



UNIVERSIDAD DE CÁDIZ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**Programación Lógica Multiadjunta No Monótona  
y  
Ecuaciones Bipolares de Relaciones Difusas:  
Extensiones y Relaciones**

DAVID LOBO PALACIOS

TESIS DOCTORAL

Abril 2020



Dra. María Eugenia Cornejo Piñero, Profesora Ayudante Doctora del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cádiz,

Dr. Jesús Medina Moreno, Profesor Catedrático de Universidad del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cádiz,

HACEN CONSTAR:

Que D. David Lobo Palacios, Graduado en Matemáticas, ha realizado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cádiz, bajo nuestra dirección, el trabajo de investigación correspondiente a su Tesis Doctoral titulado:

Programación Lógica No Monótona y  
Ecuaciones Bipolares de Relaciones Difusas:  
Extensiones y Relaciones

Revisado el presente trabajo, estimamos que puede ser presentado al Tribunal que ha de juzgarlo. Y para que conste a efectos de lo establecido en el Real Decreto 99/2011, autorizamos la presentación de este trabajo en la Universidad de Cádiz.

Cádiz, a 6 de marzo de 2020

Dra. María Eugenia Cornejo Piñero

Dr. Jesús Medina Moreno







*A los gigantes*



# Índice general

|                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| English Summary                                                   | XIII      |
| <b>1. Introducción</b>                                            | <b>1</b>  |
| <b>2. Preliminares</b>                                            | <b>17</b> |
| 2.1. Teoría de retículos . . . . .                                | 17        |
| 2.1.1. Aplicaciones entre retículos . . . . .                     | 21        |
| 2.2. Conectivos lógicos generalizados . . . . .                   | 23        |
| 2.3. Estructuras algebraicas basadas en residuos . . . . .        | 29        |
| 2.4. Teoría de grafos . . . . .                                   | 31        |
| 2.5. Algunas nociones topológicas . . . . .                       | 34        |
| 2.6. Aproximación universal a los lenguajes proposicionales . . . | 35        |
| 2.6.1. Nociones de álgebra universal . . . . .                    | 36        |
| 2.6.2. Sintaxis de los lenguajes proposicionales . . . . .        | 38        |
| 2.6.3. Semántica de los lenguajes proposicionales . . . . .       | 40        |
| <b>3. Prog. lógica multiadjunta con negaciones</b>                | <b>43</b> |
| 3.1. Programación lógica multiadjunta . . . . .                   | 43        |
| 3.1.1. Sintaxis de los programas lógicos multiadjuntos . . .      | 44        |
| 3.1.2. Semántica de los programas lógicos multiadjuntos . .       | 45        |

|          |                                                                              |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.2.     | Programación lógica multiadjunta normal . . . . .                            | 50         |
| 3.2.1.   | Sintaxis de los programas lógicos multiadjuntos normales . . . . .           | 51         |
| 3.2.2.   | Semántica de los programas lógicos multiadjuntos normales . . . . .          | 52         |
| 3.3.     | Existencia y unicidad de modelos estables . . . . .                          | 63         |
| 3.3.1.   | Existencia de modelos estables . . . . .                                     | 64         |
| 3.3.2.   | Unicidad de modelos estables . . . . .                                       | 71         |
| 3.3.2.1. | Programas lógicos multiadjuntos normales estratificados . . . . .            | 71         |
| 3.3.2.2. | Programas lógicos multiadjuntos normales en $\mathcal{C}[0, 1]$ . . . . .    | 76         |
| 3.4.     | Coherencia en prog. lóg. multiadjuntos con negaciones . . .                  | 94         |
| 3.4.1.   | Sobre la noción de coherencia . . . . .                                      | 96         |
| 3.4.1.1. | Auto-contradicción en conjuntos difusos . .                                  | 96         |
| 3.4.1.2. | $x$ -consistencia . . . . .                                                  | 97         |
| 3.4.1.3. | Consistencia en birretículos entrelazados . .                                | 98         |
| 3.4.1.4. | Coherencia en conjuntos respuesta difusos .                                  | 100        |
| 3.4.1.5. | Noción de coherencia para programas lógicos multiadjuntos normales . . . . . | 101        |
| 3.4.2.   | Medidas de incoherencia . . . . .                                            | 105        |
| 4.       | <b>Extensiones y relaciones de MALP con negaciones</b>                       | <b>115</b> |
| 4.1.     | Programación lógica multiadjunta extendida . . . . .                         | 116        |
| 4.2.     | Simplificando los prog. lógicos multiadjuntos extendidos . .                 | 125        |
| 4.2.1.   | Programación lógica núcleo de conjuntos respuesta difusos . . . . .          | 126        |
| 4.2.2.   | Transformando EMALPs en EMALPs sin restricciones                             | 131        |

|           |                                                                                                                  |            |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.2.3.    | Transformando EMALPs sin restricciones en MANLPs                                                                 | 142        |
| 4.2.4.    | Transformando MANLPs en CFASPs . . . . .                                                                         | 152        |
| 4.3.      | Un enfoque multiadjunto normal de CFASP . . . . .                                                                | 156        |
| <b>5.</b> | <b>Ecuaciones bipolares de relaciones difusas</b>                                                                | <b>167</b> |
| 5.1.      | Ecuaciones bipolares de relaciones difusas como sistemas de supremo-ecuaciones . . . . .                         | 169        |
| 5.2.      | Sistemas de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas en retículos multiadjuntos birresiduados simétricos . . . . . | 173        |
| 5.2.1.    | Resolviendo sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas                                                               | 177        |
| 5.2.2.    | Resolviendo sistemas de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas . . . . .                                         | 190        |
| 5.2.3.    | Ejemplos ilustrativos . . . . .                                                                                  | 199        |
| 5.3.      | Sistemas de sup-ecuaciones bipolares basadas en la t-norma producto . . . . .                                    | 211        |
| 5.3.1.    | Resolviendo sistemas de sup-ecuaciones bipolares basadas en la t-norma producto . . . . .                        | 212        |
| 5.3.2.    | Un ejemplo práctico . . . . .                                                                                    | 225        |
| <b>6.</b> | <b>Abducción multiadjunta con negaciones</b>                                                                     | <b>231</b> |
| 6.1.      | Procedimiento de abducción mediante ecuaciones bipolares de relaciones difusas . . . . .                         | 232        |
| 6.1.1.    | Resolución de un problema de abducción simple . .                                                                | 236        |
| 6.1.2.    | Resolución de un problema de abducción general . .                                                               | 238        |
| 6.2.      | Aplicación a un ejemplo práctico . . . . .                                                                       | 243        |



# English Summary

Rationality is what differs human beings from other animals. Through the centuries, science, from many different branches, has been devoted to handle and understand human reasoning. These branches include philosophy, biology, psychology, sociology, etc. Among all of them, mathematical logic excels by its formal nature.

Bipolarity in human reasoning may emerge in many different ways: from pros and cons in decision making to contradictory information. As a result, any intelligent system which intends to simulate human minds behaviour profits from being able to represent positive and negative sides of information. This dissertation deals with the inclusion of bipolar knowledge in two different frameworks: multi-valued logic programming and fuzzy relation equations.

Logic programming is a direct outgrowth from constructing automated deduction systems. In short, a logic program is a collection of rules and facts, from which one expects to model and understand the behaviour of a system. Since the performance of a system may involve positive and negative aspects, it would be desirable to include negations in logic programs.

Several authors have devoted efforts to the aim of defining logic programming frameworks with negations, or more generally, non-monotonic logic programming frameworks [1, 56, 66, 79, 87]. This definition entails two noticeably different dimensions: the syntax of the language, which determines what kind of rules are allowed; and the semantics of the pro-

gram, which provides an inference system to deduce which deductions or consequences are correct. Depending on their role in the semantics of a logic program, we can distinguish between strong negations and default negations. Nevertheless, the current theories on non-monotonic logic programming are based on restrictive algebraic structures, thus limiting the flexibility of the language and the scope of potencial applications.

In this thesis, we start from multi-adjoint logic programming, a remarkable logic programming paradigm introduced by Medina, Ojeda-Aciego and Vojtáš [93] as a generalization of different non-classical logic programming settings, such as annotated logic programming [68], possibilistic logic programming [48], monotonic and residuated logic programming [37, 38] and fuzzy logic programming [120]. In Chapter 3, we define the syntax and a stable model semantics of multi-adjoint normal logic programs (MANLP, in short), which are multi-adjoint logic programs enriched with a default negation.

Afterwards, we focus on sufficient conditions to guarantee the existence and the uniqueness of stables models. It is worth stressing that the existence of stable models is required to define the semantics of a MANLP, and its unicity permits to define the unique stable model of the MANLP as its canonical model. Additionally, if a MANLP corresponds to some search problem, the stable models coincide with its possible solutions. Therefore, these goals are fundamental in order to know whether the program is related to a solvable problem and, in that case, whether only one solution exists. Naturally, developing a deterministic procedure to build stable models would also be advisable.

According to the previous discussion, Chapter 3 presents sufficient conditions to ensure:

1. The existence of stable models for MANPLs defined on any convex compact set of an euclidean space.

2. The unicity of stable models for stratified MANPLs.
3. The unicity of stable models for MANPLs defined on the set of subintervals of the unit interval.

A straightforward consequence of the presented unicity conditions is the development of a deterministic procedure to construct the unique stable model of the MANLP.

In particular, these properties can directly be applied to the normal extensions of monotonic and residuated logic programming [37, 38], fuzzy logic programming [120] and possibilistic logic programming [48], as they are particular cases of the multi-adjoint logic programming framework.

The final section of Chapter 3 addresses the inclusion of a strong negation in a MANLP. The main disadvantage of the introduction of a strong negation in a logic programming framework is the appearance of inconsistencies. For instance, we may have that the truth values of  $p$  and  $\sim p$  are both 1, which makes no sense.

Hence, new matters arise: what is the formal definition of coherence in multi-adjoint logic programming with negations? Moreover, if a MANLP is not coherent, to what extent is it incoherent? In this sense, we select the most adequate notion of coherence for MANLPs by means of a thorough investigation on the existing definitions of inconsistency in the literature which are closer to our intuitive idea of coherence. Then, some incoherence measures are provided in order to weigh how incoherent a MANLP is.

Chapter 4 continues the study on non-monotonic multi-adjoint logic programming frameworks. In a first stage, MANLPs are extended to a more flexible logic programming environment, called extended multi-adjoint logic programming (EMALP, in short), allowing a special kind of rules known as constraints and any kind of non-monotonic behaviour in the body of the rules. On the one hand, the use of constraints enables a user to impose upper bounds to statements, which are simulated by formulae

in the language of MANLPs. On the other hand, considering any kind of non-monotonic behaviour in the body of the rules gives rise, in particular, to the occurrence of different default negations in the body of the rules of a logic program.

In a second stage, we pursue the ambition of transforming an EMALP into the simplest syntactical language which preserves its semantics. Specifically, we provide a series of conversions to translate an EMALP into a core fuzzy answer set logic program whose semantics coincides with the original EMALP. Thanks to this procedure, one can benefit from the expressive power of extended multi-adjoint logic programs and at the same time work in a simple computational environment, thus broadening the range of potential applications and increasing the effectiveness in the computations.

Chapter 4 concludes exemplifying how the existence and unicity results provided in Chapter 3 can be employed in other logic programming frameworks, apart from multi-adjoint normal logic programming. In this sense, a method to transform a core fuzzy answer set logic program into a semantically equivalent MANLP is carried out. Owing to this method, the existence and unicity conditions in Chapter 3 can be directly adapted to the core fuzzy answer set logic programming environment.

In the foreword of [44], Zadeh declares:

“In the context of applications, the importance of the theory of fuzzy relational equations derives from the fact that human knowledge may be viewed as a collection of facts and rules, each of which may be represented as the assignment of a fuzzy relation to the unconditional or conditional possibility distribution of a variable. What this implies is that knowledge may be viewed as a system of fuzzy relational equations. In this perspective, then, inference from a body of knowledge reduces to

the solution of a system of fuzzy relational equations.”

These sentences point to the close connection between logic programming and fuzzy relation equations, introduced by Sanchez [104]. According to the existing literature relating logic programming to fuzzy relation equations, for instance [19, 45] from a multi-adjoint perspective, it seems to be natural the involvement of fuzzy relation equations with negations in the inference processes of non-monotonic logic programs. Namely, this generalization of fuzzy relations equations, in which the unknown variables appear together with their logical negations, were recently introduced in [54] under the name of bipolar fuzzy relation equations.

Chapter 5 presents bipolar fuzzy relation equations from a purely theoretical point of view. In particular, bipolar multi-adjoint fuzzy relation equations are introduced as a special case of bipolar fuzzy relation equation whose composition is defined with multiple conjunctions. After showing that a bipolar fuzzy relation equation can be seen as a set of systems of bipolar sup-equations, a study on the resolution of systems of bipolar sup-equations is carried out.

To the best of our knowledge, the current literature is limited to bipolar fuzzy relation equations defined in the unit interval. Additionally, the bipolar fuzzy relation equations which have been studied in the literature are defined with the max-min composition [54, 73, 74], with the max-product composition [21, 28] or with the max-Łukasiewicz composition [75, 122, 125], and all of them with the standard negation. A study on the resolution of systems of bipolar sup-equations defined on multi-adjoint birresiduated lattices endowed with an involutive negation is developed in Chapter 5. In particular, this kind of system of bipolar sup-equations embraces bipolar fuzzy relation equations defined with the max-min, with the max-product and with the max-Łukasiewicz composition. In other words, our study generalizes the existing results in the bibliography on the solvability of bipolar fuzzy relation equations.

The main disadvantage of the previous systems of bipolar sup-equations relies on the involutivity of the negation operator. Indeed, some lattices do not even allow the definition of an involutive negation. Therefore, further investigations on bipolar fuzzy relation equations with non-involutive negations is required. As a culmination of the theoretical content of the thesis, we deal with the resolution of systems of bipolar sup-equations defined with the product t-norm and its adjoint negation, a particular case of non-involutive negation.

This dissertation concludes with an application of bipolar fuzzy relation equations in non-monotonic logic programming. As aforementioned, bipolar fuzzy relation equations provide a potential tool in the inference processes of non-monotonic logic programs. One of these inference processes is the abduction problem, which essentially consists on giving plausible explanations to a set of observations. Chapter 6 presents an abductive reasoning procedure for multi-adjoint normal logic programs by means of bipolar multi-adjoint fuzzy relation equations.

## **Detailed description of the content of the thesis**

In what follows, we highlight the main definitions and results of the thesis. In order to present a summary as faithful as possible, the contents are shown in the same ordering as in the main work.

### **Multi-adjoint logic programs with negations**

The syntax of multi-adjoint normal logic programs is defined from a multi-adjoint lattice enriched with a negation operator.

**Definition 1.** A multi-adjoint lattice with negation is a tuple of the form  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg)$  such that:

- $(L, \preceq)$  is a complete lattice.
- $(\&_i, \leftarrow_i)$  is an adjoint pair, for each  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
- $\top \&_i x = x \&_i \top = x$ , for each  $x \in L, i \in \{1, \dots, n\}$ .
- $\neg$  is a negation operator, that is,  $\neg$  is an order-reversing mapping with  $\neg\top = \perp$  and  $\neg\perp = \top$ .

In the following definition we assume that  $\Pi$  is a countable set.

**Definition 2.** A multi-adjoint normal logic program (MANLP)  $\mathbb{P}$  defined on a multi-adjoint lattice with negation  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg)$  is a finite set of weighted rules of the form:

$$\langle p \leftarrow_i @ [p_1, \dots, p_m, \neg p_{m+1}, \dots, \neg p_n]; \vartheta \rangle$$

where  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $@$  is an order-preserving operator,  $\vartheta$  is an element of  $L$  and  $p, p_1, \dots, p_n \in \Pi$  with  $p_j \neq p_k$ , for each  $j \neq k$ .

The elements of  $\Pi$  appearing in a MANLP  $\mathbb{P}$  are denoted  $\Pi_{\mathbb{P}}$  and we refer to them as the *propositional symbols* of  $\mathbb{P}$ . The notions of satisfiability of a rule and model of a MANLP are given below.

**Definition 3.** Let  $\mathbb{P}$  be a MANLP. An interpretation is a mapping  $I: \Pi_{\mathbb{P}} \rightarrow L$ . We say that

- $I$  satisfies a weighted rule  $\langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle$  if  $\vartheta \preceq \hat{I}(p \leftarrow_i \mathcal{B})$ .
- $I$  is a model of  $\mathbb{P}$  if  $I$  satisfies all rules of  $\mathbb{P}$ .

The semantics of MANLPs is based on stable models, which are related to the notion of reduct. Given a MANLP  $\mathbb{P}$  and an interpretation  $I$ , the reduct of  $\mathbb{P}$  with respect to  $I$ , denoted as  $\mathbb{P}_I$ , is build by substituting each rule in  $\mathbb{P}$  of the form

$$\langle p \leftarrow_i @ [p_1, \dots, p_m, \neg p_{m+1}, \dots, \neg p_n]; \vartheta \rangle$$

by the rule

$$\langle p \leftarrow_i @_I [p_1, \dots, p_m]; \vartheta \rangle$$

where the operator  $\dot{@}_I: L^m \rightarrow L$  is defined as

$$\dot{@}_I[x_1, \dots, x_m] = \dot{@}[x_1, \dots, x_m, \dot{\neg} I(p_{m+1}), \dots, \dot{\neg} I(p_n)]$$

**Definition 4.** Let  $\mathbb{P}$  be a MANLP. An interpretation  $I$  is a stable model of  $\mathbb{P}$  if  $I$  is the least model of  $\mathbb{P}_I$ .

The following result provides a sufficient condition for the existence of stable models.

**Theorem 1.** Let  $\mathbb{P}$  be a MANLP defined on a multi-adjoint lattice with negation  $(K, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg)$ , where  $K$  is a non-empty convex compact set of an euclidean space. If  $\dot{\&}_1, \dots, \dot{\&}_n, \dot{\neg}$  and the aggregators in the body of the rules of  $\mathbb{P}$  are continuous, then  $\mathbb{P}$  has at least a stable model.

It is worth mentioning the wide range of MANLPs to which Theorem 1 can be applied. Apart from MANLPs defined with the usual t-norms (Gödel, Łukasiewicz, product), one can make use of, for instance, the euclidean space of triangular functions as the set of truth values.

Concerning the uniqueness of stable models, we have provided the following condition for MANLPs defined on the set of subintervals of the unit interval, denoted as  $\mathcal{C}[0, 1]$ . We consider here the ordering relation defined as  $[a, b] \leq_c [c, d]$  if  $a \leq c, b \leq d$ , the negation operator

$\dot{\neg}_C[a, b] = [1 - b, 1 - a]$  and the operators of the form  $\dot{\&}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma} : \mathcal{C}[0, 1]^2 \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$  given by

$$\dot{\&}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}([a, b], [c, d]) = [a^\alpha \cdot c^\gamma, b^\beta \cdot d^\delta]$$

Besides, we denote  $\dot{\&}_{11}^{11}$  as  $*$ .

**Theorem 2.** *Let  $\mathbb{P}$  be a MANLP defined on the multi-adjoint lattice with negation  $(\mathcal{C}[0, 1], \leq_C, \dot{\&}_{\beta_1\delta_1}^{\alpha_1\gamma_1}, \leftarrow_{\beta_1\delta_1}^{\alpha_1\gamma_1}, \dots, \dot{\&}_{\beta_m\delta_m}^{\alpha_m\gamma_m}, \leftarrow_{\beta_m\delta_m}^{\alpha_m\gamma_m}, \neg_C)$  such that the only possible operators in the body of the rules of  $\mathbb{P}$  are  $*$  and  $\neg_C$ . For each  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ , let  $[\vartheta_p^1, \vartheta_p^2] = \max\{[\vartheta^1, \vartheta^2] \mid \langle p \leftarrow_{\beta_w\delta_w}^{\alpha_w\gamma_w} \mathcal{B}; [\vartheta^1, \vartheta^2] \rangle \in \mathbb{P}\}$ . If the inequality*

$$\sum_{j=1}^h (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (\vartheta_{q_j}^2)^{\delta_w-1} \cdot \left( \vartheta_{q_1}^2 \dots \vartheta_{q_{j-1}}^2 \cdot \vartheta_{q_{j+1}}^2 \dots \vartheta_{q_h}^2 \right)^{\delta_w} + (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (k-h) (\vartheta_{q_1}^2 \dots \vartheta_{q_h}^2)^{\delta_w} < 1$$

*holds, for every rule  $\langle p \leftarrow_{\beta_w\delta_w}^{\alpha_w\gamma_w} q_1 * \dots * q_h * \neg_C q_{h+1} * \dots * \neg_C q_k; [\vartheta^1, \vartheta^2] \rangle \in \mathbb{P}$ , then there exists a unique stable model of  $\mathbb{P}$ .*

As a consequence of Theorem 2, the unique stable model of a MANLP can be constructed by iterating the immediate consequences operator from the least interpretation.

The syntax and the semantics of MANLPs is also applicable to MANLPs endowed with a strong negation  $\sim$ . The main difference of a strong negation with respect to a default negation is that the truth value of a negated propositional symbol  $\sim p$  cannot be inferred from the truth value of  $p$ . This may give rise to contradictions or incoherences. After a detailed investigation on the existing notions of coherence in the literature, we reached the conclusion that the most suitable notion of coherence for MANLPs is:

**Definition 5.** *Let  $\mathbb{P}$  be a MANLP. We say that:*

- *An interpretation  $I$  is coherent if  $I(\sim p) \preceq \dot{\sim} I(p)$  for each  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ .*
- *$p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  is incoherent with respect to  $I$  if  $I(\sim p) \not\preceq \dot{\sim} I(p)$ .*
- *$\mathbb{P}$  is coherent if there exists a coherent model of  $\mathbb{P}$ .*

Notice that the incoherence of an interpretation might be due to a single propositional symbol, or to several ones. Besides, one could wonder how incoherent an interpretation is with respect to a propositional symbol. Let  $d$  be the geodesic distance [9] of the Hasse diagram of a lattice  $\mathcal{L}$  and  $\Delta_{\mathcal{L}}$  be the set of coherent pairs of  $\mathcal{L}$ , defined as:

$$\Delta_{\mathcal{L}} = \{(x, y) \in L \times L \mid y \preceq \sim x\}$$

We propose measuring the level of incoherence of a pair  $(a, b) \in L \times L$  as:

$$d_G((a, b), \Delta_{\mathcal{L}}) = \inf\{d((a, b), (c, d)) \mid z_b \preceq c \preceq a, d \preceq \sim c\}$$

being  $z_b = \inf\{z \in L \mid \sim z \preceq b\}$ . From this definition, three different ways to measure the incoherence of an interpretation  $I$  have been provided:

- $\mathcal{M}_1(I) = \frac{\mathcal{NI}(I)}{|\Pi_{\mathbb{P}}|}$ , where  $\mathcal{NI}(I)$  the number of incoherent propositional symbols with respect to  $I$ .
- $\mathcal{M}_2(I) = \max\{d_G((I(p), I(\sim p)), \Delta_{\mathcal{L}}) \mid p \in \Pi_{\mathbb{P}}\}$
- $\mathcal{M}_3(I) = \frac{\sum_{p \in \Pi_{\mathbb{P}}} d_G((I(p), I(\sim p)), \Delta_{\mathcal{L}})}{|\Pi_{\mathbb{P}}|}$

The previous measures can be directly extended to MANLPs as:

$$\mathbb{M}_i(\mathbb{P}) = \inf\{\mathcal{M}_i(I) \mid I \text{ es un modelo de } \mathbb{P}\}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

## Extensions and relations of multi-adjoint logic programs with negations

The underlying algebraic structure of an extended multi-adjoint logic program is a multi-adjoint logic program endowed with a finite number of extended aggregators, which is called *extended multi-adjoint lattice*. Namely, given a complete lattice  $(L, \preceq)$ , an *extended aggregator* is a mapping  $@^e: L^n \rightarrow L$  which is order-preserving in the first  $m$  arguments and order-reversing in the last  $n - m$  arguments.

**Definition 6.** Let  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, @_1^e, \dots, @_k^e)$  be an extended multi-adjoint lattice. An extended multi-adjoint logic program  $\mathbb{P}^e$  (EMALP) is a finite set of weighted rules of the form

$$\langle p \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \vartheta \rangle$$

and constraints of the form

$$\langle c \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \top \rangle$$

where  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $@^e \in \{@_1^e, \dots, @_k^e\}$ ,  $\vartheta, c \in L$  and  $p, p_1, \dots, p_n \in \Pi$  with  $p_{s_1} \neq p_{s_2}$ , for each  $s_1, s_2 \in \{1, \dots, n\}$ ,  $s_1 \neq s_2$ .

Notice that any interpretation  $I$  satisfying a constraint of the form  $\langle c \leftarrow_i \mathcal{B}; \top \rangle$  verifies the inequality  $\hat{I}(\mathcal{B}) \preceq c$ . In other words,  $c$  is an upper bound of the formula  $\mathcal{B}$ . The semantics of extended multi-adjoint logic programs is defined similarly to multi-adjoint normal logic programs.

Extended multi-adjoint logic programs are then transformed into semantically equivalent core fuzzy answer set logic programs. Basically, the rules composing a core fuzzy answer set logic program (CFASP) are of the form  $a \leftarrow f(l_1, \dots, l_n)$ , where  $a$  is a propositional symbol,  $f: L^n \rightarrow L$  an order-preserving mapping,  $l_1, \dots, l_n$  (possibly negated) propositional symbols and  $\leftarrow$  a residuated implication. Furthermore, the residuated implication is the same for all rules in a CFASP. Hence, the syntax of CFASPs is significantly simpler than the syntax of EMALPs. The process of transformation is developed in three steps:

- (a) Firstly, we transform an EMALP into a constraint-free EMALP with the same stable models.
- (b) Then, we show a method to simulate a constraint-free EMALP in terms of a MANLP whose stable models coincide.

- (c) Finally, we translate an arbitrary MANLP into a CFASP whose answer sets are in one-to-one correspondence with the stable models of the MANLP.

Therefore, we obtain a CFASP which is equivalent, from a semantical point of view, to the original EMALP, and whose syntax is notably simpler.

As a final remark of our study on non-monotonic logic programming frameworks, we present a multi-adjoint normal approach of core fuzzy answer set logic programs. More precisely, we provide a method to transform a CFASP into a MANLP whose semantics coincides. This transformation gives rise, in particular, to the next result.

**Theorem 3.** *Let  $\mathbb{P}^c$  be a CFASP defined from the adjoint pair  $(\dot{\&}, \dot{\leftarrow})$  in a non-empty convex, compact set of an euclidean space. If  $\dot{\&}$  and the operators in the body of the rules of  $\mathbb{P}^c$  are continuous, then there exists an answer set of  $\mathbb{P}^c$ .*

## Bipolar fuzzy relation equations

Let  $U, V$  and  $W$  be three sets,  $(L, \preceq)$  a complete lattice and  $\&$  a binary mapping on  $L$  representing a conjunction. Given two fuzzy relations  $R: U \times V \rightarrow L$  and  $S: V \times W \rightarrow L$ , the  $\circ$ -composition of  $R$  and  $S$  is defined as the fuzzy relation  $R \circ S: U \times W \rightarrow L$  given by

$$R \circ S(u, w) = \bigvee_{v \in V} R(u, v) \& S(v, w)$$

Similarly, let  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  be binary mappings on  $L$  representing conjunctions and  $\sigma: V \rightarrow \{1, \dots, \kappa\}$ . The  $\circ_\sigma$ -composition of  $R$  and  $S$  is the fuzzy relation  $R \circ_\sigma S: U \times W \rightarrow L$  given by

$$R \circ_\sigma S(u, w) = \bigvee_{v \in V} R(u, v) \&_{\sigma(v)} S(v, w)$$

According to the definition of  $\circ$ -composition, two type of bipolar fuzzy relation equations can be defined. To be precise, given a negation operator  $\neg: L \rightarrow L$ , a *bipolar fuzzy relation equation* is an expression of the form

- $(R \circ S^+) \vee (\neg R \circ S^-) = T$ , being  $S^+, S^- : V \times W \rightarrow L, T : U \times W \rightarrow L$  known relations,  $R : U \times V \rightarrow L$  an unknown relation and  $\neg R : U \times V \rightarrow L$  given by  $(\neg R)(u, v) = \neg(R(u, v))$ .
- $(R^+ \circ S) \vee (R^- \circ \neg S) = T$ , being  $R^+, R^- : U \times V \rightarrow L, T : U \times W \rightarrow L$  known relations,  $S : V \times W \rightarrow L$  an unknown relation and  $\neg S : V \times W \rightarrow L$  given by  $(\neg S)(v, w) = \neg(S(v, w))$ .

A *bipolar multi-adjoint fuzzy relation equation* is defined analogously by means of a  $\circ_\sigma$ -composition.

First and foremost, we show that solving a bipolar (multi-adjoint) fuzzy relation equation is equivalent to the resolution of a finite set of systems of bipolar (multi-adjoint) sup-equations. Hence, the rest of our study is devoted to the resolution of such systems.

### **Systems of bipolar multi-adjoint sup-equations on distributive symmetric birresiduated multi-adjoint lattices**

In order to generalize the existing works on bipolar fuzzy relation equations in the bibliography, a complete study on systems of bipolar multi-adjoint sup-equations defined on a distributive symmetric birresiduated multi-adjoint lattice (DSBMAL) has been carried out. Such a lattice is defined as a distributive birresiduated multi-adjoint lattice enriched with an involutive negation. Specifically, we analyse the solvability of the system

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (a_{ij}^+ \&_{\sigma(j)} x_j) \vee (a_{ij}^- \&_{\sigma(j)} \neg x_j) = b_i, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

where  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \lhd_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \lhd_\kappa, \neg)$  is a DSBMAL,  $a_{ij}^+, a_{ij}^-, b_i \in L$ , for each  $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$ , and  $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, \kappa\}$ . Defining the mapping  $\lhd_i : L \times L \rightarrow L$  as  $b \lhd_i a = \inf\{x \in L \mid b \preceq a \&_i x\}$ , consider fixed, for each  $i \in \{1, \dots, n\}$ :

- $S_i^+ = \{s_i^{j+} \mid b_i \preceq a_{ij}^+, b_i \preceq_{\sigma(j)} a_{ij}^+ \preceq b_i \preceq_{\sigma(j)} a_{ij}^+, \text{ where } s_i^{j+} \text{ is a tuple with } m \text{ components whose } h\text{-th component is } b_i \preceq_{\sigma(j)} a_{ih}^+ \text{ if } h = j \text{ and } \perp \text{ otherwise.}\}$
- $S_i^- = \{s_i^{j-} \mid b_i \preceq a_{ij}^-, b_i \preceq_{\sigma(j)} a_{ij}^- \preceq b_i \preceq_{\sigma(j)} a_{ij}^-, \text{ where } s_i^{j-} \text{ is a tuple with } m \text{ components whose } h\text{-th component is } b_i \preceq_{\sigma(j)} a_{ih}^- \text{ if } h = j \text{ and } \perp \text{ otherwise.}\}$
- The tuples  $g_i^+ = (g_{i1}^+, \dots, g_{im}^+)$  and  $g_i^- = (g_{i1}^-, \dots, g_{im}^-)$  are defined as  $g_{ij}^+ = b_i \preceq_{\sigma(j)} a_{ij}^+$  and  $g_{ij}^- = b_i \preceq_{\sigma(j)} a_{ij}^-$  for each  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

In what follows, we assume that  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  are lattice homomorphisms and  $b_1, \dots, b_n \in L$  are join-irreducible elements. The main results concerning the resolution of system (1) are:

- The solution set of (1) is given by

$$D = \bigcap_{i=1}^n \left( \left( \bigcup_{s \in S_i^+} [s \vee \neg g_i^-, g_i^+] \right) \cup \left( \bigcup_{s \in S_i^-} [\neg g_i^-, g_i^+ \wedge \neg s] \right) \right)$$

- A necessary condition for the solvability of (1) is

$$\neg g_1^- \vee \dots \vee \neg g_n^- \preceq g_1^+ \wedge \dots \wedge g_n^+$$

- Let  $\check{g} = \neg g_1^- \vee \dots \vee \neg g_n^-$  and  $\hat{g} = g_1^+ \wedge \dots \wedge g_n^+$ . If  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  are strictly order-preserving in  $\{(x, y) \in L \times L \mid x \neq \perp \text{ or } y \neq \perp\}$ , then (1) is solvable if and only if there exists a solution of (1) in the set

$$G = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_j \in \{\check{g}_j, \hat{g}_j\} \text{ for each } j \in \{1, \dots, m\}\}$$

- Let  $D$  be the solution set of (1) and  $\hat{M}_i, \check{M}_i$  the sets of maximal and minimal solutions of the  $i$ -th equation of (1), respectively.

1. The maximal solutions of (1) are the maximal elements of

$$\overline{M} = \left\{ \hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n \in D \mid \hat{m}_i \in \hat{M}_i \text{ for each } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

2. The minimal solutions of (1) are the minimal elements of

$$\underline{M} = \left\{ \check{m}_1 \vee \cdots \vee \check{m}_n \in D \mid \check{m}_i \in \check{M}_i \text{ for each } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

It is important to emphasize that the previous conclusions also hold for the dual system of (1), under slight modifications in the definition of  $S_i^+$ ,  $S_i^-$ ,  $g_i^+$  and  $g_i^-$ .

### Systems of bipolar sup-equations based on the product t-norm

In this case, we focus on the system of bipolar sup-equations given by

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (a_{ij}^+ * x_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P x_j) = b_i, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

where  $a_{ij}^+, a_{ij}^-, b_i \in [0, 1]$ , for each  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $*$  is the product t-norm and  $\neg_P: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  is the negation operator defined as  $\neg_P 0 = 1$  and  $\neg_P x = 0$  if  $x > 0$ .

The notion of feasible pair, closely related to the philosophy of coverings [89], plays a key role in our study on the solvability of (2).

**Definition 7.** Let  $J^+, J^- \subseteq \{1, \dots, m\}$  with  $J^+ \uplus J^- = \{1, \dots, m\}$ . We say that  $(J^+, J^-)$  is a feasible pair with respect to (2) if the tuple  $(x_1, \dots, x_m)$  defined as

$$x_j = \begin{cases} \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\} & \text{if } j \in J^+ \\ 0 & \text{if } j \in J^- \end{cases}$$

is a solution of (2).

Let us denote the set of feasible pairs with respect to (2) as  $S$ . The main results for the solvability of (2) are:

- The system (2) is solvable if and only if  $S \neq \emptyset$ .
- Let  $S^+ = \{J^+ \mid (J^+, J^-) \in S\}$  and  $f: S^+ \rightarrow [0, 1]^m$  given by  $f(J^+) = (x_1, \dots, x_m)$  with

$$x_j = \begin{cases} \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\} & \text{if } j \in J^+ \\ 0 & \text{if } j \notin J^+ \end{cases}$$

- (1) If  $S^+$  has a greatest element  $\hat{J}^+$ , then  $f(\hat{J}^+)$  is the greatest solution of (2).
  - (2) The maximal solutions of (2) coincide with the tuples of the form  $f(\hat{J}^+)$  where  $\hat{J}^+$  is a maximal element of  $S^+$ .
- Let  $S^- = \{J^- \mid (J^+, J^-) \in S\}$  and  $f: S^- \rightarrow [0, 1]^m$  be the mapping defined as  $f(J^-) = (x_1, \dots, x_m)$  with

$$x_j = \begin{cases} \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\} & \text{if } j \notin J^- \\ 0 & \text{if } j \in J^- \end{cases}$$

For each  $J^- \in S^-$ , let  $I_{J^-}$  be the set defined as:

$$I_{J^-} = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid b_i = 0 \text{ or } a_{ij}^- < b_i \text{ for each } j \in J^-\}$$

- (1) If  $\{1, \dots, m\} \in S^-$ , then  $(0, \dots, 0)$  is the least solution of (2).
- (2) If  $\{1, \dots, m\} \notin S^-$ , the minimal solutions of (2) coincide with the tuples of the form  $f(\check{J}^-)$  with  $\check{J}^- \in S^-$  such that the next system has a unique solution:

$$\bigvee_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin \check{J}^-}} (a_{ij}^+ * x_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P x_j) = b_i, \quad i \in I_{\check{J}^-}$$

## Multi-adjoint abduction with negations

The last research topic addressed in this thesis concerns abduction reasoning in multi-adjoint normal logic programs. We impose three requirements on the considered MANLPs:

- (1) The dependency graph of the MANLP does not contain cycles with negation.
- (2) At most one (possibly negated) propositional symbol appears in the body of each rule of the MANLP.
- (3) All rules in whose body appears the same propositional symbol are defined with the same residuated implication.

Given a finite set  $A$ , we use the notation  $\bar{A}$  to represent a tuple with the elements of  $A$ . Similarly, given a tuple  $\bar{A}$ , we denote the set of elements appearing in the tuple as  $A$ .

The idea of abduction reasoning is quite simple: we know the truth values (*observations*) of certain propositional symbols (*observed variables*) and we want to determine the truth values of the rest of propositional symbols (*hypotheses*) appearing in a MANLP. In the next definition,  $O$  represents the set of observed variables,  $H$  the set of hypotheses and  $\Theta$  the set of observations.

**Definition 8.** An abduction problem is a tuple  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$  where:

- $\mathbb{P}$  is a MANLP satisfying (1), (2) y (3).
- $\bar{O} = (p_1, \dots, p_o)$ ,  $\bar{H} = (q_1, \dots, q_h)$  and  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_o)$ , with  $o, h \in \mathbb{N}$  and  $p_i, q_j \in \Pi_{\mathbb{P}}$ ,  $\theta_i \in L$  for each  $i \in \{1, \dots, o\}$ ,  $j \in \{1, \dots, h\}$ .
- $\Pi_{\mathbb{P}} = O \uplus H$
- The propositional symbols in  $O$  only appear in the head of rules of  $\mathbb{P}$ .

*In particular,  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$  is a simple abduction problem if the propositional symbols of  $H$  only appear in the body of rules of  $\mathbb{P}$ .*

**Definition 9.** *Let  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$  be an abduction problem with  $\bar{O} = (p_1, \dots, p_o)$ ,  $\bar{H} = (q_1, \dots, q_h)$  and  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_o)$ . We say that  $(x_1, \dots, x_h) \in L^h$  is a solution of  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$  if there exists a model  $M$  of  $\mathbb{P}$  such that  $M(p_i) = \theta_i$  and  $M(q_j) = x_j$  for each  $i \in \{1, \dots, o\}$ ,  $j \in \{1, \dots, h\}$ .*

Notice that, given an abduction problem  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ , if  $\vartheta \not\leq \Theta_j$  for some rule  $\langle p_j \leftarrow \top; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}$  with head  $p_j \in O$ , being  $\Theta_j$  the  $j$ -th component of  $\Theta$ , then  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$  is not solvable. The underlying reason of the absence of solutions is clear, if the observation of the propositional symbol  $p_j$  is not associated to the logic program, then the logic problem does not model properly the considered system. Hence, from here on, we will assume without loss of generality that there are no facts with head in  $O$ .

On the one hand, an algorithm to solve a simple abduction problem has been provided.

**Algorithm of simple abduction  $PROC_s$**

Input: Simple abduction problem  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ .

Step 1: Define  $\sigma: \{1, \dots, h\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  as  $\sigma(j) = \iota_j$ , where  $\leftarrow_{\iota_j}$  is the residuated implication which defines the rules of  $\mathbb{P}$  with  $q_j$  in its body.

Step 2: Solve the system of bipolar multi-adjoint sup-equations

$$(R^+ \odot_{\sigma} X) \vee (R^- \odot_{\sigma} \neg X) = T \quad (3)$$

where  $R_{o \times h}^+, R_{o \times h}^-, X_{h \times 1}, \neg X_{h \times 1}, T_{o \times 1}$  are the matrices defined as:

$$R^+ = \begin{bmatrix} \vartheta_{11} & \cdots & \vartheta_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ \vartheta_{o1} & \cdots & \vartheta_{oh} \end{bmatrix} \quad R^- = \begin{bmatrix} \vartheta_{1h+1} & \cdots & \vartheta_{12h} \\ \vdots & & \vdots \\ \vartheta_{oh+1} & \cdots & \vartheta_{o2h} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_h \end{bmatrix}^t \quad \neg X = \begin{bmatrix} \neg x_1 & \cdots & \neg x_h \end{bmatrix}^t \quad T = \begin{bmatrix} \theta_1 & \cdots & \theta_o \end{bmatrix}^t$$

where, for each  $i \in \{1, \dots, o\}, j \in \{1, \dots, h\}$ :

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij} &= \sup\{\vartheta \in L \mid \langle p_i \leftarrow_{\iota_j} q_j; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\} \\ \vartheta_{ih+j} &= \sup\{\vartheta \in L \mid \langle p_i \leftarrow_{\iota_j} \neg q_j; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\} \end{aligned} \quad (4)$$

Output: Solution set of (3).

As one would expect, every solution of (3) provides a solution of the simple abduction problem  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ . Therefore, the described algorithm solves simple abduction problems.

Let  $G_{\mathbb{P}} = (V_{\mathbb{P}}, A_{\mathbb{P}})$  be the dependency graph of  $\mathbb{P}$ . The family  $\{\Pi_i\}_{i \in \mathbb{Z}^*}$  is defined inductively as follows:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \{p \in \Pi_{\mathbb{P}} \mid (q, p) \notin A_{\mathbb{P}} \text{ for each } q \in \Pi_{\mathbb{P}}\} \\ \Pi_i &= \left\{ q \in \Pi_{\mathbb{P}} \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \Pi_j \mid (p, q) \in A_{\mathbb{P}} \text{ for some } p \in \Pi_{i-1} \right\} \end{aligned}$$

for each  $i \in \mathbb{N}$ .

For each two tuples  $x = (x_1, \dots, x_n)$  and  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , we denote  $x \bullet y = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ . Given an abduction problem  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ , we can assume without loss of generality that  $\bar{H} = \bar{\Pi}_0 \bullet \dots \bullet \bar{\Pi}_m$  and, since  $O \subseteq \Pi_0$ , we can assume that the first  $o$  elements of  $\bar{\Pi}_0$  are  $p_1, \dots, p_o \in O$ .

### **Abduction algorithm PROC**

Input: Abduction problem  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ .

Step 0: Define  $X_0$  as

$$X_0 = \left\{ (\rho_1, \dots, \rho_o, x_{o+1}, \dots, x_{n_0}) \left| \begin{array}{l} \sup\{\vartheta \mid \langle p_j \leftarrow \top; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\} \preceq x_j, \\ x_j \in L, j \in \{o+1, \dots, n_0\} \end{array} \right. \right\}$$

Step 1: a) Solve the simple abduction problem  $(\mathbb{P}_0, \bar{\Pi}_0, \bar{\Pi}_1, \Theta_0)$  using  $PROC_s$ , for each  $\Theta_0 \in X_0$ , being  $S_{\Theta_0}$  its solution set.

b) Define the set  $S_1^* = \{x \bullet y \mid \Theta_0 \in X_0, y \in S_{\Theta_0}\}$ .

c) Define  $S_1$  as the subset of tuples of  $S_1^*$  satisfying all rules with head in  $\Pi_1$  and whose propositional symbol in the body belongs to  $\Pi_1 \cup \neg\Pi_1$ .

d) Define  $X_1 = \{(y_1, \dots, y_{n_1}) \mid (x_1, \dots, x_{n_0}, y_1, \dots, y_{n_1}) \in S_1\}$ .

Step i: For each  $i \in \{2, \dots, m\}$ :

a) Solve the simple abduction problem  $(\mathbb{P}_{i-1}, \bar{\Pi}_{i-1}, \bar{\Pi}_i, \Theta_{i-1})$  by  $PROC_s$ , for each  $\Theta_{i-1} \in X_{i-1}$ , being  $S_{\Theta_{i-1}}$  its solution set.

b) Define the set

$$S_i^* = \{a \bullet \Theta_{i-1} \bullet y \mid \Theta_{i-1} \in X_{i-1}, a \bullet \Theta_{i-1} \in S_{i-1}, y \in S_{\Theta_{i-1}}\}$$

being  $a$  an arbitrary tuple such that  $a \bullet x$  belongs to  $S_{i-1}$ .

c) Define  $S_i$  as the subset of tuples of  $S_i^*$  satisfying all rules with head in  $\Pi_i$  and whose propositional symbol in the body belongs to

$$(\Pi_1 \cup \neg\Pi_1) \cup \dots \cup (\Pi_i \cup \neg\Pi_i)$$

d) Define  $X_i = \{(y_1, \dots, y_{n_i}) \mid a \bullet (y_1, \dots, y_{n_i}) \in S_i\}$ .

Output:  $S_m$ .

In this case, we show that every element of the set  $S_m$  is a solution of the abduction problem  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ .

## Conclusions and future work

A novel non-monotonic logic programming framework has been presented, adapting the philosophy of the multi-adjoint paradigm to normal logic programs and defining a proper stable model semantics. Additionally, sufficient conditions for the existence and uniqueness of stable models have been provided. Including a strong negation in this generalized framework, we have chosen the most suitable notion of coherence, and we have provided different measures for the incoherence of a multi-adjoint normal logic program. In the future, alternative coherence measures will be further studied as well as instability measures for multi-adjoint normal logic programs will be investigated.

Afterwards, a generalized version of multi-adjoint normal logic programs, called extended multi-adjoint logic programming, has been presented, in which a special kind of rules, called constraints, have been included and in which operators with multiple order-reversing arguments are allowed to appear in the body of the rules. These programs have then been transformed into the simplest logic programming structure which preserves its semantics. Besides, we show how the existence and unicity conditions of stable models for multi-adjoint logic programs could be applied in other different logic programming approaches. The presented advances on non-monotonic logic programming will be applied to practical problems in the scope of digital forensics analysis and decision making.

A complete study on the resolution of bipolar multi-adjoint fuzzy relation equations on symmetric multi-adjoint birresiduated lattices has been developed. In particular, this study generalizes the existing results in the literature about bipolar fuzzy relation equations. Furthermore, the special case of bipolar fuzzy relation equations defined with the product t-norm and its adjoint negation has been analysed. Namely, this negation is a non-involutive negation. So far, including the results presented in this thesis, bipolar fuzzy relation equations with join-reducible right-hand side remain to be unsolved. This will be one of our main prospects for future work. The investigation of bipolar fuzzy relation equations defined with weaker operators than adjoint triples and non-involutive negations will also be addressed. Additionally, exploiting the usefulness of bipolar fuzzy relation equations in real-world problems is one of the proposed tasks.

Finally, an original procedure to solve an abduction problem in multi-adjoint normal logic programming by means of bipolar multi-adjoint fuzzy relation equations has been described. Relating the solutions of the proposed method to the semantics of multi-adjoint normal logic programs and considering less restrictive multi-adjoint normal logic programs will constitute an appealing prospect for future work. Besides, we plan to display techniques to solve other kind of inference processes in non-monotonic logic programming using bipolar multi-adjoint fuzzy relation equations.

## **Publications**

Most of the content of this thesis has been published in the following list of references:

- (1) M.E. Cornejo, D. Lobo and J. Medina. Stable models in normal residuated logic programs. *7th European Symposium on Computational Intelligence and Mathematics (ESCIM 2015)*, pages 150–155, 2015.

- (2) M.E. Cornejo, D. Lobo and J. Medina. Towards multi-adjoint logic programming with negations. *8th European Symposium on Computational Intelligence and Mathematics (ESCIM 2016)*, pages 24–29, 2016.
- (3) M.E. Cornejo, D. Lobo and J. Medina. Bipolar fuzzy relation equations based on the product t-norm. *2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–6, 2017.
- (4) M.E. Cornejo, D. Lobo and J. Medina. Selecting the coherence notion in multi-adjoint normal logic programming. *Lecture Notes in Computer Science*, 10305, pages 447–457, 2017.
- (5) M.E. Cornejo, D. Lobo and J. Medina. Measuring the incoherent information in multi-adjoint normal logic programs. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 641, pages 521–533, 2018.
- (6) M.E. Cornejo, D. Lobo and J. Medina. Characterizing fuzzy y-models in multi-adjoint normal logic programming. *Communications in Computer and Information Science*, 855, pages 541–552, 2018.
- (7) M.E. Cornejo, D. Lobo and J. Medina. Syntax and semantics of multi-adjoint normal logic programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 345, pages 41–62, 2018.
- (8) M.E. Cornejo, D. Lobo and J. Medina. Bipolar Max-Product Fuzzy Relation Equations with the Product Negation. *Studies in Computational Intelligence*, 796, pages 147–153, 2019.
- (9) M.E. Cornejo, D. Lobo and J. Medina. On the solvability of bipolar max-product fuzzy relation equations with the product negation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 354, pages 520–532, 2019.

- (10) M.E. Cornejo, D. Lobo and J. Medina. Bipolar fuzzy relation equations systems based on the product t-norm. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42, pages 5779–5793, 2019.
- (11) D. Lobo, M.E. Cornejo and J. Medina. Abductive reasoning in normal residuated logic programming via bipolar max-product fuzzy relation equations. *2019 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUS-FLAT 2019)*, pages 588–594, 2019.
- (12) M.E. Cornejo, D. Lobo and J. Medina. Extended multi-adjoint logic programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 2020. (Accepted)
- (13) M.E. Cornejo, D. Lobo and J. Medina. On the solvability of bipolar max-product fuzzy relation equations with the standard negation. *Fuzzy Sets and Systems*, 2020. (Accepted)

# Capítulo 1

## Introducción

La capacidad de razonar es lo que distingue al ser humano del resto de componentes del reino animal. A lo largo de los siglos, desde la definición del ser humano como *animal racional* de Aristóteles al *pienso luego existo* de Descartes, esta certeza ha estado patente en la historia, y la ciencia, desde sus múltiples ramas de conocimiento, ha tratado de comprender el razonamiento humano. De entre todas esas ramas, entre las que se encuentran la filosofía, la biología, la psicología, la sociología, etcétera; la lógica matemática destaca por su naturaleza formal.

En el panorama actual, inmersos en la era del *Big Data* y el auge de la inteligencia artificial, el desarrollo de sistemas formales que permitan automatizar razonamientos cobra un valor adicional. Además, la elevada capacidad de almacenamiento de información y la variabilidad en los datos requiere que dichos sistemas formales sean flexibles y potentes desde un punto de vista expresivo.

Una característica común en la mayoría de procesos inferenciales es la presencia de información bipolar. La bipolaridad en el razonamiento humano puede surgir de diversas formas, desde analizar pros y contras a la información contradictoria. En efecto, la existencia de información bipolar

no solo es una realidad, sino que resulta fundamental en ciertos procesos deductivos, como lo son los aspectos favorables y desfavorables en la toma de decisiones y las contradicciones en el análisis forense.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, con objeto de manejar un entorno flexible capaz de representar información bipolar, el trabajo desarrollado en esta tesis se enmarca en un paradigma lógico difuso con negaciones.

## Lógicas multivaluadas

La lógica clásica es la herramienta más elemental para realizar deducciones. En esencia, los pilares de la lógica clásica son los siguientes: todo enunciado es verdadero o falso, y dicho valor de verdad puede asignarse sin consideración de contexto alguno. Aristóteles, a menudo considerado el padre de la lógica, fue el primero en enunciar sus fundamentos, y no fue hasta 1854 cuando Boole [8] propuso un enfoque algebraico de la lógica aristotélica.

Naturalmente, la lógica clásica resulta imprescindible para decidir sobre la verdad de enunciados como *nacido en Puerto Real, vivo e hijo de Isabel*. No obstante, ya en la Antigua Grecia se sabía de la existencia de proposiciones sobre las que no es posible pronunciarse sobre su valor de verdad en el lenguaje de la lógica clásica. La conocida como paradoja del mentiroso es un claro ejemplo de ello: *esta oración es falsa*. Si suponemos que la oración anterior es verdadera, se deduce que es falsa. Si por el contrario suponemos que es falsa, obtenemos que es también verdadera. En cualquier caso, llegamos a una contradicción. De la misma forma, enunciados como *justo* o *rápido* tienen una clara componente subjetiva, mientras que sentencias como *mañana lloverá* o *la hipótesis de Riemann es cierta* son indecidibles en el instante en que se escriben estas líneas.

---

La necesidad de decidir sobre sentencias tales como las anteriores motivaron la aparición de otro tipo de lógicas [7, 12, 13, 52], conocidas con el sobrenombre de lógicas no clásicas, cada una de las cuales trata de representar un tipo de razonamiento que no captura la lógica clásica. Por su relevancia en la bibliografía, destacan las lógicas multivaluadas y las lógicas no monótonas.

Básicamente, las lógicas multivaluadas desestiman el *principio del tercero excluido*, considerando más valores de verdad entre verdadero y falso. Este tipo de lógicas comenzaron a desarrollarse formalmente con el trabajo de Łukasiewicz “*O logice trojwartosciowej*” en 1920 (traducido al inglés en [80]). Dicha lógica considera un tercer valor de verdad, interpretado usualmente como *indefinido* o *desconocido*, y fue generalizada posteriormente para  $n$  valores de verdad de la mano de Łukasiewicz y Tarski en “*Untersuchungen über den Aussagenkalkül*” en 1930 [80]. Como curiosidad, las lógicas trivaluadas como la de Łukasiewicz y la de Kleene [69] permiten representar situaciones como la paradoja del gato de Schrödinger, donde la afirmación *el gato vive* recibiría el valor de verdad *desconocido*.

La teoría de conjuntos difusos, introducida por Zadeh [123] en 1965, ha supuesto una revolución en el modo de entender y manejar la incertidumbre y la información incompleta. Sin embargo, dicha revolución se ha ido dilatando en el tiempo, como comenta el propio autor en [124], pues no eran pocos los científicos que se mostraban escépticos ante esta teoría en sus primeras fases. A grandes rasgos, un conjunto difuso  $A$  en un universo  $U$  viene determinado por una función de pertenencia  $f: U \rightarrow [0, 1]$ , que indica el grado de pertenencia de cada elemento de  $U$  al conjunto  $A$ . En este sentido, la función de pertenencia  $f$  generaliza el concepto de función característica de la teoría de conjuntos clásica. Así mismo, la noción de conjunto difuso fue extendida en 1967 a  $L$ -conjuntos difusos [61], tomando como conjunto de valores de pertenencia un conjunto parcialmente ordenado  $L$  en lugar del intervalo  $[0, 1]$ .

El término lógica difusa, en su sentido más estricto, alude al tipo de lógica multiadjunta derivada al adoptar la filosofía de los conjuntos difusos. Así, retomando el ejemplo de la sentencia *rápido* aplicada a animales, un ambiente lógico difuso en  $[0, 1]$  tomaría que para un guepardo el valor de verdad de *rápido* es 1, mientras que para un koala el valor de verdad de *rápido* es 0. Por su parte, podríamos considerar que *el perro es rápido* es cierto con valor de verdad 0.5 mientras que *la liebre es rápida* recibiría un valor 0.8.

Ahora bien, ¿qué valor de verdad recibe la afirmación *el perro y la liebre son rápidos*? Por ejemplo, podría tomarse el mínimo del valor de verdad de *el perro es rápido* y el de *la liebre es rápida*, resultando 0.5, o bien podría tomarse el producto de ambos valores, dado lugar al valor 0.4. Lo cierto es que en la lógica difusa, y en general en las lógicas multivaluadas, no existe una única forma de definir la conjunción, de la misma forma que no hay única definición de disyunción, implicación y negación. Dado un sistema de conocimiento difuso, la elección de dichos operadores lógicos tiene una incidencia directa en el tratamiento del sistema.

## Lógicas no monótonas

Uno de los aspectos que comparten la lógica clásica y algunas lógicas multivaluadas es la monotonía. Esta propiedad establece que *al añadir nuevas premisas no se pierden conclusiones*. Por ejemplo, consideremos cierto el enunciado:

- *Los virus infectan.*

Si añadimos la premisa *la gripe es un virus*, se obtiene como consecuencia que *la gripe infecta*. Si incluimos ahora la premisa *el coronavirus es un virus*, se obtiene una nueva consecuencia además de la anterior: *la gripe infecta*

---

y *el coronavirus infecta*. De esta forma, al añadir nuevas premisas, nunca perdemos consecuencias, nunca perdemos información ya conocida.

Sin embargo, este hecho no es habitual en numerosos procesos deductivos. Por ejemplo, al aplicar el *sentido común* sobre alguna materia, intuimos una serie de conclusiones que han de ser revisadas una vez que aumentamos nuestro conocimiento del tema. Véase el caso del desarrollo de las geometrías no euclídeas en el siglo XIX y que muestra cómo al incluir el quinto postulado de Euclides hay propiedades que dejan de ser ciertas. Volviendo al ejemplo de los virus, supongamos que las siguientes afirmaciones son ciertas:

- *Si una persona enferma y no tiene dificultades respiratorias, tiene gripe.*
- *Si una persona enferma y no tiene gripe, entonces tiene coronavirus.*

En principio, si una cierta persona enferma y no sabemos nada más, de las afirmaciones anteriores se concluye que *tiene gripe* es verdadero. Ahora bien, si añadimos la premisa *tiene dificultades respiratorias* como verdadera, *tiene gripe* ya no es una consecuencia de las afirmaciones anteriores, sino que en su lugar se deduce que *tiene coronavirus* es cierta. Con lo cual, este tipo de razonamiento no es monótono en el sentido lógico.

El comportamiento no monótono de un esquema de razonamiento se debe comúnmente al uso de una negación, ya sea de forma explícita o implícita. Este operador, la negación lógica, merece un tratamiento especial debido al uso que hacemos de él en nuestro día a día. El motivo fundamental es que un mismo vocablo, “no”, puede tener diferentes significados, en función del emisor y del contexto en que se utilice.

Consideremos a modo de ejemplo la aserción *culpable*. En el ámbito jurídico, debido a la presunción de inocencia, dicha afirmación será falsa, o equivalentemente *no culpable* será verdadera, siempre y cuando no sea posible demostrar, sin atisbo de duda, que la sentencia *culpable* es verdadera.

Sin embargo, que un juez falle que la afirmación *no culpable* es verdadera no significa que el acusado no sea culpable, sino que no es posible probar que el acusado es *culpable*. Este tipo de negación, en el que una afirmación es falsa salvo que se pruebe explícitamente que es verdadera, se denomina *negación por defecto* [17, 101].

Dicho esto, no es difícil intuir que la opinión pública hace uso, por lo general, de un tipo diferente de negación. Basándose en el conocimiento del caso y en ciertos indicios, la opinión pública puede considerar que la afirmación *culpable* es verdadera, en contra de la decisión judicial, o viceversa. Este otro tipo de negación, basada en creencias, se conoce usualmente como *negación fuerte*.

La idea subyacente en la distinción anterior es que una negación por defecto indica que algo no es verdadero, mientras que una negación fuerte indica que algo es falso. Dicha distinción resulta esencial en lo que se refiere a la automatización de razonamientos, llevada a cabo usualmente mediante programas lógicos.

## Programas lógicos

La programación lógica, como comenta Lloyd en su libro [76], no es más que un producto, resultado de construir sistemas de deducción automática. Debe su nombre a su concepción original como lógica en forma de lenguaje de programación, y fue desarrollada por Kowalski [71, 115] y Colmenauer [18], quienes conjuntamente con otros investigadores de la Universidad de Marsella crearon el lenguaje de programación PROLOG (PROgramación en LÓGica).

En pocas palabras, un programa lógico es una colección de reglas y hechos, a partir de los cuales se pretende modelar y entender el funcionamiento de un sistema. Teniendo en cuenta la discusión de la sección

---

anterior, puesto que se pretende realizar razonamientos automáticos, definir entornos de programación lógica con negaciones resulta un objeto de estudio deseable. Naturalmente, la lógica que subyace a un programa lógico con negaciones no es monótona, por lo que dichos programas reciben el nombre de *programas lógicos no monótonos*. En particular, si un ambiente de programación lógica incluye una negación por defecto, se dice que es un entorno de *programación lógica normal*.

Todo lenguaje de programación lógica conlleva la definición de dos dimensiones bien diferenciadas: la sintaxis del lenguaje, que fija qué tipo de reglas se pueden construir; y la semántica del lenguaje, que otorga un significado a las reglas del programa lógico y permite determinar las consecuencias del mismo.

En un programa lógico sin negaciones, la semántica está claramente identificada y consensuada. A saber, las consecuencias lógicas del programa vienen determinadas por su modelo mínimo, que siempre existe [115]. Dicho modelo mínimo se denomina entonces *modelo canónico* del programa. No obstante, en un programa lógico con negaciones, la semántica no puede definirse en términos de su modelo mínimo, pues tal modelo no existe en general. Aún más, debido a su no monotonía, definir qué se considera consecuencia semántica de un programa lógico con negaciones entraña un problema de mayor complejidad. En la bibliografía existen diversas propuestas para definir la semántica de un programa lógico con negaciones, entre las que destacan la semántica de los programas estratificados [2, 116], la semántica bien fundada [117, 118] y la semántica de los modelos estables [57].

## Relaciones difusas

Las relaciones difusas, al igual que la lógica difusa, pueden verse como una adaptación de la filosofía de los conjuntos difusos al concepto clásico de relación entre conjuntos. Sin embargo, siendo fieles a la historia, el matemático ruso Salii [103] desarrolló esta noción de manera independiente en 1965, de forma simultánea a la publicación de la teoría de conjuntos difusos. La base del concepto de relación difusa es, en lugar de considerar la presencia o ausencia de relación entre dos elementos, asignar a cada par de elementos un valor entre 0 y 1, o más generalmente un elemento de un conjunto parcialmente ordenado  $L$ .

La definición anterior, que al fin y al cabo es un tipo particular de conjunto difuso, tiene una gran trascendencia en la bibliografía gracias a las ecuaciones de relaciones difusas. Este tipo de ecuación fue introducida por Sanchez [104] en 1976, y ya desde su origen estuvo marcada por su carácter aplicado. En efecto, en su segundo trabajo, Sanchez [105] ya muestra una posible aplicación de las ecuaciones de relaciones difusas desde el punto de vista del diagnóstico médico. En ese artículo, el autor considera una relación difusa  $R$  de un conjunto de pacientes a un conjunto de síntomas y una relación  $T$  del conjunto de pacientes a un conjunto de enfermedades, y se plantea la cuestión de encontrar una relación difusa  $S$  de síntomas a enfermedades tal que al componer  $R$  y  $S$  se obtenga  $T$ . En otras palabras, se plantea descubrir a partir de qué síntomas se puede concluir que un paciente padece una determinada enfermedad.

Desde su introducción, el interés de la comunidad científica en las ecuaciones de relaciones difusas ha ido creciendo, tanto desde un prisma teórico, estudiando su resolución [42, 44, 45, 89], como desde un punto de vista aplicado, siendo sus aplicaciones tan variadas como en el campo del control difuso [44], la toma de decisiones [19] y la optimización [58, 65, 78].

En algunas de estas aplicaciones, en particular en aquellas que se ven

---

afectadas por opiniones o impresiones personales, se requieren variables con un carácter bipolar, en el sentido de que tanto su presencia como su ausencia son susceptibles de alterar el entorno considerado. En 2010, diferentes autores [55, 72, 98] comenzaron a tratar con un tipo especial de ecuación con composición máximo mínimo que fuese capaz de modelar variables bipolares. Tres años más tarde, a raíz de un problema de optimización, Freson et al. [54] consideraron como restricciones de dicho problema un conjunto de ecuaciones con composición máximo mínimo en las que las variables aparecen junto a su negación lógica, que se dieron a llamar restricciones bipolares. La idea subyacente en las restricciones bipolares ha dado lugar a lo que hoy se conoce como *ecuaciones bipolares de relaciones difusas*, que no son más que ecuaciones de relaciones difusas enriquecidas con un operador de negación, de forma que la relación incógnita aparece con su negación en la ecuación.

## Motivación, panorama actual y contribuciones

Diferentes autores se han dedicado en los últimos años a definir entornos de programación lógica con negaciones, o más generalmente, entornos de programación lógica no monótona [1, 56, 66, 79, 87]. Sin embargo, las estructuras algebraicas sobre las que se definen estos programas siguen siendo restrictivas, limitando por tanto la expresividad del lenguaje y el rango potencial de aplicaciones.

En esta tesis, nos enmarcaremos en un ambiente de programación lógica multiadjunta, un paradigma lógico presentado por Medina, Ojeda-Aciego y Vojtáš [93] que generaliza una considerable variedad de entornos de programación lógica no clásicos, como la programación lógica anotada [68], la programación lógica posibilista [48], la programación lógica monótona y residuada [37, 38] y la programación lógica difusa [120]. En el Capítulo 3 definimos una sintaxis y una semántica de los modelos estables

para programas lógicos multiadjuntos enriquecidos con una negación por defecto, dando lugar a lo que se ha dado a llamar *programas lógicos multiadjuntos normales* (MANLP).

Seguidamente, nos centraremos en proporcionar condiciones suficientes para la existencia y la unicidad de modelos estables. Cabe destacar que la existencia de modelos estables se requiere para poder definir la semántica de los MANLPs, mientras que su unicidad permite definir el único modelo estable de un MANLP como su modelo canónico. Además, si un MANLP se corresponde con un problema real, los modelos estables coinciden con las posibles soluciones de dicho problema. Como resultado, facilitar dichas condiciones resulta primordial para saber si el problema subyacente es resoluble y, en su caso, si existe una única solución. Naturalmente, desarrollar un procedimiento determinista mediante el cual construir modelos estables es un objeto interesante de estudio.

De acuerdo con la discusión previa, el Capítulo 3 presenta condiciones suficientes para asegurar:

1. La existencia de modelos estables para MANPLs definidos en un conjunto convexo compacto de un espacio euclídeo.
2. La unicidad de modelos estables para MANPLs estratificados.
3. La unicidad de modelos estables para MANPLs definidos en el conjuntos de subintervalos del intervalo unidad.

Una consecuencia directa de las condiciones de unicidad aportadas es la obtención de un proceso determinista para definir el único modelo estable del MANLP. En particular, las propiedades anteriores pueden aplicarse directamente a las extensiones normales de la programación lógica monótona y residuada [37, 38], la programación lógica difusa [120] y la programación lógica posibilista [48], al tratarse estas de casos particulares de la programación lógica multiadjunta.

---

En última instancia, el Capítulo 3 aborda la inclusión de una negación fuerte en un MANLP. El principal inconveniente de la introducción de una negación fuerte en un marco de programación lógica es la aparición de inconsistencias. Por ejemplo, se puede dar el caso de que los valores de verdad de  $p$  y  $\sim p$  sean ambos 1, lo que carece de sentido.

Por lo tanto surgen nuevas cuestiones tales como: ¿qué quiere decir que algo no es coherente en la programación lógica multiadjunta con negaciones? Si un MANLP no es coherente, ¿en qué medida es incoherente? En esta línea, tomaremos la noción más adecuada de coherencia de acuerdo a un estudio previo de las definiciones de inconsistencia existentes en la literatura, y que se encuentran más próximas a nuestra idea intuitiva de coherencia. Una vez seleccionada la noción de coherencia, se presentarán algunas medidas de incoherencia con objeto de cuantificar hasta qué punto es incoherente un MANLP, en caso de serlo.

El Capítulo 4 continúa el estudio de marcos de programación lógica multiadjunta no monótona. En una primera etapa, extenderemos el lenguaje de programación lógica multiadjunta normal a un entorno más flexible, denominado programación lógica multiadjunta extendida (EMALP), permitiendo un tipo especial de reglas denominadas restricciones y admitiendo cualquier tipo de comportamiento no monótono en el cuerpo de las reglas. Por un lado, el uso de restricciones hace posible imponer cotas superiores al valor de verdad de ciertas afirmaciones, representadas mediante fórmulas en el lenguaje del MANLP. Por otro lado, al considerar cualquier tipo de comportamiento no monótono en el cuerpo de las reglas de un MANLP, se admite, en particular, la ocurrencia de diferentes negaciones por defecto de forma simultánea.

En una segunda fase, perseguimos el objetivo de transformar un programa lógico multiadjunto extendido en el lenguaje más sencillo, desde una perspectiva sintáctica, que conserve su semántica. Concretamente, proporcionaremos una serie de métodos de conversión que permiti-

rán transformar un EMALP arbitrario en un programa lógico núcleo de conjuntos respuesta difusos cuya semántica coincide con la del EMALP original. El interés de este procedimiento reside en la posibilidad de beneficiarse de un lenguaje con una gran potencia expresiva, como la programación lógica multiadjunta extendida, y al mismo tiempo trabajar en un entorno sencillo computacionalmente, ampliando así el alcance de las posibles aplicaciones e incrementando la eficiencia en los cálculos asociados al programa.

El Capítulo 4 concluye ejemplificando cómo pueden extenderse los resultados de existencia y unicidad desarrollados en el Capítulo 3 en un entorno diferente a la programación lógica multiadjunta normal. En este sentido, se facilita un procedimiento para simular un programa lógico núcleo de conjuntos respuesta difusos en términos de un MANLP semánticamente equivalente. Gracias a dicho método, las condiciones de existencia y unicidad del Capítulo 3 pueden adaptarse directamente a la programación lógica núcleo de conjuntos respuesta difusos.

Existen ciertos trabajos que acentúan la relación existente entre la programación lógica y las ecuaciones de relaciones difusas. Por ejemplo, en [19, 45] se muestra dicha relación desde una perspectiva multiadjunta. Parece natural pensar que un programa lógico no monótono podría guardar una relación similar con ecuaciones de relaciones difusas en las que las incógnitas aparecen junto a su negación lógica, esto es, con ecuaciones bipolares de relaciones difusas.

El Capítulo 5 presenta las ecuaciones bipolares de relaciones difusas desde un prisma puramente teórico. En particular, las ecuaciones bipolares multiadjuntas de relaciones difusas se introducen como un caso especial de ecuación de relaciones difusas cuya composición se define con varias conjunciones. Tras mostrar que una ecuación bipolar de relaciones difusas puede verse como un sistema de sup-ecuaciones bipolares, centramos nuestra atención en estudiar la resolución de dichos sistemas.

---

Hasta donde sabemos, la literatura actual sobre ecuaciones bipolares de relaciones difusas se limita al intervalo unidad. Además, las ecuaciones bipolares de relaciones difusas estudiadas en la literatura tan solo se han definido con la composición máximo mínimo [54, 73, 74], con la composición máximo producto [21, 28] o con la composición máximo Łukasiewicz [75, 122, 125], y todas ellas con la negación estándar. En el Capítulo 5 se desarrolla un estudio sobre la resolubilidad de sistemas de sup-ecuaciones bipolares definidos en retículos multiadjuntos birresiduados con negación involutiva. En particular, este tipo de sistemas engloba a las ecuaciones bipolares de relaciones difusas definidas con composición máximo producto, máximo producto y máximo Łukasiewicz. En otras palabras, nuestro estudio generaliza los resultados existentes en la bibliografía sobre la resolución de ecuaciones bipolares de relaciones difusas.

Una de las desventajas de los sistemas anteriores reside en la involutividad del operador de negación, ya que algunos retículos ni tan siquiera permiten la definición de alguna negación involutiva. Como resultado, es preciso investigar la resolución de ecuaciones bipolares de relaciones difusas definidas con negaciones no involutivas. Como culmen del contenido teórico de esta tesis, tratamos la resolución de sistemas de sup-ecuaciones bipolares definidos con la t-norma producto y su negación adjunta, un caso particular de negación no involutiva.

Esta tesis concluye con una aplicación de las ecuaciones bipolares de relaciones difusas en programación lógica no monótona. Las ecuaciones bipolares de relaciones difusas suponen una herramienta potencial en los procesos de inferencia de programas lógicos no monótonos, debido a la relación ya probada de su homónimo sin negaciones. Uno de dichos procesos de inferencia es el razonamiento abductivo, que consiste esencialmente en dar explicación a una serie de observaciones. En el Capítulo 6 presentamos un procedimiento de abducción para programas lógicos multiadjuntos normales basado en ecuaciones bipolares de relaciones difusas.

## Trabajo futuro

A continuación, se enumeran algunas propuestas interesantes para continuar el trabajo desarrollado en esta tesis:

- (I) Se analizarán medidas alternativas para la coherencia de un programa lógico multiadjunto normal. Además, es interesante contemplar el caso de MANLPs sin modelos estables, por lo que se estudiarán medidas de inestabilidad asociadas a dicho entorno de programación lógica.
- (II) Los avances realizados en programación lógica no monótona, tanto en el caso multiadjunto normal como en el extendido, serán aplicados a problemas reales en el ámbito del análisis forense digital y de la toma de decisiones.
- (III) Hasta ahora, incluyendo los resultados presentados en esta tesis, las ecuaciones bipolares de relaciones difusas en las que el miembro de la derecha es supremo reducible no han sido estudiadas. Investigar la resolución de este tipo de ecuaciones será uno de nuestros principales objetivos en el trabajo futuro. De forma adicional, se desea explotar la utilidad de las ecuaciones bipolares de relaciones difusas en problemas del mundo real, así como en campos como el control difuso y la optimización.
- (IV) Relacionar las soluciones del algoritmo de abducción con la semántica del MANLP subyacente constituye un objeto de estudio interesante. Así mismo, se pretende desarrollar métodos para otro tipo de procesos de inferencia en programación lógica no monótona, además de la abducción, mediante el uso de ecuaciones bipolares de relaciones difusas.

---

## Publicaciones

Gran parte de los resultados presentados en esta tesis se encuentran publicados en artículos de revistas y en congresos internacionales:

- (1) M.E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. Stable models in normal residuated logic programs. *7th European Symposium on Computational Intelligence and Mathematics (ESCIM 2015)*, págs. 150–155, 2015.
- (2) M.E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. Towards multi-adjoint logic programming with negations. *8th European Symposium on Computational Intelligence and Mathematics (ESCIM 2016)*, págs. 24–29, 2016.
- (3) M.E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. Bipolar fuzzy relation equations based on the product t-norm. *2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, págs. 1–6, 2017.
- (4) M.E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. Selecting the coherence notion in multi-adjoint normal logic programming. *Lecture Notes in Computer Science, 10305*, págs. 447–457, 2017.
- (5) M.E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. Measuring the incoherent information in multi-adjoint normal logic programs. *Advances in Intelligent Systems and Computing, 641*, págs. 521–533, 2018.
- (6) M.E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. Characterizing fuzzy  $\gamma$ -models in multi-adjoint normal logic programming. *Communications in Computer and Information Science, 855*, págs. 541–552, 2018.
- (7) M.E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. Syntax and semantics of multi-adjoint normal logic programming. *Fuzzy Sets and Systems, 345*, págs. 41–62, 2018.

- (8) M.E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. Bipolar Max-Product Fuzzy Relation Equations with the Product Negation. *Studies in Computational Intelligence*, 796, págs. 147–153, 2019.
- (9) M.E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. On the solvability of bipolar max-product fuzzy relation equations with the product negation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 354, págs. 520–532, 2019.
- (10) M.E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. Bipolar fuzzy relation equations systems based on the product t-norm. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42, págs. 5779–5793, 2019.
- (11) D. Lobo, M.E. Cornejo y J. Medina. Abductive reasoning in normal residuated logic programming via bipolar max-product fuzzy relation equations. *2019 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUS-FLAT 2019)*, págs. 588–594, 2019.
- (12) M.E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. Extended multi-adjoint logic programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 2020. (Aceptado)
- (13) M.E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. On the solvability of bipolar max-product fuzzy relation equations with the standard negation. *Fuzzy Sets and Systems*, 2020. (Aceptado)

# Capítulo 2

## Preliminares

Con el propósito de facilitar la comprensión del contenido de esta tesis y hacerla autocontenida, en este capítulo presentamos algunas nociones y resultados elementales.

### 2.1. Teoría de retículos

El retículo constituye la estructura algebraica más simple sobre la que trabajemos en este trabajo. Comenzaremos el capítulo introduciendo este concepto y algunas propiedades relacionadas con el mismo. Fijemos en primer lugar qué se entiende por relación de orden. Para más información sobre teoría de retículos, referimos al lector a [6, 40, 62].

**Definición 2.1.** *Una relación de orden parcial, o simplemente relación de orden, es una relación binaria  $\preceq$  sobre un conjunto  $L$  que satisface las siguientes propiedades:*

1. *Reflexiva:  $x \preceq x$  para todo  $x \in L$ .*
2. *Antisimétrica: si  $x \preceq y$  e  $y \preceq x$ , entonces  $x = y$ , para todo  $x, y \in L$ .*

3. *Transitiva: si  $x \preceq y$  e  $y \preceq z$ , entonces  $x \preceq z$ , para todo  $x, y, z \in L$ .*

*Dados dos elementos  $x, y \in L$ , escribiremos  $x \prec y$  cuando  $x \preceq y$  y  $x \neq y$ .*

Haremos distinción entre relación de orden parcial y relación de orden total, lo que dará lugar a conjuntos parcialmente ordenados y a conjuntos totalmente ordenados, respectivamente.

**Definición 2.2.** *Sea  $L$  un conjunto dotado de una relación de orden  $\preceq$ .*

- *Si existen  $x, y \in L$  con  $x \not\preceq y$  e  $y \not\preceq x$ , se dice que  $\preceq$  es una relación de orden parcial y que  $(L, \preceq)$  es un conjunto parcialmente ordenado. Además, se dice que  $x$  e  $y$  son incomparables y se denota como  $x \parallel y$ .*
- *Si  $x \preceq y$  o  $y \preceq x$  para cada  $x, y \in L$ , se dice que  $\preceq$  es una relación de orden total y que  $(L, \preceq)$  es un conjunto totalmente ordenado o una cadena.*

En el desarrollo de la tesis prestaremos especial atención a las cotas superiores e inferiores de los conjuntos parcialmente ordenados. A continuación recordamos las nociones de cota superior, cota inferior, supremo, ínfimo, máximo, mínimo y de elemento maximal y minimal.

**Definición 2.3.** *Sea  $(L, \preceq)$  un conjunto parcialmente ordenado. Dado  $S \subseteq L$ , decimos que un elemento  $x \in L$  es:*

- *una cota superior de  $S$  si  $s \preceq x$  para cada  $s \in S$ .*
- *una cota inferior de  $S$  si  $x \preceq s$  para cada  $s \in S$ .*
- *el supremo de  $S$  si  $x \preceq y$  para cada cota superior  $y$  de  $S$ . Si además  $x \in S$ , decimos que  $x$  es el máximo de  $S$ .*
- *el ínfimo de  $S$  si  $y \preceq x$  para cada cota inferior  $y$  de  $S$ . Si además  $x \in S$ , decimos que  $x$  es el mínimo de  $S$ .*

- un elemento maximal de  $S$  si  $x \in S$  y no existe  $s \in S$  tal que  $x \preceq s$ .
- un elemento minimal de  $S$  si  $x \in S$  y no existe  $s \in S$  tal que  $s \preceq x$ .

Usualmente, denotaremos el supremo (ínfimo) de un conjunto finito  $\{a_1, \dots, a_n\}$  como  $\sup\{a_1, \dots, a_n\}$  o como  $a_1 \vee \dots \vee a_n$  ( $\inf\{a_1, \dots, a_n\}$  o  $a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ ). Igualmente, en ocasiones usaremos la notación  $\bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i$  y la notación  $\bigwedge_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i$  para denotar el supremo y el ínfimo del conjunto  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , respectivamente. Además, en caso de existir, denotaremos a los elementos máximo y mínimo de un conjunto parcialmente ordenado como  $\top$  y  $\perp$ , respectivamente.

Estamos en disposición de presentar la noción de retículo y algunas propiedades básicas.

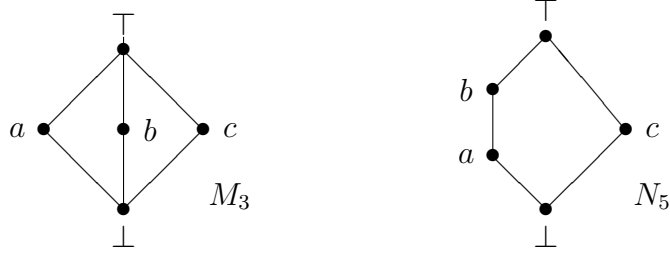
**Definición 2.4.** Sea  $(L, \preceq)$  un conjunto parcialmente ordenado.

- Si  $x \vee y$  y  $x \wedge y$  existen para todo  $x, y \in L$ , decimos que  $(L, \preceq)$  es un retículo.
- Si el supremo y el ínfimo de  $S$  existen para todo  $S \subseteq L$ , decimos que  $(L, \preceq)$  es un retículo completo.
- Si  $(L, \preceq)$  es un retículo, decimos que es distributivo si para todo  $x, y, z \in L$  se satisface

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

- Si  $(L, \preceq)$  es un retículo y  $K$  es un subconjunto no vacío de  $L$ , decimos que  $(K, \preceq)$  es un subretículo de  $(L, \preceq)$  si  $x \vee y \in K$  y  $x \wedge y \in K$  para todo  $x, y \in K$ .

