos $a_l x + b_l z + c_l = 0$ son distintos entre sí. No es difícil comprobar que $f_l = 0$ es un

plano invariante de \mathcal{X} , esto es $\mathcal{X} f_l = K_l f_l$ donde $K_l = (a_l z + b_l x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{m_3-1} (a_j x +$

$b_j z + c_j)$. De modo que el sistema posee a lo más $2m_3 - 2$ rectas paralelas invariantes contenidas en planos paralelos al eje y o $m_3 - 1$ rectas dobles invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos paralelos al eje y , lo cual coincide con las cotas dadas por el Teorema 4.23.

En particular si $R = \prod_{l=2}^{m_3} (x - l)$ entonces la intersección del cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ con cada uno de los planos $x - l = 0$ donde $l = 2, \dots, m_3$ son las dos rectas invariantes de \mathcal{X} paralelas al eje y dadas por $(x, y, z) = (l, \lambda, \pm \sqrt{l^2 - 1})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $l = 2, \dots, m_3$. Por lo tanto obtenemos en total como máximo $2m_3 - 2$ rectas invariantes de \mathcal{X} contenidas en los $m_3 - 1$ planos invariantes $x - l = 0$.

Supongamos que la recta $\{f_j = 0\} \cap \{y = 0\}$ es tangente a la hipérbola $\{x^2 - z^2 = 1\} \cap \{y = 0\}$ y que las rectas $\{f_l = 0\} \cap \{y = 0\}$ con $l \neq j$ cortan a la hipérbola en dos puntos. Entonces el sistema diferencial (4.16) en el plano $f_j = 0$ de \mathbb{R}^3 tiene una recta invariante doble sobre el cilindro hiperbólico $x^2 + z^2 = 1$ de \mathbb{R}^3 , y $2m_3 - 2$ rectas invariantes simples sobre el mismo cilindro. En total tenemos $2m_3 - 1$ rectas invariantes sobre el cilindro hiperbólico. Procediendo de esta manera podemos obtener un número de rectas invariantes comprendido entre $m_3 - 1$ y $2m_3 - 2$. En consecuencia las cotas dadas por el Teorema 4.23 son alcanzables. \square

4.4.2. Hipérbolas invariantes

De acuerdo con la prueba de la Proposición 4.21 si la intersección del cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ con un plano no paralelo al eje y no es vacía entonces es una hipérbola.

Proposición 4.25. *Existen campos vectoriales polinomiales definidos sobre el cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ que poseen infinitas hipérbolas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ cuyo sistema diferencial asociado está dado por

$$\dot{x} = z, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = x.$$

Un cálculo sencillo verifica que los planos $f = -x + y - z + d = 0$ son invariantes por \mathcal{X} con cofactor $K = 0$ para todo $d \in \mathbb{R}$. Como estos planos no son paralelos al eje y intersecan al cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ en una hipérbola (Proposición 4.21). Por lo tanto el campo vectorial \mathcal{X} posee infinitas hipérbolas invariantes. \square

Teorema 4.26. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre un cilindro hiperbólico tiene un número finito de hipérbolas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces el número máximo de hipérbolas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades, es a lo más*

$$\begin{aligned} 3m_2 + 3m_3 - 5 & \quad \text{si } m_2 \geq m_3, \\ m_2 + 5m_3 - 5 & \quad \text{si } m_2 \leq m_3. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $W = \langle 1, x, y, z \rangle$. El polinomio extáctico de \mathcal{X} asociado a W está dado por la ecuación (4.5). Como $xP = zR$ se sigue que $xP_x = zR_x - P$, $xP_y = zR_y$ y $xP_z = R + zR_z$. Teniendo en cuenta además que $\mathcal{X}(x) = P$, $\mathcal{X}(y) = Q$ y $\mathcal{X}(z) = R$ obtenemos el polinomio extáctico

$$\begin{aligned} \varepsilon_W(\mathcal{X}) = & \\ & \frac{1}{x^6}(x-z)(x+z)R(3xzR^4Q_z - 3xzQR^3R_z - 2x^3R^3Q_zR_z + 2x^3QR^2R_z^2 + \\ & x^3R^4Q_{zz} - x^3QR^3R_{zz} + 3xzQR^3Q_y + x^3R^3Q_zQ_y - 3x^3QR^2R_zQ_y + \\ & x^3QR^2Q_y^2 - 3xzQ^2R^2R_y - 3x^3QR^2Q_zR_y + 5x^3Q^2RR_zR_y - 4x^3Q^2RQ_yR_y + \\ & 3x^3Q^3R_y^2 + 2x^3QR^3Q_{yz} - 2x^3Q^2R^2R_{yz} + x^3Q^2R^2Q_{yy} - x^3Q^3RR_{yy} + \\ & x^2R^4Q_x + 2z^2R^4Q_x - 2x^2zR^3R_zQ_x + x^2zR^3Q_yQ_x - 3x^2zQR^2R_yQ_x - \\ & x^2QR^3R_x - 2z^2QR^3R_x - 2x^2zR^3Q_zR_x + 4x^2zQR^2R_zR_x - 3x^2zQR^2Q_yR_x + \\ & 5x^2zQ^2RR_yR_x - 2xz^2R^3Q_xR_x + 2xz^2QR^2R_x^2 + 2x^2zR^4Q_{xz} - 2x^2zQR^3R_{xz} + \\ & 2x^2zQR^3Q_{xy} - 2x^2zQ^2R^2R_{xy} + xz^2R^4Q_{xx} - xz^2QR^3R_{xx}). \end{aligned} \tag{4.17}$$

De acuerdo con (4.17) los grados de los monomios del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ son $m_2 + 5m_3 - 3$, $2m_2 + 4m_3 - 3$ y $3m_2 + 3m_3 - 3$. Podemos ver que si $m_2 \geq m_3$ se cumplen las desigualdades siguientes

$$3m_2 + 3m_3 - 3 \geq 2m_2 + 4m_3 - 3 \geq m_2 + 5m_3 - 3.$$

Por lo tanto el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $3m_2 + 3m_3 - 3$ si $m_2 \geq m_3$, y de una manera similar se obtiene que el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $m_2 + 5m_3 - 3$ si $m_2 \leq m_3$. Así el número máximo de planos invariantes reales (contando sus multiplicidades) que intersecan al cilindro hiperbólico es el grado del polinomio extáctico, de modo que el teorema queda demostrado. \square

Proposición 4.27. *La cota que proporciona el Teorema 4.26 es alcanzable.*

Demostración. Consideremos el campo vectorial polinomial \mathcal{X} cuyo sistema diferencial asociado está dado por

$$\dot{x} = z(2y + 1)^{m-1}, \quad \dot{y} = (2y + 1)^m, \quad \dot{z} = x(2y + 1)^{m-1},$$

El polinomio extáctico (4.17) asociado a este campo vectorial está dado por $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 3(x-z)(x+z)(2y+1)^{6m-5}$. Sea $f = 2y+1$. Tenemos que $f = 0$ es un plano invariante de \mathcal{X} con cofactor $K = 2(2y+1)^{m-1}$ e interseca al cilindro en una hipérbola. Además \mathcal{X} no puede tener más planos invariantes, por lo tanto, teniendo en cuenta la multiplicidad de $f = 0$, \mathcal{X} alcanza la cota $6m - 5$, dada por el Teorema 4.26. \square

4.5. Cono

Trabajaremos con la siguiente forma canónica $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ de un cono. Sea \mathcal{X} un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^3 definido sobre este cono. Es conocido que la intersección de un plano y el cono es una cónica que puede ser degenerada: un punto, dos rectas que se cruzan o una recta doble, o no degenerada: una parábola, una elipse o una hipérbola.

En las subsecciones siguientes hallamos una cota superior para el número máximo de cónicas degeneradas y no degeneradas invariantes de \mathcal{X} en función de los grados m_1, m_2 y m_3 del campo vectorial \mathcal{X} .

4.5.1. Cónicas degeneradas invariantes

Sabemos que el cono es una superficie reglada, si la intersección del cono con un plano que pasa por su vértice no es sólo un punto, ésta es una recta doble o un par de rectas que se cruzan.

Si $\mathcal{X} = (P, Q, R)$ está definido sobre el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ se cumple que $zR = xP + yQ$ y por lo tanto $\mathcal{X} = (P, Q, (xP + yQ)/z)$.

Proposición 4.28. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el cono que poseen infinitas cónicas degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ cuyo sistema asociado es

$$\dot{x} = zx, \quad \dot{y} = zy, \quad \dot{z} = x^2 + y^2.$$

Sea $f = ax + by$, con $a^2 + b^2 \neq 0$. Los planos $f = 0$ son invariantes por \mathcal{X} con cofactor $K = z$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Además ellos contienen al eje z , de modo que intersecan al cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ en dos rectas que se cruzan en su vértice. Por lo tanto el campo vectorial \mathcal{X} posee infinitas cónicas degeneradas invariantes. \square

Teorema 4.29. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre un cono tiene un número finito de cónicas degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Entonces el número máximo de cónicas degeneradas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes es a lo más

$$\begin{aligned} 3m_1 & \text{ si } m_1 \geq m_2, \\ 3m_2 & \text{ si } m_1 \leq m_2. \end{aligned}$$

Demostración. Como vamos a estudiar las cónicas degeneradas invariantes sólo nos hace falta considerar los planos que pasan por el vértice del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, esto es por el origen; en caso contrario obtendríamos cónicas no degeneradas. Sea $W = \langle x, y, z \rangle$. El polinomio extáctico de \mathcal{X} asociado a W está dado por

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \mathcal{X}(x) & \mathcal{X}(y) & \mathcal{X}(z) \\ \mathcal{X}^2(x) & \mathcal{X}^2(y) & \mathcal{X}^2(z) \end{vmatrix}.$$

Dado que $\mathcal{X}(x) = P$, $\mathcal{X}(y) = Q$ y $\mathcal{X}(z) = (xP + yQ)/z$ tenemos $\varepsilon_W(\mathcal{X}) =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z^3} (x^2yP^3 - yz^2P^3 - x^3P^2Q + 2xy^2P^2Q + xz^2P^2Q - 2x^2yPQ^2 + y^3PQ^2 - \\ & yz^2PQ^2 - xy^2Q^3 + xz^2Q^3 + x^3zPQP_z + xy^2zPQP_z - xz^3PQP_z + \\ & x^2yzQ^2P_z + y^3zQ^2P_z - yz^3Q^2P_z - x^3zP^2Q_z - xy^2zP^2Q_z + xz^3P^2Q_z - \\ & x^2yzPQQ_z - y^3zPQQ_z + yz^3PQQ_z + x^2z^2Q^2P_y + y^2z^2Q^2P_y - z^4Q^2P_y - \\ & x^2z^2PQQ_y - y^2z^2PQQ_y + z^4PQQ_y + x^2z^2PQP_x + y^2z^2PQP_x - z^4PQP_x - \\ & x^2z^2P^2Q_x - y^2z^2P^2Q_x + z^4P^2Q_x). \end{aligned} \quad (4.18)$$

De (4.18) obtenemos que los grados de los monomios de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ son $3m_1$, $2m_1 + m_2$, $m_1 + 2m_2$ y $3m_2$. El grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es el máximo de estos valores. Podemos ver que si $m_1 \geq m_2$ se cumple que $3m_1 \geq 2m_1 + m_2 \geq m_1 + 2m_2 \geq 3m_2$. Por lo tanto el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $3m_1$ si $m_1 \geq m_2$, y de una manera similar se obtiene que el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $3m_2$ si $m_1 \leq m_2$. En consecuencia el número máximo de planos invariantes que pasan por el origen e intersecan al cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ es $3m_1$ si $m_1 \geq m_2$, ó $3m_2$ si $m_1 \leq m_2$. De modo que el teorema está demostrado. \square

Proposición 4.30. *La cota proporcionada por el Teorema 4.29 es alcanzable.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ cuyo su sistema diferencial asociado está dado por

$$\dot{x} = z^m, \quad \dot{y} = z^m, \quad \dot{z} = (x + y)z^{m-1}$$

De acuerdo con el Teorema 4.29 el número máximo de cónicas degeneradas invariantes que posee \mathcal{X} es a lo más $3m$. Verifiquemos que esta cota se alcanza. El polinomio extáctico (4.18) asociado a \mathcal{X} es

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = (y - x)z^{3(m-1)}(x + y - \sqrt{2}z)(x + y + \sqrt{2}z).$$

El plano $y - x = 0$ es invariante por \mathcal{X} con cofactor $K = 0$. Además, $z = 0$ es un plano invariante con cofactor $K = (x + y)z^{m-2}$ y su multiplicidad es $3(m - 1)$. Finalmente, $x + y \pm \sqrt{2}z = 0$ son planos invariantes con $K = \pm\sqrt{2}$. Estos planos pasan por el origen, de modo que su intersección con el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ son cónicas degeneradas. Por lo tanto obtenemos $3m$ cónicas degeneradas invariantes. \square

4.5.2. Cónicas no degeneradas invariantes

La intersección del cono con un plano que no pasa por su vértice es una cónica no degenerada.

Proposición 4.31. *Existen campos vectoriales polinomiales definidos sobre un cono que poseen infinitas cónicas no degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ con sistema diferencial asociado

$$\dot{x} = z, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = x.$$

De $\dot{y} = 0$, obtenemos que los planos $f = ay + b = 0$ con $ab \neq 0$ son invariantes por \mathcal{X} . Como estos planos no pasan por el origen intersecan al cono en una cónica no degenerada, de modo que obtenemos infinitas cónicas no degeneradas invariantes de \mathcal{X} . \square

Teorema 4.32. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre un cono tiene un número finito de cónicas no degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces el número máximo de cónicas no degeneradas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades, es a lo más*

$$\begin{aligned} 5m_1 + m_2 - 4 & \quad \text{si } m_1 \geq m_2, \\ m_1 + 5m_2 - 4 & \quad \text{si } m_1 \leq m_2. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $W = \langle 1, x, y, z \rangle$. El polinomio extáctico de \mathcal{X} asociado a W está dado por la ecuación (4.5). Usando que $zR = xP + yQ$, $\mathcal{X}(x) = P$, $\mathcal{X}(y) = Q$ y $\mathcal{X}(z) = R$ desarrollamos el polinomio extáctico y obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_W(\mathcal{X}) = & \\ & - \frac{1}{z^6} (2x^4P^4QP_z - x^2z^2P^4QP_z - z^4P^4QP_z + 8x^3yP^3Q^2P_z - \\ & 2xyz^2P^3Q^2P_z + 12x^2y^2P^2Q^3P_z - x^2z^2P^2Q^3P_z - y^2z^2P^2Q^3P_z - \\ & 2z^4P^2Q^3P_z + 8xy^3PQ^4P_z - 2xyz^2PQ^4P_z + 2y^4Q^5P_z - y^2z^2Q^5P_z - \\ & z^4Q^5P_z - 2x^4zP^3QP_z^2 + 2x^2z^3P^3QP_z^2 - 6x^3yzP^2Q^2P_z^2 + \\ & 5xyz^3P^2Q^2P_z^2 - 6x^2y^2zPQ^3P_z^2 - x^2z^3PQ^3P_z^2 + 3y^2z^3PQ^3P_z^2 - \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}
& 2xy^3zQ^4P_z^2 - xyz^3Q^4P_z^2 - 2x^4P^5Q_z + x^2z^2P^5Q_z + z^4P^5Q_z - \\
& 8x^3yP^4QQ_z + 2xyz^2P^4QQ_z - 12x^2y^2P^3Q^2Q_z + x^2z^2P^3Q^2Q_z + \\
& y^2z^2P^3Q^2Q_z + 2z^4P^3Q^2Q_z - 8xy^3P^2Q^3Q_z + 2xyz^2P^2Q^3Q_z - \\
& 2y^4PQ^4Q_z + y^2z^2PQ^4Q_z + z^4PQ^4Q_z + 2x^4zP^4P_zQ_z - 2x^2z^3P^4P_zQ_z + \\
& 4x^3yzP^3QP_zQ_z - 6xyz^3P^3QP_zQ_z + 4x^2z^3P^2Q^2P_zQ_z - 4y^2z^3P^2Q^2P_zQ_z - \\
& 4xy^3zPQ^3P_zQ_z + 6xyz^3PQ^3P_zQ_z - 2y^4zQ^4P_zQ_z + 2y^2z^3Q^4P_zQ_z + \\
& 2x^3yzP^4Q_z^2 + xyz^3P^4Q_z^2 + 6x^2y^2zP^3QQ_z^2 - 3x^2z^3P^3QQ_z^2 + \\
& y^2z^3P^3QQ_z^2 + 6xy^3zP^2Q^2Q_z^2 - 5xyz^3P^2Q^2Q_z^2 + 2y^4zPQ^3Q_z^2 - \\
& 2y^2z^3PQ^3Q_z^2 + x^4zP^4QP_{zz} - x^2z^3P^4QP_{zz} + 4x^3yzP^3Q^2P_{zz} - \\
& 2xyz^3P^3Q^2P_{zz} + 6x^2y^2zP^2Q^3P_{zz} - x^2z^3P^2Q^3P_{zz} - y^2z^3P^2Q^3P_{zz} + \\
& 4xy^3zPQ^4P_{zz} - 2xyz^3PQ^4P_{zz} + y^4zQ^5P_{zz} - y^2z^3Q^5P_{zz} - x^4zP^5Q_{zz} + \\
& x^2z^3P^5Q_{zz} - 4x^3yzP^4QQ_{zz} + 2xyz^3P^4QQ_{zz} - 6x^2y^2zP^3Q^2Q_{zz} + \\
& x^2z^3P^3Q^2Q_{zz} + y^2z^3P^3Q^2Q_{zz} - 4xy^3zP^2Q^3Q_{zz} + 2xyz^3P^2Q^3Q_{zz} - \\
& y^4zPQ^4Q_{zz} + y^2z^3PQ^4Q_{zz} + 3x^3zP^3Q^2P_y - 3xz^3P^3Q^2P_y + \\
& 9x^2yzP^2Q^3P_y - 3yz^3P^2Q^3P_y + 9xy^2zPQ^4P_y - 3xz^3PQ^4P_y + 3y^3zQ^5P_y - \\
& 3yz^3Q^5P_y - 5x^3z^2P^2Q^2P_zP_y + 5xz^4P^2Q^2P_zP_y - 10x^2yz^2PQ^3P_zP_y + \\
& 6yz^4PQ^3P_zP_y - 5xy^2z^2Q^4P_zP_y - xz^4Q^4P_zP_y + 3x^3z^2P^3QQ_zP_y - \\
& 3xz^4P^3QQ_zP_y + 4x^2yz^2P^2Q^2Q_zP_y - 4yz^4P^2Q^2Q_zP_y - xy^2z^2PQ^3Q_zP_y + \\
& 3xz^4PQ^3Q_zP_y - 2y^3z^2Q^4Q_zP_y + 2yz^4Q^4Q_zP_y - 3x^2z^3PQ^3P_y^2 + \\
& 3z^5PQ^3P_y^2 - 3xyz^3Q^4P_y^2 - 3x^3zP^4QQ_y + 3xz^3P^4QQ_y - 9x^2yzP^3Q^2Q_y + \\
& 3yz^3P^3Q^2Q_y - 9xy^2zP^2Q^3Q_y + 3xz^3P^2Q^3Q_y - 3y^3zPQ^4Q_y + \\
& 3yz^3PQ^4Q_y + 3x^3z^2P^3QP_zQ_y - 3xz^4P^3QP_zQ_y + 4x^2yz^2P^2Q^2P_zQ_y - \\
& 4yz^4P^2Q^2P_zQ_y - xy^2z^2PQ^3P_zQ_y + 3xz^4PQ^3P_zQ_y - 2y^3z^2Q^4P_zQ_y + \\
& 2yz^4Q^4P_zQ_y - x^3z^2P^4Q_zQ_y + xz^4P^4Q_zQ_y + 2x^2yz^2P^3QQ_zQ_y + \\
& 2yz^4P^3QQ_zQ_y + 7xy^2z^2P^2Q^2Q_zQ_y - 5xz^4P^2Q^2Q_zQ_y + 4y^3z^2PQ^3Q_zQ_y - \\
& 4yz^4PQ^3Q_zQ_y + 4x^2z^3P^2Q^2P_yQ_y - 4z^5P^2Q^2P_yQ_y + 2xyz^3PQ^3P_yQ_y - \\
& 2y^2z^3Q^4P_yQ_y + 2z^5Q^4P_yQ_y - x^2z^3P^3QQ_y^2 + z^5P^3QQ_y^2 + xy^3z^3P^2Q^2Q_y^2 + \\
& 2y^2z^3PQ^3Q_y^2 - 2z^5PQ^3Q_y^2 + 2x^3z^2P^3Q^2P_{yz} - 2xz^4P^3Q^2P_{yz} + 6x^2yz^2P^2Q^3P_{yz} - \\
& 2yz^4P^2Q^3P_{yz} + 6xy^2z^2PQ^4P_{yz} - 2xz^4PQ^4P_{yz} + 2y^3z^2Q^5P_{yz} - 2yz^4Q^5P_{yz} - \\
& 2x^3z^2P^4QQ_{yz} + 2xz^4P^4QQ_{yz} - 6x^2yz^2P^3Q^2Q_{yz} + 2yz^4P^3Q^2Q_{yz} - \\
& 6xy^2z^2P^2Q^3Q_{yz} + 2xz^4P^2Q^3Q_{yz} - 2y^3z^2PQ^4Q_{yz} + 2yz^4PQ^4Q_{yz} + x^2z^3P^2Q^3P_{yy} - \\
& z^5P^2Q^3P_{yy} + 2xyz^3PQ^4P_{yy} + y^2z^3Q^5P_{yy} - z^5Q^5P_{yy} - x^2z^3P^3Q^2Q_{yy} + \\
& z^5P^3Q^2Q_{yy} - 2xyz^3P^2Q^3Q_{yy} - y^2z^3PQ^4Q_{yy} + z^5PQ^4Q_{yy} + 3x^3zP^4QP_x - \\
& 3xz^3P^4QP_x + 9x^2yzP^3Q^2P_x - 3yz^3P^3Q^2P_x + 9xy^2zP^2Q^3P_x - 3xz^3P^2Q^3P_x + \\
& 3y^3zPQ^4P_x - 3yz^3PQ^4P_x - 4x^3z^2P^3QP_zP_x + 4xz^4P^3QP_zP_x - 7x^2yz^2P^2Q^2P_zP_x + \\
& 5yz^4P^2Q^2P_zP_x - 2xy^2z^2PQ^3P_zP_x - 2xz^4PQ^3P_zP_x + y^3z^2Q^4P_zP_x - yz^4Q^4P_zP_x + \\
& 2x^3z^2P^4Q_zP_x - 2xz^4P^4Q_zP_x + x^2yz^2P^3QQ_zP_x - 3yz^4P^3QQ_zP_x - \\
& 4xy^2z^2P^2Q^2Q_zP_x + 4xz^4P^2Q^2Q_zP_x - 3y^3z^2PQ^3Q_zP_x + 3yz^4PQ^3Q_zP_x - \\
& 5x^2z^3P^2Q^2P_yP_x + 5z^5P^2Q^2P_yP_x - 4xyz^3PQ^3P_yP_x + y^2z^3Q^4P_yP_x - z^5Q^4P_yP_x + \\
& 3x^2z^3P^3QQ_yP_x - 3z^5P^3QQ_yP_x - 3y^2z^3PQ^3Q_yP_x + 3z^5PQ^3Q_yP_x -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2x^2z^3P^3QP_x^2 + 2z^5P^3QP_x^2 - xyz^3P^2Q^2P_x^2 + y^2z^3PQ^3P_x^2 - z^5PQ^3P_x^2 - \\
& 3x^3zP^5Q_x + 3xz^3P^5Q_x - 9x^2yzP^4QQ_x + 3yz^3P^4QQ_x - 9xy^2zP^3Q^2Q_x + \\
& 3xz^3P^3Q^2Q_x - 3y^3zP^2Q^3Q_x + 3yz^3P^2Q^3Q_x + 2x^3z^2P^4P_zQ_x - 2xz^4P^4P_zQ_x + \\
& x^2yz^2P^3QP_zQ_x - 3yz^4P^3QP_zQ_x - 4xy^2z^2P^2Q^2P_zQ_x + 4xz^4P^2Q^2P_zQ_x - \\
& 3y^3z^2PQ^3P_zQ_x + 3yz^4PQ^3P_zQ_x + 5x^2yz^2P^4Q_zQ_x + yz^4P^4Q_zQ_x + \\
& 10xy^2z^2P^3QQ_zQ_x - 6xz^4P^3QQ_zQ_x + 5y^3z^2P^2Q^2Q_zQ_x - 5yz^4P^2Q^2Q_zQ_x + \\
& 3x^2z^3P^3QP_yQ_x - 3z^5P^3QP_yQ_x - 3y^2z^3PQ^3P_yQ_x + 3z^5PQ^3P_yQ_x - \\
& x^2z^3P^4Q_yQ_x + z^5P^4Q_yQ_x + 4xyz^3P^3QQ_yQ_x + 5y^2z^3P^2Q^2Q_yQ_x - \\
& 5z^5P^2Q^2Q_yQ_x + 2x^2z^3P^4P_xQ_x - 2z^5P^4P_xQ_x - 2xyz^3P^3QP_xQ_x - \\
& 4y^2z^3P^2Q^2P_xQ_x + 4z^5P^2Q^2P_xQ_x + 3xyz^3P^4Q_x^2 + 3y^2z^3P^3QQ_x^2 - \\
& 3z^5P^3QQ_x^2 + 2x^3z^2P^4QP_{xz} - 2xz^4P^4QP_{xz} + 6x^2yz^2P^3Q^2P_{xz} - 2yz^4P^3Q^2P_{xz} + \\
& 6xy^2z^2P^2Q^3P_{xz} - 2xz^4P^2Q^3P_{xz} + 2y^3z^2PQ^4P_{xz} - 2yz^4PQ^4P_{xz} - 2x^3z^2P^5Q_{xz} + \\
& 2xz^4P^5Q_{xz} - 6x^2yz^2P^4QQ_{xz} + 2yz^4P^4QQ_{xz} - 6xy^2z^2P^3Q^2Q_{xz} + 2xz^4P^3Q^2Q_{xz} - \\
& 2y^3z^2P^2Q^3Q_{xz} + 2yz^4P^2Q^3Q_{xz} + 2x^2z^3P^3Q^2P_{xy} - 2z^5P^3Q^2P_{xy} + \\
& 4xyz^3P^2Q^3P_{xy} + 2y^2z^3PQ^4P_{xy} - 2z^5PQ^4P_{xy} - 2x^2z^3P^4QQ_{xy} + 2z^5P^4QQ_{xy} - \\
& 4xyz^3P^3Q^2Q_{xy} - 2y^2z^3P^2Q^3Q_{xy} + 2z^5P^2Q^3Q_{xy} + x^2z^3P^4QP_{xx} - z^5P^4QP_{xx} + \\
& 2xyz^3P^3Q^2P_{xx} + y^2z^3P^2Q^3P_{xx} - z^5P^2Q^3P_{xx} - x^2z^3P^5Q_{xx} + z^5P^5Q_{xx} - \\
& 2xyz^3P^4QQ_{xx} - y^2z^3P^3Q^2Q_{xx} + z^5P^3Q^2Q_{xx}).
\end{aligned}$$

De la ecuación (4.19) obtenemos que los grados de los monomios del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ son $5m_1+m_2-3$, $4m_1+2m_2-3$, $3m_1+3m_2-3$, $2m_1+4m_2-3$ y m_1+5m_2-3 . Podemos ver que si $m_1 \geq m_2$ se cumplen las desigualdades siguientes

$$5m_1+m_2-3 \geq 4m_1+2m_2-3 \geq 3m_1+3m_2-3 \geq 2m_1+4m_2-3 \geq m_1+5m_2-3.$$

Por lo tanto el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $5m_1+m_2-3$ si $m_1 \geq m_2$, y de una manera similar se obtiene que el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es m_1+5m_2-3 si $m_1 \leq m_2$.

Ahora para obtener la cota que nos proporciona el teorema vamos a ver que el polinomio extáctico (4.19) se anula en el origen. Los polinomios P y Q se pueden escribir como polinomios en la variable z de la forma siguiente

$$P(x, y, z) = \sum_{i=0}^{m_1} P_i(x, y)z^i, \quad Q(x, y, z) = \sum_{j=0}^{m_2} Q_j(x, y)z^j,$$

donde P_i y Q_j son polinomios en las variables x, y para todo $i = 0, \dots, m_1$ y $j = 0, \dots, m_2$. Entonces P y Q pueden reescribirse como

$$\begin{aligned}
P(x, y, z) &= P_0(x, y) + zh_1(x, y, z), \\
Q(x, y, z) &= Q_0(x, y) + zh_2(x, y, z),
\end{aligned} \tag{4.20}$$

siendo h_1 y h_2 polinomios en las variables x, y, z . Puesto que $zR = xP + yQ$ y de (4.20) obtenemos $zR = xP_0(x, y) + xzh_1(x, y, z) + yQ_0(x, y) + yzh_2(x, y, z)$. Por lo tanto se debe cumplir que $xP_0(x, y) + yQ_0(x, y) = 0$, esto es $xP_0 = -yQ_0$. Esta última ecuación implica la existencia de polinomios \overline{P}_0 y \overline{Q}_0 tales

que $P_0(x, y) = y\overline{P_0}(x, y)$ y $Q_0(x, y) = x\overline{Q_0}(x, y)$, de modo que $\overline{P_0} = -\overline{Q_0}$. De esta forma, si $h_3(x, y) = \overline{P_0}(x, y) = -\overline{Q_0}(x, y)$, el sistema diferencial asociado al campo vectorial \mathcal{X} puede ser escrito como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= yh_3(x, y) + zh_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= -xh_3(x, y) + zh_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= xh_1(x, y, z) + yh_2(x, y, z).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{X}(x) = yh_3 + zh_1$, $\mathcal{X}(y) = -xh_3 + zh_2$ y $\mathcal{X}(z) = xh_1 + yh_2$, de (4.5) el polinomio extáctico se anula en el origen. Por lo tanto la factorización de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ en factores lineales implica la existencia de al menos un factor sin término independiente y en consecuencia, el plano asociado a este factor interseca el cono en una cónica degenerada, lo cual implica que \mathcal{X} podría tener al menos una cónica degenerada invariante. Por lo tanto la cota máxima de cónicas no degeneradas contenidas en planos invariantes es al menos un grado menor que el grado del polinomio extáctico. Así el teorema queda demostrado. \square

Proposición 4.33. *La cota que proporciona el Teorema 4.32 disminuida en 6 es alcanzable.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ tal que su sistema diferencial asociado está dado por

$$\dot{x} = (x + 1)(y + 1)^{m-2}z, \quad \dot{y} = z^2(y + 1)^{m-2}, \quad \dot{z} = (y + 1)^{m-2}(x + x^2 + yz).$$

De acuerdo con el Teorema 4.32 el número máximo de cónicas no degeneradas invariantes que posee \mathcal{X} es a lo más $6m - 4$. El polinomio extáctico (4.19) para \mathcal{X} es

$$\begin{aligned}\varepsilon_W(\mathcal{X}) &= (x + 1)^2(y + 1)^{6m-12}(2x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 2x^7 + 6x^3yz + 12x^4yz + 6x^5yz - \\ &\quad x^2z^2 - 8x^3z^2 - 13x^4z^2 - 6x^5z^2 + 6x^2y^2z^2 + 6x^3y^2z^2 - 3xyz^3 - 16x^2yz^3 - \\ &\quad 13x^3yz^3 + 2xy^3z^3 - z^4 + 2xz^4 + 11x^2z^4 + 8x^3z^4 - 2y^2z^4 - 7xy^2z^4 + \\ &\quad 6yz^5 + 10xyz^5 - 4z^6 - 5xz^6).\end{aligned}$$

El plano $x + 1 = 0$ es invariante por \mathcal{X} con cofactor $K = z(y + 1)^{m-2}$ y su multiplicidad es 2. También, $y + 1 = 0$ es un plano invariante con $K = z^2(1 + y)^{m-3}$ y tiene multiplicidad $6m - 12$. Además, la intersección de estos planos con el cono produce cónicas no degeneradas. Por lo tanto contando sus multiplicidades obtenemos $6m - 10$ cónicas no degeneradas invariantes, esto es la cota proporcionada por el Teorema 4.32 menos 6. \square

4.6. Hiperboloide de una hoja

Vamos a trabajar con la siguiente forma canónica $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ de un hiperboloide de una hoja. Sea \mathcal{X} un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^3 definido

sobre él. Veremos que la intersección de un plano con el hiperboloide de una hoja, cuando ésta es una cónica degenerada, está formada por un par de rectas que se cruzan, o un par de rectas paralelas; y cuando es no degenerada, por una parábola, una elipse, o una hipérbola.

