

TESIS DOCTORAL

El estudio del infinito a través
del espacio exterior

Mónica García Pinillos



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

El estudio del infinito a través
del espacio exterior

Mónica García Pinillos

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2011

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. Luis Javier Hernández Paricio, fue leída el 23 de junio de 1998, y obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude Unanimidad.

© Mónica García Pinillos

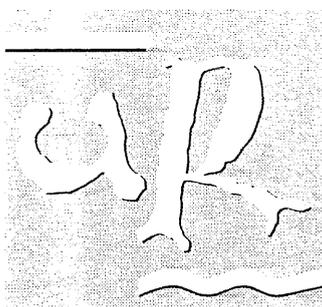
Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-694-0609-0

El estudio del infinito a través del espacio exterior

Mónica García Pinillos

Universidad de La Rioja
Departamento de Matemáticas y Computación



Logroño, Mayo de 1998

Memoria presentada para optar al grado de doctor en Ciencias Matemáticas.

Quiero expresar mi agradecimiento, en primer lugar, al director de esta memoria Luis Javier Hernández que además de una excelente preparación matemática me ha proporcionado apoyo y comprensión. También deseo agradecer su apoyo a Antonio Quintero, que aparte de guiar mis primeros pasos me ha prestado ayuda en momentos difíciles, así como a José Ignacio Extremiana por su amistad y por posibilitar que este trabajo llegue a buen término.

Quiero también hacer extensivo mi agradecimiento a José Antonio Martínez por el cuidado y cariño empleado en pasar la memoria.

Por último, debo mucho al apoyo de mi familia que nunca permitió que me desanimara en las circunstancias más duras.

Esta memoria ha sido realizada dentro del proyecto “ Modelos homotópicos ”, PB96-0740 subvencionado por la Dirección General de Enseñanza Superior y la Universidad de La Rioja.

Contenido

Introducción	1
0. Preliminares y notación	16
0.1 Notación, definición de categoría de modelos cerrada y resultados generales ..	16
0.2 Teorema de Whitehead en una categoría de modelos cerrada	27
0.3 Equivalencia de Teorías de Homotopía	28
1. La categoría de los espacios exteriores	31
1.1 Definiciones y ejemplos	32
1.2 Existencia de límites y colímites en $\mathcal{E}t$	36
1.3 Leyes exponenciales $\mathcal{E}t$	40
1.4 Homotopía en la categoría de los espacios exteriores	46
2. Una estructura de categoría de modelos cerrada para la categoría de los espacios exteriores	51
2.1 La estructura exterior de categoría de modelos cerrada para $\mathcal{E}t$	53
2.2 Teoremas de Whitehead	72
3. Sucesión exacta larga de homotopía asociada a un morfismo en una categoría de modelos cerrada	82
3.1 Definiciones básicas	83
3.2 Los funtores suspensión y lazo	86
3.3 Sucesión exacta larga de homotopía de una sucesión fibrada	98
4. Sucesión exacta larga de homotopía de un morfismo en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$	110
4.1 Definiciones	111
4.2 Sucesión exacta larga de homotopía exterior de una aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$	124
4.3 Sucesión exacta larga de homotopía exterior de un par $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$	135
4.4 Aplicaciones a los grupos de homotopía generalizados de Brown	138

5. Estructura cilíndrica de modelos para espacios exteriores	141
5.1 La categoría de los espacios exteriores bajo \mathbb{R}^+	142
5.2 Estructura cilíndrica de categoría de modelos cerrada para $\mathcal{E}t$	146
5.3 Teoremas de Whitehead	159
6. Sucesión exacta larga de homotopía de un morfismo en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$	165
6.1 Definiciones	166
6.2 Sucesión exacta larga de homotopía exterior de una aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$	175
6.3 Sucesión exacta larga de homotopía en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ de un par $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$	183
6.4 Aplicaciones a los grupos de homotopía tipo Steenrod	186
7. Comparación de las estructuras de categoría de modelos exterior y cilíndrica en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$	188
7.1 Funtores derivados de la “identidad”	189
Bibliografía	197

Introducción

En esta memoria se introduce la noción de espacio exterior para el estudio de las propiedades de los espacios en el infinito.

Nuestro objetivo era el de encontrar un marco de trabajo adecuado para realizar este análisis. Este marco de trabajo se debía concretar en encontrar una categoría con buenas propiedades y que contuviera la información de los espacios en el infinito.

Después de probar diversas nociones, encontramos la noción de espacio exterior que parecía satisfacer todos los requerimientos anteriores.

En esta memoria hemos probado que la categoría de los espacios exteriores tiene propiedades suficientes para poder realizar las construcciones que necesitamos. Este hecho lo hemos concretado en dos resultados. Por un lado, el Teorema 2.1.6 que prueba que la categoría de los espacios exteriores tiene una estructura de categoría de modelos cerrada inducida por las equivalencias débiles determinadas por los grupos de tipo Brown–Grossman, que en la memoria denominamos grupos de homotopía exterior. Por otro lado, el Teorema 5.2.5 que demuestra la existencia de otra estructura distinta, que ahora está inducida por los grupos de homotopía tipo Steenrod y que llamamos cilíndricos. Estos son dos de los resultados principales de la memoria.

Uno de los problemas de la categoría propia es que, hasta el momento, no se habían podido construir adecuadas fibras homotópicas y adecuados espacios de lazos. El solventar estas dificultades ha sido otro de los principales objetivos de este proyecto. Afortunadamente, la utilización de los espacios exteriores ha permitido construir fibras homotópicas y espacios de lazos. Más concretamente, se ha obtenido una sucesión de fibras homotópicas consecutivas para el estudio de los grupos de tipo Brown–Grossman y otra sucesión para los grupos de tipo Steenrod.

En primer lugar recordemos algunas categorías relevantes en el contexto de homotopía propia.

Pro es la categoría de los espacios topológicos y aplicaciones propias. Una aplicación continua de X en Y se dice propia, $f: X \rightarrow Y$, si para todo subconjunto K de Y compacto y cerrado se tiene que $f^{-1}(K)$ es también compacto. Dadas dos aplicaciones $f, g: X \rightarrow Y$ decimos que son propiamente homotopas si existe una aplicación propia $F: X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$, donde I denota el intervalo cerrado unidad. Si dividimos por la relación de homotopía se obtiene la categoría homotópica que

denotaremos $\Pi(Pro)$.

Otra categoría de interés es la categoría Pro_∞ de espacios topológicos y gérmenes de aplicaciones propias. Dados X, Y espacios topológicos y A, B subconjuntos cerrados tales que $cl(X \setminus A), cl(X \setminus B)$ son compactas, dos aplicaciones propias $f: A \rightarrow Y, g: B \rightarrow Y$ se dice que tienen el mismo germen si existe un subconjunto cerrado C de X tal que $cl(X \setminus C)$ es compacto, $C \subset A \cap B$ y $f|_C = g|_C$. De modo natural se puede considerar la noción de gérmenes de homotopía lo que determina la categoría homotópica $\Pi(Pro_\infty)$.

A continuación realizaremos una breve perspectiva histórica sobre la teoría de homotopía propia.

En 1923, Kerékjártó encontró una clasificación de las superficies no compactas. Para ello definió “punto ideal” de una superficie como invariante principal. Las propiedades de estos puntos ideales permiten trasladar el problema de la clasificación de superficies al problema de la clasificación de subconjuntos cerrados del conjunto de Cantor. Este concepto fue generalizado para cualquier espacio topológico por Freudenthal en 1931 como “punto final”.

Siebenmann [S.1] en 1965, en su tesis, encontró condiciones necesarias y suficientes para que una n -variedad diferenciable con $n > 6$, fuera interior de una variedad compacta. Si esta variedad tiene un único final existe una obstrucción a ser el interior de una variedad con borde que descansa en $\tilde{K}_0(\Pi_1(\infty))$, el grupo de clases proyectivas del grupo fundamental en el ∞ . Posteriormente en [S.2] dio una versión del teorema de Whitehead para aplicaciones propias

En 1967 Quillen [Q] introdujo el modelo axiomático de categoría de modelos cerrada. Se trata de una categoría \mathcal{C} , provista de tres clases de morfismos: fibrationes, cofibraciones y equivalencias débiles, verificando seis axiomas que recogen las propiedades habituales que se requieren para desarrollar una teoría de homotopía. Ejemplos de este modelo son la categoría de los conjuntos simpliciales SS y de los conjuntos simpliciales punteados SS_* tomando como fibrationes las fibrationes de Kan, como cofibraciones las aplicaciones inyectivas entre conjuntos simpliciales y como equivalencias débiles las aplicaciones que inducen isomorfismos en todos los grupos de homotopía para cualquier elección de punto base. También Top admite diversas estructuras de categoría de modelos cerrada. Por ejemplo, ver [Str], se pueden tomar como fibrationes las que tengan la propiedad de elevación de homotopía, como cofibraciones las aplicaciones cerradas con la propiedad de extensión de homotopía y como equivalencias débiles las equivalencias de homotopía.

Una de las técnicas que pueden utilizarse para el estudio de homotopía propia es el empleo de la categoría de los sistemas inversos o proespacios, introducida por Grothendieck.

En 1969 Artin y Mazur [A–M], para sus estudios sobre homotopía étale, utilizaron la categoría $proHo(SS)$ donde $Ho(SS)$ es la categoría homotópica de los conjuntos simpliciales.

Bousfield y Kan [B–K], en 1972, realizaron un estudio de las torres de fibraciones y del límite homotópico inverso así como la sucesión espectral (extendida) asociada a una torre de fibraciones y su convergencia a los grupos de homotopía del límite homotópico inverso. Dada una torre arbitraria de espacios, ésta puede ser sustituida por una torre de fibraciones, y definirse el límite homotópico inverso de dicha torre como el de la torre de fibraciones. Estos resultados podrán aplicarse a homotopía propia gracias al funtor incrustación de Edwards–Hastings, al que nos referiremos posteriormente.

En 1973, Farrel, Taylor y Wagoner [F–T–W] prueban otro teorema de tipo Whitehead en la categoría de los CW –complejos fuertemente localmente finitos. Con ese objeto, consideran los invariantes algebraicos que se denominan grupos de Δ –homotopía definidos previamente por Taylor [Tay]. Al final del trabajo se incluye otro teorema del tipo anterior para CW –complejos fuertemente localmente finitos omitiendo las condiciones de dimensión finita.

K.S. Brown, también en 1973, desarrolló una teoría para poder aplicarla a las categorías de haces. Definió categoría de objetos cofibrantes como una categoría \mathcal{C} con sumas finitas y objeto inicial \emptyset , con dos familias de morfismos, cofibraciones y equivalencias débiles verificando ciertos axiomas

En 1974 Porter [P.4] introdujo $Ho(proSS)$, la procategoría homotópica que resulta de invertir aquellos morfismos de $proSS$ que, salvo isomorfismo, se puedan representar como un sistema inverso de equivalencias débiles de homotopía de SS y estudió la estabilidad en la categoría de la forma.

Con posterioridad, en 1976, probó que si una categoría arbitraria \mathcal{C} verifica los axiomas de K.S. Brown [Brow], entonces se puede dotar a $pro\mathcal{C}$ de una estructura axiomática de Brown. De esta forma se puede construir la suspensión, la sucesión de cofibras homotópicas etc.

Los invariantes de homotopía con estructura de grupo han desempeñado un papel importante, por ello en homotopía propia se han buscado algunos que jueguen un papel análogo a los de homotopía estándar. Entre ellos se encuentran los grupos de homotopía propia definidos por E.M. Brown en 1974 [Bro.1], asociados a un espacio no compacto X y a un final de Freudenthal representado por un rayo propio $\alpha: [0, \infty) \longrightarrow X$. Brown definió estos grupos como clases de homotopía relativa a $[0, \infty)$ de gérmenes de aplicaciones propias de \underline{S}^n en X , donde \underline{S}^n se construye pegando una n –esfera en cada entero. Brown

caracterizó en este trabajo las equivalencias de homotopía propia, en la categoría de los complejos simpliciales, conexos, localmente finitos y de dimensión finita, en función de estos grupos y de los grupos de homotopía de Hurewicz Π_n . También definió un funtor \mathcal{P} que permite calcular los grupos de homotopía propia a partir de sistemas inversos de los grupos de homotopía.

Grossman en 1974 [Gros.1] dio una sucesión exacta corta en la que relaciona las clases de morfismos en $Ho(towSS_*)$ (categoría homotópica de torres de conjuntos simpliciales punteados) y en $towHo(SS_*)$. En 1975 publicó “A homotopy theory of pro-spaces” [Gros.2]. En este trabajo dotó de una estructura de categoría de modelos cerrada a $towSS$. Consideró como cofibraciones los morfismos isomorfos a una torre de cofibraciones de SS , como equivalencias débiles aquellos morfismos que inducen isomorfismos en todos los pro-grupos de homotopía para toda elección de puntos base y definió la adecuada noción de fibración.

Grossman [Gros.3] estudió los grupos de homotopía, análogos a los de E.M.Brown, de un proespacio utilizando otras técnicas parecidas a las de E.M. Brown en [Bro.1].

Consideró la n -proesfera Σ^n cuyo k -ésimo nivel está definido por

$$\Sigma^n(k) = \bigvee_{i \geq k} S_i^n$$

y cuyos los morfismos de transición son inclusiones.

Grossman definió como grupos de homotopía de un proespacio $X = \{X_i\}$ a

$$\Pi_n^\infty \{X_i\} = Ho(towSS_*)(\Sigma^n, X)$$

Estos invariantes definidos mediante “racimos de esferas” han sido denominados grupos de Brown–Grossman, pues son los análogos en el contexto de proespacios a los grupos de Brown. En [Gros.3] dio también algunas caracterizaciones de equivalencias de homotopía en términos de los grupos de homotopía de Brown–Grossman.

Edwards y Hastings [E–H], en 1976, publicaron la monografía titulada “Čech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometry Topology”. En este trabajo recogen por un lado las ideas de Porter, al considerar categorías homotópicas obtenidas al invertir equivalencias débiles por niveles, y por otro las mencionadas por Grossman en [Gros.2] que proporcionaba a $towSS$ estructura de categoría de modelos cerrada. Para definir $Ho(proC)$ invirtieron formalmente los morfismos isomorfos a retracts de equivalencias débiles por niveles.

Por tanto aparecen al menos tres tipos de categorías homotópicas de proespacios: las de Porter, las de Grossman y las de Edwards y Hastings.

Además probaron que si C es categoría de modelos cerrada, con determinadas propiedades adicionales, entonces $proC$ admite también estructura de categoría de modelos cerrada.

Entre los resultados de Edwards–Hastings cabe destacar sus teoremas de incrustación. Para obtenerlos hacen uso de la categoría, ya mencionada, de los proespacios. En homotopía propia se denomina proespacio final asociado a X al sistema inverso.

$$\mathcal{E}(X) = \{cl(X \setminus K); K \subset X, K \text{ compacto y cerrado} \}$$

De esta manera queda definido un funtor $\mathcal{E}: Pro_\infty \longrightarrow proTop$ (con $proTop$ categoría de los proespacios) que permite comparar categorías de homotopía propia con categorías homotópicas de proespacios. Mediante esta técnica se consiguen buenos resultados en los espacios no compactos. Por tanto el estudio de la categoría propia puede realizarse empleando la categoría de los proespacios y la noción de homotopía entre ellos, que llamaremos prohomotopía.

Sea la categoría P_σ de los espacios Hausdorff y σ -compactos con aplicaciones propias y la categoría $(P_\sigma)_\infty$ cuyos objetos son los mismos que los de P_σ y cuyos morfismos son los gérmenes de aplicaciones propias. A cada espacio X se le puede asociar su proespacio final $\mathcal{E}(X)$. Mediante este proceso se definen los funtores

$$\Pi((P_\sigma)_\infty) \longrightarrow Ho(proTop)$$

$$\Pi(P_\sigma) \longrightarrow Ho(proTop, Top)$$

La categoría $(proTop, Top)$ tiene por objetos morfismos $X \longrightarrow Y$ donde X es un proespacio e Y un espacio topológico (recordemos que Top puede verse como una subcategoría plena de $proTop$).

Las categorías $Ho(proTop)$ y $Ho(proTop, Top)$ son las categorías localizadas de $proTop$ y $(proTop, Top)$ resultado de invertir equivalencias débiles.

Edwards y Hastings probaron que estos funtores son incrustaciones plenas.

Dentro de las clases de prohomotopía tiene especial interés el estudio del grupo $Ho(proTop_*)(S^n, X)$, donde S^n denota el proespacio constante n -esfera.

Teniendo en cuenta el funtor inclusión $Ho(Top_*) \longrightarrow Ho(proTop_*)$ tiene adjunto a derecha, $holim: Ho(proTop_*) \longrightarrow Ho(Top_*)$, en [E–H] se prueba que:

$$Ho(proTop_*)(S^n, X) = Ho(Top_*)(S^n, holim X) = \Pi_n(holim X)$$

Estos grupos se suelen denominar de Steenrod porque en el contexto de la teoría de la forma los análogos de estos grupos (de Quigley), están relacionados con los grupos de homología de Steenrod. Otra denominación frecuente es la de grupos de homotopía fuerte.

Los grupos de Brown–Grossman, que citamos antes, son invariantes adecuados para torres de espacios o para aquellas categorías de homotopía que a través de una incrustación se pueden representar por torres. Por ejemplo, en homotopía propia, aquellos espacios que sean primero numerables en el infinito.

Edwards y Hastings, en [E–H], dieron también una versión del teorema de Whitehead propio mediante progrupos.

Respecto a los grupos de homotopía de Steenrod para el caso propio, como señalamos, se pueden expresar así:

$$Ho(Top_*)(S^n, holim \mathcal{E}X) = Ho(proTop_*)(S^n, \mathcal{E}X)$$

Dado que $S^n \cong \mathcal{E}(S^n \times [0, \infty))$, utilizando el teorema de incrustación de Edwards–Hastings se obtiene que

$$Ho(proTop_*)(\mathcal{E}(S^n \times [0, \infty)), \mathcal{E}X) = [(S^n \times [0, \infty), *), (X, \alpha)]_p$$

donde $*$ y α son los rayos base. Así, dado que pueden interpretarse como clases de homotopía propia de aplicaciones o gérmenes propias de $S^n \times [0, \infty)$ en X , coinciden con la definición de Čerin en su artículo [Če], que los denota por $\underline{\underline{\Pi}}_n(X, \alpha)$. Además Čerin prueba que los $\underline{\underline{\Pi}}_n(X, \alpha)$ resultan ser los grupos de homotopía local de Hu [Hu] de (X^*, ∞_α) , donde X^* es la compactificación de Freudenthal de X y ∞_α es el punto del infinito determinado por el rayo base α .

Hernández [H.1], en 1982, define los grupos

$$\underline{\underline{\tau}}_n(X, \alpha) = [(\mathbb{R}^{n+1}, *), (X, \alpha)]_p$$

Esto es, las clases de homotopía propia relativas a un rayo base de aplicaciones propias basadas de \mathbb{R}^{n+1} en X .

Estos invariantes se denominan grupos relativos de Steenrod debido a que existen los isomorfismos que interpretan las clases de homotopía propia basada de \mathbb{R}^{n+1} en X como el n -ésimo grupo de homotopía relativa de Steenrod de la pareja de proespacios $(X, \mathcal{E}X)$.

En dicha publicación prueba además la existencia de la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \underline{\tau}_n(X, \alpha) \longrightarrow \Pi_n(X, \alpha) \longrightarrow \Pi_n((X, \alpha(0))) \longrightarrow \underline{\tau}_{n-1}(X, \alpha) \longrightarrow \cdots$$

que relaciona los grupos relativos de Steenrod, con los grupos de Steenrod y los de Hurewicz. Esta sucesión aparece, con diferente notación, en un trabajo posterior de Brin y Thickstun [Br–Th] orientado al estudio de incrustaciones propias de planos en 3-variedades.

Rivas en su tesis [Riv] estudia los grupos de Steenrod de tipo propio. Analiza las acciones de los 1-grupos de Steenrod, un teorema de Hurewicz que involucra las teorías de homología J_* , E_* definidas por [H.1] y estudia la noción de CW -complejo propio, incluyendo la existencia de aproximaciones celulares de aplicaciones de dichos espacios. Un CW -complejo propio se construye a partir de un espacio discreto pegando celdas compactas, D^n , y no compactas, $D^n \times [0, \infty)$, mediante aplicaciones pegamiento propias.

Extremiana, Hernández y Rivas en [E–H–R.5] prueban un teorema de Whitehead para CW -complejos propios, reduciendo la correspondiente caracterización algebraica a los grupos relativos de Steenrod y los estándar de Hurewicz. También investigan las condiciones necesarias para la existencia de aproximaciones celulares propias.

Con posterioridad, se continuó investigando sobre las relaciones entre los grupos de homotopía de Brown–Grossman, los de Steenrod y los progrupos de homotopía.

En 1988 Hernández y Porter [H–P.1] observan que puede darse una definición alternativa de los grupos relativos de Steenrod de un espacio σ -compacto X ,

$$\underline{\tau}_n(X, \alpha) = Ho(proTop_*)(S^n, F_\rho)$$

donde $\rho: \mathcal{E}(X) \longrightarrow X$ es la “inclusión” del proespacio final de X en X y F_ρ la fibra homotópica de ρ .

Dado que $Ho(proTop_*)$ tiene estructura de categoría de modelos cerrada de Quillen se puede considerar la sucesión de fibras homotópicas

$$\dots \longrightarrow \Omega X \longrightarrow F_\rho \longrightarrow \mathcal{E}X \longrightarrow X$$

que al aplicar el funtor $Ho(proTop_*)(S^n, -)$ produce la sucesión exacta ya citada anteriormente.

También se considera la sucesión de cofibras

$$\Sigma^0 \longrightarrow S^0 \longrightarrow \Sigma^1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow \dots$$

donde $\Sigma^0 \longrightarrow S^0$ es el morfismo inducido por la identidad y se aplica a la sucesión de fibras anterior obteniendo un diagrama bidimensional con filas y columnas exactas que relacionan los grupos de Brown–Grossman, los grupos de Steenrod y los grupos de Hurewicz.

Estos resultados se completan con versiones de tipo global de los grupos de Brown–Grossman, dadas por Hernández y Porter en [H–P.2].

Hemos hecho referencia a dos de los modelos axiomáticos que permiten construir teorías de homotopía, el de Quillen y el de Brown. Hemos visto que el dado por Quillen, aun siendo uno de las más importantes, no es satisfactorio en algunas situaciones.

Baues elaboró otra axiomática más débil que la de Quillen. Baues define categoría cofibrada como una categoría C con dos clases de morfismos distinguidos, cofibraciones y equivalencias débiles, verificando ciertos axiomas.

La axiomática de Brown posee claras diferencias respecto a la de Baues. Sin embargo se tiene que una categoría cofibrada con sumas finitas, objeto inicial y cuyos objetos son todos cofibrantes es una categoría de objetos cofibrantes de Brown.

Nuestro interés por estos modelos axiomáticos se deriva de que Pro es una categoría cofibrada de Baues, como se demuestra en [A–D–Q] y en [C–E–H] (aunque las estructuras son diferentes), así como categoría de objetos cofibrantes (espacios sin basar).

Dado que Pro es categoría cofibrada, si A es un espacio fijo, $(Pro^A)_c$ también es categoría cofibrada. Un caso interesante es cuando $A = T$ un árbol (infinito y contráctil).

En [Ba.2] estudia las propiedades de los grupos de homotopía propia tipo Brown definidos para un árbol T y los de tipo Steenrod. También analiza sus relaciones para un árbol dado.

Para un T , Baues considera la categoría pequeña de los objetos esféricos n -dimensionales. Estos objetos se construyen pegando un número finito (o ninguna) de n -esferas en cada vértice del árbol. Esta categoría tiene objeto cero y sumas.

Una teoría es una categoría pequeña con objeto cero y sumas infinitas. Los funtores contravariantes de la teoría en la categoría de los conjuntos punteados son modelos algebraicos para dicha teoría.

Un objeto esférico n -dimensional determina grupos de homotopía tipo Brown o Hurewicz para un número finito de esferas. Si $n = 1$ tiene estructura de grupo y si $n > 1$ de grupo abeliano. Dado un espacio X con un árbol base, esto es un objeto en $Ho((Pro^T)_c)$, la restricción del funtor $Ho((Pro^T)_c)(-, X)$ a la teoría de los objetos esféricos n -dimensionales determina un modelo algebraico para la teoría de los objetos esféricos n -dimensionales asociada a un árbol. Estos invariantes poseen ventajas e inconvenientes. Son apropiados para imponer condiciones pero su cálculo es complejo. Además otra desventaja de estos invariantes es que dependen del encaje del árbol.

Cabe destacar otros resultados de este trabajo. Una versión propia del teorema de Hilton–Milnor, otro de tipo Blakers–Massey para grupos de Brown asociados a un árbol y un teorema tipo Freudenthal para clases de homotopía y suspensiones bajo un árbol T . También prueba un teorema de Whitehead para grupos tipo Brown bajo un árbol T . La categoría más empleada es la de los CW -complejos localmente fuertemente finitos y los CW -complejos propios obtenidos pegando conos de objetos esféricos.

Una de las desventajas de la categoría propia es que no posee suficientes límites y colímites para satisfacer el axioma $CM1$ de categoría de modelos cerrada de Quillen. Nosotros definiremos una nueva categoría, la de los espacios exteriores, que contenga a la categoría propia y satisfaga todos los axiomas de categoría de modelos cerrada. De esta forma podremos aprovechar las técnicas y resultados de los que disponemos en este modelo axiomático para estudiar la homotopía propia. En particular, al satisfacer $CM1$, permitirá realizar diversas construcciones homotópicas a través de límites y colímites finitos.

En el Capítulo 0 se introduce de la notación y se hace un resumen de las definiciones y los resultados sobre categorías de modelos cerradas que van a emplearse. Además se recuerdan las demostraciones de algunas proposiciones de tipo técnico como el hecho de que si \mathcal{C} es una categoría de modelos cerrada arbitraria y $A \in Ob \mathcal{C}$ también lo son \mathcal{C}^A , \mathcal{C}_A , y \mathcal{C}^{op} , así como un teorema de Whitehead en la categoría de objetos fibrantes y cofibrantes en \mathcal{C} , \mathcal{C}_{cf} .

El Capítulo 1 está dedicado a definir la categoría de los espacios exteriores, que denotaremos $\mathcal{E}t$. La categoría $\mathcal{E}t$ es aquella cuyos objetos son espacios exteriores y sus morfismos son aplicaciones exteriores entre ellos. Más en detalle, un espacio exterior es un espacio topológico (X, T_X) enriquecido con una estructura adicional que llamaremos externología y que denotaremos \mathcal{E}_X . La definición de externología viene sugerida por las propiedades

de los entornos del infinito (complementos de los subconjuntos que sean cerrados y compactos) que constituirán una externología. Una externología es una familia de abiertos de X verificando las siguientes condiciones:

(E.1) Dados $E_i \in \mathcal{E}_X$ para todo $i = 1, \dots, n$, entonces $\bigcap_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E}_X$.

(E.2) Sea $E \subset U$, $E \in \mathcal{E}_X$ y $U \in T_X$, entonces $U \in \mathcal{E}_X$.

Es claro que toda topología es una externología pero no ocurre que una externología sea topología pues \emptyset no tiene por qué formar parte de \mathcal{E}_X . Cada E_i se denomina abierto exterior. Una aplicación, $f: X \rightarrow Y$, se dice externa si para todo $E \in \mathcal{E}_Y$, $f^{-1}(E) \in \mathcal{E}_X$. La aplicación f se dice exterior si es continua y externa.

Hemos definido un funtor pleno y fiel, $b: Pro \rightarrow \mathcal{E}t$, que asocia a un espacio X el espacio exterior bX determinado por la topología de X y la externología de los complementos de los compacto-cerrados.

Para el estudio de homotopía propia han sido empleadas diferentes categorías: $towSS$, $towSS_*$, $towSS, proTop$, $(proTop, Top)$, etc. Nosotros haremos uso de $\mathcal{E}t$, de $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, categoría de los espacios exteriores con una sucesión base exterior, y de $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, espacios exteriores con rayo base exterior.

Recordemos de Edwards y Hastings, [E-H], definieron un funtor pleno y fiel, (\mathcal{E}, id) de la categoría P de los espacios localmente compactos Hausdorff y aplicaciones propias en la categoría $(proTop, Top)$.

También tenemos un funtor $(\bar{\mathcal{E}}, id): \mathcal{E}t \rightarrow (proTop, Top)$ que asocia a un espacio X el morfismo $\bar{\mathcal{E}}X \rightarrow X$, donde $\bar{\mathcal{E}}X$ es el sistema inverso de los abiertos exteriores.

De este modo, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathcal{E}t \\
 & \nearrow b & \downarrow (\bar{\mathcal{E}}, id) \\
 P & & \\
 & \searrow (\mathcal{E}, id) & \\
 & & (proTop, Top)
 \end{array}$$

que relaciona la categoría propia, la de los espacios exteriores y la de los proespacios globales.

Uno de los objetivos de esta memoria es probar que la categoría de los espacios

exteriores tiene buenas propiedades y es adecuada para el estudio de homotopía propia. Por ejemplo, a diferencia de la categoría propia, la categoría de los espacios exteriores es cerrada por límites y colímites, como probamos en este capítulo. Demostramos además tres leyes exponenciales. Nos restringimos a ciertos dominios ($\mathbb{N} \times X$, $\mathbb{R}^+ \times X$ ó $X \times K$ con K compacto), tomando en los espacios de aplicaciones, si es preciso, topologías diferentes a la compacto–abierta. Obtenemos así biyecciones que son de especial relevancia pues relacionan los grupos de homotopía exterior (en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$) o cilíndrica (en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$), que definiremos posteriormente, con los grupos de homotopía estándar de ciertos espacios de funciones. Otra aplicación de estas leyes es la definición de adecuados funtores lazo y suspensión.

Decimos que dos aplicaciones en $\mathcal{E}t$, $f, g: X \longrightarrow Y$ son exteriormente homótopas si existe una homotopía exterior de f a g . Como consecuencia construimos la categoría de homotopía exterior $\Pi(\mathcal{E}t)$ cuyos objetos son espacios exteriores y cuyos morfismos son las clases de homotopía exterior.

Consideramos la categoría $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ cuyos objetos (X, j_X) son espacios exteriores X con una sucesión base exterior $j_X: \mathbb{N} \longrightarrow X$, y cuyos morfismos son aplicaciones exteriores que preservan sucesiones base.

Decimos que $f, g: (X, j_X) \longrightarrow (Y, j_Y)$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ son exteriormente homótopas bajo \mathbb{N} si existe una homotopía exterior bajo \mathbb{N} de f a g . Definimos la categoría de homotopía, $\Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})$, de la forma usual.

Además consideramos el funtor $\Pi_n^{\mathcal{E}}: \mathcal{E}t^{\mathbb{N}} \longrightarrow Set$ que a cada $(X, j_X) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ le asigna $\Pi_n^{\mathcal{E}}(X, j_X)$, el conjunto de clases de homotopía exterior bajo \mathbb{N} de $(\mathbb{N} \times S^n, j_{\mathbb{N} \times S^n})$ en (X, j_X) . Estos invariantes serán para los espacios exteriores los análogos de los grupos globales de Brown para la categoría propia, aunque aquí consideramos sucesiones base en vez de los gérmenes de rayos de E.M. Brown.

Haciendo uso de la primera ley exponencial que hemos demostrado se llega a la existencia de un isomorfismo entre $\Pi_n^{\mathcal{E}}(X, j_X)$ y el grupo de homotopía estándar del espacio de sucesiones exteriores en X , $\Pi_n(X^{\mathbb{N}}, j_X)$, para todo $n \geq 0$. Es necesario poner de relieve que en $X^{\mathbb{N}}$ consideramos una topología, $T^{\mathbb{N}}$, diferente a la topología compacto–abierta. Como consecuencia muchas propiedades de los grupos de homotopía estándar pueden trasladarse a los grupos de homotopía exterior como, por ejemplo, la estructura de grupo para $n \geq 1$ y de grupo abeliano para $n \geq 2$.

Una aplicación exterior $f: X \longrightarrow Y$ se dice equivalencia débil si se verifica que: si $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X) = \emptyset$, entonces $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, Y) = \emptyset$ ó si $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X) \neq \emptyset$, entonces f induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía exterior para cualquier sucesión base.

Varias de las categorías empleadas en el estudio de la homotopía propia han sido dotadas de una estructura de categoría de modelos cerrada. Grossman encontró una para *towSS*. Edwards y Hastings probaron que si \mathcal{C} es categoría de modelos con ciertas condiciones, entonces *proC* también lo es, en consecuencia la categoría de proespacios, *proTop*, tiene una estructura de categoría de modelos.

Uno de los logros del Capítulo 2 consiste en demostrar que $\mathcal{E}t$ satisface los axiomas *CM* de categoría de modelos cerrada. Para ello tomamos como fibraciones las aplicaciones que tienen la propiedad de elevación de homotopía exterior a derecha respecto a $\partial_0: \mathbb{N} \times D^n \longrightarrow \mathbb{N} \times D^n \times I$ para todo $n \geq 0$, como equivalencias débiles las equivalencias débiles exteriores y como cofibraciones las aplicaciones exteriores que tienen la propiedad de elevación a izquierda respecto a las fibraciones que además son equivalencias débiles. A esta estructura de categoría de modelos cerrada, así como a sus conceptos asociados los denominaremos exteriores.

Además, definimos la noción de \mathbb{N} -complejo. Un \mathbb{N} -complejo se construye de forma inductiva. El n -esqueleto se obtiene a partir del $n - 1$ -esqueleto pegando \mathbb{N} -celdas de dimensión n , $\mathbb{N} \times D^n$, con $n \geq 0$, mediante aplicaciones exteriores y de forma que tenga la topología y externología débiles respecto a la filtración de los n -esqueletos. Se prueba que todos los \mathbb{N} -complejos son cofibrantes exteriores. Dado un *CW*-complejo localmente finito, de dimensión finita y con una cantidad numerable de celdas en cada dimensión, probamos que admite una estructura de \mathbb{N} -complejo con un número finito de \mathbb{N} -celdas. Demostramos un teorema de Whitehead para \mathbb{N} -complejos y como caso particular un teorema de Whitehead propio.

El objetivo principal del Capítulo 3 es generalizar el resultado de Quillen en el que construye una sucesión exacta larga de homotopía asociada a un morfismo en una categoría de modelos basada. Nosotros trabajamos en una categoría de modelos cerrada arbitraria, \mathcal{C} , en la que el objeto inicial \mathcal{J} , en general, no es isomorfo al objeto final $*$. Recordamos varias definiciones y resultados útiles dados por Quillen en [Q] como que, dado $A \in \mathcal{C}_c$ y $B \in \mathcal{C}_f$, el conjunto de homotopías a derecha de f a g , $\Pi_1^d(A, B; f, g)$ y el conjunto de homotopías a izquierda de f a g , $\Pi_1^i(A, B; f, g)$ son biyectivos. Por esta razón escribiremos indistintamente $\Pi_1(A, B; f, g)$. Sea $r_A \in (\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c$, esto es, $r_A: A \longrightarrow \mathcal{J}$ cofibrante, $B \in \mathcal{C}_f$ y $j_B: \mathcal{J} \longrightarrow B$ el morfismo existente por ser \mathcal{J} objeto inicial. Escribimos $\Pi_1(A, B; j_B r_A, j_B r_A)$ como $\Pi_1(A, B)$. Nosotros definimos funtores suspensión $\Sigma: Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ y lazo $\Omega: Ho(\mathcal{C}_f) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$ y probamos que Σ es adjunto a izquierda de Ω ; es decir, $Ho(\mathcal{C})(\Sigma A, B) \cong \Pi_1(A, B) \cong Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(A, \Omega B)$.

Mediante la categoría $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ introducimos nuevas nociones de sucesión fibrada y obtenemos la sucesión exacta larga de homotopía asociada a un morfismo en $Ho(\mathcal{C})$.

El propósito del Capítulo 4 es el de obtener una sucesión exacta larga asociada a un morfismo $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y a un objeto Z en $(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})_{id_{\mathbb{N}}} = \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$. En general, cuando Z no es cofibrante, esta sucesión es distinta de la obtenida en el Capítulo 3, como hemos visto en la Observación 4.2.16(b), si bien la sucesión del Capítulo 3 se puede conseguir si $\mathcal{C} = \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ como corolario de ésta cuando Z es cofibrante. Para el caso de que f sea la inclusión $i: A \longrightarrow X$ de un par de espacios exteriores (X, A) bajo \mathbb{N} , se obtiene la sucesión exacta de los grupos de homotopía exteriores del par (X, A) . Si además consideramos el funtor incrustación $b: Pro^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y el inducido para pares $b: \mathcal{P}Pro^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ obtenemos la sucesión exacta de los grupos de homotopía propia globales de Brown de un par (X, A) .

En los Capítulos 5 y 6 consideramos la categoría $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ de los espacios exteriores con un rayo base exterior que serán denotados por (X, α) , donde $\alpha: \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ es el rayo base.

Definimos aplicaciones exteriormente homótopas bajo \mathbb{R}^+ como aquellas $f, g: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ tales que existe una homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ de f a g . Como consecuencia construimos la categoría de homotopía $\Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})$.

También definimos el funtor $\Pi_n^c: \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow Set$, para todo $n \geq 0$, que asigna a cada $(X, \alpha) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ el conjunto de clases de homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ de $(\mathbb{R}^+ \times S^n, \alpha_{\mathbb{R}^+ \times S^n})$ en (X, α) . Estos invariantes son los análogos de los grupos de homotopía fuerte (o de Steenrod) en el marco de los espacios exteriores.

Utilizando la segunda ley exponencial probada en el Capítulo 1, demostramos que $\Pi_n^c(X, \alpha)$ es biyectivo al grupo de homotopía estándar del espacio de los rayos exteriores $\Pi_n(X^{\mathbb{R}^+}, \alpha)$ para todo $n \geq 0$. La topología considerada en $X^{\mathbb{R}^+}$ es diferente a la compactoabierto. De este resultado se deduce que $\Pi_n^c(X, \alpha)$ tiene estructura de grupo para todo $n \geq 1$ y de grupo abeliano para todo $n > 1$.

Una aplicación exterior $f: X \longrightarrow Y$ se dice equivalencia débil cilíndrica si se verifica que: si $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X) = \emptyset$, entonces $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, Y) = \emptyset$ ó si $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X) \neq \emptyset$, entonces f induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía cilíndricos para cualquier rayo base.

Además se demuestra que es posible proporcionar a $\mathcal{E}t$ otra estructura de categoría de modelos cerrada, que denominaremos cilíndrica. Para ello tomamos como fibraciones las aplicaciones exteriores con la propiedad de elevación de homotopía a derecha respecto a las aplicaciones $\partial_0: \mathbb{R}^+ \times D^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times D^n \times I$ para todo $n \geq 0$, como equivalencias débiles las equivalencias débiles cilíndricas y como cofibraciones las aplicaciones en $\mathcal{E}t$ que poseen la propiedad de elevación a izquierda respecto a las fibraciones que además son equivalencias débiles. A esta estructura y a sus nociones asociadas las denominaremos cilíndricas para diferenciarlas de las anteriores que hemos llamado exteriores.

Como en el Capítulo 2, se define un tipo de espacios, \mathbb{R}^+ -complejos, que desempeñan un papel similar a los de los CW - complejos en homotopía estándar. Se construyen de forma inductiva, de manera que el n -esqueleto se obtiene a partir del $n - 1$ -esqueleto pegando \mathbb{R}^+ -celdas de dimensión n , $\mathbb{R}^+ \times D^n$ $n \geq 0$, mediante aplicaciones exteriores y de forma que el espacio resultante tiene la topología y externología débiles respecto a los esqueletos. Se prueba que los \mathbb{R}^+ -complejos son objetos cofibrantes. Probamos para \mathbb{R}^+ -complejos un teorema de Whitehead en términos de grupos cilíndricos. También observamos que si X es un CW -complejo finito, entonces $\mathbb{R}^+ \times X$ admite una estructura de \mathbb{R}^+ -complejo inducida por la de X .

En el Capítulo 6 se obtiene una sucesión exacta larga de homotopía cilíndrica asociada a un morfismo en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ y a un objeto Z en $(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})_{id_{\mathbb{R}^+}} = \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$. Generalmente, si Z no es cofibrante, esta sucesión es distinta de la conseguida en el Capítulo 3. En el caso de que Z sea cofibrante entonces, para $\mathcal{C} = \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, dicha sucesión puede obtenerse a partir de la de homotopía cilíndrica. Si consideramos como morfismo en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ la inclusión $i: A \longrightarrow X$ de un par de espacios exteriores (X, A) conseguimos la sucesión exacta larga de los grupos de homotopía cilíndrica del par (X, A) . Tomando los funtores plenos y fieles inducidos por b en las categorías bajo \mathbb{R}^+ , $b^{\mathbb{R}^+}: Pro^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, y en las categorías de los pares, $b^{\mathbb{R}^+}: \mathcal{P}Pro^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, obtenemos la sucesión exacta de homotopía propia tipo Steenrod de un par (X, A) .

Notemos que si en vez de analizar la categoría $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ hubiéramos trabajado en la estructura de modelos de $\mathcal{E}t^T$, donde T es un árbol en el sentido de Baues (un CW -complejo 1-dimensional, localmente finito y contractible), entonces hubiéramos podido obtener los grupos de homotopía propia utilizados por Baues y su versión del teorema de Whitehead.

Para finalizar, en el Capítulo 7, realizamos una comparación entre las categorías de modelos cerradas inducidas en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ por las estructuras exterior y cilíndrica, que denotaremos respectivamente $\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$ y $\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$. Uno de los resultados principales es el Teorema 7.1.2 que prueba la existencia de la adjunción

$$Ho(\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\underline{L}(id)} \\ \xleftarrow{\underline{R}(id)} \end{array} Ho(\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+})$$

donde $\underline{L}(id)$ denota el derivado total a izquierda de id y $\underline{R}(id)$ el derivado total a derecha de id en el sentido de Quillen.

Si restringimos la adjunción anterior a los objetos cofibrantes cilíndricos, denota-

dos abreviadamente c -cof, se tiene el resultado principal del capítulo, que la categoría $Ho((\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+})_{\text{cof}_c})$ es equivalente a la categoría $Ho((\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+})_{\text{cof}_c})$.

Finalizaremos poniendo de relieve alguna de las potenciales aplicaciones de la nueva noción de espacio exterior.

En primer lugar señalemos que ya se han encontrado algunas aplicaciones a la teoría de la forma, [G-Ga-H]. Utilizando la noción de espacio exterior se han reformulado las categorías de la forma y de la forma fuerte.

Un tema de interés es el estudio de teorías de homología en la categoría de los espacios exteriores y de los correspondientes teoremas de unicidad. Además éste parece ser un marco conveniente para elaborar una teoría de homología que unifique las teorías de homología ordinaria que aparecen en la primera parte del libro de Eilenberg–Steenrod, [Ei-Ste], y las teorías de homología de tipo Steenrod de la segunda parte de este trabajo. Parece también de interés el estudio de teorías de homología y cohomología generalizadas y de adecuadas categorías de homotopía exterior estable.

Otra aplicación interesante podría ser el análisis de los espacios exteriores nilpotentes, ya sea para grupos de tipo Brown–Grossman o para grupos de tipo Steenrod, lo que podría proporcionar versiones homológicas del teorema de Whitehead.

Por último, observemos que numerosas construcciones homotópicas, como descomposiciones de Postnikov, teorías de localización, modelos algebraicos para n -tipos, etc, tienen dos versiones análogas para espacios exteriores: una utilizando grupos de tipo Brown–Grossman y otra empleando grupos tipo Steenrod. Creemos que el desarrollo de estas construcciones para los espacios exteriores permitirá posteriormente encontrar nuevas aplicaciones para la categoría propia y para las categorías de la forma.

La memoria consta de una Introducción y ocho capítulos numerados de cero a siete. Estos se han ordenado por secciones. En cada sección se han numerado conjuntamente definiciones, lemas, proposiciones, teoremas, etc, por orden de aparición. Las referencias que se hacen a la propia memoria constan de tres guarismos. Por ejemplo el Lema 3.3.2 se halla Capítulo 3, Sección 3.

El símbolo \square indica el final de una demostración.

La Bibliografía se ha ordenado alfabéticamente. Dentro de cada letra tienen prioridad los artículos o libros pertenecientes a un sólo autor, o autores, y para cada autor, o autores, están ordenados cronológicamente.

Capítulo 0

Preliminares y notación

Comenzamos en la primera sección introduciendo la notación que vamos a emplear así como la definición de categoría de modelos cerrada.

Además dada \mathcal{C} , categoría de modelos cerrada arbitraria, reproducimos adecuadas demostraciones de que \mathcal{C}^{op} , \mathcal{C}^A y \mathcal{C}_A para todo $A \in Ob \mathcal{C}$, son categorías de modelos cerradas. Estos resultados y alguno de tipo técnico, que también demostraremos, nos serán de utilidad en posteriores capítulos.

En la segunda sección recordamos la demostración del teorema de Whitehead en una categoría de modelos cerrada \mathcal{C} para la subcategoría plena de objetos fibrantes y cofibrantes, \mathcal{C}_{cf} .

En la tercera sección, dadas \mathcal{C} y \mathcal{C}' categorías de modelos cerradas y el funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, recordamos la definición de funtor derivado total a izquierda (derecha) de F . Por último, citamos un resultado sobre equivalencia de las categorías localizadas de categorías de modelos cerradas del que haremos uso en el Capítulo 7.

0.1 Notación, definición de categoría de modelos cerrada y resultados generales.

A lo largo de todo el trabajo emplearemos las notaciones siguientes:

I es el intervalo cerrado $[0, 1]$.

\mathbb{R}^+ es el intervalo $[0, +\infty)$.

\mathbb{R}^n es el producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$.

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$.

$\mathbb{N} \times D^n = \mathcal{D}^n$.

$\mathbb{N} \times S^{n-1} = \mathcal{S}^{n-1}$.

$\mathbb{R}^+ \times D^n = \mathcal{T}^n$.

$$\mathbb{R}^+ \times S^{n-1} = \mathcal{R}^{n-1}.$$

Top es la categoría de los espacios topológicos y aplicaciones continuas.

Pro es la categoría de los espacios topológicos y aplicaciones propias.

Grp es la categoría de los grupos y morfismos de grupos.

Ab es la categoría de los grupos abelianos y morfismos de grupos.

*Top** es la categoría de los espacios topológicos punteados (X, x_0) , con $x_0 \in X$, y aplicaciones continuas que preservan puntos base.

$\Pi_n(X, x_0)$ es el n -ésimo grupo de homotopía estándar del espacio topológico punteado (X, x_0) .

Dado $X \in Top$, $X \times I$ es el cilindro de X . Denotamos por $\partial_i: X \rightarrow X \times I$ para $i = 0, 1$, a la aplicación continua definida por $\partial_i(x) = (x, i)$ para todo $x \in X$.

Dado $Y \in Top$, Y^I es el espacio de caminos de Y . Denotamos por $d_i: Y^I \rightarrow Y$ para $i = 0, 1$, a la aplicación continua definida como $d_i(w) = w(i)$ para todo $w: I \rightarrow Y$ camino continuo en Y .

Dado $Y \in Top$, ΩY es el espacio de lazos de Y .

Definición 0.1.1 Una categoría \mathcal{C} se dice *categoría de modelos cerrada* si está provista de tres familias distinguidas de aplicaciones llamadas fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles satisfaciendo los axiomas *CM1–CM5* siguientes:

CM1. \mathcal{C} es cerrada respecto a límites y colímites finitos.

CM2. Si f y g son aplicaciones tales que gf está definida y dos de ellas son equivalencias débiles, también lo es la tercera.

Recordemos que los morfismos de \mathcal{C} son los objetos de la categoría $Mor_{\mathcal{C}}$ y los morfismos de $Mor_{\mathcal{C}}$ son cuadrados conmutativos. Decimos que una aplicación f en \mathcal{C} es un retracto de g si existen morfismos $\varphi: f \rightarrow g$ y $\psi: g \rightarrow f$ en $Mor_{\mathcal{C}}$ tales que $\psi\varphi = id_f$.

Un morfismo que es una equivalencia débil y una fibration se dice fibration trivial y, similarmente, un morfismo que es equivalencia débil y una cofibration se dice cofibration trivial.

CM3. Si f es un retracto de g y g es una fibration, cofibration o equivalencia débil, entonces también lo es f .

CM4. (Elevación). Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & X \\
 \downarrow i & \nearrow & \downarrow p \\
 B & \longrightarrow & Y
 \end{array} \tag{1}$$

la flecha discontinua existe en cualquiera de las siguientes situaciones:

- (a) i es una cofibración y p una fibración trivial.
- (b) i es una cofibración trivial y p una fibración.

Decimos que un morfismo $i: A \rightarrow B$ en una categoría tiene la propiedad de elevación a izquierda (LLP) con respecto a otro morfismo $p: X \rightarrow Y$ y que p tiene la propiedad de elevación a derecha (RLP) con respecto a i si la flecha discontinua existe en el diagrama (1).

CM5. (Factorización). Cualquier morfismo f puede factorizarse de dos formas distintas:

- (a) $f = pi$ donde i es una cofibración trivial y p es una fibración.
- (b) $f = qj$ donde j es una cofibración y q una cofibración trivial.

Dada \mathcal{C} categoría de modelos cerrada, consideramos la categoría bajo A , denotada \mathcal{C}^A . Sus objetos son morfismos en \mathcal{C} de la forma $j_X: A \rightarrow X$, que escribiremos a veces (X, j_X) y sus morfismos son triángulos conmutativos, denotados \bar{f} :

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 j_X \swarrow & & \searrow j_Y \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

Podemos definir dos funtores. Primero un functor olvido $\mathcal{U}: \mathcal{C}^A \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{U}(j_X) = X$, para todo $j_X \in \mathcal{C}^A$, y $\mathcal{U}\bar{f} = f$, para todo $\bar{f} \in \mathcal{C}^A(j_X, j_Y)$.

En segundo lugar otro functor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^A$ que a cada $X \in \mathcal{C}$, F le asigna la segunda inclusión, $in_2^X: A \rightarrow X \sqcup A$, donde $X \sqcup A$ es el coproducto en \mathcal{C} y cuya existencia está garantizada por ser \mathcal{C} categoría de modelos cerrada. También dado $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, F le asigna de forma única el diagrama \bar{f}'

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 in_2^X \swarrow & & \searrow in_2^Y \\
 X \sqcup A & \xrightarrow{f'} & Y \sqcup A
 \end{array}$$

donde $f': X \sqcup A \rightarrow Y \sqcup A$ la obtenemos haciendo el coproducto de los morfismos f e id_A .

Proposición 0.1.2

Dados los funtores F y \mathcal{U} definidos anteriormente se verifica que F es adjunto a izquierda de \mathcal{U} .

Demostración:

Es necesario probar que para todo $X \in Ob \mathcal{C}$, $j_Y \in Ob \mathcal{C}^A$

$$\mathcal{C}^A(FX, j_Y) \cong \mathcal{C}(X, \mathcal{U}j_Y)$$

y que esta biyección es natural en X y en j_Y .

Definimos $b: \mathcal{C}^A(FX, j_Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathcal{U}j_Y)$ para un morfismo $\bar{f} \in \mathcal{C}^A(FX, j_Y)$

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 in_2^X \swarrow & & \searrow j_Y \\
 X \sqcup A & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

como $b(\bar{f}) = f \circ in_1^X: X \rightarrow Y$.

Para todo $g \in \mathcal{C}(X, \mathcal{U}j_Y)$ definiremos $b^{-1}: \mathcal{C}(X, \mathcal{U}j_Y) \rightarrow \mathcal{C}^A(FX, Y)$ por el proceso siguiente. Tomamos g' obtenido al aplicar la propiedad universal del coproducto a $g: X \rightarrow Y$ y a $j_Y: A \rightarrow Y$. Se tiene que $g' \circ in_1^X = g$ y que $g' \circ in_2^X = j_Y$. De esta forma tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 in_2^X \swarrow & & \searrow j_Y \\
 X \sqcup A & \xrightarrow{g'} & Y
 \end{array}$$

que denotamos por \bar{g}' . Entonces $b^{-1}(g) = \bar{g}'$. Además b^{-1} está bien definida porque g' es única.

Se tiene que $b^{-1}b(\bar{f}) = b^{-1}(f \text{ in}_1^X) = \bar{f}$, para toda $\bar{f} \in \mathcal{C}^A(FX, j_Y)$, y que $bb^{-1}(g) = b(\bar{g}') = g' \text{ in}_1^X = g$, para todo $g \in \mathcal{C}(X, \mathcal{U}j_Y)$, con lo que probamos que b es biyección.

La naturalidad en X y en j_Y es inmediata. \square

Definamos tres clases de morfismos en \mathcal{C}^A .

Definición 0.1.3 Decimos que $\bar{p} \in \mathcal{C}^A$ es *fibración* si y sólo si $\mathcal{U}\bar{p}$ es fibración en \mathcal{C} .

Definición 0.1.4 Decimos que $\bar{f} \in \mathcal{C}^A$ es *equivalencia débil* si y sólo si $\mathcal{U}\bar{f}$ es equivalencia débil en \mathcal{C} .

Definición 0.1.5 Decimos que $\bar{i} \in \mathcal{C}^A$ es *cofibración* si y sólo si tiene la propiedad de elevación a izquierda respecto a las fibraciones en \mathcal{C}^A que además son equivalencias débiles en \mathcal{C}^A .

Teorema 0.1.6

Sea \mathcal{C} categoría de modelos cerrada y $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Entonces \mathcal{C}^A con las tres clases de morfismos definidos en 0.1.3, 0.1.4 y 0.1.5 tiene estructura de categoría de modelos cerrada.

Demostración:

El axioma *CM1* establece la existencia de límites y colímites finitos. Por [Bo; 2.16.3] si \mathcal{C} tiene límites y colímites, \mathcal{C}^A también.

Así, dado que \mathcal{C} es categoría de modelos cerrada y verifica por tanto *CM1*, podemos deducir que \mathcal{C}^A tiene límites y colímites finitos.

Veamos un resultado que nos será de utilidad.

Lema 0.1.7

Dada $\bar{j}: j_X \longrightarrow j_Y, \bar{j}$ es cofibración en \mathcal{C}^A si y sólo si $\mathcal{U}\bar{j}$ es cofibración en \mathcal{C} .

Demostración:

Consideremos el siguiente diagrama en \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccccc}
& & X & \xrightarrow{f} & E \\
& \nearrow^{j_X} & \downarrow \mathcal{U}\bar{j} & & \downarrow p \\
A & (4) & & & \\
& \searrow_{j_Y} & Y & \xrightarrow{g} & B
\end{array}$$

donde p es fibración trivial en \mathcal{C} .

