



TESIS DOCTORAL

Año 2020

Distribución del Producto de Distribuciones Normales

José Antonio Seijas Macías

PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS

Prof. Dr. D. Amílcar R. Oliveira - Universidade Aberta (Lisboa, Portugal)

Prof. Dr. D. Tomás Prieto Rumeau

Documento maquetado con T_EX_S v.1.0+.

Distribución del Producto de Distribuciones Normales

*Memoria que presenta para optar al título de Doctor en Cc.
Matemáticas*

José Antonio Seijas Macías

Dirigida por el Doctor

**Prof. Dr. D. Amílcar R. Oliveira - Universidade Aberta
(Lisboa, Portugal)**

Co-dirigida por el Doctor

Prof. Dr. D. Tomás Prieto Rumeau

PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS

Año 2020

Copyright © **Autor**

José Antonio Seijas Macías. Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas, UNED.
Diplomado en Informática, Universidade da Coruña.

Directores de la Tesis

Prof. Dr. D. Amíclar R. Oliveira. Universidade Aberta (Lisboa - Portugal)
Prof. Dr. D. Tomás Prieto Rumeau. UNED.

Fecha de Graduación

2020

Agradecimientos

Quiero expresar en estas líneas mi agradecimiento hacia la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), por su compromiso con la enseñanza y la difusión del conocimiento. Sin la presencia de la UNED, sería imposible que el alumnado de perfil diferente al tradicional pudiera alcanzar la cualificación universitaria y acceder a gran parte del conocimiento superior.

En este sentido quiero agradecer su trabajo a todo el profesorado que he tenido a lo largo de los años en los que he cursado la Licenciatura en Ciencias Matemáticas y el Máster Oficial en Matemáticas Avanzadas en esta Universidad.

Por supuesto, destacar especialmente mi agradecimiento y gratitud al Prof. Dr. D. Amílcar Oliveira; que ha sido mi director de Trabajo de Fin de Máster y de Tesis de Doctorado. Su ayuda y guía durante estos años ha sido fundamental en el desarrollo de este trabajo. Asimismo, agradecer el apoyo y su confianza al Prof. Dr. D. Tomás Prieto, codirector de esta tesis, cuyo apoyo y consejo han contribuido de forma importante a la mejora de este trabajo.

Por último, quede aquí especial constancia de mi agradecimiento por su apoyo y confianza a la Prof. Dra Doña Teresa Azinheira de Oliveira, profesora de la Universidade Aberta de Lisboa, y a los profesores de la UNED, Prof. Dr. D. Antonio Costa y Prof. Dr. D. Miguel Delgado. A todos ellos agradecer la confianza depositada.

Resumen

La distribución normal es, posiblemente, la distribución estadística más frecuente y, por ello, la más estudiada. En este trabajo, nos centramos en el producto de dos distribuciones normales. A pesar de que este problema se ha analizado y estudiado desde principios del siglo XX, aún no se ha determinado una expresión exacta de la función de distribución ni de la función de densidad parcial del producto. Sabemos que se puede definir mediante una diferencia de dos integrales, pero no tenemos una expresión analítica de las mismas, disponemos sólo de aproximaciones mediante integración numérica. Por otro lado, se han intentado diversas aproximaciones a la distribución del producto, sin que se haya podido determinar una distribución estadística que refleje de forma completamente correcta la distribución del producto.

En el capítulo 2 de este trabajo hemos analizado los estudios anteriores que han tratado de resolver este problema, en un período histórico que abarca desde los años 30 del siglo pasado hasta las tentativas más recientes, publicadas hace poco más de tres años. Siguiendo dichos análisis hemos realizado diversas simulaciones para intentar obtener la mejor aproximación a la distribución del producto. El capítulo 3 se ha centrado en el estudio de las estadísticas de la distribución del producto. A partir de la expresión de la función generadora de momentos del producto se han determinado la media, varianza, coeficiente de asimetría y coeficiente de kurtosis (y de exceso de kurtosis) del producto de dos distribuciones normales. A partir del estudio de estos estadístico se puede parametrizar alguna distribución, en función de los parámetros de las distribuciones normales que constituyen el producto.

En el capítulo 4 hemos analizado la distribución normal asimétrica y la distribución normal asimétrica extendida. Nuestro estudio se ha centrado en la evolución de los estadísticos del coeficiente de asimetría y coeficiente de kurtosis de estas distribuciones, que son generalizaciones de la distribución normal. En este trabajo hemos demostrado que el producto de distribuciones normales, bajo determinadas circunstancias, se puede modelar como una distribución normal asimétrica con los parámetros adecuados.

En nuestro estudio hemos considerado diversas simulaciones del producto de distribuciones normales para lo que hemos utilizado tanto un software matemático de carácter comercial privado: el software Mathematica de la compañía Wolfram Research Inc., como un software matemático libre: el software R, de R Core Team.

La principal conclusión del trabajo sería la determinación del producto de distribuciones normales como una distribución normal asimétrica extendida, para el caso en el cual por lo menos una de las dos distribuciones normales del producto presenta un valor del inverso del coeficiente de variación superior o igual a 1. Cuando ambas distribuciones normales presentan valores del inverso del coeficiente de variación inferiores a 1, la aproximación mediante la distribución normal asimétrica extendida no es tan acertada.

Summary

The normal distribution is probably the most frequent statistical distribution, therefore, the most studied. In this work, we focus our study on the determination of the distribution of product of two Normal Distributions. Although this problem has been analysed and studied since the early years of the twentieth century, any author has determined neither an exact expression of the function of distribution nor the function of partial density of the product. We know that the distribution of the product is defined by means of a difference of two integrals, but we do not have an analytical expression of it, we only have some approximations developed through numerical integration techniques. On the other hand, they have considered several approximations for estimating the distribution of the product, but they have not been able to determine a statistical distribution that fully reflects the distribution of the product.

In Chapter 2 of this work we have analysed some of the previous studies that have tried to solve this problem. Our historical period ranges from the 30s of the last century to the most recent studies, published just over three years ago. Following these analyses we have carried out various simulations to try to obtain the best approximation to the distribution of the product. Chapter 3 has focused on the study of the statistics of the distribution of the product. We have used the expression of the moment-generating function of the product and then, we have determined the values of mean, variance, skewness and kurtosis (and the excess of kurtosis). From the study of these statistics we could to learn about the shape and the parameters of the distribution of the product. Moreover, we have studied the evolution of the statistics of the product as a function of the parameters (mean and variance) of the two normal distributions and, as an alternative approach, the effect of the inverse of the coefficient of variation.

Finally, in Chapter 4, we have analysed the skew-normal distribution and the Extended Skew-normal distribution that they are generalizations of the normal distribution. Our study has focused on the evolution of the skewness and kurtosis of these two distributions. In this work we have proved that the product of two normally distributed variables, under specific hypothesis, could be modelled as an Extended Skew-normal distribution with the suitable parameters. In our study we have considered several simulations of the product of two normally distributed variables. In order to develop our approaches we have used both a private commercial mathematical software: Mathematica, from Wolfram Research Inc., as well as free mathematical software: R, of R Core Team.

The main conclusion of the work would be the determination of the product of two normally distributed variables using the Extended Skew-normal distribution, for the case in which at least one of the two normal distributions of the product presents a value of the inverse of the coefficient of variation greater than or equal to 1. When both normal distributions have values of the inverse of the coefficient of variation less than 1, the Extended Skew-normal approximation to the product is not so accurate.

Lista de Acrónimos y Símbolos

- CDF: Función de distribución acumulada.
ESN: Distribución Normal Asimétrica Extendida (Extended Skew-Normal Distribution).
N: Distribución Normal.
PDF: Función de densidad parcial.
SN: Distribución Normal Asimétrica (Skew-Normal Distribution).
Var: Varianza.
 α_3 : Coeficiente de Asimetría (Skewness).
erf: Función de Error de Gauss.
erfc: Función de Error Complementaria.
exp: Función Exponencial.
 $f_X(x)$: Función de Densidad de la variable aleatoria X .
 Γ : Función Gamma.
 K_0 : Función modificada de Bessel de segunda clase de orden cero.
 κ : Kurtosis.
 $M(t)$: Función generadora de momento t .
 μ : Media.
 $N(0, 1)$: Distribución Normal Estándar.
 $N(\mu, \sigma)$: Distribución Normal de parámetros μ y σ .
 $\phi(x)$: Función de Densidad de $N(0, 1)$.
 $\Phi(x)$: Función de Distribución de $N(0, 1)$.
 r : Inverso del coeficiente de variación.
 ρ : Coeficiente de correlación.
 σ : desviación típica.
 σ^2 : Varianza.

Índice

Agradecimientos	v
Resumen	VII
Summary	IX
Lista de Acrónimos y Símbolos	XI
1. Introducción	1
1.1. El Producto de Distribuciones Normales. Un problema abierto.	1
1.1.1. La distribución normal	1
1.1.2. Distribuciones relacionadas con la normal	4
1.1.3. Normalidad	5
1.1.4. Generalización de la distribución Normal	6
1.1.5. Estudios sobre el producto de variables normales	8
2. Análisis Histórico del Producto de Distribuciones Normales	11
2.1. Introducción	11
2.2. Primeras aproximaciones al producto de variables normales	13
2.3. Avances en la distribución del producto de variables normales	17
2.3.1. Un estudio más profundo en colaboraciones con otros autores . .	19
2.4. Aplicación del Teorema de Rohatgi	21
2.5. Avances realizados mediante el uso de técnicas computacionales	24
2.5.1. Aproximación del producto a la normal	26
2.5.2. Aplicación del Teorema de Rohatgi al producto de distribuciones	29
2.6. Últimos avances realizados	33
3. Características del Producto de Distribuciones Normales	37
3.1. Introducción	37
3.2. Producto de dos Variables Normales con correlación nula	38
3.2.1. Producto de dos variables Normales Estándar	38
3.2.2. Producto de dos variables Normales Iguales	41
3.2.3. Producto de dos variables Normales	44
3.3. Producto de dos Variables Normales con correlación no nula	47
3.3.1. Producto de dos variables Normales Estándar	47
3.3.2. Producto de dos variables Normales	49
3.4. Asimetría del Producto de dos Variables Normales	51

3.4.1.	Producto de dos variables Normales Correlacionadas	53
3.4.2.	Producto de dos variables Normales No Correlacionadas	55
3.5.	Kurtosis del Producto de dos Variables Normales	58
3.5.1.	Producto de dos variables Normales Correlacionadas	59
3.5.2.	Producto de dos variables Normales No Correlacionadas	62
3.6.	Relación entre la Asimetría y la Kurtosis	64
4.	Aproximación al Producto de Distribuciones Normales	71
4.1.	Introducción	71
4.2.	Distribución Normal Asimétrica	71
4.2.1.	Momentos de la Distribución Skew-Normal	74
4.2.2.	Momentos de la Distribución ESN	76
4.2.3.	Pares de Asimetría y Kurtosis de la Distribución Normal Asimétrica	82
4.2.4.	Simulación del Producto de Distribuciones Normales y Aproximación mediante Distribuciones Normales Asimétricas	84
4.3.	Aplicación de la distribución ESN	87
4.3.1.	Influencia de la Presencia de Correlación	89
4.3.2.	Influencia del Inverso del Coeficiente de Variación	92
4.4.	Algoritmo de Aproximación	96
4.4.1.	Cálculo de los parámetros	101
4.4.2.	Simulaciones del Producto y Aproximación ESN	105
5.	Conclusiones	111
5.1.	El producto de Distribuciones Normales	111
5.2.	Aportaciones Originales	112
5.3.	Desarrollos Futuros	113
	Bibliografía	115

Índice de figuras

2.1. Ejemplos de Producto de dos Variables Normales con $\rho = 0$ presentados por Craig (rojo - discontinuo) y simulaciones (azul - continuo)	15
2.2. Ejemplos de Producto de dos Variables Normales con $\rho = 0,5$ según propuesta de Craig (rojo - discontinuo) y simulaciones (azul - continuo)	16
2.3. Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando la aproximación Gram-Charlier (verde - puntos), Pearson Tipo III (rojo - discontinuo) y simulaciones (azul - continuo)	19
2.4. Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando la aproximación χ^2 con 1 GL (rojo - discontinuo) y simulaciones (azul - continuo) .	20
2.5. Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando usando el Teorema de Rohatgi (azul) y simulaciones (roja)	22
2.6. Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando usando el Teorema de Rohatgi (azul) y simulaciones (roja)	23
2.7. Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando usando el Teorema de Rohatgi (azul) y simulaciones (roja)	23
2.8. Ejemplos de Producto de dos Variables Normales (misma varianza) usando usando Integración numérica (azul), simulaciones (roja) y aproximación normal (verde)	26
2.9. Ejemplos de Producto de dos Variables Normales (misma media) usando usando Integración numérica (azul), simulaciones (roja) y aproximación normal (verde)	27
2.10. Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando usando Integración numérica (azul), simulaciones (roja) y aproximación normal (verde)	28
2.11. Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando usando Integración numérica (azul), simulaciones (roja) y aproximación normal (verde)	28
2.12. Producto de dos Variables Normales Estándar aproximación Bessel (azul - discontinua) y simulación MonteCarlo (rojo - continua)	34
3.1. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales Estándar con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Función Bessel (azul oscuro), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)	40
3.2. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales Estándar con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Función Bessel (azul oscuro), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde). Rango entre $(-0,5; 0,5)$	40

3.3. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $N(1,5,0,75)$ con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)	43
3.4. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $N(5,0,05)$ con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)	43
3.5. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $N(100,1)$ con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)	44
3.6. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(1,0,1)$ (r grande) e $Y \sim N(0,5,2)$ (r pequeño) con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)	45
3.7. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(1,2)$ (r pequeño) e $Y \sim N(5,10)$ (r pequeño) con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)	45
3.8. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(3,0,5)$ (r grande) e $Y \sim N(5,1)$ (r grande) con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)	45
3.9. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X, Y \sim N(0,1)$ con $\rho = 0,4$: Simulación (rojo), Función Tipo Bessel (azul claro) y Función Pearson (verde)	48
3.10. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(0,1)$ con $\rho = -0,6$: Simulación (rojo), Función Tipo Bessel (azul claro) y Función Pearson (verde)	48
3.11. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(0,1)$ con $\rho \in (-0,9,0,9)$ con paso 0,33: Simulación (rojo), Función Tipo Bessel (azul claro) y Función Pearson (verde)	49
3.12. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(0,5,1)$ e $Y \sim N(1,2)$ con $\rho = 0,5$: Simulación (rojo), Función Tipo Bessel (azul claro) y Función Pearson (verde)	49
3.13. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(5,1)$ e $Y \sim N(2,0,5)$ con $\rho = 0,5$: Simulación (rojo), Función Tipo Bessel (azul claro) y Función Pearson (verde)	50
3.14. Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(0,5,1)$ e $Y \sim N(2,0,5)$ con $\rho = 0,5$: Simulación (rojo), Función Tipo Bessel (azul claro) y Función Pearson (verde)	50
3.15. Asimetría para el producto de dos variables normales con la misma media y desviación típica unitaria	54
3.16. Asimetría para el producto de dos variables normales iguales con $\rho = 1$	55
3.17. Asimetría en función de los ratios r_x y r_y	56
3.18. Skewness	57
3.19. Evolución de la kurtosis para dos variables normales con $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ y $\sigma_x = \sigma_y = \sigma = 1$	59
3.20. Kurtosis de dos variables normales con la misma media μ y σ con $\rho = \{-1, -0,5\}$	60
3.21. Kurtosis de dos variables normales con la misma media μ y σ con $\rho = \{0,5, 1\}$	61

3.22. Evolución del valor de la kurtosis para el producto de dos variables normales no correlacionadas $N(\mu_x, \sigma_x)$ y $N(1, 1)$	63
3.23. Evolución de la kurtosis para el producto de dos variables normales no correlacionadas en función de r_x y r_y	64
3.24. Valores de Asimetría y Kurtosis para el producto de dos variables normales con $\rho = 0$	66
3.25. Valores de Asimetría y Kurtosis para el producto de dos variables normales con $\rho = 0$	67
3.26. Valores de Asimetría y Kurtosis para el producto de dos variables normales con $\rho = 0,5$	67
3.27. Valores de Asimetría y Kurtosis para el producto de dos variables normales con $\rho = -0,5$	68
4.1. Ejemplo de Distribución normal asimétrica (Skew-normal) con parámetros $\xi = 0,8$, $\omega = 2,2$ y $\alpha = -5,4$	73
4.2. Ejemplo de Distribución normal asimétrica extendida (ESN) con parámetros $\xi = 0,8$, $\omega = 2,2$, $\alpha = -5,4$ y $\tau = -0,5$	73
4.3. Evolución de la asimetría de $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$	78
4.4. Evolución de la asimetría de $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$ para diversos valores de α	79
4.5. Evolución de la kurtosis de $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$	80
4.6. Evolución de la kurtosis (exceso de kurtosis) de $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$ para diferentes valores de α	81
4.7. Combinaciones de Kurtosis y Asimetría (Skewness) de $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$ con $\alpha \in (0, 100)$, $\tau \in (-6, 10)$	82
4.8. Simulación Producto de dos Variables Normales $N(0, 1)$ y $N(0,5, \sqrt{1 - 0,5^2})$ con $\rho = 0$ con aproximación SN y ESN	84
4.9. Simulación Producto de dos Variables Normales $N(0, 1)$ y $N(0,5, \sqrt{1 - 0,5^2})$ con $\rho = 0,5$ con aproximación SN y ESN	84
4.10. Simulación Producto de dos Variables Normales $N(1, 0,25)$ y $N(10, 5)$ con $\rho = 0$ con aproximación SN y ESN	85
4.11. Simulación Producto de dos Variables Normales $N(1, 0,25)$ y $N(10, 5)$ con $\rho = 0,5$ con aproximación SN y ESN	85
4.12. Simulación Producto de dos Variables Normales $N(1, 0,25)$ y $N(2, 5)$ con $\rho = 0$ con aproximación SN y ESN	85
4.13. Simulación Producto de dos Variables Normales $N(1, 0,25)$ y $N(2, 5)$ con $\rho = 0,5$ con aproximación SN y ESN	85
4.14. Ratio entre asimetría y kurtosis de la distribución ESN	91
4.15. Ratio entre asimetría y kurtosis del producto de distribuciones normales con $\rho = 0$	92
4.16. Ratio entre asimetría y kurtosis del producto de distribuciones normales para diferentes valores de ρ	93
4.17. Ratio entre asimetría y kurtosis del producto de distribuciones normales con $r_x = r_y = 0$ en función de ρ	94
4.18. Ratio entre asimetría y kurtosis de la distribución ESN para diferentes valores de α en función de τ	97

4.19. Ratio entre asimetría y kurtosis para el producto de distribuciones normales en función de $r_x = 0$ con $r_y = 0$ y para diferentes valores de ρ	97
4.20. Producto de dos distribuciones normales estándar con $\rho = 0$ y aproximación ESN.	98
4.21. Producto de dos distribuciones normales estándar con $\rho = 0,5$ y aproximación ESN.	98
4.22. Producto de dos distribuciones normales estándar con $\rho = 0,9$ y aproximación ESN.	99
4.23. Producto de dos distribuciones normales $N(0, 2)$ y $N(2, 2)$ con $\rho = 0,5$ y aproximación ESN.	99
4.24. Producto de dos distribuciones normales con $N(1, 2)$ y $N(0,5, 0,2)$ con $\rho = 0,5$ y aproximación ESN.	100
4.25. Producto de dos distribuciones normales con $N(1, 2)$ y $N(0,5, 2)$ con $\rho = 0,5$ y aproximación ESN.	100
4.26. Kurtosis de la distribución ESN para $\alpha = -50$, en función de τ realizado con el programa "Mathematica"	102
4.27. Kurtosis de la distribución ESN para $\alpha = -50$, en función de τ realizado con el programa R"	102
4.28. Simulación Producto $X \sim N(1, 2)$ e $Y \sim N(0,5, 0,2)$ con $\rho = 0,5$ y Aproximación ESN	106
4.29. Simulación Producto $X = Y \sim N(0, 1)$ con $\rho = 0,5$ y Aproximación ESN	107
4.30. Simulación Producto $X \sim N(1, 0,5)$ e $Y \sim N(0,5, 0,2)$ con $\rho = 0,5$ y Aproximación ESN	108

Índice de Tablas

2.1. Estadísticas Distribución Normal	12
2.2. Estadísticas Producto Dos Distribuciones Normales Con Correlación Nula	14
2.3. Función de Distribución de Pearson Tipo III	18
3.1. Aproximación Mediante Funciones del Producto de Variables Normales con $\rho = 0$	46
4.1. Rango de variación de Estadísticas Distribución Skew-Normal	74
4.2. Rango de variación de Estadísticas Distribución Extended Skew-Normal	77
4.3. Asimetría de la distribución $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$	79
4.4. Kurtosis de la distribución $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$	81
4.5. Asimetría y Kurtosis de la distribución ESN para diferentes valores ini- ciales de α y τ	86
4.6. Aproximación producto $X \sim N(1, 0,25)$ e $Y \sim N(2, 5)$ con $\rho = 0$	89
4.7. Aproximación producto $X \sim N(1, 0,25)$ e $Y \sim N(2, 5)$ con $\rho = 0,5$	89
4.8. Estadísticas Producto Dos Distribuciones Normales	92
4.9. Evolución de asimetría y kurtosis para diferentes valores de α y τ	104
4.10. Producto de $X \sim N(1, 2)$ e $Y \sim N(0,5, 2)$ con $\rho = 0,5$	106
4.11. Producto de $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$ con $\rho = 0,5$	107
4.12. Producto de: $X \sim N(1, 0,5)$ e $Y \sim N(0,5, 0,2)$ con $\rho = 0,5$	108

Capítulo 1

Introducción

1.1. El Producto de Distribuciones Normales. Un problema abierto.

La distribución del producto de dos distribuciones normales es un problema abierto que permanece sin solución desde hace casi un siglo. La distribución normal, posiblemente una de las más estudiadas en el campo de la matemática y con mayor utilidad en otros campos de la ciencia, aún mantiene algunas características ignoradas sobre su naturaleza y comportamiento. Así, es ampliamente conocido el hecho de que la suma de dos variables normales, es también una variable normal. Pero esta propiedad no se ha podido demostrar para el producto de dos variables normales, y así pues, no podemos afirmar que el producto de dos variables normales sea o no una variable normal.

Los primeros estudios sobre el tema se remontan a los años 30 del siglo pasado. Trabajos realizados por autores como Craig (1936) o Wishart y Bartlett (1932) intentan caracterizar la función de densidad o la función de distribución del producto de dos variables normales, pero desafortunadamente sólo obtienen éxitos parciales. Posiblemente, la aportación realizada por Craig (1936) sea fundamental en la evolución del estudio del problema, puesto que aunque no consigue una expresión para la función de densidad del producto si que obtiene dos importantes consecuencias:

1. La función de densidad del producto se puede escribir como una diferencia de dos integrales. Desafortunadamente, estas integrales no admiten una solución algebraica y por lo tanto, tienen que ser resueltas mediante métodos numéricos.
2. Obtiene una expresión para la función generadora de momentos, que va a permitir calcular los diferentes momentos y estadísticos de la distribución del producto de dos distribuciones normales, a partir de los parámetros de ambas.

En general, todos los trabajos posteriores Aroian (1947), Aroian et al. (1978), Ware y Lad (2003), Glen et al. (2004), Seijas-Macías y Oliveira (2012), Nadarajah y Pogány (2016), Cui et al. (2016) han venido a reforzar o confirmar los trabajos iniciales de Craig (1936).

1.1.1. La distribución normal

La distribución normal es, casi sin duda, la distribución estadística más y mejor estudiada a lo largo de la historia. Su origen se remonta al siglo XVIII, con los trabajos

iniciales de Pierre Simon Laplace (1749-1827). Aunque su popularidad y su puesta en valor se debe posiblemente a uno de los más grandes matemáticos de la historia: Carl Friedrich Gauss (1777-1855), en reconocimiento a sus importantes trabajos en el estudio de esta distribución, hoy en día la distribución normal también se conoce con el nombre de Distribución Gaussiana.

El origen de la distribución normal se encuentra en el estudio del límite de la distribución binomial. Basándose en un trabajo anterior de Abraham de Moivre, Laplace obtiene una aproximación del error entre la distribución normal y la distribución binomial, utilizando la función Gama de Euler. Gauss será el encargado de su estudio y parametrización completa; y por último, Henri Poincaré, le atribuirá el nombre de "normal".

Formalmente, definimos a la distribución normal como una distribución de probabilidad absolutamente continua parametrizada por su esperanza matemática (μ), que es un número real, y su desviación estándar o varianza (σ, σ^2), que será un número real positivo. A partir de estos dos parámetros determinamos su función de densidad y su función de distribución.

La función de densidad de la distribución normal presente una gráfica característica en forma de campana y donde coinciden los valores de media, mediana y moda. Su asimetría es nula y presenta diferentes valores de kurtosis según sea mesokúrtica, platikúrtica o leptokúrtica.

El éxito de la distribución normal se basa en su aplicación a numerosos campos. Históricamente su origen se produce a partir de dos hechos bien diferenciados: un estudio sobre el movimiento y posición de los cuerpos celestes y un estudio (realizado por Abraham de Moivre) sobre los juegos de azar. A partir de estos dos referentes, claramente diferentes, su aplicación se ha expandido y generalizado en muchos otros campos: balística, coeficientes de inteligencia, anatomía, física, teoría de la señal, economía, etc.

En todos los campos donde se ha estudiado, la distribución sirve para marcar un patrón de lo que denominaríamos el caso típico o caso normal. Por ejemplo, el caso del estudio del coeficiente de inteligencia (CI) realizado por David Wechsler en 1939, parte de una definición estadística del CI, donde se dan 100 puntos a la media de los valores obtenidos por una población de edad similar y 15 puntos se atribuyen a la desviación típica; a partir de estos valores se genera una distribución normal $N(100, 15)$ y permitirá clasificar a las personas en normales (si están en la media o alrededor) o bien con coeficiente de inteligencia bajo (extremo izquierdo de la distribución) o superdotados cuando se sitúen en el extremo derecho de la misma. De forma semejante, se han parametrizado usando distribuciones normales otras características de la población (altura, peso, etc.)

En matemática, también ha tenido un amplio recorrido y son numerosos sus ejemplos y aplicaciones:

- El ruido blanco es un proceso estocástico de forma que en cualquier punto el proceso es una variable aleatoria con distribución normal independiente del proceso de otros puntos.
- El movimiento browniano es un proceso estocástico cuyas variaciones son independientes, estacionarias y con distribución normal.
- En teoría de números se ha utilizado, a través del teorema de Erdős-Kac para demostrar la afirmación: "Todo número entero n se puede escribir como producto

de potencias de números primos".

Su grado de versatilidad y sus numerosas aplicaciones convierten a la función normal en, posiblemente, la más estudiada de las distribuciones estadísticas, y el objetivo fundamental de muchos procesos de caracterización de la realidad, ya sea en medicina, ciencia, economía, etc.

Dentro de la distribución normal juega un papel muy importante la denominada distribución normal estándar $N(0, 1)$ que se caracteriza por tener una media nula y una varianza unitaria, junto a una asimetría nula y una kurtosis de valor 3 (si consideramos el denominado exceso de kurtosis, entonces tenemos que para la distribución normal estándar este vale 0). Las tablas estadísticas de la distribución normal se realizan para la distribución normal estándar, y partir de las mismas, es fácil obtener valores para cualquier distribución normal.

La función de densidad de la distribución normal estándar $N(0, 1)$ viene dada por la función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ y definida por:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-1}{2} x^2 \quad (1.1)$$

Su gráfica corresponde a la denominada curva de Gauss. Es una función continua, acotada y par, que alcanza su valor máximo para $x = 0$ y que verifica que cuando la variable tiende a $+\infty$ ó $-\infty$, el valor de la función tiende a cero.

A partir de la función de densidad podemos obtener la función de distribución $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \frac{-1}{2} t^2 dt \quad (1.2)$$

La función de distribución está formada por una integral que no presenta una expresión analítica, por lo tanto, para poder calcular los valores de dicha función necesitamos utilizar otras funciones y generar una tabla de valores para poder realizar los cálculos oportunos. La aproximación más habitual a la función de distribución se realiza mediante la expresión:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \quad (1.3)$$

donde erf representa la denominada función de error.

La función de error (también conocida con función de error de Gauss) es una función especial definida por:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt \quad (1.4)$$

También podemos definir la función de error complementaria $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$.

De forma similar también podemos definir las funciones de densidad y distribución de una variable normal $N(\mu, \sigma)$, donde μ es un número real y σ es un número real positivo:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \quad (1.5)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \frac{-1}{2} \frac{(t - \mu)^2}{\sigma^2} dt \quad (1.6)$$

Al igual que en el caso anterior, también se puede escribir mediante la función de error.

Algunas de las propiedades de la distribución normal son:

- Sea una variable $X \sim N(0, 1)$ entonces la variable $\sigma X + \mu$ sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces la variable $\frac{Y-\mu}{\sigma}$ sigue una distribución normal estándar. Así pues dada cualquier distribución normal, la podemos expresar como una distribución normal estándar en un proceso que se denomina “tipificación” o “estandarización”.
- La función de densidad de una función normal es simétrica respecto a la media. Por tanto, presenta asimetría nula (skewness igual a cero).
- El máximo (moda) de una función normal se alcanza en el valor μ correspondiente a la media y la función en el máximo vale: $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
- La función de densidad tiene dos puntos de inflexión: en $x = \mu + \sigma$ la función cambia de cóncava a convexa, mientras que en $x = \mu - \sigma$ el punto de inflexión refleja un cambio de convexa a cóncava.

1.1.2. Distribuciones relacionadas con la normal

La distribución normal está englobada dentro de la familia de la distribución exponencial, dado que su función de densidad se puede escribir como:

$$f(x) \propto \exp\left(-\frac{x\mu - \frac{\mu^2}{2}}{\sigma^2}\right) \quad (1.7)$$

Por otro lado, como ya hemos comentado la distribución normal es el límite de una distribución binomial. Sean una familia finita X_1, X_2, \dots, X_n de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con varianza finita, y denotamos a la suma de todas ellas como: $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, entonces para toda $a < b$ se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \leq b\right) = \int_a^b \phi(x) dx \quad (1.8)$$

donde ϕ es la función de densidad normal estándar, \mathbb{E} representa la esperanza matemática de una variable aleatoria y Var la varianza. Esta relación supone que toda variable que se pueda expresar como un gran número de pequeños valores aleatorios independientes se puede expresar como una distribución normal. Este hecho sitúa a la distribución normal con un papel central en la teoría de la probabilidad (Grinstead y Snell (1997)).

Numerosas distribuciones se derivan de la distribución normal o tienen una fuerte ligazón con ella, entre las más importantes podemos citar las siguientes:

- Distribución χ cuadrado: Se define como una suma finita de distribuciones normales independientes: $\sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$. Presenta numerosas variantes: distribución χ cuadrado no centrada, distribución χ , entre otras.
- Distribución log-normal: Dada una distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma)$ entonces $\exp(X)$ sigue la denominada distribución log-normal.
- Distribución t de Student: Sea U una variable normal estándar y se V una distribución χ cuadrado con n grados de libertad, entonces $\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$ sigue una distribución t de Student con n grados de libertad, si U y V son independientes.

- Distribución de Slash: Sea U una variable normal estándar y V una variable uniforme $[0, 1]$, independientes, entonces la distribución $\frac{X}{U}$ se denomina distribución de Slash.
- Distribución de Cauchy: Dadas dos distribuciones normales estándar, su cociente sigue una distribución de Cauchy de parámetros 0 y 1.

El cociente entre distribuciones normales también ha sido ampliamente estudiado desde la misma época en que se analiza el producto Fieller (1932). Mucho más recientes serían los trabajos de Marsaglia (1965), Marsaglia (2006), Nadarajah (2006), Pham-Gia et al. (2006), Díaz Francés y Rubio (2013). Como hemos visto el caso de cociente de dos distribuciones normales estándar está claramente definido Hinkley (1969). A pesar de todos los trabajos, el caso genérico también permanece abierto. Hay que señalar que el estudio del cociente de distribuciones normales se ha beneficiado de la importancia que dicho cociente tiene a la hora de estudiar el denominado "tiempo de reacción", Zaitsev y Skorik (2002), Lugtigheid (2007), del Prado Martín (2008), Kanemto et al. (2012), Lubashevsky (2012), Lubashevsky et al. (2014), Zgonnikov et al. (2014) : que busca modelar el proceso de respuesta de un individuo ante la presencia de un estímulo.

Aun así, el cociente o ratio entre distribuciones normales tampoco es un problema cerrado; y en gran medida, su resolución se podría relacionar con la resolución del problema del producto de distribuciones normales.

1.1.3. Normalidad

Dada la importancia de la distribución normal, uno de los principales objetivos del análisis de datos se base en el estudio de la normalidad de los mismos. Para ello se han generado numerosos test que buscan determinar la normalidad en una serie de datos o en una distribución.

Existen algunas formas simples y sencillas de considerar la distribución de una serie de datos como normal. Una regla muy habitual es la denominada 68-95-99.7, según la cual:

- Un 68 % de las observaciones deben situarse dentro del intervalo de la media más/menos 1 desviación estándar muestral.
- Un 95 % de las observaciones deben situarse dentro del intervalo de la media más/menos 2 desviación estándar muestral.
- Un 99,7 % de las observaciones deben situarse dentro del intervalo de la media más/menos 3 desviación estándar muestral.

Otra regla habitual es considerar para los valores muestrales las siguientes condiciones:

1. La media, moda y mediana deberían tener valores similares.
2. El rango de variación intercuartílico debería ser aproximadamente 1.33 por la desviación estándar muestral.
3. El rango de la distribución sería aproximadamente 6 veces la desviación estándar muestral.

Otros test sencillos son los que podríamos denominar como comprobación gráfica, mediante la visualización de la aproximación del histograma de datos y la curva de densidad de la distribución normal correspondiente. El problema de los sistemas gráficos es su imprecisión, en especial si el número de datos es pequeño. Otra posibilidad sería la gráfica de cuartiles (QQ plot), donde la normalidad se verifica cuando los puntos se concentran entorno a una línea recta diagonal.

Existen test mucho más elaborados (Marsaglia (2004)), en especial para el caso de distribuciones univariantes. En general, son test que centran el estudio de la normalidad de la muestra en base al cálculo de los valores de asimetría y kurtosis de los datos.

- Geary (Geary (1935)): centrado en el estudio de la asimetría. Existen una versión más reciente (Cho y Im (2002)), que busca corregir las debilidades del test de Jarque-Bera mediante un test alternativo utilizando los momentos muestrales de Geary (1935).
- D'Agostino (D'Agostino (1970), D'Agostino et al. (1990)): También conocido como D'Agostino K^2 : se basa en el estudio de la asimetría y kurtosis de la muestra.
- Jarque-Bera (Jarque y Bera (1980)): Se centra en analizar si una muestra tiene la asimetría y kurtosis de una distribución normal. Su uso es muy habitual en estudios de economía aplicada, pero tiene que ser corregido cuando se utiliza en muestras pequeñas o medianas (Urzúa (2007)).
- Multiplicador de Lagrange (Deb y Sefton (1996)): Utiliza valores del multiplicador de Lagrange para testar la normalidad de una muestra.
- Kolmogorov-Smirnov (Marsaglia (2004)): Test no paramétrico muy habitual, aunque de aplicación limitada. El test compara la muestra de datos estandarizados con la distribución normal estándar.
- Shapiro-Wilk (Shapiro y Wilk (1965)): Al igual que el anterior es un test no paramétrico, aunque este caso se considera más potente. No obstante, también presenta algunas limitaciones como es el caso de análisis de muestras con muchos valores repetidos.

En nuestro trabajo, hemos centrado nuestro estudio en la consideración de los parámetros de asimetría y kurtosis del producto puesto que muchos test vinculan la normalidad a los valores de estos dos estadísticos. Ahora bien, como veremos si ampliamos el concepto de normalidad podríamos admitir rangos diferentes en los valores habituales de ambos. La presencia de valores nulos de simetría o exceso de kurtosis en series de datos estadísticos es poco frecuente. En esta situación se considera que el valor cero es admisible cuando dado el valor de asimetría y de kurtosis, y sus respectivas desviaciones típicas el intervalo asimetría más/menos desviación típica de asimetría contiene al cero.

1.1.4. Generalización de la distribución Normal

A finales del siglo pasado, se comienzan a estudiar series de datos, que aunque estaban próximos a la normalidad, incumplían uno de los principios básicos de la distribución normal: la presencia de asimetría nula. Así se comienza a hablar de las denominadas distribuciones normales asimétricas. En O'Hagan y Leonard (1976), los autores

introducen la función de distribución normal asimétrica con parámetro α . En Azzalini (1985), el autor presenta la denominada distribución Skew-Normal (ó normal asimétrica) que es una generalización de la distribución normal, donde se ha considerado la existencia de tres parámetros ξ (escala), ω (shape) y α (localización), y cuya principal diferencia con la distribución normal es la posibilidad de valores de asimetría diferentes de cero; pudiendo ser tanto distribuciones con asimetría positiva como negativa. Este planteamiento abre el campo de estudio de la distribución normal a un amplio espectro de distribuciones que presentan asimetrías no nulas y cumplen otros de los requisitos de la normalidad. Posteriormente trabajos de Arnold et al. (1993), Arnold y Beaver (2000), Capitanio et al. (2003), Arellano-Valle et al. (2004), Gupta y Gupta (2004) presentan diversos estudios donde generalizan la distribución normal asimétrica tanto para el caso de dos variables como para el estudio de la distribución bivalente y multivalente.

La función de densidad de la distribución normal asimétrica (o Skew-Normal) se define:

$$f(x) = \frac{2}{\omega\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2\omega^2}\right) \int_{-\infty}^{\alpha\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (1.9)$$

o bien si consideramos la función de densidad normal estándar ϕ y la función de distribución normal estándar Φ , podemos definir la función de densidad Skew-normal como:

$$f(x) = \frac{2}{\omega} \phi\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right) \Phi\left(\alpha \frac{x-\xi}{\omega}\right) \quad (1.10)$$

donde ξ y α son números reales y ω es un número real positivo.

El propio Azzalini en Azzalini (1985), presenta una generalización de la distribución normal que da lugar a la denominada Extended Skew-Normal (ESN) o Normal asimétrica extendida (Canale (2011), Choudhury y Matin (2011) y Azzalini (2014)). La introducción de un cuarto parámetro τ sobre la distribución original produce una generalización de la distribución Skew-Normal descrita por el propio Azzalini en 1985. La distribución ESN, al presentar cuatro parámetros, va a permitir el control de 4 estadísticos (media, varianza, asimetría y kurtosis), frente a la distribución Skew-Normal que sólo tenía 3 parámetros.

La función de densidad de la distribución Extended Skew-Normal (ESN) es:

$$f(x) = \frac{1}{\omega} \phi\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right) \frac{\Phi\left(\tau\sqrt{\alpha^2+1} + \alpha\frac{x-\xi}{\omega}\right)}{\Phi(\tau)} \quad (1.11)$$

donde al igual que en el caso anterior ϕ es la función de densidad normal estándar y Φ la función de distribución normal estándar. Al igual que en el caso anterior, los parámetros son ξ , α y τ son números reales y ω es un número real positivo.

A lo largo de estos años, la presencia de estudios de estadística aplicada donde se utiliza la distribución normal asimétrica ha sido mucho más frecuente y podemos citar, entre otros: Olosunde (2011), Chen et al. (2012), Figueiredo y Gomes (2013), Chenglong et al. (2016), Altun et al. (2017). La frecuencia en el uso y consideración de diversos estudios de las distribuciones normales asimétricas se ha hecho más habitual y se ha comenzado a analizar relaciones con otras distribuciones, como Birnbaum-Saunders (Chaves et al. (2018)). Recientemente, Beranger et al. (2018), deriva las desigualdades y la ratio de Mills para la distribución ESN y establece la distribución asintótica de valores extremos y su relación la distribución Gumbel.

1.1.5. Estudios sobre el producto de variables normales

El producto de variables normales permanece aún como un problema abierto. No obstante, su estudio es bastante antiguo. Los primeros trabajos sobre el producto se remontan a la década de los años 30 del siglo XX. Trabajos realizados por Wishart y Bartlett (1932) y Craig (1936) hacen referencia al producto de dos variables normales. Sin embargo, los primeros resultados son poco alentadores, no es posible obtener una expresión analítica de la función de distribución o de la función de densidad del producto, aunque sí tenemos expresiones para la función generadora de momentos. Otro de los resultados obtenidos en esta aproximación muestra la existencia de una cierta relación entre el producto de variables normales estándar y la función de Bessel. No obstante, esta relación no se puede considerar completamente satisfactoria, puesto que mientras que simulaciones para el producto de distribuciones normales estándar muestran que su función de densidad sería continua en cero; la función de Bessel presenta un carácter asintótico en cero, donde no está definida.

Los estudios posteriores realizados en los años 40 y 50 del siglo pasado (Aroian (1947)), confirman la idea de la dificultad de obtener una expresión analítica para la función de densidad y se centran en la idea de establecer la aproximación a la distribución del producto mediante una función de distribución alternativa (función de Pearson Tipo III) o la función generalizada Gram-Charlier (Berberan-Santos (2007)). No obstante, estas aproximaciones se muestran limitadas y sólo aplicables en determinadas circunstancias muy restrictivas.

La irrupción en Rohatgi (1976) supone una nueva aproximación al producto de dos distribuciones estadísticas generales donde se obtiene una expresión de la función de densidad parcial como una integral, aunque se plantean dos problemas:

1. La integral no se puede resolver mediante una expresión analítica.
2. La PDF no se define en cero.

La mejora de los sistemas de cálculo, y la difusión de la informática va a suponer la mejora en la obtención de valores para las integrales mediante los métodos de aproximación numérica lo que permite obtener valores numéricos para las integrales que definen el producto (Ware y Lad (2003), Glen et al. (2004), Drew et al. (2008)). Por otro lado, la utilización de simulaciones de MonteCarlo permite aproximar la representación gráfica de la función de densidad del producto mediante la utilización de grandes muestras (10^6 elementos) de distribuciones normales bivariantes con correlación ρ . Los histogramas resultantes para las muestras así obtenidas se pueden comparar de forma visual con otras distribuciones o funciones de aproximación del producto.

La simulación MonteCarlo permite obtener diferentes muestras del producto de dos variables normales. El análisis de la normalidad de estas muestras refleja que el supuesto de normalidad del producto es poco plausible. En general, se verifican los criterios de proximidad de la media y la mediana, pero el cumplimiento del criterio del rango intercuartílico no es habitual y todavía, es menos frecuente la verificación del criterio del rango de las muestras. En general, podemos afirmar que la normalidad del producto no se puede asumir; y en general, el producto de dos distribuciones normales no sigue una distribución normal.

Por otro lado, la elección de modelos de aproximación mediante funciones no definidas en el punto cero, como la función de Bessel (Glen et al. (2004), Cui et al. (2016)),

Nadarajah y Pogány (2016)) tampoco parece ser realista, puesto que las simulaciones mediante el método MonteCarlo han demostrado que el producto puede tomar el valor cero; de hecho en muchos casos dicho valor corresponde a la media, moda y mediana de la distribución del producto.

El problema permanece abierto, desde hace ya casi un siglo, y resulta de interés en diversas áreas de conocimiento donde es habitual la necesidad de trabajar con distribuciones que corresponden al producto de dos variables normales. En diversas áreas de la física de plasma (van Berkel et al. (2014), van Berkel (2015)), o de teoría de la señal (Zhou et al. (2015), Gifuni et al. (2015)), biología (Meyer y Birney (2018)) y economía (He (2014), Bessembinder (2018)). Diversas áreas de estudio necesitan de utilizar en algún momento un producto de dos (o más) distribuciones normales, de ahí la importancia del problema a estudiar (Cui et al. (2016)).

En nuestro trabajo, hemos buscado abrir una nueva posibilidad de aproximar la distribución del producto de dos variables normales, mediante la utilización de las distribuciones normales asimétricas, tanto la distribución Skew-Normal como la Extended Skew-Normal. En el siguiente capítulo realizamos una análisis de los principales estudios previos sobre el producto de dos variables normales, con especial referencia a los estudios pioneros (Craig (1936), Aroian (1947)) y también de estudios posteriores (Ware y Lad (2003), Glen et al. (2004)), hasta los más recientes (Nadarajah y Pogány (2016), Cui et al. (2016)) con las aportaciones más recientes de (Gaunt (2018), Gaunt (2019)). A continuación, el capítulo 3 analiza las características que presenta el producto de distribuciones normales, con especial referencia a los valores de la media y varianza y un análisis pormenorizado de la evolución de los valores de asimetría (skewness) y kurtosis (Brown (1997)) del producto. Por último, el capítulo 4, se centra en la aproximación del producto de dos distribuciones normales mediante la distribución Extended Skew-Normal (ESN), poniendo énfasis en las condiciones que mejor permiten dicha aproximación. Finalmente, unas pequeñas conclusiones, resumen las principales aportaciones de este trabajo, así como las posibles líneas a seguir en el futuro.

Para la realización de este trabajo se ha utilizado dos tipos de software matemático. Por un lado, el software privativo de Wolfram Research Mathematica® en su versión 11, donde se han utilizado diversas funciones que este software tiene implementadas para la realización de gráficas y cálculos. Por otro lado también se ha usado el software libre R y RStudio (R Core Team (2015)), donde se han utilizado diversas funciones disponibles; en particular, se ha utilizado el package `sn`, de Azzalini (Azzalini (2017)) centrado en la distribución normal asimétrica, también se han utilizado otros paquetes, de función más general, para la realización de gráficas, cálculo de resolución numérica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones y procesos de simulación. Todos estos packages están disponibles a través de los repositorios del CRAN.

Capítulo 2

Análisis Histórico del Producto de Distribuciones Normales

2.1. Introducción

La distribución normal o Gaussiana es una de las distribuciones continuas más habituales y estudiadas en teoría de la probabilidad. Su origen histórico se remonta al matemático francés Abraham de Moivre (1667-1754), aunque su principal difusor y estudioso será el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), su importancia será tal que el término “campana de Gauss” servirá como sobrenombre de la distribución normal. Algunos autores (Pearson (1905)) también han querido resaltar la importante contribución del matemático francés Pierre-Simon, marqués de Laplace (1749-1827), llegando a proponer el nombre de distribución de Gauss-Laplace; aunque finalmente, esta opción no cuajó, posiblemente, debido al hecho de que Laplace ya posee su propia distribución. La importancia de esta distribución viene dada por las numerosas aplicaciones que se puede encontrar, tanto en las ciencias naturales como las ciencias sociales. En general, debido al teorema central del límite podemos establecer la distribución normal como aquella a la que converge (en distribución) la media de diversas muestras de variables aleatorias, para un número lo suficientemente grande.

La función de densidad (PDF) de la distribución normal se define como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \quad (2.1)$$

donde μ es la media o esperanza de la distribución (coincide con su mediana y su moda) y σ es la desviación típica (σ^2 será la varianza). Gráficamente, dicha función presenta una forma similar a la de una campana, con diversos grados de altura en función de los parámetros (μ, σ) .

La distribución normal presenta siempre las siguientes características que la definen: su media es igual al parámetro μ , su varianza coincide con el parámetro σ^2 , es simétrica (esto es, asimetría igual a cero) y la kurtosis varía de forma que su gráfica presenta una forma más apuntada o achatada en función de los valores de los parámetros μ y σ^2 .

La función de distribución (CDF) no se puede expresar de forma analítica, puesto que no podemos resolver la integral de la función de densidad. De ahí que dicha expresión utiliza la función de error (erf):

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \quad (2.2)$$

donde $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-y^2} dy$.

Las estadísticas asociadas a la distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma)$ son la siguientes:

Tabla 2.1: Estadísticas Distribución Normal

media	μ
mediana	μ
moda	μ
varianza	σ^2
asimetría (skewness)	0
kurtosis	3
exceso de kurtosis	0

Su popularidad y utilidad ha convertido a esta distribución en, posiblemente, la más analizada en el ámbito matemático. Diversas distribuciones se derivan de la distribución normal, entre ellas las más conocidas son la distribución Chi o la distribución *t* de Student. Asimismo, se han establecido relaciones con otras distribuciones, ya sean continuas (distribución uniforme) o discretas (distribución binomial). También se han estudiado la combinación de dos o más distribuciones normales mediante operaciones: por ejemplo, dada una variable normal, la exponencial se distribuye como una distribución log-normal. La suma de dos ó más variables normales ha sido cumplidamente estudiada, analizada y caracterizada; y de igual forma, se ha estudiado el producto.

Dadas X e Y dos variables aleatorias independientes con medias μ_x y μ_y y varianzas σ_x^2, σ_y^2 , entonces la suma $X + Y$ también se distribuye normalmente con media $\mu_x + \mu_y$ y varianza $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$. Si las variables normales presentan algún tipo de correlación (ρ), la suma sigue siendo normal y la varianza será $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y$.