En la literatura de retículos, es habitual representar los retículos finitos en forma de *diagrama de Hasse*. Dado un retículo finito  $L$ , en el diagrama de Hasse de  $L$  se representa un punto por cada elemento de  $L$  y se dibuja un

Figura 2.1: Retículos  $M_3$  y  $N_5$ 


segmento ascendente de un elemento  $a$  a un elemento  $b$  si y solo si  $a \preceq b$  y no existe  $c \in L$  tal que  $a \preceq c \preceq b$ .

Una caracterización bien conocida de los retículos distributivos se basa en los retículos  $M_3$  y  $N_5$ , cuyos diagramas de Hasse se representan en la Figura 2.1, y que se conocen usualmente como retículos diamante y pentágono, respectivamente. A saber, un retículo es distributivo si no contiene un diamante o un pentágono. Formalmente:

**Teorema 2.1** ([6]). *Un retículo  $(L, \preceq)$  es distributivo si y solo si  $M_3$  y  $N_5$  no son subretículos de  $(L, \preceq)$ .*

**Corolario 2.1** ([6]). *Toda cadena es un retículo distributivo.*

Los elementos supremo irreducibles de un retículo jugarán un papel trascendental en el estudio de las ecuaciones bipolares de relaciones difusas presentado en el Capítulo 5. La característica principal de dichos elementos es que no pueden escribirse como supremo de otros dos.

**Definición 2.5.** *Sea  $(L, \preceq)$  un retículo. Se dice que un elemento  $x \in L$  es supremo irreducible si*

1.  $x \neq \perp$  (en el caso en que  $L$  tenga elemento mínimo).
2.  $x = a \vee b$  implica  $x = a$  o  $x = b$ , para todo  $a, b \in L$ .

Por definición de elemento supremo irreducible, se obtienen los siguientes resultados.

**Proposición 2.1** ([6]). *Todo elemento de una cadena diferente a  $\perp$  es supremo irreducible.*

**Proposición 2.2** ([6]). *Sea  $(L, \preceq)$  un retículo distributivo y  $b \in L$  un elemento supremo irreducible. Dados  $a_1, \dots, a_m \in L$ , se cumple que  $b \preceq a_1 \vee \dots \vee a_m$  si y solo si existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $b \preceq a_j$ .*

Una propiedad interesante de los retículos distributivos es que cualquier elemento se puede descomponer de forma única como supremo de elementos supremo irreducibles [6]. El siguiente resultado es consecuencia directa de este hecho.

**Proposición 2.3.** *Sea  $(L, \preceq)$  un retículo distributivo y  $a, b, c, d \in L$ . Si  $a \prec c$  y  $b \prec d$ , entonces  $a \vee b \prec c \vee d$ .*

### 2.1.1. Aplicaciones entre retículos

El estudio de puntos fijos de aplicaciones entre retículos supone un hito importante a la hora de establecer la semántica de los programas lógicos con los que trabajaremos en los Capítulos 3 y 4. El siguiente resultado, una versión debilitada del original presentado por Knaster y Tarski [109], muestra que toda aplicación monótona de un retículo en sí mismo tiene un punto fijo máximo y un punto fijo mínimo, y además proporciona la forma de estos.

**Proposición 2.4** ([109]). *Sea  $(L, \preceq)$  un retículo completo y  $T: L \rightarrow L$  una aplicación monótona. Entonces  $T$  tiene un punto fijo mínimo, denotado  $\text{lfp}(T)$  (del inglés least fixpoint), y un punto fijo máximo, denotado  $\text{gfp}(T)$  (del inglés greatest fixpoint). Además,*

$$\text{lfp}(T) = \inf\{x \mid T(x) = x\} = \inf\{x \mid T(x) \preceq x\}$$

$$\text{gfp}(T) = \sup\{x \mid T(x) = x\} = \sup\{x \mid x \preceq T(x)\}$$

La continuidad en la topología de Scott [108] es una de las generalizaciones más aceptadas del concepto de continuidad para retículos completos. Dicha noción se presenta en términos de conjuntos dirigidos.

**Definición 2.6.** Sea  $(L, \preceq)$  un retículo completo y  $X \subseteq L$ . Decimos que  $X$  es dirigido si cada subconjunto finito de  $X$  tiene una cota superior en  $X$ .

**Definición 2.7** ([108]). Sea  $(L, \preceq)$  un retículo completo y  $T: L \rightarrow L$  una aplicación. Decimos que  $T$  es continua Scott si  $T(\sup(X)) = \sup(T(X))$  para cada subconjunto dirigido  $X$  de  $L$ , siendo  $T(X)$  la imagen directa de  $X$  por  $T$ .

Bajo monotonía, se puede comprobar que la continuidad de Scott generaliza la continuidad usual en espacios euclídeos.

**Proposición 2.5.** Toda aplicación continua y monótona creciente en un espacio euclídeo es continua Scott.

Cabe destacar que la continuidad de Scott implica monotonía creciente, de ahí que por la Proposición 2.4 toda aplicación continua Scott tenga un punto fijo mínimo y un punto fijo máximo. El siguiente resultado da un paso más, y prueba que toda aplicación continua Scott alcanza su punto fijo mínimo en una cantidad numerable de iteraciones. Mencionar que  $\omega$  denota el primer ordinal infinito, cuyo cardinal coincide con el de los números naturales  $\aleph$ , conocido usualmente como *aleph* [76].

**Proposición 2.6** ([76]). Sea  $(L, \preceq)$  un retículo completo y  $T: L \rightarrow L$  una aplicación continua Scott. Entonces  $\text{lfp}(T) = T^\omega(\perp)$ .

Al igual que sucede con otras estructuras algebraicas, un homomorfismo de retículos se define como una aplicación que conserva los operadores intrínsecos de dicha estructura, que en este caso se tratan del supremo y del ínfimo.

**Definición 2.8.** Sea  $(L, \preceq)$  un retículo y  $f: L \rightarrow L$ . Se dice que  $f$  es un homomorfismo si  $f(\sup A) = \sup f(A)$  y  $f(\inf A) = \inf f(A)$  para todo  $A \subseteq L$ .

Podemos extender la noción de homomorfismo a una aplicación  $n$ -aria de forma natural como sigue.

**Definición 2.9.** Sea  $(L, \preceq)$  un retículo y  $f: L^n \rightarrow L$ . Se dice que  $f$  es un homomorfismo si cada componente de  $f$  es un homomorfismo.

## 2.2. Conectivos lógicos generalizados

Trabajar en un ambiente multivaluado, en el que el valor de verdad de un enunciado se corresponde con un cierto valor de un retículo, conlleva la necesidad de generalizar los conectivos de la lógica clásica: la conjunción, la disyunción, la implicación y la negación. En este apartado veremos algunos de los operadores más utilizados para representar el comportamiento de un conectivo lógico en un paradigma multivaluado.

Las normas triangulares suponen un operador habitual en lógica difusa para generalizar la conjunción clásica. Estos operadores aparecen por primera vez en la literatura en [95], donde se introducen como una métrica. Su inclusión en un entorno difuso se llevó a cabo en [107]. Como bibliografía básica sobre normas triangulares recomendamos [63, 70]. Recordemos que, en un ambiente difuso, el conjunto de valores de verdad usual es el intervalo unidad  $[0, 1]$ .

**Definición 2.10** ([63]). Una norma triangular o t-norma es una aplicación  $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que satisface las siguientes propiedades:

1. *Conmutatividad:*  $T(x, y) = T(y, x)$  para todo  $x, y \in [0, 1]$ .
2. *Asociatividad:*  $T(x, T(y, x)) = T(T(x, y), z)$  para todo  $x, y, z \in [0, 1]$ .
3. *Monotonía:*  $T(x, y) \leq T(x, z)$  para todo  $x, y, z \in [0, 1]$  con  $y \leq z$ .
4. *Elemento neutro 1:*  $T(x, 1) = x$  para todo  $x \in [0, 1]$ .

Por lo general, haremos uso de notación infija para referirnos a un operador binario que generaliza una conjunción clásica, y denotaremos a dicho operador como  $\&$  en lugar de  $T$ . Este criterio notacional también se seguirá en la generalización de la disyunción clásica.

**Ejemplo 2.1.** *Las  $t$ -normas producto, Gödel y Łukasiewicz son los ejemplos más recurrentes en la bibliografía de este tipo de operador. Dichos operadores se definen respectivamente como sigue:*

$$\begin{aligned} x \&_P y &= x \cdot y && (t\text{-norma producto}) \\ x \&_G y &= \min\{x, y\} && (t\text{-norma Gödel}) \\ x \&_L y &= \max\{0, x + y - 1\} && (t\text{-norma Łukasiewicz}) \end{aligned}$$

◇

En cuanto a operadores de disyunción comunes en lógica difusa, hemos de destacar las conormas triangulares, definidas a continuación, y que tan solo difieren de las normas triangulares en su elemento neutro.

**Definición 2.11** ([63]). *Una conorma triangular o  $t$ -conorma es una aplicación  $S: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que satisface las siguientes propiedades:*

1. *Conmutatividad:*  $S(x, y) = S(y, x)$  para todo  $x, y \in [0, 1]$ .
2. *Asociatividad:*  $S(x, S(y, x)) = S(S(x, y), z)$  para todo  $x, y, z \in [0, 1]$ .
3. *Monotonía:*  $S(x, y) \leq S(x, z)$  para todo  $x, y, z \in [0, 1]$  con  $y \leq z$ .
4. *Elemento neutro 0:*  $S(x, 0) = x$  para todo  $x \in [0, 1]$ .

**Ejemplo 2.2.** *Las  $t$ -conormas producto, Gödel y Łukasiewicz vienen dadas respectivamente por:*

$$\begin{aligned} x \vee_P y &= x + y - x \cdot y && (t\text{-conorma producto}) \\ x \vee_G y &= \max\{x, y\} && (t\text{-conorma Gödel}) \\ x \vee_L y &= \min\{1, x + y\} && (t\text{-conorma Łukasiewicz}) \end{aligned}$$

◇

T-normas y t-conormas pueden generalizarse fácilmente para un retículo arbitrario  $L$  como operadores binarios conmutativos, asociativos, monótonos y con elemento neutro en  $L$ . Cuando solo se requiere la monotonía, se suelen utilizar operadores más generales, como los operadores de agregación.

**Definición 2.12.** Sea  $(L, \preceq)$  un conjunto parcialmente ordenado acotado. Un operador de agregación es una aplicación  $@: L^n \rightarrow L$  tal que:

- $@(x_1, \dots, x_n) \preceq @(y_1, \dots, y_n)$  si  $(x_1, \dots, x_n) \preceq (y_1, \dots, y_n)$ .
- $@(\perp, \dots, \perp) = \perp$  y  $@(\top, \dots, \top) = \top$ .

**Ejemplo 2.3.** Entre los operadores de agregación más comunes se encuentran la media aritmética  $@_{\mathcal{M}}$ , la media geométrica  $@_{\mathcal{G}}$  y la media armónica  $@_{\mathcal{H}}$ , definidas como:

$$\begin{aligned} @_{\mathcal{M}}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ @_{\mathcal{G}}(x_1, \dots, x_n) &= \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \\ @_{\mathcal{H}}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \end{aligned}$$

◇

La generalización de la implicación lógica a un ambiente multivaluado es más delicada. En primera instancia, una *implicación difusa* puede definirse como un operador  $\leftarrow: L \times L \rightarrow L$  monótono creciente en el primer argumento y monótono decreciente en el segundo argumento. Ahora bien, esta definición no nos permite asegurar que se preserve la regla del *modus ponens*, el principal método de deducción en lógica. Básicamente, el *modus ponens* es una regla de inferencia que nos dice que si  $P$  es cierto y  $P$  implica  $Q$ , entonces  $Q$  es cierto. Si se desea trabajar con un retículo de valores

de verdad, es necesario entonces establecer una conexión entre la conjunción y la implicación. Con este fin se introduce la noción de par adjunto o par residuado en un marco difuso [63], enunciada por primera vez en un entorno algebraico abstracto en [47].

**Definición 2.13** ([63]). Sea  $(L, \preceq)$  un conjunto parcialmente ordenado y  $\&, \leftarrow$  dos operadores binarios en  $L$ . Se dice que  $(\&, \leftarrow)$  es un par adjunto o par residuado y que  $\leftarrow$  es la implicación residuada de  $\&$  si se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\&$  es monótono creciente en ambos argumentos.
2.  $\leftarrow$  es monótono creciente en el primer argumento, llamado consecuente, y monótono decreciente en el segundo argumento, llamado antecedente.
3. Para cada  $x, y, z \in L$  se cumple la siguiente propiedad, denominada propiedad de adjunción:

$$x \preceq z \leftarrow y \quad \text{si y solo si} \quad x \& y \preceq z$$

La siguiente proposición muestra algunas propiedades de los pares adjuntos.

**Proposición 2.7** ([29]). Sea  $(L, \preceq)$  un conjunto parcialmente ordenado y  $(\&, \leftarrow)$  un par adjunto. Las siguientes propiedades se cumplen:

1.  $(z \leftarrow y) \& y \preceq z$  para todo  $x, y, z \in L$ .
2.  $\perp \& x = \perp$  para todo  $x \in L$ .
3. Las implicación residuada de  $\&$  es única, y viene dada por

$$z \leftarrow y = \sup\{x \in L \mid x \& y \preceq z\}$$

**Ejemplo 2.4.** Las implicaciones residuadas correspondientes a las  $t$ -normas producto, Gödel y Lukasiewicz, denotadas  $\leftarrow_P$ ,  $\leftarrow_G$  y  $\leftarrow_L$ , respectivamente, se definen para todo  $z, y \in [0, 1]$  como:

$$\begin{aligned} z \leftarrow_P y &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq z \\ z/y & \text{en otro caso} \end{cases} \\ z \leftarrow_G y &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq z \\ z & \text{en otro caso} \end{cases} \\ z \leftarrow_L y &= \min\{1, 1 - y + z\} \end{aligned}$$

◇

Una cualidad destacable del par adjunto producto es que la propiedad de adjunción también se cumple tomando igualdades, siempre que  $z \leq y$ .

**Proposición 2.8.** Sean  $x, y, z \in [0, 1]$  con  $z \leq y$ , entonces

$$x = z \leftarrow_P y \quad \text{si y solo si} \quad x \&_P y = z$$

*Demostración.* Se deduce directamente de la definición de los operadores  $\&_P$  y  $\leftarrow_P$ . □

La propiedad anterior será fundamental en el estudio de ecuaciones bipolares de relaciones difusas basadas en la  $t$ -norma producto, desarrollado en el Capítulo 5.

La monotonía de  $\&$  y  $\leftarrow$  en la definición de par adjunto está justificada por la extensión natural del *modus ponens* al caso difuso [63]. Además, como se puede intuir, la propiedad de adjunción está ligada con la adjunción categórica. Específicamente, los operadores  $\&$  y  $\leftarrow$  están relacionados con funtores adjuntos en la categoría  $(L, \preceq)$ .

Cabe destacar que no se exigen condiciones adicionales como que  $\&$  sea conmutativo o asociativo. En efecto, si  $\&$  no es conmutativo, existen dos

posibilidades diferentes para definir su implicación residuada, en función del primer argumento de  $\&$  o del segundo. Esto propicia una noción más general que la de par adjunto, conocida como triple adjunto.

**Definición 2.14** ([29]). Sea  $(L, \preceq)$  un conjunto parcialmente ordenado y sean  $\&, \swarrow, \searrow: L \times L \rightarrow L$  tres aplicaciones. Se dice que  $(\&, \swarrow, \searrow)$  es un triple adjunto respecto a  $L$  si se satisface la siguiente propiedad, denominada propiedad de adjunción:

$$x \preceq z \swarrow y \quad \text{si y solo si} \quad x \& y \preceq z \quad \text{si y solo si} \quad y \preceq z \searrow x$$

A continuación se presentan algunas propiedades de los triples adjuntos sobre retículos completos.

**Proposición 2.9** ([29, 30]). Sea  $(L, \preceq)$  un retículo completo y sea  $(\&, \swarrow, \searrow)$  un triple adjunto respecto a  $L$ . Las siguientes propiedades se cumplen:

1.  $(z \swarrow y) \& y \preceq z$  para cada  $x, y, z \in L$ .
2.  $x \& (z \searrow x) \preceq z$  para cada  $x, y, z \in L$ .
3.  $x \& \perp = \perp \& x = \perp$  para cada  $x \in L$ .
4. Las implicaciones residuadas de  $\&$  son únicas, y vienen dadas por  
 $z \swarrow y = \max\{x \in L \mid x \& y \preceq z\}$  y  $z \searrow x = \max\{y \in L \mid x \& y \preceq z\}$ .

Para finalizar este apartado, recordamos la definición de operador de negación en un conjunto parcialmente ordenado.

**Definición 2.15.** Sea  $(L, \preceq)$  un conjunto parcialmente ordenado acotado. Un operador de negación, o simplemente negación es un operador monótono decreciente  $\neg: L \rightarrow L$  tal que  $\neg(\perp) = \top$  y  $\neg(\top) = \perp$ .

Por lo general, si no hay lugar a confusión, escribiremos  $\neg x$  en lugar de  $\neg(x)$ .

**Ejemplo 2.5.** *Ejemplos habituales de operadores de negación en el intervalo unidad son la negación estándar y la negación de Yager, definidas respectivamente como los operadores  $\neg_S: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  y  $\neg_Y: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dados por  $\neg_S x = 1 - x$  y  $\neg_Y x = (1 - x^2)^{1/2}$ .*  $\diamond$

Las negaciones involutivas y las negaciones débiles, ampliamente estudiadas en la literatura [50, 51, 110], son un caso particular de operador de negación.

**Definición 2.16.** *Sea  $(L, \preceq)$  un conjunto parcialmente ordenado acotado y sea  $\neg: L \rightarrow L$  un operador de negación. Decimos que:*

- *$\neg$  es una negación débil si  $x \preceq \neg\neg x$  para cada  $x \in L$ .*
- *$\neg$  es una negación involutiva si  $x = \neg\neg x$  para cada  $x \in L$ .*

Por último, deseamos destacar la posibilidad de definir una negación a partir de un par adjunto. Las negaciones así definidas se denominan *negaciones adjuntas* [31].

**Proposición 2.10.** *Sea  $(L, \preceq)$  un conjunto parcialmente ordenado y  $(\&, \leftarrow)$  un par adjunto en  $L$ . El operador  $\neg: L \rightarrow L$  dado por  $\neg x = \perp \leftarrow x$  es un operador de negación.*

**Ejemplo 2.6.** *La negación adjunta de la t-norma producto coincide con la negación adjunta de la t-norma Gödel, y se definen como  $\neg_P, \neg_G: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dadas por  $\neg_P 0 = \neg_G 0 = 1$  y  $\neg_P x = \neg_G x = 0$  si  $x > 0$ . Por su parte, la negación adjunta de la t-norma Łukasiewicz es precisamente la negación estándar  $\neg_S$ .*  $\diamond$

## 2.3. Estructuras algebraicas basadas en residuos

En la bibliografía existen diversas estructuras algebraicas basadas en el concepto de operador residual asociado a un operador dado. En esta

sección recordamos algunas de ellas. Comenzaremos con el concepto de retículo residuado, que considera una t-norma en un retículo completo con una implicación residuada como operador básico.

**Definición 2.17** ([47]). *Se dice que una tupla  $(L, \preceq, \&, \leftarrow)$  es un retículo residuado si satisface los siguientes puntos:*

- $(L, \preceq)$  es un retículo completo.
- $(L, \&, \top)$  es un monoide conmutativo con elemento neutro  $\top$ , esto es,  $\&$  es un operador conmutativo y asociativo en  $L$  tal que  $x \& \top = x$  para cada  $x \in L$ .
- $(\&, \leftarrow)$  es un par adjunto.

Medina et al. [93] definen una estructura más general que contempla la aparición de varios pares adjuntos, y que debilita las propiedades que satisface la conjunción, permitiendo que no sea conmutativa ni asociativa.

**Definición 2.18** ([93]). *Se dice que una tupla  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n)$  es un retículo multiadjunto si satisface los siguientes puntos:*

- $(L, \preceq)$  es un retículo completo.
- $(\&_i, \leftarrow_i)$  es un par adjunto, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
- $\top$  es el elemento neutro de  $\&_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , es decir,  $\top \&_i x = x \&_i \top = x$ , para cada  $x \in L$ .

En el Capítulo 5 de esta tesis haremos uso de una noción similar a la de retículo multiadjunto, considerando triples adjuntos en lugar de pares adjuntos.

**Definición 2.19.** *Se dice que una tupla  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_n, \swarrow^n, \nwarrow_n)$  es un retículo multiadjunto birresiduado si satisface los siguientes puntos:*

- $(L, \preceq)$  es un retículo completo.
- $(\&_i, \swarrow^i, \nwarrow_i)$  es un triple adjunto, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
- $\top$  es el elemento neutro de  $\&_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , es decir,  $\top \&_i x = x \&_i \top = x$ , para cada  $x \in L$ .

Mencionar que en otros trabajos como [92] se emplea el término retículo multiadjunto birresiduado sin pedir que el retículo  $(L, \preceq)$  sea completo y que  $\top$  sea el elemento neutro de las conjunciones.

## 2.4. Teoría de grafos

Representar retículos y estudiar programas lógicos en términos de grafos resulta una alternativa elegante y útil que será adoptada en algunos apartados de la tesis. Por este motivo, introducimos ahora algunas nociones y resultados básicos de teoría de grafos [64].

**Definición 2.20.** *Un grafo es un par  $G = (V, A)$  donde  $V$  es un conjunto no vacío, cuyos elementos se llaman vértices y  $A \subseteq \{S \in \mathcal{P}(V) \mid |S| = 2\}$  es un conjunto de pares no ordenados de elementos de  $V$ , cuyos elementos se llaman aristas.*

En ciertas ocasiones conviene hablar de grafos que están “dentro” de otros. La noción de subgrafo formaliza esta idea.

**Definición 2.21.** *Sea  $G = (V, A)$  un grafo. Decimos que un grafo  $(V', A')$  es un subgrafo de  $G$  si  $V' \subseteq V$  y  $A' \subseteq A$ .*

Algunas de las cuestiones abordadas en esta tesis requieren dotar a las aristas de un grafo de una orientación. En este sentido, haremos uso de grafos dirigidos.

**Definición 2.22.** Un grafo dirigido es un par  $G = (V, A)$  donde  $V$  es un conjunto no vacío, cuyos elementos se llaman vértices y  $A \subseteq \{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v\}$  es un conjunto de pares ordenados de elementos de  $V$ , cuyos elementos se llaman aristas dirigidas o simplemente aristas.

Un problema fundamental en teoría de grafos consiste en saber si es posible llegar de un vértice a otro mediante una sucesión finita de aristas consecutivas. Fijemos en primer lugar a qué nos referimos con “llegar de un grafo a otro” mediante la noción de camino.

**Definición 2.23.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo (dirigido). Un camino (dirigido)  $C$  es una sucesión finita de vértices y aristas  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n$  con  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $e_1, \dots, e_{n-1} \in A$  tal que  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  ( $e_i = (v_i, v_{i+1})$ ) para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Diremos que dichos vértices y aristas pertenecen al camino, y lo denotamos como  $v_i \in C$  y  $e_i \in C$ , respectivamente. La longitud de  $C$  es el número de aristas que pertenecen a  $C$ . Un ciclo (dirigido) es un camino (dirigido) con al menos una arista tal que el primer y el último vértice coinciden.

De aquí en adelante, dado un grafo dirigido, utilizaremos los términos camino y ciclo en lugar de camino dirigido y ciclo dirigido si no hay lugar a confusión.

Observemos que en un grafo dirigido es posible que exista un camino de un vértice  $u$  a un vértice  $v$ , pero que sin embargo no exista un camino de  $v$  a  $u$ . Esto requiere definir más cuidadosamente qué partes del grafo están realmente conectadas, en el sentido de que se pueda ir de un vértice a cualquier otro de dicha parte. Esta discusión da lugar a las siguientes definiciones.

**Definición 2.24.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo dirigido. Se dice que  $G$  es fuertemente conexo si para cada  $u, v \in V$  existe un camino dirigido de  $u$  a  $v$  y un camino dirigido de  $v$  a  $u$ . Las componentes fuertemente conexas de  $G$  son sus subgrafos maximales fuertemente conexos.

Si tomamos un vértice representante de cada componente fuertemente conexa de un grafo dirigido  $G$  y las aristas entre vértices de diferentes componentes, el grafo resultante se conoce como la *condensación* de  $G$ . Formalmente:

**Definición 2.25.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo dirigido y sean  $G_1, \dots, G_c$  las componentes fuertemente conexas de  $G$ . Una condensación de  $G$  es un subgrafo  $G^* = (V^*, A^*)$  de  $G$  con  $V^* = \{\{v_1, \dots, v_c\} \mid v_i \in G_i, i \in \{1, \dots, c\}\}$  y

$$A^* = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in G_i, v_j \in G_j, i, j \in \{1, \dots, c\} \text{ y existe } (u_i, u_j) \in A \text{ con } u_i \in G_i, u_j \in G_j\}$$

Claramente, la elección del conjunto de vértices  $V^*$  no es única, pero sí lo es el conjunto de aristas para cada conjunto de vértices fijado, luego todas las condensaciones son isomorfas. Como resultado, cuando hablemos de “la condensación de  $G$ ”, nos referiremos a cualquiera de ellas.

**Proposición 2.11.** La condensación de un grafo dirigido es un grafo acíclico dirigido, es decir, sin ciclos dirigidos.

Un resultado interesante de los grafos acíclicos dirigidos, aplicable por tanto a la condensación de un grafo dirigido, es la posibilidad de definir un orden total, conocido como ordenación topológica. Destacar que no existe una única ordenación topológica.

**Proposición 2.12** ([67]). Dado un grafo acíclico dirigido  $G = (V, A)$ , es posible definir un orden total  $\leq_G$ , denominado ordenación topológica de  $G$ , de forma que si  $(u, v) \in A$  entonces  $u <_G v$ .

Naturalmente, podemos interpretar el diagrama de Hasse de un retículo finito  $(L, \preceq)$  como un grafo  $G = (V, E)$ , donde  $V = L$  y cada arista en  $E$  se corresponde con un segmento en el diagrama de Hasse. De aquí, la distancia entre dos elementos de un retículo finito  $(L, \preceq)$  puede definirse como sigue.

**Definición 2.26** ([9]). Sea  $G = (V, E)$  el grafo asociado al diagrama de Hasse de un retículo finito  $(L, \preceq)$ . Consideremos el conjunto de caminos en  $G$ , denotado  $P_G$ , y sea  $l_G: P_G \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación que asigna a cada camino en  $G$  su longitud. La aplicación  $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$d(x, y) = \min\{l_G(p) \mid p \text{ es un camino entre los vértices } x \text{ e } y\}$$

se denomina distancia geodésica del grafo  $G$ .

## 2.5. Algunas nociones topológicas

En este apartado introducimos algunas definiciones y resultados topológicos que nos serán útiles en el desarrollo de este trabajo. Asumimos que el lector está familiarizado con las nociones de espacio métrico y espacio métrico completo, espacio euclídeo, espacio de Banach y con las nociones de conjunto convexo y compacto.

Comenzamos con dos propiedades que muestran que el producto cartesiano de conjuntos convexos (compactos) en un espacio euclídeo es un conjunto convexo (compacto).

**Proposición 2.13.** Sea  $K$  un conjunto convexo en un espacio euclídeo  $E$ , entonces  $K^n$  es un conjunto convexo en  $E^n$ .

**Proposición 2.14.** Sea  $K$  un conjunto compacto en un espacio euclídeo  $E$ , entonces  $K^n$  es un conjunto compacto en  $E^n$ .

Los siguientes son dos resultados clásicos en análisis de espacios normados y serán útiles en los resultados de existencia y unicidad de modelos estables del Capítulo 3.

**Teorema 2.2** (Teorema de Bolzano-Weierstrass para funciones [114]). Sea  $f$  una función real continua en un espacio métrico  $X$ . Si  $X$  es un conjunto compacto no vacío, entonces  $f$  alcanza en  $X$  su máximo y su mínimo absoluto, es decir, existen  $a, b \in X$  tales que  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$  para todo  $x \in X$ .

**Teorema 2.3** (Teorema del valor medio [114]). *Sean  $E, F$  dos espacios de Banach,  $X \subseteq E$  y sea  $f: X \rightarrow F$  una aplicación diferenciable. Si dados  $a, b \in X$ , el segmento  $[a, b] = \{(1 - t) \cdot a + t \cdot b \mid 0 \leq t \leq 1\}$  está contenido en  $X$  entonces:*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup\{\|Df(z)\| \mid z \in [a, b]\}$$

Por último, recordamos algunos resultados sobre puntos fijos. El primero de ellos es el Teorema del punto fijo de Schauder, que puede verse como una generalización del Teorema del punto fijo de Brouwer.

**Teorema 2.4** (Teorema del punto fijo de Schauder [106]). *Sea  $K$  un conjunto no vacío, convexo y compacto de un espacio euclídeo. Entonces, toda aplicación continua  $f: K \rightarrow K$  tiene al menos un punto fijo.*

Por su parte, el Teorema del punto fijo de Banach proporciona una condición suficiente para garantizar la unicidad de puntos fijos. Dicho resultado viene dado en términos de la noción de aplicación contractiva, enunciada como sigue.

**Definición 2.27.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $A \subseteq X$  y  $f: A \rightarrow X$  una aplicación. Decimos que  $f$  es contractiva en  $A$  si existe  $\lambda < 1$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$  para todo  $x, y \in A$ . El mínimo valor  $\lambda < 1$  que satisface la propiedad anterior se denomina constante de Lipschitz de  $f$ .*

**Teorema 2.5** (Teorema del punto fijo de Banach [4]). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $f: A \rightarrow X$  una aplicación contractiva en  $A \subseteq X$ . Entonces  $f$  tiene un único punto fijo en  $A$ .*

## 2.6. Aproximación universal a los lenguajes proposicionales

En esta última sección de preliminares, consideramos necesario repasar las principales componentes de un lenguaje proposicional. Esencialmente,

un lenguaje proposicional consta de dos aspectos bien diferenciados: la sintaxis, que determina las cadenas de símbolos permitidas en el lenguaje, y la semántica, que dotará a dichas cadenas de un significado. A continuación, presentamos algunos conceptos y resultados que comparten los lenguajes proposicionales considerados en esta tesis.

### 2.6.1. Nociones de álgebra universal

Comenzaremos introduciendo el concepto de conjunto de operadores en términos de álgebra universal, bajo el nombre de conjunto graduado.

**Definición 2.28.** *Un conjunto graduado es un conjunto  $\Omega$  con una función que asigna a cada elemento  $\omega \in \Omega$  un valor<sup>1</sup>  $n \in \mathbb{Z}^*$  llamado aridad de  $\omega$ .*

De la definición se deduce que cada elemento de  $\Omega$  tiene solo una aridad. Denotaremos por  $\Omega_n$  al conjunto de elementos de aridad  $n$  de  $\Omega$ . A fin de cuentas, un elemento  $\omega$  con aridad 1 representa un operador unario, uno de aridad 2 representa un operador binario, y así sucesivamente, mientras que un elemento de aridad 0 representa una constante.

Es importante señalar que  $\omega$  no es un operador per se, sino un símbolo que representa a un operador. Así, por ejemplo, tenemos que un mismo símbolo  $\&$  puede representar el operador producto o puede representar el mínimo. Qué operador o qué constante se asigna al símbolo  $\&$  dependerá de la  $\Omega$ -álgebra considerada. Esta definición generaliza el concepto de estructura algebraica.

**Definición 2.29.** *Sea  $\Omega$  un conjunto graduado. Una  $\Omega$ -álgebra  $\mathfrak{A}$  está determinada por un conjunto no vacío  $A$ , llamado soporte, y una aplicación  $I$  que asigna a cada elemento de  $\Omega$ :*

1. *Si  $\omega \in \Omega_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ , la imagen de  $\omega$  por  $I$  es una aplicación  $I(\omega): A^n \rightarrow A$ , que denotaremos por  $\omega_{\mathfrak{A}}$ .*

---

<sup>1</sup>Observar que  $\mathbb{Z}^*$  es el conjunto de los números enteros no negativos.

2. Si  $c \in \Omega_0$ , entonces  $I(c)$  es un elemento de  $A$ , denotado  $c_{\mathfrak{U}}$ .

Sea  $\mathfrak{H} = \{\omega_{\mathfrak{U}} \mid \omega \in \Omega\}$ . La  $\Omega$ -álgebra  $\mathfrak{U}$  se denota igualmente por  $\langle A, \mathfrak{H} \rangle$ .

La noción de subálgebra de una estructura algebraica se puede generalizar igualmente como sigue.

**Definición 2.30.** Sea  $\mathfrak{U} = \langle A, \mathfrak{H} \rangle$  una  $\Omega$ -álgebra. Decimos que una  $\Omega$ -álgebra  $\mathfrak{B} = \langle B, \mathfrak{G} \rangle$  es una  $\Omega$ -subálgebra de  $\mathfrak{U}$  si  $B \subseteq A$  y

1.  $c_{\mathfrak{B}} = c_{\mathfrak{U}}$  para todo  $c \in \Omega_0$ .
2. Para todo  $\omega \in \Omega_n$  con  $n \in \mathbb{N}$  se satisface que  $\omega_{\mathfrak{B}}: B^n \rightarrow B$  es la restricción de  $\omega_{\mathfrak{U}}: A^n \rightarrow A$  al dominio  $B^n \subseteq A^n$ .

Un tipo de  $\Omega$ -subálgebra especialmente interesante es aquella que se genera a partir de un cierto conjunto, denominada clausura inductiva de dicho conjunto.

**Definición 2.31.** Dada una  $\Omega$ -álgebra  $\mathfrak{U} = \langle A, \mathfrak{H} \rangle$  y un conjunto  $X \subseteq A$ , la clausura inductiva de  $X$  en  $\mathfrak{U}$  es la menor  $\Omega$ -subálgebra de  $\mathfrak{U}$  que contiene a  $X$ . También se dice que es la subálgebra de  $\mathfrak{U}$  generada por  $X$ .

Al hilo de las estructuras basadas en residuos, prestaremos especial atención a las  $\Omega$ -álgebras definidas a partir de un retículo multiadjunto.

**Definición 2.32.** Sea  $\Omega$  un conjunto graduado que contiene a los símbolos  $\leftarrow_i$  y  $\&_i$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$  y posiblemente algunos operadores extra, y sea  $\mathfrak{L} = \langle L, \mathfrak{H} \rangle$  una  $\Omega$ -álgebra. Decimos que  $\mathfrak{L}$  es una  $\Omega$ -álgebra multiadjunta con respecto a los pares  $(\&_i, \leftarrow_i)$  si  $\mathcal{L} = (L, \preceq, I(\&_1), I(\leftarrow_1), \dots, I(\&_n), I(\leftarrow_n))$  es un retículo multiadjunto.

### 2.6.2. Sintaxis de los lenguajes proposicionales

Una vez introducidas las nociones previas, estamos en disposición de presentar las componentes sintácticas que comparten los lenguajes proposicionales con los que trabajaremos en esta tesis. Comencemos presentando la definición de alfabeto de un lenguaje, que determinará el conjunto de símbolos que se pueden utilizar para formar expresiones.

**Definición 2.33.** Sea  $\Omega$  un conjunto graduado,  $\Pi$  un conjunto infinito numerable y  $L$  un conjunto de valores de verdad. El alfabeto  $A_{\Omega, \Pi \uplus L}$  asociado a  $\Omega$  y  $\Pi \uplus L$  se define como la unión disjunta  $\Omega \uplus (\Pi \uplus L) \uplus S$ , donde  $S$  es el conjunto de símbolos auxiliares “(”, “)” y “,”.

Los conectivos del lenguaje, o lo que es lo mismo, los símbolos de operación de nuestro contexto, serán los elementos del conjunto graduado, mientras que los símbolos proposicionales serán los elementos de  $\Pi$ . Para evitar ambigüedades, se exige que los símbolos de los conectivos sean diferentes de los símbolos proposicionales y de los símbolos auxiliares mediante la unión disjunta en la definición de alfabeto. De aquí en adelante usaremos  $A_\Omega$  para designar un alfabeto, olvidando la referencia a  $\Pi \uplus L$  si no se genera confusión.

A partir del conjunto de operadores de  $\Omega$  y los símbolos de  $\Pi \uplus L$ , podemos definir el álgebra de todas las expresiones.

**Definición 2.34.** Sea  $\Omega$  un conjunto graduado y  $A_\Omega$  un alfabeto. El  $\Omega$ -álgebra de expresiones  $\mathfrak{E} = \langle A_\Omega^*, \mathfrak{H} \rangle$  se define como sigue:

1. El soporte  $A_\Omega^*$  es el conjunto de cadenas sobre  $A_\Omega$ .
2. Si  $c \in \Omega_0$ , entonces  $c_{\mathfrak{E}} = c$ , con  $c \in A_\Omega^*$ .
3. Dado  $\omega \in \Omega_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ , la aplicación  $\omega_{\mathfrak{E}}$  se define como:
  - Si  $\omega \in \Omega_1$ , entonces  $\omega_{\mathfrak{E}}(a_1) = \omega a_1$  para cada  $a_1 \in A_\Omega^*$ .

- Si  $\omega \in \Omega_2$ , entonces  $\omega_{\mathfrak{E}}(a_1, a_2) = (a_1 \omega a_2)$  para cada  $a_1, a_2 \in A_{\Omega}^*$ .
- Si  $\omega \in \Omega_n, n > 2$ , entonces  $\omega_{\mathfrak{E}}(a_1, \dots, a_n) = \omega(a_1, \dots, a_n)$  para cada  $a_1, \dots, a_n \in A_{\Omega}^*$ .

La noción anterior tan solo establece qué tipo de expresiones podemos formar con los símbolos del lenguaje. Se trata de una formalización del lenguaje universal sobre un alfabeto. No obstante, notemos que una expresión no es más que una cadena de elementos del alfabeto, por lo que no todas ellas son necesariamente fórmulas bien formadas. Concretamente, las fórmulas bien formadas se definen como sigue.

**Definición 2.35.** Sea  $\Omega$  un conjunto graduado,  $\Pi$  un conjunto numerable de símbolos proposicionales,  $L$  un conjunto de valores de verdad y  $\mathfrak{E}$  el álgebra de expresiones correspondiente al alfabeto  $A_{\Omega}$ . El lenguaje proposicional generado por  $\Omega$  sobre  $\Pi \uplus L$  es la clausura inductiva de  $\Pi \uplus L$  en  $\mathfrak{E}$ . Esta subálgebra  $\mathfrak{F}$  la llamamos  $\Omega$ -álgebra de fórmulas bien formadas, o simplemente  $\Omega$ -álgebra de fórmulas.

El  $\Omega$ -álgebra de fórmulas  $\mathfrak{F}$  puede definirse de forma constructiva como el subconjunto de cadenas sobre  $A_{\Omega}$  tal que:

1. Cada elemento de  $\Pi \uplus L$  es una fórmula.
2. Cada constante  $c \in \Omega_0$  es una fórmula;
3. Si  $F$  es una fórmula y  $\omega \in \Omega_1$  entonces  $\omega F$  es una fórmula.
4. Si  $F_1$  y  $F_2$  son fórmulas y  $\omega \in \Omega_2$  entonces  $(F_1 \omega F_2)$  es una fórmula.
5. Si  $F_1, \dots, F_n$  ( $n > 2$ ) son fórmulas y  $\omega \in \Omega_n$  entonces  $\omega(F_1, \dots, F_n)$  es una fórmula.
6. Solo son fórmulas aquellas definidas por las reglas anteriores.

### 2.6.3. Semántica de los lenguajes proposicionales

Como se comentó al principio de esta sección, la semántica de un lenguaje proposicional tiene por fin otorgar un valor de verdad a las fórmulas. Definamos pues qué se entiende por interpretación. En lo que sigue, asumimos que  $\Omega$  es un conjunto graduado,  $\Pi$  un conjunto numerable de símbolos proposicionales,  $\mathfrak{L} = \langle L, \mathfrak{H} \rangle$  una  $\Omega$ -álgebra y  $\mathfrak{F}$  el álgebra de fórmulas correspondiente al alfabeto  $A_\Omega$ .

**Definición 2.36.** *Una interpretación es una aplicación  $I: \Pi \rightarrow L$  que asigna un elemento de  $L$  a cada símbolo proposicional.*

El conjunto de todas las interpretaciones con respecto al  $\Omega$ -álgebra  $\mathfrak{L}$  se denota como  $\mathcal{I}_{\Pi, \mathfrak{L}}$ . Observar que si  $(L, \preceq)$  es un conjunto parcialmente ordenado, podemos extender el orden  $\preceq$  al conjunto de interpretaciones de forma natural como sigue: dados  $I, J \in \mathcal{I}_{\Pi, \mathfrak{L}}$ , decimos que  $I \sqsubseteq J$  si y solo si  $I(p) \preceq J(p)$  para todo  $p \in \Pi$ .

El orden  $\sqsubseteq$  hereda ciertas propiedades del conjunto parcialmente ordenado, por ejemplo, la siguiente proposición muestra que si  $(L, \preceq)$  es un retículo completo, entonces el conjunto de interpretaciones  $\mathcal{I}_{\Pi, \mathfrak{L}}$  con el orden  $\sqsubseteq$  también forma un retículo completo.

**Proposición 2.15.** *Si  $(L, \preceq)$  es un retículo completo, entonces  $(\mathcal{I}_{\Pi, \mathfrak{L}}, \sqsubseteq)$  es un retículo completo, donde la interpretación mínima  $I_\perp$  asigna a cada símbolo proposicional el menor elemento  $\perp$  de  $L$ , y la interpretación máxima  $I_\top$  asigna a cada símbolo proposicional el mayor elemento  $\top$  de  $L$ .*

Para evitar confusión, cuando trabajemos en un paradigma de programación lógica, haremos uso de una notación especial para diferenciar a un símbolo de operación en  $\Omega$  de su interpretación bajo  $\mathfrak{L}$ . Específicamente, la interpretación de un símbolo  $\omega$  bajo el álgebra  $\mathfrak{L}$  se denotará como  $\dot{\omega}$ , esto es,  $\dot{\omega}$  es el operador asociado al símbolo  $\omega$ . De forma similar, la evaluación

de una fórmula  $\mathcal{A}$  bajo una interpretación  $I$  se denotará como  $\hat{I}(\mathcal{A})$ , y procede inductivamente evaluando uno a uno los símbolos proposicionales que aparecen en  $\mathcal{A}$ . En particular, la evaluación de una constante, esto es, de un elemento  $c \in L$  bajo la interpretación  $I$  se define como  $\hat{I}(c) = c$ .

A modo de ejemplo, sean  $I \in \mathcal{I}_{\Pi, \mathcal{L}}$  una interpretación,  $\& \in \Omega$  y consideremos dos fórmulas  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{F}$ , entonces:

$$\hat{I}(\mathcal{A} \& \mathcal{B}) = \hat{I}(\mathcal{A}) \& \hat{I}(\mathcal{B})$$



## Capítulo 3

# Programación lógica multiadjunta con negaciones

En este capítulo introducimos un marco de programación lógica multiadjunta no monótona, incluyendo negaciones en su sintaxis y presentando una semántica de modelos estables adaptada al entorno propuesto. Con objeto de proporcionar solidez a dicha semántica, se estudiarán propiedades que garanticen la existencia de modelos estables, así como condiciones suficientes para asegurar su unicidad. Por último, se analizará la noción de coherencia que mejor se adapta al paradigma multiadjunto con negaciones y se proporcionarán diferentes medidas de incoherencia.

### 3.1. Programación lógica multiadjunta

La teoría de programación lógica multiadjunta, introducida por Medina, Ojeda-Aciego y Vojtáš [93], surge como una generalización de diferentes entornos no clásicos de programación lógica, tales como la programación lógica anotada [68], la programación lógica posibilista [48], la programación lógica monótona y residuada [37, 38] y la programación lógica

difusa [120]. De esta forma, la programación lógica multiadjunta se limita a eliminar los detalles particulares de los marcos lógicos mencionados, preservando los requerimientos matemáticos mínimos que garantizan la satisfacibilidad de una serie de propiedades.

Más concretamente, la filosofía del paradigma multiadjunto se caracteriza por el uso de reglas ponderadas y por la presencia de diferentes implicaciones residuadas en las reglas de un mismo programa. El uso de varias implicaciones como reglas de inferencia, representando el uso de varios modus ponens generalizados, da lugar a la consideración de diferentes pares adjuntos en el retículo subyacente. En otras palabras, se caracteriza por el empleo de un retículo multiadjunto.

### 3.1.1. Sintaxis de los programas lógicos multiadjuntos

Los programas lógicos multiadjuntos se definen a partir de la estructura inducida por una álgebra multiadjunta y un conjunto de símbolos proposicionales. Fijaremos, de aquí en adelante, un conjunto numerable de símbolos proposicionales  $\Pi$ , un conjunto graduado  $\Omega$  y una  $\Omega$ -álgebra multiadjunta  $\mathfrak{L} = \langle L, \mathfrak{H} \rangle$  con respecto a los pares  $(\&_i, \leftarrow_i)$ , con  $i \in \{1, \dots, n\}$ , cuyos operadores extra son conjuntores, disyuntores y operadores de agregación. Además, denotaremos por  $\mathfrak{F}$  el  $\Omega$ -álgebra de fórmulas generada por  $\Pi$  en  $\mathfrak{L}$ .

**Definición 3.1.** *Un programa lógico multiadjunto  $\mathbb{P}$  (MALP, del inglés, multiadjoint logic program) es un conjunto de pares de la forma  $\langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle$  tales que:*

1.  $p \leftarrow_i \mathcal{B}$  es una fórmula de  $\mathfrak{F}$ .
2.  $p$  es un símbolo proposicional de  $\Pi$ .
3.  $\mathcal{B}$  es una fórmula de  $\mathfrak{F}$ , construida a partir de símbolos proposicionales, elementos de  $L$  y del uso de conjuntores, disyuntores y operadores de agregación de  $\mathfrak{L}$ .

4.  $\vartheta$  es un elemento de  $L$ .

Usualmente, a los pares  $\langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle$  se les llama *reglas ponderadas*, o simplemente *reglas* si no da lugar a confusión, y diremos que  $p$  es la *cabeza* de la regla,  $\mathcal{B}$  es el *cuerpo* de la regla y  $\vartheta$  es el *factor de confianza*, *peso* o *valor de verdad* de la regla. Como veremos más adelante, las reglas con cuerpo  $\top$  imponen una cota inferior de verdad (el peso de la regla) al símbolo proposicional en la cabeza, por lo que se conocen como *hechos* del programa.

De aquí en adelante, usaremos la notación  $\Pi_{\mathbb{P}}$  para referirnos al conjunto de símbolos proposicionales que aparecen en un MALP  $\mathbb{P}$ . Así mismo, el conjunto de interpretaciones asociadas a  $\mathbb{P}$ , esto es, el conjunto de interpretaciones  $\mathcal{I}_{\Pi_{\mathbb{P}}, \mathcal{L}}$  definido a partir del conjunto de símbolos proposicionales  $\Pi_{\mathbb{P}}$  y de la  $\Omega$ -álgebra  $\mathcal{L}$ , será denotado como  $\mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ . Estos criterios notacionales se mantendrán en otros ambientes de programación lógica estudiados en la tesis.

#### 3.1.2. Semántica de los programas lógicos multiadjuntos

Usualmente, la interpretación semántica de los programas lógicos multiadjuntos se define en términos del modelo mínimo del programa. Esta semántica se conoce habitualmente como *semántica del modelo mínimo* o *semántica del punto fijo*.

Comenzaremos este apartado con los conceptos de satisfacibilidad de una regla y de modelo de un MALP. A saber, una interpretación satisface una regla ponderada de un MALP si el valor de verdad otorgado a la regla por la interpretación es mayor o igual que su factor de confianza. Formalmente:

**Definición 3.2.** Dado un MALP  $\mathbb{P}$  y una interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , decimos que:

- $I$  satisface una regla ponderada  $\langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle$  si  $\vartheta \preceq \hat{I}(p \leftarrow_i \mathcal{B})$ .

- *$I$  es un modelo de  $\mathbb{P}$  si  $I$  satisface todas las reglas ponderadas de  $\mathbb{P}$ .*

Nótese que, dado un hecho  $\langle p \leftarrow_i \top; \vartheta \rangle$  de  $\mathbb{P}$ , por la propiedad de adjunción obtenemos que

$$\vartheta \preceq \hat{I}(p \leftarrow_i \top) = I(p) \dot{\leftarrow}_i I(\top)$$

es equivalente a

$$\vartheta = \vartheta \dot{\&}_i \top \preceq I(p)$$

Con lo cual,  $I$  satisface el hecho  $\langle p \leftarrow_i \top; \vartheta \rangle$  si y solo si  $\vartheta \preceq I(p)$ . En otras palabras, si y solo si el valor asignado a la cabeza por la interpretación es superior al valor de verdad del hecho.

Como es habitual en los entornos de programación lógica sin negaciones, el operador de consecuencia inmediata juega un papel fundamental en la semántica de los MALPs. Van Emden y Kowalski introdujeron por primera vez este operador en un entorno clásico en [115]. Esencialmente, el operador de consecuencia inmediata determina qué se puede deducir directamente de un programa lógico a partir de una interpretación dada. Formalmente, en el marco multiadjunto, el operador de consecuencia inmediata se define como sigue:

**Definición 3.3.** Sea  $\mathbb{P}$  un MALP. El operador  $T_{\mathbb{P}}: \mathcal{I}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  dado por

$$T_{\mathbb{P}}(I)(p) = \sup\{\vartheta \dot{\&}_i \hat{I}(\mathcal{B}) \mid \langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\}$$

para cada  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ ,  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ , se denomina operador de consecuencia inmediata.

Naturalmente, aplicando el operador  $T_{\mathbb{P}}$  sucesivamente se obtienen diferentes consecuencias asociadas a los símbolos proposicionales. Cabe preguntarse entonces si dichas consecuencias siguen un cierto patrón, y qué relación existe, en caso de haberla, entre dicho patrón y los modelos del programa lógico. El siguiente resultado muestra que es posible caracterizar los modelos de un MALP como los puntos post-fijos del operador de consecuencia inmediata.

**Teorema 3.1** ([93]). *Sea  $\mathbb{P}$  un MALP e  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ . Entonces,  $I$  es un modelo de  $\mathbb{P}$  si y solo si  $T_{\mathbb{P}}(I) \subseteq I$ .*

Aún más, el operador de consecuencia inmediata de un MALP es monótono creciente.

**Teorema 3.2** ([93]). *Dado un MALP  $\mathbb{P}$ , el operador  $T_{\mathbb{P}}$  es monótono creciente.*

Puesto que la Proposición 2.15 nos dice que  $\langle \mathcal{I}_{\mathbb{P}}, \subseteq \rangle$  forma un retículo completo, la monotonía de  $T_{\mathbb{P}}$  junto a la Proposición 2.4 (la versión debilitada del teorema del punto fijo de Knaster-Tarski) nos permite asegurar que el operador  $T_{\mathbb{P}}$  tiene un punto fijo mínimo, que denotaremos como  $M_{\mathbb{P}}$ . Claramente, por el Teorema 3.1,  $M_{\mathbb{P}}$  es un modelo de  $\mathbb{P}$ . Además, la Proposición 2.4 nos indica que el punto fijo mínimo de  $T_{\mathbb{P}}$  viene dado por:

$$M_{\mathbb{P}} = \inf\{I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}} \mid T_{\mathbb{P}}(I) \subseteq I\}$$

De acuerdo con la caracterización dada en el Teorema 3.1, se concluye entonces que  $M_{\mathbb{P}}$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}$ .

**Teorema 3.3** ([93]). *Sea  $\mathbb{P}$  un MALP. Entonces, existe el modelo mínimo de  $\mathbb{P}$ , que viene dado por*

$$M_{\mathbb{P}} = \inf\{I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}} \mid T_{\mathbb{P}}(I) \subseteq I\}$$

*y coincide con el punto fijo mínimo de  $T_{\mathbb{P}}$ .*

La semántica de un programa lógico multiadjunto viene entonces definida en términos de su modelo mínimo, es decir, el modelo mínimo es el modelo canónico de un MALP. La idea subyacente es que aquello que sea cierto en el modelo mínimo (o tenga un cierto valor de verdad), lo será en todos los demás modelos (o tendrá un valor de verdad mayor o igual), y por tanto ha de ser considerado consecuencia lógica del programa (con el valor otorgado por el modelo mínimo), es decir, que se puede deducir del programa.

Una consecuencia interesante de la monotonía del operador de consecuencia inmediata es la posibilidad de obtener el modelo mínimo de  $\mathbb{P}$  iterando el operador  $T_{\mathbb{P}}$  a partir de la interpretación mínima  $I_{\perp}$ . En particular, si  $T_{\mathbb{P}}$  es continuo Scott, por la Proposición 2.6, el modelo mínimo de  $\mathbb{P}$  puede alcanzarse en una cantidad numerable de iteraciones de  $T_{\mathbb{P}}$ .

**Teorema 3.4** ([93]). *Sea  $\mathbb{P}$  un MALP y  $M_{\mathbb{P}}$  su modelo mínimo. Si  $T_{\mathbb{P}}$  es continuo Scott, entonces  $M_{\mathbb{P}} = \text{lfp}(T_{\mathbb{P}}) = T_{\mathbb{P}}^{\omega}(I_{\perp})$ .*

En lo que sigue, ilustramos la sintaxis de los programas lógicos multiadjuntos así como el mecanismo de cálculo del modelo mínimo.

**Ejemplo 3.1.** *Consideremos el álgebra multiadjunta*

$$([0, 1], \leq, \&_G, \leftarrow_G, \&_P, \leftarrow_P, \&_L, \leftarrow_L, \vee_G, @_{\mathcal{M}})$$

y sea  $\Pi = \{p, q, s, t, u\}$  un conjunto de símbolos proposicionales. El conjunto formado por las siguientes reglas forma un MALP, que será denotado como  $\mathbb{P}$ :

$$\begin{array}{ll} r_1 : \langle p \leftarrow_L q ; 0.7 \rangle & r_4 : \langle u \leftarrow_P s \vee_G 0.2 ; 1 \rangle \\ r_2 : \langle p \leftarrow_G s \&_G t ; 0.9 \rangle & r_5 : \langle s \leftarrow_P 1 ; 0.8 \rangle \\ r_3 : \langle q \leftarrow_G @_{\mathcal{M}}(s, t \&_P u) ; 0.6 \rangle & r_6 : \langle t \leftarrow_P 1 ; 0.5 \rangle \end{array}$$

Observemos que las reglas  $r_5$  y  $r_6$  son hechos. Además, si prestamos atención a los operadores en el cuerpo de las otras reglas: el cuerpo de  $r_2$  se define a partir de una conjunción, mientras que el de  $r_4$  se define en términos de una disyunción y el de  $r_3$  viene dado por el uso de un operador de agregación, en este caso la media aritmética, y una conjunción.

Aplicando el Teorema 3.3, el modelo mínimo de  $\mathbb{P}$  existe. Aún más, dicho modelo mínimo viene dado por el punto fijo mínimo de  $T_{\mathbb{P}}$ . Dado que todos los operadores en el álgebra multiadjunta asociada a  $\mathbb{P}$  son continuos, podemos asegurar que el operador  $T_{\mathbb{P}}$  también es continuo. Así mismo, por el Teorema 3.2,  $T_{\mathbb{P}}$  es monótono creciente, luego por la Proposición 2.5 es continuo Scott. De donde,

### 3.1. PROGRAMACIÓN LÓGICA MULTIADJUNTA

---

por el Teorema 3.4, el punto fijo mínimo de  $T_{\mathbb{P}}$  puede alcanzarse en una cantidad numerable de iteraciones a partir de la interpretación mínima. La siguiente tabla muestra las primeras cuatro iteraciones.

|                               | $p$ | $q$  | $s$ | $t$ | $u$ |
|-------------------------------|-----|------|-----|-----|-----|
| $I_{\perp}$                   | 0   | 0    | 0   | 0   | 0   |
| $T_{\mathbb{P}}(I_{\perp})$   | 0   | 0    | 0.8 | 0.5 | 0.2 |
| $T_{\mathbb{P}}^2(I_{\perp})$ | 0.5 | 0.45 | 0.8 | 0.5 | 0.8 |
| $T_{\mathbb{P}}^3(I_{\perp})$ | 0.5 | 0.6  | 0.8 | 0.5 | 0.8 |
| $T_{\mathbb{P}}^4(I_{\perp})$ | 0.5 | 0.6  | 0.8 | 0.5 | 0.8 |

Tras cuatro iteraciones de  $T_{\mathbb{P}}$  obtenemos un punto fijo. Con lo cual, el modelo mínimo del MALP  $\mathbb{P}$  es la interpretación definida como

$$M = T_{\mathbb{P}}^3(I_{\perp}) \equiv \{(p, 0.5), (q, 0.6), (s, 0.8), (t, 0.5), (u, 0.8)\}$$

Para ilustrar los cálculos necesarios para obtener la tabla anterior, a continuación mostramos el cómputo de  $T_{\mathbb{P}}^2(I_{\perp})(q)$  y de  $T_{\mathbb{P}}^3(I_{\perp})(p)$ :

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{P}}^2(I_{\perp})(q) &= 0.6 \dot{\&}_G \dot{\&}_{\mathcal{M}} \left( T_{\mathbb{P}}(I_{\perp})(s), T_{\mathbb{P}}(I_{\perp})(t) \dot{\&}_P T_{\mathbb{P}}(I_{\perp})(u) \right) \\ &= \min \left\{ 0.6, \frac{0.8 + 0.5 \cdot 0.2}{2} \right\} = 0.45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{P}}^3(I_{\perp})(p) &= \sup \left\{ 0.7 \dot{\&}_L T_{\mathbb{P}}^2(I_{\perp})(q), 0.9 \dot{\&}_G \left( T_{\mathbb{P}}^2(I_{\perp})(s) \dot{\&}_G T_{\mathbb{P}}^2(I_{\perp})(t) \right) \right\} \\ &= \sup \left\{ \max\{0, 0.7 + 0.45 - 1\}, \min\{0.9, \min\{0.8, 0.5\}\} \right\} \\ &= \sup\{0.15, 0.5\} = 0.5 \end{aligned}$$

◇

El Teorema 3.4 nos proporciona un elegante mecanismo para definir la semántica de un programa lógico multiadjunto. No obstante, dicho resultado no especifica que el modelo mínimo de  $\mathbb{P}$  se alcance necesariamente

en un número finito de iteraciones de  $T_{\mathbb{P}}$ . En efecto, existen ejemplos de MALPs cuyo modelo mínimo se alcanza exactamente en  $\omega$  iteraciones del operador de consecuencia inmediata. Aún más, si el operador  $T_{\mathbb{P}}$  no es continuo Scott, pueden ser necesarias más de numerables iteraciones para alcanzar un punto fijo, esto es, para obtener el modelo mínimo de  $\mathbb{P}$ .

En la literatura pueden encontrarse diversos trabajos cuyo objeto principal es la obtención de condiciones que garanticen que un MALP termina, es decir, que su modelo mínimo se alcanza en un número finito de iteraciones de  $T_{\mathbb{P}}$  [35, 36, 39, 46], así como trabajos que proporcionan condiciones suficientes para la continuidad de Scott del operador de consecuencia inmediata [90, 93, 94].

## 3.2. Programación lógica multiadjunta normal

El uso de negaciones en un marco de programación lógica otorga un valor adicional a la flexibilidad del entorno, permitiendo así que un mayor número de sistemas puedan modelarse a través de dicho lenguaje. En otras palabras, un lenguaje de programación lógica que admite negaciones es un lenguaje más rico, tanto a nivel sintáctico como a nivel semántico.

La programación lógica multiadjunta normal surge como una extensión de la programación lógica multiadjunta mediante el uso de una *negación por defecto*. La característica principal de este tipo de negación es que el valor de verdad de un símbolo proposicional negado depende directamente del valor de verdad de ese símbolo proposicional. La inclusión de otro tipo de negación en un marco de programación lógica multiadjunta, denominada usualmente *negación fuerte*, será abordada en la Sección 3.4.

En esta sección presentaremos la sintaxis del lenguaje de programación lógica multiadjunta normal y adaptaremos la filosofía de la semántica de los modelos estables a dicho entorno. El lenguaje presentado aquí ha sido

publicado en [20, 24].

### 3.2.1. Sintaxis de los programas lógicos multiadjuntos normales

Nuestro objetivo aquí es incluir una negación por defecto en los programas lógicos multiadjuntos. En consecuencia, haremos uso de una  $\Omega$ -álgebra multiadjunta que contenga un operador de negación, o equivalentemente, de un retículo multiadjunto enriquecido con un operador de negación. Es importante destacar que, a nivel sintáctico, no es posible distinguir entre una negación por defecto y una negación fuerte. Este matiz se adquiere cuando se define la semántica del programa.

Al igual que en la sección anterior, fijaremos un conjunto numerable de símbolos proposicionales  $\Pi$ , un conjunto graduado  $\Omega$  y una  $\Omega$ -álgebra multiadjunta  $\mathfrak{L} = \langle L, \mathfrak{H} \rangle$  con respecto a los pares  $(\dot{\&}_i, \dot{\leftarrow}_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , entre cuyos operadores extra se encuentra un operador de negación  $\neg$ , y denotaremos por  $\mathfrak{F}$  el  $\Omega$ -álgebra de fórmulas generada por  $\Pi$  en  $\mathfrak{L}$ . Observemos que, en este ambiente, no exigimos que los operadores extra de  $\mathfrak{L}$  sean necesariamente conjuntores, disyuntores y operadores de agregación, sino que  $\mathfrak{L}$  puede contener cualquier otro operador. Un programa lógico multiadjunto normal se define formalmente como sigue:

**Definición 3.4.** *Un programa lógico multiadjunto normal (MANLP)  $\mathbb{P}$  es un conjunto finito de reglas ponderadas de la forma*

$$\langle p \leftarrow_i @ [p_1, \dots, p_m, \neg p_{m+1}, \dots, \neg p_n]; \vartheta \rangle$$

donde  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $@$  es un símbolo que se interpreta como un operador monótono creciente  $\dot{\@}$  de  $\mathfrak{L}$ ,  $\vartheta \in L$  y  $p, p_1, \dots, p_n \in \Pi$  con  $p_j \neq p_k$ , para cada  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \neq k$ .

De aquí en adelante, al definir un MANLP, mencionaremos únicamente el retículo multiadjunto con negación subyacente, sin explicitar el  $\Omega$ -álgebra multiadjunta relacionado con este o el conjunto de símbolos proposicionales. Así, en la Definición 3.4, diremos que  $\mathbb{P}$  es un MANLP definido en el retículo multiadjunto con negación  $(L, \preceq, \dot{\&}_1, \dot{\leftarrow}_1, \dots, \dot{\&}_n, \dot{\leftarrow}_n, \dot{\neg})$ . Por simplicidad, siempre que no haya lugar a confusión, denotaremos dicho retículo como  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg)$ .

En lo sucesivo, nos referiremos a los operadores  $\dot{\&}$  en el cuerpo de las reglas de un MANLP como *agregadores*, en el sentido de que agregan la información contenida en los símbolos proposicionales de la regla. Es preciso mencionar que dichos operadores no son necesariamente operadores de agregación (Definición 2.12), puesto que no se exigen condiciones de frontera, tan solo su monotonía. Más generalmente, usaremos la notación  $\Pi_{\mathbb{P}}$  para referirnos al conjunto de símbolos proposicionales que aparecen en un MANLP  $\mathbb{P}$ . Además, las reglas de un MANLP serán eventualmente denotadas como  $\langle p \leftarrow_i B; \vartheta \rangle$ , siendo  $p$  la *cabeza* de la regla,  $B$  su *cuerpo* y  $\vartheta$  su *valor de verdad*, *peso*, o *factor de confianza*.

### 3.2.2. Semántica de los programas lógicos multiadjuntos normales

Como se comentó al principio de esta sección, el adjetivo *normal* hace referencia a la forma de calcular el valor de verdad de un símbolo proposicional negado. Esto es, en términos de programación lógica, al modo en que se evalúa un símbolo proposicional negado bajo una interpretación. Específicamente, dada una interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  y un símbolo proposicional negado  $\neg p$ , se define  $\hat{I}(\neg p) = \dot{\neg} I(p)$ .

En lo que sigue, adaptaremos la semántica de los modelos estables a los programas lógicos multiadjuntos normales. Comenzaremos introduciendo las nociones de satisfacibilidad de una regla y de modelo de un

MANLP, que se definen de forma análoga a sus homónimas para MALPs.

**Definición 3.5.** *Dado un MANLP  $\mathbb{P}$  y una interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , decimos que:*

- *$I$  satisface una regla ponderada  $\langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle$  si y solo si  $\vartheta \preceq \hat{I}(p \leftarrow_i \mathcal{B})$ .*
- *$I$  es un modelo de  $\mathbb{P}$  si y solo si  $I$  satisface todas las reglas ponderadas de  $\mathbb{P}$ .*

La sintaxis de los programas lógicos multiadjuntos normales y la noción de modelo se ejemplifican a continuación.

**Ejemplo 3.2.** *Consideremos el retículo multiadjunto con negación*

$$([0, 1], \leq, \&_G, \leftarrow_G, \&_P, \leftarrow_P, \neg_S)$$

*Las siguientes tres reglas forman un programa lógico multiadjunto normal, que será denotado  $\mathbb{P}$ .*

$$r_1 : \langle p \leftarrow_P q \ \&_G \neg_S s ; 0.7 \rangle$$

$$r_2 : \langle s \leftarrow_G p \ \&_G q ; 0.2 \rangle$$

$$r_3 : \langle q \leftarrow_P 1 ; 0.6 \rangle$$

*Veamos que la interpretación  $I \equiv \{(p, 0.5), (q, 0.7), (s, 0.4)\}$  es un modelo de  $\mathbb{P}$ , es decir, satisface las reglas  $r_1, r_2$  y  $r_3$ . Para la primera de ellas,  $r_1$ , se verifica:*

$$\begin{aligned} \hat{I}(p \leftarrow_P q \ \&_G \neg_S s) &= I(p) \dot{\leftarrow}_P \hat{I}(q \ \&_G \neg_S s) = I(p) \dot{\leftarrow}_P (I(q) \dot{\&}_G \dot{\neg}_S I(s)) \\ &= 0.5 \dot{\leftarrow}_P (0.7 \dot{\&}_G \dot{\neg}_S 0.4) = 0.5 \dot{\leftarrow}_P 0.6 = \frac{0.5}{0.6} = 0.8\hat{3} \end{aligned}$$

*Ya que el peso de la regla  $r_1$  es 0.7 y  $0.7 \leq \hat{I}(p \leftarrow_P q \ \&_G \neg_S s)$ , entonces  $I$  satisface la regla  $r_1$ . De forma similar, para la regla  $r_2$  se cumple:*

$$\begin{aligned} \hat{I}(s \leftarrow_G p \ \&_G q) &= I(s) \dot{\leftarrow}_G \hat{I}(p \ \&_G q) = I(s) \dot{\leftarrow}_G (I(p) \dot{\&}_G I(q)) \\ &= 0.4 \dot{\leftarrow}_G (0.5 \dot{\&}_G 0.7) = 0.4 \dot{\leftarrow}_G 0.5 = 0.4 \end{aligned}$$

*Al ser 0.2 el peso de la regla  $r_2$ , inferior a  $\hat{I}(s \leftarrow_G p \ \&_G q)$ , se deduce que  $I$  satisface  $r_2$ . Por último, observemos que la regla  $r_3$  es un hecho. Como  $I(q) = 0.7$  y el peso de la regla  $r_3$  es 0.6, se concluye que  $I$  también satisface la regla  $r_3$ . Por lo tanto,  $I$  es un modelo de  $\mathbb{P}$ .  $\diamond$*

La siguiente definición generaliza el concepto de operador de consecuencia inmediata para la programación lógica multiadjunta normal.

**Definición 3.6.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP. El operador de consecuencia inmediata es la aplicación  $T_{\mathbb{P}}: \mathcal{I}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  definida para cada interpretation  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  y cada símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  como:

$$T_{\mathbb{P}}(I)(p) = \sup\{\vartheta \dot{\&}_i \hat{I}(\mathcal{B}) \mid \langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\}$$

Al igual que en el caso multiadjunto sin negaciones, los modelos de un MANLP se pueden caracterizar como los puntos post-fijos del operador de consecuencia inmediata.

**Proposición 3.1.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP e  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ . Entonces,  $I$  es un modelo de  $\mathbb{P}$  si y solo si  $T_{\mathbb{P}}(I) \sqsubseteq I$ .

*Demostración.* Por definición,  $I$  es un modelo de  $\mathbb{P}$  si y solo si, para cada regla  $\langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}$ , se satisface la desigualdad  $\vartheta \preceq \hat{I}(p \leftarrow_i \mathcal{B})$ , esto es:

$$\vartheta \preceq I(p) \dot{\leftarrow}_i \hat{I}(\mathcal{B}) \quad (3.1)$$

Como  $(\dot{\&}_i, \dot{\leftarrow}_i)$  es un par adjunto, por la propiedad de adjunción (3.1) es equivalente a:

$$\vartheta \dot{\&}_i \hat{I}(\mathcal{B}) \preceq I(p) \quad (3.2)$$

Ahora bien, por definición de supremo, (3.2) se satisface para cada regla  $\langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle$  de  $\mathbb{P}$  si y solo si

$$T_{\mathbb{P}}(I)(p) = \sup\{\vartheta \dot{\&}_i \hat{I}(\mathcal{B}) \mid \langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\} \preceq I(p)$$

De donde, concluimos que  $I$  es un modelo de  $\mathbb{P}$  si y solo si  $T_{\mathbb{P}}(I)(p) \preceq I(p)$  para cada símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ , es decir,  $T_{\mathbb{P}}(I) \sqsubseteq I$ .  $\square$

El siguiente resultado proporciona una herramienta para simplificar la definición del operador de consecuencia inmediata, y jugará un papel

fundamental en uno de los principales resultados de la Sección 3.3. En concreto, la Proposición 3.2 asegura que es posible obtener una partición de un MANLP  $\mathbb{P}$  de forma que en cada elemento de la partición hay a lo sumo una regla con cabeza  $p$ , para cada símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ . Si consideramos cada elemento de la partición  $\{\mathbb{P}_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$  como un programa lógico independiente, es claro que la definición del operador  $T_{\mathbb{P}_{\gamma}}$  puede ser simplificada, ya que al haber a lo sumo una regla con cabeza  $p$  podemos eliminar el supremo de la Definición 3.6.

**Proposición 3.2.** *Dado un MANLP  $\mathbb{P}$ , existe una partición  $\{\mathbb{P}_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$  de  $\mathbb{P}$  tal que:*

1.  $\mathbb{P}_{\gamma}$  no contiene más de una regla con la misma cabeza, para cada  $\gamma \in \Gamma$ .
2.  $T_{\mathbb{P}}(I)(p) = \sup\{T_{\mathbb{P}_{\gamma}}(I)(p) \mid \gamma \in \Gamma\}$ .

*Demostración.* Para cada regla  $r_{\gamma} \in \mathbb{P}$ , consideremos el MANLP  $\mathbb{P}_{\gamma} = \{r_{\gamma}\}$  con una única regla. Claramente, la partición  $\{\mathbb{P}_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$  satisface la primera condición. Ahora, para cada  $\mathbb{P}_{\gamma}$  e  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , el operador de consecuencia inmediata  $T_{\mathbb{P}_{\gamma}}$  viene dado por

$$T_{\mathbb{P}_{\gamma}}(I)(q) = \begin{cases} \vartheta \dot{\&}_i \hat{I}(\mathcal{B}) & \text{si } q = p \\ \perp & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo  $\langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle$  la única regla del programa  $\mathbb{P}_{\gamma}$ . En consecuencia:

$$T_{\mathbb{P}}(I)(p) = \sup\{\vartheta \dot{\&}_i \hat{I}(\mathcal{B}) \mid \langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\} = \sup\{T_{\mathbb{P}_{\gamma}}(I)(p) \mid \gamma \in \Gamma\}$$

□

Llegados a este punto, uno podría preguntarse si el operador de consecuencia inmediata de un MANLP es monótono creciente, como ocurre en el marco multiadjunto sin negaciones. De ser así, siguiendo un razonamiento análogo al realizado en la Sección 3.1, sería posible garantizar la

existencia del punto fijo mínimo de  $T_{\mathbb{P}}$ , y por consiguiente tendría sentido definir la semántica del MANLP en función de dicho punto fijo mínimo. Sin embargo, en general, el operador  $T_{\mathbb{P}}$  no es monótono creciente, como vemos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.3.** *Volviendo al MANLP  $\mathbb{P}$  del Ejemplo 3.2, veamos que el operador de consecuencia inmediata de  $\mathbb{P}$  no es monótono creciente. Consideremos las interpretaciones  $I \equiv \{(p, 0), (q, 1), (s, 0)\}$  y  $J \equiv \{(p, 1), (q, 1), (s, 1)\}$ . Claramente  $I \subseteq J$ . Sin embargo, el valor de  $T_{\mathbb{P}}(I)$  y el valor de  $T_{\mathbb{P}}(J)$  en el símbolo proposicional  $p$  vienen dados, respectivamente, por:*

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{P}}(I)(p) &= 0.7 \dot{\&}_P \left( I(q) \dot{\&}_G \dot{\neg}_S I(s) \right) = 0.7 \cdot \min\{1, 1 - 0\} = 0.7 \cdot 1 = 0.7 \\ T_{\mathbb{P}}(J)(p) &= 0.7 \dot{\&}_P \left( J(q) \dot{\&}_G \dot{\neg}_S J(s) \right) = 0.7 \cdot \min\{1, 1 - 1\} = 0.7 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Ya que  $T_{\mathbb{P}}(I)(p) \not\leq T_{\mathbb{P}}(J)(p)$ , se concluye que  $T_{\mathbb{P}}(I) \not\leq T_{\mathbb{P}}(J)$ . Con lo cual, en efecto, el operador  $T_{\mathbb{P}}$  no es monótono creciente.  $\diamond$

Con objeto de definir una semántica que siga la filosofía del punto fijo para la programación lógica multiadjunta normal, adaptaremos la noción de modelo estable a dicho entorno. La semántica de los modelos estables fue introducida por Gelfond y Lifschitz en [57], donde los autores trabajan en un ambiente de programación lógica clásica con negación.

Fundamentalmente, desde un punto de vista clásico, la idea intuitiva de modelo estable es la siguiente. Dado un programa lógico clásico con negación  $\mathbb{P}$ , supongamos que consideramos verdaderos, esto es, con valor de verdad  $\top$ , los símbolos proposicionales pertenecientes a un cierto conjunto  $M$ . Como consecuencia, para cada  $p \in M$ , podemos “eliminar” cada ocurrencia de  $\neg p$  en las reglas de  $\mathbb{P}$ . En otras palabras, podemos sustituir cada ocurrencia de  $\neg p$  por  $\perp$ . De la misma forma, si suponemos falsos, es decir, con valor de verdad  $\perp$ , los símbolos proposicionales que no están en  $M$ , entonces para cada  $p \notin M$  podemos sustituir cada ocurrencia de  $\neg p$  en

las reglas de  $\mathbb{P}$  por  $\top$ . El programa lógico resultante recibe el nombre de *reducto Gelfond-Lifschitz*, o simplemente *reducto*, de  $\mathbb{P}$  con respecto a  $M$ , y se denota por  $\mathbb{P}_M$ . Ahora, si el conjunto de símbolos proposicionales que son consecuencia lógica del programa  $\mathbb{P}_M$  coincide precisamente con  $M$ , podemos afirmar que nuestra premisa de que los símbolos proposicionales de  $M$  son verdaderos es razonable. Se dice entonces que  $M$  es un *modelo estable* de  $\mathbb{P}$ .

En nuestro enfoque multiadjunto, la idea es, dada una interpretación  $I$ , sustituir cada ocurrencia de  $\neg p$  en el programa por el valor  $\dot{\neg} I(p)$ . Recientemente, Madrid y Ojeda-Aciego definieron una semántica de los modelos estables para la programación lógica residuada normal [84]. Siguiendo el planteamiento propuesto en dicho trabajo, presentaremos en primer lugar una generalización del concepto de reducto adaptado al marco de programación lógica multiadjunta normal.

**Definición 3.7.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP e  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ . El reducto de  $\mathbb{P}$  con respecto a la interpretación  $I$ , denotado  $\mathbb{P}_I$ , es el programa lógico multiadjunto obtenido al sustituir cada regla en  $\mathbb{P}$  de la forma

$$\langle p \leftarrow_i @ [p_1, \dots, p_m, \neg p_{m+1}, \dots, \neg p_n]; \vartheta \rangle$$

por la regla

$$\langle p \leftarrow_i @_I [p_1, \dots, p_m]; \vartheta \rangle$$

donde el operador  $\dot{@}_I: L^m \rightarrow L$  viene dado por

$$\dot{@}_I [x_1, \dots, x_m] = \dot{@} [x_1, \dots, x_m, \dot{\neg} I(p_{m+1}), \dots, \dot{\neg} I(p_n)]$$

para cada  $x_1, \dots, x_m \in L$ .

Una vez definido el concepto de reducto, estamos en disposición de presentar la noción de modelo estable de un MANLP.

**Definición 3.8.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP. Dada una interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , se dice que  $I$  es un *modelo estable* de  $\mathbb{P}$  si  $I$  es el modelo mínimo del reducto  $\mathbb{P}_I$ .

Nótese que el reducto de  $\mathbb{P}$  con respecto a una interpretación  $I$  es un MALP sin negaciones. Con lo cual, de acuerdo con el Teorema 3.3, tiene sentido hablar de su modelo mínimo. Podemos afirmar pues que los modelos estables de un MANLP están bien definidos.

En el trabajo seminal sobre la semántica de los modelos estables [57] se considera que la semántica de un programa lógico clásico normal está definida si y solo si existe un único modelo estable  $M$ . De ser así, se determina que  $M$  es el modelo canónico del programa, es decir, las consecuencias lógicas del programa son los símbolos proposicionales que son verdaderos en  $M$ . De la misma forma, dado un programa lógico multiadjunto normal  $\mathbb{P}$ , si existe un único modelo estable de  $\mathbb{P}$ , se considerará a este como el modelo canónico de  $\mathbb{P}$ . A saber, si  $M$  es el único modelo estable de  $\mathbb{P}$ , se estimará que cada símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  es consecuencia lógica (se puede deducir) del programa  $\mathbb{P}$  con valor de verdad  $M(p)$ .

En caso de existir más de un modelo estable, dados  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  y  $x \in L$ , el procedimiento habitual es seguir uno de los siguientes criterios:

- (S1) se dice que  $p$  es consecuencia lógica de  $\mathbb{P}$  con valor de verdad  $x$  si existe un modelo estable  $M$  de  $\mathbb{P}$  tal que  $M(p) = x$ ; o bien
- (S2) se dice que  $p$  es consecuencia lógica de  $\mathbb{P}$  con valor de verdad  $x$  si para todo modelo estable  $M$  de  $\mathbb{P}$  se satisface  $M(p) = x$ .

Claramente, si existe un único modelo estable, los criterios (S1) y (S2) coinciden. Es importante destacar que si un MANLP  $\mathbb{P}$  tiene más de un modelo estable, independientemente de si nos guiamos por (S1) o por (S2), no es posible hablar del modelo canónico de  $\mathbb{P}$ , pues todos los modelos estables han de ser considerados como tales.

Para finalizar esta sección se mostrarán algunas propiedades interesantes de los modelos estables. En primer lugar, veremos que los modelos estables de un MANLP son, en efecto, modelos del programa. Para ello,

nos basaremos en la relación tan estrecha que guarda el reducto con los modelos de un MANLP. Dicha relación se muestra en el siguiente resultado.

**Proposición 3.3.** *Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP. Dada una interpretación  $M \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , se cumple que  $M$  es un modelo de  $\mathbb{P}$  si y solo si  $M$  es un modelo de  $\mathbb{P}_M$ .*

*Demostración.* Sea  $r$  una regla en  $\mathbb{P}$  de la forma

$$r: \langle p \leftarrow_i @ [p_1, \dots, p_m, \neg p_{m+1}, \dots, \neg p_n]; \vartheta \rangle$$

entonces existe una regla  $r_M$  en  $\mathbb{P}_M$  dada por

$$r_M: \langle p \leftarrow_i @_M [p_1, \dots, p_m]; \vartheta \rangle$$

Por definición,  $M$  satisface la regla  $r$  si y solo si

$$\vartheta \preceq \hat{M}(p \leftarrow_i @ [p_1, \dots, p_m, \neg p_{m+1}, \dots, \neg p_n])$$

Equivalentemente,

$$\vartheta \preceq M(p) \dot{\leftarrow}_i @ [M(p_1), \dots, M(p_m), \dot{\neg} M(p_{m+1}), \dots, \dot{\neg} M(p_n)]$$

Por definición del operador  $@_M$ , la desigualdad anterior puede ser expresada como

$$\vartheta \preceq M(p) \dot{\leftarrow}_i @_M [M(p_1), \dots, M(p_m)]$$

esto es,

$$\vartheta \preceq \hat{M}(p \leftarrow_i @_M [M(p_1), \dots, M(p_m)])$$

Concluimos pues que  $M$  satisface la regla  $r$  en  $\mathbb{P}$  si y solo si  $M$  satisface la regla  $r_M$  en  $\mathbb{P}_M$ , es decir,  $M$  es un modelo de  $\mathbb{P}$  si y solo si  $M$  es un modelo de  $\mathbb{P}_M$ .  $\square$

Como consecuencia directa de la Proposición 3.3, se deduce que los modelos estables de un MANLP son efectivamente modelos del programa. Aún más, la siguiente proposición prueba que se tratan de modelos minimales del programa.