Dado que (4) es conmutativo por ser \bar{j} un morfismo en \mathcal{C}^A podemos ver E y B como objetos en \mathcal{C}^A , $j_E = fj_X$ y $j_B = gj_Y$. Por tanto (3) +(4) es un diagrama en \mathcal{C}^A . Tenemos que $\bar{p}: j_E \rightarrow j_B$ es fibración en \mathcal{C}^A por serlo p en \mathcal{C} . Así, puesto que \bar{j} es cofibración trivial, existe una elevación $\bar{e}: j_Y \rightarrow j_E$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
j_X & \longrightarrow & j_E \\
\downarrow \bar{i} & \nearrow \bar{e} & \downarrow \bar{p} \\
j_Y & \longrightarrow & j_B
\end{array}$$

Luego $\mathcal{U}\bar{e} = e$ es la elevación buscada para (3).

Para probar la otra implicación supongamos que $\mathcal{U}\bar{i}$ es cofibración en \mathcal{C} y veamos que \bar{i} es cofibración en \mathcal{C}^A . Sea un diagrama conmutativo en \mathcal{C}^A

$$\begin{array}{ccc}
j_X & \xrightarrow{\bar{f}} & j_E \\
\downarrow \bar{i} & & \downarrow \bar{p} \\
j_Y & \xrightarrow{\bar{g}} & j_B
\end{array}$$

con \bar{p} fibración trivial en \mathcal{C}^A . Aplicando el funtor olvido \mathcal{U} al diagrama anterior obtenemos

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\mathcal{U}\bar{f}} & E \\
\downarrow \mathcal{U}\bar{i} & & \downarrow \mathcal{U}\bar{p} \\
Y & \xrightarrow{\mathcal{U}\bar{g}} & B
\end{array} \tag{5}$$

y se tiene que $\mathcal{U}\bar{p}$ es fibración trivial, por como han sido definidas, fibración y equivalencia débil en \mathcal{C}^A . Por tanto existe una elevación $e: Y \rightarrow E$ que lo hace conmutativo. Veamos que es un morfismo en \mathcal{C}^A . Para ello hay que probar que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
& A & \\
j_Y \swarrow & & \searrow j_E \\
Y & \xrightarrow{e} & E
\end{array}$$

Como $ej_Y = eij_X$, ya que \bar{i} es un morfismo en \mathcal{C}^A , y $eij_X = fj_X = j_E$, al aplicar sucesivamente que e es la elevación de (5) y \bar{f} morfismo en \mathcal{C}^A , se tiene el resultado. \square

El axioma *CM2*, se desprende de *CM2* en \mathcal{C} y de la definición de equivalencia débil en \mathcal{C}^A .

También *CM3* es casi inmediato. Primero si \bar{f} es retracto de \bar{f}' en \mathcal{C}^A , $\mathcal{U}\bar{f}$ es retracto de $\mathcal{U}\bar{f}'$ en \mathcal{C} . Este hecho, junto con las definiciones de fibración, equivalencia débil y el Lema 0.1.7, implican que si *CM3* se verifica en \mathcal{C} , también se verifica en \mathcal{C}^A .

En cuanto a *CM4* es necesario ver que dado un diagrama

$$\begin{array}{ccc}
j_X & \xrightarrow{\bar{f}} & j_E \\
\downarrow \bar{i} & & \downarrow \bar{p} \\
j_Y & \xrightarrow{\bar{g}} & j_B
\end{array}$$

existe una elevación $\bar{e}: j_X \rightarrow j_E$ siempre que:

- (a) \bar{i} es cofibración y \bar{p} es fibración trivial.
- (b) \bar{i} es cofibración trivial y \bar{p} es fibración.

Es claro que (a) se verifica por definición de cofibración en \mathcal{C}^A .

Tenemos que si \bar{i} es cofibración en \mathcal{C}^A , $\mathcal{U}\bar{i}$ es cofibración en \mathcal{C} por el Lema 0.1.7 y equivalencia débil por definición. Además $\mathcal{U}\bar{p}$ fibración en \mathcal{C} , luego existe una elevación $e: Y \rightarrow E$. Pero $ej_Y = e\mathcal{U}\bar{i}j_X = \mathcal{U}\bar{f}j_X = j_E$, con lo que el morfismo en \mathcal{C}^A

$$\begin{array}{ccc}
& A & \\
j_Y \swarrow & & \searrow j_E \\
Y & \xrightarrow{e} & E
\end{array}$$

es la elevación buscada y se verifica (b).

Para *CM5* probaremos que todo \bar{f} morfismo en \mathcal{C}^A puede factorizarse de dos formas:

(a) $\bar{f} = \bar{p}\bar{i}$ con \bar{p} fibración y \bar{i} cofibración trivial.

(b) $\bar{f} = \bar{g}\bar{j}$ con \bar{g} fibración trivial y \bar{j} cofibración.

El morfismo $\mathcal{U}\bar{f} \in \mathcal{C}$ puede por *CM5(a)* en \mathcal{C} factorizarse como una cofibración trivial i seguida de una fibración $p, \mathcal{U}\bar{f} = f = pi$.

Podemos construir un diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & j_X \swarrow & \downarrow j_Z & \searrow j_Y & \\
 X & \xrightarrow{i} & Z & \xrightarrow{p} & Y \\
 & \xrightarrow{f} & & &
 \end{array}$$

con $j_Z = ij_X$. De esta forma $pj_Z = pij_X = fj_X = j_Y$ y, si consideramos \bar{i} como el triángulo conmutativo de la izquierda y \bar{p} el de la derecha, se tiene que \bar{i} es cofibración en \mathcal{C}^A y \bar{p} fibración en \mathcal{C}^A por como hemos definido estos morfismos en \mathcal{C}^A .

Así queda probado *CM5(a)* y *CM5(b)* se demuestra de forma análoga. \square

Nota 0.1.8

Según se prueba en [Q; II.3.Teorema 1], Top tiene estructura de categoría de modelos cerrada en la que se denominan fibraciones a las aplicaciones que tienen la propiedad de elevación de homotopía respecto a los discos D^n para todo $n \geq 0$, equivalencias débiles a aquellas aplicaciones que inducen isomorfismos en todos los grupos de homotopía para cualquier elección de punto base y cofibraciones a aquellas aplicaciones que tienen la propiedad de elevación a izquierda respecto a las fibraciones que son además equivalencias débiles. Top^* es un ejemplo de categoría bajo A , en este caso $A = *$, y dado que Top tiene estructura de categoría de modelos cerrada, por la Proposición 0.1.6, Top^* también la tiene.

Proposición 0.1.9

Si \mathcal{C} categoría de modelos cerrada, entonces la categoría opuesta de $\mathcal{C}, \mathcal{C}^{op}$, es categoría de modelos cerrada.

Demostración:

Tomaremos tres clases de morfismos definidos como sigue.

Dado $p^{op}: E \rightarrow B$ morfismo en \mathcal{C}^{op} se dice fibración en \mathcal{C}^{op} si y sólo si $p: B \rightarrow E$ es cofibración en \mathcal{C} .

De forma similar, $i^{op}: A \rightarrow B$ morfismo en \mathcal{C}^{op} es cofibración en \mathcal{C}^{op} si y sólo si $i: B \rightarrow A$ es fibración en \mathcal{C} .

Por último diremos que el morfismo $f^{op}: A \rightarrow B$ es equivalencia débil si y sólo si $f: B \rightarrow A$ es equivalencia débil en \mathcal{C} .

La demostración es trivial. \square

Nota 0.1.10

De las Propositiones 0.1.6 y 0.1.9 se deduce que si \mathcal{C} es categoría de modelos cerrada también lo es $(\mathcal{C}^{op})^A$ para todo $A \in \mathcal{C}$.

De forma dual a como hemos definido la categoría bajo A, \mathcal{C}^A , podemos definir para todo $B \in \text{Ob } \mathcal{C}$, la categoría sobre B, \mathcal{C}_B , cuyos objetos son morfismos $r_X: X \rightarrow B$ y por morfismos los triángulos conmutativos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow r_X & \swarrow r_Y \\ & B & \end{array}$$

que denotaremos \widehat{f} .

Podemos definir dos funtores. Uno de ellos es un functor olvido $\mathcal{V}: \mathcal{C}_B \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{V}(r_X) = X$ para todo $r_X \in \mathcal{C}_B$ y $\mathcal{V}(\widehat{f}) = f$ para todo \widehat{f} morfismo en \mathcal{C}_B , es decir olvida la estructura "sobre B ". El otro $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_B$ asigna a cada $X \in \mathcal{C}$ el morfismo $pr_2: X \times B \rightarrow B$, que existe por ser \mathcal{C} categoría de modelos cerrada y poseer productos.

Dado $f: X \rightarrow Y$ morfismo en \mathcal{C} , $F(f)$ es el triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times B & \xrightarrow{f \times id_B} & Y \times B \\ & \searrow pr_2 & \swarrow pr_2 \\ & B & \end{array}$$

que es un morfismo en \mathcal{C}_B .

Proposición 0.1.11

Los funtores $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_B$ y $\mathcal{V}: \mathcal{C}_B \rightarrow \mathcal{C}$ que acabamos de definir verifican que F es adjunto a derecha de \mathcal{V} .

Demostración:

Es dual de la Proposición 0.1.2. \square

Ahora podemos enunciar y probar el siguiente resultado:

Proposición 0.1.12

Si \mathcal{C} tiene estructura de categoría de modelos cerrada, \mathcal{C}_B tiene estructura de categoría de modelos cerrada.

Demostración:

Basta observar que $(\mathcal{C}^B)^{op} = \mathcal{C}_B$. Entonces, por la Proposición 0.1.6, \mathcal{C}^B es categoría de modelos cerrada y, por la Proposición 0.1.9, $(\mathcal{C}^B)^{op} = \mathcal{C}_B$ también. \square

Consideremos el diagrama conmutativo en \mathcal{C} categoría de modelos

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \xrightarrow{f} & X & \xleftarrow{g} & X_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ Y_0 & \xrightarrow{f'} & Y & \xleftarrow{g'} & Y_1 \end{array}$$

donde en cada fila uno de los morfismos es fibración. Por ser \mathcal{C} categoría de modelos los pull-backs existen. De esta forma podemos construir los siguientes:

$$\begin{array}{ccc} X_0 \times_X X_1 & \xrightarrow{u} & X_1 \\ \downarrow v & (6) & \downarrow g \\ X_0 & \longrightarrow & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y_0 \times_Y Y_1 & \xrightarrow{u'} & Y_1 \\ \downarrow v' & (7) & \downarrow g' \\ Y_0 & \xrightarrow{f'} & Y \end{array}$$

Aplicando la propiedad universal de (7) a βu y a αv existe un único $(\alpha, \beta): X_0 \times_X X_1 \rightarrow Y_0 \times_Y Y_1$.

Podemos enunciar el siguiente resultado:

Lema 0.1.13

(a) Supongamos que α, β, γ y la inducida $(\alpha, f): X_0 \longrightarrow X \times_Y Y_0$ son fibraciones, entonces (α, β) es fibración.

(b) Si α, β, γ son equivalencias débiles entonces también lo es (α, β) .

Demostración:

Es un resultado dual del probado en [Ba.1; II.1.2] para push-outs, cofibraciones y equivalencias débiles. \square

Consideraremos en Top , a lo largo de todo el trabajo, la estructura de categoría de modelos cerrada a que aludimos en la Nota 0.1.8.

Teniendo en cuenta que $\Pi_n(X \times X', (x_0, x'_0)) \cong \Pi_n(X, x_0) \times \Pi_n(X', x'_0)$ para todo $n \geq 0$, fácilmente se obtiene el siguiente resultado:

Lema 0.1.14

Si $f: X \longrightarrow Y, g: X' \longrightarrow Y'$ son equivalencias débiles en Top entonces $f \times g: X \times X' \longrightarrow Y \times Y'$ es equivalencia débil.

Sea $X^I = Top(I, X)$ dotado de la topología compacto-abierta. Dada $f: X \longrightarrow Y$, queda inducida $f^I: X^I \longrightarrow Y^I$ definida para todo $w \in X^I$ como $f^I(w) = fw \in Y^I$, que es continua.

Lema 0.1.15

Sea $f: X \longrightarrow Y$ equivalencia débil en Top . Se verifica que $f^I: X^I \longrightarrow Y^I$ es equivalencia débil.

Demostración:

Tenemos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X^I & \xrightarrow{f^I} & Y^I \\ \downarrow d_0 & & \downarrow d_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Probemos que $d_0: X^I \longrightarrow X$ es equivalencia de homotopía.

Primero definimos $s: X \longrightarrow X^I$ para todo $x \in X$ como $\widetilde{s(x)}: I \longrightarrow X$ camino constante en x . Se verifica que $d_0s = id_X$ y $sd_0 \simeq id_{X^I}$ tomando como homotopía $F: X^I \times I \longrightarrow X^I$ que a todo $(w, s) \in X^I \times I$ le asigna $F(w, s) = \bar{w}(s): I \longrightarrow X$ definida para todo $t \in I$ como $\bar{w}(s)(t) = w(st) \in X$. Por tanto d_0 es equivalencia débil en Top .

Por *CM2*, puesto que d_0 y f son equivalencias débiles, d_0f es equivalencia débil. Como $d_0f^I = fd_0$ y d_0 son equivalencias débiles, por *CM2* otra vez, f^I es equivalencia débil. \square

Lema 0.1.16

Sea \mathcal{C} una categoría y $f: X \longrightarrow Y$ un morfismo en \mathcal{C} . Si para todo $A \in \mathcal{C}$ se verifica que $\mathcal{C}(A, X) \xrightarrow{f^*} \mathcal{C}(A, Y)$ es una biyección, entonces f es un isomorfismo.

Demostración:

Si $A = Y$, por ser f biyección, existe $g: Y \longrightarrow X$ tal que $fg = id_Y$. Por tanto g es la inversa a derecha de f .

Fácilmente se prueba que g es también la inversa a izquierda de f , luego f es un isomorfismo. \square

0.2 Teorema de Whitehead en una categoría de modelos cerrada.

Sea \mathcal{C} categoría de modelos cerrada. En [Q] se define la categoría de homotopía de \mathcal{C} como la localización de \mathcal{C} respecto a las equivalencias débiles, denotada por $\gamma: \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$.

Si tomamos todos los objetos cofibrantes en \mathcal{C} , esto es aquellos para los cuales $\emptyset \longrightarrow X$ es cofibración, y los morfismos entre ellos tenemos una subcategoría plena de \mathcal{C} que denotaremos \mathcal{C}_c .

De forma similar si tomamos los objetos fibrantes en \mathcal{C} , es decir, aquellos tales que $X \longrightarrow *$ es fibración y los morfismos entre ellos, obtenemos una subcategoría plena de \mathcal{C} que escribiremos \mathcal{C}_f .

Denotaremos por $\gamma_c: \mathcal{C}_c \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_c)$ (resp. $\gamma_f: \mathcal{C}_f \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_f)$) la localización de \mathcal{C}_c (resp. de \mathcal{C}_f) respecto a la clase de morfismos en \mathcal{C}_c (resp. \mathcal{C}_f) que son equivalencias débiles en \mathcal{C} .

Emplearemos esta notación, salvo mención expresa, en todo el trabajo.

Es conocido el resultado que afirma que si X es cofibrante e Y fibrante, entonces las clases de homotopía de aplicaciones de X en Y a derecha y a izquierda coinciden.

El funtor $\mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\gamma} Ho(\mathcal{C})$ induce un funtor $\bar{\gamma}: \Pi(\mathcal{C}_{cf}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$.

Además como consecuencia de [Q; I.1.Teorema 1] se verifica el siguiente resultado.

Teorema 0.2.1

El funtor $\bar{\gamma}: \Pi(\mathcal{C}_{cf}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ es una equivalencia de categorías.

Teorema de Whitehead 0.2.2

Si $X, Y \in \mathcal{C}_{cf}$, entonces $f: X \longrightarrow Y$ es equivalencia débil en \mathcal{C}_{cf} si y sólo si es equivalencia de homotopía.

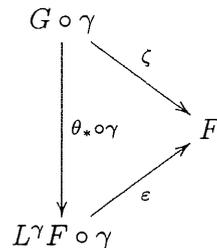
Demostración:

Teniendo en cuenta el Teorema 0.2.1 se verifica que f induce un isomorfismo en $\Pi(\mathcal{C}_{cf})$ si y sólo si f induce un isomorfismo en $Ho(\mathcal{C})$. De donde se concluye que f es equivalencia de homotopía si y sólo si $\bar{\gamma}f = f$ es equivalencia débil . \square

0.3 Equivalencia de Teorías de Homotopía

Comenzaremos con algunas definiciones generales.

Definición 0.3.1 Sean $\gamma: A \longrightarrow A', F: A \longrightarrow B$ dos funtores. Entendemos por *functor derivado a izquierda de F respecto a γ* , un funtor $L^\gamma F: A' \longrightarrow B$ y una transformación natural $\varepsilon: L^\gamma F \circ \gamma \longrightarrow F$ con la siguiente propiedad universal: dado cualquier $G: A' \longrightarrow B$ y una transformación natural $\zeta: G \circ \gamma \longrightarrow F$ existe una única transformación natural $\theta: G \longrightarrow L^\gamma F$ tal que el diagrama siguiente conmuta



Notas 0.3.2

(a) $L^\gamma F$ es el funtor de A' en B tal que $L^\gamma F \circ \gamma$ es el más “próximo” a F por la izquierda.

(b) Similarmente, se puede definir el funtor derivado a derecha de F respecto a γ como el funtor $R^\gamma F: A' \rightarrow B$ con una transformación natural $\eta: F \rightarrow R^\gamma F \circ \gamma$ que es el más “próximo” a F por la derecha.

Si nos restringimos el caso en el que A es \mathcal{C} categoría de modelos y γ es el funtor localización, $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow Ho(\mathcal{C})$, escribiremos sólo LF .

Si \mathcal{C} es una categoría de modelos cerrada y $F: \mathcal{C} \rightarrow B$ es un funtor, es claro que $LF \circ \gamma \rightarrow F$ es un isomorfismo si y sólo si F lleva equivalencias débiles en \mathcal{C} a isomorfismos en B .

En este caso supondremos que LF es inducido por F en el sentido que LF es el único funtor de $Ho(\mathcal{C}) \rightarrow B$ con $LF \circ \gamma = F$.

Además $RF = LF$.

Definición 0.3.3 Sea $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ funtor entre categorías de modelos. Entendemos por el *functor derivado total a izquierda de F* el funtor $\underline{LF}: Ho \mathcal{C} \rightarrow Ho(\mathcal{C}')$ dado por $\underline{LF} = L^\gamma(\gamma' \circ F)$ donde $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow Ho \mathcal{C}$ y $\gamma': \mathcal{C}' \rightarrow Ho \mathcal{C}'$ son los respectivos funtores localización.

Nota 0.3.4

(a) El diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}' \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma' \\ Ho(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\underline{LF}} & Ho(\mathcal{C}') \end{array}$$

no conmuta, sino que existe una transformación natural $\varepsilon: \underline{LF} \circ \gamma \rightarrow \gamma' \circ F$ tal que $(\underline{LF}, \varepsilon)$ hace dicho diagrama tan conmutativo como sea posible.

(b) De forma dual, podemos definir el funtor derivado total a derecha de F , denotado \underline{RF} .

Ahora recordaremos un resultado, probado en [Q; 4.Teorema 3], que emplearemos en el último capítulo del trabajo.

Teorema 0.3.5

Sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' categorías de modelos y sean

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{C}'$$

un par de funtores adjuntos, F adjunto a izquierda de G .

Supongamos que F conserva cofibraciones y lleva equivalencias débiles entre cofibrantes en \mathcal{C} a equivalencias débiles en \mathcal{C}' . También supongamos que G preserva fibraciones y lleva equivalencias débiles entre fibrantes en \mathcal{C}' a equivalencias débiles en \mathcal{C} . Entonces los funtores

$$Ho(\mathcal{C}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\underline{L} F} \\ \xleftarrow{\underline{R} G} \\ \underline{\quad} \end{array} Ho(\mathcal{C}')$$

son canónicamente adjuntos. Si además se verifica que para $X \in \mathcal{C}_c$ y para $Y \in \mathcal{C}'_f$ la aplicación $FX \rightarrow Y$ es equivalencia débil si y sólo si la aplicación asociada $X \rightarrow GY$ es equivalencia débil, entonces los morfismos $id \rightarrow \underline{L}(F) \circ \underline{R}(G)$ y $\underline{R}(G) \circ \underline{L}(F) \rightarrow id$ son isomorfismos y así las categorías $Ho(\mathcal{C})$ y $Ho(\mathcal{C}')$ son equivalentes.

Capítulo 1

La categoría de los espacios exteriores

En este capítulo definimos la categoría de los espacios exteriores que denotamos $\mathcal{E}t$ y estudiamos algunas cuestiones de interés.

En la primera sección comenzamos con las definiciones básicas para construir la categoría $\mathcal{E}t$: externología, espacio exterior y aplicación exterior. Además se dan algunos ejemplos y se define un funtor pleno y fiel, $b: Pro \longrightarrow \mathcal{E}t$.

La segunda sección la dedicamos a demostrar la existencia de límites y colímites arbitrarios en $\mathcal{E}t$.

En la tercera sección demostramos tres leyes exponenciales en $\mathcal{E}t$ para ciertos espacios. Las leyes obtenidas no establecen homeomorfismos, sino biyecciones.

Las dos primeras son de la forma $e: \mathcal{E}t(Z \times W, X) \longrightarrow Top(W, \mathcal{E}t(Z, X))$ y se restringen a $Z = \mathbb{N}$ ó \mathbb{R}^+ y $W = K$ espacio compacto. Cabe señalar otras particularidades de estas leyes; en ellas empleamos en $\mathcal{E}t(Z, X)$ topologías diferentes de las compacto-abiertas. Estas leyes exponenciales serán de interés para trabajar con espacios exteriores con sucesión base exterior (en la categoría $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$) y con espacios exteriores con rayo base exterior (en la categoría $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$).

La tercera ley exponencial es de la forma $e: \mathcal{E}t(X \times K, Y) \longrightarrow \mathcal{E}t(X, Top(K, Y))$, pero restringida a los K compactos y Hausdorff. La utilizaremos para probar la adjunción entre los funtores lazo y suspensión que definiremos posteriormente. En este caso, en $Top(K, Y)$, sí que consideraremos la topología compacto-abierta y una externología que definiremos adecuadamente.

En la cuarta sección definimos la relación de homotopía exterior entre dos aplicaciones exteriores $f, g: X \longrightarrow Y$ y como consecuencia introducimos la categoría de homotopía de los espacios exteriores, que denotamos por $\Pi(\mathcal{E}t)$. De modo análogo se define la relación de homotopía exterior bajo \mathbb{N} y la correspondiente categoría homotópica, $\Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})$.

En esta misma sección se introducen los grupos de homotopía exterior, que resultan ser isomorfos a los grupos de homotopía usuales de ciertos espacios de funciones.

Terminamos esta sección definiendo la noción de equivalencia débil exterior.

1.1 Definiciones y ejemplos.

Definición 1.1.1 Dado $X \in Top$ llamamos *externología* en X , denotada \mathcal{E}_X , a una familia no vacía de abiertos en X verificando:

E.1 Si $E_i \in \mathcal{E}_X$ para todo $i = 1 \dots n$, entonces $\bigcap_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E}_X$.

E.2 Si $E \subset U, E \in \mathcal{E}_X$ y $U \in T_X$, entonces $U \in \mathcal{E}_X$.

Definición 1.1.2 Llamamos *base de una externología* en X, \mathcal{E}_X , a una familia $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{E}_X$ tal que para todo $E \in \mathcal{E}_X$, existe $B \in \mathcal{B}_X$ tal que $B \subset E$.

Definición 1.1.3 Llamamos *subbase de una externología* en X, \mathcal{E}_X , a una familia $\mathcal{S}_X \subset \mathcal{E}_X$ tal que las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S}_X constituyen una base de \mathcal{E}_X .

Observaciones 1.1.4

(a) Dado \mathcal{E}_X externología en X , siempre $X \in \mathcal{E}_X$, pero no siempre ocurre que $\emptyset \in \mathcal{E}_X$.

(b) Por cómo hemos definido externología es claro que \mathcal{E}_X es menos fina que T_X , es decir, $\mathcal{E}_X \subset T_X$.

(c) Para un espacio topológico (X, T_X) un ejemplo de externología, que será relevante posteriormente, es la externología formada por los complementos de los cerrados que además son compactos. Denotaremos a esta externología \mathcal{E}_{cc} . Veamos que los complementos de los compacto-cerrados constituyen una externología y para ello comprobemos que se verifican *E.1* y *E.2*.

Primero veamos *E.1*. Si $L_i^c \in \mathcal{E}_{cc}$ para $i = 1 \dots n$ entonces $\bigcap_{i=1}^n L_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^n L_i \right)^c$ y como la unión finita de cerrados y compactos es cerrada y compacta, concluimos que $\bigcap_{i=1}^n L_i^c \in \mathcal{E}_{cc}$.

En segundo lugar comprobemos *E.2*. Sea L compacto-cerrado en $X, L^c \in \mathcal{E}_{cc}$. Si $L^c \subset U$ con $U \in T_X$, entonces $U^c \subset L$ y como U^c es cerrado contenido en L compacto, también es compacto, con lo que $U \in \mathcal{E}_{cc}$.

(d) Si X es compacto, $\emptyset = X^c \in \mathcal{E}_{cc}$ y $\mathcal{E}_{cc} = T_X$.

(e) Sea (X, T_X) espacio topológico provisto de la externología $\mathcal{E}_X \subset T_X$. Si $\emptyset \in \mathcal{E}_X$ entonces $\mathcal{E}_X = T_X$; en efecto, *E.2* y el hecho de que $\emptyset \in \mathcal{E}_X$ implica que todo abierto está en \mathcal{E}_X .

Definición 1.1.5 Llamamos *espacio exterior* a todo espacio topológico (X, T_X) provisto de una externología $\mathcal{E}_X \subset T_X$. Lo denotaremos por $(X; \mathcal{E}_X, T_X)$.

Definición 1.1.6 Sea \mathcal{E}_X una externología en X . Llamamos *abierto exterior* a cada subconjunto $E \in \mathcal{E}_X$.

Definición 1.1.7 Sea \mathcal{E}_X una externología en X y \mathcal{E}_Y una externología en Y . Una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ se dice *externa* si se verifica que para todo $E \in \mathcal{E}_Y$, $f^{-1}(E) \in \mathcal{E}_X$.

Definición 1.1.8 Una *aplicación* $f: X \longrightarrow Y$ entre espacios exteriores se dice *exterior* si es continua respecto a las topologías T_X y T_Y y externa respecto a las externologías \mathcal{E}_X y \mathcal{E}_Y .

Definición 1.1.9 Llamaremos *categoría de los espacios exteriores*, denotada $\mathcal{E}t$, a aquella cuyos objetos son los espacios exteriores y cuyos morfismos son las aplicaciones exteriores.

Definición 1.1.10 Un *subconjunto* A de un espacio exterior X se dice *exteriormente denso* si para todo $E \in \mathcal{E}_X$, $A \cap E \neq \emptyset$.

Observaciones 1.1.11

(a) En esta categoría existe el objeto final, $*$, cuya externología es $\mathcal{E}_* = \{*\}$ y cuya topología es $T_* = \{*, \emptyset\}$.

(b) El objeto inicial en $\mathcal{E}t$ es \emptyset con topología y externología coincidentes, $\mathcal{E}_\emptyset = T_\emptyset = \{\emptyset\}$.

(c) Dada una aplicación entre dos espacios exteriores $f: X \longrightarrow Y$, si \mathcal{E}_X no es topología, entonces Imf es exteriormente denso en Y . En efecto, si $E \in \mathcal{E}_Y$, como $f^{-1}(E) \neq \emptyset$ se tiene que $E \cap Imf \neq \emptyset$.

(d) Si $\emptyset \in \mathcal{E}_Y$ y $f: X \longrightarrow Y$ es exterior entonces $\mathcal{E}_X = T_X$.

Recordemos alguna definición y resultados de interés.

Definición 1.1.12 Una *aplicación* continua, $f: X \longrightarrow Y$, se dice *propia* si y sólo si para todo K cerrado y compacto en Y , $f^{-1}(K)$ es compacto en X .

Recordemos que Pro es la categoría cuyos objetos son espacios topológicos y cuyos morfismos son las aplicaciones propias. Pro es una subcategoría de Top . Es claro que no es una subcategoría plena, no todas las aplicaciones continuas son propias.

Uno de los problemas que tiene esta subcategoría es el hecho de que no es cerrada por límites y colímites. La existencia de colímites es equivalente a la existencia de coproductos y coigualadores. Veamos que los coigualadores no siempre existen en Pro .

Sea \mathbb{N} dotado de la topología discreta T_d , consideremos la pareja de morfismos $\mathbb{N} \begin{array}{c} \xrightarrow{id} \\ \xrightarrow{sh} \end{array} \mathbb{N}$ con sh definida para todo $n \in \mathbb{N}$ como $sh(n) = n + 1$. El coigualador sería $(\mathbb{N}/\sim, p)$ con \sim la relación de equivalencia generada por $id_{\mathbb{N}}(n) \sim sh(n)$ y p la aplicación cociente de \sim . Es claro que $\mathbb{N}/\sim = *$. Se tiene que $p^{-1}(*) = \mathbb{N}$ y por tanto p no puede ser propia, pues aunque $*$ es compacto y cerrado, \mathbb{N} no es compacto.

Proposición 1.1.13

Sean X, Y espacios topológicos provistos con las externologías de los complementos de los compacto-cerrados, \mathcal{E}_{cc}^X y \mathcal{E}_{cc}^Y , respectivamente. Dada la aplicación $f: X \rightarrow Y$ entonces f es propia si y sólo si f es exterior.

Demostración:

Si f es propia, es continua. Veamos que f es exterior. Sea K compacto-cerrado en T_Y , tenemos que $f^{-1}(K^c) = (f^{-1}(K))^c$. Como K es compacto $f^{-1}(K)$ también lo es, por otro lado $f^{-1}(K)$ es cerrado por serlo K y así concluimos que $f^{-1}(K^c) \in \mathcal{E}_{cc}^X$.

Para la implicación contraria, si f es exterior es continua en particular. Además dado K compacto-cerrado en (Y, T_Y) , $f^{-1}(K) = (f^{-1}(K^c))^c$. Tenemos que $f^{-1}(K^c) \in \mathcal{E}_{cc}^X$, luego complemento de un compacto-cerrado L en (X, T_X) y $f^{-1}(K^c) = L^c$. Por tanto $f^{-1}(K) = (f^{-1}(K^c))^c = (L^c)^c = L$ y f es propia. \square

Corolario 1.1.14

El functor $b: Pro \rightarrow \mathcal{E}t$, definido como $b(X, T_X) = (X; \mathcal{E}_{cc}^X, T_X)$ para todo $X \in Pro$ y como $bf = f$ para todo $f \in Pro(X, Y)$, es un functor pleno y fiel.

Demostración:

Es consecuencia directa de la Proposición 1.1.13 y de la definición del functor b . \square

Podemos definir dos funtores. Uno de ellos $\mathcal{O}: \mathcal{E}t \longrightarrow Top$ funtor olvido, que a cada espacio exterior $(X; \mathcal{E}_X, T_X)$ lo lleva a (X, T_X) en Top olvidando su externología y que a toda aplicación exterior $f: X \longrightarrow Y$ la lleva a ella misma. $\mathcal{O}f = f$, pues en particular f es continua.

Otro funtor es $\mathcal{J}: Top \longrightarrow \mathcal{E}t$. Está definido para todo espacio topológico (X, T_X) como $\mathcal{J}(X, T_X) = (X; \mathcal{E}_{ind}, T_X)$, donde $\mathcal{E}_{ind} = \{X\}$ es la externología indiscreta, y para toda $f: X \longrightarrow Y$ aplicación continua como $\mathcal{J}(f) = f$, que es exterior trivialmente.

También se puede considerar el funtor $\mathcal{L}: Top \longrightarrow \mathcal{E}t$ que lleva un espacio topológico (X, T_X) al espacio exterior $(X; \mathcal{E}_X, T_X)$, con $\mathcal{E}_X = T_X$, y que a cada aplicación continua f le asigna $\mathcal{L}f = f$, que es claramente exterior.

Proposición 1.1.15

- (a) El funtor \mathcal{O} es adjunto a izquierda de \mathcal{J} .
- (b) El funtor \mathcal{O} es adjunto a derecha de \mathcal{L} .

Demostración:

(a) Es preciso demostrar que $\mathcal{E}t(X, \mathcal{J}Y) \cong Top(\mathcal{O}X, Y)$ para todo $X \in \mathcal{E}t, Y \in Top$. Dada $f: (X; \mathcal{E}_X, T_X) \longrightarrow (Y; \mathcal{E}_{ind}, T_Y)$ exterior, le asignamos una única $f: (X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$ continua.

Dada $g: (X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$ en $Top(\mathcal{O}X, Y)$, le hacemos corresponder de manera única $g: (X; \mathcal{E}_X, T_X) \longrightarrow (Y; \mathcal{E}_{ind}, T_Y)$ que es exterior.

(b) Necesitamos probar que $\mathcal{E}t(\mathcal{L}X, Y) \cong Top(X, \mathcal{O}Y)$ para todo $X \in Top, Y \in \mathcal{E}t$. Dada $f: (X; T_X, T_X) \longrightarrow (Y; \mathcal{E}_Y, T_Y)$ exterior le hacemos corresponder $f: (X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$ que es continua por hipótesis.

Sea $g: (X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$ en $Top(X, \mathcal{O}Y)$, le asignamos una única $g: (X; T_X, T_X) \longrightarrow (Y; \mathcal{E}_Y, T_Y)$ que es continua por serlo g y externa ya que $\mathcal{E}_Y \subset T_Y$. \square

Además podemos definir otra pareja de funtores. Por un lado $\mathcal{V}: \mathcal{E}t \longrightarrow Top$ que a cada espacio exterior $(X; \mathcal{E}_X, T_X)$ lo lleva a $\mathcal{V}(X; \mathcal{E}_X, T_X) = (X, \mathcal{E}_X \cup \{\emptyset\})$, que es un espacio topológico pues $\mathcal{E}_X \cup \{\emptyset\}$ es topología. Dada una aplicación exterior, $f: (X; \mathcal{E}_X, T_X) \longrightarrow (Y; \mathcal{E}_Y, T_Y)$, \mathcal{V} le asigna $\mathcal{V}f = f$ con $f: (X, \mathcal{E}_X \cup \{\emptyset\}) \longrightarrow (Y, \mathcal{E}_Y \cup \{\emptyset\})$, que es continua pues f es externa.

Por otro lado tenemos el funtor $\hat{\mathcal{D}}: Top \longrightarrow \mathcal{E}t$ definido para todo espacio topológico (X, T_X) como $\hat{\mathcal{D}}(X, T_X) = (X, T_X, T_d)$, donde T_d es la topología discreta, y para cada $f: X \longrightarrow Y$ continua como $\hat{\mathcal{D}}f = f, f: (X; T_X, T_d) \longrightarrow (Y; T_Y, T_d)$, que es exterior.

Proposición 1.1.16

El funtor \mathcal{V} es adjunto a derecha del funtor $\hat{\mathcal{D}}$.

Demostración:

Es necesario probar que $Top(X, \mathcal{V}Y) \cong \mathcal{E}t(\hat{\mathcal{D}}X, Y)$ para todo $X \in Top, Y \in \mathcal{E}t$. Dada la aplicación $f: (X, T_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{E}_Y \cup \{\emptyset\})$ en $Top(X, \mathcal{V}Y)$ le hacemos corresponder de forma única la propia $f: (X; T_X, T_d) \longrightarrow (Y; \mathcal{E}_Y, T_Y)$, que es externa por ser continua f por hipótesis, y continua por considerar en X la topología discreta.

Por otro lado, para toda $g: (X; T_X, T_d) \longrightarrow (Y; \mathcal{E}_Y, T_Y)$ en $\mathcal{E}t(\hat{\mathcal{D}}X, Y)$ le asignamos la misma $g: (X, T_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{E}_Y \cup \{\emptyset\})$, que es continua por ser g externa y T_X topología. \square

1.2 Existencia de límites y colímites en $\mathcal{E}t$.

Probaremos ahora la existencia de límites y colímites arbitrarios.

Sea $X \in \mathcal{E}t$ y $A \subset X$. Consideremos en A la topología como subespacio de X, T_A , y la externología \mathcal{E}_A definida como sigue: $E \in \mathcal{E}_A$ si y sólo si $E \in T_A$ y existe $E' \in \mathcal{E}_X$ tal que $E = E' \cap A$. Es sencillo probar que \mathcal{E}_A verifica las condiciones de la Definición 1.1.1. Veámoslo.

Probemos *E.1*. Si $E_i \in \mathcal{E}_A$ para todo $i = 1 \dots n, E'_i \cap A \subset E_i$ con $E'_i \in \mathcal{E}_X$ para todo $i = 1 \dots n$, entonces $\bigcap_{i=1}^n E_i = \bigcap_{i=1}^n (E'_i \cap A)$. Pero $\bigcap_{i=1}^n (E'_i \cap A) = (\bigcap_{i=1}^n E'_i) \cap A$ y por *E.1* de \mathcal{E}_X se tiene que $\bigcap_{i=1}^n E'_i \in \mathcal{E}_X$ y por tanto $\bigcap_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E}_A$.

Para demostrar *E.2* tomemos $E \subset U$ y $E \in \mathcal{E}_A, U \in T_A$. Se verifica que $E = E' \cap A$ con $E' \in \mathcal{E}_X$ y $U = U' \cap A$ con $U' \in T_X$. Tenemos que $E' \subset U' \cup E'$ con $U' \cup E' \in T_X$, luego por *E.2* de $\mathcal{E}_X, U' \cup E' \in \mathcal{E}_X$. Pero $(U' \cup E') \cap A = (U' \cap A) \cup (E' \cap A) = (U' \cap A) = U$ y así $U \in \mathcal{E}_A$.

Definición 1.2.1 Sea $X \in \mathcal{E}t$ y $A \subset X$. Decimos que A es subespacio exterior de X si consideremos en A la topología como subespacio de X, T_A y la externología \mathcal{E}_A definida arriba.

Proposición 1.2.2

La categoría de los espacios exteriores, $\mathcal{E}t$, tiene límites.

Demostración:

Demostrar la existencia de límites arbitrarios es equivalente a probar la existencia de igualadores y de productos arbitrarios.

Veamos primero la existencia de igualadores en $\mathcal{E}t$.

Dadas $X \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} Y$ en $\mathcal{E}t$, consideramos $\mathcal{O}f$ y $\mathcal{O}g$ en Top . Su igualador se construye tomando $K = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$, $i: K \rightarrow X$ inclusión de K en X . Consideremos en K la estructura de subespacio exterior de X .

Para que la construcción realizada para Top sea también igualador en $\mathcal{E}t$ restaría por probar dos hechos.

Primero que i es externa. Esto es claro ya que para todo $E \in \mathcal{E}_X$, $i^{-1}(E) = E \cap K$ y $E \cap K \in \mathcal{E}_K$.

En segundo lugar es preciso probar la propiedad universal que afirma que para todo $Z \in \mathcal{E}t$ y $h: Z \rightarrow X$ aplicación exterior verificando que $gh = fh$, existe una única $h': Z \rightarrow K$ tal que $ih' = h$ como en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{i} & X & \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} & Y \\ & \swarrow h' & \nearrow h & & \\ & & Z & & \end{array}$$

Dado que h' existe y es única en Top bastaría con demostrar que es externa. Sea $E \in \mathcal{E}_K$, se tiene que existe $E' \in \mathcal{E}_X$ tal que $E = E' \cap K$. Además $h'^{-1}(E' \cap K) = h'^{-1}i^{-1}(E') = h^{-1}(E')$. Pero $h^{-1}(E') \in \mathcal{E}_Z$ por ser h externa, luego $h'^{-1}(E) \in \mathcal{E}_Z$ y por tanto h' es externa.

Veamos ahora la existencia de productos. Sean $\{X_j\}_{j \in J}$ espacios exteriores, con J familia de índices. Tomamos como su producto el producto cartesiano $\prod_{j \in J} X_j$, con p_j las proyecciones sobre el factor j -ésimo. En $\prod_{j \in J} X_j$ consideramos la topología inicial, T_i , respecto a $\{p_j\}_{j \in J}$, y la externología inicial, \mathcal{E}_i , definida como sigue: $E \in \mathcal{E}_i$ si $E \in T_i$ y existe $\bigcap_{i=1}^n p_j^{-1}(E_j)$ con $E_j \in \mathcal{E}_{X_j}$ tal que $E = \bigcap_{i=1}^n p_j^{-1}(E_j)$.

Se comprueba fácilmente que \mathcal{E}_i satisface las condiciones *E.1* y *E.2*, de la definición de externología. Es claro que, con T_i y \mathcal{E}_i , p_j es una aplicación exterior para todo $j \in J$.

Para probar la propiedad universal, es decir que dado $Y \in \mathcal{E}t$ y una serie de aplicaciones exteriores $f_j: Y \rightarrow X_j$ existe una única $f: Y \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ exterior tal que $p_j f = f_j$ para todo $j \in J$. Por existir en *Top* tal f , sólo nos quedaría probar que f es externa. Sea $E \in \mathcal{E}_i$ y $f^{-1}(E)$, sabemos que existe $\bigcap_{j=1}^n p_j^{-1}(E_j)$ con $E_j \in \mathcal{E}_{X_j}$ tal que $E = \bigcap_{i=1}^n p_i^{-1}(E_i)$, luego $f^{-1}(E) = f^{-1}(\bigcap_{j=1}^n p_j^{-1}(E_j))$. Teniendo en cuenta que $f^{-1}(\bigcap_{j=1}^n p_j^{-1}(E_j)) = \bigcap_{j=1}^n f^{-1}p_j(E_j) = \bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}(E_j)$, que f_j es exterior para todo $j \in J$ y aplicando *E.1*, tenemos que $\bigcap_{j=1}^n f_j(E_j)$ es abierto exterior y concluimos que $f^{-1}(E) \in \mathcal{E}_Y$. Con ello demostramos la existencia de productos y por tanto la de límites. \square

Proposición 1.2.3

En la categoría $\mathcal{E}t$ existen los colímites.

Demostración:

Probar la existencia de colímites es equivalente a demostrar la de coproductos y coigualadores.

Primero veamos la existencia de coigualadores.

Dadas $X \xrightarrow[f]{g} Y$ aplicaciones exteriores, consideramos $\mathcal{O}f$ y $\mathcal{O}g$ y su coigualador en *Top*, $(Y/\sim, p)$. Aquí Y/\sim es el conjunto de clases de relación de equivalencia generada por la relaciones $f(x) \sim g(x)$ para todo $x \in X$ provisto de la topología cociente, T_{co} , y $p: Y \rightarrow Y/\sim$, la proyección canónica. Además en Y/\sim precisaremos definir una externología que haga p externa, y demostrar la propiedad universal del coigualador en $\mathcal{E}t$, es decir, que para todo $C \in \mathcal{E}t$ y $h: Y \rightarrow C$ aplicación exterior tal que $hf = hg$ existe una única h' exterior de Y/\sim en C tal que $h'p = h$ como en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{p} & Y/\sim \\ & \xrightarrow{g} & & \searrow h & \swarrow h' \\ & & & & C \end{array}$$

Dado que h' existe y es única en *Top* bastaría con probar que es externa.

Primero definimos en Y/\sim la externología cociente \mathcal{E}_{co} en la que $E \in \mathcal{E}_{co}$ si es imagen directa por p de un abierto exterior $E' \in \mathcal{E}_Y$ saturado. Comprobemos que satisface las condiciones de la Definición 1.1.1.

Probemos *E.2* en primer lugar. Sea $U \in T_{co}$ y $E \in \mathcal{E}_{co}$ con $E \subset U$. Por definición de externología cociente $E = p(E')$, con E' abierto exterior saturado, y $U = p(U')$ con U' abierto saturado por definición de topología cociente. Se tiene que $p^{-1}(E) \subset p^{-1}(U)$ y sustituyendo que $p^{-1}p(E') \subset p^{-1}p(U')$, pero por ser saturados se verifica que $E' \subset U'$, y por *E.2* de \mathcal{E}_Y , $U' \in \mathcal{E}_Y$. Así $U = p(U') \in \mathcal{E}_{co}$.

Mostrar *E.1* no tiene dificultad.

La externología \mathcal{E}_{co} es final respecto a p , esto es, hace externa p .

Por último veamos que h' es exterior. Dado E es abierto exterior en C , $h^{-1}(E)$ es abierto exterior por ser h exterior. Además $h^{-1}(E)$ es un conjunto saturado pues $p^{-1}ph^{-1}(E) = p^{-1}pp^{-1}h'^{-1}(E) = p^{-1}h'^{-1}(E) = h^{-1}(E)$ por ser p sobre y $h'p = h$. Por tanto $ph^{-1}(E) = pp^{-1}h'^{-1}(E) = h'^{-1}(E)$ es un abierto exterior en \mathcal{E}_{co} por ser imagen por p de un abierto exterior saturado.

Para demostrar la existencia de coproductos tomamos una familia de espacios exteriores $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, \mathcal{A} conjunto de índices. Consideremos en Top , la suma de espacios $\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$, con la topología "suma" T_s y las inclusiones $i_\alpha: X_\alpha \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ que son continuas. En $\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ tomamos la externología suma de las externologías \mathcal{E}_α , \mathcal{E}_s , definida como sigue: $E \in \mathcal{E}_s$ si $E \in T_X$ y $E = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha$, con $E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Se comprueba fácilmente que \mathcal{E}_s satisface las condiciones de la Definición 1.1.1 y que es menos fina que T_s porque $\mathcal{E}_\alpha \subset T_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Ahora probemos que i_α es externa para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Dado un abierto exterior E , es de la forma $E = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha$, como $i_\alpha^{-1}(\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha) = E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$ se tiene que i_α es externa para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, también continua, luego exterior.

Para probar la propiedad universal necesitamos demostrar que para todo C espacio exterior y su familia de aplicaciones exteriores $\{j_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $j_\alpha: X_\alpha \rightarrow C$, existe una única h exterior tal que $hi_\alpha = j_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ como en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha \\ & \searrow j_\alpha & \downarrow h \\ & & C \end{array}$$

En Top existe una única h continua, si probamos que es externa quedaría demostrado. Dado $E \in \mathcal{E}_C$, $h^{-1}(E)$ verifica que $i_\alpha^{-1}h^{-1}(E) = j_\alpha^{-1}(E)$ que es abierto exterior para todo

$\alpha \in \mathcal{A}$, por ser j_α exterior para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Tenemos así que $h^{-1}(E) = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} j_\alpha^{-1}(E)$ que es abierto exterior en $\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$. \square

Nota 1.2.4

(a) Si en un X_α tenemos que \mathcal{E}_α es una externología en sentido estricto ($\emptyset \notin \mathcal{E}_\alpha$), X_α es externamente denso en $\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$.

(b) Las categorías $\mathcal{E}t^A$ y $\mathcal{E}t_A$, para todo A espacio exterior, también tienen límites y colímites.

1.3 Leyes exponenciales en $\mathcal{E}t$.

Sean $X, Z, W \in Top$, con Z Hausdorff y localmente compacto. Consideremos en los espacios de funciones la topología compacto–abierto. Entonces, la aplicación exponencial $e: Top(Z \times W, X) \longrightarrow Top(W, Top(Z, X))$ definida para toda $f: Z \times W \longrightarrow X$ continua como $e(f): W \longrightarrow Top(Z, X)$ que para todo $w \in W$ es $e(f)(w): Z \longrightarrow X$, definida a su vez como $e(f)(w)(z) = f(w, z)$ para todo $z \in Z$, es una biyección como se prueba en [Du; XII.3.1].

En $\mathcal{E}t$ nosotros demostraremos tres leyes exponenciales, utilizando diferentes topologías en los espacios de funciones. Nos restringiremos a ciertos espacios exteriores muy concretos y obtendremos biyecciones, que serán suficiente para nuestros propósitos.

En primer lugar consideraremos $Z = \mathbb{N}$, $W = K$ compacto y X espacio exterior cualquiera. En \mathbb{N} tomaremos la topología discreta T_d y la externología de los complementos de los compacto–cerrados \mathcal{E}_{cc} . En K tenemos una cierta topología T_K y la externología $\mathcal{E}_{ind} = \{K\}$. En $\mathbb{N} \times K$ tenemos la topología producto y la externología $\mathcal{E}_{\mathbb{N} \times K}$ definida así: $E \in \mathcal{E}_{\mathbb{N} \times K}$ si $E \in T_{\mathbb{N} \times K}$ y existe $E' \in \mathcal{E}_{cc}$ tal que $E' \times K \subset E$. Es claro que verifica las condiciones de la Definición 1.1.1 (es la externología producto). En $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)$ tomaremos la topología $T^{\mathbb{N}}$, engendrada por la subbase constituida por dos tipos de conjuntos:

$$S(m, U) = \{j: \mathbb{N} \longrightarrow X \text{ exterior; } j(m) \in U, U \in T_X\}$$

$$S(m_{\leq}, E) = \{j: \mathbb{N} \longrightarrow X \text{ exterior; } j(n) \in E \text{ para todo } m \leq n, E \in \mathcal{E}_X\}$$

Teorema 1.3.1

Considerando las topologías y externologías especificadas arriba la aplicación exponencial $e: \mathcal{E}t(\mathbb{N} \times K, X) \longrightarrow Top(K, \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X))$ es una biyección.

Demostración:

Primero probemos que dada $f \in \mathcal{E}t(\mathbb{N} \times K, X)$, para todo $k \in K$, $e(f)(k) \in \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)$. Esto es equivalente a afirmar que $e(f)(k)$ es continua y externa. Para simplificar notación escribiremos $e(f) = \bar{f}$. La aplicación $\bar{f}(k): \mathbb{N} \rightarrow X$ es continua por tener \mathbb{N} la topología discreta. Para probar que es externa tomamos $E \in \mathcal{E}_X$, $(\bar{f}(k))^{-1}(E)$ debe ser abierto exterior en \mathbb{N} , es decir contener un conjunto de la forma $n_{\leq} = \{p \in \mathbb{N}; n \leq p\}$, pues en \mathbb{N} los compactos son conjuntos finitos. Dado que f es exterior $f^{-1}(E) \in \mathcal{E}_{\mathbb{N} \times K}$ por lo que existe $l_{\leq} \times K \subset f^{-1}(E)$. Así, para un $k \in K$ fijo, $l_{\leq} \subset (\bar{f}(k))^{-1}(E)$ y por tanto se tiene que $\bar{f}(k)$ es externa.

Demostraremos en segundo lugar que $\bar{f}: K \rightarrow \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)$ es continua. Está bien definida por lo que acabamos de probar, y para ver que es continua es preciso demostrar que para todo elemento de la subbase $T^{\mathbb{N}}$, su imagen inversa por \bar{f} es abierto en K .

$$\text{Se tiene que } \bar{f}^{-1}(S(n_{\leq}, E)) = \{k \in K; f(k)(n_{\leq}) \subset E\} = \{k \in K; f(k \times n_{\leq}) \subset E\}.$$

Fijado $k_0 \in \bar{f}^{-1}(S(n_{\leq}, E))$, es necesario encontrar un entorno de k_0 , N_{k_0} tal que $\bar{f}(N_{k_0})(n_{\leq}) \subset E$.

Dado que f es exterior $f^{-1}(E) \in \mathcal{E}_{\mathbb{N} \times K}$, luego existe $E' \in \mathcal{E}_{cc}$ con $E' \times K \subset f^{-1}(E)$ así como $l \in \mathbb{N}$ tal que $l_{\leq} \subset E'$ y por tanto $l_{\leq} \times K \subset f^{-1}(E)$. De esta forma $f(l_{\leq} \times K) \subset f f^{-1}(E) \subset E$. Si $l \leq n$ es claro que $\bar{f}^{-1}(S(n_{\leq}, E)) = K$. En otro caso, salvo para los números naturales m tales que $n \leq m < l$, se verifica que para todo $k \in K$ $\bar{f}(k)(l_{\leq}) \subset E$. Para cada m , aplicando la continuidad de f , existe un entorno abierto de k_0 , N_m , tal que $f(k, m) \in E$ para todo $k \in N_m$. Podemos repetir el mismo proceso para $m = n, \dots, l-1$. Tomando $N_{k_0} = \bigcap_{m=n}^{l-1} N_m$ encontramos el entorno de k_0 buscado, y así podemos afirmar que $\bar{f}^{-1}(S(n_{\leq}, E))$ es abierto.

Para $S(n, U)$, $\bar{f}^{-1}(S(n, U)) = \{k \in K; \bar{f}(k)(n) = f(k, n) \in U, U \in T_X\}$. Como f es exterior, es continua en particular, y si $k \in \bar{f}^{-1}(S(n, U))$ entonces $f(n, k) \in U$, luego existe N entorno de k tal que $f(\{n\} \times N) \subset U$. Así $N \subset \bar{f}^{-1}(S(n, U))$. Por tanto \bar{f} es continua.

Por último probaremos que $e^{-1}: Top(K, \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)) \rightarrow \mathcal{E}t(\mathbb{N} \times K, X)$ está bien definida, esto es, que para toda $g: K \rightarrow \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)$ continua, $e^{-1}(g): \mathbb{N} \times K \rightarrow X$ es exterior. Para simplificar notación escribiremos $\hat{g} = e^{-1}(g)$.

Veamos primero que es continua. . Observemos que $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X) \subset Top(\mathbb{N}, X)$ y que T_{ca} es menos fina que $T^{\mathbb{N}}$. Por tanto, el hecho de que \hat{g} sea continua se deduce del resultado estándar.

Ahora probemos que es externa. Sea $E \in \mathcal{E}_X$, $\hat{g}^{-1}(E)$ debe ser abierto exterior en $\mathbb{N} \times K$, es decir, contener un abierto exterior $E' \times K$ con $E' \in \mathcal{E}_{cc}$. Tenemos que $\hat{g}^{-1}(E) = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times K; \hat{g}(n, k) = g(k)(n) \in E\}$.

Dado que $g(k)$ es exterior, $g(k)^{-1}(E) \in \mathcal{E}_{cc}$, luego existe m_k tal que $(m_k)_{\leq} \subset g(k)^{-1}(E)$. Por tanto $g(k)((m_k)_{\leq}) \subset E$ y así $g(k) \in S((m_k)_{\leq}, E)$ y existe un entorno de k , N_k , que satisface esta condición pues g es continua.

Esta construcción puede realizarse para todo $k \in K$, obteniendo un cubrimiento por abiertos de K , $\{N_k\}_{k \in K}$. Por ser K compacto existe un subcubrimiento finito $\{N_{k_i}\}_{i=1}^n$ y para $m = \max_{1 \leq i \leq n} \{m_{k_i}\}$ se tiene que $g(k)(m_{\leq}) \subset E$, para todo $k \in K$. Entonces $\hat{g}(m_{\leq} \times K) \subset E$, y $m_{\leq} \times K \subset \hat{g}^{-1}\hat{g}(m_{\leq} \times K) \subset \hat{g}^{-1}(E)$. Como \hat{g} es continua y $E \in T_X$, $\hat{g}^{-1}(E) \in T_{\mathbb{N} \times K}$. Tenemos que $m_{\leq} \in \mathcal{E}_{cc}$, así podemos aplicar *E.2* de la definición de externología y concluir que $\hat{g}^{-1}(E) \in \mathcal{E}_{\mathbb{N} \times K}$. Con esto probamos que e^{-1} está bien definida. \square

Observación 1.3.2

Si $\emptyset \in \mathcal{E}_X$, como en la Observación 1.1.4(d) por ejemplo, entonces $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X) = \emptyset$ pues \mathbb{N} es no compacto y $\emptyset \notin \mathcal{E}_{cc}$. Este hecho no afecta a la validez del Teorema 1.3.1 ya que $\emptyset \notin \mathcal{E}_{\mathbb{N} \times K}$ y por tanto $\mathcal{E}t(\mathbb{N} \times K, X) = \emptyset$.