No obstante; el producto de variables normales no se ha podido caracterizar de una forma tan precisa como la suma. Hoy en día, aún se puede considerar como un problema abierto la caracterización completa del mismo.

Las primeras referencias históricas al producto de variables normales se encuentran en un artículo de 1932 publicado por Wishart y Bartlett. En su trabajo concluyen que la distribución de la función Z formada por el producto de dos variables normales tipificadas X e Y era una función directamente proporcional a una función de Bessel de segundo tipo con un argumento imaginario puro de orden cero (Wishart y Bartlett (1932)). En 1936, Craig publica un artículo más ambicioso donde trata de llegar a una conclusión general sobre el producto de variables normales. Su conclusión, confirma los análisis anteriores, y destaca que la distribución del producto XY es una función del coeficiente de correlación de ambas variables y de dos parámetros proporcionales a los inversos de los coeficientes de variación de cada variable (Craig (1936)).

En 1947, Aroian avanza la línea de investigación abierta por Craig y muestra que cuando las variables del producto presentan valores altos para los inversos de los coeficientes de variación; la función de densidad de producto Z se aproxima a una curva normal (Aroian (1947)). En el caso particular de que ambas variables presenten un coeficiente de correlación nulo, la función Tipo III de Pearson y la serie Gram-Charlier Tipo A resultan aproximaciones excelentes. Posteriores trabajos publicados entre los años 60 y 70 del siglo XX, del mismo autor, en colaboración con otros, persisten en esta línea de investigación (véase Aroian et al. (1978))

A pesar de estos trabajos, no llegamos a alcanzar un mayor estudio del tema y, no será hasta el siglo XXI que se vuelvan a publicar trabajos analizando este tema. Nuevas aproximaciones se publicarán en 2003, analizando la influencia de los parámetros de las distribuciones en la normalidad del producto (Ware y Lad (2003)). En 2012, se caracteriza la normalidad para el producto de distribuciones independientes (Seijas-Macías y Oliveira (2012)). Finalmente, en 2016 se establece una fórmula para el producto de dos distribuciones normales estándar, con correlación ρ como una función de Bessel modificada de segunda clase de orden cero. Este resultado se generaliza a un producto finito de variables normales independientes e idénticamente distribuidas (Nadarajah y Pogány (2016)).

El estudio del producto de variables normales presenta una evolución histórica donde se han seguido diversas estrategias enfocadas a resolver el problema:

1. Aproximación del producto mediante funciones (Bessel, Función Tipo III Pearson, Gram-Charlier, etc.)
2. Caracterización de la normalidad del producto en función de los parámetros de las variables normales: media, varianza, inverso del coeficiente de variación y ratio combinado y de la presencia de correlación entre las variables.
3. Utilización del Teorema de Rohatgi (Rohatgi (1976)) para el producto de distribuciones independientes. Aplicación de diversas estrategias para resolución de las integrales (integración numérica o aproximación mediante series).

2.2. Primeras aproximaciones al producto de variables normales

El trabajo publicado por Craig es el primer resultado histórico donde se realiza un análisis en profundidad del producto de distribuciones normales (Craig (1936)). Previamente, en 1932, en (Wishart y Bartlett (1932)) se establecía un resultado que afirma que dadas dos variables normales independientes $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ y $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$, la distribución del producto: $Z = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$ es proporcional a una función Bessel de segunda clase de orden cero:

$$F_z(Z) = \frac{1}{\pi} K_0(z). \quad (2.3)$$

La idea central es establecer la relación entre la distribución del producto y el coeficiente de correlación de X e Y (ρ_{xy}) y los parámetros $r_x = \frac{\mu_x}{\sigma_x}$ y $r_y = \frac{\mu_y}{\sigma_y}$ que son los inversos de los coeficientes de variación de cada variable. El estudio se centra en el caso de que X e Y son independientes ($\rho = 0$). En este caso, podemos construir el estudio de la distribución del producto a partir de la función generadora de momentos 2.4:

$$\begin{aligned} M_{xy}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \exp(xyt) dx dy \\ &= \frac{\exp \left[\frac{(\sigma_x^2 \mu_y^2 + \sigma_y^2 \mu_x^2) t^2 + 2\mu_x \mu_y t}{2(1 - \sigma_x^2 \sigma_y^2 t^2)} \right]}{(1 - \sigma_x^2 \sigma_y^2 t^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

A partir de esta función de momentos 2.4, se establece la relación entre los estadísticos del producto y los parámetros de las distribuciones X e Y (véase tabla 2.2)

Tabla 2.2: Estadísticas Producto Dos Distribuciones Normales Con Correlación Nula

media	$\mu_x \mu_y$
varianza	$\sigma_x^2 \mu_y^2 + \sigma_y^2 \mu_x^2 + \sigma_x^2 \sigma_y^2$
asimetría (skewness)	$\frac{6r_x r_y}{(r_x^2 + r_y^2 + 1)^{3/2}}$
exceso de kurtosis	$\frac{6(2(r_x^2 + r_y^2) + 1)}{(r_x^2 + r_y^2 + 1)^2} \leq 6$

Una análisis de los valores teóricos recogidos en la tabla 2.2 muestra que la asimetría del producto de variables normales nunca es grande y se incrementa de acuerdo con los valores r_x y r_y . Por su parte, el exceso de kurtosis está limitado por el valor 6 cuando $r_x = r_y = 0$.

Cuando consideramos variables con correlación no nula ($\rho_{xy} \neq 0$) entonces la función generadora de momentos es:

$$M_{xy}(t) = \frac{\exp \left[\frac{(r_x^2 + r_y^2 - 2\rho_{xy}r_x r_y)t^2 + 2r_x r_y t}{2(1 - (1 + \rho_{xy})t)(1 - (1 - \rho_{xy})t)} \right]}{((1 - (1 + \rho_{xy})t)(1 - (1 - \rho_{xy})t))^{1/2}} \quad (2.5)$$

A partir de dicha función generadora (2.5) podemos concluir que el valor de la asimetría del producto de variables normales está limitado en el rango $(-2\sqrt{2}, +2\sqrt{2})$, mientras que el exceso de kurtosis alcanza un valor máximo 12 cuando $r_x = -r_y, \rho_{xy} = 1$ y cuando $r_x = r_y, \rho_{xy} = -1$.

La función de densidad resultante para el producto $\frac{xy}{\sigma_x \sigma_y}$ se puede establecer de forma cerrada como una diferencia entre dos integrales. Ahora bien, dichas integrales no son analíticas, por lo que desde el punto de vista computacional, se pueden aproximar mediante desarrollos en serie de Laurent y funciones tipo Bessel.

Para el caso de $\rho = 0$, la expresión propuesta (2.6) es:

$$\begin{aligned} & \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} (r_x^2 + r_y^2) \right)}{\pi} \left\{ I_0 \left(2\sqrt{r_x r_y} |z| \right) K_0(|z|) \right. \\ & + \left(\left(\frac{r_x^2}{r_y^2} \right) + \left(\frac{r_y^2}{r_x^2} \right) \right) I_2 \left(2\sqrt{r_x r_y} |z| \right) K_1(|z|) \\ & + \left(\left(\frac{r_x^2}{r_y^2} \right)^2 + \left(\frac{r_y^2}{r_x^2} \right)^2 \right) I_4 \left(2\sqrt{r_x r_y} |z| \right) K_2(|z|) \\ & \left. + \left(\left(\frac{r_x^2}{r_y^2} \right)^3 + \left(\frac{r_y^2}{r_x^2} \right)^3 \right) I_6 \left(2\sqrt{r_x r_y} |z| \right) K_3(|z|) + \dots \right\} \quad (2.6) \end{aligned}$$

donde $K_r(\cdot)$ es la función de Bessel de segunda clase y $I_r(\cdot)$ es la función de Bessel de primera clase, ambas con argumentos imaginarios y $r_x = \frac{\mu_x}{\sigma_x}, r_y = \frac{\mu_y}{\sigma_y}$. En el caso de que o bien μ_x ó μ_y , o ambos, sean nulos entonces la fórmula se simplifica y utiliza sólo funciones de Bessel de segunda clase.

Para el caso de ρ no nulo, la expresión propuesta (Craig (1936)) sería:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{r_x^2 - 2\rho r_x r_y + r_y^2}{(1-\rho^2)}\right)\right) \exp\frac{\rho\zeta}{(1-\rho^2)^2} \\ & \left\{ I_0\left(2\sqrt{|R_1 R_2 \zeta|}\right) K_0(|\zeta|) + \left(\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right) I_2\left(2\sqrt{|R_1 R_2 \zeta|}\right) K_1(|\zeta|) \right. \\ & \quad + \left(\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right) I_4\left(2\sqrt{|R_1 R_2 \zeta|}\right) K_2(|\zeta|) \\ & \quad \left. + \left(\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\right) I_6\left(2\sqrt{|R_1 R_2 \zeta|}\right) K_3(|\zeta|) + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde $R_1 = \frac{r_x - \rho r_y}{\sqrt{1-\rho^2}}$, $R_2 = \frac{r_y - \rho r_x}{\sqrt{1-\rho^2}}$ y $\zeta = \frac{z}{1-\rho^2}$.

Craig presenta resultados numéricos para tres ejemplos concretos de productos de variables normales:

- a) Producto de dos variables normales estándar con correlación $\rho = 0$. En este caso las estadísticas de la distribución producto serían: $\mu_z = 0$, $\sigma_z^2 = 1$, coeficiente de asimetría nulo y kurtosis 9.
- b) Producto de dos variables normales $X \sim N(1, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$ y correlación $\rho = 0$. Entonces $\mu_z = 0$, $\sigma_z^2 = 2$, con coeficiente de asimetría nulo y kurtosis $\frac{15}{2}$.
- c) Producto de dos variables normales $X \sim N(1, 2)$ e $Y \sim N(1, 2)$ y correlación $\rho = 0$. En este caso tenemos para el producto $Z = XY$, $\mu_z = 0,25$, $\sigma_z^2 = \frac{6}{4}$, con un coeficiente de asimetría de 0,81 y kurtosis 8,333.

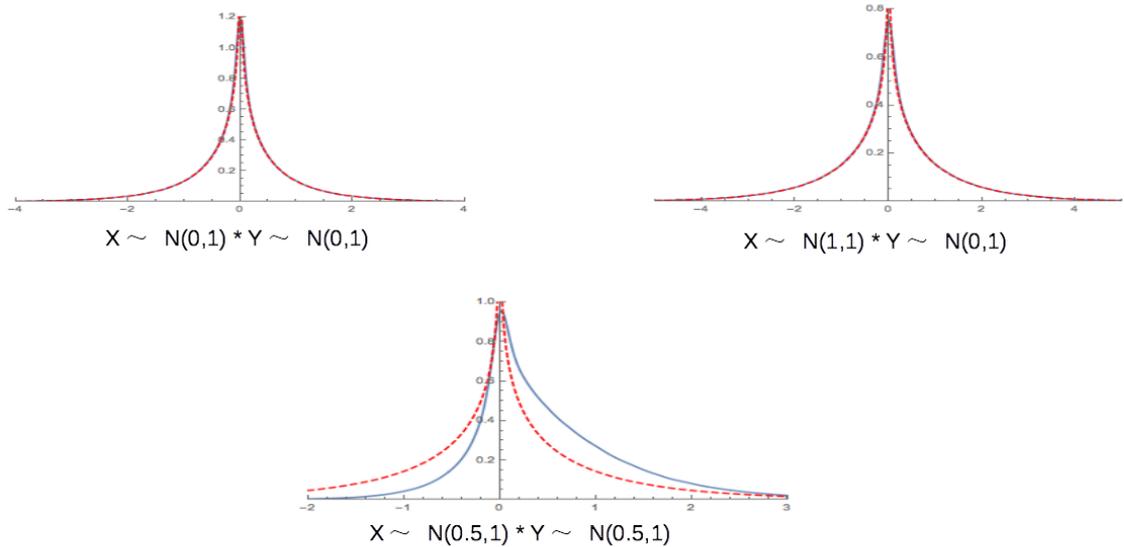


Figura 2.1: Ejemplos de Producto de dos Variables Normales con $\rho = 0$ presentados por Craig (rojo - discontinuo) y simulaciones (azul - continuo)

En la figura 2.1 presentamos tres simulaciones MonteCarlo de los casos estudiados (Craig (1936)). Todas las simulaciones se han realizado considerando muestras aleatorias de 10^6 elementos. Aunque los dos primeros casos se corresponden con las gráficas simuladas del producto utilizando la expresión (2.6); el tercer caso presenta una diferencia muy importante: la gráfica estimada por Craig es simétrica mientras que la simulación presenta una cierta asimetría positiva y desplazamiento a la derecha.

En (Craig (1936)) no se presentan ejemplos del producto de variables con correlación no nula; pero se establece una fórmula para su estimación (2.7). En el figura 2.2 representamos dos ejemplos de representación teórica de la fórmula de Craig y de sus correspondientes simulaciones. En este caso, las diferencias entre los valores teóricos de las distribuciones y las simulaciones son más evidentes.

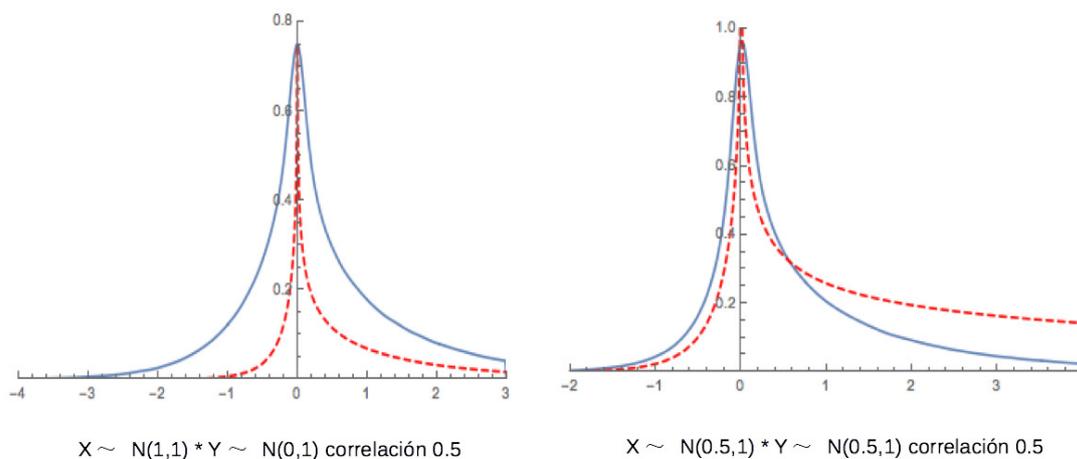


Figura 2.2: Ejemplos de Producto de dos Variables Normales con $\rho = 0,5$ según propuesta de Craig (rojo - discontinuo) y simulaciones (azul - continuo)

La principal conclusión es que la forma de la función de densidad del producto es proporcional a una función de Bessel y su gráfica tendría un comportamiento asintótico en torno a cero (de forma similar a la función logarítmica). Por otro lado, las estadísticas son diferentes a las que se esperan en una función normal, esto es asimetría nula y kurtosis 3. El producto puede presentar asimetría (tanto positiva como negativa) y al mismo tiempo, el nivel de kurtosis puede ser muy superior a tres. En estas circunstancias, se llega a la conclusión de que el producto de variables normales no tiene que seguir una distribución normal. Por otro lado, el comportamiento asintótico en torno a cero, no concuerda con la simulación de la distribución de un producto de variables aleatorias normales. Por último, el grado de convergencia de las series utilizadas en la función de densidad es muy lento, incluso para valores pequeños del inverso del coeficiente de variación ρ , lo que dificulta la aplicación práctica de dicha probabilidad (Craig (1936)).

La aproximación formulada es una buena aproximación para el caso de variables donde la correlación es nula, y cuando al menos uno de los inversos del coeficiente de variación es nulo. En otros casos, como hemos visto se reflejan diferencias entre la distribución teórica del producto y simulaciones mediante técnicas MonteCarlo. Por

otro lado, se descartaba el carácter normal del producto de distribuciones y se establecía un carácter asintótico en torno a cero, que no parecía responder a la realidad de las simulaciones presentadas.

Otras dos importantes conclusiones son:

1. Descartamos el carácter normal del producto de variables normales de forma general, tal y como sucede en el caso de la suma de variables normales.
2. La función de densidad del producto de variables normales presenta un carácter asintótico en torno al valor cero, de forma tal que cuando el valor del producto tiende a cero, la densidad se aproxima hacia $+\infty$.

2.3. Avances en la distribución del producto de variables normales

En (Aroian (1947)), el autor retoma los estudios previos ((Craig (1936)) sobre el producto de distribuciones normales con el objetivo fundamental es la mejora de la aproximación del cálculo de la función de densidad. Las principales aportaciones serán establecer una conexión entre el producto de variables normales y la distribución normal y mejorar la aproximación que había obtenido Craig once años antes.

Partimos de la función generadora de momentos (2.6 y 2.7), y establecemos que cuando $r_x = \frac{\mu_x}{\sigma_x}$ e $r_y = \frac{\mu_y}{\sigma_y}$ tienden a $+\infty$, la función de probabilidad del producto $Z = XY$ se aproxima mediante una normal de media μ_z y varianza σ_z^2 . Esta conclusión, se puede generalizar para el caso cuando r_x e r_y tienden a $-\infty$ y también, para cuando uno de los coeficientes permanece constante, mientras el otro tiende a infinito. Esta aproximación a la normalidad será más rápida si tanto r_x como r_y tienen el mismo signo que ρ .

La función de densidad de $Z = XY$ se puede aproximar mediante una diferencia de integrales:

$$f(z, \mu_x, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y, \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty \phi(t_1)\phi(t_2)\beta(t_3) \frac{dx}{x} - \int_{-\infty}^0 \phi(t_1)\phi(t_2)\beta(t_3) \frac{dx}{x} \quad (2.8)$$

donde $\phi(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ es la función de densidad de una distribución normal estándar $N(0, 1)$, $t_1 = \frac{x - \frac{\mu_x}{\sigma_x}}{\sqrt{1-\rho^2}}$, $t_2 = \frac{\frac{\mu_y}{\sigma_y} - \frac{z}{x}}{\sqrt{1-\rho^2}}$, $\beta(t_3) = e^{t_3}$ y $t_3 = \rho t_1 t_2$. En el caso de que $\rho = 0$, la expresión (2.8) se simplifica:

$$f(z, \mu_x, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y) = \int_0^\infty \phi(t_1)\phi(t_2) \frac{dx}{x} - \int_{-\infty}^0 \phi(t_1)\phi(t_2) \frac{dx}{x} \quad (2.9)$$

donde $t_1 = x - \frac{\mu_x}{\sigma_x}$, $t_2 = \frac{\mu_y}{\sigma_y} - \frac{z}{x}$.

Pero las integrales que figuran en las expresiones 2.8 y 2.9 no son convergentes, por lo que no podemos dar una expresión de la función de densidad. Por ello se establece una aproximación a la función de densidad del producto mediante la aproximación

mediante la distribución de Pearson Tipo III y mediante series Gram-Charlier Tipo A (Aroian (1947)), que resultan mucho más eficientes, dada su mayor velocidad de convergencia, que las utilizadas en (Craig (1936)).

En el primer caso, utilizamos una distribución de Pearson Tipo III, cuyos parámetros se estiman mediante los valores de la media, varianza y asimetría estimados para el producto de variables normales. En la tabla 2.3 recogemos la función de densidad de una distribución de Pearson Tipo III, y los valores de media, varianza y asimetría en función de los parámetros, y donde $\beta > 0, p > 0$ y $0 < \alpha < z$ son parámetros y $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma de Euler.

Tabla 2.3: Función de Distribución de Pearson Tipo III

función de densidad	$f(z) = \frac{1}{\beta\Gamma(p)} \left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right)^{p-1} \exp\left(-\frac{z-\alpha}{\beta}\right)$
media	$\alpha + p\beta$
varianza	$p\beta^2$
asimetría (skewness)	$\frac{2}{\sqrt{p}}$

En el segundo caso, empleamos la serie de Gram-Charlier de Tipo A de tres términos para aproximar la función de densidad de $Z = XY$:

$$f(t_z) = \phi(t_z) - \frac{\xi_3}{3!}\phi^{(3)}(t_z) + \frac{\xi_4}{4!}\phi^{(4)}(t_z) \quad (2.10)$$

donde ξ_3 y ξ_4 representan el coeficiente de asimetría y de exceso de kurtosis, respectivamente, de $z = xy$ calculado a partir de la función generadora de momentos calculada por Craig (1936) y $t_z = \frac{z-\mu_z}{\sigma_z}$ es el valor estandarizado de z , donde hemos utilizado la media y desviación típica calculadas a partir de la función generadora de momentos de z .

En (Aroian (1947)) se analizan diversos tramos en función de los valores de $\frac{\mu_x}{\sigma_x}$ e $\frac{\mu_y}{\sigma_y}$, donde es aconsejable utilizar o bien la aproximación de Pearson Tipo III o la de Gram-Charlier Tipo A, habiendo tramos comunes. Para valores grandes de ambos valores la aproximación de Pearson es más adecuada, mientras que cuando uno de los valores es pequeño y el otro es grande, la serie de Gram-Charlier presenta un mejor ajuste. En la gráfica 2.3, mostramos dos ejemplos comparando las aproximaciones comentadas y una simulación de MonteCarlo para 10^6 elementos. En el primer ejemplo, la distribución de Pearson Tipo III resulta muy ajustada a la simulación, por su parte, la serie de Gram-Charlier no es adecuada. En el segundo ejemplo, consideramos una distribución con media nula, en este caso no podemos utilizar la distribución de tipo Pearson y vemos que la aproximación Gram-Charlier coincide en gran parte con la simulación.

Las propuestas estudiadas son aproximaciones aceptables pero tiene muchas limitaciones (Aroian (1947)). Sólo se pueden utilizar cuando las dos distribuciones presentan correlación nula. Cuando alguna de las distribuciones del producto tiene media cero no es posible utilizar la aproximación Pearson Tipo III. Por su parte la adecuación de la aproximación de Gram-Charlier es muy limitada, para sólo algunos casos particulares, ligeras variaciones en las medias o varianzas de las distribuciones tienen efectos muy negativos sobre la adecuación de esta aproximación.

Por último, indicar que a diferencia de la conclusión obtenida en (Craig (1936)), en las aproximaciones utilizadas no existen puntos de discontinuidad en el entorno del

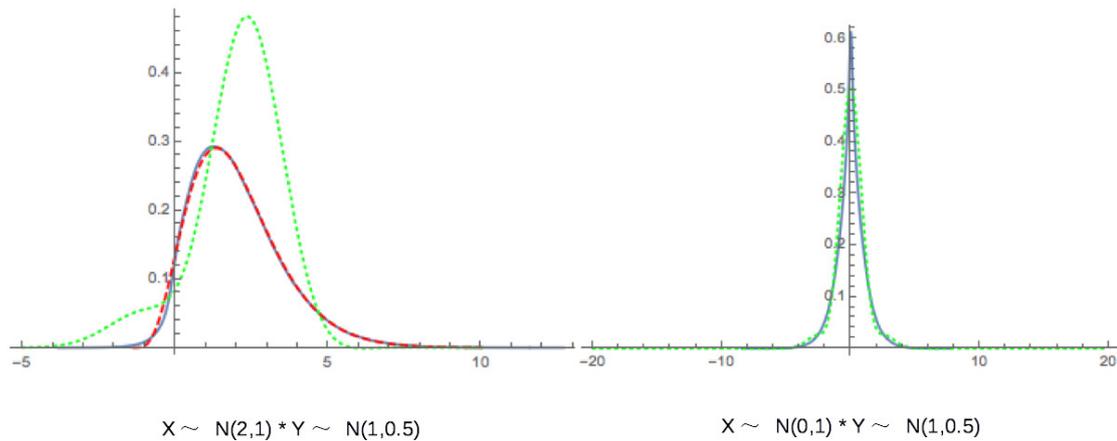


Figura 2.3: Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando la aproximación Gram-Charlier (verde - puntos), Pearson Tipo III (rojo - discontinuo) y simulaciones (azul - continuo)

valor cero. En este sentido se produce una mejor aproximación con las simulaciones del producto analizadas que presentan un carácter continuo.

2.3.1. Un estudio más profundo en colaboraciones con otros autores

En 1978, en colaboración con V. Taneja y L. Cornwell, Aroian profundiza en su estudio de la función de distribución del producto (Aroian et al. (1978)). Partiendo de una distribución bivalente normal, analizan la situación donde $\rho \neq 0$, que no había sido considerada en (Aroian (1947)). Como resultado de sus trabajos presentan el siguiente teorema:

Teorema 2.3.1 (Aroian et al. (1978), p. 167) Sean X e Y dos variables aleatorias normalmente distribuidas con medias μ_x, μ_y y varianzas σ_x^2, σ_y^2 y coeficiente de correlación ρ . Sean $r_x = \frac{\mu_x}{\sigma_x}$ e $r_y = \frac{\mu_y}{\sigma_y}$. La función de distribución de $Z = \frac{xy}{\sigma_x \sigma_y}$ viene dada por

$$F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \phi(z, r_x, r_y, \rho, t) dt, \quad (2.11)$$

donde

$$\phi(z, r_x, r_y, \rho, t) = \frac{1}{t} \frac{1}{G} \exp \left(-\frac{(H + 4\rho r_x r_y)t^2 + (1 - \rho^2)Ht}{2G^2} \right) \left\{ \left[\left(\frac{G + I}{2} \right)^{1/2} \sin \left(t \left(y - \frac{r_1 r_2 I - \rho H t^2}{G^2} \right) \right) \right] - \left[\left(\frac{G - I}{2} \right)^{1/2} \cos \left(t \left(y - \frac{r_1 r_2 I - \rho H t^2}{G^2} \right) \right) \right] \right\}$$

donde $G^2 = (1 + (1 - \rho^2)t^2)^2 + 4\rho^2t^2$, $H = r_1^2 + r_2^2 - 2\rho r_1 r_2$ e $I = 1 + (1 - \rho^2)t^2$.

Demostración. Ver demostración en Aroian et al. (1978). ■

Los autores obtienen una función de distribución, aunque al igual que en casos anteriores resulta muy complicado obtener una expresión analítica de la misma. A partir de dicha expresión, desarrollan diversos casos especiales para los valores de los coeficientes r_i y del coeficiente de correlación ρ .

Cuando $r_x = r_y = 0$ (esto es, cuando $\mu_x = \mu_y = 0$) y $\rho = 1$ la distribución del producto $\frac{xy}{\sigma_x \sigma_y}$ resulta una distribución χ^2 central con un grado de libertad. En el gráfico 2.4 hemos simulado el producto de dos variables normales estándar con un correlación $\rho = 1$ y lo hemos comparado con la distribución χ^2 . En la rama positiva la coincidencia es muy buena, pero la simulación no muestra el carácter asintótico entorno a cero, que presenta la aproximación mediante la distribución χ^2 .

En el caso de que $r_x = r_y = r$ con $\rho = 1$ la función de distribución resultante es una χ^2 no central con un grado de libertad. En este caso, los autores no explican cómo se calcula el parámetro de no centralidad λ de la distribución χ^2 , y si existe alguna relación con los valores de los parámetros de las distribuciones normales utilizadas en el producto.

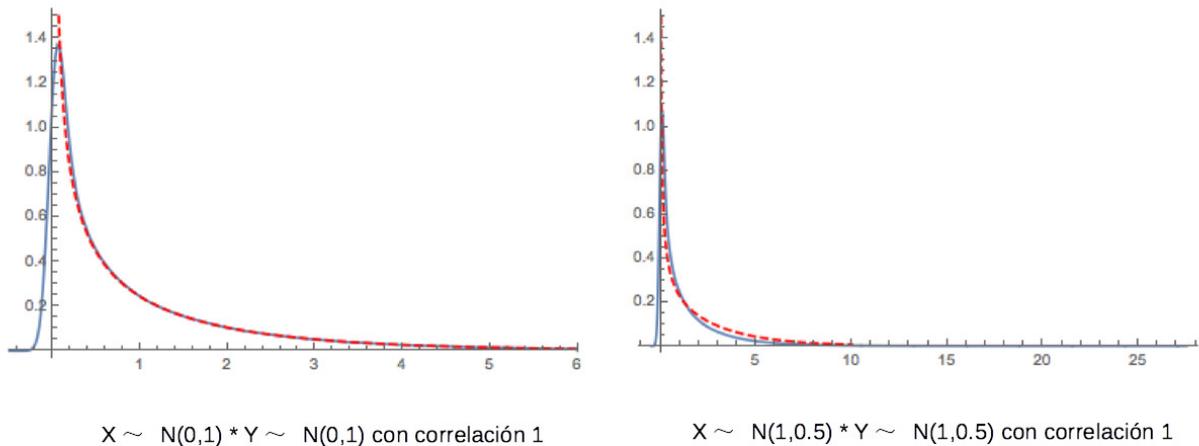


Figura 2.4: Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando la aproximación χ^2 con 1 GL (rojo - discontinuo) y simulaciones (azul - continuo)

Un segundo teorema analiza el caso cuando los inversos de los coeficientes de variación son grandes.

Teorema 2.3.2 (Aroian et al. (1978), p.169) *Sea la variable tipificada $\frac{z - \mu_z}{\sigma_z}$, donde $z = \frac{xy}{\sigma_x \sigma_y}$. Si $r_x = r_y = r$ y r es un valor grande, entonces $F_Z(z)$ se aproxima mediante la distribución estándar tipo III con media cero y desviación uno:*

$$f_z(Z) = c \left(1 + \frac{\alpha_3 z}{2}\right)^{(4/\alpha_3^2)-1} \exp\left(-\frac{2y}{\alpha_3}\right), \quad z \geq -\frac{2y}{\alpha_3} \quad (2.12)$$

donde α_3 es el coeficiente de asimetría y

$$c = \left(\frac{4}{\alpha_3^2}\right)^{(4/\alpha_3^2)-1/2} \left[\Gamma\left(\frac{4}{\alpha_3^2}\right)\right]^{-1} \exp\left(-\frac{4}{\alpha_3^2}\right)$$

Demostración. Ver demostración en Aroian et al. (1978). ■

Este teorema muestra que la aproximación mediante la distribución Tipo III es preferible a la aproximación mediante la normal (que el propio Aroian había sugerido con anterioridad Aroian (1947)), para el caso en cual $r_x = r_y = r$ con r grande. El valor específico de r para una buena aproximación depende de la asimetría de la distribución del producto, del coeficiente de correlación (ρ) y del grado de precisión deseado. Los autores sostienen que se obtienen buenos resultados de aproximación cuando $r \geq 6$ e incluso, en algunos casos, para $r \geq 4$ (Aroian et al. (1978)).

2.4. Aplicación del Teorema de Rohatgi

En (Rohatgi (1976)) se establece un importante resultado para determinar la función de densidad del producto de dos variables aleatorias del mismo tipo. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ la función de densidad del producto $Z = XY$ viene dada por:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx \quad (2.13)$$

La expresión analítica de esta función no es, en general, fácil de obtener. Los problemas surgen debido a la necesidad de considerar un número importante de variaciones en los límites de integración y la necesidad de definir la función producto mediante diferentes tramos.

La utilización de este importante teorema se vio postergada hasta la existencia de mejoras en el software matemático y la popularidad de la informática que facilitó las herramientas para la resolución de algunos de los problemas planteados.

En Glen et al. (2004), los autores consideran un caso especial del teorema de Rohatgi para ilustrar la determinación de la PDF del producto de dos variables aleatorias independientes. Su resultado se recoge en el siguiente teorema:

Teorema 2.4.1 (Glen et al. (2004), p.452-453) *Sea X una variable aleatoria continua con PDF $f(x)$ definida y positiva en el intervalo (a, b) , con $0 < a < b < \infty$. De forma semejante, sea Y una variable aleatoria continua con PDF $g(y)$, definida y positiva en el intervalo (c, d) , con $0 < c < d < \infty$. La PDF de $Z = XY$ ($h(z)$) es*

$$h(z) = \begin{cases} \int_a^{z/c} g\left(\frac{z}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & ac < z < ad \\ \int_{z/d}^{z/c} g\left(\frac{z}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & ad < z < bc \\ \int_{z/d}^b g\left(\frac{z}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & bc < z < bd \end{cases}$$

cuando $ad < bc$.

$$h(v) = \begin{cases} \int_a^{z/c} g\left(\frac{z}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & ac < z < ad \\ \int_{z/d}^b g\left(\frac{z}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & ad < z < bd \end{cases}$$

cuando $ad = bc$

$$h(z) = \begin{cases} \int_a^{z/c} g\left(\frac{z}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & ac < z < ad \\ \int_a^b g\left(\frac{z}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & bc < z < ad \\ \int_{z/d}^b g\left(\frac{z}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & ad < z < bd \end{cases}$$

cuando $ad > bc$.

Demostración. Ver demostración en Glen et al. (2004). ■

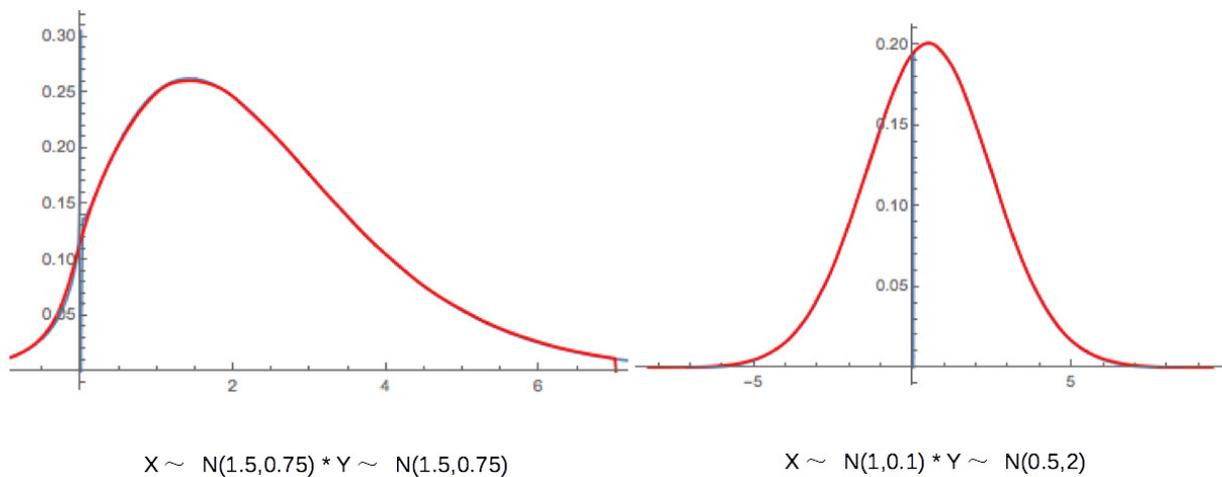


Figura 2.5: Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando usando el Teorema de Rohatgi (azul) y simulaciones (roja)

En la versión del teorema publicada, los autores se limitan a dos distribuciones que caen completamente en el primer cuadrante. No obstante, es fácil adaptar este teorema a otros escenarios. Inclusive, se puede considerar que las variables están en los cuadrantes positivo y negativo. Esta aproximación plantea además el problema adicional de que la función PDF no está definida para el valor cero.

El teorema de Rohatgi es general y se aplica a dos cualesquiera distribuciones continuas; en particular, para el caso del producto de dos variables normales estándar independientes, el teorema produce la siguiente función de densidad:

$$h(z) = \begin{cases} \frac{K_0(-z)}{\pi} & -\infty < z < 0 \\ \frac{K_0(z)}{\pi} & 0 < z < \infty \end{cases}$$

donde $K_0(\cdot)$ es la función modificada de Bessel de segunda clase. Al igual que había obtenido Craig (1936), la gráfica de dicha función presenta un comportamiento asintótico en cero, donde no está definida.

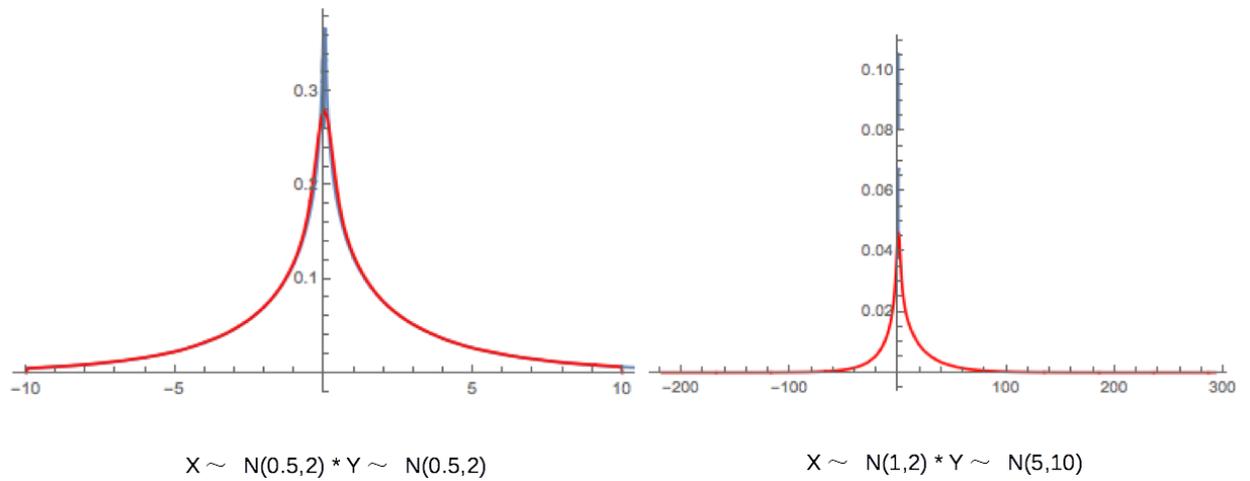


Figura 2.6: Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando usando el Teorema de Rohatgi (azul) y simulaciones (roja)

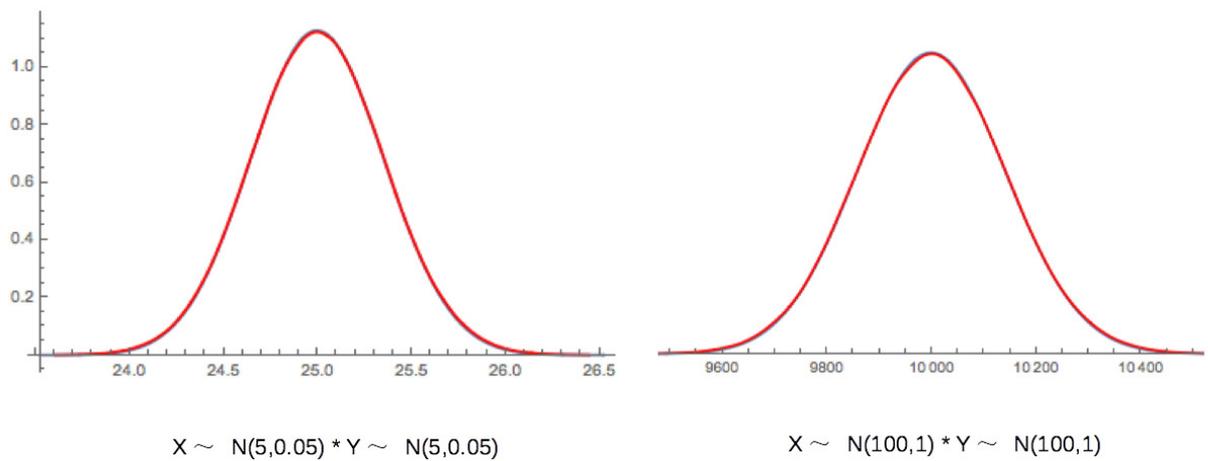


Figura 2.7: Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando usando el Teorema de Rohatgi (azul) y simulaciones (roja)

Si no consideramos la situación especial en cero, la aproximación de Glen et al. (2004) resulta muy buena. En las gráficas, 2.5, 2.6 y 2.7 hemos representado diversas simulaciones, todas ellas para el producto de dos variables normales con correlación nula ($\rho = 0$). En la gráfica 2.5, a la izquierda tenemos el producto una variable normal con ella misma; donde el valor de inverso del coeficiente de variación es 2; a la derecha, consideramos dos distribuciones normales con diferentes parámetros, donde una presenta un valor grande del inverso del coeficiente de variación (10) mientras que la otra tiene un valor pequeño (0.25). En la gráfica 2.6, a la izquierda tenemos el producto una variable normal con ella misma; donde el valor de inverso del coeficiente de variación es 0.25; a la derecha, consideramos dos distribuciones normales con diferentes parámetros, donde el inverso del coeficiente de variación es el mismo para ambas (0.5). Por último, en la gráfica 2.6, a la izquierda tenemos el producto una variable normal con ella misma; donde el valor de inverso del coeficiente de variación es muy alto (100), obtenido con un pequeño valor de la varianza ($\sigma^2 = 0,05$); a la derecha, consideramos la misma situación pero ahora el alto valor del coeficiente de variación se justifica en base al alto valor de la media ($\mu = 100$). En todas las gráficas, la estimación del producto no está definida en cero. Por lo tanto, la función de densidad sería discontinua. Por el contrario, la simulación de MonteCarlo no presenta nunca la discontinuidad comentada.

La aplicación del teorema de Rohatgi (Glen et al. (2004)), permite resolver algunos casos particulares del producto de variables normales, mas no es generalizable. No obstante, esta aproximación ha marcado los avances en este tema en la segunda década de este siglo.

2.5. Avances realizados mediante el uso de técnicas computacionales

En Ware y Lad (2003) se aborda el tema del producto de dos variables normales con el objetivo de calcular la probabilidad de que la suma del producto de variables normales sea negativo. Para analizar la distribución del producto de variables normales, los autores utilizan tres métodos: aproximación mediante aproximación numérica utilizando la integración numérica, la construcción de una simulación mediante MonteCarlo y una aproximación analítica utilizando la distribución normal.

Los autores parten de la consideración de una distribución normal bi-variable con variables independientes:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \right) \quad (2.14)$$

Y supongamos que $Z = XY$.

La primera aproximación mediante integración numérica considera la función de distribución condicional de $Z|(Y = y)$ y mediante la función de densidad conjunta de Y y Z (2.15):

$$f(z, y) = \frac{1}{2\pi|y|\sigma_x\sigma_y} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_x^2} \left(\frac{z}{y} - \mu_x \right)^2 - \frac{1}{2\sigma_y^2} (y - \mu_y)^2 \right) \quad (2.15)$$

La densidad marginal $f(z)$ se obtiene mediante la integral:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z|y)f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, y)dy \quad (2.16)$$

Para calcular esta integral, que no admite expresión analítica, los autores utilizan los métodos de integración numérica incluidos en un paquete de software matemático (MATLAB), que utiliza una adaptación recursiva del método de Newton-Cotes. Este método permite obtener una aproximación de la densidad del producto para diversos ejemplos de variables normales independientes. Esta aproximación, añade un problema adicional representado por la aparición de fluctuaciones para valores determinados de los parámetros debido a la inestabilidad asociada al proceso numérico de integración, limitada por la precisión de las máquinas utilizadas en los procesos de cálculo.

La segunda alternativa consiste en la simulación del producto mediante un método de MonteCarlo. Para ello generamos dos vectores X e Y de longitud N , donde $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$. Obtenemos el vector Z multiplicando X e Y por pares de elementos. Los elementos de Z conforman una muestra aleatoria de $f_Z(z)$ y permiten estimar gráficamente la función de densidad mediante la representación del histograma normalizado. Los autores utilizaron simulaciones con $N = 1,000,000$ de elementos y $N = 100,000,000$. Una característica importante de las densidades simuladas es que no presentan comportamiento asintótico en cero.

La tercera alternativa busca aproximar la función de densidad del producto $f_Z(z)$ mediante el cálculo de los primeros dos momentos de Z y entonces, encontrando una distribución cuyos parámetros encajen con los momentos calculados. Los autores concluyen que, a partir de la función generadora de momentos de Z , se puede mostrar que Z se comporta como una distribución normal bajo ciertas condiciones.

Supongamos que $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ y que X y Y tienen correlación ρ . Definimos $X = X_0 + Z_1$ y $Y = X_0 + Z_2$, donde

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho\sigma_x\sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 - \rho\sigma_x\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y^2 - \rho\sigma_x\sigma_y \end{bmatrix} \right) \quad (2.17)$$

Las variables X e Y se descomponen en dos sumandos independientes, uno de los cuales es común a ambas: $Z = XY = (X_0 + Z_1)(X_0 + Z_2)$. La función generadora de momentos (2.18) resultante es:

$$M_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} f(z)dz = \left(\sqrt{(1 - \rho\sigma_x\sigma_y t) - \sigma_x^2\sigma_y^2 t^2} \right) \exp \left[\frac{\mu_x\mu_y t + \frac{1}{2} (\mu_x^2\sigma_y^2 + \mu_y^2\sigma_x^2 - 2\rho\mu_x\mu_y\sigma_x\sigma_y) t^2}{(1 - \rho\sigma_x\sigma_y t) - \sigma_x^2\sigma_y^2 t^2} \right] \quad (2.18)$$

Diferenciando esta función y evaluando en $t = 0$ podemos encontrar los diferentes momentos de orden 1, 2, etc. En particular, la media de Z vendrá dada por el momento de orden 1 (2.19) y la varianza por el momento de orden 2 (2.20).

$$\mu_z = \mu_x\mu_y + \rho\sigma_x\sigma_y \quad (2.19)$$

$$\sigma_z^2 = \mu_x^2\sigma_y^2 + \mu_y^2\sigma_x^2 + \sigma_x^2\sigma_y^2 + 2\rho\mu_x\mu_y\sigma_x\sigma_y + \rho^2\sigma_x^2\sigma_y^2 \quad (2.20)$$

Los autores hacen un estudio de diversos casos particulares cuando existe correlación entre variables, y a continuación, realizan un análisis más pormenorizado para el caso

en que $\rho = 0$. La principal conclusión a la que llegan es, que en el caso del producto de dos distribuciones normales independientes, la distribución límite es una distribución normal (Ware y Lad (2003)). Dicha aproximación se basa en la evolución del ratio (media/desviación típica). No obstante, quedan varias preguntas abiertas: ¿cuándo la ratio media/desviación típica es suficientemente grande para que la aproximación normal de $f_Z(z)$ se adecuada? ¿Son los ratios individuales de las variables X e Y los que determinan la idoneidad de la aproximación normal, o lo es el ratio combinado? Por último, también hacen alguna referencia al coeficiente de asimetría del producto (que no es nulo como sucede en la distribución normal). ¿Existe algún valor crítico del coeficiente de asimetría del producto bajo el cual se justifique la aproximación normal cuando los ratios son grandes?

2.5.1. Aproximación del producto a la normal

En Seijas-Macías y Oliveira (2012), los autores, partiendo del análisis anterior (Ware y Lad (2003)), profundizan en el estudio de la posibilidad de que el producto de dos distribuciones normales siga una distribución normal. Este trabajo analiza el producto de dos distribuciones normales independientes y analiza la influencia de los inversos de coeficiente de variación y del ratio combinado. El objetivo principal es establecer las condiciones que determinan que la aproximación normal al producto de dos variables normales es adecuada.

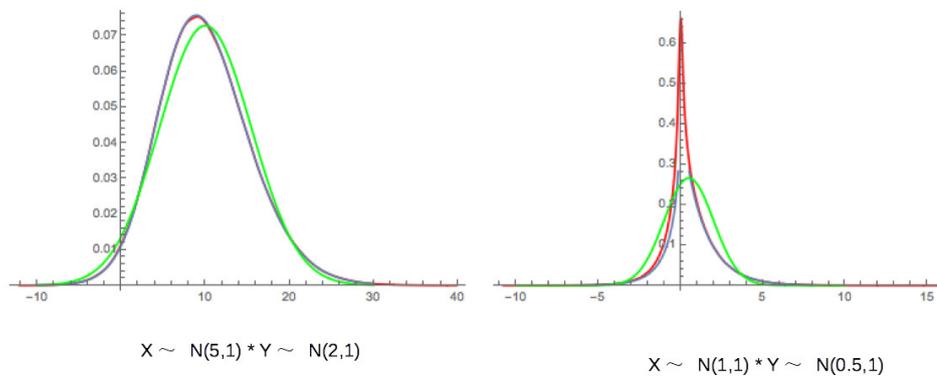


Figura 2.8: Ejemplos de Producto de dos Variables Normales (misma varianza) usando Integración numérica (azul), simulaciones (roja) y aproximación normal (verde)

Sean X e Y dos variables normales independientes con parámetros: μ_x, σ_x^2 y $r_x = \frac{\mu_x}{\sigma_x}$ y μ_y, σ_y^2 y $r_y = \frac{\mu_y}{\sigma_y}$. Los autores analizan diversas situaciones y la bondad de la aproximación normal:

- Cuando ambas variables tienen varianza unitaria ($\sigma^2 = 1$), pero medias diferentes, entonces la aproximación normal es buena cuando los valores de las medias son superiores a 1. En la figura 2.8 representamos la aproximación del producto utilizando integración numérica y la aproximación normal y comparamos con

una simulación MonteCarlo de 10^6 elementos. Cuando las medias son grandes, las tres aproximaciones son buenas, por el contrario cuando la media es pequeña (en particular, respecto a la varianza) la aproximación normal no es correcta.