En las subsecciones siguientes hallamos una cota superior para el número máximo de éstas cónicas degeneradas y no degeneradas invariantes de \mathcal{X} dependiendo de los grados m_1 , m_2 y m_3 .

4.6.1. Rectas invariantes

Sabemos que el hiperboloide de una hoja es una superficie doblemente reglada. Esto es por cada uno de sus puntos pasan exactamente dos rectas que están completamente contenidas en él (ver [3]). Además no existe ninguna otra recta que esté totalmente contenida en él, pues la única superficie cuadrática que contiene tres rectas distintas que pasan a través de cada uno de sus puntos es el plano (para más detalles ver [2, 11]).

Proposición 4.34. *Si la intersección de un hiperboloide de una hoja con un plano es una cónica degenerada, entonces ésta puede ser un par de rectas que se cruzan, o un par de rectas paralelas.*

Demostración. Consideremos el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y un plano $ax + by + cz + d = 0$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ que interseca al hiperboloide en una cónica degenerada.

Primero, supongamos $c \neq 0$ entonces $z = -\frac{ax + by + d}{c}$. Reemplazando en $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección

$$(c^2 - a^2)x^2 - 2abxy + (c^2 - b^2)y^2 - 2adx - 2bdy - c^2 - d^2 = 0.$$

Aplicando la Proposición 4.1 obtenemos $d_1 = c^4(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = 0$ y $d_2 = c^2(c^2 - a^2 - b^2)$. Notemos que $d_1 = 0$ por ser la cónica degenerada, luego $d^2 = a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$. Si $d^2 > 0$, $c^2 < a^2 + b^2$ y por tanto $d_2 < 0$, esto es, la cónica es un par de rectas que se intersecan. Si $d = 0$, resulta $c^2 = a^2 + b^2$ y de aquí $d_2 = 0$; en este caso la cónica degenerada es un par de rectas paralelas.

Ahora consideremos $c = 0$. Entonces la ecuación del plano que interseca al hiperboloide es $ax + by + d = 0$. Si $a \neq 0$, $x = \frac{-by - d}{a}$ y reemplazando en $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección $(b^2 + a^2)y^2 - a^2z^2 + 2bdy + d^2 - a^2 = 0$. Nuevamente por la Proposición 4.1, $d_1 = a^4(a^2 + b^2 - d^2) = 0$ y $d_2 = -a^2(a^2 + b^2) < 0$, de modo que la cónica degenerada es un par de rectas que se cruzan. Si $c = a = 0$, tenemos el plano $by + d = 0$ con $b \neq 0$. Entonces $d_1 = b^2 - d^2 = 0$ y $d_2 = -1 < 0$. En este caso, la cónica degenerada es un par de rectas que se intersecan. \square

Como dijimos, es bien conocido que por cada punto de un hiperboloide de una hoja pasan dos rectas. Proporcionamos una demostración de este

hecho y la expresión explícita de las dos rectas dado que las necesitaremos mas adelante. Notamos que de la ecuación del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ podemos también escribir $x^2 - z^2 = 1 - y^2$, o lo que es lo mismo $(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$.

Proposición 4.35. *Por cada punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ del hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ pasan dos rectas.*

Demostración. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(x_0 - z_0) = \lambda(1 - y_0)$. Si $\mu \neq 0$, de la ecuación del hiperboloide $(x - z)(x + z) = (1 - y)(1 + y)$, se obtiene $\lambda(x_0 + z_0) = \mu(1 + y_0)$ siempre que $1 - y_0 \neq 0$. Si $1 - y_0 = 0$, obtenemos $x_0 - z_0 = 0$ o $x_0 + z_0 = 0$. Si $\mu = 0$ tendríamos $1 - y_0 = 0$ que coincide con el caso anterior.

Ahora tomemos $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(x_0 - z_0) = \lambda(1 + y_0)$. Si $\mu \neq 0$, de la ecuación del hiperboloide obtenemos $\lambda(x_0 + z_0) = \mu(1 - y_0)$ siempre que $1 + y_0 \neq 0$. Si $1 + y_0 = 0$ entonces $x_0 - z_0 = 0$ o $x_0 + z_0 = 0$. Si $\mu = 0$ entonces $1 + y_0 = 0$ que corresponde al caso anterior.

En resumen, si $1 - y_0 \neq 0$ y $1 + y_0 \neq 0$, el punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ está contenido en las rectas $\mu(x - z) - \lambda(1 - y) = 0$, $\mu(1 + y) - \lambda(x + z) = 0$ con $\lambda = \mu(x_0 - z_0)/(1 - y_0)$, y $\mu(x - z) - \lambda(1 + y) = 0$, $\mu(1 - y) - \lambda(x + z) = 0$ con $\lambda = \mu(x_0 - z_0)/(1 + y_0)$. También tenemos que p está sobre las rectas $1 - y = 0$, $x - z = 0$ y $1 - y = 0$, $x + z = 0$ cuando $1 - y_0 = 0$; y finalmente si $1 + y_0 = 0$, p se encuentra sobre las rectas $1 + y = 0$, $x - z = 0$ y $1 + y = 0$, $x + z = 0$. □

Observación 4.36. *De la prueba de la Proposición 4.35 obtenemos que el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ contiene las dos familias de rectas*

$$\begin{array}{ccc} \mu(x - z) - \lambda(1 - y) = 0, & & \mu(x - z) - \lambda(1 + y) = 0, \\ \mu(1 + y) - \lambda(x + z) = 0, & y & \mu(1 - y) - \lambda(x + z) = 0, \end{array} \quad (4.21)$$

(a) (b)

para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Observamos que las rectas $1 - y = 0$, $x + z = 0$ y $1 + y = 0$, $x - z = 0$ pertenecen a la familia (4.21)(a), y las rectas $1 - y = 0$, $x - z = 0$ y $1 + y = 0$, $x + z = 0$ pertenecen a la familia (4.21)(b), y son obtenidas haciendo cero alguno de los parámetros λ o μ .

Para el estudio de las rectas invariantes, de la prueba de la Proposición 4.35 necesitamos solamente considerar la ecuación del plano $\mu(x - z) - \lambda(1 - y) = 0$ o $\mu(x - z) - \lambda(1 + y) = 0$. La familia de planos $\mu(x - z) - \lambda(1 - y) = 0$ para cada $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ interseca al hiperboloide de una hoja en la familia de rectas (4.21)(a) y en la recta $1 - y = 0$, $x - z = 0$ que pertenece a la familia (4.21)(b). De manera similar, la intersección del plano $\mu(x - z) - \lambda(1 + y) = 0$ y el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ para cada $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ es un par de rectas paralelas o intersecantes de la familia (4.21)(b) y la recta $1 + y = 0$, $x - z = 0$.

Si $\mathcal{X} = (P, Q, R)$ es un campo vectorial definido sobre el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, se satisface que $zR = xP + yQ$, y por lo tanto $\mathcal{X} = (P, Q, (xP + yQ)/z)$.

Proposición 4.37. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el hiperboloide de una hoja que poseen infinitas rectas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Vamos a determinar \mathcal{X} definido sobre el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ tal que todas las rectas de la familia (4.21)(a) sean invariantes por \mathcal{X} . Sea $W = \langle x - z, 1 - y \rangle$. El polinomio extáctico de \mathcal{X} asociado a W está dado por

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = \begin{vmatrix} x - z & 1 - y \\ \mathcal{X}(x - z) & \mathcal{X}(1 - y) \end{vmatrix} = (1 - y)(x - z)P + (y - y^2 - xz + z^2)Q. \quad (4.22)$$

Como nos interesa que \mathcal{X} posea infinitas rectas invariantes necesitamos que $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 0$. Entonces de (4.22) deben existir polinomios P_1 y Q_1 tales que $P = (y - y^2 - xz + z^2)P_1$ y $Q = (y - 1)(x - z)Q_1$. Por lo tanto obtenemos que $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = (P_1 - Q_1)(y - 1)(x - z)(y - y^2 - xz + z^2) = 0$. De modo que podemos tomar $P_1 = Q_1 = 1$ y conseguimos el campo vectorial \mathcal{X} con

$$P = y - y^2 - xz + z^2, \quad Q = (y - 1)(x - z), \quad R = -x^2 + y - y^2 + xz. \quad (4.23)$$

Ahora verificamos que las rectas de la familia (4.21)(a) son invariantes por \mathcal{X} para todo $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Sea $f = \mu(x - z) + \lambda(1 - y) = 0$, entonces $\mathcal{X}f = (x - z)(\mu(x - z) + \lambda(1 - y))$, por tanto $f = 0$ es un plano invariante con cofactor $K = x - z$ para todo $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. En consecuencia el campo vectorial (4.23) posee infinitas rectas invariantes de ecuación (4.21)(a). \square

Teorema 4.38. *Supongamos que el campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ tiene un número finito de rectas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces el número máximo de rectas invariantes contenidas en planos invariantes de \mathcal{X} de cada una de las familias de la ecuación (4.21) es a lo más*

$$\begin{aligned} & m_1 + 1 \text{ si } m_1 \geq m_2, \\ & m_2 + 1 \text{ si } m_1 \leq m_2, \end{aligned}$$

Demostración. Sean $W_1 = \langle x - z, 1 - y \rangle$ y $W_2 = \langle x - z, 1 + y \rangle$. Los polinomios algebraicos extácticos de \mathcal{X} asociados a W_1 y a W_2 están dados por

$$\varepsilon_{W_1}(\mathcal{X}) = \begin{vmatrix} x - z & 1 - y \\ \mathcal{X}(x - z) & \mathcal{X}(1 - y) \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_{W_2}(\mathcal{X}) = \begin{vmatrix} x - z & 1 + y \\ \mathcal{X}(x - z) & \mathcal{X}(1 + y) \end{vmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $zR = xP + yQ$, $\mathcal{X}(x - z) = P - R$ y $\mathcal{X}(1 \pm y) = \pm Q$ resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon_{W_1}(\mathcal{X}) &= -\frac{1}{z} (P(-x + xy + z - yz) + Q(-y + y^2 + xz - z^2)), \quad (4.24) \\ \varepsilon_{W_2}(\mathcal{X}) &= \frac{1}{z} (P(x + xy - z - yz) + Q(y + y^2 + xz - z^2)). \end{aligned}$$

De estas expresiones se obtiene que los grados de los monomios de los polinomios $\varepsilon_{W_1}(\mathcal{X})$ y $\varepsilon_{W_2}(\mathcal{X})$ son $m_1, m_1 + 1, m_2$ y $m_2 + 1$. Por lo tanto ambos polinomios tienen el mismo grado $m_1 + 1$ si $m_1 \geq m_2$, o $m_2 + 1$ si $m_1 \leq m_2$. Sabemos por la Proposición 3.1 que el grado del polinomio extáctico ε_{W_1} proporciona una cota superior para el número de planos invariantes $f = 0$ de \mathcal{X} con $f \in W_1$. Como hemos mencionado antes, de la prueba de la Proposición 4.35, la intersección de los planos $\mu(x - z) + \lambda(1 - y) = 0$ y el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ es la familia de rectas (4.21)(a) y la recta $1 - y = 0, x - z = 0$. Dado que esta última es una recta de la familia (4.21)(b) obtenemos que el número máximo de rectas invariantes de la forma (4.21)(a) corresponde al grado del polinomio $\varepsilon_{W_1}(\mathcal{X})$. De manera similar se prueba que el número máximo de rectas invariantes de la forma (4.21)(b) es el grado del polinomio $\varepsilon_{W_2}(\mathcal{X})$. Por lo tanto el teorema queda demostrado. \square

Proposición 4.39. *La cota proporcionada por el Teorema 4.38 para las cónicas degeneradas invariantes de la familia (4.21)(a) es alcanzable.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ cuyo sistema diferencial asociado es

$$\dot{x} = z \prod_{i=1}^{m-1} (\mu_i(x - z) - \lambda_i(1 - y)), \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = x \prod_{i=1}^{m-1} (\mu_i(x - z) - \lambda_i(1 - y)),$$

con $m \in \mathbb{N}$. De acuerdo con el Teorema 4.38 el número máximo de cónicas degeneradas invariantes que posee este campo vectorial \mathcal{X} es a lo más $m + 1$ para cada una de las familias de rectas de la ecuación (4.21). Verifiquemos que \mathcal{X} alcanza la cota para la familia de rectas (4.21)(a). El polinomio extáctico (4.24) para \mathcal{X} asociado a W_1 es

$$\varepsilon_{W_1}(\mathcal{X}) = (1 - y)(x - z) \prod_{i=1}^{m-1} (\mu_i(x - z) - \lambda_i(1 - y)).$$

Los planos $1 \pm y = 0$ son invariantes por \mathcal{X} puesto que la función y es una integral primera de \mathcal{X} , $x - z = 0$ es invariante con cofactor $K = - \prod_{i=1}^{m-1} (\mu_i(x - z) - \lambda_i(1 - y))$ y los planos $\mu_i(x - z) - \lambda_i(1 - y) = 0$ con $i = 1, \dots, m - 1$ son invariantes con cofactores $K = \mu_i(z - x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-1} (\mu_j(x - z) - \lambda_j(1 - y))$ respectivamente. Así sumando el número de planos invariantes de \mathcal{X} obtenemos $m + 1$ rectas invariantes de la familia de rectas (4.21)(a). \square

De forma similar podemos obtener un campo vectorial polinomial que alcanza la cota proporcionada por el Teorema 4.38 para la familia (4.21)(b).

4.6.2. Cónicas no degeneradas invariantes

En esta subsección trabajamos con las cónicas no degeneradas que resultan de la intersección de un plano con el hiperboloide de una hoja.

Proposición 4.40. *Si la intersección de un hiperboloide de una hoja con un plano es una cónica no degenerada, entonces ésta es una parábola, una elipse o una hipérbola.*

Demostración. Consideremos el hiperboloide de una hoja cuya ecuación es $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y supongamos que $ax + by + cz + d = 0$ es un plano que interseca al hiperboloide de una hoja. Si $c \neq 0$, entonces $z = -\frac{ax + by + d}{c}$. Reemplazando en $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección

$$(c^2 - a^2)x^2 - 2abxy + (c^2 - b^2)y^2 - 2adx - 2bdy - c^2 - d^2 = 0.$$

Por la Proposición 4.1 tenemos que $d_1 = c^4(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$ y $d_2 = c^2(c^2 - a^2 - b^2)$. Notemos que $d_1 \neq 0$ puesto que la cónica intersección es no degenerada, luego $a^2 + b^2 \neq c^2 + d^2$. Además, si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $d_2 = 0$, y, por lo tanto, la cónica es una parábola; si $c^2 > a^2 + b^2$, $d_2 > 0$ y la cónica obtenida es una elipse; si $c^2 < a^2 + b^2$, tenemos $d_2 < 0$, y la cónica es una hipérbola.

Ahora consideremos $c = 0$, entonces el plano intersección es $ax + by + d = 0$. Sea $a \neq 0$, luego $x = -\frac{by + d}{a}$. Reemplazando en $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ obtenemos que la ecuación de la cónica intersección es $(a^2 + b^2)y^2 - a^2z^2 + 2bdy + d^2 - a^2 = 0$. Luego $d_1 = a^4(a^2 + b^2 - d^2) \neq 0$ y $d_2 = -a^2(a^2 + b^2) < 0$, y por lo tanto, siempre que $d^2 \neq a^2 + b^2$, la cónica es una hipérbola.

Si $c = a = 0$, la ecuación del plano intersección es $by + d = 0$. Considerando $b \neq 0$ tenemos que $y = -d/b$. Reemplazando en $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ obtenemos $b^2x^2 - b^2z^2 + d^2 - b^2 = 0$. Aquí, $d_1 = b^4(b^2 - d^2) \neq 0$ y $d_2 = -b^4 < 0$. Por lo tanto en este caso, siempre que $b^2 \neq d^2$ la cónica intersección es también una hipérbola. En consecuencia hemos probado que la intersección del hiperboloide de una hoja y un plano, en caso que la cónica obtenida sea no degenerada, puede ser una elipse, una parábola o una hipérbola. \square

Proposición 4.41. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el hiperboloide de una hoja que poseen infinitas cónicas no degeneradas invariantes.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ con sistema diferencial asociado

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -z, \quad \dot{z} = -y.$$

Como $\dot{x} = 0$, los planos $f = x + a = 0$ con $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq \pm 1$ son invariantes por \mathcal{X} . Estos planos intersecan al hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en hipérbolas (ver Proposición 4.40). Por lo tanto, el campo vectorial \mathcal{X} posee infinitas cónicas no degeneradas invariantes. \square

La prueba del siguiente teorema es esencialmente la misma que la del Teorema 4.32 para campos definidos sobre el cono, pero en este caso no podemos restar uno al grado del polinomio extáctico, como lo hacíamos allí, pues aunque éste se anula en el origen, cualquier plano que pase por este punto no determina una cónica degenerada, de modo que aquí no podemos excluir estos planos cuando establecemos la cota para cónicas no degeneradas.

Teorema 4.42. *Supongamos que el campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ tiene un número finito de cónicas invariantes. Entonces el número máximo de cónicas no degeneradas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades, es a lo más*

$$\begin{aligned} 5m_1 + m_2 - 3 & \quad \text{si } m_1 \geq m_2, \\ m_1 + 5m_2 - 3 & \quad \text{si } m_1 \leq m_2. \end{aligned}$$

Proposición 4.43. *La cota del Teorema 4.42 disminuida en uno es alcanzable.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ cuyo sistema diferencial asociado es

$$\dot{x} = z(x^2 - y^2)x^{m-3}, \quad \dot{y} = -zy(x^2 - y^2)x^{m-4}, \quad \dot{z} = (x^2 - y^2)^2x^{m-4},$$

con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$. De acuerdo con el Teorema 4.42 el número máximo de cónicas no degeneradas invariantes que posee \mathcal{X} es a lo más $6m - 3$. Verifiquemos que este campo vectorial alcanza esta cota disminuida en uno. El polinomio extáctico $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ dado en la ecuación (4.5) para \mathcal{X} es

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 6x^{6m-23}yz(x-y)^7(x+y)^7(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z)(x+y+z).$$

Los planos $x = 0$ y $y = 0$ son invariantes por \mathcal{X} con cofactor $K = \pm x^{m-4}(x-y)(x+y)z$ respectivamente. También $x \pm y = 0$ son planos invariantes con cofactor $K = x^{m-4}(x \mp y)^2z$ respectivamente. Los planos $x - y \pm z = 0$ son invariantes con $K = \pm x^{m-4}(x-y)(x+y)^2$ respectivamente, y $x + y \pm z = 0$ son invariantes con cofactor $K = \pm x^{m-4}(x-y)^2(x+y)$ respectivamente. Por último, $z = 0$ no es un plano invariante de \mathcal{X} . En consecuencia obtenemos $6m - 4$ planos invariantes. Dado que ninguno de estos planos tienen la forma de las ecuaciones de (4.21) se obtiene que ellos intersecan al hiperboloide de una hoja en cónicas no degeneradas. De lo cual la proposición se sigue. \square

4.7. Paraboloide hiperbólico

En esta sección usaremos la siguiente forma canónica $x = y^2 - z^2$ de un paraboloides hiperbólico. Sea \mathcal{X} un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^3 definido sobre él. Veremos que la intersección de un plano y el paraboloides hiperbólico

es un par de rectas que se cruzan o un par de rectas paralelas, cuando la cónica es degenerada; o una parábola o una hipérbola si la cónica es no degenerada.

En las subsecciones siguientes hallamos una cota superior para el número máximo cónicas degeneradas y no degeneradas invariantes de \mathcal{X} , dependiendo de los grados m_1 , m_2 y m_3 .

4.7.1. Rectas invariantes

Al igual que el hiperboloide de una hoja, el paraboloide hiperbólico es una superficie doblemente reglada, recordemos que esto significa que por cada uno de sus puntos pasan exactamente dos rectas que están completamente contenidas en él (ver [3, 2]).

Proposición 4.44. *Si la intersección de un paraboloide hiperbólico con un plano es una cónica degenerada, entonces ésta puede ser un par de rectas que se cruzan o un par de rectas paralelas.*

Demostración. Consideremos el paraboloide hiperbólico cuya ecuación es $x = y^2 - z^2$ y un plano $ax + by + cz + d = 0$ que interseca al paraboloide. Supongamos que $c \neq 0$, entonces $z = -(ax + by + d)/c$. Reemplazando en $x = y^2 - z^2$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección $a^2x^2 + 2abxy + (b^2 - c^2)y^2 + (c^2 + 2ad)x + 2bdy + d^2 = 0$. Por la Proposición 4.4 y puesto que la cónica es degenerada, $d_1 = c^4(c^2 - b^2 + 4ad) = 0$ y $d_2 = -a^2c^2$. De modo que $4ad = b^2 - c^2$ y $d_2 \leq 0$. Entonces la cónica intersección es un par de rectas que se cruzan si $a \neq 0$ o un par de rectas paralelas si $a = 0$.

Ahora consideremos $c = 0$. Entonces la ecuación del plano que interseca al paraboloide toma la forma $ax + by + d = 0$. Considerando $b \neq 0$, despejando y en la ecuación anterior y reemplazando en $x = y^2 - z^2$ obtenemos que la ecuación de la cónica intersección es $-d^2 + b^2x - 2ad - a^2x^2 + b^2z^2 = 0$. Nuevamente por la Proposición 4.4 tenemos $d_1 = 0$ y $d_2 = 0$. Por lo tanto la cónica degenerada es un par de rectas paralelas.

Si $c = b = 0$, obtenemos el plano $ax + d = 0$. Suponiendo $a \neq 0$, $x = -d/a$ y reemplazando en $x = y^2 - z^2$ obtenemos $-ay^2 + az^2 - d = 0$. Luego, $d_1 = a^2d = 0$ y $d_2 = -a^2 < 0$, de lo cual $d = 0$, así que el plano $x = 0$ interseca al paraboloide hiperbólico $x = y^2 - z^2$ en un par de rectas que se cruzan. \square

Como dijimos antes, es conocido que por cada punto del paraboloide hiperbólico pasan dos rectas. En la siguiente proposición damos una prueba de este hecho pues nos permite obtener las ecuaciones de las dos rectas, que serán usadas en adelante.

Proposición 4.45. *Por cada punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ del paraboloide hiperbólico $x = y^2 - z^2$ pasan dos rectas.*

Demostración. Si $x_0 = 0$, el punto p está sobre las dos rectas $x = 0, y - z = 0$ y $x = 0, y + z = 0$.

Si $x_0 \neq 0$ entonces existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $y_0 + z_0 = \lambda x_0$. De la ecuación del paraboloides, $y_0 - z_0 = 1/\lambda$. Por lo tanto el punto p está sobre la recta $y + z = \lambda x, y - z = 1/\lambda$ con $\lambda = (y_0 + z_0)/x_0$.

Por otro lado, si $x_0 \neq 0$, entonces existe $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $y_0 - z_0 = \mu x_0$. De la ecuación del paraboloides, $y_0 + z_0 = 1/\mu$. Por lo tanto p está sobre la recta $y - z = \mu x, y + z = 1/\mu$ con $\mu = (y_0 - z_0)/x_0$. \square

Observación 4.46. *De la demostración de la Proposición 4.45 se obtiene que el paraboloides hiperbólico $x = y^2 - z^2$ contiene las dos familias de rectas*

$$\begin{array}{ll} y + z = \lambda x & y + z = 0 \\ y - z = 1/\lambda, & x = 0 \end{array} \quad (4.25)$$

(a) (b)

y,

$$\begin{array}{ll} y - z = \mu x & y - z = 0 \\ y + z = 1/\mu, & x = 0 \end{array} \quad (4.26)$$

(a) (b)

con $\lambda \neq 0$ y $\mu \neq 0$.

Como vamos a estudiar las rectas invariantes, de la demostración de la Proposición 4.45 sólo nos hace falta considerar los planos de ecuaciones $y + z - \lambda x = 0$ o $y - z - \mu x = 0$. La familia de planos $y + z - \lambda x = 0$ corta al paraboloides hiperbólico en la familia de rectas (4.25(a)) cuando $\lambda \neq 0$ y $x \neq 0$, y en la recta (4.25(b)) cuando $\lambda = 0$. Mientras que la familia de planos $y - z - \mu x = 0$ interseca al paraboloides hiperbólico en la familia de rectas (4.26(a)) siempre que $\mu \neq 0$ y $x \neq 0$, y en la recta (4.26(b)) cuando $\mu = 0$.

Sea $\mathcal{X} = (P, Q, R)$ un campo vectorial polinomial definido sobre el paraboloides hiperbólico $x - y^2 + z^2 = 0$. Se cumple que $P = 2(yQ - zR)$, así $\mathcal{X} = (2(yQ - zR), Q, R)$.

Proposición 4.47. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el paraboloides hiperbólico que poseen infinitas rectas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Vamos a determinar \mathcal{X} de modo que todas las rectas de la familia (4.25(a)) sean invariantes por \mathcal{X} . Consideremos $W_1 = \langle x, y + z \rangle$, de modo que si $f = y + z - \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$ entonces $f \in W_1$. El polinomio extáctico de \mathcal{X} asociado a W_1 es

$$\begin{aligned} \varepsilon_{W_1}(\mathcal{X}) &= \begin{vmatrix} y + z & x \\ \mathcal{X}(y + z) & \mathcal{X}(x) \end{vmatrix} \\ &= x(Q + R) - 2(y + z)(yQ - zR) \\ &= (x - 2y^2 - 2yz)Q + (x + 2yz + 2z^2)R. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Como nos interesa que \mathcal{X} posea infinitas rectas es necesario que $\varepsilon_{W_1}(\mathcal{X}) = 0$. Luego, por (4.27) deben existir polinomios Q_1 y R_1 tales que $Q = (x + 2yz + 2z^2)Q_1$ y $R = (x - 2y^2 - 2yz)R_1$. Por lo tanto $\varepsilon_{W_1}(\mathcal{X}) = (Q_1 + R_1)(x - 2y^2 - 2yz)(x + 2yz + 2z^2)$. Así, podemos tomar $Q_1 = 1$ y $R_1 = -1$ y conseguimos el campo vectorial cuyo sistema diferencial asociado es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2z(x - 2y^2 - 2yz) + 2y(x + 2yz + 2z^2), \\ \dot{y} &= x + 2yz + 2z^2, \\ \dot{z} &= -x + 2y^2 + 2yz.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Ahora verifiquemos que todas las rectas (4.25(a)) son invariantes por \mathcal{X} . Sea $f = y + z - \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{X}f = 2(y + z)(y + z - \lambda x)$, por tanto $f = 0$ es un plano invariante con cofactor $K = 2(y + z)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. En consecuencia el campo vectorial cuyo sistema diferencial asociado es (4.28) tiene infinitas rectas invariantes. \square

Teorema 4.48. *Supongamos que el campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre el paraboloides hiperbólico $x = y^2 - z^2$ tiene un número finito de rectas invariantes. Entonces el número máximo de rectas contenidas en planos invariantes de \mathcal{X} de cada familia (4.25) y (4.26), es a lo más*

$$\begin{aligned}2 + m_2 & \quad \text{si } m_2 \geq m_3, \\ 2 + m_3 & \quad \text{si } m_2 \leq m_3.\end{aligned}$$

Demostración. Sean $W_1 = \langle x, y + z \rangle$ y $W_2 = \langle x, y - z \rangle$, calculemos los polinomios extácticos $\varepsilon_{W_1}(\mathcal{X})$ y $\varepsilon_{W_2}(\mathcal{X})$ y sus grados correspondientes. Como

$$\varepsilon_{W_1}(\mathcal{X}) = \begin{vmatrix} x & y + z \\ \mathcal{X}(x) & \mathcal{X}(y + z) \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_{W_2}(\mathcal{X}) = \begin{vmatrix} x & y - z \\ \mathcal{X}(x) & \mathcal{X}(y - z) \end{vmatrix}$$

y sabiendo que $P = 2(yQ - zR)$, desarrollamos los dos determinantes anteriores obteniendo $\varepsilon_{W_1}(\mathcal{X}) = x(Q + R) - 2(y + z)(yQ - zR)$ y $\varepsilon_{W_2}(\mathcal{X}) = x(Q - R) - 2(y - z)(yQ - zR)$.

Los grados de los monomios de $\varepsilon_{W_1}(\mathcal{X})$ y $\varepsilon_{W_2}(\mathcal{X})$ son $1 + m_2$, $2 + m_2$, $1 + m_3$, $2 + m_3$. Por lo tanto el grado de ambos polinomios es $2 + m_2$ si $m_2 \geq m_3$ o $2 + m_3$ si $m_2 \leq m_3$; y de aquí se obtiene el número máximo de rectas invariantes descrito en el enunciado del teorema. \square

Proposición 4.49. *La cota proporcionada por el Teorema 4.48 es alcanzable por la familia de rectas (4.26).*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el paraboloides hiperbólico $x = y^2 - z^2$ cuyo sistema diferencial asociado es

$$\dot{x} = 2(y - z) \prod_{i=1}^m (y - z - \mu_i x), \quad \dot{y} = \prod_{i=1}^m (y - z - \mu_i x), \quad \dot{z} = \prod_{i=1}^m (y - z - \mu_i x),$$

con $m \in \mathbb{N}$ y $\mu_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \dots, m$. De acuerdo con el Teorema 4.48 el número máximo de cónicas degeneradas invariantes que posee \mathcal{X} es a lo más $m + 2$. Consideremos $W_2 = \langle x, y - z \rangle$ y el polinomio extáctico asociado $\varepsilon_{W_2}(\mathcal{X}) = -2(y - z)^2 \prod_{i=1}^m (y - z - \mu_i x)$. Los planos $y - z - \mu_i x = 0$ para todo

$\mu_i \in \mathbb{R}$ son invariantes por \mathcal{X} con cofactor $K = -2(y - z) \mu_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (y - z - \mu_j x)$.

Además, el plano $y - z = 0$ también es invariante por \mathcal{X} puesto que \mathcal{X} se anula en él y este plano tiene multiplicidad 2. Por lo tanto obtenemos $m + 2$ rectas invariantes del campo vectorial, esto es, el número máximo proporcionado por el Teorema 4.48. \square

4.7.2. Cónicas no degeneradas invariantes

En esta sección estudiamos el número máximo de cónicas no degeneradas invariantes de campos vectoriales polinomiales definidos sobre el paraboloides hiperbólico $x = y^2 - z^2$ que viven en planos invariantes del campo vectorial.

Proposición 4.50. *Si la intersección de un paraboloides hiperbólico con un plano es una cónica no degenerada entonces ésta es una parábola o una hipérbola.*

Demostración. Consideremos el paraboloides hiperbólico $x = y^2 - z^2$. Si $ax + by + cz + d = 0$ es un plano que interseca al paraboloides hiperbólico con $c \neq 0$ entonces $z = -\frac{ax + by + d}{c}$. Reemplazando en $x = y^2 - z^2$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección $a^2 x^2 + 2abxy + (b^2 - c^2)y^2 + (c^2 + 2ad)x + 2bdy + d^2 = 0$. Por la Proposición 4.1 y puesto que la cónica es no degenerada, obtenemos $d_1 = c^4 \left(\frac{c^2 - b^2}{4} + ad \right) \neq 0$ y $d_2 = -a^2 c^2$. Luego, $ad \neq \frac{1}{4}(b^2 - c^2)$. Además, si $a = 0$, entonces $d_2 = 0$, por tanto la cónica es una parábola; si $a \neq 0$, $d_2 < 0$ y en este caso la cónica obtenida es una hipérbola.