Demostremos ahora otra ley exponencial. Tomemos $Z = \mathbb{R}^+$, $W = K$ espacio topológico compacto y X espacio exterior. En \mathbb{R}^+ consideramos la topología euclídea T_e y la externología de los complementos de los compacto-cerrados \mathcal{E}_{cc} . En K tenemos una topología T_K y la externología indiscreta $\mathcal{E}_{ind} = \{K\}$. En $\mathbb{R}^+ \times K$ tenemos la topología, $T_{\mathbb{R}^+ \times K}$, producto de las existentes en \mathbb{R}^+ y K y la externología $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^+ \times K}$, definida como sigue: $E \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^+ \times K}$ si $E \in T_{\mathbb{R}^+ \times K}$ y existe $E' \in \mathcal{E}_{cc}$ tal que $E' \times K \subset E$. Es sencillo comprobar que esta definición satisface *E.1* y *E.2* y que coincide con la externología producto. En $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)$ tomamos la topología $T^{\mathbb{R}^+}$ generada por la subbase constituida por los conjuntos de la forma:

$$S([a, b], U) = \{f \in \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X); f([a, b]) \subset U \text{ con } U \in T_X, a, b \in \mathbb{R}^+\}$$

$$S([b, +\infty), E) = \{f \in \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X); f([b, +\infty)) \subset E \text{ con } E \in \mathcal{E}_X, b \in \mathbb{R}^+\}.$$

Teorema 1.3.3

Con las topologías externologías especificadas arriba la aplicación exponencial $e: \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+ \times K, X) \longrightarrow Top(K, \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X))$ es una biyección.

Demostración:

Nos basta con probar que e y su inversa $e^{-1}: Top(K, \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)) \longrightarrow \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+ \times K, X)$ están bien definidas. Esto es lo mismo que demostrar los siguientes hechos.

Primero veamos que para toda $f \in \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+ \times K, X)$, la aplicación $e(f)(k): \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ es exterior para todo $k \in K$.

Escribiremos $\bar{f} = e(f)$ para simplificar notación. Sea $k_0 \in K$, la aplicación $\bar{f}(k_0): \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ definida por $\bar{f}(k_0)(t) = f(t, k_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ puede verse como la composición $\bar{f}(k_0) = f \circ i_{k_0}$, con $i_{k_0}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times K$ tal que $i_{k_0}(t) = (t, k_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Se tiene que i_{k_0} es continua. Además i_{k_0} es externa pues para todo $E \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^+ \times K}$, E contiene a un abierto exterior de la forma $E' \times K$ con $E' \in \mathcal{E}_{cc}$, luego $E' = i_{k_0}^{-1}(E' \times K) \subset i_{k_0}^{-1}(E)$. Así por la condición E.2 de la definicin de externología $i_{k_0}^{-1}(E) \in \mathcal{E}_{cc}$. Como f es exterior por hipótesis, $\bar{f}(k_0)$ es exterior por ser composición de exteriores.

Veamos en segundo lugar que la aplicación $\bar{f}: K \longrightarrow \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)$ es continua para toda $f \in \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+ \times K, X)$.

Sea un abierto de la subbase del tipo $S([b, +\infty), E)$. Es necesario probar que $\bar{f}^{-1}(S([b, +\infty), E)) = \{k \in K; \bar{f}(k)([b, +\infty)) \subset E\}$ es abierto en K . Sea $k_0 \in \bar{f}^{-1}(S([b, +\infty), E))$, como f es exterior $f^{-1}(E) \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^+ \times K}$, luego existe $E' \in \mathcal{E}_{cc}$ tal que $E' \times K \subset f^{-1}(E)$, pero es posible encontrar un $[a, +\infty) \subset E'$ de forma que $[a, +\infty) \times K \subset E' \times K \subset f^{-1}(E)$. Si $a \leq b$ se verifica que $K = \bar{f}^{-1}(S([a, +\infty), E))$ pues $f(t, k) \in f f^{-1}(E) \subset E$, para todo $k \in K$ y $t \in [a, +\infty)$. Si $b \leq a$ tomamos el intervalo $[b, a]$. Por continuidad de f existe para todo $(t, k_0) \in f^{-1}(E)$ con $t \in [b, a]$ un entorno abierto de (t, k_0) en $T_{\mathbb{R}^+ \times K}$, $N_t \times M_t$, tal que $(t, k_0) \in N_t \times M_t \subset f^{-1}(E)$.

Así conseguimos un cubrimiento abierto de $[b, a]$, $\{N_t\}_{t \in [b, a]}$. Por ser $[b, a]$ compacto podemos extraer un subcubrimiento finito $\{N_{t_i}\}_{i=1}^n$.

Tomando $M = \bigcap_{i=1}^n M_{t_i}$ se verifica que $k_0 \in M \subset \bar{f}^{-1}(S([b, +\infty), E))$, con lo que deducimos que $\bar{f}^{-1}(S([b, +\infty), E))$ es abierto.

Ahora probemos que tomando el otro tipo de abiertos subbásicos de $T_{\mathbb{R}^+}$, $S([a, b], U)$, $\bar{f}^{-1}(S([a, b], U))$ es abierto en K .

Tenemos que $\bar{f}^{-1}(S([a, b], U)) = \{k \in K; \bar{f}(k)([a, b]) \subset U, U \in T_X\}$.

Si este conjunto es vacío queda demostrado. Si $k \in \bar{f}^{-1}(S([a, b], U))$, tenemos que como f es continua, $f^{-1}(U)$ es abierto en $T_{\mathbb{R}^+ \times K}$, luego para todo $t \in [a, b]$ existe un abierto básico $N_t \times M_t$ en $\mathbb{R}^+ \times K$ tal que $(t, k) \in N_t \times M_t \subset f^{-1}(U)$. Aplicando que $[a, b]$ es compacto, dado el cubrimiento $\{N_t\}_{t \in [a, b]}$ existe un subcubrimiento finito

de $[a, b], \{N_{t_i}\}_{i=1}^n$. Tomamos $M = \bigcap_{i=1}^n M_{t_i}$, que es entorno de $k \in K$, y se tiene que $f([a, b] \times M) \subset U$. De esta forma $k \in M \subset \bar{f}^{-1}(S([a, b], U))$ y queda probado que $\bar{f}^{-1}(S([a, b], U))$ es abierto en K .

Por último precisamos demostrar que $e^{-1}: Top(K, \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)) \longrightarrow \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+ \times K, X)$ está bien definida, esto es, que para toda $g \in Top(K, \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X))$, $e^{-1}(g): \mathbb{R}^+ \times K \longrightarrow X$ es exterior. Escribiremos por comodidad $e^{-1}(g) = \hat{g}$.

Primero veamos que \hat{g} es continua. Como ya sabemos $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X) \subset Top(\mathbb{N}, X)$, y además es claro que T_{ca} es menos fina que $T^{\mathbb{R}^+}$. Luego la continuidad de \hat{g} es consecuencia del resultado estándar.

Para demostrar que \hat{g} es externa, tomamos $E \in \mathcal{E}_X$, $\hat{g}^{-1}(E)$ debe ser abierto exterior en $\mathbb{R}^+ \times K$. Tenemos que $\hat{g}^{-1}(E) = \{(t, k) \in \mathbb{R}^+ \times K; \hat{g}(t, k) \in E\}$. Para cada $k \in K$, $g(k)$ es externa luego existe un $[b_k, +\infty)$ tal que $t \in [b_k, +\infty) \subset (g(k))^{-1}(E)$. De esta forma $g(k) \in S([b_k, +\infty), E)$ y existirá un abierto M_k de k tal que $k \in M_k \subset g^{-1}(S([b_k, +\infty), E))$, por ser g continua. Podemos obtener de esta forma un cubrimiento por abiertos de K , $\{M_k\}_{k \in K}$. Dado que K es compacto extraemos un subcubrimiento finito $\{M_{k_i}\}_{i=1}^n$. Así para $b = \max_{1 \leq i \leq n} \{b_{k_i}\}$ podemos asegurar que $\hat{g}([b, +\infty) \times K) \subset E$ con lo que $[b, +\infty) \times K \subset \hat{g}^{-1}(E)$. Como $\hat{g}^{-1}(E) \in T_{\mathbb{R}^+ \times K}$ por ser \hat{g} continua, aplicando la condición E.2 de la definición de externología, se tiene que $\hat{g}^{-1}(E) \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^+ \times K}$. \square

Observaciones 1.3.4

(a) Si $\emptyset \in \mathcal{E}_X$, como en la Observación 1.1.4(d) por ejemplo, entonces $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X) = \emptyset$ pues \mathbb{R}^+ no es compacto. A pesar de este hecho el teorema sigue siendo válido pues $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+ \times K, X) = \emptyset$, ya que $\emptyset \notin \mathcal{E}_{\mathbb{R}^+ \times K}$, con lo que se tiene la biyección.

(b) En el resto del trabajo denotaremos $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)$ por $X^{\mathbb{R}^+}$ y lo denominaremos espacio de rayos exteriores en X .

Por último demostraremos otra ley en la que exponenciaremos el espacio compacto K . Para ello definiremos las externologías oportunas.

Sean $X, Y \in \mathcal{E}t$, K espacio compacto y Hausdorff. En K consideramos la externología $\mathcal{E}_{ind} = \{K\}$. En $X \times K$ tomamos la topología producto $T_{X \times K}$ y la externología $\mathcal{E}_{X \times K}$ definida como sigue: $E \in \mathcal{E}_{X \times K}$ si $E \in T_{X \times K}$ y existe $E' \in \mathcal{E}_X$ tal que $E' \times K \subset E$. Es fácil comprobar que $\mathcal{E}_{X \times K}$ satisface la Definición 1.1.1, y que coincide con la externología producto de \mathcal{E}_X y \mathcal{E}_{ind} . Además $\mathcal{E}_{X \times K}$ generaliza a las externologías definidas para el Teorema 1.3.1 y el Teorema 1.3.3, $\mathcal{E}_{\mathbb{N} \times K}$ y $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^+ \times K}$, respectivamente. En el espacio

$Top(K, Y)$ tomamos la topología compacto-abierta T_{ca} y la externología \mathcal{E}_{YK} definida así: $E \in \mathcal{E}_{YK}$ si $E \in T_{ca}$ y existe $E' \in \mathcal{E}_X$ tal que $(K, E') \subset E$ donde $(K, E') = \{f \in Top(K, Y); f(K) \subset E', E' \in \mathcal{E}_X\}$. Comprobemos que es externología viendo que satisface *E.1* y *E.2* de la Definición 1.1.1.

En primer lugar veamos *E.1*. Si $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_{YK}$, entonces existen E'_1 y $E'_2 \in \mathcal{E}_Y$ tales que $(K, E'_1) \subset E_1, (K, E'_2) \subset E_2$. Así $(K, E'_1) \cap (K, E'_2) = (K, E'_1 \cap E'_2)$ y $E'_1 \cap E'_2 \in \mathcal{E}_Y$ por lo que $(K, E'_1 \cap E'_2) \subset E_1 \cap E_2$ y $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}_{YK}$.

En segundo lugar demostremos *E.2*. Si $U \in T_{ca}, E \in \mathcal{E}_{YK}, E \subset U$ como existe (K, E') con $E' \in \mathcal{E}_Y$ tal que $(K, E') \subset E \subset U$ concluimos que $U \in \mathcal{E}_{YK}$.

Teorema 1.3.5

Sean $X, Y \in \mathcal{E}t$, $K \in Top$ compacto y Hausdorff. Entonces la aplicación exponencial $e: \mathcal{E}t(X \times K, Y) \longrightarrow \mathcal{E}t(X, Top(K, Y))$ es una biyección.

Demostración:

Tenemos que probar que e y su inversa $e^{-1}: \mathcal{E}t(X, Top(K, Y)) \longrightarrow \mathcal{E}t(X \times K, Y)$ están bien definidas. Escribiremos, como en el Teorema 1.3.3, $e(f) = \bar{f}$ para toda $f \in \mathcal{E}t(X \times K, Y)$ y $e^{-1}(g) = \hat{g}$ para toda $g \in \mathcal{E}t(X, Top(K, Y))$.

Primero veamos que e está bien definida. Tenemos que para toda aplicación $f \in \mathcal{E}t(X \times K, Y)$ y $x \in X, \bar{f}(x): K \longrightarrow Y$ es continua. Esto es así por haber tomado en el espacio $Top(K, Y)$ la topología compacto-abierta, por ser K compacto y Hausdorff (luego localmente compacto) y aplicar que la exponencial en Top está bien definida. Por la misma razón $\bar{f}: X \longrightarrow Top(K, Y)$ es continua. Si demostramos que \bar{f} es además externa, tendremos que $f \in \mathcal{E}t(X, Top(K, Y))$. Veamos esto.

Sea $E \in \mathcal{E}_{YK}$, entonces existe $E' \in \mathcal{E}_Y$ con $(K, E') \subset E$ y $\bar{f}^{-1}((K, E')) \subset \bar{f}^{-1}(E)$. Pero $\bar{f}^{-1}((K, E')) = \{x \in X; f(x)(K) \subset E'\}$. Por ser $f: X \times K \longrightarrow Y$ externa, $f^{-1}(E') \in \mathcal{E}_{X \times K}$, luego existe E'' tal que $E'' \times K \subset f^{-1}(E')$. Para todo $x \in E'', x \times K \subset f^{-1}(E')$, así $f(x, K) \subset ff^{-1}(E') \subset E'$, luego $\bar{f}(E'')(K) \subset E'$ y por tanto $E'' \subset \bar{f}^{-1}((K, E'))$. Como \bar{f} es continua, $\bar{f}^{-1}((K, E')) \in T_X$. Además $E'' \in \mathcal{E}_X$ y $E'' \subset \bar{f}^{-1}((K, E'))$. Luego por *E.2* de la Definición 1.1.1 concluimos que $\bar{f}^{-1}((K, E')) \in \mathcal{E}_{YK}$. Aplicando de nuevo el argumento anterior como $\bar{f}^{-1}(E) \in T_X, \bar{f}^{-1}((K, E')) \subset \bar{f}^{-1}(E)$, por *E.2*. $\bar{f}^{-1}(E) \in \mathcal{E}_X$ y se tiene que \bar{f} es externa.

Probaremos ahora que e^{-1} está bien definida, que equivale a demostrar que para todo $g \in \mathcal{E}t(X, Top(K, Y)), \hat{g} = e^{-1}(g)$ es exterior. Dado que en $X \times K$ tenemos la topología

producto y en $Top(K, Y)$ la topología compacto–abierto como en la ley exponencial en Top tenemos que, por el resultado estándar, \hat{g} es continua. Veamos que es externa. Sea $E \in \mathcal{E}_Y$, $\hat{g}^{-1}(E) = \{(x, k) \in X \times K; \hat{g}(x, k) = g(x)(k) \in E\}$. Puesto que $(K, E) \in \mathcal{E}_{YK}$, $g^{-1}((K, E)) = E' \in \mathcal{E}_X$ por ser g exterior.

Sea $x \in E'$, tenemos que $\hat{g}(x, k) = g(x)(k) \in E$ para todo $k \in K$, luego $\hat{g}^{-1}(E)$ es no vacío. Además tomando $E' \times K$ se tiene que $\hat{g}(E' \times K) \subset E$ y entonces $E' \times K \subset \hat{g}^{-1}\hat{g}(E' \times K) \subset \hat{g}^{-1}(E)$. Por ser \hat{g} continua y $E \in \mathcal{E}_Y \subset T_Y$, $\hat{g}^{-1}(E) \in T_{X \times K}$ y aplicando la definición de $\mathcal{E}_{X \times K}$ vemos que $\hat{g}^{-1}(E) \in \mathcal{E}_{X \times K}$. Con esto \hat{g} es exterior. \square

1.4 Homotopía en la categoría de los espacios exteriores $\mathcal{E}t$.

Sea X espacio exterior, K espacio topológico compacto provisto de la externología $\mathcal{E}_{ind} = \{K\}$. En $X \times K$ tomamos, como para el Teorema 1.3.5 la topología producto $T_{X \times K}$ y la externología $\mathcal{E}_{X \times K}$.

Además para cada $k \in K$, $i_k: X \longrightarrow X \times K$ definida para todo $x \in X$ como $i_k(x) = (x, k)$ es exterior. Para $K = I$, se obtiene el cilindro $X \times I$.

En \mathbb{N} consideraremos la estructura de espacio exterior de la Sección 3.

Dadas dos aplicaciones $f, g: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t$, se dice que f es exteriormente homótopa a g , $f \underset{\mathcal{E}}{\simeq} g$, si existe $H: X \times I \longrightarrow Y$ aplicación exterior verificando que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. A H la denominamos homotopía en $\mathcal{E}t$ de f a g .

La relación “ser exteriormente homótopa a” es una relación de equivalencia en $\mathcal{E}t(X, Y)$. Denotamos por $[f]$ la clase de equivalencia de aplicaciones exteriormente homótopas a f .

Escribimos $[X; Y]$ para designar al conjunto de clases de equivalencia de aplicaciones exteriormente homótopas de X en Y .

Denotamos por $\Pi(\mathcal{E}t)$ la categoría cuyos objetos son los espacios exteriores y cuyos morfismos son clases de homotopía exterior de aplicaciones exteriores entre espacios exteriores.

En particular, una aplicación exterior $f: X \longrightarrow Y$ se dice equivalencia de homotopía exterior si la clase de homotopía exterior $[f]$ es un isomorfismo en $\Pi(\mathcal{E}t)$.

Es interesante considerar el funtor $\Pi_0^{\mathcal{E}}: \mathcal{E}t \longrightarrow Set$ definido para todo $X \in \mathcal{E}t$ como $\Pi_0^{\mathcal{E}}(X) = \Pi(\mathcal{E}t)(\mathbb{N}, X)$, y para toda $f \in \mathcal{E}t(X, Y)$ como $\Pi_0^{\mathcal{E}}(f) = f_*^{\mathcal{E}}: \Pi(\mathcal{E}t)(\mathbb{N}, X) \longrightarrow$

$\Pi(\mathcal{E}t)(\mathbb{N}, Y)$ que a cada $[g] \in \Pi(\mathcal{E}t)(\mathbb{N}, X)$ le asigna $\Pi_0^\mathcal{E}(f)([g]) = [fg] \in \Pi(\mathcal{E}t)(\mathbb{N}, Y)$.

También consideraremos la categoría $\mathcal{E}t^\mathbb{N}$. Un objeto en $\mathcal{E}t^\mathbb{N}$ viene dado por una aplicación exterior $j_X: \mathbb{N} \rightarrow X$ que llamaremos sucesión base en X . A veces denotaremos a los objetos en $\mathcal{E}t^\mathbb{N}$ por (X, j_X) cuando deseemos resaltar la sucesión base.

Los morfismos en $\mathcal{E}t^\mathbb{N}$ son diagramas conmutativos en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{N} & \\ j_X \swarrow & & \searrow j_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Se trata pues de aplicaciones exteriores que preservan las sucesiones base. También las escribiremos de la siguiente forma $f: (X, j_X) \rightarrow (Y, j_Y)$.

Dadas $f, g: (X, j_X) \rightarrow (Y, j_Y)$ aplicaciones exteriores bajo \mathbb{N} , se dice que f es exteriormente homótopa bajo \mathbb{N} a g , $f \stackrel{\mathbb{N}}{\simeq} g$, si existe $H: X \times I \rightarrow Y$ aplicación exterior tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ y $H(j_X(n), t) = j_Y(n)$ (bajo \mathbb{N}) para todo $x \in X, n \in \mathbb{N}, t \in I$.

La relación “ser exteriormente homótopa bajo \mathbb{N} a” es una relación de equivalencia en $\mathcal{E}t^\mathbb{N}((X, j_X), (Y, j_Y))$. Denotaremos por $[f]^\mathbb{N}$ la clase de las aplicaciones exteriormente homótopas bajo \mathbb{N} a f .

Escribimos $[(X, j_X); (Y, j_Y)]^\mathbb{N}$ para designar al conjunto de clases de aplicaciones exteriormente homótopas bajo \mathbb{N} de (X, j_X) en (Y, j_Y) .

También denotaremos por $\Pi(\mathcal{E}t^\mathbb{N})$ a la correspondiente categoría homotópica. La llamaremos categoría de homotopía exterior bajo \mathbb{N} . En ella los objetos son espacios exteriores bajo \mathbb{N} , (X, j_X) , y los morfismos son las clases de homotopía exterior bajo \mathbb{N} de aplicaciones en $\mathcal{E}t^\mathbb{N}$.

En $\mathbb{N} \times S^n$ consideramos la aplicación $i_{s_0}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times S^n$ definida como $i_{s_0}(n) = (n, s_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y donde s_0 es el punto base de S^n . Es sencillo comprobar que i_{s_0} es exterior. Tomaremos i_{s_0} como sucesión base de $\mathbb{N} \times S^n$ en lo que resta del trabajo.

Para cada $n \geq 0$ podemos considerar el functor $\Pi_n^\mathcal{E}: \mathcal{E}t^\mathbb{N} \rightarrow \text{Set}$ que a todo $(X, j_X) \in \mathcal{E}t^\mathbb{N}$ le hace corresponder $\Pi_n^\mathcal{E}(X, j_X) = \Pi(\mathcal{E}t^\mathbb{N})((\mathbb{N} \times S^n, i_{s_0}), (X, j_X))$. A un cierto morfismo en $\mathcal{E}t^\mathbb{N}$, $f \in \mathcal{E}t^\mathbb{N}((X, j_X), (Y, j_Y))$, este functor le asigna $\Pi_n^\mathcal{E}(f) = f_*^\mathcal{E}: \Pi_n^\mathcal{E}(X, j_X) \rightarrow \Pi_n^\mathcal{E}(Y, j_Y)$ que a toda $[g]^\mathbb{N} \in \Pi_n^\mathcal{E}(X, j_X)$ le hace corresponder $[fg]^\mathbb{N} \in \Pi_n^\mathcal{E}(Y, j_Y)$.

Lema 1.4.1

Si (X, j_X) es un objeto en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, entonces $\Pi_0^{\mathcal{E}}(X, j_X) \cong \Pi_0^{\mathcal{E}}(X)$.

Demostración:

Definimos la aplicación $\gamma: \Pi_0^{\mathcal{E}}(X, j_X) \longrightarrow \Pi_0^{\mathcal{E}}(X)$ en primer lugar. Sea $[g]^{\mathbb{N}} \in \Pi_0^{\mathcal{E}}(X, j_X)$, entonces un representante de esta clase es de la forma $g: (\mathbb{N} \times S^0, i_{s_0}) \longrightarrow (X, j_X)$.

Dado que $S^0 = \{-1, 1\}$, si $s_0 = 1$, definimos $\gamma(g) = [\hat{g}]$ con $\hat{g} = gi_{-1}$, exterior por composición de exteriores. Si $f \xrightarrow[\mathcal{E}]{\cong} g$ existe una homotopía exterior $H: \mathbb{N} \times S^0 \times I \longrightarrow X$ con $H(n, s, 0) = f(n, s)$, $H(n, s, 1) = g(n, s)$ y $H(n, 1, t) = j_X(n)$ para todo $(n, s) \in \mathbb{N} \times S^0$, $t \in I$. Consideramos $i_{-1}: \mathbb{N} \times I \longrightarrow \mathbb{N} \times S^0 \times I$ que asigna a cada $(n, t) \in \mathbb{N} \times I$, $i_{-1}(n, t) = (n, -1, t)$, que es exterior por lo señalado a comienzo de la sección. Entonces tomamos $G = H(-, -1, -): \mathbb{N} \times I \longrightarrow X$ que es exterior por ser composición de H e i_{-1} , ambas exteriores. Así G es homotopía exterior de f a g y γ está bien definida.

En segundo lugar definimos $\delta: \Pi_0^{\mathcal{E}}(X) \longrightarrow \Pi_0^{\mathcal{E}}(X, j_X)$ que a toda $[f] \in \Pi_0^{\mathcal{E}}(X)$, cuyo representante es $f: \mathbb{N} \longrightarrow X$, le asigna $\delta([f]) = [\bar{f}]$ donde $\bar{f}: \mathbb{N} \times S^0 \longrightarrow X$ está definida para todo $n \in \mathbb{N}$ como $\bar{f}(n, -1) = f(n)$ y $\bar{f}(n, 1) = j_X(n)$. Tenemos que \bar{f} es exterior pues $\bar{f}i_{-1} = f$ y $\bar{f}i_1 = j_X$ son exteriores. Además si $f \xrightarrow[\mathcal{E}]{\cong} g$ existe una homotopía exterior de f a g , $H: \mathbb{N} \times I \longrightarrow X$, entonces es posible construir una homotopía $G: \mathbb{N} \times S^0 \times I \longrightarrow X$ definida como $G(n, -1, t) = H(n, t)$ y $G(n, 1, t) = j_X(n)$. Así G es una homotopía exterior bajo \mathbb{N} de f a g y δ esta bien definida.

Es sencillo comprobar que $\gamma\delta = id_{\Pi_0^{\mathcal{E}}(X)}$ y $\delta\gamma = id_{\Pi_0^{\mathcal{E}}(X, j_X)}$. \square

Lema 1.4.2

Sea $(X, j_X) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. Existe un isomorfismo entre $\Pi_n^{\mathcal{E}}(X, j_X)$ y el n -ésimo grupo de homotopía estandar en Top del espacio de sucesiones exteriores en X con la topología $T^{\mathbb{N}}$, $\Pi_n(\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X), j_X)$, para todo $n \geq 0$.

Demostración:

Tenemos, por el Teorema 1.3.1, que la ley exponencial e establece la biyección $\mathcal{E}t(\mathbb{N} \times K, X) \cong Top(K, \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X))$ con K espacio compacto. Ahora consideremos en \mathbb{N} la aplicación $id_{\mathbb{N}}$ como sucesión base, en $\mathbb{N} \times K$ la aplicación exterior $i_{k_0}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times K$ definida por $i_{k_0}(n) = (n, k_0)$ con k_0 punto base de K y j_X punto base en $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)$.

Para simplificar notación, como en la sección anterior, escribiremos $e(f) = \bar{f}$ y $e^{-1}(g) = \hat{g}$. Sea $f \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}((\mathbb{N} \times K, i_{k_0}), (X, j_X))$, entonces $\bar{f}(k_0)(n) = f(k_0, n) = fi_{k_0}(n) = j_X(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\bar{f} \in Top^*((K, k_0), (\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X), j_X))$.

De forma recíproca se tiene que si $g \in Top^*((K, k_0), (\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X), j_X))$, $\hat{g}i_{k_0}(n) = \hat{g}(k_0, n) = g(k_0)(n) = j_X(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces $\hat{g} \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}((\mathbb{N} \times K, i_{k_0}), (X, j_X))$.

Debido a esto la ley exponencial también induce la biyección $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}((\mathbb{N} \times K, i_{k_0}), (X, j_X)) \cong Top^*((K, k_0), (\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X), j_X))$.

Si consideramos $K = S^n$ obtenemos mediante e la siguiente biyección $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}((\mathbb{N} \times S^n, i_{s_0}), (X, j_X)) \cong Top^*((S^n, s_0), (\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X), j_X))$. Veamos que e establece otra biyección en homotopía exterior bajo \mathbb{N} .

Sea $[f]^{\mathbb{N}} \in [(\mathbb{N} \times S^n, i_{s_0}), (X, j_X)]^{\mathbb{N}}$ y f un representante. Sea otra aplicación $g \in [f]^{\mathbb{N}}$, entonces existe $H: \mathbb{N} \times S^n \times I \rightarrow X$ exterior con $H(n, s, 0) = f(n, s)$, $H(n, s, 1) = g(n, 0)$ y $H(n, s_0, t) = j_X(n)$. Es sencillo comprobar que $\bar{H} = e(H): S^n \times I \rightarrow \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)$ verifica que $\bar{H}(s, 0) = e(f)(s) = \bar{f}(s)$, $\bar{H}(s, 1) = e(g)(s) = \bar{g}(s)$ y $\bar{H}(s_0, t)(n) = e(H)(s_0, t)(n) = H(n, s_0, t) = j_X(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $s \in S^n$, $t \in I$. Además \bar{H} es continua aplicando que la exponencial es biyección para $K = S^n \times I$. De esta forma $\bar{f} \stackrel{\mathbb{N}}{\cong} \bar{g}$ y $[f]^{\mathbb{N}} = [\bar{g}]^{\mathbb{N}}$.

De forma similar dada $[h] \in [(S^n, s_0), (\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X), j_X)]^*$, con h un representante y k otro, se tiene que si $G: S^n \times I \rightarrow \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)$ es una homotopía de h a k en Top^* . Tomando $\hat{G} = e^{-1}(G): \mathbb{N} \times S^n \times I \rightarrow X$ obtenemos una homotopía exterior de h a k , bajo \mathbb{N} , esto es, $\hat{G}(n, s, 0) = \hat{h}(n, s)$, $\hat{G}(n, s, 1) = \hat{k}(n, s)$ y $\hat{G}(n, s_0, t) = e^{-1}(G)(n, s_0, t) = G(s_0, t)(n) = j_X(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $s \in S^n$, $t \in I$.

Concluimos así que tenemos el isomorfismo

$$[(\mathbb{N} \times S^n, i_{s_0}), (X, j_X)]^{\mathbb{N}} \cong [(S^n, s_0), (\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X), j_X)]^*$$

para todo $n \geq 0$. \square

Corolario 1.4.3

Sea $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $\Pi_n^{\mathcal{E}}: \mathcal{E}t^{\mathbb{N}} \rightarrow Set$. Entonces $\Pi_n^{\mathcal{E}}(X)$ verifica que:

- (a) Para $n = 0$ es un conjunto punteado.
- (b) Para $n = 1$ es grupo.

(c) Para $n > 1$ es grupo abeliano.

Demostración:

Es consecuencia directa del Lema 1.4.2. \square

Nota 1.4.4

El funtor $\Pi_n^{\mathcal{E}}$ queda definido de la siguiente forma:

$$\Pi_n^{\mathcal{E}}: \mathcal{E}t^{\mathbb{N}} \longrightarrow Grp \quad n \geq 1$$

$$\Pi_n^{\mathcal{E}}: \mathcal{E}t^{\mathbb{N}} \longrightarrow Ab \quad n > 1$$

Definición 1.4.5 Sea X espacio exterior y $j_X: \mathbb{N} \longrightarrow X$ una sucesión base exterior. Para $n \geq 1$ llamaremos n -ésimo grupo de homotopía exterior de X basado en j_X a $\Pi_n^{\mathcal{E}}(X, j_X)$.

Definición 1.4.6 Sea $f: X \longrightarrow Y$ aplicación exterior en $\mathcal{E}t$. Se dice que f es una *equivalencia débil exterior* si verifica una de las condiciones siguientes:

a) Si $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X) = \emptyset$, entonces $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, Y) = \emptyset$.

b) Si $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X) \neq \emptyset$, entonces para toda sucesión base exterior en $X, j: \mathbb{N} \longrightarrow X$ y para todo $n \geq 0$ $\Pi_n^{\mathcal{E}}(f): \Pi_n^{\mathcal{E}}(X, j) \longrightarrow \Pi_n^{\mathcal{E}}(Y, fj)$ es un isomorfismo.

Definición 1.4.7 Sean X un espacio exterior y A un subespacio exterior, denotamos por $i: A \longrightarrow X$ la inclusión canónica en $\mathcal{E}t$. Decimos que A es un *retracto exterior de deformación fuerte de X* si existe $r: X \longrightarrow A$ exterior con $ri = id_A$ y una homotopía exterior $H: X \times I \longrightarrow X$ verificando que $H(x, 0) = ir(x)$, $H(x, 1) = x$, es decir, $ir \underset{\mathcal{E}}{\cong} id_X$ y $H(a, t) = a$ para todo $x \in X, t \in I, a \in A$. Denominaremos a r *retracción exterior de X en A* y a H *deformación exterior de X en A* .

Observaciones 1.4.8

(a) Si A es un retracto exterior de deformación fuerte, entonces $i: A \longrightarrow X$ es una equivalencia débil exterior.

(b) En el resto del trabajo escribiremos $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)$ como $X^{\mathbb{N}}$ y lo denominaremos espacio de sucesiones exteriores en X .

Capítulo 2

Una estructura de categoría de modelos cerrada para la categoría de los espacios exteriores

En este capítulo probamos que la categoría de los espacios exteriores $\mathcal{E}t$ satisface los axiomas de tipo CM que caracterizan el modelo axiomático de categoría de modelos cerrada (Teorema 2.1.6). Definimos también la noción de \mathbb{N} -complejo y demostramos un teorema tipo Whitehead y en ciertas condiciones un teorema de Whitehead propio.

En la primera sección definimos tres clases de morfismos: fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles. Llamaremos fibración a aquellas aplicaciones que tienen la propiedad de elevación de homotopía a derecha respecto a las aplicaciones $\partial_0: \mathcal{D}^q = \mathbb{N} \times D^q \longrightarrow D^q \times I = \mathbb{N} \times D^q \times I$ para todo $q \geq 0$, equivalencias débiles a las equivalencias débiles exteriores y cofibraciones a aquellas que tienen la propiedad de elevación a izquierda respecto a las fibraciones que además son equivalencias débiles.

Es sencillo demostrar que en $\mathcal{E}t$ todo objeto es fibrante. También obtenemos un resultado que asegura que f es equivalencia débil (o fibración) si y sólo si la inducida por $f, f^{\mathbb{N}}: \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X) \longrightarrow \mathcal{E}t(\mathbb{N}, Y)$, es equivalencia débil (o fibración) en Top con las topologías $T^{\mathbb{N}}$. Usaremos este resultado en la demostración del Teorema 2.1.6. El axioma $CM1$ fue probado en el capítulo anterior, los demás se demuestran sin excesivas dificultades salvo $CM5$ (factorización) que requiere más esfuerzo. Para probar $CM5(a)$ es preciso ver que toda $f: X \longrightarrow Y$ puede factorizarse como una cofibración trivial $i: X \longrightarrow \tilde{X}$ seguida de una fibración $p: \tilde{X} \longrightarrow Y$. Ello se consigue mediante una adaptación del argumento denominado “del objeto pequeño” (ver Quillen [Q]) en la categoría de los espacios exteriores y que consiste en la construcción de un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i_1} & X_1 & \xrightarrow{i_2} & X_2 & \longrightarrow & \cdots \\ & \searrow f & \downarrow p_1 & & \swarrow p_2 & & \\ & & Y & & & & \end{array}$$

en el que X se obtiene de X_{n-1} considerando los diagramas conmutativos D_λ

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}^{q\lambda} & \xrightarrow{u_\lambda} & X_{n-1} \\
\downarrow \partial_0^\lambda & & \downarrow p_{n-1} \\
\mathcal{D}^{q\lambda} \times I & \xrightarrow{v_\lambda} & Y
\end{array}$$

y definiendo X_n por el push-out de $\sqcup_\lambda u_\lambda$ y de $\sqcup_\lambda \partial_0^\lambda$, así como $i_n: X_{n-1} \rightarrow X_n$ la aplicación inducida en él.

Obtenemos la aplicación $p_n: X_n \rightarrow Y$ al aplicar la propiedad universal de este último push-out a $\sqcup_\lambda v_\lambda$ y p_{n-1} . Para conseguir la factorización se toma (\tilde{X}, p) colímite de $\{X_n, p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e i la inclusión natural de X en el colímite \tilde{X} .

La idea para demostrar *CM5(b)* es similar.

A esta estructura de categoría de modelos cerrada para $\mathcal{E}t$ la denominaremos “exterior” así como a las tres clases de morfismos y demás nociones asociadas.

En la segunda sección introducimos la noción de \mathbb{N} -complejo en $\mathcal{E}t$, que juega un papel similar a la de *CW-complejo* en *Top*.

Un \mathbb{N} -complejo X se construye de forma inductiva, como un *CW-complejo*. El n -esqueleto X_n se obtiene del $n - 1$ esqueleto X_{n-1} pegando, mediante aplicaciones exteriores, \mathbb{N} -celdas de dimensión n que son de la forma $\mathbb{N} \times D^n$.

Obtenemos así un espacio X que posee la topología y externología débiles respecto a la filtración constituida por los n -esqueletos. Probamos que todo \mathbb{N} -complejo es un objeto cofibrante en $\mathcal{E}t$.

Definimos el espacio de caminos de $Y \in \mathcal{E}t$, denotado Y^I , y demostramos que la factorización de la diagonal Δ_Y como $\Delta_Y: Y \xrightarrow{s} Y^I \xrightarrow{(d_0, d_1)} Y \times Y$ es un objeto de caminos en $\mathcal{E}t$ según la definición de Quillen. Como consecuencia obtenemos el resultado de que la relación de homotopía a derecha de Quillen coincide con la relación de homotopía exterior. Aplicando este hecho y que todo \mathbb{N} -complejo X es fibrante y cofibrante demostramos que toda aplicación exterior entre \mathbb{N} -complejos es equivalencia débil si y sólo si es equivalencia de homotopía exterior.

Además relacionamos los \mathbb{N} -complejos con los *CW-complejos*. En concreto demostramos que todo *CW-complejo* localmente finito, de dimensión finita y con una cantidad numerable de celdas en cada dimensión admite una estructura de \mathbb{N} -complejo con un número finito de \mathbb{N} -celdas. Así, para *CW-complejos* localmente finitos de dimensión finita y con una cantidad numerable de celdas en cada dimensión, demostramos un teorema de Whitehead propio.

Para finalizar probamos que, si X es \mathbb{N} -complejo, $\partial_o + \partial_1: X \sqcup X \longrightarrow IX$ es cofibración exterior.

2.1. La estructura exterior de categoría de modelos cerrada para $\mathcal{E}t$.

En D^q tomamos la externología indiscreta $\mathcal{E}_{ind} = \{D^q\}$ al igual que en I , $\mathcal{E}_{ind} = \{I\}$ y en ambos espacios la topología euclídea, T_e . Los dos son espacios compactos y Hausdorff, por tanto también lo es $D^q \times I$.

En $\mathcal{D}^q = \mathbb{N} \times D^q$ y en $\mathcal{D}^q \times I = \mathbb{N} \times D^q \times I$ tenemos las topologías producto y la externología definida a comienzo de la Sección 1.3 para $\mathbb{N} \times K$ con K compacto arbitrario.

Estas estructuras de espacio exterior para D^q , I , \mathcal{D}^q y $\mathcal{D}^q \times I$ serán empleadas en todo el trabajo.

Recordemos que la aplicación $\partial_0: \mathbb{N} \times D^q \longrightarrow \mathbb{N} \times D^q \times I$ está definida como $\partial_0(n, x) = (n, x, 0)$ para todo $(n, x) \in \mathbb{N} \times D^q \times I = \mathcal{D}^q \times I$ y $q \geq 0$. Además con las topologías y externologías mencionadas anteriormente ∂_0 es exterior.

Definición 2.1.1 Una aplicación exterior $p: E \longrightarrow B$ se dice *fibración* si para todo diagrama conmutativo en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^q & \xrightarrow{u} & E \\ \downarrow \partial_0 & & \downarrow p \\ \mathcal{D}^q \times I & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

existe una homotopía exterior $v': \mathcal{D}^q \times I \longrightarrow E$ verificando que $pv' = v$ y $v'\partial_0 = u$, para todo $q \geq 0$. A “ v' ” se le denomina elevación de v .

Definición 2.1.2 Una aplicación exterior $f: X \longrightarrow Y$ es *equivalencia débil* si y sólo si es equivalencia débil exterior en el sentido de la Definición 1.4.6.

Definición 2.1.3 Una aplicación exterior $i: A \longrightarrow C$ se dice *cofibración* si tiene la propiedad de elevación a izquierda respecto a cualquier fibración $p: E \longrightarrow B$ según la Definición 2.1.1 que además sea equivalencia débil atendiendo a la Definición 2.1.2, es decir, que para todo diagrama conmutativo en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & E \\
\downarrow i & & \downarrow p \\
C & \xrightarrow{g} & B
\end{array}$$

existe una elevación $g': C \longrightarrow E$ verificando que $g'i = f$ y $pg' = g$.

Nota 2.1.4

La proyección $pr_1: \mathcal{D}^q \times I \longrightarrow \mathcal{D}^q$ es exterior pues es continua y externa como se probó en la Proposición 1.2.2.

Proposición 2.1.5

Todo objeto en $\mathcal{E}t$ es fibrante.

Demostración:

Es necesario probar que $c: E \longrightarrow *$ es fibración, esto es que cualquier diagrama para $q \geq 0$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}^q & \xrightarrow{u} & E \\
\downarrow \partial_0 & & \downarrow c \\
\mathcal{D}^q \times I & \xrightarrow{v} & *
\end{array}$$

existe una elevación $v': \mathcal{D}^q \times I \longrightarrow E$ verificando que $v'\partial_0 = u$ y $cv' = v$. Tomaremos $v' = upr_1$ con $pr_1: \mathcal{D}^q \times I \longrightarrow \mathcal{D}^q$ la proyección en el primer factor. La aplicación u es exterior por hipótesis, pr_1 lo es también por lo señalado en la Nota 2.1.4 y así v' verifica las condiciones precisas. \square

Teorema 2.1.6

La categoría de los espacios exteriores $\mathcal{E}t$, tiene estructura de categoría de modelos cerrada.

Demostración:

Para conseguir el resultado probaremos los axiomas CM .

El axioma *CM1* se verifica pues por la Proposición 1.2.2 y la Proposición 1.2.3 existen límites y colímites en $\mathcal{E}t$ y, por tanto, límites y colímites finitos.

Para probar *CM2*, es decir, que dadas f , g , gf , si dos de ellas son equivalencias débiles, también lo es la tercera nos apoyaremos en un apartado del siguiente lema.

Lema 2.1.7

Sea $f: X \rightarrow Y$ aplicación exterior. Denotamos por $f^{\mathbb{N}}: X^{\mathbb{N}} \rightarrow Y^{\mathbb{N}}$ a la aplicación definida, para toda $a \in X^{\mathbb{N}}$, como $f^{\mathbb{N}}(a) = fa$. Consideramos en $X^{\mathbb{N}}$ e $Y^{\mathbb{N}}$ las topologías $T_X^{\mathbb{N}}$ y $T_Y^{\mathbb{N}}$ respectivamente. Entonces:

- (a) f es fibración exterior si y sólo si $f^{\mathbb{N}}$ es fibración en *Top*.
- (b) f es equivalencia débil exterior si y sólo si $f^{\mathbb{N}}$ es equivalencia débil en *Top*.

Demostración:

- (a) Dado un diagrama conmutativo en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}^q = \mathbb{N} \times D^q & \longrightarrow & X \\
 \downarrow id_{\mathbb{N}} \times \partial_0 & & \downarrow f \\
 \mathcal{D}^q \times I = \mathbb{N} \times D^q \times I & \longrightarrow & Y
 \end{array} \tag{1}$$

al aplicar la exponencial, por el Teorema 1.3.1, se corresponde de forma biyectiva con otro diagrama en *Top*

$$\begin{array}{ccc}
 D^q & \longrightarrow & X^{\mathbb{N}} \\
 \downarrow \partial_0 & & \downarrow f^{\mathbb{N}} \\
 D^q \times I & \longrightarrow & Y^{\mathbb{N}}
 \end{array} \tag{2}$$

para todo $q \geq 0$. Entonces existe una elevación en (1) si y sólo si existe una elevación en (2) y se tiene el resultado.

- (b) Si $X^{\mathbb{N}} = \emptyset$, entonces si f es equivalencia débil exterior, por la Definición 1.4.6, se tiene que $Y^{\mathbb{N}} = \emptyset$. Así $f^{\mathbb{N}}$ es la identidad del vacío y por tanto equivalencia débil en *Top*. Recíprocamente si $X^{\mathbb{N}} = \emptyset$ y $f^{\mathbb{N}}$ es equivalencia débil en *Top*, $Y^{\mathbb{N}} = \emptyset$ y f es equivalencia débil exterior.

Supongamos que $X^{\mathbb{N}} \neq \emptyset$. Dada $f: X \rightarrow Y$ aplicación se verifica que $f^{\mathbb{N}}$ es continua si y sólo si f es exterior, para demostrarlo basta aplicar el Teorema 1.3.1 con $K = *$.

Para $f: X \rightarrow Y$ exterior se dice que f es equivalencia débil exterior si y sólo si induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía exterior para cualquier sucesión exterior en X , $j_X: \mathbb{N} \rightarrow X$, es decir

$$\Pi_q^{\mathcal{E}}(X, j_X) \xrightarrow{f_*} \Pi_q^{\mathcal{E}}(Y, fj_X)$$

para todo $q \geq 0$. Teniendo en cuenta el Lema 1.4.2 existen las siguientes biyecciones

$$\Pi_q^{\mathcal{E}}(X, j_X) \cong \Pi_q(X^{\mathbb{N}}, j_X)$$

$$\Pi_q^{\mathcal{E}}(Y, fj_X) \cong \Pi_q(Y^{\mathbb{N}}, fj_X)$$

para todo $q \geq 0$, donde a la izquierda tenemos grupos de homotopía exterior y a la derecha grupos de homotopía estándar de los espacios punteados $(X^{\mathbb{N}}, j_X)$ y $(Y^{\mathbb{N}}, fj_X)$.

De esta forma tenemos los diagramas conmutativos para todo $q \geq 0$

$$\begin{array}{ccc} \Pi_q^{\mathcal{E}}(X, j_X) & \xrightarrow{f_*} & \Pi_q^{\mathcal{E}}(Y, fj_X) \\ \downarrow \parallel \text{te} & & \downarrow \parallel \text{te} \\ \Pi_q(X^{\mathbb{N}}, j_X) & \xrightarrow{f_*^{\mathbb{N}}} & \Pi_q(Y^{\mathbb{N}}, fj_X) \end{array}$$

lo que prueba que f_* es isomorfismo si y sólo si $f_*^{\mathbb{N}}$ es isomorfismo. \square

Dado que Top es categoría de modelos cerrada, $CM2$ se verifica. Haciendo uso del apartado (b) del lema anterior, $CM2$ en Top implica que $CM2$ se verifique en $\mathcal{E}t$.

Probamos ahora $CM3$, esto es que las cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles son clases de morfismos cerradas por retracts.

Recordemos que $f: X \rightarrow Y$ es retracto de $f': X' \rightarrow Y'$ si existen $\varphi \in Mor_{\mathcal{E}t}(f, f')$ y $\psi \in Mor_{\mathcal{E}t}(f', f)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_1} & X' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{\varphi_2} & Y' \\ & \varphi & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi_1} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{\psi_2} & Y \\ & \psi & \end{array}$$

tales que $\psi\varphi = id_f$.

Para probar que si f' es fibración f también lo es, es preciso demostrar que tiene la propiedad de elevación a derecha respecto a $\partial_0: \mathcal{D}^q \longrightarrow \mathcal{D}^q \times I$ para todo $q \geq 0$. Observando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}^q & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{\varphi_1} & X' & \xrightarrow{\psi_1} & X \\ \downarrow \partial_0 & & \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ \mathcal{D}^q \times I & \xrightarrow{\bar{g}} & Y & \xrightarrow{\varphi_2} & Y' & \xrightarrow{\psi_2} & Y \end{array}$$

vemos que por ser f' fibración existe una elevación $h': \mathcal{D}^q \times I \longrightarrow X'$ con $h'\partial_0 = \varphi_1 g$ y $f'h' = \varphi_2 \bar{g}$. Tomando como elevación $h = \psi_1 h'$ se tiene que $h\partial_0 = \psi_1 h'\partial_0 = \psi_1 \varphi_1 g = g$ y $fh = f\psi_1 h' = \psi_2 f'h' = \psi_2 \varphi_2 \bar{g} = \bar{g}$.

Si f' es cofibración, f también lo es pues dado un diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow f & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{\bar{g}} & B \end{array}$$

con p fibración, podemos construir otro diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\varphi_1} & X' & \xrightarrow{\psi_1} & X & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{\varphi_2} & Y' & \xrightarrow{\psi_2} & Y & \xrightarrow{\bar{g}} & B \end{array}$$

Dado que f' es cofibración existe $h': Y' \longrightarrow E$ con $ph' = \bar{g}\psi_2$ y $h'f' = g\psi_1$. Escogemos como elevación $h = h'\varphi_2$ que verifica que $hf = h'\varphi_2 f = h'f'\varphi_1 = g\psi_1\varphi_1 = g$ y que $ph = ph'\varphi_2 = \bar{g}\psi_2\varphi_2 = \bar{g}$.

Para finalizar veamos que si f' es equivalencia débil, también lo es. Primero observemos que si f es retracto de f' , se tiene que $f^{\mathbb{N}}$ es retracto de $(f')^{\mathbb{N}}$ (basta aplicar el Teorema 1.3.1). Dado que f' es equivalencia débil por hipótesis, al aplicar el Lema 2.1.7.(b) tenemos que $(f')^{\mathbb{N}}$ es equivalencia débil en Top . Por $CM3$ en Top esto implica que $f^{\mathbb{N}}$ es equivalencia débil en Top . Por el Lema 2.1.7.(b) otra vez esto equivale a que f es equivalencia débil de $\mathcal{E}t$.

Demostrar *CM5* resultará más laborioso. Es necesario probar que dada $f: X \rightarrow Y$ aplicación exterior puede factorizarse de dos formas:

- (a) $f = pi$ con i cofibración trivial, p fibración.
- (b) $f = qj$ con j cofibración, q fibración trivial.

Examinemos primero el caso (a). Dada $f: X \rightarrow Y$ construiremos un diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_1} & X_1 & \xrightarrow{i_2} & X_2 & \longrightarrow & \cdots \\ & \searrow f & \downarrow p_1 & \swarrow p_2 & & & \\ & & Y & & & & \end{array}$$

Hacemos $X_0 = X$ y $p_0 = f$ y supongamos construido X_{n-1} . Para construir X_n tomamos Λ , conjunto de índices $\lambda \in \Lambda$ de diagramas conmutativos D_λ de la forma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{q_\lambda} & \xrightarrow{u_\lambda} & X_{n-1} \\ \downarrow \partial_0^\lambda & & \downarrow p_{n-1} \\ \mathcal{D}^{q_\lambda} \times I & \xrightarrow{v_\lambda} & Y \end{array}$$

con $q_\lambda \geq 0$. Definimos X_n por un push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q_\lambda} & \xrightarrow{\bigsqcup_{\lambda} u_\lambda} & X_{n-1} \\ \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \partial_0^\lambda & & \downarrow i_n \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q_\lambda} \times I & \xrightarrow{\bigsqcup_{\lambda} v_\lambda} & X_n \end{array} \quad (3)$$

y la aplicación $i_n: X_{n-1} \rightarrow X_n$ la inducida en él. Aplicando la propiedad universal de tal push-out a $p_{n-1}: X_{n-1} \rightarrow Y$ y a $\bigsqcup_{\lambda} v_\lambda: \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q_\lambda} \times I \rightarrow Y$ con lo que obtenemos $p_n: X_n \rightarrow Y$ verificando que $p_n(\bigsqcup_{\lambda} v_\lambda) = \bigsqcup_{\lambda} v_\lambda$ y que extiende a p_{n-1} , esto es, $p_n i_n = p_{n-1}$.

Tomamos (\tilde{X}, p) el colímite de $\{X_n; p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Si denotamos por $k_n: X_n \rightarrow \tilde{X}$ la inclusión natural de X_n en \tilde{X} y consideramos $i = k_0$, entonces se sigue que $f = pi$.

Veamos que p es fibración. Supongamos probado que cualquier aplicación exterior $\alpha: \mathcal{D}^q \rightarrow \tilde{X}$ factoriza a través de un X_n como una composición $\alpha: \mathcal{D}^q \rightarrow X_n \rightarrow \tilde{X}$ hecho que demostraremos a final del capítulo. Sea un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}^q & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{X} \\
\downarrow \partial_0 & & \downarrow p \\
\mathcal{D}^q \times I & \xrightarrow{v} & Y
\end{array} \tag{4}$$

Se tiene que α factoriza a través de un X_n como $\alpha: \mathcal{D}^q \xrightarrow{u_\lambda} X_n \xrightarrow{k_n} \tilde{X}$ y así $\alpha(\mathcal{D}^q) \subset X_n$.

Dado que X_{n+1} se construye mediante un diagrama push-out análogo a (3), existe $\sqcup_\lambda w_\lambda: \sqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q_\lambda} \times I \longrightarrow X_{n+1}$. Volviendo a aplicar la propiedad universal del push-out a $\sqcup_\lambda v_\lambda$ y a p_n tenemos existe p_{n+1} con $p_{n+1}(\sqcup_\lambda w_\lambda) = \sqcup_\lambda v_\lambda$. Se tiene que, por conmutatividad de (3), $i_{n+1}(\sqcup_\lambda u_\lambda) = (\sqcup_\lambda w_\lambda)(\sqcup_\lambda \partial_0^\lambda)$.

De esta manera el diagrama (4) se transforma en

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{D}^{q_\lambda} & \xrightarrow{u_\lambda} & X_n & \xrightarrow{i_{n+1}} & X_{n+1} & \xrightarrow{k_{n+1}} & \tilde{X} \\
\downarrow \partial_0^\lambda & & & & & & \downarrow p \\
\mathcal{D}^{q_\lambda} \times I & \xrightarrow{v_\lambda} & & & & & Y
\end{array}$$

Tenemos que existe $w_\lambda: \mathcal{D}^{q_\lambda} \times I \longrightarrow X_{n+1}$ en el índice $\lambda \in \Lambda$ verificando que $p_{n+1}w_\lambda = v_\lambda$ y $w_\lambda \partial_0^\lambda = i_{n+1}u_\lambda$. Como $p_{m+1} = pk_{n+1}$, tomando la elevación $h = k_{n+1}w_\lambda$ queda demostrado que p es fibración.

Resta por probar que i es cofibración trivial. En primer lugar veamos que $i_n: X_{n-1} \longrightarrow X_n$ es cofibración. La construcción de X_n es a través de un push-out como en (3), pero $\partial_0^\lambda: \mathcal{D}^{q_\lambda} \longrightarrow \mathcal{D}^{q_\lambda} \times I$ tiene la propiedad de elevación a izquierda respecto a las fibraciones por como hemos definido fibración, luego $\sqcup_\lambda \partial_0^\lambda$ también y así i_n tiene esta propiedad por ser el lado opuesto en un push-out. Por lo tanto, en particular, tiene la propiedad de elevación de homotopía respecto a fibraciones triviales y es cofibración.

Probar que i_n es equivalencia débil utilizaremos el siguiente lema.