- Cuando ambas variables tienen media unitaria ($\mu = 1$), pero diferentes varianzas, la aproximación normal necesita que alguna de las distribuciones presente un nivel de varianza inferior a 1. Se puede comprobar en la figura 2.9 que la aproximación normal es un poco más precisa en el caso de que las varianzas sean pequeñas.
- En el resto de situaciones, la aproximación normal estaría justificada cuando por lo menos uno de los inversos del coeficiente de variación δ_x o δ_y presenta un valor grande. Dado que δ es una fracción este valor puede venir justificado ya sea por un alto valor de la media o un pequeño valor de la varianza, o ambos.

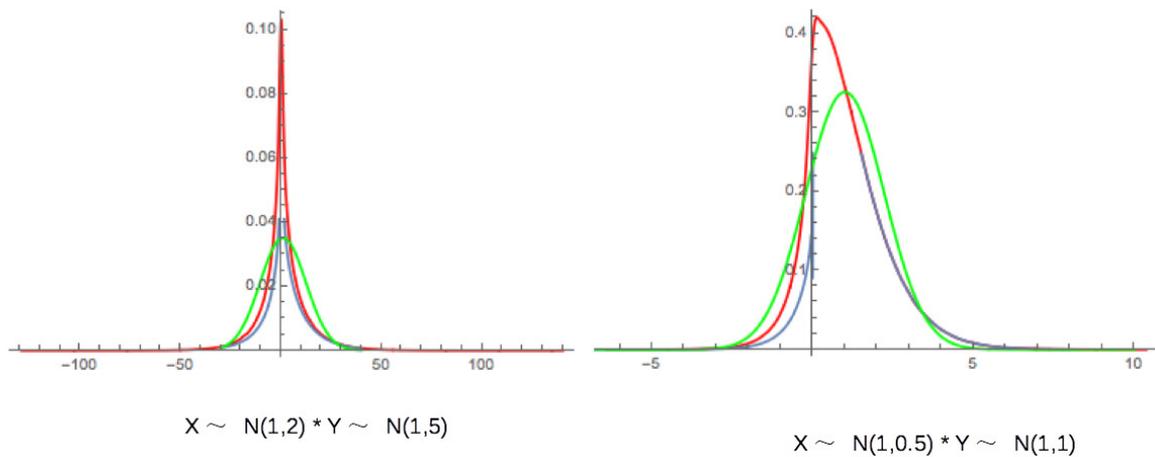


Figura 2.9: Ejemplos de Producto de dos Variables Normales (misma media) usando Integración numérica (azul), simulaciones (roja) y aproximación normal (verde)

Cuando tenemos dos distribuciones normales con la misma varianza $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, definimos el ratio combinado como $\frac{\mu_x \mu_y}{\sigma^2}$. Un valor grande del ratio combinado presenta una buena aproximación a la normal, mientras que valores pequeños tienden a presentar una peor aproximación (Oliveira et al. (2013)). En las figuras 2.10 y 2.11, podemos comprobar con algunas simulaciones que la aproximación normal es muy buena cuando el ratio combinado es grande. Mientras que cuando el ratio combinado presenta valores pequeños (menores que 1) la aproximación normal no es correcta, e inclusive mejora la precisión de la aproximación mediante integración numérica.

La presencia de normalidad en el producto podría ser aceptada para valores del inverso del coeficiente de variación de ambas variables superior a uno; o bien cuando el ratio combinado presenta valores elevados. Por su parte, la aproximación mediante integración numérica resulta mucho más adecuada en todos los casos, aunque presenta algunas diferencias cuando los valores de los inversos del coeficiente de variación son pequeños, o cuando el ratio combinado es menor que 1 (Oliveira et al. (2013)).

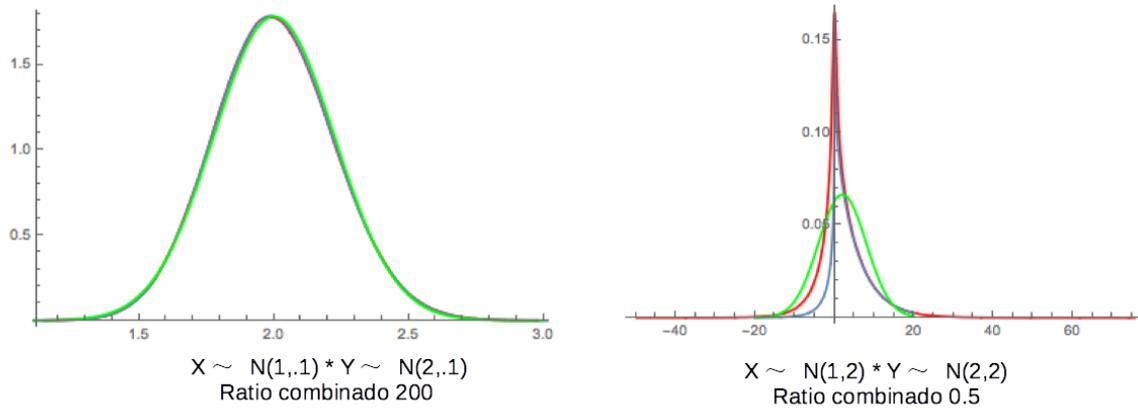


Figura 2.10: Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando usando Integración numérica (azul), simulaciones (roja) y aproximación normal (verde)

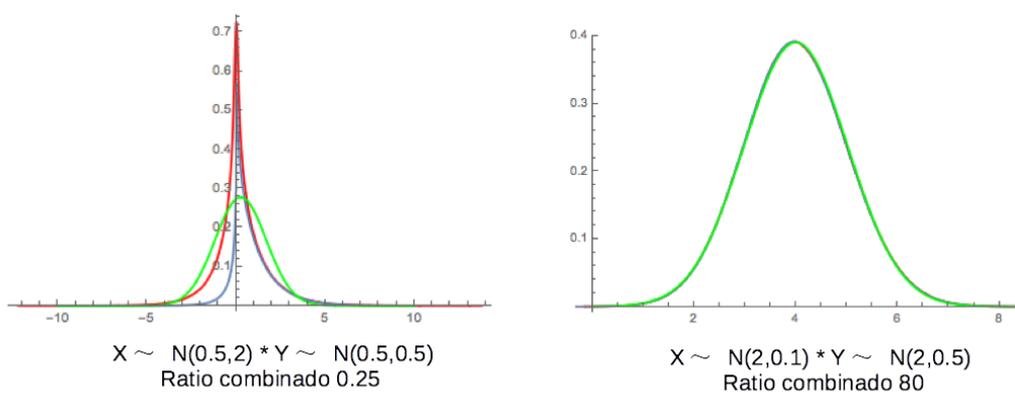


Figura 2.11: Ejemplos de Producto de dos Variables Normales usando usando Integración numérica (azul), simulaciones (roja) y aproximación normal (verde)

2.5.2. Aplicación del Teorema de Rohatgi al producto de distribuciones

El teorema de Rohatgi (Rohatgi (1976)) define la función de densidad del producto de dos distribuciones a partir de las funciones de densidad de cada uno de los elementos del producto. La determinación de la función de densidad del producto requiere la utilización de integrales, las cuales no siempre presentan soluciones analíticas, lo que supone que en muchos casos habrá que recurrir a aproximaciones mediante integración numérica.

Por otro lado, el teorema presenta una discontinuidad en el valor $xy = 0$, dado que la función de densidad del producto no se puede definir en dicho punto.

En Glen et al. (2004), los autores realizan una adaptación del teorema al producto de varios tipos de distribuciones (continuas y discretas), mediante la aplicación de métodos de integración numérica y la definición de las diversas regiones de integración en función de los valores de las variables del producto. Por su parte, Oliveira et al. (2018), siguiendo el trabajo de estos autores desarrollan una aplicación para el programa de software R, que permite el cálculo del producto de dos distribuciones uniformes y muestran su aplicación en un problema de inventario.

La aplicación al producto de distribuciones normales se cita en Glen et al. (2004) para el caso particular del producto de dos distribuciones normales estándar con correlación nula (ver 2.4). En este caso, tenemos una expresión exacta de las integrales a través de la función modificada de Bessel. No obstante, para otras situaciones no se han podido determinar expresiones exactas de la función de densidad del producto.

Siguiendo el análisis establecido en Oliveira et al. (2018) podemos aproximar el producto de dos distribuciones normales con correlación nula cualesquiera mediante la aproximación con métodos de integración numérica.

Proposición 2.5.1 *Sea X una función de distribución normal $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ y sea $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ otra distribución normal con correlación nula $\rho = 0$. Entonces, podemos establecer la función de densidad conjunta del producto $Z = XY$ de ambas variables como:*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx, \quad (2.21)$$

donde f_X y f_Y representan las funciones de densidad normal de las variables X e Y . *Demostración.* La determinación del valor de la integral (2.21) se puede realizar mediante la integración numérica en diversas regiones determinadas por los valores que toman las variables X e Y . Dado que las variables normales son continuas y están definidas en $(-\infty, \infty)$, tenemos que realizar dos adaptaciones:

1. Definimos los recorridos de las variables: $\mu_x \pm \alpha\sigma_x$ y $\mu_y \pm \alpha\sigma_y$, donde α puede tomar un valor, habitualmente, entre 3 y 6. Para $\alpha = 3$ tenemos un recorrido superior al 99,5%.
2. La función (2.21) no está definida en $z = 0$, entonces sea $z = \epsilon$, donde $\epsilon = \pm 0,01$.

Definimos el recorrido de X como (a, b) donde $a = \mu_x - \alpha\sigma_x$, $b = \mu_x + \alpha\sigma_x$, de Y como (c, d) donde $c = \mu_y - \alpha\sigma_y$, $d = \mu_y + \alpha\sigma_y$. Así, $a < b$ y $c < d$, puesto que $\alpha \neq 0$ y $\sigma_x > 0$ y $\sigma_y > 0$. Supongamos que $\mu_x = \mu_y = \mu$ y $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, entonces, $a = c = \mu - \alpha\sigma$ y $b = d = \mu + \alpha\sigma$.

Tenemos:

1. *Escenario 1: $a = c > 0$ y $b = d > 0$. Entonces, $z > 0, \forall x, y$*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_a^{\frac{z}{b}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [a^2, ab] \\ \int_{\frac{z}{b}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ab, b^2] \end{cases} \quad (2.22)$$

2. *Escenario 2: $a = c < 0$ y $b = d > 0$ y $|a| < |b|$. En este caso z toma valores positivos, negativos e inclusive el valor 0.*

a) *Rango positivo: $z \in (\epsilon^2, b^2)$, donde $\epsilon \rightarrow 0^+$.*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{\epsilon}^{\frac{z}{b}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{-\frac{z}{\epsilon}}^{-\epsilon} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon^2, -\epsilon a] \\ \int_{\epsilon}^{\frac{z}{b}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_a^{\frac{z}{a}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [-\epsilon a, \epsilon b] \\ \int_{\frac{z}{b}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_a^{\frac{z}{a}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon b, a^2] \\ \int_{\frac{z}{b}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [a^2, b^2] \end{cases} \quad (2.23)$$

b) *Rango negativo: $z \in (ab, -\epsilon^2)$, donde $\epsilon \rightarrow 0^-$.*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{\epsilon}^{-\frac{z}{\epsilon}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon a, -\epsilon^2] \\ \int_{\frac{z}{b}}^{-\frac{z}{\epsilon}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon b, \epsilon a] \\ \int_{\frac{z}{b}}^a f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ab, \epsilon b] \end{cases} \quad (2.24)$$

3. *Escenario 3: $a = c < 0$ y $b = d > 0$ y $|a| > |b|$. Caso similar al Caso 2.*

a) *Rango positivo: $z \in (\epsilon^2, a^2)$, donde $\epsilon \rightarrow 0^+$.*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{\epsilon}^{\frac{z}{b}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{-\frac{z}{\epsilon}}^{-\epsilon} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon^2, \epsilon b] \\ \int_{\epsilon}^{\frac{z}{b}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{\frac{z}{b}}^{\frac{z}{a}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon b, -\epsilon a] \\ \int_{\frac{z}{b}}^{\frac{z}{a}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_a^{\frac{z}{a}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [-\epsilon a, b^2] \\ \int_{\frac{z}{b}}^{\frac{z}{a}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [b^2, a^2] \end{cases} \quad (2.25)$$

b) *Rango negativo $z \in (ab, -\epsilon^2)$, donde $\epsilon \rightarrow 0^-$.*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{\epsilon}^{-\frac{z}{\epsilon}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon b, -\epsilon^2] \\ \int_{\frac{z}{b}}^{-\frac{z}{\epsilon}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [-\epsilon a, \epsilon b] \\ \int_{\frac{z}{b}}^a f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ab, -\epsilon a] \end{cases} \quad (2.26)$$

4. *Escenario 4: $a = c < 0$ y $b = d < 0$, con $|a| > |b|$. Entonces, $z > 0, \forall x, y$. Similar al Escenario 1.*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{\frac{z}{b}}^{\frac{z}{a}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [b^2, ab] \\ \int_{\frac{z}{a}}^a f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ab, a^2] \end{cases} \quad (2.27)$$

Sean $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ entonces los recorridos de cada variable son (a, b) y (c, d) donde $a = \mu_x - \alpha\sigma_x$, $b = \mu_x + \alpha\sigma_x$, $c = \mu_y - \alpha\sigma_y$ y $d = \mu_y + \alpha\sigma_y$, donde $a < b$ y $c < d$. Para aproximaciones numéricas podemos tomar $\alpha = 3$.

Tenemos diversos escenarios:

1. Escenario 1: $0 < a < b$ y $c < 0 < d$. La variable X sólo toma valores positivos y la variable Y toma valores positivos y negativos, entonces $Z = XY$ también puede tomar valores negativos y positivos e inclusive el valor nulo. Tenemos entonces los siguientes casos:

- a) Caso 1: Z positivo, entonces $X \in [a, b]$ e $Y \in (\epsilon, d]$, y sea $ad > eb$ con $\epsilon \rightarrow 0^+$.

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_a^{\frac{z}{\epsilon}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [a\epsilon, b\epsilon] \\ \int_a^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [b\epsilon, ad] \\ \int_{\frac{z}{d}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ad, bd] \end{cases} \quad (2.28)$$

- b) Caso 2: Z negativo, entonces $X \in [a, b]$ e $Y \in [c, \epsilon)$, y sea $a\epsilon > bc$ con $\epsilon \rightarrow 0^-$.

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_b^{\frac{z}{\epsilon}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [cb, ca] \\ \int_a^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ac, b\epsilon] \\ \int_{\frac{z}{\epsilon}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [b\epsilon, a\epsilon] \end{cases} \quad (2.29)$$

2. Escenario 2: $a < 0 < b$ y $c < 0 < d$ con $a > c$, $b < d$ y $ac < bd$. Ambas variables toman valores positivos y negativos. Tenemos entonces los siguientes casos:

- a) Caso 1: Z positivo, entonces tenemos: $X \in (\epsilon_1, b]$ e $Y \in (\epsilon_1, d]$ con $\epsilon_1 \rightarrow 0^+$ o bien $X \in [a, \epsilon_2)$ e $Y \in [c, \epsilon_2)$ con $\epsilon_2 \rightarrow 0^-$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{\epsilon_1}^{\frac{z}{\epsilon_1}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{\frac{z}{\epsilon_2}}^{\epsilon_2} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon_2^2, \epsilon_2 a] \\ \int_{\epsilon_1}^{\frac{z}{\epsilon_1}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_a^{\epsilon_2} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon_2 a, \epsilon_1 b] \\ \int_{\epsilon_1}^a f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_a^{\epsilon_2} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon_1 b, \epsilon_2 c] \\ \int_{\epsilon_1}^a f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{\frac{z}{\epsilon_2}}^a f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon_2 c, \epsilon_1 d] \\ \int_{\frac{z}{a}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{\frac{z}{\epsilon_2}}^a f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon_1 d, ac] \\ \int_{\frac{z}{a}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ac, bd] \end{cases} \quad (2.30)$$

- b) Caso 2: Z negativo, entonces $X \in (\epsilon_1, b]$ e $Y \in [c, \epsilon_2)$, o bien $X \in [-a, \epsilon_2)$ e $Y \in (\epsilon_2, d]$ con $\epsilon_1 \rightarrow 0^+$ y $\epsilon_2 \rightarrow 0^-$.

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_a^{\frac{z}{\epsilon_1}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{\frac{z}{\epsilon_2}}^{\frac{z}{a}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_c^{\frac{z}{\epsilon_1}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{\frac{z}{b}}^{\frac{z}{\epsilon_1}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [bc, \epsilon_2^2] \end{cases} \quad (2.31)$$

3. *Escenario 3: $a < 0 < b$ y $c < 0 < d$ con $a > c$, $b > d$ y $ac < bd$. Ambas variables toman valores positivos y negativos. Tenemos entonces los siguientes casos:*

a) *Caso 1: Z positivo, entonces tenemos: $X \in (\epsilon_1, b]$ e $Y \in (\epsilon_1, d]$ con $\epsilon_1 \rightarrow 0^+$ o bien $X \in [a, \epsilon_2)$ e $Y \in [c, \epsilon_2)$ con $\epsilon_2 \rightarrow 0^-$*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{\epsilon_1}^{\frac{z}{\epsilon_1}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{\epsilon_2}^{\frac{z}{\epsilon_2}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon_2^2, \epsilon_2 a] \\ \int_{\epsilon_1}^{\frac{z}{\epsilon_1}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{\epsilon_2}^a f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon_2 a, \epsilon_1 d] \\ \int_{\epsilon_1}^d f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{\frac{z}{\epsilon_2}}^a f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon_1 d, \epsilon_1 b] \\ \int_{\frac{z}{b}}^d f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{\frac{z}{\epsilon_2}}^a f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon_1 b, ac] \\ \int_{\frac{z}{b}}^d f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ac, bd] \end{cases} \quad (2.32)$$

b) *Caso 2: Z negativo, entonces $X \in (\epsilon_1, b]$ e $Y \in [c, \epsilon_2)$, o bien $X \in [-a, \epsilon_2)$ e $Y \in (\epsilon_1, d]$ con $\epsilon_1 \rightarrow 0^+$ y $\epsilon_2 \rightarrow 0^-$.*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{\epsilon_2}^{\frac{z}{\epsilon_2}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{\epsilon_1}^{\frac{z}{\epsilon_1}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon_2^2, \epsilon_2 b] \\ \int_{\frac{z}{b}}^c f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx + \int_{\frac{z}{\epsilon_2}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [\epsilon_1 b, ab] \\ \int_{\frac{z}{\epsilon_2}}^c f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ab, cb] \end{cases} \quad (2.33)$$

4. *Escenario 4: $0 < a < b$ y $0 < c < d$ con $a < c$, $b < d$ y $ad < bc$. Ambas variables toman sólo valores positivos. Tenemos entonces que Z sólo toma valores positivos:*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_a^{\frac{z}{c}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ac, ad] \\ \int_{\frac{z}{d}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ad, bc] \\ \int_{\frac{z}{d}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [bc, bd] \end{cases} \quad (2.34)$$

5. *Escenario 5: $b < a < 0$ y $d < c < 0$ con $a > c$, $b > d$ y $ad > bc$. Ambas variables toman sólo valores negativos. Tenemos entonces que Z sólo toma valores positivos y este caso es prácticamente igual que el escenario 4:*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_a^{\frac{z}{c}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ac, bc] \\ \int_a^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [bc, ad] \\ \int_{\frac{z}{d}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ad, bd] \end{cases} \quad (2.35)$$

6. *Escenario 6: $0 < a < b$ y $d < c < 0$ con $a > c$, $b > d$ y $ad > bc$. En este escenario una variable sólo toma valores positivos y la otra sólo valores negativos, entonces Z sólo toma valores negativos:*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_a^{\frac{z}{c}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ac, bc] \\ \int_a^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [bc, ad] \\ \int_{\frac{z}{d}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ad, bd] \end{cases} \quad (2.36)$$

7. *Escenario 7: $0 < a < b$ y $d < c < 0$ con $a > c$, $b > d$ y $ad < bc$. En este escenario es muy similar al escenario 6, una variable sólo toma valores positivos y la otra sólo valores negativos, entonces Z sólo toma valores negativos:*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_a^{\frac{z}{c}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ac, ad] \\ \int_{\frac{z}{d}}^{\frac{z}{c}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [bc, ad] \\ \int_{\frac{z}{d}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [bc, bd] \end{cases} \quad (2.37)$$

8. *Escenario 8: $0 < a < b$ y $0 < c < d$ con $a < c$, $b < d$ y $ad > bc$. Este escenario es muy similar al escenario 4, ya visto anteriormente, dado que ambas variables toman sólo valores positivos. Tenemos entonces que Z sólo toma valores positivos:*

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_a^{\frac{z}{c}} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ac, bc] \\ \int_a^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [bc, ad] \\ \int_{\frac{z}{d}}^b f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx & \text{con } z \in [ad, bd] \end{cases} \quad (2.38)$$

■

El teorema de Rohatgi permite, mediante la utilización de métodos de integración numérica, aproximar la función de densidad del producto de dos variables normales $Z = XY$, salvo para el valor de $Z = 0$. En Oliveira et al. (2018), se ha realizado una implementación de este técnica, aunque aplicada al caso de variables uniformes, utilizando el software R. Como método de aproximación numérica se optó un método global adaptativo utilizando Newton-Cotes.

2.6. Últimos avances realizados

En 2016, S. Nadarajah y T. Pogány publican un artículo dedicado al análisis del producto de variables normales. (Nadarajah y Pogány (2016)). Supongamos que (X, Y) es un vector aleatorio normal bivalente con media (μ_x, μ_y) , varianzas (σ_x^2, σ_y^2) y coeficiente de correlación ρ . Hasta la fecha no se ha podido derivar un expresión cerrada para la función de densidad de $Z = XY$, salvo para los casos $\rho = 0$ y $\rho = 1$. La aproximación de los autores se basa en el teorema de Rohatgi (Rohatgi (1976)) y coincide con la versión que ya habían iniciado en Glen et al. (2004), donde se analizaba el caso del producto de dos variables normales estándar independientes, pero ahora, también se analiza el producto de dos variables normales estándar, cuando la correlación entre ambas variables no es nula.

El principal resultado de estos autores es el siguiente teorema:

Teorema 2.6.1 (Nadarajah y Pogány (2016) p. 202) Sea (X, Y) un vector aleatorio de una distribución normal bivalente, con media cero y varianza unitaria y coeficiente de correlación ρ . Entonces la PDF de $Z = XY$ es

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{\rho z}{1-\rho^2}\right] K_0\left(\frac{|z|}{1-\rho^2}\right) \quad (2.39)$$

para $-\infty < z < \infty$, donde $K_0(\cdot)$ es la función modificada de Bessel de segunda clase de orden cero.

Demostración. Ver demostración en Nadarajah y Pogány (2016). ■

Este teorema puede ser generalizado para el producto finito de variables normales estándar independientes e idénticamente distribuidas.

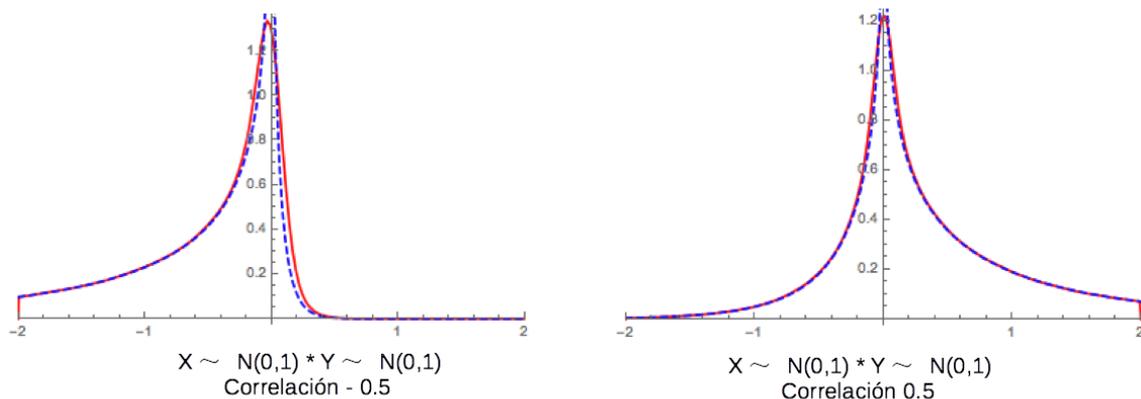


Figura 2.12: Producto de dos Variables Normales Estándar aproximación Bessel (azul - discontinua) y simulación MonteCarlo (rojo - continua)

Como ya hemos comentado, esta estimación teórica de la PDF del producto de dos variables normales estándar correlacionadas presenta el problema ya comentado del comportamiento asintótico en el entorno de cero, y no coincide con las simulaciones prácticas.

La expresión (2.39) presenta algunos problemas de definición en valores concretos de los parámetros. Si $\rho = 1$ ó $\rho = -1$ la función de densidad no está definida. Por otro lado, cuando $z = 0$ la función de Bessel de segunda clase de orden cero no está definida:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} K_0\left(\frac{|z|}{1-\rho^2}\right) = \infty \quad (2.40)$$

Tenemos,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{\rho z}{1-\rho^2}\right] K_0\left(\frac{|z|}{1-\rho^2}\right) = \infty \quad (2.41)$$

donde $\rho \in (-1, 1)$.

Por tanto, la función de densidad tiende a infinito cuando el valor de z se aproxima a 0 (ya sea por la derecha o por la izquierda) y la función (2.39) no estará definida en 0. Las simulaciones realizadas mediante el método MonteCarlo del producto de variables normales no muestran este comportamiento y la función está definida en 0. Este problema es común a todas las aproximaciones que utilizan la función de Bessel de segunda clase, puesto que dicha función presenta valores complejos en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es real y continua entre $(0, \infty)$.

No obstante, la aproximación realizada en (2.39) permite extender el resultado original (Craig (1936)) y su posterior confirmación (Glen et al. (2004)) para el producto de variables normales estándar independientes, al caso del producto de dichas variables con coeficiente de correlación no nulo ($\rho \neq 0$). En la figura 2.12 podemos ver como la simulación Montecarlo (rojo) no presenta la discontinuidad en el origen, mientras que la aproximación mediante la función de Bessel (azul) presenta un comportamiento asintótico cara a infinito cuando nos aproximamos a cero. En el resto del dominio, vemos que la aproximación es muy buena.

En el mismo trabajo los autores anunciaban un futuro trabajo donde extenderían su resultado a variables con media no nula; no obstante, hasta el momento no ha sido publicado.

Recientemente, (Cui et al. (2016)) presentan un teorema donde se establece una expresión exacta para el producto de dos variables normales.

Teorema 2.6.2 (Cui et al. (2016), pp.1662-1663) Sean X e Y dos variables reales Gaussianas $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con coeficiente de correlación ρ . Entonces, la PDF exacta $f_Z(z)$ del producto $Z = XY$ viene dada:

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{\mu_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\mu_y^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(x + \mu_x\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \right) \right\} \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n} \frac{x^{2n-m} |x|^{m-n} \sigma_x^{m-n-1}}{\pi(2n)!(1-\rho^2)^{2n+1/2} \sigma_y^{m-n+1}} \left(\frac{\mu_x}{\sigma_x^2} - \frac{\rho\mu_y}{\sigma_x\sigma_y} \right)^m \\ & \binom{2n}{m} \times \left(\frac{\mu_y}{\sigma_y^2} - \frac{\rho\mu_x}{\sigma_x\sigma_y} \right)^{2n-m} K_{m-n} \left(\frac{|x|}{(1-\rho^2)\sigma_x\sigma_y} \right) \end{aligned}$$

done $K_v(\cdot)$ es la función de Bessel modificada de segunda clase y orden v .

Demostración. Ver demostración en Cui et al. (2016). ■

No obstante, el concepto de expresión exacta de la PDF del producto no refleja totalmente la realidad, pues su aproximación presenta algunos problemas que los autores no llegan a explicar. En particular, el comportamiento del producto en torno al valor nulo no se corresponde con los procesos de simulación, mostrando un carácter asintótico que no se justifica. Por otro lado, la derivación de las fórmulas empleadas en algunos casos no se realiza a partir del teorema donde los autores derivan la fórmula general del producto, utilizando para estos casos particulares aproximaciones conocidas de la literatura.

En Gaunt (2018) se analiza la distribución del producto de dos variables normales de media nula con correlación llegando a la conclusión de que dicho producto se puede modelar a través de una variable aleatoria gamma-varianza con parámetros $r > 0, \theta \in$

\mathbb{R} , $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, denotada como $VG(r, \theta, \sigma; \mu)$ que presenta la función PDF:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} e^{\frac{\theta}{\sigma^2}(x-\mu)} \left(\frac{|x-\mu|}{2\sqrt{\theta^2+\sigma^2}}\right)^{\frac{r-1}{2}} K_{\frac{r-1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\theta^2+\sigma^2}}{\sigma^2}|x-\mu|\right) \quad (2.42)$$

donde $K_{\frac{r-1}{2}}$ es la función de Bessel modificada de segunda clase y orden $\frac{r-1}{2}$.

Teorema 2.6.3 (Gaunt (2018), p.3) *Sea (X, Y) un vector normal aleatorio de orden 2 con medias nulas y varianzas (σ_x^2, σ_y^2) y coeficiente de correlación ρ :*

1. *Sea $Z = XY$ entonces $Z \sim VG(1, \rho\sigma_x\sigma_y, \sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}, 0)$.*
2. *La PDF de Z viene dada por:*

$$f_Z(x) = \frac{1}{\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{\rho x}{\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)}\right) K_0\left(\frac{|x|}{\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)}\right) \quad (2.43)$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Ver demostración en Gaunt (2018). ■

No obstante, igual que en otras aproximaciones se mantiene el problema de que esta función no está definida para $x = 0$. En (Gaunt (2019)) se presenta este mismo resultado pero su justificación se realiza mediante la caracterización de Stein (Stein (1972)). En ambos artículos los autores extienden fácilmente estos teoremas al caso del producto finito n-dimensional.

Capítulo 3

Características del Producto de Distribuciones Normales

3.1. Introducción

El análisis del producto de dos variables con distribución normal no parece seguir ninguna distribución conocida que se pueda aplicar de forma generalizada a las diversas situaciones que se puedan producir. Las primeras diferencias son debidas al hecho de la existencia de correlación entre las variables; la segunda fuente de diferencias se produce en el caso de que ambas distribuciones normales tengan parámetros iguales o diferentes. En función de dichas circunstancias tendremos diversas situaciones que se pueden modelizar empleando diferentes estrategias. En este capítulo nos centramos en el análisis de estas situaciones y cómo se puede tratar el producto de dos variables normales.

Supongamos que tenemos dos variables normalmente distribuidas, $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ que presentan un coeficiente de correlación ρ . Partiendo de la función generadora de momentos del producto de variables normales, que hemos introducido en el capítulo 2, podemos determinar el valor de los siguientes estadísticos del producto:

- Media: $\mu_x\mu_y + \rho\sigma_x\sigma_y$
- Varianza: $\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2$
- Asimetría:

$$\frac{2\sigma_x\sigma_y(3\mu_y^2\rho\sigma_x^2 + 3\mu_x\mu_y(1 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y + \rho(3\mu_x^2 + (3 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^{3/2}}$$

- Kurtosis (exceso de kurtosis):

$$\frac{6\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_z^2} \left(\frac{2\mu_y^2(1 + 3\rho^2)\sigma_x^2 + 4\mu_x\mu_y2\rho(3 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y}{+(\mu_x^2(2 + 6\rho^2) + (1 + 6\rho^2 + \rho^4)\sigma_x^2)\sigma_y^2} \right)$$

donde $\sigma_z^2 = (\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^2$ es la varianza del producto $Z = XY$.

A partir de estos estadísticos, vamos a intentar aproximar el producto, ya sea mediante la utilización de otras distribuciones con valores semejantes, o bien, mediante funciones que presenten características similares a la distribución del producto.

3.2. Producto de dos Variables Normales con correlación nula

En esta primera sección vamos a estudiar cómo se puede modelar el producto de dos variables normales $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ cuando $\rho = 0$ y, por tanto, no existe correlación entre ambas variables. Este caso ha sido el primero en ser estudiado, y como veremos, ha resultado un poco más sencillo de tratar. Para realizar las simulaciones del producto hemos utilizado el método de MonteCarlo considerando 1.000.000 de instancias de cada una de las variables elegidas de forma aleatoria y calculando los productos.

Por su parte, los valores de los estadísticos del producto de ambas variables se simplifican al tomar $\rho = 0$.

- Media: $\mu_x \mu_y$
- Varianza: $\mu_y^2 \sigma_x^2 + \mu_x^2 \sigma_y^2 + \sigma_x^2 \sigma_y^2$
- Asimetría: $\frac{6\mu_x \mu_y \sigma_x^2 \sigma_y^2}{(\mu_y^2 \sigma_x^2 + (\mu_x^2 + \sigma_x^2) \sigma_y^2)^{3/2}}$
- Kurtosis (exceso de kurtosis): $\frac{6\sigma_x^2 \sigma_y^2 (2\mu_y^2 \sigma_x^2 + (2\mu_x^2 \sigma_x^2) \sigma_y^2)}{(\mu_y^2 \sigma_x^2 + (\mu_x^2 + \sigma_x^2) \sigma_y^2)^2}$

En el caso de la kurtosis, simplemente sería el valor del exceso de kurtosis + 3.

3.2.1. Producto de dos variables Normales Estándar

Supongamos dos variables estándar normalmente distribuidas $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$ con coeficiente de correlación $\rho = 0$. En este caso la definición del producto $Z = XY$ ha sido ampliamente estudiada y se puede modelar utilizando diversas posibilidades.

3.2.1.1. Función de Bessel

Mediante la función de Bessel podemos modelar este producto. En este caso podemos definir la PDF $h(z)$ del producto $Z = XY$ mediante:

$$h(z) = \begin{cases} \frac{K_0(z)}{\pi} & -\infty < z < 0 \\ \frac{K_0^\pi(z)}{\pi} & 0 < z < \infty \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $K_0(z)$ es la función modificada de Bessel de segunda clase. Esta aproximación presenta un problema importante: no está definida en $z = 0$ y la PDF del producto es asintótica hacia $+\infty$ en $z = 0$.

3.2.1.2. Teorema de Rohatgi

Utilizaremos el teorema de Rohatgi (Rohatgi (1976)) para este producto. Aquí tenemos dos situaciones importantes a considerar, dicho teorema tampoco está definido en $z = 0$, pero al mismo tiempo hay que considerar que las distribuciones normales no están acotadas, mientras que para utilizar el teorema de Rohatgi necesitamos un intervalo

acotado. Por ello, para una distribución normal estándar podemos considerar que su dominio está acotado entre $(-3, -0,01) \cup (0,01, 3)$ que recoge más del 99% de la distribución. En este caso el integrando resultante al aplicar el teorema sería: $\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{v}{x})^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x}$, que se puede simplificar a: $\frac{e^{-\frac{v^2}{2x^2} - \frac{x^2}{2}}}{2\pi x}$, dando lugar a las siguientes expresiones para la PDF de $Z = XY$.

Para valores positivos de Z , entonces o bien $X, Y \in (-3, -0,01)$ o bien $X, Y \in (0,01, 3)$. La pdf resultante sería:

$$h(z) = \begin{cases} 2 \int_{0,01}^{v/0,01} \frac{e^{-\frac{v^2}{2x^2} - \frac{x^2}{2}}}{2\pi x} dx & 0,01^2 < v < 0,03 \\ 2 \int_{v/3}^3 \frac{e^{-\frac{v^2}{2x^2} - \frac{x^2}{2}}}{2\pi x} dx & 0,03 < v < 3^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Para valores negativos de Z entonces tenemos que $X \in (-3, -0,01)$ e $Y \in (0,01, 3)$, o viceversa. En este caso la expresión resultante sería:

$$h(z) = \begin{cases} -2 \int_{-3}^{-v/3} \frac{e^{-\frac{v^2}{2x^2} - \frac{x^2}{2}}}{2\pi x} dx & -3^2 < v < -0,03 \\ -2 \int_{-v/0,01}^{-0,01} \frac{e^{-\frac{v^2}{2x^2} - \frac{x^2}{2}}}{2\pi x} dx & -0,03 < v < -0,01^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Aunque estas integrales no se pueden resolver de forma exacta podemos utilizar integración numérica para obtener una gráfica que represente la PDF del producto. En nuestros ejemplos, hemos utilizado un método de integración numérica con estrategia Adaptativa Global y la regla Newton-Cotes con 20 puntos. La principal particularidad de esta aproximación es que en este caso cuando z tiende a cero, el valor de la función también tiende a cero, a diferencia del carácter asintótico que presentaba la aproximación mediante la función de Bessel.

3.2.1.3. Función de Pearson

Mediante la función de momentos del producto de dos variables normales podemos estimar los valores de los principales estadístico de la distribución del producto: media, varianza, asimetría y kurtosis:

Media: La media $\mu_z = \mu_x \mu_y = 0$ dado que tenemos dos distribuciones normales estándar $N(0, 1)$.

Varianza: La varianza de z , $\sigma^2(z) = 1$.

Asimetría: La asimetría del producto de dos variables normales estándar es 0.

Kurtosis: El exceso de kurtosis del producto de dos variables normales estándar es 6. El valor de la kurtosis sería 9.

Como podemos ver los estadísticos coinciden con los valores de media, varianza y asimetría del la distribución estándar normal $N(0, 1)$ con excepción del exceso de kurtosis que es el doble. Siguiendo a Aroian (1947), dicho autor proponía utilizar una

función de Pearson Tipo III para aproximar el producto de dos variables estándar no correlacionadas, pero dado que el producto de dos variables presenta asimetría nula, entonces, optamos por utilizar una función de Pearson de Tipo VII, que no presenta asimetría, con parámetros $(6, 0, 1, 0, 3)$, para obtener los mismos valores de media, varianza y kurtosis que el producto de las dos variables normales estándar.

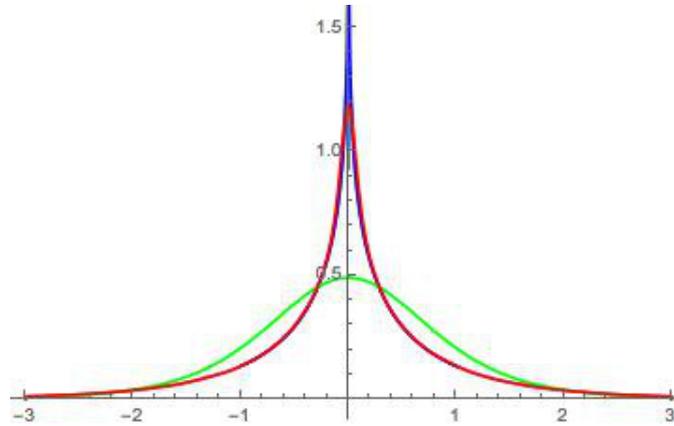


Figura 3.1: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales Estándar con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Función Bessel (azul oscuro), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)

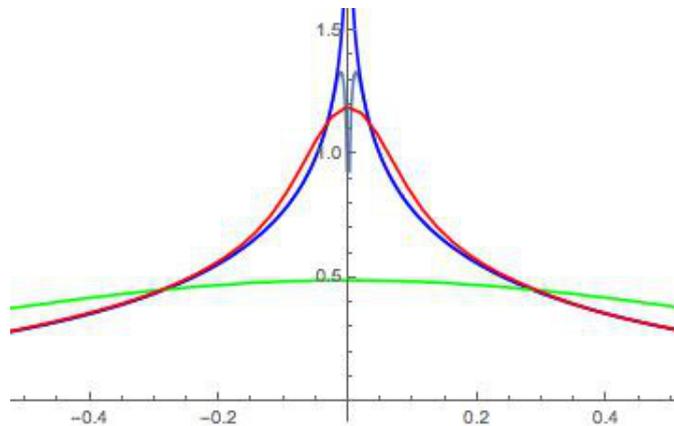


Figura 3.2: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales Estándar con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Función Bessel (azul oscuro), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde). Rango entre $(-0,5; 0,5)$

En las figuras 3.1 y 3.2 vemos una simulación de un producto de dos variables normales estándar y las diversas aproximaciones consideradas. Si no consideramos el entorno de punto cero, tanto la aproximación de Bessel como la aproximación mediante la aplicación del Teorema de Rohatgi presentan una buena estimación, por su parte la Función de Pearson sí aparece definida en el punto cero, pero su aproximación es peor. En la figura 3.2 podemos observar con un mayor detalle el diferente comportamiento en el entorno del punto cero de la función Bessel y de la aplicación del teorema de Rohatgi.

3.2.2. Producto de dos variables Normales Iguales

Supongamos dos variables normales igualmente distribuidas $X \sim N(\mu, \sigma)$ e $Y \sim N(\mu, \sigma)$ con coeficiente de correlación $\rho = 0$. Los valores de los estadísticos del producto de ambas variables serían:

- Media: μ^2
- Varianza: $2\mu^2\sigma^2 + \sigma^4$
- Asimetría: $\frac{6\mu^2\sigma^4}{(2\mu^2\sigma^2 + \sigma^4)^{3/2}}$
- Kurtosis (exceso de kurtosis): $6 - \frac{24\sigma^2}{(2\mu^2 + \sigma^2)^2}$

En este caso la definición del producto $Z = XY$ no se puede obtener a través de la aproximación de Bessel, pero sí podemos utilizar algunos de los procedimientos que hemos visto en el apartado anterior. Si utilizamos una distribución de tipo Pearson, podemos ver que salvo en el caso que el valor de μ sea nulo, el producto de dos variables normales estándar presentará un determinado nivel de asimetría. En este sentido, se aleja la posibilidad de utilizar una distribución normal como medio de aproximación.

3.2.2.1. Teorema de Rohatgi

Dado que las variables X e Y son distribuciones continuas en un rango infinito, para poder aplicar el Teorema de Rohatgi tenemos que limitar el rango considerado. Con el objetivo de cubrir la mayor parte de la distribución optamos por un rango $X, Y \in (\mu \pm 3\sigma)$. El algoritmo para representar la distribución del producto presenta tres escenarios diferentes, como resultado del valor del rango de variables (a, b) donde $a = \mu - 3\sigma < b = \mu + 3\sigma$.

- Escenario I: $(a, b) = (c, d) \subset \mathbb{R}_+$. En esta situación consideramos sólo dos integrales:

$$h(z) = \begin{cases} \int_a^{v/a} f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & a^2 < v < ab \\ \int_{v/b}^b f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & ab < v < b^2 \end{cases} \quad (3.4)$$

- Escenario II: $(a, b) = (c, d) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$, es una situación muy similar a la del Escenario I, pero hemos considerado sólo valores negativos para Z ; obviamente, tenemos que tener en cuenta que $b < a$ e intercambiar el orden de integración.
- Escenario III: $0 \in (a, b)$. En este caso si el punto medio del intervalo es cero, entonces estamos en la misma situación que en el producto de dos variables normales estándar sin correlación, y tenemos que utilizar el mismo método que en el apartado anterior, pero con los nuevos extremos del intervalo (a, b) . Si el punto medio del intervalo no es cero, tenemos que considerar la parte negativa y la parte positiva, y con el objetivo de evitar la singularidad en cero, podemos utilizar como valores extremos de los subintervalos $-0,01$ y $0,01$ como hicimos en el apartado anterior. Por otro lado, si cero no es el punto medio del intervalo (a, b) entonces dicho intervalo presenta una asimetría, o bien positiva, o bien

negativa; esto es, la longitud del intervalo es diferente para $Z > 0$ que para $Z < 0$. Consideremos que existe una asimetría positiva y la longitud del intervalo es mayor en el lado positivo; entonces, tenemos (a, b) con $a < 0, b > 0$ y $|a| > |b|$. Ahora definimos la función densidad $h(z)$ del producto $Z = XY$.

1. Si $Z > 0$, los valores de X e Y son o bien ambos positivos, o bien negativos y entonces:

$$h(z) = \begin{cases} \int_{0,01}^{v/0,01} f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx - \int_{-v/0,01}^{-0,01} f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & 0,01^2 < v < 0,01b \\ \int_{v/b}^b f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx - \int_{-v/0,01}^{-0,01} f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & 0,01b < v < 0,01(-a) \\ \int_{v/b}^b f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx - \int_a^{v/a} f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & 0,01(-a) < v < a^2 \\ \int_{v/b}^b f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & a^2 < v < b^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

2. Si $Z < 0$, en este caso los valores de X e Y tienen signo diferente y ahora la función $h(z)$ es:

$$h(z) = \begin{cases} 2 \int_a^{v/0,01} f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx + 2 \int_{v/b}^{v/0,01} f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & ab < v < -0,01b \\ 2 \int_a^{v/0,01} f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx + 2 \int_{v/b}^{v/0,01} f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx + 2 \int_{v/b}^{-0,01} f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & -0,01b < v < 0,01a \\ 2 \int_{v/b}^{v/0,01} f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx + 2 \int_{v/b}^{-0,01} f\left(\frac{v}{x}\right) f(x) \frac{1}{x} dx & 0,01a < v < -0,01^2 \end{cases} \quad (3.6)$$

3.2.2.2. Función de Pearson

Hemos utilizado la función de Pearson Tipo III (tal como sugiere Aroian (1947)), para ello optamos por buscar que parámetros tendría que tener dicha función para que los estadísticos coincidiesen con los del producto de las dos variables normales que definimos a partir de la función generadora de momentos. Los valores de los estadísticos de una función de Pearson Tipo III de cinco parámetros $(a_1, a_0, b_2, b_1, b_0)$ son:

- Media: $\frac{-a_0 + b_1}{a_1}$.
- Varianza: $\frac{b_0}{a_1}$.
- Asimetría: $\frac{2b_0b_1}{a_1^2(b_0/a_1)^{3/2}}$.
- Kurtosis: $\frac{3(a_1^2b_0^2 + 2a_1b_0b_1^2)}{a_1^2b_0^2}$.

Calculando los valores de la media, varianza, asimetría y kurtosis del producto de variable, podemos plantear el correspondiente sistema que nos permite calcular los valores de los parámetros de la distribución de Pearson tipo III que utilizaremos como aproximación. Para realizar los cálculos solo hemos considerado los valores de media,

varianza y asimetría, dado que no es posible obtener siempre una solución completa con los cuatro estadísticos del producto; y, por tanto, hemos estimado los parámetros de la distribución de Pearson utilizando los supuestos sobre la distribución teórica de los parámetros de Pearson para estos tres estadísticos.

A continuación, observamos el comportamiento de estas dos aproximaciones y la simulación mediante el método de MonteCarlo. Las simulaciones realizadas han considerado tres posibilidades en función del valor del inverso del coeficiente de variación $r = \frac{\mu}{\sigma}$, diferenciando el caso en que dicho coeficiente es pequeño y el caso en el que el valor de dicho coeficiente es grande; en este segundo caso, hemos diferenciado entre la situación en la que la media es grande y aquella en que la varianza tiende a cero, y por tanto el cociente tiende a infinito.

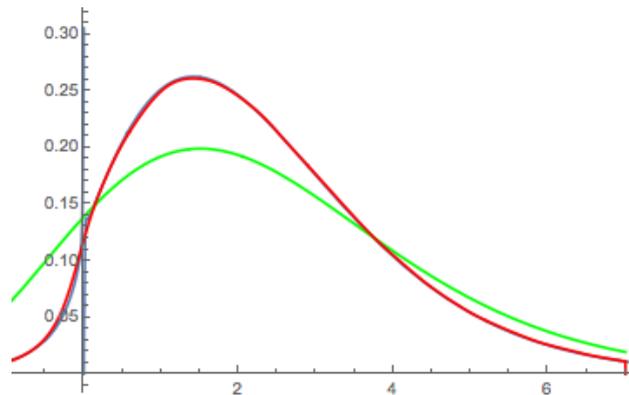


Figura 3.3: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $N(1,5,0,75)$ con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)

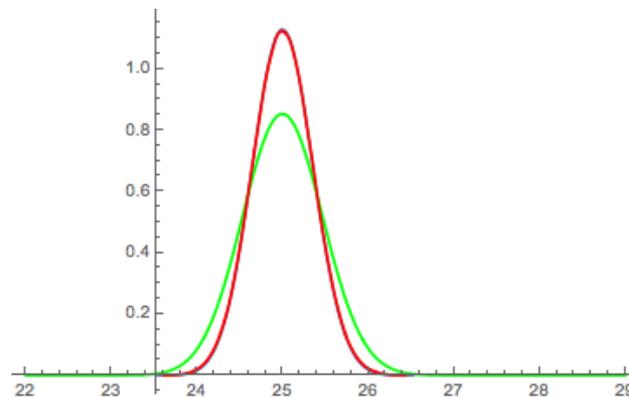


Figura 3.4: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $N(5,0,05)$ con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)

En las figuras 3.3, 3.4 y 3.5 podemos ver una simulación del producto de dos variables normales no correlacionadas con los mismos parámetros y sin correlación. Los valores considerados han sido:

1. $X, Y \sim N(1,5,0,75)$ entonces $r = 2$.
2. $X, Y \sim N(5,0,05)$ entonces $r = 100$. Valor pequeño de la varianza (σ^2)

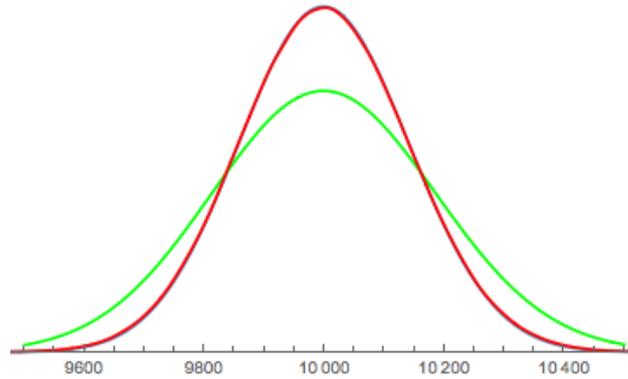


Figura 3.5: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $N(100, 1)$ con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)

3. $X, Y \sim N(100, 1)$ entonces $r = 100$. Valor grande de la media (μ)

En el primer caso el valor del inverso coeficiente de variación es pequeño, mientras que en el segundo y tercer caso presenta un valor alto (100) aunque el primer caso es debido al pequeño valor de la varianza que se aproxima a cero, y, por el contrario, en el tercer caso el alto valor del inverso del coeficiente de variación se debe al alto valor de la media (100).