Ahora consideremos $c = 0$, entonces el plano intersección es $ax + by + d = 0$. Sea $b \neq 0$, luego $y = -\frac{ax + d}{b}$. Reemplazando en $x = y^2 - z^2$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección $-a^2 x^2 + b^2 z^2 + (b^2 - 2ad)x - d^2 = 0$. Realizando los cálculos para d_1 y d_2 resulta que $d_1 = -\frac{1}{4}b^4(b^2 - 4ad) \neq 0$ y $d_2 = -a^2 b^2$. Por lo tanto si $a = 0$ la cónica es una parábola y obtenemos una hipérbola cuando $a \neq 0$ pues en este caso $d_2 < 0$.

Si $c = b = 0$, la ecuación del plano intersección es $ax + d = 0$. Además si $a \neq 0$, entonces $x = -d/a$. Reemplazando en $x = y^2 - z^2$ obtenemos, para este caso, la ecuación de la cónica intersección $-d - ay^2 + az^2 = 0$. Aquí $d_1 = a^2 d \neq 0$ y $d_2 = -a^2 < 0$, de lo cual se deduce que la cónica intersección es una hipérbola siempre que $d \neq 0$. En consecuencia hemos probado que la

intersección del paraboloides hiperbólico con un plano, en caso que la cónica obtenida sea no degenerada, es una parábola o una hipérbola. \square

Proposición 4.51. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el paraboloides hiperbólico que poseen infinitas cónicas no degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el paraboloides hiperbólico $x = y^2 - z^2$ cuyo sistema diferencial asociado es

$$\dot{x} = 2yQ, \quad \dot{y} = Q, \quad \dot{z} = 0.$$

Como $\dot{z} = 0$ los planos $f = z - a = 0$, con $a \in \mathbb{R}$, son invariantes por \mathcal{X} . Todos estos planos intersecan al paraboloides en una parábola, por lo tanto, \mathcal{X} posee infinitas cónicas no degeneradas invariantes. \square

Teorema 4.52. *Supongamos que el campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre el paraboloides hiperbólico $x = y^2 - z^2$ tiene un número finito de cónicas no degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces el número máximo de cónicas no degeneradas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades, es a lo más*

$$\begin{aligned} m_2 + 5m_3 & \quad \text{si } m_2 \leq m_3, \\ 5m_2 + m_3 & \quad \text{si } m_2 \geq m_3. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $W = \langle 1, x, y, z \rangle$. El polinomio extáctico de \mathcal{X} asociado a W está dado por la ecuación (4.5). Teniendo en cuenta que $P = 2(yQ - zR)$, $\mathcal{X}(x) = P$, $\mathcal{X}(y) = Q$ y $\mathcal{X}(z) = R$ desarrollamos $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ obteniendo

$$\begin{aligned} \varepsilon_W(\mathcal{X}) = & -2(3QR^3Q_z^2 - 4Q^2R^2Q_zR_z - 2R^4Q_zR_z + Q^3RR_z^2 + 2QR^3R_z^2 - \\ & Q^2R^3Q_{zz} + R^5Q_{zz} + Q^3R^2R_{zz} - QR^4R_{zz} + 5Q^2R^2Q_zQ_y + R^4Q_zQ_y - \\ & 3Q^3RR_zQ_y - 3QR^3R_zQ_y + 2Q^3RQ_y^2 + QR^3Q_y^2 - 3Q^3RQ_zR_y - \\ & 3QR^3Q_zR_y + Q^4R_zR_y + 5Q^2R^2R_zR_y - 2Q^4Q_yR_y - 4Q^2R^2Q_yR_y + \\ & 3Q^3RR_y^2 - 2Q^3R^2Q_{yz} + 2QR^4Q_{yz} + 2Q^4RR_{yz} - 2Q^2R^3R_{yz} - Q^4RQ_{yy} + \\ & Q^2R^3Q_{yy} + Q^5R_{yy} - Q^3R^2R_{yy} - 2Q^4RQ_x + 4Q^2R^3Q_x - 2R^5Q_x + \\ & 10yQ^2R^2Q_zQ_x - 12zQR^3Q_zQ_x + 2yR^4Q_zQ_x - 6yQ^3RR_zQ_x + \\ & 8zQ^2R^2R_zQ_x - 6yQR^3R_zQ_x + 4zR^4R_zQ_x + 8yQ^3RQ_yQ_x - 10zQ^2R^2Q_yQ_x + \\ & 4yQR^3Q_yQ_x - 2zR^4Q_yQ_x - 4yQ^4R_yQ_x + 6zQ^3RR_yQ_x - 8yQ^2R^2R_yQ_x + \\ & 6zQR^3R_yQ_x + 8y^2Q^3RQ_x^2 - 20yzQ^2R^2Q_x^2 + 4y^2QR^3Q_x^2 + 12z^2QR^3Q_x^2 - \\ & 4yzR^4Q_x^2 + 2Q^5R_x - 4Q^3R^2R_x + 2QR^4R_x - 6yQ^3RQ_zR_x + \\ & 8zQ^2R^2Q_zR_x - 6yQR^3Q_zR_x + 4zR^4Q_zR_x + 2yQ^4R_zR_x - 4zQ^3RR_zR_x + \\ & 10yQ^2R^2R_zR_x - 8zQR^3R_zR_x - 4yQ^4Q_yR_x + 6zQ^3RQ_yR_x - 8yQ^2R^2Q_yR_x + \\ & 6zQR^3Q_yR_x - 2zQ^4R_yR_x + 12yQ^3RR_yR_x - 10zQ^2R^2R_yR_x - 8y^2Q^4Q_xR_x + \\ & 24yzQ^3RQ_xR_x - 16y^2Q^2R^2Q_xR_x - 16z^2Q^2R^2Q_xR_x + 24yzQR^3Q_xR_x - \\ & 8z^2R^4Q_xR_x - 4yzQ^4R_x^2 + 12y^2Q^3RR_x^2 + 4z^2Q^3RR_x^2 - 20yzQ^2R^2R_x^2 + \\ & 8z^2QR^3R_x^2 - 4yQ^3R^2Q_{xz} + 4zQ^2R^3Q_{xz} + 4yQR^4Q_{xz} - 4zR^5Q_{xz} + \\ & 4yQ^4RR_{xz} - 4zQ^3R^2R_{xz} - 4yQ^2R^3R_{xz} + 4zQR^4R_{xz} - 4yQ^4RQ_{xy} + \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
 & 4zQ^3R^2Q_{xy} + 4yQ^2R^3Q_{xy} - 4zQR^4Q_{xy} + 4yQ^5R_{xy} - 4zQ^4RR_{xy} - \\
 & 4yQ^3R^2R_{xy} + 4zQ^2R^3R_{xy} - 4y^2Q^4RQ_{xx} + 8yzQ^3R^2Q_{xx} + 4y^2Q^2R^3Q_{xx} - \\
 & 4z^2Q^2R^3Q_{xx} - 8yzQR^4Q_{xx} + 4z^2R^5Q_{xx} + 4y^2Q^5R_{xx} - 8yzQ^4RR_{xx} - \\
 & 4y^2Q^3R^2R_{xx} + 4z^2Q^3R^2R_{xx} + 8yzQ^2R^3R_{xx} - 4z^2QR^4R_{xx}
 \end{aligned}$$

De esta expresión obtenemos que los grados de los monomios del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ son $3m_2 + 3m_3 - 2$, $m_2 + 5m_3 - 2$, $2m_2 + 4m_3 - 2$, $4m_2 + 2m_3 - 2$, $5m_2 + m_3 - 2$, $5m_2 + m_3 - 1$, $3m_2 + 3m_3 - 1$, $m_2 + 5m_3 - 1$, $4m_2 + 2m_3 - 1$, $2m_2 + 4m_3 - 1$, $5m_2 + m_3$, $4m_2 + 2m_3$, $3m_2 + 3m_3$, $2m_2 + 4m_3$ y $m_2 + 5m_3$. Así,

$$\text{grado}(\varepsilon_W(\mathcal{X})) = \max\{5m_2 + m_3, 4m_2 + 2m_3, 3m_2 + 3m_3, 2m_2 + 4m_3, m_2 + 5m_3\}.$$

Podemos ver que si $m_2 \leq m_3$, las desigualdades siguientes se cumplen

$$5m_2 + m_3 \leq 4m_2 + 2m_3 \leq 3m_2 + 3m_3 \leq 4m_3 + 2m_2 \leq m_2 + 5m_3.$$

Por lo tanto el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es

$$\begin{aligned}
 & m_2 + 5m_3 \quad \text{si } m_2 \leq m_3, \\
 & 5m_2 + m_3 \quad \text{si } m_2 \geq m_3.
 \end{aligned}$$

Estos valores nos proporcionan una cota para el número máximo de planos invariantes (contando sus multiplicidades) que intersecan al paraboloides hiperbólico $x = y^2 - z^2$. De modo que el teorema queda demostrado. \square

Proposición 4.53. *La cota del Teorema 4.52 disminuida en cuatro es alcanzable.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el paraboloides hiperbólico $x = y^2 - z^2$ cuyo sistema diferencial asociado está dado por

$$\dot{x} = -4y^3z^{m-2}, \quad \dot{y} = -y^2z^{m-2}, \quad \dot{z} = y^3z^{m-3},$$

con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$. De acuerdo con el Teorema 4.52 el número máximo de cónicas no degeneradas invariantes que posee \mathcal{X} es a lo más $6m$. Verifiquemos que este campo vectorial alcanza esta cota disminuida en cuatro. El polinomio extáctico (4.29) para \mathcal{X} es

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 12y^{13}z^{6m-17}(y^2 + z^2). \quad (4.30)$$

El plano $y = 0$ es invariante con cofactor $K = -yz^{m-2}$ y $z = 0$ también es invariante con cofactor $K = y^3z^{m-4}$. En consecuencia obtenemos $6m - 4$ planos reales invariantes, contando sus multiplicidades. Dado que ninguno de estos planos tienen la forma de las ecuaciones (4.25) o (4.26) obtenemos que ellos intersecan al paraboloides hiperbólico en cónicas no degeneradas.

Otro sistema diferencial cuyo campo vectorial asociado también alcanza la cota $6m - 4$ para el número máximo de cotas no degeneradas invariantes es el siguiente

$$\dot{x} = 4yz(y-x-1)^{m-1}, \quad \dot{y} = z(y-x-1)^{m-1}, \quad \dot{z} = -y(y-x-1)^{m-1}, \quad (4.31)$$

con $m \in \mathbb{N}$. Su polinomio extáctico (4.29) es $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 12y(y-x-1)^{6m-6}z(y^2+z^2)$. Los planos $y = 0$, $y - x - 1 = 0$ y $z = 0$ son invariantes e intersecan al paraboloide en cónicas no degeneradas. De modo que teniendo en cuenta sus multiplicidades obtenemos $6m - 4$ cónicas no degeneradas invariantes. \square

Dado que estamos considerando campos vectoriales polinomiales reales y sus curvas invariantes reales también, en la prueba de la Proposición 4.53 no consideramos los dos planos complejos que se obtienen del factor $y^2 + z^2$ en el polinomio extáctico (4.30). Sin embargo, los planos $y \pm iz = 0$ son invariantes, de modo que si pensamos el campo vectorial en los complejos y tenemos en cuenta sus dos cónicas invariantes complejas obtenidas de la intersección de estos planos y el paraboloide obtenemos la cota $6m - 2$ para el número de cónicas no degeneradas invariantes, la cual es más cercana a la cota $6m$ que proporciona el Teorema 4.52. Lo mismo sucede con el campo vectorial cuyo sistema diferencial asociado es (4.31).

4.8. Paraboloide elíptico

En esta sección trabajamos con la siguiente forma canónica $x = y^2 + z^2$ de un paraboloide elíptico.

Proposición 4.54. *La intersección de un paraboloide elíptico con un plano es un único punto, una parábola, o una elipse.*

Demostración. Consideremos el paraboloide elíptico $x = y^2 + z^2$ y supongamos que $ax + by + cz + d = 0$ es un plano que interseca al paraboloide con $c \neq 0$, entonces $z = -\frac{ax + by + d}{c}$. Reemplazando en $x = y^2 + z^2$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección $a^2x^2 + 2abxy + (b^2 + c^2)y^2 + (2ad - c^2)x + 2bdy + d^2 = 0$.

Por la Proposición 4.1, se sigue que $d_1 = -\frac{1}{4}c^4(b^2 + c^2 - 4ad)$ y $d_2 = a^2c^2$. Como $c \neq 0$, $d_1 = 0$ sólo si $4ad = b^2 + c^2$. En este caso, también $a \neq 0$ puesto que de lo contrario tendríamos $b = c = 0$. Así obtenemos $d_2 > 0$ y por tanto la cónica intersección es solo un punto. Si $d_1 \neq 0$, entonces la cónica intersección es una parábola si $a = 0$ y una elipse si $a \neq 0$.

Ahora consideremos $c = 0$. Entonces la ecuación del plano que interseca al paraboloide toma la forma $ax + by + d = 0$. Considerando $b \neq 0$, obtenemos que la ecuación de la cónica intersección es $a^2x^2 + b^2z^2 + (2ad - b^2)x + d^2 = 0$. Calculando los determinantes d_1 y d_2 resulta que $d_1 = -\frac{1}{4}b^4(b^2 - 4ad)$ y $d_2 = a^2b^2$. Como $b \neq 0$ tenemos que la cónica es degenerada ($d_1 = 0$) si $b^2 = 4ad$, de lo cual también se obtiene que a y d no son cero. Así $d^2 > 0$ y por tanto la cónica intersección es sólo un punto. Si $d_1 \neq 0$, entonces la cónica intersección es una parábola si $a = 0$ y una elipse si $a \neq 0$.

Si $c = b = 0$, obtenemos el plano $ax + d = 0$. Sea $a \neq 0$, entonces la ecuación de la cónica intersección es $ay^2 + az^2 + d = 0$. Aquí, $d_1 = a^2d$ y

$d_2 = a^2 > 0$. Como $a \neq 0$, $d_1 = 0$ siempre que $d = 0$, y en este caso la cónica intersección es un único punto, así que el plano $x = 0$ interseca al paraboloido elíptico $x = y^2 - z^2$ en sólo un punto. Si $d \neq 0$, entonces $d_1 \neq 0$ y por tanto la cónica intersección es una elipse. \square

4.8.1. Cónicas no degeneradas invariantes

Sea \mathcal{X} un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^3 definido sobre el paraboloido elíptico $y^2 + z^2 - x = 0$. Si $\mathcal{X} = (P, Q, R)$, se cumple que $P = 2(yQ + zR)$. Para estos campos vectoriales \mathcal{X} , hallamos una cota superior del número máximo de parábolas y elipses invariantes que viven en planos invariantes de \mathcal{X} .

Proposición 4.55. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el paraboloido elíptico que poseen infinitas cónicas no degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el paraboloido elíptico $x = y^2 + z^2$ cuyo sistema diferencial asociado es

$$\dot{x} = 2yQ, \quad \dot{y} = Q, \quad \dot{z} = 0.$$

Como $\dot{z} = 0$, los planos $f = z - a = 0$, con $a \in \mathbb{R}$, son invariantes por \mathcal{X} . Todos los planos $f = 0$ intersecan al paraboloido en una parábola (ver Proposición 4.54). Por lo tanto, \mathcal{X} posee infinitas cónicas no degeneradas invariantes. \square

Teorema 4.56. *Supongamos que el campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre el paraboloido elíptico $x = y^2 + z^2$ tiene un número finito de cónicas no degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces*

- (a) *el número máximo de parábolas distintas contenidas en planos invariantes de \mathcal{X} es a lo más*

$$\begin{array}{ll} 2m_2 + m_3 & \text{si } m_2 \geq m_3, \\ m_2 + 2m_3 & \text{si } m_2 \leq m_3, \end{array}$$

- (b) *el número máximo de parábolas y elipses contenidas en planos invariantes de \mathcal{X} , teniendo en cuenta sus multiplicidades, es a lo más*

$$\begin{array}{ll} 5m_2 + m_3 & \text{si } m_2 \geq m_3, \\ m_2 + 5m_3 & \text{si } m_2 \leq m_3. \end{array}$$

Demostración. De la demostración de la Proposición 4.54 tenemos que la intersección del paraboloido elíptico $x = y^2 + z^2$ con un plano que lo interseque es una parábola cuando el plano es paralelo al eje x . Por tanto para estudiar el

número de parábolas invariantes sólo nos hace falta considerar estos planos, que tienen la forma $ay + bz + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sea $W = \langle 1, y, z \rangle$, teniendo en cuenta que $P = 2(yQ + zR)$ encontramos el polinomio extáctico de \mathcal{X} asociado a W ,

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = -R^2Q_z + QRR_z - QRQ_y + Q^2R_y - 2yQRQ_x - 2zR^2Q_x + 2yQ^2R_x + 2zQRR_x. \quad (4.32)$$

De esta expresión obtenemos que los grados de los monomios del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ son $m_2 + 2m_3 - 1$, $2m_2 + m_3 - 1$, $2m_2 + m_3$ y $m_2 + 2m_3$. Así el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es el máximo de estos valores. Por lo tanto $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ tiene grado $m_2 + 2m_3$ si $m_2 \leq m_3$, o $2m_2 + m_3$ si $m_2 \geq m_3$. En consecuencia el número máximo de planos invariantes paralelos al eje x que intersecan al cilindro elíptico $x = y^2 + z^2$ es $m_2 + 2m_3$ si $m_2 \leq m_3$, ó $2m_2 + m_3$ si $m_2 \geq m_3$. De modo que se cumplen las cotas dadas por el teorema en la parte (a).

Sabemos que la intersección de un plano $ax + by + cz + d = 0$ con el paraboloido elíptico $x = y^2 + z^2$ es una parábola o una elipse si la cónica obtenida es no degenerada, ahora encontramos una cota para el número máximo de estas cónicas invariantes. Sea $W = \langle 1, x, y, z \rangle$. Calculamos el polinomio extáctico

$$\begin{aligned} \varepsilon_W(\mathcal{X}) = & -2(3QR^3Q_z^2 - 4Q^2R^2Q_zR_z + 2R^4Q_zR_z + Q^3RR_z^2 - 2QR^3R_z^2 - Q^2R^3Q_{zz} - \\ & R^5Q_{zz} + Q^3R^2R_{zz} + QR^4R_{zz} + 5Q^2R^2Q_zQ_y - R^4Q_zQ_y - 3Q^3RR_zQ_y + \\ & 3QR^3R_zQ_y + 2Q^3RQ_y^2 - QR^3Q_y^2 - 3Q^3RQ_zR_y + 3QR^3Q_zR_y + Q^4R_zR_y - \\ & 5Q^2R^2R_zR_y - 2Q^4Q_yR_y + 4Q^2R^2Q_yR_y - 3Q^3RR_y^2 - 2Q^3R^2Q_{yz} - \\ & 2QR^4Q_{yz} + 2Q^4RR_{yz} + 2Q^2R^3R_{yz} - Q^4RQ_{yy} - Q^2R^3Q_{yy} + Q^5R_{yy} + \\ & Q^3R^2R_{yy} - 2Q^4RQ_x - 4Q^2R^3Q_x - 2R^5Q_x + 10yQ^2R^2Q_zQ_x + \\ & 12zQR^3Q_zQ_x - 2yR^4Q_zQ_x - 6yQ^3RR_zQ_x - 8zQ^2R^2R_zQ_x + 6yQR^3R_zQ_x + \\ & 4zR^4R_zQ_x + 8yQ^3RQ_yQ_x + 10zQ^2R^2Q_yQ_x - 4yQR^3Q_yQ_x - 2zR^4Q_yQ_x - \\ & 4yQ^4R_yQ_x - 6zQ^3RR_yQ_x + 8yQ^2R^2R_yQ_x + 6zQR^3R_yQ_x + 8y^2Q^3RQ_x^2 + \\ & 20yzQ^2R^2Q_x^2 - 4y^2QR^3Q_x^2 + 12z^2QR^3Q_x^2 - 4yzR^4Q_x^2 + 2Q^5R_x + \\ & 4Q^3R^2R_x + 2QR^4R_x - 6yQ^3RQ_zR_x - 8zQ^2R^2Q_zR_x + 6yQR^3Q_zR_x + \\ & 4zR^4Q_zR_x + 2yQ^4R_zR_x + 4zQ^3RR_zR_x - 10yQ^2R^2R_zR_x - 8zQR^3R_zR_x - \\ & 4yQ^4Q_yR_x - 6zQ^3RQ_yR_x + 8yQ^2R^2Q_yR_x + 6zQR^3Q_yR_x + 2zQ^4R_yR_x - \\ & 12yQ^3RR_yR_x - 10zQ^2R^2R_yR_x - 8y^2Q^4Q_xR_x - 24yzQ^3RQ_xR_x + \\ & 16y^2Q^2R^2Q_xR_x - 16z^2Q^2R^2Q_xR_x + 24yzQR^3Q_xR_x + 8z^2R^4Q_xR_x + \\ & 4yzQ^4R_x^2 - 12y^2Q^3RR_x^2 + 4z^2Q^3RR_x^2 - 20yzQ^2R^2R_x^2 - 8z^2QR^3R_x^2 - \\ & 4yQ^3R^2Q_{xz} - 4zQ^2R^3Q_{xz} - 4yQR^4Q_{xz} - 4zR^5Q_{xz} + 4yQ^4RR_{xz} + \\ & 4zQ^3R^2R_{xz} + 4yQ^2R^3R_{xz} + 4zQR^4R_{xz} - 4yQ^4RQ_{xy} - 4zQ^3R^2Q_{xy} - \\ & 4yQ^2R^3Q_{xy} - 4zQR^4Q_{xy} + 4yQ^5R_{xy} + 4zQ^4RR_{xy} + 4yQ^3R^2R_{xy} + \\ & 4zQ^2R^3R_{xy} - 4y^2Q^4RQ_{xx} - 8yzQ^3R^2Q_{xx} - 4y^2Q^2R^3Q_{xx} - 4z^2Q^2R^3Q_{xx} - \\ & 8yzQR^4Q_{xx} - 4z^2R^5Q_{xx} + 4y^2Q^5R_{xx} + 8yzQ^4RR_{xx} + 4y^2Q^3R^2R_{xx} + \\ & 4z^2Q^3R^2R_{xx} + 8yzQ^2R^3R_{xx} + 4z^2QR^4R_{xx}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

De esta expresión obtenemos que los grados de los monomios del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ son $3m_2 + 3m_3 - 2$, $m_2 + 5m_3 - 2$, $2m_2 + 4m_3 - 2$, $4m_2 + 2m_3 - 2$, $5m_2 + m_3 - 2$, $5m_2 + m_3 - 1$, $3m_2 + 3m_3 - 1$, $m_2 + 5m_3 - 1$, $4m_2 + 2m_3 - 1$, $2m_2 + 4m_3 - 1$, $5m_2 + m_3$, $4m_2 + 2m_3$, $3m_2 + 3m_3$, $2m_2 + 4m_3$ y $m_2 + 5m_3$. Así,

$$\text{grado}(\varepsilon_W(\mathcal{X})) = \text{máx}\{5m_2+m_3, 4m_2+2m_3, 3m_2+3m_3, 2m_2+4m_3, m_2+5m_3\}.$$

Notemos que si $m_2 \leq m_3$ tenemos las desigualdades siguientes

$$5m_2 + m_3 \leq 4m_2 + 2m_3 \leq 3m_2 + 3m_3 \leq 4m_3 + 2m_2 \leq m_2 + 5m_3.$$

Por lo tanto el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $m_2 + 5m_3$ si $m_2 \leq m_3$, y de una manera similar se obtiene que el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $5m_2 + m_3$ si $m_2 \geq m_3$. En consecuencia tenemos una cota para el número máximo de planos invariantes (contando sus multiplicidades) que intersecan al paraboloides elíptico $x = y^2 + z^2$. De aquí, el teorema se sigue. \square

Proposición 4.57. *La cota dada en la afirmación (a) del Teorema 4.56 disminuida en 1 y la cota de la afirmación (b) del Teorema 4.56 disminuida en 2 son alcanzables.*

Demostración. Consideremos \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el paraboloides elíptico $x = y^2 + z^2$ cuyo sistema diferencial asociado es

$$\dot{x} = 2(y + z^{m+1}), \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = z^m.$$

De acuerdo con el Teorema 4.56 el número máximo de parábolas invariantes que \mathcal{X} puede tener es a lo más $2m$. El polinomio extático dado por (4.32) es $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = mz^{2m-1}$. El plano $z = 0$ es invariante por \mathcal{X} con cofactor $K = z^{m-1}$ y su multiplicidad es $2m - 1$, esto es obtenemos la cota menos uno proporcionada por el Teorema 4.56(a).

Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el paraboloides con sistema diferencial asociado

$$\dot{x} = 4(x - 1)^{m-2}y^2z, \quad \dot{y} = (x - 1)^{m-2}yz, \quad \dot{z} = (x - 1)^{m-2}y^2.$$

Según el Teorema 4.56 el número máximo de cónicas no degeneradas invariantes que posee \mathcal{X} es a lo más $6m$. Verifiquemos que este campo vectorial alcanza esta cota disminuida en dos. El polinomio extático (4.33) es

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = -12(x - 1)^{6m-12}y^7(y - z)z(y + z).$$

El plano $x = 1$ es invariante con cofactor $K = 4(x - 1)^{m-3}y^2z$. También $y = 0$ es un plano invariante con cofactor $K = (x - 1)^{m-2}z$. Los planos $y \pm z = 0$ son invariantes con cofactor $K = \pm(x - 1)^{m-2}y$ respectivamente, y el plano $z = 0$ es invariante con cofactor $K = (x - 1)^{m-1}y^2$. En consecuencia contando sus multiplicidades, obtenemos $6m - 2$ cónicas no degeneradas contenidas en estos planos invariantes. \square

4.8.2. Cónicas degeneradas invariantes

De la Proposición 4.54, las cónicas degeneradas obtenidas de planos invariantes tangentes al paraboloides elíptico son puntos.

Proposición 4.58. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el paraboloides elíptico que tienen infinitas cónicas degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. El sistema diferencial polinomial

$$\dot{x} = 2xy, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = 0,$$

deja invariante el paraboloides elíptico $x = y^2 + z^2$. En la prueba de la Proposición 4.54 obtuvimos los planos tangentes al paraboloides, de manera que para conseguir las cónicas degeneradas invariantes contenidas en estos planos debemos considerar $W = \langle 1, x, y, z \rangle$. El polinomio extáctico (4.33) es cero. Por lo tanto, la multiplicidad del plano invariante $x = 0$ es infinita. Además, este plano invariante es tangente en el origen al paraboloides elíptico. En consecuencia la proposición está probada. \square

Teorema 4.59. *Supongamos que el campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre el paraboloides elíptico $x = y^2 + z^2$ tiene un número finito de cónicas degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. El número máximo de cónicas degeneradas contenidas en planos invariantes de \mathcal{X} , teniendo en cuenta sus multiplicidades, es a lo más*

$$\begin{aligned} 5m_2 + m_3 & \quad \text{si } m_2 \geq m_3, \\ m_2 + 5m_3 & \quad \text{si } m_2 \leq m_3. \end{aligned}$$

Además, esta cota disminuida en cinco es alcanzable.

Demostración. Para encontrar la cota del número máximo de cónicas degeneradas invariantes de \mathcal{X} consideramos $W = \langle 1, x, y, z \rangle$, el cual es el mismo espacio usado en la prueba del Teorema 4.56(b) para obtener la cota de cónicas no degeneradas invariantes. Por lo tanto, la cota obtenida en ambos casos es la misma.

Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el paraboloides elíptico con sistema diferencial asociado

$$\dot{x} = 2x^{m-1}(xy + z), \quad \dot{y} = x^m, \quad \dot{z} = x^{m-1}.$$

El número máximo de cónicas degeneradas invariantes de \mathcal{X} es $6m - 1$. Verifiquemos que \mathcal{X} alcanza esta cota menos cinco. El polinomio extáctico dado por (4.33) es $\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 4x^{6m-6}(1 + 2x^2 + x^4 + 2xy^2 - 4x^3y^2 + 2yz - 10x^2yz - 6xz^2)$. El plano $x = 0$ es invariante por \mathcal{X} con cofactor $K = 2x^{m-2}(xy + z)$ y su multiplicidad es $6m - 6$. Por consiguiente obtenemos la cota menos cinco para el número máximo de cónicas degeneradas invariantes de \mathcal{X} . \square

4.9. Elipsoide

Vamos a usar la siguiente forma canónica $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ de un elipsoide, esto es, la esfera.

Proposición 4.60. *La intersección de la esfera con un plano es un único punto, o una circunferencia.*

Demostración. Consideremos un plano $ax + by + cz + d = 0$ con $c \neq 0$, que interseque la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, entonces $z = -(ax + by + d)/c$. Reemplazando en $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ obtenemos la cónica intersección $(a^2 + c^2)x^2 + 2abxy + (b^2 + c^2)y^2 + 2adx + 2bdy - c^2 + d^2 = 0$. Aplicando la Proposición 4.12 a esta expresión resulta que $d_1 = -c^4(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)$ y $d_2 = c^2(a^2 + b^2 + c^2)$. Como $c \neq 0$, $d_2 > 0$, y por lo tanto la cónica intersección es degenerada y es un único punto si $d_1 = 0$, esto es si $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; o es no degenerada y es una circunferencia si $d_1 \neq 0$.

Si $c = 0$, la ecuación del plano es $ax + by + d = 0$. Suponiendo $b \neq 0$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección $a^2x^2 + b^2z^2 + (2ad - b^2)x + d^2 = 0$ y los determinantes $d_1 = -b^4(a^2 + b^2 - d^2)$ y $d_2 = b^2(a^2 + b^2)$. Como $b \neq 0$, $d_2 > 0$ y entonces la cónica intersección es degenerada ($d_1 = 0$) si $d^2 = a^2 + b^2$ y es un único punto, o es una circunferencia si $d_1 \neq 0$.

Si $c = b = 0$, obtenemos el plano $ax + d = 0$. Sea $a \neq 0$, entonces $x = -d/a$ y reemplazando en $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, tenemos $a^2y^2 + a^2z^2 + d^2 - a^2 = 0$ y los determinantes $d_1 = a^4(d^2 - a^2)$, $d_2 = a^4 > 0$. Como $a \neq 0$, $d_1 = 0$ si $d = \pm a$, y la cónica intersección es un único punto. Si $d \neq \pm a$, entonces $d_1 \neq 0$ y por consiguiente la cónica intersección es una circunferencia. \square

4.9.1. Circunferencias invariantes

Sea \mathcal{X} un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^3 definido sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. La intersección de la esfera con un plano es una circunferencia o un único punto. Hallaremos una cota superior para el número máximo de éstas circunferencias invariantes de \mathcal{X} que viven en planos invariantes. Si $\mathcal{X} = (P, Q, R)$, se satisface que $zR = -xP - yQ$, de modo que $\mathcal{X} = \left(P, Q, -\frac{xP + yQ}{z} \right)$.