Lema 2.1.8

Sea un diagrama push-out

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{u} & B \\
\downarrow i & & \downarrow j \\
X & \xrightarrow{v} & Y
\end{array} \tag{5}$$

en la categoría de los espacios exteriores. Si A es un retracto de deformación fuerte exterior de X , entonces B es un retracto de deformación fuerte exterior de Y .

Demostración:

Si A es un retracto de deformación fuerte exterior de X entonces existe $r: X \rightarrow A$ retracción con $ri = id_A$ y una deformación exterior $H: X \times I \rightarrow X$ verificando que $H(x, 0) = ir(x)$, $H(x, 1) = x$ y $H(i(a), t) = i(a)$ para todo $x \in X, t \in I, a \in A$. Si aplicamos la propiedad universal del push-out (5) a id_B y a $ur: X \rightarrow B$ existe una única $h: Y \rightarrow B$ verificando que $hj = id_B$ y $hv = ur$. Tomaremos h como retracción.

Veamos ahora que $jh \underset{\varepsilon}{\simeq} id_Y$. Primero recordemos que por el Teorema 1.3.5 $\mathcal{E}t(A \times I, B) \cong \mathcal{E}t(A, Top(I, B))$, por tanto $- \times I$ es adjunto a izquierda de $Top(I, -)$, por ello conserva colímites, luego push-outs. Así el cuadrado siguiente es push-out

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{u \times id_I} & B \times I \\ \downarrow i \times id_I & & \downarrow j \times id_I \\ X \times I & \xrightarrow{v \times id_I} & Y \times I \end{array}$$

Como $vH(i \times id_I) = vpr_1(i \times id_I) = jpr_1(u \times id_I)$, entonces por la propiedad universal del push-out aplicada a vH y a $jpr_1: B \times I \rightarrow Y$, existe una única $F: Y \times I \rightarrow Y$ con $F(v \times id_I) = vH$ y $F(j \times id_I) = jpr_1$. Probaremos que F es la deformación buscada. Primero $F\partial_0 = jh$ pues tenemos que $F\partial_0v = F(v \times id_I)\partial_0 = vH\partial_0 = vir = jur = jhv$. En segundo lugar $F\partial_1 = id_X$ ya que $F\partial_1v = F(v \times id)\partial_1 = vH\partial_1 = vid_X = id_Yv$. Además $F(j \times id_I) = jpr_1$ y por tanto F verifica las condiciones de la Definición 1.4.7. \square

Corolario 2.1.9

Se tiene que X_{n-1} es retracto de deformación fuerte exterior de X_n .

Demostración:

Dada $\partial_0^\lambda: \mathcal{D}^{q\lambda} \rightarrow \mathcal{D}^{q\lambda} \times I$ se verifica que $pr_1\partial_0^\lambda = id_{\mathcal{D}^{q\lambda}}$ con pr_1 exterior por la Nota 2.1.4. Definimos una homotopía $F_\lambda: \mathcal{D}^{q\lambda} \times I \times I \rightarrow \mathcal{D}^{q\lambda} \times I$ como $F_\lambda(x, t, s) = (x, ts)$ para todo $(x, t, s) \in \mathcal{D}^q \times I \times I$. Se tiene que $F_\lambda(x, t, 0) = (x, 0) = \partial_0 pr_1(x, t)$, $F_\lambda(x, t, 1) = (x, t)$ y $F_\lambda(x, 0, s) = (x, 0) = \partial_0(x)$ para todo $(x, t) \in \mathcal{D}^{q\lambda} \times I, s \in I$ y $x \in \mathcal{D}^{q\lambda}$. Así concluimos que \mathcal{D}^q es un retracto de deformación fuerte exterior de $\mathcal{D}^{q\lambda} \times I$. Es sencillo

comprobar que, como consecuencia de lo anterior, $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q\lambda}$ es un retracto de deformación fuerte de $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q\lambda} \times I$ sin más que tomar como deformación $\bigsqcup_{\lambda} F_{\lambda}$.

Ahora observemos que X_n se construye a partir de X_{n-1} por un push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q\lambda} & \xrightarrow{\bigsqcup_{\lambda} u_{\lambda}} & X_{n-1} \\ \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \partial_0^{\lambda} & & \downarrow i_n \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q\lambda} \times I & \xrightarrow{\bigsqcup_{\lambda} v_{\lambda}} & X_n \end{array}$$

que verifica las hipótesis del Lema 2.1.8 y por ello deducimos que X_{n-1} es un retracto de deformación fuerte exterior de X_n . \square

Ahora probemos que $i: X \rightarrow \tilde{X}$ es equivalencia débil.

Lema 2.1.10

La inclusión $i: X \rightarrow \tilde{X}$ es equivalencia débil.

Demostración:

Primero observemos que si $X^{\mathbb{N}} = \emptyset$ entonces no existe ninguna $u: \mathcal{D}^q = \mathbb{N} \times D^q \rightarrow X$ exterior, porque aplicando la Proposición 1.3.1 existiría $e(u): D^q \rightarrow X^{\mathbb{N}} = \emptyset$ lo que es contradictorio. Por ello concluimos que, por como construimos \tilde{X} , si $X^{\mathbb{N}} = \emptyset$ entonces $\tilde{X} = X$ y por lo tanto $i = id_X$ que es equivalencia débil.

Sea $X^{\mathbb{N}} \neq \emptyset$. Necesitamos demostrar que $i_*: \Pi_q^{\mathcal{E}}(X, a) \rightarrow \Pi_q^{\mathcal{E}}(\tilde{X}, ia)$ es una biyección para todo $q \geq 0$ y toda $a \in X^{\mathbb{N}}$. Dada $[f]^{\mathbb{N}} \in \Pi_q^{\mathcal{E}}(\tilde{X}, ia)$ un representante de $[f]^{\mathbb{N}}$ será de la forma $f: S^q \rightarrow \tilde{X}$.

Supongamos que toda $\beta: S^q \rightarrow \tilde{X}$ factoriza a través de un X_n para n suficientemente grande. Entonces se verifica que f factoriza como la composición $f: S^q \xrightarrow{f'} X_n \xrightarrow{k_n} \tilde{X}$ con k_n inclusión natural de X_n en el colímite, resultado que probaremos posteriormente. Sabemos que la composición finita de equivalencias débiles es equivalencia débil, luego como i_n, i_{n-1}, \dots, i_1 son equivalencias débiles lo es su composición $i_n i_{n-1} \dots i_1$.

De esta forma podemos encontrar $f'': S^q \rightarrow X$ tal que $(i_n i_{n-1} \dots i_1)_* [f''] = [f']$, pero $(k_n i_n i_{n-1} \dots i_1)_* [f''] = (k_n)_* [f'] = [f]$ y como $i = k_n i_n i_{n-1} \dots i_1$ se tiene que i_* es sobre.

Veamos que i_* es inyectiva. Sean $[f]^\mathbb{N}, [g]^\mathbb{N}$ en $\Pi_q^\mathcal{E}(X, a)$ tales que $i_*[f] = i_*[g]$, esto es existe una homotopía exterior $H: \mathcal{S}^q \times I \longrightarrow \tilde{X}$ con $H\partial_0 = if$ y $H\partial_1 = ig$. Supongamos demostrado que toda aplicación exterior de la forma $F: \mathcal{S}^q \times I \longrightarrow \tilde{X}$ factoriza a través de un X_m para m suficientemente grande. Haciendo uso de este resultado podemos afirmar que H factoriza a través de un X_m como una composición $H: \mathcal{S}^q \times I \xrightarrow{H'} X_m \xrightarrow{k_m} \tilde{X}$. Por el mismo argumento usado anteriormente $i_m i_{m-1} \dots i_1$ es equivalencia débil por lo que existe $H'': \mathcal{S}^q \times I \longrightarrow X$ verificando que $H''\partial_0 = f$ y $H''\partial_1 = g$. Así, tomando como homotopía H'' , queda probada la inyectividad de i_* . \square

Para finalizar probemos que i es cofibración.

Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i & & \downarrow q \\ \tilde{X} & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

con q fibración, vamos a probar que existe $g': \tilde{X} \longrightarrow E$ verificando que $g'i = f$ y $qg' = g$. Ahora bien, hemos demostrado que i_n tiene la propiedad de elevación a izquierda respecto a fibraciones, así que para $i_1: X \longrightarrow X_1$ tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i_1 & & \downarrow q \\ X_1 & \xrightarrow{gk_1} & B \end{array}$$

y podemos encontrar una elevación $g_1: X_1 \longrightarrow E$ con $i_1g_1 = f$ y $qg_1 = gk_1$, donde $k_n: X_n \longrightarrow \tilde{X}$ es la inclusión natural de X_n en el colímite para todo $n \in \mathbb{N}$. Para construir g_2 , tomamos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{g_1} & E \\ \downarrow i_2 & & \downarrow q \\ X_2 & \xrightarrow{gk_2} & B \end{array}$$

Puesto que i_2 también posee la propiedad a la que aludimos antes, existe $g_2: X_2 \longrightarrow E$ con $g_1i_2 = g_2$ y $qg_2 = gk_2$. Así podemos construir $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $g_{n-1}i_n = g_n$ y $qg_n = gk_n$. Aplicando la propiedad universal del colímite a $(E, \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ obtenemos la elevación

$g': \tilde{X} \rightarrow E$ que cumple que $g'k_n = g_n$ y por tanto $g'i = f$. Además, como se tiene que $qg_n = qg'k_n = gk_n$, aplicando otra vez la propiedad universal a $(B, \{qg'k_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ llegamos a que $qg' = g$.

Dado que i tiene la propiedad de elevación a izquierda respecto a fibraciones, también la tiene respecto a fibraciones triviales y es cofibración.

Con esto concluimos la demostración del apartado (a).

Ahora se trata de probar que f puede factorizarse como qj donde j es una cofibración seguida de una fibración trivial q .

Dada $f: X \rightarrow Y$ construimos un diagrama como el siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{j_1} & Y_1 & \xrightarrow{j_2} & Y_2 & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow f & \downarrow q_1 & \swarrow q_2 & & & \\ & & Y & & & & \end{array}$$

Sea $Y_0 = X, q_0 = f$, suponemos construido Y_{n-1} . Para construir Y_n se consideran los diagramas D_λ , con $\lambda \in \Lambda$, de la forma

$$\begin{array}{ccc} S^{q_\lambda-1} & \xrightarrow{u_\lambda} & Y_{n-1} \\ \downarrow \bar{i}_\lambda & & \downarrow q_{n-1} \\ D^{q_\lambda} & \xrightarrow{v_\lambda} & Y \end{array}$$

con $q_\lambda \geq 0$, $D^{q_\lambda} = \mathbb{N} \times D^{q_\lambda}$, $S^{q_\lambda-1} = \mathbb{N} \times S^{q_\lambda-1}$ e $\bar{i}_\lambda = \mathbb{N} \times i: \mathbb{N} \times S^{q_\lambda-1} \rightarrow \mathbb{N} \times D^{q_\lambda}$ para simplificar notación. Se definen Y_n y $j_n: Y_{n-1} \rightarrow Y_n$ por el push-out en $\mathcal{E}t$:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S^{q_\lambda-1} & \xrightarrow{\bigsqcup_{\lambda} u_\lambda} & Y_{n-1} \\ \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \bar{i}_\lambda & & \downarrow j_n \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} D^{q_\lambda} & \xrightarrow{i n_2} & Y_n \end{array}$$

Para definir q_n aplicamos la propiedad universal del push-out a q_{n-1} y a $\bigsqcup_{\lambda} v_\lambda$. Entonces $q_n i n_2 = \bigsqcup_{\lambda} v_\lambda$ y q_n extiende a q_{n-1} , es decir, $q_n j_n = q_{n-1}$.

Tomamos (\tilde{Y}, q) límite directo de $\{Y_n; q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y la aplicación $j: X \rightarrow \tilde{Y}$ como la inclusión natural del espacio X en el colímite \tilde{Y} . Se tiene que $f = qj$.

En primer lugar veamos que q es fibrición trivial. Para ello supongamos que toda aplicacón exterior $\tilde{\beta}: \mathcal{S}^q \rightarrow \tilde{Y}$ factoriza a travs de Y_n para n suficientemente grande y aplacemos la demostracón de este hecho para el final del capítulo. Por la construccón de cada Y_n gracias a push-outs sucesivos y siguiendo un razonamiento similar al empleado para probar en el apartado (a) que p es fibrición, podemos concluir que q tiene la propiedad de elevacón a derecha respecto a la aplicacónes $\bar{v}: \mathcal{S}^{q-1} \rightarrow \mathcal{D}^q$ para todo $q \geq 0$; lo que es equivalente, por la siguiente proposición, a que q sea fibrición trivial.

Proposición 2.1.11

La aplicacón $f: X \rightarrow Y$ es fibrición trivial si y sólo si f tiene la propiedad de elevacón a derecha respecto a las aplicacónes $\bar{v}: \mathcal{S}^{q-1} \rightarrow \mathcal{D}^q$ para todo $q \geq 0$.

Demostracón:

La aplicacón f tiene la propiedad de elevacón a derecha respecto a $\bar{v}: \mathcal{S}^{q-1} \rightarrow \mathcal{D}^q$ si existe una $h': \mathcal{D}^q \rightarrow X$ que hace conmutativo todo diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^{q-1} & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow \bar{v} & & \downarrow f \\ \mathcal{D}^q & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

para todo $q \geq 0$ en $\mathcal{E}t$.

Pero aplicando la ley exponencial por el Teorema 1.3.1 esto es equivalente a que $f^{\mathbb{N}}: X^{\mathbb{N}} \rightarrow Y^{\mathbb{N}}$, con la topologías $T_X^{\mathbb{N}}$ y $T_Y^{\mathbb{N}}$, tenga la propiedad de elevacón a derecha respecto a $i: \mathcal{S}^{q-1} \rightarrow \mathcal{D}^q$ para todo $q \geq 0$, en cualquier diagrama conmutativo en Top

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^{q-1} & \longrightarrow & X^{\mathbb{N}} \\ \downarrow i & & \downarrow f^{\mathbb{N}} \\ \mathcal{D}^q & \longrightarrow & Y^{\mathbb{N}} \end{array}$$

Por el resultado [Q; II.3.Lema1] esto es equivalente a que $f^{\mathbb{N}}$ sea fibrición trivial. Observemos que f es fibrición si y sólo si $f^{\mathbb{N}}$ es fibrición en Top , por el apartado (a) del Lema 2.1.7, y f es equivalencia débil si y sólo si $f^{\mathbb{N}}$ es equivalencia débil en Top por el apartado (b) de ese mismo lema. Así se tiene que f es fibrición trivial. \square

Ahora veamos que $j: X \rightarrow \tilde{Y}$ es cofibración. Primero probemos que cada $j_m: Y_{m-1} \rightarrow Y_m$ es cofibración. Recordemos que Y_m se obtiene a partir de Y_{m-1} por un push-out

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda} S^{q_{\lambda}-1} & \longrightarrow & Y_{m-1} \\ \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \bar{i}_{\lambda} & & \downarrow j_m \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} D^{q_{\lambda}} & \longrightarrow & Y_m \end{array}$$

pero por la Proposición que acabamos de demostrar $\bar{i}_{\lambda}: S_{\lambda}^{q-1} \rightarrow D^{q_{\lambda}}$ es una cofibración y por tanto $\bigsqcup_{\lambda} \bar{i}_{\lambda}$. Dado que j_m es el lado opuesto en un push-out de una cofibración, también lo es.

En el apartado (a) demostramos que si i_n es cofibración para todo $n \in \mathbb{N}$ y \tilde{X} se obtiene como colímite de $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $i: X \rightarrow \tilde{X}$ también lo es. Una demostración análoga permite afirmar que $j: X \rightarrow \tilde{Y}$ es cofibración.

Resta por probar que CM4 se verifica, es decir, que dado un diagrama de forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array} \quad (6)$$

tiene una elevación $h: B \rightarrow X$ que lo hace conmutativo si se tiene una de las siguientes condiciones:

- (a) i es cofibración y p fibración trivial.
- (b) i es cofibración trivial y p fibración.

El apartado (a) se tiene por definición de cofibración.

En cuanto a (b) dado el cuadrado conmutativo (6) podemos factorizar i como $\tilde{p}\tilde{i}$ donde \tilde{i} es cofibración trivial y \tilde{p} fibración por CM5 (a). Dado que ya hemos probado CM2, \tilde{p} también es equivalencia débil, luego fibración trivial y existe una elevación en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{A} \\ \downarrow i & & \downarrow \tilde{p} \\ B & \xrightarrow{id_B} & B \end{array}$$

$s: B \longrightarrow \tilde{A}$ que lo hace conmutativo por $CM4(a)$. Entonces i es retracto de \tilde{i} pues existen $\varphi \in Mor_{\mathcal{E}t}(i, \tilde{i}), \psi \in Mor_{\mathcal{E}t}(\tilde{i}, i)$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id_A} & A \\
 \downarrow i & & \downarrow \tilde{i} \\
 B & \xrightarrow{s} & \tilde{A} \\
 & \varphi &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id_A} & A \\
 \downarrow \tilde{i} & & \downarrow i \\
 \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{p}} & B \\
 & \psi &
 \end{array}$$

con $\psi\varphi = id_i$.

Puesto que \tilde{i} es la cofibración trivial obtenida por el proceso de factorización, tiene la propiedad de elevación a izquierda respecto a fibraciones. Luego i , que es retracto suyo, también la tiene por $CM3$.

Han quedado pendientes de demostración varias afirmaciones de naturaleza similar. Primero que toda aplicación exterior de la forma $\alpha: D^q \longrightarrow \tilde{X}, \beta: S^q \longrightarrow \tilde{X}$ ó $F: S^q \times I \longrightarrow \tilde{X}$ factoriza para n suficientemente grande a través de un X_n , en la construcción efectuada en $CM5(a)$.

En segundo lugar que toda aplicación de la forma $\bar{\beta}: S^q \longrightarrow \tilde{Y}$ factoriza a través de un Y_n para n suficientemente grande, en la construcción realizada en $CM5(b)$.

Su demostración requiere una serie de resultados.

Lema 2.1.12

En la categoría $\mathcal{E}t$ dado el cuadrado push-out

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow i & & \downarrow \bar{i} \\
 X & \xrightarrow{\bar{f}} & Z
 \end{array}$$

con i inyectiva se verifica que:

- (a) Si $i(A)$ es cerrado en X , entonces $\bar{i}(Y)$ es cerrado en Z . Además \bar{i} es inyectiva.
- (b) Si i es cerrada entonces \bar{i} es cerrada.
- (c) Si i es cerrada exteriormente entonces \bar{i} es cerrada exteriormente.

Demostración:

(b) El conjunto Z puede verse como el cociente $X \sqcup Y / \sim$ donde \sim es una relación de equivalencia generada por las relaciones $x \sim y$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $i(a) = x, f(a) = y$. En Z tenemos la topología y externología push-out obtenidas tomando en $X \sqcup Y$ la topología y externología suma y luego la topología y externología cociente de la relación de equivalencia \sim .

Como i es inyectiva por hipótesis, existen los siguientes tipos de clases de equivalencia: unipuntuales en X , $[x] = \{x\}$ si $x \notin \text{Im}i$, unipuntuales en Y , $[y] = \{y\}$ si $y \notin \text{Im}f$ y, por último, $[y] = \{y\} \sqcup \{x; i(a) = x \text{ con } a \in f^{-1}(y)\}$.

Para probar (b) tomamos F cerrado en Y , entonces $f^{-1}(F)$ es cerrado por ser f continua; además $if^{-1}(F)$ es cerrado por ser i cerrada. Entonces $if^{-1}(F) \sqcup F$ es cerrado y saturado para $p: X \sqcup Y \longrightarrow X \sqcup Y / \sim$; esto es, $p^{-1}p(if^{-1}(F) \sqcup F) = if^{-1}(F) \sqcup F$ pues $if^{-1}(F) \sqcup F \subset p^{-1}p(if^{-1}(F) \sqcup F)$ siempre y el otro contenido se verifica por i inyectiva.

Por tanto $p(if^{-1}(F) \sqcup F)$ es cerrado en Z , por ser imagen de un cerrado saturado por p . Luego $\bar{i}(F) = p(if^{-1}(F) \sqcup F)$ es cerrado.

(a) Si i es inyectiva es claro que \bar{i} también lo es. Debido a que $\bar{i}(F) = p(if^{-1}(F) \sqcup F)$, como Y es cerrado se tiene que $if^{-1}(Y) = i(A)$, cerrado por hipótesis, y por tanto $\bar{i}(Y) = p(if^{-1}(Y) \sqcup Y)$ es cerrado, con lo que hemos probado (a).

(c) Para externologías la demostración es análoga a la de (b). \square

Observaciones 2.1.13

(a) Si $Y \in \mathcal{E}t$ y $\mathcal{E}_Y \neq T_X$, $\bar{i}(Y)$ no es cerrado exterior en Z porque Y no es cerrado exterior en sí mismo ya que $Y^c = \emptyset \notin \mathcal{E}_Y$.

(b) En la construcción de $CM4(a)$ cada X_n se obtiene como un push-out que satisface las hipótesis del Lema 2.1.12 y, por tanto, $i_n: X_{n-1} \longrightarrow X_n$ es inyectiva. Por ello, por abuso de notación escribiremos $X \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset \tilde{X}$.

(c) La construcción de los Y_n realizada en $CM4(b)$ también es a través de un push-out que verifica las hipótesis del Lema 2.1.12 y así $j_n: Y_{n-1} \longrightarrow Y_n$ es inyectiva. De esta forma, podemos considerar que $X \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots \subset \tilde{Y}$.

Si $X^{\mathbb{N}} = \emptyset$, entonces $X = \tilde{X}$. En otro caso $X^{\mathbb{N}} \neq \emptyset$ y se tiene que $X_n \setminus X_{n-1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Análogamente para \tilde{Y} de $CM4(b)$.

Recordemos la construcción de \tilde{X} . Todo X_n es el resultado de un push-out.

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q_\lambda} & \longrightarrow & X_{n-1} \\ \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \partial_0^\lambda & & \downarrow i_n \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q_\lambda} \times I & \longrightarrow & X_n \end{array}$$

donde ∂_0^λ es cerrada, inyectiva, y por tanto $\bigsqcup_{\lambda} \partial_0^\lambda$ también. Así según el Lema 2.1.12 se tiene que X_{n-1} es cerrado en X_n para todo $n \in \mathbb{N}$. De este hecho se deduce que $X = X_0$ es cerrado en X_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Si probamos que \tilde{X} tiene la topología débil concluiríamos que $X_0 = X$ es cerrado en \tilde{X} .

Similarmente si \tilde{Y} tiene la topología débil podríamos deducir que $X = Y_0$ es cerrado en \tilde{Y} .

Lema 2.1.14

La topología que se obtiene en \tilde{X} mediante la suma disjunta de las topologías de X_n , $n \in \mathbb{N}$ y más tarde tomando la topología cociente inducida por la relación de equivalencia $x \sim i_1(x) \sim i_2 i_1(x) \sim \dots \sim i_n i_{n-1} \dots i_1(x) \sim \dots$, $T_{\tilde{X}}$, es la topología débil.

Demostración:

Dado \tilde{U} , es abierto en $\tilde{X} = \bigsqcup_n X_n / \sim$ si y sólo si $\tilde{U} = p(U)$ con U abierto saturado en $\bigsqcup_n X_n$, esto es $p^{-1}p(U) = U$.

Veamos que si \tilde{U} es abierto en \tilde{X} en la topología $T_{\tilde{X}}$ también lo es en la topología débil T_{de} .

Si \tilde{U} abierto en $\tilde{X} = \bigsqcup_n X_n / \sim$, $\tilde{U} = p(U)$ con U abierto saturado en $\bigsqcup_n X_n$, luego $\tilde{U} \cap X_n = p(U) \cap X_n = t_n^{-1} p^{-1} p(U) = t_n^{-1}(\tilde{U})$ que es abierto por ser t_n continua para todo n , con $t_n: X_n \rightarrow \bigsqcup_n X_n$ la inclusión canónica.

Ahora dado \tilde{U} en \tilde{X} abierto en la topología débil T_{de} , esto significa que $\tilde{U} \cap X_n$ es abierto para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos $X_n \xrightarrow{t_n} \bigsqcup_n X_n \xrightarrow{p} \bigsqcup_n X_n / \sim$ y $\tilde{U} \cap X_n = t_n^{-1} p^{-1}(\tilde{U})$ es abierto en X_n para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $p^{-1}(\tilde{U})$ es abierto en $\bigsqcup_n X_n$. Además $p^{-1}(\tilde{U})$ es saturado, ya que $p^{-1} p p^{-1}(\tilde{U}) = p^{-1}(\tilde{U})$ por p sobre. De esta forma $\tilde{U} = p p^{-1}(\tilde{U})$ es abierto en la topología $T_{\tilde{X}}$ y podemos concluir que $T_{de} = T_{\tilde{X}}$. \square

Podemos anunciar un lema similar para externologías.

Lema 2.1.15

La externología que se obtiene en \tilde{X} mediante la suma disjunta de las externologías de X_n , $n \in \mathbb{N}$, y más tarde tomando la externología cociente inducida por la relación de equivalencia $x \sim i_1(x) \sim i_2 i_1(x) \sim \dots \sim i_n i_{n-1} \dots i_1(x) \sim \dots$, $\mathcal{E}_{\tilde{X}}$, es la externología débil.

Su demostración es análoga a la del Lema 2.1.14.

Lema 2.1.16

Sea $p \in X_n \setminus X$ entonces $\{p\}$ es cerrado y cerrado exterior en X_n .

Demostración:

Recordemos que para m tal que $1 \leq m \leq n$ el espacio exterior X_m se obtiene por el push-out en $\mathcal{E}t$:

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q_\lambda} & \longrightarrow & X_{m-1} \\
 \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \partial_0^\lambda & & \downarrow i_m \\
 \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q_\lambda} \times I & \longrightarrow & X_m
 \end{array}$$

En X_n tenemos la topología y externología débiles por el Lema 2.1.14 y el Lema 2.1.15. Se tiene que para un cierto m , $1 \leq m \leq n$, $p \in X_m \setminus X_{m-1}$, así $p \in \mathcal{D}^{q_\lambda} \times I$. Por ser $\{p\}$ compacto y cerrado se tiene que $\{p\}$ es cerrado exteriormente en $\mathcal{D}^{q_\lambda} \times I$. También $\{p\}$ es cerrado y cerrado exteriormente en $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^{q_\lambda} \times I$. Además $\{p\} \cap X_l = \emptyset$ para todo $l \leq m - 1$. Como consecuencia $\{p\}$ es cerrado y cerrado exteriormente en X_m . Aplicando el Lema 2.1.12 se tiene que $i_r: X_{r-1} \rightarrow X_r$ es cerrada y cerrada exteriormente, para todo $r \in \mathbb{N}$ y así también la composición $t = i_n \dots i_{m+1}: X_m \rightarrow X_n$, por ello $\{p\}$ es cerrado y cerrado exteriormente en X_n . \square

Lema 2.1.17

Sea $K \subset \tilde{X}$ con K compacto, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset X_n$.

Demostración:

Razonemos por reducción al absurdo. Si no existe tal n , dado $n_1 \geq 0$ existe $k_1 \in K$ verificando que $k_1 \in X_{n_1} \setminus X_{n_1-1}$. Como $K \not\subset X_{n_1}$ podemos encontrar $k_2 \in K$ con $k_2 \in X_{n_2} \setminus X_{n_2-1}$. Podemos repetir la construcción para todo $i \in \mathbb{N}$ y encontrar una sucesión k_i tal que $k_i \in X_{n_i} \setminus X_{n_i-1}$. Además podemos suponer que $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$. Sea $T = \{k_i; i \in \mathbb{N}\}$; es claro que $T \subset K$ y es un conjunto numerable. Veamos que T es un conjunto cerrado y que posee la topología discreta.

Dado $S \subseteq T$, tenemos que $S \cap X_n$ es finito y $S \cap X_n \cap X = \emptyset$, por como ha sido construida la sucesión. Por el Lema 2.1.16 todo punto es cerrado y como $S \cap X_n$ es unión finita de cerrados, es cerrado en X_n para cada $n \geq 0$. Así S es cerrado en \tilde{X} por el Lema 2.1.14 y T tiene la topología discreta y T es cerrado.

Con esto llegamos a un absurdo, pues por un lado T es un cerrado contenido en un compacto K , luego compacto, y por otro es numerable y discreto. \square

Proposición 2.1.18

Sea Z espacio exterior, con una topología Hausdorff, σ -compacto y localmente compacto y dotado con la externología de los complementos de los cerrados y compactos. Entonces dado $f: Z \rightarrow \tilde{X}$ exterior, siempre existe un n tal que f factoriza a través de X_n .

Demostración:

Por [Du; XI.7.2] al ser Z , Hausdorff, σ -compacto y localmente compacto existe una sucesión creciente de compactos $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verificando que $K_0 \subset K_1^0 \subset K_1 \subset K_2^0 \subset K_2 \subset \dots$ y que $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = Z$.

Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que f no factoriza a través de ningún X_n .

Por el Lema 2.1.17 tenemos que $f(K_i) \subset X_{n_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ con $n_i \geq n_{i-1}$ porque $K_{i-1} \subset K_i$. Podemos tomar $n_i > n_{i-1}$. Si f no factoriza existe una sucesión $k: \mathbb{N} \rightarrow Z$ tal que $k(i) = k_i \in K_i \setminus K_{i-1}$ y $f(k_i) \notin X_{n_{i-1}}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Veamos que k es externa. En Z tenemos \mathcal{E}_{cc}^Z y en \mathbb{N} tenemos $\mathcal{E}_{cc}^{\mathbb{N}}$; dado $T^c \in \mathcal{E}_{cc}^Z$, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ con $K_n^c \subset T^c$. Por como hemos construido la sucesión, $k^{-1}(K_n^c) \in \mathcal{E}_{cc}$ y así $k^{-1}(T^c) \in \mathcal{E}_{cc}^{\mathbb{N}}$. También k es continua por tener en \mathbb{N} la topología discreta. Por tanto k es exterior.

De esta forma podemos definir una aplicación $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \tilde{X}$ como $\sigma = fk$. Así, como f es exterior por hipótesis, σ lo es por composición de exteriores. La aplicación σ cumple

que $\sigma(i) \in X_{n_i} \setminus X_{n_i-1}$ y que $\sigma(i) \notin X$, pero una aplicación de esta manera no puede existir como se prueba en el siguiente lema.

Lema 2.1.19

No existe $\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \tilde{X}$ exterior tal que $\sigma(i) \in X_{n_i} \setminus X_{n_i-1}$ y $n_i \longrightarrow \infty$.

Demostración:

Veamos que $Im\sigma$ es cerrado en \tilde{X} . Sabemos que $Im\sigma \cap X_n$ es finito y que $Im\sigma \cap X_n \cap X = \emptyset$, por lo que es cerrado exterior en X_n para todo $n \in \mathbb{N}$ por el Lema 2.1.16. Por tanto $Im\sigma$ es cerrado exterior en \tilde{X} . Ahora bien $\sigma^{-1}\sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, que es cerrado exterior por ser σ externa, pero \mathbb{N} no es cerrado exterior porque es no compacto y así deducimos que no existe tal aplicación $\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \tilde{X}$. \square

Es posible demostrar resultados similares a los 2.1.14, 2.1.16, 2.1.17 y 2.1.19 para la construcción de \tilde{Y} realizada en $CM4(b)$ y así podemos probar un resultado análogo a la Proposición 2.1.18.

Proposición 2.1.20

Sea Z espacio exterior, T_2 , σ -compacto y localmente compacto con la externología de los complementos de los cerrados y compactos. Entonces dada $f: Z \longrightarrow \tilde{Y}$ exterior, siempre existe n tal que f factoriza a través de Y_n .

Si tomamos $Z = \mathcal{D}^q$, $Z = \mathcal{S}^{q-1}$ ó $\mathcal{S}^{q-1} \times I$ para todo $q \geq 0$, como se trata de espacios Hausdorff, σ -compactos y localmente compactos basta aplicar la Proposición 2.1.18 y su análoga la Proposición 2.1.20 para probar los resultados pendientes.

Notas 2.1.21

(a). En la categoría de los espacios exteriores $\mathcal{E}t$, tenemos ahora una estructura de categoría de modelos cerrada, que denominaremos “exterior”. Consideremos $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, categoría de los espacios exteriores bajo \mathbb{N} , esto es, espacios exteriores con una sucesión base y aplicaciones exteriores bajo \mathbb{N} , o lo que es lo mismo, que preservan las sucesiones base. Consideremos $\mathcal{U}: \mathcal{E}t^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{E}t$ el funtor olvido definido en la Sección 0.1 para una categoría arbitraria. Por el Teorema 0.1.6 tenemos que se induce una estructura de categoría de modelos cerrada “exterior”. De forma más detallada, las fibraciones son aquellas aplicaciones exteriores bajo \mathbb{N} , f , tales que $\mathcal{U}f = f$ tiene la propiedad de elevación de homotopía a derecha

respecto a $\partial_0: \mathcal{D}^q \longrightarrow \mathcal{D}^q \times I$ para todo $q \geq 0$ en $\mathcal{E}t$. Por equivalencias débiles entendemos las aplicaciones exteriores bajo \mathbb{N} , $f: (X, j_X) \longrightarrow (Y, j_Y)$ tal que $\mathcal{U}f = f: X \longrightarrow Y$ es una equivalencia débil exterior en $\mathcal{E}t$. Por último las cofibraciones son aplicaciones exteriores bajo \mathbb{N} tales que tienen la propiedad de elevación a izquierda respecto a las fibraciones que además son equivalencias débiles.

(b). En capítulos posteriores demostraremos que existe otra estructura de categoría de modelos cerrado para $\mathcal{E}t$, con otras fibraciones, cofibraciones, equivalencias débiles, etc. A los conceptos definidos en los Capítulos 1 y 2 los denominaremos “exteriores” para diferenciarlos de los posteriores. Así hablaremos de fibraciones exteriores, cofibraciones exteriores, ..., abreviadamente \mathcal{E} -fibraciones, \mathcal{E} -cofibraciones, etc. A $\mathcal{E}t$ considerada con la estructura exterior de categoría de modelos cerrada la denotaremos, $\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}$. Utilizaremos esta notación siempre que pueda existir confusión.

2.2 Teoremas de Whitehead.

Comencemos definiendo una nueva noción, la de \mathbb{N} -complejo.

Definición 2.2.1 Sea $X \in \mathcal{E}t$, se dice que es un \mathbb{N} -complejo si admite una filtración $X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X$ con $X_{-1} = \emptyset$ tal que X está provisto de la topología y externología débiles respecto a la filtración anterior y cada X_n se obtiene de X_{n-1} a través de un push-out en $\mathcal{E}t$ de la forma:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_{\lambda}^{n-1} & \xrightarrow{\bigsqcup_{\lambda} g_{\lambda}^n} & X_{n-1} \\ \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \bar{v}_{\lambda} & & \downarrow i_n \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_{\lambda}^n & \xrightarrow{\bigsqcup_{\lambda} f_{\lambda}^n} & X_n \end{array}$$

A cada $f_{\lambda}^n(\mathcal{D}_{\lambda}^n)$ la denominaremos \mathbb{N} -celda. A $g_{\lambda}^n: \mathcal{S}_{\lambda}^{n-1} \longrightarrow X_{n-1}$ la llamaremos *aplicación de pegamiento* y a cada $f_{\lambda}^n: \mathcal{D}_{\lambda}^n \longrightarrow X_n$ *aplicación característica* de dicha \mathbb{N} -celda.

Designaremos por n -esqueleto al término n -ésimo de la filtración anterior de X, X_n .

Recordemos que por la Proposición 2.1.5 todo objeto es fibrante en $\mathcal{E}t$.

Por el Teorema 0.2.2 si $X, Y \in \mathcal{E}t$ son además cofibrantes, dada $f: X \longrightarrow Y$ exterior,

es equivalencia débil si y sólo si f es equivalencia de homotopía exterior. Esto sugiere que sería interesante prestar atención a los objetos cofibrantes en $\mathcal{E}t$.

Teorema 2.2.2

Todo \mathbb{N} -complejo $X \in \mathcal{E}t$ es objeto cofibrante en $\mathcal{E}t$.

Demostración:

Dado X \mathbb{N} -complejo en $\mathcal{E}t$ es preciso probar que la aplicación $\emptyset \longrightarrow X$ es cofibración. Procederemos por inducción.

Para $n = 0$ tenemos que $\mathcal{S}^{n-1} = \emptyset, \mathcal{D}^n = \mathbb{N} \times \{*\}$ y X_0 se obtiene mediante el push-out en $\mathcal{E}t$:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_\lambda^{-1} & \longrightarrow & \emptyset \\ \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \bar{z}_\lambda & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_\lambda^0 & \longrightarrow & X_0 \end{array}$$

Por la Proposición 2.1.11 $\bar{z}: \mathcal{S}^{n-1} \longrightarrow \mathcal{D}^n$ es \mathcal{E} -cofibración para todo $n \geq 0$, luego $\bar{z}: \mathcal{S}^{-1} \longrightarrow \mathcal{D}^0$ es \mathcal{E} -cofibración y por tanto también $\bigsqcup_{\lambda} \bar{z}_\lambda: \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_\lambda^{-1} \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda} \mathcal{D}_\lambda^0$. Así como $\emptyset \longrightarrow X_0$ es el lado opuesto a \bar{z} en un push-out, es \mathcal{E} -cofibración.

Tenemos que X_n se obtiene por el push-out en $\mathcal{E}t$.

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_\lambda^{n-1} & \longrightarrow & X_{n-1} \\ \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \bar{z}_\lambda & & \downarrow i_n \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_\lambda^n & \longrightarrow & X_n \end{array}$$

Reiterando los argumentos empleados para $n = 0$ concluimos que $X_{n-1} \longrightarrow X_n$ es \mathcal{E} -cofibración.

Si X es \mathbb{N} -complejo entonces es colímite de $X_n, X = \text{colim } X_n$. De esta forma tenemos que $\emptyset \longrightarrow X$ es \mathcal{E} -cofibración sin más que repetir los razonamientos empleados en el Teorema 2.1.6 para demostrar CM5. \square

Proposición 2.2.3

Dados $A, B, C \in \mathcal{E}t$, localmente compactos, con topologías Hausdorff y tal que las externologías en B y C son las de los complementos de los compacto-cerrados. Sea X el espacio obtenido mediante el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow g & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & X \end{array}$$

Entonces se verifica que:

- (a) La externología push-out es menos fina que la de los complementos de los compacto-cerrados en X , \mathcal{E}_{cc}^X .
- (b) Si f y g son propias, g inyectiva, la externología push-out y la de los complementos de los compacto-cerrados en X coinciden.

Demostración:

(a) El espacio push-out X se obtiene haciendo la suma disjunta de B y C , $B \sqcup C$, y luego cociente la relación \sim generada por $b \sim c$ si existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ y $g(a) = c$, así tenemos $p: B \sqcup C \longrightarrow B \sqcup C / \sim = X$.

En X tenemos la topología y externología push-out que coinciden con la topología y externología débiles por el Lema 2.1.14.

Dado \tilde{U} abierto exterior en X , es de la forma $\tilde{U} = p(U)$ con U abierto exterior saturado en $B \sqcup C$. El abierto exterior U es de la forma $U = U_1 \sqcup U_2$ con U_1 complemento de un cerrado y compacto en B , que denotaremos K_1 , y U_2 complemento de un cerrado y compacto en C , que denotaremos K_2 . Se tiene que \tilde{U}^c es un cerrado y además $\tilde{U}^c = (p(U))^c = pp^{-1}((p(U))^c) = p(p^{-1}(p(U))^c) = p(U^c)$ por ser p sobre y U saturado. Por tanto $\tilde{U}^c = p(K_1 \cup K_2)$, luego es compacto.

Así hemos probado que la externología de los complementos de los compacto-cerrados en X , \mathcal{E}_{cc}^X , es más fina que la externología push-out, \mathcal{E}_{po} .

(b) Ahora demostraremos que si f y g son propias y g inyectiva, entonces $\mathcal{E}_{cc}^X \subset \mathcal{E}_{po}$ y ambas externologías coinciden.

Dado K^c complemento de un cerrado y compacto en X , es necesario ver que es un abierto exterior en la externología push-out. Tenemos que $K^c \in \mathcal{E}_{po}$ si y sólo si

$i_2^{-1}p^{-1}(K^c)$ es abierto exterior en C y $i_1^{-1}p^{-1}(K^c)$ es abierto exterior en B , donde $i_1: B \rightarrow B \sqcup C, i_2: C \rightarrow B \sqcup C$ y $p: B \sqcup C \rightarrow B \sqcup C / \sim$ son las aplicaciones canónicas. Pero por la Proposición 1.1.12 la afirmación realizada es equivalente a asegurar que i_1, i_2, p sean aplicaciones propias.

Se tiene que i_1, i_2 son propias. Esto es claro ya que todo compacto y cerrado en $B \sqcup C$ es de la forma $K_1 \sqcup K_2$ con K_1 cerrado y compacto en B y K_2 cerrado y compacto en C , y como $i_1^{-1}(K_1 \sqcup K_2) = K_1, i_2^{-1}(K_1 \sqcup K_2) = K_2$, queda probada la afirmación.

Para demostrar que $p: B \sqcup C \rightarrow B \sqcup C / \sim$ es propia empleamos [Ba.2; I.1.13] combinado con el resultado [J; 2.61], que afirma que una aplicación cerrada $f: X \rightarrow Y$ es propia si y sólo si $f^{-1}(y)$ es compacta para todo $y \in Y$. Veamos primero que p es cerrada. Sea $B' \sqcup C'$ cerrado en $B \sqcup C$. Entonces B' es cerrado en B y C' cerrado en C . La saturación de $B' \sqcup C'$ es $p^{-1}p(B' \sqcup C') = B' \sqcup C' \sqcup fg^{-1}(C') \sqcup gf^{-1}(B')$. Por ser f y g propias son cerradas, luego tanto $fg^{-1}(C')$ como $gf^{-1}(B')$ son cerrados en $B \sqcup C$. Como $pp^{-1}p(B' \sqcup C') = p(B' \sqcup C')$, entonces $p(B' \sqcup C')$ es cerrado en $B \sqcup C / \sim$ por ser imagen de un cerrado saturado.

Por último probemos que p es de fibra compacta. Sea $[x] \in B \sqcup C / \sim$ con $x \in C \setminus \text{Im}g$ entonces $p^{-1}([x]) = \{x\}$. Análogamente si $x \in B \setminus \text{Im}f$ $p^{-1}([x]) = \{x\}$. Si $x \in \text{Im}g$ entonces $p^{-1}([x]) = f^{-1}fg^{-1}(x) \sqcup \{x\}$. Como g es inyectiva, $g^{-1}(x) = a$ y dado que f es propia, es de fibra compacta. Luego $f^{-1}(f(a))$ es compacta y $p^{-1}([x])$ es compacta. Si $x \in \text{Im}f, p^{-1}([x]) = g^{-1}gf^{-1}(x) \sqcup \{x\}$. Como sabemos $f^{-1}(x)$ es compacta y g inyectiva por hipótesis, tenemos que $g^{-1}gf^{-1}(x) = f^{-1}(x)$ y por tanto $p^{-1}([x])$ es compacto. \square

Teorema 2.2.4

Un CW -complejo localmente finito, de dimensión finita y con una cantidad numerable de celdas ó vacía en cada dimensión, admite una estructura de \mathbb{N} -complejo con un número finito de \mathbb{N} -celdas.

Demostración:

Sea X CW -complejo verificando las hipótesis del enunciado.

El proceso de obtención del q -esqueleto a partir del $q - 1$ esqueleto se lleva a cabo pegando q -celdas mediante push-outs

$$\begin{array}{ccc}
S_n^{q-1} & \xrightarrow{g_n^q} & X_{q-1} \\
\downarrow i & & \downarrow \\
D_n^q & \xrightarrow{f_n^q} & X_q
\end{array}$$

Si existe una cantidad numerable de q -celdas pueden agruparse en una \mathbb{N} -celda y pegar todas las celdas de dimensión q a la vez. Su aplicación característica sería $f^q: \mathcal{D}^q \longrightarrow X_q$ definida como $f^q(n, x) = f_n^q(x)$ para todo $(n, x) \in \mathcal{D}^q = \mathbb{N} \times D^q$.

Así la construcción del q -esqueleto se realizaría pegando una única \mathbb{N} -celda mediante el push-out

$$\begin{array}{ccc}
S^{q-1} = \mathbb{N} \times S^{q-1} & \xrightarrow{g^q} & X_{q-1} \\
\downarrow id_{\mathbb{N}} \times i & & \downarrow i_q \\
\mathcal{D}^q = \mathbb{N} \times D^q & \xrightarrow{f^q} & X_q
\end{array} \tag{1}$$

con $g^q(n, x) = g_n^q(x)$ para todo $(n, x) \in S^{q-1}$, aplicación pegamento de la \mathbb{N} -celda. Resta por probar que (1) es un push-out en $\mathcal{E}t$ si en X_q y X_{q-1} consideramos las topologías existentes, en D^q y S^{q-1} las topologías establecidas a comienzo de este capítulo, y en todos las externologías de los complementos de los compacto-cerrados.

Esto equivale a afirmar que las aplicaciones son propias. Sabemos que $id_{\mathbb{N}} \times i$ es propia, veamos que g^q es propia. Por la Definición 1.1.11 es preciso probar que para todo K compacto y cerrado en X_{q-1} , $(g^q)^{-1}(K)$ es compacto en S^{q-1} . Aplicando [Sw; 5.7] tenemos que todo K compacto en X sólo corta a un número finito de celdas de dimensión $q-1$, $E_1^{q-1}, \dots, E_n^{q-1}$, por lo tanto sólo es necesario demostrar que $(g^q)^{-1}(E_{q-1}^q)$ es compacto en S^{q-1} . Supongamos que no lo es, entonces $(g^q)^{-1}(E_{q-1}^q)$ corta a un número infinito de D^q lo que contradice la hipótesis de que X es un CW -complejo localmente finito y que por ello cada $q-1$ celda es sólo cara de un número finito de q -celdas. En el caso de que el no existan $q-1$ celdas el argumento es similar. Ahora, como (1) verifica las hipótesis de la Proposición 2.2.3, pues $id_{\mathbb{N}} \times i$, g^p son propias e $id_{\mathbb{N}} \times i$ inyectiva, concluimos que todas las aplicaciones son propias (o exteriores). \square

Recordemos que $(\mathcal{E}t)_{cf} = (\mathcal{E}t)_c$. Quillen definió las relaciones de homotopía a izquierda y a derecha en una categoría de modelos arbitraria en [Q; I.2.Definición 1] y su dual. Si consideramos la categoría $\mathcal{E}t_c$ coinciden por [Q; I.2.Corolario 1].

Denotamos por (I, V) el conjunto de aplicaciones continuas $f: I \longrightarrow V$ verificando que $f(I) \subset V$.

Definición 2.2.5 Dado $Y \in \mathcal{E}t$ definimos el *espacio de caminos* de Y en $\mathcal{E}t$, denotado Y^I como el conjunto de aplicaciones continuas $f: I \longrightarrow Y$ dotado de la topología compactoabierta T_{ca} y la externología \mathcal{E}_{Y^I} definida como sigue: $U \in E_{Y^I}$ si $U \in T_{ca}$ y además existe $V \in \mathcal{E}_Y$ tal que $(I, V) \subset U$.

Lema 2.2.6

En el espacio exterior Y^I de la Definición 2.2.5 se verifica que las aplicaciones $q_t: Y^I \longrightarrow Y$ con $t \in I$ tales que $q_t(f) = f(t)$ para todo $f \in Y^I$ son exteriores.

Demostración:

Es claro que es continua. Para ver que externa tomamos $V \in \mathcal{E}_Y$. Sea $f \in Y^I$ tal que $q_t(f) = f(t) \in V$. Observamos que $(\{t\}, V) = \{g \in Y^I; g(t) \in V\} = q_t^{-1}(V)$ y como $(I, V) \subset (\{t\}, V) \in T_{ca}$ por definición de externología, $(\{t\}, V) \in \mathcal{E}_{Y^I}$ y por tanto q_t es exterior. \square

Proposición 2.2.7

Sean la aplicaciones $d_i: Y^I \longrightarrow Y$ definidas como $d_i(f) = f(i)$ para $i = 0, 1$. Se tiene que $(d_0, d_1): Y^I \longrightarrow Y \times Y$ es \mathcal{E} -fibración.

Demostración:

Por el Lema 2.2.6 se tiene que d_0 y d_1 son exteriores y por tanto también (d_0, d_1) . Para ver que (d_0, d_1) es \mathcal{E} -fibración es preciso probar que todo diagrama conmutativo en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times D^q & \longrightarrow & Y^I \\ \downarrow \partial_0 & & \downarrow (d_0, d_1) \\ \mathbb{N} \times D^q \times I & \xrightarrow{G} & Y \times Y \end{array}$$

existe una elevación $G': \mathbb{N} \times D^q \times I \longrightarrow Y^I$ que lo hace conmutativo, para todo $q \geq 0$. Aplicando la ley exponencial al diagrama anterior, por el Teorema 1.3.1, obtenemos otro diagrama conmutativo en Top

$$\begin{array}{ccc}
D^q & \longrightarrow & (Y^I)^\mathbb{N} \\
\downarrow \partial_0 & & \downarrow (d_0, d_1)^\mathbb{N} \\
D^q \times I & \longrightarrow & (Y \times Y)^\mathbb{N}
\end{array}$$

donde en $(Y^I)^\mathbb{N}$ tenemos la topología $T_{Y^I}^\mathbb{N}$ y en $(Y \times Y)^\mathbb{N}$ la topología $T_{Y \times Y}^\mathbb{N}$.

Es casi inmediato demostrar que $(Y \times Y)^\mathbb{N}$ es homeomorfo a $Y^\mathbb{N} \times Y^\mathbb{N}$.

Veamos que $(Y^I)^\mathbb{N}$ es homeomorfo a $(Y^\mathbb{N})^I$.

Sea $\sigma: (Y^\mathbb{N})^I \longrightarrow (Y^I)^\mathbb{N}$ definida para toda $f \in (Y^I)^\mathbb{N}$ como $\sigma(f): \mathbb{N} \longrightarrow (Y)^I$ con $\sigma(f)(n)(t) = f(t)(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in I$. Sea un elemento de la subbase de $T_{Y^I}^\mathbb{N}$, $S(m_\leq, (I, E))$ donde $E \in \mathcal{E}_Y$ entonces se tiene que $\sigma^{-1}(S(m_\leq, (I, E))) = (I, S(m_\leq, E))$ que es un elemento de la subbase de T_{ca} de $(Y^\mathbb{N})^I$. Los otros elementos de la subbase de $T_{Y^I}^\mathbb{N}$ son de la forma $S(\{p\}, (K, U))$ con $(K, U) \in T_{ca}^{Y^I}$ y $\sigma^{-1}(S(\{p\}, (K, U))) = (K, S(\{p\}, U))$ que es un elemento de la subbase de T_{ca} de $(Y^\mathbb{N})^I$ y concluimos que σ es continua.

Además podemos definir $\bar{\sigma}: (Y^I)^\mathbb{N} \longrightarrow (Y^\mathbb{N})^I$ para toda $g \in (Y^I)^\mathbb{N}$ como $\bar{\sigma}: I \longrightarrow Y^\mathbb{N}$ con $\bar{\sigma}(g)(t)(n) = g(n)(t)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in I$. Por argumentos similares a los anteriores se demuestra que $\bar{\sigma}$ es continua.

Se comprueba fácilmente que $\sigma\bar{\sigma} = id_{(Y^I)^\mathbb{N}}$ y $\bar{\sigma}\sigma = id_{(Y^\mathbb{N})^I}$.

Así tenemos un diagrama en Top homeomorfo al anterior

$$\begin{array}{ccc}
D^q & \longrightarrow & (Y^\mathbb{N})^I \\
\downarrow \partial_0 & & \downarrow (d_0, d_1) \\
D^q \times I & \longrightarrow & Y^\mathbb{N} \times Y^\mathbb{N}
\end{array}$$

Dado que (d_0, d_1) es fibración en Top existe una elevación $t: D^q \times I \longrightarrow (Y^\mathbb{N})^I$ que lo hace conmutativo. Componiendo con los homeomorfismos oportunos y aplicando la ley exponencial por el Teorema 1.3.1 obtenemos la elevación buscada para todo $q \geq 0$. \square

Proposición 2.2.8

Sea $Y \in \mathcal{E}t$, definimos $s: Y \longrightarrow Y^I$ de modo que $s(y): I \longrightarrow Y$ de forma que $s(y)(t) = y$, para todo $y \in Y$, $t \in I$. Entonces la factorización de la diagonal Δ_Y como $\Delta_Y: Y \xrightarrow{s} Y^I \xrightarrow{(d_0, d_1)} Y \times Y$ es un objeto de caminos en $\mathcal{E}t$ según la definición de Quillen.

Demostración:

Un objeto de caminos de Quillen, como veremos en la Definición 3.1.4, es una factorización de la diagonal como una equivalencia débil seguida de una fibración. Por tanto necesitamos demostrar que s es equivalencia débil exterior y (d_0, d_1) \mathcal{E} -fibración. Este último hecho se tiene por la proposición anterior, luego sólo queda probar que s es \mathcal{E} -equivalencia débil.

Veamos que s es exterior. En primer lugar s es continua, probemos que es externa. Dado $U \in \mathcal{E}_{Y^I}$ existe $(I, E) \subset U$, luego $s^{-1}((I, E)) = E \subset s^{-1}(U)$ y como $E \in \mathcal{E}_Y$, $s^{-1}(U) \in T_Y$ por la continuidad de s , se verifica que $s^{-1}(U) \in \mathcal{E}_Y$.

Se tiene que $d_0 s = id_Y$. Para ver que $sd_0 \underset{\mathcal{E}}{\cong} id_{Y^I}$ definimos $G: Y^I \times I \longrightarrow Y^I$ tal que, para todo $(\omega, t) \in Y^I \times I$, $G(\omega, t) = \omega_t$ con $\omega_t: I \longrightarrow Y$ definida por $\omega_t(t') = \omega(tt')$ para todo $t' \in I$. Es claro que G es exterior, $G(\omega, 0) = \omega(0) = sd_0(\omega)$ y $G(\omega, 1) = \omega$ para todo $\omega \in Y^I$. Así s es equivalencia de homotopía exterior, luego \mathcal{E} -equivalencia débil. \square

Teorema 2.2.9

La relación de homotopía a derecha de Quillen en $\mathcal{E}t$ es la relación de homotopía exterior.

Demostración:

Recordemos que para todo $X, Y \in \mathcal{E}t$, por el Teorema 1.3.5, tenemos la biyección $\mathcal{E}t(X \times I, Y) \cong \mathcal{E}t(X, Y^I)$. Así, aplicando la Proposición 2.2.8, se tiene que la relación de homotopía a derecha de Quillen coincide con la relación de homotopía exterior. \square

Teorema de Whitehead para espacios exteriores 2.2.10

Sean $X, Y \in \mathcal{E}t$ \mathbb{N} -complejos. Dada $f: X \longrightarrow Y$ aplicación exterior, se verifica que f es equivalencia débil exterior si y sólo si f es equivalencia de homotopía exterior.