**Proposición 3.4.** *Todo modelo estable de un MANLP  $\mathbb{P}$  es un modelo minimal de  $\mathbb{P}$ .*

*Demostración.* Sea  $M$  un modelo estable de  $\mathbb{P}$ . Por definición,  $M$  es el modelo mínimo del reducto  $\mathbb{P}_M$ . En particular, por la Proposición 3.3,  $M$  es un modelo de  $\mathbb{P}$ . Veamos por reducción al absurdo que  $M$  es un modelo minimal de  $\mathbb{P}$ .

Supongamos que existe un modelo  $N$  de  $\mathbb{P}$  tal que  $N \sqsubset M$ . Probaremos que  $N$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_M$ , en contradicción con el hecho de que  $M$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$ .

Claramente, dada una regla  $r_M$  en  $\mathbb{P}_M$  de la forma

$$r_M: \quad \langle p \leftarrow_i @_M[p_1, \dots, p_m]; \vartheta \rangle$$

con  $\dot{@}_M[x_1, \dots, x_m] = \dot{@}[x_1, \dots, x_m, \dot{\lhd} M(p_{m+1}), \dots, \dot{\lhd} M(p_n)]$ , existe una regla  $r_N$  en el reducto  $\mathbb{P}_N$  que viene dada por

$$r_N: \quad \langle p \leftarrow_i @_N[p_1, \dots, p_m]; \vartheta \rangle$$

con  $\dot{@}_N[x_1, \dots, x_m] = \dot{@}[x_1, \dots, x_m, \dot{\lhd} N(p_{m+1}), \dots, \dot{\lhd} N(p_n)]$ .

Como  $N$  es modelo de  $\mathbb{P}$ , aplicando la Proposición 3.3,  $N$  satisface la regla  $r_N$ , luego

$$\vartheta \preceq \hat{N}(p \leftarrow_i @_N[p_1, \dots, p_m])$$

Equivalentemente, por la definición del operador  $\dot{@}_N$ :

$$\vartheta \preceq N(p) \leftarrow_i \dot{@}[N(p_1), \dots, N(p_m), \dot{\lhd} N(p_{m+1}), \dots, \dot{\lhd} N(p_n)] \quad (3.3)$$

Claramente, ya que  $N \sqsubset M$ , se satisface  $N(p_j) \preceq M(p_j)$  para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ . En particular, puesto que el operador  $\dot{\lhd}$  es monótono decreciente,  $\dot{\lhd} M(p_j) \preceq \dot{\lhd} N(p_j)$  para cada  $j \in \{m+1, \dots, n\}$ . Así, ya que  $\dot{@}$  es monótono creciente, podemos asegurar que

$$\dot{@}[N(p_1), \dots, N(p_m), \dot{\lhd} M(p_{m+1}), \dots, \dot{\lhd} M(p_n)] \preceq \dot{@}[N(p_1), \dots, N(p_m), \dot{\lhd} N(p_{m+1}), \dots, \dot{\lhd} N(p_n)] \quad (3.4)$$

Finalmente, dado que  $\leftarrow_i$  es monótono decreciente en el antecedente, de acuerdo con (3.3) y (3.4), se verifica la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
 \vartheta &\preceq N(p) \leftarrow_i \dot{\@}[N(p_1), \dots, N(p_m), \dot{\neg} N(p_{m+1}), \dots, \dot{\neg} N(p_n)] \\
 &\preceq N(p) \leftarrow_i \dot{\@}[N(p_1), \dots, N(p_m), \dot{\neg} M(p_{m+1}), \dots, \dot{\neg} M(p_n)] \\
 &= N(p) \leftarrow_i \dot{\@}_M[N(p_1), \dots, N(p_m)] \\
 &= \hat{N}(p \leftarrow_i \@_M[p_1, \dots, p_m])
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $N$  satisface la regla  $r_M$  de  $\mathbb{P}_M$ . Puesto que  $r_M$  es una regla arbitraria de  $\mathbb{P}_M$ , concluimos que  $N$  es un modelo de  $\mathbb{P}_M$ , lo que contradice la hipótesis.  $\square$

Al igual que en el marco sin negaciones, el operador de consecuencia inmediata está estrechamente relacionado con la semántica de los programas lógicos multiadjuntos normales, que viene dada por los modelos estables. En la Proposición 3.1 veíamos que los modelos de un MANLP son los puntos post-fijos del operador de consecuencia inmediata. Ahora, mostraremos que todo modelo estable de un MANLP es un punto fijo minimal del operador de consecuencia inmediata.

**Proposición 3.5.** *Todo modelo estable de un MANLP  $\mathbb{P}$  es un punto fijo minimal del operador  $T_{\mathbb{P}}$ .*

*Demostración.* En primer lugar, veamos que, para cada interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , la evaluación de  $I$  bajo el operador  $T_{\mathbb{P}}$  coincide con su evaluación bajo el operador de consecuencia inmediata del reducto  $\mathbb{P}_I$ , denotado por  $T_{\mathbb{P}_I}$ .

Por definición de reducto, toda regla  $\langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle$  de  $\mathbb{P}$  se corresponde con una regla en  $\mathbb{P}_I$  de la forma  $\langle p \leftarrow_i \mathcal{B}_I; \vartheta \rangle$ , donde  $\mathcal{B}$  es de la forma  $\mathcal{B} = \@[p_1, \dots, p_m, \neg p_{m+1}, \dots, \neg p_n]$  y  $\mathcal{B}_I = \@_I[p_1, \dots, p_m]$ . Por definición del operador  $\dot{\@}_I$ , la siguiente cadena de desigualdades se satisface:

$$\begin{aligned}
 \hat{I}(\dot{\@}[p_1, \dots, p_m, \neg p_{m+1}, \dots, \neg p_n]) &= \dot{\@}[I(p_1), \dots, I(p_m), \dot{\neg} I(p_{m+1}), \dots, \dot{\neg} I(p_n)] \\
 &= \dot{\@}_I[I(p_1), \dots, I(p_m)] \\
 &= \hat{I}(\dot{\@}_I[p_1, \dots, p_m])
 \end{aligned}$$

Esto es,  $\hat{I}(\mathcal{B}) = \hat{I}(\mathcal{B}_I)$ . Por consiguiente, para cada símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ :

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{P}}(I)(p) &= \sup\{\vartheta \dot{\&}_i \hat{I}(\mathcal{B}) \mid \langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\} \\ &= \sup\{\vartheta \dot{\&}_i \hat{I}(\mathcal{B}_I) \mid \langle p \leftarrow_i \mathcal{B}_I; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}_I\} = T_{\mathbb{P}_I}(I)(p) \end{aligned}$$

Con lo cual, se deduce que  $T_{\mathbb{P}}(I) = T_{\mathbb{P}_I}(I)$  para cada interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ .

Ahora, sea  $M$  un modelo estable de  $\mathbb{P}$ , y veamos que  $M$  es un punto fijo minimal de  $T_{\mathbb{P}}$ . Por definición de modelo estable, se trata del modelo mínimo del reducto  $\mathbb{P}_M$ . Puesto que  $\mathbb{P}_M$  es un MALP sin negaciones, el Teorema 3.3 nos asegura que  $M$  es un punto fijo de  $T_{\mathbb{P}_M}$ . Por lo tanto  $M = T_{\mathbb{P}_M}(M) = T_{\mathbb{P}}(M)$ , es decir,  $M$  es un punto fijo de  $T_{\mathbb{P}}$ .

Tan solo falta ver que  $M$  es minimal como punto fijo de  $T_{\mathbb{P}}$ . Lo probaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un punto fijo  $N$  de  $T_{\mathbb{P}}$  tal que  $N \sqsubset M$ . En particular  $N$  es un punto post-fijo de  $T_{\mathbb{P}}$ , luego por la Proposición 3.1,  $N$  es un modelo de  $\mathbb{P}$ . Ahora bien, la Proposición 3.4 nos asegura que  $M$  es un modelo minimal de  $\mathbb{P}$ , por tratarse de un modelo estable de  $\mathbb{P}$ . Obtenemos pues una contradicción, ya que  $N \sqsubset M$ .  $\square$

Para concluir esta sección, veremos que los modelos estables satisfacen una propiedad bastante deseable en programación lógica no monótona: que sean *respaldados*. A saber, la noción de interpretación respaldada está relacionada con la *hipótesis del mundo cerrado* (*closed-world assumption*), propuesta por primera vez en [100].

Es preciso mencionar que la ausencia de garantías para la existencia del punto fijo mínimo del operador de consecuencia inmediata es tan solo uno de los motivos que propician la necesidad de una nueva semántica para los programas lógicos con negaciones. Por ejemplo, al incluir negaciones en un programa lógico, uno de los inconvenientes que surgen es la aparición de modelos que recogen más información de la que puede ser deducida mediante las reglas del programa, es decir, no son respaldados por el programa.

Dado que el conjunto de consecuencias lógicas de un MANLP a partir de una interpretación viene determinado por el operador de consecuencia inmediata, la noción de interpretación respaldada puede generalizarse como sigue:

**Definición 3.9.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP. Se dice que una interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  es respaldada si  $I \sqsubseteq T_{\mathbb{P}}(I)$ .

La semántica de la teoría propuesta no proporciona más información de la que puede extraer de las reglas del programa.

**Proposición 3.6.** Todo modelo estable de un MANLP es respaldado.

*Demostración.* Se sigue directamente de la Proposición 3.5. □

El siguiente corolario resulta especialmente útil en el cálculo de modelos estables de un MANLP.

**Corolario 3.1.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP. Si  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  no aparece en la cabeza de ninguna regla, entonces  $M(p) = \perp$  para cada modelo estable  $M$  de  $\mathbb{P}$ .

*Demostración.* De acuerdo con la Proposición 3.6, si  $M$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}$ , entonces  $M$  es respaldado, esto es,  $M \sqsubseteq T_{\mathbb{P}}(M)$ . En particular:

$$M(p) \preceq \sup\{\vartheta \&_i \hat{I}(\mathcal{B}) \mid \langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\} = \sup \emptyset = \perp$$

Se concluye pues que  $M(p) = \perp$ . □

### 3.3. Existencia y unicidad de modelos estables

En esta sección nos centraremos en la búsqueda de condiciones suficientes que garanticen la existencia y la unicidad de modelos estables para programas lógicos multiadjuntos normales. Parte de los resultados mostrados aquí han sido presentados en [24]. Como se comentó en la sección

anterior, la existencia de modelos estables es necesaria para definir la semántica de los programas lógicos multiadjuntos normales. Por otro lado, la existencia de un único modelo estable es deseable, pues en tal caso (S1) y (S2) coinciden, y el único modelo estable se toma como el modelo canónico del programa.

### 3.3.1. Existencia de modelos estables

Constantini presentó en 2006 [32], por primera vez desde la introducción de la semántica de los modelos estables, una caracterización de la existencia de modelos estables para programas lógicos clásicos normales. Dicha caracterización, puramente sintáctica, está asociada al grafo de ciclos del programa. Posteriormente, Madrid y Ojeda-Aciego [87] proporcionaron una condición suficiente para la existencia de modelos estables en programas lógicos residuados normales definidos en el intervalo unidad  $[0, 1]$ .

En este apartado, seguiremos el enfoque presentado en [87], facilitando una condición suficiente para la existencia de modelos estables de un programa lógico multiadjunto normal, definido en un retículo multiadjunto cuyo soporte es un conjunto convexo y compacto de un espacio euclídeo. En definitiva, para MANLPs definidos en un conjunto isomorfo al  $n$ -cubo  $[0, 1]^n$ .

Para comenzar, obsérvese que dado un MANLP  $\mathbb{P}$ , el conjunto de símbolos proposicionales  $\Pi_{\mathbb{P}}$  es finito. Con lo cual, si  $\mathbb{P}$  está definido en un retículo con soporte  $K$  y  $\Pi_{\mathbb{P}} = \{p_1, \dots, p_n\}$ , cada interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  puede verse como un elemento de  $K^n$ , siendo la  $i$ -ésima componente de  $I$  la evaluación del símbolo proposicional  $p_i$ . Consecuentemente, el conjunto de interpretaciones  $\mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  puede verse como el producto cartesiano  $K^n$ . En efecto, es fácil ver que  $(\mathcal{I}_{\mathbb{P}}, \sqsubseteq)$  y  $(K^n, \leq)$  son isomorfos, con el orden usual  $\leq$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Como resultado de lo anterior, el conjunto de interpretaciones hereda ciertas propiedades de  $K$ . Ya vimos en la Proposición 2.15 que  $(\mathcal{I}_{\mathbb{P}}, \sqsubseteq)$  forma un retículo completo. Ahora además, aplicando las Proposiciones 2.13 y 2.14, se obtiene que  $(\mathcal{I}_{\mathbb{P}}, \sqsubseteq)$  también hereda la convexidad y la compacidad de  $K$ , respectivamente.

Las siguientes líneas esbozan la estrategia seguida para demostrar la existencia de modelos estables de un MANLP. En primer lugar, probaremos que el operador  $R: \mathcal{I}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  definido como  $R(I) = \text{lfp}(T_{\mathbb{P}_I})$  es continuo bajo ciertas condiciones, siendo  $\text{lfp}(T_{\mathbb{P}_I})$  el menor punto fijo de  $T_{\mathbb{P}_I}$ . Si  $K$  es un conjunto no vacío convexo y compacto en un espacio euclídeo, la continuidad de  $R$  nos permite aplicar el Teorema de Schauder para espacios euclídeos (Teorema 2.4). Como resultado, podemos garantizar la existencia de un punto fijo de  $R$ , esto es, de una interpretación  $M$  que coincide con el menor punto fijo de  $T_{\mathbb{P}_M}$ . Aún más, dicho punto fijo  $M$  será el modelo mínimo del reducto  $\mathbb{P}_M$ . Con lo cual, por definición, podemos afirmar que  $M$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}$ .

En consecuencia, para asegurar la existencia de un modelo estable de un MANLP, es suficiente probar la continuidad del operador  $R$ . Para ello, requeriremos que los operadores en las reglas del programa sean continuos.

**Teorema 3.5.** *Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP definido en un retículo multiadjunto con negación  $(K, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg)$ , siendo  $K$  un conjunto no vacío, convexo y compacto de un espacio euclídeo. Si  $\&_1, \dots, \&_n, \dot{\neg}$  y los agregadores en el cuerpo de las reglas de  $\mathbb{P}$  son continuos, entonces  $\mathbb{P}$  tiene al menos un modelo estable.*

*Demostración.* Sea  $k$  el número de reglas de  $\mathbb{P}$ , que suponemos ordenadas arbitrariamente, denotemos  $\Pi_{\mathbb{P}} = \{p_1, \dots, p_n\}$  y sea  $n_i$  el número de símbolos proposicionales negados que contiene la  $i$ -ésima regla de  $\mathbb{P}$ . Notemos que cada  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  puede escribirse como una tupla  $(I(p_1), \dots, I(p_n)) \in K^n$ .

Así pues, el operador  $R: \mathcal{I}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  dado por  $R(I) = \text{lfp}(T_{\mathbb{P}_I})$  puede ser

expresado como la composición  $R_2 \circ R_1$ , siendo  $R_1: K^n \rightarrow K^{n_1} \times \dots \times K^{n_k}$  y  $R_2: K^{n_1} \times \dots \times K^{n_k} \rightarrow K^n$  los operadores definidos como sigue:

- Si la regla  $i$ -ésima de  $\mathbb{P}$  es

$$\langle p^i \leftarrow_{j_i} @^i[p_1^i, \dots, p_{m_i}^i, \neg q_1^i, \dots, \neg q_{n_i}^i]; \vartheta^i \rangle$$

con  $j_i \in \{1, \dots, n\}$  y  $p^i, p_1^i, \dots, p_{m_i}^i \in \Pi_{\mathbb{P}}$ , entonces:

$$R_1(I) = \left( (\dot{\neg} I(q_1^1), \dots, \dot{\neg} I(q_{n_1}^1)), \dots, (\dot{\neg} I(q_1^k), \dots, \dot{\neg} I(q_{n_k}^k)) \right)$$

- Dado  $(x_1^1, \dots, x_{n_1}^1), \dots, (x_1^k, \dots, x_{n_k}^k) \in K^{n_1} \times \dots \times K^{n_k}$ , definimos  $\mathbb{P}^*$  como el MALP con  $k$  reglas tal que su  $i$ -ésima regla viene dada por

$$\langle p^i \leftarrow_{j_i} @^i[p_1^i, \dots, p_{m_i}^i, x_1^i, \dots, x_{n_i}^i]; \vartheta^i \rangle$$

La aplicación  $R_2$  se define entonces como

$$R_2((x_1^1, \dots, x_{n_1}^1), \dots, (x_1^k, \dots, x_{n_k}^k)) = \text{lfp}(T_{\mathbb{P}^*})$$

Claramente, el operador  $R_1$  será continuo si y solo si cada componente de  $R_1$  es continua. Notemos que este hecho es trivial, pues el operador  $\dot{\neg}$  es continuo por hipótesis. Por otro lado, todo programa  $\mathbb{P}^*$  correspondiente a una tupla de  $K^{n_1} \times \dots \times K^{n_k}$  es por definición un MALP sin símbolos proposicionales negados. Ahora bien, los operadores que intervienen en la definición del operador de consecuencia inmediata de  $\mathbb{P}^*$  son  $\dot{\&}_1, \dots, \dot{\&}_n$  y  $@^1, \dots, @^k$ , todos ellos continuos por hipótesis, luego podemos asegurar que  $T_{\mathbb{P}^*}$  es continuo. Además, por el Teorema 3.2 se trata de un operador monótono creciente, y por ende la Proposición 2.5 nos dice que  $T_{\mathbb{P}^*}$  es continuo Scott. Por lo tanto, teniendo en cuenta el Teorema 3.4, podemos obtener el punto fijo mínimo de  $T_{\mathbb{P}^*}$  iterando  $\omega$  veces el operador de consecuencia inmediata a partir de la interpretación mínima, esto es,

$$R_2((x_1^1, \dots, x_{n_1}^1), \dots, (x_1^k, \dots, x_{n_k}^k)) = \text{lfp}(T_{\mathbb{P}^*}) = T_{\mathbb{P}^*}^\omega(I_\perp)$$

Como resultado,  $R_2$  es composición numerable de operadores continuos, luego es continuo. Concluimos pues que  $R = R_2 \circ R_1$  es continuo, por ser composición de dos operadores continuos.

Al ser  $K$  un conjunto no vacío, convexo y compacto de un espacio euclídeo, por las Proposiciones 2.13 y 2.14, el conjunto  $\mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  también es un conjunto convexo y compacto de un espacio euclídeo. Aplicando el Teorema de Schauder para espacios euclídeos (Teorema 2.4) a  $R$ , obtenemos que  $R$  tiene un punto fijo  $M$ . Por definición de  $R$ , se obtiene que  $M$  coincide con el punto fijo mínimo del reducto  $T_{\mathbb{P}_M}$ . Como  $\mathbb{P}_M$  es un MALP sin símbolos proposicionales negados, por el Teorema 3.3,  $M$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$ . Finalmente, por definición de modelo estable, concluimos que  $M$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}$ , como queríamos demostrar.  $\square$

El siguiente ejemplo ilustra el amplio espectro de retículos multiadjuntos en el que puede aplicarse el Teorema 3.5 para garantizar la existencia de modelos estables de un MANLP. En particular, estamos interesados en el soporte de dicho retículo, que es al fin y al cabo el conjunto de valores de verdad para los símbolos proposicionales. Existen trabajos en la bibliografía de lógica difusa en la que las funciones triangulares o funciones en general toman el papel de valores de verdad. Ejemplo de ello son los conjuntos difusos tipo-2 [34, 96]. A continuación, consideraremos funciones triangulares simétricas de amplitud 0.1.

**Ejemplo 3.4.** Consideremos el conjunto  $X = \{f_n \mid n \in \mathbb{R}\}$  de funciones triangulares  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas para cada  $n \in \mathbb{R}$  como:

$$f_n(z) = \begin{cases} 10(z - n) + 1 & \text{si } n - 0.1 \leq z \leq n \\ 10(n - z) + 1 & \text{si } n \leq z < n + 0.1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos sobre el conjunto  $X$  los operadores  $\oplus, \otimes: X \rightarrow X$  como  $f_n \oplus f_m = f_{n+m}$  y  $k \otimes f_n = f_{k \cdot n}$ , respectivamente, con  $n, m, k \in \mathbb{R}$ . Además, dados  $n, m \in$

$\mathbb{R}$ , diremos que  $f_n \leq_X f_m$  si y solo si  $n \leq m$ . Con esta estructura, no es difícil probar que  $(X, \oplus, \otimes, \mathbb{R})$  forma un espacio vectorial.

Observemos que la aplicación  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(f_n) = n$  es un isomorfismo entre  $(X, \leq_X)$  y  $(\mathbb{R}, \leq)$ . Así, definiendo el producto escalar en  $X$  como  $\langle f_n, f_m \rangle_X = \langle \varphi(f_n), \varphi(f_m) \rangle$ , esto es  $\langle f_n, f_m \rangle_X = \langle n, m \rangle$ , siendo  $\langle \cdot \rangle$  el producto escalar usual en  $\mathbb{R}$ , obtenemos que  $(X, \oplus, \otimes, \mathbb{R})$  forma un espacio euclídeo con la norma inducida por  $\langle \cdot \rangle_X$ .

Ahora, sea  $K = \{f_x \mid x \in [0, 1]\}$ . Claramente,  $[0, 1] = \varphi(K)$  es un conjunto no vacío, convexo y compacto de  $\mathbb{R}$ , luego podemos afirmar que  $K$  es un conjunto no vacío, convexo y compacto en  $X$ . Consecuentemente, el Teorema 3.5 nos asegura que todo MANLP definido en el retículo multiadjunto con negación  $(K, \leq_X, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg)$ , siendo  $\&_1, \dots, \&_n, \neg$  y los operadores  $\dot{\&}$  en el cuerpo de las reglas del MANLP operadores continuos, tiene al menos un modelo estable.  $\diamond$

De forma similar al Ejemplo 3.4, podemos considerar funciones  $f_n$  con cualquier amplitud diferente a 0.1. Este tipo de funciones pueden ser interpretadas como números difusos [49].

**Ejemplo 3.5.** Sea  $X = \{f_{a_1, a_2, a_3} \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$  el conjunto de funciones triangulares  $f_{a_1, a_2, a_3}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas como:

$$f_{a_1, a_2, a_3}(z) = \begin{cases} \frac{z-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leq z \leq a_2 \\ \frac{a_3-z}{a_3-a_2} & \text{si } a_2 \leq z \leq a_3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A saber, un elemento  $f_{a_1, a_2, a_3} \in X$  representa una función triangular con centro en  $a_2$  y extremos  $a_1$  y  $a_3$ . Definiremos dos operadores  $\oplus, \otimes: X \rightarrow X$ , dados en este caso por:

$$\begin{aligned} f_{a_1, a_2, a_3} \oplus f_{b_1, b_2, b_3} &= f_{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3} \\ k \otimes f_{a_1, a_2, a_3} &= f_{k \cdot a_1, k \cdot a_2, k \cdot a_3} \end{aligned}$$

Considerando la relación de orden definida como  $f_{a_1, a_2, a_3} \leq_X f_{b_1, b_2, b_3}$  si y solo si  $(a_1, a_2, a_3) \leq (b_1, b_2, b_3)$ , obtenemos que  $(X, \oplus, \otimes, \mathbb{R})$  forma un espacio vectorial. Aún más, la aplicación  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\varphi(f_{a_1, a_2, a_3}) = (a_1, a_2, a_3)$  es un isomorfismo entre  $(X, \leq_X)$  y  $(\mathbb{R}^3, \leq)$ . Tomando el producto escalar en  $X$  como  $\langle f_{a_1, a_2, a_3}, f_{b_1, b_2, b_3} \rangle_X = \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle$  y argumentando como en el Ejemplo 3.4, se deduce que  $(X, \oplus, \otimes, \mathbb{R})$  forma un espacio euclídeo con la norma inducida por  $\langle \cdot \rangle_X$ .

Sea ahora el conjunto  $K = \{f_{x_1, x_2, x_3} \mid (x_1, x_2, x_3) \in [0, 1]^3\}$ . Puesto que  $[0, 1]^3 = \varphi(K)$  es convexo y compacto en  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $K$  es un conjunto no vacío, convexo y compacto en  $X$ . Se concluye entonces que, de acuerdo con el Teorema 3.5, todo MANLP definido en  $(K, \leq_X, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg)$  tiene al menos un modelo estable, siempre que los operadores involucrados en las reglas del MANLP sean continuos.  $\diamond$

Es preciso mencionar que la condición dada en el Teorema 3.5 es suficiente para la existencia de modelos estables de un MANLP, pero no para su unicidad. El Ejemplo 3.6 muestra un MANLP en el que se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.5, pero sin embargo existe más de un modelo estable. El estudio de condiciones suficientes para la unicidad de modelos estables será abordado en la siguiente sección.

**Ejemplo 3.6.** Sea  $\mathbb{P}$  el MANLP definido en el retículo multiadjunto con negación  $([0, 1], \leq, \&_G, \leftarrow_G, \&_P, \leftarrow_P, \neg_S)$  formado por las siguientes seis reglas:

$$\begin{aligned} r_1 : \langle p \leftarrow_G \neg_S t ; 0.6 \rangle & \quad r_4 : \langle t \leftarrow_P s ; 1 \rangle \\ r_2 : \langle q \leftarrow_P \neg_S s ; 0.8 \rangle & \quad r_5 : \langle s \leftarrow_P 1 ; 0.5 \rangle \\ r_3 : \langle p \leftarrow_P q \&_P s ; 0.9 \rangle & \quad r_6 : \langle t \leftarrow_G \neg_S p \&_G \neg_S q ; 0.7 \rangle \end{aligned}$$

El intervalo unidad  $[0, 1]$  es convexo y compacto en  $\mathbb{R}$ , y las  $t$ -normas  $\dot{\&}_G$  y  $\dot{\&}_P$  así como la negación  $\dot{\neg}_S$  son operadores continuos. Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.5, podemos asegurar que  $\mathbb{P}$  tiene al menos un modelo estable. En efecto, como veremos a continuación,  $\mathbb{P}$  tiene al menos dos modelos estables.

Por un lado, dada la interpretación  $M \equiv \{(p, 0.4), (q, 0.4), (s, 0.5), (t, 0.6)\}$ , el reducto  $\mathbb{P}_M$  se define como sigue:

$$\begin{aligned} r_1^M &: \langle p \leftarrow_G 0.4 ; 0.6 \rangle & r_4^M &: \langle t \leftarrow_P s ; 1 \rangle \\ r_2^M &: \langle q \leftarrow_P 0.5 ; 0.8 \rangle & r_5^M &: \langle s \leftarrow_P 1 ; 0.5 \rangle \\ r_3^M &: \langle p \leftarrow_P q \ \&_P s ; 0.9 \rangle & r_6^M &: \langle t \leftarrow_G 0.6 \ \&_G 0.6 ; 0.7 \rangle \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{P}_M$  es un MALP y  $\dot{\&}_G$  y  $\dot{\&}_P$  son  $t$ -normas continuas, entonces  $T_{\mathbb{P}_M}$  también es continuo, y por el Teorema 3.2 es monótono, luego de la Proposición 2.5 se deduce que  $T_{\mathbb{P}_M}$  es continuo Scott. Como resultado, por el Teorema 3.4, el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$  puede obtenerse iterando el operador  $T_{\mathbb{P}_M}$  a partir de la interpretación mínima  $I_\perp$ .

|                               | $p$ | $q$ | $s$ | $t$ |
|-------------------------------|-----|-----|-----|-----|
| $I_\perp$                     | 0   | 0   | 0   | 0   |
| $T_{\mathbb{P}_M}(I_\perp)$   | 0.4 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
| $T_{\mathbb{P}_M}^2(I_\perp)$ | 0.4 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |

Con lo cual,  $T_{\mathbb{P}_M}^2(I_\perp) \equiv \{(p, 0.4), (q, 0.4), (s, 0.5), (t, 0.6)\}$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$ . Ya que  $M$  coincide con  $T_{\mathbb{P}_M}^2(I_\perp)$ , concluimos que  $M$  es un modelo estable del MANLP  $\mathbb{P}$ .

Veamos ahora que  $M$  no es el único modelo estable de  $\mathbb{P}$ . Sea  $N \equiv \{(p, 0.5), (q, 0.4), (s, 0.5), (t, 0.5)\}$ . El correspondiente reducto  $\mathbb{P}_N$  viene dado entonces por:

$$\begin{aligned} r_1^N &: \langle p \leftarrow_G 0.5 ; 0.6 \rangle & r_4^N &: \langle t \leftarrow_P s ; 1 \rangle \\ r_2^N &: \langle q \leftarrow_P 0.5 ; 0.8 \rangle & r_5^N &: \langle s \leftarrow_P 1 ; 0.5 \rangle \\ r_3^N &: \langle p \leftarrow_P q \ \&_P s ; 0.9 \rangle & r_6^N &: \langle t \leftarrow_G 0.5 \ \&_G 0.6 ; 0.7 \rangle \end{aligned}$$

Por un razonamiento análogo al caso anterior, el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_N$  se obtiene iterando el operador  $T_{\mathbb{P}_N}$  a partir de la interpretación mínima  $I_\perp$ .

|                                 | $p$ | $q$ | $s$ | $t$ |
|---------------------------------|-----|-----|-----|-----|
| $I_{\perp}$                     | 0   | 0   | 0   | 0   |
| $T_{\mathbb{P}_N}(I_{\perp})$   | 0.5 | 0.4 | 0.5 | 0.5 |
| $T_{\mathbb{P}_N}^2(I_{\perp})$ | 0.5 | 0.4 | 0.5 | 0.5 |

Se concluye pues que  $T_{\mathbb{P}_N}^2(I_{\perp}) = N$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_N$ . En otras palabras,  $N$  también es un modelo estable de  $\mathbb{P}$ .  $\diamond$

### 3.3.2. Unicidad de modelos estables

El estudio de condiciones suficientes para la unicidad de modelos estables de un MANLP se abordará desde dos perspectivas distintas:

- Por un lado, desde un punto de vista meramente sintáctico, veremos que si un MANLP es estratificado entonces tiene un único modelo estable.
- Por otro lado, teniendo en cuenta la estructura semántica del programa, proporcionaremos una condición suficiente para la unicidad de modelos estables para MANLPs definidos en el conjunto de subintervalos del intervalo unidad, que será denotado como  $\mathcal{C}[0, 1]$ .

#### 3.3.2.1. Programas lógicos multiadjuntos normales estratificados

Comenzaremos adaptando la noción de programa estratificado al paradigma multiadjunto normal. Los programas estratificados fueron enunciados por primera vez en un entorno clásico en [2], y simultáneamente y de forma independiente en [116]. Posteriormente, Przymusiński generalizó este concepto introduciendo los programas localmente estratificados [99]. Recientemente, Lukasiewicz [81] extendió la idea de programa estratificado a un marco de programación lógica descriptiva difusa con la

semántica de los modelos estables (denominados *answer sets* en dicho entorno). Siguiendo esta filosofía, Madrid y Ojeda-Aciego [85] definieron los programas lógicos residuados estratificados.

En esencia, una estratificación divide los símbolos proposicionales de un programa lógico en estratos o niveles, asignándoles un entero no negativo. En nuestro ambiente, pediremos además que si un símbolo proposicional  $q$  aparece en el cuerpo de una regla con cabeza  $p$ , entonces el estrato de  $q$  es menor o igual al de  $p$ . Aún más, si  $q$  aparece negado en dicha regla, el estrato de  $q$  será estrictamente inferior al de  $p$ . Formalmente:

**Definición 3.10.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP. Una estratificación de  $\mathbb{P}$  es una aplicación  $\|\cdot\|: \Pi_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{Z}^*$  tal que para cada regla  $\langle p \leftarrow_i @ [p_1, \dots, p_m, \neg p_{m+1}, \dots, \neg p_n]; \vartheta \rangle$  de  $\mathbb{P}$  se cumplen:

- $\|p_i\| \leq \|p\|$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ .
- $\|p_i\| < \|p\|$  para todo  $i \in \{m+1, \dots, n\}$ .

Diremos que  $k = \|p\|$  es el estrato de  $p$ , para cada  $p \in \mathbb{P}$ .

Un programa lógico multiadjunto normal estratificado se define entonces como sigue:

**Definición 3.11.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP. Se dice que  $\mathbb{P}$  es estratificado si existe alguna estratificación de  $\mathbb{P}$ .

Al igual que en el caso clásico, los MANLPs estratificados se pueden caracterizar en función de su grafo de dependencias.

**Definición 3.12.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP. El grafo de dependencias de  $\mathbb{P}$ , denotado  $G_{\mathbb{P}}$ , es el grafo dirigido cuyo conjunto de vértices es  $\Pi_{\mathbb{P}}$  y cuyas aristas son los pares  $(p, q)$  tales que existe una regla en  $\mathbb{P}$  con  $p$  en la cabeza y  $q$  o  $\neg q$  en el cuerpo. El conjunto de vértices y el conjunto de aristas de  $G_{\mathbb{P}}$  serán denotados como  $V_{\mathbb{P}}$  y  $A_{\mathbb{P}}$ , respectivamente.

*Se dice que una arista  $(p, q) \in A_{\mathbb{P}}$  es positiva (respectivamente negativa) si existe una regla en  $\mathbb{P}$  con  $p$  en la cabeza y  $q$  (respectivamente  $\neg q$ ) en el cuerpo.*

Observemos que una arista del grafo de dependencias de un MANLP puede ser al mismo tiempo positiva y negativa. Una vez presentado el grafo de dependencias, estamos en disposición de mostrar la caracterización de los MANLPs estratificados.

**Teorema 3.6.** *Un MANLP es estratificado si y solo si su grafo de dependencias no contiene ciclos con aristas negativas.*

*Demostración.* Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP estratificado, siendo  $\|\cdot\|$  una estratificación de  $\mathbb{P}$ . Veamos que su grafo de dependencias  $G_{\mathbb{P}}$  no contiene ciclos con aristas negativas por reducción al absurdo. Supongamos que  $C$  es un ciclo de  $G_{\mathbb{P}}$  siendo  $(p, q) \in C$  una arista negativa. Entonces, existe una regla en  $\mathbb{P}$  con  $p$  en la cabeza y  $\neg q$  en el cuerpo. Por definición de estratificación, se satisface que  $\|q\| < \|p\|$ .

Ahora bien, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el ciclo  $C$  empieza y termina en  $p$ , siendo  $(p, q)$  su primera arista. Esto es,  $C$  es de la forma:

$$p, (p, q), q, (q, v_1), v_1, (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n), v_n, (v_n, p), p$$

Claramente, para cada  $(u, v) \in C$ , existe una regla en  $\mathbb{P}$  con  $u$  en la cabeza y  $v$  o  $\neg v$  en el cuerpo. En cualquier caso, por ser  $\|\cdot\|$  una estratificación, se cumple que  $\|v\| \leq \|u\|$ . Esto implica que  $\|v_1\| \leq \|q\|$ ,  $\|v_{i+1}\| \leq \|v_i\|$  para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  y  $\|p\| \leq \|v_n\|$ . Con lo cual, la siguiente cadena de desigualdades se satisface:

$$\|p\| \leq \|v_n\| \leq \dots \leq \|v_1\| \leq \|q\| < \|p\|$$

Por la antisimetría del orden  $\leq$ , la desigualdad anterior se trata de una contradicción.

Veamos ahora que si  $G_{\mathbb{P}}$  no contiene ciclos con aristas negativas entonces  $\mathbb{P}$  es estratificado. Sean  $G_1, \dots, G_c$  las componentes fuertemente conexas de  $G_{\mathbb{P}}$ , y sea  $G_{\mathbb{P}}^*$  la condensación de  $G_{\mathbb{P}}$ . Por la Proposición 2.11,  $G_{\mathbb{P}}^*$  es un grafo acíclico dirigido. De donde, aplicando la Proposición 2.12, existe una ordenación topológica  $\leq_{G_{\mathbb{P}}^*}$  de  $G_{\mathbb{P}}^*$ .

Denotemos por  $v_1^*, \dots, v_c^*$  a los vértices del grafo  $G_{\mathbb{P}}^*$  que representan a las componentes conexas  $G_1, \dots, G_c$ , respectivamente, y sea  $A_{\mathbb{P}}^*$  su conjunto de aristas. Al ser  $\leq_{G_{\mathbb{P}}^*}$  un orden total, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$v_1^* <_{G_{\mathbb{P}}^*} v_2^* <_{G_{\mathbb{P}}^*} \dots <_{G_{\mathbb{P}}^*} v_c^* \quad (3.5)$$

Notemos que el orden  $\leq_{G_{\mathbb{P}}^*}$  puede ser extendido fácilmente a  $\Pi_{\mathbb{P}}$ , de forma que dados  $p, q \in \Pi_{\mathbb{P}}$  con  $p \in G_j, q \in G_k, j \neq k, j, k \in \{1, \dots, c\}$ , entonces  $p <_{G_{\mathbb{P}}^*} q$  si y solo si  $v_j^* <_{G_{\mathbb{P}}^*} v_k^*$ . Así, de acuerdo con la definición de ordenación topológica, se tendrá que  $p <_{G_{\mathbb{P}}^*} q$  si y solo si  $(v_j^*, v_k^*) \in A_{\mathbb{P}}^*$ . Esto es, por la definición del conjunto de aristas  $A_{\mathbb{P}}^*$ , si y solo si  $(p, q) \in A_{\mathbb{P}}$ .

Probaremos que la aplicación  $\|\cdot\|: \Pi_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $\|p\| = c - j + 1$  para cada  $p \in G_j$  es una estratificación de  $\mathbb{P}$ . Nótese que  $G_1 \uplus \dots \uplus G_c = \Pi_{\mathbb{P}}$ , luego  $\|\cdot\|$  está bien definida.

Dada una regla  $\langle p \leftarrow_i @ [p_1, \dots, p_m, \neg p_{m+1}, \dots, \neg p_n]; \vartheta \rangle$  de  $\mathbb{P}$ :

- Si  $i \in \{1, \dots, m\}$ , tenemos dos opciones: o bien  $p$  y  $p_i$  pertenecen a la misma componente fuertemente conexa, en cuyo caso claramente  $\|p\| = \|p_i\|$ ; o bien  $p \in G_j$  y  $p_i \in G_k$  con  $j \neq k$ . En tal caso, por definición del grafo de dependencias,  $(p, p_i) \in A_{\mathbb{P}}$ , con lo cual  $v_j^* <_{G_{\mathbb{P}}^*} v_k^*$ . Ahora, por la ordenación de vértices dada en (3.5), podemos afirmar que  $j < k$ , de donde,

$$\|p_i\| = c - k + 1 < c - j + 1 = \|p\|$$

Se concluye pues que en ambos casos  $\|p_i\| \leq \|p\|$ .

- Si  $i \in \{m+1, \dots, n\}$ , entonces  $(p, p_i) \in A_{\mathbb{P}}$  es una arista negativa. Si  $p \in G_j$  y  $p_i \in G_k$ , ya que  $G_j$  y  $G_k$  son fuertemente conexos y  $G_{\mathbb{P}}$  es por hipótesis un grafo sin ciclos con aristas negativas, se deduce que  $j \neq k$ . Por lo tanto, por definición del conjunto de aristas de  $G_{\mathbb{P}}^*$ , será  $(v_j^*, v_k^*) \in A_{\mathbb{P}}^*$ , esto es,  $v_j^* <_{G_{\mathbb{P}}^*} v_k^*$ . Razonando como en el caso anterior, por la ordenación de vértices dada en (3.5) y la definición de  $\|\cdot\|$ , se concluye que  $\|p_i\| < \|p\|$ .  $\square$

A continuación vamos a proporcionar un método constructivo para definir el único modelo estable de un MANLP estratificado. Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP estratificado y  $\|\cdot\|$  una estratificación de  $\mathbb{P}$ . En primer lugar, clasificaremos las reglas de  $\mathbb{P}$  en función del estrato de su cabeza. Así, para cada  $k \in \mathbb{Z}^*$ , tomaremos  $\mathbb{P}^k = \{\langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle \in \mathbb{P} \mid \|p\| \leq k\}$ . Básicamente, cada conjunto  $\mathbb{P}^k$  incluye las reglas de  $\mathbb{P}^{k-1}$  más las reglas cuya cabeza tiene estrato  $k$ .

Observemos que el conjunto  $\mathbb{P}^0$  es necesariamente un MALP sin símbolos proposicionales negados, pues si  $\neg q$  apareciese en alguna regla de  $\mathbb{P}^0$ , entonces el estrato de  $q$  sería estrictamente menor que 0, lo cual es imposible. Consecuentemente, tiene sentido definir la siguiente sucesión de interpretaciones:

- $M_0 = \text{lfp}(T_{\mathbb{P}^0})$
- $M_k = \text{lfp}(T_{\mathbb{P}_{M_{k-1}}^k})$ , para cada  $k \geq 1$ .

El siguiente resultado prueba que  $\mathbb{P}$  tiene un único modelo estable.

**Teorema 3.7.** *Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP estratificado y  $\|\cdot\|$  una estratificación de  $\mathbb{P}$ . Entonces, la interpretación  $M$  dada por  $M(p) = M_k(p)$ , para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  con  $\|p\| = k$ , es el único modelo estable de  $\mathbb{P}$ .*

*Demostración.* Se sigue de forma análoga al caso residuoado [83].  $\square$

Naturalmente, para que esté bien definida, la interpretación  $M$  no puede depender de la estratificación elegida. En efecto, esto es consecuencia directa del Teorema 3.7.

**Corolario 3.2.** *Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP estratificado. La interpretación  $M$  no depende de la estratificación de  $\mathbb{P}$ .*

*Demostración.* Nótese que si dos estratificaciones de  $\mathbb{P}$  dan lugar a dos interpretaciones  $M_1$  y  $M_2$  diferentes, el Teorema 3.7 no se cumple, puesto que en ese caso hay más de un modelo estable.  $\square$

### 3.3.2.2. Programas lógicos multiadjuntos normales en $\mathcal{C}[0, 1]$

En la Sección 3.3.2.1 se ha probado que todo MANLP estratificado tiene un único modelo estable, y se ha proporcionado un mecanismo para obtener dicho modelo estable. Aún más, el Teorema 3.6 caracteriza los MANLPs estratificados como aquellos cuyo grafo de dependencias no contiene ciclos con aristas negativas.

Ahora bien, si el grafo de dependencias de un MANLP contiene ciclos arbitrarios, no es posible dilucidar si existe un único modelo estable a partir de los resultados mostrados hasta ahora. A continuación, se facilitará una condición suficiente para la unicidad de modelos estables para MANLPs definidos en el conjunto de subintervalos del intervalo unidad, denotado  $\mathcal{C}[0, 1]$ . A saber, dicho conjunto se define formalmente como sigue:

$$\mathcal{C}[0, 1] = \left\{ [a, b] \mid a, b \in [0, 1], a \leq b \right\}$$

El orden  $\leq_c$  en  $\mathcal{C}[0, 1]$  se define como: dados  $[a, b], [c, d] \in \mathcal{C}[0, 1]$  se dice que  $[a, b] \leq_c [c, d]$  si y solo si  $a \leq c$  y  $b \leq d$ . Con objeto de dotar a  $\mathcal{C}[0, 1]$  de una estructura algebraica flexible, consideraremos como conjuntor un producto exponencial.

**Definición 3.13.** *Dados  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$  con  $\beta \leq \alpha$  y  $\delta \leq \gamma$ , se denominará producto exponencial de intervalos con respecto a  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  (ei-producto, del inglés, *exponential interval product*), al operador  $\dot{\&}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma} : \mathcal{C}[0, 1]^2 \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$  dado por:*

$$\dot{\&}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}([a, b], [c, d]) = [a^\alpha \cdot c^\gamma, b^\beta \cdot d^\delta]$$

*siendo  $\cdot$  el producto usual de números reales. En particular, el operador  $\dot{\&}_{11}^{11}$  será denotado como  $*$ , al ser una generalización directa del producto en  $\mathbb{R}$  para intervalos.*

Observemos que si  $a \leq b, c \leq d, \beta \leq \alpha$  y  $\delta \leq \gamma$ , entonces  $a^\alpha \cdot c^\gamma \leq b^\beta \cdot d^\delta$ . Consecuentemente, la conjunción de dos intervalos  $[a, b]$  y  $[c, d]$  mediante el operador  $\dot{\&}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}$  es también un intervalo de  $\mathcal{C}[0, 1]$ , por lo tanto  $\dot{\&}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}$  está bien definido.

El operador  $\dot{\&}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}$ , así como otros operadores de naturaleza similar, fueron ampliamente estudiados en [91]. En el mencionado trabajo, entre otras propiedades, se prueba la existencia de su implicación residuada, que será denotada como  $\dot{\leftarrow}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}$ . Como resultado, el par adjunto  $(\dot{\&}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}, \dot{\leftarrow}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma})$  puede ser considerado en el retículo subyacente de un programa lógico multiadjunto normal.

Para completar la definición de los operadores asociados al conjunto  $\mathcal{C}[0, 1]$ , consideraremos una extensión de la negación estándar adaptada a intervalos. Específicamente, definimos la negación estándar para intervalos como el operador  $\dot{\neg}_c : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$  dado por  $\dot{\neg}_c[a, b] = [\dot{\neg}_s b, \dot{\neg}_s a] = [1 - b, 1 - a]$  para cada  $[a, b] \in \mathcal{C}[0, 1]$ . Se trata de un operador decreciente con el orden  $\leq_c$ , y claramente satisface  $\dot{\neg}_c[0, 0] = [1, 1]$  y  $\dot{\neg}_c[1, 1] = [0, 0]$ , luego  $\dot{\neg}_c$  es un operador de negación.

Antes de presentar el principal resultado de esta sección, fijaremos algunos convenios notacionales:

- Dada la estrecha relación entre  $\mathcal{C}[0, 1]$  y  $[0, 1] \times [0, 1]$ , haremos uso de una aplicación inclusión  $\iota : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ , definida como

$\iota([a, b]) = (a, b)$ . Notemos que esta aplicación se puede extender fácilmente a  $n$ -tuplas, de forma que  $\iota: \mathcal{C}[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^{2n}$  viene dada por  $\iota([a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ .

- Dado un conjunto de símbolos proposicionales  $\Pi_{\mathbb{P}} = \{p_1, \dots, p_n\}$ , podemos expresar cada interpretación  $I: \Pi_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$  como una tupla  $(I(p_1), \dots, I(p_n))$  de  $\mathcal{C}[0, 1]^n$ . En este sentido, diremos indistintamente que  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  o que  $I \in \mathcal{C}[0, 1]^n$ . Con lo cual, la aplicación inclusión se puede definir en el conjunto de interpretaciones, de forma que la imagen de cada interpretación  $I$  sea una  $2n$ -tupla. Dicha tupla será denotada con una barra, esto es,  $\iota(I) = \bar{I}$ . Así, si  $I(p_i) = [a_i, b_i]$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , entonces:

$$\bar{I} = \iota(I(p_1), \dots, I(p_n)) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$$

Usaremos la notación  $I = [I^1, I^2]$  para referirnos a  $I^1 = (a_1, \dots, a_n)$  y  $I^2 = (b_1, \dots, b_n)$ , siendo  $I^1(p_i) = a_i$  e  $I^2(p_i) = b_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Así mismo, si la evaluación de una fórmula  $\mathcal{B}$  bajo la interpretación  $I$  es  $\hat{I}(\mathcal{B}) = [x, y]$ , diremos que  $\hat{I}^1(\mathcal{B}) = x$  e  $\hat{I}^2(\mathcal{B}) = y$ .

Por ejemplo, dados  $\Pi_{\mathbb{P}} = \{p, q, s\}$  y la interpretación  $I: \Pi_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$  definida como  $I(p) = [0.1, 0.4]$ ,  $I(q) = [0, 0]$  e  $I(s) = [0.7, 0.9]$ , si consideramos los símbolos proposicionales en orden alfabético,  $I$  puede ser escrita como la tupla  $I = ([0.1, 0.4], [0, 0], [0.7, 0.9])$ . Esto es,  $I = [I^1, I^2]$  con  $I^1 = (0.1, 0, 0.7)$  y  $I^2 = (0.4, 0, 0.9)$ . Por lo tanto  $\bar{I} = \iota(I) = (0.1, 0, 0.7, 0.4, 0, 0.9)$ .

- Al hilo del último punto,  $T_{\mathbb{P}}$  puede ser considerada como una función real de  $\mathcal{C}[0, 1]^n$  en  $\mathcal{C}[0, 1]^n$ , siendo  $T_{\mathbb{P}}(I)$  una  $n$ -tupla para cada interpretación  $I$ . Así, escribiremos  $T_{\mathbb{P}}(I)(p_i) = (T_{\mathbb{P}})_i(I)$  para expresar el valor de  $T_{\mathbb{P}}(I)$  en el símbolo proposicional  $p_i$ . Además, ya que  $(T_{\mathbb{P}})_i(I) \in \mathcal{C}[0, 1]$ , se obtiene que  $(T_{\mathbb{P}})_i(I) = [(T_{\mathbb{P}})_i^1(I), (T_{\mathbb{P}})_i^2(I)]$ . Considerando ahora la aplicación inclusión  $\iota$ , podemos definir el operador

$\overline{T}_{\mathbb{P}}: \mathcal{C}[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^{2n}$  como  $\overline{T}_{\mathbb{P}}(I) = \iota(T_{\mathbb{P}}(I))$ , para cada  $I \in \mathcal{C}[0, 1]^n$ .

Teniendo en cuenta las consideraciones previas, introduciremos un lema requerido para probar la unicidad de modelos estables en MANLPs definidos en  $\mathcal{C}[0, 1]$ .

**Lema 3.1.** *Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP definido en el retículo multiadjunto con negación  $(\mathcal{C}[0, 1], \leq_c, \&_{\beta_1 \delta_1}^{\alpha_1 \gamma_1}, \leftarrow_{\beta_1 \delta_1}^{\alpha_1 \gamma_1}, \dots, \&_{\beta_m \delta_m}^{\alpha_m \gamma_m}, \leftarrow_{\beta_m \delta_m}^{\alpha_m \gamma_m}, \neg_c)$  tal que a lo sumo una regla con cabeza  $p$  aparece en  $\mathbb{P}$ , para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ , y los únicos operadores lógicos en el cuerpo de las reglas de  $\mathbb{P}$  son  $*$  y  $\neg_c$ . Dadas dos interpretaciones  $I = [I^1, I^2]$  y  $J = [J^1, J^2]$  con  $J \sqsubseteq I$ , se satisface que*

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial (\overline{T}_{\mathbb{P}})_i^1}{\partial p_j^l} (J^1(p_1), \dots, J^1(p_n), J^2(p_1), \dots, J^2(p_n)) \right| \leq \alpha$$

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial (\overline{T}_{\mathbb{P}})_i^2}{\partial p_j^l} (J^1(p_1), \dots, J^1(p_n), J^2(p_1), \dots, J^2(p_n)) \right| \leq \beta$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{j=1}^h (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot I^1(q_j)^{\gamma_w-1} \cdot (I^1(q_1) \cdots I^1(q_{j-1}) \cdot I^1(q_{j+1}) \cdots I^1(q_h))^{\gamma_w} \\ &\quad + (k-h) \cdot (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot (I^1(q_1) \cdots I^1(q_h))^{\gamma_w} \\ \beta &= \sum_{j=1}^h (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot I^2(q_j)^{\delta_w-1} \cdot (I^2(q_1) \cdots I^2(q_{j-1}) \cdot I^2(q_{j+1}) \cdots I^2(q_h))^{\delta_w} \\ &\quad + (k-h) \cdot (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (I^2(q_1) \cdots I^2(q_h))^{\delta_w} \end{aligned}$$

y  $\langle p_i \leftarrow_{\beta_w \delta_w}^{\alpha_w \gamma_w} q_1 * \cdots * q_h * \neg_c q_{h+1} * \cdots * \neg_c q_k; [\vartheta^1, \vartheta^2] \rangle$  con  $w \in \{1, \dots, m\}$  es la única regla en  $\mathbb{P}$  con cabeza  $p_i$ .

*Demostración.* Sea  $\langle p_i \leftarrow_{\beta_w \delta_w}^{\alpha_w \gamma_w} q_1 * \cdots * q_h * \neg_c q_{h+1} * \cdots * \neg_c q_k; [\vartheta^1, \vartheta^2] \rangle \in \mathbb{P}$ . Por hipótesis, se trata de la única regla en  $\mathbb{P}$  con cabeza  $p_i$ , luego por definición del operador de consecuencia inmediata

$$(T_{\mathbb{P}})_i(I) = [\vartheta^1, \vartheta^2] \&_{\beta_w \delta_w}^{\alpha_w \gamma_w} \hat{I}(q_1 * \cdots * q_h * \neg_c q_{h+1} * \cdots * \neg_c q_k)$$

Ahora bien, por definición del operador  $\neg_c$ , se obtiene que

$$\hat{I}^1(q_1 * \dots * q_h * \neg_c q_{h+1} * \dots * \neg_c q_k) = I^1(q_1) \dots I^1(q_h) \cdot (1 - I^2(q_{h+1})) \dots (1 - I^2(q_k))$$

$$\hat{I}^2(q_1 * \dots * q_h * \neg_c q_{h+1} * \dots * \neg_c q_k) = I^2(q_1) \dots I^2(q_h) \cdot (1 - I^1(q_{h+1})) \dots (1 - I^1(q_k))$$

De donde, considerando por separado cada componente del operador de consecuencia inmediata y teniendo en cuenta la Definición 3.13, se obtiene

$$(T_{\mathbb{P}})_i^1(I) = (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot (I^1(q_1) \dots I^1(q_h) \cdot (1 - I^2(q_{h+1})) \dots (1 - I^2(q_k)))^{\gamma_w}$$

$$(T_{\mathbb{P}})_i^2(I) = (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot (I^2(q_1) \dots I^2(q_h) \cdot (1 - I^1(q_{h+1})) \dots (1 - I^1(q_k)))^{\delta_w}$$

Ahora, haciendo uso de la aplicación inclusión  $\iota$  y considerando que  $I(p_i) = [p_i^1, p_i^2]$  con  $p_i^1, p_i^2 \in [0, 1]$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la primera componente del operador de consecuencia inmediata puede ser escrita como:

$$(\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1(p_1^1, \dots, p_n^1, p_1^2, \dots, p_n^2) = (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot (q_1^1 \dots q_h^1 \cdot (1 - q_{h+1}^2) \dots (1 - q_k^2))^{\gamma_w}$$

siendo  $I(q_i) = [q_i^1, q_i^2]$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Análogamente, la segunda componente del operador de consecuencia inmediata puede ser expresada como:

$$(\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^2(p_1^1, \dots, p_n^1, p_1^2, \dots, p_n^2) = (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot (q_1^2 \dots q_h^2 \cdot (1 - q_{h+1}^1) \dots (1 - q_k^1))^{\delta_w}$$

siendo  $I(q_i) = [q_i^1, q_i^2]$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Notemos que podemos considerar a  $(\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1$  y  $(\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^2$  aplicaciones de  $\mathbb{R}^{2n}$  en  $\mathbb{R}$ , siendo  $p_1^1, \dots, p_n^1, p_1^2, \dots, p_n^2$  sus variables. Ya que ambas son composición de aplicaciones diferenciables, podemos afirmar que  $(\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1$  y  $(\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^2$  son a su vez diferenciables. En lo que sigue, calcularemos las derivadas parciales de  $(\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1$  diferenciando por casos:

(a) Si  $p_j = q_t$  con  $q_t \in \{q_1, \dots, q_h\}$ , entonces

$$\frac{\partial (\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1}{\partial p_j^1} = (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot q_t^{\gamma_w - 1} \cdot (q_1 \dots q_{t-1} \cdot q_{t+1} \dots q_h \cdot (1 - q_{h+1}) \dots (1 - q_k))^{\gamma_w}$$

(b) Ahora, si  $p_j = q_t$  con  $q_t \in \{q_{h+1}, \dots, q_k\}$ , se obtiene

$$\frac{\partial(\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1}{\partial p_j^2} = (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot (-\gamma_w) \cdot (1 - q_t)^{\gamma_w - 1} (q_1 \cdots q_h \cdot (1 - q_{h+1}) \cdots (1 - q_{t-1}) \cdot (1 - q_{t+1}) \cdots (1 - q_k))^{\gamma_w}$$

(c) En otro caso  $\frac{\partial(\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1}{\partial p_j^l} = 0$ , para  $l \in \{1, 2\}$ .

Observemos que, por la definición de programa lógico multiadjunto normal, todos los símbolos proposicionales en el cuerpo de una regla de  $\mathbb{P}$  han de ser distintos. En particular, un símbolo proposicional no puede aparecer simultáneamente en la parte positiva y en la negativa del cuerpo de una regla de  $\mathbb{P}$ .

A partir de los cálculos de las derivadas parciales de  $(\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1$  y del hecho de que  $J \sqsubseteq I$ , se deduce que la suma en valor absoluto de todas las derivadas parciales de  $(T_{\mathbb{P}})_i$  evaluadas en  $(J^1(p_1), \dots, J^1(p_n), J^2(p_1), \dots, J^2(p_n))$ , es decir,

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial(\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1}{\partial p_j^l} (J^1(p_1), \dots, J^1(p_n), J^2(p_1), \dots, J^2(p_n)) \right| \quad (3.6)$$

es equivalente a

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^h \left| (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot J^1(q_j)^{\gamma_w - 1} \cdot (J^1(q_1) \cdots J^1(q_{j-1}) \cdot J^1(q_{j+1}) \cdots J^1(q_h) \cdot (1 - J^2(q_{h+1})) \right. \\ & \quad \left. \cdots (1 - J^2(q_k)))^{\gamma_w} \right| + \sum_{j=h+1}^k \left| (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot (-\gamma_w) \cdot (1 - J^2(q_j)^{\gamma_w - 1}) \cdot (J^1(q_1) \cdots J^1(q_h) \right. \\ & \quad \left. \cdot (1 - J^2(q_{h+1})) \cdots (1 - J^2(q_{j-1})) \cdot (1 - J^2(q_{j+1})) \cdots (1 - J^2(q_k)))^{\gamma_w} \right| \end{aligned}$$

esto es, eliminando valores absolutos:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^h (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot J^1(q_j)^{\gamma_w - 1} \cdot (J^1(q_1) \cdots J^1(q_{j-1}) \cdot J^1(q_{j+1}) \cdots J^1(q_h) \cdot (1 - J^2(q_{h+1})) \\ & \quad \cdots (1 - J^2(q_k)))^{\gamma_w} + \sum_{j=h+1}^k (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot (1 - J^2(q_j)^{\gamma_w - 1}) \cdot (J^1(q_1) \cdots J^1(q_h) \\ & \quad \cdot (1 - J^2(q_{h+1})) \cdots (1 - J^2(q_{j-1})) \cdot (1 - J^2(q_{j+1})) \cdots (1 - J^2(q_k)))^{\gamma_w} \end{aligned}$$

Puesto que  $1 - J^2(q_j) \leq 1$  para cada  $j \in \{h+1, \dots, k\}$ , se obtiene que  $(1 - J^2(q_j))^{\gamma_w} \leq 1$ . Además, como  $1 - J^2(q_j)^{\gamma_w-1} \leq 1$ , se deduce que (3.6) es menor o igual que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^h (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot J^1(q_j)^{\gamma_w-1} \cdot \left( J^1(q_1) \cdots J^1(q_{j-1}) \cdot J^1(q_{j+1}) \cdots J^1(q_h) \right)^{\gamma_w} \\ & + \sum_{j=h+1}^k (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot (J^1(q_1) \cdots J^1(q_h))^{\gamma_w} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ahora bien, ya que el índice  $j$  no afecta al segundo sumatorio de (3.7), podemos afirmar que (3.6) es menor o igual que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^h (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot J^1(q_j)^{\gamma_w-1} \cdot \left( J^1(q_1) \cdots J^1(q_{j-1}) \cdot J^1(q_{j+1}) \cdots J^1(q_h) \right)^{\gamma_w} \\ & + (k-h) \cdot (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot (J^1(q_1) \cdots J^1(q_h))^{\gamma_w} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Finalmente, ya que  $J \sqsubseteq I$  por hipótesis, se concluye que

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial (\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1}{\partial p_j^l} (J^1(p_1), \dots, J^1(p_n), J^2(p_1), \dots, J^2(p_n)) \right| \leq \alpha$$

siendo

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{j=1}^h (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot I^1(q_j)^{\gamma_w-1} \cdot (I^1(q_1) \cdots I^1(q_{j-1}) \cdot I^1(q_{j+1}) \cdots I^1(q_h))^{\gamma_w} \\ &+ (k-h) \cdot (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot (I^1(q_1) \cdots I^1(q_h))^{\gamma_w} \end{aligned}$$

Un razonamiento análogo respecto a la segunda componente del operador de consecuencia inmediata nos permite concluir que:

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial (\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^2}{\partial p_j^l} (J^1(p_1), \dots, J^1(p_n), J^2(p_1), \dots, J^2(p_n)) \right| \leq \beta$$

siendo

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_{j=1}^h (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot I^2(q_j)^{\delta_w-1} \cdot (I^2(q_1) \cdots I^2(q_{j-1}) \cdot I^2(q_{j+1}) \cdots I^2(q_h))^{\delta_w} \\ &\quad + (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (k-h)(I^2(q_1) \cdots I^2(q_h))^{\delta_w} \end{aligned}$$

□

El Teorema 3.8 presenta una condición suficiente para la unicidad de modelos estables de MANLPs definidos en  $\mathcal{C}[0, 1]$ . La idea subyacente es probar que  $T_{\mathbb{P}}$  tiene un único punto fijo en  $\mathcal{C}[0, 1]^n$ . Aplicando la Proposición 3.5, podemos afirmar que cada modelo estable de  $\mathbb{P}$  es un punto fijo minimal de  $T_{\mathbb{P}}$ , luego existirá a lo sumo un modelo estable de  $\mathbb{P}$ . Ahora bien, el Teorema 3.5 nos asegura que existe al menos un modelo estable de  $\mathbb{P}$ . En consecuencia, se concluye que el único punto fijo de  $T_{\mathbb{P}}$  es el único modelo estable de  $\mathbb{P}$ .

Es importante destacar que tanto en el Lema 3.1 como en el Teorema 3.8 se limitan los operadores lógicos del cuerpo a  $*$  y  $\neg_c$ , pero las implicaciones residuadas de las reglas pueden ser cualquier ei-producto. De esta forma, el cuerpo de las reglas tiene una sintaxis sencilla, pero el programa tiene un carácter multiadjunto, gozando de la flexibilidad de un producto exponencial en el residuo.

**Teorema 3.8.** *Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP definido en el retículo multiadjunto con negación  $(\mathcal{C}[0, 1], \leq_c, \&_{\beta_1 \delta_1}^{\alpha_1 \gamma_1}, \leftarrow_{\beta_1 \delta_1}^{\alpha_1 \gamma_1}, \dots, \&_{\beta_m \delta_m}^{\alpha_m \gamma_m}, \leftarrow_{\beta_m \delta_m}^{\alpha_m \gamma_m}, \neg_c)$  tal que los únicos operadores lógicos en el cuerpo de las reglas de  $\mathbb{P}$  son  $*$  y  $\neg_c$ . Para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ , definamos el intervalo*

$$[\vartheta_p^1, \vartheta_p^2] = \text{máx}\{[\vartheta^1, \vartheta^2] \mid \langle p \leftarrow_{\beta_w \delta_w}^{\alpha_w \gamma_w} \mathcal{B}; [\vartheta^1, \vartheta^2] \rangle \in \mathbb{P}\}$$

*Si la desigualdad*

$$\sum_{j=1}^h (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (\vartheta_{q_j}^2)^{\delta_w-1} \cdot \left( \vartheta_{q_1}^2 \cdots \vartheta_{q_{j-1}}^2 \cdot \vartheta_{q_{j+1}}^2 \cdots \vartheta_{q_h}^2 \right)^{\delta_w} + (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (k-h)(\vartheta_{q_1}^2 \cdots \vartheta_{q_h}^2)^{\delta_w} < 1$$

se satisface para cada regla  $\langle p \leftarrow_{\beta_w \delta_w}^{\alpha_w \gamma_w} q_1 * \dots * q_h * \neg_C q_{h+1} * \dots * \neg_C q_k; [\vartheta^1, \vartheta^2] \rangle \in \mathbb{P}$ , entonces existe un único modelo estable de  $\mathbb{P}$ .

*Demostración.* Consideremos la interpretación  $I_\vartheta: \Pi_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$  definida como  $I_\vartheta(p) = [\vartheta_p^1, \vartheta_p^2]$  y sea  $A = \{\iota(J) \mid J \in \mathcal{C}[0, 1]^n, J \sqsubseteq I_\vartheta\}$ , siendo  $n$  el número de símbolos proposicionales en  $\Pi_{\mathbb{P}}$ . Para comenzar, probaremos que  $\overline{T_{\mathbb{P}}}$  es una aplicación contractiva en  $A$  respecto a la norma infinito  $\|\cdot\|_\infty$ , es decir, probaremos que existe  $\lambda \in ]0, 1[$  tal que

$$\|\overline{T_{\mathbb{P}}}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}}}(\overline{J_2})\|_\infty \leq \|\overline{J_1} - \overline{J_2}\|_\infty \cdot \lambda \quad (3.9)$$

para cada  $\overline{J_1}, \overline{J_2} \in A$ . La contractividad de  $\overline{T_{\mathbb{P}}}$  nos permitirá aplicar el Teorema del punto fijo de Banach (Teorema 2.5), asegurando así que  $\overline{T_{\mathbb{P}}}$  tiene un único punto fijo en  $A$ . Para alcanzar este propósito, distinguiremos dos casos:

*Caso Base:* En un primer enfoque, supondremos que para cada símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  existe a lo sumo una regla en  $\mathbb{P}$  con cabeza  $p$ . Por definición,  $J \sqsubseteq I_\vartheta$  para cada  $\overline{J} \in A$ , luego aplicando el Lema 3.1:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial (\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1}{\partial p_j^l} (J^1(p_1), \dots, J^1(p_n), J^2(p_1), \dots, J^2(p_n)) \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^h (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot I_\vartheta^1(q_j)^{\gamma_w-1} \cdot (I_\vartheta^1(q_1) \dots I_\vartheta^1(q_{j-1}) \cdot I_\vartheta^1(q_{j+1}) \dots I_\vartheta^1(q_h))^{\gamma_w} \\ & \quad + (k-h) \cdot (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot (I_\vartheta^1(q_1) \dots I_\vartheta^1(q_h))^{\gamma_w} \\ & \stackrel{(\dagger)}{=} \sum_{j=1}^h (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot (\vartheta_{q_j}^1)^{\gamma_w-1} \cdot \left( \vartheta_{q_1}^1 \dots \vartheta_{q_{j-1}}^1 \cdot \vartheta_{q_{j+1}}^1 \dots \vartheta_{q_h}^1 \right)^{\gamma_w} \\ & \quad + (k-h) \cdot (\vartheta^1)^{\alpha_w} \cdot \gamma_w \cdot (\vartheta_{q_1}^1 \dots \vartheta_{q_h}^1)^{\gamma_w} = \lambda^1 \end{aligned}$$

para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , donde  $(\dagger)$  se sigue de la definición de la interpretación  $I_\vartheta$ .

Razonando análogamente para  $\overline{T}_{\mathbb{P}}^2$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial (\overline{T}_{\mathbb{P}})_i^2}{\partial p_j^l} (J^1(p_1), \dots, J^1(p_n), J^2(p_1), \dots, J^2(p_n)) \right| \\
 & \leq \sum_{j=1}^h (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot I_{\vartheta}^2(q_j)^{\delta_w-1} \cdot (I_{\vartheta}^2(q_1) \cdots I_{\vartheta}^2(q_{j-1}) \cdot I_{\vartheta}^2(q_{j+1}) \cdots I_{\vartheta}^2(q_h))^{\delta_w} \\
 & \quad + (k-h) \cdot (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (I_{\vartheta}^2(q_1) \cdots I_{\vartheta}^2(q_h))^{\delta_w} \\
 & = \sum_{j=1}^h (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (\vartheta_{q_j}^2)^{\delta_w-1} \cdot \left( \vartheta_{q_1}^2 \cdots \vartheta_{q_{j-1}}^2 \cdot \vartheta_{q_{j+1}}^2 \cdots \vartheta_{q_h}^2 \right)^{\delta_w} \\
 & \quad + (k-h) \cdot (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (\vartheta_{q_1}^2 \cdots \vartheta_{q_h}^2)^{\delta_w} = \lambda^2
 \end{aligned}$$

Ahora bien, de acuerdo con las hipótesis del Teorema 3.8,  $\lambda^2 < 1$ . Aún más, ya que  $\beta_w \leq \alpha_w$  y  $\delta_w \leq \gamma_w$ , podemos asegurar que  $\lambda^1 \leq \lambda^2 < 1$ . Con lo cual se deduce que

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial (\overline{T}_{\mathbb{P}})_i^1}{\partial p_j^l} (J^1(p_1), \dots, J^1(p_n), J^2(p_1), \dots, J^2(p_n)) \right| \leq \lambda^1 < 1 \quad (3.10)$$

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial (\overline{T}_{\mathbb{P}})_i^2}{\partial p_j^l} (J^1(p_1), \dots, J^1(p_n), J^2(p_1), \dots, J^2(p_n)) \right| \leq \lambda^2 < 1 \quad (3.11)$$

para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Con objeto de probar que  $\overline{T}_{\mathbb{P}}$  es contractiva en  $A$ , vamos a realizar algunas observaciones previas:

- (a) Por un lado, estamos interesados en aplicar el Teorema del valor medio (Teorema 2.3) en cada componente de  $\overline{T}_{\mathbb{P}} = [\overline{T}_{\mathbb{P}}^1, \overline{T}_{\mathbb{P}}^2]$ . Veamos pues que las hipótesis de dicho teorema se cumplen.

Tomando  $\overline{T}_{\mathbb{P}}^1$  y  $\overline{T}_{\mathbb{P}}^2$  como funciones de  $\mathbb{R}^{2n}$  en  $\mathbb{R}^n$ , ambas son funciones diferenciables. Aún más, el conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  es convexo, es decir, para cada  $\overline{J}_1, \overline{J}_2 \in A$  el segmento  $S(\overline{J}_1, \overline{J}_2) = \{(1-t) \cdot \overline{J}_1 + t \cdot \overline{J}_2 \mid$

$0 \leq t \leq 1\}$  está contenido en  $A$ . Con lo cual, las hipótesis del Teorema del valor medio se satisfacen. Aplicando dicho resultado a cada componente de  $\overline{T_{\mathbb{P}}}$ , se obtiene que:

$$\|\overline{T_{\mathbb{P}}}^1(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}}}^1(\overline{J_2})\|_{\infty} \leq \|\overline{J_1} - \overline{J_2}\|_{\infty} \cdot \sup\{\|D\overline{T_{\mathbb{P}}}^1(\overline{J})\|_{\infty} \mid \overline{J} \in S(\overline{J_1}, \overline{J_2})\} \quad (3.12)$$

$$\|\overline{T_{\mathbb{P}}}^2(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}}}^2(\overline{J_2})\|_{\infty} \leq \|\overline{J_1} - \overline{J_2}\|_{\infty} \cdot \sup\{\|D\overline{T_{\mathbb{P}}}^2(\overline{J})\|_{\infty} \mid \overline{J} \in S(\overline{J_1}, \overline{J_2})\} \quad (3.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \|D\overline{T_{\mathbb{P}}}^1(\overline{J})\|_{\infty} &= \sup\{\|D\overline{T_{\mathbb{P}}}^1(\overline{J})(x)\|_{\infty} \mid \|x\|_{\infty} \leq 1\} \\ \|D\overline{T_{\mathbb{P}}}^2(\overline{J})\|_{\infty} &= \sup\{\|D\overline{T_{\mathbb{P}}}^2(\overline{J})(x)\|_{\infty} \mid \|x\|_{\infty} \leq 1\} \\ \|x\|_{\infty} &= \max\{|x_i| \mid x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

- (b) Por otro lado, observemos que el segmento  $S(\overline{J_1}, \overline{J_2})$  es un conjunto compacto en  $A$ . Además, la aplicación  $f: S(\overline{J_1}, \overline{J_2}) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  dada por  $f(\overline{J}) = \|D\overline{T_{\mathbb{P}}}^1(\overline{J})\|_{\infty}$  es continua, por ser composición de funciones continuas. Consecuentemente, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass para funciones (Teorema 2.2),  $f$  alcanza en  $S(\overline{J_1}, \overline{J_2})$  su máximo absoluto. En particular:

$$\sup\{\|D\overline{T_{\mathbb{P}}}^1(\overline{J})\|_{\infty} \mid \overline{J} \in S(\overline{J_1}, \overline{J_2})\} = \max\{\|D\overline{T_{\mathbb{P}}}^1(\overline{J})\|_{\infty} \mid \overline{J} \in S(\overline{J_1}, \overline{J_2})\} \quad (3.14)$$

- (c) Por último, por definición de la norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ ,  $\|(D\overline{T_{\mathbb{P}}}^1(\overline{J}))(x)\|_{\infty}$  es igual a:

$$\max\left\{\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial (\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1}{\partial p_j^l}(J^1(p_1), \dots, J^1(p_n), J^2(p_1), \dots, J^2(p_n)) \cdot x_j \right| \mid i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

De donde, ya que  $|x_j| \leq 1$  para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , obtenemos que  $\|(D\overline{T_{\mathbb{P}}}^1(\overline{J}))(x)\|_{\infty}$  es menor o igual al valor

$$\max\left\{\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial (\overline{T_{\mathbb{P}}})_i^1}{\partial p_j^l}(J^1(p_1), \dots, J^1(p_n), J^2(p_1), \dots, J^2(p_n)) \right| \mid i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

Puesto que (3.10) se satisface para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , podemos afirmar entonces que

$$\|(D\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-1}(\overline{J}))(x)\|_{\infty} \leq \lambda^1 \quad (3.15)$$

para todo  $\overline{J} \in S(\overline{J}_1, \overline{J}_2)$ .

Teniendo en cuenta los razonamientos dados en los tres ítems anteriores, se deduce que:

$$\begin{aligned} \|\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-1}(\overline{J}_1) - \overline{T}_{\mathbb{P}}^{-1}(\overline{J}_2)\|_{\infty} &\stackrel{(3.12)}{\leq} \|\overline{J}_1 - \overline{J}_2\|_{\infty} \cdot \sup\{\|D\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-1}(\overline{J})\|_{\infty} \mid \overline{J} \in S(\overline{J}_1, \overline{J}_2)\} \\ &\stackrel{(3.14)}{\leq} \|\overline{J}_1 - \overline{J}_2\|_{\infty} \cdot \text{máx}\{\|D\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-1}(\overline{J})\|_{\infty} \mid \overline{J} \in S(\overline{J}_1, \overline{J}_2)\} \\ &\stackrel{(3.15)}{\leq} \|\overline{J}_1 - \overline{J}_2\|_{\infty} \cdot \lambda^1 \end{aligned}$$

En otras palabras,  $\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-1}$  es una aplicación contractiva en  $A$  con constante de Lipschitz  $\lambda^1$ , siendo  $\lambda^1 < 1$  por (3.10). Mediante un razonamiento análogo a partir de (3.13), (3.14) y (3.15), podemos obtener que  $\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-2}$  es una aplicación contractiva en  $A$  con constante de Lipschitz  $\lambda^2 < 1$ , esto es:

$$\|\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-2}(\overline{J}_1) - \overline{T}_{\mathbb{P}}^{-2}(\overline{J}_2)\|_{\infty} \leq \|\overline{J}_1 - \overline{J}_2\|_{\infty} \cdot \lambda^2$$

Veamos ahora que de la contractividad de  $\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-1}$  y  $\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-2}$  se deduce que  $\overline{T}_{\mathbb{P}}$  es contractiva en  $A$ . Para comenzar, por la definición de la norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ , se cumple que:

$$\|\overline{T}_{\mathbb{P}}(\overline{J}_1) - \overline{T}_{\mathbb{P}}(\overline{J}_2)\|_{\infty} = \text{máx}\{\|\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-1}(\overline{J}_1) - \overline{T}_{\mathbb{P}}^{-1}(\overline{J}_2)\|_{\infty}, \|\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-2}(\overline{J}_1) - \overline{T}_{\mathbb{P}}^{-2}(\overline{J}_2)\|_{\infty}\} \quad (3.16)$$

Con lo cual, por ser  $\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-1}$  y  $\overline{T}_{\mathbb{P}}^{-2}$  aplicaciones contractivas, la siguiente cadena de desigualdades se satisface:

$$\begin{aligned} \|\overline{T}_{\mathbb{P}}(\overline{J}_1) - \overline{T}_{\mathbb{P}}(\overline{J}_2)\|_{\infty} &\leq \text{máx}\left\{\|\overline{J}_1 - \overline{J}_2\|_{\infty} \cdot \lambda^1, \|\overline{J}_1 - \overline{J}_2\|_{\infty} \cdot \lambda^2\right\} \\ &\leq \text{máx}\left\{\|\overline{J}_1 - \overline{J}_2\|_{\infty}, \|\overline{J}_1 - \overline{J}_2\|_{\infty}\right\} \cdot \text{máx}\{\lambda^1, \lambda^2\} \\ &= \|\overline{J}_1 - \overline{J}_2\|_{\infty} \cdot \text{máx}\{\lambda^1, \lambda^2\} \end{aligned}$$

Por lo tanto la aplicación  $\overline{T_{\mathbb{P}}}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  es contractiva con constante de Lipschitz  $\max\{\lambda^1, \lambda^2\} = \lambda^2$ , ya que  $\lambda^1 \leq \lambda^2$ . Aplicando pues el Teorema del punto fijo de Banach (Teorema 2.5), concluimos que  $\overline{T_{\mathbb{P}}}$  tiene un único punto fijo en  $A$ .

*Caso General:* Supongamos ahora que  $\mathbb{P}$  es un MANLP arbitrario. Por la Proposición 3.2, podemos asegurar que existe una partición  $\{\mathbb{P}_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$  de  $\mathbb{P}$  tal que:

1.  $\mathbb{P}_{\gamma}$  no contiene más de una regla con la misma cabeza, para cada  $\gamma \in \Gamma$ .
2.  $T_{\mathbb{P}}(I)(p) = \sup\{T_{\mathbb{P}_{\gamma}}(I)(p) \mid \gamma \in \Gamma\}$ .

Dado un símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ , denotaremos por  $\mathbb{P}_{\gamma_i^p}$ , con  $i \in \{1, \dots, m_p\}$ , a los subprogramas de la partición con reglas con cabeza  $p$ , siendo  $m_p$  el número de reglas con cabeza  $p$  y, por tanto, el número de tales subprogramas.