Proposición 4.61. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre la esfera que poseen infinitas circunferencias invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cuyo sistema diferencial asociado está dado por

$$\dot{x} = z, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = -x.$$

Como $\dot{y} = 0$, los planos $f = y + a$, con $-1 < a < 1$ son invariantes por \mathcal{X} . Estos planos intersecan a la esfera en circunferencias, de modo que obtenemos infinitas circunferencias invariantes del campo vectorial \mathcal{X} . \square

Teorema 4.62. *Supongamos que el campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tiene un número finito de circunferencias invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces el número máximo de circunferencias invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades, es a lo más*

$$\begin{aligned} 5m_1 + m_2 - 3 & \quad \text{si } m_1 \geq m_2, \\ m_1 + 5m_2 - 3 & \quad \text{si } m_1 \leq m_2. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $W = \langle 1, x, y, z \rangle$. El polinomio extáctico de \mathcal{X} asociado a W está dado por la ecuación (4.5). Usando que $zR = -(xP + yQ)$, $\mathcal{X}(x) = P$, $\mathcal{X}(y) = Q$ y $\mathcal{X}(z) = R$ desarrollamos el polinomio extáctico

$$\begin{aligned} \varepsilon_W(\mathcal{X}) = & \\ & \frac{1}{z^6} (- 2x^4P^4QP_z - x^2z^2P^4QP_z + z^4P^4QP_z - 8x^3yP^3Q^2P_z - \\ & 2xyz^2P^3Q^2P_z - 12x^2y^2P^2Q^3P_z - x^2z^2P^2Q^3P_z - y^2z^2P^2Q^3P_z + \\ & 2z^4P^2Q^3P_z - 8xy^3PQ^4P_z - 2xyz^2PQ^4P_z - 2y^4Q^5P_z - y^2z^2Q^5P_z + \\ & z^4Q^5P_z + 2x^4zP^3QP_z^2 + 2x^2z^3P^3QP_z^2 + 6x^3yzP^2Q^2P_z^2 + 5xyz^3P^2Q^2P_z^2 + \\ & 6x^2y^2zPQ^3P_z^2 - x^2z^3PQ^3P_z^2 + 3y^2z^3PQ^3P_z^2 + 2xy^3zQ^4P_z^2 - xyz^3Q^4P_z^2 + \\ & 2x^4P^5Q_z + x^2z^2P^5Q_z - z^4P^5Q_z + 8x^3yP^4QQ_z + 2xyz^2P^4QQ_z + \\ & 12x^2y^2P^3Q^2Q_z + x^2z^2P^3Q^2Q_z + y^2z^2P^3Q^2Q_z - 2z^4P^3Q^2Q_z + \\ & 8xy^3P^2Q^3Q_z + 2xyz^2P^2Q^3Q_z + 2y^4PQ^4Q_z + y^2z^2PQ^4Q_z - z^4PQ^4Q_z - \\ & 2x^4zP^4P_zQ_z - 2x^2z^3P^4P_zQ_z - 4x^3yzP^3QP_zQ_z - 6xyz^3P^3QP_zQ_z + \\ & 4x^2z^3P^2Q^2P_zQ_z - 4y^2z^3P^2Q^2P_zQ_z + 4xy^3zPQ^3P_zQ_z + 6xyz^3PQ^3P_zQ_z + \\ & 2y^4zQ^4P_zQ_z + 2y^2z^3Q^4P_zQ_z - 2x^3yzP^4Q_z^2 + xyz^3P^4Q_z^2 - 6x^2y^2zP^3QQ_z^2 - \\ & 3x^2z^3P^3QQ_z^2 + y^2z^3P^3QQ_z^2 - 6xy^3zP^2Q^2Q_z^2 - 5xyz^3P^2Q^2Q_z^2 - \\ & 2y^4zPQ^3Q_z^2 - 2y^2z^3PQ^3Q_z^2 - x^4zP^4QP_zz - x^2z^3P^4QP_zz - 4x^3yzP^3Q^2P_zz - \\ & 2xyz^3P^3Q^2P_zz - 6x^2y^2zP^2Q^3P_zz - x^2z^3P^2Q^3P_zz - y^2z^3P^2Q^3P_zz - \\ & 4xy^3zPQ^4P_zz - 2xyz^3PQ^4P_zz - y^4zQ^5P_zz - y^2z^3Q^5P_zz + x^4zP^5Q_zz + \\ & x^2z^3P^5Q_zz + 4x^3yzP^4QQ_zz + 2xyz^3P^4QQ_zz + 6x^2y^2zP^3Q^2Q_zz + \\ & x^2z^3P^3Q^2Q_zz + y^2z^3P^3Q^2Q_zz + 4xy^3zP^2Q^3Q_zz + 2xyz^3P^2Q^3Q_zz + \\ & y^4zPQ^4Q_zz + y^2z^3PQ^4Q_zz + 3x^3zP^3Q^2P_y + 3xz^3P^3Q^2P_y + \\ & 9x^2yzP^2Q^3P_y + 3yz^3P^2Q^3P_y + 9xy^2zPQ^4P_y + 3xz^3PQ^4P_y + \\ & 3y^3zQ^5P_y + 3yz^3Q^5P_y - 5x^3z^2P^2Q^2P_zP_y - 5xz^4P^2Q^2P_zP_y - \\ & 10x^2yz^2PQ^3P_zP_y - 6yz^4PQ^3P_zP_y - 5xy^2z^2Q^4P_zP_y + xz^4Q^4P_zP_y + \\ & 3x^3z^2P^3QQ_zP_y + 3xz^4P^3QQ_zP_y + 4x^2yz^2P^2Q^2Q_zP_y + \\ & 4yz^4P^2Q^2Q_zP_y - xy^2z^2PQ^3Q_zP_y - 3xz^4PQ^3Q_zP_y - 2y^3z^2Q^4Q_zP_y - \\ & 2yz^4Q^4Q_zP_y + 3x^2z^3PQ^3P_y^2 + 3z^5PQ^3P_y^2 + 3xyz^3Q^4P_y^2 - 3x^3zP^4QQ_y - \\ & 3xz^3P^4QQ_y - 9x^2yzP^3Q^2Q_y - 3yz^3P^3Q^2Q_y - 9xy^2zP^2Q^3Q_y - \\ & 3xz^3P^2Q^3Q_y - 3yz^3PQ^4Q_y - 3yz^3PQ^4Q_y + 3x^3z^2P^3QP_zQ_y + \\ & 3xz^4P^3QP_zQ_y + 4x^2yz^2P^2Q^2P_zQ_y + 4yz^4P^2Q^2P_zQ_y - xy^2z^2PQ^3P_zQ_y - \\ & 3xz^4PQ^3P_zQ_y - 2y^3z^2Q^4P_zQ_y - 2yz^4Q^4P_zQ_y - x^3z^2P^4Q_zQ_y - \\ & xz^4P^4Q_zQ_y + 2x^2yz^2P^3QQ_zQ_y - 2yz^4P^3QQ_zQ_y + 7xy^2z^2P^2Q^2Q_zQ_y + \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
& 5xz^4P^2Q^2Q_zQ_y + 4y^3z^2PQ^3Q_zQ_y + 4yz^4PQ^3Q_zQ_y - 4x^2z^3P^2Q^2P_yQ_y - \\
& 4z^5P^2Q^2P_yQ_y - 2xyz^3PQ^3P_yQ_y + 2y^2z^3Q^4P_yQ_y + 2z^5Q^4P_yQ_y + \\
& x^2z^3P^3QQ_y^2 + z^5P^3QQ_y^2 - xyz^3P^2Q^2Q_y^2 - 2y^2z^3PQ^3Q_y^2 - 2z^5PQ^3Q_y^2 + \\
& 2x^3z^2P^3Q^2P_{yz} + 2xz^4P^3Q^2P_{yz} + 6x^2yz^2P^2Q^3P_{yz} + 2yz^4P^2Q^3P_{yz} + \\
& 6xy^2z^2PQ^4P_{yz} + 2xz^4PQ^4P_{yz} + 2y^3z^2Q^5P_{yz} + 2yz^4Q^5P_{yz} - 2x^3z^2P^4QQ_{yz} - \\
& 2xz^4P^4QQ_{yz} - 6x^2yz^2P^3Q^2Q_{yz} - 2yz^4P^3Q^2Q_{yz} - 6xy^2z^2P^2Q^3Q_{yz} - \\
& 2xz^4P^2Q^3Q_{yz} - 2y^3z^2PQ^4Q_{yz} - 2yz^4PQ^4Q_{yz} - x^2z^3P^2Q^3P_{yy} - \\
& z^5P^2Q^3P_{yy} - 2xyz^3PQ^4P_{yy} - y^2z^3Q^5P_{yy} - z^5Q^5P_{yy} + x^2z^3P^3Q^2Q_{yy} + \\
& z^5P^3Q^2Q_{yy} + 2xyz^3P^2Q^3Q_{yy} + y^2z^3PQ^4Q_{yy} + z^5PQ^4Q_{yy} + 3x^3z^3P^4QP_x + \\
& 3xz^3P^4QP_x + 9x^2yz^3P^3Q^2P_x + 3yz^3P^3Q^2P_x + 9xy^2z^3P^2Q^3P_x + \\
& 3xz^3P^2Q^3P_x + 3y^3z^3PQ^4P_x + 3yz^3PQ^4P_x - 4x^3z^2P^3QP_zP_x - 4xz^4P^3QP_zP_x - \\
& 7x^2yz^2P^2Q^2P_zP_x - 5yz^4P^2Q^2P_zP_x - 2xy^2z^2PQ^3P_zP_x + 2xz^4PQ^3P_zP_x + \\
& y^3z^2Q^4P_zP_x + yz^4Q^4P_zP_x + 2x^3z^2P^4Q_zP_x + 2xz^4P^4Q_zP_x + x^2yz^2P^3QQ_zP_x + \\
& 3yz^4P^3QQ_zP_x - 4xy^2z^2P^2Q^2Q_zP_x - 4xz^4P^2Q^2Q_zP_x - 3y^3z^2PQ^3Q_zP_x - \\
& 3yz^4PQ^3Q_zP_x + 5x^2z^3P^2Q^2P_yP_x + 5z^5P^2Q^2P_yP_x + 4xyz^3PQ^3P_yP_x - \\
& y^2z^3Q^4P_yP_x - z^5Q^4P_yP_x - 3x^2z^3P^3QQ_yP_x - 3z^5P^3QQ_yP_x + 3y^2z^3PQ^3Q_yP_x + \\
& 3z^5PQ^3Q_yP_x + 2x^2z^3P^3QP_x^2 + 2z^5P^3QP_x^2 + xyz^3P^2Q^2P_x^2 - y^2z^3PQ^3P_x^2 - \\
& z^5PQ^3P_x^2 - 3x^3z^3P^5Q_x - 3xz^3P^5Q_x - 9x^2yz^3P^4QQ_x - 3yz^3P^4QQ_x - \\
& 9xy^2z^3P^3Q^2Q_x - 3xz^3P^3Q^2Q_x - 3y^3z^3P^2Q^3Q_x - 3yz^3P^2Q^3Q_x + 2x^3z^2P^4P_zQ_x + \\
& 2xz^4P^4P_zQ_x + x^2yz^2P^3QP_zQ_x + 3yz^4P^3QP_zQ_x - 4xy^2z^2P^2Q^2P_zQ_x - \\
& 4xz^4P^2Q^2P_zQ_x - 3y^3z^2PQ^3P_zQ_x - 3yz^4PQ^3P_zQ_x + 5x^2yz^2P^4Q_zQ_x - \\
& yz^4P^4Q_zQ_x + 10xy^2z^2P^3QQ_zQ_x + 6xz^4P^3QQ_zQ_x + 5y^3z^2P^2Q^2Q_zQ_x + \\
& 5yz^4P^2Q^2Q_zQ_x - 3x^2z^3P^3QP_yQ_x - 3z^5P^3QP_yQ_x + 3y^2z^3PQ^3P_yQ_x + \\
& 3z^5PQ^3P_yQ_x + x^2z^3P^4Q_yQ_x + z^5P^4Q_yQ_x - 4xyz^3P^3QQ_yQ_x - 5y^2z^3P^2Q^2Q_yQ_x - \\
& 5z^5P^2Q^2Q_yQ_x - 2x^2z^3P^4P_xQ_x - 2z^5P^4P_xQ_x + 2xyz^3P^3QP_xQ_x + \\
& 4y^2z^3P^2Q^2P_xQ_x + 4z^5P^2Q^2P_xQ_x - 3xyz^3P^4Q_x^2 - 3y^2z^3P^3QQ_x^2 - 3z^5P^3QQ_x^2 + \\
& 2x^3z^2P^4QP_{xz} + 2xz^4P^4QP_{xz} + 6x^2yz^2P^3Q^2P_{xz} + 2yz^4P^3Q^2P_{xz} + \\
& 6xy^2z^2P^2Q^3P_{xz} + 2xz^4P^2Q^3P_{xz} + 2y^3z^2PQ^4P_{xz} + 2yz^4PQ^4P_{xz} - \\
& 2x^3z^2P^5Q_{xz} - 2xz^4P^5Q_{xz} - 6x^2yz^2P^4QQ_{xz} - 2yz^4P^4QQ_{xz} - 6xy^2z^2P^3Q^2Q_{xz} - \\
& 2xz^4P^3Q^2Q_{xz} - 2y^3z^2P^2Q^3Q_{xz} - 2yz^4P^2Q^3Q_{xz} - 2x^2z^3P^3Q^2P_{xy} - \\
& 2z^5P^3Q^2P_{xy} - 4xyz^3P^2Q^3P_{xy} - 2y^2z^3PQ^4P_{xy} - 2z^5PQ^4P_{xy} + 2x^2z^3P^4QQ_{xy} + \\
& 2z^5P^4QQ_{xy} + 4xyz^3P^3Q^2Q_{xy} + 2y^2z^3P^2Q^3Q_{xy} + 2z^5P^2Q^3Q_{xy} - x^2z^3P^4QP_{xx} - \\
& z^5P^4QP_{xx} - 2xyz^3P^3Q^2P_{xx} - y^2z^3P^2Q^3P_{xx} - z^5P^2Q^3P_{xx} + x^2z^3P^5Q_{xx} + \\
& z^5P^5Q_{xx} + 2xyz^3P^4QQ_{xx} + y^2z^3P^3Q^2Q_{xx} + z^5P^3Q^2Q_{xx}).
\end{aligned}$$

De esta expresión obtenemos que los grados de los monomios del polinomio $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ son $5m_1 + m_2 - 3$, $4m_1 + 2m_2 - 3$, $3m_1 + 3m_2 - 3$, $2m_1 + 4m_2 - 3$ y $m_1 + 5m_2 - 3$. Podemos ver que si $m_1 \geq m_2$ se cumplen las desigualdades siguientes

$$5m_1 + m_2 - 3 \geq 4m_1 + 2m_2 - 3 \geq 3m_1 + 3m_2 - 3 \geq 2m_1 + 4m_2 - 3 \geq m_1 + 5m_2 - 3.$$

Por lo tanto el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $5m_1 + m_2 - 3$ si $m_1 \geq m_2$, y de una

manera similar se obtiene que el grado de $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ es $m_1 + 5m_2 - 3$ si $m_1 \leq m_2$. En consecuencia el número máximo de planos invariantes (contando sus multiplicidades) que intersecan la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es $5m_1 + m_2 - 3$ si $m_1 \geq m_2$, ó $m_1 + 5m_2 - 3$ si $m_1 \leq m_2$. De modo que se obtienen las cotas dadas por el teorema. \square

Proposición 4.63. *La cota proporcionada por el Teorema 4.62 disminuida en cuatro es alcanzable.*

Demostración. Sea $\mathcal{X} = (P, Q, R)$ con $P = z^{m-3}y^2x$, $Q = z^{m-3}x^2y$ y $R = -2x^2y^2z^{m-4}$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $m \geq 5$, el campo vectorial polinomial definido sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. De acuerdo con el Teorema 4.62 el número máximo de cónicas degeneradas invariantes que posee \mathcal{X} es a lo más $6m - 3$, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Verifiquemos que esta cota se alcanza. El polinomio extáctico (4.34) de \mathcal{X} es

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) = 6x^7(x-y)y^7(x+y)z^{6m-23}(2x^2+z^2)(2y^2+z^2). \quad (4.35)$$

El plano $x = 0$ es invariante por \mathcal{X} con cofactor $K = y^2z^{m-3}$, $y = 0$ también es invariante con cofactor $K = x^2z^{m-3}$ y $z = 0$ es invariante con cofactor $K = -2x^2y^2z^{m-5}$. Los planos $x \pm y = 0$ son invariantes con cofactores $K = \pm xyz^{m-3}$ respectivamente. Contando estos planos con sus multiplicidades obtenemos $6m - 7$ circunferencias invariantes de \mathcal{X} , que corresponde a la cota proporcionada por el Teorema 4.62 disminuida en cuatro. \square

En la prueba de la Proposición 4.63 no consideramos los cuatro planos complejos que se obtienen de los factores $2x^2 + z^2$ y $2y^2 + z^2$ en el polinomio extáctico (4.35). Sin embargo, los planos complejos $\sqrt{2}x \pm iz = 0$ y $\sqrt{2}y \pm iz = 0$ son invariantes, de modo que teniendo en cuenta las cónicas complejas que resultan de su intersección con la esfera obtendríamos la cota $6m - 3$ para el número máximo de circunferencias invariantes de \mathcal{X} que coincide con la cota proporcionada por el Teorema 4.62.

4.9.2. Cónicas degeneradas invariantes

De acuerdo con la Proposición 4.60, las cónicas degeneradas que aparecen cuando tenemos planos invariantes tangentes a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ son puntos.

Proposición 4.64. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre la esfera que tienen infinitas cónicas degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. El sistema diferencial polinomial

$$\dot{x} = z(x-1), \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = -x(x-1),$$

deja invariante la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Entonces dado que en la prueba de la Proposición 4.60 obtuvimos los planos tangentes a la esfera, para conseguir

las cónicas degeneradas invariantes contenidas en estos planos debemos considerar $W = \langle 1, x, y, z \rangle$. El polinomio extáctico (4.34) es cero. Por lo tanto, la multiplicidad del plano invariante $x = 1$ es infinita. Además, este plano invariante es tangente en $(1, 0, 0)$ a la esfera. En consecuencia la proposición está probada. \square

Teorema 4.65. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} in \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tiene un número finito de cónicas degeneradas, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces el número máximo de cónicas degeneradas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades, es a lo más*

$$\begin{aligned} 5m_1 + m_2 - 3 & \quad \text{si } m_1 \geq m_2, \\ m_1 + 5m_2 - 3 & \quad \text{si } m_1 \leq m_2. \end{aligned}$$

Además, esta cota menos siete es alcanzable.

Demostración. Observemos que el resultado de este teorema coincide con la cota del Teorema 4.62, esto sucede porque en ambos casos $W = \langle 1, x, y, z \rangle$ y por lo tanto obtenemos los mismos polinomios extácticos cuyo grado produce la cota requerida. En consecuencia la prueba sigue los mismos pasos que la prueba del Teorema 4.62.

Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre la esfera con sistema diferencial asociado

$$\dot{x} = z(x+1)^{m-1}, \quad \dot{y} = -z(x+1)^{m-2}, \quad \dot{z} = -(x+1)^{m-2}(x^2 + x - y).$$

El número máximo de cónicas degeneradas invariantes de \mathcal{X} es $6m - 4$. Verifiquemos que \mathcal{X} alcanza esta cota menos siete. El polinomio extáctico (4.34) es

$$\begin{aligned} \varepsilon_W(\mathcal{X}) = & -(x+1)^{6m-11}z(3x^3 + 9x^4 + 9x^5 + 3x^6 - 9x^2y - 18x^3y - 9x^4y + \\ & 9xy^2 + 9x^2y^2 - 3y^3 + 6xz^2 + 14x^2z^2 + 13x^3z^2 + 5x^4z^2 - 6yz^2 - \\ & 7xyz^2 - 4x^2yz^2 - y^2z^2 + z^4 + 4xz^4 + 2x^2z^4). \end{aligned}$$

El plano $x + 1 = 0$ es invariante por \mathcal{X} con cofactor $K = z(x+1)^{m-2}$ y su multiplicidad es $6m - 11$. Por consiguiente obtenemos la cota menos siete para el número máximo de cónicas degeneradas invariantes de \mathcal{X} . \square

4.10. Hiperboloide de dos hojas

Trabajaremos con la siguiente forma canónica $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ del hiperboloide de dos hojas.

Proposición 4.66. *La intersección de un hiperboloide de dos hojas con un plano es una parábola, una elipse, una hipérbola o un único punto.*

Demostración. Consideremos el hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ y el plano $ax + by + cz + d = 0$ que interseca al hiperboloide.

Si $c \neq 0$, entonces $z = -\frac{ax + by + d}{c}$. Reemplazando en $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ obtenemos la ecuación de la cónica intersección que viene dada por

$$(c^2 - a^2)x^2 - 2abxy + (c^2 - b^2)y^2 - 2adx - 2bdy + c^2 - d^2 = 0.$$

Por la Proposición 4.1, obtenemos que $d_1 = -c^4(a^2 + b^2 - c^2 + d^2)$ y $d_2 = -c^2(a^2 + b^2 - c^2)$. La cónica intersección es degenerada si $c^2 = a^2 + b^2 + d^2$. En este caso, $d_2 = c^2 d^2 > 0$, es decir la cónica es solamente un punto. Si la cónica es no degenerada ($c^2 \neq a^2 + b^2 + d^2$), entonces ésta es una hipérbola si $c^2 < a^2 + b^2$; es una parábola si $c^2 = a^2 + b^2$ y es una elipse si $c^2 > a^2 + b^2$.

Ahora consideremos $c = 0$, entonces la ecuación del plano que interseca al hiperboloide toma la forma $ax + by + d = 0$. Considerando $b \neq 0$, obtenemos la ecuación de la cónica intersección $(a^2 + b^2)x^2 - b^2z^2 + 2adx + b^2 + d^2 = 0$. Realizando los cálculos de los determinantes d_1 y d_2 resulta $d_1 = -b^4(a^2 + b^2 + d^2)$ y $d_2 = -b^2(a^2 + b^2)$.

Observemos que $d_1 \neq 0$ y $d_2 < 0$, de modo que la cónica no degenerada es una hipérbola. Si $b = 0$, la ecuación del plano queda $ax + d = 0$. Entonces considerando $a \neq 0$ tenemos $d_1 = -a^4(a^2 + d^2)$ y $d_2 = -a^4 < 0$. De modo que la cónica en este caso es no degenerada y es una hipérbola. \square

4.10.1. Cónicas no degeneradas invariantes

Sea \mathcal{X} un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^3 definido sobre el hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$. Hallaremos una cota superior para el número de las cónicas no degeneradas que viven en planos invariantes de \mathcal{X} . Si $\mathcal{X} = (P, Q, R)$, se cumple que $zR = xP + yQ$, y luego $\mathcal{X} = \left(P, Q, \frac{xP + yQ}{z} \right)$.

Proposición 4.67. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el hiperboloide de dos hojas que poseen infinitas cónicas no degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre el hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ cuyo sistema diferencial asociado está dado por

$$\dot{x} = z, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = x.$$

Como $\dot{y} = 0$ los planos $f = y + a$, con $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ son invariantes por \mathcal{X} . Los planos $f = 0$ intersecan al hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ en hipérbolas. Por lo tanto, el campo \mathcal{X} posee infinitas cónicas no degeneradas invariantes. \square

El teorema siguiente proporciona una cota para el número máximo de cónicas no degeneradas invariantes de campos definidos sobre el hiperboloide

de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$. Dada la similitud que tiene esta última ecuación con la ecuación del hiperboloide de una hoja, obtenemos el mismo resultado para el caso de campos definidos sobre el hiperboloide de una hoja (Teorema 4.42) y la demostración es esencialmente la misma, por esto no la escribiremos.

Teorema 4.68. *Supongamos que el campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre un hiperboloide de dos hojas tiene un número finito de cónicas no degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces el número máximo de cónicas no degeneradas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades, es a lo más*

$$\begin{aligned} 5m_1 + m_2 - 3 & \quad \text{si } m_1 \geq m_2, \\ m_1 + 5m_2 - 3 & \quad \text{si } m_1 \leq m_2. \end{aligned}$$

Proposición 4.69. *La cota proporcionada por el Teorema 4.68 disminuida en uno es alcanzable.*

Demostración. Es similar a la demostración de la Proposición 4.53. □

4.10.2. Cónicas degeneradas invariantes

De acuerdo con la Proposición 4.66 obtenemos cónicas degeneradas invariantes cuando tenemos planos invariantes tangentes al hiperboloide de dos hojas, y en este caso son puntos.

Proposición 4.70. *Existen campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} definidos sobre el hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ que tienen infinitas cónicas degeneradas, teniendo en cuenta sus multiplicidades.*

Demostración. Consideremos

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = z(z - 1), \quad \dot{z} = y(z - 1),$$

el sistema diferencial polinomial asociado al campo vectorial \mathcal{X} que deja invariante al hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$. Entonces el polinomio extáctico asociado $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ con $W = \langle 1, x, y, z \rangle$ es cero. Por lo tanto la multiplicidad del plano invariante $z = 1$ es infinita. Además, este plano invariante es tangente al hiperboloide en el punto $(0, 0, 1)$. Por lo tanto la proposición queda demostrada. □

Teorema 4.71. *Supongamos que un campo vectorial polinomial \mathcal{X} en \mathbb{R}^3 de grado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ definido sobre el hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ tiene un número finito de cónicas degeneradas invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Entonces el número máximo de cónicas degeneradas invariantes de \mathcal{X} contenidas en planos invariantes, teniendo en cuenta sus multiplicidades, es a lo más*

$$\begin{aligned} 5m_1 + m_2 - 3 & \quad \text{si } m_1 \geq m_2, \\ m_1 + 5m_2 - 3 & \quad \text{si } m_1 \leq m_2. \end{aligned}$$

Además, esta cota menos ocho es alcanzable.

Demostración. Notamos que la cota de los Teoremas 4.68 y 4.71 para el caso de cónicas no degeneradas y cónicas degeneradas respectivamente es la misma. Esto sucede porque en ambos casos $W = \langle 1, x, y, z \rangle$, y por lo tanto obtenemos los mismos polinomios extácticos cuyo grado proporciona la cota buscada.

Sea \mathcal{X} el campo vectorial polinomial definido sobre la esfera con sistema diferencial asociado

$$\dot{x} = z(z+1)^{m-2}, \quad \dot{y} = z(z+1)^{m-1}, \quad \dot{z} = (z+1)^{m-2}(x+y+yz).$$

El número máximo de cónicas degeneradas invariantes de \mathcal{X} es $6m - 4$. Verifiquemos que \mathcal{X} alcanza esta cota menos ocho. El polinomio extáctico $\varepsilon_W(\mathcal{X})$ con $W = \langle 1, x, y, z \rangle$ es

$$\varepsilon_W(\mathcal{X}) =$$

$$(z+1)^{6m-12}(2x^4 + 8x^3y + 12x^2y^2 + 8xy^3 + 2y^4 + 6x^3yz + 18x^2y^2z + 18xy^3z + 6y^4z - 2x^2z^2 - 4xyz^2 - 2y^2z^2 + 6x^2y^2z^2 + 12xy^3z^2 + 6y^4z^2 + x^2z^3 - 4xyz^3 - 5y^2z^3 + 2xy^3z^3 + 2y^4z^3 - 4z^4 + 2x^2z^4 + 4xyz^4 - 2y^2z^4 - 8z^5 + 3xyz^5 + 2y^2z^5 - 8z^6 + y^2z^6 - 4z^7 - z^8).$$

El plano $z+1 = 0$ es invariante por \mathcal{X} con cofactor $K = (z+1)^{m-3}(x+y+yz)$ y su multiplicidad es $6m - 12$. Por consiguiente, obtenemos la cota menos ocho del número máximo de cónicas degeneradas de \mathcal{X} . \square

4.11 Referencias

- [1] J.C. ARTÉS, B. GRÜNBAUM Y J. LLIBRE, *On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems*, Pacific J. of Mathematics **184** (1998), 207–230.
- [2] W. L. EDGE, *The Theory of Ruled Surfaces*, Cambridge, University Press. Review: Bull. Amer. Math. Soc. **37** (1931), 791–793.
- [3] D. HILBERT Y S. COHN-VOSSEN *The Second-Order Surfaces §3 in Geometry and the Imagination*, New York: Chelsea, 12–19, 1999.
- [4] J. LLIBRE Y J.C. MEDRADO, *On the invariant hyperplanes for d-dimensional polynomial vector fields*, J. of Physics A: Math. Gen. **40** (2007), 8385–8391.
- [5] J. LLIBRE Y J.C. MEDRADO, *Limit cycles, invariant meridians and parallels for polynomial vector fields on the torus*, Bull. Sci. Math., **135** (2011), 1–9.
- [6] J. LLIBRE, R. RAMIREZ Y M. SADOVSKAIA, *On the 16th Hilbert problem for algebraic limit cycles*, J. Differential Equations, **248** (2010), 1401–1409.
- [7] J. LLIBRE, R. RAMIREZ Y M. SADOVSKAIA, *On the 16th Hilbert problem for algebraic limit cycles on nonsingular algebraic curves*, J. Differential Equations, **250** (2010), 983–999.
- [8] J. LLIBRE Y S. REBOLLO, *Invariant parallels, invariant meridians and limit cycles of polynomial vector fields on some 2-dimensional algebraic tori in \mathbb{R}^3* , por aparecer, 2011.
- [9] J. SOKULSKI, *On the number of invariant lines of polynomial vector fields*. Nonlinearity **9** (1996), 479–485.
- [10] B. SPAIN, *Analytical Conics*, Dover Publications, 2007.
- [11] E. W. WEISSTEIN, *Quadratic Surface*, From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/QuadraticSurface.html>.

- [12] X. ZHANG, *Number of integral lines of polynomial systems of degree three and four*, J. of Nanjing University (Mathematical Biquarterly) **10** (1993), 209–212.
- [13] X. ZHANG, *The 16th Hilbert problem on algebraic limit cycles*, J. Differential Equations **251** (2011), 1778–1789.

Capítulo 5

Integrales primeras Liouvillianas para sistemas cuadráticos con una silla integrable

Sea $\mathbb{R}[x, y]$ el anillo de todos los polinomios en las variables x e y y coeficientes en \mathbb{R} . Un sistema diferencial polinomial cuadrático o simplemente un *sistema cuadrático* es un sistema diferencial polinomial en \mathbb{R}^2 de la forma

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (5.1)$$

donde $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$ y el máximo de los grados de P y Q es 2.

Los sistemas cuadráticos han sido ampliamente estudiados en los últimos cien años y se han publicado alrededor de mil artículos sobre ellos [13, 16, 17]. Aunque estos sistemas son considerados como una de las familias más fáciles entre los sistemas diferenciales su estudio no es trivial, así por ejemplo todavía permanece abierto el problema de clasificar todos los campos vectoriales integrables de dimensión 2. Para más información sobre campos vectoriales diferenciables integrables en dimensión 2, ver por ejemplo [4].

La clasificación de los centros para sistemas cuadráticos tiene una larga historia que comenzó con los trabajos de Dulac [6], Kapteyn [10, 11], Bautin [2], etc. Schlomiuk, Guckenheimer y Rand [15] describieron una breve historia del problema del centro en general que incluye una lista de 30 artículos sobre el tema y la historia turbulenta del centro para el caso cuadrático (ver páginas 3, 4 y 13).

Los focos débiles y los centros cuadráticos se clasifican usando las constantes de Lyapunov V_1 , V_2 y V_3 . Dulac [6] fue el primero en detectar que los focos débiles y los centros cuadráticos pueden pasar a sillas débiles e integrables a través de un cambio complejo de variables, ver detalles en [9]. Recientemente este tipo de sillas han sido estudiadas por varios autores Cai Sulin [3], Joyal y Rousseau [9], y Artés, Llibre y Vulpe [1]. Estos últimos autores caracterizaron los retratos de fase de todos los sistemas cuadráticos con una silla integrable, pero no encontraron sus integrales primeras. En este

capítulo proporcionamos expresiones explícitas para las integrales primeras de cada familia de estos sistemas cuadráticos.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la sección 5.1 presentamos el concepto de silla integrable, clasificamos los sistemas cuadráticos con una silla integrable e introducimos la noción de integral primera Liouvillianas. En la sección 5.2 obtenemos los factores integrantes inversos polinomiales para los sistemas cuadráticos con una silla integrable. Finalmente proporcionamos las integrales primeras Liouvillianas de los sistemas cuadráticos con una silla integrable.