Demostración:

Si f es equivalencia de homotopía exterior es claro que es equivalencia débil exterior.

Para ver la otra implicación basta tener en cuenta la Proposición 2.2.9, recordar que todo \mathbb{N} -complejo es cofibrante y fibrante y aplicar el Teorema 0.2.2, con lo que se tiene que una equivalencia débil exterior es equivalencia de homotopía exterior. \square

Teorema de Whitehead propio 2.2.11

Sean X, Y , CW -complejos localmente finitos de dimensión finita y con una cantidad vacía o numerable de celdas en cada dimensión. Dada $f: X \rightarrow Y$ propia se tiene que f es equivalencia débil exterior si y sólo si es equivalencia de homotopía propia.

Demostración:

Por el Teorema 2.2.4 X e Y tienen estructura de \mathbb{N} -complejos con un número finito de \mathbb{N} -celdas. Además f es exterior si en X y en Y tomamos las externologías de los compacto-cerrados.

Así aplicando el Teorema 2.2.10, f es equivalencia débil exterior si y sólo si es equivalencia de homotopía propia. \square

En la Proposición 2.2.7 probamos que para todo $Y \in \mathcal{E}t$, $(d_0, d_1): Y^I \rightarrow Y \times Y$ es \mathcal{E} -fibración.

Dado $X \in \mathcal{E}t$, en general, $\partial_0 + \partial_1: X \sqcup X \rightarrow X \times I$ no es \mathcal{E} -cofibración. En el caso de que X sea \mathbb{N} -complejo sí que podemos asegurarlo.

Proposición 2.2.12

Sea $X \in \mathcal{E}t$ \mathbb{N} -complejo. Se verifica que $\partial_0 + \partial_1: X \sqcup X \rightarrow X \times I$ es \mathcal{E} -cofibración.

Demostración:

Si X es un \mathbb{N} -complejo entonces X admite una filtración $\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X$ de modo que X_n se obtiene de X_{n-1} mediante un push-out como el de la Definición 2.2.1.

Entonces $X \times I$ admite una filtración $\emptyset = (X \times I)_{-1} \subset (X \times I)_0 \times \dots \subset (X \times I)_n \subset \dots \subset (X \times I)$, tal que $(X \times I)_0 = X \sqcup X$, $(X \times I)_1$ se obtiene por el push-out

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_0} S_\lambda^0 & \xrightarrow{\quad} & X \sqcup X \\
 \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \bar{z}_\lambda & & \downarrow (\partial_0 + \partial_1)^1 \\
 \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_0} D_\lambda^1 \cong \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_0} D_\lambda^0 \times I & \longrightarrow & (X \times \{0\}) \sqcup (X_1 \times I) \sqcup (X \times \{1\})
 \end{array}$$

Si suponemos construido $(X \times I)_{n-1} \cong (X \times \{0\}) \sqcup (X_{n-2} \times I) \sqcup (X \times \{1\})$, $(X \times I)_n$ se obtiene a partir de él mediante un push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{\lambda \in \Lambda_{n-1}} \mathcal{S}_\lambda^{n-1} \cong \partial(\coprod_{\lambda \in \Lambda_{n-1}} \mathcal{D}_\lambda^{n-1} \times I) & \longrightarrow & (X \times \{0\}) \sqcup (X_{n-2} \times I) \sqcup (X \times \{1\}) \\
\downarrow \coprod_{\lambda} \bar{i}_\lambda & & \downarrow (\partial_0 + \partial_1)^n \\
\coprod_{\lambda \in \Lambda_{n-1}} \mathcal{D}_\lambda^n \cong \coprod_{\lambda \in \Lambda_{n-1}} \mathcal{D}_\lambda^{n-1} \times I & \longrightarrow & (X \times \{0\}) \sqcup (X_{n-1} \times I) \sqcup (X \times \{1\})
\end{array}$$

donde $(X \times \{0\}) \sqcup (X_{n-1} \times I) \sqcup (X \times \{1\}) \cong (X \times I)_n$. Se verifica que $X \times I = \text{colim}(X \times I)_n$

Como $\mathcal{E}t$ es categoría de modelos cerrada, si $\coprod_{\lambda} \bar{i}_\lambda$ es \mathcal{E} -cofibración y $(\partial_0 + \partial_1)^n$ el lado opuesto de un push-out, se tiene que también es \mathcal{E} -cofibración para todo $n \geq 0$.

Dado que $X \times I = \text{colim}(X \times I)_n$, se verifica que $(\partial_0 + \partial_1): X \sqcup X \longrightarrow X \times I$ es la inducida en el colímite por las \mathcal{E} -cofibraciones $(\partial_0 + \partial_1)^n: X \sqcup X \longrightarrow (X \times I)_n$. Repitiendo el argumento empleado en el Teorema 2.1.6 en la demostración del axioma de factorización tenemos que $\partial_0 + \partial_1$ es \mathcal{E} -cofibración. \square

Capítulo 3

Sucesión exacta larga de homotopía asociada a un morfismo en una categoría de modelos cerrada

En este capítulo se obtiene como resultado central una sucesión exacta larga de homotopía asociada a un morfismo en una categoría de modelos cerrada \mathcal{C} en la que el objeto inicial \mathcal{J} y el final $*$ no son isomorfos. Exigiremos que $\mathcal{J} \rightarrow *$ sea fibración. Así generalizamos el desarrollo realizado por Quillen en [Q] para categorías basadas.

La primera sección la dedicamos a las definiciones básicas: homotopía a izquierda, a derecha, objeto cilindro, objeto de caminos. Podemos observar que tanto $\mathcal{E}t$ como $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ son categorías de modelos cerradas no basadas. Si $X, Y \in \mathcal{E}t$, X \mathbb{N} -complejo, entonces $X \times I$ e Y^I definidos en el Capítulo 2 son ejemplos de objeto cilindro y objeto de caminos, respectivamente, en $\mathcal{E}t$ y con alguna modificación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

En la segunda sección, consideramos A objeto cofibrante y B objeto fibrante en \mathcal{C} con $f, g: A \rightarrow B$ aplicaciones en \mathcal{C} . Recordamos la definición de correspondencia entre homotopías a derecha e izquierda de f a g y el resultado que establece que el conjunto de clases de equivalencia de homotopías a izquierda de f a g y el conjunto de clases de equivalencia de homotopías a derecha de f a g son biyectivos. Los denotaremos como $\Pi_1(A, B; f, g)$

Consideramos $A \xrightarrow{r_A} \mathcal{J}$ objeto cofibrante en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, $A \in (\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c$, y B fibrante en \mathcal{C} , $B \in \mathcal{C}_f$. Si $j_B: \mathcal{J} \rightarrow B$ es el morfismo existente para todo objeto en \mathcal{C} denotamos $\Pi_1(A, B; j_{Br_A}, j_{Br_A})$ por $\Pi_1(A, B) = [A, B]_1$. El resultado más relevante de la sección es que el functor $[-, -]_1: Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c) \times Ho(\mathcal{C}_f) \rightarrow Grp$ está determinado salvo isomorfismo canónico y que existen $\Sigma: Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c) \rightarrow Ho(\mathcal{C})$, functor suspensión, y $\Omega: Ho(\mathcal{C}_f) \rightarrow Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$, functor lazo, de forma que tenemos los isomorfismos canónicos $[\Sigma r_A, B] \cong [A, B]_1 \cong [r_A, \Omega B]_{\mathcal{J}}$ donde $Ho(\mathcal{C})(A, B) = [A, B]$ y $Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_A, r_B) = [r_A, r_B]_{\mathcal{J}}$.

Es posible definir otros funtores suspensión, Σ^L , tomando aproximaciones cofibrantes, y lazo, Ω^R , tomando aproximaciones fibrantes. Estos funtores verifican que Σ^L es adjunto a izquierda de Ω^R . Además, Σ^L coincide sobre objetos cofibrantes con Σ y Ω^R , sobre objetos fibrantes, con Ω del resultado anterior. A Σ y Ω los llamaremos “de Quillen”.

En la última sección se consigue una sucesión exacta larga de homotopía de una fibración. Para ello partimos del hecho de que $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ es una categoría basada en la que podemos aplicar los resultados probados por Quillen. Definimos dos funtores. En primer

lugar $()_{\mathcal{J}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ que asigna a cada objeto B en \mathcal{C} el pull-back de $B \rightarrow *$ y $\mathcal{J} \rightarrow *$, $B \times \mathcal{J}$, y a cada morfismo $u \in \mathcal{C}(B, B')$ el morfismo $u \times id_{\mathcal{J}}: B \times \mathcal{J} \rightarrow B' \times \mathcal{J}$ obtenido mediante la propiedad universal del pull-back. En segundo lugar $\mathcal{D}: \mathcal{C}_{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{C}$ que “olvida” la estructura sobre \mathcal{J} . Probamos que \mathcal{D} es adjunto a izquierda de $()_{\mathcal{J}}$ así como los inducidos en las categorías localizadas. De esta forma obtenemos el resultado.

Observaremos que en el caso de Top , si tomamos Top_{\emptyset} , los resultados que obtendremos aplicando los conseguidos en este capítulo son triviales. Sin embargo si $A \in Top$, al tomar $\mathcal{C} = Top^A$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{J}} = (Top^A)_{id_A}$, sí que obtenemos adecuados resultados y una sucesión asociada a un morfismo en Top^A .

3.1 Definiciones básicas.

Observamos previamente que si \mathcal{J} es el objeto inicial el push-out

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J} & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A \sqcup_{\mathcal{J}} A \end{array}$$

define la suma en \mathcal{C} , que denotaremos $A \sqcup A$ abreviadamente.

Definición 3.1.1 Sean $f, g: A \rightrightarrows B$ aplicaciones \mathcal{C} . Decimos que f es homótopa a izquierda de g , denotado $f \stackrel{i}{\sim} g$ si existe un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup A & \xrightarrow{f+g} & B \\ \downarrow \nabla_A & \searrow \partial_0 + \partial_1 & \uparrow h \\ A & \xleftarrow{\sigma} & \tilde{A} \end{array} \quad (1)$$

donde σ es equivalencia débil y ∇_A es la codiagonal $\nabla_A = id_A + id_A$.

Es fácil advertir que, si $*$ es el objeto final, el producto en \mathcal{C} es el pull-back

$$\begin{array}{ccc} B \times_* B & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & * \end{array}$$

que escribiremos $B \times B$.

De forma dual a la Definición 3.1.1 podemos construir la siguiente definición.

Definición 3.1.2 Sean $f, g: A \rightrightarrows B$ aplicaciones en \mathcal{C} . Decimos que f es homótopa a derecha a g , $f \stackrel{d}{\sim} g$, si existe un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{B} & \xleftarrow{s} & B \\
 \uparrow k & \searrow (d_0, d_1) & \downarrow \Delta_B \\
 A & \xrightarrow{(f, g)} & B \times B
 \end{array} \quad (2)$$

con s equivalencia débil y $\Delta_B = (id_B, id_B)$ la diagonal.

Nota 3.1.3

En el caso de la categoría de modelos cerrada exterior en $\mathcal{E}t$ o en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, se verifican las siguientes implicaciones:

homótopa exterior \implies homótopa a derecha \implies homótopa a izquierda

donde la última implicación procede de [Q; I.1.Lema dual.5(i)] y del hecho de que todo objeto es fibrante tanto en $\mathcal{E}t$ como en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Si A es cofibrante, por ejemplo un \mathbb{N} -complejo, por [Q; I.1.Lema 5(i)] “ser homótopa a izquierda” implica “ser homótopa a derecha” y coinciden las tres nociones, pero en general las implicaciones son estrictas.

Definición 3.1.4 Dado $A \in Ob \mathcal{C}$ entendemos por *objeto cilindro de A* , un objeto $A \times I$ junto con una factorización de la codiagonal de A , ∇_A , como $A \sqcup A \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} A \times I \xrightarrow{\sigma} A$ tal que $\partial_0 + \partial_1$ es cofibración y σ equivalencia débil.

De forma dual podemos dar la definición siguiente:

Definición 3.1.5 Dado $B \in Ob \mathcal{C}$ entendemos que *objeto de caminos de B* , denotado B^I , a un objeto B^I junto con una factorización de la diagonal de B , ∇_B , como $\nabla_B: B \xrightarrow{s} B^I \xrightarrow{(d_0, d_1)} B \times B$ con s equivalencia débil y (d_0, d_1) fibración.

Definición 3.1.6 Sean $f, g: A \rightrightarrows B$ aplicaciones en \mathcal{C} . Entendemos por *homotopía a izquierda de f a g* un diagrama como (1) donde $\partial_0 + \partial_1$ es cofibración. El objeto \tilde{A} es, por tanto, un objeto cilindro para A .

Definición 3.1.7 Sean $f, g: A \rightrightarrows B$ aplicaciones en \mathcal{C} . Entendemos por *homotopía a derecha de f a g* donde un diagrama como (2) donde (d_0, d_1) es fibración. El objeto \tilde{B} es así un objeto de caminos para B .

Notas 3.1.8

(a) El objeto cilindro de $A, A \times I$, no es en general el producto del objeto A por el objeto I , ni $- \times I$ tiene carácter funtorial. Tampoco es único.

(b) Un ejemplo de objeto cilindro en $\mathcal{E}t$ es, para X \mathbb{N} -complejo, el producto por el intervalo unidad, $X \times I$, y la factorización de la codiagonal $\nabla_X: X \sqcup X \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} X \times I \xrightarrow{pr_1} X$.

Este hecho es sencillo de probar ya que por la Proposición 2.2.12 $\partial_0 + \partial_1$ es \mathcal{E} -cofibración y pr_1 es \mathcal{E} -equivalencia débil pues es una equivalencia de homotopía exterior. Veamos esto último.

En primer lugar se tiene que $pr_1 \partial_0 = id_X$. En segundo lugar existe $H: X \times I \times I \rightarrow X \times I$ homotopía exterior, definida como $H((x, t), s) = (x, st)$ para todo $((x, t), s) \in X \times I \times I$ que verifica que $H((x, t), 0) = (x, 0) = \partial_0 pr_1(x, t)$ y $H((x, t), 1) = (x, t)$, luego $\partial_0 pr_1 \simeq id_{X \times I}$.

(c) En la categoría $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, dado un objeto $(X, j_X), X$ \mathbb{N} -complejo, sería el objeto $j_{\tilde{X}}$ obtenido por el push-out

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times I & \xrightarrow{j_X \times id_I} & X \times I \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{j_{\tilde{X}}} & \tilde{X} \end{array}$$

y la factorización de la codiagonal anterior, que está en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, por los mismos argumentos empleados en la nota (b) y por cómo se definen las cofibraciones y equivalencias débiles en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

(d) Sabemos que, por la Proposición 2.2.8, Y^I es un objeto de caminos para Y en $\mathcal{E}t$. Dado $(Y, j_Y) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, tomamos Y^I el espacio de la Definición 2.2.5. Podemos definir $j_{Y^I}: \mathbb{N} \rightarrow Y^I$, que asigna a cada $n \in \mathbb{N}$, el camino constante en $j_Y(n)$. Esta aplicación es exterior como probaremos posteriormente en la Proposición 4.1.7. La factorización de la diagonal de la Proposición 2.2.8 es un objeto de caminos para $(Y, j_Y) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. Este hecho se deduce de la propia Proposición 2.2.8 y de cómo han sido definidas las fibraciones y equivalencias débiles en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Recordemos un resultado de Quillen [Q; I.1.Lema 3] que nos será necesario.

Lema 3.1.9

Sea A cofibrante y sean $A \times I$ y $A \times I'$ dos objetos cilindro para A . El resultado de pegar $A \times I$ a $A \times I'$ mediante la identificación $\partial_1 A = \partial'_0 A$ definido precisamente como el objeto \tilde{A} en el diagrama push-out siguiente

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\partial'_0} & A \times I' \\ \downarrow \partial_1 & & \downarrow in_2 \\ A \times I & \xrightarrow{in_1} & \tilde{A} \end{array}$$

es también un objeto cilindro $A \times I''$ para A , con $\partial''_0 = in_1 \partial_0$, $\partial''_1 = in_2 \partial'_1$, $\sigma'' in_1 = \sigma$ y $\sigma'' in_2 = \sigma'$.

3.2 Los funtores suspensión y lazo.

Sea $A \in \mathcal{C}$ cofibrante y $B \in \mathcal{C}$ fibrante. Sean $f, g: A \rightrightarrows B$ aplicaciones en \mathcal{C} para el resto de la sección.

Definición 3.2.1 Sean $h: A \times I \rightarrow B$ y $h': A \times I' \rightarrow B$ dos homotopías a izquierda de f a g . Por una *homotopía a izquierda de h a h'* entendemos un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A \times I \sqcup_{A \sqcup A} A \times I' & \xrightarrow{h+h'} & B & & \\ & \searrow j_0+j_1 & \uparrow H & & \\ A & \xleftarrow{\tau} & A \times J & & \end{array}$$

con $j_0 + j_1$ una cofibración y τ una equivalencia débil.

Aquí $A \times I \sqcup_{A \sqcup A} A \times I'$ es el push-out de las aplicaciones $\partial_0 + \partial_1: A \sqcup A \rightarrow A \times I$ y $\partial'_0 + \partial'_1: A \sqcup A \rightarrow A \times I'$.

Decimos que h es *homótopa a izquierda de h'* denotado por $h \overset{i}{\sim} h'$ si tal homotopía existe.

Nota 3.2.2

Como en la Definición 3.1.4 el símbolo $A \times J$ denotará un objeto en \mathcal{C} , junto con la cofibración $j_0 + j_1$ y la equivalencia débil τ . También $A \times J$ no es, en general, el producto del objeto A por el objeto J .

Definición 3.2.3 Sean $k: A \rightarrow B^I, k': A \rightarrow B^{I'}$ dos homotopías a derecha de f a g . Entendemos por *homotopía derecha de k a k'* un diagrama de la forma:

$$\begin{array}{ccc}
 B^J & \xleftarrow{S} & B \\
 \uparrow K & \searrow (\gamma_0, \gamma_1) & \downarrow (s, s') \\
 A & \xrightarrow{(k, k')} & B^I \times_{B \times B} B^{I'}
 \end{array}$$

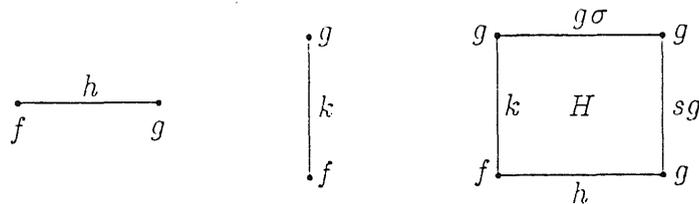
con (γ_0, γ_1) fibración, S equivalencia débil y $B^I \times_{B \times B} B^{I'}$ el pull-back de $B^I \xrightarrow{(d_0, d_1)} B \times B$ y $B^{I'} \xrightarrow{(d'_0, d'_1)} B \times B$.

Decimos que k es homótopa a derecha de k' y lo denotamos $k \stackrel{d}{\sim} k'$ si tal homotopía K existe.

Definición 3.2.4 Sea $h: A \times I \rightarrow B$ una homotopía a izquierda de f a g y sea $k: A \rightarrow B^I$ una homotopía a derecha de f a g . Por una *correspondencia entre h y k* entendemos una aplicación $H: A \times I \rightarrow B^I$ tal que $H\partial_0 = k, H\partial_1 = sg, d_0H = h$ y $d_1H = g\sigma$.

Decimos que h y k se corresponden si tal correspondencia existe.

Se emplearán diagramas como los siguientes para h, k y H , respectivamente



Recordemos algunas definiciones y resultados de [Q; I.2] que pueden ser útiles.

Lema 3.2.5

Dado $A \times I$ y una homotopía a derecha $k: A \longrightarrow B^I$ existe una homotopía a izquierda $h: A \times I \longrightarrow B$ que se corresponde con k .

El resultado dual tambien se verifica.

Corolario 3.2.6

“Ser homomótopa a izquierda” es una relación de equivalencia en las clases de homotopías a izquierda de f a g , y las clases de equivalencia forman un conjunto $\Pi_1^i(A, B; f, g)$. Dualmente las clases de homotopía a derecha forman un conjunto $\Pi_1^d(A, B; f, g)$.

La correspondencia establece una biyección:

$$\Pi_1^i(A, B; f, g) \cong \Pi_1^d(A, B; f, g)$$

Como consecuencia de este corolario escribiremos $\Pi_1(A, B; f, g)$ tanto para el conjunto de clases de homotopía a izquierda como para el conjunto de clases de homotopía a derecha de f a g .

Lema 3.2.7

Dadas $i: A' \longrightarrow A$ y $j: B \longrightarrow B'$ el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(A, B; f, g) & \xrightarrow{i^*} & \Pi_1(A, B; fi, gi) \\ \downarrow j_* & & \downarrow j_* \\ \Pi_1(A, B'; jf, jg) & \xrightarrow{i^*} & \Pi_1(A, B'; jfi, jgi) \end{array}$$

Definición 3.2.8 Sean $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}(A, B)$, sea $h: A \times I \longrightarrow B$ una homotopía a izquierda de f_1 a f_2 y sea $h': A \times I' \longrightarrow B$ una homotopía a izquierda de f_2 a f_3 . Por *composición de h y h'* , denotada $h \cdot h'$, entendemos una homotopía $h'': A \times I'' \longrightarrow B$ dada por $h''in_1 = h$ $h''in_2 = h'$, donde $A \times I''$ es el objeto cilindro construido en el Lema 3.1.9.

Definición 3.2.9 Si $f, g \in \mathcal{C}(A, B)$ y $h: A \times I \longrightarrow B$ es una homotopía a izquierda de f a g , entonces por la *inversa de h* , denotada por h^{-1} , entendemos una homotopía a izquierda $h^{-1}: A \times I' \longrightarrow B$ de g a f donde $A \times I'$ es el objeto cilindro para A dado por $A \times I' = A \times I$ y $\partial'_0 = \partial_1, \partial'_1 = \partial_0, \sigma' = \sigma$ y $h^{-1} = h$.

Se suelen utilizar las siguientes gráficas para $h \cdot h'$ y h^{-1} , respectivamente

$$\begin{array}{c} f_1 \quad h \quad f_2 \quad h' \quad f_3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} g \quad h^{-1} \quad f \\ \hline \end{array}$$

La composición y la inversa para homotopías a derecha se definen de forma dual y se expresan mediante gráficos como los anteriores pero con líneas verticales.

$$\begin{array}{c} \bullet f_3 \\ | \\ h' \\ | \\ \bullet f_2 \\ | \\ h \\ | \\ \bullet f_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \bullet f \\ | \\ h^{-1} \\ | \\ \bullet g \end{array}$$

Proposición 3.2.10

La composición de homotopías a izquierda induce aplicaciones de la forma $\Pi_1^i(A, B; f_1, f_2) \times \Pi_1^i(A, B; f_2, f_3) \longrightarrow \Pi_1^i(A, B; f_1, f_3)$ y similarmente para homotopías a derecha.

La composición de homotopías a derecha y a izquierda es compatible con la biyección del Corolario 3.2.6.

Finalmente la categoría cuyos objetos son de la forma $\mathcal{C}(A, B)$ y cuyos morfismos están definidos como elementos de $\Pi_1(A, B; f, g)$, considerando la composición de homotopías es un grupoide; la inversa de un elemento de $\Pi_1(A, B; f, g)$, representado por un cierto h , es el representado por h^{-1} .

Ahora vamos a definir la noción de fibra de una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ y la de cofibra de f , aunque esta última más restringida.

Definición 3.2.11 Sea $f: X \longrightarrow Y$ morfismo en \mathcal{C} , definimos la *fibra de f* , F , como el pull-back en \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc}
F = \mathcal{J} \times_Y X & \longrightarrow & X \\
\downarrow r_F & & \downarrow f \\
\mathcal{J} & \xrightarrow{j_Y} & Y
\end{array}$$

Ahora recordemos que si \mathcal{J} es el objeto inicial en \mathcal{C} , entendemos por categoría sobre \mathcal{J} , $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, a aquella cuyos objetos son morfismos $r_X: X \rightarrow \mathcal{J}$ en \mathcal{C} y cuyos morfismos son diagramas conmutativos en \mathcal{C} , \bar{f} , de la forma

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
& \searrow r_X & \swarrow r_Y \\
& & \mathcal{J}
\end{array}$$

Podemos definir un functor $\mathcal{D}: \mathcal{C}_{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{C}$ que a cada objeto en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, r_X , le asigna su dominio $\mathcal{D}(r_X) = X$ y a cada morfismo \bar{f} , $\mathcal{D}(\bar{f}) = f$.

Se tiene que por la Proposición 0.1.12 \mathcal{C} induce en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ una estructura de categoría de modelos cerrada. Recordemos que \bar{f} es fibración en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ si y sólo si $\mathcal{D}(\bar{f}) = f$ es fibración en \mathcal{C} . De forma similar \bar{f} es cofibración (resp. equivalencia débil) en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ si y sólo si $\mathcal{D}(\bar{f}) = f$ es cofibración (resp. equivalencia débil) en \mathcal{C} .

Definición 3.2.12 Sea $f: X \rightarrow Y$ morfismo en \mathcal{C} y sea $r_X: X \rightarrow \mathcal{J}$ un objeto en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$. Definimos la *cofibra de f respecto a r_X* , \mathcal{C} , como el push-out en \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{r_X} & \mathcal{J} \\
\downarrow f & & \downarrow \\
\mathcal{J} & \longrightarrow & Y \sqcup_X Y = \mathcal{C}
\end{array}$$

Sea $r_A: A \rightarrow \mathcal{J}$ objeto cofibrante en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, esto es $\mathcal{J} \xrightarrow{j_A} A$ cofibración en \mathcal{C} . Sea B objeto fibrante en \mathcal{C} , es decir $B \rightarrow *$ fibración en \mathcal{C} . Entonces escribiremos $\Pi_1(A, B; j_B r_A, j_B r_A)$ como $\Pi_1(A, B)$. El conjunto $\Pi_1(A, B)$ es un grupo por la Proposición 3.2.10.

Lo denotamos por $[A, B]_1$.

Teorema 3.2.13

Dada \mathcal{C} , existe un functor $Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c)^{op} \times Ho(\mathcal{C}_f) \longrightarrow Grp$ que asigna a cada par (r_A, B) el grupo $[A, B]_1$, que está determinado salvo isomorfismo canónico.

Además existen dos funtores $\Sigma: Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ y $\Omega: Ho(\mathcal{C}_f) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$ denominados suspensión y lazo, respectivamente, y unos isomorfismos canónicos

$$[\Sigma r_A, B] \cong [A, B]_1 \cong [r_A, \Omega B]_{\mathcal{J}}$$

de funtores $Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c)^{op} \times Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Set$, donde $[A, B] = Ho(\mathcal{C})(A, B)$ y $[r_A, r_B]_{\mathcal{J}} = Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_A, r_B)$.

Aquí denotamos por $(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c$ la subcategoría plena de $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ determinada por los objetos cofibrantes en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ y por \mathcal{C}_f la subcategoría plena de \mathcal{C} determinada por los objetos fibrantes en \mathcal{C} .

Demostración:

Dado $r_A \in (\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c$, sea $A \times I$ un objeto cilindro para A fijo, esto es, una factorización de la codiagonal ∇_A como $A \sqcup A \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} A \times I \xrightarrow{\sigma} A$ con $\partial_0 + \partial_1$ cofibración y σ equivalencia débil. Sea Σr_A la cofibra de $\partial_0 + \partial_1$ obtenida por el push-out en \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup A & \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} & A \times I \\ \downarrow r_A + r_A & & \downarrow \pi \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{j_{\Sigma A}} & \Sigma A \end{array} \quad (1)$$

Observamos que existe $r_{\Sigma A}: \Sigma A \longrightarrow \mathcal{J}$ sin más que aplicar la propiedad universal del push-out a $id_{\mathcal{J}}$ y a $r_{A \times I}$, donde $r_{A \times I} = r_A \sigma$. Así $r_{\Sigma A} \in \mathcal{C}_{\mathcal{J}}$.

Otra forma de ver este hecho es tener en cuenta que $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ es categoría de modelos cerrada y que por tanto existen push-outs, pero es útil conocer las relaciones entre las aplicaciones r de cada objeto.

Además $j_{\Sigma A}$ es cofibración por ser el lado opuesto de la cofibración $\partial_0 + \partial_1$ en un push-out en la categoría de modelos cerrada \mathcal{C} . Así $\Sigma: Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_c)$.

Definiremos una biyección $\rho: \Pi(\mathcal{C})(\Sigma r_A, B) \longrightarrow \Pi_1(A, B)$ que es transformación natural de funtores en Set .

Sea $\varphi: \Sigma r_A \longrightarrow B$ un morfismo y sea $\rho(\varphi)$ el elemento de $\Pi_1(A, B)$ representado por $\varphi\pi: A \times I \longrightarrow B$. Esto es así porque $\varphi\pi\partial_0 = \varphi j_{\Sigma A} r_A = j_B r_A$ y $\varphi\pi\partial_1 = \varphi j_{\Sigma A} r_A = j_B r_A$, al aplicar sucesivamente la conmutatividad del diagrama (1) y que φ es un morfismo en \mathcal{C} .

Sean $\varphi, \varphi' \in \mathcal{C}(\Sigma r_A, B)$ tales que existe una homotopía a derecha $h: \Sigma r_A \longrightarrow B^I$ de φ a φ' . Por ser $\varphi'\pi$ una homotopía a izquierda de $j_B r_A$ en sí mismo y por el Lema 3.2.5, existe una correspondencia H que determina una homotopía a derecha k como se indica en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & j_B r_A \sigma & \\
 k & \begin{array}{c} \boxed{H} \\ \varphi'\pi \end{array} & s j_B r_A \\
 & \begin{array}{c} \boxed{h\pi} \\ \varphi\pi \end{array} & s j_B r_A \\
 & & \varphi\pi
 \end{array}$$

De esta manera demostramos que $s j_B r_A \cdot k$ y $\varphi\pi$ se corresponden, así como $\varphi'\pi$ se corresponde con k . Como $s j_B r_A \cdot k$ y k representan el mismo elemento de $\Pi_1(A, B)$, también $\varphi\pi$ y $\varphi'\pi$. Por tanto $\rho(\varphi) = \rho(\varphi')$ y concluimos que ρ está bien definida.

Para ver que ρ es sobre, sea h una homotopía a izquierda de $j_B r_A$ en sí mismo. Entonces se verifica que $h(\partial_0 + \partial_1) = j_B r_A + j_B r_A$. Aplicando la propiedad universal del push-out (1) a h y a j_B , existe una única $\varphi: \Sigma r_A \longrightarrow B$ con $\varphi\pi = h$ y $\varphi j_{\Sigma A} = j_B$ con lo que $\rho(\varphi) = h$ y que $\varphi \in \Pi(\mathcal{C})(\Sigma r_A, B)$.

Para finalizar supongamos que $\rho(\varphi) = \rho(\varphi')$. Emplearemos $A \times J$ obtenido aplicando la Definición 3.2.1. Por el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A \times I \sqcup_{A \sqcup A} A \times I & \xrightarrow{\rho(\varphi) + \rho(\varphi')} & B \\
 \downarrow \sigma + \sigma & \searrow j_0 + j_1 & \uparrow H \\
 A & \xleftarrow{\tau} & A \times J
 \end{array}$$

existe una homotopía a izquierda H de $\varphi\pi$ a $\varphi'\pi$. Sea $H': A \times J \longrightarrow B$ dada por $H'j_0 = H'j_1 = \varphi\pi$ y sea $K: A \times J \longrightarrow B^I$ la elevación en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
A \times I & \xrightarrow{s\varphi\pi} & B^I \\
\downarrow j_0 & \nearrow K & \downarrow (d_0, d_1) \\
A \times J & \xrightarrow{(H, H')} & B \times B
\end{array}$$

que existe por ser (d_0, d_1) fibración y j_0 cofibración trivial por [Q; I.2.Lema 2]. La elevación K verifica que $(d_0, d_1)K = (H, H')$ y que $Kj_0 = s\varphi\pi$. Entonces $Kj_1: A \times I \rightarrow B^I$ es una homotopía a derecha de $\varphi'\pi$ a $\varphi\pi$ porque $d_0Kj_1 = Hj_1 = \varphi'\pi$ y $d_1Kj_1 = H'j_1 = \varphi\pi$. Además como el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
A \sqcup A & \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} & A \times I \\
\downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow j_0 \\
A \times I & \xrightarrow{j_1} & A \times J
\end{array}$$

es conmutativo se tiene que $Kj_0(\partial_0 + \partial_1) = Kj_1(\partial_0 + \partial_1)$ y $Kj_0(\partial_0 + \partial_1) = s\varphi\pi(\partial_0 + \partial_1) = s\varphi j_{\Sigma A}(r_A + r_A) = sj_B(r_A + r_A) = j_{B^I}(r_A + r_A)$. Aplicando la propiedad universal del push-out de (1) a Kj_1 y a j_{B^I} existe una única $\tilde{K}: \Sigma A \rightarrow B^I$ verificando que $\tilde{K}\pi = Kj_1$ y $\tilde{K}j_{\Sigma A} = j_{B^I}$. Se tiene que $d_0\tilde{K}\pi = d_0Kj_1 = \varphi'\pi$ y $d_1\tilde{K}\pi = d_1Kj_1 = \varphi\pi$ y \tilde{K} es una homotopía a derecha de φ' a φ . Esto demuestra que ρ es inyectiva.

Dado otro objeto cilindro para $A, A \times I'$, podemos demostrar, siguiendo los mismos razonamientos, que también $\Pi(\mathcal{C})(\Sigma' r_A, B) \cong \Pi_1(A, B)$, donde $\Sigma' r_A$ es la cofibra de $\partial'_0 + \partial'_1: A \sqcup A \rightarrow A \times I'$. Por tanto tenemos que $\Pi(\mathcal{C})(\Sigma' r_A, B) \cong \Pi(\mathcal{C})(\Sigma r_A, B)$ para todo $B \in \mathcal{C}_f$. Así desaparece la ambigüedad en la definición de $\Sigma: Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c) \rightarrow Ho(\mathcal{C})$ pues $\Sigma' r_A$ es equivalente débil a Σr_A .

Dualmente si escogemos un objeto de caminos para B, B^I junto con una factorización de la diagonal Δ_B como $B \xrightarrow{s} B^I \xrightarrow{(d_0, d_1)} B \times B$ con s equivalencia débil, (d_0, d_1) fibración, definimos ΩB como el morfismo $r_{\Omega B}$ en el pull-back en \mathcal{C} que define la fibra de (d_0, d_1) según la Definición 3.2.11

$$\begin{array}{ccc}
\Omega B & \xrightarrow{p} & B^I \\
\downarrow r_{\Omega B} & & \downarrow (d_0, d_1) \\
\mathcal{J} & \xrightarrow{(j_B, j_B)} & B \times B
\end{array} \tag{2}$$

Dado que (d_0, d_1) es fibración en \mathcal{C} , $r_{\Omega B}$ lo es por ser al lado opuesto en un pull-back en \mathcal{C} . En la categoría $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ el objeto cero es $id_{\mathcal{J}}$, por tanto $r_{\Omega B}$ es un objeto fibrante en

$\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$. De esta forma el funtor sería $\Omega: Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}}) \longrightarrow Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_f)$. Existe una cierta ambigüedad debido a que hay que escoger un objeto de caminos pero podrá despejarse a posteriori.

Podemos definir una biyección para cualquier $r_A \in (\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c$, $\bar{\rho}: \Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_A, \Omega B) \longrightarrow \Pi_1(A, B)$ que es transformación natural de funtores en Set de la siguiente manera. Sea $\bar{\varphi} \in \Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_A, \Omega B)$, $\bar{\varphi}: r_A \longrightarrow \Omega B$, entonces $\bar{\rho}(\bar{\varphi}) = p\varphi$ con p la aplicación de (2) y $\varphi = \mathcal{D}(\bar{\varphi})$.

En primer lugar $p\varphi \in \Pi_1(A, B)$ pues $d_0 p\varphi = d_1 p\varphi = j_B r_A \varphi = j_B r_A$. Si $\bar{\varphi}, \bar{\varphi}' \in \Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_A, \Omega B)$ y $\bar{h}: r_A \times id_J \longrightarrow r_{\Omega B}$ es una homotopía a izquierda de $\bar{\varphi}$ a $\bar{\varphi}'$, tomando $\mathcal{D}(\bar{h}) = h: A \times I \longrightarrow \Omega B$ tenemos que es una homotopía a izquierda de $\mathcal{D}(\bar{\varphi}) = \varphi$ a $\mathcal{D}(\bar{\varphi}') = \varphi'$.

Tenemos que $p\varphi'$ es una homotopía a derecha de $j_B r_A$ a $j r_A$ y, por el Lema dual 3.2.5. existe una correspondencia H que determina una homotopía a izquierda de g como en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & j_B r_A \sigma & j_B r_A \sigma \\
 p\varphi \left[\begin{array}{|c|c|} \hline ph & p\varphi' H \\ \hline \end{array} \right] & & sj_B r_A \\
 & j_B r_A \sigma & g
 \end{array}$$

que pone de manifiesto que $p\varphi$ se corresponde con $j_B r_A \sigma \cdot g$ y que $p\varphi'$ se corresponde con g . Como $j_B r_A \cdot g$ y g representan el mismo elemento de $\Pi_1(A, B)$, $p\varphi$ y $p\varphi'$ también. Así $\bar{\rho}(\varphi) = \bar{\rho}(\varphi')$ y podemos concluir que $\bar{\rho}$ está bien definida.

Para ver que $\bar{\rho}$ es sobre, sea k homotopía a derecha de $j_B r_A$ a $j r_A$, esto es, $d_0 k = d_1 k = j_B r_A$. Así se puede aplicar la propiedad universal del pull-back (2) a k y a r_A .

De esta forma existe una única $\varphi: A \longrightarrow \Omega B$ con $r_{\Omega B} \varphi = r_A$, luego $\varphi = \mathcal{D}(\bar{\varphi})$ con $\bar{\varphi}: r_A \longrightarrow \Omega B$ y $p\varphi = k$. Así $\bar{\rho}(\bar{\varphi}) = k$.

Veamos que $\bar{\rho}$ es inyectiva. Sean $\bar{\varphi}, \bar{\varphi}' \in \Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_A, \Omega B)$ con $\bar{\rho}(\bar{\varphi}) = \bar{\rho}(\bar{\varphi}')$. Entonces existe una homotopía a derecha $K: A \longrightarrow B^J$ dada por $\delta_0 K = p\mathcal{D}(\bar{\varphi}) = p\varphi$ y $\delta_1 K = p\mathcal{D}(\bar{\varphi}') = p\varphi'$ y tal que K hace conmutativo un diagrama dual del de la Definición 3.2.1

$$\begin{array}{ccc}
B^J & \xleftarrow{S} & B \\
\uparrow K & \searrow \delta_0 + \delta_1 & \downarrow (s, s) \\
A & \xrightarrow{(\bar{p}(\varphi), \bar{p}(\varphi'))} & B^I \times_{B \times B} B^I
\end{array}$$

donde S es equivalencia débil y $\delta_0 + \delta_1$ fibración. Además $B^I \times_{B \times B} B^I$ pull-back en \mathcal{C} de $(d_0, d_1): B^I \longrightarrow B \times B$ y de esta misma aplicación.

Sea $K': A \longrightarrow B^J$ dada por $\delta_0 K' = \delta_1 K' = p\varphi$ y sea $H: A \times I \longrightarrow B^J$ elevación en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A \sqcup A & \xrightarrow{K+K'} & B^J \\
\downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow \delta_0 \\
A \times I & \xrightarrow{p\varphi\sigma} & B^I
\end{array}$$

que existe por ser δ_0 fibración trivial por [Q; I.2 Lema 2] y $\partial_0 + \partial_1$ cofibración por la definición de objeto cilindro. La elevación H verifica que $\delta_0 H = p\varphi\sigma$ y $H(\partial_0 + \partial_1) = K + K'$. Se tiene que $\delta_1 H: A \times I \longrightarrow B^I$ es una homotopía a izquierda de $p\varphi'$ a $p\varphi$ pues $\delta_1 H(\partial_0 + \partial_1) = \delta_1(K + K') = \delta_1 K + \delta_1 K' = p\varphi' + p\varphi$. Además se verifica que $(d_0, d_1)\delta_1 H = (d_0, d_1)\delta_0 H = (d_0, d_1)p\varphi\sigma = (j_B, j_B)r_{\Omega B}\varphi\sigma = (j_B, j_B)r_{A \times I} = (j_B r_{A \times I}, j_B r_{A \times I})$.

Por ello se puede aplicar la propiedad universal del pull-back (2) a las aplicaciones $\delta_1 H$ y $r_{A \times I}$ y de esta forma existe una única $\tilde{H}: A \times I \longrightarrow \Omega B$ homotopía a izquierda verificando que $p\tilde{H} = \delta_1 H$ y $r_{\Omega B}\tilde{H} = r_{A \times I}$, es decir, $\tilde{H} = \mathcal{D}(\tilde{H})$ con $\bar{H}: r_{A \times I} \longrightarrow \Omega B$ homotopía a izquierda en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$. Además $p\tilde{H}\partial_0 = \delta_1 H\partial_0 = \delta_1 K = p\varphi'$ y $p\tilde{H}\partial_1 = \delta_1 H\partial_1 = \delta_1 K' = p\varphi$, luego \tilde{H} es homotopía a izquierda de φ' a φ en \mathcal{C} y \bar{H} es homotopía a izquierda de $\bar{\varphi}'$ a $\bar{\varphi}$ en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$.

Hemos probado que dado un objeto de caminos para $B \in \mathcal{C}_f, B^I$ y la correspondiente factorización, y para todo $r_A \in (\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c$ se verifica que $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_A, \Omega B) \cong \Pi_1(A, B)$. Si tomamos otro objeto de caminos para $B, B^{I'}$, junto con otra factorización de Δ_B como $B \xrightarrow{s'} B^I \xrightarrow{(d'_0, d'_1)} B \times B$ con s' equivalencia débil y (d'_0, d'_1) cofibración, por los mismos razonamientos llegamos a que $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_A, \Omega' B) \cong \Pi_1(A, B)$, donde por $\Omega' B$ denotamos de cofibra de $(d'_0, d'_1): B^I \longrightarrow B \times B$. Por ello podemos concluir que ΩB es equivalente débil a $\Omega' B$ y no existe ambigüedad en la definición del functor lazo $\Omega: Ho(\mathcal{C}_f) \longrightarrow Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_f)$.

Tenemos así que $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_A, \Omega B) \cong \Pi_1(A, B) \cong \Pi(\mathcal{C})(\Sigma r_A, B)$.

El Lema 3.2.6 demuestra que $(r_A, B) \longrightarrow \Pi_1(A, B)$ es un funtor $\Pi_1: (\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c^{\text{op}} \times \mathcal{C}_f \longrightarrow Grp$. Combinando [Q; I.1.Teorema 1], las biyecciones que acabamos de probar, junto con [Q; I.1.Corolario 1] se tiene que este funtor induce otro funtor $\bar{\Pi}_1: Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c)^{\text{op}} \times Ho(\mathcal{C}_f) \longrightarrow Grp$ que por el mismo resultado [Q; I.1.Teorema 1] puede extenderse a un funtor $(r_A, B) \longrightarrow [A, B]_1$, de la siguiente manera $\hat{\Pi}_1: Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})^{\text{op}} \times Ho \mathcal{C} \longrightarrow Grp$, no de forma única, pero sí salvo isomorfismos canónicos.

Por el citado teorema y su corolario el bifunctor $[-, -]_1$ es representable en las dos variables. \square

Notas 3.2.14

(a) Es necesario realizar algunas precisiones respecto a los funtores suspensión y lazo. Por un lado tenemos el funtor lazo de Quillen $\Omega: Ho(\mathcal{C}_f) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$ y suspensión de Quillen $\Sigma: Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ definidos en el Teorema 3.2.13.

Por otro, también existen otros funtores lazo y suspensión, veámoslo. Sea el funtor $L: \mathcal{C}_{\mathcal{J}} \longrightarrow Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c)$ definido como sigue. Para $r_X \in \mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, $Lr_X = r_{X'}$, aproximación cofibrante de r_X obtenida al factorizar $j_{r_X}: id_{\mathcal{J}} \longrightarrow r_X$ como $id_{\mathcal{J}} \xrightarrow{j} r_{X'} \xrightarrow{q} r_X$ con j cofibración y q fibración trivial por $CM_4(b)$. Dado un morfismo $\bar{f}: r_X \longrightarrow r_Y$ en \mathcal{C} , $L\bar{f} = \bar{f}'$ donde \bar{f}' se obtiene en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} r_{X'} & \xrightarrow{\approx} & r_X \\ \downarrow \bar{f}' & & \downarrow \bar{f} \\ r_{Y'} & \xrightarrow{\approx} & r_Y \end{array}$$

donde \approx denota una equivalencia débil.

Además tenemos otro funtor $R: \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_f)$ que a todo $Y \in \mathcal{C}$ le asigna $RY = \tilde{Y}$, aproximación fibrante de Y , obtenida en la factorización de $Y \longrightarrow *$ como una cofibración trivial i seguida de una fibración p , $Y \xrightarrow{i} \tilde{Y} \xrightarrow{p} *$, por $CM_4(a)$.

Para un morfismo en \mathcal{C} , $f: X \longrightarrow Y$, $Rf = \tilde{f}$ el inducido por f entre aproximaciones fibrantes según el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\approx} & \tilde{X} \\ \downarrow f & & \downarrow \tilde{f} \\ Y & \xrightarrow{\approx} & \tilde{Y} \end{array}$$

Entonces podemos definir $\Sigma: Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ y $\Omega: Ho(\mathcal{C}_f) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$ como en el teorema que acabamos de demostrar y considerar la composición de funtores $\Sigma L: \mathcal{C}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{L} Ho((\mathcal{C}_f)_c) \xrightarrow{\Sigma} Ho(\mathcal{C})$, y luego tomar el derivado total a izquierda de ΣL que denotaremos $\Sigma^L, \Sigma^L: Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$.

De igual manera podemos tomar la siguiente composición de funtores $\Omega R: \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_f) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$ y luego el derivado total a derecha que escribiremos $\Omega^R: Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$.

Así tenemos $Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}}) \xrightleftharpoons[\Omega^R]{\Sigma^L} Ho(\mathcal{C})$ y los siguientes isomorfismos:

$$\begin{aligned} Ho(\mathcal{C})(\Sigma^L r_A, B) &\underset{(1)}{\cong} Ho(\mathcal{C})(\Sigma L r_A, B) \underset{(2)}{\cong} Ho(\mathcal{C})(\Sigma L r_A, RB) \underset{(3)}{\cong} \\ &\underset{(3)}{\cong} \Pi(\mathcal{C})(\Sigma L r_A, RB) \underset{(4)}{\cong} \Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(L r_A, \Omega RB) \underset{(5)}{\cong} Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(L r_A, \Omega RB) \underset{(6)}{\cong} \\ &\underset{(6)}{\cong} Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_A, \Omega RB) \underset{(7)}{\cong} Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_A, \Omega^R B). \end{aligned}$$

Aquí (1) y (7) son consecuencia de la definición de derivado total a izquierda y derivado total a derecha. Los isomorfismos (2) y (6) son una aplicación de la equivalencia de categorías $Ho(\mathcal{C}) \cong Ho(\mathcal{C}_f), Ho(\mathcal{C}_c)$, (3) y (5) proceden de [Q; I.1. Teorema 1] y (4) es resultado del teorema que acabamos de demostrar.

Con todo esto podemos afirmar que Σ^L es adjunto a izquierda de Ω^R canónicamente.

(b) Si restringimos Σ^L a los objetos fibrantes y cofibrantes sobre \mathcal{J} , entonces

$$Ho(\mathcal{C})(\Sigma^L r_X, Y) \cong Ho(\mathcal{C})(\Sigma r_X, Y) \cong Ho(\mathcal{C})(r_X, \Omega R Y) \cong \Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_X, \Omega Y)$$

y tomando el funtor suspensión de Quillen $\Sigma: Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_c \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$

$$\Pi(\mathcal{C})(\Sigma r_X, Y) \cong \Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_X, \Omega Y)$$

Luego el funtor Σ^L y Σ coinciden en los objetos fibrantes y cofibrantes.

Por un razonamiento similar si Ω^R se restringe a \mathcal{C}_{cf} coincide con el funtor lazo de Quillen.

(c) Para todo $r_X \in \mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, $\Sigma^n r_X n \geq 1$ es un objeto cogrupo (respectivamente para todo $X \in \mathcal{C}$, $\Omega^n X n \geq 1$ es un objeto grupo) en $Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$, que es conmutativo para $n \geq 2$.

(d) Dada la categoría de modelos cerrada $\mathcal{C} = \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, tenemos que su objeto inicial es $\mathbb{N} \xrightarrow{id_{\mathbb{N}}} \mathbb{N}$ que no es isomorfo al objeto final $\mathbb{N} \xrightarrow{c_*} *$. Por tanto podemos aplicar los resultados obtenidos considerando $\mathcal{C}_{\mathcal{J}} = (\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})_{id_{\mathbb{N}}}$

3.3 Sucesión exacta larga de homotopía de una sucesión fibrada.

En esta sección exigiremos que $\mathcal{J} \longrightarrow *$ sea fibración.

Consideremos la categoría $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ a la que nos referimos en el apartado anterior. Observamos que para cualquier objeto en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, $r_A: A \longrightarrow \mathcal{J}$ se puede construir el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{J} & \xrightarrow{j_A} & A & \xrightarrow{r_A} & \mathcal{J} \\ & \searrow id_{\mathcal{J}} & \downarrow r_A & \swarrow id_{\mathcal{J}} & \\ & & \mathcal{J} & & \end{array}$$

donde j_A existe y es único por ser \mathcal{J} objeto inicial en \mathcal{C} . Por ello $id_{\mathcal{J}}$ es el objeto cero en la categoría $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ (es inicial y final). Con ello es posible aplicar los resultados de Quillen, [Q; I.2], para categorías punteadas acerca de los funtores suspensión, lazo y de la existencia de sucesiones exactas largas de homotopía de una secuencia fibrada y cofibrada, propiedades de éstas, etc.

Definamos ahora un functor $(\)_{\mathcal{J}}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ que a todo $B \in Ob \mathcal{C}$ le asigna $(B)_{\mathcal{J}} = r_{B \times \mathcal{J}} = pr_2: B \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$, $r_{B \times \mathcal{J}} \in Ob \mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, obtenido mediante el pull-back en \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} B \times \mathcal{J} & \xrightarrow{pr_1} & B \\ \downarrow pr_2 & & \downarrow \\ \mathcal{J} & \longrightarrow & * \end{array} \quad (1)$$

y a cada morfismo $u: B \longrightarrow B'$ en \mathcal{C} le hace corresponder el diagrama conmutativo \bar{u}

$$\begin{array}{ccc} B \times \mathcal{J} & \xrightarrow{u \times id_{\mathcal{J}}} & B' \times \mathcal{J} \\ & \searrow pr_2 & \swarrow pr_2 \\ & & \mathcal{J} \end{array}$$

Aquí $u \times id_{\mathcal{J}}$ se obtiene de forma única al aplicar la propiedad universal del pull-back (1) para B' a upr_1 y pr_2 . Se tiene que $(\)_{\mathcal{J}}$ es covariante.

En la sección anterior definimos un functor $\mathcal{D}: \mathcal{C}_{\mathcal{J}} \longrightarrow \mathcal{C}$.

Proposición 3.3.1

El functor \mathcal{D} es adjunto a izquierda del functor $(\)_{\mathcal{J}}$.

Demostración:

Es preciso probar que para todo $r_A \in \text{Ob } \mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ y $B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ se tiene la siguiente biyección:

$$\mathcal{C}(\mathcal{D}(r_A), B) \cong \mathcal{C}_{\mathcal{J}}(r_A, (B)_{\mathcal{J}})$$

En primer lugar definamos una aplicación $\varphi: \mathcal{C}(\mathcal{D}(r_A), B) \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{J}}(r_A, (B)_{\mathcal{J}})$ para todo $u \in \mathcal{C}(\mathcal{D}(r_A), B)$ como $\varphi(u) = \bar{u}$ el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(r_A) & \xrightarrow{(u, r_A)} & B \times \mathcal{J} \\ & \searrow r_A & \swarrow pr_2 \\ & \mathcal{J} & \end{array}$$

donde (u, r_A) se obtiene de forma única al aplicar la propiedad universal del pull-back (1).

En segundo lugar definimos $\psi: \mathcal{C}_{\mathcal{J}}(r_A, (B)_{\mathcal{J}}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{D}(r_A), B)$ que a cada diagrama $\bar{f} \in \mathcal{C}_{\mathcal{J}}(r_A, (B)_{\mathcal{J}})$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \times \mathcal{J} \\ & \searrow r_A & \swarrow pr_2 \\ & \mathcal{J} & \end{array}$$

le asigna $\psi(\bar{f}) = pr_1 f$.

Ahora para todo $u \in \mathcal{C}(\mathcal{D}(r_A), B)$ se tiene que $\psi\varphi(u) = \psi(\bar{u}) = pr_1(u, r_A) = u$ y para todo $\bar{f} \in \mathcal{C}_{\mathcal{J}}(r_A, (B)_{\mathcal{J}})$, $\varphi\psi(\bar{f}) = \varphi(pr_1 f)$, donde $\varphi(pr_1 f)$ es el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(pr_1 f, r_A)} & B \times \mathcal{J} \\ & \searrow r_A & \swarrow pr_2 \\ & \mathcal{J} & \end{array}$$

Pero en el diagrama \bar{f} se verificaba que $pr_2 f = r_A$, luego $(pr_1 f, r_A) = (pr_1 f, pr_2 f)$ y se tiene que $\varphi\psi(\bar{f}) = \bar{f}$. \square

Teorema 3.3.2

Los funtores $\mathcal{D}: \mathcal{C}_{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{C}$ y $(\)_{\mathcal{J}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ inducen en las categorías $Ho(\mathcal{C})$ y $Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$ funtores $\mathcal{D}^L: Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}}) \rightarrow Ho(\mathcal{C})$ y $(\)_{\mathcal{J}}^R: Ho(\mathcal{C}) \rightarrow Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$, con \mathcal{D}^L derivado a izquierda de \mathcal{D} y $(\)_{\mathcal{J}}^R$ derivado a derecha de $(\)_{\mathcal{J}}$, verificando que \mathcal{D}^L es canónicamente adjunto a izquierda de $(\)_{\mathcal{J}}^R$.

Demostración:

Basta aplicar el Teorema 0.3.5 para lo que es preciso probar que \mathcal{D} preserva cofibraciones y lleva equivalencias débiles entre cofibrantes en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ a equivalencias débiles en \mathcal{C} . Además también es necesario demostrar que $(\)_{\mathcal{J}}$ preserva fibraciones y lleva equivalencias débiles entre fibrantes en \mathcal{C} a equivalencias débiles en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$.