Por la segunda propiedad de la partición  $\{\mathbb{P}_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$  y dado que  $m_p \in \mathbb{N}$ , la siguiente cadena de igualdades se verifica para cada interpretación  $J \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  y cada símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ :

$$\begin{aligned}
 T_{\mathbb{P}}(J)(p) &= [T_{\mathbb{P}}^1(J)(p), T_{\mathbb{P}}^2(J)(p)] \\
 &= \left[ \sup\{T_{\mathbb{P}_{\gamma_i^p}}^1(J)(p) \mid i \in \{1, \dots, m_p\}\}, \sup\{T_{\mathbb{P}_{\gamma_i^p}}^2(J)(p) \mid i \in \{1, \dots, m_p\}\} \right] \\
 &= \left[ \max\{T_{\mathbb{P}_{\gamma_i^p}}^1(J)(p) \mid i \in \{1, \dots, m_p\}\}, \max\{T_{\mathbb{P}_{\gamma_i^p}}^2(J)(p) \mid i \in \{1, \dots, m_p\}\} \right]
 \end{aligned}$$

En lo que sigue, dadas dos interpretaciones  $J_1$  y  $J_2$ , construiremos dos programas  $\mathbb{P}^1$  y  $\mathbb{P}^2$  a partir de las reglas de  $\mathbb{P}$  de forma que, para cada símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ , las siguientes desigualdades se satisfagan:

$$|T_{\mathbb{P}}^1(J_1)(p) - T_{\mathbb{P}}^1(J_2)(p)| \leq |T_{\mathbb{P}^1}^1(J_1)(p) - T_{\mathbb{P}^1}^1(J_2)(p)|$$

$$|T_{\mathbb{P}}^2(J_1)(p) - T_{\mathbb{P}}^2(J_2)(p)| \leq |T_{\mathbb{P}^2}^2(J_1)(p) - T_{\mathbb{P}^2}^2(J_2)(p)|$$

Específicamente, partiremos de dos conjuntos  $\mathbb{P}^1$  y  $\mathbb{P}^2$  vacíos, y para cada símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ , añadiremos una regla de  $\mathbb{P}$  con cabeza  $p$  a  $\mathbb{P}^1$  así como una regla de  $\mathbb{P}$  con cabeza  $p$ , igual o diferente a la anterior, al programa  $\mathbb{P}^2$ . Seguidamente, realizaremos la construcción del programa  $\mathbb{P}^1$ , la construcción de  $\mathbb{P}^2$  se realiza de forma análoga.

Sea  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  y sean  $J_1$  y  $J_2$  dos interpretaciones. Ya que el número de reglas de  $\mathbb{P}$  es finito, existen  $\gamma_1^p, \gamma_2^p \in \Gamma$  tales que

$$T_{\mathbb{P}}^1(J_1)(p) = \max\{T_{\mathbb{P}_{\gamma_i^p}}^1(J_1)(p) \mid i \in \{1, \dots, m_p\}\} = T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_1)(p) \quad (3.17)$$

$$T_{\mathbb{P}}^1(J_2)(p) = \max\{T_{\mathbb{P}_{\gamma_i^p}}^1(J_2)(p) \mid i \in \{1, \dots, m_p\}\} = T_{\mathbb{P}_{\gamma_2^p}}^1(J_2)(p) \quad (3.18)$$

Supongamos que  $T_{\mathbb{P}_{\gamma_2^p}}^1(J_2)(p) \leq T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_1)(p)$ . Como resultado, de acuerdo con (3.18), la siguiente cadena de desigualdades se cumple:

$$T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_2)(p) \leq \max\{T_{\mathbb{P}_{\gamma_i^p}}^1(J_2)(p) \mid i \in \{1, \dots, m_p\}\} = T_{\mathbb{P}_{\gamma_2^p}}^1(J_2)(p) \leq T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_1)(p)$$

Con lo cual, al ser  $T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_2)(p) \leq T_{\mathbb{P}_{\gamma_2^p}}^1(J_2)(p) \leq T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_1)(p)$ , podemos afirmar que

$$|T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_1)(p) - T_{\mathbb{P}_{\gamma_2^p}}^1(J_2)(p)| \leq |T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_1)(p) - T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_2)(p)|$$

Añadiremos pues la única regla de  $\mathbb{P}_{\gamma_1^p}$  con cabeza  $p$  al programa  $\mathbb{P}^1$ .

En caso contrario, si  $T_{\mathbb{P}_{\gamma_2^p}}^1(J_2)(p) \not\leq T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_1)(p)$ , ya que  $\leq$  es un orden total en  $[0, 1]$ , ha de ser  $T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_1)(p) \leq T_{\mathbb{P}_{\gamma_2^p}}^1(J_2)(p)$ . Por un argumento análogo al anterior, haciendo uso de (3.17), se deduce que

$$T_{\mathbb{P}_{\gamma_2^p}}^1(J_1)(p) \leq T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_1)(p) \leq T_{\mathbb{P}_{\gamma_2^p}}^1(J_2)(p)$$

de donde

$$|T_{\mathbb{P}_{\gamma_1^p}}^1(J_1)(p) - T_{\mathbb{P}_{\gamma_2^p}}^1(J_2)(p)| \leq |T_{\mathbb{P}_{\gamma_2^p}}^1(J_1)(p) - T_{\mathbb{P}_{\gamma_2^p}}^1(J_2)(p)|$$

Por lo tanto, en este caso, añadiremos la única regla de  $\mathbb{P}_{\gamma_2^p}$  con cabeza  $p$  a  $\mathbb{P}^1$ .

Procediendo con un razonamiento análogo para cada símbolo proposicional de  $\mathbb{P}$ , obtenemos un MANLP  $\mathbb{P}^1$  tal que para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  existe a lo sumo una regla con cabeza  $p$  en  $\mathbb{P}^1$  y se satisface

$$|T_{\mathbb{P}}^1(J_1)(p) - T_{\mathbb{P}}^1(J_2)(p)| \leq |T_{\mathbb{P}^1}^1(J_1)(p) - T_{\mathbb{P}^1}^1(J_2)(p)| \quad (3.19)$$

Así mismo, es posible obtener un MANLP  $\mathbb{P}^2$  tal que para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  existe a lo sumo una regla con cabeza  $p$  en  $\mathbb{P}^2$  y

$$|T_{\mathbb{P}}^2(J_1)(p) - T_{\mathbb{P}}^2(J_2)(p)| \leq |T_{\mathbb{P}^2}^2(J_1)(p) - T_{\mathbb{P}^2}^2(J_2)(p)| \quad (3.20)$$

Ya que (3.19) y (3.20) se cumplen para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \|T_{\mathbb{P}}^1(J_1) - T_{\mathbb{P}}^1(J_2)\|_{\infty} &\leq \|T_{\mathbb{P}^1}^1(J_1) - T_{\mathbb{P}^1}^1(J_2)\|_{\infty} \\ \|T_{\mathbb{P}}^2(J_1) - T_{\mathbb{P}}^2(J_2)\|_{\infty} &\leq \|T_{\mathbb{P}^2}^2(J_1) - T_{\mathbb{P}^2}^2(J_2)\|_{\infty} \end{aligned}$$

Claramente, por definición del operador  $\iota$ , sendas desigualdades también se satisfacen para  $\overline{T_{\mathbb{P}}}$ :

$$\begin{aligned} \|\overline{T_{\mathbb{P}}^1}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}}^1}(\overline{J_2})\|_{\infty} &\leq \|\overline{T_{\mathbb{P}^1}^1}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}^1}^1}(\overline{J_2})\|_{\infty} \\ \|\overline{T_{\mathbb{P}}^2}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}}^2}(\overline{J_2})\|_{\infty} &\leq \|\overline{T_{\mathbb{P}^2}^2}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}^2}^2}(\overline{J_2})\|_{\infty} \end{aligned}$$

Estas desigualdades nos llevarán a que la aplicación  $\overline{T_{\mathbb{P}}}$  es contractiva en  $A$ , como mostramos a continuación.

De acuerdo con (3.16) y las propiedades de  $\mathbb{P}^1$  y  $\mathbb{P}^2$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} \|\overline{T_{\mathbb{P}}}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}}}(\overline{J_2})\|_{\infty} &= \max\left\{\|\overline{T_{\mathbb{P}}^1}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}}^1}(\overline{J_2})\|_{\infty}, \|\overline{T_{\mathbb{P}}^2}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}}^2}(\overline{J_2})\|_{\infty}\right\} \\ &\leq \max\left\{\|\overline{T_{\mathbb{P}^1}^1}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}^1}^1}(\overline{J_2})\|_{\infty}, \|\overline{T_{\mathbb{P}^2}^2}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}^2}^2}(\overline{J_2})\|_{\infty}\right\} \end{aligned}$$

Según la definición de  $\mathbb{P}^1$  y  $\mathbb{P}^2$ , para cada símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  hay a lo sumo una regla en  $\mathbb{P}^1$  y una regla en  $\mathbb{P}^2$  con cabeza  $p$ . Esto es,

ambos programas están en la situación del caso base. En consecuencia, tanto  $\overline{T_{\mathbb{P}^1}}$  como  $\overline{T_{\mathbb{P}^2}}$  son aplicaciones contractivas en  $A$  con constante de Lipschitz  $\lambda^2$ . Considerando la primera componente de  $\overline{T_{\mathbb{P}^1}}$  y la segunda componente de  $\overline{T_{\mathbb{P}^2}}$ , se deduce entonces que

$$\begin{aligned} \|\overline{T_{\mathbb{P}}}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}}}(\overline{J_2})\|_{\infty} &\leq \max \left\{ \|\overline{T_{\mathbb{P}^1}^1}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}^1}^1}(\overline{J_2})\|_{\infty}, \|\overline{T_{\mathbb{P}^2}^2}(\overline{J_1}) - \overline{T_{\mathbb{P}^2}^2}(\overline{J_2})\|_{\infty} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \|\overline{J_1} - \overline{J_2}\|_{\infty} \cdot \lambda^2, \|\overline{J_1} - \overline{J_2}\|_{\infty} \cdot \lambda^2 \right\} \\ &\leq \max \left\{ \|\overline{J_1} - \overline{J_2}\|_{\infty}, \|\overline{J_1} - \overline{J_2}\|_{\infty} \right\} \cdot \lambda^2 \\ &= \|\overline{J_1} - \overline{J_2}\|_{\infty} \cdot \lambda^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\overline{T_{\mathbb{P}}}$  es una aplicación contractiva en  $A$  con constante de Lipschitz  $\lambda^2$ . Aplicando el Teorema del punto fijo de Banach (Teorema 2.5), concluimos que  $\overline{T_{\mathbb{P}}}$  tiene un único punto fijo en  $A$ .

Falta ver que  $T_{\mathbb{P}}$  tiene un único punto fijo en  $\mathcal{C}[0, 1]^n$ . Ahora bien, esto se deduce trivialmente si todo punto fijo de  $T_{\mathbb{P}}$  pertenece a  $A$ . Formalmente, dado un punto fijo  $I$  de  $T_{\mathbb{P}}$ , veremos que  $\overline{I}$  es un punto fijo de  $\overline{T_{\mathbb{P}}}$  y que  $\overline{I} \in A$ .

Sea  $I$  un punto fijo de  $T_{\mathbb{P}}$ . Por un lado, ya que  $T_{\mathbb{P}}(I) = I$ , considerando la aplicación inclusión  $\iota$ , se cumple que  $\overline{T_{\mathbb{P}}}(\overline{I}) = \iota(T_{\mathbb{P}}(I)) = \iota(I) = \overline{I}$ . Con lo cual  $\overline{I}$  es un punto fijo de  $\overline{T_{\mathbb{P}}}$ . Por otro lado, la desigualdad  $T_{\mathbb{P}}(I)(p) \leq_c \max\{[\vartheta^1, \vartheta^2] \mid \langle p \leftarrow_{\beta_w \delta_w}^{\alpha_w \gamma_w} \mathcal{B}; [\vartheta^1, \vartheta^2] \rangle \in \mathbb{P}\}$  se verifica para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ . Como resultado  $I = T_{\mathbb{P}}(I) \subseteq I_{\vartheta}$ , luego por definición del conjunto  $A$  obtenemos que  $\overline{I} \in A$ .

Finalmente, basándonos en la Proposición 3.5 y en el Teorema 3.5, se concluye que el único punto fijo de  $T_{\mathbb{P}}$  es el único modelo estable de  $\mathbb{P}$ , como queríamos demostrar.  $\square$

Una de las consecuencias más interesantes del Teorema 3.8 es la posibilidad de usar el método constructivo del Teorema del punto fijo de Banach (Teorema 2.5) para obtener el único punto fijo de  $T_{\mathbb{P}}$ , es decir, el único

modelo estable de  $\mathbb{P}$ . En concreto, el único modelo estable de  $\mathbb{P}$  puede obtenerse iterando el operador de consecuencia inmediata sucesivamente a partir de la interpretación mínima  $I_\perp$  una cantidad numerable de veces.

**Corolario 3.3.** *Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP que cumple las hipótesis del Teorema 3.8. El único modelo estable de  $\mathbb{P}$  viene dado por  $T_\mathbb{P}^\omega(I_\perp)$ .*

*Demostración.* Se sigue de la demostración del Teorema 3.8 y de la del Teorema del punto fijo de Banach (Teorema 2.5).  $\square$

Así mismo, esto nos permite afirmar que, si las hipótesis del Teorema 3.8 se cumplen, la complejidad computacional del cálculo del único modelo estable es la misma que en el caso positivo. Por lo tanto, en este caso, el uso de negaciones no incrementa la complejidad computacional de la semántica del programa lógico multiadjunto.

El siguiente ejemplo ilustra el uso del Teorema 3.8, así como el cálculo del único modelo estable a partir del operador de consecuencia inmediata y de la interpretación mínima.

**Ejemplo 3.7.** *Sea  $\mathbb{P}$  el programa lógico multiadjunto normal definido en el retículo multiadjunto con negación  $(\mathcal{C}([0, 1]), \leq_c, *, \leftarrow_*, \&_{12}^{23}, \leftarrow_{12}^{23}, \&_{11}^{22}, \leftarrow_{11}^{22}, \neg_c)$  como el conjunto formado por las reglas*

$$\begin{aligned} r_1 &: \langle p \leftarrow_* \neg_c q ; [0.7, 0.8] \rangle \\ r_2 &: \langle s \leftarrow_{12}^{23} p ; [0.4, 0.5] \rangle \\ r_3 &: \langle p \leftarrow_{11}^{22} s * \neg_c t ; [0.5, 0.6] \rangle \\ r_4 &: \langle q \leftarrow_{11}^{22} t * \neg_c p ; [0.7, 0.9] \rangle \end{aligned}$$

*Con objeto de aplicar el Teorema 3.8 a  $\mathbb{P}$ , comprobaremos que las hipótesis de dicho resultado se cumplen, es decir, que la desigualdad*

$$\sum_{j=1}^h (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (\vartheta_{q_j}^2)^{\delta_w-1} \cdot \left( \vartheta_{q_1}^2 \cdots \vartheta_{q_{j-1}}^2 \cdot \vartheta_{q_{j+1}}^2 \cdots \vartheta_{q_h}^2 \right)^{\delta_w} + (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (k-h) (\vartheta_{q_1}^2 \cdots \vartheta_{q_h}^2)^{\delta_w} < 1$$

### 3.3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE MODELOS ESTABLES

---

se satisface para cada regla  $\langle p \leftarrow_{\beta_w \delta_w}^{\alpha_w \gamma_w} q_1 * \dots * q_h * \neg_C q_{h+1} * \dots * \neg_C q_k; [\vartheta^1, \vartheta^2] \rangle \in \mathbb{P}$ .

Para la regla  $r_1$ , es claro que  $0.9 < 1$ . Así mismo, la regla  $r_2$  satisface que

$$0.5 \cdot 2 \cdot 0.9 = 0.9 < 1$$

En cuanto a la regla  $r_3$ , se verifica que

$$0.6 + 0.5 \cdot 0.6 = 0.9 < 1$$

Por ultimo, para la regla  $r_4$ :

$$0.9 + 0.9 \cdot 0 = 0.9 < 1$$

Con lo cual, el programa  $\mathbb{P}$  satisface las hipótesis del Teorema 3.8, que nos asegura que  $\mathbb{P}$  tiene un único modelo estable. Aún más, por el Corolario 3.3, dicho modelo estable puede calcularse iterando  $T_{\mathbb{P}}$  a partir de la interpretación mínima  $I_{\perp}$ . La siguiente tabla muestra que, en este caso, tres iteraciones del operador de consecuencia inmediata son suficientes para obtener el único modelo estable de  $\mathbb{P}$ :

|                               | $p$         | $q$     | $s$               | $t$     |
|-------------------------------|-------------|---------|-------------------|---------|
| $I_{\perp}$                   | $[0,0]$     | $[0,0]$ | $[0,0]$           | $[0,0]$ |
| $T_{\mathbb{P}}(I_{\perp})$   | $[0.7,0.9]$ | $[0,0]$ | $[0,0]$           | $[0,0]$ |
| $T_{\mathbb{P}}^2(I_{\perp})$ | $[0.7,0.9]$ | $[0,0]$ | $[0.05488,0.405]$ | $[0,0]$ |
| $T_{\mathbb{P}}^3(I_{\perp})$ | $[0.7,0.9]$ | $[0,0]$ | $[0.05488,0.405]$ | $[0,0]$ |

Concluimos pues que

$$T_{\mathbb{P}}^2(I_{\perp}) \equiv \{(p, [0.7, 0.9]), (q, [0, 0]), (s, [0.05488, 0.405]), (t, [0, 0])\}$$

es el único modelo estable de  $\mathbb{P}$ .

◇

### 3.4. Coherencia en programas lógicos multiadjuntos con negaciones

Hasta ahora se ha considerado la programación lógica multiadjunta enriquecida con una negación por defecto. Recordemos que si  $\neg$  es una negación por defecto, entonces el valor de verdad de un símbolo proposicional negado  $\neg p$  bajo una interpretación  $I$  depende directamente del valor de verdad del símbolo proposicional  $p$  asignado por  $I$ . Específicamente,  $\hat{I}(\neg p) = \neg I(p)$ .

En esta sección estamos interesados en incluir además una *negación fuerte*. A diferencia de la anterior, si  $\sim$  es una negación fuerte, el valor de verdad de  $\sim p$  no puede inferirse a partir del valor de verdad de  $p$ . Es importante destacar que, por la naturaleza de la negación fuerte,  $\sim p$  puede considerarse como un nuevo símbolo proposicional. De esta forma, la sintaxis y la semántica de la programación lógica multiadjunta normal dada en la Sección 3.2 también es válida para programas lógicos multiadjuntos normales enriquecidos con una negación fuerte.

La idea de la negación fuerte es que si un programa lógico modeliza un cierto sistema e  $I$  representa el estado del sistema en un instante dado, los valores  $I(p)$  e  $I(\sim p)$  son independientes, y se deducen directamente de ese estado del sistema.<sup>1</sup> Por ejemplo, supongamos que  $p$  simboliza la proposición “estoy de acuerdo con el programa electoral” de un cierto partido político y  $\sim p$  representa “no estoy de acuerdo con el programa electoral”, siendo sus posibles valores de verdad elementos de  $[0, 1]$  que representan porcentajes. Para un votante  $I$ , es lógico que  $I(p)$  e  $I(\sim p)$  sean independientes, en el sentido de que  $I(p)$  puede ser igual a 0.2 e  $I(\sim p)$  puede ser 0.1, 0.3, 0.6 o cualquier otro valor, independientemente de  $I(p)$ . La diferencia  $1 - I(p) - I(\sim p)$ , en caso de ser positiva, podría interpretarse como

<sup>1</sup>Observar que no se hace uso de la notación  $\hat{I}$  para  $I(\sim p)$ .

indiferencia o desconocimiento de un fragmento del programa electoral por parte del votante.

No obstante, la inclusión de una negación fuerte en un marco de programación lógica puede dar lugar a incoherencias. Véase, en el ejemplo anterior, una interpretación que asigne a  $p$  y a  $\sim p$  el valor 1. Es decir, un votante que esté totalmente de acuerdo y totalmente en desacuerdo con el programa electoral del partido. De algún modo, los valores asignados a  $p$  y a  $\sim p$  son contradictorios. Ahora bien, puesto que estamos en un ambiente multivaluado, es necesario formalizar qué quiere decir que los valores de verdad de  $p$  y  $\sim p$  sean contradictorios.

Por este motivo, la primera parte de esta sección estará dedicada a la definición de la noción de coherencia en la programación lógica multiadjunta con negaciones. A continuación, con el propósito de dilucidar cuánto de incoherente es una interpretación incoherente, se propondrán diferentes medidas para detectar información incoherente en un programa lógico multiadjunto con negaciones.

De aquí en adelante, consideraremos fijados un conjunto de símbolos proposicionales  $\Pi$  y un MANLP  $\mathbb{P}$  definido en una  $\Omega$ -álgebra multiadjunta con dos operadores de negación  $\dot{\neg}$  y  $\sim$ , denotada  $\mathfrak{L}$ . Así mismo, la estructura algebraica subyacente se dirá que es un retículo multiadjunto con negaciones de la forma  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg, \sim)$ . El conjunto de símbolos proposicionales que pueden aparecer en  $\mathbb{P}$  estará formado por símbolos proposicionales de  $\Pi$  y por sus negaciones mediante  $\sim$ . Dicho conjunto se denotará como  $Lit_{\mathbb{P}}$ , y sus elementos se llaman *literales*. Esto es, si denotamos por  $\Pi_{\mathbb{P}}$  al conjunto de elementos de  $\Pi$  que aparecen en  $\mathbb{P}$ , entonces

$$Lit_{\mathbb{P}} = \Pi_{\mathbb{P}} \cup \{\sim p \mid p \in \Pi_{\mathbb{P}}\}$$

### 3.4.1. Sobre la noción de coherencia

Existen diferentes nociones en la literatura relacionadas con el concepto de coherencia. En este apartado, estamos interesados en seleccionar la definición de coherencia que mejor se adapte a la programación lógica multiadjunta normal. Por lo tanto, en primer lugar, realizamos un análisis crítico de las definiciones en la bibliografía más próximas a nuestra idea intuitiva de coherencia, tales son: la auto-contradicción en conjuntos difusos [111], las interpretaciones  $x$ -consistentes [97], la consistencia en birretículos entrelazados [53] y las interpretaciones coherentes [86, 88].

A raíz de dicho análisis, se estudiarán algunas propiedades que nos permitirán formalizar el concepto de coherencia para la programación lógica multiadjunta normal. El estudio presentado en este apartado ha sido publicado en [22].

#### 3.4.1.1. Auto-contradicción en conjuntos difusos

Trillas et al. [111] introdujeron la noción de auto-contradicción en conjuntos difusos [123] en base al principio de no contradicción de la lógica proposicional clásica. A saber, una proposición  $p$  es auto-contradictoria si no respeta el principio de no contradicción, es decir, si la afirmación “ $p$  implica  $\neg p$ ” tiene un valor de verdad mayor que 0. Tomando un operador implicación  $\leftarrow$  y una negación involutiva  $n$ , Trillas et al. establecieron que un conjunto difuso  $\mu$  es auto-contradictorio si y solo si  $n(\mu) \leftarrow \mu = 1$ , o equivalentemente  $\mu \leq n(\mu)$ . Los autores consideran tres tipos diferentes de auto-contradicción en [111], reescritos aquí en el lenguaje de programación lógica multiadjunta normal.

**Definición 3.14.** *Dada una interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , decimos que:*

- (1)  *$I$  es fuertemente auto-contradictoria si  $I(p) \preceq \dot{n}(I(p))$ , para cualquier negación involutiva  $\dot{n}$  y para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ .*

- (2)  $I$  es débilmente auto-contradictoria si  $I(p) \preceq \dot{n}(I(p))$ , para alguna negación involutiva  $\dot{n}$  y para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ .
- (3)  $I$  es  $(n, p)$ -localmente auto-contradictoria si  $I(p) \preceq \dot{n}(I(p))$ , para alguna negación involutiva  $\dot{n}$  y algún  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ .

La relevancia de estas definiciones reside en la cantidad de trabajos dedicados a la auto-contradicción en conjuntos difusos [111, 112, 113]. Además, la noción de contradicción también está presente en el marco de los conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov, donde se han presentado medidas de auto-contradicción [15, 33]. Así mismo, una generalización de la noción de auto-contradicción puede verse en [10, 11].

En virtud de los trabajos mencionados, que muestran la flexibilidad del concepto de auto-contradicción, parece razonable considerar esta idea como una posible definición de coherencia en la programación lógica multiadjunta normal.

#### 3.4.1.2. $x$ -consistencia

La noción de  $x$ -consistencia fue presentada por primera vez por Van Nieuwenborgh et al. [97]. La característica principal de esta definición es que permite al usuario elegir, mediante un operador de agregación, cómo afectan las incoherencias de cada símbolo proposicional a la coherencia de la interpretación. A continuación, presentamos la noción de  $x$ -consistencia adaptada al paradigma multiadjunto.

**Definición 3.15.** Sea  $\dot{\&}: L \times L \rightarrow L$  una  $t$ -norma,  $A_c$  un operador de agregación y sean  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  y  $x \in L$ . Consideremos la aplicación  $I_c: \Pi_{\mathbb{P}} \rightarrow L$  definida como  $I_c(p) = \dot{\neg}(I(p) \dot{\&} I(\sim p))$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ . Decimos que  $I$  es  $x$ -consistente si y solo si  $x \preceq A_c(\Pi_{\mathbb{P}}, I_c)$ .

Observemos que el uso de un operador de agregación nos permite ignorar la incoherencia de ciertos símbolos proposicionales, así como dar

más peso a la coherencia de algunos símbolos proposicionales frente a la de otros. Otro aspecto interesante es la posibilidad de elegir una cierta cota  $x$  a partir de la cual una interpretación deja de ser coherente. Aunque estas propiedades de la noción de  $x$ -consistencia son atractivas, el siguiente ejemplo muestra que no se trata de una definición adecuada para el entorno multiadjunto.

**Ejemplo 3.8.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP definido en el retículo multiadjunto con negaciones  $([0, 1], \leq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg, \sim)$ . Para definir la  $x$ -consistencia de una interpretación, consideraremos la  $t$ -norma de Gödel  $\&_G$ , la negación estándar  $\dot{\neg}_S$  y el operador de agregación definido como  $A_c(\Pi_{\mathbb{P}}, I_c) = \min\{I_c(p) \mid p \in \Pi_{\mathbb{P}}\}$ . Dada la interpretación  $I: Lit_{\mathbb{P}} \rightarrow [0, 1]$  definida como  $I(l) = 0.5$  para cada  $l \in Lit_{\mathbb{P}}$ , calcularemos el máximo valor  $x$  tal que la interpretación  $I$  es consistente.

Para cada símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ , se cumple que

$$I_c(p) = \dot{\neg}_S(I(p) \&_G I(\sim p)) = 1 - \min\{0.5, 0.5\} = 0.5$$

De donde,  $A(\Pi_{\mathbb{P}}, I_c) = 0.5$ . Con lo cual el máximo valor  $x$  para el que  $I$  es  $x$ -consistente es  $x = 0.5$ .  $\diamond$

Si prestamos atención a la sencilla definición de la interpretación  $I$  del Ejemplo 3.8, que asigna 0.5 a cada literal, lo esperable es que  $I$  sea 1-consistente. Sin embargo,  $I$  es a lo sumo 0.5-consistente, luego parece que la noción de  $x$ -consistencia no es la más adecuada para el marco de programación lógica multiadjunta normal.

### 3.4.1.3. Consistencia en birretículos entrelazados

Comenzaremos este apartado presentando el concepto de birretículo, introducido por Ginsberg [59, 60] como una generalización de la lógica tetravaluada [5, 119]. En particular, estamos interesados en una versión más restringida de birretículo, conocido como birretículo entrelazado.

**Definición 3.16** ([53]). *La tupla  $(B, \preceq_k, \preceq_t)$  compuesta por un conjunto  $B$  y dos órdenes parciales  $\preceq_k$  y  $\preceq_t$  es un birretículo entrelazado si:*

- (1)  $(B, \preceq_k)$  y  $(B, \preceq_t)$  forman retículos completos.
- (2) El supremo y el ínfimo respecto al orden  $\preceq_k$  (respectivamente  $\preceq_t$ ) es monótono creciente respecto al orden  $\preceq_t$  (respectivamente  $\preceq_k$ ).

Por lo general, el orden  $\preceq_t$  se conoce como el *orden de verdad* del birretículo, mientras  $\preceq_k$  se denomina *orden de conocimiento* del mismo. Ahora, enriqueceremos el birretículo entrelazado con un tipo especial de negación llamada confluencia.

**Definición 3.17** ([53]). *Un birretículo entrelazado  $(B, \preceq_k, \preceq_t)$  tiene una confluencia si existe una aplicación  $\dot{-} : B \rightarrow B$  tal que:*

- (1) Si  $a \preceq_k b$  entonces  $\dot{-} a \preceq_k \dot{-} b$ .
- (2) Si  $a \preceq_t b$  entonces  $\dot{-} b \preceq_t \dot{-} a$ .
- (3)  $\dot{-} \dot{-} a = a$ .

Al contrario de lo que uno esperaría de un operador de negación, una confluencia invierte el orden de verdad  $\preceq_t$  y preserva el orden de conocimiento  $\preceq_k$ . Esto implica que uno “conoce” tanto de  $\dot{-} a$  como de  $a$ .

Estamos en disposición de presentar la noción de consistencia en birretículos entrelazados con confluencia, introducida por Fitting [53].

**Definición 3.18** ([53]). *Sea  $(B, \preceq_k, \preceq_t)$  un birretículo entrelazado con confluencia  $\dot{-}$ . Se dice que  $a \in B$  es consistente si y solo si  $a \preceq_k \dot{-} a$ .*

Esta definición puede ser directamente extendida para el conjunto de interpretaciones de un MANLP, como se muestra a continuación. A saber,  $(B, \preceq_k, \preceq_t, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg, -)$  es un birretículo multiadjunto con confluencia si  $(B, \preceq_k, \preceq_t)$  es un birretículo entrelazado con confluencia  $\dot{-}$  y  $(B, \preceq_t, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg)$  es un retículo multiadjunto con negación.

**Definición 3.19.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP definido en el birretículo multiadjunto con confluencia  $(B, \preceq_k, \preceq_t, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg, -)$  donde  $(B, \preceq_k, \preceq_t)$  es un birretículo entrelazado con confluencia  $\dot{-}$ . Una interpretación  $I: \Pi_{\mathbb{P}} \rightarrow B$  es consistente si  $I(p) \preceq_k \dot{-} I(p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ .

Observemos que la Definición 3.19 es muy similar a la definición de auto-contradicción débil presentada en la Sección 3.4.1.1. En efecto, la desigualdad a satisfacer es la misma en ambos casos. La única diferencia reside en la elección de un retículo o de un birretículo como la estructura algebraica subyacente del programa. Consecuentemente, podemos afirmar que, si optamos por esta idea, la elección entre estas dos nociones afectará principalmente a la sintaxis del programa, pero no a la semántica.

Además, dado un birretículo entrelazado  $(B, \preceq_k, \preceq_t)$  con confluencia  $\dot{-}$ , es fácil ver que  $(B, \preceq_k)$  es un retículo completo y  $\dot{-}$  es una aplicación decreciente e involutiva en el retículo  $(B, \preceq_k)$ . Por lo tanto,  $\dot{-}$  será consistente si y solo si  $\dot{-}$  es una auto-contradicción débil en  $(B, \preceq_k)$ . Como resultado, la noción de interpretación consistente en birretículos puede verse como un caso particular de auto-contradicción débil.

#### 3.4.1.4. Coherencia en conjuntos respuesta difusos

La última definición de coherencia que mostraremos en esta sección ha sido presentada recientemente por Madrid y Ojeda-Aciego [86, 88]. Esta noción se fundamenta en considerar coherente toda interpretación que satisfaga la regla: “Si el valor de verdad de un símbolo proposicional  $p$  es  $\vartheta$  entonces el valor de verdad de  $\sim p$  es a lo sumo  $\dot{\sim}(\vartheta)$ ”. Con esta definición, se permite una posible carencia o pérdida de información pero no se permite un exceso. Formalmente:

**Definición 3.20** ([86]). Dada una interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , decimos que  $I$  es coherente si  $I(\sim p) \preceq \dot{\sim} I(p)$  para todo  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ .

Una propiedad interesante de esta noción es que toda interpretación inferior a una interpretación coherente también es coherente.

**Proposición 3.7** ([86]). *Dadas dos interpretaciones  $I, J \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  con  $I \sqsubseteq J$ , si  $J$  es coherente, entonces  $I$  es coherente.*

Como consecuencia de la Proposición 3.7, si una interpretación  $I$  no es coherente, entonces la única posibilidad es que haya un exceso de información, ya que toda interpretación  $J$  tal que  $I \sqsubseteq J$  también es incoherente. En cuanto a la permisividad de pérdida de información, se trata de una propiedad muy beneficiosa para la semántica de los programas lógicos multiadjuntos normales. Por ejemplo, la interpretación mínima  $I_{\perp}$ , que representa ausencia total de información, siempre es coherente. Estas dos razones nos llevan a afirmar que la Definición 3.20 se ajusta a nuestra idea intuitiva de coherencia. Por último, es conveniente destacar que la condición de coherencia se puede implementar fácilmente, ya que se trata de una simple desigualdad que tan solo depende del operador de negación.

#### 3.4.1.5. Noción de coherencia para programas lógicos multiadjuntos normales

La discusión realizada en las secciones previas nos lleva a la conclusión de que las nociones de auto-contradicción débil de la Sección 3.4.1.1 y la de coherencia de la Sección 3.4.1.4 son las más adecuadas para formalizar la idea de coherencia en un ambiente de programación lógica multiadjunta normal. Seguidamente, proporcionaremos una serie de razones que nos permitirán decantarnos finalmente por una de ellas. En concreto, por la Definición 3.20.

Debido a la importancia de las negaciones débiles (Definición 2.16) en la bibliografía, sería deseable que la definición de coherencia en el paradigma multiadjunto permitiese la consideración de este tipo de negaciones y tuviera sinergia con estas.

Si analizamos la noción de coherencia de la Definición 3.20, es claro que podemos hacer uso de negaciones débiles sin ningún problema. De hecho, la consideración de tales negaciones da lugar a una interesante propiedad.

En el trabajo seminal de la noción de coherencia en conjuntos respuesta difusos, Madrid y Ojeda-Aciego [86] exponían que una definición alternativa para la noción de coherencia viene dada por la desigualdad dual a  $I(\sim p) \preceq \dot{\sim} I(p)$ , es decir, por la desigualdad  $I(p) \preceq \dot{\sim} I(\sim p)$ . Sin embargo, los autores desecharon la posibilidad de definir las interpretaciones coherentes mediante esta última desigualdad, ya que dependiendo del operador de negación elegido, una interpretación puede ser coherente pero no satisface la desigualdad dual. Por ejemplo, si un operador de negación  $\dot{\sim}$  satisface  $\dot{\sim}(\dot{\sim} x) \prec x$  para algún  $x \in L$ , las interpretaciones coherentes no cumplen la desigualdad dual.

Ahora bien, si hacemos uso de una negación débil, entonces la desigualdad  $I(\sim p) \preceq \dot{\sim} I(p)$  es equivalente a  $I(p) \preceq \dot{\sim} I(\sim p)$ , como muestra la siguiente proposición.

**Proposición 3.8.** *Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP definido en el retículo multiadjunto con negaciones  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg, \sim)$ . Si  $\dot{\sim}$  es una negación débil, una interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  es coherente si y solo si  $I(p) \preceq \dot{\sim} I(\sim p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ .*

*Demostración.* Por definición, si la interpretación  $I$  es coherente entonces  $I(\sim p) \preceq \dot{\sim} I(p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ . Con lo cual, al ser  $\dot{\sim}$  decreciente, se verifica que  $\dot{\sim} \dot{\sim} I(p) \preceq \dot{\sim} I(\sim p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ . Ya que  $\dot{\sim}$  es una negación débil, se concluye entonces que

$$I(p) \preceq \dot{\sim} \dot{\sim} I(p) \preceq \dot{\sim} I(\sim p)$$

para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ .

Supongamos ahora que  $I(p) \preceq \dot{\sim} I(\sim p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ . Como  $\dot{\sim}$  es decreciente,  $\dot{\sim} \dot{\sim} I(\sim p) \preceq \dot{\sim} I(p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ . De donde, ya que  $\dot{\sim}$  es

una negación débil, se deduce que

$$I(\sim p) \preceq \dot{\sim} \dot{\sim} I(\sim p) \preceq \dot{\sim} I(p)$$

para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ . En otras palabras,  $I$  es coherente.  $\square$

Con lo cual, la noción de coherencia de la Definición 3.20 tiene una buena sinergia con las negaciones débiles. En cambio, este no es el caso si hacemos uso del concepto de auto-contradicción.

A modo de ejemplo, consideremos la negación  $\dot{n}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida como:

$$\dot{n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Se trata de una negación débil y claramente no hay interpretaciones auto-contradictorias aparte de la interpretación mínima. Es decir, no es posible detectar incoherencias, lo cual no es una propiedad deseable. El principal inconveniente de la definición de auto-contradicción es que no se consideran los valores de verdad de  $p$  y  $\sim p$  simultáneamente.

A continuación abordaremos también las nociones en debate desde el punto de vista de los conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov [3]. Este tipo de conjuntos se definen en un retículo completo como sigue:

**Definición 3.21.** Sea  $(L, \preceq)$  un retículo completo,  $\dot{n}: L \rightarrow L$  una negación involutiva y  $E$  un conjunto no vacío. Un conjunto intuicionista difuso  $A$  en  $E$  respecto a  $\dot{n}$  se define como:

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in E \}$$

donde  $\mu_A(x) \preceq \dot{n}(\nu_A(x))$  para cada  $x \in E$  y las aplicaciones  $\mu_A: E \rightarrow L$  y  $\nu_A: E \rightarrow L$  indican el grado de pertenencia y de no pertenencia de los elementos de  $E$  al conjunto  $A$ , respectivamente.

Tras recordar la definición de conjunto intuicionista difuso, veremos su estrecha relación con la Definición 3.20. A saber, dada una interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , definiremos dos funciones de pertenencia  $\mu_A$  y  $\nu_A$  de forma que  $I$  sea una interpretación coherente si y solo si  $A$  es un conjunto intuicionista.

Específicamente, dada una interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , sean  $\mu_A, \nu_A: \Pi_{\mathbb{P}} \rightarrow L$  las aplicaciones definidas como  $\mu_A(p) = I(p)$  y  $\nu_A(p) = I(\sim p)$ , respectivamente. Notemos que  $I(p)$  representa el grado de verdad de  $p$  y  $I(\sim p)$  el grado de “no-verdad” de  $p$ , para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ . Por lo tanto, la definición de  $\mu_A$  y  $\nu_A$  como funciones de pertenencia y no pertenencia, respectivamente, es razonable.

Asumiendo ahora que el operador  $\dot{\sim}$  asociado al símbolo  $\sim$  es involutivo, se puede probar que las desigualdades  $\mu_A(p) \preceq n(\nu_A(p))$  e  $I(\sim p) \preceq \dot{\sim} I(p)$  son equivalentes, de donde se sigue el siguiente resultado.

**Proposición 3.9.** *Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP definido en un retículo multiadjunto con negaciones  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg, \sim)$ . Sea  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  y sean las aplicaciones  $\mu_A, \nu_A: \Pi_{\mathbb{P}} \rightarrow L$  dadas por  $\mu_A(p) = I(p)$  y  $\nu_A(p) = I(\sim p)$ , respectivamente. Si el operador  $\dot{\sim}$  es involutivo, entonces*

$$A = \{\langle p, \mu_A(p), \nu_A(p) \rangle \mid p \in \Pi_{\mathbb{P}}\}$$

*es un conjunto intuicionista difuso en  $\Pi_{\mathbb{P}}$  respecto a  $\dot{\sim}$  si y solo si la interpretación  $I$  es coherente.*

*Demostración.* Por definición,  $A$  es un conjunto intuicionista difuso en  $\Pi_{\mathbb{P}}$  respecto a  $\dot{\sim}$  si y solo si  $\mu_A(p) \preceq \dot{\sim} \nu_A(p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ . De acuerdo con la definición de los operadores  $\mu_A$  y  $\nu_A$ , lo anterior es equivalente a que  $I(p) \preceq \dot{\sim} I(\sim p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ . En otras palabras,  $A$  es un conjunto intuicionista difuso en  $\Pi_{\mathbb{P}}$  respecto a  $\dot{\sim}$  si y solo si la interpretación  $I$  es coherente.  $\square$

Como consecuencia de la Proposición 3.9, podemos afirmar que la noción de coherencia presentada en la Sección 3.4.1.4 absorbe la filosofía de

los conjuntos intuicionistas de Atanassov. Sin embargo, la definición de auto-contradicción no puede relacionarse con los conjuntos intuicionistas en el mismo sentido, puesto que no contempla a los literales  $p$  y  $\sim p$  simultáneamente. Existen trabajos que relacionan ambos conceptos [15, 33], pero los autores se centran en un problema diferente, sin tener en cuenta el fundamento lógico otorgado en la Sección 3.4.1.1.

Como resultado de la discusión realizada en esta sección, en particular de la Proposiciones 3.8 y 3.9, concluimos que la mejor opción para modelar la idea de coherencia en programación lógica multiadjunta normal es la noción de coherencia dada en la Definición 3.20.

### 3.4.2. Medidas de incoherencia

Una vez definida una noción adecuada de coherencia para programas lógicos multiadjuntos normales, para concluir este capítulo, presentaremos diferentes medidas para detectar la información incoherente contenida en un MANLP. Estas medidas, publicadas en [23], permitirán evaluar la calidad del sistema de conocimiento a partir del que surge el MANLP, valorando así mismo la fiabilidad de las consecuencias derivadas del mismo.

Antes de comenzar, incluiremos una versión ampliada de la Definición 3.20, detallando qué entendemos por símbolo proposicional coherente y por un MANLP coherente. De aquí en adelante consideraremos fijado un MANLP  $\mathbb{P}$  definido en un retículo multiadjunto con negaciones  $\mathcal{L} = (L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg, \sim)$ .

**Definición 3.22.** *Dada una interpretación  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , decimos que:*

- $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  es un símbolo proposicional coherente respecto a  $I$  si  $I(\sim p) \preceq \sim I(p)$ . En otro caso, se dirá que  $p$  es incoherente respecto a  $I$ .
- $I$  es una interpretación coherente si  $I(\sim p) \preceq \sim I(p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ .

- $\mathbb{P}$  es coherente si existe al menos un modelo coherente de  $\mathbb{P}$ .

Observemos que, por la Proposición 3.7, se deduce que si  $\mathbb{P}$  tiene modelo mínimo, entonces  $\mathbb{P}$  es coherente si y solo si su modelo mínimo es coherente.

La mencionada proposición nos da una idea clara de cómo se distribuyen las interpretaciones coherentes e incoherentes en el conjunto de interpretaciones  $\mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ . Antes de presentar formalmente la estructura algebraica de  $\mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , denotaremos por  $C_{\mathbb{P}}$  y  $\bar{C}_{\mathbb{P}}$  al conjunto de interpretaciones coherentes y al conjunto de interpretaciones incoherentes de  $\mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ , respectivamente, esto es,

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{P}} &= \{I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}} \mid I(\sim p) \preceq \dot{\sim} I(p) \text{ para cada } p \in \Pi_{\mathbb{P}}\} \\ \bar{C}_{\mathbb{P}} &= \{I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}} \mid I(\sim p) \not\preceq \dot{\sim} I(p) \text{ para algún } p \in \Pi_{\mathbb{P}}\} \end{aligned}$$

La siguiente proposición muestra que el orden  $\sqsubseteq$  proporciona tanto a  $C_{\mathbb{P}}$  como a  $\bar{C}_{\mathbb{P}}$  estructura de semirretículo.

**Proposición 3.10.** *Las siguientes afirmaciones se satisfacen:*

- (1)  $(C_{\mathbb{P}}, \sqsubseteq)$  es un semirretículo inferior.
- (2)  $(\bar{C}_{\mathbb{P}}, \sqsubseteq)$  es un semirretículo superior.

*Demostración.*

- (1) Sea  $\mathcal{I} \subseteq C_{\mathbb{P}}$  una familia arbitraria de interpretaciones coherentes. Por la Proposición 2.15,  $(\mathcal{I}_{\mathbb{P}}, \sqsubseteq)$  forma un retículo completo, luego existe el ínfimo del conjunto  $\mathcal{I}$ , que denotaremos como  $J \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ . Veamos que  $J \in C_{\mathbb{P}}$ , concluyendo así que  $(C_{\mathbb{P}}, \sqsubseteq)$  forma un semirretículo inferior. En otras palabras, hemos de ver que  $J(\sim p) \preceq \dot{\sim} J(p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ .

Sea  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ . Por definición de ínfimo y dado que  $\mathcal{I} \subseteq C_{\mathbb{P}}$ , para cada  $I \in \mathcal{I}$  se cumple que  $J(\sim p) \preceq I(\sim p) \preceq \dot{\sim} I(p)$ . Esto implica que  $J(\sim p)$  es cota inferior del conjunto  $\{\dot{\sim} I(p) \mid I \in \mathcal{I}\}$ , por lo tanto

$$J(\sim p) \preceq \bigwedge_{I \in \mathcal{I}} \dot{\sim} I(p)$$

Ahora bien, ya que  $J(p) \preceq I(p)$  para cada  $I \in \mathcal{I}$ , al ser  $\dot{\sim}$  monótona decreciente, se verifica que  $\dot{\sim} I(p) \preceq \dot{\sim} J(p)$  para cada  $I \in \mathcal{I}$ . Se concluye entonces que

$$J(\sim p) \preceq \bigwedge_{I \in \mathcal{I}} \dot{\sim} I(p) \preceq \dot{\sim} J(p)$$

- (2) Sea  $\mathcal{I} \subseteq \bar{C}_{\mathbb{P}}$  una familia arbitraria de interpretaciones incoherentes, y denotemos como  $J \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  al supremo de dicha familia. Veamos que  $J$  es incoherente, concluyendo así que  $(\bar{C}_{\mathbb{P}}, \sqsubseteq)$  forma un semirretículo superior.

Dado  $I \in \mathcal{I}$ , sea  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  uno de los símbolos proposicionales que hacen que  $I$  sea incoherente, es decir, se verifica  $I(\sim p) \not\preceq \dot{\sim} I(p)$ . Veamos que  $J(\sim p) \not\preceq \dot{\sim} J(p)$ .

Por definición de supremo,  $I(\sim p) \preceq J(\sim p)$ , con lo cual se deduce que  $J(\sim p) \not\preceq \dot{\sim} I(p)$ . Aún más, ya que  $I \sqsubseteq J$ , se cumple que  $I(p) \preceq J(p)$ , luego  $\dot{\sim} J(p) \preceq \dot{\sim} I(p)$ . Esto implica que  $J(\sim p) \not\preceq \dot{\sim} J(p)$ , como queríamos demostrar.  $\square$

Vale la pena mencionar que conocer la estructura algebraica del conjunto de interpretaciones coherentes y del conjunto de interpretaciones incoherentes reduce considerablemente el tiempo computacional de una medida de incoherencia e incrementa por tanto su eficiencia.

Madrid y Ojeda-Aciego [88] presentaron recientemente un interesante estudio sobre medidas de incoherencia en programas lógicos multiadjuntos con negación fuerte. Específicamente, los autores miden el grado

de incoherencia de un símbolo proposicional considerando únicamente su negación, y para ello, haciendo uso de una *medida de información* [88, Definición 7] para asignar un valor real positivo a cada elemento del retículo multiadjunto subyacente. En esta sección, estamos interesados en definir medidas de coherencia directamente a partir del retículo dado, sin necesidad de considerar ninguna función extra.

Nuestra primera propuesta de medida de incoherencia para MANLPs obvia el significado de símbolo proposicional coherente. En particular, se trata de la proporción de símbolos proposicionales incoherentes en  $\Pi_{\mathbb{P}}$ .

**Definición 3.23.** *La medida de incoherencia  $\mathcal{M}_1 : \mathcal{I}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{R}^+$  se define como:*

$$\mathcal{M}_1(I) = \frac{\mathcal{NI}(I)}{|\Pi_{\mathbb{P}}|}$$

siendo  $\mathcal{NI}(I)$  el número de símbolos proposicionales incoherentes respecto a  $I$ .

La medida  $\mathcal{M}_1$  es similar a la medida  $\mathcal{I}_1^G$  introducida en [88]. El principal inconveniente de  $\mathcal{M}_1$  es que no tiene en cuenta en qué medida un símbolo proposicional es incoherente. Por ejemplo, dadas dos interpretaciones  $I, J \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  con  $\mathcal{M}_1(I) = \mathcal{M}_1(J)$ , la definición anterior no permite saber si, dado un símbolo proposicional  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ ,  $p$  es más incoherente respecto a  $I$  o respecto a  $J$ .

A fin de definir una medida de incoherencia capaz de ofrecer información sobre el grado de incoherencia de los símbolos proposicionales, definiremos el conjunto de pares coherentes del retículo  $\mathfrak{L}$ . Dicho conjunto será denotado  $\Delta_{\mathfrak{L}}$  y se define como sigue:

$$\Delta_{\mathfrak{L}} = \{(x, y) \in L \times L \mid y \preceq \sim x\}$$

Notemos que el conjunto  $\Delta_{\mathfrak{L}}$  contiene todos los posibles valores que puede contener una interpretación coherente, es decir, los pares que una interpretación coherente puede asignar a  $(p, \sim p)$ . Aún más, podemos caracterizar las interpretaciones coherentes a través de  $\Delta_{\mathfrak{L}}$ .

**Proposición 3.11** ([88]). *Sea  $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$ . Entonces,  $I$  es coherente si y solo si  $(I(p), I(\sim p)) \in \Delta_{\mathcal{L}}$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$ .*

De acuerdo con la Proposición 3.11, medir la coherencia de una interpretación es equivalente a medir la coherencia de los elementos de  $L \times L$ , es decir, a medir la distancia entre los elementos de  $L \times L$  y el conjunto  $\Delta_{\mathcal{L}}$ . En este sentido, centraremos las siguientes líneas en proponer funciones que nos permitan medir dicha distancia convenientemente.

Sea  $d$  la distancia geodésica del diagrama de Hasse del retículo  $\mathcal{L}$ , en el sentido de la Definición 2.26. Una posible definición de distancia entre un elemento  $(a, b) \in L \times L$  y el conjunto  $\Delta_{\mathcal{L}}$  viene dada por:

$$d_1((a, b), \Delta_{\mathcal{L}}) = d(b, \dot{\sim}(a)) \quad (3.21)$$

En líneas generales, la distancia  $d_1$  cuantifica cuánto ha de ser “reducido”  $b$  para que el par  $(a, b)$  pertenezca a  $\Delta_{\mathcal{L}}$ . En efecto, la definición de  $d_1$  tiene sentido, ya que el par  $(a, \dot{\sim}(a))$  pertenece a  $\Delta_{\mathcal{L}}$  para cada  $a \in L$ . Aún más,  $\dot{\sim}(a)$  es el mayor valor tal que  $(a, \dot{\sim}(a)) \in \Delta_{\mathcal{L}}$ .

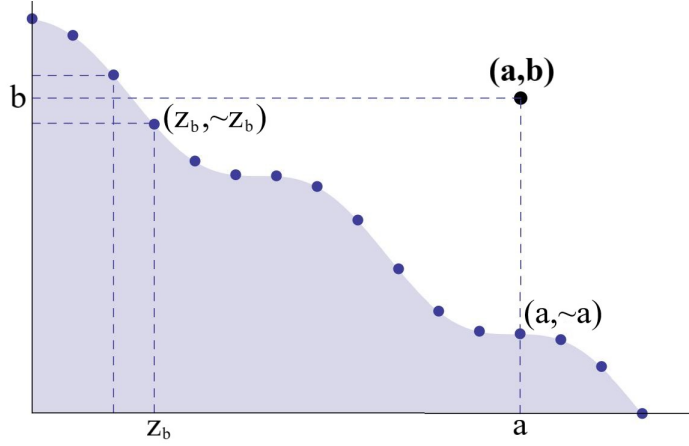
Pese a ello,  $d_1$  tan solo tiene sentido para aquellos pares que no pertenecen a  $\Delta_{\mathcal{L}}$ . De hecho, si  $(a, b) \in \Delta_{\mathcal{L}}$  con  $b \neq \dot{\sim}(a)$ , por ser  $d$  una distancia, se obtiene que  $d_1((a, c), \Delta_{\mathcal{L}}) > 0$ .

Lo esperable es que la distancia de un par  $(a, b) \in \Delta_{\mathcal{L}}$  al conjunto  $\Delta_{\mathcal{L}}$  sea 0, luego la medida  $d_1$  debe ser mejorada. Un resultado similar se obtiene si se considera la distancia  $d_2$  definida como:

$$d_2((a, b), \Delta_{\mathcal{L}}) = d(z_b, a) \quad (3.22)$$

siendo  $z_b = \inf\{z \in L \mid \dot{\sim}z \preceq b\}$ . Cabe destacar que, al ser  $\dot{\sim}$  una negación no necesariamente involutiva, la definición de  $z_b$  es necesaria (ver Figura 3.1).

Observemos que la idea intuitiva de la distancia  $d_1$  es medir cuánto se debe reducir el elemento  $b$  para que  $(a, b)$  sea un par coherente, mientras


 Figura 3.1: Definición de  $z_b$  en la distancia  $d_2$ .

que  $d_2$  mide cuánto ha de reducirse  $a$  para que  $(a, b)$  sea un par coherente. De esta forma, nuestra propuesta para medir el grado de incoherencia de un par  $(a, b) \in L \times L$  es una combinación de las aplicaciones  $d_1$  y  $d_2$ .

Concretamente, el grado de incoherencia de un par  $(a, b) \in L \times L$  se define como:

$$d_G((a, b), \Delta_{\mathcal{E}}) = \inf\{d((a, b), (c, d)) \mid z_b \preceq c \preceq a, d \preceq \sim c\} \quad (3.23)$$

Es fácil ver que, como se pretendía,  $d_G((a, b), \Delta_{\mathcal{E}}) = 0$  si  $(a, b) \in \Delta_{\mathcal{E}}$ .

A partir de la medida de incoherencia para pares dada por  $d_G$ , existen varias formas de definir el grado de incoherencia de una interpretación. Hemos elegido las dos siguientes debido a su simplicidad y utilidad: la medida  $\mathcal{M}_2$  toma el máximo grado de incoherencia de los símbolos proposicionales mientras la medida  $\mathcal{M}_3$  indica el valor medio de incoherencia de los símbolos proposicionales. Formalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(I) &= \max\{d_G((I(p), I(\sim p)), \Delta_{\mathcal{E}}) \mid p \in \Pi_{\mathbb{P}}\} \\ \mathcal{M}_3(I) &= \frac{\sum_{p \in \Pi_{\mathbb{P}}} d_G((I(p), I(\sim p)), \Delta_{\mathcal{E}})}{|\Pi_{\mathbb{P}}|} \end{aligned}$$

A raíz de las medidas de incoherencia  $\mathcal{M}_1(I)$ ,  $\mathcal{M}_2(I)$  y  $\mathcal{M}_3(I)$  para interpretaciones, es posible definir la medida de incoherencia de un MANLP  $\mathbb{P}$ . En particular, para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ , la medida de incoherencia de  $\mathbb{P}$  viene dada por

$$\mathbb{M}_i(\mathbb{P}) = \inf\{\mathcal{M}_i(I) \mid I \text{ es un modelo de } \mathbb{P}\}$$

Claramente, si  $\mathbb{P}$  tiene un modelo mínimo, por la Proposición 3.7, las medidas de incoherencia previas se pueden definir como  $\mathbb{M}_i(\mathbb{P}) = \mathcal{M}_i(M_{\mathbb{P}})$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , siendo  $M_{\mathbb{P}}$  el modelo mínimo de  $\mathbb{P}$ .

A continuación, incluimos un ejemplo para ilustrar las medidas de incoherencia presentadas en esta sección. Por simplicidad, consideraremos un MANLP con un único par adjunto. Veremos en primer lugar que dicho MANLP es coherente, siendo las medidas  $\mathbb{M}_1$ ,  $\mathbb{M}_2$  y  $\mathbb{M}_3$  igual a cero, como uno esperaría. Posteriormente, añadiremos una regla al programa y veremos que pasa a ser incoherente.

**Ejemplo 3.9.** Sea  $(L, \preceq, \&, \leftarrow, \neg, \sim)$  el retículo multiadjunto con negaciones compuesto por el retículo completo  $(L, \preceq)$  dado en la Figura 3.2 y el par adjunto<sup>2</sup>  $(\&, \leftarrow)$  definido como  $x \& y = \inf\{x, y\}$ ,  $z \leftarrow x = \top$  si  $x \preceq z$  y  $z \leftarrow x = z$  en otro caso, para  $x, y, z \in L$ ; y los operadores de negación  $\neg, \sim: L \rightarrow L$  mostrados en la Figura 3.3, que jugarán el papel de negación por defecto y negación fuerte, respectivamente.

Sea  $\mathbb{P}$  el MANLP definido en  $(L, \preceq, \&, \leftarrow, \neg, \sim)$  como:

$$\begin{aligned} r_1 &: \langle p \leftarrow q \& \neg(\sim r); b \rangle \\ r_2 &: \langle \sim p \leftarrow r; d \rangle \\ r_3 &: \langle q \leftarrow s; e \rangle \\ r_4 &: \langle r \leftarrow \top; f \rangle \\ r_5 &: \langle s \leftarrow \top; d \rangle \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Observar que se trata de un par adjunto por ser  $(L, \preceq)$  un retículo distributivo.

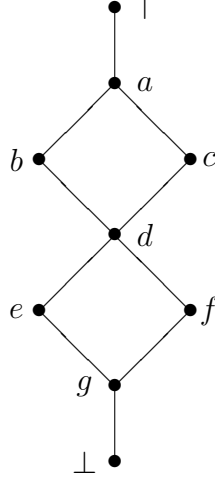


Figura 3.2: Definición del retículo  $(L, \preceq)$ .

$$\dot{\neg} x = \begin{cases} \perp & \text{if } x \not\preceq d \\ \top & \text{if } x \preceq d \end{cases} \quad \dot{\sim} x = \begin{cases} \perp & \text{if } x = \top \\ g & \text{if } d \preceq x \preceq a \\ b & \text{if } x = e \\ c & \text{if } x = f \\ \top & \text{if } x \preceq g \end{cases}$$

Figura 3.3: Definición de las negaciones  $\dot{\neg}$  y  $\dot{\sim}$ .

Se puede ver que  $\mathbb{P}$  tiene un modelo mínimo  $M_{\mathbb{P}}$ , definido como sigue:

$$\begin{array}{ll} M_{\mathbb{P}}(p) = e & M_{\mathbb{P}}(\sim p) = f \\ M_{\mathbb{P}}(q) = e & M_{\mathbb{P}}(\sim q) = \perp \\ M_{\mathbb{P}}(r) = f & M_{\mathbb{P}}(\sim r) = \perp \\ M_{\mathbb{P}}(s) = d & M_{\mathbb{P}}(\sim s) = \perp \end{array}$$

Claramente, los símbolos proposicionales  $p, q, r, s$  son coherentes respecto a  $M_{\mathbb{P}}$ , puesto que  $M_{\mathbb{P}}(\sim x) \preceq \dot{\sim} M_{\mathbb{P}}(x)$  para cada  $x \in \{p, q, r, s\}$ . Por lo tanto, se concluye que  $M_{\mathbb{P}}$  es una interpretación coherente, de donde se sigue que el MANLP  $\mathbb{P}$  es coherente. En efecto, realizando los cálculos pertinentes, se obtiene que  $\mathbb{M}_1(\mathbb{P}) = \mathbb{M}_2(\mathbb{P}) = \mathbb{M}_3(\mathbb{P}) = 0$ .

Ahora, consideremos el programa  $\mathbb{P}$  complementado con la regla  $r_2^* : \langle p \leftarrow r; f \rangle$ . El nuevo MANLP se denotará  $\mathbb{P}^*$ . En este caso, el modelo mínimo de  $\mathbb{P}^*$  existe, denotado  $M_{\mathbb{P}^*}$ , y viene dado por

$$\begin{array}{ll} M_{\mathbb{P}^*}(p) = d & M_{\mathbb{P}^*}(\sim p) = f \\ M_{\mathbb{P}^*}(q) = e & M_{\mathbb{P}^*}(\sim q) = \perp \\ M_{\mathbb{P}^*}(r) = f & M_{\mathbb{P}^*}(\sim r) = \perp \\ M_{\mathbb{P}^*}(s) = d & M_{\mathbb{P}^*}(\sim s) = \perp \end{array}$$

Ya que  $M_{\mathbb{P}^*}(\sim p) = f \not\preceq g = \dot{\sim}(d) = \dot{\sim} M_{\mathbb{P}^*}(p)$ , podemos afirmar que se trata de una interpretación que no es coherente, de acuerdo con la Definición 3.22.

Observemos que  $(M_{\mathbb{P}^*}(p), M_{\mathbb{P}^*}(\sim p)) = (d, f)$  es el único par que no pertenece a  $\Delta_{\mathfrak{L}}$ . Con lo cual, para calcular las medidas de incoherencia  $\mathbb{M}_2(\mathbb{P}^*)$  y  $\mathbb{M}_3(\mathbb{P}^*)$ , tan solo hemos de realizar el cómputo del valor  $d_G((d, f), \Delta_{\mathfrak{L}})$ .

Como  $z_{M_{\mathbb{P}^*}(\sim p)} = z_f = \inf\{z \in L \mid \dot{\sim} z \preceq f\} = d$ , aplicando la definición de  $d_G$  dada por (3.23), obtenemos que

$$\begin{aligned} d_G((d, f), \Delta_{\mathfrak{L}}) &= \inf\{d((d, f), (d, x)) \mid x \preceq \dot{\sim}(d)\} \\ &= \inf\{d((d, f), (d, g)), d((d, f), (d, \perp))\} = \inf\{1, 2\} = 1 \end{aligned}$$

Finalmente, considerando la definición de las medidas  $\mathbb{M}_1$ ,  $\mathbb{M}_2$  y  $\mathbb{M}_3$ , se concluye que

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_1(\mathbb{P}^*) &= \mathcal{M}_1(M_{\mathbb{P}^*}) = \frac{1}{4} = 0.25 \\ \mathbb{M}_2(\mathbb{P}^*) &= \mathcal{M}_2(M_{\mathbb{P}^*}) = \text{máx}\{1, 0, 0, 0\} = 1 \\ \mathbb{M}_3(\mathbb{P}^*) &= \mathcal{M}_3(M_{\mathbb{P}^*}) = \frac{1}{4} = 0.25\end{aligned}$$

La medida de incoherencia  $\mathbb{M}_1$  indica que el porcentaje de símbolos proposicionales incoherentes en el programa  $\mathbb{P}^*$  es 25 %, ya que  $|\Pi_{\mathbb{P}}| = 4$ , se deduce entonces que solo hay un símbolo proposicional incoherente. Por su parte, las medidas  $\mathbb{M}_2$  y  $\mathbb{M}_3$  nos dan información de la medida en la que dicho símbolo proposicional es incoherente. Específicamente, ya que  $\mathbb{M}_2(\mathbb{P}^*) = 1$ , obtenemos que los símbolos proposicionales de  $\mathbb{P}^*$  son o bien coherentes o bien vecinos de símbolos proposicionales coherentes. Por último, dado que  $\mathbb{M}_3(\mathbb{P}^*) = 0.25$ , obtenemos que, en media, los símbolos proposicionales de  $\mathbb{P}$  están cerca de ser coherentes.  $\diamond$

## Capítulo 4

# Extensiones y relaciones de la programación lógica multiadjunta con negaciones

Las dos cualidades principales de un lenguaje de programación lógica son su expresividad y su sencillez. La expresividad de un lenguaje determina a fin de cuentas su utilidad. A mayor expresividad, mayor flexibilidad y mayor rango de situaciones que pueden interpretarse en términos del lenguaje. En otras palabras, un lenguaje expresivamente pobre es un lenguaje inútil en la práctica. Por su parte, la sencillez de un lenguaje delimita su efectividad. Desde un punto de vista computacional, cuantos más elementos se añadan a un programa lógico, más compleja será la definición de su semántica.

En este capítulo, expandiremos la potencia expresiva de los programas lógicos multiadjuntos normales, admitiendo que el agregador en el cuerpo de las reglas tenga componentes monótonas decrecientes e incluyendo un tipo especial de reglas llamadas restricciones. En particular, esto permitirá la consideración de varias negaciones por defecto en la misma regla.

A continuación, llevaremos los programas así definidos, denominados programas lógicos multiadjuntos extendidos, a la menor expresión sintáctica posible que conserve su semántica. Es decir, obtendremos un programa lógico más simple desde un prisma sintáctico, pero con la misma semántica que el programa original.

Para concluir el capítulo, se relacionará un entorno de programación lógica sintácticamente sencillo, conocido como programación lógica núcleo de conjuntos respuesta difusos, con la programación lógica multiadjunta normal, proporcionando un método para obtener programas multiadjuntos semánticamente equivalentes. De esta forma, se posibilita el uso de los resultados de existencia y unicidad de modelos estables mostrados en la Sección 3.3 para los programas lógicos núcleo de conjuntos respuesta difusos.

## 4.1. Programación lógica multiadjunta extendida

En las aplicaciones prácticas, es frecuente encontrar ciertos atributos, propiedades o características cuyo valor de verdad no puede superar un cierto umbral. En efecto, si una propiedad puede expresarse como una fórmula  $\mathcal{B}$ , la situación anterior puede modelarse en un programa lógico mediante el uso de un tipo especial de regla. Específicamente, dado un programa lógico  $\mathbb{P}$ , una fórmula  $\mathcal{B}$  y una cota  $c \in L$ , deseamos que se cumpla la desigualdad  $\hat{M}(\mathcal{B}) \preceq c$  para cada modelo  $M$  de  $\mathbb{P}$ .

Con objeto de reproducir esta condición en un ambiente de programación lógica multiadjunta, proponemos la inclusión de la regla  $\langle c \leftarrow_i \mathcal{B}; \top \rangle$  en el programa, siendo  $(\dot{\&}_i, \dot{\leftarrow}_i)$  uno de los pares adjuntos del retículo subyacente. Este tipo de reglas, en el que un elemento del soporte del retículo aparece en la cabeza de la regla, se conoce usualmente como *restricción*.

Por otro lado, de acuerdo con la filosofía multiadjunta, uno espera que aparezcan diferentes operadores de negación en el cuerpo de las reglas de un MANLP. Esta intuición se hará verosímil mediante el uso de un tipo especial de agregador en el cuerpo de las reglas, cuyos argumentos son monótonos crecientes o decrecientes.

En lo que sigue, introduciremos la sintaxis y la semántica de los programas lógicos multiadjuntos extendidos, presentados en [26], incluyendo tanto restricciones como agregadores con argumentos crecientes y decrecientes. Dichos operadores se denominan agregadores extendidos y se definen formalmente a continuación.

**Definición 4.1.** Sea  $(L, \preceq)$  un retículo completo. Un agregador extendido es una aplicación  $\dot{\textcircled{a}}^e: L^n \rightarrow L$  monótona creciente en las primeras  $m$  componentes y monótona decreciente en las últimas  $n - m$  componentes, con  $m, n \in \mathbb{N}$ . La imagen de un elemento  $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$  bajo  $\dot{\textcircled{a}}^e$  se denotará como

$$\dot{\textcircled{a}}^e(x_1, \dots, x_n) = \dot{\textcircled{a}}^e[x_1, \dots, x_m; x_{m+1}, \dots, x_n]$$

Un retículo multiadjunto  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n)$  enriquecido con una familia de agregadores extendidos  $\dot{\textcircled{a}}_1^e, \dots, \dot{\textcircled{a}}_k^e$ , se denominará retículo multiadjunto extendido, y se denotará  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \textcircled{a}_1^e, \dots, \textcircled{a}_k^e)$ .

El empleo de un retículo multiadjunto extendido y la inclusión de restricciones caracterizan la sintaxis de los programas lógicos multiadjuntos extendidos.

**Definición 4.2.** Sea  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \textcircled{a}_1^e, \dots, \textcircled{a}_k^e)$  un retículo multiadjunto extendido. Un programa lógico multiadjunto extendido  $\mathbb{P}^e$  (EMALP, del inglés, *extended multi-adjoint logic program*) es un conjunto finito de reglas ponderadas de la forma

$$\langle p \leftarrow_i \textcircled{a}^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \vartheta \rangle$$

y restricciones de la forma

$$\langle c \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \top \rangle$$

donde  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $@^e \in \{\dot{@}_1^e, \dots, \dot{@}_k^e\}$ ,  $\vartheta, c \in L$  y  $p, p_1, \dots, p_n \in \Pi$  con  $p_{s_1} \neq p_{s_2}$ , para todo  $s_1, s_2 \in \{1, \dots, n\}$ , con  $s_1 \neq s_2$ .

Veamos que la Definición 4.2 recoge las ideas esbozadas al comienzo de esta sección, esto es, las restricciones imponen una cota superior al cuerpo y los agregadores extendidos permiten la coexistencia de varias negaciones por defecto.

- Por un lado, supongamos que una interpretación  $I$  de un EMALP  $\mathbb{P}$  satisface la regla  $\langle c \leftarrow_i \mathcal{B}; \top \rangle$ . Como resultado, la desigualdad  $\top \preceq \hat{I}(c \leftarrow_i \mathcal{B})$  se satisface, o equivalentemente, por la propiedad de adjunción,  $\hat{I}(\mathcal{B}) \dot{\&}_i \top \preceq c$ . Ya que  $\top$  es el elemento neutro de  $\dot{\&}_i$ , obtenemos que  $\hat{I}(\mathcal{B}) \preceq c$ .

Con lo cual, la inclusión de la restricción  $\langle c \leftarrow_i \mathcal{B}; \top \rangle$  en  $\mathbb{P}$  nos asegura que, en particular, todo modelo  $M$  de  $\mathbb{P}$  verifica la desigualdad  $\hat{M}(\mathcal{B}) \preceq c$ .

- Por otro lado, sea  $\{\dot{\neg}_1, \dots, \dot{\neg}_{n-m}\}$  un conjunto de negaciones y supongamos que deseamos incluir en un EMALP  $\mathbb{P}$  la regla

$$\langle p \leftarrow_i @[p_1, \dots, p_m, \neg_1 p_{m+1}, \dots, \neg_{n-m} p_n]; \vartheta \rangle$$

Definiendo el operador  $@^e: L^n \rightarrow L$  como

$$\dot{@}^e[x_1, \dots, x_m; x_{m+1}, \dots, x_n] = \dot{@}[x_1, \dots, x_m, \neg_1 x_{m+1}, \dots, \neg_{n-m} x_n]$$

es claro que  $@^e$  es monótono creciente en las primeras  $m$  componentes y monótono decreciente en las últimas  $n - m$  componentes. En

otras palabras,  $\dot{\textcircled{e}}$  es un agregador extendido, luego podemos incluir en  $\mathbb{P}$  la regla

$$\langle p \leftarrow_i \dot{\textcircled{e}}[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \vartheta \rangle$$

que es semejante a la original.

Aún más, los agregadores extendidos permiten la composición arbitraria de operadores monótonos, tanto crecientes como decrecientes. En particular, permiten el uso de negaciones anidadas, como  $\dot{\neg}_3 \dot{\neg}_1 \dot{\neg}_1$ .

A continuación, desarrollaremos un ejemplo contextualizado para ilustrar la capacidad expresiva de los programas lógicos multiadjuntos extendidos.

**Ejemplo 4.1.** *Un grupo de expertos ha determinado que controlar el nivel de agua, el nivel de aceite y la temperatura de un motor es crucial para asegurar que funcione adecuadamente. Específicamente, los expertos han llegado a las siguientes conclusiones:*

- (a) *El nivel de agua y el nivel de aceite tienen una incidencia directa en la temperatura del motor. Concretamente, si el nivel de cualquiera de estos es bajo, la temperatura del motor aumenta considerablemente, siendo más perjudicial para el motor la falta de agua que la falta de aceite.*
- (b) *El nivel de aceite así como la temperatura del motor han de ser controladas, pues en caso de que el valor de ambos sea alto, el motor se para.*

Sean  $w, o, t \in [0, 1]$  variables que representan el nivel de agua, el nivel de aceite y la temperatura del motor, respectivamente. A saber, el valor de estas variables es cercano a 1 (respectivamente 0) si el atributo correspondiente presenta un valor alto (respectivamente bajo).

Observemos que el comportamiento detallado en (a) puede modelarse a través de la siguiente regla ponderada:

$$\langle t \leftarrow_P \max\{\neg_S o, \neg_Y w\}; 0.9 \rangle$$

siendo las negaciones  $\neg_S$  y  $\neg_Y$  la negación estándar y la negación de Yager, respectivamente.

Analicemos la regla anterior. En primer lugar, la regla tiene un peso elevado debido a que el nivel de agua y el nivel de aceite tienen un alto impacto en la temperatura del motor, de acuerdo con (a). Además, hacemos uso de diferentes negaciones para modelar la intensidad de dicho impacto, por ser mayor en el caso del nivel de agua que en el nivel de aceite. En efecto,  $\neg_S x \leq \neg_Y x$ , para cada  $x \in [0, 1]$ . Finalmente, ya que es suficiente que el nivel de uno de ellos sea bajo para dar lugar a un incremento en la temperatura del motor, utilizamos el máximo de los valores  $\neg_S o$  y  $\neg_Y w$ .

En cuanto al comportamiento comentado en (b), dado que el motor no puede trabajar con un nivel alto de aceite y una temperatura alta, podemos emplear la siguiente restricción:

$$\langle 0.8 \leftarrow_P o \&_P t; 1 \rangle$$

Así, el valor 0.8 actúa como cota superior de la conjunción, impidiendo que el nivel de aceite y la temperatura del motor sean altos simultáneamente. En este caso, hemos seleccionado el operador  $\&_P$  para representar la conjunción del lenguaje natural, con objeto de tener en cuenta los valores, tanto del nivel de aceite como de la temperatura, y hacerlo con la misma importancia.  $\diamond$

La semántica de los programas lógicos multiadjuntos extendidos se define en términos muy similares a la de los programas lógicos multiadjuntos normales. En particular, está basada en la semántica de los modelos estables. Habitualmente, denotaremos cada interpretación de un EMALP  $\mathbb{P}^e$  de la forma  $I^e$ , y al conjunto de interpretaciones como  $\mathcal{I}_{\mathbb{P}^e}$ . Las nociones de satisfacibilidad y modelo vienen dadas como sigue.

**Definición 4.3.** Dado un EMALP  $\mathbb{P}^e$  y una interpretación  $I^e \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^e}$ , decimos que:

- (1)  $I^e$  satisface una regla  $\langle p \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \vartheta \rangle$  si  $\vartheta \preceq \hat{I}^e(p \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n])$ .
- (2)  $I^e$  satisface una restricción  $\langle c \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \vartheta \rangle$  si  $\vartheta \preceq c \dot{\leftarrow}_i \hat{I}^e(@^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n])$ .
- (3)  $I^e$  es un modelo de  $\mathbb{P}^e$  si  $I^e$  satisface todas las reglas ponderadas y restricciones de  $\mathbb{P}^e$ .

Así como en el caso de MANLPs, el concepto de modelo estable de un EMALP está basado en el reducto Gelfond-Lifschitz. En este caso, dada una interpretación  $I^e$ , en cada regla del EMALP sustituiremos los átomos que aparecen en una componente monótona decreciente del agregador extendido del cuerpo por el valor dado por la interpretación  $I^e$ .

**Definición 4.4.** Sea  $\mathbb{P}^e$  un EMALP e  $I^e \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^e}$ . El reducto de  $\mathbb{P}^e$  con respecto a la interpretación  $I^e$ , denotado  $\mathbb{P}_{I^e}^e$ , es el programa lógico multiadjunto obtenido al sustituir cada regla en  $\mathbb{P}^e$  de la forma<sup>1</sup>

$$\langle l \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \vartheta \rangle$$

con  $l \in \Pi \cup L$ , por la regla

$$\langle l \leftarrow_i @_{I^e}^e[p_1, \dots, p_m]; \vartheta \rangle$$

donde el operador  $\dot{@}_{I^e}^e: L^m \rightarrow L$  viene dado por

$$\dot{@}_{I^e}^e[x_1, \dots, x_m] = \dot{@}^e[x_1, \dots, x_m; I^e(p_{m+1}), \dots, I^e(p_n)] \quad (4.1)$$

para cada  $x_1, \dots, x_m \in L$ .

---

<sup>1</sup>Como  $l \in \Pi \cup L$ , esta transformación es válida tanto para reglas ponderadas como para restricciones.

Observar que como  $\dot{\mathbb{Q}}^e$  es monótono creciente en las primeras  $m$  componentes,  $\dot{\mathbb{Q}}_{I^e}^e$  también lo es, luego el MALP  $\mathbb{P}_{I^e}^e$  está bien definido.

Al igual que en la programación lógica multiadjunta normal, el reducto de un EMALP está estrechamente relacionado con los modelos del programa.

**Proposición 4.1.** *Sea  $\mathbb{P}^e$  un EMALP. Dada una interpretación  $I^e \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^e}$ , se cumple que  $I^e$  es un modelo de  $\mathbb{P}^e$  si y solo si  $I^e$  es un modelo de  $\mathbb{P}_{I^e}^e$ .*

*Demostración.* La demostración es análoga a la de la Proposición 3.3.  $\square$

Los modelos estables de un EMALP se definen como sigue.

**Definición 4.5.** *Sea  $\mathbb{P}^e$  un EMALP. Dada una interpretación  $I^e \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^e}$ , se dice que  $I^e$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}^e$  si  $I^e$  es el modelo mínimo del reducto  $\mathbb{P}_{I^e}^e$ .*

Como se puede esperar, la Proposición 3.4 también se satisface para los programas lógicos multiadjuntos extendidos.

**Proposición 4.2.** *Todo modelo estable de un EMALP  $\mathbb{P}^e$  es un modelo minimal de  $\mathbb{P}^e$ .*

*Demostración.* Aplicando la Proposición 4.1 y teniendo en cuenta que las últimas  $n - m$  componentes de un agregador extendido son monótonas decrecientes, la prueba se sigue de forma análoga a la de la Proposición 3.4.  $\square$

El siguiente ejemplo ilustra la sintaxis y la semántica de los programas lógicos multiadjuntos extendidos. En este caso, a diferencia del Ejemplo 4.1, se desarrollará desde un punto de vista abstracto.

**Ejemplo 4.2.** *Consideremos el retículo multiadjunto extendido*

$$([0, 1], \leq, \&_G, \leftarrow_G, \&_P, \leftarrow_P, \&_L, \leftarrow_L, \mathbb{Q}_1^e, \mathbb{Q}_2^e, \mathbb{Q}_3^e, \mathbb{Q}_4^e, \mathbb{Q}_5^e)$$

siendo  $\dot{\mathbb{Q}}_1^e, \dot{\mathbb{Q}}_2^e, \dot{\mathbb{Q}}_3^e, \dot{\mathbb{Q}}_4^e, \dot{\mathbb{Q}}_5^e: [0, 1]^4 \rightarrow [0, 1]$  los agregadores extendidos definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbb{Q}}_1^e[x, y, z, w] &= \min\left\{\frac{y}{z + w + 0.1}, 1\right\} \\ \dot{\mathbb{Q}}_2^e[x, y, z, w] &= \max\{\dot{\neg}_S z, \dot{\neg}_Y w\} \\ \dot{\mathbb{Q}}_3^e[x, y, z, w] &= \dot{\neg}_S y \\ \dot{\mathbb{Q}}_4^e[x, y, z, w] &= 1 \\ \dot{\mathbb{Q}}_5^e[x, y, z, w] &= \max\{z, 0.7\}\end{aligned}$$

Analicemos la forma de los cinco agregadores extendidos. En primer lugar,  $\dot{\mathbb{Q}}_1^e$  y  $\dot{\mathbb{Q}}_2^e$  son crecientes en los dos primeros argumentos y decrecientes en el tercero y el cuarto. Por su parte,  $\dot{\mathbb{Q}}_3^e$  es decreciente en la segunda componente, y dado que el resto de variables no aparece en su definición, podemos tomar el símbolo “;” entre las variables  $x$  e  $y$ . Así mismo, podemos asumir que  $\dot{\mathbb{Q}}_4^e$  y  $\dot{\mathbb{Q}}_5^e$  son crecientes en todas sus componentes. Como resultado, con objeto de simplificar la notación, hemos escrito  $[x, y, z, w]$  en lugar de  $[x, y, z, w; ]$ .

Dicho esto, sea  $\mathbb{P}^e$  el EMALP dado a continuación, formado por cuatro reglas ponderadas y una restricción.

$$\begin{aligned}r_1^e &: \langle p \leftarrow_P \dot{\mathbb{Q}}_1^e[p, q, s, t] ; 0.5 \rangle & r_4^e &: \langle s \leftarrow_G \dot{\mathbb{Q}}_4^e[p, q, s, t] ; 0.8 \rangle \\ r_2^e &: \langle q \leftarrow_P \dot{\mathbb{Q}}_2^e[p, q, s, t] ; 0.6 \rangle & r_5^e &: \langle t \leftarrow_G \dot{\mathbb{Q}}_5^e[p, q, s, t] ; 0.8 \rangle \\ r_3^e &: \langle 0.7 \leftarrow_L \dot{\mathbb{Q}}_3^e[p, q, s, t] ; 1 \rangle\end{aligned}$$

Notemos que aunque las reglas  $r_1^e$  y  $r_2^e$  representan un comportamiento creciente respecto a  $p$  y  $q$  y decreciente respecto a  $s$  y  $t$ , el cuerpo de la regla  $r_2^e$  contempla el uso de dos negaciones diferentes,  $\dot{\neg}_S$  y  $\dot{\neg}_Y$ , mientras el cuerpo de  $r_1^e$  no puede expresarse en términos de negaciones. Por otro lado, cabe destacar el papel que juega la regla  $r_3^e$  en cuanto al valor que recibe  $q$  en los modelos de  $\mathbb{P}^e$ . A saber, por la propiedad de adjunción y al ser 1 el elemento neutro de  $\dot{\&}_L$ , cualquier interpretación  $M^e$  que satisfaga la regla  $r_3^e$  en  $\mathbb{P}^e$  verifica la desigualdad

$0.3 \leq M^e(q)$ . Con lo cual, la regla  $r_3^e$  exige que la evaluación de  $q$  en cualquier modelo de  $\mathbb{P}^e$  sea mayor o igual que 0.3.