Este capítulo ha dado lugar al artículo:

Y. BOLAÑOS, J. LLIBRE Y C. VALLS, *Liouvillian first integrals for quadratic systems with an integrable saddle*, el cual fue enviado a publicar en diciembre de 2012.

5.1. Sillas integrables

Una *silla débil* es una silla hiperbólica tal que la traza de su parte lineal es cero. Más concretamente, de [1, 3, 6, 9] si un sistema cuadrático posee una silla débil vía una transformación afín este sistema puede ser escrito como

$$\dot{x} = x + ax^2 + bxy + cy^2, \quad \dot{y} = -y - kx^2 - lxy - my^2,$$

con una silla débil en el origen. Además, decimos que el origen es una *silla integrable* si

$$\begin{aligned} L_1 &= lm - ab = 0, \\ L_2 &= kb(2m - b)(m + 2b) - cl(2a - l)(a + 2l) = 0, \\ L_3 &= (ck - lb)[acl(2a - l) - bkm(2m - b)] = 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas condiciones, los sistemas cuadráticos con una silla integrable pueden ser reducidos a las siguientes cinco familias de sistemas cuadráticos [1],

$$\dot{x} = x - 2ckx^2 + xy + cy^2, \quad \dot{y} = -y - kx^2 - ckxy + 2y^2, \quad (5.2)$$

$$\dot{x} = x + mx^2 + xy + cy^2, \quad \dot{y} = -y - cx^2 - xy - my^2, \quad (5.3)$$

$$\dot{x} = x + lmx^2 + xy + cy^2, \quad \dot{y} = -y - cl^3x^2 - lxy - my^2, \quad (5.4)$$

$$\dot{x} = x + ax^2 + cy^2, \quad \dot{y} = -y - kx^2 - my^2, \quad (5.5)$$

$$\dot{x} = x + ax^2 + 2mxy + cy^2, \quad \dot{y} = -y - kx^2 - 2axy - my^2. \quad (5.6)$$

Haciendo un cambio lineal de coordenadas y un rescalado de la variable independiente, cualquier sistema diferencial polinomial que tenga una silla débil en el origen puede ser escrito como

$$\dot{x} = y + \bar{p}(x, y), \quad \dot{y} = x + \bar{q}(x, y), \quad (5.7)$$

donde \bar{p} y \bar{q} son polinomios reales sin términos constantes ni términos lineales. Haciendo el cambio de variables

$$x = (\bar{w} + w)/2, \quad y = (\bar{w} - w)i/2, \quad (5.8)$$

y de la variable independiente $T = it$ el sistema diferencial (5.7) se convierte en el sistema diferencial complejo

$$\dot{w} = \bar{w} + P(w, \bar{w}), \quad \dot{\bar{w}} = -w + Q(w, \bar{w}), \quad (5.9)$$

donde P y Q son polinomios complejos. Entonces las cantidades foco V_j del sistema (5.9) coinciden con las cantidades silla L_j del sistema (5.7). Debido a esta dualidad entre cantidades foco y cantidades silla tenemos que una silla integrable tiene una integral primera analítica definida en una vecindad de ella. Esta es la razón para llamar a esta silla una silla integrable. El cambio complejo (5.8) es introducido justamente para mostrar la dualidad de focos débiles y sillas débiles. Debemos mencionar que el sistema complejo (5.9) tiene una integral primera analítica compleja local en una vecindad del origen, para más detalles ver [12, 7] o la sección 12 del libro [8]; y volviendo atrás a través de los cambios de variables conseguimos una integral primera analítica compleja local en una vecindad de la silla integrable real. En consecuencia las partes real e imaginaria de esta integral primera analítica compleja son integrales primeras analíticas locales de la silla integrable.

Es conocido que todos los sistemas cuadráticos con una silla integrable poseen una integral primera Liouvilliana, ver por ejemplo [1]. Una *integral primera Liouvilliana* es una integral primera que se puede escribir por medio de cuadraturas de funciones elementales, para más detalles ver [14]. Nosotros encontraremos las integrales primeras Liouvillianas de cada una de las familias (5.2)–(5.6).

5.2. Factores integrantes inversos polinomiales

Sea W un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 simplemente conexo. Una función de clase \mathbb{C}^1 no-cero $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ es un *factor integrante inverso* del sistema (5.1) sobre W si ésta es una solución de la ecuación diferencial parcial lineal

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \text{div}(P, Q)V, \quad (5.10)$$

donde $\text{div}(P, Q) = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$ es la divergencia del campo vectorial $\mathcal{X} = (P, Q)$ asociado al sistema (5.1).

Teorema 5.1. *Los sistemas cuadráticos (5.2)–(5.6) poseen un factor integrante inverso polinomial $V = V(x, y)$.*

(a) *Para el sistema (5.2) $V = V_{11}V_{12}$ con*

$$\begin{aligned} V_{11} &= kx^2 - 2ckxy + c^2ky^2 + 2ckx + 2y - 1, \\ V_{12} &= (1 - c^2k)(kx^3 - 3ckx^2y + 3c^2kxy^2 - c^3ky^3 + 3ckx^2 + \\ &\quad 3(1 - c^2k)xy - 3cy^2) + 6c(ckx + y) - 2c. \end{aligned}$$

(b) Para el sistema (5.3) $V = V_{21}V_{22}$ con

$$\begin{aligned} V_{21} &= (c - m)(x + y) - 1, \\ V_{22} &= (2c - 1)(c + m - 1)(cx^2 - (c - m - 1)xy + cy^2) + \\ &\quad 2c((c + m - 1)(x + y) + 1). \end{aligned}$$

(c) Para el sistema (5.4) $V = V_{31}V_{32}$ con

$$\begin{aligned} V_{31} &= 1 - (cl - m)(lx + y), \\ V_{32} &= 2c - (2cl - 1)((cl - 1)^2 - m^2)xy + 2c(cl + m - 1) \\ &\quad (lx + y) + c(2cl - 1)(cl + m - 1)(l^2x^2 + y^2). \end{aligned}$$

(d) Para el sistema (5.5)

$$\begin{aligned} V &= (ck - am)(kx^3 + 3xy + ax^2y + mxy^2 + cy^3) - \\ &\quad (a^2 + km)x^2 - (ac + m^2)y^2 - 2ax - 2my - 1. \end{aligned}$$

(e) Para el sistema (5.6) $V = 1$. Por lo tanto el sistema (5.6) es Hamiltoniano.

Demostración. Para cada una de las afirmaciones del teorema, la prueba es obtenida buscando una solución polinomial de la ecuación diferencial lineal parcial (5.10).

Para el sistema cuadrático (5.2) la ecuación (5.10) es

$$\begin{aligned} (x - 2ckx^2 + xy + cy^2) \frac{\partial V}{\partial x} + (-y - kx^2 - ckxy + 2y^2) \frac{\partial V}{\partial y} - \\ (5(y - ckx))V = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

Buscamos una solución polinomial V de grado 5 que sea solución de (5.11). Tenemos que

$$\begin{aligned} V = \frac{-S}{5c^4k^2(c^2k - 1)} (kx^2 - 2ckxy + c^2ky^2 + 2ckx + 2y - 1) [(1 - c^2k)(kx^3 - \\ c^3ky^3 - 3(ckx^2y - c^2kxy^2 - ckx^2 - (1 - c^2k)xy + cy^2) + 2c(3ckx + 3y - 1)], \end{aligned}$$

con S constante, es un factor integrante inverso polinomial del sistema (5.2). Por las propiedades de los factores integrantes podemos quitar la constante multiplicativa en la expresión anterior y el polinomio restante también es un factor integrante inverso del sistema. Haciendo $V = V_{11}V_{12}$ con $V_{11} = kx^2 - 2ckxy + c^2ky^2 + 2ckx + 2y - 1$ y $V_{12} = (1 - c^2k)(kx^3 - 3ckx^2y + 3c^2kxy^2 - c^3ky^3 + 3ckx^2 + 3(1 - c^2k)xy - 3cy^2) + 6c(ckx + y) - 2c$ obtenemos el factor integrante inverso polinomial del sistema (5.2). Por lo tanto esto prueba la afirmación (a) del teorema.

De forma análoga al caso anterior obtenemos los factores integrantes inversos polinomiales de los sistemas cuadráticos (5.3)–(5.5). Para el sistema cuadrático (5.6) tenemos $\text{div}(P, Q) = 0$ y por lo tanto el sistema es Hamiltoniano y su factor integrante inverso es 1. □

5.3. Integrales primeras Liouvillianas

Recordamos que un sistema diferencial polinomial (5.1) con un factor integrante inverso $V = V(x, y) : W \rightarrow \mathbb{R}$ posee una integral primera dada por

$$H(x, y) = \int \frac{P(x, y)}{V(x, y)} dy + g(x), \quad (5.12)$$

donde g se escoge de modo que $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{Q}{V}$.

En 1992 Singer [14] probó que un sistema diferencial polinomial tiene una integral primera Liouvilliana si y sólo si éste tiene un factor integrante inverso de la forma

$$\exp\left(\int U_1(x, y) dx + \int U_2(x, y) dy\right), \quad (5.13)$$

donde U_1 y U_2 son funciones racionales que verifican $\partial U_1/\partial y = \partial U_2/\partial x$. En 1999 Christopher [5] mejoró los resultados de Singer mostrando que el factor integrante inverso (5.13) puede ser escrito en la forma

$$\exp(g/h) \prod_{i=1}^k f_i^{\lambda_i}, \quad (5.14)$$

donde g , h y f_i son polinomios y $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

Como todos los factores integrantes inversos de los sistemas (5.2)–(5.6) son polinomiales (Teorema 5.1) son de la forma (5.14). En consecuencia por los resultados de Singer y Christopher hemos obtenido una nueva demostración de que todas las integrales primeras de los sistemas cuadráticos con una silla integrable son Liouvillianas.

Teorema 5.2. *Las siguientes afirmaciones se cumplen.*

(a) *Una integral primera del sistema (5.2) es*

$$\frac{V_{11}^3}{V_{12}^2} \quad \text{si } 1 + c^2k \neq 0,$$

$$\frac{4cx + 6x^2 + c^2(1 - 4y + 6y^2)}{V_{11}^2} \quad \text{si } 1 + c^2k = 0.$$

(b) *Una integral primera del sistema (5.3) es*

$$V_{21}^{c+m-1} V_{22}^{c-m} \quad \text{si } m \neq c, 1 - c, 3c - 1, c \neq 1/2,$$

$$(2c - 1)(x + y) - \log |V_{22}| \quad \text{si } m = c \neq 1/2,$$

$$(2c - 1)(c(2c - 1)(x^2 + y^2) + (-4c^2 + 6c - 2)xy + 2c(x + y)) + 2c \log |V_{21}| \quad \text{si } m = 1 - c \neq 1/2,$$

$$\frac{1}{V_{21}^2} (2(2c-1)(2c+(1-2c)^2x)y + c(3+4(2c-1)x)) + 2c \log |V_{21}|$$

si $m = 3c - 1 \neq 1/2$,

$$\frac{1}{V_{22}} (4V_{22} - 8 + (2m-1)^2(x^2 + (2m+1)xy + y^2) - 8V_{22} \log |2V_{22}|)$$

si $c = 1/2, m \neq 1/2$,

además si $m = c = 1/2$, el sistema (5.3) coincide con el sistema (5.6) con $a = k = 1/2$.

(c) Una integral primera del sistema (5.4) es

$$\frac{V_{32}^{m-cl}}{V_{31}^{m+cl-1}} \quad \text{si } m \neq cl, 1-cl, 3cl-1, 2cl \neq 1,$$

$$\frac{1}{V_{32}} (4c(2V_{32} - 8c) + (2m-1)^2(x^2 + 2c(2m+1)xy + 4c^2y^2) - 16cV_{32} \log |2V_{32}|) \quad \text{si } 2cl \neq 1, m \neq 1/2,$$

$$(2cl-1)(lx+y) - \log |V_{32}| \quad \text{si } m = cl, 2cl \neq 1,$$

$$(2cl-1)((-2+2cl(3-2cl))xy + 2c(lx+y) + c(2cl-1)(l^2x^2+y^2)) + 2c \log |V_{31}| \quad \text{si } m = 1-cl, 2cl \neq 1,$$

$$\frac{1}{V_{31}^2} [-16c^3l^4x^2 + 2x(lx-1) + 8c^2l^2x(3lx-1 + c(-12l^2x^2 + 8lx-1))] + \frac{2}{V_{31}} (x + 4c^2l^2x + c(2-4lx)) + 2c \log |V_{31}| \quad \text{si } m = 3cl-1, 2cl \neq 1,$$

además si $m = 1/2$, el sistema (5.4) coincide con el sistema (5.6) con $a = 1/(4c)$ y $k = 1/(8c^2)$.

(d) Una integral primera del sistema (5.5) es

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(x+ax^2+cr_i^2) \log |y-r_i|}{f(r_i)}$$

donde $f(r) = 3c(am-ck)r^2 + 2(ac+m^2-ckmx+am^2x)r + a(am-ck)x^2 + 3(am-ck)x + 2m$ y r_1, r_2 y r_3 son las tres raíces del siguiente polinomio en la variable r

$$(-c^2k+acm)r^3 + (ac+m^2-ckmx+am^2x)r^2 + (2m-3ckx+3amx-ackx^2+a^2mx^2)r + (2ax+a^2x^2+kmx^2-ck^2x^3+akmx^3+1).$$

(e) Una integral primera del sistema Hamiltoniano (5.6) es

$$kx^3 + 3ax^2y + 3mxy^2 + cy^3 + 3xy.$$

Demostración. Como el sistema (5.2) tiene un factor integrante inverso polinomial V dado por el Teorema 5.1(a), de acuerdo a la ecuación (5.12) su integral primera asociada a V es

$$H(x, y) = \int \frac{x - 2ckx^2 + xy + cy^2}{V(x, y)} dy + g(x),$$

tal que $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{-y - kx^2 - ckxy + 2y^2}{V}$. De aquí $g(x) = 0$ y

$$H = \frac{1}{6(1 + c^2k)^2} (3 \log |-1 + kx^2 + 2y + c^2ky^2 + x(2ck - 2cky)| \\ - 2 \log |(1 - c^2k)(kx^3 - 3ckx^2y + 3c^2kxy^2 - c^3ky^3 + 3ckx^2 + \\ 3(1 - c^2k)xy - 3cy^2) + 6c(ckx + y) - 2c|),$$

siempre que $1 + c^2k \neq 0$. Ignorando la constante que aparece en H podemos escribir la integral primera en la forma

$$3 \log |V_{11}| - 2 \log |V_{12}| = \log \left| \frac{V_{11}^3}{V_{12}^2} \right|,$$

donde V_{11} y V_{12} son las funciones definidas en el Teorema 5.1(a). Finalmente, aplicando la función exponencial a la expresión anterior obtenemos la integral primera racional del sistema cuadrático (5.2) y por tanto hemos probado la afirmación (a) si $1 + c^2k \neq 0$.

Si $1 + c^2k = 0$, el sistema cuadrático (5.2) toma la forma

$$\dot{x} = x + \frac{2x^2}{c} + xy + cy^2, \quad \dot{y} = -y + \frac{1}{c^2}x^2 + \frac{1}{c}xy + 2y^2.$$

Nuevamente por el Teorema 5.1(a), $V_{11} = -(c + x - cy)^2/c^2$ y $V_{12} = -2(c + x - cy)^3/c^2$. Calculamos la integral primera asociada a $V = V_{11}V_{12}$ mediante la ecuación (5.12) y obtenemos

$$\frac{c^2(4cx + 6x^2 + c^2(1 - 4y + 6y^2))}{24(c + x - cy)^4} = \frac{4cx + 6x^2 + c^2(1 - 4y + 6y^2)}{24c^2V_{11}^2},$$

quitando la constante en el denominador completamos la prueba de la afirmación (a) del teorema.

Para el sistema (5.3), usamos el factor integrante inverso polinomial dado por el Teorema 5.1(b) y calculamos la integral primera asociada a este factor integrante inverso consiguiendo

$$\frac{1}{(2c - 1)(c - m)(3c - m - 1)(c + m - 1)} ((c + m - 1) \log |(c - m)(x + y) - \\ 1| + (c - m) \log |(2c - 1)(c + m - 1)(cx^2 - (c - m - 1)xy + cy^2) + \\ 2c((c + m - 1)(x + y) + 1)|)$$

siempre que $m \neq c, 1 - c, 3c - 1$ y $c \neq 1/2$. Eliminamos la constante que aparece en el denominador y escribimos esta expresión como

$$(c + m - 1) \log |V_{21}| + (c - m) \log |V_{22}| = \log |V_{21}^{c+m-1} V_{22}^{c-m}|,$$

donde V_{21} y V_{22} son las funciones definidas en el Teorema 5.1(b). De aquí obtenemos la integral primera de la afirmación (b) del teorema para todo $m \neq c, 1 - c, 3c - 1$ y $c \neq 1/2$.

Si $m = c$, del Teorema 5.1(b) tenemos que $V_{21} = -1$, $V_{22} = (2c - 1)^2(cx^2 + xy + cy^2) + 2c((2c - 1)(x + y) + 1)$ y la integral primera es

$$-\frac{(2c - 1)(x + y) - \log |V_{22}|}{(2c - 1)^3},$$

para todo $c \neq 1/2$. Aunque podemos ignorar la constante que aparece en el denominador, es fácil verificar que la expresión así obtenida es una función constante en $c = 1/2$. Por lo tanto esta función es una integral primera siempre que $m = c \neq 1/2$ como se declara en la afirmación (b) del teorema.

Ahora, si $m = 1 - c$ tenemos $V_{21} = (2c - 1)(x + y) - 1$, $V_{22} = 2c$ y la integral primera del sistema es

$$\frac{1}{4c(2c - 1)^3}((2c - 1)(c(2c - 1)(x^2 + y^2) + (-4c^2 + 6c - 2)xy + 2c(x + y)) + 2c \log |V_{21}|).$$

Observamos que esta función no está definida en $c = 0, 1/2$, sin embargo eliminando la constante multiplicativa la integral primera resultante está definida y no es constante en $c = 0$, pero es una constante compleja si $c = 1/2$. Por lo tanto esta última función es una integral primera del sistema si $m = 1 - c \neq 1/2$, así obtenemos la afirmación (b) para este caso.

Considerando ahora $m = 3c - 1$, obtenemos $V_{21} = (1 - 2c)(x + y) - 1$, $V_{22} = 2c(1 + (2c - 1)(x + y))^2$, y la integral primera es

$$\frac{1}{4c(2c - 1)^3} \left[\frac{c(3 + 4(2c - 1)x) + 2(2c - 1)(2c + (2c - 1)^2x)y}{V_{21}^2} + 2c \log |V_{21}| \right]$$

con $c \neq 0, 1/2$. También aquí observamos que la función obtenida eliminando la constante multiplicativa en la expresión anterior está definida y no es constante en $c = 0$, mientras que en $c = 1/2$ es una constante, por consiguiente tenemos una integral primera del sistema siempre que $m = 3c - 1 \neq 1/2$, así probamos este caso de la afirmación (b) del teorema.

Si $c = 1/2$, entonces $V_{22} = (m - 1/2)(x + y) + 1 = -V_{21}$ y la integral primera es

$$\frac{(4V_{22} + (2m - 1)^2(x^2 + (2m + 1)xy + y^2) - 8V_{22} \log |2V_{22}| - 8)}{(2m - 1)^3 V_{22}}$$

para todo $m \neq 1/2$. Eliminando la constante que aparece en el denominador, la función resultante es constante si $m = 1/2$. Por lo tanto ésta es una integral

primera siempre que $c = 1/2$ y $m \neq 1/2$ y así la afirmación (b) del teorema queda demostrada para este caso.

Si $m = c = 1/2$, el sistema es

$$\dot{x} = x + x^2/2 + xy + y^2/2, \quad \dot{y} = -x^2/2 - y - xy - y^2/2,$$

con factor integrante inverso $V = 1$, por lo tanto el sistema (5.3) en este caso es Hamiltoniano y pertenece a la familia (5.6) con $a = c = m = k = 1/2$. Esto completa la prueba de la afirmación (b) del teorema.

Para el sistema cuadrático (5.4) la integral primera asociada a su factor integrante inverso polinomial dado por el Teorema 5.1(c) es

$$\frac{1}{(2cl - 1)(cl - m)(3cl - m - 1)(cl + m - 1)} \left((m - cl) \log |2c - (2cl - 1)((cl - 1)^2 - m^2)xy + 2c(cl + m - 1)(lx + y) + c(2cl - 1)(cl + m - 1)(l^2x^2 + y^2)| - (cl + m - 1) \log |1 - (cl - m)(lx + y)| \right)$$

para todo $2cl \neq 1$ y $m \neq cl, 1 - cl, 3cl - 1$, la cual se puede escribir, omitiendo el factor constante, como

$$(m - cl) \log |V_{32}^{m-cl}| - (cl + m - 1) \log |V_{31}^{m+cl-1}|,$$

o equivalentemente, $\frac{V_{32}^{m-cl}}{V_{31}^{m+cl-1}}$ siendo V_{31} y V_{32} las funciones definidas en el Teorema 5.1(c).

Si $2cl = 1$, entonces $V_{31} = (4c + (2m - 1)(x + 2cy))/(4c)$, $V_{32} = (m - 1/2)x + c(2 + (2m - 1)y)$ y la integral primera del sistema es

$$\frac{1}{2c(2m - 1)^3 V_{32}} \left[(2m - 1)^2 (x^2 + 2c(1 + 2m)xy + 4c^2 y^2) + 4c(2V_{32} - 8c) - 16cV_{32} \log |2V_{32}| \right]$$

siempre que $c \neq 0$ y $m \neq 1/2$. Sin embargo, la función obtenida eliminando el factor constante en el denominador está definida y no es constante en $c = 0$ pero toma un valor constante en $m = 1/2$. Así obtenemos la integral primera de la afirmación (c) del teorema para el caso $2cl = 1$ y $m \neq 1/2$.

Ahora consideramos $cl = m$. En este caso $V_{31} = 1$, $V_{32} = 2c + (2cl - 1)(2cy + x(2cl + (2cl - 1)y) + c(2cl - 1)(l^2x^2 + y^2))$ y la integral primera es

$$\frac{1}{(2cl - 1)^3} \left((2cl - 1)(lx + y) - \log |V_{32}| \right)$$

con $2cl \neq 1$. Aquí también comprobamos que la función obtenida eliminando la constante en la expresión anterior es constante si $2cl = 1$, por consiguiente esta integral primera está definida siempre que $cl = m$ y $2cl \neq 1$ como aparece en la afirmación (c) del teorema en este caso.

Si $m = 1 - cl$, tenemos $V_{31} = 1 - (2cl - 1)(lx + y)$, $V_{32} = 2c$ y la integral primera es

$$\frac{-1}{4c(2cl - 1)^3} [(2cl - 1)((-2 - 2cl(-3 + 2cl))xy + 2c(lx + y) + c(2cl - 1)(l^2x^2 + y^2)) + 2c \log |V_{31}|]$$

para todo $c \neq 0$ y $2cl \neq 1$. De esta función anterior obtenemos la integral primera de la afirmación (c) del teorema en el caso $m = 1 - cl$ y $2cl \neq 1$. Si $c = 0$ la integral primera está definida y no es una constante.

Si $m = 3cl - 1$, entonces $V_{31} = 1 - (1 - 2cl)(lx + y)$, $V_{32} = 2c(l(x - 2clx - 2cy) + y - 1)^2$ y la integral primera es

$$\frac{1}{4c(2cl - 1)^3} \left[\frac{2c(c(3 + 4l(2cl - 1)x) + 2(2cl - 1)(2c + (1 - 2cl)^2x)y)}{V_{32}} + 2c \log |V_{31}| \right]$$

siempre que $c \neq 0$ y $2cl \neq 1$. La integral primera obtenida excluyendo el factor constante está definida y no es constante en $c = 0$ pero es constante si $2cl \neq 1$, por lo tanto hemos conseguido la integral primera de la afirmación (c) del teorema en el caso $m = 3cl - 1$ y $2cl \neq 1$.

Finalmente, si $m = 1/2$ y $2cl = 1$, el sistema (5.4) queda

$$\dot{x} = x + \frac{x^2}{4c} + xy + cy^2, \quad \dot{y} = -y - \frac{x^2}{8c^2} - \frac{xy}{2c} - \frac{y^2}{2}$$

que es un sistema Hamiltoniano y coincide con el sistema (5.6) para $a = 1/(4c)$ y $k = 1/(8c^2)$. En consecuencia hemos probado la afirmación (c) del teorema.

Para el sistema (5.5), obtenemos una integral primera asociada con el factor integrante inverso V del Teorema 5.1(d), mediante la ecuación (5.12) dada por

$$\int \frac{x + ax^2 + cy^2}{V} dy,$$

y de aquí resulta la integral primera de la afirmación (d) del teorema.

Por el Teorema 5.1(e) sabemos que el sistema cuadrático (5.6) es Hamiltoniano, y por lo tanto su factor integrante inverso es 1. Por lo tanto de la ecuación 5.12 una integral primera para este sistema es

$$\int (ax^2 + 2mxy + cy^2 + x) dy + \frac{kx^3}{3},$$

que corresponde a la proporcionada en la afirmación (e) del teorema. □

5.4 Referencias

- [1] J.C. ARTÉS, J. LLIBRE Y N. VULPE, *Quadratic systems with an integrable saddle: A complete classification in the coefficient space \mathbb{R}^{12}* , por aparecer en J. Differential Equations.
- [2] N.N. BAUTIN, *On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type*, Mat. Sb. 30 (1952) 181–196, Amer. Math. Soc. Transl. **100** (1954), 1–19.
- [3] CAI SULIN, *The weak saddle and separatrix cycle of a quadratic system*, Acta Math. Sinica **30** (1987), 553–559 (en Chino).
- [4] J. CHAVARRIGA, H. GIACOMINI, J. GINÉ Y J. LLIBRE, *On the integrability of two-dimensional flows*, J. Differential Equations **157** (1999), 163–182.
- [5] C.J. CHRISTOPHER, *Liouvillian first integrals of second order polynomial differential equations*, Electron. J. Differential Equations **1999** (1999), 7.
- [6] H. DULAC, *Détermination et intégration d'une certaine classe d'équation différentielles ayant pour point singulier un centre*, Bull. Sciences Math. Sér. 2 **32** (1908), 230–252.
- [7] P.M. ELIZAROV, YU.S. ILYASHENKO, A.A. SHCHERBAKOV Y S.M. VORONIN, *Finitely generated groups of germs of one-dimensional conformal mappings, and invariants for complex singular points of analytic foliations of the complex plane*, Nonlinear Stokes phenomena, Adv. Soviet Math. **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1993), 57–105.
- [8] YU. ILYASHENKO Y S. YAKOVENKO, *Lectures on analytic differential equations*, Graduate Studies in Mathematics **86**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [9] P. JOYAL Y C. ROUSSEAU, *Saddle quantities and applications*, J. Differential Equations **78** (1989), 374–399.

-
- [10] W. KAPTEYN, *On the midpoints of integral curves of differential equations of the first degree*, Nederl. Akad. Wetensch. Verslag. Afd. Natuurk. Koninkl. Nederland (1911), 1446–1457 (en Holandés).
- [11] W. KAPTEYN, *New investigations on the midpoints of integrals of differential equations of the first degree*, Nederl. Akad. Wetensch. Verslag. Afd. Natuurk. **20** (1912), 1354–1365, Nederl. Akad. Wetensch. Verslag. Afd. Natuurk. **21** (1912), 27–33 (en Holandés).
- [12] J.F. MATTEI Y R. MOUSSU, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1980), 469–523.
- [13] J.W. REYN, *A bibliography of the qualitative theory of quadratic systems of differential equations in the plane*, Delf University of Technology, <http://ta.twi.tudelft.nl/DV/Staff/J.W.Reyn.html>, 1997.
- [14] M.F. SINGER, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 673–688.
- [15] D. SCHLOMIUK, J. GUCKENHEIMER Y R. RAND, *Integrability of plane quadratic vector fields*, Expo. Math. **8** (1990), 3–25.
- [16] YE YANQIAN Y OTROS, *Theory of Limit Cycles*, Transl. Math. Monographs **66**, Amer. Math. Soc., Providence, 1984.
- [17] YE YANQIAN, *Qualitative Theory of Polynomial Differential Systems*, Shangai Scientific & Technical Publishers, Shangai, 1995 (en Chino).
- [18] H. ZOLADEK, *Quadratic systems with center and their perturbations*, J. Differential Equations **109** (1994), 223–273.

Capítulo 6

Retratos de fase de los sistemas cuadráticos Lotka–Volterra con un invariante Darboux en el disco de Poincaré

Los sistemas cuadráticos Lotka–Volterra y su generalización a dimensión n comenzaron a estudiarse en [13, 18]. Más tarde estos sistemas diferenciales fueron estudiados por Kolmogorov [10], y después algunos autores les llamaron *sistemas Kolmogorov*. Existen muchos fenómenos naturales que pueden ser modelados por estos sistemas diferenciales tales como el tiempo de evolución de especies en conflicto en biología [9, 15], las reacciones químicas, la física del plasma [11], la hidrodinámica [2], la dinámica [3], la economía etc.

Específicamente en este capítulo estudiamos los sistemas cuadráticos Lotka–Volterra que tienen un invariante Darboux y caracterizamos todos sus retratos de fase globales en el disco de Poincaré para cada uno de ellos. Conocer una integral primera de un sistema diferencial en el plano tiene un interés especial porque permite calcular las expresiones explícitas de las trayectorias del sistema. Sin embargo, cuando no podemos calcular una integral primera es útil determinar si el sistema tiene un invariante Darboux (para más detalles ver la sección 6.1).

Este capítulo ha dado lugar al artículo:

Y. BOLAÑOS, J. LLIBRE Y C. VALLS, *Phase portraits of quadratic Lotka–Volterra systems with a Darboux invariant in the Poincaré disc*, el cual ha sido enviado a publicar en marzo de 2013.

El capítulo se organiza como sigue. Comenzamos proporcionando algunos conceptos básicos sobre los sistemas cuadráticos Lotka–Volterra que poseen un invariante Darboux (sección 6.1). En la sección 6.2 obtenemos la caracterización de dichos sistemas cuadráticos (ver Teorema 6.3). Las dos secciones siguientes contienen las nociones sobre la compactificación de Poincaré (sección 6.3), las separatrices y las regiones canónicas (sección 6.4) que ne-

cesitaremos mas adelante. En la sección 6.5 presentamos los resultados que usaremos de la clasificación de los sistemas diferenciales polinomiales homogéneos cuadráticos desarrollada por Date en [5]. Finalmente, en las secciones 6.6 y 6.7 caracterizamos los retratos de fase globales de los sistemas Lotka–Volterra con un invariante Darboux en el disco de Poincaré (Teoremas 6.7 y 6.8).

6.1. Sistemas Lotka–Volterra con un invariante Darboux

Sea $\mathbb{R}[x, y]$ (resp. $\mathbb{C}[x, y]$) el anillo de los polinomios en las variables x e y con coeficientes en \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}). Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales polinomiales o simplemente un *sistema diferencial polinomial* en \mathbb{R}^2 definido por

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (6.1)$$

donde $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$ y el punto denota la derivada respecto a la variable independiente t usualmente llamada el *tiempo*. Decimos que el máximo de los grados de los polinomios P y Q es el *grado* del sistema (6.1). Usualmente un *sistema diferencial polinomial cuadrático de grado 2* es llamado simplemente un *sistema cuadrático*.