Veamos que $(\)_{\mathcal{J}}$ preserva fibraciones. Sea $p: E \rightarrow B$ fibración en \mathcal{C} , entonces $(p)_{\mathcal{J}}: (E)_{\mathcal{J}} \rightarrow (B)_{\mathcal{J}}$ será fibración si y sólo si tiene la propiedad de elevación de homotopía respecto a las cofibraciones triviales en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, por ser $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ categoría de modelos cerrada.

Dado un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$

$$\begin{array}{ccc} r_A & \xrightarrow{\bar{f}} & (E)_{\mathcal{J}} \\ \downarrow \bar{i} & & \downarrow (p)_{\mathcal{J}} \\ r_B & \xrightarrow{\bar{g}} & (B)_{\mathcal{J}} \end{array} \quad (2)$$

Como el functor \mathcal{D} es adjunto a izquierda de $(\)_{\mathcal{J}}$ podemos encontrar un único diagrama conmutativo en \mathcal{C} aplicando la biyección ψ de la proposición anterior:

$$\begin{array}{ccc} D(r_A) = A & \xrightarrow{\psi(\bar{f})} & E \\ \downarrow \mathcal{D}(\bar{i}) & & \downarrow p \\ D(r_B) = B & \xrightarrow{\psi(\bar{g})} & B \end{array}$$

Aquí p es fibración y $\mathcal{D}(\bar{i})$ es cofibración trivial en \mathcal{C} por como están definidas las cofibraciones triviales en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$. Por tanto existe una elevación $h': B \rightarrow E$ con $ph' = \psi(\bar{g})$ y $h'\mathcal{D}(\bar{i}) = \psi(\bar{f})$.

Tomamos como elevación en (2) $h = \varphi(h'): r_B \rightarrow (E)_{\mathcal{J}}$ y es claro que $(p)_{\mathcal{J}}(h) = (p)_{\mathcal{J}}\varphi(h') = \varphi\psi((p)_{\mathcal{J}}\varphi(h')) = \varphi(ph') = \varphi(\psi(\bar{g})) = \bar{g}$ y $h\bar{i} = \varphi(h')\bar{i} = \varphi\psi(\varphi(h')\bar{i}) = \varphi(h'\mathcal{D}(\bar{i})) = \varphi\psi(\bar{f}) = \bar{f}$. Aquí φ es la biyección de la proposición previa y ψ su inversa.

Demostremos que $(\)_{\mathcal{J}}$ conserva equivalencias débiles entre fibrantes. Sea $f: X \longrightarrow Y$ equivalencia débil entre fibrantes en \mathcal{C} . Entonces $(f)_{\mathcal{J}}$ es el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathcal{J} & \xrightarrow{f \times id_{\mathcal{J}}} & Y \times \mathcal{J} \\ & \searrow pr_2 & \swarrow pr_2 \\ & \mathcal{J} & \end{array}$$

Primero observemos que afirmar que $(f)_{\mathcal{J}}$ es equivalencia débil en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ es equivalente, por como están definidas las equivalencias en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, a que $f \times id_{\mathcal{J}}$ sea equivalencia débil en \mathcal{C} . Aplicando el Lema 0.1.16 es lo mismo que probar que para todo $A \in \mathcal{C}$, $(f \times id)_{*}: Ho(\mathcal{C})(A, X \times \mathcal{J}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})(A, Y \times \mathcal{J})$ sea isomorfismo. Sea A' la aproximación cofibrante de A obtenida como en la Nota 3.2.14.(a). Entonces el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{array}{ccc} Ho(\mathcal{C})(A, X \times \mathcal{J}) & \xrightarrow{(f \times id)_{*}} & Ho(\mathcal{C})(A, Y \times \mathcal{J}) \\ \parallel \wr & & \parallel \wr \\ Ho(\mathcal{C})(A', X \times \mathcal{J}) & \xrightarrow{(f \times id)_{*}} & Ho(\mathcal{C})(A', Y \times \mathcal{J}) \end{array}$$

Recordemos que $X \times \mathcal{J}$ es el pull-back:

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathcal{J} & \xrightarrow{pr_1} & X \\ \downarrow pr_2 & & \downarrow c_{*} \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{c_{*}} & * \end{array}$$

Tenemos que por hipótesis X es fibrante, luego $c_{*}: X \longrightarrow *$ es fibración. Como $r_{X \times \mathcal{J}} = pr_2: X \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ es su lado opuesto en el pull-back anterior es también fibración.

También $c_{*}: \mathcal{J} \longrightarrow *$ es fibración, pues así lo exigimos.

Por tanto $c_{*}r_{X \times \mathcal{J}}: X \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow *$ es fibración y $X \times \mathcal{J}$ objeto fibrante en \mathcal{C} .

Análogamente $Y \times \mathcal{J}$.

Ahora bien como A' es cofibrante, $X \times \mathcal{J}, Y \times \mathcal{J}$ fibrantes en \mathcal{C} aplicando [Q; I.1. Corolario 1] se tiene que los siguientes isomorfismos:

$$\Pi(\mathcal{C})(A', X \times \mathcal{J}) \cong Ho(\mathcal{C})(A', X \times \mathcal{J}) \quad \Pi(\mathcal{C})(A', Y \times \mathcal{J}) \cong Ho(\mathcal{C})(A', Y \times \mathcal{J})$$

Podemos construir el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Ho(\mathcal{C})(A', X \times \mathcal{J}) & \xrightarrow{(f \times id)_*} & Ho(\mathcal{C})(A', Y \times \mathcal{J}) \\ \parallel \wr & & \parallel \wr \\ \Pi(\mathcal{C})(A', X \times \mathcal{J}) & & \Pi(\mathcal{C})(A', Y \times \mathcal{J}) \\ (*) \parallel \wr & & (*) \parallel \wr \\ \Pi(\mathcal{C})(A', X) \times \Pi(\mathcal{C})(A', \mathcal{J}) & \xrightarrow{f_* \times id_*} & \Pi(\mathcal{C})(A', Y) \times \Pi(\mathcal{C})(A', \mathcal{J}) \end{array}$$

Aquí los isomorfismos (*) se tienen por un resultado que demostraremos posteriormente. Haciendo uso de este diagrama, como f_* es isomorfismo por hipótesis, $f_* \times id_*$ también luego por conmutatividad $(f \times id)_*$ lo es, y de esta forma $f \times id$ es equivalencia débil en \mathcal{C} , que es lo mismo que afirmar que $(f)_{\mathcal{J}}$ es equivalencia débil en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$.

Para probar que \mathcal{D} preserva cofibraciones y equivalencias débiles entre cofibrantes basta recordar cómo se definen las cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ y es inmediato.

De esta forma quedan probadas las hipótesis del Teorema 0.3.5. \square

Ha quedado pendiente el lema siguiente.

Lema 3.3.3

Si $A \in \mathcal{C}_c$ y $X \in \mathcal{C}_f$, entonces se verifica que $\Pi(\mathcal{C})(A, X \times \mathcal{J})$ es isomorfo a $\Pi(\mathcal{C})(A, X) \times \Pi(\mathcal{C})(A, \mathcal{J})$.

Demostración:

Definamos el isomorfismo como parece más lógico, $(pr_1 \times pr_2)_*: \Pi(\mathcal{C})(A, X \times \mathcal{J}) \longrightarrow \Pi(\mathcal{C})(A, X) \times \Pi(\mathcal{C})(A, \mathcal{J})$. La aplicación $(pr_1 \times pr_2)_*$ está bien definida pues si $f \stackrel{i}{\sim} g$ por una homotopía a izquierda h , entonces $pr_1 f \stackrel{i}{\sim} pr_1 g$ y $pr_2 f \stackrel{i}{\sim} pr_2 g$ tomando las homotopías a izquierda $pr_1 h$ y $pr_2 h$, respectivamente.

Para ver que $(pr_1 \times pr_2)_*$ es sobre sean $[f_1] \in \Pi(\mathcal{C})(A, X)$ y $[f_2] \in \Pi(\mathcal{C})(A, \mathcal{J})$ y sean f_1 y f_2 dos representantes de $[f_1]$ y $[f_2]$ respectivamente. Aplicando la propiedad universal del pull-back

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathcal{J} & \xrightarrow{pr_2} & \mathcal{J} \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{k'} & * \end{array} \quad (3)$$

a $f_1: A \rightarrow X$ y $f_2: A \rightarrow \mathcal{J}$, pues $k'f_1 = kf_2$, se tiene que existe una única $f: A \rightarrow X \times \mathcal{J}$ con $pr_1f = f_1$ y $pr_2f = f_2$.

Ahora para probar que $(pr_1 \times pr_2)_*$ es inyectiva sean $[f]$ y $[g]$ en $\Pi(\mathcal{C})(A, X \times \mathcal{J})$ tales que $(pr_1 \times pr_2)_*[f] = (pr_1 \times pr_2)_*[g]$ así $pr_1f \stackrel{i}{\sim} pr_1g$, esto es existe una homotopía a izquierda, h , de pr_1f a pr_1g como en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup A & \xrightarrow{pr_1f+pr_1g} & X \\ \downarrow \nabla_A & \searrow \partial_0+\partial_1 & \uparrow h \\ A & \xleftarrow{\sigma} & A \times I \end{array}$$

con σ equivalencia débil y $\partial_0 + \partial_1$ cofibración. También $pr_2f \stackrel{i}{\sim} pr_2g$, esto es, existe una homotopía a izquierda, h' , de pr_2f a pr_2g como en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup A & \xrightarrow{pr_2f+pr_2g} & \mathcal{J} \\ \downarrow \nabla_A & \searrow \partial'_0+\partial'_1 & \uparrow h' \\ A & \xleftarrow{\sigma'} & A \times I' \end{array}$$

con σ' equivalencia débil y $\partial'_0 + \partial'_1: A \sqcup A \rightarrow A \times I'$ cofibración.

Como A es cofibrante, X y \mathcal{J} fibrantes, se verifica que $Ho(\mathcal{C})(A, X) \cong \Pi(\mathcal{C})(A, X)$ y que $Ho(\mathcal{C})(A, \mathcal{J}) \cong \Pi(\mathcal{C})(A, \mathcal{J})$. Además en $Ho(\mathcal{C})$, como vimos en el Teorema 3.1.13, $A \times I$ es lo mismo que $A \times I'$. Así podemos tomar $A \times I$ en la homotopía a izquierda h' . Ahora, aplicando la propiedad universal del pull-back $X \times \mathcal{J}$ (3) a $h: A \times I \rightarrow X$ y a $h': A \times I \rightarrow \mathcal{J}$ pues $kh = kh'$, existe una única homotopía $H: A \times I \rightarrow X \times \mathcal{J}$ con $pr_1H = h$ y $pr_2H = h'$ y verificando que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A \sqcup A & \xrightarrow{f+g} & X \times \mathcal{J} \\
\downarrow \nabla_A & \searrow \partial_0 + \partial_1 & \uparrow H \\
A & \xleftarrow{\sigma} & A \times I
\end{array}$$

Además $pr_1 H(\partial_0 + \partial_1) = pr_1 f + pr_1 g$ y $pr_2 H(\partial_0 + \partial_1) = pr_2 f + pr_2 g$, luego $H(\partial_0 + \partial_1) = f + g$. \square

Recordemos que en la Definición 3.2.11 dimos la noción de fibra de un morfismo cualquiera en \mathcal{C} . Dada una fibración en \mathcal{C} , $p: E \rightarrow B$, entenderemos por fibra de p , F , el mismo concepto.

Definición 3.3.4 Dada una fibración en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, $\bar{p}: r_E \rightarrow r_B$ definimos *fibra* de \bar{p} , como el pull-back en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$

$$\begin{array}{ccc}
r_G & \longrightarrow & r_E \\
\bar{r}_G \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\
id_{\mathcal{J}} & \longrightarrow & r_B
\end{array}$$

Proposición 3.3.5

Sea $p: E \rightarrow B$ morfismo en \mathcal{C} . Sea F la fibra de p obtenida según la Definición 3.2.11 mediante el pull-back en \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{i} & E \\
\downarrow r_F & & \downarrow p \\
\mathcal{J} & \xrightarrow{j_B} & B
\end{array}$$

Entonces r_F es la fibra en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ de $(p)_{\mathcal{J}}: (E)_{\mathcal{J}} \rightarrow (B)_{\mathcal{J}}$.

Demostración:

Sea $\bar{r}_F: r_F \rightarrow id_{\mathcal{J}}$ el único morfismo en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ de r_F al objeto cero, y sea $u: id_{\mathcal{C}_{\mathcal{J}}} \rightarrow ()_{\mathcal{J}}$ transformación natural unidad de la adjunción de la Proposición 3.3.1 entre \mathcal{D} y $()_{\mathcal{J}}$. Entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
r_F & \xrightarrow{u(r_F)} & ()_{\mathcal{J}}\mathcal{D}(r_F) = (F)_{\mathcal{J}} \\
\downarrow \bar{r}_F & & \downarrow (r_F)_{\mathcal{J}} \\
id_{\mathcal{J}} & \xrightarrow{u(id_{\mathcal{J}})} & ()_{\mathcal{J}}\mathcal{D}(id_{\mathcal{J}}) = (\mathcal{J})_{\mathcal{J}}
\end{array} \tag{4}$$

es conmutativo y se tiene que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{J}}(r_X, id_{\mathcal{J}}) \times_{\mathcal{C}_{\mathcal{J}}(r_X, (\mathcal{J})_{\mathcal{J}})} \mathcal{C}_{\mathcal{J}}(r_X, (F)_{\mathcal{J}}) \cong * \times_{\mathcal{C}_{\mathcal{J}}(r_X, (\mathcal{J})_{\mathcal{J}})} \mathcal{C}_{\mathcal{J}}(r_X, (F)_{\mathcal{J}})$$

por ser $id_{\mathcal{J}}$ el objeto cero en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$.

Ahora dado que $(F)_{\mathcal{J}}$ se define por el pull-back

$$\begin{array}{ccc}
F \times \mathcal{J} & \xrightarrow{pr_1} & F \\
\downarrow pr_2 & & \downarrow \\
\mathcal{J} & \longrightarrow & *
\end{array}$$

toda aplicación $\hat{f}: X \longrightarrow F \times \mathcal{J}$ es única y verifica que procede de $f = pr_1 \hat{f}: X \longrightarrow F$ con $r_F f = r_X$ por la propiedad universal. De modo recíproco dado $f: X \longrightarrow F$ verificando que $r_F f = r_X$, determina de forma única $\hat{f}: X \longrightarrow F \times \mathcal{J}$ por la propiedad universal del pull-back, luego $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}(r_X, (F)_{\mathcal{J}})$ es isomorfo a $\{f \in \mathcal{C}(X, F); r_F f = r_X\}$.

Además, el conjunto $\{f \in \mathcal{C}(X, F); r_F f = r_X\}$ es isomorfo a $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}(r_X, r_F)$.

Por tanto podemos concluir que (4) es un cuadrado pull-back.

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
r_F & \xrightarrow{u(r_F)} & (F)_{\mathcal{J}} & \longrightarrow & (E)_{\mathcal{J}} \\
\downarrow \bar{r}_F & & \downarrow (r_F)_{\mathcal{J}} & & \downarrow (p)_{\mathcal{J}} \\
id_{\mathcal{J}} & \xrightarrow{u(id_{\mathcal{J}})} & (\mathcal{J})_{\mathcal{J}} & \longrightarrow & (B)_{\mathcal{J}}
\end{array}$$

Por ser $()_{\mathcal{J}}$ adjunto a derecha, preserva pull-back, y el cuadrado de la derecha es pull-back. El de la izquierda es pull-back por el argumento anterior y como la suma de cuadrados pull-back es pull-back se tiene que r_F es la fibra de $(p)_{\mathcal{J}}$. \square

Proposición 3.3.6

Sea $B \in \mathcal{C}_f$ y el functor $\Omega: Ho(\mathcal{C}_f) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$ definido en el Teorema 3.2.13. Se verifica que $\Omega B = r_{\Omega B}$, con $r_{\Omega B}$ morfismo inducido en el pull-back en \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} \Omega B & \longrightarrow & B^I \\ \downarrow r_{\Omega B} & & \downarrow (d_0, d_1) \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{(j_B, j_B)} & B \times B \end{array}$$

es un objeto en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, y además es isomorfo a $\Omega((B)_{\mathcal{J}})$ en $(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_f$ donde $\Omega: Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_f) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$ es el functor de Quillen definido en [Q; I.2.Teorema 2] para categorías basadas.

Demostración:

La primera afirmación es inmediata y la segunda es consecuencia directa de la Proposición 3.3.5, del hecho de que $(\)_{\mathcal{J}}$ conserva fibraciones y equivalencias débiles entre fibrantes como se vio en el Teorema 3.3.2 y de que $(\)_{\mathcal{J}}$ por ser adjunto a derecha preserva productos. \square

Definición 3.3.7 Una *sucesión fibrada en $Ho(\mathcal{C})$* es un diagrama

$$\mathcal{D}(r_X) \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \text{ en } Ho(\mathcal{C}) \quad r_X \times \Omega Z \xrightarrow{\mu} r_X \text{ en } Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$$

donde r_X es un objeto en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, f y g morfismos en \mathcal{C} y de modo que existe una fibración en \mathcal{C}_f , p , tal que el diagrama en $Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$

$$r_X \xrightarrow{\varphi(f)} (Y)_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(g)_{\mathcal{J}}} (Z)_{\mathcal{J}} \quad r_X \times \Omega((Z)_{\mathcal{J}}) \xrightarrow{\mu} r_X$$

es isomorfo al diagrama en $Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$.

$$r_G \longrightarrow (E)_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(p)_{\mathcal{J}}} (B)_{\mathcal{J}} \quad r_G \times \Omega((B)_{\mathcal{J}}) \xrightarrow{m} r_G$$

donde r_G es la fibra de $(p)_{\mathcal{J}}$ y m la acción a derecha de $\Omega((B)_{\mathcal{J}})$ en r_G .

Nota 3.3.8

Esta definición no tiene ambigüedad dado que, por la Proposición 3.3.6, $\Omega((Z)_{\mathcal{J}})$ con $\Omega: Ho((\mathcal{C}_{\mathcal{J}})_f) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$ el functor de Quillen definido en [Q; I.2.Teorema 2] para

categorías basadas, es isomorfo a ΩZ , donde $\Omega: Ho(\mathcal{C}_f) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$ es el funtor definido en el Teorema 3.2.13, y que denotamos igual por comodidad.

Teorema 3.3.9

Sea $\mathcal{D}(r_F) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ en $Ho(\mathcal{C})$, $\mu: r_F \times \Omega B \longrightarrow r_F$ en $Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$, una sucesión fibrada en $Ho(\mathcal{C})$.

Sea r_A objeto en $Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$, r_G fibra de $(p)_{\mathcal{J}}: (E)_{\mathcal{J}} \longrightarrow (B)_{\mathcal{J}}$ y $\partial: \Omega((B)_{\mathcal{J}}) \longrightarrow r_F$ como en [Q; I.3.Proposición 3].

Entonces se verifica que la sucesión:

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow [r_A, \Omega^{q+1}B]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(\Omega^q \partial)_*} [r_A, \Omega^q F]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(\Omega^q(i)_{\mathcal{J}})_*} [r_A, \Omega^q E]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(\Omega^q(p)_{\mathcal{J}})_*} \cdots \\ \cdots &\longrightarrow [r_A, \Omega E]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(\Omega(p)_{\mathcal{J}})_*} [r_A, \Omega B]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\partial_*} [r_A, r_F]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{i_*} [Dr_A, E] \xrightarrow{p_*} [A, B] \end{aligned}$$

es exacta en el sentido siguiente:

- (i) $(p)_*^{-1}(0) = Im i_*$.
- (ii) $i_* \partial_* = 0$ y $i_* \alpha_1 = i_* \alpha_2 \iff \alpha_2 = \mu(\alpha_1, \lambda)$ para algún $\lambda \in [r_A, \Omega B]_{\mathcal{J}}$.
- (iii) $\partial_*(\Omega(p)_{\mathcal{J}})_* = 0$ y $\partial_* \lambda_1 = \partial_* \lambda_2 \iff \lambda_2 = (\Omega(p)_{\mathcal{J}})_* \theta \cdot \lambda_1$ para $\theta \in [r_A, \Omega E]_{\mathcal{J}}$.
- (iv) La sucesión de grupos de homomorfismos de $[r_A, \Omega E]_{\mathcal{J}}$ hacia la izquierda es exacta en el sentido usual.

Demostración:

Sea r_A objeto en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, designamos por $[r_A, -]_{\mathcal{J}}$ al funtor $Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})(r_A, -)$.

Hemos probado que $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ posee objeto cero. Así es una categoría de modelos cerrada basada. Dada una secuencia fibrada en $Ho(\mathcal{C})$, esto es, $\mathcal{D}(r_F) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ en $Ho(\mathcal{C})$ y $r_X \times \Omega B \xrightarrow{\mu} r_X$ en $Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$, podemos suponer que p es una fibración en \mathcal{C}_f .

Aplicándole el funtor $()_{\mathcal{J}}$ obtenemos una sucesión fibrada entre objetos fibrantes en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$. Así por [Q; I.3.Proposición 4], tenemos que existe la sucesión:

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow [r_A, \Omega^{q+1}((B)_{\mathcal{J}})]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(\Omega^q \partial)_*} [r_A, \Omega^q r_G]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(\Omega^q(i)_{\mathcal{J}})_*} [r_A, \Omega^q((E)_{\mathcal{J}})]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(\Omega^q(p)_{\mathcal{J}})_*} \cdots \\ \cdots &\longrightarrow [r_A, \Omega((E)_{\mathcal{J}})]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\Omega(p)_{\mathcal{J}}} [r_A, \Omega((B)_{\mathcal{J}})]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\partial_*} [r_A, r_G]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{((i)_{\mathcal{J}})_*} \\ &\longrightarrow [r_A, (E)_{\mathcal{J}}]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{((p)_{\mathcal{J}})_*} [r_A, (B)_{\mathcal{J}}]_{\mathcal{J}} \end{aligned}$$

Ahora por la adjunción existente entre \mathcal{D}^L y $(\)_{\mathcal{J}}^R$ se tiene que $[\mathcal{D}^L r_A, E] \cong [r_A, (E)_{\mathcal{J}}^R]$ y $[\mathcal{D}^L r_A, B] \cong [r_A, (B)_{\mathcal{J}}^R]$. Además por la Proposición 3.3.5 la fibra de $(p)_{\mathcal{J}}, r_G$, es isomorfa a r_F . También hemos probado en la Proposición 3.3.6 que $\Omega((B)_{\mathcal{J}})$ es isomorfo a ΩB y $\Omega((E)_{\mathcal{J}})$ a ΩE . Aplicando todos estos isomorfismos se tiene el resultado. \square

Proposición 3.3.10

La clase de las sucesiones fibradas en $Ho(\mathcal{C})$ tiene las siguientes propiedades:

(i) Cualquier aplicación $f: X \longrightarrow Y$ puede ser sumergida en una sucesión fibrada $\mathcal{D}(r_F) \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y, m: r_F \times \Omega Y \longrightarrow r_F$

(ii) Dado el diagrama de flechas continuas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(r_F) & \xrightarrow{i} & E \xrightarrow{p} B \\ \downarrow \mathcal{D}(\bar{\gamma}) & & \downarrow \beta \quad \downarrow \alpha \\ \mathcal{D}(r'_F) & \xrightarrow{i'} & E' \xrightarrow{p'} B' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} r_F \times \Omega B & \xrightarrow{m} & r_F \\ \downarrow \bar{\gamma} \times \Omega \alpha & & \downarrow \bar{\gamma} \\ r'_F \times \Omega B' & \xrightarrow{m'} & r'_F \end{array}$$

existen los morfismos de flechas punteadas.

(iii) En cualquier diagrama como en (ii) donde las flechas horizontales son sucesiones fibradas y si α y β son isomorfismos también lo es $\mathcal{D}(\bar{\gamma})$.

(iv) Si $\mathcal{D}(r_F) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B, \mu: r_F \times \Omega B \longrightarrow r_F$ es una sucesión fibrada en $Ho(\mathcal{C})$ también lo es

$$\mathcal{D}(\Omega B) \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} E \quad \Omega B \times \Omega E \xrightarrow{n} \Omega B$$

donde $\partial = \mathcal{D}(\bar{\partial})$ con $\bar{\partial}$ la composición $\Omega B \xrightarrow{(0, id_{\Omega B})} r_F \times \Omega B \xrightarrow{\mu} r_F$ y donde $n_*: [r_A, \Omega B]_{\mathcal{J}} \times [r_A, \Omega E]_{\mathcal{J}} \longrightarrow [r_A, \Omega B]_{\mathcal{J}}$ está definida por $n_*(\lambda, \mu) = ((\Omega(p)_{\mathcal{J}})_* \mu) \cdot \lambda$, para todo $(\lambda, \mu) \in [r_A, \Omega B]_{\mathcal{J}} \times [r_A, \Omega E]_{\mathcal{J}}$ y $r_A \in \mathcal{C}_{\mathcal{J}}$.

Demostración:

(i) Cualquier aplicación en $Ho \mathcal{C}$ es isomorfa a una fibración entre objetos fibrantes y cofibrantes por [Q; I.1. Teorema 1].

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & & r_F \times \Omega Y & \xrightarrow{m} & r_F \\
\wr \wr \beta & & & \wr \wr \alpha & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{D}(r_F) & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & & r_F \times \Omega Y' & \xrightarrow{m'} & r_F
\end{array}$$

con α, β equivalencias débiles

(ii) (iii) (iv) Son inmediatos teniendo en cuenta varios hechos. En primer lugar la definición de sucesión fibrada. En segundo lugar que, al ser $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ una categoría con objeto cero, podemos aplicar [Q; I.3.Proposición 5], se verifica una proposición similar. Además es necesario recordar que una equivalencia débil en $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ es una equivalencia débil en \mathcal{C} al aplicarle al funtor \mathcal{D} . También es preciso advertir que si r_G es la fibra de $(p)_{\mathcal{J}}$, $r_G \cong r_F$, y que $\Omega E \cong \Omega((E)_{\mathcal{J}})$. \square

Observación 3.3.11

Sea $f: X \rightarrow Y$ aplicación en \mathcal{C} . Aplicando la Proposición 3.3.10(i) f puede ser sumergida en una sucesión fibrada, $\mathcal{D}(r_F) \xrightarrow{i} X' \xrightarrow{f'} Y'$, $m: r_F \times \Omega Y' \rightarrow r_F$. De esta forma obtenemos un diagrama como el superior (que prueba este apartado), donde f' es fibración y α, β equivalencias débiles. Por el Teorema 3.3.9 tenemos que, para todo r_A objeto en $Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$, la sucesión

$$\begin{array}{l}
\cdots \rightarrow [r_A, \Omega^{q+1}Y]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(\Omega^q \partial)_*} [r_A, \Omega^q F]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(\Omega^q(i)_{\mathcal{J}})_*} [r_A, \Omega^q X]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(\Omega^q(f)_{\mathcal{J}})_*} \cdots \\
\cdots \rightarrow [r_A, \Omega X]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{(\Omega(f)_{\mathcal{J}})_*} [r_A, \Omega Y]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\partial_*} [r_A, r_F]_{\mathcal{J}} \xrightarrow{i_*} [\mathcal{D}r_A, X] \xrightarrow{f_*} [A, Y]
\end{array}$$

es exacta en el sentido de dicho teorema.

A esta sucesión la denominaremos *sucesión exacta larga de homotopía asociada a $f: X \rightarrow Y$ en \mathcal{C}* .

Nota 3.3.12

Es posible realizar un desarrollo dual, definiendo cofibra sucesión cofibrada y se prueban resultados duales de las Proposiciones 3.3.5, 3.3.6 y 3.3.10 y del Teorema 3.3.9.

Capítulo 4

Sucesión exacta larga de homotopía de un morfismo en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$

El objeto de este capítulo es conseguir la sucesión exacta larga de un morfismo en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y, como caso particular, la de un par en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ que denotaremos $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

En la primera sección definimos la categoría $(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})_{id_{\mathbb{N}}}$ que escribiremos $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$. Esta categoría también tiene una estructura de categoría de modelos cerrada inducida por la de $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Dado un objeto en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, definimos su cilindro, $I^{\mathbb{N}}X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Si $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$, entonces su cilindro también, $I^{\mathbb{N}}X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$. A partir de aquí definimos la categoría de homotopía en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$, $\Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}})$, así como el n -ésimo grupo de homotopía exterior de $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$, ${}_{\mathbb{N}}\Pi_n^{\mathcal{E}}(X)$. También definimos el wedge en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Para definir el smash, el cono y la suspensión necesitamos trabajar en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$.

Consideramos $Y^I = \mathcal{E}t(I, Y)$ como en la Definición 2.2.5 y probamos que, si $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $Y^I \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. Así definimos para todo $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ su espacio de lazos, $\Omega Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

De esta forma podemos definir un funtor suspensión $\Sigma: \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y un funtor lazo $\Omega: \mathcal{E}t^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$. Se verifica que Σ es adjunto a izquierda de Ω así como en las respectivas categorías de homotopía.

En la segunda sección conseguimos la sucesión exacta larga de homotopía de un morfismo en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $f: X \longrightarrow Y$, mediante un procedimiento similar al empleado en la homotopía estándar.

En primer lugar tomamos una versión algo diferente del espacio de caminos Y^I , definimos la fibra homotópica exterior de f , $P_f^{\mathcal{E}}$, y la fibra homotópica derivada exterior de f , $(P_f^{\mathcal{E}})'$.

También es necesario modificar ligeramente la noción de exactitud. Con ello obtenemos la sucesión buscada

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \Pi_n^{\mathcal{E}}(X) \xrightarrow{\Pi_n^{\mathcal{E}}(f)} \Pi_n^{\mathcal{E}}(Y) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}^{\mathcal{E}}(P_f^{\mathcal{E}}) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow \Pi_1^{\mathcal{E}}(X) \xrightarrow{\Pi_1^{\mathcal{E}}(f)} \Pi_1^{\mathcal{E}}(Y) \xrightarrow{\partial} {}_{\mathbb{N}}\Pi_0^{\mathcal{E}}(P_f^{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\pi_*} \Pi_0^{\mathcal{E}}(X) \xrightarrow{f_*} \Pi_0^{\mathcal{E}}(Y) \end{aligned} \quad (1)$$

Observamos que salvo los dos primeros términos de la sucesión que se hallan en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$,

el resto se encuentran en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Además, la sucesión exacta larga de homotopía asociada a una sucesión fibrada en $Ho(\mathcal{C}_{\mathcal{J}})$ obtenida en el Teorema 3.3.9, tomando $\mathcal{C} = \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, puede obtenerse a partir de la anterior.

En la tercera sección definimos la categoría de pares en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. Dado un objeto en $\mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, tenemos la inclusión en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ $i: A \rightarrow X$. Definimos el n -ésimo grupo de homotopía exterior de $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $\Pi_n^{\mathcal{E}}(X, A)$, como $\Pi_{n-1}^{\mathcal{E}}(P_i^{\mathcal{E}})$ que hemos definido en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, para $n \geq 1$. Si aplicamos la sucesión (1) a la inclusión $i: A \rightarrow X$ conseguimos la sucesión exacta larga de homotopía del par $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \Pi_{n+1}^{\mathcal{E}}(X, A) \xrightarrow{\partial} \Pi_n^{\mathcal{E}}(A) \xrightarrow{i_*} \Pi_n^{\mathcal{E}}(X) \xrightarrow{j_*} \Pi_n^{\mathcal{E}}(X, A) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow \Pi_1^{\mathcal{E}}(X, A) \xrightarrow{\partial} \Pi_0^{\mathcal{E}}(A) \xrightarrow{i} \Pi_0^{\mathcal{E}}(X). \end{aligned}$$

En la cuarta Sección probamos que la sucesión exacta larga de grupos de homotopía globales de Brown de un par $(X, A) \in \mathcal{P}Pro^{\mathbb{N}}$ es un caso particular de la sucesión exacta larga de grupos de homotopía exterior del par $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

4.1 Definiciones.

Recordemos que la categoría de los espacios exteriores bajo \mathbb{N} , $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, tiene por objetos aplicaciones exteriores $j_X: \mathbb{N} \rightarrow X$, y por morfismos los diagramas

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{N} & \\ j_X \swarrow & & \searrow j_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Dicho de otro modo, tiene por objetos espacios exteriores con una sucesión base exterior, que escribiremos abreviadamente $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ ó $(X, j_X) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ si deseamos resaltar la sucesión base. Los morfismos pueden verse como aplicaciones exteriores que preservan las sucesiones base, $fj_X = j_Y$, lo que escribiremos $f: (X, j_X) \rightarrow (Y, j_Y)$ o simplemente $f: X \rightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Dado que el objeto inicial, $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, no es isomorfo al final, $\mathbb{N} \rightarrow *$, se trata de una categoría no basada.

Aplicando el Teorema 0.1.6, tenemos en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ una estructura de categoría de modelos cerrada inducida por la de $\mathcal{E}t$.

Sea la categoría de los espacios exteriores bajo \mathbb{N} que además son sobre \mathbb{N} , $(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})_{id_{\mathbb{N}}}$. Esta categoría tiene por objetos factorizaciones de la identidad $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_X} X \xrightarrow{r_X} \mathbb{N}$ en $\mathcal{E}t$.

Los morfismos en $(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})_{id_{\mathbb{N}}}$ son diagramas en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{N} & \\
 j_X \swarrow & & \searrow j_Y \\
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 r_X \searrow & & \swarrow r_Y \\
 & \mathbb{N} &
 \end{array}$$

Esto es, se trata de aplicaciones exteriores f , tales que $fj_X = j_Y$ y $r_Y f = r_X$.

Para abreviar denotaremos a la categoría $(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})_{id_{\mathbb{N}}}$ por $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$. En ocasiones, escribiremos $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$ para referirnos a los objetos y $f \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}(X, Y)$ para los morfismos en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$ de X en Y , suponiendo la existencia de los morfismos r y j adecuados verificando las condiciones señaladas arriba.

Aplicando la Proposición 0.1.12 en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$ queda inducida una estructura de categoría de modelos cerrada por la existente en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Dados $X, Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$, denotaremos por $P = X \times_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} Y$ a su producto en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$. Este producto es una factorización de $id_{\mathbb{N}}$ como $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_P} X \times_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} Y \xrightarrow{r_P} \mathbb{N}$

En $\mathbb{N} \times I$ y $X \times I$ tomaremos las topologías y externologías consideradas en la Sección 1.3 para $K = I$.

Definición 4.1.1 Sea $j_X: \mathbb{N} \rightarrow X$ objeto en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, abreviado $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. Definimos *cilindro de X bajo \mathbb{N}* , denotado $I^{\mathbb{N}}X$, como el morfismo j_{IX} inducido en el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N} \times I & \xrightarrow{pr_1} & \mathbb{N} \\
 \downarrow j_X \times id_I & & \downarrow j_{IX} \\
 X \times I & \longrightarrow & I^{\mathbb{N}}X
 \end{array}$$

Si $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$, tenemos además el diagrama $\mathbb{N} \xrightarrow{j_X} X \xrightarrow{r_X} \mathbb{N}$. Aplicando la propiedad universal del push-out a $r_X pr_1$ y a $id_{\mathbb{N}}$ existe una única $r_{IX}: I^{\mathbb{N}}X \rightarrow \mathbb{N}$ verificando que $r_{IX} j_{IX} = id_{\mathbb{N}}$. Así obtenemos un diagrama, $\mathbb{N} \xrightarrow{j_{IX}} I^{\mathbb{N}}X \xrightarrow{r_{IX}} \mathbb{N}$, que representa un objeto en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$ que escribiremos $I^{\mathbb{N}}X$.

Además, existen las aplicaciones habituales $\partial_i: X \longrightarrow I^{\mathbb{N}}X$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ definidas como $\partial_i(x) = [i, x]$, para $i = 0, 1$, que están en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ pues $j_{IX} = \partial_i j_X$. De igual forma se definen las correspondientes ∂_i en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Dadas las aplicaciones $f, g: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ decimos que f es exteriormente homótopa bajo \mathbb{N} y sobre \mathbb{N} (en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$) a g , $f \stackrel{\mathbb{N}}{\simeq} g$, si existe $H: I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ tal que $H\partial_0 = f$ y $H\partial_1 = g$.

La relación “ser exteriormente homótopa bajo \mathbb{N} y sobre \mathbb{N} a” es una relación de equivalencia en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(X, Y)$. Denotamos por $[f]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ la clase de aplicaciones exteriormente homótopas bajo \mathbb{N} y sobre \mathbb{N} a f .

Dada $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, f es un nulhomótopa en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ si y sólo si existe una homotopía exterior bajo \mathbb{N} , $H: I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}X \longrightarrow Y$ verificando que $H\partial_0 = j_Y r_X$ y $H\partial_1 = f$.

A H se la denominaremos nulhomotopía en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ de f .

Denotaremos por $\Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})$ a la correspondiente categoría homotópica, la llamaremos categoría de homotopía exterior bajo \mathbb{N} y sobre \mathbb{N} . En ella los objetos son factorizaciones de la forma $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j^X} X \xrightarrow{r^X} \mathbb{N}$ y los morfismos son clases de homotopía exterior bajo \mathbb{N} y sobre \mathbb{N} de aplicaciones en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Sean $X, Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. Denotamos por $[X; Y]^{\mathbb{N}}$ el conjunto de clases de homotopía exterior de aplicaciones en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ de X en Y .

De forma similar, dados $X, Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, escribimos como $[X; Y]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de clases de homotopía exterior en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ de aplicaciones en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ de X en Y .

Para cada $n \geq 0$, podemos considerar el funtor ${}_{\mathbb{N}}\Pi_n^{\mathcal{E}}: \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \longrightarrow Set$ que a todo $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ le asigna ${}_{\mathbb{N}}\Pi_n^{\mathcal{E}}(X) = \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})(\mathbb{N} \times S^n, X)$. Observemos que $S^n = \mathbb{N} \times S^n$ denota el diagrama $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_{S^n}} \mathbb{N} \times S^n \xrightarrow{r_{S^n}} \mathbb{N}$, con $j_{S^n}(m) = (m, s_0)$, para todo $m \in \mathbb{N}$, s_0 punto base de S^n y $r_{S^n} = pr_1$. A cada morfismo en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(X, Y)$ este funtor le asigna ${}_{\mathbb{N}}\Pi_n^{\mathcal{E}}(f) = f_*^{\mathcal{E}}: {}_{\mathbb{N}}\Pi_n^{\mathcal{E}}(X) \longrightarrow {}_{\mathbb{N}}\Pi_n^{\mathcal{E}}(Y)$ que a toda $[g]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \in {}_{\mathbb{N}}\Pi_n^{\mathcal{E}}(X)$ le hace corresponder $[fg]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \in {}_{\mathbb{N}}\Pi_n^{\mathcal{E}}(Y)$.

Definición 4.1.2 Sean $X, Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, definimos *wedge de X y Z bajo \mathbb{N}* , $W = X \vee^{\mathbb{N}} Z \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, como el morfismo $j_W = in_1 j_X = in_2 j_Z$ obtenido mediante le push out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{N} & \xrightarrow{j_Z} & Z \\
\downarrow j_X & & \downarrow in_2 \\
X & \xrightarrow{in_1} & X \underset{\mathbb{N}}{\vee} Z
\end{array}$$

Si $X, Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, es decir representan sendos diagramas $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_X} X \xrightarrow{r_X} \mathbb{N}$, $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_Z} Z \xrightarrow{r_Z} \mathbb{N}$, aplicando la propiedad universal del push-out a r_Z y r_X vemos que existe un único $r_W: X \underset{\mathbb{N}}{\vee} Z \rightarrow \mathbb{N}$ con $r_W j_W = id_{\mathbb{N}}$.

Por tanto tenemos un diagrama $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_W} X \underset{\mathbb{N}}{\vee} Z \xrightarrow{r_W} \mathbb{N}$ que representa un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Escribiremos esto abreviadamente como $X \underset{\mathbb{N}}{\vee} Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Definición 4.1.3 Dados $X, Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ definimos el *producto smash* de X y Z bajo \mathbb{N} y sobre \mathbb{N} , denotado $S = X \underset{\mathbb{N}}{\wedge} Z$, al objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ obtenido por el proceso siguiente. Tomamos el coigualador de $j_P r_W$ y de la aplicación exterior $k: W = X \underset{\mathbb{N}}{\vee} Z \rightarrow P = X \underset{\mathbb{N}}{\times} Z$ definida por $k([x]) = (x, j_Z r_X([x]))$, $k([z]) = (j_X r_Z([z]), z)$, para todo $x \in X$ y $z \in Z$. Esto es

$$\begin{array}{ccc}
X \underset{\mathbb{N}}{\vee} Z & \xrightarrow{k} & X \underset{\mathbb{N}}{\times} Z \\
\downarrow j_P r_W & & \downarrow q \\
X \underset{\mathbb{N}}{\vee} Z & \xrightarrow{j_P r_W} & X \underset{\mathbb{N}}{\times} Z \\
& & \downarrow q \\
& & X \underset{\mathbb{N}}{\wedge} Z
\end{array}$$

donde $X \underset{\mathbb{N}}{\times} Z$ está representado por la factorización $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_P} X \underset{\mathbb{N}}{\times} Z \xrightarrow{r_P} \mathbb{N}$. Es claro que existe $j_S = q k j_W: \mathbb{N} \rightarrow X \underset{\mathbb{N}}{\wedge} Z$. Además por la propiedad universal del coigualador aplicada a (\mathbb{N}, r_P) existe una única $r_S: X \underset{\mathbb{N}}{\wedge} Z \rightarrow \mathbb{N}$ verificando que $r_S q = r_P$. También $r_S j_S = r_S q k j_W = r_P k j_W = r_P j_P = id_{\mathbb{N}}$.

Tenemos así un diagrama $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_S} X \underset{\mathbb{N}}{\wedge} Z \xrightarrow{r_S} \mathbb{N}$ que determina un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, lo que escribiremos $X \underset{\mathbb{N}}{\wedge} Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Observación 4.1.4

Si $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ tenemos el diagrama $\mathbb{N} \xrightarrow{j_X} X \xrightarrow{r_X} \mathbb{N}$. En \mathbb{N} tenemos la topología discreta por tanto $r_X^{-1}(n) = X_n$ es abierto y cerrado en \mathbb{N} .

Además $r_X^{-1}(n) \cap r_X^{-1}(m) = \emptyset$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ y $m \neq n$, luego topológicamente $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

Ahora definiremos el cono y la suspensión para objetos en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Definición 4.1.5 Sea $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, definimos el *cono de X en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$* , denotado CX , al diagrama obtenido mediante el proceso siguiente. En primer lugar consideramos el morfismo j_{CX} inducido en el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{r_X} & \mathbb{N} \\ \downarrow \partial_0 & & \downarrow j_{CX} \\ I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} X & \xrightarrow{k} & CX \end{array}$$

Aplicando la propiedad universal del push-out a r_{IX} y a $id_{\mathbb{N}}$ obtenemos una única $r_{CX}: CX \rightarrow \mathbb{N}$ verificando que $r_{CX}k = r_{IX}$ y que $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_{CX}} CX \xrightarrow{r_{CX}} \mathbb{N}$. Así este último diagrama representa un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, lo que escribiremos como $CX \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Notemos que, topológicamente, $CX = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} CX_n$ con $X_n = r_X^{-1}(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por la Observación 4.1.4.

Definición 4.1.6 Sea $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, definimos la *suspensión de X en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$* , ΣX , de la siguiente manera. Sea el push-out en $\mathcal{E}t$:

$$\begin{array}{ccc} X \coprod_{\mathbb{N}} X & \xrightarrow{r_X + r_X} & \mathbb{N} \\ \downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow j_{\Sigma X} \\ I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} X & \xrightarrow{\bar{k}} & \Sigma X \end{array}$$

Aplicando la propiedad universal del push-out a r_{IX} y a $id_{\mathbb{N}}$ obtenemos una única $r_{\Sigma X}: \Sigma X \rightarrow \mathbb{N}$ verificando que $r_{\Sigma X}\bar{k} = r_{IX}$ y que $r_{\Sigma X}j_{\Sigma X} = id_{\mathbb{N}}$, con lo que queda determinado un único objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, o de forma más simple, $\Sigma X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

También por la Observación 4.1.4, topológicamente, $\Sigma X = \Sigma(\sqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n) = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma X_n$, con $r_X^{-1}(n) = X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es posible definir la suspensión de otra forma a través del push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{r_X} & \mathbb{N} \\ \downarrow \partial_1 & & \downarrow j_{\Sigma X} \\ CX & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

y aplicando de nuevo la propiedad universal del push-out a r_{CX} y a $id_{\mathbb{N}}$.

La suspensión n -ésima se obtiene aplicando la definición anterior a $\Sigma^{n-1}X$ de forma inductiva.

Observemos que también podemos definir la suspensión n -ésima empleando el producto smash en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ pues $X \wedge_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} (\mathbb{N} \times S^n) \cong \Sigma^n X$.

A continuación definiremos el espacio de lazos para $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ que denotaremos ΩY , y que será un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Sea Y^I el espacio exterior de la Definición 2.2.5 y las aplicaciones exteriores $d_i: Y^I \longrightarrow Y$ para $i = 0, 1$, a las que hicimos referencia en la Proposición 2.2.7. Se verifica el siguiente resultado:

Lema 4.1.7

Sea $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, entonces $Y^I \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Demostración:

Definimos una aplicación $j_{Y^I}: \mathbb{N} \longrightarrow Y^I$ de forma que $j_{Y^I}(n) = j_Y(\widetilde{n}) = \widetilde{y}_n$ con $\widetilde{y}_n: I \longrightarrow Y$ camino constante en y_n .

Es claro que j_{Y^I} es continua. Observemos que, si e es la aplicación exponencial del Teorema 1.3.5 que establece la biyección $\mathcal{E}t(\mathbb{N} \times I, X) \cong \mathcal{E}t(\mathbb{N}, Top(I, X))$, entonces j_{Y^I} se corresponde por e con $\mathbb{N} \times I \xrightarrow{pr_1} \mathbb{N} \xrightarrow{j_Y} Y$, que es externa por ser composición de externas. De esta forma concluimos que j_{Y^I} es exterior. \square

Notas 4.1.8

(a) El Lema 4.1.7 puede generalizarse para un $Y^K = \mathcal{E}t(K, Y)$, con K espacio topológico compacto, tomando la estructura de espacio exterior que detallamos en la Sección 1.3 para probar el Teorema 1.3.5.

(b) Si $Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, K conexo y compacto, $Y^K \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Para probar este hecho basta tomar $r_{Y^K}: Y^K \longrightarrow \mathbb{N}$ como $r_{Y^K} = r_Y q_k$, con $k \in K$ y donde $q_k: Y^K \longrightarrow Y$ generaliza q_t del Lema 2.2.6. Además r_{Y^K} no depende del $k \in K$, pues K es conexo.

Definición 4.1.9 Sea $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, llamamos *espacio de lazos de Y bajo \mathbb{N}* , al diagrama $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_{\Omega Y}} \Omega Y \xrightarrow{r_{\Omega Y}} \mathbb{N}$ que obtenemos por el proceso siguiente. Primero tomamos el pull-back en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc}
\Omega Y & \xrightarrow{i_{\Omega Y}} & Y^I \\
\downarrow r_{\Omega Y} & & \downarrow (d_0, d_1) \\
\mathbb{N} & \xrightarrow{(j_Y, j_Y)} & Y \times Y
\end{array}$$

y le aplicamos la propiedad universal del pull-back a j_{Y^I} y a $id_{\mathbb{N}}$. De esta forma obtenemos un único $j_{\Omega Y}: \mathbb{N} \rightarrow \Omega Y$ verificando que $i_{\Omega Y} j_{\Omega Y} = j_{Y^I}$ y que $r_{\Omega Y} j_{\Omega Y} = id_{\mathbb{N}}$, luego $\Omega Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Podemos definir un functor suspensión, $\Sigma: \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ de la siguiente manera. A cada $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, Σ le asigna ΣX como en la Definición 4.1.6 y olvida su estructura sobre \mathbb{N} . A cada aplicación $f: X \rightarrow Y$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ le hace corresponder Σf de forma única por el siguiente proceso. Primero recordemos que ΣX y ΣY se construyen empleando push-outs de la forma:

$$\begin{array}{ccc}
X \underset{\mathbb{N}}{\vee} X & \xrightarrow{r_X + r_X} & \mathbb{N} \\
\downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow j_{\Sigma X} \\
I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} X & \xrightarrow{\bar{k}_X} & \Sigma X
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
Y \underset{\mathbb{N}}{\vee} Y & \xrightarrow{r_Y + r_Y} & \mathbb{N} \\
\downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow j_{\Sigma Y} \\
I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} Y & \xrightarrow{\bar{k}_Y} & \Sigma Y
\end{array}$$

Aplicando la propiedad universal del push-out que sirve para definir $I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} X$ a j_{IY} y a $in_1(f \times id_I)$ existe una única $If: I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} X \rightarrow I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} Y$ con $If j_{IX} = j_{IY}$. Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
X \underset{\mathbb{N}}{\vee} X & \xrightarrow{f+f} & Y \underset{\mathbb{N}}{\vee} Y \\
\downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow \partial_0 + \partial_1 \\
I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} X & \xrightarrow{If} & I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} Y
\end{array}$$

Ahora $j_{\Sigma Y}(r_X + r_X) = j_{\Sigma Y}(r_Y + r_Y)(f + f) = \bar{k}_Y(\partial_0 + \partial_1)(f + f) = \bar{k}_Y If(\partial_0 + \partial_1)$. Así podemos aplicar de nuevo la propiedad universal del push-out de construcción de ΣX a $\bar{k}_Y If$ y a $j_{\Sigma Y}$ y existe una única $\Sigma f: \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$ verificando que $\Sigma f \bar{k}_X = \bar{k}_Y If$ y que $\Sigma f j_{\Sigma X} = j_{\Sigma Y}$. Por tanto Σf está en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

También tenemos un functor lazo, $\Omega: \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, que cada $Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ le asigna ΩY espacio de lazos de Y bajo \mathbb{N} como en la Definición 4.1.9, que es un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

A cada $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ la lleva a $\Omega f: \Omega X \longrightarrow \Omega Y$ que obtenemos de forma única mediante la construcción siguiente. Recordemos que ΩY se obtiene mediante el pull-back.

$$\begin{array}{ccc} \Omega Y & \xrightarrow{i_{\Omega Y}} & Y^I \\ \downarrow r_{\Omega Y} & & \downarrow (d_0, d_1) \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{(j_Y, j_Y)} & Y \times Y \end{array}$$

Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X^I & \xrightarrow{f^I} & Y^I \\ \downarrow (d_0, d_1) & & \downarrow (d_0, d_1) \\ X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y \end{array}$$

Como $(d_0, d_1)f^I i_{\Omega X} = (f \times f)(d_0, d_1)i_{\Omega X} = (f \times f)(j_X, j_X)r_{\Omega X} = (j_Y j_Y)r_{\Omega X}$, podemos aplicar la propiedad universal del pull-back a $f^I i_{\Omega X}$ y a $r_{\Omega X}$ y existe una única $\Omega f: \Omega X \longrightarrow \Omega Y$ verificando que $r_{\Omega Y} \Omega f = r_{\Omega X}$. También, como $(d_0, d_1)i_{\Omega Y} \Omega f j_{\Omega X} = (j_Y, j_Y)r_{\Omega Y} \Omega f j_{\Omega X} = (j_Y, j_Y)r_{\Omega X} j_{\Omega X} = (j_Y, j_Y)$ podemos aplicar la propiedad universal del pull-back a $id_{\mathbb{N}}$ y a $i_{\Omega Y} \Omega f j_{\Omega X}$ y existe una única $j_{\Omega Y} = \Omega f j_{\Omega X}$. Así podemos afirmar que Ωf es un morfismo en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Lema 4.1.10

Dado $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $\Omega Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ tiene estructura de objeto grupo en la categoría $\Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})$.

Demostración:

Podemos definir una multiplicación $\mu: \Omega Y \times_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$ para cualquier pareja $(w_1, w_2) \in \Omega Y \times_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \Omega Y$ y $t \in I$ como:

$$\mu(w_1, w_2) = \begin{cases} w_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ w_2(2-2t) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Veamos que μ es exterior. Es claro que $\mu(w_1, w_2)$ es continua pues w_2 verifican que $w_1(0) = w_2(0) = j_Y(n) = w_1(1) = w_2(1)$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$ ya que $(w_1, w_2) \in \Omega Y \times_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \Omega Y$ y porque w_1 y w_2 son continuos.

Dado que en ΩY tenemos la topología heredada de la compacto–abierto, μ es continua como en el caso clásico en *Top*. Para probar que μ es externa, tengamos en cuenta que en ΩY tenemos la externología heredada de Y^I . Dado $U \in \mathcal{E}_{\Omega Y}$ existe $(I, V) \in T_{ca}$ con $V \in \mathcal{E}_Y$ tal que $(I, V) \cap \Omega Y \subset U$, entonces $\mu^{-1}((I, V) \cap \Omega Y) = \mu^{-1}((I, V)) \cap \mu^{-1}(\Omega Y)$ contiene a $((I, V) \times (I, V)) \cap (\Omega Y \times_{\mathbb{N}} \Omega Y)$. Puesto que en $\Omega Y \times_{\mathbb{N}} \Omega Y$ tenemos la externología producto se tiene que $\mu^{-1}((I, V))$ es un abierto exterior. Además es claro que μ está en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, con lo que μ está bien definida.

Es sencillo comprobar que μ es homotópicamente asociativa, y que tiene elemento neutro de homotopía, la sucesión de lazos constantes $j_{\Omega Y}: \mathbb{N} \longrightarrow \Omega Y, j_{\Omega Y}(n) = \widetilde{j_Y}(n): I \longrightarrow Y$ tal que $\widetilde{j_Y}(n)(t) = j_Y(n)$ para todo $t \in I, n \in \mathbb{N}$, con demostraciones similares a las clásicas.

La inversa de homotopía, $\vartheta: \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$, la definimos como $\vartheta(w)(t) = w(1 - t)$ para todo $t \in I$. Se tiene que ϑ es continua. Para ver que es externa tomemos $U \in \mathcal{E}_{\Omega Y}$, entonces $U \in T_{ca}$ y existe $V \in \mathcal{E}_Y$ verificando que $(I, V) \cap \Omega Y \subset U$. Así se tiene que $(I, V) \cap \Omega Y \subset \vartheta^{-1}((I, V)) \cap \Omega Y = \vartheta^{-1}((I, V) \cap \Omega Y) \subset \vartheta^{-1}(U)$ y como $\vartheta^{-1}(U)$ es abierto en la topología de ΩY , por ser continua ϑ , podemos concluir que $\vartheta^{-1}(U) \in \mathcal{E}_{\Omega Y}$. Comprobar que es inversa de homotopía es sencillo repitiendo las demostraciones habituales. \square

Lema 4.1.11

Dado $Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, se verifica que $\Omega(Y^I)$ es isomorfo en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ a $(\Omega Y)^I$.

Demostración:

Para facilitar la demostración denotamos de diferente forma los dos intervalos unidad empleados en la construcción de los espacios de lazos, I' e I . Así pretendemos demostrar que $\Omega'(Y^I)$ es exteriormente homeomorfo a $(\Omega Y)^{I'}$. Aquí Ω' significa que hemos construido el espacio de lazos respecto a I' y Ω que lo hemos hechos respecto a I .