Veamos ahora que la interpretación  $M^e \equiv \{(p, 0.25), (q, 0.4), (s, 0.9), (t, 0.85)\}$  es un modelo de  $\mathbb{P}^e$ . Para la regla  $r_1^e$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} \hat{M}^e \left( p \leftarrow_P \min \left\{ \frac{q}{s+t+0.1}, 1 \right\} \right) &= M^e(p) \dot{\leftarrow}_P \min \left\{ \frac{M^e(q)}{M^e(s) + M^e(t) + 0.1}, 1 \right\} \\ &= 0.25 \dot{\leftarrow}_P \min \left\{ \frac{0.4}{0.9 + 0.85 + 0.1}, 1 \right\} \\ &= 0.25 \dot{\leftarrow}_P 0.216 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $0.5 \leq \hat{M}^e(p \leftarrow_P \min \{ \frac{q}{s+t+0.1}, 1 \})$ , es decir,  $M^e$  satisface la regla  $r_1^e$ . Ahora, para la regla  $r_2^e$ , la siguiente cadena de igualdades se cumple

$$\begin{aligned} \hat{M}^e(q \leftarrow_P \max\{\neg_S s, \neg_Y t\}) &= M^e(q) \dot{\leftarrow}_P \max\{\dot{\neg}_S M^e(s), \dot{\neg}_Y M^e(t)\} \\ &= 0.4 \dot{\leftarrow}_P \max\{\dot{\neg}_S 0.9, \dot{\neg}_Y 0.85\} \\ &= 0.4 \dot{\leftarrow}_P \frac{\sqrt{111}}{20} = \frac{8}{\sqrt{111}} \approx 0.76 \end{aligned}$$

Consecuentemente  $0.6 \leq \hat{M}^e(q \leftarrow_P \max\{\neg_S s, \neg_Y t\})$ , luego  $M^e$  satisface la regla  $r_2^e$ . Aún más, dado que  $0.3 \leq 0.4 = M^e(q)$ , entonces  $M^e$  también satisface la restricción  $r_3^e$ . De forma similar, ya que  $0.8 \leq 0.9 = M^e(s)$ ,  $M^e$  satisface la regla  $r_4^e$ . Finalmente, de acuerdo con los siguientes cálculos, la regla  $r_5^e$  también se satisface.

$$\begin{aligned} \hat{M}^e(t \leftarrow_G \max\{s, 0.7\}) &= M^e(t) \dot{\leftarrow}_G \max\{M^e(s), 0.7\} \\ &= 0.85 \dot{\leftarrow}_G \max\{0.9, 0.7\} \\ &= 0.85 \dot{\leftarrow}_G 0.9 = 0.85 \end{aligned}$$

Con lo cual, se concluye que  $M^e$  satisface todas las reglas de  $\mathbb{P}^e$ , esto es, se trata de un modelo de  $\mathbb{P}^e$ . Sin embargo, se puede comprobar que no es un modelo minimal de  $\mathbb{P}^e$ . Por ejemplo, la interpretación  $N^e \equiv \{(p, \frac{9}{85}), (q, 0.36), (s, 0.8), (t, 0.8)\}$  es otro modelo de  $\mathbb{P}^e$  y claramente  $N^e \sqsubset M^e$ . De donde, por la Proposición 4.2, se deduce que  $M^e$  no es un modelo estable de  $\mathbb{P}^e$ .

## 4.2. SIMPLIFICANDO LOS PROG. LÓGICOS MULTIADJUNTOS EXTENDIDOS

En el resto del ejemplo veremos que  $N^e$  no es un modelo cualquiera de  $\mathbb{P}^e$ , sino un modelo estable. Esto es, veremos que  $N^e$  es el modelo mínimo del reducto de  $\mathbb{P}^e$  con respecto a  $N^e$ , denotado  $\mathbb{P}_{N^e}^e$ , que consiste en las reglas

$$\begin{aligned} r_1^{e^c} &: \langle p \leftarrow_P \min \left\{ \frac{q}{s+t+0.1}, 1 \right\}; 0.5 \rangle & r_4^{e^c} &: \langle s \leftarrow_G 1; 0.8 \rangle \\ r_2^{e^c} &: \langle q \leftarrow_P \max \{0.2, 0.6\}; 0.6 \rangle & r_5^{e^c} &: \langle t \leftarrow_G \max \{s, 0.7\}; 0.8 \rangle \\ r_3^{e^c} &: \langle 0.7 \leftarrow_L 0.64; 1 \rangle \end{aligned}$$

Al ser  $\mathbb{P}_{N^e}^e$  un MALP, aplicando el Teorema 3.3, el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{N^e}^e$  coincide con el punto fijo mínimo de  $T_{\mathbb{P}_{N^e}^e}$ . Además, puesto que todos los operadores del retículo

$$([0, 1], \leq, \&_G, \leftarrow_G, \&_P, \leftarrow_P, \&_L, \leftarrow_L, @_1^e, @_2^e, @_3^e, @_4^e, @_5^e)$$

son continuos, también lo será  $T_{\mathbb{P}_{N^e}^e}$ , luego por el Teorema 3.4 el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{N^e}^e$  puede obtenerse iterando  $T_{\mathbb{P}_{N^e}^e}$  a partir de la interpretación mínima  $I_\perp \equiv \{(p, 0), (q, 0), (s, 0), (t, 0)\}$ .

|                                     | $p$  | $q$  | $s$ | $t$ |
|-------------------------------------|------|------|-----|-----|
| $I_\perp$                           | 0    | 0    | 0   | 0   |
| $T_{\mathbb{P}_{N^e}^e}(I_\perp)$   | 0    | 0.36 | 0.8 | 0.7 |
| $T_{\mathbb{P}_{N^e}^e}^2(I_\perp)$ | 9/80 | 0.36 | 0.8 | 0.8 |
| $T_{\mathbb{P}_{N^e}^e}^3(I_\perp)$ | 9/85 | 0.36 | 0.8 | 0.8 |
| $T_{\mathbb{P}_{N^e}^e}^4(I_\perp)$ | 9/85 | 0.36 | 0.8 | 0.8 |

Tras cuatro iteraciones del operador de consecuencia inmediata, se comprueba que  $N^e$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{N^e}^e$ , luego se trata de un modelo estable de  $\mathbb{P}^e$ .  $\diamond$

## 4.2. Simplificando los programas lógicos multiadjuntos extendidos

En esta sección nos marcaremos el siguiente objetivo: transformar un programa lógico multiadjunto extendido en un programa lógico que sea

sencillo desde un punto de vista sintáctico y que sea semánticamente equivalente al original. Para alcanzar nuestro propósito, nos centraremos en la programación lógica núcleo de conjuntos respuesta difusos. Este ambiente de programación lógica fue introducido en [66] como un lenguaje sencillo y compacto capaz de simular una gran variedad de teorías de programación lógica de conjuntos respuesta difusos existentes en la literatura, tales como [14, 35, 82, 84, 97, 102, 120, 121].

El proceso de transformación se divide en tres etapas:

- (a) En primer lugar, pasaremos de un EMALP a un EMALP sin restricciones cuyos modelos estables coinciden.
- (b) Posteriormente, dado un EMALP sin restricciones, obtendremos un MANLP semánticamente equivalente.
- (c) Finalmente, pasaremos de un MANLP arbitrario a un programa lógico núcleo de conjuntos respuesta difusos tales que sus conjuntos respuesta se corresponden unívocamente con los modelos estables del MANLP.

Gracias a esta simplificación sintáctica, es posible beneficiarse de la expresividad de los programas lógicos multiadjuntos extendidos y al mismo tiempo trabajar computacionalmente en un marco más simple, ganando en efectividad. Parte de los resultados mostrados en esta sección han sido publicados en [26].

### **4.2.1. Programación lógica núcleo de conjuntos respuesta difusos**

En lo que sigue, recordaremos la sintaxis y la semántica de los programas lógicos núcleo de conjuntos respuesta difusos [66]. Para comenzar, introduciremos el concepto de literal núcleo.

**Definición 4.6.** Sea  $\mathcal{A}$  un conjunto,  $(L, \preceq)$  un retículo completo y  $\neg$  una negación. Un literal núcleo es un elemento de la clausura inductiva de  $A \uplus L$  en el álgebra  $\langle L, \neg \rangle$ .

En otras palabras, un literal núcleo es un elemento de  $A$ , un valor de  $L$  o una fórmula de la forma  $\neg l$ , siendo  $l$  un literal núcleo. De acuerdo con la nomenclatura del artículo seminal [66], nos referiremos a los elementos de  $A$  como *átomos*, y a los literales de la forma  $\neg l$  como *literales negados*. Cabe destacar que los átomos de los programas lógicos núcleo de conjuntos respuesta difusos juegan el papel de los símbolos proposicionales en la programación lógica multiadjunta extendida. En lo que sigue, si no hay lugar a confusión, usaremos simplemente *literal* en lugar de literal núcleo.

**Definición 4.7.** Sea  $\mathcal{A}$  un conjunto,  $(L, \preceq)$  un retículo completo y  $\dot{\neg}$  un operador de negación. Un programa lógico núcleo de conjuntos respuesta difusos  $\mathbb{P}^c$  (CFASP, del inglés, *core fuzzy answer set logic program*) es un conjunto finito de reglas de la forma:

$$a \leftarrow f(l_1, \dots, l_n)$$

siendo  $a$  un átomo,  $f: L^n \rightarrow L$  un operador monótono creciente,  $l_1, \dots, l_n$  literales y  $\leftarrow$  una implicación residuada. Diremos que un CFASP es simple si no contiene literales de la forma  $\neg l$ .

Dado un CFASP  $\mathbb{P}^c$ , denotaremos el conjunto de átomos que aparecen en  $\mathbb{P}^c$  como  $\mathcal{A}_{\mathbb{P}^c}$ , mientras que el conjunto de literales que aparecen en  $\mathbb{P}^c$  se denotará  $Lit_{\mathbb{P}^c}$ .

En principio, tanto las implicaciones residuadas como los operadores del cuerpo de las reglas de un CFASP pueden ser diferentes. En este sentido, puede parecer que los CFASPs tienen una naturaleza multiadjunta. A pesar de ello, como veremos a continuación al definir la semántica de estos programas, utilizar diferentes implicaciones residuadas no aporta ningún valor semántico adicional, por lo que no tiene sentido contemplar el uso de más de una implicación residuada.

Dado un CFASP  $\mathbb{P}^c$ , una interpretación es una aplicación  $I^c: \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c} \rightarrow L$ . El conjunto de interpretaciones asociadas a  $\mathbb{P}^c$  se denotará  $\mathcal{I}_{\mathbb{P}^c}$ . De manera similar a los EMALPs, las nociones de satisfacibilidad y modelo se definen como sigue.

**Definición 4.8.** Sea  $\mathbb{P}^c$  un CFASP e  $I^c \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^c}$  una interpretación. Se dice que  $I^c$  satisface una regla  $r \in \mathbb{P}^c$  si  $\hat{I}^c(r) = \top$ . Un modelo de  $\mathbb{P}^c$  es una interpretación que satisface todas las reglas de  $\mathbb{P}^c$ .

Por definición, una interpretación  $I^c \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^c}$  satisface una regla  $a \leftarrow f(l_1, \dots, l_n)$  de un CFASP  $\mathbb{P}^c$  si y solo si  $\hat{I}^c(a \leftarrow f(l_1, \dots, l_n)) = \top$ . Ahora bien, por ser  $\leftarrow$  una implicación residuada, existe un operador  $\dot{\&}$  tal que  $(\dot{\&}, \dot{\leftarrow})$  forma un par adjunto. Así, por la propiedad de adjunción, la interpretación  $I^c$  satisface la regla  $a \leftarrow f(l_1, \dots, l_n)$  si y solo si

$$\hat{I}^c(f(l_1, \dots, l_n)) = \top \dot{\&} \hat{I}^c(a) \preceq I^c(a)$$

Claramente, la desigualdad anterior no depende del par adjunto  $(\dot{\&}, \dot{\leftarrow})$ , con lo cual se concluye que la satisfacibilidad de las reglas de un CFASP no depende de las implicaciones residuadas elegidas. Por lo tanto, en pos de no añadir elementos sintácticos innecesarios, abogamos por asumir que los CFASPs se construyen a partir de una única implicación residuada en lugar de varias. Es decir, la verdadera naturaleza de un CFASP es residuada y no multiadjunta.

La semántica de los CFASPs se basa en la noción de conjunto respuesta. La siguiente definición formaliza este concepto para el caso de CFASPs simples, esto es, sin literales negados.

**Definición 4.9.** Sea  $\mathbb{P}^c$  un CFASP simple. Una interpretación  $I^c \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^c}$  es un conjunto respuesta difuso (o simplemente conjunto respuesta) de  $\mathbb{P}^c$  si  $I^c$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}^c$ .

Es claro entonces que los CFASPs simples tienen un único conjunto respuesta. Ahora, dado un CFASP arbitrario, sus conjuntos respuesta se definen en términos de una noción similar al reducto Gelfond-Lifschitz [57].

**Definición 4.10.** Sea  $\mathbb{P}^c$  un CFASP e  $I^c \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^c}$ .

- El reducto de un literal  $l$  respecto a  $I^c$  se define como  $l^{I^c} = l$  si  $l \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c} \cup L$ , y  $l^{I^c} = \hat{I}^c(l)$  si  $l$  es un literal negado.
- El reducto de  $\mathbb{P}^c$  respecto a  $I^c$ , denotado  $\mathbb{P}_{I^c}^c$ , se define como el conjunto de reglas de la forma

$$a \leftarrow f(l_1^{I^c}, \dots, l_n^{I^c})$$

donde  $a \leftarrow f(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{P}^c$ .

Una vez definido el reducto de un CFASP respecto a una interpretación, estamos en disposición de fijar la noción de conjunto respuesta para un CFASP arbitrario.

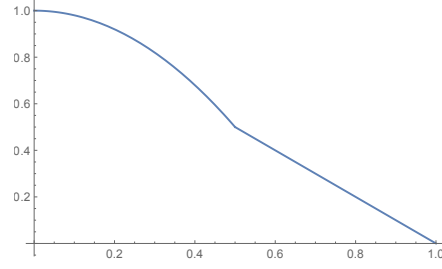
**Definición 4.11.** Sea  $\mathbb{P}^c$  un CFASP. Se dice que una interpretación  $I^c \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^c}$  es un conjunto respuesta de  $\mathbb{P}^c$  si  $I^c$  es el conjunto respuesta de  $\mathbb{P}_{I^c}^c$ .

El siguiente ejemplo tiene por término facilitar un buen entendimiento de la sintaxis y la semántica de los CFASPs.

**Ejemplo 4.3.** Sean  $\mathcal{A}_{\mathbb{P}^c} = \{p, q, s, t, u\}$ ,  $([0, 1], \leq)$  el retículo completo formado por el intervalo unidad y el orden usual en  $\mathbb{R}$  y  $\dot{\neg}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  el operador de negación dado por

$$\dot{\neg} x = \begin{cases} 1 - 2x^2 & \text{si } x \leq 0.5 \\ 1 - x & \text{si } x > 0.5 \end{cases}$$

para cada  $x \in [0, 1]$ . La gráfica de  $\dot{\neg}$  se representa en la Figura 4.1.


 Figura 4.1: Gráfica de  $\dot{\neg}$ .

Las siguientes cinco reglas forman un CFASP, denotado por  $\mathbb{P}^c$ :

$$\begin{aligned} r_1^c &: p \leftarrow_G \frac{1+s}{2} \\ r_2^c &: p \leftarrow_G q \&_P \neg \neg s \\ r_3^c &: q \leftarrow_G 0.8 \\ r_4^c &: s \leftarrow_G \text{máx}\{\neg q, t/2\} \\ r_5^c &: t \leftarrow_G \neg u \end{aligned}$$

En primer lugar, observemos que claramente  $\dot{\leftarrow}_G$  es una implicación residuada. Consideremos ahora las aplicaciones  $\dot{f}_1, \dot{f}_3, \dot{f}_5: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  y  $\dot{f}_2, \dot{f}_4: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  definidas, para cada  $x, y \in [0, 1]$ , como  $\dot{f}_1(x) = \frac{1+x}{2}$ ,  $\dot{f}_2(x, y) = x \&_P y$ ,  $\dot{f}_3(x) = 0.8$ ,  $\dot{f}_4(x, y) = \text{máx}\{x, y/2\}$  y  $\dot{f}_5(x) = x$ . Puesto que se tratan de aplicaciones monótonas crecientes, se concluye que el programa  $\mathbb{P}^c$  está bien definido, esto es, se trata efectivamente de un CFASP.

Veamos ahora si la interpretación  $I^c \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^c}$  dada por

$$I^c \equiv \{(p, 0.4), (q, 0.9), (s, 0.3), (t, 0.1), (u, 0.7)\}$$

es un modelo de  $\mathbb{P}^c$ . Claramente,  $I^c$  satisface la regla  $r_3^c$ , ya que

$$\hat{I}^c(r_3^c) = I^c(q) \dot{\leftarrow}_G 0.8 = 0.9 \dot{\leftarrow}_G 0.8 = 1$$

Además, realizando los cálculos pertinentes, se comprueba que  $I^c$  también satis-

face la regla  $r_2^c$ :

$$\begin{aligned}\hat{I}^c(r_2^c) &= I^c(p) \dot{\leftarrow}_G I^c(q) \dot{\&}_P \hat{I}^c(\neg\neg s) = I^c(p) \dot{\leftarrow}_G I^c(q) \dot{\&}_P \dot{\neg} \dot{\neg} I^c(s) \\ &= 0.4 \dot{\leftarrow}_G 0.9 \dot{\&}_P \dot{\neg} \dot{\neg} 0.3 = 0.4 \dot{\leftarrow}_G 0.9 \dot{\&}_P \dot{\neg} 0.82 \\ &= 0.4 \dot{\leftarrow}_G 0.9 \dot{\&}_P 0.18 = 1\end{aligned}$$

Sin embargo, como se comprueba a continuación,  $I^c$  no satisface la regla  $r_1^c$ .

$$\hat{I}^c(r_1^c) = I^c(p) \dot{\leftarrow}_G \frac{1 + I^c(s)}{2} = 0.4 \dot{\leftarrow}_G \frac{1 + 0.3}{2} = 0.4 \dot{\leftarrow}_G 0.65 = 0.4$$

Al ser  $\hat{I}^c(r_1^c) \neq 1$ , la regla  $r_1^c$  no se satisface, con lo cual se concluye que  $I^c$  no es un modelo del CFASP  $\mathbb{P}^c$ . Además, observemos que la regla  $r_1^c$  no contiene literales negados, luego su correspondiente regla en el reducto  $\mathbb{P}_{I^c}^c$  es la propia regla  $r_1^c$ . De donde podemos afirmar que  $I^c$  tampoco es un modelo de  $\mathbb{P}_{I^c}^c$ , y por tanto no es un conjunto respuesta de  $\mathbb{P}^c$ .  $\diamond$

#### 4.2.2. Transformando EMALPs en EMALPs sin restricciones

Comenzaremos aquí el proceso para transformar un programa lógico multiadjunto extendido en un programa lógico núcleo de conjuntos respuesta difusos que sea semánticamente equivalente al original. Este apartado se dedicará a la primera de las tres etapas descritas al principio de la Sección 4.2. Específicamente, se proporcionará un método para transformar las restricciones de un EMALP en reglas ponderadas de forma que la semántica del EMALP así obtenido coincida con la del EMALP original. Hasta donde sabemos, el único mecanismo de esta índole existente en la literatura puede encontrarse en [66]. En los siguientes párrafos veremos que dicho mecanismo puede adaptarse directamente a nuestro marco de trabajo, y lo mejoraremos desarrollando un método propio que requiere un número menor de reglas ponderadas para simular una restricción.

Consideremos un EMALP  $\mathbb{P}^e$  definido en un retículo multiadjunto extendido  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, @_1^e, \dots, @_k^e)$ . El principal obstáculo para incluir una restricción de  $\mathbb{P}^e$  de la forma

$$r : \quad \langle c \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \top \rangle$$

en un MANLP es que  $c$  no es un símbolo proposicional, sino un elemento del retículo  $L$ . Ahora bien, supongamos que existe un símbolo proposicional  $p_c$  tal que cualquier modelo estable  $M^e$  de  $\mathbb{P}^e$  cumple  $M^e(p_c) = c$ . En tal caso, ya que la semántica de  $\mathbb{P}^e$  viene dada en términos de sus modelos estables, la regla  $r$  es semánticamente equivalente a la regla

$$r^* : \quad \langle p_c \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \top \rangle$$

Con lo cual, los modelos estables del EMALP  $\mathbb{P}^{\bar{e}} = \mathbb{P}^e \setminus \{r\} \cup \{r^*\}$  coinciden con los modelos estables de  $\mathbb{P}^e$ .

Como resultado de lo anterior, para eliminar la restricción  $r$  de  $\mathbb{P}^e$ , es suficiente incluir un nuevo símbolo proposicional  $p_c$  y asegurar que  $M^e(p_c) = c$  para cada modelo estable  $M^e$  de  $\mathbb{P}^e$ . Janssen et al. [66] crean tal símbolo proposicional incluyendo en el programa las siguientes reglas ponderadas:

$$\begin{aligned} r_c^1 & : \quad \langle p_c \leftarrow c; \top \rangle \\ r_c^2 & : \quad \langle p_\perp \leftarrow g_\perp(\neg p_\perp) \ \& \ g_c(p_c); \top \rangle \end{aligned}$$

donde  $p_\perp$  es un nuevo símbolo proposicional que no está en  $\mathbb{P}^e$  ( $p_\perp \notin \Pi_{\mathbb{P}^e}$ ),  $\dot{\leftarrow} \in \{\dot{\leftarrow}_1, \dots, \dot{\leftarrow}_n\}$ ,  $\dot{\&} \in \{\dot{\&}_1, \dots, \dot{\&}_n\}$ ,  $\dot{\neg}$  es un operador de negación arbitrario, y la aplicación  $\dot{g}_c: L \rightarrow L$  se define para cada  $c, x \in L$  como

$$\dot{g}_c(x) = \begin{cases} \top & \text{si } c \prec x \\ \perp & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observar que  $\dot{g}_c$  es monótona creciente para cada  $c \in L$ , luego la aplicación  $@^e: L^2 \rightarrow L$  dada por

$$@^e[x; y] = \dot{g}_\perp(\dot{\neg} y) \ \dot{\&} \ \dot{g}_c(x)$$

es creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo. Esto es,  $\dot{\textcircled{a}}^e$  es un agregador extendido, y por tanto la regla  $r_c^2$  puede incluirse en un programa lógico multiadjunto extendido.

Procediendo con el argumento anterior para cada restricción de  $\mathbb{P}^e$ , obtenemos un EMALP sin restricciones semánticamente equivalente a  $\mathbb{P}^e$ . Concretamente, sea  $\mathcal{C}_{\mathbb{P}^e}$  el conjunto de restricciones de  $\mathbb{P}^e$  y  $\mathcal{K}_{\mathbb{P}^e}$  el conjunto de elementos que aparecen en la cabeza de alguna restricción, esto es,  $\mathcal{K}_{\mathbb{P}^e} = \{c \mid \langle c \leftarrow_i \mathcal{B}; \top \rangle \in \mathcal{C}_{\mathbb{P}^e}\}$ . El correspondiente EMALP sin restricciones de  $\mathbb{P}^e$ , denotado  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ , viene dado según [66] por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{\tilde{e}} = & \{r \mid r \in \mathbb{P}^e \setminus \mathcal{C}_{\mathbb{P}^e}\} \\ & \cup \{\langle p_c \leftarrow_i \mathcal{B}; \top \rangle \mid \langle c \leftarrow_i \mathcal{B}; \top \rangle \in \mathcal{C}_{\mathbb{P}^e}\} \\ & \cup \{\langle p_c \leftarrow c; \top \rangle \mid c \in \mathcal{K}_{\mathbb{P}^e}\} \\ & \cup \{\langle p_{\perp} \leftarrow g_{\perp}(\neg p_{\perp}) \ \& \ g_c(p_c); \top \rangle \mid c \in \mathcal{K}_{\mathbb{P}^e}\} \end{aligned}$$

Siguiendo un razonamiento análogo al dado en [66], se puede ver que los modelos estables de  $\mathbb{P}^e$  se corresponden con los modelos estables de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ .

Ahora, si prestamos atención al número de reglas ponderadas necesarias para transformar  $\mathbb{P}^e$  en  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ , observamos que dicho número no solo depende del número de restricciones, sino que también depende del cardinal de  $\mathcal{K}_{\mathbb{P}^e}$ . En particular, dicho número es  $|\mathcal{C}_{\mathbb{P}^e}| + 2|\mathcal{K}_{\mathbb{P}^e}|$ . Como resultado, el programa  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  tiene  $2|\mathcal{K}_{\mathbb{P}^e}|$  reglas más que el EMALP original  $\mathbb{P}^e$ .

En lo que sigue, proponemos un nuevo procedimiento para transformar  $\mathbb{P}^e$  en un EMALP sin restricciones de forma que el número de reglas del nuevo programa coincida con el número de reglas de  $\mathbb{P}^e$ . Aún más, dicho procedimiento tal solo requiere añadir un nuevo símbolo proposicional, mientras que la estrategia presentada en [66] exige incluir  $|\mathcal{K}_{\mathbb{P}^e}| + 1$  nuevos símbolos proposicionales.

Consideremos las aplicaciones  $\dot{f}_c: L \rightarrow L$  definidas para cada  $c, x \in L$

como

$$\dot{f}_c(x) = \begin{cases} \perp & \text{si } x \preceq c \\ \top & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observemos que las aplicaciones  $\dot{g}_c$  y  $\dot{f}_c$  son diferentes en general, ya que si  $x$  y  $c$  son incomparables, esto es  $c \not\preceq x$  y  $x \not\preceq c$ , entonces  $\dot{g}_c(x) = \perp \neq \top = \dot{f}_c(x)$ . El correspondiente EMALP sin restricciones de un EMALP se define formalmente como sigue.

**Definición 4.12.** Sea  $\mathbb{P}^e$  un EMALP y  $\mathcal{C}_{\mathbb{P}^e}$  el conjunto de restricciones de  $\mathbb{P}^e$ . El correspondiente EMALP sin restricciones de  $\mathbb{P}^e$ , denotado  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ , se define como:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{\tilde{e}} &= \{r \mid r \in \mathbb{P}^e \setminus \mathcal{C}_{\mathbb{P}^e}\} \\ &\cup \{ \langle p_{\perp} \leftarrow_i f_{\perp}(\neg p_{\perp}) \& f_c(\mathcal{B}); \top \rangle \mid \langle c \leftarrow_i \mathcal{B}; \top \rangle \in \mathcal{C}_{\mathbb{P}^e} \} \end{aligned}$$

donde  $p_{\perp} \notin \Pi_{\mathbb{P}^e}$ ,  $\&$  es una conjunción del retículo multiadjunto extendido subyacente y  $\dot{\neg}$  es un operador de negación.

Notemos que si el conjunto de símbolos proposicionales de un EMALP  $\mathbb{P}^e$  es  $\Pi_{\mathbb{P}^e}$ , entonces el conjunto de símbolos proposicionales del correspondiente EMALP sin restricciones de  $\mathbb{P}^e$  es  $\Pi_{\mathbb{P}^e} \cup \{p_{\perp}\}$ .

Veamos que el programa dado por la Definición 4.12 está bien definido, es decir, veamos que  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  es un EMALP sin restricciones. Dada una regla de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  de la forma

$$r^{\tilde{e}} : \quad \langle p_{\perp} \leftarrow_i f_{\perp}(\neg p_{\perp}) \& f_c(@^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]); \top \rangle$$

ya que  $\dot{\neg}$  es monótona decreciente y  $\dot{f}_c$  es monótona creciente para cada  $c \in L$ , se deduce que el operador  $@^{\tilde{e}} : L^{n+1} \rightarrow L$  definido como

$$@^{\tilde{e}}[x_1, \dots, x_m; x_{m+1}, \dots, x_n, x_{\perp}] = \dot{f}_{\perp}(\dot{\neg} x_{\perp}) \& \dot{f}_c(@^e[x_1, \dots, x_m; x_{m+1}, \dots, x_n])$$

es monótona creciente en las primeras  $m$  componentes y decreciente en las últimas  $n - m + 1$  componentes. Como resultado,  $@^{\tilde{e}}$  es un agregador extendido, luego el programa  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  es, en efecto, un EMALP sin restricciones.

Falta ver que los modelos estables de un EMALP se corresponden unívocamente con los modelos estables de su correspondiente EMALP sin restricciones. Para alcanzar este propósito, probaremos dos resultados:

1. En primer lugar, proporcionaremos una relación inyectiva entre los modelos estables de un EMALP y una familia de modelos estables de su correspondiente EMALP sin restricciones.
2. A continuación, probaremos que todo modelo estable del EMALP sin restricciones pertenece a dicha familia.

Así, de acuerdo con las dos afirmaciones anteriores, se concluye que los modelos estables de  $\mathbb{P}^e$  se corresponden unívocamente con los de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ .

Antes de demostrar el primero de los ítems, introduciremos un lema previo que relaciona los modelos del reducto de un EMALP con los modelos del reducto de su correspondiente EMALP sin restricciones.

**Lema 4.1.** *Sea  $\mathbb{P}^e$  un EMALP y  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  el correspondiente EMALP sin restricciones de  $\mathbb{P}^e$ . Sean  $M^e, N^e \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^e}$  dos interpretaciones y consideremos las interpretaciones  $M^{\tilde{e}}, N^{\tilde{e}} \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  dadas por  $M^{\tilde{e}}(p) = M^e(p)$  y  $N^{\tilde{e}}(p) = N^e(p)$  si  $p \in \Pi_{\mathbb{P}^e}$  y  $M^{\tilde{e}}(p_{\perp}) = N^{\tilde{e}}(p_{\perp}) = \perp$ . Entonces,  $N^e$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_{M^e}^e$  si y solo si  $N^{\tilde{e}}$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$ .*

*Demostración.* Dada una regla  $r^e$  de  $\mathbb{P}^e$ , denotemos por  $r^{\tilde{e}}$  a su correspondiente regla en  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ , y sean  $r_{M^e}^e$  y  $r_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  sus respectivas reglas en los reductos  $\mathbb{P}_{M^e}^e$  y  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$ .

Observemos que si  $r^e \in \mathbb{P}^e \setminus \mathcal{C}_{\mathbb{P}^e}$ , entonces  $r^{\tilde{e}} = r^e$ . Además, ya que el símbolo proposicional  $p_{\perp}$  no aparece en la regla  $r^e$  y  $M^{\tilde{e}}(p) = M^e(p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}^e}$ , se obtiene que  $r_{M^e}^e = r_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$ . Como  $N^{\tilde{e}}(p) = N^e(p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}^e}$ , se deduce que  $N^e$  satisface la regla  $r_{M^e}^e$  si y solo si  $N^{\tilde{e}}$  satisface  $r_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$ .

Supongamos ahora que  $r^e \in \mathcal{C}_{\mathbb{P}^e}$  es una restricción de la forma

$$\langle c \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \top \rangle$$

Por definición, su correspondiente regla en el reducto  $\mathbb{P}_{M^e}^e$  será de la forma

$$r_{M^e}^e : \quad \langle c \leftarrow_i \mathcal{B}_{M^e}; \top \rangle$$

siendo  $\mathcal{B}_{M^e} = @^e[p_1, \dots, p_m; M^e(p_{m+1}), \dots, M^e(p_n)]$ . Por tanto  $N^e$  satisface la regla  $r_{M^e}^e$  si y solo si  $\top \preceq N^e(c) \dot{\leftarrow}_i \hat{N}^e(\mathcal{B}_{M^e}) = c \leftarrow_i \hat{N}^e(\mathcal{B}_{M^e})$ . De acuerdo con la propiedad de adjunción y al ser  $\top$  el elemento neutro de  $\&_i$ , se deduce entonces que  $N^e$  satisface la regla  $r_{M^e}^e$  si y solo si  $\hat{N}^e(\mathcal{B}_{M^e}) \preceq c$ .

Por otro lado, por la Definición 4.12, la regla  $r^{\tilde{e}}$  viene dada por

$$\langle p_{\perp} \leftarrow_i f_{\perp}(\neg p_{\perp}) \& f_c(@^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]); \top \rangle$$

De donde, obtenemos que la regla  $r_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  en el reducto  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  viene dada por

$$\langle p_{\perp} \leftarrow_i f_{\perp}(M^{\tilde{e}}(\neg p_{\perp})) \& f_c(\mathcal{B}_{M^{\tilde{e}}}); \top \rangle$$

con  $\mathcal{B}_{M^{\tilde{e}}} = @^e[p_1, \dots, p_m; M^{\tilde{e}}(p_{m+1}), \dots, M^{\tilde{e}}(p_n)]$ . Se tiene entonces que  $N^{\tilde{e}}$  satisface la regla  $r_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  si y solo si

$$\top \preceq N^{\tilde{e}}(p_{\perp}) \dot{\leftarrow}_i \left( \dot{f}_{\perp}(\hat{M}^{\tilde{e}}(\neg p_{\perp})) \dot{\&} \dot{f}_c(\hat{N}^{\tilde{e}}(\mathcal{B}_{M^{\tilde{e}}})) \right) \quad (4.2)$$

Por un lado, ya que  $p_{\perp} \notin \Pi_{\mathbb{P}^e}$ , entonces  $M^{\tilde{e}}(p_i) = M^e(p_i)$  para cada  $i \in \{m+1, \dots, n\}$ , con lo cual  $\mathcal{B}_{M^{\tilde{e}}} = \mathcal{B}_{M^e}$ . Además, ya que  $\hat{N}^{\tilde{e}}(\mathcal{B}_{M^e}) = \hat{N}^e(\mathcal{B}_{M^e})$ , obtenemos que

$$\hat{N}^{\tilde{e}}(\mathcal{B}_{M^{\tilde{e}}}) = \hat{N}^{\tilde{e}}(\mathcal{B}_{M^e}) = \hat{N}^e(\mathcal{B}_{M^e}) \quad (4.3)$$

Por otro lado, por definición de la interpretación  $M^{\tilde{e}}$ ,  $M^{\tilde{e}}(p_{\perp}) = \perp$ , lo que nos lleva a la siguiente cadena de igualdades

$$\dot{f}_{\perp}(\hat{M}^{\tilde{e}}(\neg p_{\perp})) = \dot{f}_{\perp}(\dot{\neg} M^{\tilde{e}}(p_{\perp})) = \dot{f}_{\perp}(\dot{\neg} \perp) = \dot{f}_{\perp}(\top) = \top \quad (4.4)$$

Sustituyendo las expresiones (4.3) y (4.4) en (4.2) y teniendo en cuenta que  $\top$  es el elemento neutro del conjuntor  $\dot{\&}$ , se sigue entonces que  $N^{\tilde{e}}$  satisface la regla  $r_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  si y solo si

$$\top \preceq N^{\tilde{e}}(p_{\perp}) \dot{\leftarrow}_i \dot{f}_c(\hat{N}^e(\mathcal{B}_{M^e}))$$

o equivalentemente, si y solo si  $\dot{f}_c(\hat{N}^e(\mathcal{B}_{M^e})) \preceq N^{\tilde{e}}(p_{\perp})$ .

Ahora bien, ya que  $N^{\tilde{e}}(p_{\perp}) = \perp$ , la expresión anterior puede ser expresada como  $\dot{f}_c(\hat{N}^e(\mathcal{B}_{M^e})) = \perp$ . Por definición de la aplicación  $\dot{f}_c$ , se obtiene entonces que  $N^{\tilde{e}}$  satisface la regla  $r_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  si y solo si  $\hat{N}^e(\mathcal{B}_{M^e}) \preceq c$ . En otras palabras, si y solo si  $N^e$  satisface la regla  $r_{M^e}^e$ .

Consecuentemente, ya que se ha tomado una regla arbitraria  $r^e$  de  $\mathbb{P}^e$ , se concluye que  $N^e$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_{M^e}^e$  si y solo si  $N^{\tilde{e}}$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$ .  $\square$

Estamos en disposición de presentar el primero de los principales resultados de esta sección, que establece una relación inyectiva entre los modelos estables de un EMALP y los modelos estables de su correspondiente EMALP sin restricciones.

**Teorema 4.1.** *Sea  $\mathbb{P}^e$  un EMALP y  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  el correspondiente EMALP sin restricciones de  $\mathbb{P}^e$ . Sea  $M^e \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^e}$  una interpretación y consideremos la interpretación  $M^{\tilde{e}} \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  definida como  $M^{\tilde{e}}(p) = M^e(p)$  si  $p \in \Pi_{\mathbb{P}^e}$  y  $M^{\tilde{e}}(p_{\perp}) = \perp$ . Entonces,  $M^e$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}^e$  si y solo si  $M^{\tilde{e}}$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ .*

*Demostración.* Aplicando el Lema 4.1, en particular,  $M^e$  es un modelo de  $\mathbb{P}_{M^e}^e$  si y solo si  $M^{\tilde{e}}$  es un modelo de  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$ . Por lo tanto, para probar el Teorema 4.1 es suficiente ver que  $M^e$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^e}^e$  si y solo si  $M^{\tilde{e}}$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$ . Realizaremos una demostración por reducción al absurdo.

Por una parte, supongamos que  $M^{\tilde{e}}$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  pero existe un modelo  $N^e: \Pi_{\mathbb{P}^e} \rightarrow L$  de  $\mathbb{P}_{M^e}^e$  tal que  $N^e \sqsubset M^e$ . Como resultado,

por el Lema 4.1, la interpretación  $N^{\tilde{e}} \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  dada por  $N^{\tilde{e}}(p) = N^e(p)$  si  $p \in \Pi_{\mathbb{P}^e}$  y  $N^{\tilde{e}}(p_{\perp}) = \perp$  es un modelo de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}_{M^{\tilde{e}}}$ . Claramente  $N^{\tilde{e}} \sqsubset M^{\tilde{e}}$ , con lo cual llegamos a una contradicción con la minimalidad de  $M^{\tilde{e}}$  como modelo de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}_{M^{\tilde{e}}}$ .

Supongamos ahora que  $M^e$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}^e_{M^e}$  y que existe un modelo  $N^{\tilde{e}}: \Pi_{\mathbb{P}^e} \cup \{p_{\perp}\} \rightarrow L$  de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}_{M^{\tilde{e}}}$  con  $N^{\tilde{e}} \sqsubset M^{\tilde{e}}$ . Sea  $N^e$  la restricción de la interpretación  $N^{\tilde{e}}$  al conjunto  $\Pi_{\mathbb{P}^e}$ , denotada  $N^{\tilde{e}}|_{\Pi_{\mathbb{P}^e}}$ . Dado que por definición  $M^{\tilde{e}}(p_{\perp}) = \perp = N^{\tilde{e}}(p_{\perp})$ , debe ser

$$N^e = N^{\tilde{e}}|_{\Pi_{\mathbb{P}^e}} \sqsubset M^{\tilde{e}}|_{\Pi_{\mathbb{P}^e}} = M^e$$

Ahora bien, como  $N^{\tilde{e}}$  es un modelo de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}_{M^{\tilde{e}}}$ , del Lema 4.1 se deduce que  $N^e$  es un modelo de  $\mathbb{P}^e_{M^e}$ . Con lo cual obtenemos que  $M^e$  no es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}^e_{M^e}$  en contradicción con la hipótesis.

Concluimos pues que  $M^e$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}^e_{M^e}$  si y solo si  $M^{\tilde{e}}$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}_{M^{\tilde{e}}}$ . En otras palabras,  $M^e$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}^e$  si y solo si  $M^{\tilde{e}}$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ , como queríamos demostrar.  $\square$

Dado un EMALP, tiene sentido preguntarse si existen modelos estables de su correspondiente EMALP sin restricciones tales que el valor asignado al símbolo proposicional  $p_{\perp}$  no coincide con el elemento  $\perp$  del retículo  $(L, \preceq)$ . De ser así, tales modelos estables no se contemplan en la caracterización dada en el Teorema 4.1.

El siguiente resultado muestra que la situación anterior es imposible, esto es, que todo modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  asigna al símbolo  $p_{\perp}$  el valor  $\perp$ . De esta forma, podemos afirmar que el Teorema 4.1 presenta una relación biyectiva entre los modelos estables de  $\mathbb{P}^e$  y los modelos estables de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ .

**Teorema 4.2.** *Sea  $\mathbb{P}^e$  un EMALP y  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  su correspondiente EMALP sin restricciones. Si  $M^{\tilde{e}} \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ , entonces  $M^{\tilde{e}}(p_{\perp}) = \perp$ .*

*Demostración.* En primer lugar, si  $\mathbb{P}^e$  no contiene restricciones, entonces el símbolo  $p_\perp$  no aparece en ninguna regla de  $\mathbb{P}^e$ , y por ende tampoco en las reglas del reducto  $\mathbb{P}_{M^e}^e$ . Como resultado, por ser  $M^e$  el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^e}^e$ , se deduce que  $M^e(p_\perp) = \perp$ .

Asumamos ahora que  $\mathbb{P}^e$  es un EMALP con restricciones. Por definición, cada regla en  $\mathbb{P}^e$  de la forma

$$\langle p_\perp \leftarrow_i f_\perp(\neg p_\perp) \& f_c(@^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]); \top \rangle$$

se sustituye en el reducto  $\mathbb{P}_{M^e}^e$  por la regla<sup>2</sup>

$$\langle p_\perp \leftarrow_i f_\perp(\hat{M}^e(\neg p_\perp)) \& f_c(@^e[p_1, \dots, p_m; M^e(p_{m+1}), \dots, M^e(p_n)]); \top \rangle \quad (4.5)$$

Ya que  $p_\perp$  solo aparece en las reglas de  $\mathbb{P}^e$  que se corresponden con restricciones de  $\mathbb{P}^e$ , el símbolo  $p_\perp$  solo aparece en reglas de  $\mathbb{P}_{M^e}^e$  de la forma (4.5). Así, teniendo en cuenta que  $M^e$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^e}^e$ , se deduce que  $M^e(p_\perp)$  es igual al ínfimo de los valores  $c \in L$  que cumplen la desigualdad

$$\top \preceq c \leftarrow_i \hat{M}^e \left( f_\perp(\hat{M}^e(\neg p_\perp)) \& f_c(@^e[p_1, \dots, p_m; M^e(p_{m+1}), \dots, M^e(p_n)]) \right)$$

o equivalentemente

$$\top \preceq c \leftarrow_i \dot{f}_\perp(\dot{\hat{M}}^e(\neg p_\perp)) \& \dot{f}_c(\dot{@}^e[M^e(p_1), \dots, M^e(p_m); M^e(p_{m+1}), \dots, M^e(p_n)]) \quad (4.6)$$

Ahora bien, si prestamos atención al valor que puede tomar  $\hat{M}^e(\neg p_\perp)$ , existen dos únicas posibilidades: o bien  $\hat{M}^e(\neg p_\perp) = \perp$  o bien  $\perp \prec \hat{M}^e(\neg p_\perp)$ . En lo que sigue veremos que cada una de estas opciones implica que  $M^e(p_\perp) = \perp$ .

---

<sup>2</sup>Observar que se escribe  $\hat{M}^e(\neg p_\perp)$  en lugar de  $\dot{\neg} M^e(p_\perp)$ , por ser ambas expresiones equivalentes.

- Supongamos que  $\hat{M}^{\tilde{e}}(\neg p_{\perp}) = \perp$ . Entonces, ya que  $\dot{f}_{\perp}(\perp) = \perp$  y  $\perp \dot{\&}_i x = \perp$  para cada  $x \in L$ , obtenemos que

$$\dot{f}_{\perp}(\hat{M}^{\tilde{e}}(\neg p_{\perp})) \dot{\&}_i \dot{f}_c(\dot{\@}^e[M^{\tilde{e}}(p_1), \dots, M^{\tilde{e}}(p_m); M^{\tilde{e}}(p_{m+1}), \dots, M^{\tilde{e}}(p_n)]) = \perp$$

Por lo tanto (4.6) puede ser reescrita como  $\top \preceq c \dot{\leftarrow}_i \perp$ . De acuerdo con las propiedades de los pares adjuntos y por ser  $\perp$  el ínfimo del retículo  $(L, \preceq)$ , se concluye que

$$\begin{aligned} M^{\tilde{e}}(p_{\perp}) &= \inf\{c \in L \mid \top \preceq c \dot{\leftarrow}_i \perp\} = \inf\{c \in L \mid \top \dot{\&}_i \perp \preceq c\} \\ &= \inf\{c \in L \mid \perp \preceq c\} = \inf L = \perp \end{aligned}$$

- Sea ahora  $\perp \prec \hat{M}^{\tilde{e}}(\neg p_{\perp})$ . Por definición de  $\dot{f}_{\perp}$ , se obtiene entonces que  $\dot{f}_{\perp}(\hat{M}^{\tilde{e}}(\neg p_{\perp})) = \top$ . Puesto que  $\top \dot{\&}_i x = x$  para cada  $x \in L$ , obtenemos que (4.6) es equivalente a

$$\top \preceq c \dot{\leftarrow}_i \dot{f}_c(\dot{\@}^e[M^{\tilde{e}}(p_1), \dots, M^{\tilde{e}}(p_m); M^{\tilde{e}}(p_{m+1}), \dots, M^{\tilde{e}}(p_n)])$$

De acuerdo con la definición de  $\dot{f}_c$ , tenemos que dicho operador solo puede tomar los valores  $\perp$  y  $\top$ . Supongamos que existe una regla en  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  de la forma (4.5) tal que

$$\dot{f}_c(\dot{\@}^e[M^{\tilde{e}}(p_1), \dots, M^{\tilde{e}}(p_m); M^{\tilde{e}}(p_{m+1}), \dots, M^{\tilde{e}}(p_n)]) = \top$$

Como  $M^{\tilde{e}}$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$ , en particular  $M^{\tilde{e}}$  satisface dicha regla, luego se deduce que

$$\top \preceq M^{\tilde{e}}(p_{\perp}) \dot{\leftarrow}_i \top$$

Equivalentemente, por ser  $(\dot{\&}_i, \dot{\leftarrow}_i)$  un par adjunto,

$$\top = \top \dot{\&}_i \top \preceq M^{\tilde{e}}(p_{\perp})$$

La desigualdad anterior nos lleva a una contradicción, ya que al ser  $\neg$  monótono decreciente y  $\perp \prec \hat{M}^{\tilde{e}}(\neg p_{\perp}) = \dot{\neg} M^{\tilde{e}}(p_{\perp})$  por hipótesis, debe ser  $M^{\tilde{e}}(p_{\perp}) \neq \top$ .

Consecuentemente, podemos asegurar que

$$\dot{f}_c \left( \dot{\textcircled{e}}[M^{\tilde{e}}(p_1), \dots, M^{\tilde{e}}(p_m); M^{\tilde{e}}(p_{m+1}), \dots, M^{\tilde{e}}(p_n)] \right) = \perp$$

para cada regla en  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  de la forma (4.5). Así pues (4.6) es equivalente a  $\top \preceq c \leftarrow_i \perp$ . Siguiendo un razonamiento análogo al caso  $\hat{M}^{\tilde{e}}(\neg p_{\perp}) = \perp$ , se concluye que  $M^{\tilde{e}}(p_{\perp}) = \perp$ .  $\square$

Los Teoremas 4.1 y 4.2 nos permiten asegurar que los modelos estables de un EMALP coinciden con los modelos estables de su correspondiente EMALP sin restricciones, definido por la Definición 4.12. En otras palabras, la semántica del EMALP sin restricciones coincide con la semántica del EMALP original.

Una consecuencia directa de dichos resultados es que el número de modelos estables de  $\mathbb{P}^e$  es igual al número de modelos estables de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ . Este hecho da lugar al siguiente corolario.

**Corolario 4.1.** *Sea  $\mathbb{P}^e$  un EMALP y  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  el correspondiente EMALP sin restricciones de  $\mathbb{P}^e$ . Entonces:*

- *Existe al menos un modelo estable de  $\mathbb{P}^e$  si y solo si existe al menos un modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ .*
- *Existe un único modelo estable de  $\mathbb{P}^e$  si y solo si existe un único modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ .*

En el siguiente ejemplo llevaremos a cabo la transformación del EMALP dado en el Ejemplo 4.2 a un EMALP sin restricciones, de acuerdo con la Definición 4.12 .

**Ejemplo 4.4.** *Volviendo al Ejemplo 4.2, según la Definición 4.12, las reglas ponderadas  $r_1^e, r_2^e, r_4^e$  y  $r_5^e$  se incluyen directamente en el correspondiente EMALP sin*

restricciones de  $\mathbb{P}^e$ , denotado  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ . En cuanto a la restricción  $r_3^e$ , esta se transforma en la regla

$$\langle p_{\perp} \leftarrow_L f_0(\neg s p_{\perp}) \&_G f_{0.7}(@_3^e[p; q, s, t]) ; 1 \rangle$$

Observemos que se ha tomado la conjunción  $\&_G$  de forma arbitraria, pero podría usarse cualquier otra conjunción del retículo multiadjunto extendido.

El EMALP sin restricciones  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  viene dado pues por las siguientes cinco reglas ponderadas:

$$\begin{aligned} r_1^{\tilde{e}} : & \langle p \leftarrow_P @_1^e[p, q, s, t] ; 0.5 \rangle \\ r_2^{\tilde{e}} : & \langle q \leftarrow_P @_2^e[p, q, s, t] ; 0.6 \rangle \\ r_3^{\tilde{e}} : & \langle p_{\perp} \leftarrow_L f_0(\neg s p_{\perp}) \&_G f_{0.7}(@_3^e[p; q, s, t]) ; 1 \rangle \\ r_4^{\tilde{e}} : & \langle s \leftarrow_G @_4^e[p, q, s, t] ; 0.8 \rangle \\ r_5^{\tilde{e}} : & \langle t \leftarrow_G @_5^e[p, q, s, t] ; 0.8 \rangle \end{aligned}$$

Como se vio en el Ejemplo 4.2, la interpretación  $N^e \equiv \{(p, 9/85), (q, 0.36), (s, 0.8), (t, 0.8)\}$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}^e$ . Consecuentemente, aplicando el Teorema 4.1, obtenemos que la interpretación

$$N^{\tilde{e}} \equiv \{(p, 9/85), (q, 0.36), (s, 0.8), (t, 0.8), (p_{\perp}, 0)\}$$

es un modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ . ◇

### 4.2.3. Transformando EMALPs sin restricciones en MANLPs

En esta sección abordaremos la segunda fase en el proceso de simplificación de un programa lógico multiadjunto extendido. En concreto, partiremos de un EMALP sin restricciones y lo transformaremos en un MANLP con la misma semántica que el programa inicial. A continuación, esbozaremos la idea del método de transformación propuesto.

Sea  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  un EMALP sin restricciones y sea  $\mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  el conjunto de símbolos proposicionales que aparecen en un argumento decreciente del cuerpo de alguna regla de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ . Dado un operador de negación involutivo  $\neg: L \rightarrow$

$L$ , supongamos que para cada  $q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  existe un símbolo proposicional  $\text{not}_q$  tal que todo modelo estable  $M^{\tilde{e}}$  de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  verifica la igualdad  $M^{\tilde{e}}(\text{not}_q) = \hat{M}^{\tilde{e}}(\neg q)$ . Ya que  $\dot{\neg}$  es un operador involutivo, se cumple que  $\dot{\neg} M^{\tilde{e}}(\text{not}_q) = \dot{\neg} \hat{M}^{\tilde{e}}(\neg q) = \dot{\neg} \dot{\neg} M^{\tilde{e}}(q) = M^{\tilde{e}}(q)$ .

Así, para cada regla  $\langle p \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}^{\tilde{e}}$ , se cumple que

$$@^e[p_1, \dots, p_m; M^{\tilde{e}}(p_{m+1}), \dots, M^{\tilde{e}}(p_n)] = @^e[p_1, \dots, p_m; \dot{\neg} M^{\tilde{e}}(\text{not}_{p_{m+1}}), \dots, \dot{\neg} M^{\tilde{e}}(\text{not}_{p_n})]$$

Ya que la semántica de los EMALPs y los MANLPs se define en términos de la noción de modelo estable, basada a su vez en el reducto, la igualdad anterior da lugar a reescribir la regla

$$\langle p \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \vartheta \rangle$$

como

$$\langle p \leftarrow_i @[p_1, \dots, p_m, \text{not}_{p_{m+1}}, \dots, \text{not}_{p_n}]; \vartheta \rangle$$

donde la aplicación  $@: L^n \rightarrow L$  se define como

$$\dot{@}[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n] = @^e[x_1, \dots, x_m; \dot{\neg} x_{m+1}, \dots, \dot{\neg} x_n]$$

Si por el contrario para algún  $q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  no existe un símbolo proposicional  $\text{not}_q$  tal que todo modelo estable  $M^{\tilde{e}}$  de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  verifica la igualdad  $M^{\tilde{e}}(\text{not}_q) = \hat{M}^{\tilde{e}}(\neg q)$ , en ese caso, podemos incluir en el programa la siguiente regla ponderada:

$$r_q : \quad \langle \text{not}_q \leftarrow \neg q; \top \rangle$$

Es fácil ver que la regla  $r_q$  puede incluirse en un MANLP. Como se verá en el Teorema 4.4, la inclusión de la regla  $r_q$  nos permite asegurar que el valor del símbolo proposicional  $\text{not}_q$  bajo cualquier modelo estable coincide con el valor de  $\neg q$ .

La siguiente definición formaliza cómo se construye el correspondiente MANLP de un EMALP sin restricciones, de acuerdo con lo expuesto anteriormente.

**Definición 4.13.** Sea  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  un EMALP sin restricciones y  $\mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  el conjunto de símbolos proposicionales que aparecen en un argumento decreciente del cuerpo de alguna regla de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ . Dado un operador de negación involutivo  $\dot{\neg}: L \rightarrow L$ , el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  se define como el siguiente conjunto de reglas:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} = & \{ \langle p \leftarrow_i @ [p_1, \dots, p_m, \text{not}_{p_{m+1}}, \dots, \text{not}_{p_n}]; \vartheta \rangle \mid \\ & \langle p \leftarrow_i @^e [p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}^{\tilde{e}} \} \\ \cup & \{ \langle \text{not}_q \leftarrow \neg q; \top \rangle \mid q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}} \} \end{aligned}$$

donde  $\leftarrow$  es una implicación de  $\{\leftarrow_1, \dots, \leftarrow_n\}$ ,  $\text{not}_q \notin \Pi_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  para cada  $q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$ , y  $\dot{@}: L^n \rightarrow L$  se define como

$$\dot{@}[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n] = \dot{@}^e[x_1, \dots, x_m; \dot{\neg} x_{m+1}, \dots, \dot{\neg} x_n]$$

En este caso, si  $\Pi_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  es el conjunto de símbolos proposicionales de un EMALP sin restricciones  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ , entonces el conjunto de símbolos proposicionales de su correspondiente MANLP es  $\Pi_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}} \cup \{\text{not}_q \mid q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}\}$ .

Observar que al ser  $\dot{@}^e$  un agregador extendido, se trata de un operador creciente en sus primeras  $m$  componentes, luego  $\dot{@}$  también es creciente en sus primeras  $m$  componentes. Además, al ser  $\dot{@}^e$  decreciente en sus últimos  $n - m$  argumentos así como  $\dot{\neg}$ , obtenemos que  $\dot{@}$  es creciente en sus últimas  $n - m$  componentes. Se concluye pues que  $\dot{@}$  es un agregador, luego la regla ponderada

$$\langle p \leftarrow_i @ [p_1, \dots, p_m, \text{not}_{p_{m+1}}, \dots, \text{not}_{p_n}]; \vartheta \rangle$$

puede incluirse en un MANLP. Así mismo, es claro que  $\langle \text{not}_q \leftarrow \neg q; \top \rangle$  también puede incluirse en un MANLP para cada  $q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$ . Como resultado, el MANLP  $\mathbb{P}$  está bien definido.

De manera similar a como se hizo en la Sección 4.1, veremos que la semántica de un EMALP sin restricciones coincide con la semántica de su correspondiente MANLP en dos fases. Primero veremos que los modelos

de un EMALP sin restricciones se pueden caracterizar en función de una familia de modelos estables de su correspondiente MANLP, para después probar que todo modelo estable del MANLP pertenece a dicha familia. Para ello, haremos uso del siguiente lema.

**Lema 4.2.** *Sea  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  un EMALP sin restricciones y  $\mathbb{P}$  el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ . Sean  $M^{\tilde{e}}, N^{\tilde{e}} \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  dos interpretaciones y consideremos las interpretaciones  $N_M, M \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  dadas por  $N_M(p) = N^{\tilde{e}}(p)$  y  $M(p) = M^{\tilde{e}}(p)$  si  $p \in \Pi_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  y  $N_M(\text{not}_q) = M(\text{not}_q) = \hat{M}^{\tilde{e}}(\neg q)$  para cada  $q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$ . Entonces,  $N^{\tilde{e}}$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  si y solo si  $N_M$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_M$ .*

*Demostración.* Para comenzar, veamos que  $N_M$  satisface trivialmente las reglas de la forma

$$\langle \text{not}_q \leftarrow \hat{M}(\neg q); \top \rangle \quad (4.7)$$

en el reducto  $\mathbb{P}_M$ . A saber, por definición,  $N_M(\text{not}_q) = \hat{M}^{\tilde{e}}(\neg q)$  para cada  $q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  y  $M(p) = M^{\tilde{e}}(p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$ , con lo cual

$$N_M(\text{not}_q) = \hat{M}^{\tilde{e}}(\neg q) = \dot{\leftarrow} M^{\tilde{e}}(q) = \dot{\leftarrow} M(q) = \hat{M}(\neg q) = \hat{N}_M(\hat{M}(\neg q))$$

Así pues  $N_M(\text{not}_q) \dot{\leftarrow} \hat{N}_M(\hat{M}(\neg q)) = \top$ , esto es,  $N_M$  satisface la regla dada por (4.7). En otras palabras,  $N_M$  satisface las reglas con cabeza  $\text{not}_q$  en el reducto  $\mathbb{P}_M$ .

Ahora, notemos que por definición una regla

$$r^{\tilde{e}} : \quad \langle p \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \vartheta \rangle$$

pertenece al programa  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  si y solo si la regla

$$r : \quad \langle p \leftarrow_i @[p_1, \dots, p_m, \text{not}_{p_{m+1}}, \dots, \text{not}_{p_n}]; \vartheta \rangle$$

pertenece a  $\mathbb{P}$ . Por lo tanto, la regla

$$r_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}} : \quad \langle p \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; M^{\tilde{e}}(p_{m+1}), \dots, M^{\tilde{e}}(p_n)]; \vartheta \rangle$$

pertenece al reducto  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}$  si y solo si  $r$  pertenece al reducto  $\mathbb{P}_M$ , al ser  $\dot{\@}$  monótono creciente en todos sus argumentos. Para finalizar la demostración, veremos que  $N^{\tilde{e}}$  satisface la regla  $r_{M^{\tilde{e}}}$  si y solo si  $N_M$  satisface la regla  $r$ .

Por definición,  $N_M$  satisface la regla  $r$  si y solo si

$$\vartheta \preceq \hat{N}_M(p \leftarrow_i \@[p_1, \dots, p_m, \text{not}_{p_{m+1}}, \dots, \text{not}_{p_n}])$$

Evalutando todos los símbolos proposicionales de  $r$  mediante la interpretación  $\hat{N}_M$  y de acuerdo con la definición de  $\dot{\@}$ , la desigualdad anterior también es equivalente a

$$\vartheta \preceq N_M(p) \leftarrow_i \dot{\@}^e[N_M(p_1), \dots, N_M(p_m); \dot{\neg} N_M(\text{not}_{p_{m+1}}), \dots, \dot{\neg} N_M(\text{not}_{p_n})]$$

Ahora bien, ya que  $N_M(p) = N^{\tilde{e}}(p)$  y  $N_M(\text{not}_q) = \dot{\neg} M^{\tilde{e}}(q)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$ ,  $q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$ , la desigualdad anterior es equivalente a

$$\vartheta \preceq N^{\tilde{e}}(p) \leftarrow_i \dot{\@}^e[N^{\tilde{e}}(p_1), \dots, N^{\tilde{e}}(p_m); \dot{\neg} \dot{\neg} M^{\tilde{e}}(p_{m+1}), \dots, \dot{\neg} \dot{\neg} M^{\tilde{e}}(p_n)]$$

Puesto que  $\dot{\neg}$  es un operador involutivo, por hipótesis, se obtiene que

$$\vartheta \preceq N^{\tilde{e}}(p) \leftarrow_i \dot{\@}^e[N^{\tilde{e}}(p_1), \dots, N^{\tilde{e}}(p_m); M^{\tilde{e}}(p_{m+1}), \dots, M^{\tilde{e}}(p_n)] \quad (4.8)$$

Por otro lado, la interpretación  $N^{\tilde{e}}$  satisface la regla  $r_{M^{\tilde{e}}}$  si y solo si

$$\vartheta \preceq \hat{N}^{\tilde{e}}(p \leftarrow_i \@[p_1, \dots, p_m; M^{\tilde{e}}(p_{m+1}), \dots, M^{\tilde{e}}(p_n)])$$

Equivalentemente:

$$\vartheta \preceq N^{\tilde{e}}(p) \leftarrow_i \dot{\@}^e[N^{\tilde{e}}(p_1), \dots, N^{\tilde{e}}(p_m); \hat{N}^{\tilde{e}}(M^{\tilde{e}}(p_{m+1})), \dots, \hat{N}^{\tilde{e}}(M^{\tilde{e}}(p_n))]$$

Como  $\hat{N}^{\tilde{e}}(x) = x$  para cada  $x \in L$  y  $M^{\tilde{e}}(p_j) \in L$  para cada  $j \in \{m+1, \dots, n\}$ , podemos afirmar que  $\hat{N}^{\tilde{e}}(M^{\tilde{e}}(p_j)) = M^{\tilde{e}}(p_j)$  para cada  $j \in \{m+1, \dots, n\}$ . De donde, se deduce que  $N^{\tilde{e}}$  satisface la regla  $r_{M^{\tilde{e}}}$  si y solo si

$$\vartheta \preceq N^{\tilde{e}}(p) \leftarrow_i \dot{\@}^e[N^{\tilde{e}}(p_1), \dots, N^{\tilde{e}}(p_m); M^{\tilde{e}}(p_{m+1}), \dots, M^{\tilde{e}}(p_n)] \quad (4.9)$$

Teniendo en cuenta que (4.8) y (4.9) coinciden, se concluye que  $N^{\tilde{e}}$  satisface la regla  $r_{M^{\tilde{e}}}$  si y solo si  $N_M$  satisface la regla  $r$ , como queríamos demostrar. Con lo cual,  $N^{\tilde{e}}$  es un modelo de  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}$  si y solo si  $N_M$  es un modelo de  $\mathbb{P}_M$ .  $\square$

A continuación caracterizamos los modelos estables de un EMALP sin restricciones en términos de una familia de modelos estables de su correspondiente MANLP.

**Teorema 4.3.** *Sea  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  un EMALP sin restricciones y  $\mathbb{P}$  el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ . Sea  $M^{\tilde{e}} \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  una interpretación y consideremos la interpretación  $M \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  definida como  $M(p) = M^{\tilde{e}}(p)$  si  $p \in \Pi_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  y  $M(\text{not}_q) = \hat{M}(\neg q)$  para cada  $q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$ . Entonces,  $M^{\tilde{e}}$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  si y solo si  $M$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}$ .*

*Demostración.* Observemos que la interpretación  $M$  coincide con la interpretación  $M_M \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  definida según el Lema 4.2. Por lo tanto, dicho resultado nos permite afirmar que  $M^{\tilde{e}}$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  si y solo si  $M = M_M$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_M$ . Es suficiente probar entonces que  $M^{\tilde{e}}$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  si y solo si  $M$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$ . Lo haremos por reducción al absurdo.

Supongamos que  $M$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$  y que existe un modelo  $N^{\tilde{e}}$  de  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  tal que  $N^{\tilde{e}} \sqsubset M^{\tilde{e}}$ . Aplicando entonces el Lema 4.2, la interpretación  $N_M \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  definida como  $N_M(p) = N^{\tilde{e}}(p)$  si  $p \in \Pi_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  y  $N_M(\text{not}_q) = \hat{N}^{\tilde{e}}(\neg q)$  en otro caso es un modelo de  $\mathbb{P}_M$ . Claramente  $N_M \sqsubset M$ , luego obtenemos que  $M$  no es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$ , en contradicción con la hipótesis.

Sea ahora  $M^{\tilde{e}}$  el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  y supongamos que existe un modelo  $N$  de  $\mathbb{P}_M$  con  $N \sqsubset M$ . Como consecuencia, existirá un símbolo proposicional  $p' \in \Pi_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}} \cup \{\text{not}_q \mid q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}\}$  tal que  $N(p') \prec M(p')$ . Claramente, si  $p' \in \{\text{not}_q \mid q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}\}$ , entonces  $N(\text{not}_q) \prec M(\text{not}_q) = \hat{M}^{\tilde{e}}(\neg q)$ ,

de donde se deduce que  $N$  no satisface la regla  $\langle \text{not}_q \leftarrow \hat{M}(\neg q); \top \rangle$ , en contradicción con la hipótesis.

Podemos afirmar pues que existe  $p' \in \Pi_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  tal que  $N(p') \prec M(p')$ . Ya que  $N \sqsubset M$ , se cumple que  $N(p) \preceq M(p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$ . Con lo cual la interpretación  $N^{\tilde{e}} \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  dada por  $N^{\tilde{e}}(p) = N(p)$  para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$  satisface que  $N^{\tilde{e}} \sqsubset M^{\tilde{e}}$ . Ahora bien, por el Lema 4.2,  $N^{\tilde{e}}$  es un modelo de  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$ , con lo cual  $M^{\tilde{e}}$  no es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$ , en contradicción con la hipótesis.

Se concluye entonces que  $M^{\tilde{e}}$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^{\tilde{e}}}^{\tilde{e}}$  si y solo si  $M$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$ . Es decir,  $M^{\tilde{e}}$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  si y solo si  $M$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}$ .  $\square$

El Teorema 4.3 establece que cada modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  es equivalente a un modelo estable de  $\mathbb{P}$  perteneciente al conjunto

$$S = \{M \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}} \mid M(\text{not}_q) = \hat{M}(\neg q), \text{ para cada } q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}\}$$

En lo que sigue, veremos que cada modelo estable del MANLP  $\mathbb{P}$  pertenece a  $S$ . Por lo tanto, la relación dada por el Teorema 4.3 contempla todos los modelos estables tanto de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  como de  $\mathbb{P}$ . En otras palabras, la semántica de un EMALP sin restricciones coincide con la semántica de su correspondiente MANLP.

**Teorema 4.4.** *Sea  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  un EMALP sin restricciones y sea  $\mathbb{P}$  el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ . Entonces, cualquier modelo estable  $M$  de  $\mathbb{P}$  satisface  $M(\text{not}_q) = \hat{M}(\neg q)$  para cada  $q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$ .*

*Demostración.* Sea  $q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$ . Ya que  $M$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}$ , en particular,  $M$  satisface la regla

$$\langle \text{not}_q \leftarrow \hat{M}(\neg q); \top \rangle$$

en el reducto  $\mathbb{P}_M$ . Como resultado, la desigualdad  $\hat{M}(\neg q) \preceq M(\text{not}_q)$  se satisface. Además, al ser  $M$  el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$  y  $\langle \text{not}_q \leftarrow \hat{M}(\neg q); \top \rangle$

la única regla en  $\mathbb{P}_M$  con cabeza  $\text{not}_q$ , el valor  $M(\text{not}_q)$  será el menor elemento de  $L$  tal que  $\hat{M}(\neg q) \preceq M(\text{not}_q)$ . Por lo tanto, como  $\hat{M}(\neg q) \in L$ , se concluye que  $M(\text{not}_q) = \hat{M}(\neg q)$ , como queríamos demostrar.  $\square$

Como se comentó previamente, a raíz de los Teoremas 4.3 y 4.4, podemos afirmar que los modelos estables de un EMALP sin restricciones coincide con los modelos estables de su correspondiente MANLP. De aquí se infiere de forma directa el siguiente corolario.

**Corolario 4.2.** *Sea  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  un EMALP sin restricciones y sea  $\mathbb{P}$  el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ . Entonces:*

- *Existe al menos un modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  si y solo si existe al menos un modelo estable de  $\mathbb{P}$ .*
- *Existe un único modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  si y solo si existe un único modelo estable de  $\mathbb{P}$ .*

Como una continuación natural del Ejemplo 4.4, transformaremos el EMALP sin restricciones obtenido allí en su correspondiente MANLP.

**Ejemplo 4.5.** *Sea  $\mathbb{P}^e$  el EMALP definido en el Ejemplo 4.2 y  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  su correspondiente EMALP sin restricciones dado en el Ejemplo 4.4. Ya que los símbolos proposicionales que aparecen en argumentos decrecientes del cuerpo de las reglas de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  son  $s, t$  (en las reglas  $r_1^{\tilde{e}}$  y  $r_2^{\tilde{e}}$ ) y  $q, p_{\perp}$  (en la regla  $r_3^{\tilde{e}}$ ), se obtiene que  $\mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}} = \{q, s, t, p_{\perp}\}$ .*

Con objeto de no incluir más operadores de los estrictamente necesarios en el programa, ya que la negación  $\neg_S$  es involutiva, haremos uso de este operador y de la implicación  $\leftarrow_G$  para definir el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ . Así, de acuerdo con la Definición 4.13, el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ , denotado como  $\mathbb{P}$ , viene

dado por

$$\begin{aligned}
 r_1 : \langle p \leftarrow_P @_1[p, q, not_s, not_t] ; 0.5 \rangle & \quad r_6 : \langle not_q \leftarrow_G \neg_S q ; 1 \rangle \\
 r_2 : \langle q \leftarrow_P @_2[p, q, not_s, not_t] ; 0.6 \rangle & \quad r_7 : \langle not_s \leftarrow_G \neg_S s ; 1 \rangle \\
 r_3 : \langle p_\perp \leftarrow_L @_3[p, not_q, not_{p_\perp}] ; 1 \rangle & \quad r_8 : \langle not_t \leftarrow_G \neg_S t ; 1 \rangle \\
 r_4 : \langle s \leftarrow_G @_4[p, q, s, t] ; 0.8 \rangle & \quad r_9 : \langle not_{p_\perp} \leftarrow_G \neg_S p_\perp ; 1 \rangle \\
 r_5 : \langle t \leftarrow_G @_5[p, q, s, t] ; 0.8 \rangle &
 \end{aligned}$$

donde los agregadores  $\dot{@}_1, \dot{@}_2, \dot{@}_4, \dot{@}_5 : [0, 1]^4 \rightarrow [0, 1]$  y  $\dot{@}_3 : [0, 1]^3 \rightarrow [0, 1]$  se definen como

$$\begin{aligned}
 \dot{@}_1[x, y, z, w] &= \dot{@}_1^e[x, y, \dot{\neg}_S z, \dot{\neg}_S w] = \min \left\{ \frac{y}{\dot{\neg}_S z + \dot{\neg}_S w + 0.1}, 1 \right\} \\
 \dot{@}_2[x, y, z, w] &= \dot{@}_2^e[x, y, \dot{\neg}_S z, \dot{\neg}_S w] = \max \left\{ \dot{\neg}_S \dot{\neg}_S z, \dot{\neg}_Y \dot{\neg}_S w \right\} \\
 \dot{@}_3[x, y, a] &= f_0(\dot{\neg}_S \dot{\neg}_S a) \&_G f_{0.7}(\dot{\neg}_S \dot{\neg}_S y) \\
 \dot{@}_4[x, y, z, w] &= \dot{@}_4^e[x, y, z, w] = 1 \\
 \dot{@}_5[x, y, z, w] &= \dot{@}_5^e[x, y, z, w] = \max\{z, 0.7\}
 \end{aligned}$$

De acuerdo con lo expuesto en el Ejemplo 4.4, la interpretación

$$N^{\tilde{e}} \equiv \{(p, 9/85), (q, 0.36), (s, 0.8), (t, 0.8), (p_\perp, 0)\}$$

es un modelo estable de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ , por lo tanto, el Teorema 4.3 nos dice que la interpretación

$$\begin{aligned}
 N \equiv \{ & (p, 9/85), (q, 0.36), (s, 0.8), (t, 0.8), (p_\perp, 0), (not_q, 0.64), (not_s, 0.2), \\
 & (not_t, 0.2), (not_{p_\perp}, 1) \}
 \end{aligned}$$

es un modelo estable del MANLP  $\mathbb{P}$ . ◇

Uno de los aspectos más interesantes de la Definición 4.13 es que permite la transformación de un EMALP sin restricciones en un MANLP mediante el uso de operadores continuos, siempre que la negación involutiva y la implicación residuada elegidas así lo sean. Consecuentemente, el Corolario 4.2 junto al Teorema 3.5 dan lugar al siguiente resultado:

**Teorema 4.5.** Sea  $(K, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, @_1^e, \dots, @_k^e)$  un retículo multiadjunto extendido, siendo  $K$  un conjunto no vacío, convexo y compacto de un espacio euclídeo, tal que existe una negación involutiva y continua  $\dot{\neg}: K \rightarrow K$ . Sea  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  un EMALP sin restricciones definido en dicho retículo. Si  $\dot{\&}_1, \dots, \dot{\&}_n, @_1^e, \dots, @_k^e$  son operadores continuos, entonces  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  tiene al menos un modelo estable.

*Demostración.* Sea  $\mathbb{P}$  el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$ , definido de acuerdo con la Definición 4.13 para la negación  $\dot{\neg}$ . El MANLP  $\mathbb{P}$  se encuentra entonces definido en el retículo multiadjunto con negación  $(K, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg)$ . Por un lado, para cada  $q \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^{\tilde{e}}}$ , el agregador que define el cuerpo de la regla

$$\langle \text{not}_q \leftarrow \neg q; \top \rangle$$

es  $@[x] = x$ , pudiendo escribirse la regla como  $\langle \text{not}_q \leftarrow @[ \neg q ]; \top \rangle$ , luego se trata de un operador continuo.

Por otro lado, para cada regla de  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  de la forma

$$\langle p \leftarrow_i @^e[p_1, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_n]; \vartheta \rangle$$

ya que  $@^e$  y  $\dot{\neg}$  son operadores continuos, el agregador  $@: L^n \rightarrow L$  definido como

$$@[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n] = @^e[x_1, \dots, x_m; \dot{\neg} x_{m+1}, \dots, \dot{\neg} x_n]$$

también es un operador continuo. Con lo cual, el agregador  $@$  en el cuerpo de las reglas de  $\mathbb{P}$  dadas por

$$\langle p \leftarrow_i @[p_1, \dots, p_m, \text{not}_{p_{m+1}}, \dots, \text{not}_{p_n}]; \vartheta \rangle$$

es un operador continuo.

Puesto que  $\mathbb{P}$  satisface las hipótesis del Teorema 3.5, se deduce que  $\mathbb{P}$  tiene al menos un modelo estable. Así pues, de acuerdo con el Corolario 4.2, concluimos que  $\mathbb{P}^{\tilde{e}}$  tiene al menos un modelo estable.  $\square$

Para finalizar este apartado, veremos un uso práctico del Teorema 4.5 para asegurar la existencia de modelos estables de un EMALP sin restricciones.

**Ejemplo 4.6.** *Supongamos que eliminamos la restricción  $r_3^e$  del EMALP  $\mathbb{P}^e$  considerado en el Ejemplo 4.2, dando lugar a un nuevo EMALP  $\mathbb{P}^{e*}$ . Esta supresión tiene sentido si, por ejemplo, las condiciones sobre las que se define el sistema modelado por el EMALP cambian, de forma que ya no se necesita que el valor del símbolo  $q$  sea mayor que 0.3.*

*El EMALP  $\mathbb{P}^{e*}$  se define entonces sobre el retículo multiadjunto extendido  $([0, 1], \leq, \&_G, \leftarrow_G, \&_P, \leftarrow_P, \&_L, \leftarrow_L, @_1^e, @_2^e, @_4^e, @_5^e)$  con las siguientes reglas:*

$$\begin{aligned} r_1^e : \langle p \leftarrow_P @_1^e[p, q, s, t] ; 0.5 \rangle & \quad r_4^e : \langle s \leftarrow_G @_4^e[p, q, s, t] ; 0.8 \rangle \\ r_2^e : \langle q \leftarrow_P @_2^e[p, q, s, t] ; 0.6 \rangle & \quad r_5^e : \langle t \leftarrow_G @_5^e[p, q, s, t] ; 0.8 \rangle \end{aligned}$$

*donde  $@_1^e, @_2^e, @_4^e, @_5^e : [0, 1]^4 \rightarrow [0, 1]$  se definen como en el Ejemplo 4.2.*

*El conjunto  $[0, 1]$  es no vacío, convexo y compacto en  $([0, 1], +, *, \mathbb{R})$ , con la suma y el producto usual en  $\mathbb{R}$ . Además,  $\&_G$ ,  $\&_P$  y los agregadores extendidos  $@_1^e$ ,  $@_2^e$ ,  $@_4^e$  y  $@_5^e$  son continuos en  $[0, 1]^4$ , así como la negación estándar  $\neg_s$ . Haciendo uso entonces del Teorema 4.5, el EMALP  $\mathbb{P}^{e*}$  tiene al menos un modelo estable. Por ejemplo, se puede comprobar que la interpretación  $N^e \equiv \{(p, 9/85), (q, 0.36), (s, 0.8), (t, 0.8)\}$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}^{e*}$ .  $\diamond$*

#### 4.2.4. Transformando MANLPs en CFASPs

Esta sección culmina el paso de un programa lógico multiadjunto extendido a un programa lógico núcleo de conjuntos respuesta difusos que conserve la semántica del programa original. En este caso, partiremos de un MANLP arbitrario, y proporcionaremos un CFASP cuyos conjuntos respuesta coinciden con los modelos estables del MANLP.

Más concretamente, el procedimiento presentado aquí muestra que es posible suprimir el peso de las reglas y el carácter multiadjunto de un

MANLP sin alterar la semántica del programa. Observemos que, sin contar que los CFASPs admiten la composición de negaciones, la sintaxis de los MANLPs y de los CFASPs tan solo difiere en la presencia o ausencia de pesos en las reglas. En efecto, para convertir un MANLP en un CFASP, una alternativa sencilla consiste en incluir el peso de las reglas en el cuerpo mediante el par adjunto que define cada regla, como se muestra a continuación.

**Definición 4.14.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP definido en  $(L, \preceq, \&_1, \leftarrow_1, \dots, \&_n, \leftarrow_n, \neg)$ . El correspondiente CFASP de  $\mathbb{P}$  se define como el siguiente conjunto de reglas:

$$\mathbb{P}^c = \{p \leftarrow \vartheta \&_i \mathcal{B} \mid \langle p \leftarrow_i \mathcal{B}; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\}$$

donde  $\leftarrow$  es una implicación de  $\{\leftarrow_1, \dots, \leftarrow_n\}$ .

De acuerdo con la sintaxis de los programas lógicos multiadjuntos normales, para cada regla  $p \leftarrow \vartheta \&_i @ [p_1, \dots, p_m, \neg p_{m+1}, \dots, \neg p_n] \in \mathbb{P}^c$ , los operadores  $\&_i$  y  $@$  son monótonos crecientes, siendo  $\leftarrow_i$  la implicación residuada de  $\&_i$ . Como resultado, la aplicación  $\dot{f}: L^{n+1} \rightarrow L$  dada por

$$\dot{f}(\vartheta, x_1, \dots, x_n) = \vartheta \&_i @ [x_1, \dots, x_m, \neg x_{m+1}, \dots, \neg x_n]$$

es monótona creciente. Ya que  $\vartheta, p_1, \dots, p_n$  son literales núcleo, se concluye que el CFASP  $\mathbb{P}^c$  está bien definido. Cabe destacar que, tal y como se argumentó en la Sección 4.2.1, la elección de la implicación  $\leftarrow$  es indiferente, pues tan solo se necesita que se trate de una implicación residuada.