El *campo vectorial cuadrático* \mathcal{X} asociado al sistema cuadrático (6.1) está dado por

$$\mathcal{X} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (6.2)$$

Sea $f \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \{0\}$. La curva algebraica $f(x, y) = 0$ es una *curva algebraica invariante* del sistema polinomial (6.1) si para algún polinomio $K \in \mathbb{C}[x, y]$ tenemos

$$\mathcal{X}f = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = Kf.$$

El polinomio K se llama el *cofactor* de la curva algebraica invariante $f = 0$.

Sea $g, h \in \mathbb{C}[x, y]$ y supongamos que g y h son primos relativos en el anillo $\mathbb{C}[x, y]$ o que $h = 1$. Entonces la función $\exp(g/h)$ se llama un *factor exponencial* del sistema (6.1) si para algún polinomio $K \in \mathbb{C}[x, y]$ de grado a lo más $m - 1$ tenemos que

$$\mathcal{X} \left(\exp \left(\frac{g}{h} \right) \right) = K \exp \left(\frac{g}{h} \right).$$

Una función real localmente no constante H de clase C^1 definida sobre un conjunto abierto U es una *integral primera* del campo vectorial polinomial \mathcal{X} si $H(x(t), y(t))$ es constante para todo valor de t para el cual la solución $(x(t), y(t))$ de \mathcal{X} está definida sobre U . Observemos que H es una integral primera de \mathcal{X} si y sólo si $\mathcal{X}H = 0$ sobre U .

Una función no constante $I = I(x, y, t)$ es un *invariante* de \mathcal{X} si

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial I}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0.$$

Esto es, I es un invariante de \mathcal{X} si ésta es una integral primera que depende del tiempo t . Además, decimos que I es un *invariante Darboux* si es un invariante que puede ser escrito como

$$I = f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \cdots F_q^{\mu_q} \exp(st),$$

donde $f_1 = 0, \dots, f_p = 0$ son curvas algebraicas invariantes de \mathcal{X} , F_1, \dots, F_q son factores exponenciales de \mathcal{X} , $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{C}$ y $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Un *sistema cuadrático Lotka–Volterra* tiene la forma

$$\dot{x} = x(ax + by + c), \quad \dot{y} = y(Ax + By + C), \quad (6.3)$$

donde a, b, c, A, B, C son constantes. Nosotros estamos interesados en estudiar los sistemas cuadráticos (6.3) que poseen un invariante Darboux.

Sea $\phi_p(t)$ la solución del sistema (6.1) que pasa a través del punto $p \in \mathbb{R}^2$ definido sobre su intervalo maximal (α_p, ω_p) tal que $\phi_p(0) = p$. Si $\omega_p = \infty$ definamos el conjunto

$$\omega(p) = \{q \in \mathbb{R}^2 : \text{existe } \{t_n\} \text{ con } t_n \rightarrow \infty \text{ y } \phi(t_n) \rightarrow q \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$$

De la misma forma si $\alpha_p = -\infty$ definamos el conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \mathbb{R}^2 : \text{existe } \{t_n\} \text{ con } t_n \rightarrow -\infty \text{ y } \phi(t_n) \rightarrow q \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

Los conjuntos $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ son llamados el *conjunto ω -límite* (o simplemente *ω -límite*) y el *conjunto α -límite* (o *α -límite*) de p , respectivamente.

En términos generales, con una integral primera podemos describir completamente el retrato de fase de un sistema diferencial plano, mientras que un invariante Darboux proporciona información sobre su comportamiento asintótico, esto es sobre los conjuntos α - y ω -límite de todas sus trayectorias. Más concretamente tenemos el siguiente resultado.

Lema 6.1. *Sea $I(x, y, t) = f(x, y)e^{st}$ un invariante Darboux del sistema (6.1). Sean $p \in \mathbb{R}^2$ y $\phi_p(t)$ la solución del sistema (6.1) en el disco de Poincaré. Entonces*

$$(a) \quad \omega(p) \subset \overline{\{f(x, y) = 0\}}, \quad y$$

$$(b) \quad \alpha(p) \subset \overline{\{f(x, y) = 0\}}$$

donde la adherencia se toma dentro del disco de Poincaré.

Demostración. Probaremos la afirmación (a), la prueba de la afirmación (b) es similar. Supongamos $s > 0$ y sea $\phi_p(t) = (x_p(t), y_p(t))$. Puesto que $I(x, y, t)$ es un invariante $I(x_p(t), y_p(t), t) = a \in \mathbb{R}$ para todo $t \in (\alpha_p, \omega_p)$ y, así

$$a = \lim_{t \rightarrow \infty} I(x_p(t), y_p(t), t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x_p(t), y_p(t))e^{st}.$$

Como $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{st} = \infty$, tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x_p(t), y_p(t), t) = 0$. Por lo tanto, por continuidad y por la definición de conjuntos ω^- y α^- límite tenemos que $\omega(p) \subset \overline{\{f(x, y) = 0\}}$. \square

6.2. Caracterización de los sistemas Lotka–Volterra con un invariante Darboux

Con el fin de probar el Teorema 6.3 primero recordemos un resultado de la Teoría de Darboux que necesitaremos, para una prueba ver el Teorema 8.7 de [6].

Proposición 6.2. *Supongamos que un sistema polinomial (6.1) de grado m posee p curvas algebraicas invariantes irreducibles $f_i = 0$ con cofactores K_i para $i = 1, \dots, p$ y q factores exponenciales $F_j = \exp(g_j/h_j)$ con cofactores l_j para $j = 1, \dots, q$. Si existen $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ no todos cero tales que*

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j l_j = -s \tag{6.4}$$

para algún $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces la función (multi-valorada)

$$f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} \exp(st) \tag{6.5}$$

es un invariante Darboux de \mathcal{X} .

Teorema 6.3. *Los sistemas cuadráticos Lotka–Volterra (6.3) que tienen un invariante Darboux son*

$$\dot{x} = x(ax + by + c), \quad \dot{y} = Cy \quad \text{con } C \neq 0, \tag{6.6}$$

o

$$\dot{x} = x \left(-A \frac{l_2}{l_1} x - B \frac{l_2}{l_1} y + c \right), \quad \dot{y} = y(Ax + By + C) \quad \text{con } l_1 \neq 0. \tag{6.7}$$

Sus invariantes Darboux son $e^{-Ct} y$ y $e^{(-cl_1 - Cl_2)t} x^{l_1} y^{l_2}$, respectivamente, donde l_1 y l_2 son constantes.

Demostración. Es fácil verificar que las rectas $x = 0$ y $y = 0$ son curvas algebraicas invariantes de los sistemas cuadráticos Lotka–Volterra (6.3) con cofactores $K_1 = ax + by + c$ y $K_2 = Ax + By + C$, respectivamente. Por lo

tanto, resolviendo la ecuación (6.4) con K_1 y K_2 obtenemos dos soluciones que son

$$s = -Cl_2, \quad A = 0, \quad B = 0, \quad l_1 = 0, \quad (6.8)$$

o

$$s = -cl_1 - Cl_2, \quad a = -Al_2/l_1, \quad b = -Bl_2/l_1, \quad l_1 \neq 0. \quad (6.9)$$

De (6.8) llegamos a la familia de sistemas cuadráticos Lotka–Volterra (6.6) que tienen el invariante Darboux $e^{-Ct}y$ cuando $C \neq 0$. Similarmente de (6.9) obtenemos la familia (6.7) con el invariante Darboux $e^{-(cl_1+Cl_2)t}x^{l_1}y^{l_2}$ cuando $-cl_1 - Cl_2 \neq 0$, como afirma el teorema. \square

A lo largo del capítulo no consideraremos los sistemas diferenciales (6.6) y (6.7) que se convierten en sistemas diferenciales lineales, así solamente consideramos los sistemas diferenciales cuadráticos (6.6) y (6.7).

6.3. La compactificación de Poincaré

Sea \mathcal{X} un campo vectorial plano de grado n . El *campo vectorial compactificado de Poincaré* $p(\mathcal{X})$ correspondiente a \mathcal{X} es un campo vectorial analítico inducido sobre \mathbb{S}^2 como sigue (ver por ejemplo [8], el Capítulo 5 de [6]). Sea $\mathbb{S}^2 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$ (la *esfera de Poincaré*) y $T_y\mathbb{S}^2$ el espacio tangente a \mathbb{S}^2 en el punto y . Consideremos la proyección central $f : T_{(0,0,1)}\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Esta función define dos copias de \mathcal{X} , una en el hemisferio norte y la otra en el hemisferio sur. Denotemos por \mathcal{X}' el campo vectorial $Df \circ \mathcal{X}$ definido sobre \mathbb{S}^2 excepto sobre su ecuador $\mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$. Claramente \mathbb{S}^1 está identificado como el *infinito* de \mathbb{R}^2 . Con el fin de extender \mathcal{X}' a un campo vectorial sobre \mathbb{S}^2 (incluyendo \mathbb{S}^1) \mathcal{X} tiene que satisfacer algunas condiciones adecuadas. En el caso que \mathcal{X} sea un campo vectorial plano de grado n , $p(\mathcal{X})$ es la única extensión analítica de $y_3^{n-1}\mathcal{X}'$ a \mathbb{S}^2 . Sobre $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ existen dos copias simétricas de \mathcal{X} , y conociendo el comportamiento de $p(\mathcal{X})$ alrededor de \mathbb{S}^1 , conocemos el comportamiento de \mathcal{X} en el infinito. La proyección del hemisferio norte cerrado de \mathbb{S}^2 sobre $y_3 = 0$ mediante la transformación $(y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_1, y_2)$ se llama el *disco de Poincaré*, y se denota por \mathbb{D}^2 . La compactificación de Poincaré tiene la propiedad que \mathbb{S}^1 es invariante por el flujo de $p(\mathcal{X})$.

Decimos que dos campos vectoriales polinomiales \mathcal{X} e \mathcal{Y} sobre \mathbb{R}^2 son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo sobre \mathbb{S}^2 preservando el infinito \mathbb{S}^1 que lleva órbitas del flujo inducido por $p(\mathcal{X})$ en órbitas del flujo inducido por $p(\mathcal{Y})$, preservando o revirtiendo simultáneamente el sentido de todas las órbitas.

Como \mathbb{S}^2 es una variedad diferenciable, para calcular la expresión para $p(\mathcal{X})$, podemos considerar las seis cartas locales $U_i = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_i > 0\}$, y $V_i = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_i < 0\}$ donde $i = 1, 2, 3$; y los difeomorfismos $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $G_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ para $i = 1, 2, 3$ son los inversos de las proyecciones centrales de los

planos tangentes en los puntos $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$, respectivamente. Denotemos por (u, v) el valor de $F_i(y)$ o $G_i(y)$ para cualquier $i = 1, 2, 3$ (por lo tanto (u, v) representa diferentes cosas según la carta local que se considere). La expresión para $p(\mathcal{X})$ en la carta local (U_1, F_1) es

$$\dot{u} = v^n \left[-uP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right], \quad \dot{v} = -v^{n+1} P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right).$$

La expresión para $p(\mathcal{X})$ en la carta local (U_2, F_2) es

$$\dot{u} = v^n \left[P \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) - uQ \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right], \quad \dot{v} = -v^{n+1} Q \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right),$$

y para (U_3, F_3) es

$$\dot{u} = P(u, v), \quad \dot{v} = Q(u, v).$$

La expresión para $p(\mathcal{X})$ en las cartas (V_i, G_i) es la misma que para U_i multiplicado por $(-1)^{n-1}$ para $i = 1, 2, 3$. En cualquier carta, $v = 0$ sobre los puntos de \mathbb{S}^1 . Así obtenemos un campo vectorial polinomial en cada carta local.

6.4. Separatrices y regiones canónicas

Sea $p(\mathcal{X})$ la compactificación en el disco de Poincaré \mathbb{D} del sistema diferencial polinomial (6.1) definido en \mathbb{R}^2 , y sea Φ su flujo analítico. Siguiendo a Markus [14] y Neumann [16] denotemos por (U, Φ) el flujo de un sistema diferencial sobre un conjunto invariante $U \subset \mathbb{D}$ por el flujo Φ . El flujo (U, Φ) se denomina *paralelo* si es topológicamente equivalente a uno de los siguientes flujos:

- (i) El flujo definido en \mathbb{R}^2 por los sistemas diferenciales $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 0$, llamado *flujo banda*.
- (ii) El flujo definido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ por el sistema diferencial en coordenadas polares $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = 1$, llamado *flujo anular*.
- (iii) El flujo definido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ por el sistema diferencial en coordenadas polares $\dot{r} = r$, $\dot{\theta} = 0$, llamado *flujo espiral o radial*.

Es conocido que las separatrices del campo vectorial $p(\mathcal{X})$ en el disco de Poincaré \mathbb{D} son:

- (I) todas las órbitas de $p(\mathcal{X})$ que están en la frontera de \mathbb{S}^1 del disco de Poincaré (es decir, en el infinito de \mathbb{R}^2),
- (II) todos los puntos singulares finitos de $p(\mathcal{X})$,
- (III) todos los ciclos límites de $p(\mathcal{X})$, y

(IV) todas las separatrices de los sectores hiperbólicos de los puntos singulares finitos e infinitos de $p(\mathcal{X})$.

Sea \mathcal{S} la unión de las separatrices del flujo (\mathbb{D}, Φ) definido por $p(\mathcal{X})$ en el disco de Poincaré \mathbb{D} . Es fácil verificar que \mathcal{S} es un conjunto cerrado invariante. Si N es una componente conexa de $\mathbb{D} \setminus \mathcal{S}$, entonces N es también un conjunto invariante bajo el flujo Φ de $p(\mathcal{X})$, y el flujo $(N, \Phi|_N)$ es llamado una *región canónica* del flujo (\mathbb{D}, Φ) .

Proposición 6.4. *Si el número de separatrices del flujo (\mathbb{D}, Φ) es finito, entonces cada región canónica del flujo (\mathbb{D}, Φ) es paralela.*

Para una prueba de esta proposición ver [16] o [12].

La *configuración de separatrices* \mathcal{S}_c de un flujo (\mathbb{D}, Φ) es la unión de todas las separatrices \mathcal{S} del flujo junto con una órbita perteneciente a cada región canónica. La configuración de separatrices \mathcal{S}_c del flujo (\mathbb{D}, Φ) se denomina topológicamente equivalente a la configuración de separatrices \mathcal{S}_c^* del flujo (\mathbb{D}, Φ^*) si existe una orientación que preserve el homeomorfismo de \mathbb{D} en \mathbb{D} que transforma órbitas de \mathcal{S}_c en órbitas de \mathcal{S}_c^* , y órbitas de \mathcal{S} en órbitas de \mathcal{S}^* .

Teorema 6.5 (Markus–Neumann–Peixoto). *Sea (\mathbb{D}, Φ) y (\mathbb{D}, Φ^*) dos flujos del compactificado de Poincaré con un número finito de separatrices de dos campos vectoriales polinomiales (6.2). Entonces ellos son topológicamente equivalentes si y sólo si sus configuraciones de separatrices son topológicamente equivalentes.*

Para una prueba de este resultado ver [14, 16, 17].

Del teorema anterior tenemos que para clasificar los retratos de fase en el disco de Poincaré de un sistema diferencial polinomial plano que tiene un número finito de separatrices finitas e infinitas, es suficiente describir sus configuraciones de separatrices.

Finalmente, Bautin [1] mostró que los sistemas Lotka–Volterra no pueden tener ciclos límites, por consiguiente solamente buscaremos los otros tipos de separatrices.

6.5. Sobre la clasificación de sistemas diferenciales cuadráticos homogéneos reales bi-dimensionales

Date [5] realizó la clasificación de los retratos de fase de los sistemas diferenciales cuadráticos homogéneos reales. A continuación presentamos algunos de los resultados obtenidos en [5] que nosotros usaremos.

Un sistema diferencial cuadrático homogéneo real bi–dimensional se define por

$$\dot{x} = P_{11}^1 x^2 + 2P_{12}^1 xy + P_{22}^1 y^2, \quad \dot{y} = P_{11}^2 x^2 + 2P_{12}^2 xy + P_{22}^2 y^2.$$

Primero descompongamos $P_{\lambda\mu}^k$ en la “parte tensor” $Q_{\lambda\mu}^\kappa$ y la “parte vector” p_λ como

$$p_\lambda = P_{\lambda 1}^1 + P_{\lambda 2}^2, \quad Q_{\lambda\mu}^k = P_{\lambda\mu}^k - \frac{1}{3}(\delta_\lambda^k p_\mu + \delta_\mu^k p_\lambda),$$

donde δ_λ^k es la función delta Kronecker y $k, \lambda, \mu = 1, 2$. Además $Q_{\lambda\mu}^\kappa = Q_{\mu\lambda}^\kappa$ y $Q_{\lambda 1}^1 + Q_{\lambda 2}^2 = 0$.

Teorema 6.6. *Un sistema diferencial cuadrático homogéneo real bi–dimensional es afín–equivalente a una y solamente una de las diez formas canónicas dadas en la Tabla 6.1. Los parámetros \hat{p}_1 y \hat{p}_2 en la forma canónica de tipo $I\ominus$ son seis–valuados; esto es dos sistemas con (\hat{p}_1, \hat{p}_2) y (\hat{p}'_1, \hat{p}'_2) respectivamente son afín–equivalentes si y solamente si los vectores (\hat{p}_1, \hat{p}_2) y (\hat{p}'_1, \hat{p}'_2) están conectados a través de una rotación por $\pm 2\pi/3$ y/o una inversión del signo de \hat{p}_1 .*

Tipo	Forma Canónica
tipo $I\ominus$	$\dot{x} = -2xy + 2x(\hat{p}_1 x + \hat{p}_2 y)/3,$ $\dot{y} = -x^2 + y^2 + 2y(\hat{p}_1 x + \hat{p}_2 y)/3,$
tipo $I\oplus$	$\dot{x} = -2xy + 2x(\hat{p}_1 x + \hat{p}_2 y)/3,$ $\dot{y} = x^2 + y^2 + 2y(\hat{p}_1 x + \hat{p}_2 y)/3,$
tipo II(1)	$\dot{x} = (2\hat{p}_1/3 - 1)x^2 + xy,$ $\dot{y} = 2(\hat{p}_1 + 3)xy/3 + y^2,$
tipo II(2)	$\dot{x} = (2\hat{p}_1/3 - 1)x^2,$ $\dot{y} = 2(\hat{p}_1 + 3)xy/3,$
tipo III(1)	$\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = x^2 + y^2,$
tipo III(2)	$\dot{x} = -xy, \quad \dot{y} = x^2 - y^2,$
tipo III(3)	$\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = x^2 + xy,$
tipo III(4)	$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = x^2,$
tipo IV(1)	$\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = y^2,$
tipo IV(2)	$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0.$

Tabla 6.1: Formas canónicas de sistemas cuadráticos homogéneos.

Algunos invariantes fundamentales de un sistema diferencial cuadrático bi–dimensional

Los siguientes invariantes y covariantes conocidos en la teoría invariante clásica [7] son útiles para nuestro estudio.

Hesiano $h^{\kappa\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu, \rho, \sigma=1}^2 \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} Q_{\mu\rho}^\kappa Q_{\nu\sigma}^\lambda$, donde $\epsilon^{\kappa\lambda}$ es el 2–vector contrava-

riante unidad de peso 1 con $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = -1$, $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$.

$$\text{Discriminante } D = -2 \sum_{\kappa, \lambda, \mu, \nu=1}^2 \epsilon_{\kappa\lambda} \epsilon_{\mu\nu} h^{\kappa\mu} h^{\lambda\nu}.$$

$$\text{Invariantes } H = \sum_{\kappa, \lambda=1}^2 h^{\kappa\lambda} p_{\kappa} p_{\lambda} \text{ y } F = \sum_{\kappa, \lambda, \mu, \rho, \sigma=1}^2 \epsilon^{\mu\kappa} \epsilon^{\rho\lambda} Q_{\kappa\lambda}^{\sigma} p_{\mu} p_{\rho} p_{\sigma}.$$

$$\text{Covariante } T_{\kappa\lambda} = \sum_{\mu, \nu=1}^2 (2\epsilon_{\kappa\mu} \epsilon_{\lambda\nu} h^{\mu\nu} + Q_{\kappa\lambda}^{\mu} p_{\mu} / 3 + p_{\kappa} p_{\lambda} / 9).$$

Dado cualquier sistema diferencial cuadrático usando estos invariantes y covariantes podemos determinar a cuál de los 10 tipos dados en el Teorema 6.6 pertenece. Más concretamente,

$$\begin{aligned} D < 0 & \dots\dots\dots \text{tipo I}\ominus \\ D > 0 & \dots\dots\dots \text{tipo I}\oplus \\ D = 0 & \left\{ \begin{array}{l} [h^{\kappa\lambda}] \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} H \neq 0 \dots\dots\dots \text{tipo II}(1) \\ H = 0 \dots\dots\dots \text{tipo II}(2) \end{array} \right. \\ [h^{\kappa\lambda}] = 0 \left\{ \begin{array}{l} [Q_{\lambda\mu}^{\kappa}] \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} F > 0 \dots\dots\dots \text{tipo III}(1) \\ F < 0 \dots\dots\dots \text{tipo III}(2) \\ F = 0 \left\{ \begin{array}{l} [T_{\kappa\lambda}] \neq 0 \dots\dots \text{tipo III}(3) \\ [T_{\kappa\lambda}] = 0 \dots\dots \text{tipo III}(4) \end{array} \right. \\ [Q_{\lambda\mu}^{\kappa}] = 0 \left\{ \begin{array}{l} [p_{\lambda}] \neq 0 \dots\dots\dots \text{tipo IV}(1) \\ [p_{\lambda}] = 0 \dots\dots\dots \text{tipo IV}(2) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \end{aligned}$$

Entre un número infinito de invariantes de $P_{\lambda\mu}^{\kappa}$ que pueden obtenerse mediante combinaciones de estos invariantes fundamentales, la siguiente sucesión de invariantes es particularmente útil

$$K_m = F + 9(-2)^{m-3}H - 27(-8)^{m-3}D, \quad m = 1, 2, \dots,$$

para mas detalles ver [4]. Esta sucesión de invariantes juega un papel crucial en la clasificación de los sistemas diferenciales polinomiales homogéneos cuadráticos bi–dimensionales como mostraremos ahora.

La Tabla 6.2 proporciona una clasificación de los sistemas diferenciales polinomiales homogéneos cuadráticos que nosotros trataremos según el tipo de sistema al que pertenecen.

En la Figura 6.1 se muestran los retratos de fase correspondientes a los diferentes tipos de estos sistemas diferenciales que aparecen en la Tabla 6.2.

6.6. Retratos de fase globales del sistema Lotka–Volterra (6.6) con un invariante Darboux

Teorema 6.7. *El retrato de fase de cualquier sistema cuadrático Lotka–Volterra (6.6) es topológicamente equivalente a una de las 7 configuraciones*

Tipo	Signo de K_2 y K_3	Clasificación	
Tipo $I\ominus$	$K_2 > 0$	Tipo $I\ominus$ (1)	
	$K_2 < 0$	$K_3 > 0$	Tipo $I\ominus$ (2)
		$K_3 < 0$	Tipo $I\ominus$ (3)
	$K_2 = 0$	$K_3 > 0$	Tipo $I\ominus$ (4)
		$K_3 < 0$	Tipo $I\ominus$ (5)
		$K_3 = 0$	Tipo $I\ominus$ (6)
Tipo $I\oplus$	$K_2 > 0$ o $K_2 = K_3 = 0$	Tipo $I\oplus$ (1)	
	$K_2 < 0$	Tipo $I\oplus$ (2)	
	$K_2 = 0$ o $K_3 \neq 0$	Tipo $I\oplus$ (3)	
Tipo II(1)	$K_2 > 0$	Tipo II(1-1)	
	$K_2 < 0$	Tipo II(1-2)	
	$K_2 = 0$	Tipo II(1-3)	

Tabla 6.2: Clasificación de sistemas diferenciales cuadráticos homogéneos.

de las Figuras 6.2–6.5.

Demostración. Consideremos la familia de sistemas cuadráticos Lotka–Volterra (6.6) y calculemos sus singularidades finitas. Si $ac \neq 0$, existen dos puntos singulares $(0, 0)$ y $(-c/a, 0)$. En los casos $a = 0$ y $c \neq 0$, o $a \neq 0$ y $c = 0$, solamente tenemos el punto singular $(0, 0)$; y si $a = 0$ y $c = 0$ existen infinitos puntos singulares de la forma $(x, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$. Recordemos que $C \neq 0$, lo que garantiza la existencia de un invariante Darboux.

Como queremos clasificar los retratos de fase en el disco de Poincaré del sistema (6.6), introducimos un reescalado de las variables y del tiempo para reducir el número de sus parámetros tanto como sea posible, y de aquí los retratos de fase obtenidos para el nuevo sistema serán topológicamente equivalentes a los correspondientes retratos de fase del sistema (6.6). Sea

$$x = \alpha X, \quad y = \beta Y \quad y \quad t = \gamma T \tag{6.10}$$

donde α, β , y γ son parámetros.

Caso 1: $a = c = 0$. En este caso el sistema (6.6) se convierte en

$$\dot{x} = bxy, \quad \dot{y} = Cy, \tag{6.11}$$

cuyas singularidades $(x, 0)$ no son puntos aislados. De (6.10) y (6.11) obtenemos que

$$b\alpha\beta XY = \dot{x} = \alpha\dot{X} = \alpha \frac{dX}{\gamma dT}, \quad y \quad C\beta Y = \dot{y} = \beta\dot{Y} = \beta \frac{dY}{\gamma dT}.$$

De modo que el sistema (6.11) escrito en las nuevas variables X e Y es

$$X' = \gamma b\beta XY, \quad Y' = \gamma CY, \tag{6.12}$$

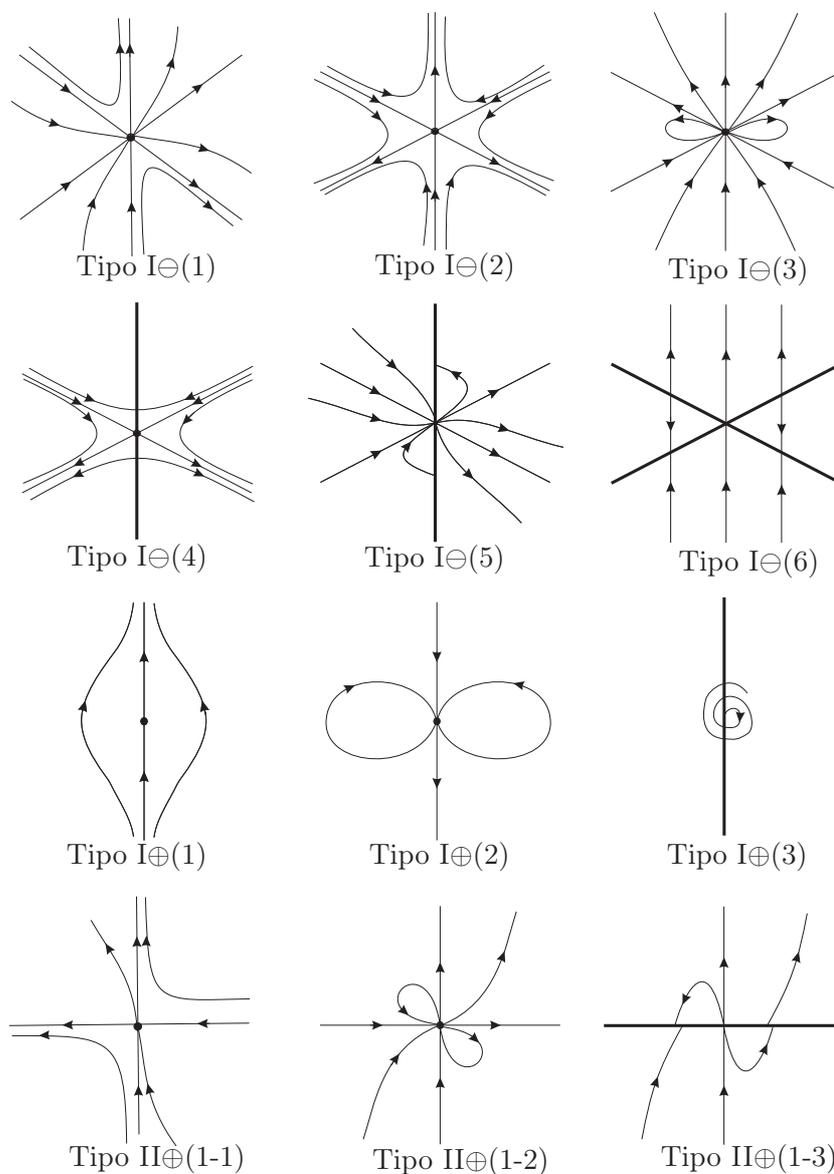


Figura 6.1: Retratos de fase para campos vectoriales cuadráticos homogéneos.

donde $'$ denota la derivada con respecto a la variable T . Tomando $\gamma C = 1$ y $\gamma b\beta = 1$ obtenemos que $\gamma = 1/C$ y, además $\beta = C/b$ cuando $b \neq 0$.

Si $b = 0$, el sistema (6.12) es $X' = 0$, $Y' = Y$. Como éste es un sistema diferencial lineal no lo consideramos.

Sea $b \neq 0$, entonces el sistema (6.12) es

$$X' = XY, \quad Y' = Y. \tag{6.13}$$

Por consiguiente el sistema (6.13) posee infinitas singularidades finitas, los puntos $(X, 0)$. Resolviendo este sistema cuadrático obtenemos las soluciones $Y = \ln|X| + k$ con $k \in \mathbb{R}$ y $X \neq 0$. La expresión para $p(\mathcal{X})$ en la carta local U_1 es $u' = -u^2 + uv$, $v' = -uv$ la cual posee una única singularidad sobre

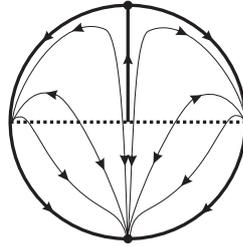


Figura 6.2: Retrato de fase del sistema (6.11) cuando $b \neq 0$. Posee infinitas separatrices.

U_1 , el origen.

Sobre U_2 la expresión para $p(\mathcal{X})$ es $u' = u - uv$, $v' = -v^2$. Por lo tanto el origen es un punto singular sobre U_2 . Dado que $D\mathcal{X}(0,0) = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $b \neq 0$, el origen es una singularidad semi–hiperbólica. Por el Teorema 2.19 de [6], éste es un silla–nodo con separatriz estable tangente en $(0,0)$ al eje v positivo. Las dos separatrices inestables son tangentes al eje u en $(0,0)$. Por consiguiente reuniendo toda la información anterior obtenemos el retrato de fase del sistema cuadrático (6.11) sobre el disco de Poincaré cuando $b \neq 0$, el cual es topológicamente equivalente al mostrado en la Figura 6.2.

En las figuras usaremos la siguiente notación. Los puntos singulares son denotados por puntos, las separatrices que no son puntos singulares por líneas de mayor grosor y una órbita dentro de una región canónica se representará por una línea de menor grosor.

Caso 2: $a \neq 0$ y $c = 0$. De aquí el sistema (6.6) es

$$\dot{x} = x(ax + by), \quad \dot{y} = Cy. \quad (6.14)$$

El sistema (6.14) escrito en las variables X e Y , de acuerdo a (6.10), se convierte en

$$X' = X(\gamma a \alpha X + \gamma b \beta Y), \quad Y' = \gamma CY, \quad (6.15)$$

Tomando $\gamma C = 1$, $\gamma a \alpha = 1$ y $\gamma b \beta = 1$ se sigue que $\gamma = 1/C$ y $\alpha = C/a$. Además $\beta = C/b$ cuando $b \neq 0$.