El ajuste del Teorema de Rohatgi es muy bueno en todos los casos, aunque presenta la particularidad del comportamiento asintótico en el entorno de valor cero. Por su parte la aplicación de la Distribución de Pearson Tipo III, presenta unos ajustes mucho peores, propiciados por el desajuste que se produce en el valor de la kurtosis. Aun así, podemos observar que un alto valor del inverso del coeficiente de variación conlleva un mejor ajuste mediante la función tipo III de Pearson que cuando el valor de dicho coeficiente es pequeño.

3.2.3. Producto de dos variables Normales

Supongamos dos variables normales con distribución $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con coeficiente de correlación $\rho = 0$. Los valores de los estadísticos del producto de ambas variables serían:

- Media: $\mu_x \mu_y$
- Varianza: $\mu_y^2 \sigma_x^2 + (\mu_x^2 + \sigma_x^2) \sigma_y^2$
- Asimetría: $\frac{6\mu_x \mu_y \sigma_x^2 \sigma_y^2}{(\mu_y^2 \sigma_x^2 + (\mu_x^2 + \sigma_x^2) \sigma_y^2)^{3/2}}$
- Kurtosis (exceso de kurtosis): $\frac{6\sigma_x^2 \sigma_y^2 (2\mu_y^2 \sigma_x^2 + (2\mu_x^2 \sigma_x^2) \sigma_y^2)}{(\mu_y^2 \sigma_x^2 + (\mu_x^2 + \sigma_x^2) \sigma_y^2)^2}$

Estamos en un caso similar al anterior donde las dos variables normales tenían los mismos parámetros, y al igual que antes no es posible utilizar la aproximación mediante la función de Bessel para estimar el producto. Tenemos dos posibilidades: aplicar el teorema de Rohatgi o bien utilizar una aproximación mediante la función de Pearson, en esta última posibilidad hemos optado por utilizar una función de tipo III.

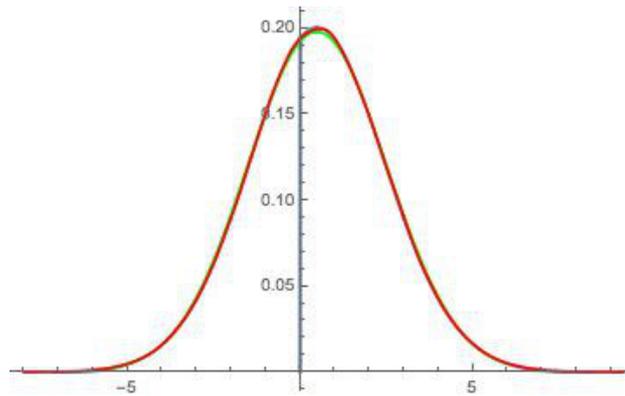


Figura 3.6: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(1, 0, 1)$ (r grande) e $Y \sim N(0, 5, 2)$ (r pequeño) con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)

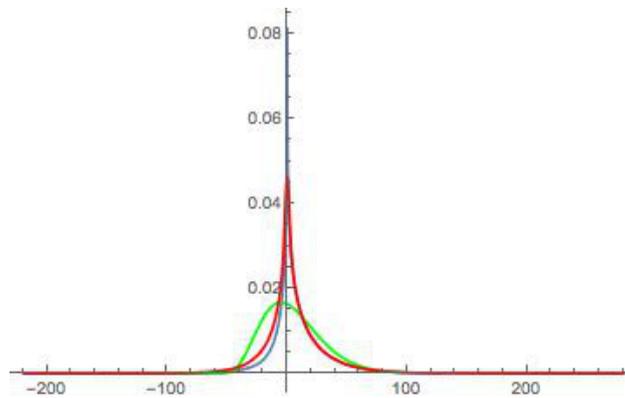


Figura 3.7: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(1, 2)$ (r pequeño) e $Y \sim N(5, 10)$ (r pequeño) con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)

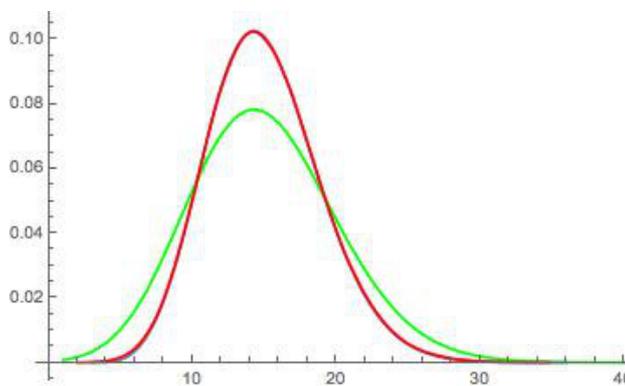


Figura 3.8: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(3, 0, 5)$ (r grande) e $Y \sim N(5, 1)$ (r grande) con $\rho = 0$: Simulación (rojo), Teorema de Rohatgi (azul claro) y Función Pearson (verde)

Para analizar las diversas situaciones, hemos considerado los efectos que tienen sobre la distribución del producto la presencia de diversos valores de los inversos del coeficiente de variación r de las dos distribuciones normales utilizadas. Hemos considerado tres casos: Ambos valores son pequeños (<1), ambos valores son grandes (>1) o bien, una distribución presenta un valor grande y la otra un valor pequeño. Los resultados gráficos de las diferentes aproximaciones se recogen en las figuras 3.6, 3.7 y 3.8. En todos los casos considerados, la aproximación mediante el teorema de Rohatgi coincide de forma bastante aceptable con la simulación mediante el Método de MonteCarlo. Por su parte, la utilización de la función de Pearson Tipo III no siempre presenta buenos resultados; cuando el valor de r de una de las variable es pequeño (< 1) mientras que la otra presenta un valor grande (> 1), los resultados son buenos, pero cuando ambas variables presentan valores grandes o valores pequeños para r , entonces se produce distorsiones importantes con la simulación.

Por tanto, la aproximación mediante funciones de Pearson Tipo III sería aconsejable en el caso de tener dos variables con valores de diferente carácter para los inversos del coeficiente de variación; cuando alguna de ellas presenta valores pequeños, esto es, menores que uno, y la otra un valor grande, mayor que uno, la aproximación es buena y recoge de forma adecuada la distribución del producto de las dos variables normales. En el resto de casos la aproximación mediante la función de Pearson tipo III no presenta buenos resultados en relación a la simulación.

Tabla 3.1: Aproximación Mediante Funciones del Producto de Variables Normales con $\rho = 0$

Dos Variables Normales	Función Aproximación
Estándar	Función de Bessel
Iguales	Teorema de Rohatgi
Diferentes con $r > 1$ y $r < 1$	Función de Pearson Tipo III
Diferentes con $r > 1$	Teorema de Rohatgi
Diferentes con $r < 1$	Teorema de Rohatgi

En general, para el caso de dos variables normales independientes ($\rho = 0$) la utilización del método planteado por el Teorema de Rohatgi es muy buena en todos los casos, con la excepción del valor 0 donde el teorema de Rohatgi no está definido y donde la distribución del producto presentaría un carácter asintótico que no se detecta en las diversas simulaciones realizadas mediante el método de MonteCarlo. En algunos casos, también es posible utilizar algunas otras aproximaciones que presentan unos buenos resultados, siendo funciones mucho más fáciles de calcular que las utilizadas en el Teorema de Rohatgi. En la tabla 3.1 presentamos un pequeño resumen donde vemos que sólo en dos casos la aproximación mediante funciones de Bessel o funciones de Pearson Tipo III son buenas. En general, la simulación del producto siempre se va a adaptar al resultado de la aplicación del Teorema de Rohatgi.

3.3. Producto de dos Variables Normales con correlación no nula

La presencia de correlación entre las dos variables normales del producto tiene importantes consecuencias a la hora de utilizar las aproximaciones mediante funciones o distribuciones existentes utilizadas cuando no hay correlación. En este caso no es posible aplicar el teorema de Rohatgi, por lo que estos casos tienen que ser abordados mediante la aproximación utilizando funciones tipo Pearson u otras distribuciones, mismo la propia distribución normal, que presenten los mismos valores de media, varianza, asimetría y kurtosis que el producto, o bien otros métodos que utilizan funciones.

En esta sección consideramos el producto de dos variables normales $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ cuando $\rho \neq 0$ y, por tanto, existe correlación entre ambas variables. Para realizar las simulaciones del producto, al igual que en la sección anterior, hemos utilizado el método de MonteCarlo considerando 1.000.000 de instancias de cada una de las variables elegidas de forma aleatoria y calculando los productos.

Por su parte, los valores de los estadísticos del producto de ambas variables, calculados a partir de la función generadora de momentos, son los siguientes:

- Media: $\mu_x\mu_y + \rho\sigma_x\sigma_y$
- Varianza: $(\mu_x\mu_y + \rho\sigma_x\sigma_y)^2 + 4\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + \mu_x^2(\mu_y^2 + \sigma_y^2) + \sigma_x^2(\mu_y^2 + \sigma_y^2 + 2\rho^2\sigma_y^2)$
- Asimetría: $\frac{2\sigma_x\sigma_y(3\rho\sigma_x^2\mu_y^2 + 3\mu_x\mu_y(1+\rho^2)\sigma_x\sigma_y + \rho(3\mu_x^2 + (3+\rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1+\rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^{3/2}}$

3.3.1. Producto de dos variables Normales Estándar

Comenzamos considerando el caso de dos variables estándar normalmente distribuidas $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$ con coeficiente de correlación $\rho \neq 0$. Ahora ya no podemos utilizar la función de Bessel directamente, ni tampoco el Teorema de Rohatgi. En este caso, sólo disponemos de la aproximación mediante una función de Pearson tipo III. Recientemente, en Cui et al. (2016) y Nadarajah y Pogány (2016) se ha propuesto una expresión que utiliza la función de Bessel para el caso de este producto con la siguiente función de densidad para $Z = XY$:

$$h(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{\rho z}{1-\rho^2}} K_0\left(\frac{|z|}{1-\rho^2}\right), \quad (3.7)$$

donde K_0 es la función modificada de Bessel de segunda clase de orden 0.

Los resultados de las diferentes aproximaciones se pueden ver en las figuras 3.9 y 3.10, donde hemos considerados dos casos, uno de ellos con correlación negativa y otro con correlación positiva. La aproximación que utiliza la función Bessel es mejor, con la excepción de que no está definida en cero. Por su parte, la aproximación mediante la función de Pearson Tipo III no presenta buenos resultados para el caso del producto de variables normales estándar con correlación

Por tanto, al igual que en el caso del producto de variables normales estándar la mejor aproximación sería utilizar una función tipo Bessel, en este caso modificada según se establece en Cui et al. (2016) y en Nadarajah y Pogány (2016). En general, la aproximación es buena, pero se ve afectada por el valor de ρ , cuando la correlación es

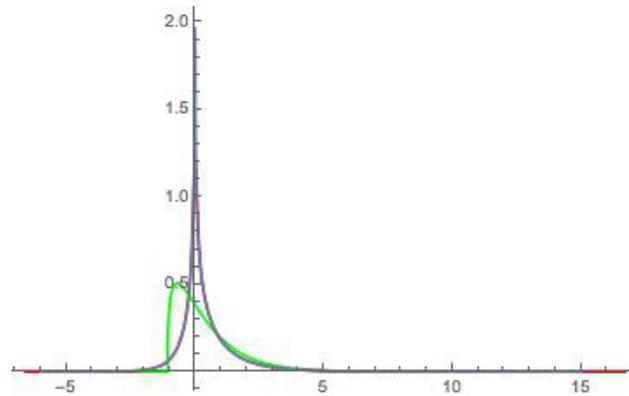


Figura 3.9: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X, Y \sim N(0, 1)$ con $\rho = 0,4$: Simulación (rojo), Función Tipo Bessel (azul claro) y Función Pearson (verde)

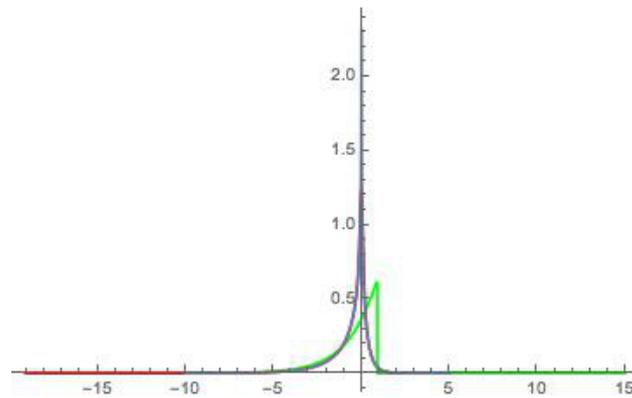


Figura 3.10: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(0, 1)$ con $\rho = -0,6$: Simulación (rojo), Función Tipo Bessel (azul claro) y Función Pearson (verde)

pequeña podemos ver que la aproximación es peor que cuando la correlación es grande (ver figura 3.11). En todos los casos considerados, la aproximación con la función de Bessel presenta una carácter asintótico en torno al punto cero que no se produce en el caso de la simulación mediante el método MonteCarlo.

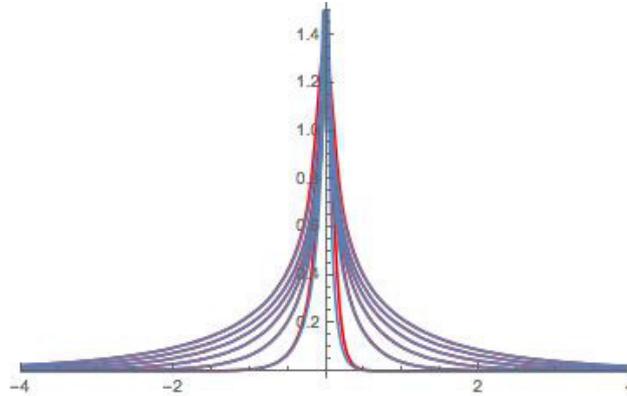


Figura 3.11: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(0, 1)$ con $\rho \in (-0,9, 0,9)$ con paso 0,33: Simulación (rojo), Función Tipo Bessel (azul claro) y Función Pearson (verde)

3.3.2. Producto de dos variables Normales

El análisis del producto de dos variables normales $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con coeficiente de correlación $\rho \neq 0$ se realiza considerando tres aproximaciones. Una simulación mediante el método MonteCarlo donde se tiene 10^6 elementos de cada distribución, una aproximación utilizando la función de Bessel desarrolla en Cui et al. (2016) y por último, una aproximación mediante una función de Pearson Tipo III donde se considera que los valores de la media, varianza y asimetría son los mismos que en la distribución del producto de variables normales, calculados a partir de la función generadora de momentos del producto.

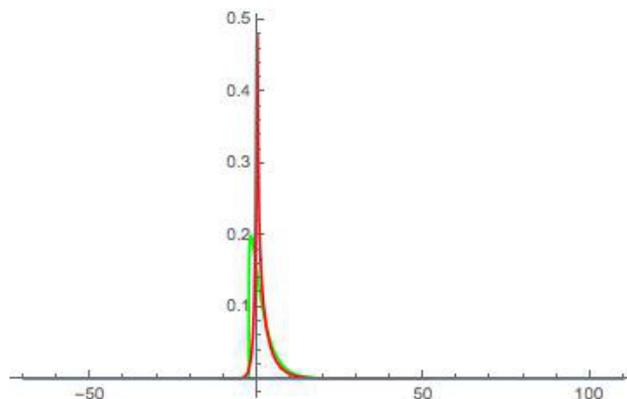


Figura 3.12: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(0,5, 1)$ e $Y \sim N(1, 2)$ con $\rho = 0,5$: Simulación (rojo), Función Tipo Bessel (azul claro) y Función Pearson (verde)

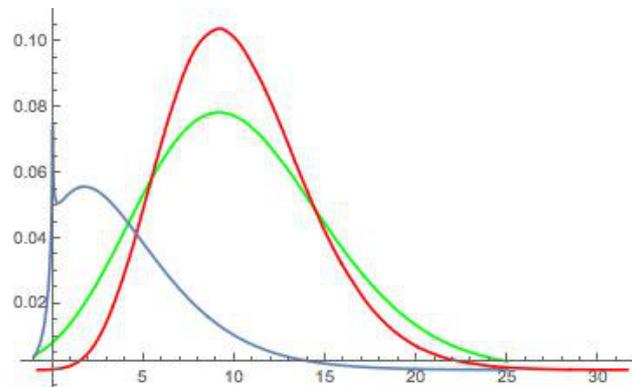


Figura 3.13: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(5, 1)$ e $Y \sim N(2, 0,5)$ con $\rho = 0,5$: Simulación (rojo), Función Tipo Bessel (azul claro) y Función Pearson (verde)

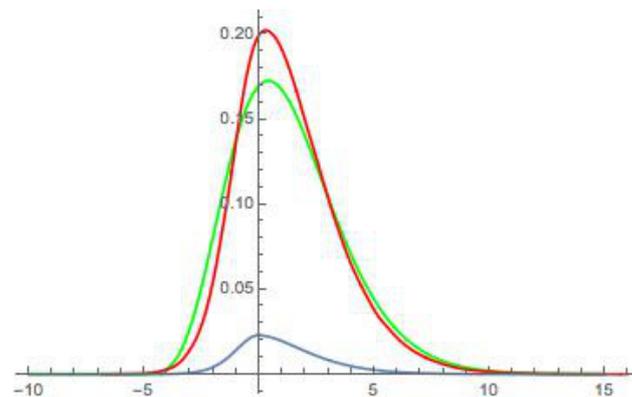


Figura 3.14: Ejemplos del Producto de dos Variables Normales $X \sim N(0,5, 1)$ e $Y \sim N(2, 0,5)$ con $\rho = 0,5$: Simulación (rojo), Función Tipo Bessel (azul claro) y Función Pearson (verde)

Los representaciones gráficas de las diferentes aproximaciones se recogen en las figuras 3.12, 3.13 y 3.14. En general, los dos métodos considerados no presentan una buena aproximación a la simulación del producto de variables normales. Si consideramos el efecto del valor del inverso del coeficiente de variación (r) observamos: cuando ambas variables presentan un valor pequeño ($r < 1$), la aproximación mediante la función de Bessel es bastante buena, mientras que la función de Pearson tipo III es peor. Cuando ambas variables presentan un valor grande ($r > 1$) para el inverso de coeficiente de variación supone que la aproximación de la función de Pearson tipo III es mejor que la producida por la función de tipo Bessel e igualmente, sucede cuando consideramos situaciones donde las dos distribuciones normales presentan valores contrapuestos para el inverso del coeficiente de variación. En cierta medida, la presencia de valores grandes del coeficiente de variación aproxima el producto a la distribución normal y de ahí, el mejor comportamiento de la aproximación mediante la función de Pearson tipo III. Por su parte cuando las dos variables presentan valores pequeños del inverso coeficiente de variación, el producto presenta una distribución más alejada de la distribución normal.

El análisis realizado muestra que tanto la aproximación mediante funciones de Bessel como la aproximación mediante funciones de Pearson tiene ventajas y desventajas en función de los parámetros de las distribuciones normales consideradas en el producto. En este sentido, en Cui et al. (2016), no se obtiene una fórmula exacta del producto de distribuciones normales, aunque permite muy buenas aproximaciones para algunos ejemplos del producto. Por su parte, la utilización de funciones de Pearson recoge de forma aceptable el producto de variables normales en algunos casos, aunque se ve perjudicada porque dicha aproximación no controla el valor de kurtosis del producto y esto provoca algunas diferencias entre la simulación del producto y la aproximación mediante funciones de tipo Pearson.

La última parte de este capítulo la dedicaremos al estudio y análisis de los valores de asimetría y kurtosis del producto de variables normales, puesto que son estos dos estadísticos los que más influyen en la distribución del producto y los que nos alejan en mayor o menor medida de la normalidad.

3.4. Asimetría del Producto de dos Variables Normales

Dado un producto de dos variables normales $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con coeficiente de correlación $\rho \in (-1, 1)$ podemos determinar el valor de la media, varianza, asimetría y kurtosis de dicha distribución, aunque no podemos dar un valor general de la función de densidad (PDF) de dicha distribución. En el capítulo 2, ya comentamos que los valores de los estadísticos de la distribución producto se podían obtener a partir de la función generadora de momentos, de forma que dichos valores varían en función de los parámetros de las dos distribuciones consideradas en el producto y su coeficiente de correlación. En esta sección nos centraremos en la evolución de la asimetría, posteriormente, en la siguiente sección estudiaremos la kurtosis.

Podemos calcular todos los estadísticos del producto de distribuciones normales, a partir de la función generadora de momentos:

Proposición 3.4.1 Sean $x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ dos variables normales con

correlación ρ . Definimos $x = x_0 + z_1$ and $y = x_0 + z_2$, donde

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\sigma_x\sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 - r\sigma_x\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y^2 - r\sigma_x\sigma_y \end{bmatrix} \right), \quad (3.8)$$

Las dos variables x e y se descomponen en dos sumandos independientes, entonces la función generadora de momentos de $z = xy = (x_0 + z_1)(x_0 + z_2)$ es

$$M_z[t] = \frac{\exp \frac{t(\mu_y^2\sigma_x^2 + t\mu_x^2\sigma_y^2 - 2\mu_x\mu_y(-1 + t r\sigma_x\sigma_y))}{2 + 2t\sigma_x\sigma_y(-2r + t(-1 + r^2)\sigma_x\sigma_y)}}{\sqrt{1 + t\sigma_x\sigma_y(-2r + t(-1 + r^2)\sigma_x\sigma_y)}} \quad (3.9)$$

Demostración. La función generadora de momentos $z = xy$ es la misma que de $z = (x_0 + z_1)(x_0 + z_2)$, que es el producto de dos variables independientes, entonces, tenemos

$$M_z[t] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} f(z) dz \quad (3.10)$$

La función de densidad de probabilidad conjunta (pdf) $f(z)$ se puede escribir como el producto de tres funciones de densidad marginal independientes,

$$f(z) = f_{x_0}(x_0)f_{z_1}(z_1)f_{z_2}(z_2) = \frac{\exp \left(-\frac{x_0^2}{2r\sigma_x\sigma_y} - \frac{(z_1 - \mu_x)^2}{2(\sigma_x^2 - r\sigma_x\sigma_y)} - \frac{(z_2 - \mu_y)^2}{2(\sigma_y^2 - r\sigma_x\sigma_y)} \right)}{2\sqrt{2}\pi^{3/2} \sqrt{r\sigma_x\sigma_y} \sqrt{\sigma_x^2 - r\sigma_x\sigma_y} \sqrt{\sigma_y^2 - r\sigma_x\sigma_y}} \quad (3.11)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} M_z[t] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} f_{x_0}(x_0) f_{z_1}(z_1) f_{z_2}(z_2) dx_0 dz_1 dz_2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^{3/2} \sqrt{r\sigma_x\sigma_y} \sqrt{\sigma_x^2 - r\sigma_x\sigma_y} \sqrt{\sigma_y^2 - r\sigma_x\sigma_y}} \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x_0+z_1)(x_0+z_2) - \frac{x_0^2}{2r\sigma_x\sigma_y} - \frac{(z_1 - \mu_x)^2}{2(\sigma_x^2 - r\sigma_x\sigma_y)} - \frac{(z_2 - \mu_y)^2}{2(\sigma_y^2 - r\sigma_x\sigma_y)}} dx_0 dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde tenemos los siguientes supuestos: $t \in \mathbb{Z}$ es no negativo, $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$, $\sigma_x, \sigma_y, \mu_x, \mu_y$ todos ellos números reales, $-1 \leq r \leq 1$. Resolviendo la integral (3.12) en base a los supuestos anteriores resulta,

$$\frac{\sqrt{\sigma_y(-r\sigma_x - \sigma_y)} \sqrt{-r\sigma_y(r\sigma_y - \sigma_x)} \exp \left(\frac{t(\mu_x^2\sigma_y^2 t - 2\mu_x\mu_y(r\sigma_x\sigma_y t - 1) + m\mu_y^2\sigma_x^2 t)}{2((r-1)\sigma_x\sigma_y t - 1)((r+1)\sigma_x\sigma_y t - 1)} \right)}{\sqrt{\sigma_y(\sigma_y - r\sigma_x)} \sqrt{r\sigma_y(\sigma_x - r\sigma_y)} \sqrt{(r^2 - 1)\sigma_x^2\sigma_y^2 t^2 - 2r\sigma_x\sigma_y t + 1}} \quad (3.13)$$

Entonces, simplificando la expresión en (3.13) obtenemos (3.9), como expresión de la función generadora de momentos del producto $z = xy$. ■

Por tanto, la asimetría de producto de dos variables normales calculada a partir de la derivada de orden 3 de la función generadora de momentos en $t = 0$ y la varianza del producto $Z = XY$, resulta:

Proposición 3.4.2 Sean $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ dos variables normales con coeficiente de correlación ρ , entonces el coeficiente de asimetría del producto $Z = XY$ es:

$$\frac{2\sigma_x\sigma_y(3\rho\sigma_x^2\mu_y^2 + 3\mu_x\mu_y(1 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y + \rho(3\mu_x^2 + (3 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^{3/2}}, \quad (3.14)$$

Demostración. En 3.4.1 hemos determinado el valor de la función generadora de momentos de $Z = XY$ (3.9), para calcular el coeficiente de asimetría del producto consideramos la derivada tercera de 3.9 evaluado en el punto $t = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d^3 M_z(t)}{dt^3} &= 9\mu_x^2\rho\sigma_x\sigma_y(\mu_y^2 + \sigma_y^2) + \mu_x^3(\mu_y^3 + 3\mu_y\sigma_y^2) + \\ &3\mu_x\mu_y\sigma_x^2(\mu_y^2 + 3(1 + 2\rho^2)\sigma_y^2) + 3\rho\sigma_x^3\sigma_y(3\mu_y^2 + (3 + 2\rho^2)\sigma_y^2) \end{aligned}$$

En este caso, el momento centrado de orden 3, μ_3 , resulta:

$$2 + \mu_z^3 - 3\mu_z \frac{d^2 M_z(t)}{dt^2} + \frac{d^3 M_z(t)}{dt^3} = 2\sigma_x\sigma_y(3\mu_y^2\rho\sigma_x^2 + 3\mu_x\mu_y(1 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y + \rho(3\mu_x^2 + (3 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)$$

Ahora, la asimetría sería el cociente entre el momento centrado de orden 3 y el momento centrado de orden 2 elevado a 3/2.

$$\alpha_3[z] = \frac{2\sigma_x\sigma_y(3\mu_y^2\rho\sigma_x^2 + 3\mu_x\mu_y(1 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y + \rho(3\mu_x^2 + (3 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^{3/2}}$$

■

Observamos que los valores de los parámetros de las dos distribuciones junto al coeficiente de correlación son los parámetros que determinan el valor de la asimetría. En este sentido, alejan o aproximan el valor de asimetría a cero (valor de la distribución normal) y de esta forma, alejan o aproximan la distribución del producto a la distribución normal. En Oliveira et al. (2016b) los autores presentan un análisis sobre la evolución del valor de la asimetría del producto, donde analizan como los diferentes valores de los parámetros de las distribuciones implicadas en el producto influyen en la asimetría (o skewness) de éste.

3.4.1. Producto de dos variables Normales Correlacionadas

De acuerdo con el análisis realizado en Oliveira et al. (2016b), para el producto de dos variables normales con correlación $\rho \neq 0$ se consideran tres situaciones:

1. Producto de dos variables normales estándar $N(0, 1)$ con $\rho = 1$. En este caso, la asimetría del producto es $2\sqrt{2}$ y coincide con la asimetría de la distribución Chi-cuadrado con 1 grado de libertad.
2. Dos variables normales con la misma media $\mu_x = \mu_y = \mu$ y desviación estándar unitaria $\sigma_x = \sigma_y = 1$. En este caso, la asimetría viene determinado por el valor de la media y del coeficiente de correlación ρ .

$$\alpha_3[z] = \frac{2(3\mu^2\rho + 3\mu^2(1 + \rho^2) + r(3 + 3\mu^2 + \rho^2))}{(1 + 2\mu^2 + 2\mu^2\rho + \rho^2)^{3/2}} \quad (3.15)$$

La evolución de la simetría es función de los valores de la media y correlación (ver figura 3.15). Cuando la media es cero, la asimetría es una función creciente del coeficiente de correlación, de forma que cuando ρ tiende a cero, la asimetría tiende a ser nula (como en la distribución normal), pero cuando el coeficiente de correlación es positivo, la asimetría es creciente hasta alcanzar su valor máximo $2\sqrt{2}$ y cuando la correlación es negativa la asimetría, también creciente, alcanza su valor mínimo $-2\sqrt{2}$.

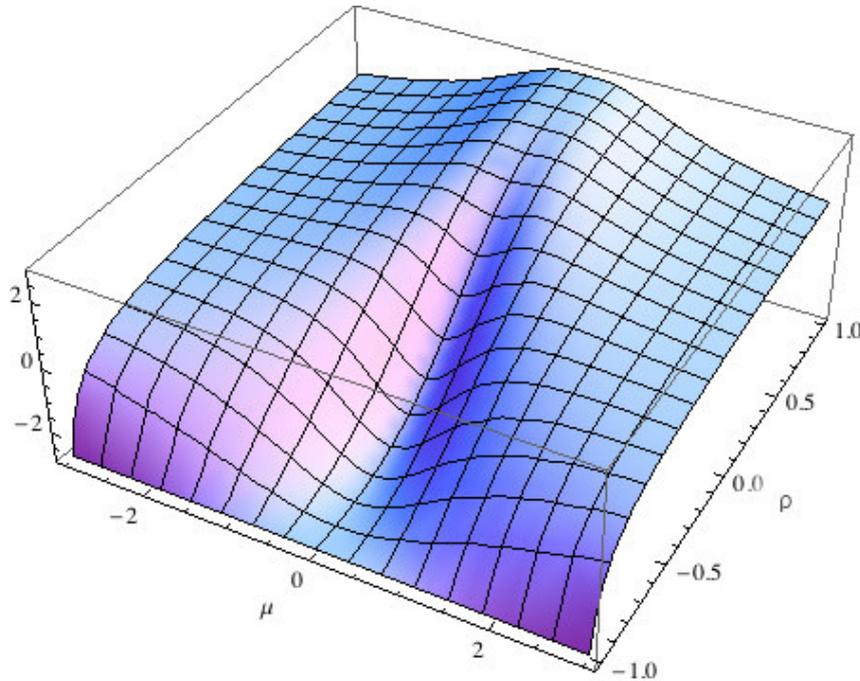


Figura 3.15: Asimetría para el producto de dos variables normales con la misma media y desviación típica unitaria

3. Dos variables normales con la misma media $\mu_x = \mu_y = \mu$ y desviación típica $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. En general, la asimetría tiende a cero cuando el valor de σ tiende a cero. Por su parte, cuando más próximo éste el valor del coeficiente de correlación a uno, la aproximación a cero de la asimetría es más lenta (ver figura 3.16).

Cuando consideramos diferentes medias o varianzas, la evolución de la asimetría presenta una mayor variabilidad en función de los parámetros de las distribuciones normales implicadas en el producto (Oliveira et al. (2016a)):

1. Si consideramos la misma varianza y valores diferentes para la media, cuando $\sigma \rightarrow 0$ la asimetría tiende a cero.
2. Cuando la desviación estándar aumenta, la asimetría aumenta supuesto que la correlación y la media no varían.
3. Si tenemos la misma media, la asimetría es habitual, y sólo cuando la desviación típica es pequeña, la asimetría tiende a cero.
4. En general, la asimetría cero o pequeña requiere que ρ tienda a cero, esto es o bien no existe correlación entre las variables o esta es muy pequeña.

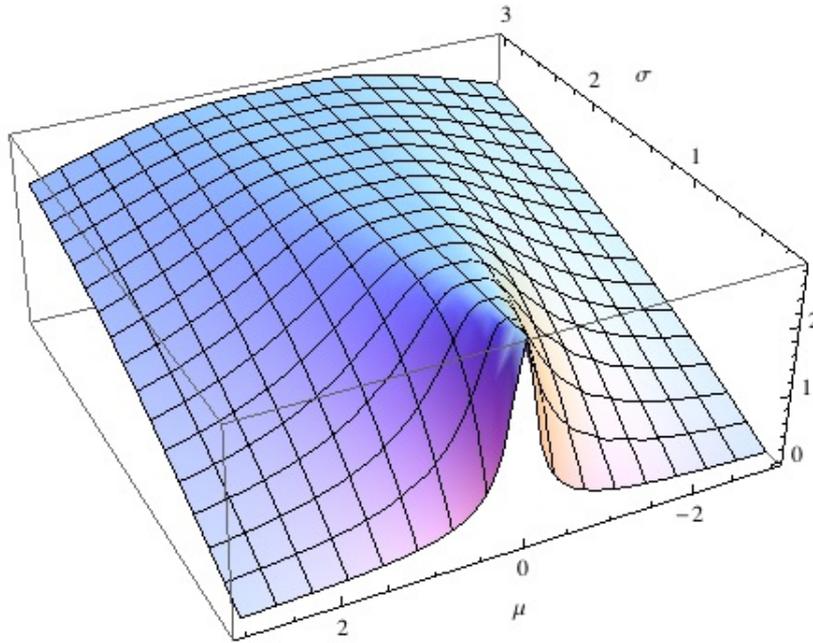


Figura 3.16: Asimetría para el producto de dos variables normales iguales con $\rho = 1$

3.4.2. Producto de dos variables Normales No Correlacionadas

Consideramos dos variables normales con correlación nula ($\rho = 0$), en este caso la expresión del valor de la asimetría viene dada por:

$$\alpha_3[z] = \frac{6\mu_x\mu_y\sigma_x^2\sigma_y^2}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + (\mu_x^2 + \sigma_x^2)\sigma_y^2)^{3/2}}. \quad (3.16)$$

Analizamos el efecto sobre la asimetría de los parámetros de las distribuciones normales considerando el inverso del coeficiente de variación de las dos distribuciones $r_x = \frac{\mu_x}{\sigma_x}$ and $r_y = \frac{\mu_y}{\sigma_y}$. En este caso, la asimetría viene dada:

$$\alpha_3[z] = \frac{6r_x r_y}{(r_y^2 + r_x^2 + 1)^{3/2}} \quad (3.17)$$

Podemos ver la evolución de la asimetría en la figura 3.17. Cuando $r_x \rightarrow 0$ y $r_y \rightarrow 0$ entonces $\alpha_3[z] \rightarrow 0$, esto también se verifica cuando uno de dichos valores tiende a cero y el otro no tiende a valores grandes.

La aproximación a la distribución normal del producto de dos variables está condicionada por la existencia de valores grandes para r_x, r_y . Cuando la asimetría disminuye se mejora la aproximación a la normal. Podemos determinar los puntos extremos de asimetría considerando la diferencial de la expresión 3.17 con respecto a las dos variables (r_x, r_y) .

$$\left(\frac{\partial \alpha_3[z]}{\partial r_x}, \frac{\partial \alpha_3[z]}{\partial r_y} \right) = \left(\frac{6r_y(1 - 2r_x^2 + r_y^2)}{(1 + r_x^2 + r_y^2)^{5/2}}, \frac{6r_x(1 - 2r_y^2 + r_x^2)}{(1 + r_x^2 + r_y^2)^{5/2}} \right) \quad (3.18)$$

Hay cinco puntos críticos (r_x, r_y) : $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$. Para determi-

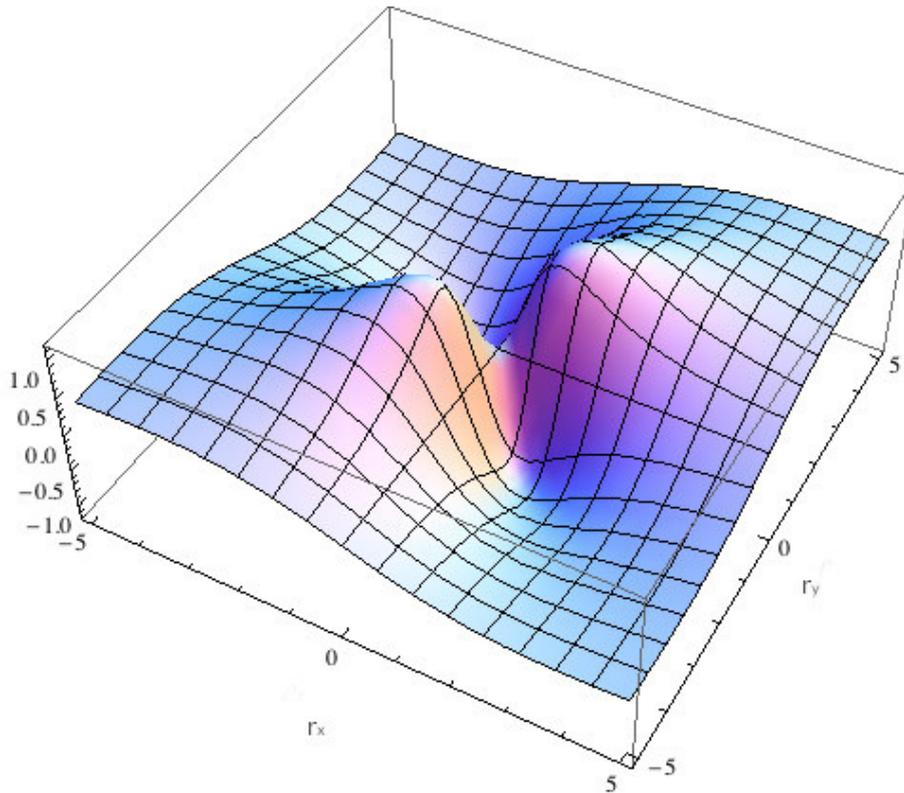


Figura 3.17: Asimetría en función de los ratios r_x y r_y

nar los valores extremos utilizamos la matriz hessiana $H(r_x, r_y)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{18r_x r_y (2r_x^2 - 3(1+r_y^2))}{(1+r_x^2+r_y^2)^{7/2}} & -\frac{6(1-2r_x^4+r_y^2+2r_y^4+r_x^2(1-11r_y^2))}{(1+r_x^2+r_y^2)^{7/2}} \\ -\frac{6(1-2r_x^4+r_y^2+2r_y^4+r_x^2(1-11r_y^2))}{(1+r_x^2+r_y^2)^{7/2}} & -\frac{18r_x r_y (3+r_x r_y (3+3r_x^2-2r_y^2))}{(1+r_x^2+r_y^2)^{7/2}} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Tenemos en $H(0,0)$ un punto de silla; en $H(1,1)$ y $H(-1,-1)$ hay dos máximos con valor $\frac{2}{\sqrt{3}}$ y, en $H(-1,1)$ y $H(1,-1)$ dos mínimos con valor $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. Así, la asimetría de $z = xy$ es mayor cuando $|\mu_x| = \sigma_x$ y $|\mu_y| = \sigma_y$.

En la figura (3.18) representamos la evolución de la asimetría del producto como función de la media y la varianza. En el primer gráfico consideramos $\mu_x = 1, \mu_y, \sigma_y = 1$ y representamos la asimetría (skewness) *vs.* σ_x , para tres valores diferentes de $\mu_y = 0,5, 1, 5$. Cuando σ_x crece, la asimetría es creciente hasta un valor máximo a partir del cual decrece, cuanto mayor sean los valores de μ_y más rápido será el decrecimiento de asimetría. En el segundo caso, consideramos $\mu_y = 1, \sigma_x = 1, \sigma_y$ y representamos la asimetría (skewness) *vs.* μ_x , para tres valores diferentes de $\sigma_y = 0,2, 1, 2$. El efecto es muy similar al caso anterior, pero ahora, cuando σ es pequeño el crecimiento de la asimetría es menor que para valores altos de σ .

Así pues, la presencia de asimetría es un hecho que se produce de forma innegable cuando tenemos un producto de dos distribuciones normales. Este hecho implica que, en general, el producto de distribuciones normales no será una distribución normal. Aún así, podemos intentar controlar o estudiar el grado de asimetría a fin de poder en qué medida dicha distribución producto se aleja de los estándares de la distribución normal. Cuando el valor de la media de, al menos una, de las variables del producto es alto

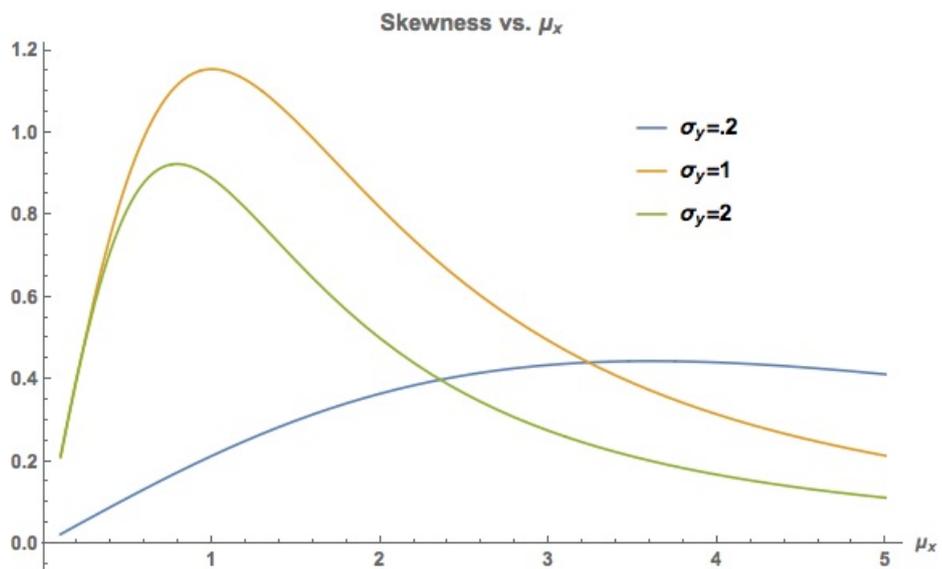
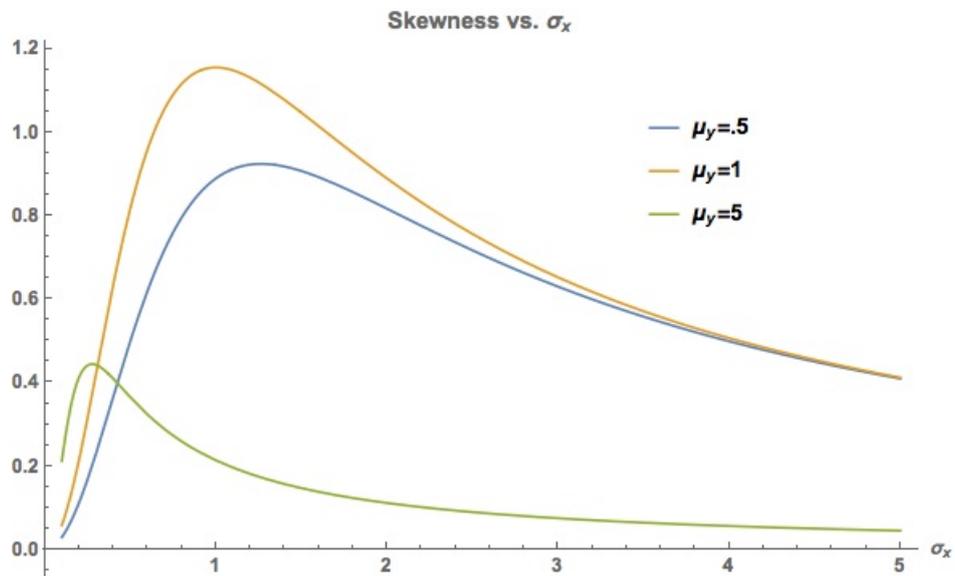


Figura 3.18: Skewness

($\mu > 1$) entonces el valor de la asimetría del producto es pequeño, y por el contrario, un valor pequeño en la media implica una asimetría alta. Cuando existe correlación entre las variables la presencia de asimetría en el producto es muy habitual, en este caso, la normalidad del producto prácticamente no existe. Por el contrario, cuando no existe correlación entre las variables, la asimetría se ve determinada de una forma muy importante por los valores de las medias y varianzas de las variables utilizadas en el producto. Podemos concluir que cuando el inverso del coeficiente de variación de una variable es alto, la asimetría es pequeña, siempre y cuando la varianza no sea pequeña. En general, la presencia de valores pequeños para la varianza produce distribuciones del producto de variables normales con alto grado de asimetría.

3.5. Kurtosis del Producto de dos Variables Normales

Sean dos variables normales $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con coeficiente de correlación $\rho \in (-1, 1)$, consideramos el producto de ambas variables $Z = XY$. En la sección anterior nos hemos centrado en el análisis y evolución de la asimetría, por su parte, dedicaremos esta sección al estudio de la kurtosis. En Oliveira et al. (2016a) se realiza un estudio amplio sobre la influencia de los parámetros de las distribuciones integrantes del producto sobre el valor de la kurtosis. Al igual que en el caso de la asimetría, a partir de la función generadora de momentos del producto podemos dar una expresión exacta para la kurtosis del producto de variables normales.

Podemos calcular la expresión del exceso de kurtosis a partir del cociente entre el momento centrado de cuarto orden y la varianza al cuadrado, calculados a partir de la función generadora de momentos de la Proposición 3.4.1.

Proposición 3.5.1 Sean $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ dos variables normales con coeficiente de correlación ρ , entonces el exceso de kurtosis del producto $Z = XY$ es:

$$\kappa[z] = \frac{6\sigma_x^2\sigma_y^2(2\mu_y^2(1+3\rho^2)\sigma_x^2 + (\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1+\rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^2 + 4\mu_x\mu_y2\rho(3+\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2 + (\mu_x^2(2+6\rho^2) + (1+6\rho^2+\rho^4)\sigma_x^2)\sigma_y^2)}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1+\rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^2} \quad (3.20)$$

Demostración. En la proposición 3.4.1 hemos determinado el valor de la función generadora de momentos de $Z = XY$, $M_Z(t)$ como (3.9). Para calcular el valor de la kurtosis (exceso de kurtosis) del producto consideramos la derivada cuarta de (3.9) evaluada en el punto $t = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 M_z(t)}{dt^4} &= 16\mu_x^3\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y(\mu_y^2 + 3\sigma_y^2) + 48\mu_x\mu_y\rho\sigma_x^3\sigma_y(\mu_y^2 + (3+2\rho^2)\sigma_y^2) + \\ &\mu_x^4(\mu_y^4 + 6\mu_y^2\sigma_y^2 + 3\sigma_y^4) + 6\mu_x^2\sigma_x^2(\mu_y^4 + 6\mu_y^2(1+2\rho^2)\sigma_y^2 + 3(1+4\rho^2)\sigma_y^4) + \\ &3\sigma_x^4(\mu_y^2 + 6\mu_y^2(1+4\rho^2)\sigma_y^2 + (3+8\rho^2(3+\rho^2))\sigma_y^4) \end{aligned}$$

Calculamos el momento centrado de orden 4 μ_4 :

$$\begin{aligned} -6\mu_z^4 + 12\mu_z^2 \frac{d^2 M_z(t)}{dt^2} - 3\left(\frac{d^2 M_z(t)}{dt^2}\right)^2 - 4\frac{d^3 M_z(t)}{dt^3} \mu_z + \frac{d^4 M_z(t)}{dt^4} = \\ 6\sigma_x^2\sigma_y^2(2\mu_y^2(1+3\rho^2)\sigma_x^2 + 4\mu_x\mu_y\rho(3+\rho^2)\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2(2+6\rho^2) + (1+6\rho^2+\rho^4)\sigma_x^2)\sigma_y^2) \end{aligned}$$

Ahora, la asimetría sería el cociente entre el momento centrado de orden 4 y el momento centrado de orden 2 elevado al cuadrado.

$$\kappa[z] = \frac{6\sigma_x^2\sigma_y^2(2\mu_y^2(1+3\rho^2)\sigma_x^2 + (\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y r\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1+\rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^2 + 4\mu_x\mu_y 2\rho(3+\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2 + (\mu_x^2(2+6\rho^2) + (1+6\rho^2+\rho^4)\sigma_x^2)\sigma_y^2)}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y r\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1+\rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^2}$$

■

El valor del exceso de kurtosis del producto queda determinado a partir de los valores de los parámetros de las dos distribuciones normales $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$ y del coeficiente de correlación ρ . Por su parte, el valor de la kurtosis sería $\kappa[z] + 3$. En general, en este capítulo nos referiremos al exceso de kurtosis como kurtosis.