Observemos que dado un MANLP  $\mathbb{P}$  y su correspondiente CFASP  $\mathbb{P}^c$ , al coincidir los símbolos proposicionales de  $\mathbb{P}$  con los átomos de  $\mathbb{P}^c$ , entonces  $\mathcal{I}_{\mathbb{P}} = \mathcal{I}_{\mathbb{P}^c}$ . Además, el siguiente resultado prueba que los modelos estables de  $\mathbb{P}$  coinciden con los conjuntos respuesta de  $\mathbb{P}^c$ . En otras palabras, ambos programas son semánticamente equivalentes.

**Teorema 4.6.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP y  $\mathbb{P}^c$  su correspondiente CFASP. Una interpretación  $M \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}$  si y solo si  $M$  es un conjunto respuesta de  $\mathbb{P}^c$ .

*Demostración.* De acuerdo con la definición de modelo estable y de conjunto respuesta, el Teorema 4.6 puede reescribirse como:  $M$  es el modelo mínimo del reducto  $\mathbb{P}_M$  si y solo si  $M$  es un conjunto respuesta del reducto  $\mathbb{P}_M^c$ . Observemos que, ya que  $\mathcal{I}_{\mathbb{P}} = \mathcal{I}_{\mathbb{P}^c}$ , para probar la aserción anterior es suficiente ver que una interpretación  $I$  es un modelo de  $\mathbb{P}_M$  si y solo si  $I$  es un modelo de  $\mathbb{P}_M^c$ , pues en tal caso los modelos de  $\mathbb{P}_M$  coinciden con los modelos de  $\mathbb{P}_M^c$ , en particular su modelo mínimo.

Dada una regla de  $\mathbb{P}$  de la forma

$$r : \langle p \leftarrow_i @ [p_1, \dots, p_m, \neg p_{m+1}, \dots, \neg p_n]; \vartheta \rangle$$

por definición, existe una regla en el reducto  $\mathbb{P}_M$  de la forma

$$r_M : \langle p \leftarrow_i @_M [p_1, \dots, p_m]; \vartheta \rangle$$

con  $@_M[x_1, \dots, x_m] = @ [x_1, \dots, x_m, \dot{\neg} M(p_{m+1}), \dots, \dot{\neg} M(p_n)]$ , y una regla en el reducto  $\mathbb{P}_M^c$  de la forma

$$r_M^c : p \leftarrow \vartheta \&_i @ [p_1, \dots, p_m, \dot{\neg} M(p_{m+1}), \dots, \dot{\neg} M(p_n)]$$

A saber, todas las reglas de  $\mathbb{P}_M$  y  $\mathbb{P}_M^c$  son de la forma de  $r_M$  y  $r_M^c$ . Por un lado, una interpretación  $I$  satisface la regla  $r_M$  si y solo si

$$\vartheta \preceq \hat{I}(p \leftarrow_i @_M [p_1, \dots, p_m])$$

Equivalentemente, por definición del operador  $@_M$ , si y solo si

$$\vartheta \preceq I(p) \leftarrow_i @ [I(p_1), \dots, I(p_m), \dot{\neg} M(p_{m+1}), \dots, \dot{\neg} M(p_n)] \quad (4.10)$$

Por otro lado,  $I$  satisface la regla  $r_M^c$  si y solo si

$$I(p) \leftarrow \vartheta \&_i @ [I(p_1), \dots, I(p_m), \dot{\neg} M(p_{m+1}), \dots, \dot{\neg} M(p_n)] = \top$$

Esto es, ya que  $(\&, \leftarrow)$  forma un par adjunto, si y solo si

$$\vartheta \&_i @ [I(p_1), \dots, I(p_m), \dot{\neg} M(p_{m+1}), \dots, \dot{\neg} M(p_n)] \preceq I(p) \quad (4.11)$$

Ahora bien, ya que  $(\&_i, \leftarrow_i)$  es un par adjunto, las expresiones (4.10) y (4.11) son equivalentes. Con lo cual se concluye que la satisfacibilidad de las reglas de  $\mathbb{P}_M$  es equivalente a la satisfacibilidad de las reglas de  $\mathbb{P}_M^c$ . Así pues,  $M$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$  si y solo si  $M$  es un conjunto respuesta de  $\mathbb{P}_M^c$ .  $\square$

El siguiente ejemplo completa el proceso de transformación iniciado en los Ejemplos 4.4 y 4.5.

**Ejemplo 4.7.** Sea  $\mathbb{P}$  el MANLP obtenido en el Ejemplo 4.5. Según la Definición 4.14, empleando la implicación  $\leftarrow_P$ , el correspondiente CFASP de  $\mathbb{P}$ , denotado  $\mathbb{P}^c$ , se define como el conjunto formado por las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} r_1^c : \quad & p \leftarrow_P 0.5 \&_P \min \left\{ \frac{q}{\neg_S \text{not}_s + \neg_S \text{not}_t + 0.1}, 1 \right\} \\ r_2^c : \quad & q \leftarrow_P 0.6 \&_P \max \left\{ \neg_S \neg_S \text{not}_s, \neg_Y \neg_S \text{not}_t \right\} \\ r_3^c : \quad & p_0 \leftarrow_P f_0(\neg_S \neg_S \text{not}_{p_0}) \&_G f_{0.7}(\neg_S \neg_S \text{not}_q) \\ r_4^c : \quad & s \leftarrow_P 0.8 \\ r_5^c : \quad & t \leftarrow_P 0.8 \&_G \max \{s, 0.7\} \\ r_6^c : \quad & \text{not}_q \leftarrow_P \neg_S q \\ r_7^c : \quad & \text{not}_s \leftarrow_P \neg_S s \\ r_8^c : \quad & \text{not}_t \leftarrow_P \neg_S t \\ r_9^c : \quad & \text{not}_{p_0} \leftarrow_P \neg_S p_0 \end{aligned}$$

Observemos que el CFASP  $\mathbb{P}^c$  es más sencillo, a nivel sintáctico, que el MANLP  $\mathbb{P}$ . Si lo comparamos con el EMALP  $\mathbb{P}^e$  definido en el Ejemplo 4.2, la diferencia sintáctica es aún más notable. A pesar de ello, a tenor de los resultados presentados en este capítulo, el CFASP  $\mathbb{P}^c$  es semánticamente equivalente al EMALP  $\mathbb{P}^e$ .

Por ejemplo, aplicando el Teorema 4.6, ya que la interpretación

$$\begin{aligned} N \equiv \{ & (p, 9/85), (q, 0.36), (s, 0.8), (t, 0.8), (p_\perp, 0), (\text{not}_q, 0.64), (\text{not}_s, 0.2), \\ & (\text{not}_t, 0.2), (\text{not}_{p_\perp}, 1) \} \end{aligned}$$

es un modelo estable del MANLP  $\mathbb{P}$  (Ejemplo 4.5), podemos afirmar que  $N$  es a su vez un conjunto respuesta de  $\mathbb{P}^c$ .  $\diamond$

### 4.3. Un enfoque multiadjunto normal de la programación lógica núcleo de conjuntos respuesta difusos

La existencia del modelo canónico de un marco de programación lógica resulta fundamental para definir su semántica. En la Sección 3.3 se proporcionaron condiciones suficientes para la existencia y para la unicidad de modelos estables de un programa lógico multiadjunto normal. En la presente sección nos proponemos ilustrar cómo pueden utilizarse dichos resultados para asegurar la existencia de modelos canónicos en otros entornos de programación lógica. En particular, nos centraremos en el marco de programación lógica núcleo de conjuntos respuesta difusos.

La semántica de los programas lógicos núcleo de conjuntos respuesta difusos se define en términos de conjuntos respuesta. En lo que sigue, proporcionaremos un método para simular un CFASP mediante un MANLP semánticamente equivalente. Dicho procedimiento se basa en el uso de operadores continuos, por lo que permite aplicar el Teorema 3.5 para asegurar la existencia de conjuntos respuesta.

Observemos que los dos requisitos para trasladar un CFASP en un MANLP son:

- (i) Los operadores en el cuerpo de las reglas han de ser agregadores. Pero esto se verifica directamente, de acuerdo con la sintaxis de los CFASPs.
- (ii) La composición de negaciones, esto es, los literales de la forma  $\neg\neg\neg b$ , no se permiten en la programación lógica multiadjunta normal. Para lidiar con esto, a continuación, proporcionaremos un procedimiento para transformar una composición de negaciones en una sola negación.

Sea  $r$  una regla de la forma  $a \leftarrow f(l_1, \dots, l_j, \dots, l_n)$  con  $l_j = \neg\neg\neg b$ . La idea del método propuesto es introducir tres nuevos símbolos proposicionales  $\text{not}_b^1$ ,  $\text{not}_b^2$  y  $\text{not}_b^3$ , con objeto de representar la información dada por el literal  $l_j$ , de forma que:

- $\text{not}_b^1$  sea equivalente a  $\neg b$
- $\text{not}_b^2$  sea equivalente a  $\neg\neg b$ , y por tanto a  $\neg\text{not}_b^1$
- $\text{not}_b^3$  sea equivalente a  $\neg\neg\neg b$ , y por tanto a  $\neg\text{not}_b^2$

Notemos que las tres condiciones previas pueden modelarse fácilmente, respectivamente, mediante el uso de las reglas

$$\begin{aligned} r_1 : \text{not}_b^1 &\leftarrow \neg b \\ r_2 : \text{not}_b^2 &\leftarrow \neg\text{not}_b^1 \\ r_3 : \text{not}_b^3 &\leftarrow \neg\text{not}_b^2 \end{aligned}$$

Con lo cual la regla  $r$  puede reemplazarse por la regla

$$a \leftarrow f(l_1, \dots, \text{not}_b^3, \dots, l_n)$$

junto con las reglas  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ .

Para formalizar esta propuesta, hemos de fijar algunas convenciones notacionales. Para comenzar, podemos asumir sin pérdida de generalidad que, para cada regla  $a \leftarrow f(l_1, \dots, l_n)$  de un CFASP y  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $l_j$  es o bien un átomo o bien un literal negado. En otro caso, si  $l_j \in L$ , podemos considerar la regla  $a \leftarrow f_j(l_1, \dots, l_{j-1}, l_{j+1}, \dots, l_n)$  con

$$\dot{f}_j(l_1, \dots, l_{j-1}, l_{j+1}, \dots, l_n) = \dot{f}(l_1, \dots, l_n)$$

Por otro lado, dado un CFASP  $\mathbb{P}^c$  y  $b \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c}$ , diremos que el *grado de*  $b$  es el mayor entero no negativo  $k$  tal que  $\neg^k b$  aparece en el cuerpo de alguna regla de  $\mathbb{P}^c$ , siendo  $\neg^k$  la  $k$ -ésima potencia del operador  $\neg$ . De aquí

en adelante denotaremos al conjunto de átomos de un CFASP  $\mathbb{P}^c$  con grado  $k \in \mathbb{Z}^+$  como  $\mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k$ .

Dicho esto, estamos en disposición de definir formalmente el correspondiente MANLP de un CFASP.

**Definición 4.15.** Sea  $\mathbb{P}^c$  un CFASP definido con la implicación  $\leftarrow$ . El correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^c$  se define en el retículo multiadjunto con negación  $(L, \preceq, \&, \leftarrow, \neg)$ , siendo  $(\dot{\&}, \dot{\leftarrow})$  un par adjunto, como

$$\begin{aligned} \mathbb{P} = & \{ \langle a \leftarrow @[p_1, \dots, p_n]; \top \rangle \mid a \leftarrow f(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{P}^c \} \\ & \cup \{ \langle \text{not}_b^1 \leftarrow \neg b; \top \rangle \mid b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k, k \geq 1 \} \\ & \cup \{ \langle \text{not}_b^h \leftarrow \neg \text{not}_b^{h-1}; \top \rangle \mid b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k, k \geq 1, h \in \{2, \dots, k\} \} \end{aligned}$$

donde  $\dot{@} = \dot{f}$  y, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$p_j = \begin{cases} l_j & \text{si } l_j \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c} \\ \text{not}_b^h & \text{si } l_j = \neg^h b, b \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c}, h \geq 1 \end{cases}$$

Dada una regla  $a \leftarrow f(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{P}^c$ , el operador  $\dot{f}$  es monótono creciente, luego el correspondiente operador  $\dot{@}$  es un agregador. Aún más, de acuerdo con la sintaxis de los CFASPs,  $\dot{\leftarrow}$  es una implicación residuada, luego existe una conjunción  $\dot{\&}$  tal que  $(\dot{\&}, \dot{\leftarrow})$  forma un par adjunto. Por lo tanto, podemos afirmar que  $\mathbb{P}$  está bien definido, es decir,  $\mathbb{P}$  es efectivamente un MANLP.

De forma similar a las Secciones 4.2.2 y 4.2.3, nos apoyaremos en un lema previo para demostrar que la semántica de un CFASP coincide con la de su correspondiente MANLP.

**Lema 4.3.** Sea  $\mathbb{P}^c$  un CFASP y  $\mathbb{P}$  el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^c$ . Dadas dos interpretaciones  $N^c, M^c \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^c}$ , sean  $N_M, M \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  las interpretaciones dadas por  $N_M(b) = N^c(b)$  y  $M(b) = M^c(b)$  si  $b \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c}$  y  $N_M(\text{not}_b^h) = M(\text{not}_b^h) = \neg^h M^c(b)$  para cada  $b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k, k \geq 1, h \in \{1, \dots, k\}$ . Entonces,  $N^c$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_{M^c}^c$  si y solo si  $N_M$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_M$ .

*Demostración.* Dado que  $(\dot{\&}, \dot{\leftarrow})$  forma un par adjunto, se obtiene que:

- (i)  $N_M$  satisface la regla  $\langle \text{not}_b^1 \leftarrow \neg M(b); \top \rangle$  en el reducto  $\mathbb{P}_M$  si y solo si  $\dot{\neg} M(b) \preceq N_M(\text{not}_b^1)$ .
- (ii)  $N_M$  satisface una regla de la forma  $\langle \text{not}_b^h \leftarrow \neg M(\text{not}_b^{h-1}); \top \rangle$  en el reducto  $\mathbb{P}_M$  si y solo si  $\dot{\neg} M(\text{not}_b^{h-1}) \preceq N_M(\text{not}_b^h)$ .

Ahora bien, por definición,  $N_M(\text{not}_b^1) = \dot{\neg} M^c(b) = \dot{\neg} M(b)$ . Además, haciendo los respectivos cálculos:

$$N_M(\text{not}_b^h) = \dot{\neg}^h M^c(b) = \dot{\neg} \left( \dot{\neg}^{h-1} M^c(b) \right) = \dot{\neg} M(\text{not}_b^{h-1})$$

Con lo cual  $N_M$  satisface directamente las reglas de  $\mathbb{P}_M$  con cabeza  $\text{not}_b^h$  para cada  $b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k, k \geq 1, h \in \{1, \dots, k\}$ .

Ahora, por definición, para cada regla en  $\mathbb{P}^c$  de la forma

$$r^c : \quad a \leftarrow f(l_1, \dots, l_n)$$

existe una regla en  $\mathbb{P}$  de la forma

$$r : \quad \langle a \leftarrow @[p_1, \dots, p_n]; \top \rangle$$

Ya que  $p_j$  es un símbolo proposicional *positivo* para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , la propia regla  $r$  pertenece al reducto  $\mathbb{P}_M$ . Por su parte, la regla  $r^c$  se sustituye en el reducto  $\mathbb{P}_{M^c}^c$  por la regla

$$r_{M^c}^c : \quad a \leftarrow f(l_1^{M^c}, \dots, l_n^{M^c})$$

A continuación, para concluir la demostración del Lema 4.3, veremos que  $N^c$  satisface la regla  $r_{M^c}^c$  si y solo si  $N_M$  satisface la regla  $r$ .

Por definición de satisfacibilidad,  $N^c$  satisface la regla  $r_{M^c}^c$  si y solo si  $\hat{N}^c(f(l_1^{M^c}, \dots, l_n^{M^c})) \preceq N^c(a)$ , o equivalentemente

$$\dot{f}(N^c(l_1^{M^c}), \dots, N^c(l_n^{M^c})) \preceq N^c(a) \tag{4.12}$$

Por otro lado,  $N_M$  satisface la regla  $r$  si y solo si  $\hat{N}_M(@[p_1, \dots, p_n]) \preceq N_M(a)$ , esto es,

$$\dot{@}[N_M(p_1), \dots, N_M(p_n)] \preceq N_M(a) \quad (4.13)$$

Veamos que (4.12) y (4.13) coinciden. En efecto, ya que  $N_M(b) = N^c(b)$  para cada  $b \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c}$ , el miembro de la derecha de ambas desigualdades coincide.

Sea ahora  $l_j \in \{l_1, \dots, l_n\}$ . Si  $l_j \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c}$ , se cumple que  $l_j^{M^c} = l_j$  y  $p_j = l_j$ , de donde  $N_M(p_j) = N_M(l_j) = N^c(l_j) = N^c(l_j^{M^c})$ . Por el contrario, si  $l_j = \neg^h b$  con  $b \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c}$ , entonces  $l_j^{M^c} = \hat{M}^c(l_j)$  y  $p_j = \text{not}_b^h$ . Por lo tanto, obtenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} N_M(p_j) &= N_M(\text{not}_b^h) = \dot{\neg}^h M(b) = \dot{\neg}^h M^c(b) \stackrel{(\dagger)}{=} \hat{N}^c(\dot{\neg}^h M^c(b)) \\ &= \hat{N}^c(\hat{M}^c(\neg^h b)) = \hat{N}^c(\hat{M}^c(l_j)) = \hat{N}^c(l_j^{M^c}) \end{aligned}$$

( $\dagger$ ) Notemos que  $\dot{\neg}^h M^c(b) \in L$ , luego  $\hat{N}^c(\dot{\neg}^h M^c(b)) = \dot{\neg}^h M^c(b)$ .

Se concluye entonces que  $N_M(p_j) = \hat{N}^c(l_j^{M^c})$  para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Ya que  $\dot{@} = \dot{f}$ , se tiene que (4.12) y (4.13) son idénticas, como queríamos demostrar. Así pues  $N^c$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_{M^c}^c$  si y solo si  $N_M$  es un modelo del reducto  $\mathbb{P}_M$ .  $\square$

Una vez probado el Lema 4.3, veamos que la semántica de un CFASP coincide con la de su correspondiente MANLP. Como viene siendo habitual, lo haremos en dos fases. Para comenzar, mostraremos que los conjuntos respuesta de un CFASP se pueden caracterizar mediante una familia de modelos estables de su correspondiente MANLP.

**Teorema 4.7.** *Sea  $\mathbb{P}^c$  un CFASP y  $\mathbb{P}$  el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^c$ . Dada una interpretación  $M^c \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^c}$ , consideremos la interpretación  $M \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  dada por  $M(b) = M^c(b)$  si  $b \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c}$  y  $M(\text{not}_b^h) = \dot{\neg}^h M(b)$  para cada  $b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $h \in \{1, \dots, k\}$ . Entonces,  $M^c$  es un conjunto respuesta de  $\mathbb{P}^c$  si y solo si  $M$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}$ .*

*Demostración.* Aplicando el Lema 4.3, obtenemos que  $M^c$  es un modelo de  $\mathbb{P}_{M^c}^c$  si y solo si  $M$  es un modelo de  $\mathbb{P}_M$ . Queda probar entonces que  $M^c$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^c}^c$  si y solo si  $M$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$ . Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos que  $M$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$  y que existe un modelo  $N^c$  de  $\mathbb{P}_{M^c}^c$  tal que  $N^c \sqsubset M^c$ . Por el Lema 4.3, la interpretación  $N_M \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  definida como  $N_M(b) = N^c(b)$  si  $b \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c}$  y  $N_M(\text{not}_b^h) = \dot{\neg}^h M^c(b)$  para cada  $b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k, k \geq 1, h \in \{1, \dots, k\}$  es un modelo de  $\mathbb{P}_M$ . Observemos que por definición de  $N_M$  y  $M$ , se obtiene que  $N_M(\text{not}_b^h) = \dot{\neg}^h M^c(b) = M(\text{not}_b^h)$  para cada  $b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k, k \geq 1, h \in \{1, \dots, k\}$ . Con lo cual, ya que  $N^c \sqsubset M^c$ , se deduce que  $N_M \sqsubset M$ , luego  $M$  no es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$ . Hemos llegado entonces a una contradicción.

Sea ahora  $M^c$  el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^c}^c$  y asumamos que existe un modelo  $N \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  de  $\mathbb{P}_M$  tal que  $N \sqsubset M$ . Consideremos la interpretación  $N^c \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}^c}$  dada por  $N^c(b) = N(b)$  para cada  $b \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c}$ . Claramente, si  $N(\text{not}_b^h) \prec M(\text{not}_b^h)$  para algún  $b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k, k \geq 1, h \in \{1, \dots, k\}$ , entonces  $N$  no satisface la regla  $\langle \text{not}_b^h \leftarrow \dot{\neg} M(\text{not}_b^{h-1}); \top \rangle$  en el reducto  $\mathbb{P}_M$ . En consecuencia, podemos afirmar que existe un átomo  $a \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c}$  de forma que  $N(a) \prec M(a)$ , y por tanto  $N^c \sqsubset M^c$ . Ahora bien, tomando  $N_M \in \mathcal{I}_{\mathbb{P}}$  definida como  $N_M(b) = N(b)$  para cada  $b \in \mathcal{A}_{\mathbb{P}^c}$  y  $N_M(\text{not}_b^h) = \dot{\neg}^h M(b)$  para cada  $b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k, k \geq 1, h \in \{1, \dots, k\}$ , como  $N$  es modelo de  $\mathbb{P}_M$ , entonces  $N_M$  también satisface todas las reglas de  $\mathbb{P}_M$ , luego se trata de un modelo de  $\mathbb{P}_M$ . Consecuentemente, haciendo uso del Lema 4.3, se deduce que  $N^c$  es un modelo de  $\mathbb{P}_{M^c}^c$ . Por lo tanto  $M^c$  no es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_{M^c}^c$ , en contradicción con la hipótesis.  $\square$

El siguiente resultado completa la prueba de la equivalencia entre la semántica de un CFASP y la de su correspondiente MANLP. Específicamente, expone que la evaluación del símbolo  $\text{not}_b^h$  bajo cualquier modelo estable  $M$  de  $\mathbb{P}$  es igual a  $\dot{\neg}^h M(b)$ . Así, el Teorema 4.7 recorre todos los

modelos estables de  $\mathbb{P}$ , y en consecuencia  $\mathbb{P}^c$  y  $\mathbb{P}$  son equivalentes desde un punto de vista semántico.

**Teorema 4.8.** *Sea  $\mathbb{P}^c$  un CFASP y  $\mathbb{P}$  el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^c$ . Cualquier modelo estable  $M$  de  $\mathbb{P}$  satisface  $M(\text{not}_b^h) = \dot{\neg}^h M(b)$  para cada  $b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k, k \geq 1, h \in \{1, \dots, k\}$ .*

*Demostración.* Sea  $M$  un modelo estable de  $\mathbb{P}$ . Realizaremos una demostración por inducción sobre  $h$ .

Caso base: Veamos que  $M(\text{not}_b^1) = \dot{\neg} M(b)$  para cada  $b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k, k \geq 1$ .

Por definición,  $M$  es el modelo mínimo del reducto  $\mathbb{P}_M$ . En particular,  $M$  satisface la regla  $\langle \text{not}_b^1 \leftarrow \neg M(b); \top \rangle$  en  $\mathbb{P}_M$ , luego  $\dot{\neg} M(b) \preceq M(\text{not}_b^1)$ . Aún más, ya que  $\langle \text{not}_b^1 \leftarrow \neg M(b); \top \rangle$  es la única regla en  $\mathbb{P}_M$  con cabeza  $\text{not}_b^1$ , al ser  $M$  el modelo mínimo,  $M(\text{not}_b^1) = \dot{\neg} M(b)$  para cada  $b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k, k \geq 1$ .

Paso inductivo: Supongamos que  $M(\text{not}_b^{h-1}) = \dot{\neg}^{h-1} M(b)$ , con  $b \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}^c}^k, k \geq 1, h \in \{2, \dots, k\}$ , y veamos que  $M(\text{not}_b^h) = \dot{\neg}^h M(b)$ .

Razonando como en el caso base, ya que  $M$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_M$ ,  $M$  satisface la regla  $\langle \text{not}_b^h \leftarrow \neg M(\text{not}_b^{h-1}); \top \rangle$ , y al ser dicha regla la única con cabeza  $\text{not}_b^h$  en  $\mathbb{P}_M$ , se obtiene que  $M(\text{not}_b^h) = \dot{\neg} M(\text{not}_b^{h-1})$ . Ahora, teniendo en cuenta la hipótesis de inducción, se deduce la igualdad requerida:

$$M(\text{not}_b^h) = \dot{\neg} M(\text{not}_b^{h-1}) = \dot{\neg} \left( \dot{\neg}^{h-1} M(b) \right) = \dot{\neg}^h M(b)$$

□

Como consecuencia de los Teoremas 4.7 y 4.8, el número de conjuntos respuesta de un CFASP coincide con el número de modelos estables de su correspondiente MANLP. En particular, el siguiente corolario se deriva de manera natural.

**Corolario 4.3.** *Sea  $\mathbb{P}^c$  un CFASP y  $\mathbb{P}$  el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^c$ . Entonces, existe un conjunto respuesta de  $\mathbb{P}^c$  si y solo si existe un modelo estable de  $\mathbb{P}$ .*

El Corolario 4.3 nos lleva a la situación de que si uno garantiza la existencia de al menos un modelo estable de  $\mathbb{P}$ , entonces la existencia de algún conjunto respuesta de  $\mathbb{P}^c$  está asegurada, luego se podrá definir la semántica de dicho CFASP. Dicho lo cual, el Teorema 3.5 puede usarse para proporcionar una condición suficiente para la existencia de conjuntos respuesta de un CFASP, como se muestra a continuación.

**Corolario 4.4.** *Sea  $\mathbb{P}^c$  un CFASP definido a partir del par  $(\dot{\&}, \dot{\leftarrow})$  en un conjunto no vacío convexo y compacto  $K$  de un espacio euclídeo. Si  $\dot{\&}$  y los operadores en el cuerpo de las reglas de  $\mathbb{P}^c$  son continuos, entonces existe al menos un conjunto respuesta de  $\mathbb{P}^c$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathbb{P}$  el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^c$ , de acuerdo con la Definición 4.15. Las hipótesis del Teorema 3.5 se cumplen, con lo cual el MANLP  $\mathbb{P}$  tiene al menos un modelo estable. Como resultado, por el Corolario 4.3 se concluye que  $\mathbb{P}^c$  tiene al menos un conjunto respuesta.  $\square$

Terminamos esta sección con un ejemplo ilustrando los resultados presentados en ella. Concretamente, recuperaremos el CFASP  $\mathbb{P}^c$  introducido en el Ejemplo 4.3, y garantizaremos la existencia de al menos un conjunto respuesta de  $\mathbb{P}^c$ . De hecho, pasaremos de dicho CFASP a su correspondiente MANLP y construiremos un modelo estable del MANLP, obteniendo así un conjunto respuesta de  $\mathbb{P}^c$ .

**Ejemplo 4.8.** Sea  $\mathbb{P}^c$  el CFASP dado en el Ejemplo 4.3, formado por las reglas

$$\begin{aligned} r_1^c &: p \leftarrow_G \frac{1+s}{2} \\ r_2^c &: p \leftarrow_G q \&_P \neg\neg s \\ r_3^c &: q \leftarrow_G 0.8 \\ r_4^c &: s \leftarrow_G \text{máx}\{\neg q, t/2\} \\ r_5^c &: t \leftarrow_G \neg u \end{aligned}$$

siendo  $\dot{\neg}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  el operador de negación dado por

$$\dot{\neg} x = \begin{cases} 1 - 2x^2 & \text{si } x \leq 0.5 \\ 1 - x & \text{si } x > 0.5 \end{cases}$$

Observemos que los operadores  $\dot{\&}_G$  y  $\dot{\neg}$  son continuos. Así mismo, también son continuas las aplicaciones  $\dot{f}_1, \dot{f}_3, \dot{f}_5: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  y  $\dot{f}_2, \dot{f}_4: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  dadas por  $\dot{f}_1(x) = \frac{1+x}{2}$ ,  $\dot{f}_2(x, y) = x \dot{\&}_P y$ ,  $\dot{f}_3(x) = 0.8$ ,  $\dot{f}_4(x, y) = \text{máx}\{x, y/2\}$  y  $\dot{f}_5(x) = x$ . Con lo cual, el Corolario 4.4 nos dice que existe al menos un modelo estable de  $\mathbb{P}^c$ .

Aplicando la Definición 4.15, el correspondiente MANLP de  $\mathbb{P}^c$ , denotado  $\mathbb{P}$ , se define en el retículo multiadjunto con negación  $([0, 1], \leq, \&_G, \leftarrow_G, \neg)$ , como el conjunto formado por las reglas:

$$\begin{aligned} r_1 &: \langle p \leftarrow_G \frac{1+s}{2}; 1 \rangle & r_q &: \langle \text{not}_q^1 \leftarrow_G \neg q; 1 \rangle \\ r_2 &: \langle p \leftarrow_G q \&_P \text{not}_s^2; 1 \rangle & r_u &: \langle \text{not}_u^1 \leftarrow_G \neg u; 1 \rangle \\ r_3 &: \langle q \leftarrow_G 0.8; 1 \rangle & r_s^1 &: \langle \text{not}_s^1 \leftarrow_G \neg s; 1 \rangle \\ r_4 &: \langle s \leftarrow_G \text{máx}\{\text{not}_q^1, t/2\}; 1 \rangle & r_s^2 &: \langle \text{not}_s^2 \leftarrow_G \neg \text{not}_s^1; 1 \rangle \\ r_5 &: \langle t \leftarrow_G \text{not}_u^1; 1 \rangle \end{aligned}$$

Consideremos ahora la interpretación  $I \equiv \{(p, 0.4), (q, 0.8), (s, 0.5), (t, 1), (u, 0), (\text{not}_q^1, 0.2), (\text{not}_u^1, 1), (\text{not}_s^1, 0.5), (\text{not}_s^2, 0.5)\}$ . El reducto de  $\mathbb{P}$  respecto a  $I$ , deno-

tado  $\mathbb{P}_I$ , viene dado entonces por las reglas:

$$\begin{aligned}
 r_1^I &: \langle p \leftarrow_G \frac{1+s}{2} ; 1 \rangle & r_q^I &: \langle \text{not}_q^1 \leftarrow_G 0.2; 1 \rangle \\
 r_2^I &: \langle p \leftarrow_G q \&_P \text{not}_s^2 ; 1 \rangle & r_u^I &: \langle \text{not}_u^1 \leftarrow_G 1; 1 \rangle \\
 r_3^I &: \langle q \leftarrow_G 0.8 ; 1 \rangle & r_s^{1I} &: \langle \text{not}_s^1 \leftarrow_G 0.5; 1 \rangle \\
 r_4^I &: \langle s \leftarrow_G \text{máx}\{\text{not}_q^1, t/2\} ; 1 \rangle & r_s^{2I} &: \langle \text{not}_s^2 \leftarrow_G 0.5; 1 \rangle \\
 r_5^I &: \langle t \leftarrow_G \text{not}_u^1 ; 1 \rangle
 \end{aligned}$$

Ya que  $\mathbb{P}_I$  no contiene reglas con cabeza  $u$ , el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_I$ , denotado  $M$ , satisface que  $M(u) = 0$ . Aún más, ya que  $q, s, t, \text{not}_q^1, \text{not}_u^1, \text{not}_s^1$  y  $\text{not}_s^2$  aparecen en la cabeza de tan solo una regla ( $r_3^I, r_4^I, r_5^I, r_q^I, r_u^I, r_s^{1I}$  y  $r_s^{2I}$ , respectivamente) entonces:

$$\begin{aligned}
 M(q) &= 0.8 \\
 M(s) &= \text{máx}\{M(\text{not}_q^1), M(t)/2\} = \text{máx}\{0.2, 0.5\} = 0.5 \\
 M(t) &= M(\text{not}_u^1) = 1 \\
 M(\text{not}_q^1) &= 0.2 \\
 M(\text{not}_u^1) &= 1 \\
 M(\text{not}_s^1) &= 0.5 \\
 M(\text{not}_s^2) &= \dot{\neg} M(\text{not}_s^1) = \dot{\neg} 0.5 = 0.5
 \end{aligned}$$

Finalmente, el valor que asigna  $M$  al símbolo proposicional  $p$  se calcula como:

$$\begin{aligned}
 M(p) &= \min \left\{ \frac{1 + M(s)}{2}, M(q) \dot{\&}_P M(\text{not}_s^2) \right\} \\
 &= \min \left\{ \frac{1 + 0.5}{2}, 0.8 \dot{\&}_P 0.5 \right\} \\
 &= \min \{0.75, 0.4\} = 0.4
 \end{aligned}$$

Puesto que  $I$  coincide con  $M$ , concluimos que  $I$  es el modelo mínimo de  $\mathbb{P}_I$ . Dicho de otra forma,  $I$  es un modelo estable de  $\mathbb{P}$ . En consecuencia, aplicando el Teorema 4.7, la interpretación  $I^c$  es a su vez un conjunto respuesta de  $\mathbb{P}^c$ , siendo

$$I^c \equiv \{(p, 0.4), (q, 0.8), (s, 0.5), (t, 1), (u, 0)\}$$

◇



## Capítulo 5

# Ecuaciones bipolares de relaciones difusas

Las relaciones difusas [103, 123] surgen como una generalización del concepto de relación de la teoría de conjuntos clásica. Así, mientras que una relación clásica entre dos conjuntos  $U$  y  $V$  establece que un elemento  $u \in U$  o bien está relacionado o bien no está relacionado con un elemento  $v \in V$ , una relación difusa asigna a cada par  $(u, v) \in U \times V$  un valor de  $[0, 1]$ , o más generalmente, un valor de un cierto conjunto parcialmente ordenado  $(L, \preceq)$ . Generalmente, se asume que  $(L, \preceq)$  forma un retículo completo, siendo  $\perp$  y  $\top$  sus elementos mínimo y máximo, respectivamente, con objeto de simular la ausencia total de relación y la presencia imperiosa de esta. Formalmente:

**Definición 5.1.** Sea  $(L, \preceq)$  un retículo completo y  $U, V$  dos conjuntos. Una relación difusa de  $U$  en  $V$  es una aplicación  $R: U \times V \rightarrow L$ .

Definiendo un operador binario entre relaciones  $\circ$ , generalmente denominado composición de relaciones, no es difícil imaginar que surjan ecuaciones del tipo  $R \circ S = T$  siendo  $R$ , o bien  $S$ , una relación desconocida. En nuestro ambiente, consideraremos que  $\circ$  es una  $\exists$ -composición, en el

sentido de que si  $R$  es una relación de  $U$  en  $V$  y  $S$  es una relación de  $V$  en  $W$ , entonces un elemento  $u \in U$  está relacionado con un elemento  $w \in W$  si existe un elemento  $v \in V$  tal que  $u$  está relacionado con  $v$  y  $v$  está relacionado con  $w$ . Si consideramos que  $R$  y  $S$  son relaciones clásicas (no difusas), se tendrá entonces que

$$R \circ S = \{(u, w) \in U \times W \mid \text{existe } v \in V \text{ tal que } (u, v) \in R \text{ y } (v, w) \in S\}$$

En el caso de que  $R$  y  $S$  sean relaciones difusas, podemos modelar la existencia mediante el operador supremo, así como la exigencia simultánea de  $(u, v) \in R$  y  $(v, w) \in S$  mediante el uso de un conjuntor. Como resultado, la composición de relaciones difusas puede establecerse como la aplicación  $R \circ S: U \times W \rightarrow L$  dada por:

$$R \circ S(u, w) = \bigvee_{v \in V} R(u, v) \& S(v, w) \quad (5.1)$$

siendo  $\&$  un conjuntor. Se dice entonces que una *ecuación de relaciones difusas* [104] es una expresión del tipo

$$R \circ S = T$$

siendo  $R$  una relación desconocida, o bien siendo  $S$  una relación desconocida. Cabe destacar que la conjunción usada en (5.1) puede ser independiente de los elementos de  $V$ , en cuyo caso se hará uso de una única conjunción, o bien puede depender de cada elemento  $v \in V$ . En tal caso, dado un conjunto de conjunciones  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  y una aplicación  $\sigma: V \rightarrow \{1, \dots, \kappa\}$  que asocia a cada elemento de  $V$  una conjunción, se define la  $\circ_\sigma$ -composición de  $R$  y  $S$  como

$$R \circ_\sigma S(u, w) = \bigvee_{v \in V} R(u, v) \&_{\sigma(v)} S(v, w) \quad (5.2)$$

Las ecuaciones derivadas de una  $\circ_\sigma$ -composición, de la forma

$$R \circ_\sigma S = T$$

reciben el sobrenombre de ecuaciones multiadjuntas de relaciones difusas [45].

Recientemente, Freson et al. [54] propusieron una generalización de las ecuaciones de relaciones difusas en las que las incógnitas aparecen junto a su negación lógica, mediante un operador de negación. Dichas ecuaciones se conocen como ecuaciones bipolares de relaciones difusas, y se definen formalmente como sigue:

**Definición 5.2.** Sea  $(L, \preceq)$  un retículo completo y  $U, V, W$  tres conjuntos. Dada una negación  $\neg: L \rightarrow L$ , una ecuación bipolar de relaciones difusas es una expresión del tipo

- $(R \circ S^+) \vee (\neg R \circ S^-) = T$ , siendo  $S^+, S^-: V \times W \rightarrow L$  y  $T: U \times W \rightarrow L$  relaciones conocidas,  $R: U \times V \rightarrow L$  una relación difusa desconocida y  $\neg R: U \times V \rightarrow L$  dada por  $(\neg R)(u, v) = \neg(R(u, v))$ .
- $(R^+ \circ S) \vee (R^- \circ \neg S) = T$ , siendo  $R^+, R^-: U \times V \rightarrow L$  y  $T: U \times W \rightarrow L$  relaciones conocidas,  $S: V \times W \rightarrow L$  una relación difusa desconocida y  $\neg S: V \times W \rightarrow L$  dada por  $(\neg S)(v, w) = \neg(S(v, w))$ .

Una ecuación bipolar multiadjunta de relaciones difusas se define de forma análoga, haciendo uso de una  $\circ_\sigma$ -composición.

## 5.1. Ecuaciones bipolares de relaciones difusas como sistemas de supremo-ecuaciones

Una estrategia habitual a la hora de resolver ecuaciones de relaciones difusas consiste en descomponer la relación desconocida en filas (o bien en columnas), obteniendo para cada fila (o columna) un sistema de ecuaciones en  $L$ . En lo que sigue, llevaremos a cabo dicha descomposición para ecuaciones bipolares de relaciones difusas.

Es preciso destacar que la descomposición y, por ende, el sistema de ecuaciones obtenido, depende de la incógnita considerada en la ecuación. Específicamente, si la incógnita es  $R$  hemos de descomponer  $T$  en filas, mientras que si la incógnita es  $S$  hemos de descomponer  $T$  en columnas. Es por ello que las dos ecuaciones bipolares dadas en la Definición 5.2 han de ser estudiadas por separado.

Por un lado, consideremos una ecuación bipolar de relaciones difusas del tipo

$$(R \circ S^+) \vee (\neg R \circ S^-) = T \quad (5.3)$$

siendo  $R: U \times V \rightarrow L$  una relación difusa desconocida. Denotemos  $|U| = n$ ,  $|V| = m$  y  $|W| = l$ , y sean  $R = \{x_{ij}\}_{n \times m}$ ,  $S^+ = \{a_{jk}^+\}_{m \times l}$ ,  $S^- = \{a_{jk}^-\}_{m \times l}$  y  $T = \{b_{ik}\}_{n \times l}$ .

Claramente, descomponiendo  $T$  en filas, obtenemos que resolver (5.3) es equivalente a resolver  $n$  ecuaciones de la forma

$$\begin{bmatrix} x_{i1} & \cdots & x_{im} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_{11}^+ & \cdots & a_{1l}^+ \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^+ & \cdots & a_{ml}^+ \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} \neg x_{i1} & \cdots & \neg x_{im} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_{11}^- & \cdots & a_{1l}^- \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^- & \cdots & a_{ml}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i1} & \cdots & b_{il} \end{bmatrix}$$

con  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Equivalentemente, de acuerdo con la definición de  $\circ$ , resolver (5.3) es equivalente a resolver  $n$  sistemas de la forma

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (x_{ij} \& a_{jk}^+) \vee (\neg x_{ij} \& a_{jk}^-) = b_{ik}, \quad k \in \{1, \dots, l\} \quad (5.4)$$

con  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Las ecuaciones que componen un sistema de esta forma reciben el nombre de *supremo-ecuaciones bipolares* o *sup-ecuaciones bipolares*.

Específicamente, toda solución de (5.3) es el producto cartesiano de soluciones de (5.4). Aún más, esto implica que las soluciones maximales (respectivamente minimales) de (5.3) son el producto cartesiano de las soluciones maximales (respectivamente minimales) de (5.4). Consecuentemente, podemos afirmar que estudiando la resolubilidad y la estructura

algebraica del conjunto de soluciones de (5.4), se deduce directamente la de la ecuación bipolar de relaciones difusas.

Reescribiendo los índices de (5.4) para obtener una expresión más sencilla, estamos interesados entonces en estudiar el sistema de sup-ecuaciones bipolares

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (x_j \& a_{ij}^+) \vee (\neg x_j \& a_{ij}^-) = b_i, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (5.5)$$

Supongamos ahora que tenemos una ecuación bipolar de relaciones difusas del tipo

$$(R^+ \circ S) \vee (R^- \circ \neg S) = T \quad (5.6)$$

siendo  $S: V \times W \rightarrow L$  una relación difusa desconocida. Utilizaremos de nuevo la notación  $|U| = n$ ,  $|V| = m$  y  $|W| = l$ , y sean ahora  $R^+ = \{a_{ij}^+\}_{n \times m}$ ,  $R^- = \{a_{ij}^-\}_{n \times m}$ ,  $S = \{x_{jk}\}_{m \times l}$  y  $T = \{b_{ik}\}_{n \times l}$ .

Descomponiendo ahora  $T$  en columnas, resolver (5.6) es equivalente a resolver  $l$  ecuaciones de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11}^+ & \cdots & a_{1m}^+ \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^+ & \cdots & a_{nm}^+ \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{mk} \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} a_{11}^- & \cdots & a_{1m}^- \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^- & \cdots & a_{nm}^- \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \neg x_{1k} \\ \vdots \\ \neg x_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$

con  $k \in \{1, \dots, l\}$ . Por la definición de la composición  $\circ$ , las ecuaciones previas vienen dadas por  $l$  sistemas de la forma

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (a_{ij}^+ \& x_{jk}) \vee (a_{ij}^- \& \neg x_{jk}) = b_{ik}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (5.7)$$

con  $k \in \{1, \dots, l\}$ .

De forma análoga al caso  $(R \circ S^+) \vee (\neg R \circ S^-) = T$ , las soluciones de (5.6) son producto cartesiano de soluciones de (5.7). Así pues, el estudio

de (5.7) determina la resolubilidad y la estructura algebraica del conjunto de soluciones de la ecuación bipolar de relaciones difusas dada por (5.6).

Por lo tanto, estudiaremos el sistema de sup-ecuaciones bipolares dado por

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (a_{ij}^+ \& x_j) \vee (a_{ij}^- \& \neg x_j) = b_i, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (5.8)$$

Un razonamiento similar para las ecuaciones bipolares multiadjuntas de relaciones difusas  $(R \circ_\sigma S^+) \vee (\neg R \circ_\sigma S^-) = T$  y  $(R^+ \circ_\sigma S) \vee (R^- \circ_\sigma \neg S) = T$  nos lleva a los sistemas de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas (5.9) y (5.10), respectivamente.

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (x_j \&_{\sigma(j)} a_{ij}^+) \vee (\neg x_j \&_{\sigma(j)} a_{ij}^-) = b_i, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (5.9)$$

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (a_{ij}^+ \&_{\sigma(j)} x_j) \vee (a_{ij}^- \&_{\sigma(j)} \neg x_j) = b_i, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (5.10)$$

Las siguientes secciones están dedicadas al estudio de la resolubilidad de los sistemas (5.5) y (5.8) y de los sistemas (5.9) y (5.10), incluyendo el análisis de la estructura algebraica de su conjunto de soluciones. Observe-mos que los sistemas (5.5) y (5.8), al igual que los sistemas (5.9) y (5.10), coinciden en el caso de que los conjuntores usados sean conmutativos.

Concretamente, en la Sección 5.2 estudiaremos un tipo general de sistema de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas, lo que nos llevará a generalizar los resultados existentes en la literatura sobre ecuaciones bipolares de relaciones difusas. Por su parte, en la Sección 5.3 analizaremos un caso particular de sistema de sup-ecuaciones bipolares definido con una negación no involutiva.

## 5.2. Sistemas de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas en retículos multiadjuntos birresiduos simétricos

Hasta donde sabemos, todas las ecuaciones bipolares de relaciones difusas que se han estudiado en la literatura se definen en el intervalo unidad, incluyendo aquellos trabajos que tratan dichas ecuaciones desde un punto de vista aplicado. Concretamente, las ecuaciones bipolares de relaciones difusas consideradas en la literatura se han definido o bien con la composición máximo-mínimo [54, 73, 74], con la composición máximo-producto [21, 28] o con la composición máximo-Łukasiewicz [75, 122, 125]; y todas ellas con la negación estándar.

En la presente sección abordaremos el estudio de un tipo general de sistema de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas definido en un caso particular de retículo multiadjunto birresiduado enriquecido con una negación involutiva. En particular, las ecuaciones así definidas engloban a las ecuaciones bipolares de relaciones difusas definidas con la negación estándar y con las composiciones máximo-mínimo, máximo-producto y máximo-Łukasiewicz en el intervalo unidad. En otras palabras, el estudio desarrollado a continuación generaliza los resultados que existen en la literatura sobre la resolución de ecuaciones bipolares de relaciones difusas.

Para comenzar, fijaremos la estructura algebraica sobre la que definiremos las sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas. Recientemente, Cignoli y Esteva [16] introdujeron los retículos residuados simétricos como retículos residuados enriquecidos con una involución de De Morgan, esto es, con un operador involutivo que satisface las leyes de De Morgan. Siguiendo la nomenclatura de estos autores, a continuación presentamos la noción de retículo simétrico adaptada al marco multiadjunto birresiduado.

**Definición 5.3.** *Un retículo multiadjunto birresiduado simétrico es una tu-*

pla  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa, \neg)$  tal que  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa)$  forma un retículo multiadjunto birresiduado y el operador  $\neg: L \rightarrow L$  satisface las siguientes propiedades, para cada  $x, y \in L$ :

$$(I) \quad \neg\neg x = x$$

$$(II) \quad \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$

A primera vista, puede parecer que el operador  $\neg$  no es necesariamente una negación involutiva, es decir, podría no ser decreciente. De ser así, la estructura algebraica considerada habría de ser otra. Aún más, es natural pensar que se podría obtener una estructura algebraica diferente si se toma la ley  $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$  en lugar de (II). Sin embargo, como se prueba a continuación, ser decreciente y satisfacer cualquiera de las leyes de De Morgan son equivalentes para cualquier operador involutivo.

**Proposición 5.1.** *Sea  $(L, \preceq)$  un retículo y  $\neg: L \rightarrow L$  un operador involutivo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

$$(1) \quad \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \text{ para cada } x, y \in L.$$

$$(2) \quad \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y \text{ para cada } x, y \in L.$$

$$(3) \quad \neg \text{ es monótona decreciente con } \neg\top = \perp \text{ y } \neg\perp = \top.$$

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que  $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$  para cada  $x, y \in L$ . En particular, para  $\neg x$  y  $\neg y$ , se cumple que

$$\neg(\neg x \vee \neg y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$$

Ya que  $\neg$  es involutivo, se deduce entonces que

$$\neg(\neg x \vee \neg y) = x \wedge y$$

Con lo cual, aplicando  $\neg$  a ambos miembros de la igualdad anterior y teniendo en cuenta que se trata de un operador involutivo, obtenemos finalmente

$$\neg(x \wedge y) = \neg\neg(\neg x \vee \neg y) = \neg x \vee \neg y$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos ahora que  $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$  para cada  $x, y \in L$ . La siguiente cadena de igualdades se satisface directamente:

$$\neg\top = \neg\top \vee \perp = \neg\top \vee \neg\neg\perp = \neg(\top \wedge \neg\perp) = \neg\neg\perp = \perp$$

Así mismo, por ser  $\neg$  involutiva, se deduce que  $\neg\perp = \neg\neg\top = \top$ . Falta ver que  $\neg$  es decreciente. Supongamos pues que  $x \preceq y$ . Claramente,  $x = x \wedge y$ , luego

$$\neg x = \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$

Con lo cual, por definición de supremo, se deduce que  $\neg y \preceq \neg x$ .

(3) $\Rightarrow$ (1) Por último, supongamos que  $\neg$  es decreciente con  $\neg\top = \perp$  y  $\neg\perp = \top$ , y sean  $x, y \in L$ . Por definición de supremo,  $x$  e  $y$  son inferiores a  $x \vee y$ , luego al ser  $\neg$  decreciente,  $\neg(x \vee y) \preceq \neg x$  y  $\neg(x \vee y) \preceq \neg y$ . De donde:

$$\neg(x \vee y) \preceq \neg x \wedge \neg y \tag{5.11}$$

Por otro lado, por definición de ínfimo, se obtiene que  $\neg x \wedge \neg y \preceq \neg(x \vee y)$ . Con lo cual, al ser  $\neg$  decreciente e involutiva, se cumplen las desigualdades

$$\begin{aligned} x &= \neg\neg x \preceq \neg(\neg x \wedge \neg y) \\ y &= \neg\neg y \preceq \neg(\neg x \wedge \neg y) \end{aligned}$$

Como resultado, obtenemos que  $x \vee y \preceq \neg(\neg x \wedge \neg y)$ . De donde, aplicando  $\neg$  a ambos lados de la desigualdad y teniendo en cuenta que se trata de un operador involutivo, se concluye que

$$\neg x \wedge \neg y = \neg\neg(\neg x \wedge \neg y) \preceq \neg(x \vee y) \tag{5.12}$$

De (5.11) y (5.12) se deduce que  $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ , como queríamos demostrar.  $\square$

Así pues, podemos caracterizar un retículo multiadjunto birresiduado simétrico como un retículo multiadjunto birresiduado dotado de una negación involutiva.

**Teorema 5.1.** *Una tupla  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa, \neg)$  es un retículo multiadjunto birresiduado simétrico si y solo si  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa)$  es un retículo multiadjunto birresiduado y  $\neg: L \rightarrow L$  es una negación involutiva.*

*Demostración.* Se sigue directamente de la Proposición 5.1.  $\square$

Las sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas consideradas en esta sección están definidas en retículos multiadjuntos birresiduados simétricos tales que  $(L, \preceq)$  forma un retículo distributivo. De aquí en adelante, denominaremos a dicha estructura *retículo multiadjunto birresiduado simétrico distributivo* (DSBMAL, del inglés, *distributive symmetric birresiduated multiadjoint lattice*). Estamos ya en disposición de presentar los sistemas de sup-ecuaciones multiadjuntas que queremos resolver.

Sea  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa, \neg)$  un DSBMAL,  $a_{ij}^+, a_{ij}^-, b_i \in L$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  y sea  $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, \kappa\}$ . Estamos interesados en resolver sistemas de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas del tipo

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (a_{ij}^+ \&_{\sigma(j)} x_j) \vee (a_{ij}^- \&_{\sigma(j)} \neg x_j) = b_i, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (5.13)$$

así como del tipo

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (x_j \&_{\sigma(j)} a_{ij}^+) \vee (\neg x_j \&_{\sigma(j)} a_{ij}^-) = b_i, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (5.14)$$

siendo  $x_1, \dots, x_m \in L$  desconocidos.

### 5.2.1. Resolviendo sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas

Iniciaremos el estudio por un caso más sencillo, en el que se tenga una única sup-ecuación. Es decir, estudiaremos la resolución de la sup-ecuación bipolar multiadjunta

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (a_j^+ \&_{\sigma(j)} x_j) \vee (a_j^- \&_{\sigma(j)} \neg x_j) = b \quad (5.15)$$

y de la sup-ecuación bipolar multiadjunta

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (x_j \&_{\sigma(j)} a_j^+) \vee (\neg x_j \&_{\sigma(j)} a_j^-) = b \quad (5.16)$$

siendo  $a_j^+, a_j^-, b \in L$  valores conocidos y  $x_j$  incógnitas, con  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Con objeto de abordar la resolución de ambas ecuaciones, es preciso recordar que, por la Proposición 2.9, para cada triple adjunto  $(\&_i, \swarrow^i, \searrow_i)$ , los operadores  $\swarrow^i$  y  $\searrow_i$  vienen dados por:

$$b \swarrow^i a = \max\{x \in L \mid x \&_i a \preceq b\}$$

$$b \searrow_i a = \max\{x \in L \mid a \&_i x \preceq b\}$$

Además, siguiendo el enfoque adoptado en [41], asociaremos a cada operador  $\&_i$ , con  $i \in \{1, \dots, \kappa\}$ , dos operadores extra  $\swarrow^i, \searrow_i: L \times L \rightarrow L$  definidos como sigue:

$$b \swarrow^i a = \inf\{x \in L \mid b \preceq x \&_i a\}$$

$$b \searrow_i a = \inf\{x \in L \mid b \preceq a \&_i x\}$$

Observemos que ambos operadores están bien definidos, al ser  $(L, \preceq)$  un retículo completo. Claramente, los operadores extra  $\swarrow^i$  y  $\searrow_i$  coinciden si  $\&_i$  es conmutativo, al igual que coinciden los operadores  $\swarrow^i$  y  $\searrow_i$ . Notemos además que no es posible definir  $b \swarrow^i a$  y  $b \searrow_i a$  como el mínimo de

los conjuntos  $\{x \in L \mid b \preceq x \&_i a\}$  y  $\{x \in L \mid b \preceq a \&_i x\}$ , puesto que dichos conjuntos pueden ser vacíos, por ejemplo si  $a \prec b$ .

Intuitivamente, si deseamos alcanzar una igualdad del tipo  $a \&_i x = b$ , entonces  $b \lhd_i a$  nos proporcionará el mínimo valor de  $x$  con el que puede alcanzarse dicha igualdad, mientras  $b \lhd_i a$  será el máximo valor de  $x$  para el que puede alcanzarse.

Para comenzar, adaptaremos a nuestro entorno la Proposición 16 y el Teorema 2 presentados en [41]. Cabe destacar que, en dicho trabajo, los autores consideran una única t-norma como conjunción en la ecuación, mientras que en nuestro entorno contemplamos múltiples conjunciones  $\&_i$ , además de no requerir que estas sean conmutativas o asociativas. El siguiente resultado proporciona el conjunto de soluciones de una sup-inecuación multiadjunta y de una sup-ecuación multiadjunta (no bipolar).

**Proposición 5.2.** Sean  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \lhd_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \lhd_\kappa, \neg)$  un DSBMAL y  $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, \kappa\}$ . Dados  $a_1, \dots, a_m \in L$  y  $b$  un elemento supremo irreducible de  $L$ , si  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son homomorfismos entonces:

(a) El conjunto de soluciones de la sup-inecuación

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} a_j \&_{\sigma(j)} x_j \preceq b \quad (5.17)$$

es igual a  $[0, g]$ , donde  $0$  representa la tupla  $(\perp, \dots, \perp)$  y  $g = (g_1, \dots, g_m)$  con  $g_j = b \lhd_{\sigma(j)} a_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

(b) El conjunto de soluciones de la sup-ecuación

$$b \preceq \bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} a_j \&_{\sigma(j)} x_j \quad (5.18)$$

es igual a  $\bigcup_{s \in S^*} [s, 1]$  siendo  $1 = (\top, \dots, \top)$  y  $S^* = \{s^j \mid b \preceq a_j\}$  con  $s^j = (s_1^j, \dots, s_m^j)$  y

$$s_h^j = \begin{cases} b \lhd_{\sigma(j)} a_j & \text{si } h = j \\ \perp & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(c) El conjunto de soluciones de la sup-ecuación

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} a_j \&_{\sigma(j)} x_j = b \quad (5.19)$$

es igual a  $\bigcup_{s \in S} [s, g]$  donde  $g = (g_1, \dots, g_m)$  con  $g_j = b \nwarrow_{\sigma(j)} a_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  y

$$S = \{s^j \mid b \preceq a_j, b \nwarrow_{\sigma(j)} a_j \preceq b \nwarrow_{\sigma(j)} a_j\}$$

siendo  $s^j = (s_1^j, \dots, s_m^j)$  con

$$s_h^j = \begin{cases} b \nwarrow_{\sigma(j)} a_j & \text{si } h = j \\ \perp & \text{en otro caso} \end{cases}$$

*Demostración.*

- (a) Observemos que la tupla 0 satisface trivialmente (5.17), ya que por la Proposición 2.9 se cumple que  $a_j \&_{\sigma(j)} \perp = \perp$  para  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Así pues, de acuerdo con la definición de  $g$ , es suficiente ver que  $g$  es solución de (5.17) para concluir que su conjunto de soluciones viene dado por  $[0, g]$ .

Ahora bien, por la Proposición 2.9, para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  se cumple que  $a_j \&_{\sigma(j)} (b \nwarrow_{\sigma(j)} a_j) \preceq b$ . En otras palabras,  $a_j \&_{\sigma(j)} g_j \preceq b$ . Por lo tanto, se deduce que

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} a_j \&_{\sigma(j)} g_j \preceq b$$

- (b) Claramente, si (5.18) no es resoluble entonces para la tupla 1 se obtiene que

$$b \not\preceq \bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} a_j \&_{\sigma(j)} \top = \bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} a_j$$

Con lo cual, la Proposición 2.2 nos permite afirmar que  $b \not\preceq a_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ . De donde,  $S^* = \emptyset$ , luego el conjunto  $\bigcup_{s \in S^*} [s, 1]$  es vacío y satisface trivialmente el enunciado.

Supongamos ahora que (5.18) es resoluble, y sea  $(x_1, \dots, x_m)$  una solución. Por la Proposición 2.2, al ser  $b$  supremo irreducible existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  que satisface  $b \preceq a_j \&_{\sigma(j)} x_j$ . Por un lado, al ser monótono  $\&_{\sigma(j)}$  creciente, esto implica que

$$b \preceq a_j \&_{\sigma(j)} x_j \preceq a_j \&_{\sigma(j)} \top = a_j \quad (5.20)$$

con lo cual  $s^j \in S^*$ . Por otro lado, por definición de  $\preceq_{\sigma(j)}$ , se satisface que  $b \preceq_{\sigma(j)} a_j \preceq x_j$ . Como resultado, se deduce que  $s^j \preceq (x_1, \dots, x_m)$ .

En vista de lo anterior, para probar que el conjunto de soluciones de (5.18) es  $\bigcup_{s \in S^*} [s, 1]$ , es suficiente ver que todo  $s^j \in S^*$  es solución de (5.18). Observemos que, para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ , se tiene que el conjunto  $\{x \in L \mid b \preceq a_j \&_{\sigma(j)} x\}$  es no vacío, ya que  $\top$  pertenece a dicho conjunto por (5.20). Como  $\&_{\sigma(j)}$  es homomorfismo, se deduce entonces que

$$\begin{aligned} b &\preceq \inf\{a_j \&_{\sigma(j)} x \mid b \preceq a_j \&_{\sigma(j)} x, x \in L\} \\ &= a_j \&_{\sigma(j)} \inf\{x \in L \mid b \preceq a_j \&_{\sigma(j)} x\} \\ &= a_j \&_{\sigma(j)} (b \preceq_{\sigma(j)} a_j) \end{aligned}$$

Con lo cual se concluye que  $s^j$  es solución de (5.18).

- (c) Es claro que una tupla es solución de (5.19) si y solo si es a la vez solución de (5.17) y de (5.18). Por lo tanto, aplicando lo probado en los enunciados (a) y (b), el conjunto de soluciones de (5.19) es igual a

$$[0, g] \cap \bigcup_{s \in S^*} [s, 1]$$

esto es

$$\bigcup_{s \in S^*} ([0, g] \cap [s, 1])$$

Observemos que, dado  $s^j \in S^*$ , se cumple que  $s_h^j = \perp$  para cada  $h \neq j$ , con lo cual el conjunto  $[0, g] \cap [s^j, 1]$  será no vacío si y solo si

$s^j \preceq g$ . De acuerdo con la definición de  $s^j$  y de  $g$ , esto se cumplirá si y solo si

$$b \text{ } \text{\tiny $\rightsquigarrow$}_{\sigma(j)} a_j = s^j_j \preceq g_j = b \text{ } \text{\tiny $\rightsquigarrow$}_{\sigma(j)} a_j$$

Con lo cual, se concluye que el conjunto de soluciones de (5.19) viene dado por  $\bigcup_{s \in S} [s, g]$ , siendo

$$S = \{s^j \mid b \preceq a_j, b \text{ } \text{\tiny $\rightsquigarrow$}_{\sigma(j)} a_j \preceq b \text{ } \text{\tiny $\rightsquigarrow$}_{\sigma(j)} a_j\}$$

□

De forma similar se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 5.3.** Sean  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \text{\tiny $\rightsquigarrow$}_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \text{\tiny $\rightsquigarrow$}_\kappa, \neg)$  un DSBMAL y  $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, \kappa\}$ . Dados  $a_1, \dots, a_m \in L$  y  $b$  un elemento supremo irreducible de  $L$ , si  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son homomorfismos entonces:

(a) El conjunto de soluciones de la sup-inecuación

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} x_j \&_{\sigma(j)} a_j \preceq b \quad (5.21)$$

es igual a  $[0, g]$ , donde  $0$  representa la tupla  $(\perp, \dots, \perp)$  y  $g = (g_1, \dots, g_m)$  con  $g_j = b \swarrow^{\sigma(j)} a_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

(b) El conjunto de soluciones de la sup-inecuación

$$b \preceq \bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} x_j \&_{\sigma(j)} a_j \quad (5.22)$$

es igual a  $\bigcup_{s \in S^*} [s, 1]$  siendo  $1 = (\top, \dots, \top)$  y  $S^* = \{s^j \mid b \preceq a_j\}$  con  $s^j = (s^j_1, \dots, s^j_m)$  y

$$s^j_h = \begin{cases} b \swarrow^{\sigma(j)} a_j & \text{si } h = j \\ \perp & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(c) El conjunto de soluciones de la sup-ecuación

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} x_j \&_{\sigma(j)} a_j = b \quad (5.23)$$

es igual a  $\bigcup_{s \in S} [s, g]$  donde  $g = (g_1, \dots, g_m)$  con  $g_j = b \swarrow^{\sigma(j)} a_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  y

$$S = \{s^j \mid b \preceq a_j, b \nwarrow^{\sigma(j)} a_j \preceq b \swarrow^{\sigma(j)} a_j\}$$

siendo  $s^j = (s_1^j, \dots, s_m^j)$  con

$$s_h^j = \begin{cases} b \nwarrow^{\sigma(j)} a_j & \text{si } h = j \\ \perp & \text{en otro caso} \end{cases}$$

*Demostración.* La demostración es análoga a la de la Proposición 5.2.  $\square$

En lo que sigue, presentaremos algunos resultados acerca de la resolución de la sup-ecuación bipolar multiadjunta (5.15) De aquí en adelante, consideraremos fijadas las siguientes convenciones notacionales:

- Dados  $x = (x_1, \dots, x_m) \in L^m$  e  $y = (y_1, \dots, y_m) \in L^m$ , entonces

$$\begin{aligned} x \wedge y &= (x_1 \wedge y_1, \dots, x_m \wedge y_m) \\ x \vee y &= (x_1 \vee y_1, \dots, x_m \vee y_m) \\ \neg x &= (\neg x_1, \dots, \neg x_m) \end{aligned}$$

- $S^+ = \{s^{j+} \mid b \preceq a_j^+, b \nwarrow_{\sigma(j)} a_j^+ \preceq b \nwarrow_{\sigma(j)} a_j^+\}$  con  $s^{j+} = (s_1^{j+}, \dots, s_m^{j+})$  y

$$s_h^{j+} = \begin{cases} b \nwarrow_{\sigma(j)} a_j^+ & \text{si } h = j \\ \perp & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.24)$$

- $S^- = \{s^{j-} \mid b \preceq a_j^-, b \nwarrow_{\sigma(j)} a_j^- \preceq b \nwarrow_{\sigma(j)} a_j^-\}$  con  $s^{j-} = (s_1^{j-}, \dots, s_m^{j-})$  y

$$s_h^{j-} = \begin{cases} b \nwarrow_{\sigma(j)} a_j^- & \text{si } h = j \\ \perp & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.25)$$

- Las tuplas  $g^+ = (g_1^+, \dots, g_m^+) \in L^m$  y  $g^- = (g_1^-, \dots, g_m^-) \in L^m$  se definen como  $g_j^+ = b \searrow_{\sigma(j)} a_j^+$  y  $g_j^- = b \searrow_{\sigma(j)} a_j^-$ , para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Para la resolución de la ecuación (5.16) se obtienen resultados análogos a los que se presentan a continuación, definiendo en ese caso los conjuntos  $S^+$  y  $S^-$  y las tuplas  $g^+$  y  $g^-$  con los operadores  $\swarrow^{\sigma(j)}$  y  $\nwarrow^{\sigma(j)}$  en lugar de con los operadores  $\searrow_{\sigma(j)}$  y  $\swarrow_{\sigma(j)}$ .

Comenzaremos caracterizando el conjunto de soluciones de (5.15).

**Teorema 5.2.** *Sea  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \searrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \searrow_\kappa, \neg)$  un DSBMAL tal que  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son homomorfismos, y sea  $b \in L$  supremo irreducible. El conjunto de soluciones de (5.15) viene dado por*

$$D = \left( \bigcup_{s \in S^+} [s \vee \neg g^-, g^+] \right) \cup \left( \bigcup_{s \in S^-} [\neg g^-, g^+ \wedge \neg s] \right)$$

*Demostración.* Ya que  $b$  es un elemento supremo irreducible de  $L$ , podemos afirmar que (5.15) es resoluble si y solo si alguno de los siguientes sistemas es resoluble:

$$\left\{ \bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} a_j^+ \&_{\sigma(j)} x_j = b \right. \quad (5.26)$$

$$\left\{ \bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} a_j^- \&_{\sigma(j)} \neg x_j \preceq b \right. \quad (5.27)$$

o bien

$$\left\{ \bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} a_j^+ \&_{\sigma(j)} x_j \preceq b \right. \quad (5.28)$$

$$\left\{ \bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} a_j^- \&_{\sigma(j)} \neg x_j = b \right. \quad (5.29)$$

Como resultado, el conjunto de soluciones de (5.15) será igual a la unión del conjunto de soluciones del primer sistema, que será denotado  $D_1$ , con el conjunto de soluciones del segundo sistema, que será denotado  $D_2$ . A continuación, procederemos con el cálculo de ambos conjuntos.

En lo que respecta al primer sistema, de acuerdo con el apartado (c) de la Proposición 5.2, una tupla  $x$  satisface la ecuación (5.26) si y solo si

$$x \in \bigcup_{s \in S^+} [s, g^+]$$

Aún más, si denotamos  $y = \neg x$ , entonces del apartado (a) de la Proposición 5.2 se deduce que (5.27) se cumple si y solo si  $y \in [0, g^-]$ , o equivalentemente, si y solo si  $0 \preceq \neg x \preceq g^-$ . Ya que  $\neg$  es una negación involutiva, obtenemos que (5.27) se satisface si y solo si  $\neg g^- \preceq x \preceq 1$ , siendo 1 la tupla  $(\top, \dots, \top)$ . Con lo cual, se concluye que

$$D_1 = \left( \bigcup_{s \in S^+} [s, g^+] \right) \cap [\neg g^-, 1]$$

Realizando operaciones elementales de conjuntos y teniendo en cuenta que  $g^+ \preceq 1$ , obtenemos que

$$D_1 = \bigcup_{s \in S^+} ([s, g^+] \cap [\neg g^-, 1]) = \bigcup_{s \in S^+} [s \vee \neg g^-, g^+]$$

En cuanto al segundo sistema, formado por (5.28) y (5.29), por el apartado (c) de la Proposición 5.2, una tupla  $x$  satisface (5.28) si y solo si  $x \in [0, g^+]$ . Ahora, definiendo  $y = \neg x$  y teniendo en cuenta el apartado (a) en la Proposición 5.2, obtenemos que  $y$  satisface (5.29) si y solo si

$$y \in \bigcup_{s \in S^-} [s, g^-]$$

De donde, al ser  $\neg$  una negación involutiva, se cumple la cadena  $s \preceq \neg x \preceq g^-$  si y solo si  $\neg g^- \preceq x \preceq \neg s$  para cada  $s \in S^-$ . Con lo cual, obtenemos que

$$D_2 = [0, g^+] \cap \left( \bigcup_{s \in S^-} [\neg g^-, \neg s] \right)$$

Como  $0 \preceq \neg g^-$ , realizando operaciones elementales de conjuntos, podemos reescribir el conjunto  $D_2$  como:

$$D_2 = \bigcup_{s \in S^-} ([0, g^+] \cap [\neg g^-, \neg s]) = \bigcup_{s \in S^-} [\neg g^-, g^+ \wedge \neg s]$$

Como resultado, se concluye que el conjunto de soluciones de (5.15) es en efecto

$$D = \left( \bigcup_{s \in S^+} [s \vee \neg g^-, g^+] \right) \cup \left( \bigcup_{s \in S^-} [\neg g^-, g^+ \wedge \neg s] \right)$$

□

Del resultado anterior se deriva que una condición necesaria para que (5.15) sea resoluble es que se cumpla la desigualdad  $\neg g^- \preceq g^+$ .

**Corolario 5.1.** *Sea  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa, \neg)$  un DSBMAL tal que  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son homomorfismos, y sea  $b \in L$  supremo irreducible. Si (5.15) es resoluble, entonces  $\neg g^- \preceq g^+$ .*

*Demostración.* Se sigue directamente del Teorema 5.2. □

Como consecuencia del Teorema 5.2, el conjunto de soluciones de (5.15) se divide en dos subconjuntos:  $\bigcup_{s \in S^+} [s \vee \neg g^-, g^+]$  y  $\bigcup_{s \in S^-} [\neg g^-, g^+ \wedge \neg s]$ . Prestando atención a la forma de ambos conjuntos, es fácil obtener una caracterización de la resolubilidad de (5.15). Concretamente, su resolubilidad depende de las tuplas  $g^+$  y  $\neg g^-$ .

**Teorema 5.3.** *Sea  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa, \neg)$  un DSBMAL tal que  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son homomorfismos, y sea  $b \in L$  supremo irreducible. Entonces (5.15) es resoluble si y solo si  $g^+$  o  $\neg g^-$  es solución.*

*Demostración.* Aplicando el Teorema 5.2, el conjunto de soluciones de (5.15) es igual a  $D_1 \cup D_2$ , siendo

$$\begin{aligned} D_1 &= \bigcup_{s \in S^+} [s \vee \neg g^-, g^+] \\ D_2 &= \bigcup_{s \in S^-} [\neg g^-, g^+ \wedge \neg s] \end{aligned}$$

Claramente  $D_1 \neq \emptyset$  si y solo si  $g^+ \in D_1$ , y  $D_2 \neq \emptyset$  si y solo si  $\neg g^- \in D_2$ . Por lo tanto, el conjunto de soluciones de (5.15) es no vacío si y solo si  $g^+ \in D_1$

o  $\neg g^- \in D_2$ . En otras palabras, (5.15) es resoluble si y solo si  $g^+$  o  $\neg g^-$  es solución.  $\square$

La estructura algebraica del conjunto de soluciones de una sup-ecuación ha sido ampliamente estudiada en la literatura. Ejemplo de ello son los trabajos [42, 43], en los que se considera como conjuntor una t-norma, así como [45], donde se analiza un sistema de sup-ecuaciones multiadjuntas. Sin embargo, hasta donde sabemos, no existían resultados similares en la bibliografía para sup-ecuaciones bipolares. El resultado mostrado a continuación proporciona una caracterización de las soluciones maximales y minimales de una sup-ecuación bipolar multiadjunta.

**Teorema 5.4.** *Sea  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa, \neg)$  un DSBMAL tal que  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son homomorfismos, y sea  $b \in L$  supremo irreducible.*

- (1) *Si  $g^+$  es solución de (5.15), entonces  $g^+$  es la solución máxima de (5.15). En otro caso, el conjunto de soluciones maximales de (5.15) viene dado por  $\hat{M} = \{g^+ \wedge \neg s \mid s \in S^-, \neg g^- \preceq g^+ \wedge \neg s\}$ .*
- (2) *Si  $\neg g^-$  es solución de (5.15), entonces  $\neg g^-$  es la solución mínima de (5.15). En otro caso, el conjunto de soluciones minimales de (5.15) viene dado por  $\check{M} = \{s \vee \neg g^- \mid s \in S^+, s \vee \neg g^- \preceq g^+\}$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 5.2, el conjunto de soluciones de (5.15) es  $D = D_1 \cup D_2$ , siendo

$$\begin{aligned} D_1 &= \bigcup_{s \in S^+} [s \vee \neg g^-, g^+] \\ D_2 &= \bigcup_{s \in S^-} [\neg g^-, g^+ \wedge \neg s] \end{aligned}$$

Es claro que si  $g^+$  es solución de (5.15), entonces  $x \preceq g^+$  para cada  $x \in D_1$ . Además, ya que  $g^+ \wedge \neg s \preceq g^+$  para cada  $s \in S^-$ , se obtiene que  $x \preceq g^+$

para cada  $x \in D_2$ . Por lo tanto, se deduce que  $g^+$  es la solución máxima de (5.15).

Supongamos ahora que  $g^+$  no es solución de (5.15). En primer lugar, observemos que  $D_1 = \emptyset$ , luego  $D = D_2$ . Como resultado, las soluciones maximales de (5.15) coinciden con los elementos maximales del conjunto  $D_2$ .

Dado  $s \in S^-$ , si  $\neg g^- \not\leq g^+ \wedge \neg s$ , entonces el intervalo  $[\neg g^-, g^+ \wedge \neg s]$  es vacío. Así pues, podemos asegurar que el conjunto de soluciones maximales de  $D_2$  está contenido en  $\hat{M} = \{g^+ \wedge \neg s \mid s \in S^-, \neg g^- \leq g^+ \wedge \neg s\} \subseteq D_2$ . Veamos que todo elemento  $g^+ \wedge \neg s \in \hat{M}$  es en realidad un elemento maximal de  $D_2$ . Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos pues que existe un elemento  $g^+ \wedge \neg s^{j_1^-} \in \hat{M}$  que no es maximal en  $D_2$ , y obtengamos una contradicción. Ya que  $g^+ \wedge \neg s^{j_1^-}$  no es maximal, existe  $x \in D_2$  tal que  $g^+ \wedge \neg s^{j_1^-} \prec x$ . Por la forma del conjunto  $D_2$ , se deduce entonces que existe  $s^{j_2^-} \in S^-$  con  $j_1^- \neq j_2^-$  de forma que  $x \leq g^+ \wedge \neg s^{j_2^-}$ . De donde,  $g^+ \wedge \neg s^{j_1^-} \prec g^+ \wedge \neg s^{j_2^-}$ . En lo que sigue, veremos que  $g^+ \wedge \neg s^{j_2^-} = g^+$ , esto es,  $g_j^+ \wedge \neg s_j^{j_2^-} = g_j^+$  para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Observemos que este hecho nos lleva a una contradicción, ya que  $g^+ \wedge \neg s^{j_2^-} \in D$  pero  $g^+$  no puede ser solución de (5.15) por hipótesis.

Por un lado, para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  con  $j \neq j_2$ , por la definición de  $s^{j_2^-}$  dada en (5.25), se sabe que  $s_j^{j_2^-} = \perp$ . Así, ya que  $\neg$  es un operador de negación y  $\top$  es el elemento máximo de  $L$ , obtenemos que

$$g_j^+ \wedge \neg s_j^{j_2^-} = g_j^+ \wedge \neg \perp = g_j^+ \wedge \top = g_j^+$$

Por otro lado, como  $g^+ \wedge \neg s^{j_1^-} \prec g^+ \wedge \neg s^{j_2^-}$ , se cumple que  $g_j^+ \wedge \neg s_j^{j_1^-} \leq g_j^+ \wedge \neg s_j^{j_2^-}$  para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ . En particular  $g_{j_2}^+ \wedge \neg s_{j_2}^{j_1^-} \leq g_{j_2}^+ \wedge \neg s_{j_2}^{j_2^-}$ .

Ahora, teniendo en cuenta la definición de  $g^+$  y que  $j_1 \neq j_2$ , se cumple

que  $g_{j_2}^+ = b \nwarrow_{\sigma(j_2)} a_{j_2}^+$  y de acuerdo con (5.25) es  $s_{j_2}^{j_1^-} = \perp$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} g_{j_2}^+ &= b \nwarrow_{\sigma(j_2)} a_{j_2}^+ = (b \nwarrow_{\sigma(j_2)} a_{j_2}^+) \wedge \top = (b \nwarrow_{\sigma(j_2)} a_{j_2}^+) \wedge \neg \perp = g_{j_2}^+ \wedge \neg s_{j_2}^{j_1^-} \\ &\preceq g_{j_2}^+ \wedge \neg s_{j_2}^{j_2^-} \end{aligned}$$

Concluimos pues que  $g_{j_2}^+ \wedge \neg s_{j_2}^{j_2^-} = g_{j_2}^+$ .

Se ha probado entonces que  $g_j^+ \wedge \neg s_j^{j_2^-} = g_j^+$  para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ , es decir,  $g^+ \wedge \neg s^{j_2^-} = g^+$ , en contradicción con la hipótesis. Se concluye entonces que todo  $g^+ \wedge \neg s \in \hat{M}$  es un elemento maximal de  $D_2$ , finalizando así la prueba del apartado (1).

En lo que respecta al apartado (2), si  $\neg g^-$  es solución de (5.15), entonces claramente  $\neg g^- \preceq x$  para cada  $x \in D_2$ . Además, al ser  $\neg g^- \preceq s \vee \neg g^-$  para cada  $s \in S^+$ , entonces todo  $x \in D_1$  satisface  $\neg g^- \preceq x$ . Con lo cual  $\neg g^-$  es la solución mínima de (5.15).

Asumiendo ahora que  $\neg g^-$  no es solución de (5.15) y argumentando de forma dual al apartado (1), obtenemos que el conjunto de soluciones minimales de (5.15) coincide con  $\check{M} = \{s \vee \neg g^- \mid s \in S^+, s \vee \neg g^- \preceq g^+\}$ .  $\square$

El hecho de que el operador de negación considerado sea involutivo juega un papel fundamental en la estructura algebraica del conjunto de soluciones de (5.15). Por ejemplo, el siguiente resultado muestra que toda solución de (5.15) tiene una solución maximal mayor que ella y una solución minimal menor que ella. Puede parecer que este resultado es evidente, trivial, pero sin embargo no es posible asegurar que se satisfaga si consideramos una negación que no sea involutiva. En la Sección 5.3 veremos un ejemplo en el que el resultado no se cumple (dicho ejemplo se encuentra justo antes del Teorema 5.10).

**Proposición 5.4.** *Sea  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa, \neg)$  un DSBMAL tal que  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son homomorfismos, sea  $b \in L$  supremo irreducible y sean  $\hat{M}$  y  $\check{M}$  los conjuntos de soluciones maximales y minimales de (5.15), respectivamente.*

Entonces, para cada solución  $x$  de (5.15) existen  $\hat{m} \in \hat{M}$  y  $\check{m} \in \check{M}$  tales que  $\check{m} \preceq x \preceq \hat{m}$ .

*Demostración.* Por el Teorema 5.2, el conjunto de soluciones de (5.15) es  $D = D_1 \cup D_2$ , con

$$\begin{aligned} D_1 &= \bigcup_{s \in S^+} [s \vee \neg g^-, g^+] \\ D_2 &= \bigcup_{s \in S^-} [\neg g^-, g^+ \wedge \neg s] \end{aligned}$$

Supongamos que  $x \in D_1$ . Por la forma de  $D_1$ , existe  $s \in S^+$  tal que  $x \in [s \vee \neg g^-, g^+] \subseteq D$ . Observemos que  $g^+$  es entonces una solución de (5.15). Ahora, si  $\neg g^-$  también es solución de (5.15), el Teorema 5.4 nos permite asegurar que  $g^+$  y  $\neg g^-$  son las soluciones máxima y mínima de (5.15), respectivamente. Por lo tanto, ya que  $\neg g^- \preceq s \vee \neg g^- \preceq x \preceq g^+$ , tomando  $\check{m} = \neg g^-$  y  $\hat{m} = g^+$  obtenemos que  $\check{m} \preceq x \preceq \hat{m}$ .