Si $b = 0$, el sistema (6.15) es

$$X' = X^2, \quad Y' = Y. \quad (6.16)$$

Este sistema tiene solamente una singularidad finita, el origen, el cual es un silla–nodo semi–hiperbólico con separatriz estable tangente en $(0,0)$ al eje X negativo y las dos separatrices inestables tangentes en $(0,0)$ al eje Y . La expresión para la compactificación de Poincaré $p(\mathcal{X})$ en la carta local U_1 es $u' = -u + uv$, $v' = -v$. Por consiguiente sobre U_1 el origen es el único punto singular, el cual es un nodo estable hiperbólico en el infinito. Como el grado de $p(\mathcal{X})$ sobre U_1 es 2, el punto diametralmente opuesto es un nodo inestable hiperbólico en V_1 .

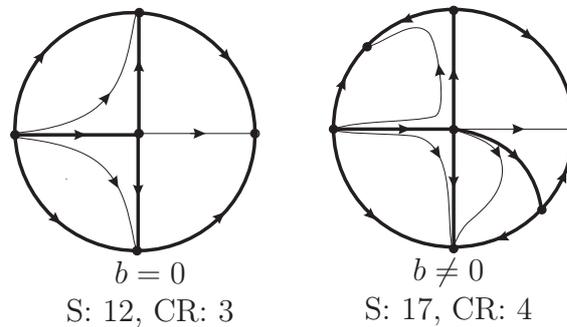


Figura 6.3: Retratos de fase del sistema (6.14). S es el número de todas las separatrices y CR es el número de todas las regiones canónicas.

La expresión para $p(\mathcal{X})$ en la carta local U_2 es

$$u' = u^2 - uv, \quad v' = -v^2. \quad (6.17)$$

Por lo tanto el origen de U_2 es un punto singular linealmente cero. Puesto que el sistema (6.17) es homogéneo podemos aplicar la clasificación debida a Date [5], ver el apéndice. Como $P_{11}^1 = 1$, $P_{12}^1 = -1/2$, $P_{22}^1 = P_{11}^2 = P_{12}^2 = 0$ y $P_2^2 = -1$, usando las definiciones dadas en el apéndice y realizando los cálculos obtenemos $D = 0$, $[h^{\kappa\lambda}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/9 \end{bmatrix} \neq 0$ y $H = -1/4 \neq 0$. Por lo tanto el sistema (6.17) pertenece al tipo II(1). Además el valor del covariante K_2 es $27/8 > 0$. Por consiguiente el sistema (6.17) es de Tipo II(1-1). En consecuencia los retratos de fase en el disco de Poincaré del sistema (6.14) si $b = 0$ es topológicamente equivalente al mostrado en la Figura 6.3 con $b = 0$.

Si $b \neq 0$ tenemos que el sistema (6.15) es $X' = X(X + Y)$, $Y' = Y$. Este sistema posee solamente una singularidad finita, el origen el cual es un silla–nodo semi–hiperbólico con separatriz estable tangente en $(0, 0)$ al eje X negativo y separatrices inestables tangentes al eje Y en $(0, 0)$. La expresión para $p(\mathcal{X})$ en la carta local U_1 es $u' = -u - u^2 + uv$, $v' = -v - uv$. De modo que existen dos singularidades infinitas sobre U_1 , $(0, 0)$ y $(-1, 0)$. El origen es un nodo estable hiperbólico. El punto singular $(-1, 0)$ es un silla–nodo hiperbólico cuya separatriz estable es tangente en $(-1, 0)$ al eje v positivo. Las separatrices inestables son tangentes en $(-1, 0)$ al eje u .

La expresión para $p(\mathcal{X})$ en la carta local U_2 es $u' = u + u^2 - uv$, $v' = -v^2$. Por consiguiente el origen es la única singularidad sobre U_2 el cual es un silla–nodo semi–hiperbólico, su separatriz estable es tangente en el origen al eje v positivo y las separatrices inestables al eje u . Por lo tanto conseguimos el retrato de fase del sistema (6.14) si $b \neq 0$, el cual es topológicamente equivalente al mostrado en la Figura 6.3 con $b \neq 0$.

Caso 3: $a = 0$ y $c \neq 0$. En este caso el sistema (6.6) es

$$\dot{x} = x(by + c), \quad \dot{y} = Cy. \quad (6.18)$$

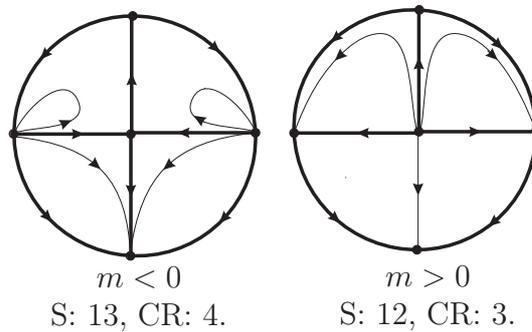


Figura 6.4: Retratos de fase del sistema (6.18) con $m = c/C$ y $b \neq 0$.

Nuevamente de (6.10) obtenemos que el sistema (6.18) se convierte en $X' = X(b\beta\gamma Y + c\gamma)$, $Y' = C\gamma Y$, y de aquí resultan los dos sistemas $X' = \frac{c}{C}X$, $Y' = Y$ si $b = 0$, y $X' = X(Y + c/C)$, $Y' = Y$ cuando $b \neq 0$.

El caso $b = 0$ no lo estudiamos por ser un sistema diferencial lineal. Consideremos $b \neq 0$, entonces el sistema correspondiente es topológicamente equivalente al sistema $X' = X(Y + m)$, $Y' = Y$ con $m = c/C \neq 0$. El único punto singular finito es $(0, 0)$ el cual es un nodo inestable hiperbólico si $m > 0$, o una silla hiperbólica si $m < 0$. La expresión para $p(\mathcal{X})$ en U_1 es $u' = -u^2 + (1 - m)uv$, $v' = -uv - mv^2$. Este sistema es homogéneo y posee un único punto singular, el origen, éste es linealmente cero. Apliquemos el apéndice con el fin de estudiar esta singularidad. Así obtenemos $D = 0$, $[h^{\kappa\lambda}] = \begin{bmatrix} -1/9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ y $H = -1/4 \neq 0$. Por lo tanto el sistema pertenece al tipo II(1). Además $K_2 = 27m/8$, en consecuencia si $m > 0$, el sistema pertenece al tipo II(1-1), y pertenece al tipo II(1-2) si $m < 0$.

En U_2 la expresión para $p(\mathcal{X})$ es $u' = u + (m - 1)uv$, $v' = -v^2$. Por lo tanto U_2 contiene solamente una singularidad, el origen, éste es un silla–nodo semi–hiperbólico con separatriz estable tangente en el origen al eje v positivo. Las dos separatrices inestables son tangentes en $(0, 0)$ al eje u . En la Figura 6.4 se muestran los retratos de fase topológicamente equivalentes a los del sistema (6.18) para $b \neq 0$.

Caso 4: $a \neq 0$ y $c \neq 0$. De aquí el sistema (6.6) se transforma en

$$\dot{x} = ax^2 + bxy + cx, \quad \dot{y} = Cy. \tag{6.19}$$

De (6.10) tenemos que el sistema (6.19) es topológicamente equivalente a uno de los dos sistemas $X' = X^2 + c/CX$, $Y' = Y$ si $b = 0$ o $X' = X^2 + XY + c/CX$, $Y' = Y$ si $b \neq 0$.

Analicemos primero el caso $b = 0$. Consideremos el sistema $X' = X^2 + mX$, $Y' = Y$ con $m \neq 0$. Las singularidades finitas son $(0, 0)$ y $(-m, 0)$. El punto singular $(0, 0)$ es un nodo inestable hiperbólico si $m > 0$ y una silla hiperbólica si $m < 0$. También $(-m, 0)$ es una silla hiperbólica si $m > 0$ y un nodo inestable hiperbólico si $m < 0$. La expresión de $p(\mathcal{X})$ en U_1 es

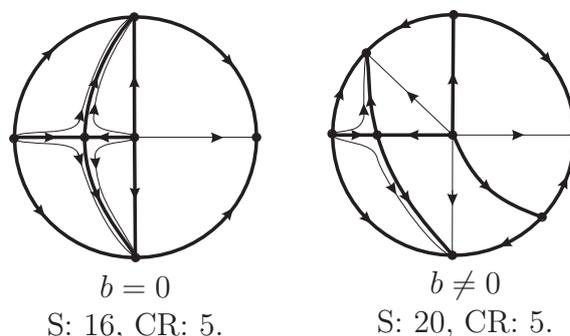


Figura 6.5: Retratos de fase del sistema (6.19).

$u' = -u + (1 - m)uv$, $v' = -v - mv^2$. Existe una única singularidad sobre U_1 , el origen, el cual es un nodo estable hiperbólico.

En la carta local U_2 , $p(\mathcal{X})$ es $u' = u^2 + (m - 1)uv$, $v' = -v^2$. Por lo tanto el origen es un punto singular sobre U_2 linealmente cero. Puesto que este sistema es homogéneo podemos usar el apéndice para su clasificación. De aquí $D = -m^2/27 < 0$ y por lo tanto el sistema pertenece al tipo $I\ominus$. Además puesto que $K_2 = 27/8 > 0$, el sistema es del tipo $I\ominus(1)$.

Reuniendo toda la información anterior obtenemos los retratos de fase del sistema (6.19) cuando $b = 0$ correspondiente a los casos $m < 0$ o $m > 0$. Sin embargo, no es difícil verificar que estas dos configuraciones son topológicamente equivalentes. En la Figura 6.5 con $b = 0$ se presenta un retrato de fase topológicamente equivalente al del sistema (6.19) cuando $b = 0$.

Si $b \neq 0$, consideremos el sistema $X' = X^2 + XY + mX$, $Y' = Y$ con $m \neq 0$. Existen dos singularidades finitas, $(0, 0)$ y $(-m, 0)$. El origen es un nodo inestable hiperbólico si $m > 0$, y es una silla hiperbólica si $m < 0$. El punto singular $(-m, 0)$ es una silla hiperbólica si $m > 0$ y es un nodo inestable hiperbólico si $m < 0$. La expresión de $p(\mathcal{X})$ sobre U_1 es $u' = -u - u^2 + (1 - m)uv$, $v' = -v - uv - mv^2$. Por lo tanto los puntos singulares sobre U_1 son $(0, 0)$ y $(-1, 0)$. El origen es un nodo estable y $(-1, 0)$ es un silla-nodo semi-hiperbólico, su separatriz estable es tangente al eje v en $(-1, 0)$ y las separatrices inestables tangentes al eje u en $(-1, 0)$.

En U_2 la expresión para $p(\mathcal{X})$ es $u' = u + u^2 + (m - 1)uv$, $v' = -v^2$. Por consiguiente el origen de U_2 es un punto singular que es un silla-nodo semi-hiperbólico con separatriz estable tangente en $(0, 0)$ al eje v positivo. Las dos separatrices inestables son tangentes en $(0, 0)$ al eje u . Por lo tanto obtenemos los dos retratos de fase para $m < 0$ y $m > 0$. Es fácil ver que estas dos configuraciones son topológicamente equivalentes. La Figura 6.5 con $b \neq 0$ muestra un retrato de fase topológicamente equivalente al del sistema (6.6) en este caso. Esto completa la prueba del Teorema 6.7. □

6.7. Retratos de fase globales de los sistemas Lotka–Volterra (6.7) con un invariante Darboux

Teorema 6.8. *El retrato de fase de cualquier sistema cuadrático Lotka–Volterra (6.7) es topológicamente equivalente a una de las 42 configuraciones de las Figuras 6.6–6.17.*

Demostración. Encontremos los retratos de fase en el disco de Poincaré de cualquier sistema cuadrático Lotka–Volterra (6.7). Para hacer esto introducimos un reescalado de las variables y del tiempo con el fin de reducir el número de parámetros de este sistema tanto como sea posible. Obteniendo los retratos de fase para cada uno de los nuevos sistemas conseguiremos los retratos de fase de los sistemas correspondientes (6.7). Sea $x = \alpha X$, $y = \beta Y$ y $t = \gamma T$, donde α, β y γ son parámetros. En las nuevas variables X, Y y T el sistema (6.7) se convierte en

$$X' = X \left(-\frac{l_2}{l_1} A \alpha \gamma X - \frac{l_2}{l_1} B \beta \gamma Y + c \gamma \right), \quad Y' = Y (A \alpha \gamma X + B \beta \gamma Y + \gamma C), \quad (6.20)$$

aquí ' denota la derivada con respecto a la variable T .

Consideremos los siguientes casos. Notemos que si $A = B = 0$ obtenemos un sistema diferencial lineal, y en consecuencia no lo consideramos.

Caso 1: $A \neq 0, B = 0$. Entonces el sistema (6.20) es

$$X' = X \left(-\frac{l_2}{l_1} A \alpha \gamma X + c \gamma \right), \quad Y' = Y (A \alpha \gamma X + C \gamma). \quad (6.21)$$

Con el fin de estudiar el sistema (6.20) consideraremos ocho subcasos.

Subcaso 1.1: $C = c = l_2 = 0$. De aquí el sistema (6.21) después de un reescalado de la variable independiente se convierte en

$$X' = 0, \quad Y' = XY. \quad (6.22)$$

Sus singularidades finitas son todos los puntos de los ejes X e Y . Puesto que X es una integral primera del sistema, las rectas $X = \text{constante}$ están formadas por órbitas. Resolviendo el signo de Y' sobre $X = \text{constante}$, se sigue que el retrato de fase del sistema (6.22) es topológicamente equivalente al mostrado en la Figura 6.6.

Subcaso 1.2: $C = c = 0, l_2 \neq 0$. Entonces el sistema (6.21) es $X' = -\frac{l_2}{l_1} A \alpha \gamma X^2, Y' = A \alpha \gamma XY$. Tomando $\alpha = 1$ y $\gamma = 1/A$ el sistema anterior se transforma en

$$X' = mX^2, \quad Y' = XY, \quad (6.23)$$

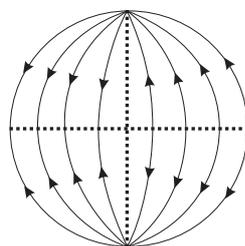


Figura 6.6: Retrato de fase del sistema (6.22). Posee infinitas separatrices.

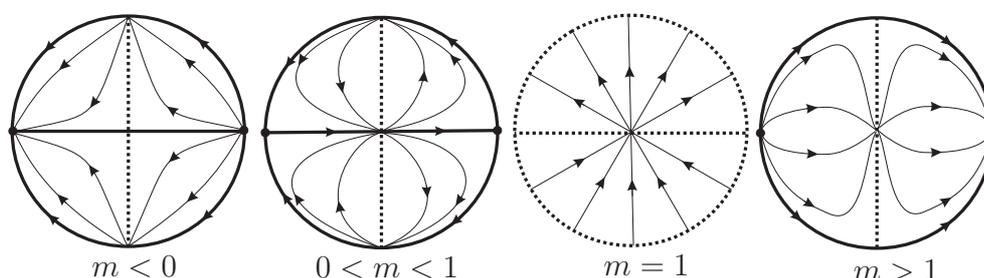


Figura 6.7: Retratos de fase del sistema (6.23). Poseen infinitas separatrices.

donde $m = -l_2/l_1$. Reescalando la variable independiente con $ds = XdT$, del sistema (6.23) obtenemos

$$dX/ds = mX, \quad dY/ds = Y, \quad (6.24)$$

con $m \neq 0$. Primero encontremos los retratos de fase del sistema (6.24), después ellos nos permitirán obtener los retratos de fase del sistema (6.23). El sistema (6.24) tiene una única singularidad finita, el origen. Si $m > 0$, $(0,0)$ es un nodo inestable hiperbólico, y es una silla hiperbólica cuando $m < 0$. En U_1 la expresión de $p(\mathcal{X})$ es $u' = (1 - m)u$, $v' = -mv$. Si $m = 1$, tenemos $u' = 0$, $v' = -v$, y por lo tanto existen infinitas singularidades $(u, 0)$. Además la solución de este sistema son las rectas $u = \text{constante}$. Si $m \neq 1$, obtenemos que $(0,0)$ es un nodo inestable hiperbólico si $m < 0$, es una silla hiperbólica si $0 < m < 1$, y es un nodo estable hiperbólico si $m > 1$.

La expresión de $p(\mathcal{X})$ en la carta local U_2 es $u' = (m - 1)u$, $v' = -v$. Por consiguiente $(0,0)$ es un punto singular que es una silla hiperbólica si $m > 1$ y es un nodo estable hiperbólico cuando $m < 1$. Así conseguimos los retratos de fase del sistema (6.24). Teniendo en cuenta que el reescalado $ds = XdT$ produce un cambio en la dirección de las órbitas donde X es negativo, obtenemos los retratos de fase del sistema (6.23) que son topológicamente equivalentes a los dibujados en la Figura 6.7.

Subcaso 1.2: $C = l_2 = 0$, $c \neq 0$. De aquí el sistema (6.21) se transforma en $X' = c\gamma X$, $Y' = A\alpha\gamma XY$. Tomando $\gamma = 1/c$ y $\alpha = c/A$, tenemos que

$$X' = X, \quad Y' = XY. \quad (6.25)$$

Intercambiando las variables X e Y en (6.25) obtenemos el sistema (6.13). Por lo tanto, el retrato de fase del sistema (6.25) es topológicamente equivalente al de la Figura 6.2.

Subcaso 1.4: $C \neq 0$, $c = l_2 = 0$. Entonces el sistema (6.21) es $X' = 0$, $Y' = Y(A\alpha\gamma X + \gamma C)$. Tomando $\gamma = 1/C$ y $\alpha = C/A$ obtenemos

$$X' = 0, \quad Y' = XY + Y. \quad (6.26)$$

Existen infinitas singularidades finitas del sistema (6.26), los puntos de coordenadas $(X, 0)$ y $(-1, Y)$, esto es los puntos de las dos rectas $X = -1$ y $Y = 0$. Puesto que $X' = 0$, las soluciones del sistema (6.26) están contenidas en las rectas invariantes $X = \text{constante}$. Estudiando el comportamiento de Y' sobre estas rectas invariantes se sigue fácilmente el retratos de fase del sistema (6.26), el cual es topológicamente equivalente al dado en la Figura 6.6.

Subcaso 1.5: $C = 0$, $l_2 \neq 0$, $c \neq 0$. Por consiguiente el sistema (6.21) es $X' = X(-l_2 A\alpha\gamma X/l_1 + c\gamma)$, $Y' = A\alpha\gamma XY$. Tomando $\gamma = 1/c$ y $\alpha = c/A$, el sistema anterior se convierte en

$$X' = X + mX^2, \quad Y' = XY, \quad (6.27)$$

donde $m = l_2/l_1$. El sistema (6.27) tiene infinitas singularidades finitas, los puntos $(0, Y)$. Haciendo $ds = XdT$, el sistema (6.27) queda

$$dX/ds = mX + 1, \quad dY/ds = Y \quad (6.28)$$

con $m \neq 0$. El sistema (6.28) tiene solamente una única singularidad, el punto $(-1/m, 0)$. Este es una silla hiperbólica cuando $m < 0$, y es un nodo inestable hiperbólico si $m > 0$. La expresión de $p(\mathcal{X})$ en la carta local U_1 es $u' = (1-m)u - uv$, $v' = -mv - v^2$. Entonces solamente el origen es un punto singular si $m \neq 1$. Sin embargo, existen infinitas singularidades si $m = 1$, los puntos $(u, 0)$. Si $m \neq 1$, $(0, 0)$ es un nodo inestable hiperbólico si $m < 0$, es una silla hiperbólica si $0 < m < 1$ y cuando $m > 1$, es un nodo estable hiperbólico.

En U_2 la expresión de $p(\mathcal{X})$ es $u' = (m-1)u + v$, $v' = -v$. Por lo tanto el origen es un punto singular. Si $m > 1$, éste es una silla hiperbólica, y es un nodo estable hiperbólico si $m < 1$. Puesto que el reescalado $ds = XdT$ cambia la orientación de las órbitas donde X es negativo, obtenemos que los retratos de fase del sistema (6.27) son topológicamente equivalentes a los mostrados en la Figura 6.8.

Subcaso 1.6: $C \neq 0$, $c = 0$, $l_2 \neq 0$. Por lo tanto el sistema (6.21) es $X' = -l_2 A\alpha\gamma/l_1 X^2$, $Y' = Y(A\alpha\gamma X + \gamma C)$. Tomando $\gamma = 1/C$ y $\alpha = C/A$ obtenemos

$$X' = mX^2, \quad Y' = XY + Y, \quad (6.29)$$

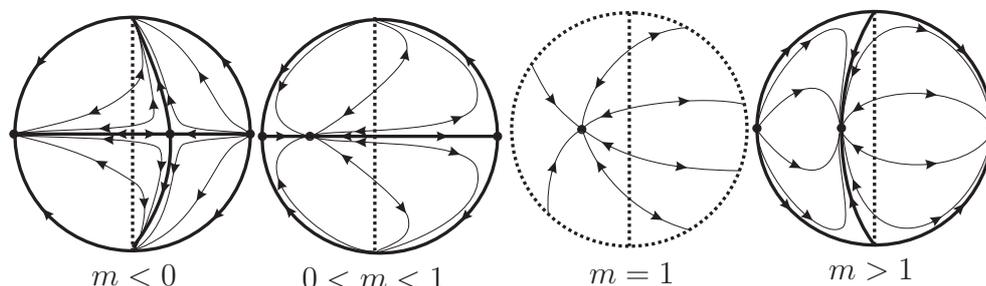


Figura 6.8: Retratos de fase del sistema (6.27). Ellos tienen infinitas separatrices.

con $m = -l_2/l_1 \neq 0$. El origen es la única singularidad finita del sistema (6.29), el cual es un silla–nodo semi–hiperbólico. Si $m > 0$, su separatriz estable es tangente en $(0, 0)$ al eje X negativo, y al eje X positivo cuando $m < 0$. La expresión de $p(\mathcal{X})$ en la carta local U_1 es $u' = (1 - m)u + uv$, $v' = -mv$. Si $m \neq 1$, sobre U_1 solamente existe un punto singular, el origen; si $m < 0$, $(0, 0)$ es un nodo inestable hiperbólico, o es una silla hiperbólica cuando $0 < m < 1$, o es un nodo estable hiperbólico si $m > 1$. Si $m = 1$, el sistema es $u' = uv$, $v' = -v$ el cual posee infinitas singularidades, los puntos $(u, 0)$.

La expresión de $p(\mathcal{X})$ en U_2 es $u' = -uv + (m - 1)u^2$, $v' = -uv - v^2$. Por consiguiente si $m \neq 1$ tenemos que $(0, 0)$ es un punto singular linealmente cero y el sistema es homogéneo. Aplicando el apéndice obtenemos que $D = 0$, $[h^{\kappa\lambda}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m^2/9 \end{bmatrix} \neq 0$ y $H = -m^2/4 \neq 0$. En consecuencia el sistema pertenece al tipo II(1). Como $K_2 = 27m(m - 1)/8$, entonces el sistema es de tipo II(1-1) si $K_2 > 0$, esto es si $m < 0$ o $m > 1$. Si $0 < m < 1$ entonces $K_2 < 0$ y por lo tanto el sistema es del tipo II(1-2). Si $m = 1$, entonces el sistema pertenece al tipo II(1-3).

Por consiguiente obtenemos los retratos de fase del sistema (6.29), los cuales son topológicamente equivalentes al retrato de fase para $b = 0$ de la Figura 6.3 cuando $m < 0$ o $m > 1$, y los otros son topológicamente equivalentes a los representados en la Figura 6.9.

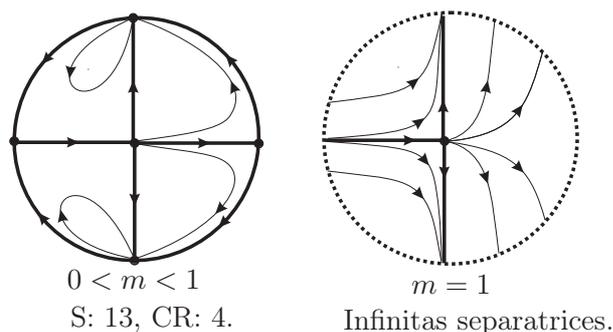


Figura 6.9: Retratos de fase del sistema (6.29).

Subcaso 1.7: $C \neq 0, c \neq 0, l_2 = 0$. El sistema (6.21) en este caso se transforma en $X' = c\gamma X, Y' = Y(A\alpha\gamma X + \gamma C)$. Tomando $\gamma = 1/c$ y $\alpha = c/A$ obtenemos

$$X' = X, \quad Y' = mY + XY, \quad (6.30)$$

con $m = C/c \neq 0$. Intercambiando X e Y en el sistema (6.30), obtenemos el sistema del subcaso $b \neq 0$ del Caso 3 de la prueba del Teorema 6.7. Por consiguiente los retratos de fase del sistema (6.30) son topológicamente equivalentes a los representados en la Figura 6.4.

Subcaso 1.8: $C \neq 0, c \neq 0, l_2 \neq 0$. De aquí tomando $\gamma = 1/C$ y $\alpha = C/A$ en el sistema (6.21) obtenemos

$$X' = m_1 X^2 + m_2 X, \quad Y' = Y + XY, \quad (6.31)$$

donde $m_1 = -l_2/l_1 \neq 0$ y $m_2 = c/C \neq 0$. Por lo tanto si $m_1 \neq m_2$, el sistema (6.31) tiene solamente dos puntos singulares finitos, los puntos $(0, 0)$ y $(-m_2/m_1, 0)$, y posee infinitas singularidades cuando $m_1 = m_2$, todos los puntos de la recta $X = -1$ y $(0, 0)$.

El origen es una silla hiperbólica si $m_2 < 0$, y es un nodo inestable hiperbólico si $m_2 > 0$. Si $m_1 \neq m_2$, la matriz Jacobiana en $(-m_2/m_1, 0)$ es $\begin{pmatrix} -m_2 & 0 \\ 0 & 1 - m_2/m_1 \end{pmatrix}$. El punto $(-m_2/m_1, 0)$ es una singularidad hiperbólica. Es un nodo inestable si $m_1 < m_2 < 0$, o si $m_1 > 0$ y $m_2 < 0$. Es una silla cuando $m_1 < 0$ y $m_2 > 0$, si $m_2 < m_1 < 0$, o si $m_1 > m_2 > 0$. Además si $0 < m_1 < m_2$, es un nodo estable.

Ahora estudiemos el sistema (6.31) en el infinito. La expresión de $p(\mathcal{X})$ en la carta local U_1 es $u' = (1 - m_1)u + (1 - m_2)uv, v' = -m_1v - m_2v^2$. Por consiguiente cuando $m_1 \neq 1$, existe un único punto singular en U_1 , el origen, éste es hiperbólico. Si $m_1 < 0$, el origen es un nodo inestable, una silla si $0 < m_1 < 1$ y un nodo estable si $m_1 > 1$. Sin embargo existen infinitas singularidades en U_1 cuando $m_1 = 1$, que son los puntos $(u, 0)$.

Sobre U_2 la compactificación de Poincaré $p(\mathcal{X})$ es

$$u' = (m_1 - 1)u^2 + (m_2 - 1)uv, \quad v' = -uv - v^2. \quad (6.32)$$

Por lo tanto $(0, 0)$ es una singularidad linealmente cero. Como el sistema (6.32) es homogéneo usamos el apéndice para su clasificación. De aquí $D = -m_1^2 m_2^2 / 27 < 0$ y por lo tanto el sistema (6.32) pertenece al tipo $I\ominus$. Calculando los valores de los covariantes $K_2 = 27(m_1 - 1)(m_1 - m_2)/8$ y $K_3 = 27(m_2 - 1)(m_1 - m_2 + m_1 m_2)/8$, obtenemos la siguiente clasificación para el sistema (6.32) mostrada en la Tabla 6.3.

En consecuencia obtenemos los retratos de fase del sistema (6.31), los cuales son topológicamente equivalentes al retrato de fase para $b = 0$ de la Figura 6.5 cuando $m_1 < 0$ y $m_1 < m_2$ o cuando $m_1 > 1$ y $m_1 > m_2$, o al retrato de fase para $m < 0$ de la Figura 6.8 cuando $m_1 = m_2 < 0$, al retrato

Condición	Signo de K_2, K_3	Tipo	Retrato de fase
$m_1 < 1, m_1 < m_2$	$K_2 > 0$	$I\ominus (1)$	$b = 0$ de Fig. 6.5, (1) de Fig. 6.10
$m_1 > 1, m_1 > m_2$			
$m_1 > 1, m_1 < m_2, m_2 > 1$	$K_2 < 0, K_3 > 0$	$I\ominus (2)$	(2) de Fig. 6.10
$m_1 < 0, m_1 > m_2, m_2 < 0$	$K_2 < 0, K_3 < 0$	$I\ominus (3)$	(3) de Fig. 6.10
$0 < m_1 < 1, m_1 > m_2, m_2 < 1$			(4) de Fig. 6.10
$m_1 = 1, m_2 > 1$	$K_2 = 0, K_3 > 0$	$I\ominus (4)$	(6) de Fig. 6.10, $m > 1$ de Fig. 6.8
$m_1 = m_2, m_2 > 1$			
$m_1 = 1, m_2 < 1$	$K_2 = 0, K_3 < 0$	$I\ominus (5)$	(5) de Fig. 6.10, $m < 0, 0 < m < 1$ de Fig. 6.8
$m_1 = m_2, m_2 < 1$			
$m_1 = 1, m_2 = 1$	$K_2 = 0 = K_3$	$I\ominus (6)$	$m = 1$ de Fig. 6.8

Tabla 6.3: Clasificación del sistema homogéneo (6.32).

de fase para $0 < m < 1$ de la Figura 6.8 cuando $0 < m_1 = m_2 < 1$, al retrato de fase para $m = 1$ de la Figura 6.8 cuando $m_1 = m_2 = 1$, y al retrato de fase para $m > 1$ de la Figura 6.8 cuando $m_1 = m_2 > 1$ y los otros son topológicamente equivalentes a los de la Figura 6.10.

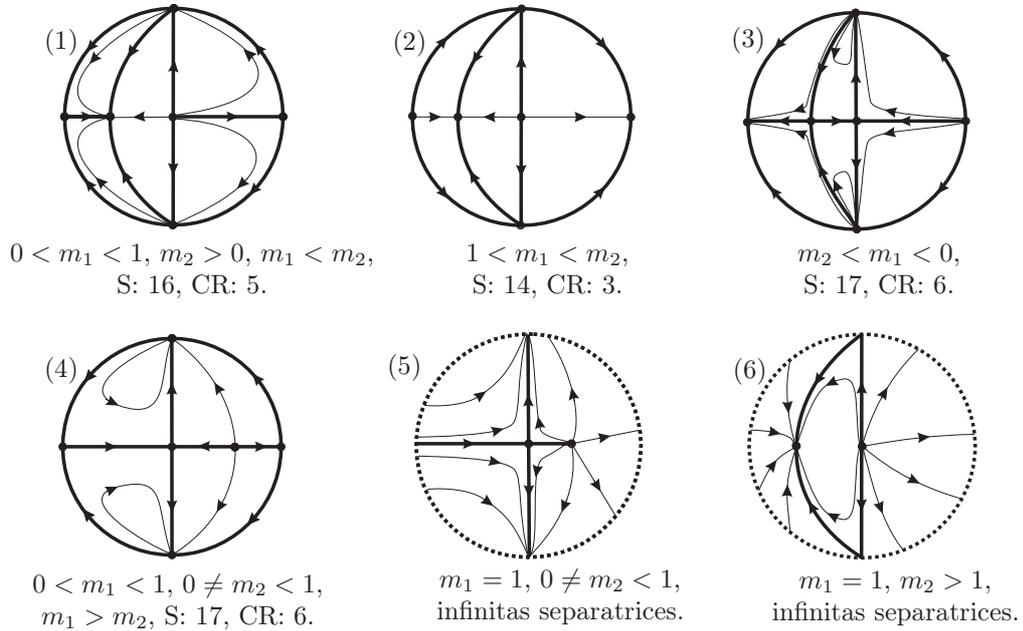


Figura 6.10: Retratos de fase del sistema (6.31).