3.5.1. Producto de dos variables Normales Correlacionadas

De acuerdo con el análisis realizado en Oliveira et al. (2016a), para el producto de dos variables normales con correlación $\rho \neq 0$ se consideran tres situaciones:

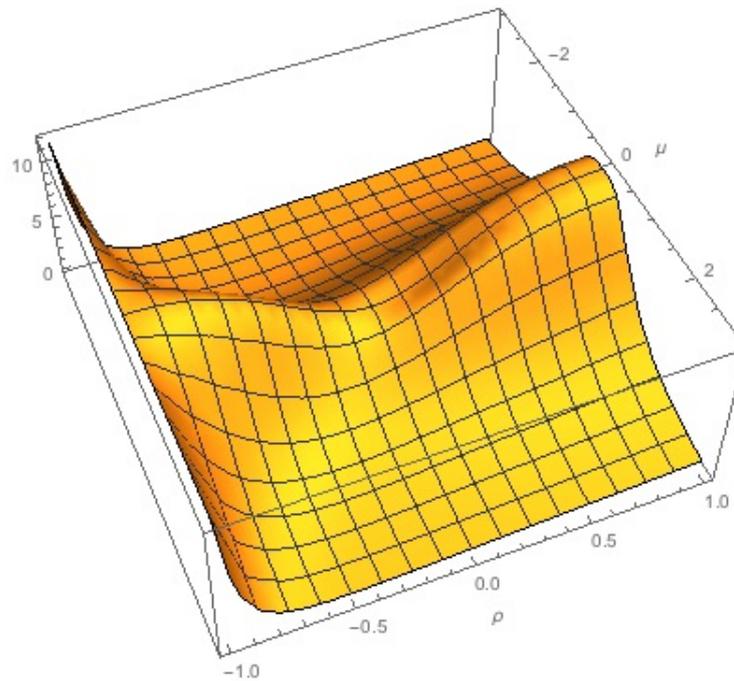


Figura 3.19: Evolución de la kurtosis para dos variables normales con $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ y $\sigma_x = \sigma_y = \sigma = 1$

- a) Dos distribuciones normales estándar $N(0, 1)$ con $\rho = 1$. En este caso el valor de kurtosis es 12, que es máximo valor de este estadístico para el producto de dos variables normales. Este valor coincide con el valor de kurtosis de una distribución χ^2 con un grado de libertad.

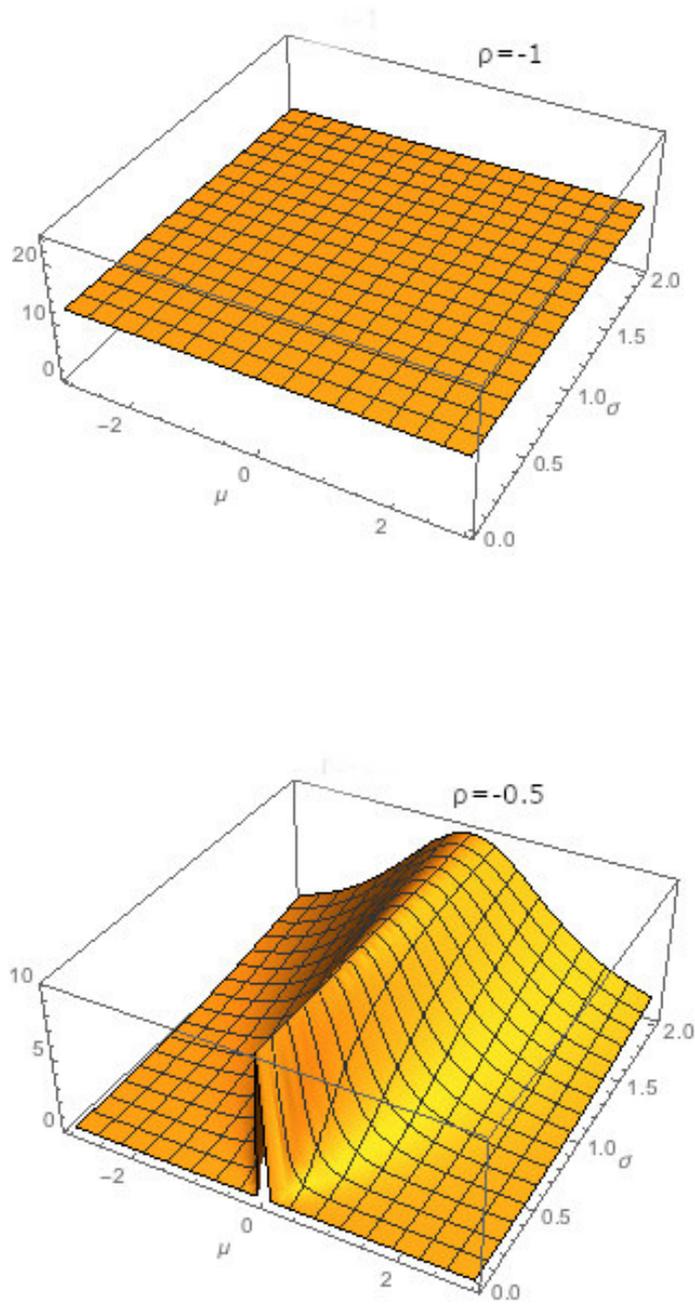


Figura 3.20: Kurtosis de dos variables normales con la misma media μ y σ con $\rho = \{-1, -0,5\}$

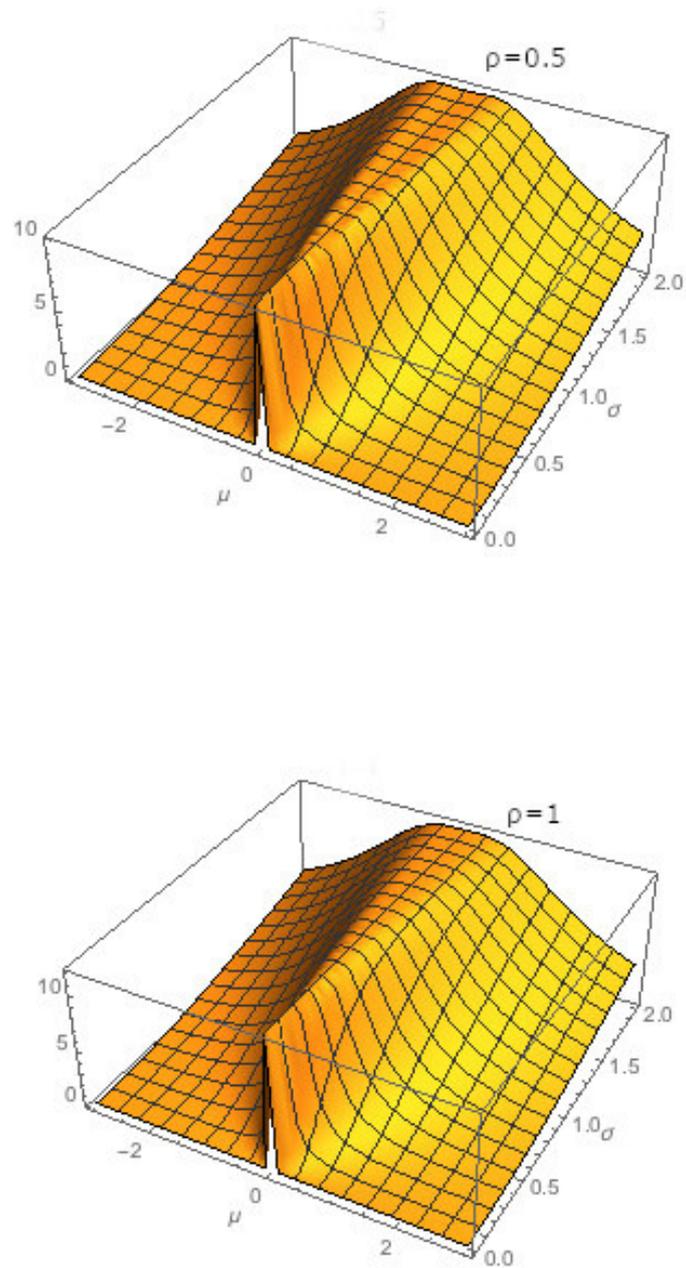


Figura 3.21: Kurtosis de dos variables normales con la misma media μ y σ con $\rho = \{0, 0.5, 1\}$

- b) Dos variables normales con la misma media $\mu_x = \mu_y = \mu$ y la misma desviación típica unitaria $\sigma_x = \sigma_y = \sigma = 1$. Correlación: $-1 \leq \rho \leq 1$.

$$\kappa[z] = \frac{6(1 + 6\rho^2 + \rho^4 + 4\mu^2(1 + \rho)^3)}{(1 + 2\mu^2(1 + \rho) + r^2)^2} \quad (3.21)$$

Cuando la media es cero, la kurtosis es una función creciente de la correlación. Para valores positivos ($\rho > 0$) el valor máximo de la kurtosis se alcanza cuando μ está próximo a cero y decrece según nos alejamos de cero. Para valores negativos $\rho < 0$ la evolución de la kurtosis es una función creciente de $|\rho|$ (ver figura 3.19), y el máximo valor ($\kappa = 12$) se alcanza en $\rho = -1$.

- c) Dos variables normales con la misma media y desviación típica. Para valores de $\rho = -1$, observamos que la kurtosis es constante ($\kappa = 12$) y para otros valores $\rho > -1$, el valor de la kurtosis alcanza un máximo en $\mu = 0$ y decrece para valores de $\mu \neq 0$ con una pendiente que es función del valor de la desviación típica σ . (veáanse figuras 3.20 y 3.21)

3.5.2. Producto de dos variables Normales No Correlacionadas

Cuando $\rho = 0$, no hay correlación entre las variables y, en este caso, la expresión de la kurtosis se simplifica:

$$\kappa[z] = \frac{6\sigma_x^2\sigma_y^2(2\mu_y^2\sigma_x^2 + (2\mu_x^2 + \sigma_x^2)\sigma_y^2)}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + (\mu_x^2 + \sigma_x^2)\sigma_y^2)^2}. \quad (3.22)$$

El valor de la kurtosis del producto es función de cuatro variables: μ_x, μ_y que son valores reales y σ_x, σ_y que son valores reales positivos (ver ecuación 3.22). Los valores extremos de esta expresión presentan sólo un punto crítico en $\mu_x = \mu_y = 0$, que es un máximo $\kappa[z] = 6$ (coincidimos con lo establecido en Craig (1936)). Entonces la kurtosis del producto de dos variables normales se situaría en el intervalo $(0, 6]$ y sería una función creciente de la varianza.

En la figura 3.22, podemos observar que la kurtosis es una función creciente de la varianza. Hemos considerado dos variables normales $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(1, 1)$ con cinco valores $\mu_x = \{-0,75, -0,25, 0, 0,5, 1\}$ y $\sigma_x \in (0, 1, 2)$. Los valores de μ y σ para la variable Y no son relevantes porque no influyen sobre la forma de la kurtosis, simplemente aumentan o disminuyen el valor de la pendiente de las curvas y los valores máximos de kurtosis. Cuanto mayor sea el valor de la desviación típica mayor será el valor de la kurtosis, y por el contrario un mayor valor de la media (valores positivos) producirá un menor valor de la kurtosis.

Cuando no hay correlación podemos obtener la siguiente expresión que establece el valor de la kurtosis del producto en función de los inversos del coeficiente de variación de las variables $r_x = \frac{\mu_x}{\sigma_x}$ y $r_y = \frac{\mu_y}{\sigma_y}$:

$$\kappa[z] = \frac{6(2r_y^2 + 2r_x^2 + 1)}{(r_y^2 + r_x^2 + 1)^2} \quad (3.23)$$

En la figura 3.23 vemos la evolución de la kurtosis. Cuando $r_x \rightarrow 0$ y $r_y \rightarrow 0$

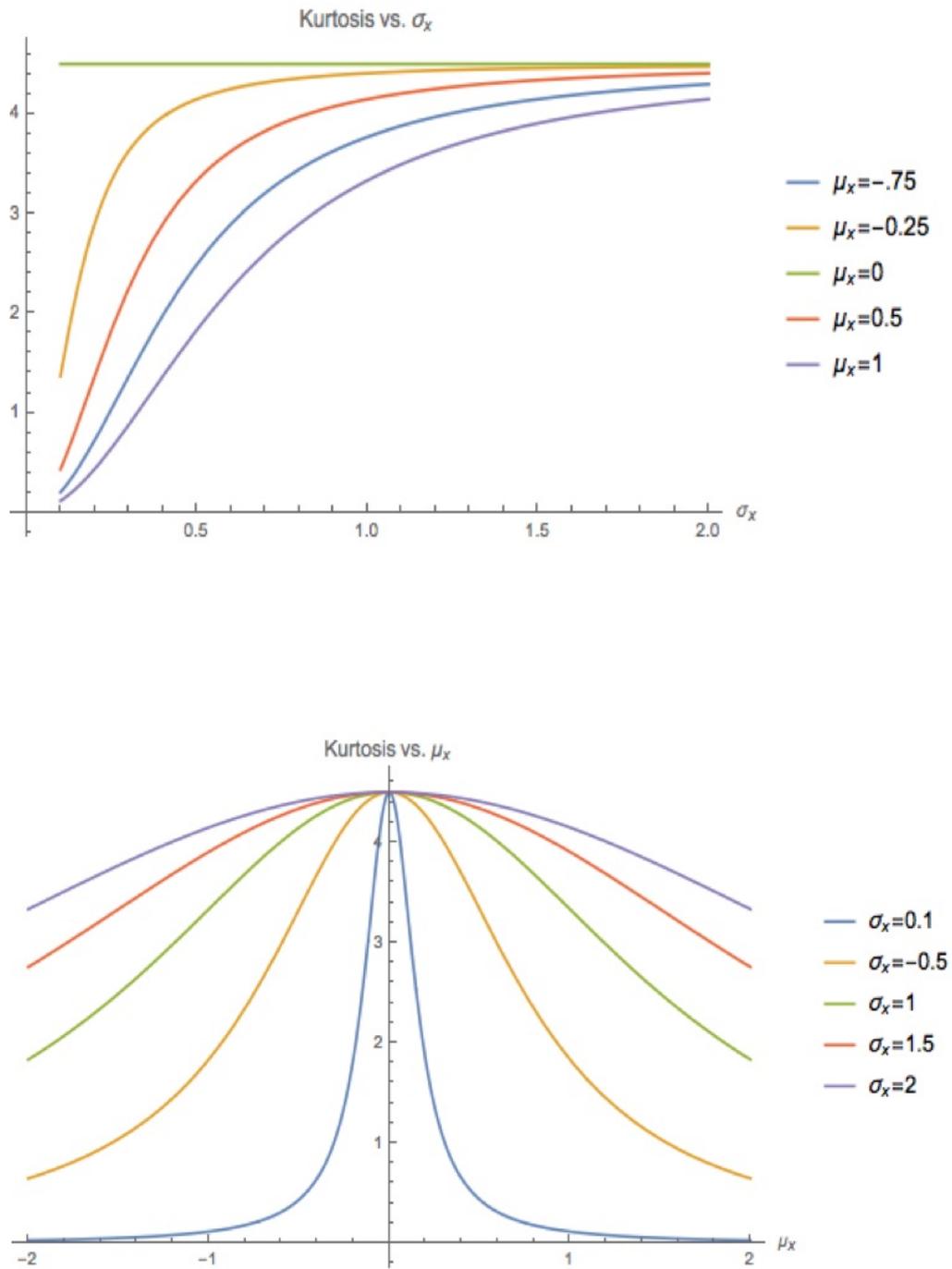


Figura 3.22: Evolución del valor de la kurtosis para el producto de dos variables normales no correlacionadas $N(\mu_x, \sigma_x)$ y $N(1, 1)$.

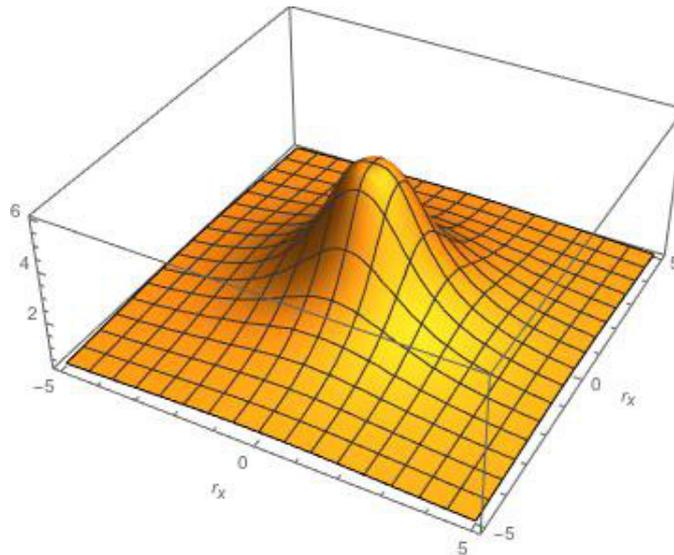


Figura 3.23: Evolución de la kurtosis para el producto de dos variables normales no correlacionadas en función de r_x y r_y

entonces $\kappa[z] \rightarrow 6$. Dichos valores están asociados a un valor nulo de las medias de las variables. Por otro lado, cuando los inversos de los coeficientes de variación aumentan, los valores de la kurtosis tienden rápidamente a cero.

El análisis del valor de la kurtosis en el producto de distribuciones normales Oliveira et al. (2016a) confirma las afirmaciones iniciales de Craig (1936), estableciéndose unos valores máximos y mínimos para la misma. Cuando existe correlación entre las variables el valor de la kurtosis se situaría en un rango $[0, 12]$, y, en general, un valor de correlación negativo produce un mayor valor de kurtosis, dados los otros parámetros constantes, que para un valor de correlación positivo. Cuando no existe correlación, el rango de la kurtosis se acorta $[0, 6]$, lo que podemos ver afecta especialmente al valor máximo (el mínimo permanece inalterable). Por su parte, mayores valores de la varianza suponen un mayor valor de la kurtosis, mientras que en el caso de la media su efecto sobre la varianza es diferente si consideramos valores positivos o negativos: para valores negativos de la media, la kurtosis sería una función creciente de la misma, mientras que para valores positivos sería una función decreciente. El valor máximo de kurtosis se produciría para valores de la media nulos.

3.6. Relación entre la Asimetría y la Kurtosis del Producto de dos Variables Normales

En los apartados anteriores hemos analizado la evolución de la asimetría y de la kurtosis en el producto de variables normales. El hecho más significativo es que ambas estadísticas varían, en función de los parámetros de los factores del producto y del valor del coeficiente de correlación, de forma tal que el producto puede presentar niveles de asimetría y kurtosis que lo alejan de la distribución normal. En este último apartado del capítulo, nos centramos en analizar cuál es la relación entre ambos valores en el producto, intentando ver si existe alguna relación entre el nivel de asimetría y el nivel

de kurtosis o si ambos valores siguen caminos diferentes. Finalmente, analizamos la denominada desigualdad de Pearson (Wilkins (1944), Sharma y Bhandari (2015)).

Como sabemos, las expresiones de la asimetría y la kurtosis del producto $Z = XY$, donde $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con coeficiente de correlación $\rho \in (-1, 1)$ son:

1. Asimetría:

$$\alpha_3(z) = \frac{2\sigma_x\sigma_y(3\mu_y^2\rho\sigma_x^2 + 3\mu_x\mu_y(1 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y + \rho(3\mu_x^2 + (3 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^{3/2}} \quad (3.24)$$

2. Kurtosis (exceso de kurtosis):

$$\kappa(z) = \frac{6\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_z^2} \left(\begin{array}{l} 2\mu_y^2(1 + 3\rho^2)\sigma_x^2 + 4\mu_x\mu_y2\rho(3 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y \\ + (\mu_x^2(2 + 6\rho^2) + (1 + 6\rho^2 + \rho^4)\sigma_x^2)\sigma_y^2 \end{array} \right) \quad (3.25)$$

donde $\sigma_z^2 = (\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^2$ es la varianza del producto $Z = XY$.

A partir de estas dos expresiones podemos establecer la siguiente relación entre ellas:

Proposición 3.6.1 *Dada $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con coeficiente de correlación $\rho \in (-1, 1)$ entonces la asimetría del producto $\alpha_3(Z)$ y la kurtosis del producto $\kappa(z)$ presentan la siguiente relación:*

$$\kappa(Z) = \alpha_3(Z) \frac{Sk(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)}{\sigma_z}$$

donde σ_z es la desviación típica del producto y

$$\frac{Sk(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho) = 3\sigma_x\sigma_y}{(2\mu_y^2(1 + 3\rho^2)\sigma_x^2 + 4\mu_x\mu_y\rho(3 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2(2 + 6\rho^2) + (1 + 6\rho^2 + \rho^4)\sigma_x^2)\sigma_y^2)} \quad (3.26)$$

Demostración. Dada $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con ρ coeficiente de correlación, consideramos el producto $Z = XY$, para dicho producto podemos calcular la función generadora de momentos a partir de la cual determinamos los valores de asimetría (3.24) y kurtosis (3.25) del producto Z . Observamos que el denominador en el caso de la asimetría es el valor de la desviación típica del producto σ_z elevado a 3/2 mientras que el denominador en el caso de la kurtosis es σ_z^4 , lo que permite establecer la siguiente relación entre denominadores $(\sigma_z^2\sigma_z)\sigma_z = \sigma_z^4$. A continuación, podemos establecer la relación entre ambos numeradores resolviendo la siguiente ecuación:

$$(2\sigma_x\sigma_y(3\mu_y^2\rho\sigma_x^2 + 3\mu_x\mu_y(1 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y + \rho(3\mu_x^2 + (3 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2))Sk = 6\sigma_x^2\sigma_y^2 \left(\begin{array}{l} 2\mu_y^2(1 + 3\rho^2)\sigma_x^2 + 4\mu_x\mu_y2\rho(3 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y \\ + (\mu_x^2(2 + 6\rho^2) + (1 + 6\rho^2 + \rho^4)\sigma_x^2)\sigma_y^2 \end{array} \right)$$

que resulta:

$$\frac{Sk(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho) = 3\sigma_x\sigma_y(2\mu_y^2(1 + 3\rho^2)\sigma_x^2 + 4\mu_x\mu_y\rho(3 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2(2 + 6\rho^2) + (1 + 6\rho^2 + \rho^4)\sigma_x^2)\sigma_y^2)}{3\mu_y^2\rho\sigma_x^2 + 3\mu_x\mu_y(1 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y + \rho(3\mu_x^2 + (3 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2}$$

■

Por tanto, la relación entre la asimetría y la kurtosis del producto es función de los parámetros de las variables normales consideradas y del coeficiente de correlación. Cuando el coeficiente de correlación es nulo $\rho = 0$ entonces la expresión 3.26 se simplifica a:

$$Sk(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, 0) = \frac{2\mu_y^2\sigma_x^2 + (2\mu_x^2 + \sigma_x^2)\sigma_y^2}{\mu_x\mu_y} \quad (3.27)$$

Dado que la desviación típica es siempre positiva entonces, cuando ρ es nulo, la asimetría y la kurtosis tienen el mismo signo, si μ_x y μ_y tienen el mismo signo, y signo diferente cuando los signos de μ_x y μ_y no coinciden.

Cuando $\rho \in [-1, 1]$ si consideramos dos distribuciones normales de media nula $\mu_x = \mu_y = 0$. En este caso el valor de la kurtosis es el valor de la asimetría multiplicado por el factor $\frac{3(1+6\rho^2+\rho^4)}{\rho(3+\rho^2)\sqrt{1+\rho^2}}$, que sólo depende del valor del coeficiente de correlación, dicho factor será positivo si ρ es positivo y negativo cuando $\rho < 0$, cuando $\rho = 0$ el producto no presentaría asimetría y la kurtosis sería 6. Por otro lado, el valor de kurtosis siempre será mayor que el valor de asimetría puesto que el factor es siempre mayor que 1. El valor de la kurtosis estaría dentro del rango $[6, 12]$, cuando el valor de $\rho \rightarrow 1$ ó $\rho \rightarrow -1$ la kurtosis crece hasta el valor máximo de 12, mientras que cuando $\rho \rightarrow 0$ la kurtosis se acerca a su valor mínimo de 6.

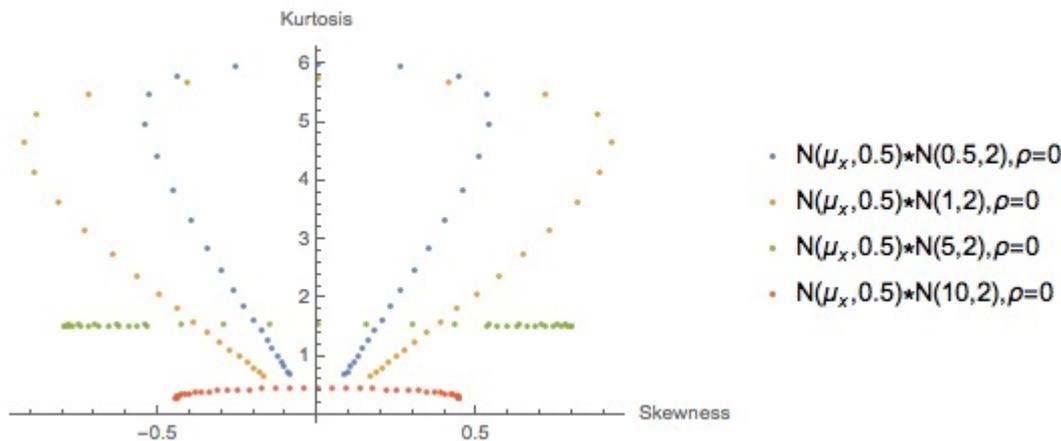


Figura 3.24: Valores de Asimetría y Kurtosis para el producto de dos variables normales con $\rho = 0$

Cuando consideramos otras situaciones donde el coeficiente de correlación no es nulo $\rho \neq 0$, entonces tenemos una relación más compleja entre la asimetría y la kurtosis del producto de variables normales. La kurtosis es mayor a la asimetría si $Sk(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho) > \sigma_z$. En esta relación mucho más compleja es más complicado encontrar alguna relación entre los estadísticos de la distribución del producto y los parámetros de las distribuciones multiplicadas.

Las figuras 3.24 a 3.27 representan la nube de puntos con las combinaciones de valores factibles de asimetría (skewness) y kurtosis del producto de dos variables normales $X \sim (\mu_x, 0,5)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$, donde $\mu_x \in (-2, 2)$ y se analizan cuatro casos:

1. $\sigma_y = 2, \mu_y = \{0,5, 1, 5, 10\}$ y $\rho = 0$. Este caso se representa en la figura 3.24, donde podemos observar la simetría entre los valores positivos y negativos de skewness,

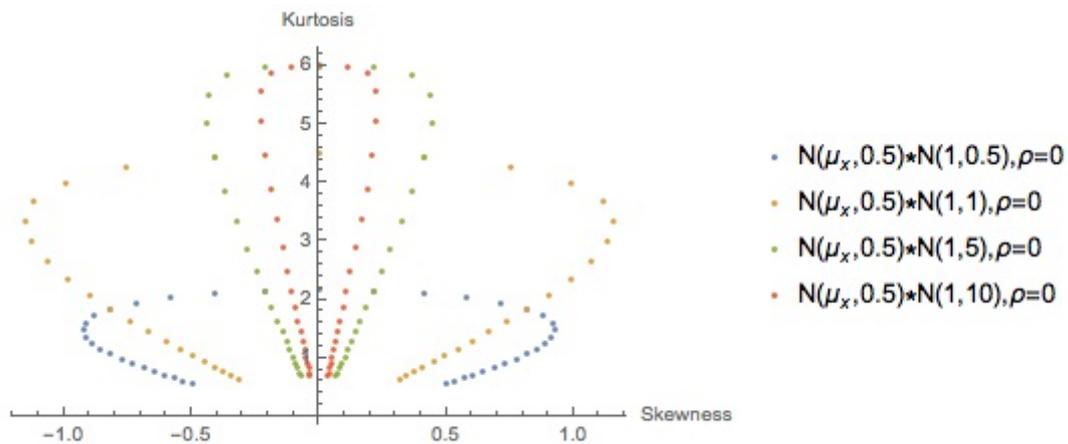


Figura 3.25: Valores de Asimetría y Kurtosis para el producto de dos variables normales con $\rho = 0$

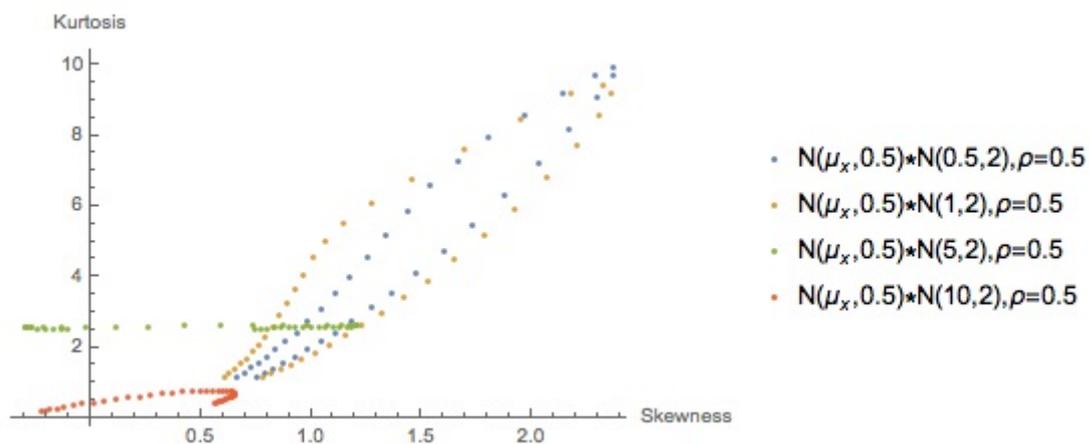


Figura 3.26: Valores de Asimetría y Kurtosis para el producto de dos variables normales con $\rho = 0,5$

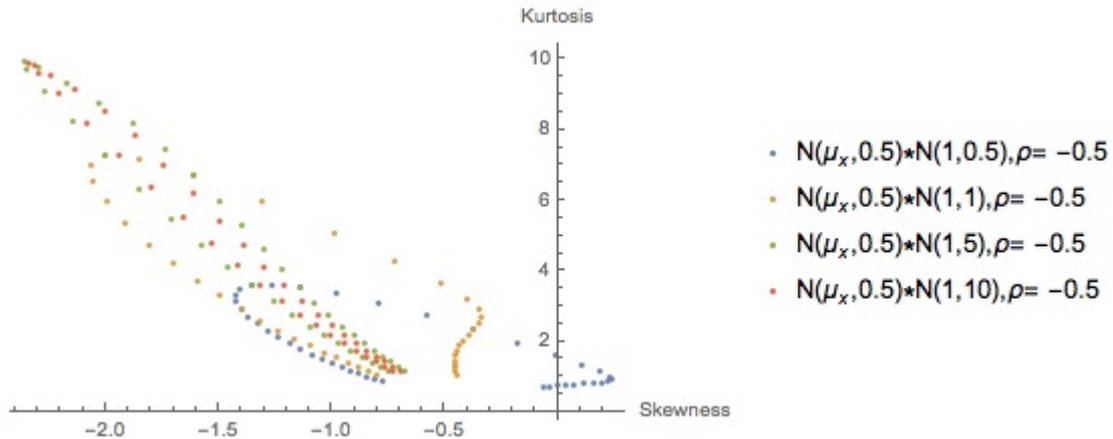


Figura 3.27: Valores de Asimetría y Kurtosis para el producto de dos variables normales con $\rho = -0,5$

por su parte la kurtosis alcanza un valor máximo de 6 asociado a un valor casi nulo de asimetría; no obstante, valores altos kurtosis > 5 pueden conllevar valores de asimetría próximos a 1. Si analizamos el efecto de μ_y vemos que valores altos de este parámetro irían asociados a valores pequeños de kurtosis y viceversa; por su parte, el efecto sobre la asimetría es un poco menos evidente, ya que tenemos valores altos de asimetría tanto para valores pequeños del parámetro $\mu = 1$ con para valores grandes $\mu = 5$.

2. $\mu_y = 1, \sigma_y = \{0,5, 1, 5, 10\}$ y $\rho = 0$. Este caso se representa en la figura 3.25, donde, al igual que en el caso anterior, podemos observar la simetría entre los valores positivos y negativos de skewness y que el valor máximo de kurtosis 6 se corresponde con valores pequeños de asimetría. Por otro lado, para valores pequeños de σ_y tenemos valores mayores de asimetría y por el contrario, valores menores de kurtosis.
3. $\sigma_y = 2, \mu_y = \{0,5, 1, 5, 10\}$ y $\rho = 0,5$. Tenemos las mismas distribuciones normales que la figura 3.24, pero ahora hemos considerado la presencia de un grado de correlación positiva entre ambas (figura 3.26) vemos que ahora la asimetría tiende a ser positiva en la mayoría de las situaciones representadas y, se ha producido un desplazamiento de los puntos de asimetría y kurtosis que teníamos en la figura 3.24 hacia la derecha (valores positivos de asimetría), de forma que se producen dos efectos: el primero es que aumenta la kurtosis que llega a alcanzar valores superiores a 10, el segundo es que para valores pequeños de μ_y tenemos sólo valores de asimetría positivos.
4. $\sigma_y = 2, \mu_y = \{0,5, 1, 5, 10\}$ y $\rho = -0,5$. Este último caso se representa en la figura 3.27, donde partiendo de la situación representada en la figura 3.25, hemos introducido un coeficiente de correlación negativo $\rho = -0,5$. De forma semejante a la situación representada en la figura 3.26 se produce un fuerte desplazamiento de los puntos de asimetría y kurtosis hacia el lado izquierdo (valores negativos de asimetría), y al mismo tiempo la kurtosis alcanza valores más altos (superiores a 10). Por otra parte, el valor de la asimetría es casi siempre negativo, tomando solo

valores positivos para algunos casos donde $\sigma_y = 0,5$. En general, cuanto mayor es el valor de σ mayor es el valor de la kurtosis y de la asimetría (tomada en valor absoluto). Por último, al igual que sucedía en el caso anterior, los valores de asimetría toman valores absolutos mucho más altos, llegando a alcanzar valores próximos a 2,5.

En Wilkins (1944) se establece una relación entre la kurtosis y la asimetría para toda distribución estadística: Para X una distribución estadística se verifica que $\kappa(x) \geq 1 + \alpha_3(x)^2$, donde $\kappa(x)$ es la kurtosis de la variable X , y $\alpha_3(x)$ es el coeficiente de asimetría. En el caso de considerar el exceso de kurtosis, recordemos que la kurtosis coincide con el exceso de kurtosis más 3. Esta relación se conoce como desigualdad de Pearson.

Analizamos si en el producto de variables normales se verifica dicha relación entre ambos estadísticos. En el caso de que esto no se verificase indicaría que el producto de distribuciones normales no sería una distribución de probabilidad. En (3.25) tenemos la expresión del exceso de kurtosis del producto de variables, mientras que (3.24) representa el valor de la asimetría.

Proposición 3.6.2 *Sea $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ y $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ dos variables normales con coeficiente de correlación $\rho \in [-1, 1]$. Entonces la kurtosis (3.25) y la asimetría (3.24) de $Z = XY$ verifican la desigualdad $\kappa(z) + 3 \geq 1 + (\alpha_3(Z))^2$.*

Demostración. Dados $\kappa(Z)$ y $\alpha_3(Z)$ entonces tenemos que estudiar si la relación $\kappa(Z) + 2 - (\alpha_3(Z))^2$ es mayor o igual que cero, esto es no negativa. En este caso la distribución del producto cumpliría la desigualdad de Pearson (Wilkins (1944)) si verifica que:

$$\frac{2 + 6\sigma_x^2\sigma_y^2(2\mu_y^2(1 + 3\rho^2)\sigma_x^2 + 4\mu_x\mu_y\rho(3 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2(2 + 6\rho^2) + (1 + 6\rho^2 + \rho^4)\sigma_x^2)\sigma_y^2)}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^2} \geq \quad (3.28)$$

$$\frac{4\sigma_x^2\sigma_y^2(3\mu_y^2\rho\sigma_x^2 + 3\mu_x\mu_y(1 + \rho^2)\sigma_x\sigma_y + \rho(3\mu_x^2 + (3 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1 + \rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^3}$$

Esta expresión es siempre verdadera cuando $\mu_x = \mu_y = 0$, dados los valores $\sigma_x \geq 0, \sigma_y \geq 0$ y $\rho \in [-1, 1]$.

En el caso dos variables normales con coeficiente de correlación nulo, la desigualdad a estudiar se simplifica:

$$2 + \frac{6\sigma_x^2\sigma_y^2(2\mu_y^4\sigma_x^4 + \mu_y^2\sigma_x^2 + (-2\mu_x^2 + 3\sigma_x^2) + (\mu_x^2 + \sigma_x^2)(2\mu_x^2 + \sigma_x^2)\sigma_y^4)}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + (\mu_x^2 + \sigma_x^2)\sigma_y^2)^3} \geq 0 \quad (3.29)$$

En (3.29), el denominador del segundo sumando es siempre positivo, por lo tanto la fracción sólo es negativa si el numerador es negativo, y esto sólo es posible si $|\mu_x| >> \sigma_x > 1$; además, la suma total en (3.29) será negativa si el segundo sumando es negativo e inferior a -2 y, esto no es posible puesto que μ_x tiene una potencia mayor en el denominador que en el numerador. Por tanto, cuando no hay correlación se verifica la relación entre asimetría y kurtosis.

Cuando tenemos que $\rho \in [-1, 1]$ entonces 3.28 es cierta si:

$$\begin{aligned}
& (11\mu_y^6\sigma_x^6 + 66\mu_x\mu_y^5\rho\sigma_x^5\sigma_y + 3\mu_y^4\sigma_x^4(11\mu_x^2(1+4\rho^2) + (13+11\rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2 + \quad (3.30) \\
& \quad 4\mu_x\mu_y^3\rho\sigma_x^3(11\mu_x^2(3+2\rho^2) + 36(1+\rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^3 + \\
& 3\mu_y^2\sigma_x^2(11\mu_x^4(1+\rho^4) + 2\mu_x^2(10+39\rho^2+23\rho^4)\sigma_x^2 + 2(7+12\rho^2+7\rho^4)\sigma_x^4)\sigma_y^4 + \\
& \quad 6\mu_x\mu_y\rho\sigma_x(11\mu_x^4 + 24\mu_x^2(1+\rho^2)\sigma_x^2 + 4(3+7\rho^2+3\rho^4)\sigma_x^4)\sigma_y^5 + \\
& (11\mu_x^6 + 3\mu_x^4(13+11\rho^2)\sigma_x^2 + 6\mu_x^2(7+12\rho^2+7\rho^4)\sigma_x^4 + 2(7+18\rho^2+21\rho^4+6\rho^6)\sigma_x^6)\sigma_y^6) \\
& \quad /(\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\rho\sigma_x\sigma_y + (\mu_x^2 + (1+\rho^2)\sigma_x^2)\sigma_y^2)^3
\end{aligned}$$

es un valor no negativo.

El denominador de 3.30 es siempre positivo puesto que $\mu_y^2\sigma_x^2 + \mu_x^2\sigma_y^2 - 2\mu_x\mu_y\sigma_x\sigma_y \geq 0$ y dado que $\rho \in [-1, 1]$, entonces el denominador es siempre positivo dado que $\sigma_x > 0$ y $\sigma_y > 0$. Por tanto, 3.30 es negativo sólo si el numerador de la expresión es negativo. El numerador es siempre no negativo si $\rho = \{-1, 0, 1\}$, esto es si no hay correlación o existe correlación perfecta negativa o positiva entre ambas variables. Dado que el numerador es una expresión polinómica continua y diferenciable podemos confirmar la no existencia de valores negativos en el intervalo $(-1, 1)$ y así pues, el numerador tiene que ser siempre positivo

Por tanto, para todos los valores reales de μ_x y μ_y y para $\sigma_x > 0$ y $\sigma_y > 0$ y $\rho \in [-1, 1]$, la kurtosis (3.25) y la asimetría (3.24) de $Z=XY$ verifican la desigualdad $\kappa(z) + 3 \geq 1 + (\alpha_3(Z))^2$. ■

El producto de variables normales tiende a presentar valores de asimetría y kurtosis que lo alejan de la distribución normal. Este hecho es relevante, puesto que indica que la normalidad en el producto es un hecho infrecuente y que, en general, habría que considerar otras distribuciones a la hora de modelar el producto de distribuciones normales. En este capítulo comenzamos estudiando la aproximación a la distribución del producto mediante funciones de Bessel, funciones de Pearson tipo III y aplicación del Teorema de Rohatgi, para el caso de variables con coeficiente de correlación nulo; en todos los casos, las aproximaciones presentaban problemas, que variaban en función de los parámetros de las variables consideradas; lo que impedía establecer una aproximación general exacta para el producto de variables normales.

Por último, hemos visto como la asimetría y la kurtosis aumentan y disminuyen en función de los parámetros de las variables consideradas y del coeficiente de correlación existente entre ellas. Aunque se cumple siempre la desigualdad establecida en Wilkins (1944) entre la kurtosis y la asimetría, de forma que el producto de distribuciones normales cumple esta propiedad de las distribuciones estadísticas. Finalmente, hemos establecido un rango de variación para los dos estadísticos del producto: la asimetría varía entre $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ y la kurtosis (exceso de kurtosis) en el rango $[0, 12]$, valores que no encajan en la distribución normal.

Capítulo 4

Aproximación al Producto de Distribuciones Normales

4.1. Introducción

En las secciones anteriores hemos visto que no podemos establecer una expresión general y exacta, que permita modelar la función de densidad (PDF) del producto de dos distribuciones normales. Aunque, en casos particulares, podemos tener buenas aproximaciones, no ha sido posible obtener una expresión general; y, en particular, tampoco hemos podido garantizar la normalidad del producto. El objetivo de esta sección es abordar las aproximaciones al producto utilizando para ello otras distribuciones estadísticas, o bien, transformaciones de las mismas que nos permitan una mejor aproximación a la distribución del producto.

Nuestro análisis se inicia con la denominada función de densidad normal asimétrica (Skew-normal distribution) y la Extended Skew-normal distribution, que es una generalización de la primera. Mediante el análisis de los estadísticos de esta distribución comprobamos las posibilidades de la distribución para representar el producto de variables normales. La elección de esta distribución se basa en el hecho de que es una generalización de la distribución normal que permite la existencia de asimetría. Recordemos que en la distribución normal no existe asimetría.

El análisis realizado en la sección anterior nos ha permitido establecer que el producto de distribuciones normales no respeta el principio de simetría de la distribución normal y así, hemos establecido un rango de asimetría $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ para el producto.

4.2. Distribución Normal Asimétrica

La función de distribución normal asimétrica (skew-normal probability distribution) fue introducida por Azzalini en 1985 (Azzalini (1985)), de forma que la distribución normal sería un caso particular de esta distribución presentada por Azzalini; en este sentido la distribución skew-normal es una generalización de la distribución normal, donde la característica más importante es la presencia de diferentes niveles de asimetría. En Azzalini (2014) se realiza un estudio profundo de la justificación de esta nueva aproximación a la distribución normal: una primera justificación está basada en la esencia del mecanismo que empieza con una función de densidad continua simétrica, la cual se modifica para generar una variedad de formas alternativas (Azzalini (2014)),

p. 1). Otro aspecto importante es la necesidad de aproximar datos reales, que en muchos casos, requieren asumir supuestos poco realistas para poder ajustar distribuciones teóricas (Choudhury y Matin (2011)).

La distribución skew-normal se deriva a partir de la distribución normal estándar. Sea ϕ la función de densidad $N(0, 1)$ y Φ la función de distribución. Entonces, la función de densidad de una distribución normal asimétrica es

$$f_X(x) = \frac{2}{\omega} \phi\left(\frac{x - \xi}{\omega}\right) \Phi\left(\alpha \frac{x - \xi}{\omega}\right). \quad (4.1)$$

donde se considera la existencia de tres parámetros: localización: $\xi \in \mathbb{R}$, escala: $\omega \in \mathbb{R}^+$ y, forma: $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\xi = 0$ y $\omega = 1$ entonces tenemos la distribución asimétrica normal normalizada. El valor de la asimetría está determinado por el parámetro α . Cuando $\alpha = 0$, entonces tenemos la distribución normal estándar. En este caso, a través de la elección del parámetro α podemos controlar los valores de asimetría.

En los últimos años, a partir de la aparición de la distribución normal asimétrica, también se han ido presentando otras distribuciones basadas en la misma transformación. En Azzalini (1985) se estudia una generalización de la distribución normal asimétrica que se denomina distribución normal asimétrica extendida (Extended Skew-Normal). También se han presentado generalizaciones para el caso bivalente Arnold et al. (1993) y multivalente (Arnold et al. (1993), Capitanio et al. (2003)). Por último, en Arellano-Valle et al. (2004), se introduce la distribución normal asimétrica generalizada que presenta una familia más general de distribuciones normales asimétricas, donde la distribución normal asimétrica y la propia distribución normal son casos particulares.

La introducción de un cuarto parámetro: $\tau \in \mathbb{R}$, denominado truncamiento, da lugar a la distribución asimétrica normal extendida (ESN), cuya función de densidad univariante es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\omega} \phi\left(\frac{x - \xi}{\omega}\right) \frac{\Phi\left(\tau\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha \frac{x - \xi}{\omega}\right)}{\Phi(\tau)}. \quad (4.2)$$

La ESN queda definida por cuatro parámetros: localización $\xi \in \mathbb{R}$, escala $\omega \in \mathbb{R}^+$, forma $\alpha \in \mathbb{R}$ y truncamiento $\tau \in \mathbb{R}$. Cuando $\tau = 0$ tenemos la distribución normal asimétrica y $\alpha = 0$ da lugar a la distribución normal. En Canale (2011) se presentan algunas propiedades de esta función de densidad y se explica el nombre de truncamiento asignado al parámetro τ . El efecto de parámetro τ va a determinar diferentes valores de asimetría y kurtosis para la distribución ESN. Estos parámetros junto a α van a determinar la asimetría y kurtosis de la distribución y por tanto, van a tener importantes consecuencias en la forma de la misma (Azzalini (2014)).

En las figuras 4.1 y 4.2 hemos representado un función de densidad de una distribución normal asimétrica (Skew-normal) y una distribución normal asimétrica extendida (ESN), respectivamente. Podemos observar que tienen la forma de una distribución normal pero con una deformación debida a la presencia de un valor de asimetría no nula que produce un desplazamiento de la densidad de la función bien hacia el lado positivo (derecha) o negativo (izquierda).

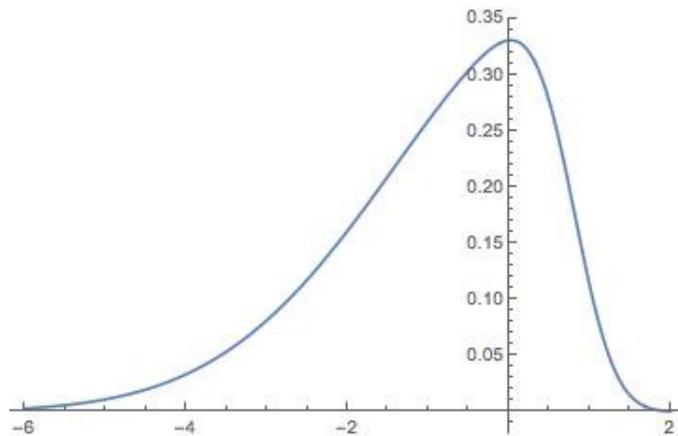


Figura 4.1: Ejemplo de Distribución normal asimétrica (Skew-normal) con parámetros $\xi = 0,8$, $\omega = 2,2$ y $\alpha = -5,4$.

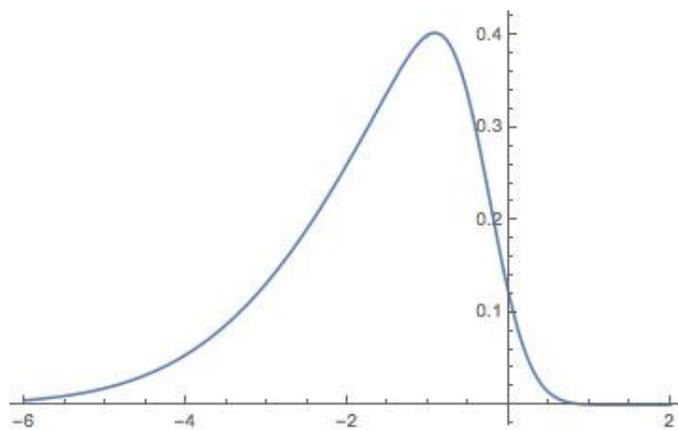


Figura 4.2: Ejemplo de Distribución normal asimétrica extendida (ESN) con parámetros $\xi = 0,8$, $\omega = 2,2$, $\alpha = -5,4$ y $\tau = -0,5$.