En primer lugar definimos $\psi: \Omega'(Y^I) \longrightarrow (\Omega Y)^{I'}$. Dado $\gamma \in \Omega'(Y^I), \gamma: I' \longrightarrow Y^I$ verifica que $\gamma(0) = \gamma(1) = \widetilde{j_Y}(n) = \widetilde{y}_n$, donde $\widetilde{y}_n: I \longrightarrow Y$ está definida como $\widetilde{y}_n(t) = y_n$, para todo $t \in I$. Entonces $\psi(\gamma): I' \longrightarrow \Omega Y$ está definida, para todo $s \in I'$, como $\psi(\gamma)(s): I \longrightarrow Y$ con $\psi(\gamma)(s)(t) = \gamma(t)(s)$, para todo $t \in I$. Está bien definida pues $\psi(\gamma)(s)(0) = \gamma(0)(s) = \widetilde{y}_n(s) = y_n$ y análogamente $\psi(\gamma)(s)(t) = \gamma(1)(s) = \widetilde{y}_n(n) = y_n$.

Es claro que es continua, veamos que ψ es externa.

Dado $W \in \mathcal{E}_{(\Omega Y)^{I'}}, W \in T_{ca}^{(\Omega Y)^{I'}}$ y existe $V \in \mathcal{E}_{\Omega Y}$ tal que $(I', V) \subset W$. Puesto que $V \in \mathcal{E}_{\Omega Y}$, existe $U \in \mathcal{E}_Y$ con $(I, U) \cap \Omega Y \subset V$. Observemos ahora que

$(I', (I, U) \cap \Omega Y) \subset (I', V) \subset W$. Aplicando ψ^{-1} vemos que $L = (I', (I, U)) \cap \Omega'(Y^I) \subset \psi^{-1}(I', (I, U) \cap \Omega Y) \subset \psi^{-1}((I', V)) \subset \psi^{-1}(W)$.

Como $L \in \mathcal{E}_{\Omega'(Y^I)}$ y $\psi^{-1}(W) \in T_{ca}^{\Omega'(Y^I)}$ por ser ψ continua, se tiene que $\psi^{-1}(W) \in \mathcal{E}_{\Omega'(Y^I)}$ y ψ es externa.

En segundo lugar definimos $\varphi: (\Omega Y)^{I'} \longrightarrow \Omega'(Y^I)$ para $\alpha: I' \longrightarrow \Omega Y$ con $\alpha(s)(0) = \alpha(s)(1) = y_n$ para todo $s \in I'$, como $\varphi(\alpha): I' \longrightarrow Y^I$ verificando que $\varphi(\alpha)(s): I \longrightarrow Y$ de forma que $\varphi(\alpha)(s)(t) = \alpha(t)(s)$ para todo $t \in I, s \in I'$.

Es claro que $\varphi(\alpha)(0)(t) = \alpha(t)(0) = y_n$ para todo $t \in I, n \in \mathbb{N}$, luego $\varphi(\alpha)(0) = \tilde{y}_n$ camino constante en y_n y análogamente $\varphi(\alpha)(1) = \tilde{y}_n$. Por tanto φ está bien definida, por como lo está $j_{Y^{I'}}$.

Es sabido que φ es continua. Veamos que es externa.

Sea $U \in \mathcal{E}_{\Omega'(Y^I)}$, entonces $U \in T_{ca}^{\Omega'(Y^I)}$ y existe $V \in \mathcal{E}_{Y^I}$ tal que $(I', V) \cap \Omega'(Y^I) \subset U$, pero por $V \in \mathcal{E}_{Y^I}, V \in T_{ca}^{Y^I}$ y existe $W \in \mathcal{E}_Y$ con $(I, W) \subset V$. Así tenemos que $(I', (I, W)) \cap \Omega'(Y^I) \subset (I', V) \cap \Omega'(Y^I) \subset U$. Aplicando φ^{-1} observamos que $(I', (I, W)) \cap (\Omega Y)^{I'} \subset \varphi^{-1}((I', (I, W)) \cap \Omega'(Y^I)) \subset \varphi^{-1}((I, V) \cap \Omega'(Y^I)) \subset \varphi^{-1}(U)$, pero $(I', (I, W) \cap (\Omega Y)^{I'}) \in \mathcal{E}_{(\Omega Y)^{I'}}$ y $\varphi^{-1}(U)$ es abierto en $T_{ca}^{(\Omega Y)^{I'}}$ por ser φ continua. De esta forma concluimos que $\varphi^{-1}(U)$ es abierto exterior en $(\Omega Y)^{I'}$ y φ es externa.

Por último es sencillo comprobar que $\varphi\psi = id_{\Omega'(Y^I)}$ y que $\psi\varphi = id_{(\Omega Y)^{I'}}$ así como que φ y ψ están en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. \square

Teorema 4.1.12

Los funtores suspensión $\Sigma: \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y lazo $\Omega: \mathcal{E}t^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ definidos con anterioridad verifican que Σ es adjunto a izquierda de Ω .

Demostración:

Es necesario probar que existe la siguiente biyección natural:

$$\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(\Sigma X, Y) \cong \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(X, \Omega Y)$$

para todo $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ e $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Por el Teorema 1.3.5 para $K = I$ la aplicación exponencial e nos proporciona la biyección natural

$$\mathcal{E}t(X \times I, Y) \stackrel{e}{\cong} \mathcal{E}t(X, Y^I)$$

Recordemos que el cilindro de $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ es $j_{IX}: \mathbb{N} \rightarrow I^{\mathbb{N}}X$, que está definido para todo $n \in \mathbb{N}$ como $j_{IX}(n) = [x_n, 0]$ donde $[x_n, 0] = \{(x_n, t) \in X \times I; t \in I\}$. Se verifica que e induce la siguiente biyección natural

$$\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}((I^{\mathbb{N}}X, j_{IX}); (Y, j_Y)) \stackrel{e}{\cong} \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}((X, j_X); (Y^I, j_{Y^I}))$$

Esto es sencillo de probar ya que si $f \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}((I^{\mathbb{N}}X, j_{IX}); (Y, j_Y))$ $e(f)(x_n)(t) = f([x_n, t]) = y_n$ para todo $t \in I$ y $n \in \mathbb{N}$. Pero entonces $e(f)(x_n) = \tilde{y}_n$ lazo constante en y_n y, como $j_{Y^I}(n) = \tilde{y}_n$, tenemos que $e(f) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}((X, j_X); (Y^I, j_{Y^I}))$. Además dada $g \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}((X, j_X); (Y^I, j_{Y^I}))$ se verifica que $e^{-1}(g)([x_n, t]) = g(x_n)(t) = y_n = j_Y(n)$ para todo $t \in I$ y $n \in \mathbb{N}$, luego $e^{-1}(g) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}((I^{\mathbb{N}}X, j_{IX}); (Y, j_Y))$.

Recordemos que ΣX se define mediante el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} X \vee_{\mathbb{N}} X & \xrightarrow{r_X + r_X} & \mathbb{N} \\ \downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow j_{\Sigma X} \\ I^{\mathbb{N}}X & \xrightarrow{\bar{k}} & \Sigma X \end{array} \quad (1)$$

y aplicando la propiedad universal a r_{IX} y a $id_{\mathbb{N}}$, con lo que obtenamos el morfismo $r_{\Sigma X}: \Sigma X \rightarrow \mathbb{N}$ verificando que $r_{\Sigma X}j_X = id_{\mathbb{N}}$, esto es $\Sigma X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$.

El lazo de $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $\Omega Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$ se definía mediante el pull-back en $\mathcal{E}t$.

$$\begin{array}{ccc} \Omega Y & \xrightarrow{i_{\Omega Y}} & Y^I \\ \downarrow r_{\Omega Y} & & \downarrow (d_0, d_1) \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{(j_Y, j_Y)} & Y \times Y \end{array} \quad (2)$$

y tomando el diagrama $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_{\Omega Y}} \Omega Y \xrightarrow{r_{\Omega Y}} \mathbb{N}$ inducido por la propiedad universal del pull-back como en la Definición 4.1.9.

Definimos ahora la aplicación $\bar{e}: \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(\Sigma X, Y) \rightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(X, \Omega Y)$ que a toda $f: \Sigma X \rightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ le asigna $\bar{e}(f) = i_{\Omega Y}^{-1}e(f\bar{k})$.

Veamos que \bar{e} está bien definida. En primer lugar probemos que $e(f\bar{k}) \in Im i_{\Omega Y}$. Es claro que $e(f\bar{k}): X \rightarrow Y^I$ y además se cumple que $d_0e(f\bar{k}) = f\bar{k}d_0 = j_Y r_X$ así

como $d_1 e(f\bar{k}) = f\bar{k}\partial_1 = j_Y r_X$ por la construcción de ΣX . De esta manera podemos aplicar la propiedad universal del pull-back (2) a r_X y a $e(f\bar{k})$ con lo que existe una única $\bar{f}: X \rightarrow \Omega Y$ verificando que $r_{\Omega Y} \bar{f} = r_X$ (es sobre \mathbb{N}) y que $i_{\Omega Y} \bar{f} = e(f\bar{k})$, o lo que es lo mismo, $\bar{f} = i_{\Omega Y}^{-1} e(f\bar{k})$. Para terminar queda por probar que es bajo \mathbb{N} . Esto es sencillo pues $(d_0, d_1) i_{\Omega Y} \bar{f} j_X = (j_Y, j_Y) r_{\Omega Y} \bar{f} j_X = (j_Y, j_Y) r_X j_X = (j_Y, j_Y)$ y así es posible aplicar la propiedad universal de (2) a $i_{\Omega Y} \bar{f} j_X$ y a $id_{\mathbb{N}}$, con lo que existe una única $\bar{f} j_X = j_{\Omega Y}$.

Ahora probemos que \bar{e} es sobre. Dada $g: X \rightarrow \Omega Y$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, tomamos la aplicación $e^{-1}(i_{\Omega Y} g): I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} X \rightarrow Y$. Como $e^{-1}(i_{\Omega Y} g)(\partial_0 + \partial_1) = (d_0, d_1) i_{\Omega Y} g = (j_Y, j_Y) r_{\Omega Y} g = (j_Y, j_Y) r_X$, se puede aplicar la propiedad universal de (1) a $e^{-1}(i_{\Omega Y} g)$ y a j_Y . Así existe una única $f: \Sigma X \rightarrow Y$ verificando que $f\bar{k} = e^{-1}(i_{\Omega Y} g)$ y $f j_{\Sigma X} = j_Y$. También $\bar{e}(f\bar{k}) = i_{\Omega Y}^{-1} e(e^{-1}(i_{\Omega Y} g)) = g$.

Por último demostremos que \bar{e} es inyectiva. Sean f y f' tales que $\bar{e}(f) = \bar{e}(f')$, esto es, $i_{\Omega Y}^{-1} e(f\bar{k}) = i_{\Omega Y}^{-1} e(f'\bar{k})$. Como $Ime \subset Imi_{\Omega Y}$ y e es biyectiva se tiene que $f\bar{k} = f'\bar{k}$. Por la propiedad universal del push-out (1) aplicada a $f\bar{k} = f'\bar{k}$ y a j_Y se tiene que $f = f'$.

Resta por demostrar la naturalidad de \bar{e} en el sentido siguiente. Dadas $f: X \rightarrow X'$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y $g: Y \rightarrow Y'$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, los diagramas inferiores son conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(\Sigma X, Y) & \xrightarrow{\bar{e}} & \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(X, \Omega Y) \\ \downarrow g_* & & \downarrow (\Omega g)_* \\ \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(\Sigma X, Y') & \xrightarrow{\bar{e}} & \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(X, \Omega Y') \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(\Sigma X', Y) & \xrightarrow{\bar{e}} & \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(X', \Omega Y) \\ \downarrow (\Sigma f)^* & & \downarrow f^* \\ \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(\Sigma X, Y) & \xrightarrow{\bar{e}} & \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(X, \Omega Y) \end{array}$$

donde $f^*: \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(\Sigma X', Y) \rightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(\Sigma X, Y')$ definida para toda $h: \Sigma X \rightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ como $f^*(h) = hf$ y análogamente $(\Sigma f)^*$.

Esto es inmediato por la naturalidad de e y el carácter functorial de Σ y Ω . \square

Corolario 4.1.13

Los funtores suspensión, $\Sigma: \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, y lazo, $\Omega: \mathcal{E}t^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, citados en el teorema anterior, verifican que Σ es adjunto a izquierda de Ω en las respectivas categorías de homotopía.

Demostración:

Es claro que ha de probarse la biyección natural

$$[\Sigma X, Y]^{\mathbb{N}} \cong [X, \Omega Y]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$$

para todo $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}, Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Tenemos que:

$$\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(I^{\mathbb{N}}\Sigma X, Y) \cong \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(\Sigma X, Y^I) \cong \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(X, \Omega(Y^I)) \cong \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(X, (\Omega Y)^I) \cong \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}X, \Omega Y)$$

aplicando el Teorema 4.1.12 y el Lema 4.1.11 y donde la última biyección se obtiene por procedimientos análogos a los de la demostración anterior.

Ahora dadas las aplicaciones $\Sigma X \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial_0} \\ \xrightarrow{\partial_1} \end{array} I^{\mathbb{N}}\Sigma X$ quedan inducidas

$$\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(I^{\mathbb{N}}\Sigma X, Y) \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial_0^*} \\ \xrightarrow{\partial_1^*} \end{array} \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(\Sigma X, Y)$$

y podemos ver que $\text{coig}(\partial_0^*, \partial_1^*) = [\Sigma X, Y]^{\mathbb{N}}$.

Análogamente considerando $X \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial_0} \\ \xrightarrow{\partial_1} \end{array} I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}X$, se inducen las aplicaciones

$$\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}X, \Omega Y) \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial_0^*} \\ \xrightarrow{\partial_1^*} \end{array} \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(X, \Omega Y)$$

y así $\text{coig}(\partial_0^*, \partial_1^*) = [X, \Omega Y]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Podemos construir el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(I^{\mathbb{N}}\Sigma X, Y) & \cong & \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}X, \Omega Y) \\ \downarrow \partial_0^* \downarrow \partial_1^* & & \downarrow \partial_0^* \downarrow \partial_1^* \\ \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}(\Sigma X, Y) & \cong & \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}(X, \Omega Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\Sigma X, Y]^{\mathbb{N}} & & [X, \Omega Y]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \end{array}$$

y así se tiene que $[\Sigma X, Y]^{\mathbb{N}} \cong [X, \Omega Y]^{\mathbb{N}}$.

Resta por demostrar que \bar{e} es natural, es decir, dadas las aplicaciones $f: X' \rightarrow X$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y $g: Y \rightarrow Y'$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, los diagramas siguientes

$$\begin{array}{ccc} [\Sigma X, Y]^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & [X; \Omega Y]^{\mathbb{N}} \\ \downarrow g^* & & \downarrow \Omega g^* \\ [\Sigma X, Y']^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & [X, \Omega Y]^{\mathbb{N}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} [\Sigma X, Y]^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & [X' \Omega Y]^{\mathbb{N}} \\ \downarrow \Sigma f_* & & \downarrow f_* \\ [\Sigma X', Y]^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & [X', \Omega Y]^{\mathbb{N}} \end{array}$$

son conmutativos. Aquí g^* y f_* son las inducidas en homotopía por g y f respectivamente. Pero esto es inmediato. \square

4.2 Sucesión exacta larga de homotopía exterior de una aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Sea $\tilde{Y}^I \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ construido por el proceso siguiente. Sea el pull-back en $\mathcal{E}t$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y}^I & \xrightarrow{pr_2} & Y^I \\ \downarrow r_{\tilde{Y}^I} & & \downarrow d_0 \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{j_Y} & Y \end{array} \quad (1)$$

Aplicando la propiedad universal de este pull-back a j_{Y^I} y a $id_{\mathbb{N}}$ existe una única $j_{\tilde{Y}^I}: \mathbb{N} \rightarrow \tilde{Y}^I$ verificando que $pr_2 j_{\tilde{Y}^I} = j_{Y^I}$ y que $r_{\tilde{Y}^I} j_{\tilde{Y}^I} = id_{\mathbb{N}}$. De esta forma obtenemos un objeto en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $j_{\tilde{Y}^I}$, que escribimos $\tilde{Y}^I \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. Por otro lado la factorización $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_{\tilde{Y}^I}} \tilde{Y}^I \xrightarrow{r_{\tilde{Y}^I}} \mathbb{N}$ determina un objeto en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, lo que denotamos $\tilde{Y}^I \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Observemos que el codominio de $j_{\tilde{Y}^I}$ es el conjunto de pares $(n, w) \in \mathbb{N} \times Y^I$ tales que $w(0) = j_Y(n) = y_n$. Así podemos identificar \tilde{Y}^I con $pr_2(\tilde{Y}^I)$ y considerarlo como aquellos caminos continuos en Y que comienzan en $j_Y(n) = y_n$, para un cierto $n \in \mathbb{N}$. De esta forma \tilde{Y}^I puede verse como un subespacio exterior de Y^I dotado de la topología compacto-abierta y la externología heredadas de las existentes en Y^I .

Definimos una aplicación $p: \tilde{Y}^I \longrightarrow Y$ como $p(w) = w(1)$ para todo $w \in \tilde{Y}^I$, luego $p = d_1 pr_2$. Es exterior por ser la composición de aplicaciones exteriores. Además p es bajo \mathbb{N} pues $pj_{\tilde{Y}^I}(n) = p(\tilde{y}_n) = \tilde{y}_n(1) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.2.1

Dada $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, es nulhomótopa en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ si y sólo si f tiene una elevación en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, $g: X \longrightarrow \tilde{Y}^I$, verificando que $pg = f$.

Demostración:

Si f es nulhomótopa en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ existe $H: I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ con $H\partial_0 = j_Y r_X$ y $H\partial_1 = f$. Aplicando la exponencial inducida en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ por el Teorema 1.3.5 obtenemos $\bar{H} = e(H): X \longrightarrow Y^I$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. Como $d_0 \bar{H} = H\partial_0 = j_Y r_X$ podemos aplicar la propiedad universal del pull-back (1) a \bar{H} y a r_X y existe una única $g: X \longrightarrow \tilde{Y}^I$ exterior verificando que $pr_2 g = \bar{H}$ y $r_{\tilde{Y}^I} g = r_X$, esto es, g es sobre \mathbb{N} . Aplicando otra vez la propiedad universal del pull-back a $pr_2 g j_X = \bar{H} j_X$ y a $id_{\mathbb{N}}$ se tiene que $g j_X = j_{\tilde{Y}^I}$, con lo que $g \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Se verifica que $pg = d_1 \bar{H} = H\partial_1 = f$.

Para el recíproco tomamos $g: X \longrightarrow \tilde{Y}^I$. Sea $g' = pr_2 g$, $g': X \longrightarrow Y^I$, le aplicamos la inversa de la exponencial citada en la demostración del directo y obtenemos $\hat{H} = e^{-1}(g'): I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. Se verifica que $\hat{H}\partial_0 = e^{-1}(g')\partial_0 = e^{-1}(pr_2 g)\partial_0 = d_0 pr_2 g = j_Y r_{\tilde{Y}^I} g = j_Y r_X$, así como $\hat{H}\partial_1 = e^{-1}(g')\partial_1 = e^{-1}(pr_2 g)\partial_1 = d_1 pr_2 g = f$ y como $\hat{H}j_{IX} = j_Y$, f es nulhomótopa en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. \square

Definición 4.2.2 Llamamos *fibra homotópica exterior de una aplicación* $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, denotada $P_f^{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, al morfismo $j_{P_f^{\mathcal{E}}}: \mathbb{N} \longrightarrow P_f^{\mathcal{E}}$ que obtenemos al aplicar la propiedad universal del pull-back en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} P_f^{\mathcal{E}} & \xrightarrow{pr_2} & \tilde{Y}^I \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

a las aplicaciones j_X y $j_{\tilde{Y}^I}$.

Observamos que $P_f^{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ tomando $r_{P_f^{\mathcal{E}}} = r_{\tilde{Y}^I} pr_2$.

De forma más detallada el codominio de $j_{P_f^{\mathcal{E}}}$ es el conjunto de ternas $(x, n, w) \in X \times \mathbb{N} \times Y^I$ verificando que $p(w) = w(1) = f(x)$ y $d_0 w = w(0) = j_Y(n)$.

Tenemos la aplicación $\pi: P_f^{\mathcal{E}} \longrightarrow X$ que a toda terna (x, n, w) le asigna $\pi(x, n, w) = x$, luego π es la primera proyección que es exterior y bajo \mathbb{N} .

Proposición 4.2.3

Dadas $f: X \longrightarrow Y, g: Z \longrightarrow X$, aplicaciones en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, con $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Entonces fg es nulhomótopa en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ si y sólo si existe una extensión, $h: Z \longrightarrow P_f^{\mathcal{E}}$, en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ verificando que $\pi h = g$.

Demostración:

Por la Proposición 4.2.1 fg es nulhomótopa si y sólo si existe $h': Z \longrightarrow \tilde{Y}^I$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ tal que $ph' = fg$. Por tanto podemos aplicar la propiedad universal del pull-back de la Definición 4.2.2 a g y a h' y existe una única $h: Z \longrightarrow P_f^{\mathcal{E}}$ verificando que $\pi h = g$ y $pr_2 h = h'$. Se tiene que $r_{P_f^{\mathcal{E}}} h(z) = r_{\tilde{Y}^I} pr_2 h(z) = r_{\tilde{Y}^I} h' = r_Z$ por ser h' sobre \mathbb{N} . Además, aplicando la propiedad universal a $pr_2 h j_Z$ y a j_X vemos que $h j_Z = j_{P_f^{\mathcal{E}}}$.

Para el recíproco, dada una elevación $h: Z \longrightarrow P_f^{\mathcal{E}}$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ con $\pi h = g$ tomamos $pr_2 h: Z \longrightarrow \tilde{Y}^I$ que está en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ por ser composición de aplicaciones en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. También $ppr_2 h = f\pi h = fg$. Aplicando la Proposición 4.2.1 esto es equivalente a que fg sea nulhomótopa. \square

Definición 4.2.4 Sea $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ con $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, definimos la *fibra homotópica derivada exterior bajo \mathbb{N} de f* , denotada $(P_f^{\mathcal{E}})' \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, como la aplicación exterior $j_{(P_f^{\mathcal{E}})'}: \mathbb{N} \longrightarrow (P_f^{\mathcal{E}})'$ obtenida al aplicar la propiedad universal del pull-back

$$\begin{array}{ccc} (P_f^{\mathcal{E}})' & \xrightarrow{pr_2} & \tilde{Y}^I \\ \downarrow \rho & & \downarrow (pr_1, p) \\ X & \xrightarrow{(r_X, f)} & \mathbb{N} \times Y \end{array}$$

a j_X y $j_{\tilde{Y}^I}$.

Podemos observar que el codominio de $j_{(P_f^{\mathcal{E}})'}$, es el conjunto de ternas $(x, n, w) \in X \times \mathbb{N} \times Y^I$ tales que $w(0) = j_Y(n) = y_n$, $w(1) = f(x)$ y $r_X(x) = n$.

Además $\rho = pr_1$ y si tomamos $r_{(P_f^{\mathcal{E}})'} = r_{\tilde{Y}^I} pr_2$ queda determinado un diagrama $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_{(P_f^{\mathcal{E}})'}} (P_f^{\mathcal{E}})' \xrightarrow{r_{(P_f^{\mathcal{E}})'}} \mathbb{N}$ y por tanto un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, es decir $(P_f^{\mathcal{E}})' \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Proposición 4.2.5

Sea $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, $g: Z \longrightarrow X$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. Se tiene que fg es nulhomótopa en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ si y sólo si existe una extensión $h: Z \longrightarrow (P_f^{\mathcal{E}})'$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ tal que $\rho h = g$.

Demostración:

Por la Proposición 4.2.1 fg es nulhomótopa si y sólo si existe $h': Z \longrightarrow \tilde{Y}^I$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ tal que $ph' = fg$. Tenemos que $(pr_1, p)h' = (r_X, f)g$ por $ph' = fg$ y $pr_1h' = r_{\tilde{Y}^I}h' = r_Z$. Así puede aplicarse la propiedad universal del pull-back de la Definición 4.2.4 a h' y a g y existe una única $h: Z \longrightarrow (P_f^{\mathcal{E}})'$ verificando que $pr_2h = h'$ y $\rho h = g$. Observemos que $r_{(P_f^{\mathcal{E}})'}h = r_{\tilde{Y}^I}pr_2h = r_{\tilde{Y}^I}h' = r_Z$, luego h es sobre \mathbb{N} . También es bajo \mathbb{N} empleando argumentos análogos a los utilizados en la Proposición 4.2.3 y así h está en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Recíprocamente, dada $h: Z \longrightarrow (P_f^{\mathcal{E}})'$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ con $\rho h = g$ tomamos $pr_2h = h': Z \longrightarrow \tilde{Y}^I$ que está en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ por ser composición de aplicaciones que lo están. Se tiene que $ph' = ppr_2h = f\rho h = fg$ por conmutatividad del diagrama de la Definición 4.2.4. Por tanto podemos aplicar la Proposición 4.2.1 y esto es equivalente a que fg sea nulhomótopa. \square

Definición 4.2.6 Una sucesión en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, con $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} T$$

se dice *exacta*, si la sucesión de homotopía inducida para todo $Z \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$

$$[Z, X]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{f_*} [Z, Y]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{g_*} [Z, T]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$$

verifica que $Im f_* = kerg_*$.

Definición 4.2.7 Una sucesión en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, con $X, Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y f morfismo en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} T$$

se dice *exacta* si la sucesión de homotopía inducida para todo $Z \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$

$$[Z, X]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{f_*} [Z, Y]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{g_*} [Z, T]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$$

verifica que $Im f_* = Kerg_*$.

Definición 4.2.8 Una sucesión en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} T$$

se dice *exacta* si la sucesión de homotopía inducida para todo $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$

$$[Z, X]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{f_*} [Z, Y]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{g_*} [Z, T]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$$

verifica que $Im f_* = Kerg_*$.

Proposición 4.2.9

Dada $f: X \rightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, la sucesión

$$P_f^{\mathcal{E}} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

es exacta en el sentido de la Definición 4.2.6.

Demostración:

Recordemos que $P_f^{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ tomando $r_{P_f^{\mathcal{E}}} = r_{\tilde{Y}1} p r_2$.

Para todo $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ es necesario probar que la sucesión

$$[Z, P_f^{\mathcal{E}}]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\pi_*} [Z, X]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{f_*} [Z, Y]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$$

es exacta, esto es, $Im \pi_* = Kerg_*$. Dada $g: Z \rightarrow X$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, $fg: Z \rightarrow Y$ es nulhomótopa en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ si y sólo si, por la Proposición 4.2.3, existe $h: Z \rightarrow P_f^{\mathcal{E}}$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ tal que $\pi h = g$, lo que a su vez, dado que $\pi_*(h) = \pi h = g$, es lo mismo que asegurar que $g: Z \rightarrow X$ esté en $Im \pi_*$. \square

Proposición 4.2.10

Dada $f: X \rightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, con $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, la secuencia

$$(P_f^\mathcal{E})' \xrightarrow{\rho} X \xrightarrow{f} Y$$

es exacta en el sentido de la Definición 4.2.7.

Demostración:

Tenemos que $(P_f^\mathcal{E})' \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ tomando $r_{(P_f^\mathcal{E})'} = r_{\tilde{\gamma}_t} p r_2$. Para todo $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ es preciso demostrar que la sucesión

$$[Z, (P_f^\mathcal{E})']_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\rho_*} [Z, X]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{f_*} [Z, Y]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$$

verifica que $Imp \rho_* = Ker f_*$. Pero $g: Z \rightarrow X$ es tal que $fg: Z \rightarrow Y$ es nullhomótopa en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ si y sólo si por la Proposición 4.2.5, existe $h: Z \rightarrow (P_f^\mathcal{E})'$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ tal que $\rho h = g$, lo que a su vez dado que $\rho_*(h) = \rho h = g$, es lo mismo que afirmar que $g: Z \rightarrow X$ está en $Imp \rho_*$. \square

Lema 4.2.11

Para cualquier $f: X \rightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, la sucesión

$$(P_\rho^\mathcal{E})' \xrightarrow{\sigma} (P_\pi^\mathcal{E})' \xrightarrow{\rho} P_f^\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

es exacta en el sentido de las Definiciones 4.2.6, 4.2.7, 4.2.8 según corresponde y donde π, σ, ρ , son las proyecciones naturales.

Demostración:

Al aplicar las Proposiciones 4.2.9 y 4.2.10 a f y π respectivamente se prueba la exactitud hasta $(P_\pi^\mathcal{E})'$.

Tenemos que $(P_\pi^\mathcal{E})' = \{((x, n, w), m, u) \in P_f^\mathcal{E} \times \mathbb{N} \times X^I; w(0) = j_Y(n), w(1) = f(x), u(0) = j_X(m), u(1) = \pi(x, n, w) = x \text{ y } r_{P_f^\mathcal{E}}(x, n, w) = n = m\}$. La aplicación $\rho: (P_\pi^\mathcal{E})' \rightarrow P_f^\mathcal{E}$ está definida para todo $((x, n, w), m, u) \in (P_\pi^\mathcal{E})'$ como $\rho((x, n, w), m, u) = (x, n, w)$. Reiterando la construcción de la Definición 4.2.4 para ρ , tenemos que $(P_\rho^\mathcal{E})' = \{[(x, n, w), m, u), p, \gamma]; ((x, n, w), m, u) \in (P_\pi^\mathcal{E})', p \in \mathbb{N}, \gamma \in (P_f^\mathcal{E})^I, \gamma(0) = j_{P_f^\mathcal{E}}(p) = (x_p, p, \tilde{y}_p), \gamma(1) = \rho([(x, n, w), m, u), p, \gamma]) = (x, n, w), r_{P_f^\mathcal{E}}((x, n, w), m, u) = m = p\}$.

Además $\sigma: (P_\rho^\mathcal{E})' \longrightarrow (P_\pi^\mathcal{E})'$ está definida para todo $[(x, n, w), m, u], p, \gamma] \in (P_\rho^\mathcal{E})'$ como $\sigma\left([(x, n, w), m, u], p, \gamma\right) = ((x, n, w), m, u)$.

También $(P_\rho^\mathcal{E})'$ está en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ tomando $r_{(P_\rho^\mathcal{E})'}\left([(x, n, w), m, u], p, \gamma\right) = p$

Se tiene que σ y ρ son aplicaciones en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Repitiendo los argumentos de la Proposición 4.2.10 podemos concluir que $(P_\rho^\mathcal{E})' \xrightarrow{\sigma} (P_\pi^\mathcal{E})' \xrightarrow{\rho} P_f^\mathcal{E}$ es exacta en el sentido de la Definición 4.2.8. \square

Ahora vemos que podemos identificar $(P_\pi^\mathcal{E})'$ y $(P_\rho^\mathcal{E})'$ con ΩY y con ΩX respectivamente.

Lema 4.2.12

Sea $f: X \longrightarrow Y$ aplicación $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. La aplicación $q: \Omega Y \longrightarrow (P_\pi^\mathcal{E})'$, definida como $q(w) = ((x_n, n, w), n, \tilde{x}_n)$ para $w \in \Omega Y$ verificando que $w(0) = j_Y(n) = y_n$ y $w(1) = j_Y(n) = y_n$, es una equivalencia de homotopía exterior en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Demostración:

Tenemos que $(P_\pi^\mathcal{E})' = \{((x, n, w), m, u) \in P_f^\mathcal{E} \times \mathbb{N} \times X^I; w(0) = j_Y(n), w(1) = f(x), u(0) = j_X(m), u(1) = x \text{ y } n = m\}$.

Para cualquier $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ la aplicación q descansa en $(P_\pi^\mathcal{E})'$ pues $f j_X(n) = f(x_n) = j_Y(n) = y_n$.

Definimos una retracción $r: (P_\pi^\mathcal{E})' \longrightarrow \Omega Y$ para todo $((x, n, w), m, u) \in (P_\pi^\mathcal{E})'$ como $r((x, n, w), m, u) = \bar{w}$ lazo en ΩY construido como $\bar{w} = w * (fu)^{-1}$ donde $*$ simboliza la suma de caminos y $(fu)^{-1}$ es el camino recorrido en sentido inverso. De forma más explícita:

$$w * (fu)^{-1}(t) = \begin{cases} w(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ fu(2 - 2t) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Está bien definida pues $\bar{w}(0) = w(0) = y_n$ y $\bar{w}(1) = fu(0) = f(x_n) = y_n$. Además está en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ pues es la composición $r = *(\overline{pr_1}, (fpr_3)^{-1})$, con $\overline{pr_1}((x, n, w), m, u) = w$, $pr_3((x, w, n), m, u) = u$, $()^{-1}$ la aplicación inversa de un camino, $*$ como antes y todas ellas aplicaciones en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Sea $H: \Omega Y \times Y \longrightarrow \Omega Y$ definida para todo $(w, t) \in \Omega Y \times I$, si $w(0) = w(1) = j_Y(n) = y_n$, como sigue:

$$H(w, t) = \begin{cases} w(\frac{2s}{1+t}) & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2} \\ y_n & \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Es sencillo ver que es bajo \mathbb{N} y sobre \mathbb{N} . Es claro que es continua y para ver que es externa sea $U \in \Omega Y$; entonces $U \in T_{ca}$ y existe $V \in \mathcal{E}_Y$ con $(I, V) \cap \Omega Y \subset U$. Si $w \in (I, V)$, entonces $w(I) \subset V$, luego $y_n \in V$ y así $((I, V) \cap \Omega Y) \times I \subset H^{-1}((I, V) \cap \Omega Y) \subset H^{-1}(U)$. Pero $((I, V) \cap \Omega Y) \times I \in \mathcal{E}_{\Omega Y \times I}$, $H^{-1}(U) \in T_{ca} \times T_e$ por ser H continua y podemos concluir que $H^{-1}(U) \in \mathcal{E}_{\Omega Y \times I}$.

Ahora definimos $K: (P_\pi^\mathcal{E})' \times I \longrightarrow (P_\pi^\mathcal{E})'$ para todo $[((x, n, w), m, u), t] \in (P_\pi^\mathcal{E})' \times I$ de la siguiente forma, $K[((x, n, w), m, u), t] = ((u(t), n, \alpha(w, u, t)), m, \bar{u}(t))$ donde $\bar{u}(t)(s) = u(st)$ para todo $s, t \in I, u \in X^I$, y α es la aplicación $\alpha: \tilde{Y}^I \times \tilde{X}^I \times I \longrightarrow \tilde{Y}^I$ definida así:

$$\alpha(w, u, t)(s) = \begin{cases} w(s(2-t)) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2-t}, \quad t \in I, w \in \tilde{Y}^I \\ fu(s(t-2) + 2) & \frac{1}{2-t} \leq s \leq 1 \quad u \in \tilde{X}^I \end{cases}$$

Es claro que α está en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. También K está bien definida pues $\alpha(w, u, t)(0) = w(0) = j_Y(n)$, $\alpha(w, u, t)(1) = fu(t)$, $\bar{u}(t)(0) = u(0) = j_X(m)$, $\bar{u}(t)(1) = u(t)$ y $n = m$ y por tanto descansa en $(P_\pi^\mathcal{E})'$. Además está en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Entonces $H\partial_0 = rq$, $H\partial_1 = id_{\Omega Y}$ y $K\partial_0 = qr$, $K\partial_1 = id_{(P_\pi^\mathcal{E})'}$. \square

Para la otra identificación recordemos que $(P_\rho^\mathcal{E})' = \{ [((x, n, w), m, u), p, \gamma] \in (P_\pi^\mathcal{E})' \times \mathbb{N} \times (P_f^\mathcal{E})^I; \gamma(0) = j_{P_f^\mathcal{E}}(p) = (x_p, p, \tilde{y}_p), \gamma(1) = (x, n, w) \text{ y } m = n = p \}$.

Definimos $q': \Omega X \longrightarrow (P_\rho^\mathcal{E})'$ por $q'(u) = [((x_n, n, \tilde{y}_n), n, u), n, (x_n, \tilde{n}, \tilde{y}_n)]$ para todo $u \in \Omega X$, donde $(x_n, \tilde{n}, \tilde{y}_n)$ denota el camino constante en $(x_n, n, \tilde{y}_n) \in P_f^\mathcal{E}$ y $u \in \Omega X$ verifica que $u(0) = u(1) = x_n$ y $f(x_n) = y_n$. También q' es una aplicación en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ y se puede probar que es equivalencia de homotopía exterior en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ procediendo de forma similar a la demostración anterior.

El siguiente diagrama conmuta salvo homotopía exterior en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$

$$\begin{array}{ccccccc} (P_\rho^\mathcal{E})' & \xrightarrow{\sigma} & (P_\pi^\mathcal{E})' & \xrightarrow{\rho} & P_f^\mathcal{E} & \xrightarrow{\pi} & X \xrightarrow{f} Y \\ \uparrow q' & & \uparrow q^\vartheta & \nearrow \rho' \vartheta & & & \\ \Omega X & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega Y & & & & \end{array}$$

donde $\rho' = \rho q$ es la aplicación $\rho'(w) = ((x_n, n, w), n, \tilde{x}_n)$ si $w(1) = f(x_n)$, $w(0) = j_Y(n)$, $x_n = j_X(n)$ y $\vartheta: \Omega X \longrightarrow \Omega X$ es la inversa de homotopía exterior del objeto grupo ΩX .

Así obtenemos para toda $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ la sucesión exacta:

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\rho'} P_f^{\mathcal{E}} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

Teorema 4.2.13

Dada $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ tenemos la sucesión

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \Omega^n P_f^{\mathcal{E}} \xrightarrow{\Omega^n \pi} \Omega^n X \xrightarrow{\Omega^n f} \Omega^n Y \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\rho'} P_f^{\mathcal{E}} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y \end{aligned}$$

de modo que para todo $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, la sucesión

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})(Z, \Omega^n P_f^{\mathcal{E}}) \xrightarrow{(\Omega^n \pi)_*} \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})(Z, \Omega^n X) \xrightarrow{(\Omega^n f)_*} \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})(Z, \Omega^n Y) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})(Z, \Omega X) \xrightarrow{(\Omega f)_*} \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})(Z, \Omega Y) \xrightarrow{(\rho')_*} \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})(Z, P_f^{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\pi_*} \\ &\longrightarrow \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, X) \xrightarrow{f_*} \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, Y) \end{aligned}$$

es exacta.

Demostración:

Sólo es preciso tomar la sucesión

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\rho'} P_f^{\mathcal{E}} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

y aplicar su exactitud. \square

Lema 4.2.14

Sea $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ y sea $r_Z: Z \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $r^{-1}(n)$ es conexo. Entonces dada $g: Z \longrightarrow X$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ con $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ se verifica que g es una aplicación en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

Demostración:

Si g es exterior y bajo \mathbb{N} , entonces conmuta el diagrama (1), $gj_Z = j_X$. Para ser sobre \mathbb{N} debe además conmutar el diagrama (2):

$$\begin{array}{ccc}
& \mathbb{N} & \\
j_Z \swarrow & & \searrow j_X \\
Z & \xrightarrow{g} & X \\
r_Z \searrow & & \swarrow r_X \\
& \mathbb{N} &
\end{array} \tag{2}$$

(3)

Dado $j_Z(n) = z_n$, entonces $r_Z j_Z(n) = n$ luego $z_n \in r_Z^{-1}(n)$. Entonces $g j_Z(n) = g(z_n) = j_X(n) = x_n$. Así tenemos que $x_n \in g(r_Z^{-1}(n)) \cap r_X^{-1}(n)$, luego es no vacío.

Ahora bien, por hipótesis, $r_Z^{-1}(n)$ es conexo luego $g(r_Z^{-1}(n))$ es conexo y $r_X^{-1}(n)$ es abierto y cerrado por tener en \mathbb{N} la topología discreta. Sabemos que un conexo tal que su intersección con un abierto es no vacía, debe estar contenido en el abierto, y por tanto $g(r_Z^{-1}(n)) \subset r_X^{-1}(n)$ que es lo mismo que afirmar que el diagrama (2) conmuta. \square

Corolario 4.2.15

Dada $f: X \rightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, obtenemos la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \Pi_n^{\mathcal{E}}(X) & \xrightarrow{\Pi_n^{\mathcal{E}}(f)} & \Pi_n^{\mathcal{E}}(Y) & \xrightarrow{\partial=\rho'_*} & \Pi_{n-1}^{\mathcal{E}}(P_f^{\mathcal{E}}) \longrightarrow \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & \Pi_1^{\mathcal{E}}(X) & \xrightarrow{\Pi_1^{\mathcal{E}}(f)} & \Pi_1^{\mathcal{E}}(Y) & \xrightarrow{\partial=\rho'_*} & {}_{\mathbb{N}}\Pi_0^{\mathcal{E}}(P_f^{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\pi_*} \Pi_0^{\mathcal{E}}(X) \xrightarrow{f_*} \Pi_0^{\mathcal{E}}(Y)
\end{array}$$

que es exacta.

A esta sucesión la denominamos *sucesión exacta larga de homotopía exterior de la aplicación $f: X \rightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$* .

Demostración:

En primer lugar recordemos que por el Corolario 4.1.13 tenemos que el functor suspensión $\Sigma: \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ es adjunto a izquierda del functor lazo $\Omega: \mathcal{E}t^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ en las categorías de homotopía.

Por otro lado, exteriormente, se verifica que $\mathbb{N} \times S^q \cong \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^q \cong \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma S_n^{q-1} \cong \mathbb{N} \times \Sigma S^{q-1} \cong \Sigma(\mathbb{N} \times S^{q-1}) \cong \cdots \cong \Sigma^q(\mathbb{N} \times S^0)$.

Además tenemos que, para todo $q \geq 0$, $\mathbb{N} \times S^q = S^q \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ está representado por el diagrama $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \xrightarrow{j_{S^q}} \mathbb{N} \times S^q \xrightarrow{pr_1} \mathbb{N}$, con j_{S^q} definida para todo $n \in \mathbb{N}$ como $j_{S^q}(n) = (n, s_0)$, donde s_0 punto base de S^q .

Si a la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \Omega^n(P_f^\mathcal{E}) & \xrightarrow{\Omega^n\pi} & \Omega^n X & \xrightarrow{\Omega^n f} & \Omega^n Y & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & \Omega X & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega Y & \xrightarrow{\rho'} & P_f^\mathcal{E} & \xrightarrow{\pi} & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

le aplicamos el funtor $\Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, -) = [\mathcal{S}^0, -]^{\mathbb{N}}$, salvo en $P_f^\mathcal{E}$ donde aplicamos el funtor $\Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, -) = [\mathcal{S}^0, -]^{\mathbb{N}}$, y hacemos uso del lema anterior pues $S^q \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y $pr_1^{-1}(n) = S^q$ es conexo para todo $q > 0$, obtenemos la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, \Omega^n P_f^\mathcal{E}) & \xrightarrow{(\Omega^n\pi)_*} & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, \Omega^n X) & \xrightarrow{(\Omega^n f)_*} & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, \Omega^n Y) & \longrightarrow \\ \cdots & \longrightarrow & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, \Omega X) & \xrightarrow{(\Omega f)_*} & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, \Omega Y) & \xrightarrow{\rho'_*} & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, P_f^\mathcal{E}) & \xrightarrow{\pi_*} \\ & & \longrightarrow & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, X) & \xrightarrow{f_*} & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, Y) \end{array}$$

que es exacta por el Teorema 4.2.13. Si aplicamos la adjunción anterior junto con que $\mathbb{N} \times S^q \cong \Sigma^q(\mathbb{N} \times S^0)$, tenemos la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^n, X) & \xrightarrow{\Pi_n^\mathcal{E}(f)} & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^n, Y) & \xrightarrow{\partial=\rho'_*} & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^{n-1}, X) & \longrightarrow \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^1, X) & \xrightarrow{\Pi_1^\mathcal{E}(f)} & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^1, Y) & \xrightarrow{\partial=\rho'_*} & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, P_f^\mathcal{E}) & \xrightarrow{\pi_*} \\ & & \longrightarrow & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, X) & \xrightarrow{f_*} & \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(\mathcal{S}^0, Y) \end{array}$$

que es exacta y que es la sucesión de los grupos de homotopía exterior buscada. \square

Observaciones 4.2.16

(a) Sea $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. El Teorema 3.3.9 puede obtenerse, para $\mathcal{C} = \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, como corolario del Teorema 4.2.13. Dado $Z \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, podemos sustituirlo por su modelo cofibrante y suponer que $Z \in (\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})_c$ (y $Z \in \mathcal{E}t_c^{\mathbb{N}}$). Dado que todo objeto es fibrante en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, podemos aplicar [Q; I.1. Corolario 1] y se tiene que $Ho(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, X) \cong \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, X)$ y que $Ho(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, X) \cong \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, X)$. De esta forma la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & Ho(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, \Omega^n X) & \xrightarrow{(\Omega^n f)_*} & Ho(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, \Omega^n Y) & \xrightarrow{(\Omega^n \partial)_*} \\ \longrightarrow & Ho(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, \Omega^{n-1} P_f^\mathcal{E}) & \cdots & \longrightarrow & Ho(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, \Omega X) & \xrightarrow{(\Omega f)_*} & Ho(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, \Omega Y) & \xrightarrow{\partial_*} \\ \longrightarrow & Ho(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, P_f^\mathcal{E}) & \xrightarrow{\pi_*} & Ho(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, X) & \xrightarrow{f_*} & Ho(\mathcal{E}t^{\mathbb{N}})(Z, Y) \end{array}$$

es isomorfa a la sucesión del Teorema 4.2.13 y por tanto exacta.

(b) En general, dada $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, la sucesión obtenida mediante el Teorema 3.3.9 es diferente a la que conseguimos al aplicar el Teorema 4.2.13.

Por ejemplo sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ el círculo de Varsovia, y $X = \mathbb{R}^2$ dotado de la topología euclídea y de la externología $\mathcal{E}_X = \{E \subset \mathbb{R}^2; E \in T_e, \Sigma \subset E\}$. Definimos $j_X: \mathbb{N} \longrightarrow X$

para todo $n \in \mathbb{N}$ como $j_X(n) = p$, con $p \in \Sigma$ fijo. Es claro que j_X es exterior. Dada id_X tenemos la sucesión fibrada

$$F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{id_X} X$$

y la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \Omega^n X & \longrightarrow & \Omega^{n-1} F & \xrightarrow{\Omega^{n-1} i} & \Omega^{n-1} X & \xrightarrow{id_X} & \Omega^{n-1} X & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & \Omega X & \longrightarrow & F & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{id_X} & X & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Sea $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ con $Z = \mathbb{N} \times \Sigma$, considerando en $\mathbb{N} \times \Sigma$ la estructura de espacio exterior de la Sección 1.3 para $K = \Sigma$. Al aplicar el functor $\Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})(Z, -)$ y el $\Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})(Z, -)$ donde sea oportuno, obtenemos la sucesión exacta larga de homotopía exterior del Teorema 4.1.13. Si aplicamos el functor $Ho(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})(Z, -)$ conseguimos la sucesión exacta larga del Teorema 3.3.9. Tenemos que $\Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})(Z, X) \cong \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$. Además $Ho(\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}})(Z, X) \cong *$ pues Σ es equivalente débil a un punto. Por tanto ambas sucesiones son diferentes.

4.3 Sucesión exacta larga de homotopía exterior de un par $(X, A) \in \mathcal{P}Et^{\mathbb{N}}$.

Sea $\mathcal{P}Et$ la categoría de los pares de espacios exteriores. Sus objetos son inclusiones exteriores $i: A \rightarrow X$, considerando la topología y externología inducidas en A por las de X al considerarlo como subespacio exterior de X . Los morfismos en $\mathcal{P}Et$ son cuadrados conmutativos en $\mathcal{E}t$

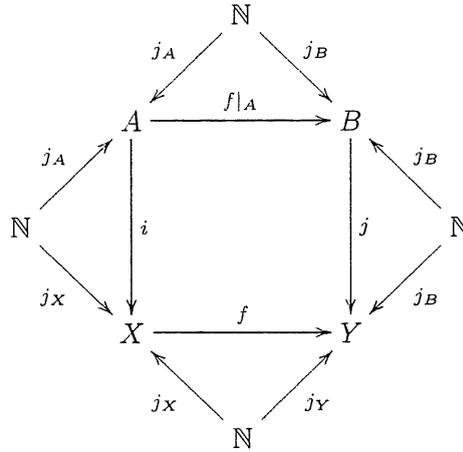
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f|_A} & B \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Por comodidad denotaremos a los objetos en $\mathcal{P}Et$ por (X, A) , (Y, B) y a los morfismos por $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

Sea $\mathcal{P}Et^{\mathbb{N}}$ la categoría de los pares de espacios exteriores bajo \mathbb{N} . Los objetos son diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{N} & \\ j_A \swarrow & & \searrow j_X \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

y los morfismos son diagramas conmutativos en $\mathcal{E}t$



Esto es, los objetos son pares de espacios exteriores que comparten la sucesión base, que denotaremos (X, A, j_A) , y los morfismos son aplicaciones exteriores entre pares de espacios exteriores que preservan sucesiones base, lo que escribiremos como $f: (X, A, j_A) \longrightarrow (Y, B, j_B)$. Usualmente la sucesión base se sobrentiende y utilizaremos la notación aún más abreviada $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y $f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ en $\mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, respectivamente.

Observemos que, dado $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, la fibra homotópica exterior bajo \mathbb{N} de i la obtenemos mediante el pull-back

$$\begin{array}{ccc}
 P_i^{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \tilde{X}^I = \mathbb{N} \times_X X^I \\
 \downarrow \pi & & \downarrow p \\
 A & \xrightarrow{i} & X
 \end{array}$$

y aplicando la propiedad universal a j_A y a $j_{\tilde{X}^I}$, con lo que disponemos de un único $j_{P_i^{\mathcal{E}}}: \mathbb{N} \longrightarrow P_i^{\mathcal{E}}$, que escribimos como $P_i^{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. Podemos interpretar $P_i^{\mathcal{E}}$ como el espacio de caminos exteriores en X que comienzan en un punto de la sucesión base y finalizan en A .

Definición 4.3.1 Llamamos n -ésimo conjunto de homotopía exterior relativo del par $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ a:

- a) El conjunto $\Pi_n^{\mathcal{E}}(X, A)$ definido como $\Pi_{n-1}^{\mathcal{E}}(P_i^{\mathcal{E}})$, para $n > 1$.
- b) El conjunto $\Pi_n^{\mathcal{E}}(X, A)$ definido como ${}_{\mathbb{N}}\Pi_0(P_i^{\mathcal{E}})$, para $n = 1$.

Notas 4.3.2

(a) Dado que $\Pi_n^\mathcal{E}(X, A) = \Pi_{n-1}^\mathcal{E}(P_i^\mathcal{E})$ podemos aplicar que el funtor suspensión Σ es adjunto a izquierda en homotopía del funtor lazo Ω por el Teorema 4.1.13 y escribir

$$\Pi_n^\mathcal{E}(X, A) = \Pi_{n-1}^\mathcal{E}(P_i^\mathcal{E}) \cong \dots \cong \mathbb{N}\Pi_0^\mathcal{E}(\Omega^{n-1}P_i^\mathcal{E})$$

para todo $n > 1$.

(b) Observando la Definición 4.3.1 y teniendo en cuenta como fueron definidos los grupos de homotopía exterior en $\mathcal{E}t$ podemos reinterpretarla y así

$$\Pi_n^\mathcal{E}(X, A) = [\mathcal{S}^{n-1}; P_i^\mathcal{E}]^\mathbb{N} \cong [(\mathcal{D}^{n-1}, \mathcal{S}^{n-2}); (X, A)]^\mathbb{N}$$

para todo $n > 1$.

(c) Para $X \in \mathcal{E}t^\mathbb{N}$, $\Pi_n^\mathcal{E}(X)$ es grupo para $n \geq 1$ y grupo abeliano para $n \geq 2$. De este hecho deducimos que $\Pi_n^\mathcal{E}(X, A)$ es grupo para $n \geq 2$ y grupo abeliano para $n \geq 3$.

Obtenemos de esta manera dos tipos de funtores. Uno de la categoría de los pares de espacios exteriores bajo $\mathbb{N}, \mathcal{P}\mathcal{E}t^\mathbb{N}$, en la categoría de los grupos, Grp , y otros de $\mathcal{P}\mathcal{E}t^\mathbb{N}$ en la categoría de los grupos abelianos, Ab .

$$\Pi_n^\mathcal{E}: \mathcal{P}\mathcal{E}t^\mathbb{N} \longrightarrow Grp \quad n = 2$$

$$\Pi_n^\mathcal{E}: \mathcal{P}\mathcal{E}t^\mathbb{N} \longrightarrow Ab \quad n \geq 3$$

Si definimos $\partial: \Pi_n^\mathcal{E}(X, A) \longrightarrow \Pi_{n-1}^\mathcal{E}(A)$ como $\Pi_{n-1}^\mathcal{E}(\pi): \Pi_{n-1}^\mathcal{E}(P_i^\mathcal{E}) \longrightarrow \Pi_{n-1}^\mathcal{E}(A)$, entonces ∂ es una transformación natural entre el funtor $\Pi_n^\mathcal{E}: \mathcal{P}\mathcal{E}t^\mathbb{N} \longrightarrow Set$ y $\Pi_{n-1}^\mathcal{E}R: \mathcal{P}\mathcal{E}t^\mathbb{N} \longrightarrow Set$, donde R es la restricción $R: \mathcal{P}\mathcal{E}t^\mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{E}t^\mathbb{N}$ que a todo $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^\mathbb{N}$ le asigna $R((X, A)) = A$.

Definimos $j_*: \Pi_n^\mathcal{E}(X) \longrightarrow \Pi_n^\mathcal{E}(X, A)$ como $\Pi_{n-1}^\mathcal{E}(\rho'): \Pi_{n-1}^\mathcal{E}(\Omega X) \longrightarrow \Pi_{n-1}^\mathcal{E}(P_i^\mathcal{E})$, donde ρ' es la aplicación $\rho': \Omega X \longrightarrow P_i^\mathcal{E}$ que definimos en la sección anterior.

Teorema 4.3.3

Dado el para $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^\mathbb{N}$ la sucesión

$$\dots \longrightarrow \Pi_{n+1}^\mathcal{E}(X, A) \xrightarrow{\partial} \Pi_n^\mathcal{E}(A) \xrightarrow{i_*} \Pi_n^\mathcal{E}(X) \xrightarrow{j_*} \Pi_n^\mathcal{E}(X, A) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \Pi_1^{\mathcal{E}}(X, A) \xrightarrow{\partial} \Pi_0^{\mathcal{E}}(A) \xrightarrow{i_*} \Pi_0^{\mathcal{E}}(X)$$

es exacta.