Caso 2: $A = 0, B \neq 0$. En este caso el sistema (6.20) es

$$X' = X \left(-\frac{l_2}{l_1} B\beta\gamma Y + c\gamma \right), \quad Y' = Y(B\beta\gamma Y + \gamma C). \quad (6.33)$$

Subcaso 2.1: $C = c = l_2 = 0$. Haciendo un reescalado de la variable indepen-

diente, el sistema (6.33), en este caso, se convierte en $X' = 0$, $Y' = Y^2$. Este sistema posee infinitas singularidades, todos los puntos del eje X . Como X es una integral primera del sistema, todas las rectas $X = \text{constante}$ están formadas por órbitas. Por lo tanto obtenemos el retrato de fase topológicamente equivalente al mostrado en la Figura 6.11.

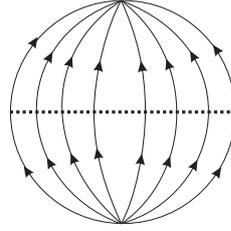


Figura 6.11: Retrato de fase del sistema $X' = 0$, $Y' = Y^2$. Tiene infinitas separatrices.

Subcaso 2.2: $C = c = 0$, $l_2 \neq 0$. Por lo tanto el sistema (6.33) es $X' = -l_2/l_1 B\beta\gamma XY$, $Y' = B\beta\gamma Y^2$. Tomando $\gamma = 1$ y $\beta = 1/B$ obtenemos

$$X' = -l_2/l_1 XY, \quad Y' = Y^2. \quad (6.34)$$

Haciendo el reescalado $ds = YdT$ encontramos que

$$X' = mX, \quad Y' = Y \quad (6.35)$$

con $m = -l_2/l_1 \neq 0$. Este sistema es el sistema (6.24). Volviendo atrás a través del cambio de variable del sistema (6.35) al sistema (6.34), y teniendo en cuenta que la orientación de las órbitas cambia cuando $Y < 0$, obtenemos los retratos de fase en el disco de Poincaré del sistema (6.34), los cuales son topológicamente equivalentes a los representados en la Figura 6.7, pero los cuatro retratos de fase de la Figura 6.7 de izquierda a derecha ahora corresponden a los valores $m < 0$, $m > 1$, $m = 1$ y $0 < m < 1$, respectivamente.

Subcaso 2.3: $C = l_2 = 0$, $c \neq 0$. Por lo tanto el sistema (6.33) es $X' = \gamma cX$, $Y' = B\beta\gamma Y^2$. Con $\gamma = 1/c$ y $\beta = c/B$ tenemos $X' = X$, $Y' = Y^2$. Este sistema corresponde al sistema (6.16) intercambiando las variables X e Y . Por lo tanto su retrato de fase es topológicamente equivalente al retrato de fase para $b = 0$ de la Figura 6.3.

Subcaso 2.4: $C \neq 0$, $c = l_2 = 0$. Entonces el sistema (6.33) es $X' = 0$, $Y' = B\beta\gamma Y^2 + \gamma CY$. Tomando $\gamma = 1/C$ y $\beta = C/B$ obtenemos

$$X' = 0, \quad Y' = Y + Y^2. \quad (6.36)$$

Las singularidades finitas son los puntos $(X, 0)$ y $(X, -1)$ para todo X . Las órbitas viven sobre las rectas $X = \text{constante}$. Por lo tanto el retrato de fase

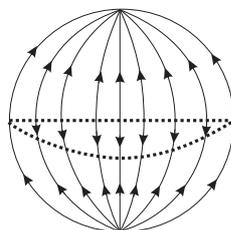


Figura 6.12: Retrato de fase del sistema (6.36). Posee infinitas separatrices.

del sistema (6.36) es topológicamente equivalente al mostrado en la Figura 6.12.

Subcaso 2.5: $C = 0$, $l_2 \neq 0$, $c \neq 0$. El sistema (6.33) para estos valores se convierte en $X' = X(-l_2/l_1 B\beta\gamma Y + c\gamma)$, $Y' = B\beta\gamma Y^2$. Tomando $\gamma = 1/c$ y $\beta = -l_1/(B\gamma l_2)$ obtenemos

$$X' = XY + X, \quad Y' = -l_1/l_2 Y^2. \quad (6.37)$$

Intercambiando las variables X e Y conseguimos el sistema (6.29) ahora con $m = -l_1/l_2$. Entonces los retratos de fase del sistema (6.37) son el retrato de fase para $b = 0$ de la Figura 6.3 cuando $m > -1$, y los retratos de fase de la Figura 6.9 de izquierda a derecha corresponden a los de los valores $m < -1$ y $m = -1$.

Subcaso 2.6: $C \neq 0$, $c = 0$, $l_2 \neq 0$. Por lo tanto el sistema (6.33) es $X' = -l_2/l_1 B\beta\gamma XY$, $Y' = \gamma CY + B\beta\gamma Y^2$. Tomando $\gamma = 1/C$ y $\beta = C/B$ obtenemos

$$X' = -mXY, \quad Y' = Y^2 + 1, \quad (6.38)$$

donde $m = l_2/l_1 \neq 0$. El sistema (6.38) no posee singularidades reales finitas.

Sobre la carta local U_1 la expresión de $p(\mathcal{X})$ es $u' = (m+1)u^2 + v^2$, $v' = muv$. Por lo tanto si $m \neq -1$, el origen es el único punto singular y éste es linealmente cero. Puesto que este sistema es homogéneo, usamos el apéndice para su clasificación. Así obtenemos $D = 4/27 > 0$, y por lo tanto el sistema es de tipo $I\oplus$. Además puesto que $K_2 = 27m^2(m+1)/8$ tenemos que si $m > -1$, entonces $K_2 > 0$ y por lo tanto el sistema es de tipo $I\oplus(1)$. En el caso $m < -1$ obtenemos $K_2 < 0$, por consiguiente el sistema es de tipo $I\oplus(2)$. Si $m = -1$, entonces $K_2 = 0$, y el sistema es de tipo $I\oplus(3)$.

La expresión de $p(\mathcal{X})$ en U_2 es $u' = -(m+1)u - uv^2$, $v' = -v - v^3$. Por lo tanto $(0,0)$ es un punto singular que es una silla hiperbólica si $m < -1$ y es un nodo estable hiperbólico cuando $m > -1$. En consecuencia, obtenemos los retratos de fase del sistema (6.38), que son topológicamente equivalentes a los mostrados en la Figura 6.13.

Subcaso 2.7: $C \neq 0$, $c \neq 0$, $l_2 = 0$. De aquí el sistema (6.33) se convierte en $X' = \gamma cX$, $Y' = Y(B\beta\gamma Y + \gamma C)$. Sea $\gamma = 1/C$ y $\beta = C/B$, entonces

$$X' = mX, \quad Y' = Y + Y^2, \quad (6.39)$$

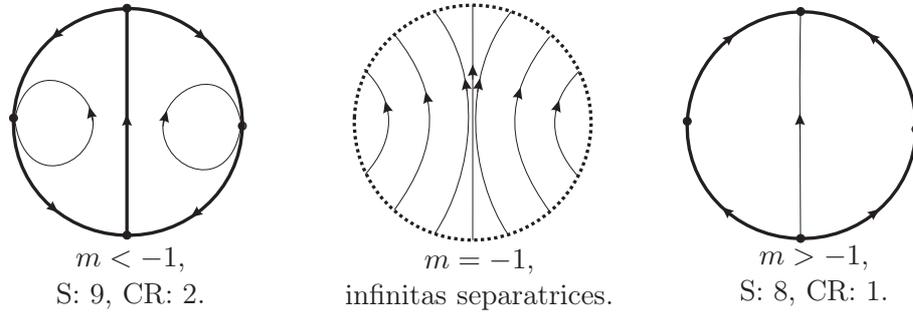


Figura 6.13: Retratos de fase del sistema (6.38).

donde $m = c/C \neq 0$. Las singularidades finitas del sistema (6.39) son los puntos singulares hiperbólicos $(0, 0)$ y $(0, -1)$. Si $m < 0$, entonces $(0, 0)$ es una silla y $(0, -1)$ es un nodo estable. Si $m > 0$, tenemos que $(0, 0)$ es un nodo inestable y $(0, -1)$ es una silla.

La expresión de $p(\mathcal{X})$ en la carta local U_1 es $u' = (1 - m)uv + u^2$, $v' = -mv^2$. Por lo tanto la única singularidad es el origen, el cual es linealmente cero. Puesto que este sistema es homogéneo, aplicando el apéndice encontramos que $D = -1/27 < 0$ y $K_2 = 27m^2/8 > 0$, y de aquí el sistema anterior es del tipo $I\ominus(1)$.

Sobre la carta local U_2 , $p(\mathcal{X})$ es $u' = -u + (m - 1)uv$, $v' = -v - v^2$. Por consiguiente $(0, 0)$ es un punto singular el cual es un nodo estable hiperbólico. En consecuencia los retratos de fase del sistema (6.39) son topológicamente equivalentes al retrato de fase de la Figura 6.5 con $b = 0$.

Subcaso 2.8: $C \neq 0$, $c \neq 0$, $l_2 \neq 0$. En este caso del sistema (6.33) y tomando $\gamma = 1/c$ y $\beta = c/B$ obtenemos

$$X' = X - m_1XY, \quad Y' = m_2Y + Y^2, \quad (6.40)$$

donde $m_1 = l_2/l_1 \neq 0$ y $m_2 = C/c \neq 0$. Las singularidades finitas del sistema (6.40) son los puntos singulares hiperbólicos $(0, 0)$ y $(0, -m_2)$. El punto $(0, 0)$ es una silla si $m_2 < 0$, y un nodo inestable cuando $m_2 > 0$.

Puesto que $D\mathcal{X}(0, -m_2) = \begin{bmatrix} 1 + m_1m_2 & 0 \\ 0 & -m_2 \end{bmatrix}$, primero estudiamos el caso $1 + m_1m_2 = 0$. Entonces $m_1 = -1/m_2$ y el sistema (6.40) se convierte en

$$X' = X(m_2 + Y)/m_2, \quad Y' = Y(m_2 + Y). \quad (6.41)$$

Analicemos el sistema reducido $X' = X/m_2$, $Y' = Y$ cuyo único punto singular es el origen. Si $m_2 > 0$, entonces $(0, 0)$ es un nodo inestable hiperbólico, y si $m_2 < 0$, $(0, 0)$ es una silla hiperbólica. Sobre la carta local U_1 , la expresión de $p(\mathcal{X})$ es $u' = (1 - 1/m_2)u$, $v' = -v/m_2$ entonces $(0, 0)$ es la única singularidad sobre U_1 , que es un nodo inestable hiperbólico si $m_2 < 0$; es un nodo estable hiperbólico si $0 < m_2 < 1$, y es una silla hiperbólica cuando $m_2 > 1$.

La expresión de $p(\mathcal{X})$ sobre U_2 es $u' = (1/m_2 - 1)u$, $v' = -v$. Por consiguiente $(0, 0)$ es un punto singular, y éste es hiperbólico. Además $(0, 0)$ es

un nodo estable si $m_2 < 0$ o $m_2 > 1$, y es una silla si $0 < m_2 < 1$. En consecuencia obtenemos los retratos de fase de $X' = X/m_2$, $Y' = Y$. Y por lo tanto cambiando la orientación de las órbitas cuando $Y < -m_2$ conseguimos los retratos de fase del sistema (6.41).

Si $1 + m_1 m_2 \neq 0$, entonces obtenemos que $(0, -m_2)$ es un nodo estable si $m_2 > 0$ y $m_1 < -1/m_2$, es una silla si $m_2 > 0$ y $m_1 > -1/m_2$, o $m_2 < 0$ y $m_1 > -1/m_2$, y es un nodo inestable cuando $m_2 < 0$ y $m_1 < -1/m_2$.

Sobre la carta local U_1 , la expresión de $p(\mathcal{X})$ es

$$u' = (m_2 - 1)uv + (m_1 + 1)u^2, \quad v' = m_1 uv - v^2, \quad (6.42)$$

que es un sistema homogéneo. Por lo tanto podemos aplicar la clasificación de Date al sistema (6.42) (ver apéndice). Realizando los cálculos correspondientes obtenemos $D = -m_2^2/27 < 0$, así el sistema (6.42) pertenece al tipo $I\ominus$. Puesto que $K_2 = 27(m_1 + 1)(m_1 m_2 + 1)/8$ y $K_3 = -27m_1(m_2 - 1)(1 + m_2 + m_1 m_2)/8$ obtenemos la clasificación dada en la siguiente tabla.

Condición	Signo de K_2 y K_3	Tipo	Retrato de fase
$m_1 < -1, m_2 > 0, m_1 < -1/m_2$	$K_2 > 0$	$I\ominus (1)$	(1) de Fig. 6.10
$m_1 > -1, m_2 > 0, m_1 > -1/m_2$			$b = 0$ de
$m_1 > -1, m_2 < 0, m_1 < -1/m_2$			Fig. 6.5
$m_1 < -1, 0 < m_2 < 1, m_1 > -1/m_2$	$K_2 < 0,$ $K_3 < 0$	$I\ominus (3)$	(4) de Fig. 6.10
$m_1 < -1, m_2 < 0, m_1 < -1/m_2$			
$-1 < m_1 < 0, m_2 > 1, m_1 < -1/m_2$	$K_2 < 0,$ $K_3 > 0$	$I\ominus (2)$	(2) de Fig. 6.10
$m_1 > 0, m_2 < 0, m_1 > -1/m_2$	$K_2 < 0$ $K_3 < 0$	$I\ominus (3)$	(3) de Fig. 6.10
$m_1 = -1, m_2 > 1$	$K_2 = 0,$ $K_3 > 0$	$I\ominus (4)$	(6) de Fig. 6.10
$m_1 = -1/m_2, m_2 > 1$			$0 < m < 1$ de Fig. 6.8
$m_1 = -1, m_2 < 1$	$K_2 = 0,$ $K_3 < 0$	$I\ominus (5)$	(5) de Fig. 6.10
$m_1 = -1/m_2, m_2 < 1$			$0 < m < 1$ de Fig. 6.8
$m_1 = -1, m_2 = 1$	$K_2 = 0$ $K_3 = 0$	$I\ominus (6)$	$m = 1$ de Fig. 6.8

Tabla 6.4: Clasificación del sistema homogéneo 6.42.

La expresión para $p(\mathcal{X})$ en la carta local U_2 es $u' = (1 - m_2)uv - (m_1 + 1)u$, $v' = -v - m_2 v^2$. Por consiguiente $(0, 0)$ es un punto singular, el cual es una silla hiperbólica si $m_1 < -1$, y es un nodo estable hiperbólico si $m_1 > -1$. Si $m_1 = -1$ entonces el sistema es $u' = (1 - m_2)uv$, $v' = -v - m_2 v^2$, el cual posee infinitas singularidades, todos los puntos $(u, 0)$. En consecuencia, conseguimos los retratos de fase en el disco de Poincaré del sistema (6.40) para

cada uno de los casos que ocurren, éstos son topológicamente equivalentes a los descritos en la Tabla 6.4.

Caso 3: $AB \neq 0$.

Subcaso 3.1: $C = c = l_2 = 0$. Por lo tanto el sistema (6.20) es $X' = 0$, $Y' = Y(A\alpha\gamma X + B\beta\gamma Y)$. Tomando $\gamma = 1$, $\alpha = 1/A$ y $\beta = 1/B$, este último sistema se convierte en $X' = 0$, $Y' = Y(X + Y)$ cuyas singularidades son los puntos $(X, 0)$ y $(X, -X)$ para todo X . Sus órbitas viven sobre las rectas $X = \text{constante}$. En consecuencia el retrato de fase sobre el disco de Poincaré del sistema (6.20) para este caso es topológicamente equivalente al mostrado en la Figura 6.14.

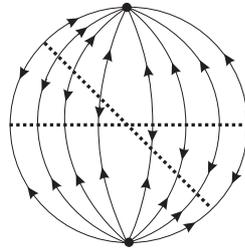


Figura 6.14: Retrato de fase del sistema $X' = 0$, $Y' = Y(X + Y)$. Posee infinitas separatrices.

Subcaso 3.2: $C = c = 0$, $l_2 \neq 0$. Por consiguiente el sistema (6.20) es $X' = X(-l_2/l_1 A\alpha\gamma X - l_2/l_1 B\beta\gamma Y)$, $Y' = Y(A\alpha\gamma X + B\beta\gamma Y)$. Sea $\gamma = 1$, $\alpha = 1/A$ y $\beta = 1/B$, entonces el sistema que se obtiene es

$$X' = mX(X + Y), \quad Y' = Y(X + Y), \quad (6.43)$$

donde $m = -l_2/l_1 \neq 0$. Las singularidades finitas del sistema (6.43) son los puntos $(X, -X)$ para todo X . Haciendo el reescalado $ds = (X + Y)dT$ de la variable independiente, el sistema (6.43) se convierte en $X' = mX$, $Y' = Y$. Este último sistema fue estudiado en el Subcaso 2.2. Por lo tanto cambiando la orientación de las órbitas cuando $X + Y < 0$ y añadiendo los puntos singulares $(X, -X)$ obtenemos los retratos de fase del sistema (6.43), los cuales son topológicamente equivalentes a los mostrados en la Figura 6.15 y el caso $m = 1$ es topológicamente equivalente al retrato de fase $m = 1$ de la Figura 6.7.

Subcaso 3.3: $C = l_2 = 0$, $c \neq 0$. Por consiguiente el sistema (6.20) es $X' = c\gamma X$, $Y' = Y(A\alpha\gamma X + B\beta\gamma Y)$. Tomando $\gamma = 1/c$, $\alpha = c/A$ y $\beta = c/B$ obtenemos

$$X' = X, \quad Y' = (X + Y)Y, \quad (6.44)$$

el cual corresponde al sistema obtenido en el Caso 2 (cuando $b \neq 0$) de la prueba del Teorema 6.7 intercambiando las variables X e Y . De aquí el

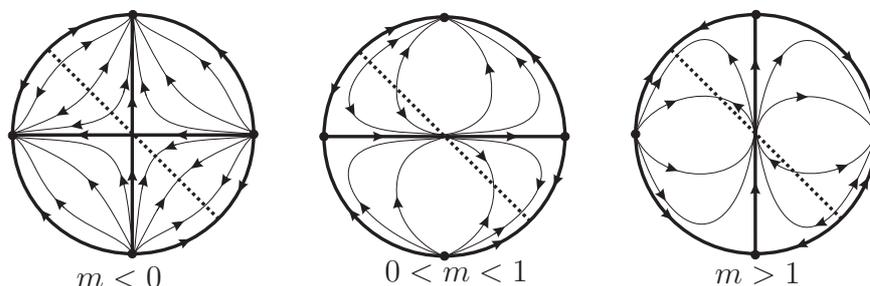


Figura 6.15: Retratos de fase del sistema (6.43). Poseen infinitas separatrices.

retrato de fase del sistema (6.44) es topológicamente equivalente al de la Figura 6.3 con $b \neq 0$.

Subcaso 3.4: $C \neq 0$, $c = l_2 = 0$. Entonces el sistema (6.20) es $X' = 0$, $Y' = Y(A\alpha\gamma X + B\beta\gamma Y + \gamma C)$. Tomando $\gamma = 1/C$, $\alpha = C/A$ y $\beta = C/B$ tenemos $X' = 0$, $Y' = Y(1 + X + Y)$ cuyas singularidades finitas son todos los puntos de las rectas $Y = 0$ y $Y = -X - 1$. Además todas las órbitas viven sobre las rectas $X = \text{constante}$. Por lo tanto el retrato de fase en este caso es topológicamente equivalente al mostrado en la Figura 6.14.

Subcaso 3.5: $C = 0$, $l_2 \neq 0$, $c \neq 0$. De aquí el sistema (6.20) es $X' = X(-l_2/l_1 A\alpha\gamma X - l_2/l_1 B\beta\gamma Y + c\gamma)$, $Y' = Y(A\alpha\gamma X + B\beta\gamma Y)$. Tomando $\gamma = 1/c$, $\alpha = c/A$ y $\beta = c/B$ obtenemos

$$X' = X(1 - mX - mY), \quad Y' = Y(X + Y), \quad (6.45)$$

con $m = -l_2/l_1 \neq 0$. Las singularidades finitas del sistema (6.45) son los puntos $(0, 0)$ y $(1/m, 0)$. Si $m > 0$, entonces $(1/m, 0)$ es una silla hiperbólica, y es un nodo estable hiperbólico cuando $m < 0$. El origen es un silla-nodo semi-hiperbólico con separatriz estable tangente al eje Y negativo.

La expresión de la compactificación de Poincaré de $p(\mathcal{X})$ sobre la carta local U_1 es

$$u' = (m + 1)u + (m + 1)u^2 - uv, \quad v' = mv + muv - v^2. \quad (6.46)$$

Por lo tanto si $m \neq -1$, existen dos singularidades sobre U_1 , los puntos $(0, 0)$ y $(-1, 0)$ que ambos son hiperbólicos. Además $(0, 0)$ es a nodo estable si $m < -1$, es una silla cuando $-1 < m < 0$, y es un nodo inestable si $m > 0$. El punto $(-1, 0)$ es un silla-nodo semi-hiperbólico.

Si $m = -1$, entonces el sistema (6.46) es $u' = -uv$, $v' = -v - uv - v^2$ el cual posee infinitas singularidades $(u, 0)$ para todo u .

Sobre la carta local U_2 , $p(\mathcal{X})$ es $u' = -(m + 1)u - (m + 1)u^2 + uv$, $v' = -v - uv$. Entonces $(0, 0)$ es un punto singular hiperbólico: una silla si $m < -1$ y un nodo estable si $m > -1$. Por consiguiente obtenemos los retratos de fase del sistema (6.45) los cuales son topológicamente equivalentes a los representados en la Figura 6.16.

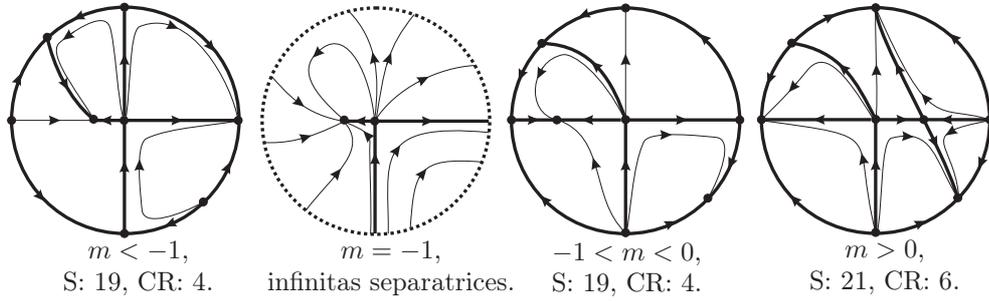


Figura 6.16: Retratos de fase del sistema (6.45).

Subcaso 3.6: $C \neq 0$, $c = 0$, $l_2 \neq 0$. De aquí el sistema (6.20) es $X' = X(-l_2/l_1 A\alpha\gamma X - l_2/l_1 B\beta\gamma Y)$, $Y' = Y(A\alpha\gamma X + B\beta\gamma Y + \gamma C)$. Sea $\gamma = \frac{1}{C}$, $\alpha = -\frac{l_1 C}{l_2 A}$ y $\beta = -\frac{l_1 C}{l_2 B}$, entonces

$$X' = X(X + Y), \quad Y' = Y(1 - mX - mY), \quad (6.47)$$

donde $m = l_1/l_2 \neq 0$. Por lo tanto el sistema (6.47) intercambiando las variables X e Y coincide con el sistema (6.45).

Subcaso 3.7: $C \neq 0$, $c \neq 0$, $l_2 = 0$. Entonces el sistema (6.20) es $X' = c\gamma X$, $Y' = Y(A\alpha\gamma X + B\beta\gamma Y + \gamma C)$. Haciendo $\gamma = 1/c$, $\alpha = c/A$ y $\beta = c/B$ obtenemos $X' = X$, $Y' = mY + XY + Y^2$ con $m = C/c \neq 0$. Este último sistema corresponde al sistema estudiado en el Caso 4 de la prueba del Teorema 6.7 cuando $b \neq 0$ (ver Figura 6.5), intercambiando las variables X e Y .

Subcaso 3.8: $C \neq 0$, $c \neq 0$, $l_2 \neq 0$. Tomando $\gamma = 1/c$, $\alpha = c/A$ y $\beta = c/B$, el sistema (6.20) es transformado en

$$X' = X - m_1 XY - m_1 X^2, \quad Y' = m_2 Y + XY + Y^2, \quad (6.48)$$

donde $m_1 = l_2/l_1 \neq 0$ y $m_2 = C/c \neq 0$. Los puntos singulares finitos son $(0, 0)$, $(1/m_1, 0)$ y $(0, -m_2)$. El origen es una silla hiperbólica si $m_2 < 0$, y es un nodo inestable hiperbólico si $m_2 > 0$. Sabemos que $m_2 \neq -1/m_1$, porque en otro caso, de acuerdo al Teorema 6.3, el sistema (6.48) no podría poseer un invariante Darboux. Así el punto $(1/m_1, 0)$ es un punto singular hiperbólico. Es un nodo estable si $m_2 < -1/m_1$, y es una silla si $m_2 > -1/m_1$. También $(0, -m_2)$ es una singularidad hiperbólica. Es un nodo inestable si $m_2 < 0$ y $m_1 < -1/m_2$, una silla si $m_2 < 0$ y $m_1 > -1/m_2$, un nodo estable si $m_2 > 0$ y $m_1 < -1/m_2$ y una silla cuando $m_2 > 0$ y $m_1 > -1/m_2$.

$X' = X(1 - m_1 Y - m_1 X)$, $Y' = -Y/m_1(1 - m_1 X - m_1 Y)$. La expresión de $p(\mathcal{X})$ sobre U_1 es

$$u' = (1 + m_1)u + (m_2 - 1)uv + (1 + m_1)u^2, \quad v' = m_1 v + m_1 uv - v^2. \quad (6.49)$$

Las singularidades sobre U_1 son $(0,0)$ y $(-1,0)$ si $m_1 \neq -1$. En este caso, el origen es un punto singular hiperbólico, es un nodo estable si $m_1 < -1$, o una silla cuando $-1 < m_1 < 0$, y un nodo inestable si $m_1 > 0$. El punto $(-1,0)$ es un silla–nodo semi–hiperbólico.

Si $m_1 = -1$, entonces el sistema (6.49) se convierte en $u' = (m_2 - 1)uv$, $v' = -v - uv - v^2$ y por lo tanto posee infinitas singularidades sobre U_1 , todos los puntos $(u,0)$. Así obtenemos los retratos de fase del sistema (6.48) cuando $m_1 = -1$, estos son topológicamente equivalentes a los mostrados en la Figura 6.17 (5). Note que $m_1 = -1$ y $m_2 = 1$ no puede ocurrir porque en este caso $m_2 = -1/m_1$.

La expresión de $p(\mathcal{X})$ sobre U_2 es $u' = -(1 + m_1)u + (1 - m_2)uv - (1 + m_1)u^2$, $v' = -v - uv - m_2v^2$. Entonces $(0,0)$ es una singularidad hiperbólica, una silla si $m_1 < -1$, y un nodo estable si $m_1 > -1$. Por consiguiente obtenemos los retratos de fase del sistema (6.48) de los casos restantes, estos son topológicamente equivalentes a los representados en la Figura 6.17. Esto completa la prueba del Teorema 6.8.

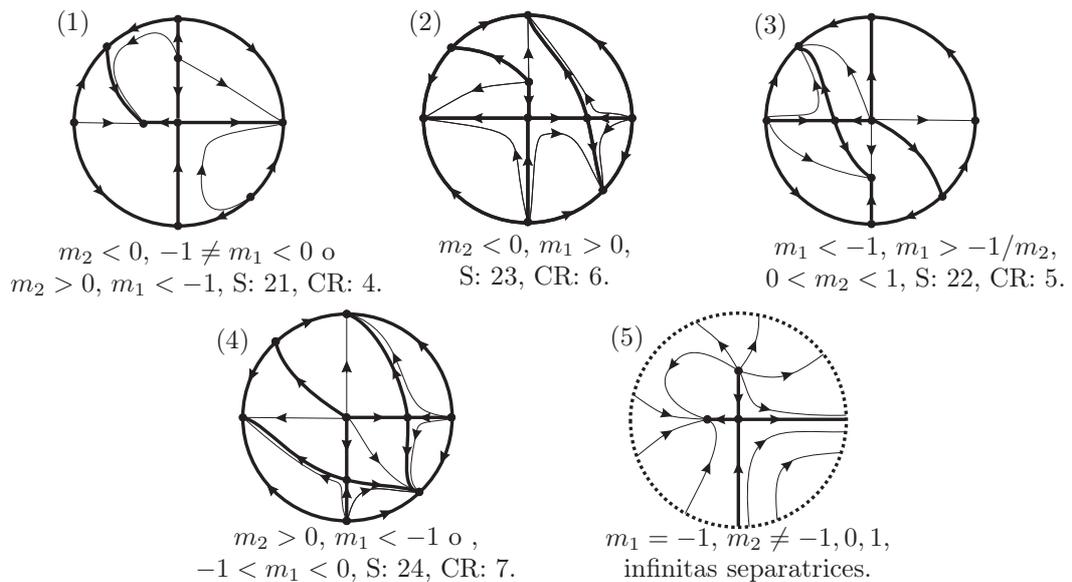


Figura 6.17: Retratos de fase del sistema (6.48).

□

6.8 Referencias

- [1] N. N. BAUTIN, *On periodic solutions of a system of differential equations (R)*, Prikl. Mat. Meh. **18** (1954), 128.
- [2] F. H. BUSSE, *Transition to turbulence via the statistical limit cycle route*, Synergetics, Springer Verlag, 1978, pp 39.
- [3] F. CAO Y J. JIANG, *The classification on the global phase portraits of two-dimensional Lotka-Volterra system*, J. Dynam. Differential Equations **20** (2008), 797–830.
- [4] T. DATE Y M. IRI, *Canonical forms of real homogeneous quadratic transformations*, J. Math. Anal. Appl. **56** (1976), 650–682.
- [5] T. DATE, *Classification and analysis of two-dimensional real homogeneous quadratic differential equation systems*, J. Differential Equations **32** (1979), 311–334.
- [6] F. DUMORTIER, J. LLIBRE Y J.C. ARTÉS, *Qualitative theory of planar differential systems*, Universitext, Springer-Verlag, 2006.
- [7] E. B. ELLIOTT, *An introduction to the algebra of quantics*, Oxford Univ. Press (Clarendon), London, 1913.
- [8] E. A. GONZÁLEZ, *Generic properties of polynomial vector fields at infinity*, Trans. Amer. Math. Soc. **143** (1969), 201–222.
- [9] J. GUO Y X. LIANG, *The minimal speed of traveling fronts for the Lotka-Volterra competition system*, J. Dynam. Differential Equations **23** (2011), 353–363.
- [10] A. KOLMOGOROV, *Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza*, Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari **7** (1936), 74–80.
- [11] G. LAVAL Y R. PELLAT, *Plasma Physics*, Proceedings of Summer School of Theoretical Physics, Gordon and Breach, NY, 1975.
- [12] W. LI, J. LLIBRE, M. NICOLAU Y X. ZHANG, *On the differentiability of first integrals of two dimensional flows*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2079–2088.

-
- [13] A. J. LOTKA, *Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. **6** (1920), 410–415.
- [14] L. MARKUS, *Global structure of ordinary differential equations in the plane*: Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 127–148.
- [15] R. M. MAY, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton NJ, 1974.
- [16] D. A. NEUMANN, *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), 73–81.
- [17] M. M. PEIXOTO, *Dynamical Systems. Proceedings of a Symposium held at the University of Bahia*, 389–420, Acad. Press, New York, 1973.
- [18] V. VOLTERRA, *Lecons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la vie*, Gauthier Villars, Paris, 1931.