4.2.1. Momentos de la Distribución Skew-Normal

Los momentos de la función de distribución Skew-Normal se pueden obtener fácilmente a partir de la función generadora de momentos (4.3).

$$f_Z(t, \xi, \omega, \alpha) = 2 \exp\left(\xi t + \frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) + \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\omega t\right) \quad (4.3)$$

donde Φ es la función de distribución de una normal estándar $N(0, 1)$.

A partir de esta función generadora de momentos podemos obtener los siguientes estadísticos de la distribución Skew-Normal:

1. Media:

$$\xi + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\omega}{\sqrt{1+\alpha^2}} \quad (4.4)$$

2. Varianza:

$$\frac{(\pi + (\pi - 2)\alpha^2)\omega^2}{\pi(1 + \alpha^2)} \quad (4.5)$$

3. Asimetría:

$$\frac{\sqrt{2}(\pi - 4)\alpha^3}{(1 + \alpha^2)^{3/2} \left(\frac{\pi + (\pi - 2)\alpha^2}{1 + \alpha^2}\right)^{3/2}} \quad (4.6)$$

4. Kurtosis (exceso de kurtosis):

$$\frac{8(\pi - 3)\alpha^4}{(\pi + (\pi - 2)\alpha^2)^2} \quad (4.7)$$

La asimetría y la kurtosis son función del parámetro α , mientras que la varianza queda determinada por los parámetros α y ω . La media es función de los tres parámetros que definen la función de distribución Skew-Normal. Podemos determinar rangos de valores para los diferentes estadísticos de la función Skew-Normal (ver tabla 4.1):

Tabla 4.1: Rango de variación de Estadísticas Distribución Skew-Normal

	Rango
Media	$(-\infty, \infty)$
Varianza	$(0, \infty)$
Asimetría (skewness)	$\left(\frac{-\sqrt{2}(\pi-4)}{(\pi-2)^{3/2}}, \frac{\sqrt{2}(\pi-4)}{(\pi-2)^{3/2}}\right) \approx (-0,995, 0,995)$
Kurtosis (exceso de kurtosis)	$\left(0, \frac{8(\pi-3)}{(\pi-2)^2}\right) \approx (0, 0,867)$

Podemos intentar aproximar el producto de dos variables normales a través de la distribución Skew-normal. Para ello, dicha distribución debería tener un comportamiento similar al producto de distribuciones normales. Pero, como podemos ver en la tabla (4.1), los valores de asimetría y kurtosis están bastante limitados, la kurtosis (exceso de kurtosis) varía entre 0 y algo menos que 1, mientras la asimetría estaría

limitada entre -1 y 1. Estos valores presentan rangos de variabilidad muy inferiores a los estimados para dichos estadísticos en el producto de variables normales. Por su parte, la varianza está limitada entre cero e infinito, y no existen límites para la media, al igual que sucedía en el producto de dos variables normales.

Estos hechos hacen que la utilidad de la distribución Skew-normal para representar el producto de distribuciones normales sea muy limitada, puesto que los rangos de variación del producto son más amplios tanto en kurtosis como en asimetría.

La aproximación se realiza utilizando los valores de media, varianza, asimetría y kurtosis para determinar los valores de los parámetros de una distribución Skew-normal que presente los valores deseados de los cuatro estadísticos mencionados. La distribución Skew-normal queda definida por tres parámetros (ψ, ω, α) . La utilización de la distribución Skew-Normal sólo permite establecer tres parámetros, lo que apenas va a permitir controlar tres estadísticos (media, varianza y asimetría/kurtosis), lo que limita aún más la utilidad de esta distribución para poder representar el producto de variables normales.

En la distribución Skew-normal (4.6) y (4.7) dependen sólo del parámetro α de la distribución. Dados dos valores objetivo de asimetría (γ_1) y kurtosis (γ_2) sólo podremos determinar un valor de α mediante la resolución de un sistema de dos ecuaciones:

$$\frac{\sqrt{2}(\pi + 4)\alpha^3}{(1 + \alpha^2)^{3/2} \left(\frac{\pi + (\pi - 2)\alpha^2}{1 + \alpha^2} \right)^{3/2}} = \gamma_1 \quad (4.8)$$

$$\frac{8(\pi - 3)\alpha^4}{(\pi + (\pi - 2)\alpha^2)^2} = \gamma_2 \quad (4.9)$$

Por tanto, se puede establecer que en la distribución Skew-normal se produce una relación entre los valores de asimetría y kurtosis.

Proposición 4.2.1 *Dada una distribución Skew-normal con parámetro α y valores de asimetría (γ_1) y kurtosis (γ_2), los pares de valores (γ_1, γ_2) están limitados en función del valor del parámetro α . El valor de kurtosis es, aproximadamente, 0,87 veces el valor de asimetría.*

Demostración. Los valores de asimetría y kurtosis de una distribución Skew-normal son (4.6) y (4.7), respectivamente. Así tenemos,

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{2}(\pi - 4)\alpha^3}{(1 + \alpha^2)^{3/2} \left(\frac{\pi + (\pi - 2)\alpha^2}{1 + \alpha^2} \right)^{3/2}} \quad (4.10)$$

$$\gamma_2 = \frac{8(\pi - 3)\alpha^4}{(\pi + (\pi - 2)\alpha^2)^2} \quad (4.11)$$

La ratio $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ es:

$$\frac{4\sqrt{2}(\pi - 3)\alpha}{(\pi - 4)\sqrt{\alpha^2 + 1}\sqrt{\frac{2}{\alpha^2 + 1} + \pi - 2}} \quad (4.12)$$

y

$$\gamma_2 = \left(\frac{4\sqrt{2}(\pi - 3)\alpha}{(\pi - 4)\sqrt{\alpha^2 + 1}\sqrt{\frac{2}{\alpha^2 + 1} + \pi - 2}} \right) \gamma_1 \quad (4.13)$$

donde el valor de (4.12) está limitado,

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{4\sqrt{2}(\pi-3)\alpha}{(\pi-4)\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\frac{2}{\alpha^2+1}+\pi-2}} = -\frac{4(\pi-3)\sqrt{\frac{2}{\pi-2}}}{\pi-4} \approx 0,873307 \quad (4.14)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{2}(\pi-3)\alpha}{(\pi-4)\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\frac{2}{\alpha^2+1}+\pi-2}} = \frac{4(\pi-3)\sqrt{\frac{2}{\pi-2}}}{\pi-4} \approx -0,873307 \quad (4.15)$$

El valor de la kurtosis está limitado:

$$\gamma_2 = \begin{cases} -0,873307\gamma_1 & \text{si } \gamma_1 < 0 \\ 0 & \text{si } \gamma_1 = 0 \\ 0,873307\gamma_1 & \text{si } \gamma_1 > 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

■

Por otro lado, los valores de los parámetros ψ y ω permiten, junto con el valor obtenido para α permiten determinar los valores de media y varianza.

Así pues, dada una distribución Skew-normal podemos simular un producto de variables normales que verifica los valores de los estadísticos media, varianza y asimetría. No obstante, el valor de la kurtosis no tiene porque ser el mismo.

4.2.2. Momentos de la Distribución ESN

Al igual que en el caso anterior, los momentos de la función de distribución Extended Skew-Normal (ESN) se pueden obtener fácilmente a partir de la función generadora de momentos (4.17).

$$f_Z(t, \xi, \omega, \alpha, \tau) = 2 \exp \xi t + \frac{1}{2} \omega^2 t^2 + \frac{\Phi\left(\tau + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \omega t\right)}{\Phi(\tau)} \quad (4.17)$$

donde Φ es la función de distribución de una normal estándar $N(0, 1)$.

A partir de esta función generadora de momentos podemos obtener los siguientes estadísticos de la distribución ESN:

1. Media:

$$\xi + \frac{e^{-\frac{\tau^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha \omega}{\sqrt{1+\alpha^2} (2\Phi(\tau))} \quad (4.18)$$

2. Varianza:

$$\omega \left(1 - \frac{e^{-t^2} \alpha^2 \left(2 + e^{\frac{\tau^2}{2}} \sqrt{2\pi} \tau 2\Phi(\tau) \right)}{\pi(1+\alpha^2)} (2\Phi(\tau))^2 \right) \quad (4.19)$$

3. Asimetría:

$$\frac{e^{-\frac{3\tau^2}{2}} \alpha^3 \left(4\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 6e^{\frac{\tau^2}{2}} \tau 2\Phi(\tau) + e^{t^2} \sqrt{2\pi} (\tau^2 - 1) (2\Phi(\tau))^2 \right)}{\pi(1+\alpha^2)^{3/2} (2\Phi(\tau))^3 \left(1 - \frac{e^{-\tau^2} \alpha^2 \left(2 + e^{\frac{\tau^2}{2}} \sqrt{2\pi} \tau 2\Phi(\tau) \right)}{\pi(1+\alpha^2)} (2\Phi(\tau))^2 \right)^{3/2}} \quad (4.20)$$

4. Kurtosis (exceso de kurtosis):

$$\frac{24e^{-2\tau^2}\alpha^4}{\pi^2(1+\alpha^2)^2 2(\Phi(\tau))^4} \times \frac{\left(-1 - e^{-\frac{\tau^2}{2}} \sqrt{2\pi} \tau \Phi(\tau) - \frac{e^{-\tau^2}}{12} \pi(7\tau^2 - 4)(\Phi(\tau))^2 + \frac{\sqrt{2}}{24} e^{-\frac{3\tau^2}{2}} \pi^{3/2} \tau(\tau^2 - 3)(2\Phi(-\tau) - 2)^3\right)}{\left(-1 + \frac{e^{-\tau^2}\alpha^2 \left(2 + e^{-\frac{\tau^2}{2}} \sqrt{2\pi} \tau 2\Phi(\tau)\right)}{\pi(1+\alpha^2)(2\Phi(\tau))^2}\right)^2} \quad (4.21)$$

La asimetría y la kurtosis son función de dos parámetros: α y τ , mientras que la varianza queda determinada por tres parámetros α , τ y ω ; por último, la media es función de los cuatro parámetros que definen la función de distribución ESN. Podemos determinar rangos de valores para los diferentes estadísticos de la función Skew-Normal (ver tabla 4.2):

Tabla 4.2: Rango de variación de Estadísticas Distribución Extended Skew-Normal

	Rango
Media	$(-\infty, \infty)$
Varianza	$(0, \infty)$
Asimetría (skewness)	$(-1,89985, 1,89985)$
Kurtosis	$(-0,5, 6)$

En la tabla, observamos que la media y la varianza tiene los rangos de variación habituales. Por su parte, la asimetría tiene un rango de variación mayor que el de la distribución Skew-Normal, pero aún así es menor que el rango de variación de la asimetría en el producto de variables normales. En cuanto al rango de variación del exceso de kurtosis es más complicado de establecer debido a que la presencia de la función de distribución de la normal estándar en la fórmula de cálculo, produce que para determinados valores del parámetro τ existan oscilaciones en los valores de kurtosis, pudiendo tomar valores muy altos dentro de un rango no limitado. En su momento, realizaremos un análisis más profundo de los valores que toma el exceso de kurtosis (y la kurtosis) para la distribución ESN.

Este mayor rango de variabilidad de la distribución ESN hace que se considere más adecuada para la aproximación del producto de distribuciones normales. A través de los parámetros α y τ podemos controlar la asimetría y la kurtosis de la distribución ESN, de tal forma que coincidan, o por lo menos, se aproximen a los valores que estos estadísticos presentan en el producto de variables normales. Por otro lado, mediante los parámetros ω y ξ podemos controlar la media y varianza. Tenemos pues dos sistemas donde primero determinaremos los valores de α y τ que aproximen los valores deseados de kurtosis y asimetría y, a continuación, ya podemos determinar los valores de los otros dos parámetros que permiten obtener una distribución ESN con los mismos valores de media y varianza que el producto de variables normales considerado.

A continuación, analizamos un poco más, en profundidad, los valores de kurtosis y asimetría de la distribución ESN.

4.2.2.1. Asimetría en la Distribución ESN

Mediante los momentos centrados de orden 3 y orden 2 de la distribución ESN podemos determinar el valor de la asimetría de dicha distribución como función de dos parámetros α y τ tal y como recogemos en la ecuación (4.20). La evolución de la simetría se recoge en la figura 4.3 en función del valor de τ y para tres valores de $\alpha = \{-5, 0, 5\}$.

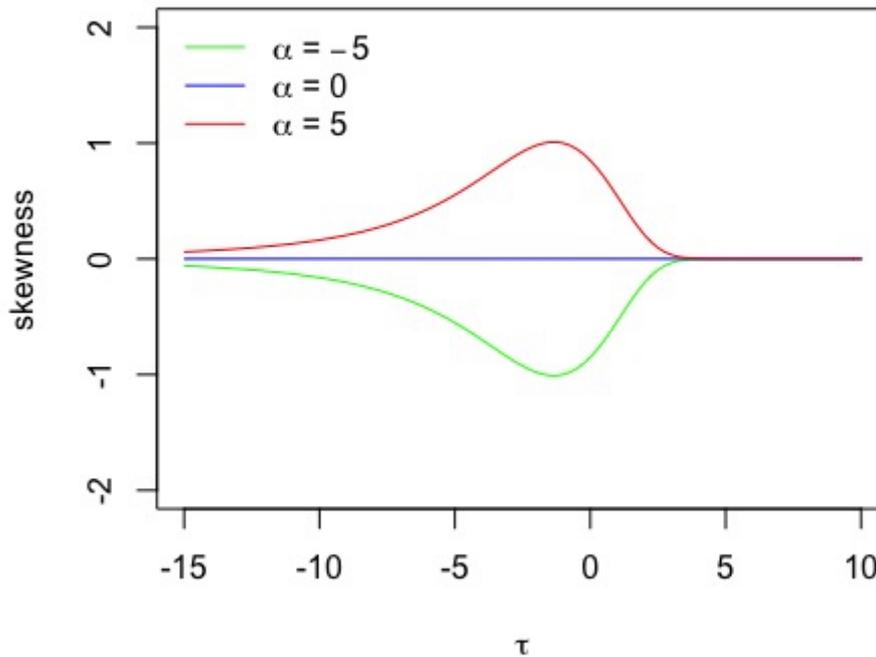


Figura 4.3: Evolución de la asimetría de $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$.

El signo del parámetro α determina el signo de la asimetría. Si $\alpha > 0$ entonces la distribución ESN presenta asimetría positiva y cuando $\alpha < 0$, la asimetría es negativa. En el caso de que sea $\alpha = 0$, la distribución es simétrica (como la distribución normal). El parámetro τ determina la evolución del valor de la asimetría de acuerdo a una función cóncava. Cuando τ está próximo a cero, el valor de asimetría es alto y decrece cuando el valor de τ varía, aunque la evolución es mucho más suave en el lado negativo que en el lado positivo, donde la aproximación de la asimetría a cero es muy rápida cuando los valores de τ aumentan (en valor absoluto). Si concentramos nuestro estudio sobre el efecto conjunto de valores de α y τ , podemos observar (véase figura 4.4), que cuando el valor de α es pequeño la asimetría crece para valores de $\tau < 0$ hasta alcanzar un máximo, para rápidamente aproximarse a cero, pero al aumentar el valor de α esta aproximación a cero se produce de una forma mucho más lenta, y así para valores de α grandes el valor de la asimetría parece que se estabiliza en torno a un valor de 2, cuando α es positivo y -2 para valores de α negativos.

En Canale (2011) se analiza un estudio de la distribución ESN donde se presenta un

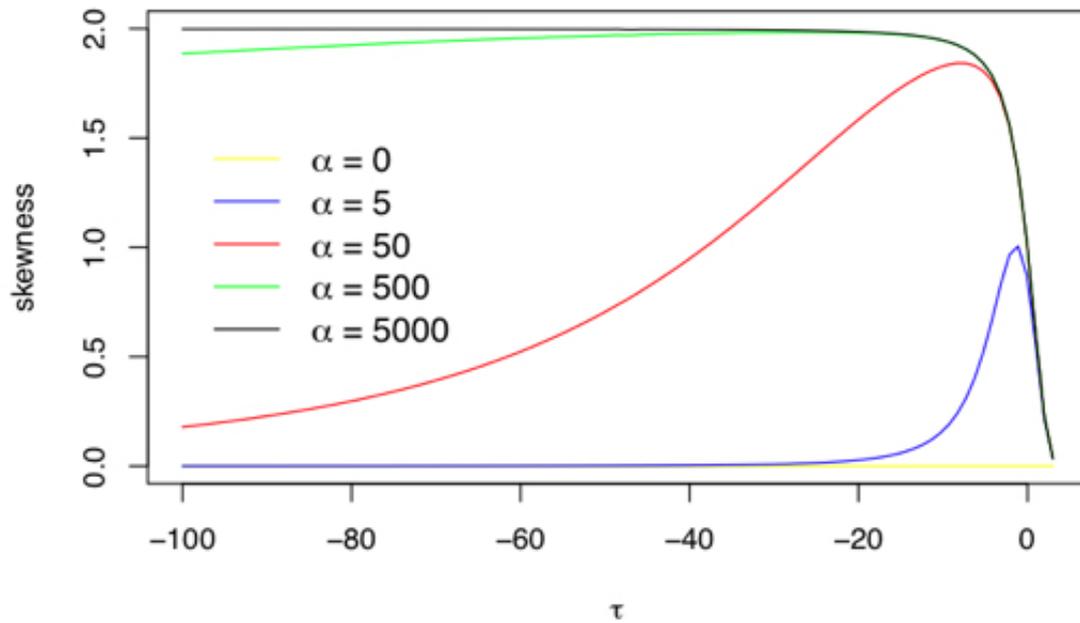


Figura 4.4: Evolución de la asimetría de $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$ para diversos valores de α

valor máximo de asimetría de 1,995 (y $-1,995$ en el caso negativo); sin embargo, no se presentan referencias sobre el proceso seguido para calcular estos valores. En general, podemos concluir que los mayores valores de asimetría se producen para grandes valores de α y grandes valores negativos de τ . Cuando $\tau > 0$ la asimetría es menor y tiende rápidamente a cero. En la tabla 4.3 presentamos diversos valores de los parámetros α y τ y su correspondiente valor de asimetría. Para valores pequeños de α la asimetría presenta una evolución suave con un valor máximo (en torno a -1) y disminuye rápidamente hacia cero cuando el valor de τ se incrementa, en valor absoluto. Por otro lado, cuando los valores de α son grandes, la asimetría crece conforme aumenta (en valor absoluto) el valor de τ , alcanzando valores de asimetría próximos a 2 e incluso superando el valor máximo referido en Canale (2011).

Tabla 4.3: Asimetría de la distribución $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$

Asimetría	$\alpha = 5$	$\alpha = 50$	$\alpha = 500$	$\alpha = 5000$
$\tau = -50$	0.002	0.705	1.968	1.997
$\tau = -20$	0.027	1.584	1.980	1.985
$\tau = -5$	0.552	1.798	1.831	1.831
$\tau = 0$	0.851	0.994	0.995	0.995
$\tau = 1$	0.539	0.591	0.592	0.592
$\tau = 4$	0.002	0.002	0.002	0.002

4.2.2.2. Kurtosis de la Distribución ESN

La kurtosis, al igual que sucede con la asimetría, de la distribución ESN sólo depende de los parámetros τ y α . En la figura 4.5, hemos representado la evolución del valor de la kurtosis de la distribución extended Skew-Normal como función del parámetro τ y para diversos valores del parámetro α . En general, cuando el valor de τ es positivo el valor de kurtosis se estabiliza en cero, pero valores negativos de τ la kurtosis aumenta tomando valores positivos, aunque según van disminuyendo los valores de τ la kurtosis tienden a aproximarse a cero. En la gráfica podemos observar, que los valores más altos de kurtosis se obtienen para valores más altos de α (en valor absoluto).

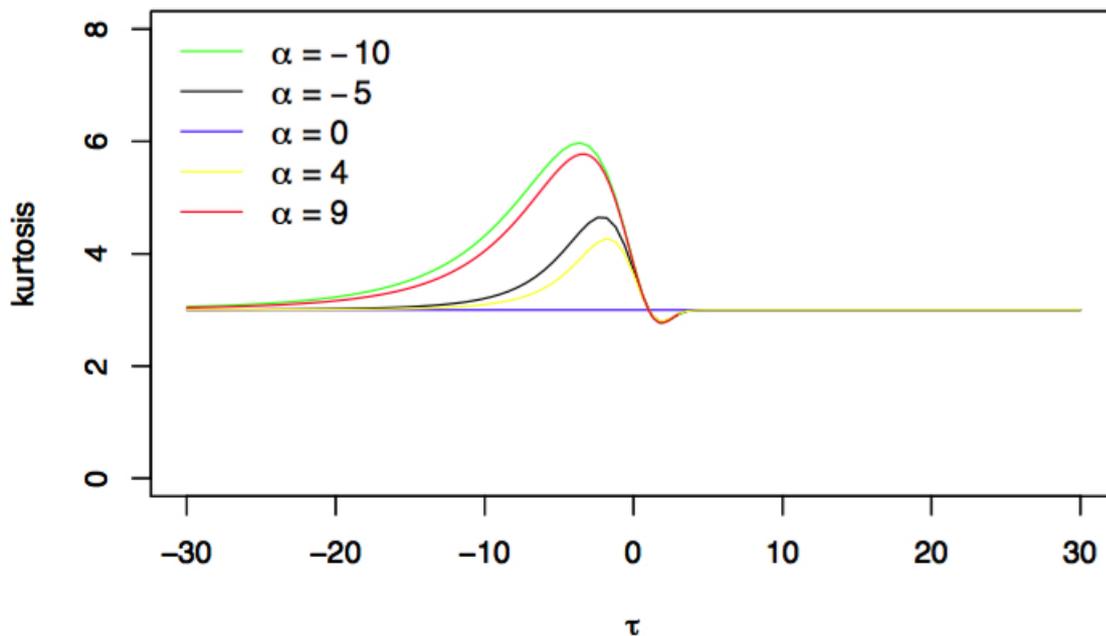


Figura 4.5: Evolución de la kurtosis de $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$

La evolución de la kurtosis es similar a la que ya vimos para la asimetría. Para $\alpha = 0$ la kurtosis vale 3 (0, el exceso de kurtosis, que hemos representado en las gráficas), al igual que en el caso de la distribución normal estándar. Para el resto de valores de α la kurtosis alcanza un valor máximo y luego se vuelve a aproximar a 3 cuando τ tiende a $\pm\infty$. El signo de α no tiene ningún efecto sobre el valor de la kurtosis. Cuando tenemos valores grandes de α y valores grandes negativos de τ ($\tau < -10$) la gráfica de kurtosis presenta unas oscilaciones extrañas, debido a los problemas de cálculo asociados a la utilización de la función Φ de distribución de $N(0, 1)$, $\tau \approx -50$ (ver figura 4.6). Estas oscilaciones provocan valores extraños en la kurtosis, aunque no se deberían considerar. En general, se podría establecer un límite de $\tau = -6$ que, en general, no se debería superar para evitar estos saltos en el valor de la kurtosis; aunque dicho valor también se ve influido por el valor de α , cuanto menor sea dicho valor, más tarde va a aparecer este fenómeno para valores negativos de τ .

En este caso, las oscilaciones dependen de la implementación que se haya utilizado para calcular la función $\Phi(\cdot)$. La función de distribución de la variable normal estándar requiere utilizar la función erf o alguna aproximación a dicha función; y este hecho, va a tener importantes efectos sobre la evolución de la kurtosis (y en menor medida, de la

asimetría). Las figuras 4.5 y 4.6 se han realizado utilizando el programa Mathematica[®] de Wolfram Research, donde existen las funciones Erf y Erfc, como parte integrante de este software, pero no hemos podido acceder a la implementación utilizada para el cálculo de dichas funciones.

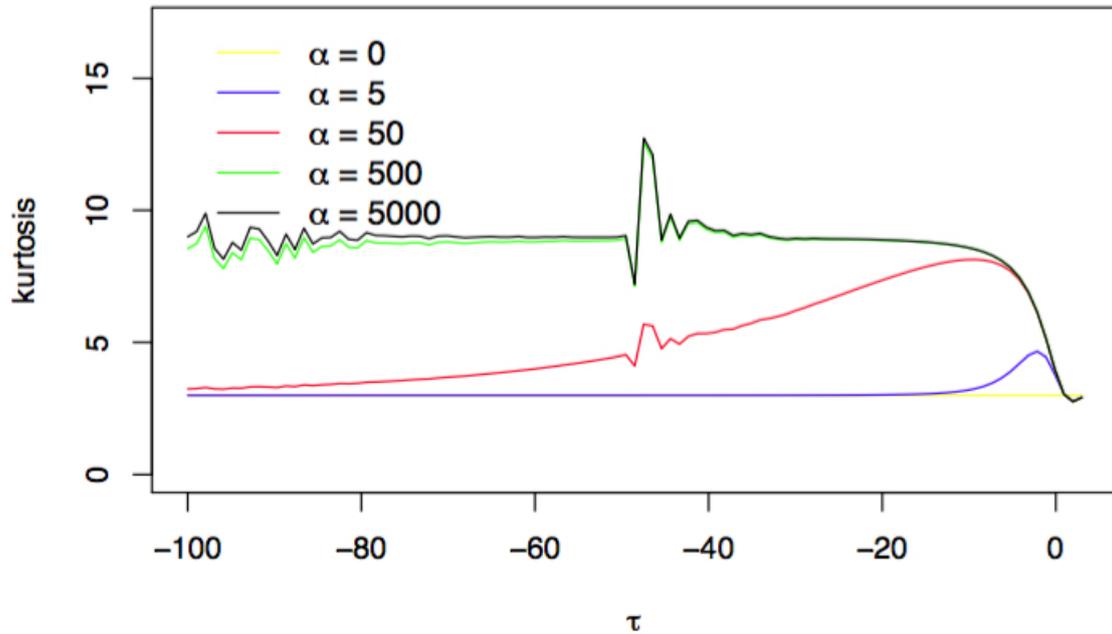


Figura 4.6: Evolución de la kurtosis (exceso de kurtosis) de $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$ para diferentes valores de α

En (Azzalini (2014), Fig. 2.5) se presenta un gráfico del rango de kurtosis para la distribución ESN. Aunque dicho rango es más amplio que en el caso de la distribución Skew-Normal, sigue siendo un rango limitado (inclusive menor que el que hemos visto que presenta el producto de distribuciones normales). En la tabla 4.4, presentamos diversos valores de kurtosis (exceso de kurtosis + 3) para diferentes valores de τ y α . Para valores pequeños de α la evolución de la kurtosis es suave y apenas varía, en torno a 3, para valores superiores de α , la kurtosis toma valores más altos, alcanzando valores superiores a 9.

Tabla 4.4: Kurtosis de la distribución $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$

Kurtosis	$\alpha = 5$	$\alpha = 50$	$\alpha = 500$	$\alpha = 5000$
$\tau = -90$	3.000	3.338	8.712	9.084
$\tau = -50$	3.000	4.491	8.859	8.977
$\tau = -40$	3.001	5.270	9.045	9.123
$\tau = -10$	3.203	8.136	8.576	8.580
$\tau = 1$	3.001	3.001	3.001	3.001
$\tau = 10$	3.000	3.000	3.000	3.000

4.2.3. Pares de Asimetría y Kurtosis de la Distribución Normal Asimétrica

Una posibilidad de representar el producto de distribuciones normales sería considerar dicho producto como una distribución normal asimétrica, puesto que como ya hemos visto, una de las principales diferencias con la distribución normal es la presencia de asimetría en el producto.

A partir de este supuesto, podemos considerar la posibilidad de utilizar los valores de los estadísticos del producto (media, varianza, asimetría y kurtosis) para analizar el comportamiento de una distribución normal asimétrica, Skew-Normal (SN) con parámetros ξ, ω, α y controlar el valor de los estadísticos: media, varianza y asimetría. O bien, utilizar una distribución Extended Skew-Normal (ESN) con un parámetro adicional τ y controlar también la kurtosis.

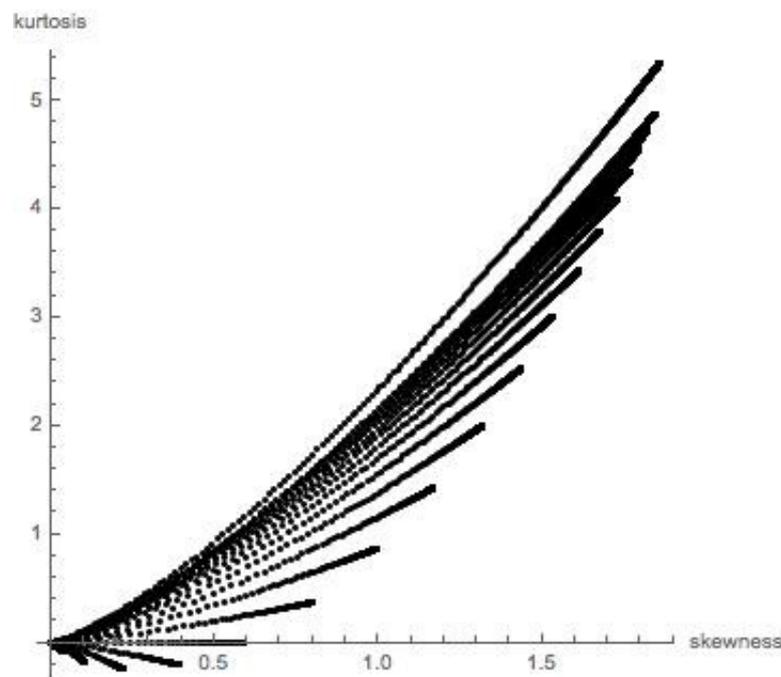


Figura 4.7: Combinaciones de Kurtosis y Asimetría (Skewness) de $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$ con $\alpha \in (0, 100)$, $\tau \in (-6, 10)$

Para determinar los parámetros de la distribución ESN, τ y α utilizamos los valores de asimetría y kurtosis del producto de variables normales y analizamos si es posible alcanzar dichos valores para una distribución ESN. En el apartado anterior, ya hemos visto que los valores de asimetría de la ESN tienen un rango ligeramente menor que el de producto de variables normales, mientras que en el caso de la kurtosis, el rango es ligeramente diferente, ya que permite valores negativos y no alcanza el valor máximo de kurtosis del producto de variables normales. La otra cuestión importante es conocer cómo se distribuyen las diferentes combinaciones de asimetría y kurtosis de la distribución ESN. En la figura 4.7 presentamos las diferentes combinaciones (sólo para la rama positiva) de valores de kurtosis (exceso de kurtosis) (eje vertical) y asimetría (eje horizontal). En general, los valores más elevados corresponden a valores negativos mayores de τ y valores altos de α .

Si comparamos con la distribución de valores de asimetría y kurtosis del producto de distribuciones normales, vemos que la principal diferencia es la no existencia de distribuciones ESN con combinaciones de valores altos de kurtosis y valores pequeños de asimetría. En general, la asimetría y la kurtosis de la distribución ESN presentan una relación más próxima que la relación de estos dos estadísticos en el caso del producto de variables normales.

La ratio entre asimetría y kurtosis, calculada como el cociente entre ambos estadísticos, viene dado por (4.22):

$$\frac{e^{\frac{\tau^2}{2}} \pi \sqrt{\alpha^2 + 1} 2\Phi(\tau) \left(4\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 6e^{\frac{\tau^2}{2}} \tau 2\Phi(\tau) + e^{\tau^2} \sqrt{2\pi} (\tau^2 - 1) (2\Phi(\tau))^2 * A \right)}{\alpha \left(24 + 24e^{\frac{\tau^2}{2}} \sqrt{2\pi} \tau 2\Phi(\tau) + 2e^{\tau^2} \pi (-4 + 7\tau^2) (2\Phi(\tau))^2 + B \right)}, \quad (4.22)$$

$$\text{donde } A = \sqrt{1 - \frac{e^{-\tau^2} \alpha^2 \left(2 + e^{\frac{\tau^2}{2}} \sqrt{2\pi} \tau 2\Phi(\tau) \right)}{\pi(\alpha^2 + 1)(2\Phi(\tau))^2}} \text{ y } B = \sqrt{2} e^{\frac{3\tau^2}{2}} \pi^{3/2} \tau (\tau^2 - 3) (2\Phi(\tau))^2,$$

y donde $\Phi(\tau)$ es la función de distribución $N(0, 1)$ en el punto τ , y el valor de $A \in [0, 1]$.

En el siguiente apartado realizaremos un análisis con mayor profundidad de la evolución de la ratio entre asimetría y kurtosis con el objetivo de ver su posible aplicación a la aproximación del producto de dos variables normalmente distribuidas.

Si analizamos la ratio entre asimetría y kurtosis (4.22) en la distribución ESN, podemos establecer las siguientes relaciones:

1. Cuando $\tau \rightarrow -\infty (< -7)$, la ratio entre asimetría y kurtosis tiende a cero cuando aumenta el valor absoluto de α .
2. Cuando $\tau \rightarrow +\infty (> 3)$, la ratio entre asimetría y kurtosis tiende a cero cuando aumenta el valor absoluto de α .
3. Cuando $\alpha = 0$, la ratio entre asimetría y kurtosis no está definida (indeterminación $\frac{0}{0}$).
4. Cuando $\tau = 0$, la ratio entre asimetría y kurtosis alcanza sus valores más altos en valor absoluto, de forma tal que cuando $\alpha \rightarrow 0^-$ entonces el ratio tiende a $-\infty$ y cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ entonces el ratio tiende a $+\infty$.

Proposición 4.2.2 *Sea una variable $Z \sim ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$ que sigue una distribución extended Skew-Normal. Entonces la asimetría $\alpha_3(z)$, (4.20), y la kurtosis $\kappa(z)$, (4.21), de la variable Z verifican la desigualdad $\kappa(z) + 3 \geq 1 + (\alpha_3(z))^2$.*

Demostración. Dados $\kappa(z)$ y $\alpha_3(z)$ entonces tenemos que estudiar si la distribución de Z verifica que $\kappa(z) \geq -2 + (\alpha_3(z))^2$. En este caso, se verifica la desigualdad de Pearson (Wilkins (1944)) si:

$$\frac{2\sqrt{2} e^{\frac{\tau^2}{2}} \alpha^6 \tau 2\Phi(\tau) + 2e^{\tau^2} \sqrt{\pi} \alpha^2 (6 + \alpha^2 (8 + \tau^2) + \alpha^4 (3 + 2\tau^2)) 2\Phi(\tau) + A}{-2\alpha^2 + e^{\tau^2} \pi (\alpha^2 + 1) (2\Phi(\tau))^2 + e^{\frac{\tau^2}{2}} \sqrt{2\pi} \alpha^2 \tau (-2\Phi(\tau))} \leq 0 \quad (4.23)$$

$$\text{donde } A = \sqrt{2} e^{\frac{3\tau^2}{2}} \pi \alpha^2 (1 + \alpha^2) \tau (6 + \alpha^2 (3 + \tau^2)) (2\Phi(\tau))^3 - 2e^{2\tau^2} \pi^{3/2} (1 + \alpha^2)^3 (2\Phi(\tau))^4$$

El denominador de (4.23) no está definido cuando $\alpha = 0$, para el resto de valores de α cuando $\tau < -2$ entonces el denominador tiende a $-2\alpha^2$ que es un valor negativo. Por

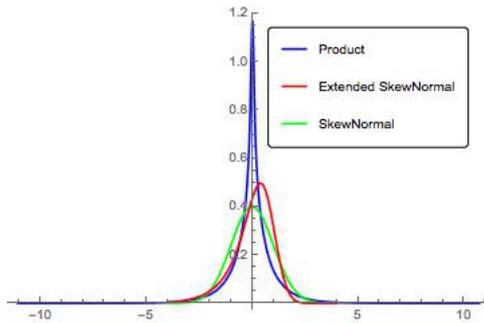


Figura 4.8: Simulación Producto de dos Variables Normales $N(0,1)$ y $N(0,5, \sqrt{1-0,5^2})$ con $\rho = 0$ con aproximación SN y ESN

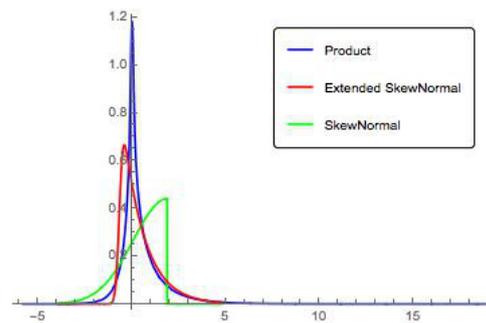


Figura 4.9: Simulación Producto de dos Variables Normales $N(0,1)$ y $N(0,5, \sqrt{1-0,5^2})$ con $\rho = 0,5$ con aproximación SN y ESN

su parte, el numerador de (4.23) tiende a cero cuando $\tau < -2$, por tanto, en este caso la relación se cumple puesto que (4.23) ≥ 0 .

Cuando $\tau \rightarrow 0$, (4.23) es negativo y por lo tanto verifica la condición establecida. Si $\tau < 0$ entonces, (4.23) es negativo y alcanza su máximo cuando $\alpha \rightarrow 0$. Para valores de τ negativos próximos a cero, el máximo de (4.23) es, aproximadamente cero, mientras que para valores más altos el máximo decrece a valores inferiores a cero.

Por tanto, la asimetría y kurtosis de la distribución ESN verifican la desigualdad de Pearson. ■

4.2.4. Simulación del Producto de Distribuciones Normales y Aproximación mediante Distribuciones Normales Asimétricas

La aproximación del producto de variables normales mediante la distribución ESN se realiza a través de la determinación de los cuatro parámetros de la distribución con el objetivo de controlar la media, varianza, asimetría y kurtosis de dicha distribución. El problema, tal y como hemos visto, es la existencia de una relación entre los valores de kurtosis y asimetría, lo que no siempre va a permitir obtener los pares de valores deseados para estos dos estadísticos. Por el contrario, la media y varianza son libres puesto que la media depende de los cuatro parámetros $(\xi, \omega, \alpha, \tau)$ mientras que la varianza depende de tres parámetros (ω, α, τ) . En estas circunstancias, siempre es posible determinar una distribución ESN con la media y varianza deseada, pero no siempre será posible obtener los valores necesarios de asimetría y kurtosis.

Hemos realizado diversas simulaciones del producto de variables normales con distribuciones Skew-Normal (SN) y Extended Skew-Normal (ESN). En el caso de la distribución SN hemos controlado los valores de la media, varianza y asimetría; mientras que en el caso de la distribución ESN se ha buscado controlar los valores de los cuatro estadísticos. En los gráficos 4.8 a 4.13 hemos representado diversas situaciones.

Por un lado, hemos simulado un producto de dos distribuciones normales mediante el método de MonteCarlo para un total de 10^6 elementos de $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con correlación $\rho = 0$ y $\rho = 0,5$. A continuación, hemos calculado los valores de los estadísticos del producto de variables normales. Una vez determinadas la media, varianza, asimetría y kurtosis de la distribución resultante, se ha procedido

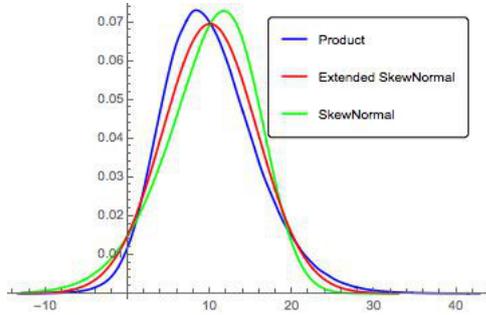


Figura 4.10: Simulación Producto de dos Variables Normales $N(1, 0,25)$ y $N(10, 5)$ con $\rho = 0$ con aproximación SN y ESN

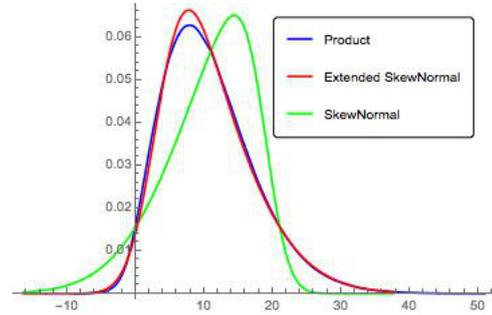


Figura 4.11: Simulación Producto de dos Variables Normales $N(1, 0,25)$ y $N(10, 5)$ con $\rho = 0,5$ con aproximación SN y ESN

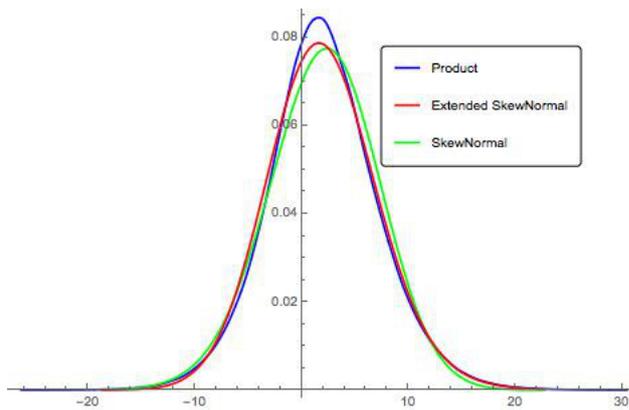


Figura 4.12: Simulación Producto de dos Variables Normales $N(1, 0,25)$ y $N(2, 5)$ con $\rho = 0$ con aproximación SN y ESN

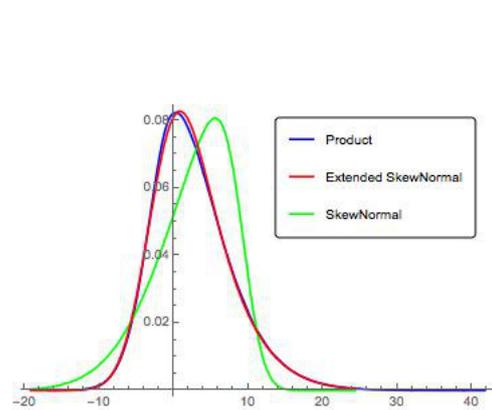


Figura 4.13: Simulación Producto de dos Variables Normales $N(1, 0,25)$ y $N(2, 5)$ con $\rho = 0,5$ con aproximación SN y ESN

a calcular los valores de los parámetros de las distribuciones SN y ESN que presentan dichos valores de media, varianza y asimetría (en el caso de la distribución SN) y de la kurtosis (en el caso de la distribución ESN). Hay que tener en cuenta que a la hora de resolver las ecuaciones resultantes, la presencia de $\Phi(x)$, función de distribución de la normal estándar, imposibilita la aplicación de métodos analíticos exactos, por lo que se tienen que utilizar métodos numéricos de aproximación a la solución. Estos métodos son sensibles a la elección del punto inicial y presentan problemas cuando se alcanzan valores $\tau < -5$ debido a la presencia de inestabilidades en los métodos de cálculo.

En general, las aproximaciones mediante la distribución ESN son ligeramente mejores que las realizadas utilizando la distribución SN, hay que tener en cuenta que en este último caso la distribución producto y la distribución SN no tienen el mismo nivel de kurtosis, aunque sí se verifican los valores de media, varianza y asimetría. En las figuras 4.8 y 4.9 hemos considerado el producto de una función de distribución normal estándar y una función de distribución normal con media $\mu = 0,5$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{1 - 0,5^2}$, el inverso del coeficiente de variación es nulo en la primera distribución y menor que uno en la segunda (por tanto, ambas distribuciones tienen un valor pequeño). Las aproximaciones, tanto mediante la distribución SN como con la distribución ESN no son muy ajustadas y, gráficamente, muestran diferencias importantes con la simulación.

En el caso de la distribución SN, obtenemos los mismos valores de media, varianza y asimetría, pero una diferencia muy importante en el valor de kurtosis (el cual no se controla, dado que sólo tenemos tres parámetros). Por su parte, al considerar la distribución ESN tenemos cuatro parámetros, pero dada la relación entre asimetría y kurtosis de esta distribución, aunque obtenemos una distribución con el mismo nivel de kurtosis, el nivel de asimetría es diferente, dado que no es posible obtener la combinación que presenta el producto de las dos distribuciones normales. Hay que comentar, desde un punto de vista informático, que los procesos de cálculo de los valores de los parámetros α y τ se realizan mediante métodos numéricos de aproximación que presenta una gran sensibilidad a la elección del punto inicial, de ahí que los resultados obtenidos pueden sufrir fuertes variaciones, en función de utilizar diferentes valores del parámetro τ como valor inicial (ver tabla 4.5). La simulación MonteCarlo del producto de distribuciones normales presenta una asimetría de $-0,0227942$ y una kurtosis de $5,62881$. De las cuatro combinaciones consideradas en la tabla 4.5, la mejor aproximación para la kurtosis la obtenemos para $\tau = -5$, mientras que la mejor aproximación para la asimetría se obtiene para $\tau = -10$. En las figuras 4.8 y 4.9, hemos utilizado la aproximación con $\tau = -5$.

Tabla 4.5: Asimetría y Kurtosis de la distribución ESN para diferentes valores iniciales de α y τ

$\alpha = -100$	$\tau = -1$	$\tau = -5$	$\tau = -7$	$\tau = -10$
Kurtosis	2,05574	5,64467	4,34002	0
Asimetría	-1,33017	-1,18458	-0,184019	0

Las otras simulaciones también presentan problemas similares de precisión numérica a la hora de utilizar algoritmos para calcular los valores adecuados de los parámetros de la aproximación a través de la distribución ESN.

En las figuras 4.10 y 4.11 se ha considerado el producto de una distribución normal $N(1, 0,25)$ y una distribución normal $N(10, 5)$. En ambos casos ambas distribuciones presentan un valor alto 2 para el inverso del coeficiente de variación. En este caso las aproximaciones, tanto de la distribución SN como de la distribución ESN, y tanto en el caso de la existencia de correlación como cuando la correlación es nula, son bastante aceptables, ligeramente mejor la aproximación a través de la distribución ESN. En el caso de la no existencia de correlación la aproximación a través de la ESN presenta unos valores, prácticamente nulos para la asimetría y la kurtosis, mientras que la simulación del producto tiene valores pequeños para ambas medidas 0,497429 y 0,3447242, respectivamente. En el caso de la aproximación ESN para el producto de ambas variables, cuando existe correlación obtenemos mucho mejores aproximaciones para la asimetría y la kurtosis 0,777031 y 0,85431, frente a los valores objetivo 0,777031 y 0,624842, por lo que vemos que sólo hay una pequeña diferencia en la kurtosis. En el gráfico 4.11 se observa claramente la buena aproximación de la distribución ESN al producto.

Por último, en las figuras 4.12 y 4.13 se ha considerado el producto de una distribución normal $N(1, 0,25)$ y una distribución normal $N(2, 5)$, por tanto, en este caso combinamos una distribución normal con un valor alto 2 del inverso de coeficiente de variación, con otra distribución normal con un valor pequeño 0,4. La aproximación es muy buena, en la línea de la que teníamos en el caso anterior, y mejora de forma sustancial el primer caso visualizado donde ambas distribuciones presentaban un inverso del coeficiente de variación pequeño. Al igual que en el caso anterior, los problemas se producen debido a la aproximación del valor de asimetría y de kurtosis. Cuando no existe correlación entre las variables $\rho = 0$ vemos que los valores obtenidos para asimetría y kurtosis son muy próximos: valor de asimetría: 0,134615, valor de kurtosis: 0,68207; valores obtenidos: 0,206807 y 0,714054, respectivamente. Cuando tenemos correlación $\rho = 0,5$ la aproximación es incluso mejor, ya que los valores del producto de distribuciones normales y de la aproximación ESN coinciden: valor de asimetría: 0,769551, valor de kurtosis: 1,15752 ; valores obtenidos: 0,769551, 1,15752, respectivamente.

Por tanto, en la presencia de una distribución normal con un inverso de coeficiente de variación grande, mayor que 1, facilita la aproximación al producto de distribuciones normales mediante la utilización de una distribución Extended Skew-Normal (ESN) que presenta los mismos estadísticos: media, varianza, asimetría y kurtosis, que el producto de distribuciones normales.

4.3. Aplicación de la distribución ESN y relación con el Producto de Distribuciones Normales

El análisis gráfico de algunos sencillos ejemplos ha mostrado que en determinadas circunstancias el producto de distribuciones normales se puede modelar a través de la distribución Extended Skew-Normal (Azzalini (2014)), mediante la elección de los valores adecuados para los parámetros de dicha distribución de forma tal que coincidan los valores de de media, varianza, asimetría y kurtosis de ambas distribuciones.