En otro caso, si  $\neg g^-$  no es solución de (5.15), al ser  $s \vee \neg g^- \preceq g^+$ , aplicando el Teorema 5.4 obtenemos que  $s \vee \neg g^-$  es una solución minimal de (5.15). Por lo tanto, podemos definir  $\check{m} = s \vee \neg g^-$  y  $\hat{m} = g^+$ .

Supongamos ahora que  $x \notin D_1$ , y por tanto  $x \in D_2$ . Siguiendo un razonamiento dual, existe un elemento  $s \in S^-$  tal que  $x \in [\neg g^-, g^+ \wedge \neg s] \subseteq D$ . Como resultado,  $\neg g^-$  es solución de (5.15). Por un lado, si  $g^+$  es solución de (5.15), podemos definir  $\check{m} = \neg g^-$  y  $\hat{m} = g^+$ . Por el contrario, si  $g^+$  no es solución de (5.15), ya que  $\neg g^- \preceq g^+ \wedge \neg s$ , aplicando el Teorema 5.4 se deduce que  $g^+ \wedge \neg s$  es una solución maximal de (5.15). Consecuentemente, podemos tomar  $\check{m} = \neg g^-$  y  $\hat{m} = g^+ \wedge \neg s$ . En ambos casos concluimos que  $\check{m} \preceq x \preceq \hat{m}$  siendo  $\hat{m} \in \hat{M}$  y  $\check{m} \in \check{M}$ .  $\square$

### 5.2.2. Resolviendo sistemas de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas

Una vez analizada la resolución de una sup-ecuación bipolar multiadjunta, abordaremos el estudio de un sistema de sup-ecuaciones. Al igual que en la Sección 5.2.1, los resultados mostrados a continuación se enunciarán para el sistema dado por (5.13). Para la resolución del sistema dado por (5.14) se obtienen resultados análogos a los que se dan a continuación, intercambiando los operadores  $\nwarrow_{\sigma(j)}$  y  $\nearrow_{\sigma(j)}$  por  $\swarrow_{\sigma(j)}$  y  $\searrow_{\sigma(j)}$ , respectivamente. En lo que sigue, consideraremos fijadas las siguientes convenciones notacionales, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ :

- $S_i^+ = \{s_i^{j+} \mid b_i \preceq a_{ij}^+, b_i \nearrow_{\sigma(j)} a_{ij}^+ \preceq b_i \nwarrow_{\sigma(j)} a_{ij}^+, \text{ donde } s_i^{j+} \text{ se define de forma análoga a } s^{j+} \text{ en (5.24).}$
- $S_i^- = \{s_i^{j-} \mid b_i \preceq a_{ij}^-, b_i \nearrow_{\sigma(j)} a_{ij}^- \preceq b_i \nwarrow_{\sigma(j)} a_{ij}^-, \text{ donde } s_i^{j-} \text{ se define de forma análoga a } s^{j-} \text{ en (5.25).}$
- Las tuplas  $g_i^+ = (g_{i1}^+, \dots, g_{im}^+)$  y  $g_i^- = (g_{i1}^-, \dots, g_{im}^-)$  se definen como  $g_{ij}^+ = b_i \nwarrow_{\sigma(j)} a_{ij}^+$  y  $g_{ij}^- = b_i \nwarrow_{\sigma(j)} a_{ij}^-$  para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

El siguiente teorema proporciona el conjunto de soluciones de un sistema de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas.

**Teorema 5.5.** *Sea  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa, \neg)$  un DSBMAL tal que  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son homomorfismos, y sean  $b_1, \dots, b_n \in L$  supremo irreducibles. El conjunto de soluciones de (5.13) viene dado por*

$$D = \bigcap_{i=1}^n \left( \left( \bigcup_{s \in S_i^+} [s \vee \neg g_i^-, g_i^+] \right) \cup \left( \bigcup_{s \in S_i^-} [\neg g_i^-, g_i^+ \wedge \neg s] \right) \right)$$

*Demostración.* Aplicando el Teorema 5.2, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , el conjunto de soluciones de la  $i$ -ésima ecuación de (5.13) es

$$D_i = \left( \bigcup_{s \in S_i^+} [s \vee \neg g_i^-, g_i^+] \right) \cup \left( \bigcup_{s \in S_i^-} [\neg g_i^-, g_i^+ \wedge \neg s] \right)$$

Por lo tanto, intersecando los conjuntos previos, se concluye que el conjunto de soluciones de (5.13) es igual a

$$D = \bigcap_{i=1}^n D_i = \bigcap_{i=1}^n \left( \left( \bigcup_{s \in S_i^+} [s \vee \neg g_i^-, g_i^+] \right) \cup \left( \bigcup_{s \in S_i^-} [\neg g_i^-, g_i^+ \wedge \neg s] \right) \right)$$

□

Como consecuencia del Teorema 5.5, podemos proporcionar una cota superior y una cota inferior del conjunto de soluciones de un sistema de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas. Específicamente,  $\neg g_1^- \vee \cdots \vee \neg g_n^-$  y  $g_1^+ \wedge \cdots \wedge g_n^+$  son cota inferior y cota superior del conjunto de soluciones de (5.13), respectivamente. Una condición necesaria para la resolubilidad de (5.13) es entonces que la desigualdad  $\neg g_1^- \vee \cdots \vee \neg g_n^- \preceq g_1^+ \wedge \cdots \wedge g_n^+$  se cumpla. Este resultado se formaliza como sigue.

**Proposición 5.5.** *Sea  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \lhd_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \lhd_\kappa, \neg)$  un DSBMAL tal que  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son homomorfismos, y sean  $b_1, \dots, b_n \in L$  supremo irreducibles. Si (5.13) es resoluble, entonces  $\neg g_1^- \vee \cdots \vee \neg g_n^- \preceq g_1^+ \wedge \cdots \wedge g_n^+$ . Además*

$$D \subseteq [\neg g_1^- \vee \cdots \vee \neg g_n^-, g_1^+ \wedge \cdots \wedge g_n^+]$$

*Demostración.* Atendiendo a la forma del conjunto  $D_i$ , siendo  $D_i$  el conjunto de soluciones de la  $i$ -ésima ecuación de (5.13), obtenemos que  $D_i \subseteq [\neg g_i^-, g_i^+]$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Así pues, teniendo en cuenta que  $D = \bigcap_{i=1}^n D_i$ , se obtiene que

$$D \subseteq \bigcap_{i=1}^n [\neg g_i^-, g_i^+]$$

Aún más, por definición de supremo e ínfimo:

$$D \subseteq \bigcap_{i=1}^n [\neg g_i^-, g_i^+] \subseteq [\neg g_1^- \vee \cdots \vee \neg g_n^-, g_1^+ \wedge \cdots \wedge g_n^+]$$

Claramente, si  $\neg g_1^- \vee \cdots \vee \neg g_n^- \not\leq g_1^+ \wedge \cdots \wedge g_n^+$ , entonces

$$\left[ \neg g_1^- \vee \cdots \vee \neg g_n^-, g_1^+ \wedge \cdots \wedge g_n^+ \right] = \emptyset$$

luego se concluye que  $D = \emptyset$ . En otras palabras, el sistema (5.13) no es resoluble, en contradicción con la hipótesis.  $\square$

En base al Teorema 5.5 es posible proporcionar una condición necesaria y suficiente para la resolubilidad de (5.13). Para ello, hemos de requerir una condición adicional a las hipótesis de dicho resultado: que los conjuntos sean estrictamente crecientes.

La idea de la caracterización mostrada a continuación es tomar el conjunto más pequeño que nos permite asegurar que (5.13) tiene solución. Esto hace posible comprobar la resolubilidad de (5.13) de forma más eficiente, limitándonos a los elementos de dicho conjunto.

Notemos que si los conjuntos  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son estrictamente crecientes, el miembro  $b_i$  en la  $i$ -ésima ecuación de (5.13) puede alcanzarse en  $a_{ij}^+ \&_{\sigma(j)} x_j$  mediante a lo sumo un valor de  $x_j$ . Así mismo,  $b_i$  puede alcanzarse en el término  $a_{ij}^- \&_{\sigma(j)} \neg x_j$  mediante a lo sumo un valor de  $\neg x_j$ , y por tanto de  $x_j$ , al ser  $\neg$  involutiva. Con lo cual, si  $b_i \&_{\sigma(j)} a_{ij}^+ \leq b_i \&_{\sigma(j)} a_{ij}^+$ , entonces ha de ser  $b_i \&_{\sigma(j)} a_{ij}^+ = b_i \&_{\sigma(j)} a_{ij}^+$ . Esta sencilla conclusión permite reducir considerablemente el número de posibilidades, dando lugar al siguiente resultado.

**Teorema 5.6.** *Sea  $(L, \leq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa, \neg)$  un DSBMAL tal que  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son homomorfismos, y sean  $b_1, \dots, b_n \in L$  supremo irreducibles. Consideremos las tuplas  $\check{g} = \neg g_1^- \vee \cdots \vee \neg g_n^-$  y  $\hat{g} = g_1^+ \wedge \cdots \wedge g_n^+$ , y el conjunto<sup>1</sup>*

$$G = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_j \in \{\check{g}_j, \hat{g}_j\} \text{ para cada } j \in \{1, \dots, m\}\}$$

*Si  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son estrictamente crecientes en  $\{(x, y) \in L \times L \mid x \neq \perp \text{ o } y \neq \perp\}$ , entonces (5.13) es resoluble si y solo si  $D \cap G \neq \emptyset$ .*

<sup>1</sup>Observar que  $\check{g}_j$  y  $\hat{g}_j$  denotan la componente  $j$ -ésima de  $\check{g}$  y  $\hat{g}$ , respectivamente.

*Demostración.* Evidentemente, si  $D \cap G \neq \emptyset$  entonces  $D \neq \emptyset$ , luego (5.13) es resoluble por el Teorema 5.5. Para probar el recíproco, supongamos que (5.13) es resoluble, y sea  $(x_1, \dots, x_m) \in D$  una de sus soluciones. Supongamos que existe  $h \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $x_h \neq \hat{g}_h$ , y veamos que la tupla  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$ , dada por  $\bar{x}_j = x_j$  si  $j \neq h$  y  $\bar{x}_h = \check{g}_h$ , también es solución de (5.13). Esto es,  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \in D$ .

Es claro que si  $x_h = \check{g}_h$ , la tupla  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$  coincide con  $(x_1, \dots, x_m)$ , luego por hipótesis se trata de una solución de (5.13). Asumamos pues que  $x_h \neq \check{g}_h$ . Aplicando la Proposición 5.5, ya que  $(x_1, \dots, x_m) \in D$ , obtenemos que  $\check{g} \preceq (x_1, \dots, x_m) \preceq \hat{g}$ . Consecuentemente  $\check{g}_j \preceq x_j \preceq \hat{g}_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ . En particular, ya que  $x_h \neq \check{g}_h$  y  $x_h \neq \hat{g}_h$ , se obtiene que  $\check{g}_h \prec x_h \prec \hat{g}_h$ .

Por definición de las tuplas  $\check{g}$  y  $\hat{g}$ , sus  $h$ -ésimas componentes son  $\hat{g}_h = g_{1h}^+ \wedge \dots \wedge g_{nh}^+$  y  $\check{g}_h = \neg g_{1h}^- \vee \dots \vee \neg g_{nh}^-$ , respectivamente. Por un lado, esto nos permite afirmar que  $x_h \prec \hat{g}_h \preceq g_{ih}^+$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Así, ya que  $\&_{\sigma(h)}$  es estrictamente creciente, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  con  $a_{ih}^+ \neq \perp$  y  $a_{ih}^- \neq \perp$  se cumple que  $a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} x_h \prec a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} g_{ih}^+$ . Por otro lado, al ser  $\neg$  una negación involutiva, se deduce que  $\neg x_h \prec \neg \check{g}_h \preceq \neg \neg g_{ih}^- = g_{ih}^-$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . De donde,  $a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} \neg x_h \prec a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} g_{ih}^-$ . Como resultado, al ser  $(L, \preceq)$  distributivo, por la Proposición 2.3 se obtiene que

$$(a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} x_h) \vee (a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} \neg x_h) \prec (a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} g_{ih}^+) \vee (a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} g_{ih}^-) \quad (5.30)$$

Observemos que si  $a_{ih}^+ = \perp$  y  $a_{ih}^- \neq \perp$  se cumple que  $a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} x_h = \perp$  luego

$$(a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} x_h) \vee (a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} \neg x_h) = a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} \neg x_h \prec (a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} g_{ih}^+) \vee (a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} g_{ih}^-)$$

Análogamente, la desigualdad (5.30) también se obtiene si  $a_{ih}^+ \neq \perp$  y  $a_{ih}^- = \perp$ . Por último, si  $a_{ih}^+ = a_{ih}^- = \perp$ , se cumple que

$$(a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} x_h) \vee (a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} \neg x_h) = (a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} g_{ih}^+) \vee (a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} g_{ih}^-) = \perp \quad (5.31)$$

Ahora bien, por definición  $g_{ih}^+ = b_i \nwarrow_{\sigma(h)} a_{ih}^+$  y  $g_{ih}^- = b_i \nwarrow_{\sigma(h)} a_{ih}^-$ , luego al ser  $(\&_{\sigma(h)}, \swarrow^{\sigma(h)}, \nwarrow_{\sigma(h)})$  un triple adjunto se obtiene que  $a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} g_{ih}^+ \preceq b_i$  y  $a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} g_{ih}^- \preceq b_i$ . Con lo cual de (5.30) se deduce que

$$(a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} x_h) \vee (a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} \neg x_h) \prec b_i$$

Ya que  $(x_1, \dots, x_m)$  es por hipótesis solución de (5.13) y  $b_i$  es supremo irreducible, podemos afirmar entonces que  $b_i$  se alcanza en algún índice distinto de  $h$ . Aún más, este razonamiento también es válido si se cumple (5.30), puesto que  $b_i \neq \perp$  al ser supremo irreducible. Como resultado, teniendo en cuenta que  $\bar{x}_j = x_j$  para cada  $j \neq h$ , se deduce que

$$\bigvee_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \neq h}} (a_{ij}^+ \&_{\sigma(j)} \bar{x}_j) \vee (a_{ij}^- \&_{\sigma(j)} \neg \bar{x}_j) = \bigvee_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \neq h}} (a_{ij}^+ \&_{\sigma(j)} x_j) \vee (a_{ij}^- \&_{\sigma(j)} \neg x_j) = b_i$$

Por último, ya que  $\bar{x}_h = \check{g}_h$ , siendo  $\check{g}_h \preceq \hat{g}_h \preceq g_{ih}^+$  y  $\neg \check{g}_h \preceq g_{ih}^-$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , se cumple que

$$\begin{aligned} (a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} \bar{x}_h) \vee (a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} \neg \bar{x}_h) &= (a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} \check{g}_h) \vee (a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} \neg \check{g}_h) \\ &\preceq (a_{ih}^+ \&_{\sigma(h)} g_{ih}^+) \vee (a_{ih}^- \&_{\sigma(h)} g_{ih}^-) \preceq b_i \end{aligned}$$

En base a lo anterior, se concluye que

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (a_{ij}^+ \&_{\sigma(j)} \bar{x}_j) \vee (a_{ij}^- \&_{\sigma(j)} \neg \bar{x}_j) = b_i$$

para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . En otras palabras,  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$  es solución de (5.13).

Observemos que podemos reproducir de nuevo el razonamiento previo si existe ahora un índice  $\bar{h} \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $\bar{x}_{\bar{h}} \neq \hat{g}_{\bar{h}}$ , y así sucesivamente. En a lo sumo  $m$  pasos, obtendremos una tupla  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) \in D$  tal que para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  es o bien  $\tilde{x}_j = \check{g}_j$  o bien  $\tilde{x}_j = \hat{g}_j$ . Esto es, la tupla  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)$  pertenece a  $G$ , y por tanto  $D \cap G \neq \emptyset$ , como queríamos demostrar.  $\square$

Como consecuencia del Teorema 5.6, comprobar si un sistema de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas es resoluble resulta más liviano, pues tan solo hay que comprobar si algún elemento del conjunto  $G$  es solución del sistema.

Llegados a este punto, es importante destacar que la monotonía estricta de los conjuntors resulta crucial para que se satisfaga el Teorema 5.6. En efecto, dicho resultado no se cumple, en general, si hacemos uso de algún conjuntor que no sea estrictamente creciente. El siguiente ejemplo es una clara muestra de ello.

**Ejemplo 5.1.** Consideremos el retículo residuado  $([0, 1], \leq, \&_G, \leftarrow_G)$  enriquecido con la negación estándar  $\neg_S$ , y sea el sistema de sup-ecuaciones bipolares dado por

$$\begin{aligned} (0.4 \&_G x) \vee (0.5 \&_G \neg_S x) \vee (0.6 \&_G y) \vee (0.4 \&_G \neg_S y) &= 0.6 \\ (0.2 \&_G x) \vee (0.2 \&_G \neg_S x) \vee (0.1 \&_G y) \vee (0.3 \&_G \neg_S y) &= 0.3 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Observemos que, al ser  $\&_G$  conmutativo y  $\neg_S$  una negación involutiva, la tupla  $([0, 1], \leq, \&_G, \leftarrow_G, \leftarrow_G, \neg_S)$  es un caso particular de DSBMAL, luego (5.32) satisface todas las hipótesis del Teorema 5.6, a excepción de que la  $t$ -norma de Gödel no es estrictamente creciente. Realizando los cálculos correspondientes obtenemos:

$$\begin{aligned} g_1^+ &= (0.6 \leftarrow_G 0.4, 0.6 \leftarrow_G 0.6) = (1, 1) \\ g_1^- &= (0.6 \leftarrow_G 0.5, 0.6 \leftarrow_G 0.4) = (1, 1) \\ g_2^+ &= (0.3 \leftarrow_G 0.2, 0.3 \leftarrow_G 0.1) = (1, 1) \\ g_2^- &= (0.3 \leftarrow_G 0.2, 0.3 \leftarrow_G 0.3) = (1, 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\neg_S g_1^- = \neg_S g_2^- = (0, 0)$ , de donde,  $\hat{g} = \inf\{g_1^+, g_2^+\} = (1, 1)$  y  $\check{g} = \sup\{\neg_S g_1^-, \neg_S g_2^-\} = (0, 0)$ . El conjunto  $G$  viene definido entonces como

$$G = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \{\check{g}_1, \hat{g}_1\}, x_2 \in \{\check{g}_2, \hat{g}_2\}\} = \{(1, 1), (0, 1), (1, 0), (0, 0)\}$$

Es fácil ver que ninguno de los elementos de  $G$  es solución de (5.32). Sin embargo, el sistema dado por (5.32) es resoluble. Por ejemplo, la tupla  $(1, 0.7)$  es solución

de dicho sistema, como vemos a continuación. Para la primera ecuación de (5.32) se obtiene que

$$\begin{aligned} (0.4 \&_G 1) \vee (0.5 \&_G \neg_S 1) \vee (0.6 \&_G 0.7) \vee (0.4 \&_G \neg_S 0.7) &= \\ \min\{0.4, 1\} \vee \min\{0.5, 0\} \vee \min\{0.6, 0.7\} \vee \min\{0.4, 0.3\} &= 0.6 \end{aligned}$$

Así mismo, para la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} (0.2 \&_G 1) \vee (0.2 \&_G \neg_S 1) \vee (0.1 \&_G 0.7) \vee (0.3 \&_G \neg_S 0.7) &= \\ \min\{0.2, 1\} \vee \min\{0.2, 0\} \vee \min\{0.1, 0.7\} \vee \min\{0.3, 0.3\} &= 0.3 \end{aligned}$$

Con lo cual, en efecto,  $(1, 0.7)$  es solución de (5.32).  $\diamond$

Al igual que en caso de una única sup-ecuación bipolar multiad junta, toda solución de (5.13) es inferior a una solución maximal de (5.13) y superior a una solución minimal de (5.13). En efecto, esto se deduce directamente de la forma del conjunto de soluciones de (5.13).

**Proposición 5.6.** Sea  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa, \neg)$  un DSBMAL tal que  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son homomorfismos, sean  $b_1, \dots, b_n \in L$  supremo irreducibles y sean  $\hat{M}$  y  $\check{M}$  los conjuntos de soluciones maximales y minimales de (5.13), respectivamente. Entonces, para cada solución  $x$  de (5.13), existen  $\hat{m} \in \hat{M}$  y  $\check{m} \in \check{M}$  tales que  $\check{m} \preceq x \preceq \hat{m}$ .

*Demostración.* Por el Teorema 5.5, el conjunto de soluciones de (5.13), denotado  $D$ , es la intersección finita de una unión finita de intervalos. Por lo tanto, se trata así mismo de una unión finita de intervalos. Esto implica que todo  $x \in D$  pertenece a alguno de dichos intervalos. Así, al ser  $D$  unión finita de intervalos, existirán dos intervalos  $[\check{m}, z_1], [z_2, \hat{m}] \subseteq D$  con  $x \in [\check{m}, z_1] \cup [z_2, \hat{m}]$  y  $z_1 \preceq z_2$  de forma que  $\check{m}$  es minimal y  $\hat{m}$  es maximal en  $D$ . Consecuentemente se deduce que  $\check{m} \preceq x \preceq \hat{m}$ .  $\square$

En lo que respecta a las soluciones maximales y minimales de (5.13), estas pueden caracterizarse a través de las soluciones maximales y minimales de las sup-ecuaciones que componen dicho sistema. El siguiente

resultado establece en qué consiste específicamente dicha caracterización, y con él se concluye el estudio sobre la resolución de sistemas de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas.

**Teorema 5.7.** *Sea  $(L, \preceq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_\kappa, \swarrow^\kappa, \nwarrow_\kappa, \neg)$  un DSBMAL tal que  $\&_1, \dots, \&_\kappa$  son homomorfismos, y sean  $b_1, \dots, b_n \in L$  supremo irreducibles. Denotemos por  $D$  al conjunto de soluciones de (5.13), y sean  $\hat{M}_i$  y  $\check{M}_i$  los conjuntos de soluciones maximales y minimales de la  $i$ -ésima ecuación de (5.13), respectivamente. Entonces:*

1. *Las soluciones maximales de (5.13) coinciden con los elementos maximales del conjunto*

$$\overline{M} = \left\{ \hat{m}_1 \wedge \dots \wedge \hat{m}_n \in D \mid \hat{m}_i \in \hat{M}_i \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

2. *Las soluciones minimales de (5.13) coinciden con los elementos minimales del conjunto*

$$\underline{M} = \left\{ \check{m}_1 \vee \dots \vee \check{m}_n \in D \mid \check{m}_i \in \check{M}_i \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

*Demostración.* Haremos la demostración del primer apartado, el segundo se prueba de forma dual.

Supongamos en primer lugar que una tupla  $\hat{x}$  es solución maximal de (5.13), y veamos que  $\hat{x} \in \overline{M}$ . Claramente  $\hat{x} \in D$ , por ser solución del sistema. Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , por la Proposición 5.4, existe  $\hat{m}_i \in \hat{M}_i$  tal que  $\hat{x} \preceq \hat{m}_i$ . Probaremos que  $\hat{x} = \hat{m}_1 \wedge \dots \wedge \hat{m}_n$ .

Evidentemente, ya que  $\hat{x} \preceq \hat{m}_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , por definición de ínfimo es  $\hat{x} \preceq \hat{m}_1 \wedge \dots \wedge \hat{m}_n$ . Supongamos que  $\hat{x} \prec \hat{m}_1 \wedge \dots \wedge \hat{m}_n$ , y vamos a obtener una contradicción. Dado  $k \in \{1, \dots, n\}$ , de acuerdo con la forma<sup>2</sup> del conjunto  $D_k$ , podemos afirmar que existe  $z \in D_k$  tal que

---

<sup>2</sup>Dicho conjunto puede obtenerse aplicando el Teorema 5.2 a la  $k$ -ésima ecuación de (5.13).

$\hat{x} \in [z, \hat{m}_k] \subseteq D_k$ . Como resultado, la siguiente cadena de desigualdades se satisface:

$$z \preceq \hat{x} \preceq \hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n \preceq \hat{m}_k$$

Por lo tanto, obtenemos que  $\hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n \in [z, \hat{m}_k]$ , de donde se deduce que  $\hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n \in D_k$ . Puesto que  $k$  es un elemento arbitrario de  $\{1, \dots, n\}$ , hemos probado que  $\hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n \in D_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . De donde,  $\hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n \in D$ . Así pues, al ser  $\hat{x} \preceq \hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n$  con  $\hat{x}$  solución maximal de (5.13), se concluye que  $\hat{x} = \hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n$ . Con lo cual  $\hat{x} \in \overline{M}$  y además  $\hat{x}$  es maximal en  $\overline{M}$  por su maximalidad como elemento de  $D$ , como queríamos demostrar.

Sea ahora  $\hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n \in \overline{M}$  un elemento maximal de  $\overline{M}$ . Claramente, por definición del conjunto  $\overline{M}$ , se obtiene que  $\hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n \in D$ . Veamos que se trata de una solución maximal de (5.13) por reducción al absurdo.

Supongamos pues que existe  $x \in D$  con  $\hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n \prec x$ . Aplicando la Proposición 5.6, existe una solución maximal  $\bar{m}$  de (5.13) tal que  $x \preceq \bar{m}$ . Ahora bien, por el recíproco del primer apartado que ya hemos probado,  $\bar{m}$  pertenece al conjunto  $\overline{M}$ , luego es de la forma  $\bar{m} = \bar{m}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{m}_n$ , siendo  $\bar{m}_i$  solución maximal de la  $i$ -ésima ecuación para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Se deduce entonces que  $\hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n \prec x \preceq \bar{m}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{m}_n$ , luego  $\hat{m}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{m}_n$  no es maximal en  $\overline{M}$ , en contradicción con la hipótesis.  $\square$

Naturalmente, es posible afirmar que todo elemento de  $\overline{M}$  (respectivamente  $\underline{M}$ ) es maximal (respectivamente minimal) si se imponen ciertas condiciones adicionales. Por ejemplo, si el retículo  $(L, \preceq)$  forma una cadena, pues en tal caso  $\overline{M}$  y  $\underline{M}$  son conjuntos unitarios. Aún así, por lo general, los conjuntos  $\overline{M}$  y  $\underline{M}$  no tendrán un número muy grande de elementos, luego será posible concluir fácilmente cuáles son sus elementos maximales y minimales, respectivamente.

### 5.2.3. Ejemplos ilustrativos

Los ejemplos mostrados a continuación ponen en valor la gran cantidad de sistemas de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas, y por ello de ecuaciones bipolares multiadjuntas de relaciones difusas, que se encuentran en el ámbito del estudio desarrollado previamente. En otras palabras, ilustran el amplio rango de ecuaciones bipolares multiadjuntas de relaciones difusas a las que podemos aplicar los resultados mostrados en la Sección 5.2.2.

**Ejemplo 5.2.** *En este primer ejemplo consideraremos un entorno difuso tradicional, es decir, con operadores definidos en el intervalo unidad  $[0, 1]$ . Consideremos pues los operadores  $\&_1, \&_2: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  definidos, para cada  $x, y \in [0, 1]$ , como:*

$$x \&_1 y = \begin{cases} x^2 y & \text{si } y \leq 0.5 \\ xy & \text{si } 0.5 < y \end{cases}$$

$$x \&_2 y = \begin{cases} xy^2 & \text{si } x \leq 0.5 \\ xy & \text{si } 0.5 < x \end{cases}$$

Sea  $\sigma: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2\}$  la aplicación dada por  $\sigma(1) = \sigma(2) = 1$  y  $\sigma(3) = 2$ . Estamos interesados en resolver la ecuación bipolar multiadjunta de relaciones difusas dada por

$$(R^+ \circ_\sigma S) \vee (R^- \circ_\sigma \neg_S S) = T \quad (5.33)$$

siendo  $S = \{x_{jk}\}_{3 \times 2}$  una relación difusa desconocida y

$$R^+ = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad R^- = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.9 & 0.8 \\ 0.5 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Tal y como se vio en la Sección 5.1, descomponiendo  $T$  en columnas se obtiene que resolver (5.33) es equivalente a resolver los sistemas de sup-ecuaciones

$$\begin{aligned} (0.3, 0.6, 0.4) \odot_\sigma (x_{11}, x_{21}, x_{31}) \vee (0.3, 0.9, 0.8) \odot_\sigma \neg_S (x_{11}, x_{21}, x_{31}) &= 0.5 \\ (0.6, 0.5, 1) \odot_\sigma (x_{11}, x_{21}, x_{31}) \vee (0.5, 0.3, 0.6) \odot_\sigma \neg_S (x_{11}, x_{21}, x_{31}) &= 0.8 \end{aligned} \quad (5.34)$$

$y$

$$\begin{aligned} (0.3, 0.6, 0.4) \odot_{\sigma} (x_{12}, x_{22}, x_{32}) \vee (0.3, 0.9, 0.8) \odot_{\sigma} \neg_S (x_{12}, x_{22}, x_{32}) &= 0.6 \\ (0.6, 0.5, 1) \odot_{\sigma} (x_{12}, x_{22}, x_{32}) \vee (0.5, 0.3, 0.6) \odot_{\sigma} \neg_S (x_{12}, x_{22}, x_{32}) &= 0.5 \end{aligned} \quad (5.35)$$

donde  $(a, b, c) \odot_{\sigma} (x, y, z) = (a \&_1 x) \vee (b \&_1 y) \vee (c \&_2 z)$  si  $a, b, c, x, y, z \in [0, 1]$ .

Comencemos pues resolviendo (5.34). Para ello, definiremos dos operadores adjuntos a cada conjuntor  $\&_1, \&_2$  para formar dos triples adjuntos. Dichos operadores serán  $\swarrow^1, \nwarrow_1: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  y  $\swarrow^2, \nwarrow_2: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , respectivamente, definidos como:

$$\begin{aligned} z \swarrow^1 y &= \begin{cases} 1 & \text{si } y = 0 \\ \min \left\{ \sqrt{\frac{z}{y}}, 1 \right\} & \text{si } 0 < y \leq 0.5 \\ \min \left\{ \frac{z}{y}, 1 \right\} & \text{si } 0.5 < y \end{cases} \\ z \nwarrow_1 x &= \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \min \left\{ \frac{z}{x^2}, 0.5 \right\} & \text{si } \frac{z}{x} \leq 0.5 \\ \min \left\{ \frac{z}{x}, 1 \right\} & \text{si } 0.5 < \frac{z}{x} \end{cases} \\ z \swarrow^2 y &= \begin{cases} 1 & \text{si } y = 0 \\ \min \left\{ \frac{z}{y}, 0.5 \right\} & \text{si } \frac{z}{y} \leq 0.5 \\ \min \left\{ \frac{z}{y^2}, 1 \right\} & \text{si } 0.5 < \frac{z}{y} \end{cases} \\ z \nwarrow_2 x &= \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \min \left\{ \sqrt{\frac{z}{x}}, 1 \right\} & \text{si } 0 < x \leq 0.5 \\ \min \left\{ \frac{z}{x}, 1 \right\} & \text{si } 0.5 < x \end{cases} \end{aligned}$$

Por definición, las tuplas  $g_1^+, g_1^-, g_2^+, g_2^-$  correspondientes a (5.34) vienen dadas por:

$$\begin{aligned} g_1^+ &= (0.5 \nwarrow_1 0.3, 0.5 \nwarrow_1 0.6, 0.5 \nwarrow_2 0.4) = (1, 0.8\hat{3}, 1) \\ g_1^- &= (0.5 \nwarrow_1 0.3, 0.5 \nwarrow_1 0.9, 0.5 \nwarrow_2 0.8) = (1, 0.5\hat{5}, 0.625) \\ g_2^+ &= (0.8 \nwarrow_1 0.6, 0.8 \nwarrow_1 0.5, 0.8 \nwarrow_2 1) = (1, 1, 0.8) \\ g_2^- &= (0.8 \nwarrow_1 0.5, 0.8 \nwarrow_1 0.3, 0.8 \nwarrow_2 0.6) = (1, 1, 1) \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned}\neg_S(g_1^-) &= \neg_S(1, 0.5, 0.625) = (0, 0.4, 0.375) \\ \neg_S(g_2^-) &= \neg_S(1, 1, 1) = (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\hat{g} &= g_1^+ \wedge g_2^+ = (1, 0.8\hat{3}, 0.8) \\ \check{g} &= \neg_S(g_1^-) \vee \neg_S(g_2^-) = (0, 0.4, 0.375)\end{aligned}$$

Observemos que  $\&_1$  y  $\&_2$  conservan el ínfimo y el supremo, esto es, son homomorfismos, y por la Proposición 2.1 todo elemento de  $[0, 1]$  es supremo irreducible al tratarse de una cadena. Además, tanto  $\&_1$  como  $\&_2$  son estrictamente crecientes en  $\{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x \neq 0 \text{ o } y \neq 0\}$ , con lo cual el Teorema 5.6 nos permite afirmar que (5.34) es resoluble si y solo si algún elemento del conjunto

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in \{1, 0\}, x_2 \in \{0.8\hat{3}, 0.4\}, x_3 \in \{0.8, 0.375\}\}$$

es solución de (5.34). Claramente  $\hat{g} \in G$ , y se comprueba que  $\hat{g}$  es solución de (5.34), luego se trata de un sistema de sup-ecuaciones resoluble.

Además, puede comprobarse que tanto  $g_1^+$  como  $\neg_S(g_1^-)$  son soluciones de la primera ecuación de (5.34). Con lo cual, por el Teorema 5.4,  $g_1^+$  y  $\neg_S(g_1^-)$  son las soluciones máxima y mínima de dicha ecuación, respectivamente. Así pues, de acuerdo con la notación del Teorema 5.7 serán  $\hat{M}_1 = \{g_1^+\}$  y  $\check{M}_1 = \{\neg_S(g_1^-)\}$ . Igualmente, como  $g_2^+$  es solución de la segunda ecuación de (5.34), entonces  $\hat{M}_2 = \{g_2^+\}$ . Puesto que  $\hat{g} = g_1^+ \wedge g_2^+$  es solución de (5.34), se concluye por el Teorema 5.7 que el conjunto de soluciones maximales de (5.34) coincide con los elementos maximales del conjunto

$$\overline{M} = \{(1, 0.8\hat{3}, 0.8)\}$$

Como  $\overline{M}$  tiene un único elemento, se concluye que  $(1, 0.8\hat{3}, 0.8)$  es la única solución maximal de (5.34).

Por otro lado, como vemos a continuación,  $\neg_S(g_2^-)$  no es solución de dicha ecuación:

$$(0.6, 0.5, 1) \odot_\sigma (0, 0, 0) \vee (0.5, 0.3, 0.6) \odot_\sigma \neg_S(0, 0, 0) = 0.5 \vee 0.3 \vee 0.6 = 0.6 \neq 0.5$$

Por lo tanto, para saber las soluciones minimales de la segunda ecuación de (5.34), es preciso calcular la forma del conjunto  $S_2^+$ , lo que nos llevará a conocer también las soluciones minimales de (5.34). Más generalmente, en lo que sigue calcularemos los conjuntos  $S_1^+$ ,  $S_1^-$ ,  $S_2^+$  y  $S_2^-$ , con objeto de proporcionar el conjunto completo de soluciones de (5.34). Para ello, hemos de determinar previamente cómo se definen los operadores  $\lhd_1, \lhd_2: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Puesto que  $z \lhd_1 x = \inf\{y \in [0, 1] \mid z \preceq x \&_1 y\}$  y  $z \lhd_2 x = \inf\{y \in [0, 1] \mid z \preceq x \&_2 y\}$  para cada  $x, z \in [0, 1]$ , obtenemos que

$$z \lhd_1 x = \begin{cases} 0 & \text{si } x = z = 0 \\ z \lhd_1 y & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$z \lhd_2 x = \begin{cases} 0 & \text{si } x = z = 0 \\ z \lhd_2 y & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De acuerdo con la definición de los operadores  $\lhd_1$  y  $\lhd_2$ , la definición de los conjuntos  $S_1^+$ ,  $S_1^-$ ,  $S_2^+$  y  $S_2^-$  resulta más sencilla, pues  $b \lhd_1 a \leq b \lhd_1 a$  y  $b \lhd_2 a \leq b \lhd_2 a$  para cada  $a, b \in [0, 1]$ . Obtenemos entonces que:

$$\begin{aligned} S_1^+ &= \{(0, 0.8\hat{3}, 0)\} \\ S_1^- &= \{(0, 0.5\hat{5}, 0), (0, 0, 0.625)\} \\ S_2^+ &= \{(0, 0, 0.8)\} \\ S_2^- &= \emptyset \end{aligned}$$

En particular, por el Teorema 5.4, esto implica que el conjunto de soluciones minimales de la segunda ecuación de (5.34) es  $\check{M}_2 = \{(1, 1, 0.8) \wedge (0, 0, 0.8)\} = \{(0, 0, 0.8)\}$ .

Ya que  $\check{M}_1 = \{\neg_S(g_1^-)\} = (0, 0.4\hat{4}, 0.375)$ , se deduce por el Teorema 5.7 entonces que las soluciones minimales de (5.34) pertenecen al conjunto

$$\underline{M} = \{(0, 0.4\hat{4}, 0.375) \vee (0, 0, 0.8)\} = \{(0, 0.4\hat{4}, 0.8)\}$$

En efecto, se comprueba que  $(0, 0.4\hat{4}, 0.8)$  es solución de (5.34), luego se trata de su única solución minimal.

Para concluir el estudio del sistema (5.34), el Teorema 5.5 nos permite obtener su conjunto completo de soluciones:

$$\begin{aligned}
 D^{(5.34)} &= \left( \left[ (0, 0.8\hat{3}, 0.375), (1, 0.8\hat{3}, 1) \right] \cup \left[ (0, 0.4\hat{4}, 0.375), (1, 0.4\hat{4}, 1) \right] \right. \\
 &\quad \left. \cup \left[ (0, 0.4\hat{4}, 0.375), (1, 0.8\hat{3}, 0.375) \right] \right) \cap \left[ (0, 0, 0.8), (1, 1, 0.8) \right] \\
 &= \left[ (0, 0.8\hat{3}, 0.8), (1, 0.8\hat{3}, 0.8) \right] \cup \left[ (0, 0.4\hat{4}, 0.8), (1, 0.4\hat{4}, 0.8) \right]
 \end{aligned}$$

En cuanto al sistema (5.35), un estudio similar nos lleva a que  $(0.8\hat{3}, 1, 0.5)$  es su solución máxima y  $(0, 0.3\hat{4}, 0.25)$  su solución mínima, siendo su conjunto completo de soluciones:

$$\begin{aligned}
 D^{(5.35)} &= \left( \left[ (0, 1, 0.25), (1, 1, 1) \right] \cup \left[ (0, 0.3\hat{4}, 0.25), (1, 0.3\hat{4}, 1) \right] \right. \\
 &\quad \left. \cup \left[ (0, 0.3\hat{4}, 0.25), (1, 1, 0.25) \right] \right) \cap \left( \left[ (0.8\hat{3}, 0, 0.1\hat{6}), (0.8\hat{3}, 1, 0.5) \right] \right. \\
 &\quad \left. \cup \left[ (0, 1, 0.1\hat{6}), (0.8\hat{3}, 1, 0.5) \right] \cup \left[ (0, 0, 0.5), (0.8\hat{3}, 1, 0.5) \right] \right. \\
 &\quad \left. \cup \left[ (0, 0, 0.1\hat{6}), (0, 1, 0.5) \right] \cup \left[ (0, 0, 0.1\hat{6}), (0.8\hat{3}, 1, 0.1\hat{6}) \right] \right) \\
 &= \left[ (0, 1, 0.25), (0.8\hat{3}, 1, 0.5) \right] \cup \left[ (0.8\hat{3}, 0.3\hat{4}, 0.25), (0.8\hat{3}, 0.3\hat{4}, 0.5) \right] \\
 &\quad \cup \left[ (0, 0.3\hat{4}, 0.5), (0.8\hat{3}, 0.3\hat{4}, 0.5) \right] \cup \left[ (0, 0.3\hat{4}, 0.25), (0, 0.3\hat{4}, 0.5) \right] \\
 &\quad \cup \left[ (0.8\hat{3}, 0.3\hat{4}, 0.25), (0.8\hat{3}, 1, 0.25) \right] \cup \left[ (0, 0.3\hat{4}, 0.25), (0, 1, 0.25) \right]
 \end{aligned}$$

Para concluir, obtenemos entonces que las soluciones de la ecuación bipolar multiadjunta de relaciones difusas dada por (5.33) son de la forma  $S = \{x_{jk}\}_{3 \times 2}$  con  $(x_{11}, x_{21}, x_{31}) \in D^{(5.34)}$  y  $(x_{12}, x_{22}, x_{32}) \in D^{(5.35)}$ . Además, sus soluciones máxima y mínima son  $\hat{S}$  y  $\check{S}$ , respectivamente, definidas como:

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8\hat{3} \\ 0.8\hat{3} & 1 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \check{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.4\hat{ } & 0.3\hat{ } \\ 0.8 & 0.25 \end{bmatrix}$$

◇

Naturalmente, la resolubilidad de las ecuaciones bipolares de relaciones difusas es muy sensible a los valores de las matrices consideradas, así como a los conjuntores empleados. El siguiente ejemplo ilustra que el operador de negación también juega un papel fundamental en la resolución de dichas ecuaciones. Concretamente, tomaremos la misma ecuación que en el Ejemplo 5.2, con la salvedad del uso de la negación de Yager en lugar de la negación estándar.

**Ejemplo 5.3.** *Consideremos la ecuación bipolar multiadjunta de relaciones difusas dada por*

$$(R^+ \circ_{\sigma} S) \vee (R^- \circ_{\sigma} \neg_Y S) = T \quad (5.36)$$

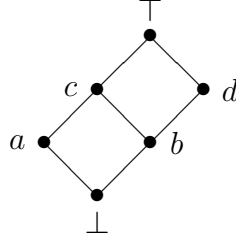
con  $R^+$ ,  $R^-$  y  $T$  definidas como en el Ejemplo 5.2. Por el razonamiento realizado en la Sección 5.1, para resolver (5.36) es necesario que el siguiente sistema de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas sea resoluble:

$$\begin{aligned} (0.3, 0.6, 0.4) \odot_{\sigma} (x_{11}, x_{21}, x_{31}) \vee (0.3, 0.9, 0.8) \odot_{\sigma} \neg_Y (x_{11}, x_{21}, x_{31}) &= 0.6 \\ (0.6, 0.5, 1) \odot_{\sigma} (x_{11}, x_{21}, x_{31}) \vee (0.5, 0.3, 0.6) \odot_{\sigma} \neg_Y (x_{11}, x_{21}, x_{31}) &= 0.5 \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde  $(a, b, c) \odot_{\sigma} (x, y, z) = (a \&_1 x) \vee (b \&_1 y) \vee (c \&_2 z)$  para cada  $a, b, c, x, y, z \in [0, 1]$ .

Ahora bien, realizando los cálculos pertinentes, las tuplas  $g_2^+$ ,  $g_2^-$  y  $\neg_Y(g_2^-)$  correspondientes a la segunda ecuación de (5.37) vienen dadas por:

$$\begin{aligned} g_2^+ &= (0.5 \&_1 0.6, 0.5 \&_1 0.5, 0.5 \&_2 1) = (0.8\hat{3}, 1, 0.5) \\ g_2^- &= (0.5 \&_1 0.5, 0.5 \&_1 0.3, 0.5 \&_2 0.6) = (1, 1, 0.8\hat{3}) \\ \neg_Y(g_2^-) &= \neg_Y(1, 1, 0.8\hat{3}) = (0, 0, \frac{\sqrt{11}}{6}) \end{aligned}$$

Figura 5.1: Retículo  $(L, \preceq)$ 


Puesto que  $0.5 < 0.55 \approx \frac{\sqrt{11}}{6}$ , entonces  $\neg_Y(g_2^-) \not\leq g_2^+$ . Con lo cual, por el Corolario 5.1, se deduce que la segunda ecuación de (5.37) no es resoluble. De donde, la ecuación bipolar multiadjunta de relaciones difusas dada por (5.36) tampoco es resoluble.  $\diamond$

Para finalizar este apartado de ejemplos, mostraremos la resolución de un sistema de sup-ecuaciones bipolares definido a partir de un retículo finito. Hasta donde sabemos, se trata de un caso que no se había abordado en la literatura, y que como veremos puede resolverse mediante los resultados desarrollados en la presente sección. Cabe destacar que el estudio mostrado a continuación puede elevarse directamente a la resolución de una ecuación bipolar de relaciones difusas. Por simplicidad, consideraremos un retículo completo enriquecido con un único conjuntor conmutativo y con un operador de negación involutivo.

**Ejemplo 5.4.** Sea  $(L, \preceq)$  el retículo finito cuyo diagrama se muestra en la Figura 5.1, y consideremos los operadores  $\star: L \times L \rightarrow L$  y  $\neg: L \rightarrow L$  definidos en las Tablas 5.1 y 5.2, respectivamente.

Estamos interesados en estudiar la resolución del siguiente sistema de sup-ecuaciones bipolares:

$$\begin{aligned} (a \star x) \vee (d \star \neg x) \vee (\top \star y) \vee (d \star \neg y) &= d \\ (d \star x) \vee (b \star \neg x) \vee (\top \star y) \vee (b \star \neg y) &= d \end{aligned} \quad (5.38)$$

Comenzaremos estudiando cada sup-ecuación que forma parte de (5.38) por

Tabla 5.1: Operador  $\star$ 

| $\star$ | $\perp$ | $a$     | $b$     | $c$     | $d$     | $\top$  |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ |
| $a$     | $\perp$ | $a$     | $\perp$ | $a$     | $\perp$ | $a$     |
| $b$     | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $b$     | $b$     |
| $c$     | $\perp$ | $a$     | $\perp$ | $a$     | $b$     | $c$     |
| $d$     | $\perp$ | $\perp$ | $b$     | $b$     | $d$     | $d$     |
| $\top$  | $\perp$ | $a$     | $b$     | $c$     | $d$     | $\top$  |

 Tabla 5.2: Operador  $\neg$ 

| $\neg$ | $\perp$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $\top$  |
|--------|---------|-----|-----|-----|-----|---------|
|        | $\top$  | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ | $\perp$ |

 Tabla 5.3: Operador  $\leftarrow_\star$ 

| $\leftarrow_\star$ | $\perp$ | $a$    | $b$    | $c$    | $d$    | $\top$  |
|--------------------|---------|--------|--------|--------|--------|---------|
| $\perp$            | $\top$  | $d$    | $c$    | $b$    | $a$    | $\perp$ |
| $a$                | $\top$  | $\top$ | $c$    | $c$    | $a$    | $a$     |
| $b$                | $\top$  | $d$    | $\top$ | $d$    | $c$    | $b$     |
| $c$                | $\top$  | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $c$    | $c$     |
| $d$                | $\top$  | $d$    | $\top$ | $d$    | $\top$ | $d$     |
| $\top$             | $\top$  | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$  |

 Tabla 5.4: Operador  $\leftrightarrow_\star$ 

| $\leftrightarrow_\star$ | $\perp$ | $a$     | $b$     | $c$     | $d$     | $\top$  |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\perp$                 | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ |
| $a$                     | $\top$  | $a$     | $\top$  | $a$     | $\top$  | $a$     |
| $b$                     | $\top$  | $\top$  | $d$     | $d$     | $b$     | $b$     |
| $c$                     | $\top$  | $\top$  | $\top$  | $\top$  | $\top$  | $c$     |
| $d$                     | $\top$  | $\top$  | $\top$  | $\top$  | $d$     | $d$     |
| $\top$                  | $\top$  | $\top$  | $\top$  | $\top$  | $\top$  | $\top$  |

separado. Consideremos pues la sup-ecuación dada por

$$(a \star x) \vee (d \star \neg x) \vee (\top \star y) \vee (d \star \neg y) = d \quad (5.39)$$

y veamos que las hipótesis de los Teoremas 5.2, 5.3 and 5.4 se satisfacen.

En primer lugar, ya que  $(L, \preceq)$  es un retículo finito, es completo, y dado que ni  $M_3$  ni  $N_5$  son subretículos de  $(L, \preceq)$ , el Teorema 2.1 nos asegura que  $(L, \preceq)$  es un retículo completo distributivo. Notemos además que los elementos supremo irreducibles de  $(L, \preceq)$  son  $a, b$  y  $d$ . Por lo tanto, el miembro de la derecha de (5.39) es un elemento supremo irreducible de  $(L, \preceq)$ .

En cuanto a los operadores que aparecen en (5.39),  $\neg$  es un operador decre-

ciente con  $\neg \perp = \top$  y  $\neg \top = \perp$ , y además  $\neg \neg x = x$  para cada  $x \in L$ , con lo cual se trata de una negación involutiva. Por otro lado, como el operador  $\star$  es conmutativo, si existen dos implicaciones residuadas  $\swarrow^*$ ,  $\searrow_*$  tales que  $(\star, \swarrow^*, \searrow_*)$  forma un triple adjunto, entonces  $\swarrow^*$  y  $\searrow_*$  coinciden. En este sentido, es suficiente probar que existe un operador que junto a  $\star$  forma un par adjunto. En efecto, puede probarse que las implicaciones residuadas de  $\star$  coinciden con el operador  $\leftarrow_*$  dado en la Tabla 5.3. Como resultado, podemos afirmar que la tupla  $(L, \preceq, \star, \leftarrow_*, \leftarrow_*, \neg)$  forma un DSBMAL.

Falta ver que  $\star$  es un homomorfismo. Teniendo en cuenta que  $\star$  es un operador conmutativo, es suficiente probar que  $\sup_{x \in A} \{x \star z\} = \sup A \star z$  e  $\inf_{x \in A} \{x \star z\} = \inf A \star z$  para cada  $z \in L$ , siendo  $A \in \{\{c, d\}, \{a, b\}, \{a, d\}\}$ . Observemos que todo subconjunto de  $L$  con máximo y mínimo satisface trivialmente las igualdades anteriores. Aún más, si un subconjunto de  $L$  no tiene máximo o mínimo, entonces contiene alguno de los pares  $\{c, d\}$ ,  $\{a, b\}$  o  $\{a, d\}$ . Haciendo los cálculos correspondientes se comprueba que, en efecto,  $\star$  es un homomorfismo, luego las hipótesis de los Teoremas 5.2, 5.3 y 5.4 se cumplen. Para poder aplicar dichos resultados, en la Tabla 5.4 se proporciona el operador  $\leftrightarrow_*$ , definido como:

$$b \leftrightarrow_* a = \inf \{x \in L \mid b \preceq a \star x\}$$

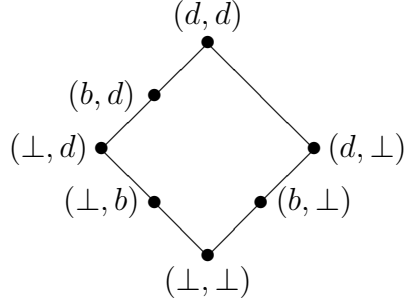
Comencemos determinando las tuplas  $g_1^+$ ,  $g_1^-$  y  $\neg g_1^-$ :

$$\begin{aligned} g_1^+ &= (d \leftarrow_* a, d \leftarrow_* \top) = (d, d) \\ g_1^- &= (d \leftarrow_* d, d \leftarrow_* d) = (\top, \top) \\ \neg g_1^- &= \neg(\top, \top) = (\perp, \perp) \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 5.2, la resolubilidad de (5.39) depende de si  $g_1^+$  o  $\neg g_1^-$  es solución. De hecho, como vemos a continuación, ambas tuplas son soluciones de (5.39):

$$\begin{aligned} (a \star d) \vee (d \star \neg d) \vee (\top \star d) \vee (d \star \neg d) &= (a \star d) \vee (d \star a) \vee (\top \star d) \vee (d \star a) \\ &= \perp \vee \perp \vee d \vee \perp = d \end{aligned}$$

Figura 5.2: Conjunto de soluciones de (5.39)



$$\begin{aligned}
 (a \star \perp) \vee (d \star \neg \perp) \vee (\top \star \perp) \vee (d \star \neg \perp) &= (a \star \perp) \vee (d \star \top) \vee (\top \star \perp) \vee (d \star \top) \\
 &= \perp \vee d \vee \perp \vee d = d
 \end{aligned}$$

Con lo cual (5.39) es resoluble. Aún más, por el Teorema 5.4,  $g_1^+$  y  $\neg g_1^-$  son las soluciones máxima y mínima de (5.39), respectivamente. Por último, para proporcionar el conjunto de soluciones de (5.39), hemos de calcular los conjuntos  $S_1^+$  y  $S_1^-$ . Dichos conjuntos vienen dados por:

$$\begin{aligned}
 S_1^+ &= \{(\perp, d)\} \\
 S_1^- &= \{(d, \perp), (\perp, d)\}
 \end{aligned}$$

Con lo cual, de acuerdo con el Teorema 5.2, el conjunto de soluciones de (5.39) es entonces:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= [(\perp, d) \vee (\perp, \perp), (d, d)] \cup [(\perp, \perp), (d, d) \wedge \neg(d, \perp)] \cup [(\perp, \perp), (d, d) \wedge \neg(\perp, d)] \\
 &= [(\perp, d) \vee (\perp, \perp), (d, d)] \cup [(\perp, \perp), (d, d) \wedge (a, \top)] \cup [(\perp, \perp), (d, d) \wedge (\top, a)] \\
 &= [(\perp, d), (d, d)] \cup [(\perp, \perp), (\perp, d)] \cup [(\perp, \perp), (d, \perp)] \\
 &= \{(\perp, d), (b, d), (d, d), (\perp, \perp), (\perp, b), (b, \perp), (d, \perp)\}
 \end{aligned}$$

El conjunto de soluciones de (5.39) se ilustra en la Figura 5.2. Como curiosidad, observemos que aunque  $(d, \perp) \preceq (d, b) \preceq (d, d)$  y tanto  $(d, \perp)$  como  $(d, d)$  pertenecen a  $D$ , la tupla  $(d, b)$  no es solución de (5.39). Un hecho similar ocurre con la tupla  $(b, b)$ .

Estudiemos ahora la segunda sup-ecuación que forma parte de (5.38), esto es:

$$(d \star x) \vee (b \star \neg x) \vee (\top \star y) \vee (b \star \neg y) = d \quad (5.40)$$

En este caso, se obtiene que la tupla  $g_2^+ = (\top, d)$  es solución de (5.40) mientras que  $\neg g_2^- = (\perp, \perp)$  no lo es, como vemos a continuación:

$$\begin{aligned} (d \star \top) \vee (b \star \neg \top) \vee (\top \star d) \vee (b \star \neg d) &= (d \star \top) \vee (b \star \perp) \vee (\top \star d) \vee (b \star a) \\ &= d \vee \perp \vee d \vee \perp = d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d \star \perp) \vee (b \star \neg \perp) \vee (\top \star \perp) \vee (b \star \neg \perp) &= (d \star \perp) \vee (b \star \top) \vee (\top \star \perp) \vee (b \star \top) \\ &= \perp \vee b \vee \perp \vee b = b \neq d \end{aligned}$$

El Teorema 5.4 nos garantiza que  $g_2^+$  es la solución máxima de (5.40). Para obtener sus soluciones minimales así como el conjunto completo de soluciones, hemos de calcular previamente los conjuntos  $S_2^+$  y  $S_2^-$ :

$$\begin{aligned} S_2^+ &= \{(d, \perp), (\perp, d)\} \\ S_2^- &= \emptyset \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo el Teorema 5.4, se deduce que las tuplas  $(d, \perp)$  y  $(\perp, d)$  son las soluciones minimales de (5.40). Aún más, por el Teorema 5.2, su conjunto completo de soluciones es:

$$\begin{aligned} D_2 &= [(d, \perp) \vee (\perp, \perp), (\top, d)] \cup [(\perp, d) \vee (\perp, \perp), (\top, d)] \\ &= [(d, \perp), (\top, d)] \cup [(\perp, d), (\top, d)] \\ &= \{(d, \perp), (d, b), (d, d), (\top, \perp), (\top, b), (\top, d), (\perp, d), (a, d), (b, d), (c, d)\} \end{aligned}$$

La Figura 5.3 representa el conjunto de soluciones de (5.40).

Estamos ya en disposición de abordar la resolución de (5.38). Puesto que el sistema dado por (5.38) está compuesto por las sup-ecuaciones (5.39) y (5.40), por el Teorema 5.5, el conjunto de soluciones de dicho sistema viene dado por:

$$D = D_1 \cap D_2 = \{(\perp, d), (d, \perp), (b, d), (d, d)\}$$

Figura 5.3: Conjunto de soluciones de (5.40)

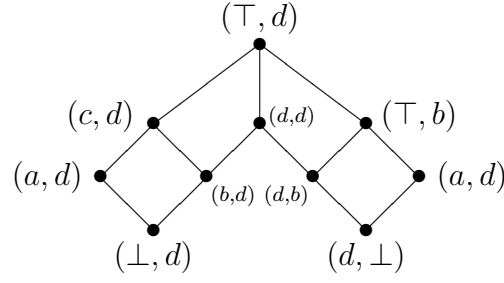
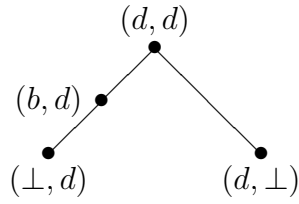


Figura 5.4: Conjunto de soluciones de (5.38)



Claramente, a partir de la representación gráfica del conjunto de soluciones de (5.38), mostrada en la Figura 5.4, se deduce que (5.38) tiene una solución máxima y dos soluciones minimales. Veamos analíticamente que efectivamente esto es así.

Como se ha visto previamente, el conjunto de soluciones maximales y el conjunto de soluciones minimales de (5.39) son  $\hat{M}_1 = \{(d, d)\}$  y  $\check{M}_1 = \{(\perp, \perp)\}$ , respectivamente; así como  $\hat{M}_2 = \{(\top, d)\}$  y  $\check{M}_2 = \{(d, \perp), (\perp, d)\}$  son el conjunto de soluciones maximales y el conjunto de soluciones minimales de (5.40), respectivamente. Como resultado, del Teorema 5.7 se concluye que el conjunto de soluciones maximales de (5.38) es

$$\hat{M} = \{(d, d) \wedge (\top, d)\} \cap D = \{(d, d)\}$$

mientras que el conjunto de soluciones minimales de (5.38) viene dado por

$$\check{M} = \{(\perp, \perp) \vee (d, \perp), (\perp, \perp) \vee (\perp, d)\} \cap D = \{(d, \perp), (\perp, d)\}$$

◇

### 5.3. Sistemas de sup-ecuaciones bipolares basadas en la t-norma producto

Un inconveniente destacable de los sistemas de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas estudiados en la Sección 5.2 reside en la exigencia de que el operador de negación considerado sea involutivo. Matemáticamente se trata de una condición restrictiva, pues en ciertos retículos no es posible ni tan siquiera definir alguna negación involutiva. Por otro lado, desde un punto de vista aplicado, no es difícil imaginar problemas reales que se rigen mediante una negación no involutiva.

Sea por ejemplo el caso de una enfermedad infecciosa que provoca dolor de cabeza de manera proporcional a la cantidad de infección, a razón 0.7. Así, si  $x \in [0, 1]$  representa el nivel de infección y  $b \in [0, 1]$  se interpreta como el nivel de dolor de cabeza, podemos representar el comportamiento mencionado mediante la ecuación  $0.7 * x = b$ . Supongamos ahora que los pacientes en período de incubación o de convalecencia no presentan infección, pero sin embargo sufren dolor de cabeza con valor de verdad 0.4. Naturalmente, la ecuación  $0.7 * x = b$  no modela correctamente este comportamiento. No obstante, una alternativa sencilla consiste en contemplar el uso del operador de negación  $\neg_P: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dado por  $\neg_P 0 = 1$  y  $\neg_P x = 0$  si  $0 < x$ . De esta forma, el dolor de cabeza de todo paciente puede modelarse mediante la ecuación:

$$(0.7 * x) \vee (0.4 * \neg_P x) = b$$

El estudio de sistemas de sup-ecuaciones bipolares basadas en negaciones no involutivas supone pues un objeto de estudio relevante, tanto desde un prisma teórico como práctico. En esta sección, para concluir nuestro estudio sobre ecuaciones bipolares de relaciones difusas, discutiremos la resolución de sistemas de sup-ecuaciones bipolares definidas a partir de la t-norma producto, es decir, con la conjunción producto y su negación

adjunta. Dicha negación es precisamente el operador  $\neg_P$  definido en el párrafo anterior. Los resultados mostrados a continuación han sido publicados en [25, 27].

### 5.3.1. Resolviendo sistemas de sup-ecuaciones bipolares basadas en la t-norma producto

Dados  $a_{ij}^+, a_{ij}^-, b_i \in [0, 1]$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ , nuestro propósito es estudiar el sistema de sup-ecuaciones bipolares dado por:

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (a_{ij}^+ * x_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P x_j) = b_i, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (5.41)$$

Destaquemos algunos aspectos interesantes de dicho sistema:

- Como la t-norma producto es un operador conmutativo, no será preciso considerar el estudio de un sistema de sup-ecuaciones bipolares de la forma

$$\bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (x_j * a_{ij}^+) \vee (\neg_P x_j * a_{ij}^-) = b_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

En otras palabras, las ecuaciones bipolares de relaciones difusas dadas por (5.3) y (5.6) son equivalentes si se emplea la t-norma producto.

- Al igual que ocurría en la Sección 5.2, la implicación residuada de la t-norma producto, denotada por  $\leftarrow_P$ , jugará un papel fundamental en la resolución de (5.41).
- Sea  $\leftarrow_P: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dado por  $b \leftarrow_P a = \inf\{x \in [0, 1] \mid b \leq a * x\}$ . Observemos que si  $b \leq a$ , por el crecimiento estricto de  $*$ , se obtiene que  $b \leftarrow_P a = b \leftarrow_P a = \frac{b}{a}$ . Con lo cual, no será necesario considerar el operador  $\leftarrow_P$  en el estudio de (5.41).

- El uso de la negación  $\neg_P$  otorga a una sup-ecuación bipolar una propiedad peculiar: para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ , se cumple que  $a_{ij}^+ * x_j = 0$  (si  $x_j = 0$ ) o  $a_{ij}^- * \neg_P x_j = 0$  (si  $x_j > 0$ ).

Como consecuencia del último punto, (5.41) tendrá solución si para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  se satisface que  $a_{ij}^+ * x_j \geq 0$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  (en cuyo caso se puede asumir que  $x_j = \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ ) o bien se cumple que  $a_{ij}^- * \neg_P x_j \geq 0$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  (en cuyo caso  $x_j = 0$ ). Generalmente, alcanzar el término independiente en cada sup-ecuación dependerá directamente de esta elección.

La discusión anterior motiva la noción de par factible, íntimamente relacionada con la filosofía de los recubrimientos de Markovskii [89]. La noción de par factible presentada a continuación es equivalente a la introducida en [25], pero se expresa aquí en términos más sencillos.

**Definición 5.4.** Sean  $J^+, J^- \subseteq \{1, \dots, m\}$  con  $J^+ \uplus J^- = \{1, \dots, m\}$ . Se dice que  $(J^+, J^-)$  es un par factible respecto a (5.41) si la tupla  $(x_1, \dots, x_m)$  definida como

$$x_j = \begin{cases} \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\} & \text{si } j \in J^+ \\ 0 & \text{si } j \in J^- \end{cases}$$

es solución de (5.41).

El siguiente resultado caracteriza la resolubilidad de un sistema de sup-ecuaciones bipolares basadas en la t-norma producto mediante la existencia de pares factibles.

**Teorema 5.8.** El sistema de sup-ecuaciones dado por (5.41) es resoluble si y solo si existe algún par factible respecto a (5.41).

*Demostración.* Por definición, la existencia de un par factible  $(J^+, J^-)$  respecto a (5.41) implica que la tupla dada en la Definición 5.4 es solución de (5.41), luego se trata de un sistema resoluble.

Para probar el contrarrecíproco, supongamos que  $(x_1, \dots, x_m)$  es una solución arbitraria de (5.41) y veamos que existe algún par factible. En particular, veremos que  $(J^+, J^-)$  forma un par factible, siendo:

$$\begin{aligned} J^+ &= \{j \in \{1, \dots, m\} \mid x_j > 0\} \\ J^- &= \{j \in \{1, \dots, m\} \mid x_j = 0\} \end{aligned}$$

Claramente  $J^+ \cap J^- = \emptyset$  y  $J^+ \cup J^- = \{1, \dots, m\}$ , luego se satisface que  $J^+ \uplus J^- = \{1, \dots, m\}$ . Probemos que la tupla  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$  dada por

$$\bar{x}_j = \begin{cases} \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\} & \text{si } j \in J^+ \\ 0 & \text{si } j \in J^- \end{cases}$$

es una solución de (5.41). Observar que  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$  tan solo se diferencia de  $(x_1, \dots, x_m)$  en aquellos índices  $j \in J^+$  tales que

$$x_j \neq \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Ahora bien, si  $j \in J^+$  es uno de tales índices, ya que  $[0, 1]$  está completamente ordenado, ha de ser  $x_j < \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$  o bien  $x_j > \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Sin embargo, la segunda opción nos lleva a una contradicción:  $x_j > \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$  implica que existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  con  $x_j > b_k \leftarrow_P a_{kj}^+$ , luego al ser  $(*, \leftarrow_P)$  un par adjunto obtenemos que  $a_{kj}^+ * x_j > b_k$ , de donde se deduce que  $(x_1, \dots, x_m)$  no es solución de la  $k$ -ésima ecuación de (5.41), ni por tanto del propio sistema.

Por lo tanto, para cada  $j \in J^+$  con  $x_j \neq \bar{x}_j$  ha de ser

$$0 < x_j < \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Como  $*$  es estrictamente creciente y  $(*, \leftarrow_P)$  es un par adjunto, esto implica que  $a_{ij}^+ * x_j < b_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Aún más, ya que  $0 < x_j$ , se satisface que

$$(a_{ij}^+ * x_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P x_j) = (a_{ij}^+ * x_j) \vee (a_{ij}^- * 0) = a_{ij}^+ * x_j < b_i$$

Razonando ahora para cada  $j \in J^+$  con  $x_j = \bar{x}_j$ , puesto que  $(x_1, \dots, x_m)$  es solución de (5.41) por hipótesis, podemos afirmar que

$$\bigvee_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ x_j = \bar{x}_j}} (a_{ij}^+ * x_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P x_j) = b_i, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (5.42)$$

Observemos que si  $x_j \neq \bar{x}_j$  entonces  $\bar{x}_j \neq 0$ , luego

$$\bar{x}_j = \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \leq b_i \leftarrow_P a_{ij}^+$$

para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Con lo cual, obtenemos que  $a_{ij}^+ * \bar{x}_j \leq b_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Esto unido a (5.42) nos lleva a concluir que la tupla  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$  es, en efecto, solución de (5.41). En otras palabras,  $(J^+, J^-)$  es un par factible respecto a (5.41), como queríamos demostrar.  $\square$

El siguiente paso en nuestro estudio será conocer cuándo un sistema de sup-ecuaciones bipolares basadas en la t-norma producto tiene una solución máxima (mínima respectivamente) o tiene un número finito de soluciones maximales (minimales respectivamente) o ninguna de las anteriores. Específicamente, en lo que respecta a la existencia de una solución máxima o soluciones maximales, la estructura algebraica del sistema dado por (5.41) es análoga a la del conjunto de sus pares factibles.

**Teorema 5.9.** *Sea  $S$  el conjunto de pares factibles respecto a (5.41) y consideremos  $S^+ = \{J^+ \mid (J^+, J^-) \in S\}$ . Sea  $f: S^+ \rightarrow [0, 1]^m$  definida como  $f(J^+) = (x_1, \dots, x_m)$  con*

$$x_j = \begin{cases} \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\} & \text{si } j \in J^+ \\ 0 & \text{si } j \notin J^+ \end{cases}$$

Entonces:

- (1) Si  $S^+$  tiene un elemento máximo  $\hat{J}^+$ , la tupla  $f(\hat{J}^+)$  es la solución máxima de (5.41).

- (2) Las soluciones maximales de (5.41) coinciden con las tuplas de la forma  $f(\hat{J}^+)$ , siendo  $\hat{J}^+$  un elemento maximal de  $S^+$ .

*Demostración.*

- (1) Sea  $\hat{J}^+$  el máximo del conjunto  $S^+$ , y veamos por reducción al absurdo que  $f(\hat{J}^+) = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$  es la solución máxima del sistema dado por (5.41).

Supongamos pues que existe una solución  $(x_1, \dots, x_m)$  de (5.41) tal que  $(x_1, \dots, x_m) \not\leq (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$ . Ya que  $[0, 1]$  está completamente ordenado, existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $\hat{x}_j < x_j$ . Distingamos ahora dos casos, y obtendremos una contradicción a partir de cada uno de ellos:

- Por un lado, asumamos que  $j \in \hat{J}^+$ . Por definición de la aplicación  $f$  será entonces  $\hat{x}_j = \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Denotemos  $k \in \{1, \dots, n\}$  al índice que satisface  $\hat{x}_j = b_k \leftarrow_P a_{kj}^+$ . Puesto que  $\hat{x}_j < x_j$ , de la Proposición 2.8 y del crecimiento estricto de  $*$  se deduce que  $b_k = a_{kj}^+ * \hat{x}_j < a_{kj}^+ * x_j$ . Con lo cual  $(x_1, \dots, x_m)$  no satisface la  $k$ -ésima ecuación de (5.41) y, por tanto, no es solución de (5.41), en contradicción con la hipótesis.
- Supongamos ahora que  $j \notin \hat{J}^+$ . En ese caso, obtenemos que  $0 = \hat{x}_j < x_j$ . Ya que  $(x_1, \dots, x_m)$  es por hipótesis solución de (5.41), un razonamiento análogo al realizado en la demostración del Teorema 5.8 nos lleva a que el par  $(J^+, J^-)$  definido como

$$\begin{aligned} J^+ &= \{j \in \{1, \dots, m\} \mid x_j > 0\} \\ J^- &= \{j \in \{1, \dots, m\} \mid x_j = 0\} \end{aligned}$$

es un par factible, esto es,  $J^+ \in S^+$ . Ya que  $j \in J^+$ , obtenemos entonces que  $J^+ \not\leq \hat{J}^+$ , luego  $\hat{J}^+$  no es el máximo de  $S^+$ , en contradicción con la hipótesis.

- (2) Denotemos al conjunto de elementos maximales de  $S^+$  como  $\hat{S}^+$ . Para probar la segunda parte del Teorema 5.9, demostraremos que la restricción de la aplicación  $f$  al conjunto  $\hat{S}^+$ , denotada  $\hat{f} = f|_{\hat{S}^+}$ , forma una biyección entre  $\hat{S}^+$  y el conjunto de soluciones maximales de (5.41), que denotaremos  $\hat{M}$ .

Veamos en primer lugar que  $\hat{f}$  está bien definida, esto es, que dado  $\hat{J}^+ \in \hat{S}^+$  la tupla  $\hat{f}(\hat{J}^+) = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$  es una solución maximal de (5.41). Por definición de par factible,  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$  es solución de (5.41), luego tan solo falta ver que es maximal. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos pues que existe una solución  $(x_1, \dots, x_m)$  de (5.41) tal que  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) < (x_1, \dots, x_m)$ . Así pues, para algún  $h \in \{1, \dots, m\}$  es  $\hat{x}_h < x_h$ . Veamos que necesariamente  $h \notin \hat{J}^+$ .

Si  $h \in \hat{J}^+$  y  $b_{i_h} \leftarrow_P a_{i_h}^+ = \min\{b_i \leftarrow_P a_{i_h}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ , por definición de  $\hat{f}$  se tiene que  $\hat{x}_h = b_{i_h} \leftarrow_P a_{i_h}^+$ . Teniendo en cuenta la Proposición 2.8 y la monotonía estricta de  $*$ , la desigualdad  $\hat{x}_h < x_h$  nos lleva a que  $b_{i_h} < a_{i_h}^+ * x_h$ . Por lo tanto, se deduce que  $(x_1, \dots, x_m)$  no satisface la  $i_h$ -ésima ecuación de (5.41), lo cual es una contradicción.

Podemos asegurar pues que  $h \notin \hat{J}^+$ , de donde  $0 = \hat{x}_h < x_h$ . Consideremos ahora los conjuntos

$$\begin{aligned} J^+ &= \{j \in \{1, \dots, m\} \mid x_j > 0\} \\ J^- &= \{j \in \{1, \dots, m\} \mid x_j = 0\} \end{aligned}$$

De nuevo, siguiendo un razonamiento análogo a la demostración del Teorema 5.8, se obtiene que  $(J^+, J^-) \in S$ , con lo cual  $J^+ \in S^+$ . Ahora bien, ya que  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) < (x_1, \dots, x_m)$ , se satisface que  $\hat{J}^+ \subseteq J^+$ . Aún más, observemos que  $0 < x_h$  implica  $h \in J^+$ , y se ha probado que  $h \notin \hat{J}^+$ . De aquí se concluye que  $\hat{J}^+ \subset J^+$ , en contradicción con la maximalidad de  $\hat{J}^+$  como elemento de  $S^+$ .

Lo anterior nos permite afirmar que la aplicación  $\hat{f}$  está bien definida. De aquí en adelante, veremos que se trata de una biyección entre  $\hat{S}^+$  y  $\hat{M}$ . Probemos en primer lugar que  $\hat{f}$  es inyectiva.

Sean  $\hat{J}_1^+, \hat{J}_2^+ \in \hat{S}^+$  distintos, siendo  $\hat{f}(\hat{J}_1^+) = (\hat{x}_1^1, \dots, \hat{x}_m^1)$  y  $\hat{f}(\hat{J}_2^+) = (\hat{x}_1^2, \dots, \hat{x}_m^2)$ . Sin pérdida de generalidad, existe  $h \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $h \in \hat{J}_1^+$  y  $h \notin \hat{J}_2^+$ , luego serán  $\hat{x}_h^1 > 0$  y  $\hat{x}_h^2 = 0$ . Esto implica que  $(\hat{x}_1^1, \dots, \hat{x}_m^1) \neq (\hat{x}_1^2, \dots, \hat{x}_m^2)$ , por lo tanto se concluye que  $\hat{f}$  es inyectiva.

Para finalizar, veamos que  $\hat{f}$  es sobreyectiva. Dado  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) \in \hat{M}$ , consideremos los conjuntos  $\hat{J}^+, \hat{J}^-$  definidos como:

$$\begin{aligned}\hat{J}^+ &= \{j \in \{1, \dots, m\} \mid \hat{x}_j > 0\} \\ \hat{J}^- &= \{j \in \{1, \dots, m\} \mid \hat{x}_j = 0\}\end{aligned}$$

Ya que  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$  es solución de (5.41), por un razonamiento análogo a la demostración del Teorema 5.8 se deduce que  $(\hat{J}^+, \hat{J}^-) \in S$ , luego  $\hat{J}^+ \in S^+$ . En lo que sigue, veremos que  $\hat{J}^+ \in \hat{S}^+$  y que  $\hat{f}(\hat{J}^+) = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$ . Para lo primero haremos un razonamiento por reducción al absurdo.

Supongamos que  $\hat{J}^+ \notin \hat{S}^+$ , esto es, supongamos que existe  $J^+ \in S^+$  tal que  $\hat{J}^+ \subset J^+$ . Tomando  $J^- = \{1, \dots, m\} \setminus J^+$ , la tupla  $f(J^+) = (x_1, \dots, x_m)$  es solución de (5.41), por definición de par factible. Ahora, teniendo en cuenta la definición de  $(x_1, \dots, x_m)$  y  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$ , observemos que:

- Para cada  $j \in \hat{J}^- \cap J^-$  es  $\hat{x}_j = x_j = 0$ .
- Dado  $j \in J^+$ , si  $x_j < \hat{x}_j$ , entonces existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  con  $b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ < \hat{x}_j$ . Por la propiedad de adjunción y por ser  $[0, 1]$  totalmente ordenado, se satisface que  $b_i < a_{ij}^+ * \hat{x}_j$ , luego  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$  no resuelve la  $i$ -ésima ecuación de (5.41) y, como resultado, no

es solución de (5.41), en contradicción con la hipótesis. Consecuentemente, podemos afirmar que  $\hat{x}_j \leq x_j$  para cada  $j \in J^+$ . En particular, como  $\hat{J}^+ \subset J^+$ , se cumple que  $\hat{x}_j \leq x_j$  para cada  $j \in \hat{J}^+$ .

- Puesto que  $\hat{J}^+ \subset J^+$ , podemos asegurar que existe  $h \in J^+$  con  $h \notin \hat{J}^+$ , de donde,  $0 = \hat{x}_h < x_h$ .

De lo anterior se deduce que  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) < (x_1, \dots, x_m)$ , lo que contradice el hecho de que  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$  sea solución maximal de (5.41). Por lo tanto, se concluye que  $\hat{J}^+$  es un elemento maximal de  $S^+$ , esto es,  $\hat{J}^+ \in \hat{S}^+$ .

Para concluir esta demostración, veamos que  $\hat{f}(\hat{J}^+) = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$ . Observemos que la componente  $j$ -ésima de  $\hat{f}$  es  $\hat{f}_j(\hat{J}^+) = \hat{x}_j = 0$  para cada  $j \notin \hat{J}^+$ . Supongamos pues que existe  $h \in \hat{J}^+$  de forma que

$$\hat{f}_h(\hat{J}^+) = \min\{b_i \leftarrow_P a_{ih}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \neq \hat{x}_h$$

Denotemos  $b_k \leftarrow_P a_{kh}^+ = \min\{b_i \leftarrow_P a_{ih}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ . El intervalo  $[0, 1]$  está completamente ordenado, luego uno de los siguientes puntos se verifica:

- Sea  $b_k \leftarrow_P a_{kh}^+ < \hat{x}_h$ . En tal caso, la propiedad de adjunción implica que  $b_k < a_{kh}^+ * \hat{x}_h$ , de donde:

$$b_k < a_{kh}^+ * \hat{x}_h \leq \bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (a_{kj}^+ * \hat{x}_j) \vee (a_{kj}^- * \neg_P \hat{x}_j)$$

Así pues  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$  no es solución de (5.41), en contradicción con la hipótesis.

- Sea ahora  $\hat{x}_h < b_k \leftarrow_P a_{kh}^+$ . Como consecuencia, una solución de (5.41) es  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{h-1}, b_k \leftarrow_P a_{kh}^+, \hat{x}_{h+1}, \dots, \hat{x}_m)$ , que es claramente mayor que  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$ . Esto contradice la maximalidad de  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$  como solución de (5.41).

Concluimos pues que  $\hat{f}(\hat{J}^+) = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$ , por lo tanto  $\hat{f}$  forma una biyección entre  $\hat{S}^+$  y  $\hat{M}$ .  $\square$

La existencia de una solución mínima o soluciones minimales de un sistema de sup-ecuaciones bipolares basado en la t-norma producto supone un problema de mayor complejidad. La principal razón reside en el hecho de que la negación producto  $\neg_P$  no es continua en 0, lo que puede dar lugar a la ausencia de soluciones minimales. Pongamos por ejemplo el caso de una sup-ecuación del tipo

$$(0.2 * x) \vee (0.6 * \neg_P x) \vee (0.3 * y) \vee (0.4 * \neg_P y) = 0.4$$

Su único par factible es  $(\{1\}, \{2\})$ , lo que daría lugar a pensar que existe una solución maximal y una solución minimal. No obstante, puede comprobarse que el conjunto de soluciones de dicha sup-ecuación es

$$D = \{(x, 0) \mid 0 < x \leq 1\}$$

Por lo tanto, su solución máxima es claramente  $(1, 0)$ , pero sin embargo el conjunto  $D$  no tiene elementos minimales. Es decir, para cada elemento de  $D$  existe otro inferior a este en  $D$ .

Para evitar este tipo de situaciones, hemos de requerir una condición más fuerte a los elementos maximales de  $\{J^- \mid (J^+, J^-) \in S\}$ . Concretamente, se exigirá que si un índice no pertenece a  $J^-$ , dicho índice sea “necesario” para alcanzar el término independiente de alguna sup-ecuación. Esta condición se representará exigiendo la unicidad de soluciones de un cierto sistema de sup-ecuaciones definido a partir de  $J^-$ . Cabe destacar que la maximalidad de  $J^-$  está intrínseca en esta nueva condición.