A la hora de considerar la modelización del producto de distribuciones normales a través de la distribución Extended Skew-Normal nos encontramos con dos cuestiones importantes:

1. El rango de variación de la asimetría y kurtosis del producto no coincide totalmente con el rango de variación de ambos estadísticos para la distribución Extended Skew-Normal. Hemos visto que los valores extremos son mayores en el caso del producto, y al mismo tiempo, la relación entre asimetría y kurtosis en el producto de distribuciones normales viene marcada por una relación que hemos visto en el capítulo 3; mientras que en el caso de la distribución Extended Skew-Normal esta relación presenta una naturaleza ligeramente diferente tal y como vimos en la sección anterior.
2. La segunda cuestión importante es la dificultad de determinación del valor numérico de la kurtosis de la distribución Extended Skew-Normal para valores de $\tau < -5$, donde combinado con valores altos de $\alpha > 50$ da lugar a la aparición de saltos en los valores de kurtosis que producen valores erróneos, e incluso, incoherentes con la teoría.

Por otro lado, dado que en la expresión de la kurtosis y la asimetría de la distribución ESN utilizamos la función de distribución de normal standard, no es posible obtener una solución exacta para el sistema de ecuaciones planteado. Se utilizarán técnicas de aproximación numérica a la solución, que son muy sensibles a la elección del valor inicial, y fácilmente pueden derivar a soluciones erróneas debido al hecho de la aparición de inestabilidades en los valores de kurtosis (y en menor medida, de los valores de asimetría) provocadas por la función de distribución normal.

Para aproximar un producto de distribuciones normales el algoritmo tendría las siguientes etapas:

1. Dadas dos distribuciones normales $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$, consideramos su producto $Z = XY$ y calculamos los valores teóricos: media, varianza, asimetría y kurtosis.
2. Consideramos una distribución de aproximación Extended Skew-Normal con parámetros (τ, α) . Buscamos soluciones aproximadas al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_3[Z] &= \alpha_3(\alpha, \tau) \\ \kappa[Z] &= \kappa(\alpha, \tau)\end{aligned}$$

donde α_3 representa el valor de asimetría y κ el valor de kurtosis. En general, no tendremos una solución exacta al sistema planteado, por lo que habrá que ir haciendo diferentes aproximaciones hasta conseguir los valores más cercanos a los valores de asimetría y kurtosis del producto. El proceso de búsqueda de aproximaciones es muy sensible a la elección del valor inicial de τ y mucho menos al valor de α . Por otro lado, el signo de la asimetría viene determinado por el signo del parámetro α , de forma directa.

3. A continuación determinamos los otros dos parámetros de la distribución ESN, de forma que obtengamos los valores objetivo de media y varianza.

$$\begin{aligned}\sigma^2[Z] &= \sigma^2(\xi, \omega, \alpha, \tau) \\ \mu[Z] &= \mu(\xi, \omega, \alpha, \tau)\end{aligned}$$

donde σ^2 representa la varianza y μ la media.

4. El producto $Z = XY$ se aproximaría por la distribución $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$ para los valores obtenidos.

Podemos realizar una representación gráfica de la aproximación de ambas distribuciones. En este caso, necesitamos utilizar una simulación MonteCarlo, para obtener una representación gráfica de la distribución del producto. En los gráficos que mostramos hemos utilizado una simulación mediante una Normal Bivariante $N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ con un total de 10^6 elementos. Hay que tener en cuenta, que al ser simulaciones, los valores muestrales de las estadísticas: media, varianza, asimetría y kurtosis, pueden diferir ligeramente de los valores teóricos.

En las tablas siguientes 4.6 y 4.7 mostramos los diferentes valores obtenidos para el producto y la distribución ESN, para dos ejemplos de producto de distribuciones normales:

Tabla 4.6: Aproximación producto $X \sim N(1, 0,25)$ e $Y \sim N(2, 5)$ con $\rho = 0$

$\rho = 0$	Media	Varianza	Asimetría	Kurtosis
Producto (Valores teóricos)	2	26,81	0,14	0,68
Producto (Valores muestrales)	2	26,75	0,14	0,67
ESN	2	26,81	0,06	0,68

Tabla 4.7: Aproximación producto $X \sim N(1, 0,25)$ e $Y \sim N(2, 5)$ con $\rho = 0,5$

$\rho = 0,5$	Media	Varianza	Asimetría	Kurtosis
Producto (Valores teóricos)	2,63	29,70	0,77	1,15
Producto (Valores muestrales)	2,63	29,63	0,77	1,15
ESN	2,63	29,70	0,77	1,15

El análisis de las tablas presentadas muestra que la aproximación ESN, en el caso con $\rho \neq 0$ obtiene los valores teóricos esperados para las estadísticas del producto de distribuciones normales. Por el contrario cuando $\rho = 0$, los valores obtenidos para la ESN no coinciden en el caso de la asimetría.

Podemos suponer que la bondad de la aproximación al producto de distribuciones normales estaría influida por dos cuestiones principalmente:

1. Valor de la correlación entre las dos variables ρ .
2. Valor del inverso del coeficiente de variación de las variables normales que conforman el producto: $\frac{\mu}{\sigma}$.

4.3.1. Influencia de la Presencia de Correlación

La existencia de un valor del coeficiente de correlación nulo entre dos variables normales implica que la expresión de la asimetría y kurtosis del producto es mucho más simple. Dadas dos distribuciones normales $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$, las expresiones para la kurtosis y la asimetría son:

1. Asimetría (skewness):

$$\frac{6\mu_x\mu_y\sigma_x^2\sigma_y^2}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + (\mu_x^2 + \sigma_x^2)\sigma_y^2)^{3/2}} \quad (4.24)$$

2. Kurtosis (exceso de kurtosis):

$$\frac{6\sigma_x^2\sigma_y^2(2\mu_y^2\sigma_x^2 + (2\mu_x^2 + \sigma_x^2)\sigma_y^2)}{(\mu_y^2\sigma_x^2 + (\mu_x^2 + \sigma_x^2)\sigma_y^2)^{3/2}} \quad (4.25)$$

La ratio entre asimetría y kurtosis para el producto de dos variables normales con $\rho = 0$ es:

$$\frac{\mu_x\mu_y\sqrt{\mu_y^2\sigma_x^2 + (\mu_x^2 + \sigma_x^2)\sigma_y^2}}{2\mu_y^2\sigma_x^2 + (2\mu_x^2 + \sigma_x^2)\sigma_y^2} \quad (4.26)$$

Este factor presenta diversas propiedades: el denominador es siempre positivo, y el numerador es positivo si el signo de μ_x coincide con el signo de μ_y , si presenta signos diferentes entonces el numerador es negativo, al igual que la ratio. Si la media de alguna de las variables es nula, entonces la ratio es cero (esto es debido a que la asimetría es nula), en este caso, la kurtosis está comprendida en el intervalo $[0, 6]$ en función de los valores de μ y σ de la variable que no presente $\mu = 0$. Si ambas variables presentan media nula, la kurtosis es 6.

Sea $X \sim N(0, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ entonces la ratio entre asimetría y kurtosis es cero, y la kurtosis viene dada por:

$$6 - \frac{6\mu_y^4}{(\mu_y^2 + \sigma_y^2)^2} \quad (4.27)$$

Por su parte, la distribución ESN presenta una ratio entre asimetría y kurtosis más compleja en función de los parámetros α , τ y con $\Phi(x)$ la función de distribución normal estándar, dada por la expresión:

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{e^{-\tau^2}\alpha^2(1 + e^{\tau^2/2}\sqrt{2\pi}\tau\Phi(\tau))}{2\pi(\alpha^2 + 1)\Phi(\tau)^2}} \times e^{\tau^2/2}\pi\sqrt{1 + \alpha^2}\Phi(\tau) \left(\sqrt{2/\pi} + 3e^{\tau^2/2}\tau\Phi(\tau) + e^{\tau^2}\sqrt{2\pi}(\tau^2 - 1)\Phi(\tau)^2 \right)}{\alpha \left(-3 + \sqrt{2}e^{\frac{3\tau^2}{2}}\pi^{3/2}\tau(\tau^2 - 3)(\Phi(-\tau) - 1)^3 - 6e^{\tau^2/2}\sqrt{2\pi}\tau\Phi(\tau) - e^{\tau^2}\pi(7\tau^2 - 4)\Phi(\tau)^2 \right)} \quad (4.28)$$

Esta expresión no está definida cuando $\alpha = 0$ o $\tau = 0$, presentando un carácter asintótico en estas dos situaciones: presenta un carácter asintótico a $+\infty$ cuando $\alpha \rightarrow 0$ o cuando $\tau \rightarrow 0$ y τ y α tiene el mismo signo, y es asintótica a $-\infty$ cuando presentan signos diferentes. La ratio es negativa cuando $\alpha < 0$ y $\tau > 0$ o bien, cuando $\alpha > 0$ y $\tau < 0$. Si α y τ presentan el mismo signo entonces es positivo. En este caso, los parámetros α y τ tienen el mismo papel sobre el ratio que tenían los parámetros μ_x y μ_y en la ratio 4.26. En la figura 4.14 podemos ver la evolución del ratio entre asimetría y kurtosis para la distribución ESN, donde se aprecia el carácter asintótico de esta relación.

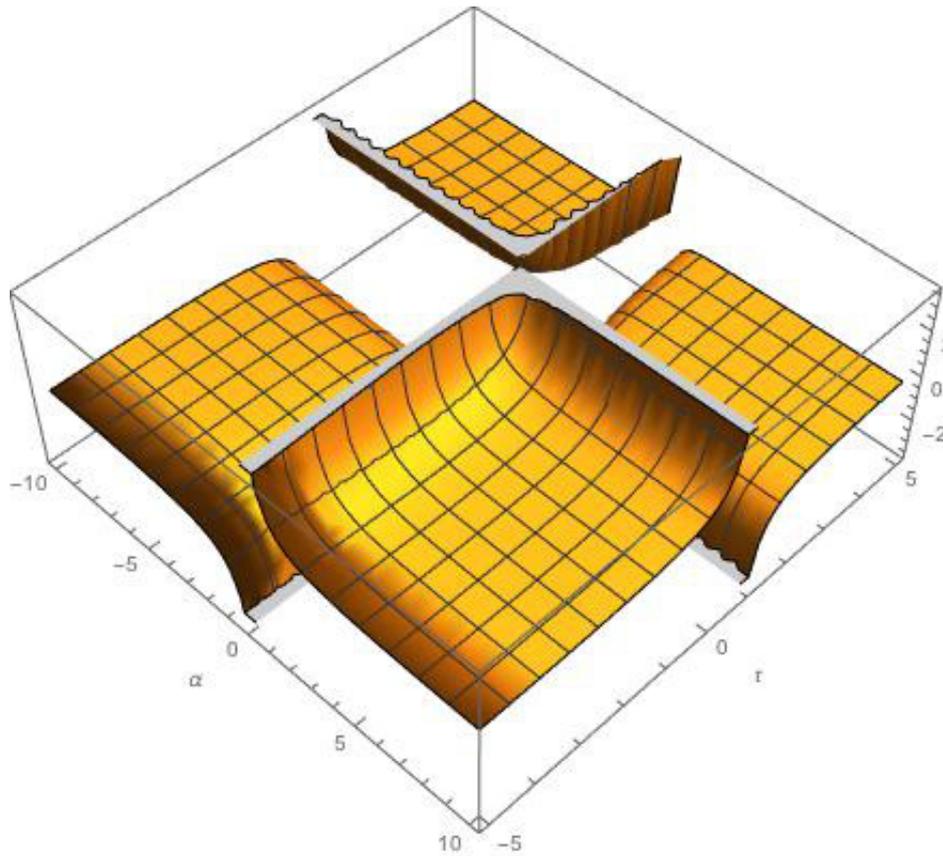


Figura 4.14: Ratio entre asimetría y kurtosis de la distribución ESN

En general, la relación entre la asimetría y la kurtosis del producto de variables con correlación nula, no es fácil de obtener para la distribución ESN. En las gráficas 4.7 (distribución ESN) y 3.24 a 3.27 (producto de distribuciones normales) podemos observar que las nubes de puntos de ambas distribuciones son bastante diferentes, y que no siempre será posible obtener los valores adecuados de asimetría y kurtosis para la distribución ESN. En estas circunstancias, en general, podemos optar por intentar alcanzar el valor adecuado de kurtosis, aunque ello va a conllevar sacrificar la correspondencia a nivel de asimetría. En la distribución ESN, valores altos de kurtosis están asociados a niveles altos de asimetría (tanto positiva como negativa); por esta razón cuando necesitamos alcanzar niveles altos de kurtosis, vendrán acompañados de valores altos de asimetría, muy alejados de los valores nulos que presenta el producto de distribuciones normales cuando, al menos, alguno de los parámetros μ es nulo, o muy pequeño.

La presencia de correlación nula dificulta la aproximación mediante la distribución ESN del producto de variables normales, aunque no la impide, dado que el resultado final va a depender de los parámetros de las distribuciones utilizadas en el producto. En la figura 4.15, observamos que la ratio entre asimetría y kurtosis es bastante suave (cuando $\rho = 0$) para los factores $r_x = \frac{\mu_x}{\sigma_x}$ y $r_y = \frac{\mu_y}{\sigma_y}$ que representan al inverso del coeficiente de variación de las dos distribuciones normales. De hecho, la principal influencia sobre los desempeños la obtenemos para la aproximación al producto de variables normales determinada por estos factores (r_x, r_y) .

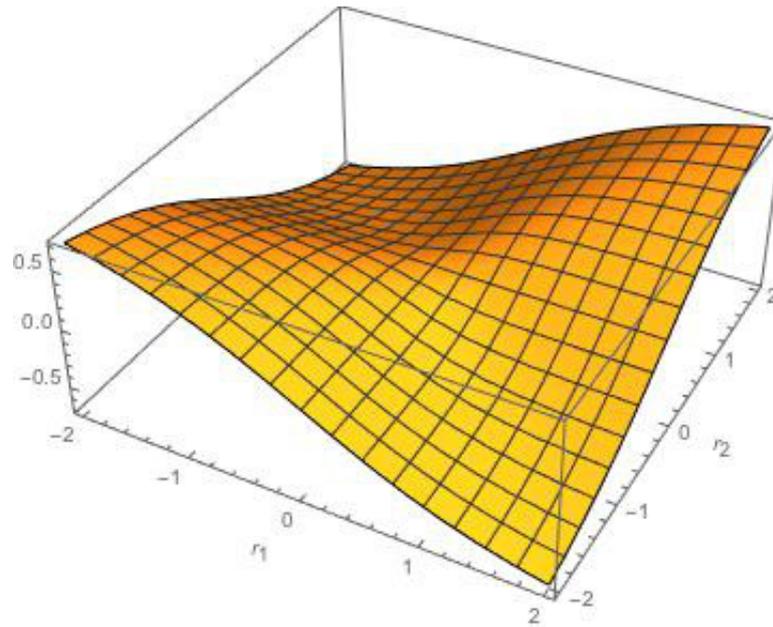


Figura 4.15: Ratio entre asimetría y kurtosis del producto de distribuciones normales con $\rho = 0$.

4.3.2. Influencia del Inverso del Coeficiente de Variación

Consideramos dos variables normales $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ y sus respectivos valores del inverso del coeficiente de variación de cada variable: $r_x = \frac{\mu_x}{\sigma_x}$ e $r_y = \frac{\mu_y}{\sigma_y}$. Estos coeficientes pueden ser positivos o negativos en función del signo del parámetro μ y serán cero para a aquellas variables aleatorias con media nula.

A partir de la función generadora de momentos (2.5) donde ρ es el coeficiente de correlación entre ambas variables, podemos determinar los valores de media, varianza, asimetría y exceso de kurtosis del producto de dos variables normales en función de las variables r_x, r_y, ρ (ver tabla 4.8).

Tabla 4.8: Estadísticas Producto Dos Distribuciones Normales

media	$r_x r_y + \rho$
varianza	$1 + \rho^2 + 2\rho r_x r_y + r_x^2 + r_y^2$
asimetría (skewness)	$\frac{2(\rho^3 + 3r_x r_y + 3\rho^2 r_x r_y + 3\rho(1 + r_x^2 + r_y^2))}{(2\rho^2 + 4\rho r_x r_y + (1 + r_x^2)(1 + r_y^2))^{3/2}}$
exceso de kurtosis	$\frac{6(1 + \rho^4 + 2r_x^2 + 12\rho r_x r_y + 4\rho^3 r_x r_y + 2r_y^2 + 6\rho(1 + r_x^2 r_y^2))}{(2\rho^2 + 4\rho r_x r_y + (1 + r_x^2)(1 + r_y^2))^2}$

A partir de los valores de estos estadísticos podemos intentar analizar la relación existente entre asimetría y kurtosis. La ratio entre asimetría y kurtosis es función de los tres parámetros (r_x, r_y, ρ) , y viene dada por (4.29):

$$\frac{\sqrt{1 + r_x^2 + r_y^2 + 2r_x r_y \rho + \rho^2(3r_x r_y + 3(1 + r_x^2 + r_y^2)\rho + 3r_x r_y \rho^2 + \rho^3)}}{3(1 + 2r_y^2 + 6(1 + r_y^2)\rho^2 + \rho^4 + 4r_x r_y \rho(3 + \rho^2) + r_x^2(2 + 6\rho^2))} \quad (4.29)$$

Esta expresión presenta una gráfica suave (véase 4.16) con un comportamiento similar con respecto al coeficiente de correlación ρ . Cuando los valores de r_x y r_y

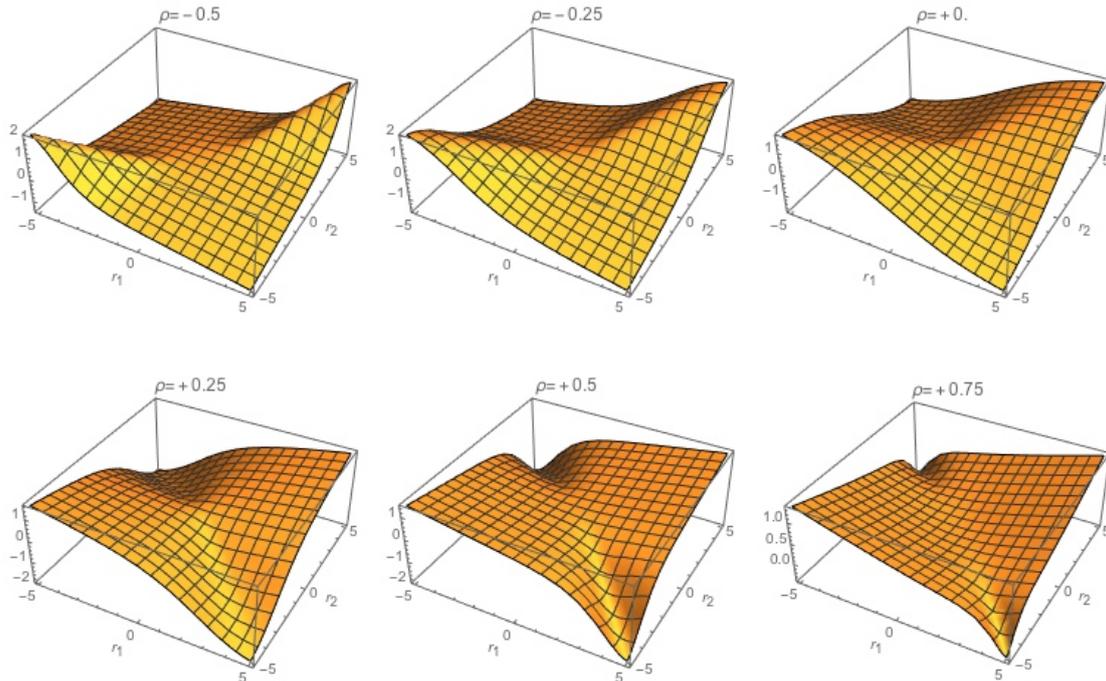


Figura 4.16: Ratio entre asimetría y kurtosis del producto de distribuciones normales para diferentes valores de ρ .

tienden a valores grandes del mismo signo, la ratio entre asimetría y kurtosis tiende a valores máximos, en torno a -2, para $\rho < 0$ y a 1, para $\rho > 0$. Por su parte, cuando los valores de r_x y r_y tienden a ser valores grandes pero con signo diferente la ratio tiende a valores mínimos en torno a -1, para valores de $\rho < 0$ y en torno a -2, para valores de $\rho > 0$.

La presencia de valores de correlación negativos tiende a potenciar los valores máximos de la ratio, aumentando el valor de la asimetría en relación al valor de kurtosis del producto. Por su parte, los valores de correlación positivos potencian los valores mínimos, esto es, la ratio entre asimetría y kurtosis en valor absoluto es alta, pero presenta signo negativo. En el primer caso comentado, la existencia de máximos se produce cuando coinciden los signos de los inversos del coeficiente de variación de cada variable, mientras que los mínimos suponen que ambos inversos tengan signos opuestos. En todos los casos, observamos que cuando el inverso del coeficiente de variación es nulo, esto es, cuando $\mu_x = \mu_y = 0$, se produce un punto de silla en la relación en la ratio entre asimetría y kurtosis.

Si consideramos dos variables normales estándar, los estadísticos del producto son:

- media: ρ .
- varianza: $2\rho^2 + 1$.
- asimetría: $\frac{2(\rho^3+3\rho)}{(2\rho^2+1)^{3/2}}$
- kurtosis (exceso de kurtosis): $\frac{6(1+\rho^4+6\rho)}{(2\rho^2+1)^2}$

En estos casos, podemos ver que la media coincide con la correlación y la varianza es 2 veces la correlación al cuadrado más la unidad. Por su parte la asimetría y el exceso

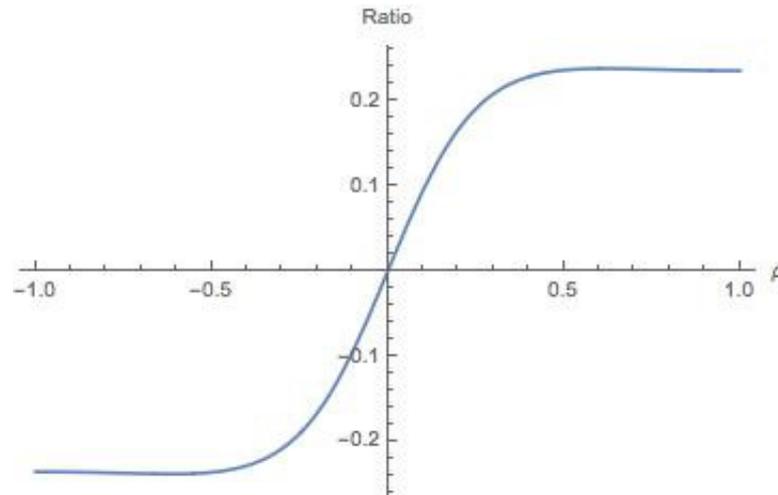


Figura 4.17: Ratio entre asimetría y kurtosis del producto de distribuciones normales con $r_x = r_y = 0$ en función de ρ .

de kurtosis pueden ser positivos o negativos; en particular el exceso de kurtosis será negativo cuando $\rho < -0,166796$. mientras que la asimetría será positiva para valores positivos de ρ y negativa para valores negativos.

La ratio entre asimetría y kurtosis sería: $\frac{\rho\sqrt{1+\rho^2(3+\rho^2)}}{3(1+6\rho^2+\rho^4)}$. Si $\rho \in [-1, 1]$, entonces es una función continua creciente positiva para valores de $\rho > 0$ y con valor nulo, cuando no existe correlación (ver figura 4.17), lo que implica que cuando no hay correlación, la asimetría es nula y la kurtosis vale 6. El rango de variación de la ratio entre asimetría y kurtosis está comprendido entre $(-0,25; +0,25)$.

Por su parte, la ratio de asimetría y kurtosis de la distribución ESN, como ya hemos comentado, es mucho menos suave, y presentan un salto en su continuidad (ver figura 4.18). En particular, la ratio entre ambas estadísticas en la distribución ESN no se anula, circunstancia que se produce en el producto de dos variables normales, por ejemplo cuando ambas variables son distribuciones normales estándar con correlación nula. Otra característica importante es que si $\alpha > 0$ en $\tau = 1$ se produce un salto en la expresión del ratio, para valores de $\tau \leq 1$ el ratio es positivo, porque kurtosis y asimetría son ambos valores positivos, pero cuando $\tau > 1$ el ratio es negativo, dado que la kurtosis es negativa, en $\tau = 1$ se produce un valor positivo muy alto, debido a que la kurtosis tiende a cero.

En estas circunstancias, cuando ambas variables presentan valores nulos para el inverso del coeficiente de variación, la aproximación mediante la distribución ESN, normalmente, no presentará buenos ajustes, es el caso del producto de dos distribuciones normales estándar con correlación nula. En general, podemos establecer que la aproximación ESN se podrá utilizar, de forma preferente, cuando alguno de los valores de los inversos de los coeficientes de variación de las variables normales utilizadas en el producto sea mayor o igual a uno.

Proposición 4.3.1 Sean dos variables normales $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con coeficiente de correlación $\rho \in [-1, 1]$ y sean los inversos del coeficiente de variación de cada variable $r_x = \frac{\mu_x}{\sigma_x}$ e $r_y = \frac{\mu_y}{\sigma_y}$. Dado el producto XY de las dos variables normales, calculamos los valores de asimetría y exceso de kurtosis de XY . Entonces no existe una función $Z \sim ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$ (extended Skew-Normal) que presente los mismos niveles

de asimetría y exceso de kurtosis del producto cuando $r_x < 1$ y $r_y < 1$.

Demostración. Dadas dos variables normales $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ con coeficiente de correlación $\rho \in [-1, 1]$ y, dados los inversos del coeficiente de variación r_x y r_y , podemos determinar las siguientes expresiones para la asimetría y el exceso de kurtosis de producto de ambas variables XY :

$$\gamma_1 = \frac{2(\rho^3 + 3r_x r_y + 3\rho^2 r_x r_y + 3\rho(1 + r_x^2 + r_y^2))}{(2\rho^2 + 4\rho r_x r_y + (1 + r_x^2)(1 + r_y^2))^{3/2}} \quad (4.30)$$

$$\gamma_2 = \frac{6(1 + \rho^4 + 2r_x^2 + 12\rho r_x r_y + 4\rho^3 r_x r_y + 2r_y^2 + 6\rho(1 + r_x^2 r_y^2))}{(2\rho^2 + 4\rho r_x r_y + (1 + r_x^2)(1 + r_y^2))^2} \quad (4.31)$$

donde 4.30 corresponde a la asimetría y 4.31 corresponde al exceso de kurtosis.

El cociente entre la asimetría y la kurtosis del producto de variables normales $\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)$ es:

$$\frac{\sqrt{1 + r_x^2 + r_y^2 + 2r_x r_y \rho + \rho^2} (3r_x r_y + 3(1 + r_x^2 + r_y^2)\rho + 3r_x r_y \rho^2 + \rho^3)}{3(1 + 2r_y^2 + 6(1 + r_y^2)\rho^2 + \rho^4 + 4r_x r_y \rho(3 + \rho^2) + r_x^2(2 + 6\rho^2))} \quad (4.32)$$

En 4.32, el primer factor del denominador $\sqrt{1 + r_x^2 + r_y^2 + 2r_x r_y \rho + \rho^2}$ toma valores en el rango $(1, \sqrt{6})$ para valores r_x, r_y y ρ entre $[-1, 1]$; el valor es mayor cuando más se aproxime a 1 o a -1 el valor de la correlación y también se ve aumentando cuando r_x y r_y tienden al mismo valor 1 ó -1 . El segundo factor en el cociente, toma valores en un rango mucho mayor $(-16, 16)$. Por último, el denominador, es siempre positivo, y toma valores en el rango $(3, 120)$. En los tres casos, los criterios de crecimiento y evolución de los tres factores considerados son homogéneos.

Entonces, cuando $r_x < 1$ y $r_y < 1$, entonces la la expresión 4.32 es menor que 0,4 en valor absoluto, esto es el rango del ratio de asimetría y kurtosis está comprendido entre $-0,4$ y $0,4$.

La ratio entre asimetría y kurtosis de la distribución *Extended Skew-Normal* fue definida en 4.28. Este valor depende de los valores de los parámetros de la distribución ESN α y τ , y utiliza la función error $\text{erf}(x)$. Los valores de α y τ son números reales (no presentan ningún tipo de limitación y la función $\text{erf}(x)$ tiende a 1 cuando $x > 2$ y tiende a -1 cuando $x < 2$, presenta un carácter asintótico.

Cuando $\alpha = 0$, la kurtosis es nula y por lo tanto la ratio no está definida, para el resto de valores de α no hay problemas. Cuando $\tau = 1$ se produce un salto en la función (presenta una discontinuidad de salto), si α es positiva la función salta de un valor positivo alto a un valor negativo (si $\alpha < 0$, el salto se produce en el otro sentido) y para valores de $\tau > 1$ la ratio es siempre negativa, para valores menores que 1 será siempre positiva. En ambos casos, la función mantiene su carácter creciente con respecto a τ (primera derivada parcial positiva) y tiene un comportamiento asintótico con respecto a la variable τ .

En el lado positivo de τ la evolución de la kurtosis y asimetría de la distribución ESN es muy pequeña, dado que a partir de valores de τ próximos a 2, el valor de la asimetría y el valor de la kurtosis tienden a cero (son valores muy pequeños).

En estas circunstancias, la expresión de 4.28 nunca toma valores inferiores a 0,4 (en valor absoluto) y por lo tanto, no es posible alcanzar el ratio de asimetría y kurtosis de la distribución ESN que iguale al ratio de asimetría y kurtosis del producto de distribuciones normales cuando r_x, r_y están en el intervalo $(-1, 1)$. Cuando $\alpha > 0$ y

$\tau \rightarrow 0$ entonces la asimetría y la kurtosis tienden a cero y, por tanto, la ratio no se puede calcular. En el caso de $\alpha < 0$, y $\tau \rightarrow \infty$ sucede lo mismo. ■

Cuando algún valor de los inversos del coeficiente de variación de las variables normales (r) sea inferior a uno, la utilización de la distribución ESN para aproximar el producto requerirá optar por intentar aproximar lo máximo posible el valor de uno de los estadísticos, en general, la kurtosis y utilizando el nivel de asimetría que corresponda a dicha distribución ESN.

La presencia de valores superiores a uno (en valor absoluto) del inverso del coeficiente de variación produce una mejor aproximación por parte de la distribución ESN, asimismo, esta mejora de la aproximación ESN se ve reforzada cuando existe correlación. En general, si alguna variable presenta un valor del inverso del coeficiente de variación superior a 1, la aproximación ESN es muy buena, mientras que empeora cuando ambas variables presentan valores inferiores a uno. La situación más desfavorable se produce cuando los valores de dichas variables están muy próximos a cero, o son cero, en el caso de valores de media nula.

La ratio entre asimetría y kurtosis depende de tres variables r_x, r_y, ρ . La dependencia con respecto a r_x y r_y es la misma: cuando ambos valores tienden a cero, la ratio tiende a $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ para valores de $\rho = 1$ y a $-\frac{1}{3\sqrt{2}}$ para valores de $\rho = -1$. Cuando r_x ó r_y crecen las ratios también aumentan (en valor absoluto) (véase 4.19). La aproximación mediante la distribución ESN requerirá ratios de asimetría y kurtosis diferentes de cero; valores mayores del ratio mejoran la aproximación ESN.

En los gráficos 4.20 a 4.25 observamos diversas aproximaciones al producto de dos variables normales utilizando diferentes distribuciones ESN. En general, las aproximaciones son muy buenas, alcanzando los valores teóricos esperados de los estadísticos (media, varianza, asimetría y kurtosis). No obstante, las gráficas presentan algunas diferencias visuales debidas, principalmente, al hecho de que la representación gráfica del producto corresponde a un proceso de simulación, donde los valores de las estadísticas resultantes pueden diferir, ligeramente, de los valores teóricos esperados.

Las aproximaciones son mejores cuando al menos una de las variables normales presenta un valor del inverso del coeficiente de variación superior a 1, y para los mismos valores del coeficiente de variación, la presencia de correlación mejora la aproximación de la distribución ESN.

En general, podemos aproximar el producto de distribuciones normales utilizando la aproximación de la distribución ESN, teniendo en cuenta la influencia de los dos factores comentados. Cuando existe correlación y cuando alguna de las variables normales presentan valores del inverso del coeficiente de variación mayores o iguales a uno, las aproximaciones son mejores.

4.4. Algoritmo de aproximación del Producto de Distribuciones Normales mediante la Distribución ESN

La aproximación mediante la ESN se basa en la idea de buscar los parámetros de dicha distribución que corresponden a una distribución con los mismos valores de

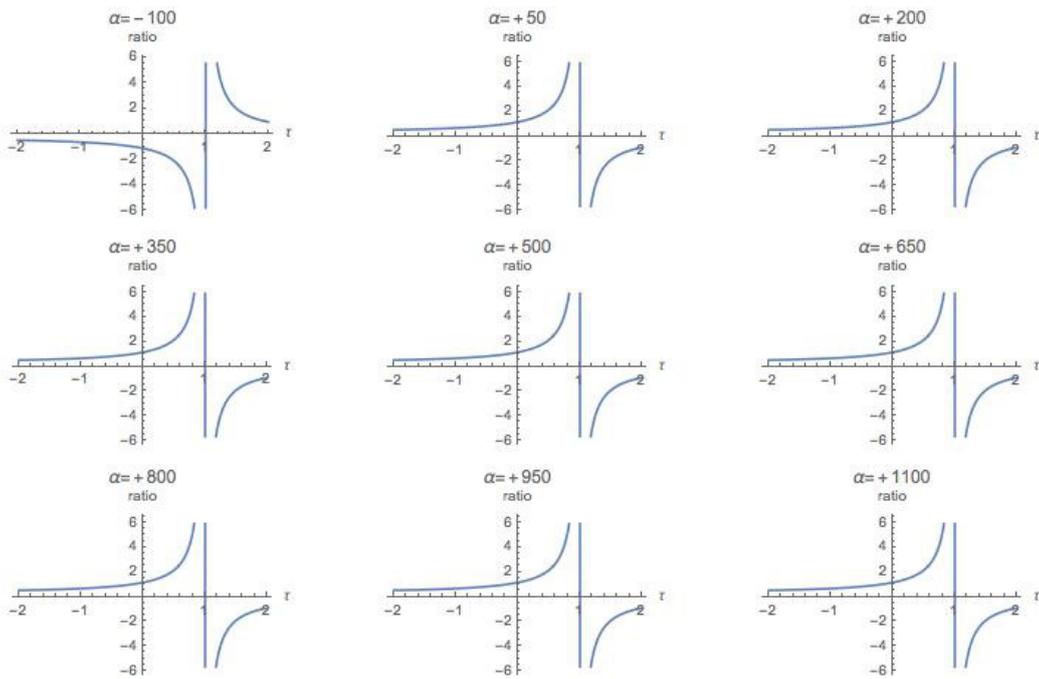


Figura 4.18: Ratio entre asimetría y kurtosis de la distribución ESN para diferentes valores de α en función de τ .

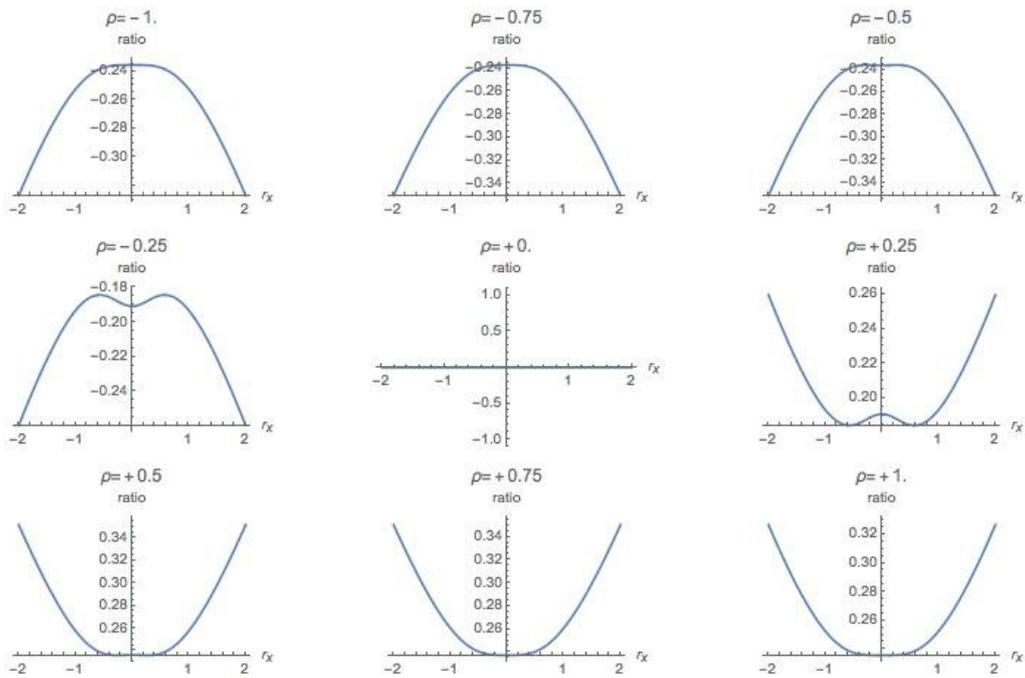


Figura 4.19: Ratio entre asimetría y kurtosis para el producto de distribuciones normales en función de $r_x = 0$ con $r_y = 0$ y para diferentes valores de ρ .

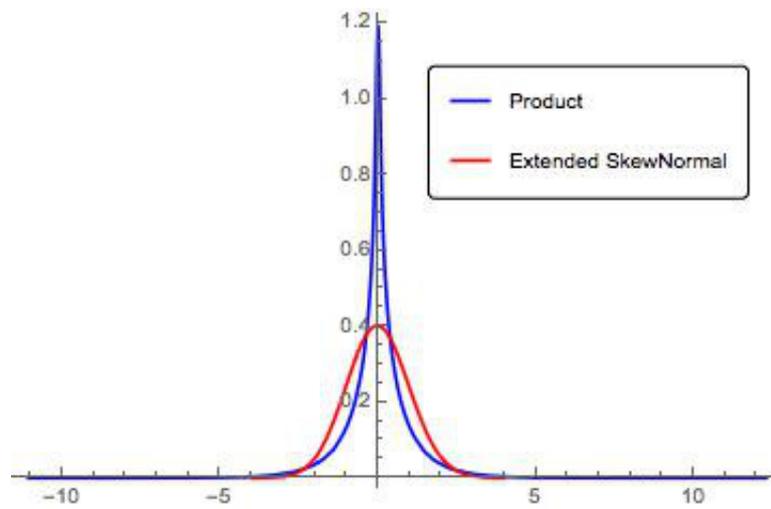


Figura 4.20: Producto de dos distribuciones normales estándar con $\rho = 0$ y aproximación ESN.

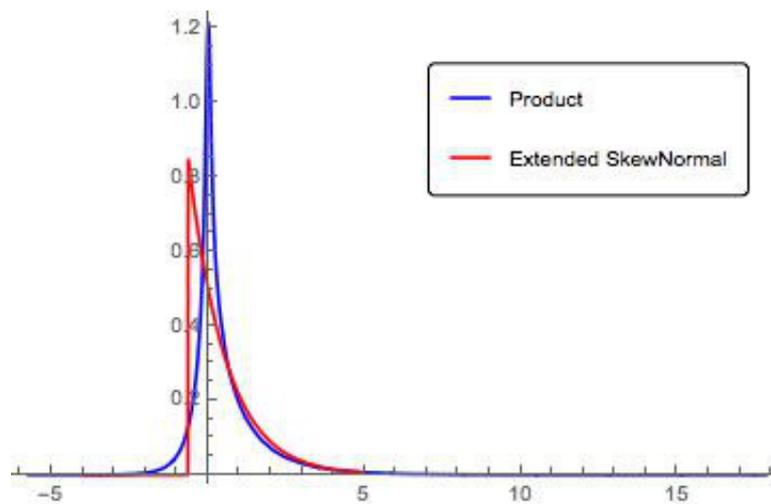


Figura 4.21: Producto de dos distribuciones normales estándar con $\rho = 0,5$ y aproximación ESN.

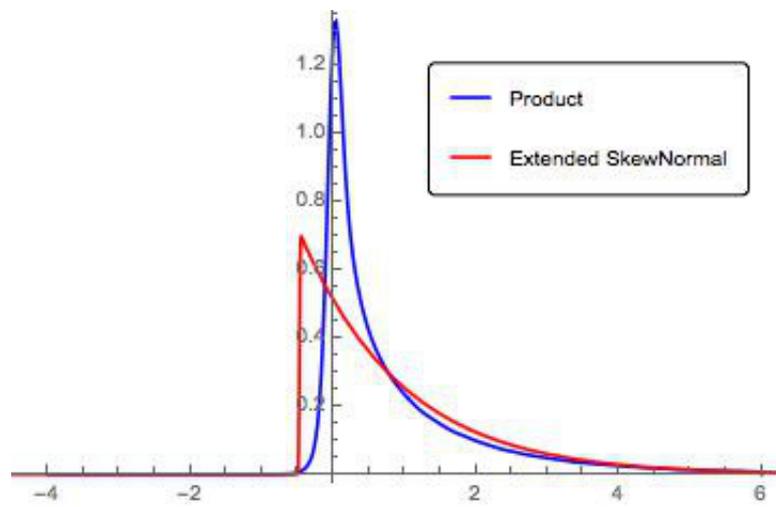


Figura 4.22: Producto de dos distribuciones normales estándar con $\rho = 0,9$ y aproximación ESN.

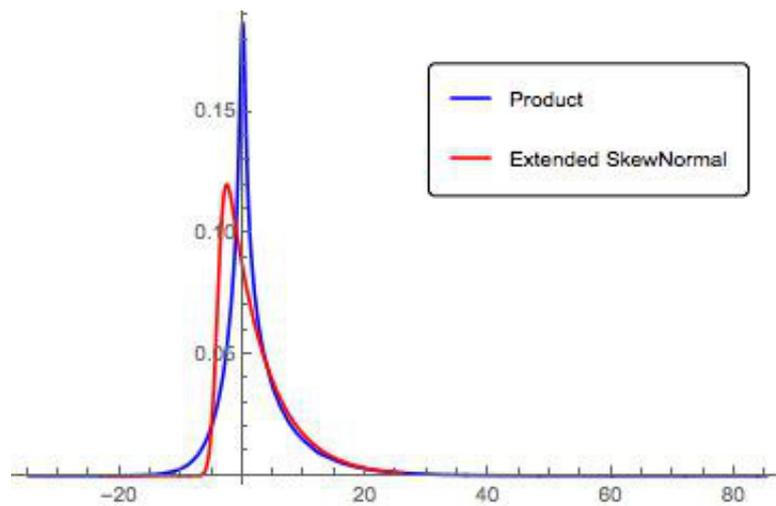


Figura 4.23: Producto de dos distribuciones normales $N(0, 2)$ y $N(2, 2)$ con $\rho = 0,5$ y aproximación ESN.

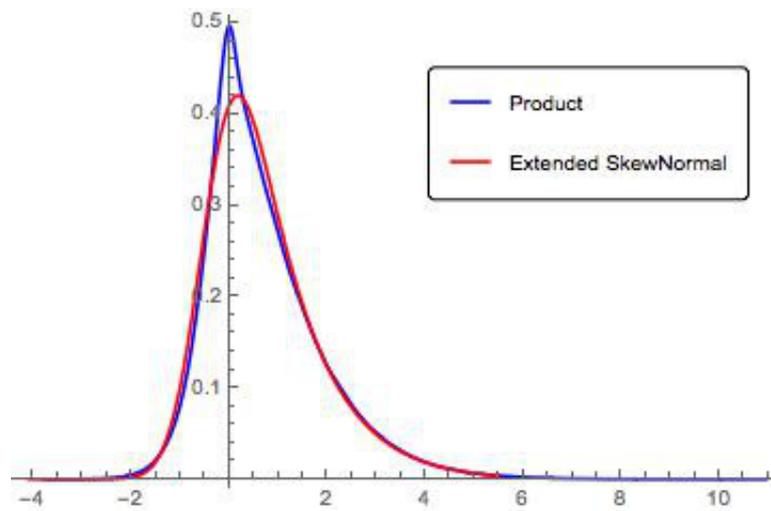


Figura 4.24: Producto de dos distribuciones normales con $N(1, 2)$ y $N(0, 5, 0, 2)$ con $\rho = 0,5$ y aproximación ESN.

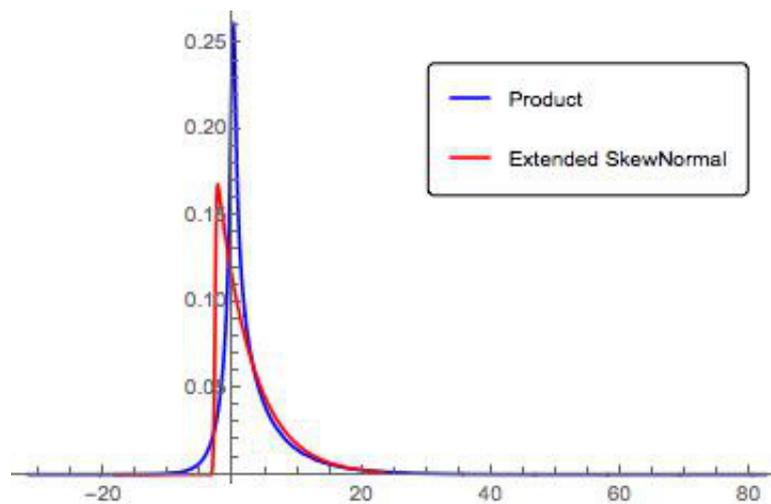


Figura 4.25: Producto de dos distribuciones normales con $N(1, 2)$ y $N(0, 5, 2)$ con $\rho = 0,5$ y aproximación ESN.

media, varianza, asimetría y exceso de kurtosis del producto de distribuciones normales. Este proceso, en principio, es sencillo puesto que se puede descomponer en dos fases:

1. En la primera fase se calculan los parámetros α y τ que permiten aproximar los valores de asimetría y kurtosis. Esta es la fase más complicada, puesto que al utilizar la función $\text{erf}(x)$ los procesos de aproximación están sujetos a las inestabilidades derivadas de los métodos de implementación que se hayan utilizado para la función erf .
2. En la segunda fase, una vez determinados los parámetros anteriores se utilizan los valores de la media y la varianza para establecer los valores de ξ y ω .

La aproximación mediante una función de distribución ESN con parámetros que permiten obtener una media, varianza, asimetría y kurtosis igual o similar a la del producto de distribuciones normales y nos permite aproximar el producto de forma bastante eficiente; aunque como hemos visto esta aproximación es sensible a dos características de las variables normales que configuran el producto: el inverso del coeficiente de variación de ambas variables y el coeficiente de correlación entre ambas.

4.4.1. Cálculo de los parámetros

Desde el punto de vista del cálculo de los parámetros de la distribución ESN, debemos tener en cuenta el hecho de que en el cálculo de los momentos utilizamos la función de error $\text{erf}(x)$ y la función $\text{erfc}(x)$, lo que supone dificultades de cálculo debidas al comportamiento de estas funciones que requieren niveles de precisión de cálculo muy exigentes para la mayoría de los ordenadores.

Los valores calculados de asimetría y kurtosis de la distribución ESN presentan una fuerte sensibilidad a los valores de los parámetros α y τ . Dependiendo la implementación que utilizemos para la expresión de la función de error $\text{erf}(x)$ y $\text{erfc}(x)$, observamos que para valores negativos del parámetro τ se producen fuertes oscilaciones en los valores de kurtosis que no responden a la evolución aguardada para dicho parámetro.

En nuestra aproximación, desde un punto de vista práctico, hemos utilizado el programa Mathematica de la empresa Wolfram Research y el software libre R, donde se ha utilizado el package "sn" de Azzalini.

Los resultados son dispares: así mientras que para el programa Mathematica tenemos problemas para valores de τ inferiores a -7 ; en el caso del software de R, los problemas se producen para valores inferiores a -20 , en ambos casos combinado con los valores de α . Para valores de α próximos a cero, la presencia de distorsiones es mucho menor y aumenta cuando α aumenta en valor absoluto. En las gráficas 4.26 y 4.27, observamos claramente la aparición de estas distorsiones en los valores de kurtosis para valores negativos de la variable τ .

La función $\text{erf}(x)$ función de error de Gauss, función no elemental definida por:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (4.33)$$

y la función de error complementaria: $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$.

La función de error está acotada entre $(-1, 1)$ con $\text{erf}(x) = 0$. Para valores superiores a 2 de la variable, en valor absoluto, la función se aproxima a sus valores límites. En la implementación realizada en el software Mathematica de los valores de asimetría

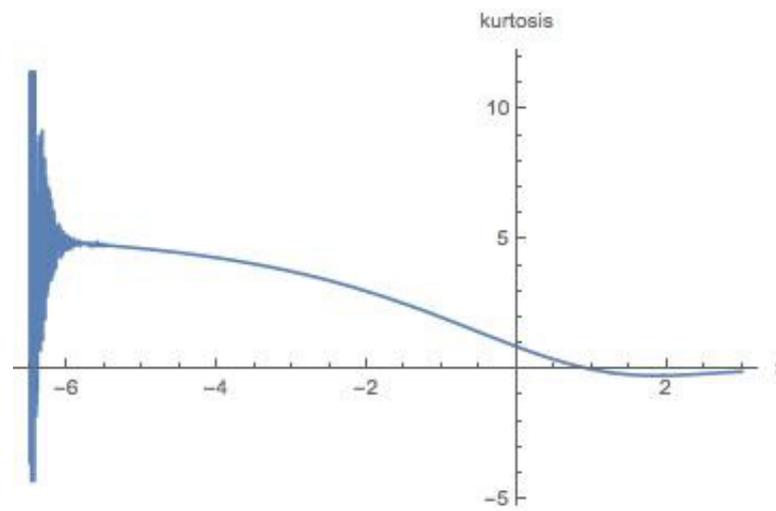


Figura 4.26: Kurtosis de la distribución ESN para $\alpha = -50$, en función de τ realizado con el programa "Mathematica"

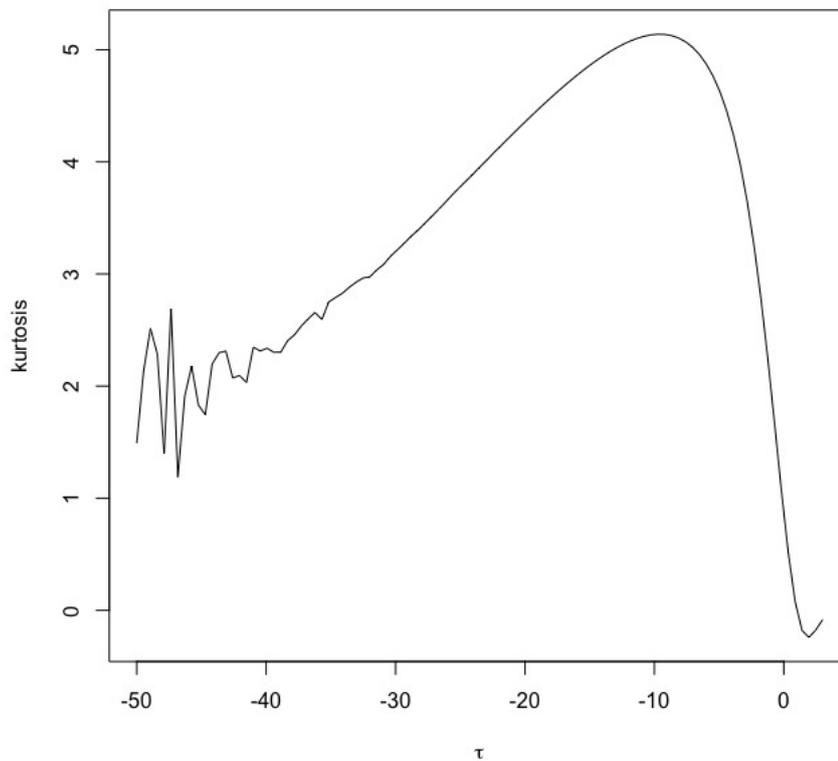


Figura 4.27: Kurtosis de la distribución ESN para $\alpha = -50$, en función de τ realizado con el programa R"

y kurtosis, cuando el valor del parámetro τ de la distribución Extended Skew-normal toma valores inferiores a -7 los cálculos utilizando la función $\text{erf}(x)$ no se realizan con la precisión necesaria y se producen oscilaciones que se transmiten a los valores de asimetría, y en especial, a los de kurtosis. Esto se debe a como se ha realizado, por parte de los programadores del software Mathematica, la implementación de las funciones de error y complementaria de error. La estimación de la función de error es un problema abierto que permanece sin una solución satisfactoria (véase Chevillard (2012)).

La estimación de la kurtosis y asimetría en el software R se basa en el uso de los cumulantes de la distribución ESN. En esta situación podemos establecer la siguiente proposición:

Proposición 4.4.1 *Sea $ESN(\xi, \omega, \alpha, \tau)$ y definimos la función $\zeta_0(\tau) = \log 2\phi(\tau)$ y $\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, entonces los valores de asimetría y kurtosis de $ESN(\psi, \omega, \alpha, \tau)$ son:*

▪ *Asimetría:*

$$\frac{\zeta_1(\tau)\delta^3(-1 + \zeta_1(\tau) + \tau)(2\zeta_1(\tau) + \tau)}{(1 + \zeta_1(\tau)\delta^2(\zeta_1(\tau) + \tau))^{(3/2)}}. \quad (4.34)$$

▪ *Kurtosis (exceso de kurtosis):*

$$\frac{\zeta_1(\tau)\delta^4(\tau^3 + 7\tau^2\zeta_1(\tau) + \tau 12\zeta_1(\tau)^2 - 3\tau + 6\zeta_1(\tau)^3 - 4\zeta_1(\tau))}{(1 + \zeta_1(\tau)\delta^2(\zeta_1(\tau) + \tau))^2}, \quad (4.35)$$

donde $\zeta_i(\tau)$ es la derivada de orden i de ζ_0 .

Demostración. Sea $\zeta_0(x) = \log 2\phi(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$ y ϕ es la función de densidad normal estándar, y sea $\zeta_r(x) = \frac{d^r \zeta_0(x)}{dx^r}$, la derivada de orden r de ζ_0 . Así,

$$\zeta_1(x) = \frac{d\zeta_0(x)}{dx} = \exp(\log \phi(x) - \log \Phi(x)) \quad (4.36)$$

donde $\Phi(x)$ es la función de distribución normal estándar.

En Azzalini (2014) se demuestra la relación entre los valores de asimetría y kurtosis y los valores de ζ_i :

$$\frac{\zeta_3(\tau)\delta^3}{(1 + \zeta_2(\tau)\delta^2)^{(3/2)}}. \quad (4.37)$$

Kurtosis (exceso de kurtosis):

$$\frac{\zeta_4(\tau)\delta^4}{(1 + \zeta_2(\tau)\delta^2)^2}, \quad (4.38)$$

En Seijas-Macías et al. (2017) se demuestra que todas las derivadas sucesivas de ζ_0 se pueden escribir como función de ζ_1 . Así tenemos,

$$\zeta_2(\tau) = -\zeta_1(\tau)\psi \quad (4.39)$$

$$\zeta_3(\tau) = \zeta_1(\tau)\psi^2 - \zeta_1(\tau)(1 - \zeta_1(\tau)\psi) \quad (4.40)$$

$$\zeta_4(\tau) = -(\zeta_1(\tau)\psi^2 - \zeta_1(\tau)(1 - \zeta_1(\tau)\psi))(\tau + 2\zeta_1(\tau)) + 2\zeta_1(\tau)\psi(1 - \zeta_1(\tau)\psi) \quad (4.41)$$

donde $\psi = (\zeta_1(\tau) + \tau)$.

Sustituyendo en en (4.37) y (4.38) obtenemos los valores de asimetría y kurtosis (4.34) y (4.35). ■

Por tanto, la precisión en el cálculo de los valores de asimetría y kurtosis viene dado por la aproximación utilizada para calcular $\zeta_1(\tau)$.

En Mathematica y en R (para valores de $\tau > -50$) tenemos:

$$\zeta_1(\tau) = \frac{\exp \frac{\tau^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\operatorname{erfc} \left(\frac{-\tau}{\sqrt{2}} \right)} \quad (4.42)$$

donde la función de error complementario presenta problemas de precisión para valores pequeños de la variable en función de como se haya implementado en el software matemático utilizado.

Por su parte, en R (para valores de $\tau < -50$) se utiliza la siguiente aproximación:

$$\zeta_1(\tau) = \frac{-\tau}{\left(1 - \frac{1}{(\tau^2+2)} + \frac{1}{(\tau^2+2)(\tau^2+4)} - \frac{5}{(\tau^2+2)(\tau^2+4)(\tau^2+6)} + A \right)} \quad (4.43)$$

donde

$$A = \frac{9}{(\tau^2 + 2)(\tau^2 + 4)(\tau^2 + 6)(\tau^2 + 8)} - \frac{129}{(\tau^2 + 2)(\tau^2 + 4)(\tau^2 + 6)(\tau^2 + 8)(\tau^2 + 10)}$$

Esta aproximación presenta menos problemas de precisión numérica al no utilizar ninguna implementación de la función de error. En Seijas-Macías et al. (2017) se hace un análisis sobre la presencia de estas oscilaciones tanto en las funciones ζ_i como en los valores de asimetría y kurtosis.

Como ya hemos comentado, hasta ahora el problema no está resuelto, y la posible solución pasaría por una mejor estimación de la función de error.

La tendencia de la kurtosis sería a crecer según disminuye el valor de τ , esto es, se aproxima a $-\infty$ hasta alcanzar un máximo, a partir del cual tiende a cero. Pero esta tendencia se interrumpe cuando τ toma valores negativos altos, apareciendo oscilaciones en el valor de la kurtosis, que no responde a la evolución esperada.

Estas oscilaciones afectan de forma importante a los algoritmos de búsqueda de forma que nos encontramos con situaciones donde los valores de kurtosis deseados no se alcanzan de forma confiable, pequeñas oscilaciones de los parámetros producen muy fuertes variaciones de los valores de asimetría y kurtosis. En la tabla 4.9, presentamos valores de kurtosis y asimetría de una distribución ESN para diferentes valores de α y τ donde se aprecian claramente estas fuertes oscilaciones:

Tabla 4.9: Evolución de asimetría y kurtosis para diferentes valores de α y τ

	$\alpha = -50, \tau = -45$	$\alpha = -50, \tau = -46$	$\alpha = -50, \tau = -47$
asimetría (skewness)	-0.8184910	-0.7946249	-0.7710175
exceso de kurtosis	1.807346	1.523414	1.8272490
	$\alpha = -500, \tau = -36$	$\alpha = -500, \tau = -37$	$\alpha = -500, \tau = -38$
asimetría (skewness)	-1.979943	-1.979337	-1.978436
exceso de kurtosis	5.877334	5.852481	6.191668

Observemos que mientras que la asimetría sigue una tendencia monótona decreciente, a mayores valores de τ tenemos valores menores de asimetría. La kurtosis presenta

oscilaciones tanto en el caso de $\alpha = -50$ como cuando $\alpha = -500$. En el primer caso, observamos que cuando τ disminuye de -45 a -46 , la kurtosis disminuye, pero cuando disminuye de -46 a -47 la kurtosis aumenta. En el caso de $\alpha = -500$ estas oscilaciones ya se producen cuando $\tau \in (-38, -36)$. Así podemos comprobar que cuando τ se desplaza de -37 a -38 , la kurtosis aumenta, mientras que cuando pasa de -36 a -37 , la kurtosis disminuye.

En estas circunstancias, la determinación de valores fidedignos de α y τ que verifiquen los valores esperados de kurtosis y asimetría se vuelve muy complicada. En la mayoría de los casos los algoritmos de resolución aplicados no convergen, y por tanto, las aproximaciones no son realistas. Por otro lado, la elección de los puntos iniciales de aproximación se vuelve un factor clave, que obliga a realizar diversos intentos hasta obtener los resultados esperados. Para valores grandes de α el valor de kurtosis se estabiliza en torno a $\tau = -6$, presentando para valores menores de dicho parámetro, continuos saltos; lo que está en contra de la tendencia esperada a que a mayores valores de τ (en valor absoluto) la kurtosis tiende a cero. Cuando en los procesos de aproximación de los valores de los parámetros pasamos por esta zona de fuerte distorsión es fácil que obtengamos una solución falsa.

Una vez determinados los valores de α y τ habrá que resolver dos nuevas ecuaciones con los valores deseados de media y varianza que permitan determinar los parámetros ξ y ω .

En este caso, el algoritmo siempre encuentra solución puesto que el ESN permite todas las combinaciones posibles de estos valores. Requiere introducir una restricción sobre el valor de ω puesto que tiene que ser positivo. En este sentido, se mantiene la sensibilidad al punto inicial considerado, de forma que una buena elección del algoritmo redundará en una buena convergencia.

4.4.2. Simulaciones del Producto y Aproximación ESN

Las simulaciones que hemos visto hasta ahora se han realizado utilizando el software comercial Mathematica[®], donde el cálculo de la función de error $\text{erf}(x)$ está implementando, aunque su código no es accesible. A continuación presentamos diversas simulaciones realizadas utilizando el software estadístico R, de simulación de producto de dos variables normales y aproximación mediante la distribución ESN. En este trabajo hemos utilizado el package "sn" (Azzalini (2017)) que tiene implementadas diversas funciones para el cálculo de momentos y de cumulantes, lo que facilita el proceso de determinación de la asimetría y de la kurtosis. Para la resolución de los sistemas de ecuaciones se utiliza el package "BB" que contiene la función "BBsolve", que realiza una aproximación numérica de la solución de un sistema de ecuaciones, dado un punto inicial.

- a) Producto de dos distribuciones normales $X \sim N(1, 2)$ e $Y \sim N(0,5, 0,2)$ con $\rho = 0,5$. En este caso los valores de los inversos del coeficiente de variación son: $r_x = 0,5 < 1$ y $r_y = 2,5 > 1$. Los valores de las estadísticas del producto son: $\mu = 0,7$, $\sigma^2 = 1,44$, $\gamma_1 = 1,18981$, $\gamma_2 = 2,479685$, donde γ_1 es la asimetría y γ_2 la kurtosis. En la primera etapa resolvemos las ecuaciones de kurtosis y asimetría y determinamos los parámetros α y τ , el algoritmo converge y obtenemos la solución: $\alpha = 7,78914$ y $\tau = -3,416023$. A continuación ejecutamos la segunda etapa donde resolvemos las ecuaciones de media y varianza, y obtenemos los valores

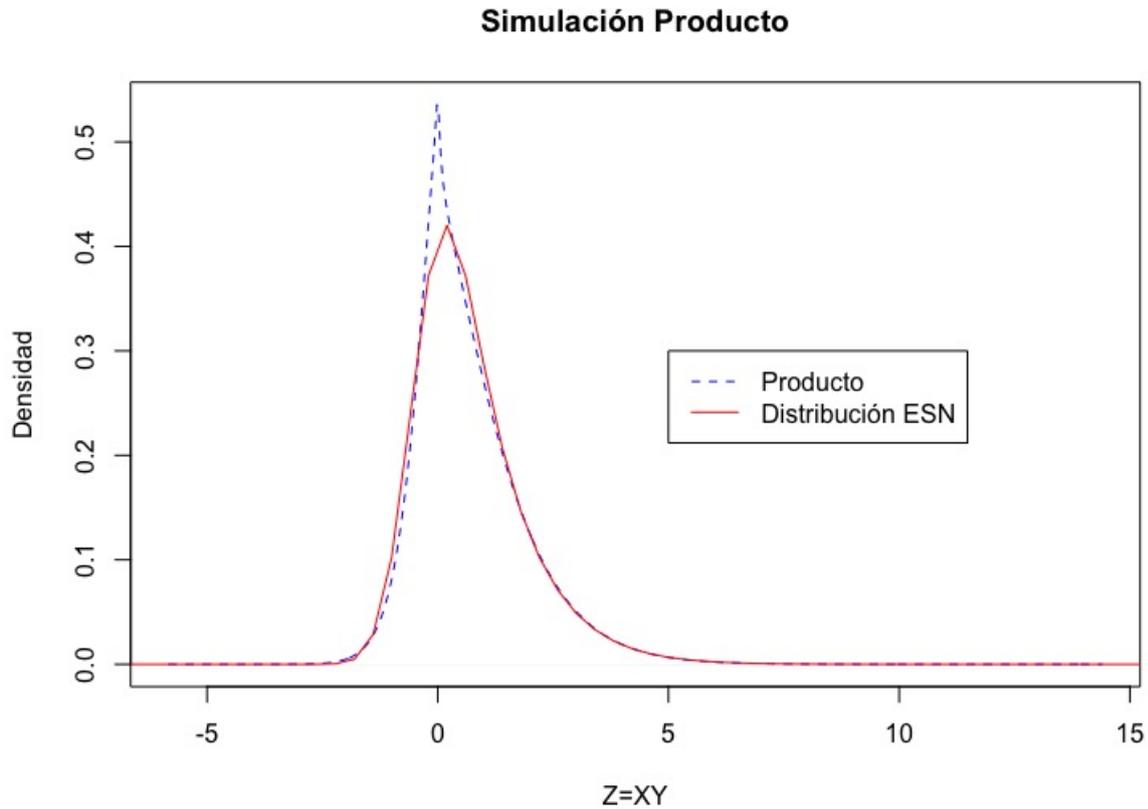


Figura 4.28: Simulación Producto $X \sim N(1,2)$ e $Y \sim N(0,5,0,2)$ con $\rho = 0,5$ y Aproximación ESN

de ξ y ω . En este caso también el algoritmo converge y obtenemos los valores de $\xi = -15,344464$ y $\omega = 4,404935$. Una vez que tenemos los cuatro parámetros podemos representar la distribución ESN y comparar con una simulación del producto (véase gráfica 4.28). Para la simulación hemos considerado una muestra de 10^9 de ambas distribuciones normales. Los valores obtenidos se pueden ver en la tabla 4.10.

Tabla 4.10: Producto de $X \sim N(1,2)$ e $Y \sim N(0,5,2)$ con $\rho = 0,5$.

	Media	Varianza	Asimetría	Kurtosis
Producto (Teórico)	2.5	27	2.333791	9.25995
Producto (Simulación)	2.499	26.9927	2.33373	9.40562
ESN	2.5	27	1.985500	9.265915

- b) Producto de dos distribuciones normales estándar $X = Y \sim N(0,1)$. En este caso los valores de los inversos del coeficiente de variación son: $r_x = r_y = 0 < 1$. Los valores de las estadísticas del producto son: $\mu = 0,5, \sigma^2 = 1,25, \gamma_1 = 2,32551, \gamma_2 = 9,84$, donde γ_1 es la asimetría y γ_2 la kurtosis. Al igual que en el caso anterior, procedemos a aproximar los parámetros de la distribución ESN mediante la resolución de los dos sistemas de ecuaciones. Los parámetros resultantes son:

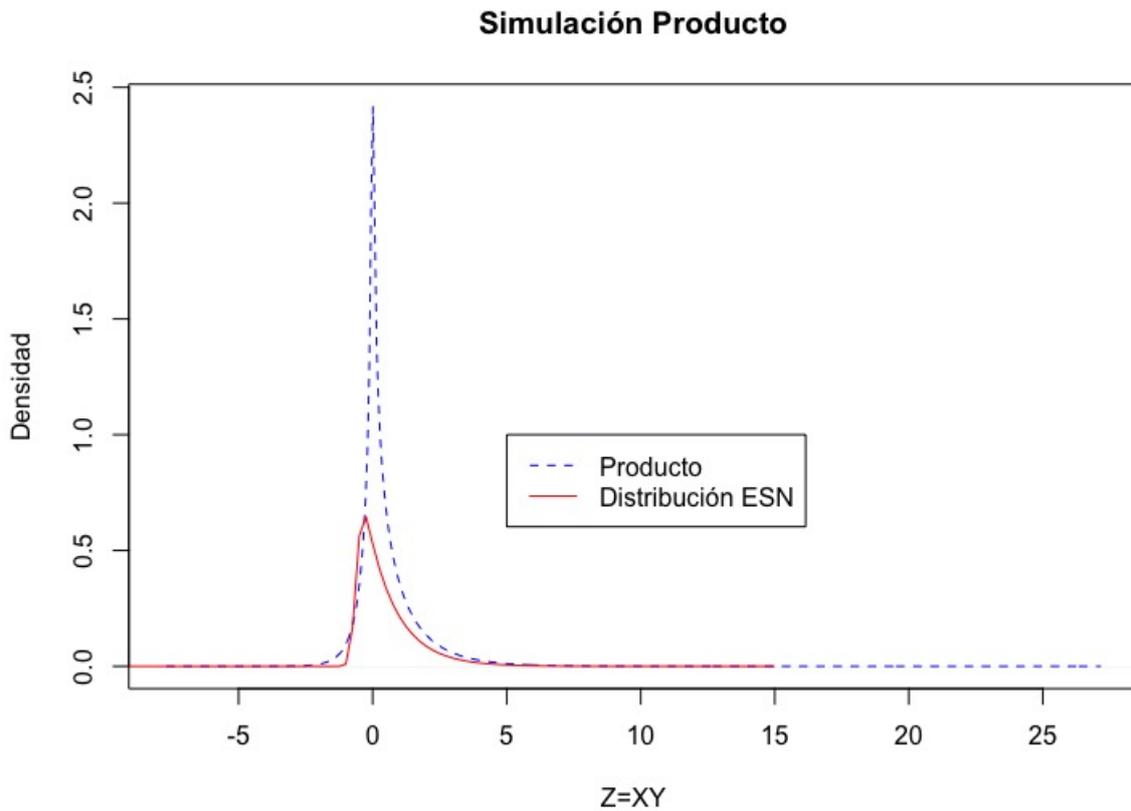


Figura 4.29: Simulación Producto $X = Y \sim N(0, 1)$ con $\rho = 0,5$ y Aproximación ESN

$\xi = -2557,61831, \omega = 53,18273, \alpha = 308,83789, \tau = -48,08$ que corresponden a una distribución ESN con media 0,5, varianza igual 1,25, y valores de asimetría y kurtosis de (1,924955, 9,838411). En este caso la convergencia de los parámetros en la resolución de sistemas no es buena (no se alcanza) y esto afecta a los valores de asimetría y kurtosis de la distribución ESN que difieren de los esperados. Los valores obtenidos se pueden ver en la tabla 4.11. En la gráfica 4.29, podemos observar que el proceso de simulación también es mucho peor que en el caso anterior.

Tabla 4.11: Producto de $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$ con $\rho = 0,5$.

	Media	Varianza	Asimetría	Kurtosis
Producto (Teórico)	0.5	1.25	2.3255	9.84
Producto (Simulación)	0.5	1.1178	2.3242	9.8282
ESN	0.5	1.25	1.924955	9.838411

- c) Producto de dos distribuciones normales $X \sim (1, 0,5)$ e $Y \sim N(0,5, 0,2)$. En este caso los valores de los inversos del coeficiente de variación son: $r_x = 2 > 1$ y $r_y = 2,5 > 1$. Los valores de las estadísticas del producto son: $\mu = 0,55, \sigma^2 = 0,165, \gamma_1 = 1,06679, \gamma_2 = 1,56336$, donde γ_1 es la asimetría y γ_2 la kurtosis.

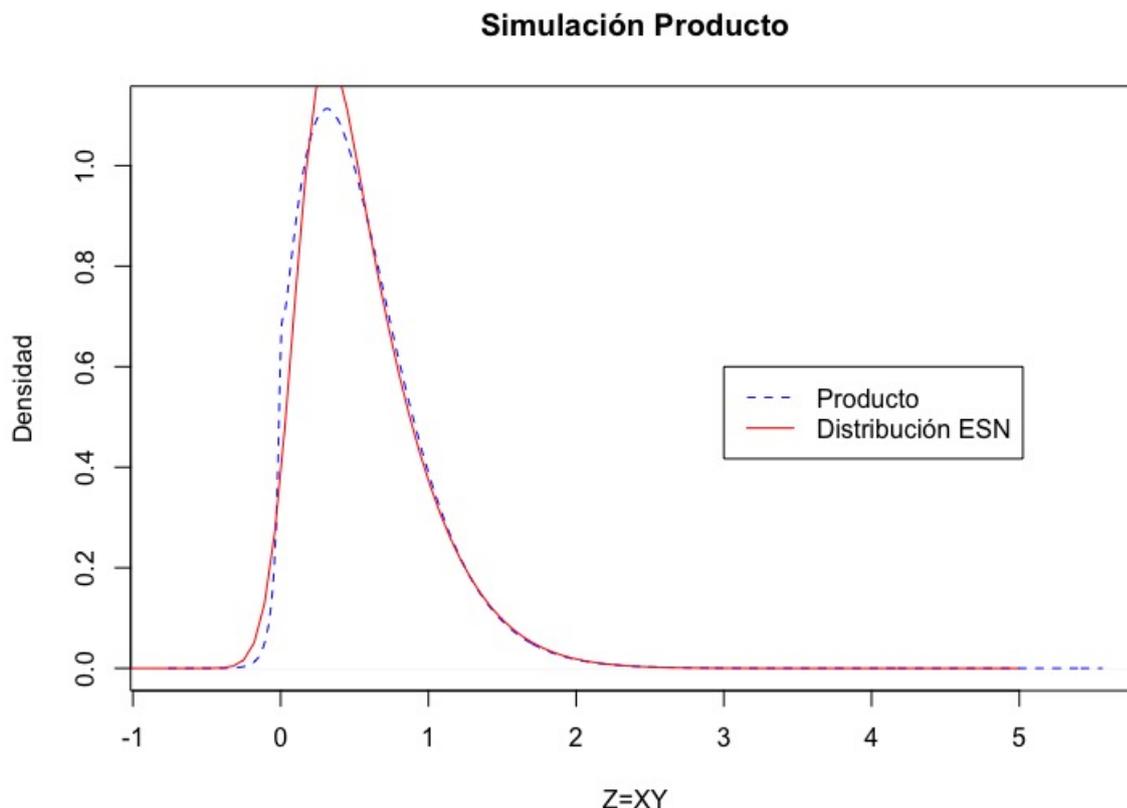


Figura 4.30: Simulación Producto $X \sim N(1, 0,5)$ e $Y \sim N(0,5, 0,2)$ con $\rho = 0,5$ y Aproximación ESN

Al igual que en el caso anterior, procedemos a aproximar los parámetros de la distribución ESN mediante la resolución de los dos sistemas de ecuaciones. Los parámetros resultantes son: $\xi = -0,8736322$, $\omega = 0,8874687$, $\alpha = 5,645099$, $\tau = -1,128666$ que corresponden a una distribución ESN con media 0,55, varianza igual 0,165, y valores de asimetría y kurtosis de (1,066777; 1,563350). En este caso la convergencia es buena y se alcanzan los valores esperados. Los valores obtenidos se pueden ver en la tabla 4.12. En la gráfica 4.30, podemos observar que el proceso de simulación es bueno (al igual que sucedía en el primer caso analizado).

Tabla 4.12: Producto de: $X \sim N(1, 0,5)$ e $Y \sim N(0,5, 0,2)$ con $\rho = 0,5$.

	Media	Varianza	Asimetría	Kurtosis
Producto (Teórico)	0.55	1.65	1.06679	1.56336
Producto (Simulación)	0.5499	1.649	1.066836	1.564504
ESN	0.55	1.65	1.06677	1.56335

El ajuste del producto mediante el software estadístico R muestra propiedades semejantes a las del software Mathematica. Los ajustes son buenos cuando el valor de

alguno de los inversos del coeficiente de variación es mayor o igual a 1. Cuando utilizamos el paquete estadístico para resolución de ecuaciones de R, observamos que, como nos sucedía con el software Mathematica, la convergencia de la solución es muy sensible a la elección del punto inicial. En este sentido, puede ser necesario realizar varias veces el proceso de resolución del sistema de ecuaciones de asimetría y kurtosis, hasta alcanzar el objetivo válido.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que la implementación del package "sn" no controla que el valor del parámetro ω es positivo, de ahí que en algunos casos determine soluciones con valores negativos o nulos para el parámetro ω que no son válidos. Este problema nos afecta cuando estamos resolviendo el segundo sistema de ecuaciones que hace referencia a los valores de la media y la varianza, puesto que es en dicho proceso de resolución cuando obtenemos los valores de los parámetros ω y ξ de la distribución ESN.

Aun teniendo en cuenta los problemas señalados, la aproximación mediante la distribución ESN muestra muy buenos resultados para todos aquellos productos donde, al menos, una de las distribuciones normales utilizadas presenta un inverso del coeficiente de variación igual o superior a 1. En los restantes casos, la aproximación no resulta buena, dado que normalmente no obtendremos una distribución ESN con los valores de kurtosis y asimetría adecuados. En estos casos, puede ser más conveniente utilizar otras aproximaciones; aunque hasta el momento ninguna de las alternativas se ha mostrado completamente satisfactoria.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. El producto de Distribuciones Normales

El presente trabajo se ha centrado en el estudio de las distribuciones normales. La distribución normal es, probablemente, la principal distribución estadística, tanto desde un punto de vista teórico como de su aplicación en la práctica. Es una de las distribuciones estadísticas más antiguas, puesto que su origen se remonta al siglo XVII, y a lo largo de su dilatada historia ha sido objeto de numerosos trabajos y estudios. Aun así, diversos aspectos relacionados con la distribución normal permanecen desconocidos y pendientes de resolución.

Nuestro estudio ha considerado el problema de determinar la distribución que se asocia al producto de dos distribuciones normales. Mientras que el estudio de la suma de dos distribuciones normales ya ha sido resuelto hace mucho tiempo, el producto es un problema que aún permanece abierto; puesto que todos los estudios previos no han obtenido una solución satisfactoria y completa del problema. Es cierto, que existen aproximaciones parciales, mas su alcance es limitado, y, en algunos, casos presentan algunos problemas de definición.

La primera aproximación al producto, realizada en los años 30 del siglo pasado, estudia el producto de dos variables normales estándar sin correlación y, su aproximación mediante una función de Bessel. Esta aproximación aún permanece vigente y en los últimos estudios realizados a principios de este siglo, ha sido utilizada por diversos autores. Aun así plantea algunos problemas, como es el hecho de que la función de Bessel no está definida en el punto 0, mientras que el producto de distribuciones normales estándar, no sólo está definido en dicho punto, sino que además dicho valor corresponde a la media de la distribución del producto. En simulaciones realizadas con ordenador mediante el método MonteCarlo vemos que el producto de dos distribuciones normales presenta una gráfica con media en cero, una pequeña varianza y un elevado nivel de kurtosis (muy superior al nivel de kurtosis de la distribución normal estándar), en este sentido se puede descartar que el producto de estas dos distribuciones normales siga una distribución normal. Por su parte, la gráfica de una función de Bessel en el punto cero, no está definida y presenta un carácter asintótico hacia menos infinito. Lo mismo sucede si aplicamos métodos generalistas para la determinación del producto de variables normales, como puede ser el teorema de Rohatgi.

El teorema de Rohatgi establece un método de aproximación del producto de dos variables que sigan dos distribuciones estadísticas, mediante la definición de las integra-

les correspondientes a las diferentes áreas del producto, pero siempre que las variables no se anulen. Hemos realizado diversas aproximaciones utilizando dicho teorema pero los resultados no son totalmente satisfactorios. Aunque no se ha recogido en esta tesis, hemos realizado un trabajo de aproximación del producto de dos distribuciones uniformes utilizando este teorema con resultados muy satisfactorios (Oliveira et al. (2018)); no obstante, cuando hemos utilizado el mismo método para el producto de distribuciones normales los resultados han sido mucho menos adecuados.

Para realizar nuestro trabajo nos hemos enfocado en el estudio de las variables que caracterizan a la distribución del producto de dos variables normales: la media, la varianza, la asimetría y la kurtosis (o el exceso de kurtosis). A partir de la determinación de estos estadísticos para el producto, hemos intentado aproximar la distribución del producto mediante la búsqueda de una distribución adecuada con los mismos valores de dichos estadísticos.

El resultado final ha sido que, bajo determinadas hipótesis referentes a las distribuciones normales utilizadas en el producto, éste se puede aproximar mediante una distribución Extended Skew-Normal (ESN) (distribución normal asimétrica extendida).

El producto de dos distribuciones normales continua siendo un problema abierto. Nuestra principal contribución ha sido determinar una buena aproximación a dicho producto cuando se verifican determinadas hipótesis por parte de las distribuciones normales utilizadas en el producto, pero en otros casos el problema se mantiene abierto, y el método de aproximación propuesto no presenta tan buenos resultados. Así pues, en estos casos aun podemos utilizar las aproximaciones tradicionales como la función de Bessel o el teorema de Rohatgi.

5.2. Aportaciones Originales

Las principales aportaciones originales que hemos desarrollado en el presente trabajo han sido las siguientes:

- Estudio de la distribución de la asimetría del producto de dos distribuciones normales a partir del análisis de los valores de los parámetros de las dos distribuciones normales consideradas μ_x, μ_y y σ_x^2, σ_y^2 . Se ha determinado tanto su rango de distribución como su forma y evolución. Los resultados obtenidos se han publicado en Oliveira et al. (2016b).
- Estudio de la distribución de la kurtosis del producto de dos distribuciones normales a partir del análisis de los valores de los parámetros de las dos distribuciones normales consideradas μ_x, μ_y y σ_x^2, σ_y^2 . Se ha determinado tanto su rango de distribución como su forma y evolución. Una breve presentación de dichos resultados se encuentra en Oliveira et al. (2016a).
- Proposición donde se demuestra que el producto de dos variables normales verifica la desigualdad de Pearson con respecto a la asimetría y la kurtosis (sección 3.6).
- Estudio de los valores de asimetría y kurtosis de la distribución ESN en función de los valores de los parámetros α y τ . En este apartado se verifica que la utilización de la función de error ($\text{erf}(x)$) de Euler produce que para determinados valores de τ los cálculos mediante ordenador personal utilizando programas de cálculo

simbólico y numérico no sean correctos y se producen distorsiones que afectan de forma importante a los valores estimados de kurtosis. Este resultado se publicó en Seijas-Macías et al. (2017). Por otro lado se ha comprado que en el package “sn” correspondiente al paquete estadístico R, esta situación también se produce pero el rango de valores de τ sin problemas es ligeramente superior, dado que no se utiliza la función de error sino una aproximación a la misma mediante una serie.

- Proposición donde se demuestra que la distribución Extended Skew-Normal verifica la desigualdad de Pearson con respecto a la asimetría y la kurtosis (sección 4.2.2).
- Establecimiento de una relación entre asimetría y kurtosis tanto para la distribución normal como para la distribución ESN. (sección 4.3).
- Bajo la hipótesis de que, por lo menos, una de las variables normales que intervienen el producto de dos variables normales presenta un valor del inverso de coeficiente de variación superior o igual 1, entonces el producto de dichas variables normales se puede aproximar mediante una distribución Extended Skew-Normal con los valores de los parámetros $(\xi, \omega, \alpha, \tau)$ apropiados (sección 4.3).
- Finalmente, en la sección 4.4, se presenta el algoritmo que permite realizar la aproximación y su implementación en dos ejemplos de programas de software matemático: el programa de cálculo simbólico privativo Mathematica[®] y el programa de software libre R. Se han realizado diversos ejemplos, y como ya hemos señalado, al utilizar el package “sn” las aproximaciones mediante el software R, resultan mejores que mediante el software Mathematica[®], debido al mayor rango de valores de τ para los cuales no se registran distorsiones.

5.3. Desarrollos Futuros

Las principales líneas a seguir en la investigación futura derivadas de este trabajo son:

- Dado que el problema permanece abierto, explorar aproximaciones para el caso en el cual ambas variables normales que se utilizan en el producto presentan un valor del inverso del coeficiente de variación inferior a 1. En este caso se puede intentar la aproximación mediante otra distribución, o bien analizar, cómo se podría realizar una distorsión de una distribución normal para poder aproximar dichos casos.
- Estudiar la posibilidad de mejorar los resultados de cálculo de la asimetría y la kurtosis de la distribución Extended Skew-Normal para valores del parámetro α inferiores a -5 . En este sentido se puede estudiar una serie que aproxime de una forma más eficiente la función de error.
- La aproximación mediante la distribución ESN responde al hecho de que dicha distribución se deriva de la distribución normal. Ahora bien, dado que en años recientes se han presentado otras aproximaciones a nuevas distribuciones relacionadas con la normal, se propone ver si alguna de ellas permitiría una mejor

aproximación, por ejemplo la distribución Birnbaum-Saunders o Distribuciones Generalizadas Gaussianas.

- Otra posibilidad sería la utilización de una transformación, tipo Transformación de Lambert, para determinar el producto de variables normales.
- Más reciente ha sido la posibilidad del estudio del producto de dos variables mediante la utilización de cópulas.
- Una última línea de investigación se concentra en la resolución de las integrales implicadas en el producto de variables normales. Dichas integrales no permiten una resolución analítica, aunque sí una resolución numérica. En este sentido, se podrían utilizar técnicas más avanzadas, cálculo de Choquet o el método de Stein.

Bibliografía

- ALTUN, E., ALIZADEH, M., OZEL, G., TATLIDIL, H. y MAKSAYI, N. Forecasting value-at-risk with two-step method: Garch-exponentiated odd log-logistic normal model. *Journal for Economic Forecasting*, vol. 4, páginas 97–115, 2017.
- ARELLANO-VALLE, R., GÓMEZ, H. y QUINTANA, F. A new class of skew-normal distribution. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, vol. 33, páginas 1465–1480, 2004.
- ARNOLD, B. y BEAVER, R. Hidden truncation model. *Sankhyā, series A*, vol. 62, páginas 22–35, 2000.
- ARNOLD, B., BEAVER, R., GROENEVELD, R. y MEEKER, W. The non truncated marginal of a truncated bivariate normal distribution. *Psychometrika*, vol. 58, páginas 471–488, 1993.
- AROIAN, L. A. The probability function of the product of two normally distributed variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 18(2), páginas 265–271, 1947.
- AROIAN, L. A., TANEJA, V. S. y CORNWELL, L. W. Mathematical forms of the distribution of the product of two normal variables. *Communications in Statistics - Theory and Methodology*, vol. A7(2), páginas 165–172, 1978.
- AZZALINI, A. A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 12, páginas 171–178, 1985.
- AZZALINI, A. *The Skew-Normal and Related Families*. Cambridge University Press, 2014.
- AZZALINI, A. Package 'sn'. <http://azzalini.stat.unipd.it/SN/sn-manual.pdf>, 2017.
- BERANGER, B., PADOAN, S., XU, Y. y SISSON, S. Extremal properties of the univariate extended skew-normal distribution, part a. *Statistics and Probability Letters*, vol. in press, 2018.
- BERBERAN-SANTOS, M. N. Expressing a probability density function in terms of another pdf: A generalized gram-charlier expansion. *Journal of Mathematica Chemistry*, vol. 42(3), páginas 585–594, 2007.
- VAN BERKEL, M. Estimation of heat transport coefficients in fusion plasmas. Informe técnico, Universiteit Eindhoven, 2015.

- VAN BERKEL, M., ZWART, H., HOGEWELJ, G., VANDERSTEEN, G., VAND DEN BRAND, H. y DE BAAR, M. Estimation of the thermal diffusion coefficient in fusion plasmas taking frequency measurement uncertainties into account. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, vol. 56(10), páginas 1–18, 2014.
- BESSEMBINDER, H. Do stocks outperform treasury bills? *Journal of Financial Economics*, vol. 129(3), páginas 440–457, 2018.
- BROWN, J. D. Skewness and kurtosis. *Shiken: JLAT Testing and Evaluation SIG Newsletter*, vol. 1(1), páginas 20–23, 1997.
- CANALE, A. Statistical aspects of the scalar extended skew-normal distribution. *METRON*, vol. LXIX(3), páginas 279–295, 2011.
- CAPITANIO, A., AZZALINI, A. y STANGHELLINI, E. Graphical models for skew-normal variates. *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 30, páginas 129–144, 2003.
- CHAVES, N. L., AZEVEDO, C. L. N., VILCA-LABRA, F. y NOBRE, J. S. A new birnbaum-saunders model based on the skew-normal distribution under the centred parameterization. *manuscript under preparation*, 2018.
- CHEN, Y., KARGIANNIDIS, G. K. y HAO LU, N. C. New analytical framework for the products of independent rvs with wireless applications. En *2012 IEEE Wireless Communications and Networking Conference: PHY and Fundamentals*, páginas 103–108. 2012.
- CHENGLONG, L., MUKHERJEE, A., QIN, S. y MIN, X. Some monitoring procedures related to asymmetry parameter of azzalini's skew-normal model. *REVSTAT - Statistical Journal*, vol. 14(5), 2016.
- CHEVILLARD, S. *The functions erf and erfc computed with arbitrary precision and explicit error bounds*, páginas 72–95. Número 216 en Information and Computation. Elsevier, 2012.
- CHO, D. W. y IM, K. S. A test of normality using geary's skewness and kurtosis statistics. Informe técnico, University of Central Florida, 2002.
- CHOUHDURY, K. y MATIN, M. A. Extended skew generalized normal distribution. *METRON*, vol. LXIX(3), páginas 265–278, 2011.
- CRAIG, C. C. On the frequency of the function xy . *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 7, páginas 1–15, 1936.
- CUI, G., YU, X., IOMMELLI, S. y KONG, L. Exact distribution for the product of two correlated gaussian random variables. *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 23(11), páginas 1662–1666, 2016.
- D'AGOSTINO, R. B. Simple compact portable test of normality: Geary's test revisited. *Psychological Bulletin*, vol. 74(2), páginas 138–140, 1970.
- D'AGOSTINO, R. B., BELANGER, A. y D'AGOSTINO JR, R. B. A suggestion for using powerful and informative tests of normality. *The American Statistician*, vol. 44(4), páginas 316–321, 1990.

- DEB, P. y SEFTON, M. The distribution of a lagrange multiplier test of normality. *Economics Letters*, vol. 51, páginas 123–130, 1996.
- DÍAZ FRANCÉS, E. y RUBIO, F. J. On the existence of a normal approximation to the distribution of the ratio of two independent. *Statistical Papers*, vol. 54, páginas 309–323, 2013.
- DREW, J. H., EVANS, D., GLEN, A. y LEEMIS, L. *Computational Probability*. Springer, 2008.
- FIELLER, E. The distribution of the index in a normal bivariate population. *Biometrika*, vol. 24(3/4), páginas 428–440, 1932.
- FIGUEIREDO, F. y GOMES, M. The skew-normal distribution in spc. *REVSTAT - Statistical Journal*, vol. 11(1), páginas 83–104, 2013.
- GAUNT, R. E. A note on the distribution of the product of zero mean correlated normal random variables. Informe Técnico 1807.03981v1, Arxiv, 2018.
- GAUNT, R. E. Stein's method and the distribution of the product of zero mean correlated normal random variables. Informe Técnico 1906.04785v1, Arxiv, 2019.
- GEARY, R. C. The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality. *Biometrika*, vol. 27(3-4), páginas 310–332, 1935.
- GIFUNI, A., FERRARA, G., SORRENTINO, A. y MIGLIACCIO, M. Analysis of the measurement uncertainty of the absorption cross section in a reverberation chamber. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 57(5), páginas 1262–1265, 2015.
- GLEN, A. G., LEMMIS, L. M. y DREW, J. H. Computing the distribution of the product of two continuous random variables. *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 44, páginas 451–464, 2004.
- GRINSTEAD, C. M. y SNELL, J. L. *Introduction to Probability*. American Mathematical Society, 2nd edición, 1997.
- GUPTA, R. C. y GUPTA, R. D. Generalized skew normal model. *Test*, vol. 13(2), páginas 501–524, 2004.
- HE, Z. Efficient estimation of extreme value-at-risks for standalone structural exchange rate risk. Informe técnico, Munich Personal RePEc Archive, 2014.
- HINKLEY, D. On the ratio of two correlated normal random variables. *Biometrika*, vol. 56(3), páginas 635–639, 1969.
- JARQUE, C. M. y BERA, A. K. Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, vol. 6, páginas 225–259, 1980.
- KANEMTO, S., LUBASHEVSKY, I., ZGONNIKOV, A., MIYAZAWA, T. y TANIGUCHI, D. Virtual stick balancing: Statistical invariants of human response. En *Proceedings of the 44th ISCTE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Applications*. 2012.

- LUBASHEVSKY, I. Dynamical traps caused by fuzzy rationality as a new emergence mechanism. *Advances in Complex Systems*, vol. 15(8), página 1250045, 2012.
- LUBASHEVSKY, I., ANDO, H. y ZGONNIKOV, A. Car following and human intermittent control: theory and driving simulator experiments car following and human intermittent control: theory and driving simulator experiments, 2014. Unpublished Paper.
- LUGTIGHEID, A. *Distributions of fixation durations and visual acquisition rates*. PhD Thesis, 2007.
- MARSAGLIA, G. Ratios of normal variables and ratios of sums of uniform variables. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 60(309), páginas 193–204, 1965.
- MARSAGLIA, G. Evaluating the normal distribution. *Journal of Statistical Software*, vol. 11(4), páginas 1–11, 2004.
- MARSAGLIA, G. Ratios of normal variables. *Journal of Statistical Software*, vol. 16(4), página URL: <http://www.jstatsoft.org/v16/i04/>, 2006.
- MEYER, H. V. y BIRNEY, E. Phenotypesimulator: A comprehensive framework for simulating multi-trait, multi-locus genotype to phenotype relationships. *Bioinformatics*, vol. 34(17), páginas 2951–2956, 2018.
- NADARAJAH, S. On the ratio x/y for some elliptically symmetric distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 97, páginas 342–358, 2006.
- NADARAJAH, S. y POGÁNY, T. K. On the distribution of the product of correlated normal random variables. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Série I*, vol. 354, páginas 201–204, 2016.
- O'HAGAN, A. y LEONARD, T. Bayes estimation subject to uncertainty about parameter constraints. *Biometrika*, vol. 63(1), páginas 201–203, 1976.
- OLIVEIRA, A., OLIVEIRA, T. y SEIJAS-MACÍAS, A. The influence of ratios and combined ratios on the distribution of the product of two independent gaussian random variables. En *Proceedings of the 59th World Statistics Congress of the International Statistical Institute* (editado por P. of the 59th World Statistics Congress of the International Statistical Institute). International Statistical Institute, 2013.
- OLIVEIRA, A., OLIVEIRA, T. y SEIJAS-MACÍAS, A. Evaluation of kurtosis into the product of two normally distributed variables. En *AIP Conference Proceedings*, vol. 1738, página 470002. AIP Publishing, 2016a.
- OLIVEIRA, A., OLIVEIRA, T. y SEIJAS-MACÍAS, A. Skewness into the product of two normally distributed variables and the risk consequences. *REVSTAT - Statistical Journal*, vol. 14(2), páginas 119–138, 2016b.
- OLIVEIRA, A., OLIVEIRA, T. y SEIJAS-MACÍAS, A. The uniform distribution product: an approach to the (q,r) inventory model using r. *Journal of Applied Statistics*, vol. 45(2), páginas 284–297, 2018.

- OLOSUNDE, A. On skew-normal model for economically active population. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, vol. 7(2), páginas 233–243, 2011.
- PEARSON, K. 'das fehlergesetz und seine verallgemeinerungen durch fechner und pearson'. a rejoinder. *Biometrika*, vol. 4(1), páginas 169–212, 1905.
- PHAM-GIA, T., TURKKAN, N. y MARCHAND, E. Density of the ratio of two normal random variables and applications. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 35(9), páginas 1569–1591, 2006.
- DEL PRADO MARTÍN, F. M. A theory of reaction time distribution. Informe técnico, Laboratoire de Psychologie Cognitive (UMR-6146), 2008.
- R CORE TEAM. R foundation for statistical computing. *R: A language and environment for statistical computing*, 2015.
- ROHATGI, V. K. *An Introduction to Probability Theory Mathematical Studies*. Wiley, New York, 1976.
- SEIJAS-MACÍAS, A. y OLIVEIRA, A. An approach to distribution of the product of two normal variables. *Discussiones Mathematicae. Probability and Statistics*, vol. 32(1-2), páginas 87–99, 2012.
- SEIJAS-MACÍAS, A., OLIVEIRA, A. y OLIVEIRA, T. The presence of distortions in the extended skew-normal distribution. En *Proceedings 2nd ISI Regional Statistics Conference*. 2017.
- SHAPIRO, S. S. y WILK, M. An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, vol. 52(3-4), páginas 591–611, 1965.
- SHARMA, R. y BHANDARI, B. Skewness, kurtosis and newton's inequality. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, vol. 45(5), páginas 1639–1643, 2015.
- STEIN, C. A bound for the error in the normal approximation to the the distribution of a sum of dependent random variables. En *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, vol. 2, páginas 583–602. Univ. California Press, Berkeley, 1972.
- URZÚA, C. M. Portable and powerful tests for normality. Informe técnico, Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México, 2007.
- WARE, R. y LAD, F. Approximating the distribution for sums of products of normal variables. Informe técnico, The University of Queensland, 2003.
- WILKINS, J. E. A note on skewness and kurtosis. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 15(3), páginas 333–335, 1944.
- WISHART, J. y BARTLETT, M. S. The distribution of second order moment statistics in a normal system. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 28(4), páginas 455–459, 1932.
- ZAITSEV, A. y SKORIK, Y. A. Mathematical description of sensorimotor reaction time distribution. *Human Physiology*, vol. 28(4), página 494, 2002.

- ZGONNIKOV, A., LUBASHEVSKY, I., KANEMTO, S., MIYAZAWA, T. y SUZUKI, T. To react or not to react? intrinsic stochasticity of human control in virtual stick balancing. *Journal of the Royal Society Interface*, vol. 11(99), páginas 6–36, 2014.
- ZHOU, Z., KAIHUI, L. y JUNG, F. Bayesian compressive sensing using normal product priors. *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 22(5), páginas 583–587, 2015.