**Teorema 5.10.** *Sea  $S$  el conjunto de pares factibles respecto a (5.41) y consideremos  $S^- = \{J^- \mid (J^+, J^-) \in S\}$ . Sea  $f: S^- \rightarrow [0, 1]^m$  definida como  $f(J^-) = (x_1, \dots, x_m)$  con*

$$x_j = \begin{cases} \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\} & \text{si } j \notin J^- \\ 0 & \text{si } j \in J^- \end{cases}$$

Para cada  $J^- \in S^-$ , sea  $I_{J^-}$  el conjunto definido como:

$$I_{J^-} = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid b_i = 0 \text{ o } a_{ij}^- < b_i \text{ para cada } j \in J^-\}$$

- (1) Si  $\{1, \dots, m\} \in S^-$ , entonces  $(0, \dots, 0)$  es la solución mínima de (5.41).
- (2) Si  $\{1, \dots, m\} \notin S^-$ , las soluciones minimales de (5.41) coinciden con las tuplas de la forma  $f(\check{J}^-)$ , siendo  $\check{J}^-$  un elemento de  $S^-$  tal que el siguiente sistema tiene una única solución:

$$\bigvee_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin \check{J}^-}} (a_{ij}^+ * x_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P x_j) = b_i, \quad i \in I_{\check{J}^-} \quad (5.43)$$

*Demostración.*

- (1) Si  $\{1, \dots, m\} \in S^-$ , por definición de par factible, entonces la tupla  $f(\{1, \dots, m\}) = (0, \dots, 0)$  es solución de (5.41). Claramente, se trata de la solución mínima de (5.41).
- (2) Denotemos al conjunto de elementos de  $S^-$  tales que (5.43) tiene una única solución como  $\check{S}^-$ . Probaremos que la restricción de la aplicación  $f$  a  $\check{S}^-$ , denotada  $\check{f} = f|_{\check{S}^-}$ , forma una biyección entre  $\check{S}^-$  y el conjunto de soluciones minimales de (5.41), que denotaremos  $\check{M}$ .

Comencemos viendo que  $\check{f}$  está bien definida, es decir, que  $\check{f}(\check{J}^-) = (\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$  es una solución minimal de (5.41) para cada  $\check{J}^- \in \check{S}^-$ . Es claro que dado  $\check{J}^- \in \check{S}^-$ , por definición de par factible se tiene que  $(\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$  es solución de (5.41). Veremos que se trata de una solución minimal de (5.41) por reducción al absurdo.

Asumamos entonces que existe una solución  $(x_1, \dots, x_m)$  de (5.41) tal que  $(x_1, \dots, x_m) < (\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$ . Sea  $\check{J}^+ = \{1, \dots, m\} \setminus \check{J}^-$ , y denotemos a sus elementos como  $\check{J}^+ = \{j_1, \dots, j_l\}$ . Observemos que al ser  $\{1, \dots, m\} \notin S^-$ , entonces  $\check{J}^+ \neq \emptyset$ , luego  $l \geq 1$ . Probaremos que las

tuplas  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_l})$  y  $(\check{x}_{j_1}, \dots, \check{x}_{j_l})$  son soluciones diferentes de (5.43), en contradicción con la pertenencia de  $\check{J}^-$  al conjunto  $\check{S}^-$ .

La desigualdad  $(x_1, \dots, x_m) < (\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$  implica, por un lado, que  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_l}) \leq (\check{x}_{j_1}, \dots, \check{x}_{j_l})$  y, por otro, que existe  $h \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $x_h < \check{x}_h$ . Puesto que  $\check{x}_j = 0$  para cada  $j \in \check{J}^-$  y  $0 \leq x_h < \check{x}_h$ , ha de ser  $h \notin \check{J}^-$ , esto es,  $h \in \check{J}^+$ . Como resultado, podemos afirmar que  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_l}) < (\check{x}_{j_1}, \dots, \check{x}_{j_l})$ , luego se trata de tuplas diferentes. Falta ver que ambas son soluciones de (5.43).

Es claro que si  $I_{\check{J}^-} = \emptyset$ , entonces  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_l})$  y  $(\check{x}_{j_1}, \dots, \check{x}_{j_l})$  son directamente solución de (5.43), pues no hay ecuaciones a satisfacer, de donde obtendríamos la contradicción anunciada. Supongamos ahora que  $I_{\check{J}^-} \neq \emptyset$ .

Ya que  $(x_1, \dots, x_m)$  y  $(\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$  son soluciones de (5.41), teniendo en cuenta que  $\{j_1, \dots, j_l\}$  e  $I_{\check{J}^-}$  son subconjuntos no vacíos de  $\{1, \dots, m\}$  y  $\{1, \dots, n\}$ , respectivamente, en particular se satisfacen:

$$\begin{aligned} \bigvee_{j \in \check{J}^+} (a_{ij}^+ * x_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P x_j) &\leq b_i, & i \in I_{\check{J}^-} \\ \bigvee_{j \in \check{J}^+} (a_{ij}^+ * \check{x}_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P \check{x}_j) &\leq b_i, & i \in I_{\check{J}^-} \end{aligned}$$

Por un lado, dado  $i \in I_{\check{J}^-}$  con  $b_i = 0$ , se cumple que

$$(a_{ij}^+ * x_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P x_j) = (a_{ij}^+ * \check{x}_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P \check{x}_j) = 0$$

para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ . En particular:

$$\bigvee_{j \in \check{J}^+} (a_{ij}^+ * x_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P x_j) = \bigvee_{j \in \check{J}^+} (a_{ij}^+ * \check{x}_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P \check{x}_j) = 0$$

Sea ahora  $i \in I_{\check{J}^-}$  con  $0 < b_i$ . Por definición del conjunto  $I_{\check{J}^-}$ , la desigualdad  $a_{ij}^- < b_i$  se verifica para cada  $j \in \check{J}^-$ . Ahora bien, teniendo en cuenta que  $x_j \leq \check{x}_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ , por definición de la

aplicación  $f$  se tiene que  $x_j = \check{x}_j = 0$  para cada  $j \in \check{J}^-$ . Por lo tanto, para cada  $j \in \check{J}^-$ :

$$\begin{aligned} (a_{ij}^+ * x_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P x_j) &= (a_{ij}^+ * 0) \vee (a_{ij}^- * \neg_P 0) = a_{ij}^- < b_i \\ (a_{ij}^+ * \check{x}_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P \check{x}_j) &= (a_{ij}^+ * 0) \vee (a_{ij}^- * \neg_P 0) = a_{ij}^- < b_i \end{aligned}$$

Puesto que tanto  $(x_1, \dots, x_m)$  como  $(\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$  son soluciones de (5.41), se deduce que existen sendos índices  $h, \check{h} \in \check{J}^+$  tales que  $a_{ih}^+ * x_h = a_{i\check{h}}^+ * \check{x}_{\check{h}} = b_i$ . Consecuentemente:

$$\bigvee_{j \in \check{J}^+} (a_{ij}^+ * x_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P x_j) = \bigvee_{j \in \check{J}^+} (a_{ij}^+ * \check{x}_j) \vee (a_{ij}^- * \neg_P \check{x}_j) = b_i$$

Se ha probado pues que, tanto si  $b_i = 0$  como si  $0 < b_i$ , las tuplas  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_l})$  y  $(\check{x}_{j_1}, \dots, \check{x}_{j_l})$  son soluciones de la  $i$ -ésima ecuación de (5.43). Por lo tanto se concluye que (5.43) tiene dos soluciones diferentes, lo que contradice la hipótesis. De esta forma, podemos afirmar que  $(\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$  es una solución minimal de (5.41), luego la aplicación  $\check{f}$  está bien definida. Veamos ahora que se trata de una biyección entre  $\check{S}^-$  y  $\check{M}$ .

La inyectividad de  $\check{f}$  se deduce directamente de su definición. En efecto, sean  $\check{J}_1^-, \check{J}_2^- \in \check{S}^-$  con  $\check{J}_1^- \neq \check{J}_2^-$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que existe  $h \in \check{J}_1^-$  con  $h \notin \check{J}_2^-$ . Como resultado, denotando  $\check{f}(\check{J}_1^-) = (\check{x}_1^1, \dots, \check{x}_m^1)$  y  $\check{f}(\check{J}_2^-) = (\check{x}_1^2, \dots, \check{x}_m^2)$ , la definición de  $\check{f}$  nos indica que  $\check{x}_h^1 = 0 < \check{x}_h^2$ , luego  $\check{f}(\check{J}_1^-) \neq \check{f}(\check{J}_2^-)$ . En otras palabras,  $\check{f}$  es inyectiva.

Para finalizar esta demostración, mostraremos que  $\check{f}$  es sobreyectiva. Sea  $(\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$  una solución minimal de (5.41), y consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} \check{J}^+ &= \{j \in \{1, \dots, m\} \mid \check{x}_j > 0\} \\ \check{J}^- &= \{j \in \{1, \dots, m\} \mid \check{x}_j = 0\} \end{aligned}$$

Estamos interesados en ver que  $\check{J}^- \in \check{S}^-$  y que  $\check{f}(\check{J}^-) = (\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$ . Veamos en primer lugar que  $f(\check{J}^-) = (\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$ . Para ello, observemos que es suficiente probar que  $\check{x}_j = \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$  para cada  $j \in \check{J}^+$ . Procederemos por reducción al absurdo, luego supongamos que  $\check{x}_h \neq \min\{b_i \leftarrow_P a_{ih}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$  para algún  $h \in \check{J}^+$ . Como  $[0, 1]$  está completamente ordenado, una de las siguientes opciones se cumple:

- Sea  $\min\{b_i \leftarrow_P a_{ih}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\} < \check{x}_h$ . Existe entonces  $k \in \{1, \dots, n\}$  con  $b_k \leftarrow_P a_{kh}^+ < \check{x}_h$ , luego por la propiedad de adjunción se cumple  $b_k < a_{kh}^+ * \check{x}_h$ . Por consiguiente:

$$b_k < a_{kh}^+ * \check{x}_h \leq \bigvee_{j \in \{1, \dots, m\}} (a_{kj}^+ * \check{x}_j) \vee (a_{kj}^- * \neg_P \check{x}_j)$$

Así pues, la tupla  $(\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$  no es solución de (5.41), en contradicción con la hipótesis.

- Sea ahora  $\check{x}_h < \min\{b_i \leftarrow_P a_{ih}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ . En ese caso, obtenemos que  $\check{x}_h < b_i \leftarrow_P a_{ih}^+$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Equivalentemente, por la propiedad de adjunción y la Proposición 2.8,  $a_{ih}^+ * \check{x}_h < b_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . De acuerdo con la monotonía estricta de  $*$ , la desigualdad  $a_{ih}^+ * \frac{\check{x}_h}{2} < b_i$  también se verifica para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Ahora bien, como  $(\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$  es solución de (5.41), la tupla  $(\check{x}_1, \dots, \check{x}_{h-1}, \frac{\check{x}_h}{2}, \check{x}_{h+1}, \dots, \check{x}_m)$  es así mismo solución (5.41) Aún más, debido a que  $h \in \check{J}^+$ ,  $\check{x}_h > 0$ , se cumple que

$$(\check{x}_1, \dots, \check{x}_{h-1}, \frac{\check{x}_h}{2}, \check{x}_{h+1}, \dots, \check{x}_m) < (\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$$

Esto contradice la minimalidad de  $(\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$  como solución de (5.41).

Se concluye entonces que  $\check{x}_j = \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$  para cada  $j \in \check{J}^+$ . De donde,  $f(\check{J}^-) = (\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$ .

Estamos en disposición de ver que  $\check{J}^- \in \check{S}^-$ . Siguiendo un razonamiento análogo a la demostración del Teorema 5.8, obtenemos que  $(\check{J}^+, \check{J}^-)$  es un par factible, luego  $\check{J}^-$  pertenece a  $S^-$ . Para ver que  $\check{J}^- \in \check{S}^-$ , hemos de probar que el correspondiente sistema dado por (5.43) tiene una única solución. Lo haremos por reducción al absurdo.

Supongamos entonces que (5.43) no tiene una única solución. Ya que  $(\check{x}_{j_1}, \dots, \check{x}_{j_l})$  es solución de (5.43), se deduce que ha de existir una segunda solución, digamos  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_l})$  de (5.43), diferente a  $(\check{x}_{j_1}, \dots, \check{x}_{j_l})$ . Al ser  $\check{x}_j = \min\{b_i \leftarrow_P a_{ij}^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$  para cada  $j \in \check{J}^+$ , se obtiene que  $x_j \leq \check{x}_j$  para cada  $j \in \check{J}^+$ , es decir,  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_l}) \leq (\check{x}_{j_1}, \dots, \check{x}_{j_l})$ . Además, como se trata de tuplas diferentes, esto implica que  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_l}) < (\check{x}_{j_1}, \dots, \check{x}_{j_l})$ .

Tomando  $(x_1^*, \dots, x_m^*)$  como la tupla dada por

$$x_j^* = \begin{cases} x_j & \text{if } j \in \check{J}^+ \\ 0 & \text{if } j \in \check{J}^- \end{cases}$$

obtenemos que se trata directamente de una solución de (5.41). Puesto que  $(x_1^*, \dots, x_m^*) < (\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$ , esto contradice el hecho de que  $(\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$  sea solución minimal de (5.41). Se concluye pues que (5.43) tiene una única solución.

Se ha probado que  $\check{J}^-$  pertenece al conjunto  $\check{S}^-$ , con lo cual también se cumple que  $\check{f}(\check{J}^-) = f(\check{J}^-) = (\check{x}_1, \dots, \check{x}_m)$ . Esto nos permite concluir que  $\check{f}$  forma una biyección entre  $\check{S}^-$  y  $\check{M}$ , como queríamos demostrar.  $\square$

### 5.3.2. Un ejemplo práctico

En este apartado desarrollaremos un ejemplo práctico en el que se emplea un sistema de sup-ecuaciones bipolares basadas en la t-norma pro-

ducto para representar un problema real. Este ejemplo nos permitirá evidenciar la utilidad de negaciones no continuas, como  $\neg_P$ , para modelar cambios repentinos en el comportamiento de un sistema dinámico. Más concretamente, consideraremos un sistema de sup-ecuaciones bipolares que modela el comportamiento de un motor, y nos serviremos de este para ilustrar los resultados presentados en la Sección 5.3.1. Dichos resultados nos permitirán determinar a qué se deben ciertos niveles anómalos de sobrecalentamiento y de humedad del motor, y nos darán pistas sobre cómo tendría que proceder un técnico para hacer que el motor funcione correctamente.

**Ejemplo 5.5.** *Un grupo de expertos ha determinado que un motor trabaja de forma adecuada cuando su temperatura y su humedad relativa se encuentran en un cierto umbral. Para ello, recomiendan mantener controlados el nivel de agua, el nivel de aceite y el ventilador del motor.*

*En lo que sigue, representaremos los niveles de agua y de aceite como  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente. Dichas variables tomarán valores en el intervalo unidad  $[0, 1]$ . En particular, el valor 1 indica que el tanque de agua/aceite está vacío, y el valor 0 que la cantidad de agua/aceite ha excedido el límite permitido. Por su parte, el funcionamiento del ventilador se representará mediante la variable discreta  $x_3 \in \{0, 1\}$ , que tomará el valor 0 si el ventilador está funcionando y 1 si se ha parado. En cuanto a la temperatura y la humedad relativa del motor, usaremos las variables  $b_1, b_2 \in [0, 1]$ , respectivamente, donde 0 indica un nivel de temperatura/humedad relativa adecuado y 1 un nivel de sobrecalentamiento/humedad crítico.*

*Una vez introducida las convenciones notacionales previas, podemos formalizar las conclusiones que han alcanzado los expertos sobre el comportamiento del motor. Sobre la temperatura del motor, los expertos han realizado las siguientes afirmaciones:*

- *El motor se calienta de forma proporcional a la falta de agua a razón 0.4.*

### 5.3. SISTEMAS DE SUP-EC. BIPOLARES BASADAS EN T-NORMA PRODUCTO

Además, la temperatura del motor aumenta rápidamente a 0.7 si se produce un exceso de agua. Como resultado, podemos interpretar el calentamiento causado por el nivel de agua mediante la expresión  $(0.4 * x_1) \vee (0.7 * \neg_P x_1)$ . Observemos que la temperatura del motor es considerablemente baja si el nivel de agua es elevado, siempre que no rebose el tanque. Esto se debe a que  $\neg_P x_1 = 0$  cuando  $x_1 > 0$ .

- El calentamiento del motor también es proporcional a la falta de aceite, con constante de proporcionalidad 0.2. Así mismo, la temperatura se eleva a 0.1 si el aceite excede el límite permitido. Por lo tanto, el calentamiento debido al nivel de aceite puede modelarse como  $(0.2 * x_2) \vee (0.1 * \neg_P x_2)$ .
- Por último, los expertos concluyen que el ventilador no funciona correctamente, y en ocasiones se detiene repentinamente. Cuando esto ocurre, el motor se calienta a 0.5. Aún más, incluso cuando el ventilador está funcionando, debido a su mal estado, el motor sufre un calentamiento de 0.2. El calentamiento causado por el ventilador puede interpretarse entonces como  $(0.5 * x_3) \vee (0.2 * \neg_P x_3)$ .

En base a esta información, podemos modelar la temperatura del motor mediante la sup-ecuación bipolar:

$$(0.4 * x_1) \vee (0.7 * \neg_P x_1) \vee (0.2 * x_2) \vee (0.1 * \neg_P x_2) \vee (0.5 * x_3) \vee (0.2 * \neg_P x_3) = b_1$$

En cuanto a la humedad relativa en el motor, los expertos han alcanzado las siguientes conclusiones:

- La humedad relativa en el motor no se ve afectada por el nivel de agua, ya que el tanque de agua está adecuadamente aislado. Sin embargo, si se excede el límite permitido, la humedad relativa aumenta bruscamente a 0.9. Este hecho puede modelarse a través de la expresión  $0.9 * \neg_P x_1$ .
- El nivel de aceite no tiene ningún efecto en la humedad relativa.

- Finalmente, el ventilador produce un incremento en la humedad relativa de hasta 0.4 cuando deja de funcionar. Así pues, podemos representar la humedad debida al ventilador como  $0.4 * x_3$ .

Con lo cual, el impacto del nivel de agua, el nivel de aceite y el ventilador en la humedad relativa del motor puede modelarse como la sup-ecuación bipolar dada por:

$$(0.9 * \neg_P x_1) \vee (0.4 * x_3) = b_2$$

A partir de lo expuesto previamente, las razones que dan lugar a una cierta temperatura y humedad relativa del motor pueden inferirse a partir del sistema de sup-ecuaciones bipolares dado por:

$$\begin{aligned} (0.4, 0.2, 0.5) \odot (x_1, x_2, x_3) \vee (0.7, 0.1, 0.2) \odot \neg_P(x_1, x_2, x_3) &= b_1 \\ (0, 0, 0.4) \odot (x_1, x_2, x_3) \vee (0.9, 0, 0) \odot \neg_P(x_1, x_2, x_3) &= b_2 \end{aligned} \quad (5.44)$$

donde  $(a, b, c) \odot (x, y, z) = (a * x) \vee (b * y) \vee (c * z)$  para cada  $a, b, c, x, y, z \in [0, 1]$ .

Supongamos ahora que el motor presenta un calentamiento de 0.3, esto es  $b_1 = 0.3$ , pero su humedad relativa se encuentra bajo control, es decir  $b_2 = 0$ . Sería interesante conocer a qué niveles de agua y aceite se corresponde este comportamiento del motor, así como saber si el ventilador está funcionando. En lo que sigue, veremos que los resultados desarrollados en la Sección 5.3.1 nos proporcionan una herramienta útil para determinar los valores de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  que causan el calentamiento y la humedad presente en el motor.

Definiendo  $J_1^+ = \{1, 2\}$  and  $J_1^- = \{3\}$ , se comprueba fácilmente que  $(J_1^+, J_1^-)$  es un par factible respecto a (5.44). Como resultado, el Teorema 5.8 nos permite afirmar que (5.44) es resoluble. Además, existen dos únicos pares factibles respecto a (5.44), estos son  $(J_1^+, J_1^-) = (\{1, 2\}, \{3\})$  y  $(J_2^+, J_2^-) = (\{1\}, \{2, 3\})$ .

Por un lado, de acuerdo con el Teorema 5.9, ya que  $J_1^+$  es el máximo del conjunto  $S^+ = \{\{1, 2\}, \{1\}\}$ , se concluye que la tupla  $(0.75, 1, 0)$  es la solución máxima de (5.44). Por otro lado, en cuanto a la existencia de soluciones minimales,  $S^- = \{\{3\}, \{2, 3\}\}$ , luego  $\{1, 2, 3\} \notin S^-$ . Observemos que  $J_2^-$  es el

único elemento maximal de  $S^-$ . Además, ya que  $b_2 = 0$  y las desigualdades  $a_{12}^- = 0.1 < 0.3 = b_1$  y  $a_{13}^- = 0.2 < 0.3 = b_1$  se cumplen, el conjunto  $I_{J_2^-}$  se define como:

$$I_{J_2^-} = \{i \in \{1, 2\} \mid b_i = 0 \text{ o } a_{ij}^- < b_i \text{ para cada } j \in J_2^-\} = \{1, 2\}$$

Consecuentemente, su correspondiente sistema (5.43) viene dado por

$$\begin{aligned} (0.4 * x_1) \vee (0.7 * \neg_P x_1) &= 0.3 \\ (0.9 * \neg_P x_1) &= 0 \end{aligned}$$

cuya única solución es  $x_1 = 0.75$ . Con lo cual, el Teorema 5.10 nos permite concluir que (5.44) tiene una solución minimal: la tupla  $(0.75, 0, 0)$ .

De acuerdo con los resultados obtenidos, en particular atendiendo a la solución máxima y la solución minimal de (5.44), se deduce que el nivel de agua es igual a 0.75, y que el ventilador del motor está funcionando correctamente, puesto que  $x_3 = 0$  en ambos casos. Notemos que el nivel de aceite puede tomar cualquier valor en el intervalo unidad  $[0, 1]$  y, por tanto, no podemos obtener ninguna conclusión a partir de esta variable. En cualquier caso, en nuestro ejemplo, podemos ignorar el nivel de aceite del motor ya que en el peor de los casos supone un sobrecalentamiento de 0.2 y no afecta a la humedad relativa.

Basándonos en la discusión anterior, para que el motor disminuya su temperatura nuestra sugerencia es rellenar el tanque de agua con cuidado de no sobrepasar el límite.  $\diamond$



## Capítulo 6

# Abducción multiadjunta con negaciones

En palabras de Zadeh del prólogo de [44]: “En cuanto a las aplicaciones, la importancia de la teoría de ecuaciones de relaciones difusas se deriva del hecho de que el conocimiento humano puede verse como una colección de hechos y reglas, cada una de ellas representada como la asignación de una relación difusa a la distribución de posibilidad condicional o incondicional de una variable. Esto implica que el conocimiento puede interpretarse como un sistema de ecuaciones de relaciones difusas. Bajo esta perspectiva, la inferencia a partir de un sistema de conocimiento se reduce a la resolución de un sistema de ecuaciones de relaciones difusas.”

El creador de la teoría de conjuntos difusos ya vaticinaba en 1989 aquello en lo que diversos autores han profundizado en años posteriores: la conexión entre la programación lógica y las ecuaciones de relaciones difusas. Ejemplo de ello son los trabajos [19, 45], en los que se muestra que el cálculo del peso de las reglas de un programa lógico multiadjunto es equivalente a la resolución de una ecuación multiadjunta de relaciones difusas, y se presentan las ecuaciones multiadjuntas de relaciones difusas como un

sistema de apoyo a la decisión para la programación lógica multiadjunta.

Teniendo en cuenta la existencia de estos trabajos, que evidencian la cercana relación entre las ecuaciones de relaciones difusas y la programación lógica, parece natural pensar que las ecuaciones bipolares de relaciones difusas podrían ser útiles en procesos de inferencia relacionados con programas lógicos con negaciones.

Como cierre de la tesis, en este capítulo ejemplificaremos la intuición anterior, mostrando que las ecuaciones bipolares de relaciones difusas sirven como herramienta para resolver problemas de abducción en programas lógicos con negación. En particular, trabajaremos en un marco de programación lógica multiadjunta normal, luego haremos uso de ecuaciones bipolares multiadjuntas de relaciones difusas. Es preciso mencionar que, al trabajar en un entorno de programación lógica, haremos uso de la distinción entre símbolo y operador relativa a este ambiente, por ejemplo  $\&$  y  $\dot{\&}$ . El procedimiento mostrado a continuación se encuentra publicado parcialmente en [77].

## **6.1. Procedimiento de abducción mediante ecuaciones bipolares de relaciones difusas**

El razonamiento abductivo consiste, a fin de cuentas, en dar explicación a una serie de resultados observados, deduciendo las posibles razones que han dado lugar a estos. En nuestro ambiente, asumiremos que los resultados observados corresponden a símbolos proposicionales en la cabeza de un programa lógico, en particular de un MANLP. La explicación de dichos resultados concierne entonces a los valores de los demás símbolos proposicionales que aparecen en el programa lógico.

Para resolver el problema de abducción, impondremos tres condiciones al MANLP considerado:

- (1) Naturalmente, el razonamiento abductivo solo tiene sentido si el grafo de dependencias del MANLP (Definición 3.12) no contiene ciclos.
- (2) Para poder hacer uso de ecuaciones bipolares de relaciones difusas, hemos de requerir que a lo sumo un símbolo proposicional, negado o no, aparezca en el cuerpo de cada regla del MANLP. En otro caso, el proceso de abducción requiere la resolución de un tipo de ecuación bipolar que está fuera del alcance de esta tesis.
- (3) Por último, una condición que no es estrictamente necesaria pero que exigiremos por simplicidad, consiste en que todas las reglas en cuyo cuerpo aparece el mismo símbolo proposicional tengan la misma implicación residuada. Si esta condición no se pide, la ecuación obtenida es ligeramente diferente a una ecuación bipolar de relaciones difusas en el sentido del Capítulo 5, pero se resuelve de forma análoga a estas.

De acuerdo con las convenciones previas, en lo que sigue, esbozaremos la idea del método de abducción propuesto mediante un ejemplo.

**Ejemplo 6.1.** Sea  $\mathbb{P}$  un MANLP definido en el retículo multiadjunto con negación  $([0, 1], \leq, \&_L, \leftarrow_L, \&_P, \leftarrow_P, \neg_S)$ , formado por las reglas:

$$\begin{aligned} r_1 : \langle p \leftarrow_L q ; 0.1 \rangle & \quad r_4 : \langle t \leftarrow_L q ; 0.8 \rangle \\ r_2 : \langle p \leftarrow_L \neg_S q ; 0.6 \rangle & \quad r_5 : \langle t \leftarrow_P s ; 0.5 \rangle \\ r_3 : \langle p \leftarrow_P \neg_S s ; 0.8 \rangle & \end{aligned}$$

Supongamos que, como resultado de una prueba experimental se conoce el valor de verdad de los símbolos proposicionales  $p$  y  $t$ , siendo estos  $\theta_p = 0.6$  y  $\theta_t = 0.4$ , respectivamente. Nuestro objetivo es determinar el valor de verdad de los símbolos proposicionales  $q$  y  $s$ . Denotemos dichos valores desconocidos como  $x_q$  y  $x_s$ , respectivamente.

Evidentemente, estamos interesados en situaciones en las que todas las reglas de  $\mathbb{P}$  se satisfacen. En particular, las reglas  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ , cuya cabeza es  $p$ , se han de satisfacer, luego las siguientes desigualdades son ciertas:

$$\begin{aligned} 0.1 \dot{\&}_L x_q &\leq \theta_p \\ 0.6 \dot{\&}_L \dot{\neg}_S x_q &\leq \theta_p \\ 0.8 \dot{\&}_P \dot{\neg}_S x_s &\leq \theta_p \end{aligned}$$

Aún más,  $\theta_p$  coincidirá con el menor valor que satisface las desigualdades anteriores. Por lo tanto, se deduce que  $\theta_p$  satisface la sup-ecuación bipolar multiadjunta dada por:

$$(0.1 \dot{\&}_L x_q) \vee (0.6 \dot{\&}_L \dot{\neg}_S x_q) \vee (0.8 \dot{\&}_P \dot{\neg}_S x_s) = \theta_p$$

Siguiendo un razonamiento análogo para las reglas  $r_4$  y  $r_5$ , que tienen por cabeza el símbolo proposicional  $t$ , obtenemos la sup-ecuación bipolar multiadjunta:

$$(0.8 \dot{\&}_L x_q) \vee (0.5 \dot{\&}_P x_s) = \theta_t$$

Puesto que los valores  $\theta_p$  y  $\theta_t$  se conocen, nuestro problema se reduce a resolver el sistema de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas:

$$\begin{aligned} (0.1 \dot{\&}_L x_q) \vee (0.6 \dot{\&}_L \dot{\neg}_S x_q) \vee (0.8 \dot{\&}_P \dot{\neg}_S x_s) &= 0.6 \\ (0.8 \dot{\&}_L x_q) \vee (0.5 \dot{\&}_P x_s) &= 0.4 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Aplicando los resultados de la Sección 5.2, puede comprobarse que la única solución de (6.1) es la tupla  $(x_q, x_s) = (0, 0.8)$ . Como resultado, la única opción factible para los valores de verdad de  $q$  y  $s$  son 0 y 0.8, respectivamente.  $\diamond$

A tenor del ejemplo anterior, el procedimiento mostrado nos permite obtener, a partir de un conjunto de observaciones (salidas), un conjunto de posibles explicaciones (entradas). Es conveniente mencionar que podría haber más de una explicación para un conjunto de observaciones. A saber, el número de posibilidades depende directamente del número de soluciones del sistema de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas. El resto

de esta sección estará dedicado a formalizar el método propuesto, así como a relacionar las soluciones del problema de abducción con la semántica del programa lógico original.

Comencemos fijando a qué nos referimos con problema de abducción. De aquí en adelante, dado un conjunto finito  $A$ , usaremos la notación  $\bar{A}$  para referirnos a una ordenación arbitraria de  $A$  en forma de tupla. Igualmente, dada una tupla  $\bar{A}$ , denotaremos como  $A$  al conjunto de elementos que forman parte de dicha tupla.

**Definición 6.1.** *Un problema de abducción multiadjunto normal, o simplemente problema de abducción, es una tupla  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$  donde:*

- $\mathbb{P}$  es un MANLP definido en  $(L, \preceq, \leftarrow_1, \&_1, \dots, \leftarrow_n, \&_n, \neg)$  que satisface las condiciones (1), (2) y (3) (pág. 233).
- $\bar{O} = (p_1, \dots, p_o)$ ,  $\bar{H} = (q_1, \dots, q_h)$  y  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_o)$ , con  $o, h \in \mathbb{N}$  y  $p_i, q_j \in \Pi_{\mathbb{P}}$ ,  $\theta_i \in L$  para cada  $i \in \{1, \dots, o\}$ ,  $j \in \{1, \dots, h\}$ .
- $\Pi_{\mathbb{P}} = O \uplus H$
- Los símbolos proposicionales de  $O$  solo aparecen en la cabeza de reglas de  $\mathbb{P}$ .

Nos referiremos a los símbolos proposicionales de  $O$  como *variables observadas*, a los símbolos proposicionales de  $H$  como *hipótesis* y a los valores que aparecen en  $\Theta$  como *observaciones*. Como se mencionó en el Ejemplo 6.1, deseamos que las observaciones coincidan con el valor de verdad de las variables observadas, siendo nuestro objetivo encontrar el valor de verdad de las hipótesis. Además, queremos que las soluciones del problema de abducción sean modelos del MANLP. Con todo esto, podemos definir qué entendemos por solución de un problema de abducción como sigue:

**Definición 6.2.** *Sea  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$  un problema de abducción con  $\bar{O} = (p_1, \dots, p_o)$ ,  $\bar{H} = (q_1, \dots, q_h)$  y  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_o)$ . Decimos que  $(x_1, \dots, x_h) \in L^h$  es una*

solución de  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$  si existe un modelo  $M$  de  $\mathbb{P}$  tal que  $M(p_i) = \theta_i$  y  $M(q_j) = x_j$  para cada  $i \in \{1, \dots, o\}$ ,  $j \in \{1, \dots, h\}$ .

Observar que dado un problema de abducción  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ , si para algún hecho  $\langle p_j \leftarrow \top; \vartheta \rangle$  con cabeza  $p_j \in O$  se tiene que  $\vartheta \not\leq \Theta_j$ , siendo  $\Theta_j$  la  $j$ -ésima componente de  $\Theta$ , entonces  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$  no tiene soluciones. La razón de la ausencia de soluciones es evidente, si la observación del símbolo proposicional  $p_j$  no se corresponde con el programa lógico, entonces dicho problema no modeliza correctamente el sistema subyacente.

Como resultado, de aquí en adelante obviaremos los hechos con cabeza en  $O$ , asumiendo que se satisfacen trivialmente.

### 6.1.1. Resolución de un problema de abducción simple

Por definición de problema de abducción, los símbolos proposicionales de  $O$  solo aparecen en la cabeza de reglas de  $\mathbb{P}$ . No obstante, los símbolos de  $H$  pueden aparecer tanto en el cuerpo como en la cabeza de las reglas de  $\mathbb{P}$ . Antes de abordar el caso general, comenzaremos resolviendo un caso más sencillo, en el que los símbolos proposicionales de  $H$  solo aparecen en el cuerpo de reglas de  $\mathbb{P}$ .

Así, diremos que  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$  es un *problema de abducción simple* si los símbolos proposicionales de  $H$  solo aparecen en el cuerpo de reglas de  $\mathbb{P}$ , más concretamente, si toda regla de  $\mathbb{P}$  es de la forma  $\langle p_i \leftarrow q_j; \vartheta \rangle$  o bien de la forma  $\langle p_i \leftarrow \neg q_j; \vartheta \rangle$ , con  $p_i \in O$ ,  $q_j \in H$ . En lo que sigue, proporcionaremos un método para resolver un problema de abducción simple, que denotaremos  $PROC_s$ .

#### Algoritmo de abducción simple $PROC_s$

Entrada: Problema de abducción simple  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ .

Paso 1: Definir  $\sigma: \{1, \dots, h\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  como  $\sigma(j) = \iota_j$ , siendo  $\leftarrow_{\iota_j}$  la implicación residuada que define las reglas con  $q_j$  en el cuerpo. Notemos que  $\sigma$  está bien definida gracias a la condición (3).

Paso 2: Resolver el sistema de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas con  $\sigma$ -composición  $\odot_\sigma$  dado por

$$(R^+ \odot_\sigma X) \vee (R^- \odot_\sigma \neg X) = T \quad (6.2)$$

siendo  $R_{o \times h}^+, R_{o \times h}^-, X_{h \times 1}, \neg X_{h \times 1}, T_{o \times 1}$  las matrices definidas como:

$$R^+ = \begin{bmatrix} \vartheta_{11} & \cdots & \vartheta_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ \vartheta_{o1} & \cdots & \vartheta_{oh} \end{bmatrix} \quad R^- = \begin{bmatrix} \vartheta_{1h+1} & \cdots & \vartheta_{12h} \\ \vdots & & \vdots \\ \vartheta_{oh+1} & \cdots & \vartheta_{o2h} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_h \end{bmatrix}^t \quad \neg X = \begin{bmatrix} \neg x_1 & \cdots & \neg x_h \end{bmatrix}^t \quad T = \begin{bmatrix} \theta_1 & \cdots & \theta_o \end{bmatrix}^t$$

donde, para cada  $i \in \{1, \dots, o\}, j \in \{1, \dots, h\}$ :

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij} &= \sup\{\vartheta \in L \mid \langle p_i \leftarrow_{\iota_j} q_j; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\} \\ \vartheta_{ih+j} &= \sup\{\vartheta \in L \mid \langle p_i \leftarrow_{\iota_j} \neg q_j; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Salida: Conjunto de soluciones de (6.2).

Notemos que (6.2) puede interpretarse como una ecuación bipolar de relaciones difusas compuesta por un único sistema de sup-ecuaciones bipolares multiadjuntas.

El siguiente resultado prueba que el método  $PROC_s$  efectivamente resuelve el problema de abducción simple.

**Teorema 6.1.** *Toda solución de (6.2) es solución del problema de abducción simple  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ .*

*Demostración.* Sea  $(x_1, \dots, x_h)$  una solución de (6.2). Veamos que la interpretación  $M: \Pi_{\mathbb{P}} \rightarrow L$  dada por  $M(p_i) = \theta_i$  y  $M(q_j) = x_j$ , para cada  $i \in \{1, \dots, o\}$ ,  $j \in \{1, \dots, h\}$ , es un modelo de  $\mathbb{P}$ . Por hipótesis, las reglas de  $\mathbb{P}$  son de la forma  $\langle p_i \leftarrow_{\iota_j} q_j; \vartheta \rangle$  o bien de la forma  $\langle p_i \leftarrow_{\iota_j} \neg q_j; \vartheta \rangle$ . Ahora bien:

- Sea  $\langle p_i \leftarrow_{\iota_j} q_j; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}$ . Ya que  $(x_1, \dots, x_h)$  es solución de (6.2), se cumple que

$$(\vartheta_{i1} \dot{\&}_{\iota_1} x_1) \vee (\vartheta_{ih+1} \dot{\&}_{\iota_1} x_1) \vee \dots \vee (\vartheta_{ih} \dot{\&}_{\iota_h} x_h) \vee (\vartheta_{i2h} \dot{\&}_{\iota_h} x_h) = \theta_i$$

Por lo tanto, en particular  $\vartheta_{ij} \dot{\&}_{\iota_j} x_j \preceq \theta_i$ . Equivalentemente, por la propiedad de adjunción,  $\vartheta_{ij} \preceq \theta_i \dot{\leftarrow}_{\iota_j} x_j$ . Aún más, por definición de supremo y de acuerdo con (6.3) se tiene que  $\vartheta \preceq \vartheta_{ij}$ , por lo tanto  $\vartheta \preceq \theta_i \dot{\leftarrow}_{\iota_j} x_j$ . Finalmente, teniendo en cuenta la definición de  $M$ , la última desigualdad se puede reescribir como  $\vartheta \preceq M(p_i) \dot{\leftarrow}_{\iota_j} M(q_j)$ . En otras palabras,  $M$  satisface la regla  $\langle p_i \leftarrow_{\iota_j} q_j; \vartheta \rangle$ .

- Sea ahora  $\langle p_i \leftarrow_{\iota_j} \neg q_j; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}$ . Siguiendo un razonamiento análogo al caso previo, la desigualdad  $\vartheta_{ih+j} \dot{\&}_{\iota_j} x_j \preceq \theta_i$  se satisface, o equivalentemente  $\vartheta_{ih+j} \preceq \theta_i \dot{\leftarrow}_{\iota_j} x_j$ . De nuevo, por definición del elemento  $\vartheta_{ih+j}$ , la desigualdad anterior implica que  $\vartheta \preceq \theta_i \dot{\leftarrow}_{\iota_j} x_j$ . Así pues, se deduce que  $\vartheta \preceq M(p_i) \dot{\leftarrow}_{\iota_j} \neg M(q_j)$ , es decir,  $M$  satisface la regla  $\langle p_i \leftarrow_{\iota_j} \neg q_j; \vartheta \rangle$ .

Con lo cual, se concluye que  $M$  es un modelo de  $\mathbb{P}$ . □

### 6.1.2. Resolución de un problema de abducción general

Una vez resuelto el caso simple, abordaremos la resolución de un problema de abducción arbitrario. La estrategia que seguiremos es la de dividir el MANLP original en subprogramas, de forma que en cada uno de

ellos obtengamos un problema de abducción simple al que aplicar el método desarrollado en la Sección 6.1.1.

Concretamente, dado un MANLP  $\mathbb{P}$  que satisface las condiciones (1), (2) y (3), definimos  $\Pi_0 \subseteq \Pi_{\mathbb{P}}$  como el conjunto de símbolos proposicionales que solamente aparecen en la cabeza de reglas de  $\mathbb{P}$ . Igualmente, para cada  $i \geq 1$ , definimos  $\Pi_i \subseteq \Pi_{\mathbb{P}}$  como el conjunto de símbolos proposicionales que aparecen en el cuerpo de reglas de  $\mathbb{P}$  cuya cabeza pertenece a  $\Pi_{i-1}$ . Formalmente, si denotamos el grafo de dependencias de  $\mathbb{P}$  como  $G_{\mathbb{P}} = (V_{\mathbb{P}}, A_{\mathbb{P}})$ , definimos inductivamente la familia  $\{\Pi_i\}_{i \in \mathbb{Z}^*}$  como sigue:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \{p \in \Pi_{\mathbb{P}} \mid (q, p) \notin A_{\mathbb{P}} \text{ para cada } q \in \Pi_{\mathbb{P}}\} \\ \Pi_i &= \left\{ q \in \Pi_{\mathbb{P}} \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \Pi_j \mid (p, q) \in A_{\mathbb{P}} \text{ para algún } p \in \Pi_{i-1} \right\} \end{aligned}$$

para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Claramente, al ser  $\Pi_{\mathbb{P}}$  finito, el conjunto  $\Pi_i$  es vacío a partir de un cierto índice  $m$ , es decir,  $\Pi_i = \emptyset$  para todo  $m < i$ .

Antes de presentar el algoritmo de resolución de un problema de abducción general, veamos que la división anterior tiene sentido, de acuerdo con nuestro objetivo. Para ello, veremos que  $\{\Pi_0, \dots, \Pi_m\}$  forma una partición de  $\Pi_{\mathbb{P}}$ , para algún  $m \in \mathbb{N}$ .

**Proposición 6.1.** *Dado un MANLP  $\mathbb{P}$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\{\Pi_0, \dots, \Pi_m\}$  forma una partición de  $\Pi_{\mathbb{P}}$ .*

*Demostración.* Para comenzar, veamos que  $\Pi_0$  no es vacío por reducción al absurdo. Supongamos que  $\Pi_0$  es vacío. Ya que  $\mathbb{P}$  tiene un número finito de reglas con un número finito de símbolos proposicionales, el conjunto  $\Pi_{\mathbb{P}}$  es finito. Ahora bien, al ser  $\Pi_0$  vacío, para cada  $p \in \Pi_{\mathbb{P}}$  existe  $q \in \Pi_{\mathbb{P}}$  con  $p \neq q$  tal que  $(p, q) \in A_{\mathbb{P}}$ . Debido a que  $\Pi_{\mathbb{P}}$  es finito, existirá una sucesión de símbolos proposicionales de  $\Pi_{\mathbb{P}}$  de forma que sus correspondientes aristas en  $G_{\mathbb{P}}$  forman un ciclo, en contradicción con la condición (1). Por lo tanto, se deduce que  $\Pi_0 \neq \emptyset$ .

Un argumento similar nos permite afirmar que si  $\Pi_{\mathbb{P}} \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \Pi_j \neq \emptyset$ , entonces  $\Pi_i \neq \emptyset$ . Así, ya que  $\Pi_{\mathbb{P}}$  es finito, existirá un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\Pi_m \neq \emptyset$ ,  $\Pi_i = \emptyset$  si  $m < i$  y  $\Pi_{\mathbb{P}} = \bigcup_{j=0}^m \Pi_j$ . Claramente, por definición de dichos conjuntos,  $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Con lo cual se concluye que  $\{\Pi_0, \dots, \Pi_m\}$  forma una partición de  $\Pi_{\mathbb{P}}$ .  $\square$

Denotemos por  $\mathbb{P}_i$  al subconjunto de reglas de  $\mathbb{P}$  con cabeza en  $\Pi_i$  y cuerpo en  $\Pi_{i+1} \cup \neg\Pi_{i+1}$ , siendo  $\neg\Pi_{i+1} = \{\neg q \mid q \in \Pi_{i+1}\}$ , para cada  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ , y sea  $|\Pi_i| = n_i$  para cada  $i \in \{0, \dots, m\}$ . Dadas dos tuplas  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , denotaremos como  $x \bullet y$  a la tupla  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ .

Observemos que, dado un problema de abducción  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ , por definición de problema de abducción y del conjunto  $\Pi_0$ , se cumple que  $O \subseteq \Pi_0$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los primeros  $o$  elementos de la tupla  $\bar{\Pi}_0$  son  $p_1, \dots, p_o \in O$ . Igualmente, asumiremos que  $\bar{H} = \bar{\Pi}_0 \bullet \dots \bullet \bar{\Pi}_m$ .

A continuación, presentamos un procedimiento constructivo para resolver un problema de abducción arbitrario  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ , al que nos referiremos como *PROC*.

### Algoritmo de abducción PROC

Entrada: Problema de abducción  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ .

Paso 0: Definir  $X_0$  como el conjunto de valores que pueden tomar los símbolos proposicionales de  $\bar{\Pi}_0$  satisfaciendo los hechos con cabeza en  $\bar{\Pi}_0$ , esto es,

$$X_0 = \left\{ (\rho_1, \dots, \rho_o, x_{o+1}, \dots, x_{n_0}) \left| \begin{array}{l} \sup\{\vartheta \mid \langle p_j \leftarrow \top; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}\} \preceq x_j, \\ x_j \in L, j \in \{o+1, \dots, n_0\} \end{array} \right. \right\}$$

- Paso 1:
- a) Resolver el problema de abducción simple  $(\mathbb{P}_0, \bar{\Pi}_0, \bar{\Pi}_1, \Theta_0)$  mediante  $PROC_s$ , para cada  $\Theta_0 \in X_0$ , siendo  $S_{\Theta_0}$  su conjunto de soluciones.
  - b) Definir el conjunto  $S_1^* = \{\Theta_0 \bullet y \mid \Theta_0 \in X_0, y \in S_{\Theta_0}\}$ .
  - c) Definir  $S_1$  como el subconjunto de tuplas de  $S_1^*$  que satisfacen todas las reglas con cabeza en  $\Pi_1$  y cuyo cuerpo, si lo hubiera, pertenece a  $\Pi_1 \cup \neg\Pi_1$ .
  - d) Definir  $X_1 = \{(y_1, \dots, y_{n_1}) \mid (x_1, \dots, x_{n_0}, y_1, \dots, y_{n_1}) \in S_1\}$ .

Paso i: Para cada  $i \in \{2, \dots, m\}$ , a partir de  $S_{i-1}$  y  $X_{i-1}$  procedemos como sigue:

- a) Resolver mediante  $PROC_s$  el problema de abducción simple  $(\mathbb{P}_{i-1}, \bar{\Pi}_{i-1}, \bar{\Pi}_i, \Theta_{i-1})$ , para cada  $\Theta_{i-1} \in X_{i-1}$ , siendo  $S_{\Theta_{i-1}}$  su conjunto de soluciones.
- b) Definir el conjunto

$$S_i^* = \{a \bullet \Theta_{i-1} \bullet y \mid \Theta_{i-1} \in X_{i-1}, a \bullet \Theta_{i-1} \in S_{i-1}, y \in S_{\Theta_{i-1}}\}$$

siendo  $a$  una tupla arbitraria tal que la concatenación  $a \bullet \Theta_{i-1}$  pertenece al conjunto  $S_{i-1}$ .

- c) Definir  $S_i$  como el subconjunto de tuplas de  $S_i^*$  que satisfacen todas las reglas con cabeza en  $\Pi_i$  y cuyo símbolo proposicional en el cuerpo, si lo hubiera, pertenece a

$$(\Pi_1 \cup \neg\Pi_1) \cup \dots \cup (\Pi_i \cup \neg\Pi_i)$$

- d) Definir  $X_i = \{(y_1, \dots, y_{n_i}) \mid a \bullet (y_1, \dots, y_{n_i}) \in S_i\}$ .

Salida: Conjunto  $S_m$ .

Observemos que, para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  y  $\Theta_{i-1} \in X_{i-1}$ , el conjunto  $\Theta_{i-1}$  tiene  $n_i$  elementos de  $L$ , al igual que  $\bar{\Pi}_{i-1}$  tiene  $n_i$  símbolos proposicionales. Aún más, por definición, toda regla del MANLP  $\mathbb{P}_i$  es de la forma

$\langle p \leftarrow q; \vartheta \rangle$  o bien de la forma  $\langle p \leftarrow \neg q; \vartheta \rangle$ , con  $p \in \Pi_{i-1}$ ,  $q \in \Pi_i$ . Consecuentemente, el algoritmo *PROC* está bien definido.

Como muestra el siguiente resultado, el conjunto  $S_m$  contiene las soluciones del problema de abducción.

**Teorema 6.2.** *Toda tupla de  $S_m$  es solución del problema de abducción dado por  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ .*

*Demostración.* Sea  $(x_1, \dots, x_h) \in S_m$ . Veamos que la interpretación  $M: \Pi_{\mathbb{P}} \rightarrow L$  dada por  $M(p_i) = \theta_i$  y  $M(q_j) = x_j$ , para cada  $i \in \{1, \dots, o\}$ ,  $j \in \{1, \dots, h\}$ , es un modelo de  $\mathbb{P}$ . Sea  $\langle p \leftarrow \mathcal{B}; \vartheta \rangle$  una regla de  $\mathbb{P}$ .

Por un lado, supongamos que  $\mathcal{B}$  no contiene símbolos proposicionales. Si  $p \in \Pi_0$ , por la construcción de  $X_0$  en el paso 0, podemos asegurar que  $M$  satisface la regla  $\langle p \leftarrow \mathcal{B}; \vartheta \rangle$ . Si en cambio  $p \in \Pi_i$  con  $i \in \{1, \dots, m\}$ , del apartado c) del paso  $i$  se deduce que  $M$  satisface la regla  $\langle p \leftarrow \mathcal{B}; \vartheta \rangle$ .

Supongamos ahora que  $q \in \Pi_{\mathbb{P}}$  es un símbolo proposicional que aparece en  $\mathcal{B}$ . Por la condición (2), se trata del único símbolo proposicional en  $\mathcal{B}$ . Ahora, de acuerdo con la definición de la partición  $\{\Pi_0, \dots, \Pi_m\}$ , existen  $\Pi_i, \Pi_j$  tales que  $p \in \Pi_i$ ,  $q \in \Pi_j$ . Observemos que  $j \neq 0$ .

Distingamos tres casos:

- Supongamos que  $j \leq i$ . En ese caso, por el apartado c) del paso  $i$ , se obtiene directamente que  $M$  satisface la regla  $\langle p \leftarrow \mathcal{B}; \vartheta \rangle$ .
- Sea ahora  $i = j - 1$ . Por la construcción del conjunto  $S_m$ , o más específicamente por la construcción de  $S_m^*$ , existen  $\Theta_{j-1} \in X_{j-1}$  e  $y \in S_{\Theta_{j-1}}$  tales que  $(x_1, \dots, x_h) = a \bullet \Theta_{j-1} \bullet y \bullet z$ , donde  $a$  y  $z$  son tuplas que corresponden a los símbolos proposicionales de  $\Pi_0 \cup \dots \cup \Pi_{j-2}$  y de  $\Pi_{j+1} \cup \dots \cup \Pi_m$ , respectivamente. Puesto que  $y$  es solución del problema de abducción simple  $(\mathbb{P}_{j-1}, \bar{\Pi}_{j-1}, \bar{\Pi}_j, \Theta_{j-1})$  y se cumple que  $\langle p \leftarrow \mathcal{B}; \vartheta \rangle \in \mathbb{P}_{j-1}$ , la tupla  $y$  satisface la regla  $\langle p \leftarrow \mathcal{B}; \vartheta \rangle$ , y por lo tanto también  $M$  la satisface.

- Por último, si  $i < j - 1$ , podemos hacer un razonamiento recursivo similar al caso anterior, de donde se llega a que  $M$  satisface la regla  $\langle p \leftarrow \mathcal{B}; \vartheta \rangle$ .  $\square$

En virtud del Teorema 6.2, que prueba que las soluciones aportadas por el algoritmo *PROC* se corresponden con modelos del MANLP  $\mathbb{P}$ , cabe preguntarse si dichas soluciones guardan una relación aún más estrecha con la semántica de  $\mathbb{P}$ . Por ejemplo, una duda razonable es si las soluciones de *PROC* pueden proporcionar modelos estables de  $\mathbb{P}$ , teniendo en cuenta la información contenida en dichas soluciones. En este sentido, dada una solución  $X$  de *PROC*, los valores de la solución se incorporan al programa  $\mathbb{P}$  en forma de hechos, dando lugar a un nuevo MANLP  $\mathbb{P}^X$  [19, 77].

Ahora bien, la condición (1) implica que el grafo de dependencias de  $\mathbb{P}$  no contiene ciclos. En particular, dicho grafo no contiene ciclos con aristas negativas, luego el Teorema 3.6 nos asegura que  $\mathbb{P}$  es un MANLP estratificado. Además, al ser  $\mathbb{P}^X$  el MANLP  $\mathbb{P}$  ampliado con un conjunto de hechos,  $\mathbb{P}^X$  también es estratificado. Así pues, aplicando el Teorema 3.7,  $\mathbb{P}^X$  tiene un único modelo estable.

El estudio de la relación entre las soluciones del problema de abducción y el único modelo estable del MANLP asociado a cada solución queda como cuestión abierta, y se propondrá como trabajo futuro.

## 6.2. Aplicación a un ejemplo práctico

La posibilidad de aplicar un razonamiento abductivo en un paradigma lógico con negaciones supone una herramienta muy poderosa. A continuación, describimos un ejemplo práctico con objeto de arrojar luz sobre la gran variabilidad de aplicaciones potenciales del procedimiento descrito en este capítulo.

**Ejemplo 6.2.** *El servicio de criminalística de un departamento de policía ha llegado a la conclusión de que la presencia abundante de rastros de ADN en la escena de un crimen implica, por lo general, que el asesino tiene un perfil agresivo. A esta conclusión también se llega si la escena del crimen es caótica. Por el contrario, una escena del crimen excesivamente pulcra suele indicar que el asesino es metódico, cuidadoso, mientras que la ausencia total de rastros de ADN suele deberse a que el asesino ha tenido tiempo suficiente para limpiar sus rastros y, por ello, que el crimen se ha prolongado en el tiempo. Por último, si el crimen tiene lugar en un espacio considerablemente concurrido, la cantidad de trazas de ADN suele ser abundante. De acuerdo con esta información, deseamos condensar las conclusiones que han alcanzado los forenses en forma de programa lógico con negación.*

*Por la relevancia de la ausencia total de ADN o de desorden, parece lógico emplear la negación  $\neg P$ . Sean  $AG, M, P, ADN, D, C \in [0, 1]$  variables tales que:*

- *AG: representa la agresividad del sujeto, recibe un valor más alto cuanto más agresivo es el sujeto.*
- *M: indica cuán metódico es un sujeto. Un valor pequeño sugiere que el sujeto es anárquico en su forma de actuar, mientras que dicho valor asciende si actúa cuidadosamente.*
- *P: indica la duración del crimen, un valor alto implica que el crimen se ha prolongado.*
- *ADN: simboliza la cantidad de ADN en la escena del crimen, toma un valor superior cuanto más rastros de ADN se encuentran presentes en la escena.*
- *D: representa el desorden, toma un valor más alto cuanto más caótica es la escena del crimen.*
- *C: indica la afluencia media de personas en el lugar donde se comete el crimen, un valor alto indica que la escena del crimen tiene lugar en un espacio concurrido.*

## 6.2. APLICACIÓN A UN EJEMPLO PRÁCTICO

---

La información recabada por los forenses puede resumirse entonces en el siguiente MANLP, denotado  $\mathbb{P}$  y definido en el retículo multiadjunto con negación  $([0, 1], \leq, \&_P, \leftarrow_P, \neg_P)$ :

$$\begin{aligned} r_1 : \langle AG \leftarrow_P ADN ; 0.5 \rangle & \quad r_4 : \langle P \leftarrow_P \neg_P ADN ; 0.8 \rangle \\ r_2 : \langle AG \leftarrow_P D ; 0.8 \rangle & \quad r_5 : \langle ADN \leftarrow_P C ; 0.9 \rangle \\ r_3 : \langle M \leftarrow_P \neg_P D ; 0.8 \rangle & \end{aligned}$$

Supongamos ahora que estamos ante un sujeto que presenta una agresividad de 0.6 y que es metódico con valor de verdad 0.8. Deseamos saber qué tipo de características tendría el crimen cometido por una persona con este perfil, de acuerdo con las conclusiones obtenidas por el servicio de criminalística. Veamos que podemos deducir esta información aplicando el algoritmo PROC de razonamiento abductivo.

Puesto que  $\Pi_{\mathbb{P}} = \{AG, M, P, ADN, D, C\}$ , la partición de  $\Pi_{\mathbb{P}}$  que nos permite aplicar el método PROC es  $\{\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2\}$  con  $\Pi_0 = \{AG, M, P\}$ ,  $\Pi_1 = \{ADN, D\}$  y  $\Pi_2 = \{C\}$ . Apliquemos dicho método al problema de abducción  $(\mathbb{P}, \bar{O}, \bar{H}, \Theta)$ , siendo  $\bar{O} = (AG, M)$ ,  $\bar{H} = (P, ADN, D, C)$  y  $\Theta = (0.6, 0.8)$ :

*Paso 0: Debido a que no hay hechos con cabeza  $P$ , entonces*

$$X_0 = \{(0.6, 0.8, x_P) \mid x_P \in [0, 1]\}$$

*Paso 1: a) Hemos de resolver el problema de abducción simple dado por  $(\mathbb{P}_0, \bar{\Pi}_0, \bar{\Pi}_1, X_0)$ , esto es, el problema*

$$(\{r_1, r_2, r_3, r_4\}, (AG, M, P), (ADN, D), (0.6, 0.8, x_P))$$

*para cada  $(0.6, 0.8, p) \in X_0$ . Aplicando el algoritmo PROC, para resolver  $(\mathbb{P}_0, \bar{\Pi}_0, \bar{\Pi}_1, X_0)$  es preciso resolver el sistema de sup-*

ecuaciones bipolares con incógnitas  $x_{ADN}, x_D$  dado por

$$\begin{aligned} (0.5 \dot{\&}_P x_{ADN}) \vee (0.8 \dot{\&}_P x_D) &= 0.6 \\ (0.8 \dot{\&}_P \dot{\neg}_P x_D) &= 0.8 \\ (0.8 \dot{\&}_P \dot{\neg}_P x_{ADN}) &= x_P \end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta los resultados desarrollados en la Sección 5.3, el conjunto de soluciones de dicho sistema es vacío si  $x_P \neq 0$ . Por otro lado, la única solución del sistema para  $x_P = 0$  es la tupla  $(0.75, 0)$ , luego  $S_{(0.6, 0.8, 0)} = \{(0.75, 0)\}$ .

b) De acuerdo con lo expuesto anteriormente:

$$S_1^* = \{(0.6, 0.8, 0) \bullet (0.75, 0)\} = \{(0.6, 0.8, 0, 0.75, 0)\}$$

c) Como  $\mathbb{P}$  no contiene reglas con cabeza y cuerpo en  $\Pi_1$ , se tiene que  $S_1 = S_1^*$ .

d) Finalmente  $X_1 = \{(0.75, 0)\}$ .

Paso 2: a) En este caso, tan solo hay un problema de abducción simple a resolver, el problema  $(\mathbb{P}_1, \bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2, (0.75, 0))$  dado por

$$(\{r_5\}, (ADN, D), (C), (0.75, 0))$$

El sistema de sup-ecuaciones bipolares obtenido por el algoritmo PROC tiene por incógnita  $x_C$  y viene dado por

$$(0.9 \dot{\&}_P x_C) = 0.75$$

Se obtiene entonces que  $S_{(0.75, 0)} = \{(0.8\hat{3})\}$ .

b) Como resultado

$$S_2^* = \{(0.6, 0.8, 0) \bullet (0.75, 0) \bullet (0.8\hat{3})\} = \{(0.6, 0.8, 0, 0.75, 0, 0.8\hat{3})\}$$

c) Puesto que  $\mathbb{P}$  no tiene reglas con cabeza en  $\Pi_2$ , se concluye que  $S_2 = S_2^*$ .

## 6.2. APLICACIÓN A UN EJEMPLO PRÁCTICO

---

*Así pues, la tupla  $(0.6, 0.8, 0, 0.75, 0, 0.8\hat{3})$  es la única solución del problema de abducción  $(\mathbb{P}, (AG, M), (P, ADN, D, C), (0.6, 0.8))$ . Podemos afirmar entonces que un sujeto agresivo y metódico daría lugar a un crimen cometido en un lugar concurrido (con valor de verdad  $0.8\hat{3}$ ) y con abundantes trazas de ADN (con valor 0.75). Además, no parece que dicho crimen se dilate en el tiempo, sino más bien será precipitado, ya que el valor de verdad de la variable  $P$  es 0. Por último, debido seguramente a la premura, el crimen no provocará un desorden significativo en el lugar (su valor de verdad es 0) a pesar de la presencia de ADN.*  $\diamond$



# Referencias

- [1] J. Alcântara, C. V. Damásio y L. M. Pereira. *Paraconsistent Logic Programs*. En *Logics in Artificial Intelligence*, vol. 2424, págs. 345–356. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [2] K. R. Apt, H. A. Blair y A. Walker. *Towards a Theory of Declarative Knowledge*. En *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming*, págs. 89–148. Elsevier, 1988.
- [3] K. T. Atanassov. *Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications*. Physica-Verlag Heidelberg, 1999.
- [4] S. Banach. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1):133–181, 1922.
- [5] N. D. Belnap. *A Useful Four-Valued Logic*. En *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, págs. 5–37. Springer Nature, 1977.
- [6] G. Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, third ed., 1967.
- [7] P. Blackburn, M. de Rijke y Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001.

- [8] G. Boole. *An Investigation of the Laws of Thought: On which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. Walton and Maberly, 1854.
- [9] J. Bouttier, P.D. Francesco y E. Guitter. *Geodesic distance in planar graphs*. Nuclear Physics B, 663(3):535–567, 2003.
- [10] H. Bustince, N. Madrid y M. Ojeda-Aciego. *A measure of contradiction based on the notion of N-weak-contradiction*. En *2013 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2013.
- [11] H. Bustince, N. Madrid y M. Ojeda-Aciego. *The Notion of Weak-Contradiction: Definition and Measures*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 23(4):1057–1069, 2015.
- [12] P. Cabalar, J. Fandinno y L. F. del Cerro. *Splitting Epistemic Logic Programs*. En *Logic Programming and Nonmonotonic Reasoning*, págs. 120–133. Springer International Publishing, 2019.
- [13] P. Cabalar y T. Schaub. *Temporal Logic Programs with Temporal Description Logic Axioms*. En *Lecture Notes in Computer Science*, págs. 174–186. Springer International Publishing, 2019.
- [14] T.H. Cao. *Annotated fuzzy logic programs*. Fuzzy Sets and Systems, 113(2):277–298, 2000.
- [15] E. Castiñeira y S. Cubillo. *Measures of self-contradiction on Atanassov’s intuitionistic fuzzy sets: An axiomatic model*. International Journal of Intelligent Systems, 24(8):863–888, 2009.
- [16] R. Cignoli y F. Esteva. *Commutative integral bounded residuated lattices with an added involution*. Annals of Pure and Applied Logic, 161(2):150–160, 2009.

- [17] K. L. Clark. *Negation as Failure*. En *Logic and Data Bases*, págs. 293–322. Springer US, 1978.
- [18] A. Colmerauer, H. Kanoui, P. Roussel y R. Pasero. *Un systeme de-communication homme-machine en francais*. Groupe de recherche en Intelligence Artificielle, Universite d’Aix-Marseille, 1973.
- [19] M. E. Cornejo, J. C. Díaz-Moreno y J. Medina. *Multi-adjoint Relation Equations: A Decision Support System for Fuzzy Logic*. *International Journal of Intelligent Systems*, 32(8):778–800, 2017.
- [20] M. E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. *Towards Multi-adjoint Logic Programming with Negations*. En L. Koczy y J. Medina (eds.): *8th European Symposium on Computational Intelligence and Mathematics (ES-CIM 2016)*, págs. 24–29, 2016.
- [21] M. E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. *Bipolar fuzzy relation equations based on the product t-norm*. En *2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, págs. 1–6, 2017.
- [22] M. E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. *Selecting the Coherence Notion in Multi-adjoint Normal Logic Programming*. En *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 10305, págs. 447–457, 2017.
- [23] M. E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. *Measuring the Incoherent Information in Multi-adjoint Normal Logic Programs*. En *Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 641, págs. 521–533, 2018.
- [24] M. E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. *Syntax and semantics of multi-adjoint normal logic programming*. *Fuzzy Sets and Systems*, 345:41–62, 2018.
- [25] M. E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. *Bipolar fuzzy relation equations systems based on the product t-norm*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(17):5779–5793, 2019.

- [26] M. E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. *Extended multi-adjoint logic programming*. Fuzzy Sets and Systems, 2019.
- [27] M. E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. *On the solvability of bipolar max-product fuzzy relation equations with the product negation*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 354:520 – 532, 2019.
- [28] M. E. Cornejo, D. Lobo y J. Medina. *On the solvability of bipolar max-product fuzzy relation equations with the standard negation*. Fuzzy Sets and Systems, 2020.
- [29] M. E. Cornejo, J. Medina y E. Ramírez-Poussa. *A comparative study of adjoint triples*. Fuzzy Sets and Systems, 211:1–14, 2013.
- [30] M. E. Cornejo, J. Medina y E. Ramírez-Poussa. *General negations for residuated fuzzy logics*. En *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 8536, págs. 13–22, 2014.
- [31] M. E. Cornejo, J. Medina y E. Ramírez-Poussa. *Adjoint negations, more than residuated negations*. Information Sciences, 345:355 – 371, 2016.
- [32] S. Costantini. *On the existence of stable models of non-stratified logic programs*. Journal of Theory and Practice of Logic Programming, págs. 6(1–2):169–212, 2006.
- [33] S. Cubillo, C. Torres y E. Castiñeira. *Self-contradiction and contradiction between two Atanassov’ s intuitionistic fuzzy sets*. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 16(03):283–300, 2008.
- [34] S. Cubillo, C. Torres-Blanc y P. Hernández-Varela. *A characterization for some type-2 fuzzy strong negations*. Knowledge-Based Systems, 191:105–281, 2020.

- [35] C. Damásio, J. Medina y M. Ojeda-Aciego. *Sorted Multi-adjoint Logic Programs: Termination Results and Applications*. En *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, vol. 3229, págs. 252–265, 2004.
- [36] C. Damásio, J. Medina y M. Ojeda-Aciego. *Termination of logic programs with imperfect information: applications and query procedure*. *Journal of Applied Logic*, 5:435–458, 2007.
- [37] C. V. Damásio y L. M. Pereira. *Monotonic and residuated logic programs*. En *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, vol. 2143, págs. 748–759, 2001.
- [38] C. V. Damásio y L. M. Pereira. *Hybrid Probabilistic Logic Programs as Residuated Logic Programs*. *Studia Logica*, 72(1):113–138, 2002.
- [39] C. V. Damásio y L. M. Pereira. *Termination results for sorted multi-adjoint logic programming*. En *Information Processing and Management of Uncertainty for Knowledge-Based Systems, IPMU04*, págs. 1879–1886, 2004.
- [40] B. Davey y H. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, second ed., 2002.
- [41] B. De Baets. *An Order-Theoretic Approach to Solving Sup-T Equations*. En *International Series in Intelligent Technologies*, págs. 67–87. Springer US, 1995.
- [42] B. De Baets. *Sup-T Equations: State of the Art*. En *Computational Intelligence: Soft Computing and Fuzzy-Neuro Integration with Applications*, págs. 80–93. Springer Berlin Heidelberg, 1998.
- [43] A. Di Nola, S. Sessa y W. Pedrycz. *Fuzzy relation equation under a class of triangular norms: A survey and new results*. *Stochastica: revista de matemática pura y aplicada*, 8(2):99–145, 1984.

- [44] A. Di Nola, S. Sessa, W. Pedrycz y E. Sanchez. *Fuzzy Relation Equations and Their Applications to Knowledge Engineering*. Springer Netherlands, 1989.
- [45] J.C. Díaz y J. Medina. *Multi-adjoint relation equations: Definition, properties and solutions using concept lattices*. *Information Sciences*, 253:100–109, 2013.
- [46] J. C. Díaz-Moreno, J. Medina y J. R. Portillo. *Towards the Use of Hypergraphs in Multi-adjoint Logic Programming*. En *Studies in Computational Intelligence*, vol. 796, págs. 53–59, 2019.
- [47] R. P. Dilworth y M. Ward. *Residuated lattices*. *Transactions of the American Mathematical Society*, págs. 45:335–354, 1939.
- [48] D. Dubois, J. Lang y H. Prade. *Automated reasoning using possibilistic logic: semantics, belief revision, and variable certainty weights*. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 6(1):64–71, 1994.
- [49] D. Dubois y H. Prade. *Operations on fuzzy numbers*. *International Journal of Systems Science*, 9(6):613–626, 1978.
- [50] F. Esteva. *Negaciones en retículos completos*. *Stochastica*, I:49–66, 1975.
- [51] F. Esteva y X. Domingo. *Sobre funciones de negación en  $[0,1]$* . *Stochastica*, IV:141–166, 1980.
- [52] L. Fariñas del Cerro y H. Prade. *Rough sets, twofold fuzzy sets and modal logic. Fuzziness in indiscernibility and partial information*. En A. D. Nola y A. Ventre (eds.): *The Mathematics of Fuzzy Systems*, págs. 103–120. Verlag TUV Rheinland, 1986.
- [53] M. Fitting. *Bilattices and the semantics of logic programming*. *The Journal of Logic Programming*, 11(2):91–116, 1991.

- [54] S. Freson, B. De Baets y H. De Meyer. *Linear optimization with bipolar max–min constraints*. Information Sciences, 234:3–15, 2013.
- [55] M. Gavalec y K. Zimmermann. *Solving Systems of Two-Sided (Max, Min)-Linear Equations*. Kybernetika, 46(3):405–414, 2010.
- [56] M. Gelfond y V. Lifschitz. *The stable model semantics for logic programming*. Proc. of ICLP-88, págs. 1070–1080, 1988.
- [57] M. Gelfond y V. Lifschitz. *The Stable Model Semantics For Logic Programming*. En *Logic Programming, Proceedings of the Fifth International Conference and Symposium, Seattle, Washington, August 15-19, 1988 (2 Volumes)*, págs. 1070–1080. MIT Press, 1988.
- [58] A. Ghodousian y E. Khorram. *Fuzzy linear optimization in the presence of the fuzzy relation inequality constraints with max–min composition*. Information Sciences, 178(2):501–519, 2008.
- [59] M. L. Ginsberg. *Multi-Valued Logics*. En *AAAI*, 1986.
- [60] M. L. Ginsberg. *Multivalued logics: a uniform approach to reasoning in artificial intelligence*. Computational Intelligence, 4(3):265–316, 1988.
- [61] J. Goguen. *L-fuzzy sets*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 18(1):145–174, 1967.
- [62] G. Grätzer. *General Lattice Theory*. Birkhäuser Verlag, 1998.
- [63] P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Trends in Logic. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [64] F. Harary. *Graph theory*. Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley Pub. Co., 1969.

- [65] S. Islam y T. K. Roy. *Fuzzy multi-item economic production quantity model under space constraint: A geometric programming approach*. Applied Mathematics and Computation, 184(2):326–335, 2007.
- [66] J. Janssen, S. Schockaert, D. Vermeir y M. D. Cock. *A core language for fuzzy answer set programming*. International Journal of Approximate Reasoning, 53(4):660–692, 2012.
- [67] A. B. Kahn. *Topological sorting of large networks*. Communications of the ACM, 5(11):558–562, 1962.
- [68] M. Kifer y V. Subrahmanian. *Theory of generalized annotated logic programming and its applications*. The Journal of Logic Programming, 12(4):335–367, 1992.
- [69] S. C. Kleene. *On Notation for Ordinal Numbers*. J. Symbolic Logic, 3(4):150–155, 1938.
- [70] Klement, Mesiar y Pap. *Triangular Norms*. Trends in Logic. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [71] R. A. Kowalski. *Predicate Logic as a Programming Language*, págs. 569–574. Stockholm North-Holland, 1974.
- [72] P. Krbálek y A. Pozdíková. *Maximal solutions of two-sided linear systems in max-min algebra*. Kybernetika, 46(3):501–512, 2010.
- [73] P. Li y Q. Jin. *On the resolution of bipolar max-min equations*. Kybernetika, 52(4):514–530, 2016.
- [74] C. C. Liu, Y. Y. Lur y Y. K. Wu. *Some Properties of Bipolar Max-min Fuzzy Relational Equations*. En *Proceedings of the International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists 2015, Vol. II (IMECS 2015)*, págs. 955–969, 2015.

- [75] C. C. Liu, Y. Y. Lur y Y. K. Wu. *Linear optimization of bipolar fuzzy relational equations with max-Lukasiewicz composition*. *Information Sciences*, 360:149 – 162, 2016.
- [76] J. Lloyd. *Foundations of Logic Programming*. Springer Verlag, 1987.
- [77] D. Lobo, M. E. Cornejo y J. Medina. *Abductive reasoning in normal residuated logic programming via bipolar max-product fuzzy relation equations*. En *2019 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2019)*, vol. 1, págs. 588–594. Atlantis Press, 2019.
- [78] J. Loetamonphong, S. C. Fang y R. E. Young. *Multi-objective optimization problems with fuzzy relation equation constraints*. *Fuzzy Sets and Systems*, 127(2):141–164, 2002.
- [79] Y. Loyer y U. Straccia. *Epistemic foundation of stable model semantics*. *Journal of Theory and Practice of Logic Programming*, págs. 355–393, 2006.
- [80] J. Łukasiewicz, L. Borkowski y O. Wojtasiewicz. *Selected Works*. *Studies in Logic*. North-Holland Publishing Company, 1970.
- [81] T. Lukasiewicz. *Fuzzy Description Logic Programs under the Answer Set Semantics for the Semantic Web*. En *2006 Second International Conference on Rules and Rule Markup Languages for the Semantic Web (RuleML'06)*, págs. 89–96, 2006.
- [82] T. Lukasiewicz y U. Straccia. *Tightly Integrated Fuzzy Description Logic Programs Under the Answer Set Semantics for the Semantic Web*. En M. Marchiori, J. Z. Pan y C. d. S. Marie (eds.): *Web Reasoning and Rule Systems*, págs. 289–298. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007.

- [83] N. Madrid. *Medidas de Inconsistencia y Existencia de Modelos Estables Difusos en el Marco Residuado*. Tesis de Doctorado, Universidad de Málaga, 2011.
- [84] N. Madrid y M. Ojeda-Aciego. *Towards a Fuzzy Answer Set Semantics for Residuated Logic Programs*. En *Proceedings of the 2008 IEEE/WIC/ACM International Conference on Web Intelligence and Intelligent Agent Technology (WI-IAT '08)*, págs. 260–264, 2008.
- [85] N. Madrid y M. Ojeda-Aciego. *On the existence of stable models in normal residuated logic programs*. *Proc of Computational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, págs. 598–604, 2010.
- [86] N. Madrid y M. Ojeda-Aciego. *Measuring Inconsistency in Fuzzy Answer Set Semantics*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(4):605–622, 2011.
- [87] N. Madrid y M. Ojeda-Aciego. *On the existence and unicity of stable models in normal residuated logic programs*. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(3):310–324, 2012.
- [88] N. Madrid y M. Ojeda-Aciego. *On the measure of incoherent information in extended multi-adjoint logic programs*. En *2013 IEEE Symposium on Foundations of Computational Intelligence (FOCI)*. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2013.
- [89] A. Markovskii. *On the relation between equations with max-product composition and the covering problem*. *Fuzzy Sets and Systems*, 153(2):261–273, 2005.
- [90] J. Medina. *Retículos Multi-adjuntos y teoremas de continuidad para el operador de consecuencias*. Tesis de Doctorado, Universidad de Málaga, 2001.

- [91] J. Medina. *Adjoint pairs on interval-valued fuzzy sets*. En E. Hüllermeier, R. Kruse y F. Hoffmann (eds.): *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, vol. 81 de *Communications in Computer and Information Science*, págs. 430–439. Springer, 2010.
- [92] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, A. Valverde y P. Vojtáš. *Towards Biresiduated Multi-Adjoint Logic Programming*. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3040:608–617, 2004.
- [93] J. Medina, M. Ojeda-Aciego y P. Vojtáš. *Multi-adjoint logic programming with continuous semantics*. En *Logic Programming and Non-Monotonic Reasoning, LPNMR'01*, págs. 351–364. *Lecture Notes in Artificial Intelligence* 2173, 2001.
- [94] J. Medina, M. Ojeda-Aciego y P. Vojtáš. *Similarity-based unification: a multi-adjoint approach*. *Fuzzy Sets and Systems*, 146:43–62, 2004.
- [95] K. Menger. *Statistical Metrics*. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 28(12):535–537, 1942.
- [96] J.E. Moreno, M.A. Sanchez, O. Mendoza, A. Rodríguez-Díaz, O. Castillo, P. Melin y J.R. Castro. *Design of an interval type-2 fuzzy model with justifiable uncertainty*. *Information Sciences*, 513:206 – 221, 2020.
- [97] D. V. Nieuwenborgh, M. D. Cock y D. Vermeir. *An introduction to fuzzy answer set programming*. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 50(3-4):363–388, 2007.
- [98] V. Nitica. *The structure of max–min hyperplanes*. *Linear Algebra and its Applications*, 432(1):402–429, 2010.

- [99] T.C. Przymusiński. *On the Declarative Semantics of Deductive Databases and Logic Programs*. En *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming*, págs. 193–216. Elsevier, 1988.
- [100] R. Reiter. *On Closed World Data Bases*. En *Logic and Data Bases*, págs. 55–76. Springer US, 1978.
- [101] R. Reiter. *A logic for default reasoning*. *Artificial Intelligence*, 13(1-2):81–132, 1980.
- [102] E. Saad. *Extended Fuzzy Logic Programs with Fuzzy Answer Set Semantics*. En L. Godo y A. Pugliese (eds.): *Scalable Uncertainty Management*, págs. 223–239, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer Berlin Heidelberg.
- [103] V.N. Salii. *Binary  $\mathcal{L}$ -relations*. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniĭ, Matematika*, 1:133–145, 1965.
- [104] E. Sanchez. *Resolution of composite fuzzy relation equations*. *Information and Control*, 30(1):38–48, 1976.
- [105] E. Sanchez. *Inverses of fuzzy relations. Application to possibility distributions and medical diagnosis*. *Fuzzy Sets and Systems*, 2(1):75–86, 1979.
- [106] J. Schauder. *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*. *Studia Mathematica*, 2(1):171–180, 1930.
- [107] B. Schweizer y A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, New York, 1983.
- [108] D. Scott. *Continuous lattices*. En *Lecture Notes in Mathematics*, págs. 97–136. Springer Berlin Heidelberg, 1972.
- [109] A. Tarski. *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*. *Pacific J. Math.*, 5(2):285–309, 1955.

- [110] E. Trillas. *Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos*. Stochastica, III:47–60, 1979.
- [111] E. Trillas, C. Alsina y J. Jacas. *On contradiction in fuzzy logic*. Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, 3(4):197–199, 1999.
- [112] E. Trillas, C. Alsina y J. Jacas. *On logical connectives for a fuzzy set theory with or without nonempty self-contradictions*. International Journal of Intelligent Systems, 15(3):155–164, 2000.
- [113] E. Trillas, E. Renedo y S. Guadarrama. *On a new theory of fuzzy sets with just one self-contradiction*. En *10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. (Cat. No.01CH37297)*, vol. 3, págs. 658–661. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2001.
- [114] M. Tsoy-Wo. *Classical Analysis on Normed Spaces*. World Scientific Publishing, 1995.
- [115] M. H. van Emden y R. A. Kowalski. *The semantics of predicate logic as a programming language*. Journal of the Association for Computing Machinery, 23(4):733–742, 1976.
- [116] A. Van Gelder. *Negation as failure using tight derivations for general logic programs*. The Journal of Logic Programming, 6(1-2):109–133, 1989.
- [117] A. Van Gelder, K. Ross y J. S. Schlipf. *Unfounded Sets and Well-founded Semantics for General Logic Programs*. En *Proceedings of the Seventh ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART symposium on Principles of database systems - PODS 88, PODS '88*, págs. 221–230, New York, NY, USA, 1988. ACM.

- [118] A. Van Gelder, K. A. Ross y J. S. Schlipf. *The well-founded semantics for general logic programs*. Journal of the ACM, 38(3):619–649, 1991.
- [119] A. Visser. *Four valued semantics and the Liar*. Journal of Philosophical Logic, 13(2):181–212, 1984.
- [120] P. Vojtáš. *Fuzzy logic programming*. Fuzzy sets and systems, 124(3):361–370, 2001.
- [121] G. Wagner. *Negation in fuzzy and possibilistic logic programs*. En *Uncertainty Theory in Artificial Intelligence Series*, págs. 113–128, 1998.
- [122] X.P. Yang. *Resolution of bipolar fuzzy relation equations with max-Łukasiewicz composition*. Fuzzy Sets and Systems, 2019.
- [123] L. Zadeh. *Fuzzy sets*. Information and Control, 8:338–353, 1965.
- [124] L. A. Zadeh. *The Birth and Evolution of Fuzzy Logic (FL), Soft Computing (SC) and Computing with Words (CW): A Personal Perspective*, págs. 811–819. 1996.
- [125] J. Zhou, Y. Yu, Y. Liu y Y. Zhang. *Solving nonlinear optimization problems with bipolar fuzzy relational equation constraints*. Journal of Inequalities and Applications, 2016(1):126–136, 2016.