A esta sucesión se la denomina *sucesión exacta larga de homotopía exterior del par* $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Demostración:

Por los razonamientos empleados en el Corolario 4.2.15, aplicados a $i: A \longrightarrow X$, tenemos la sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \Pi_n^{\mathcal{E}}(A) & \xrightarrow{\Pi_n^{\mathcal{E}}(i)} & \Pi_n^{\mathcal{E}}(X) & \xrightarrow{\partial=\rho'_*} & \Pi_{n-1}^{\mathcal{E}}(P_i^{\mathcal{E}}) \longrightarrow \dots \\ \dots & \longrightarrow & \Pi_1^{\mathcal{E}}(A) & \xrightarrow{\Pi_1^{\mathcal{E}}(i)} & \Pi_1^{\mathcal{E}}(X) & \xrightarrow{\partial=\rho'_*} & \mathbb{N}\Pi_0^{\mathcal{E}}(P_i^{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\pi_*} \Pi_0^{\mathcal{E}}(A) \xrightarrow{i_*} \Pi_0^{\mathcal{E}}(X) \end{array}$$

Teniendo en cuenta la Definición 4.3.1, obtenemos la sucesión buscada. \square

Nota 4.3.4

Dado que $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ posee una estructura de categoría de modelos cerrada exterior inducida por la de $\mathcal{E}t$ y que se trata de una categoría no basada, podemos aplicar los resultados probados en el Capítulo 3. De esta manera tenemos objeto cilindro, objeto de caminos, funtores abstractos lazo y suspensión verificando que el funtor suspensión es adjunto a izquierda del lazo, etc, que llamaremos “de Quillen”. Los definidos en este capítulo son diferentes, aunque en ciertas condiciones puedan coincidir como señalamos en las Notas 3.1.8(c) y 3.1.8(d) por ejemplo. Los denominaremos exteriores por estar asociados a la estructura exterior de categoría de modelos cerrada para $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

4.4 Aplicaciones a los grupos de homotopía globales de Brown.

En el primer capítulo definimos el funtor $b: Pro \longrightarrow \mathcal{E}t$, pleno y fiel por el Corolario 1.1.13, que a cada $(X, T_X) \in Pro$ le hace corresponder $(X; \mathcal{E}_{cc}, T_X)$ y que a toda aplicación propia, f , le asigna $bf = f$, que es exterior por la Proposición 1.1.12.

Este funtor induce otro en las categorías bajo \mathbb{N} , $b^{\mathbb{N}}: Pro^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, que también es pleno y fiel.

En la primera sección de este capítulo definimos un funtor suspensión $\Sigma: \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$. Veamos el siguiente resultado.

Proposición 4.4.1

Si $X \in \text{Pro}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ entonces, si $\Sigma(X; \mathcal{E}_{cc}, T_X) = (\Sigma X; \mathcal{E}_{cc}^{\Sigma X}, T_{\Sigma X})$, se verifica que $\mathcal{E}_{cc}^{\Sigma X}$ es la externología de los complementos de los compacto-cerrados en $(\Sigma X, T_{\Sigma X})$.

Demostración:

Consideremos $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. El cilindro de un espacio exterior bajo \mathbb{N} se definía mediante el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times I & \xrightarrow{pr_2} & \mathbb{N} \\ \downarrow j_X \times id_I & & \downarrow j_{IX} \\ X \times I & \longrightarrow & I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} X \end{array}$$

En \mathbb{N} teníamos la externología \mathcal{E}_{cc} . En $\mathbb{N} \times I$ y $X \times I$ tenemos las definidas en la Sección 1.3 para $K = I$, que coinciden con las de los complementos de los compacto-cerrados. Además las aplicaciones pr_2 y $j_X \times id_I$ son propias y $j_X \times id_I$ inyectiva. Estamos así en condiciones de aplicar la Proposición 2.2.3 y concluir que en $I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} X$ la externología push-out coincide con la externología de los complementos de los compacto-cerrados, \mathcal{E}_{cc}^{IX} .

La suspensión de $X, \Sigma X$, se definía por el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} X \underset{\mathbb{N}}{\overset{\mathbb{N}}{\vee}} X & \xrightarrow{r_X + r_X} & \mathbb{N} \\ \downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow j_{\Sigma X} \\ I_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} X & \xrightarrow{\bar{k}} & \Sigma X \end{array}$$

Aquí $r_X + r_X$ y $\partial_0 + \partial_1$ son propias, $\partial_0 + \partial_1$ inyectiva. Luego podemos aplicar la Proposición 2.2.3 y concluir que la externología push-out en ΣX coincide con la de los complementos de los compacto-cerrados, $\mathcal{E}_{cc}^{\Sigma X}$. \square

Definición 4.4.3 Llamamos *r-esfera de Brown*, denotada por ${}^B S^r$, al coproducto

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^r \cong \mathbb{N} \times S^r.$$

Definición 4.4.4 Llamamos *r-disco de Brown*, denotado por ${}^B D^r$, al coproducto

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} D_n^r \cong \mathbb{N} \times D^r.$$

Observaciones 4.4.5

(a) Tanto ${}^B D^r$ como ${}^B S^r$ son objetos de $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ al considerar la externología de los complementos de los compacto-cerrados.

(b) Aplicando la Proposición 4.4.1 se tiene ${}^B S^r = \Sigma(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^r) = \bigsqcup_n \Sigma S_n^r$.

Definición 4.4.6 Se denomina *r-ésimo conjunto de homotopía global de Brown de $X \in Pro^{\mathbb{N}}$* , denotado ${}^B \Pi_r(X)$, al conjunto de clases de homotopía propia $[{}^B S^r; X]^{\mathbb{N}}$.

Nota 4.4.7

Es claro que ${}^B \Pi_r(X)$ es grupo para todo $n \geq 2$ y grupo abeliano para todo $n > 2$.

Definición 4.4.9 Se denomina *r-ésimo conjunto de homotopía global de Brown del par $(X, A) \in \mathcal{P}Pro^{\mathbb{N}}$* a:

a) El conjunto de clases de homotopía propia ${}^B \Pi_r(X, A) = [{}^B S^r; P_i^{\mathcal{E}}]^{\mathbb{N}} \cong [({}^B D^r, {}^B S^{r-1}); (X, A)]^{\mathbb{N}}$, si $r > 1$.

b) El conjunto de clases de homotopía propia ${}^B \Pi_r(X, A) = [{}^B S^r; P_i^{\mathcal{E}}]_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, si $r = 0$.

Nota 4.4.8

Es claro que ${}^B \Pi_r(X, A)$ es grupo para todo $n \geq 2$ y grupo abeliano para todo $n > 2$.

Teorema 4.4.9

La sucesión exacta larga de grupos de homotopía globales de Brown de un par $(X, A) \in \mathcal{P}Pro^{\mathbb{N}}$ es un caso particular de la sucesión exacta larga de grupos de homotopía exterior del par (X, A) en $\mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

Demostración:

Basta tener en cuenta que $X, {}^B S^r \in Pro^{\mathbb{N}}$ pueden sumergirse en la categoría $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$, que ${}^B S^r$ es un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, y aplicar el Teorema 4.3.3. \square

Capítulo 5

Estructura cilíndrica de modelos para espacios exteriores

En este capítulo el objetivo principal lo constituye el probar que existe otra estructura de categoría de modelos cerrada en $\mathcal{E}t$, que denominaremos “cilíndrica”.

En la primera sección consideramos los rayos exteriores $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ y los espacios exteriores con rayo base exterior, que denotamos (X, α) . Definimos categoría de los espacios exteriores bajo \mathbb{R}^+ , $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, como la categoría cuyos objetos son los morfismos $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ (espacios exteriores con rayo base exterior) y cuyos morfismos son diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^+ & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Estos pueden verse como aplicaciones exteriores que preservan rayos base y que escribiremos como $f: (X, \alpha) \rightarrow (Y, \beta)$.

También introducimos la noción de homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ . La relación “ser exteriormente homótopa bajo \mathbb{R}^+ a” es de equivalencia en las aplicaciones en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. Así definimos espacios homotópicamente equivalentes en homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ y la categoría de homotopía $\Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})$.

Consideramos un funtor $\Pi_0^c: \mathcal{E}t \rightarrow \text{Set}$ definido para $X \in \mathcal{E}t$ como $\Pi_0^c(X) = \Pi(\mathcal{E}t)(\mathbb{R}^+, X)$ y de la forma habitual sobre los morfismos en $\mathcal{E}t$. También tomamos los funtores, para cada $n \geq 0$, $\Pi_n^c: \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \rightarrow \text{Set}$ que a todo $(X, \alpha) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ le hace corresponder $\Pi_n^c(X, \alpha) = \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(\mathbb{R}^+ \times S^n, i_{s_0}), (X, \alpha)$ y de la forma usual sobre los morfismos.

Aplicando la ley exponencial demostrada en el Teorema 1.3.3 probamos que para todo $n \geq 0$ $\Pi_n^c(X, \alpha)$ es biyectivo a $\Pi_n(\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X), \alpha)$, donde en $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)$ consideramos una estructura topológica apropiada. Una consecuencia de este resultado es la estructura de grupo de $\Pi_n^c(X, \alpha)$ para $n \geq 1$ y de grupo abeliano para $n > 1$. Este resultado es similar al Lema 1.4.2 y como éste relaciona los grupos de homotopía cilíndrica (en el caso anterior exteriores) con los grupos de homotopía en Top de ciertos espacios de aplicaciones exteriores. De los resultados anteriores se derivan las definiciones de n -grupo de homotopía cilíndrica de X basado en α y la de equivalencia débil cilíndrica.

En la segunda sección probamos que existe otra estructura de categoría de modelos cerrada. En ella llamamos fibración a toda aplicación exterior $p: E \longrightarrow B$ que tiene la propiedad de elevación de homotopía a derecha respecto a las aplicaciones $\partial_0: \mathcal{T}^q = \mathbb{R}^+ \times D^q \longrightarrow \mathcal{T}^q \times I = \mathbb{R} \times D^q \times I$ para todo $n \geq 0$, equivalencias débiles a las equivalencias débiles cilíndricas y cofibraciones a todas las aplicaciones exteriores con la propiedad de elevación a izquierda respecto a las fibraciones que además son equivalencias débiles.

A esta estructura de categoría de modelos cerrada y a sus nociones asociadas las denominaremos cilíndricas. Así hablaremos de fibración cilíndrica, abreviado c -fibración, cofibración cilíndrica o c -cofibración etc.

En la tercera sección definimos un concepto análogo a CW -complejo. Llamaremos \mathbb{R}^+ -complejo a un espacio X que admite una filtración $X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots \subset X$ tal que X tiene la topología y externología débiles respecto a ella, con $X_{-1} = \emptyset$ y de forma X_n se obtiene de X_{n-1} pegando mediante aplicaciones exteriores \mathbb{R}^+ -celdas de dimensión n de la forma $\mathbb{R}^+ \times D^n$.

Demostremos también que si consideramos Y^I como en la Definición 2.2.5 la factorización $\Delta_Y: Y \xrightarrow{s} Y^I \xrightarrow{(d_0, d_1)} Y \times Y$ es un objeto de caminos en el sentido de la Definición 3.1.5. De esta forma la relación de homotopía a derecha de Quillen coincide con la relación de homotopía exterior. Probamos que todo \mathbb{R}^+ -complejo es c -cofibrante. Aplicando este hecho y el anterior probamos un teorema de Whitehead para \mathbb{R}^+ -complejos. Además, si X es un CW -complejo finito, $\mathbb{R}^+ \times X$ tiene estructura de \mathbb{R}^+ -complejo.

Por último demostramos que, si X es \mathbb{R}^+ -complejo $\partial_0 + \partial_1: X \sqcup X \longrightarrow X \times I$ es c -cofibración. Así la factorización de la codiagonal, $\nabla_A: X \sqcup X \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} X \times I \xrightarrow{pr_1} X$, es un ejemplo de objeto cilindro según la definición dada en el Capítulo 3.

5.1 La categoría de los espacios exteriores bajo \mathbb{R}^+ .

Recordemos que en \mathbb{R}^+ consideramos la topología euclídea T_e y la externología de los complementos de los compacto-cerrados \mathcal{E}_{cc} .

En I y en D^q tomamos la estructura exterior ya empleada en el Capítulo 2.

Dado $X \in \mathcal{E}t$ en $X \times I$, para $K = I$, y en $\mathbb{R}^+ \times D^q$ consideramos las estructuras de espacio exterior especificadas en la Sección 1.3. De forma similar en $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)$ tomamos la topología $T^{\mathbb{R}^+}$ definida en el mismo capítulo y sección. Recordemos que para simplificar notación escribiremos $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)$ como $X^{\mathbb{R}^+}$.

Definición 5.1.1 Llamamos *rayo en* $X \in \mathcal{E}t$ a una aplicación exterior $\alpha: \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$.

Por abuso de notación también llamaremos rayo a $Im\alpha$.

Definición 5.1.2 Entendemos por *categoría de los espacios exteriores bajo* \mathbb{R}^+ , denotada $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, a aquella que tiene por objetos a los rayos $\alpha: \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ y cuyos morfismos son diagramas conmutativos en $\mathcal{E}t$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^+ & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Por comodidad denotaremos a los objetos en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ por (X, α) y a los morfismos por $f: (X, \alpha) \longrightarrow (Y, \beta)$.

Observación 5.1.3

Los objetos de $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ pueden interpretarse como espacios exteriores con rayo base y los morfismos como aplicaciones exteriores entre espacios exteriores que preservan los rayos base.

Dos aplicaciones exteriores $f, g: (X, \alpha) \longrightarrow (Y, \beta)$ se dicen exteriormente homótopas bajo \mathbb{R}^+ , denotadas $f \underset{\mathcal{E}}{\overset{\mathbb{R}^+}{\simeq}} g$, si existe $H: X \times I \longrightarrow Y$ aplicación exterior verificando que $H\partial_0 = f$, $H\partial_1 = g$ y $H(\alpha, id_I) = \beta$.

A H se le denomina homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ de f a g .

La relación “ser exteriormente homótopa bajo \mathbb{R}^+ a” es una relación de equivalencia entre aplicaciones en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, como es fácil comprobar.

Denotamos por $[f]^{\mathbb{R}^+}$ a la clase de equivalencia de aplicaciones en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ exteriormente homótopas bajo \mathbb{R}^+ a f .

El conjunto de clases de equivalencia de homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ de aplicaciones de (X, α) en (Y, β) lo escribimos $[(X, \alpha); (Y, \beta)]^{\mathbb{R}^+}$, o de forma más abreviada $[X; Y]^{\mathbb{R}^+}$.

Podemos así definir la categoría de homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ , $\Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})$, cuyos objetos son los espacios exteriores y cuyos morfismos son las clases de aplicaciones de homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ .

Consideremos el functor $\Pi_0^c: \mathcal{E}t \longrightarrow \text{Set}$ definido para $X \in \mathcal{E}t$ como $\Pi_0^c(X) = \Pi(\mathcal{E}t)(\mathbb{R}^+, X)$ y para $f \in \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)$ como $\Pi_0^c(f) = f_*: \Pi(\mathcal{E}t)(\mathbb{R}^+, X) \longrightarrow \Pi(\mathcal{E}t)(\mathbb{R}^+, Y)$ que a cada $[g] \in \Pi(\mathcal{E}t)(\mathbb{R}^+, X)$ le asigna $\Pi_0^c(f)[g] = [fg] \in \Pi(\mathcal{E}t)(\mathbb{R}^+, Y)$.

Para cada $n \geq 0$ podemos considerar el functor $\Pi_n^c: \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \text{Set}$ que a todo $(X, \alpha) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ le hace corresponder $\Pi_n^c(X, \alpha) = \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})((\mathbb{R}^+ \times S^n, i_{s_0}), (X, \alpha))$, donde s_0 es el punto base de S^n y la aplicación $i_{s_0}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times S^n$ es el rayo base exterior en $\mathbb{R}^+ \times S^n$ definido como $i_{s_0}(t) = (t, s_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

A un morfismo en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, $f \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}((X, \alpha), (Y, f\alpha))$, Π_n^c le asigna $\Pi_n^c(f) = f_*: \Pi_n^c(X, \alpha) \longrightarrow \Pi_n^c(Y, f\alpha)$ que a todo $[g]^{\mathbb{R}^+} \in \Pi_n^c(X, \alpha)$ le hace corresponder $[fg]^{\mathbb{R}^+} \in \Pi_n^c(Y, f\alpha)$.

Lema 5.1.4

Si (X, α) es un objeto en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, entonces $\Pi_0^c(X, \alpha) \cong \Pi_0^c(X)$.

Demostración:

Es análoga a la del Lema 1.4.1. \square

Lema 5.1.5

Sea $(X, \alpha) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. Existe un isomorfismo entre $\Pi_n^c(X, \alpha)$ y el n -simo grupo de homotopía estándar en Top del espacio de rayos exteriores en X con la topología $T^{\mathbb{R}^+}$, $\Pi_n(\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X), \alpha)$, para todo $n \geq 0$.

Demostración:

Por el Teorema 1.3.3 tenemos la biyección $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+ \times K, X) \cong \text{Top}(K, \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X))$ con K espacio compacto.

Consideremos en \mathbb{R}^+ la aplicación $id_{\mathbb{R}^+}$ como rayo base, en $\mathbb{R}^+ \times K$ tomemos como rayo base $i_{k_0}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times K$ definida como $i_{k_0}(r) = (r, k_0)$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$ y $k_0 \in K$ punto base de K . El punto base de $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)$ es $\alpha: \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$. Así dada $f \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}((\mathbb{R}^+ \times K, i_{k_0}), (X, \alpha))$, $e(f)(r)(k_0) = f(r, k_0) = \alpha(r)$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$, luego $e(f) \in \text{Top}^*((K, k_0), (\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X), \alpha))$.

Recíprocamente si $g \in \text{Top}^*((K, k_0), (\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X), \alpha))$, $e^{-1}(g)(t, k_0) = g(k_0)(t) = \alpha(t)$ y así $g \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}((\mathbb{R}^+ \times K, i_{k_0}), (X, \alpha))$.

Así queda inducida la biyección:

$$\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}((\mathbb{R}^+ \times K, i_{k_0}), (X, \alpha)) \cong \text{Top}^*((K, k_0), (\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X), \alpha))$$

En particular si $K = S^n$, tenemos la biyección $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}((\mathbb{R}^+ \times S^n, i_{s_0}), (X, \alpha)) \cong \text{Top}^*((S^n, s_0), (\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X), \alpha))$. Veamos que se induce otra en homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ .

Sea $[f]^{\mathbb{R}^+} \in [(\mathbb{R}^+ \times S^n, i_{s_0}), (X, \alpha)]^{\mathbb{R}^+}$ y f un representante de esta clase. Sea otra aplicación $g \in [f]^{\mathbb{R}^+}$, entonces existe $H: \mathbb{R}^+ \times S^n \times I \longrightarrow X$ exterior con $H(r, s, 0) = f(r, s)$, $H(r, s, 1) = g(r, s)$ y $H(i_{s_0}(r), t) = H(r, s_0, t) = \alpha(r)$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$, $s \in S^n$, $t \in I$.

Es sencillo comprobar que $\bar{H} = e(H): S^n \times I \longrightarrow \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)$ verifica que $\bar{H}(s, 0) = e(f)(s) = \bar{f}(s)$, $\bar{H}(s, 1) = e(g)(s) = \bar{g}(s)$ y $\bar{H}(s_0, t)(r) = H(r, s_0, t) = \alpha(r)$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$, $s \in S^n$, $t \in I$. Además \bar{H} es continua aplicando que la exponencial es una biyección para $K = S^n \times I$. De esta forma $\bar{f} \stackrel{\mathbb{R}^+}{\simeq} \bar{g}$ y $[f]^{\mathbb{R}^+} = [\bar{g}]^{\mathbb{R}^+}$.

De forma similar dado $[h] \in [(S^n, s_0), (\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X), \alpha)]^*$, con h un representante de la clase y k otro se tiene que existe $G: S^n \times I \longrightarrow \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)$ homotopía de h a k en Top^* .

Tomando $\hat{G} = e^{-1}(G): \mathbb{R}^+ \times S^n \times I \longrightarrow X$ obtenemos una homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ de $\hat{h} = e^{-1}(h)$ a $\hat{k} = e^{-1}(k)$, esto es, $\hat{G}(r, s, 0) = \hat{h}(r, s)$, $\hat{G}(r, s, 1) = \hat{k}(r, s)$ y $\hat{G}(i_{s_0}(r), t) = \hat{G}(r, s_0, t) = e^{-1}(G)(r, s_0, t) = G(s_0, t)(r) = \alpha(r)$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$, $s \in S^n$, $t \in I$.

Concluimos de esta manera que, para todo $n \geq 0$, tenemos el isomorfismo $[(\mathbb{R}^+ \times S^n, i_{s_0}); (X, \alpha)]^{\mathbb{R}^+} \cong [(S^n, s_0); (\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X), \alpha)]^{\mathbb{R}^+}$. \square

Corolario 5.1.6

Sea $(X, \alpha) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, $\Pi_n^c: \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \text{Set}$. Entonces $\Pi_n^c(X, \alpha)$ verifica que:

- (a) Para $n = 1$ es grupo
- (b) Para $n > 1$ es grupo abeliano

Demostración:

Es consecuencia del lema anterior. \square

Nota 5.1.7

- (a) El funtor $\Pi_n^{\mathcal{E}}$ queda definido de la siguiente forma:

$$\Pi_n^c: \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow Grp \quad n = 1$$

$$\Pi_n^c: \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow Ab \quad n > 1$$

(b) Para abreviar denotaremos a $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X)$ por $X^{\mathbb{R}^+}$ en el resto del trabajo.

(c) En ocasiones, cuando se sobreentiende el rayo base escribiremos $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ y $\Pi_n^c(X)$.

Definición 5.1.8 Sea X espacio exterior, $\alpha: \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ rayo base exterior. Para $n \geq 1$ llamaremos n -simo grupo de homotopía cilíndrica de X basado en α a $\Pi_n^c(X, \alpha)$.

Definición 5.1.9 Sea $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t$. Se dice que f es una *equivalencia débil cilíndrica* si verifica una de las condiciones siguientes:

a) Si $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X) = \emptyset$, entonces $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, Y) = \emptyset$.

b) Si $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X) \neq \emptyset$, entonces para todo α , rayo base exterior en X , y para todo $n \geq 0$, $f_*^c = \Pi_n^c(f): \Pi_n^c(X, \alpha) \longrightarrow \Pi_n^c(Y, f\alpha)$ es isomorfismo.

5.2 Estructura cilíndrica de categoría de modelos cerrada para $\mathcal{E}t$.

En primer lugar definamos tres clases de morfismos.

Definición 5.2.1 Dada una aplicación $p: E \longrightarrow B$ en $\mathcal{E}t$ decimos que es una *fibración* si y sólo si para todo diagrama conmutativo en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^q & \xrightarrow{u} & E \\ \downarrow \partial_0 & & \downarrow p \\ \mathcal{T}^q \times I & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

existe una elevación $v': \mathcal{T}^q \times I \longrightarrow E$ verificando que $v'\partial_0 = u$ y $pv' = v$ para todo $q \geq 0$.

Diremos que p tiene la propiedad de elevación de homotopía a derecha respecto a las aplicaciones $\partial_0: \mathcal{T}^q \longrightarrow \mathcal{T}^q \times I$, para todo $q \geq 0$.

Definición 5.2.2 Entendemos por *equivalencias débiles* a aquellos morfismos en $\mathcal{E}t$, $f: X \longrightarrow Y$, que son equivalencias débiles cilíndricas en el sentido de la Definición 5.1.9.

Definición 5.2.3 Una *cofibración* es una aplicación $i: A \longrightarrow B$ en $\mathcal{E}t$ que posee la propiedad de elevación a izquierda respecto a las fibraciones que son además equivalencias débiles según las Definiciones 5.2.1 y 5.2.2.

Como es usual, llamamos fibraciones triviales a las fibraciones que son además equivalencias débiles y análogamente a las cofibraciones triviales.

Proposición 5.2.4

Todo objeto en $\mathcal{E}t$ es fibrante.

Demostración:

Es preciso demostrar que $c: E \longrightarrow *$ es fibración, esto es que en cualquier diagrama conmutativo para todo $q \geq 0$

$$\begin{array}{ccc} T^q & \xrightarrow{u} & E \\ \downarrow \partial_0 & & \downarrow c_* \\ T^q \times I & \xrightarrow{v} & * \end{array}$$

existe una elevación $v': T^q \times I \longrightarrow E$ verificando que $v' \partial_0 = u$ y $c_* v' = v$. Sea $v' = u pr_1$ con $pr_1: T^q \times I \longrightarrow T^q$ la proyección en el primer factor. La aplicación u es exterior por hipótesis y pr_1 es continua y externa. Este hecho es sencillo de probar.

En $T^q \times I$ tenemos la externología $\mathcal{E}_{T^q \times I}$ definida así: $U \in \mathcal{E}_{T^q \times I}$ si existe $V \in \mathcal{E}_{cc}^{\mathbb{R}^+}$ tal que $V \times D^q \times I \subset U$ y $U \in T_{T^q \times I}$.

Dado $E \in \mathcal{E}_{T^q}$ existe $E' \in \mathcal{E}_{cc}^{\mathbb{R}^+}$ tal que $E' \times D^q \subset E$ y con $E \in T_{T^q}$.

Tomamos $pr_1^{-1}(E' \times D^q) \subset pr_1^{-1}(E)$; se tiene que $pr_1^{-1}(E) \in T_{T^q \times I}$, por ser pr_1 continua, y que $E' \times D^q \times I = pr_1^{-1}(E' \times D^q) \subset pr_1^{-1}(E)$. Así concluimos que pr_1 es externa. Es sencillo comprobar que $e \partial_0 = u$ y $c_* e = v$. \square

Teorema 5.2.5

La categoría de los espacios exteriores $\mathcal{E}t$ tiene estructura de categoría de modelos cerrada con las fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles definidas en esta sección.

Demostración:

Utilizaremos los axiomas *CM*.

El axioma *CM1* se verifica por los resultados las Proposiciones 1.2.2 y 1.2.3 que prueban la existencia de límites y colímites en $\mathcal{E}t$.

Para demostrar *CM2*, es decir que dadas f, g, gf si dos de ellas son equivalencias débiles, también lo es la tercera, precisamos el siguiente resultado:

Lema 5.2.6

Sea $f: X \rightarrow Y$ aplicación exterior. Denotamos por $f^{\mathbb{R}^+}: X^{\mathbb{R}^+} \rightarrow Y^{\mathbb{R}^+}$ a la aplicación definida para toda $\alpha \in X^{\mathbb{R}^+}$ como $f^{\mathbb{R}^+}(\alpha) = f\alpha$. En $X^{\mathbb{R}^+}, Y^{\mathbb{R}^+}$, consideremos las topologías $T_X^{\mathbb{R}^+}, T_Y^{\mathbb{R}^+}$, respectivamente. Entonces:

- (a) f es fibración exterior si y sólo si $f^{\mathbb{R}^+}$ es fibración en *Top*.
- (b) f es equivalencia débil cilíndrica si y sólo si $f^{\mathbb{R}^+}$ es equivalencia débil en *Top*.

Demostración:

- (a) Dado un diagrama conmutativo en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc}
 T^q = \mathbb{R}^+ \times D^q & \longrightarrow & X \\
 \downarrow id_{\mathbb{R}^+} \times \partial_0 & & \downarrow f \\
 T^q \times I = \mathbb{R}^+ \times D^q \times I & \longrightarrow & Y
 \end{array} \tag{1}$$

podemos aplicar la exponencial y el Teorema 1.3.3 y obtenemos un diagrama que se corresponde de forma biyectiva con (1)

$$\begin{array}{ccc}
 D^q & \longrightarrow & X^{\mathbb{R}^+} \\
 \downarrow \partial_0 & & \downarrow f^{\mathbb{R}^+} \\
 D^q \times I & \longrightarrow & Y^{\mathbb{R}^+}
 \end{array} \tag{2}$$

para todo $q \geq 0$. Entonces existe una elevación en (1) si y sólo si existe una elevación en (2) y se tiene el resultado.

- (b) Si $X^{\mathbb{R}^+} = \emptyset$ entonces, si f es equivalencia débil cilíndrica, por la Definición 5.1.9, se tiene que $Y^{\mathbb{R}^+} = \emptyset$. Luego $f^{\mathbb{R}^+}$ es la identidad en el vacío y por tanto equivalencia débil en *Top*.

Recíprocamente, si $X^{\mathbb{R}^+} = \emptyset$ y $f^{\mathbb{R}^+}$ es equivalencia débil en Top como $\Pi_n(X^{\mathbb{R}^+}, \emptyset) = \Pi_n(\emptyset, \emptyset)$, entonces $Y^{\mathbb{R}^+} = \emptyset$ y f es equivalencia débil cilíndrica.

Supongamos que $X^{\mathbb{R}^+} \neq \emptyset$. Dada $f: X \rightarrow Y$ aplicación se verifica que $f^{\mathbb{R}^+}$ es continua si y sólo si f es exterior, para probarlo basta aplicar el Teorema 1.3.3 con $K = *$

Para $f: X \rightarrow Y$ exterior se dice que f es equivalencia débil cilíndrica si y sólo si induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía cilíndrica

$$\Pi_q^c(X, \alpha) \xrightarrow{f_*^c} \Pi_q^c(Y, f\alpha)$$

para todo $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ exterior y $q \geq 0$. Teniendo en cuenta el Lema 5.1.5 existen las biyecciones

$$\begin{aligned} \Pi_q^c(X, \alpha) &\xrightarrow{e} \Pi_q(X^{\mathbb{R}^+}, \alpha) \\ \Pi_q^c(Y, f\alpha) &\xrightarrow{e} \Pi_q(Y^{\mathbb{R}^+}, f\alpha) \end{aligned}$$

para todo $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ exterior y $q \geq 0$, donde a la izquierda tenemos grupos de homotopía cilíndrica y a la derecha grupos de homotopía de espacios en Top^* .

De esta forma tenemos los diagramas conmutativos para todo $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ y $q \geq 0$

$$\begin{array}{ccc} \Pi_q^c(X, \alpha) & \xrightarrow{f_*^c} & \Pi_q^c(Y, f\alpha) \\ \downarrow ||\simeq & & \downarrow ||\simeq \\ \Pi_q(X^{\mathbb{R}^+}, \alpha) & \xrightarrow{f_*^{\mathbb{R}^+}} & \Pi_q(Y^{\mathbb{R}^+}, f\alpha) \end{array}$$

Este hecho prueba que f_*^c es isomorfismo si y sólo si $f_*^{\mathbb{R}^+}$ lo es. \square

Dado que en Top se tiene $CM2$, aplicando el apartado (b) del lema anterior, es equivalente a que se verifique $CM2$ en $\mathcal{E}t$.

Para probar ahora $CM3$ tenemos que demostrar que las cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles son clases de morfismos cerradas por retracts. La demostración es análoga a la realizada para probar este axioma en el Teorema 2.1.6, sólo es preciso advertir que las fibraciones en la estructura cilíndrica tienen la propiedad de elevación de homotopía respecto a $\partial_0: T^q \rightarrow T^q \times I$ para todo $q \geq 0$ y que hemos de aplicar Lema 5.2.6 para probar que todo retracto de una equivalencia débil es equivalencia débil.

Demostrar $CM5$ es más complicado. Es preciso probar que dada $f: X \rightarrow Y$ aplicación exterior pueda factorizarse de dos formas:

(a) $f = pi$ con i cofibración trivial, p fibración.

(b) $f = qj$ con j cofibración, q fibración trivial.

Examinemos primero el caso (a). Dada $f: X \rightarrow Y$ construiremos un diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i_1} & X_1 & \xrightarrow{i_2} & X_2 & \longrightarrow & \cdots \\ & \searrow f & \downarrow p_1 & \swarrow p_2 & & & \cdots \\ & & Y & & & & \end{array}$$

Tomamos $X_0 = X$ y $p_0 = f$ y suponemos construido X_{n-1} .

Sea Λ conjunto de índices, $\lambda \in \Lambda$, de diagramas D_λ de la forma:

$$\begin{array}{ccc} T^{q_\lambda} & \xrightarrow{u_\lambda} & X_{n-1} \\ \downarrow \partial_0^\lambda & & \downarrow p_{n-1} \\ T^{q_\lambda} \times I & \xrightarrow{v_\lambda} & Y \end{array}$$

con $q_\lambda \geq 0$. Definimos X_n por un push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} T^{q_\lambda} & \xrightarrow{\bigsqcup_{\lambda} u_\lambda} & X_{n-1} \\ \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \partial_0^\lambda & & \downarrow i_n \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} T^{q_\lambda} \times I & \xrightarrow{\bigsqcup_{\lambda} v_\lambda} & X_n \end{array} \quad (1)$$

y la aplicación $i_n: X_{n-1} \rightarrow X_n$ la inducida en él. Mediante la propiedad universal del push-out aplicada a $p_{n-1}: X_{n-1} \rightarrow Y$ y a $\bigsqcup_{\lambda} v_\lambda: \bigsqcup_{\lambda} T^{q_\lambda} \times I \rightarrow Y$, obtenemos $p_n: X_n \rightarrow Y$ verificando que $p_n \bigsqcup_{\lambda} v_\lambda = \bigsqcup_{\lambda} p_{n-1}$ y $p_n i_n = p_{n-1}$, es decir, p_n extiende a p_{n-1} .

Tomamos (\tilde{X}, p) colímite de $\{X_n, p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si denotamos por $k_n: X_n \rightarrow \tilde{X}$ la inclusión natural de X_n en \tilde{X} y consideramos $i = k_0$, se sigue que $f = pi$.

Podemos observar que esta construcción es similar a la realizada en el Teorema 2.1.6 para demostrar este mismo axioma, pero en vez de pegar una sucesión de discos por medio de $\partial_0^\lambda: D^{q_\lambda} \rightarrow D^{q_\lambda} \times I$, pegamos tubos gracias a aplicaciones análogas, $\partial_0^\lambda: T^{q_\lambda} \rightarrow T^{q_\lambda} \times I$. Este hecho hará que omitamos ciertas demostraciones que son prácticamente iguales.

Veamos que p es fibración. Supongamos probado que cualquier aplicación de la forma $\alpha: \mathcal{T}^q \longrightarrow \tilde{X}$ factoriza a través de X_n para n suficientemente grande, resultado que demostraremos al final del capítulo. Entonces dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^{q\lambda} & \xrightarrow{u_\lambda} & \tilde{X} \\ \downarrow \partial_0^\lambda & & \downarrow p \\ \mathcal{T}^{q\lambda} \times I & \xrightarrow{v_\lambda} & Y \end{array}$$

existe n tal que $u_\lambda(\mathcal{T}^{q\lambda}) \subset X_n$. También, puesto que X_{n+1} se construye mediante un push-out análogo a (1), tenemos que existe $\bigsqcup_\lambda w_\lambda: \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}^{q\lambda} \times I \longrightarrow X_{n+1}$ verificando que $i_{n+1} \bigsqcup_\lambda u_\lambda = \bigsqcup_\lambda w_\lambda \bigsqcup_\lambda \partial_0^\lambda$. Al aplicar la propiedad universal del push-out a $\bigsqcup_\lambda v_\lambda$ y a p_n obtenemos que $p_{n+1} \bigsqcup_\lambda w_\lambda = \bigsqcup_\lambda v_\lambda$.

Entonces para un diagrama como el inferior

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{T}^{q\lambda} & \xrightarrow{u_\lambda} & X_n & \xrightarrow{i_{n+1}} & X_{n+1} & \xrightarrow{k_{n+1}} & \tilde{X} \\ \downarrow \partial_0^\lambda & & & & & & \downarrow p \\ \mathcal{T}^{q\lambda} \times I & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & & & & Y \end{array}$$

tenemos que existe $w_\lambda: \mathcal{T}^{q\lambda} \times I \longrightarrow X_{n+1}$ en el índice $\lambda \in \Lambda$ verificando que $p_{n+1}v_\lambda = w_\lambda$ y $w_\lambda \partial_0^\lambda = i_{n+1}u_\lambda$, esto es, p_{n+1} es fibración. Como $p_{n+1} = pk_{n+1}$, tomando la elevación $e = k_{n+1}w_\lambda$ demostramos que p es fibración.

Queda por probar que i es cofibración trivial. El procedimiento es análogo al empleado en el Teorema 2.1.6, primero se prueba que $i_n: X_{n-1} \longrightarrow X_n$ es cofibración con idénticos argumentos, sustituyendo $\partial_0^\lambda: \mathcal{D}^{q\lambda} \longrightarrow \mathcal{D}^{q\lambda} \times I$ por $\partial_0^\lambda: \mathcal{T}^{q\lambda} \longrightarrow \mathcal{T}^{q\lambda} \times I$. Para probar que i_n es equivalencia débil se recurre a un resultado similar al Corolario 2.1.9.

Corolario 5.2.7

Se verifica que X_{n-1} es retracto de deformación fuerte de X_n

Demostración:

Podemos probar que $\mathcal{T}^{q\lambda}$ es un retracto de deformación fuerte de $\mathcal{T}^{q\lambda} \times I$. En primer lugar $pr_1 \partial_0 = id_{\mathcal{T}^{q\lambda}}$. En segundo lugar podemos definir la homotopía exterior $F_\lambda: \mathcal{T}^{q\lambda} \times I \times I \longrightarrow \mathcal{T}^{q\lambda} \times I$, como $F_\lambda(x, t, s) = (x, st)$ para todo $(x, t) \in \mathcal{T}^{q\lambda} \times I$ y $s \in I$.

Se verifica que $F_\lambda(x, t, 0) = \partial_0 pr_1(x, t)$, $F_\lambda(x, t, 1) = (x, t)$ para todo $(x, t) \in T^{q\lambda} \times I$ y que F_λ es exterior, luego F_λ es la retracción buscada.

Por las mismas razones que en el Corolario 2.1.9 $\bigsqcup_\lambda T^{q\lambda}$ es retracto de deformación fuerte de $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} T^{q\lambda} \times I$ y debido a que X_n se construye gracias a un push-out como (1) que verifica las hipótesis del Lema 2.1.8 podemos deducir que X_{n-1} es retracto de deformación fuerte exterior de X_n . \square

Demostremos que $i: X \longrightarrow \tilde{X}$ es equivalencia débil.

Lema 5.2.8

La inclusión $i: X \longrightarrow \tilde{X}$ es equivalencia débil.

Demostración:

Supongamos que $X^{\mathbb{R}^+} = \emptyset$, entonces no existe $u: T^q = \mathbb{R}^+ \times D^q \longrightarrow X$ exterior pues aplicando el Teorema 1.3.3 existiría $e(u): D^q \longrightarrow X^{\mathbb{R}^+}$, lo que es contradictorio. Así dada la construcción de \tilde{X} , si $X^{\mathbb{R}^+} = \emptyset$, entonces $\tilde{X} = X$ e $i = id_X$ que es equivalencia débil.

Sea $X^{\mathbb{R}^+} \neq \emptyset$, probemos que $i_*^c: \Pi_q^c(X, \alpha) \longrightarrow \Pi_q^c(\tilde{X}, i\alpha)$ es una biyección para todo $q \geq 0$.

Demostremos que i_*^c es sobre. Para ello supongamos probado el resultado que afirma que toda aplicación exterior de la forma $\beta: \mathcal{R}^q \longrightarrow \tilde{X}$ factoriza a través de un X_n para n suficientemente grande. Dada $[f]^{\mathbb{R}^+} \in \Pi_q^c(\tilde{X}, i\alpha)$, tomamos un representante $f: \mathcal{R}^q \longrightarrow \tilde{X}$ que factoriza a través de un X_n como $f: \mathcal{R}^q \xrightarrow{f'} X_n \xrightarrow{k_n} \tilde{X}$. Dado que la composición finita de equivalencias débiles también lo es, $t = i_n i_{n-1} \cdots i_1$ es equivalencia débil y existe $f'': \mathcal{R}^q \longrightarrow X$ con $tf'' = f'$, luego $f = k_n f' = k_n t f'' = i f''$, y por tanto i_*^c es sobre.

Veamos que i_*^c es inyectiva. Sean $[f]^{\mathbb{R}^+}, [g]^{\mathbb{R}^+} \in \Pi_q^c(X, \alpha)$ tales que $i_*[f]^{\mathbb{R}^+} = i_*[g]^{\mathbb{R}^+}$, entonces $if \stackrel{\mathbb{R}^+}{\simeq} ig$ para unos representantes y existe $H: \mathcal{R}^q \times I \longrightarrow \tilde{X}$ homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ con $H\partial_0 = if$ y $H\partial_1 = ig$. Supongamos probado ahora un resultado similar al citado antes, que toda aplicación $F: \mathcal{R}^q \times I \longrightarrow \tilde{X}$ factoriza a través de un X_n para n suficientemente grande. De esta forma podemos afirmar que H factoriza a través de un X_n como $H: \mathcal{R}^q \times I \xrightarrow{H'} X_n \xrightarrow{k_n} \tilde{X}$. Aplicando otra vez que t es equivalencia débil, existe una $H'': \mathcal{R}^q \times I \longrightarrow X$ exterior bajo \mathbb{R}^+ con $H''\partial_0 = f$ y $H''\partial_1 = g$. \square

Para finalizar queda probar que i es cofibración. La demostración de este hecho es igual a la realizada en el Teorema 2.1.6 pues, como en ese caso, i_n es cofibración para todo

$n \in \mathbb{N}$ y \tilde{X} ha sido construido mediante un colímite de $\{X_n, p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Así el apartado (a) queda demostrado

Veamos que f puede factorizarse como en el apartado (b) es decir como $f = qj$ con q fibración trivial y j cofibración.

Sea $f: X \rightarrow Y$ construimos un diagrama como el siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{j_1} & Y_1 & \xrightarrow{j_2} & Y_2 & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow f & \downarrow q_1 & \swarrow q_2 & & & \dots \\ & & Y & & & & \end{array}$$

Sea $Y_0 = X, q_0 = f$, supongamos construido Y_{n-1} . Para construir Y_n se consideran los diagramas D_λ , con $\lambda \in \Lambda$, de la forma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^{q_\lambda-1} & \xrightarrow{u_\lambda} & Y_{n-1} \\ \downarrow \bar{v}_\lambda & & \downarrow q_{n-1} \\ \mathcal{T}^{q_\lambda} & \xrightarrow{v_\lambda} & Y \end{array}$$

con $q_\lambda \geq 0, \bar{v}_\lambda = id_{\mathbb{R}^+} \times i: \mathcal{R}^{q_\lambda-1} = \mathbb{R}^+ \times S^{q_\lambda-1} \rightarrow \mathcal{T}^{q_\lambda} = \mathbb{R}^+ \times D^{q_\lambda}$ para simplificar notación.

Se define Y_n por el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}^{q_\lambda-1} & \xrightarrow{\coprod_{\lambda} u_\lambda} & Y_{n-1} \\ \downarrow \coprod_{\lambda} \bar{v}_\lambda & & \downarrow j_n \\ \coprod_{\lambda} \mathcal{T}^{q_\lambda} & \xrightarrow{\coprod_{\lambda} v_\lambda} & Y_n \end{array}$$

y $j_n: Y_{n-1} \rightarrow Y_n$ la inducida en él.

Para obtener q_n aplicamos la propiedad universal del push-out a q_{n-1} y a $\coprod_{\lambda} v_\lambda$. Entonces $q_n \coprod_{\lambda} w_\lambda = \coprod_{\lambda} v_\lambda$ y q_n extiende a q_{n-1} , es decir, $q_n j_n = q_{n-1}$.

Tomamos (\tilde{Y}, q) colímite de $\{Y_n, q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y la aplicación $j: X \rightarrow \tilde{Y}$ la inclusión natural del espacio X en el colímite \tilde{Y} . Entonces $f = qj$.

En primer lugar veamos que q es fibración trivial. Para ello demostraremos al final del capítulo un resultado que asegura, que toda aplicación exterior $\beta: \mathcal{R}^{q_\lambda-1} \rightarrow \tilde{Y}$ factoriza

a través de Y_m para m suficientemente grande. Debido a que la construcción de Y_m se realiza mediante push-outs sucesivos de naturaleza similar a los que se emplean en la construcción usada en la demostración de CM5(b) en el Teorema 2.1.6 podemos, por idénticos razonamientos, concluir que q tiene la propiedad de elevación a derecha respecto a las aplicaciones $\bar{i}_\lambda: \mathcal{R}^{q\lambda-1} \longrightarrow \mathcal{T}^{q\lambda}$ para todo $q \geq 0$.

Por la proposición siguiente esto es lo mismo que afirmar que q es fibración trivial.

Proposición 5.2.9

La aplicación $f: X \longrightarrow Y$ es fibración trivial si y sólo si f tiene la propiedad de elevación a derecha respecto a las aplicaciones $\bar{i}: \mathcal{R}^{q-1} \longrightarrow \mathcal{T}^q$ para todo $q \geq 0$.

Demostración:

Si f tiene la propiedad de elevación a derecha respecto a $\bar{i}: \mathcal{R}^{q-1} \longrightarrow \mathcal{T}^q$ si y sólo si para todo diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^{q-1} & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow \bar{i} & & \downarrow f \\ \mathcal{T}^q & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

existe una elevación $e: \mathcal{T}^q \longrightarrow X$ en $\mathcal{E}t$ verificando que $fe = h$ y $e\bar{i} = g$ para todo $q \geq 0$.

Aplicando la ley exponencial del Teorema 1.3.3 este hecho es equivalente a que $f^{\mathbb{R}^+}: X^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow Y^{\mathbb{R}^+}$, con las topologías $T_X^{\mathbb{R}^+}$, y $T_Y^{\mathbb{R}^+}$, en cualquier diagrama conmutativo en Top

$$\begin{array}{ccc} S^{q-1} & \longrightarrow & X^{\mathbb{R}^+} \\ \downarrow i & & \downarrow f^{\mathbb{R}^+} \\ D^q & \longrightarrow & Y^{\mathbb{R}^+} \end{array}$$

tenga la propiedad de elevación a derecha respecto a $i: S^{q-1} \longrightarrow D^q$ para todo $q \geq 0$.

Por el resultado [Q; II.3.Proposición 1] esto es equivalente a que $f^{\mathbb{R}^+}$ sea fibración trivial. Esta última afirmación, por el Lema 5.2.6, es equivalente a su vez a que f sea fibración trivial (en la estructura cilíndrica). \square

Para finalizar probemos que $j: X \longrightarrow \tilde{Y}$ cofibración.

En primer lugar $j_n: Y_{n-1} \longrightarrow Y_n$ es cofibración. Hemos obtenido Y_n a partir de Y_{n-1} por un push-out:

$$\begin{array}{ccc} \sqcup_{\lambda} \mathcal{R}^{q\lambda-1} & \longrightarrow & Y_{n-1} \\ \downarrow \sqcup_{\lambda} \bar{i}_{\lambda} & & \downarrow j_n \\ \sqcup_{\lambda} \mathcal{T}^{q\lambda} & \longrightarrow & Y_n \end{array}$$

Observando la proposición anterior $\bar{i}_{\lambda}: \mathcal{R}^{q-1\lambda} \longrightarrow \mathcal{T}^{q\lambda}$ es una cofibración y también $\sqcup_{\lambda} \bar{i}_{\lambda}$, luego j_n es cofibración por ser el lado opuesto en un push-out.

En el apartado (a) demostramos que si i_n es cofibración y \tilde{X} se obtiene como colímite de $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $i: X \longrightarrow \tilde{X}$ también lo es.

Como \tilde{Y} ha sido construido mediante un colímite de $\{Y_n, q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con j_n cofibración, tenemos por los mismos razonamientos que $j: X \longrightarrow \tilde{Y}$ es cofibración.

Queda por demostrar *CM4*, esto es, que dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

tiene una elevación $e: B \longrightarrow X$ con $pe = v$ y $ei = u$ en cualquiera de los siguientes casos:

- (a) i es cofibración y p fibración trivial
- (b) i es cofibración trivial y p fibración

El apartado (a) se tiene por definición de cofibración, y (b) se demuestra sin más que repetir la demostración del mismo en el Teorema 2.1.6 y así finalizamos la demostración del teorema. \square

Restan por probar varias afirmaciones.

En primer lugar que todas las aplicaciones de la forma $\alpha: \mathcal{T}^q \longrightarrow \tilde{X}$ ó $F: \mathcal{R}^q \times I \longrightarrow \tilde{X}$ verifican que para n, m suficientemente grandes $\alpha(\mathcal{T}^q) \subset X_n$ y $F(\mathcal{R}^q \times I) \subset X_m$. Aquí estamos haciendo referencia al \tilde{X} construido en el apartado (a) de la demostración de *CM5*.

En segundo lugar que toda aplicación exterior $\beta: \mathcal{R}^q \longrightarrow \tilde{Y}$ factoriza a través de un Y_m , para m suficientemente grande. En este caso \tilde{Y} es el espacio construido para probar

CM5 (b).

Su demostración precisa de varios resultados previos y consideraciones sobre las construcciones efectuadas al probar CM5.

Observaciones 5.2.10

(a) En la construcción de CM 5 (a) cada X_n se obtiene como un push-out que satisface las hipótesis del Lema 2.1.12 y, por tanto, $i_n: X_{n-1} \rightarrow X_n$ es inyectiva, cerrada y cerrada exteriormente. Por abuso de notación escribiremos $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \tilde{X}$.

(b) La construcción de \tilde{Y} realizada en CM4 (b) es el colímite de $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde cada Y_n lo hemos obtenido mediante un push-out en $\mathcal{E}t$ a partir de Y_{n-1} de forma inductiva. Es sencillo advertir que estos push-outs verifican las hipótesis del Lema 2.1.12 y así $j_n: Y_{n-1} \rightarrow Y_n$ es inyectiva, cerrada y cerrada exteriormente. De esta manera consideramos que $X \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots \tilde{Y}$.

(c) Podemos suponer que $X_n \setminus X_{n-1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues si no ocurriera así podemos reordenarlos suprimiendo los que sea necesario y obtendremos el mismo espacio \tilde{X} y las mismas topologías y externologías o, en otro caso, $X = \tilde{X}$. Por lo mismo razonamientos supondremos que $Y_n \setminus Y_{n-1} \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$, en la construcción \tilde{Y} .

Recordemos la construcción de \tilde{X} . Los X_n que empleamos los obteníamos por un push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} T^{q_\lambda} & \longrightarrow & X_{n-1} \\ \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \partial_0^\lambda & & \downarrow i_n \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} T^{q_\lambda} \times I & \longrightarrow & X_n \end{array}$$

con ∂_0^λ cerrada, inyectiva, y por tanto $\bigsqcup_{\lambda} \partial_0^\lambda$ también lo es. Por la Observación 5.2.10.(a) X_{n-1} es cerrado en X_n para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma $X = X_0$, es cerrado en X_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Si demostramos que \tilde{X} tiene la topología débil concluiríamos que X es cerrado en \tilde{X} .

De forma análoga si \tilde{Y} tiene la externología débil podríamos deducir que X es cerrado exteriormente en \tilde{Y} .

Reproduciendo paso por paso las demostraciones efectuadas en los Lemas 2.1.14 y 2.1.15 podemos probar los resultados siguientes.

Lema 5.2.11

La topología que se obtiene en \tilde{X} mediante la suma disjunta de las topologías de X_n , $n \in \mathbb{N}$ y tomando después la topología cociente inducida por la relación de equivalencia $x \sim i_1(x) \sim i_2 i_1(x) \sim \dots \sim i_n i_{n-1} \dots i_1(x) \sim \dots$ es la topología débil.

Lema 5.2.12

La externología que se obtiene en \tilde{X} mediante la suma disjunta de las externologías de X_n , $n \in \mathbb{N}$ y tomando después la externología cociente inducida por la relación de equivalencia $x \sim i_1(x) \sim i_2 i_1(x) \sim \dots \sim i_n i_{n-1} \dots i_1(x) \sim \dots$ es la externología débil.

Lema 5.2.13

Sea $p \in X_n \setminus X$ entonces $\{p\}$ es cerrado y cerrado exterior en X_n .

Demostración:

Basta tener en cuenta que X_n se obtiene por el push-out:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}^{q_\lambda} & \longrightarrow & X_{n-1} \\ \downarrow \bigsqcup \partial_0^\lambda & & \downarrow i_n \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}^{q_\lambda} \times I & \longrightarrow & X_n \end{array}$$

En X_n tenemos por los Lemas 5.2.11 y 5.2.12 la topología y externología débiles. Para un $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $p \in X_m \setminus X_{m-1}$ y $p \notin X$ con $1 < m \leq n$. Sea q_λ tal que $p \in \mathcal{T}^{q_\lambda} \times I$. Dado que $\{p\}$ es cerrado y compacto, es cerrado y cerrado exteriormente en $\mathcal{T}^{q_\lambda} = \mathbb{R}^+ \times D^{q_\lambda}$ y, por tanto, en $\mathcal{T}^{q_\lambda} \times I$. También es cerrado y cerrado exteriormente en $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}^{q_\lambda} \times I$. Además $\{p\} \cap X_l = \emptyset$ para $1 \leq l \leq m-1$. Como consecuencia $\{p\}$ es cerrado y cerrado exteriormente en X_m . Puesto que $i_n: X_{n-1} \rightarrow X_n$ es cerrada y cerrada exteriormente para todo $n \in \mathbb{N}$ por las Observaciones 5.2.10 (b) y 5.2.10 (c), tenemos que $t: X_m \rightarrow X_n$, la composición finita de ellas $t = i_n i_{n-1} \dots i_{m+1}$, también lo es.

Por todo esto $\{p\}$ es cerrado y cerrado exteriormente en X_n . \square

Lema 5.2.14

Sea $K \subset \tilde{X}$ con K compacto, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset X_n$.

Demostración:

Es idéntica a la del Lema 2.1.17. \square

Proposición 5.2.15

Sea $Z \in \mathcal{E}t, T_2, \sigma$ -compacto y localmente compacto y con la externología de los complementos de los cerrados y compactos. Entonces dada $f: Z \longrightarrow \tilde{X}$ exterior, siempre existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que f factoriza a través de X_n .

Demostración:

Consiste en reproducir la de la Proposición 2.1.18 pues en ella no utilizamos en ningún momento las particularidades de esta construcción sino un lema similar a nuestro Lema 5.2.14, el Lema 2.1.19, que sigue siendo válido en nuestra construcción y otros hechos que les son comunes. \square

Es posible probar resultados análogos a los 5.2.11, 5.2.12, 5.2.13 y 5.2.14 para la construcción \tilde{Y} realizada en *CM5* (b) y enunciar y probar una proposición parecida a la Proposición 5.2.15.

Proposición 5.2.16

Sea $Z \in \mathcal{E}t, T_2, \sigma$ -compacto y localmente compacto, dotado de la externología de los complementos de los cerrados y compactos. Entonces dada $f: Z \longrightarrow \tilde{Y}$ exterior, siempre existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que f factoriza a través de Y_n .

Si tomamos $Z = T^q$, $Z = \mathcal{R}^{q-1}$ ó $Z = \mathcal{R}^{q-1} \times I$ para $q \geq 0$, como se trata de espacios T_2 , σ -compactos, localmente compactos y dotados de la externología de los complementos de los cerrados y compactos, quedan probadas las afirmaciones que necesitábamos para finalizar la demostración *CM5*.

Notas 5.2.17

(a) En la categoría de los espacios exteriores $\mathcal{E}t$ tenemos otra estructura de categoría de modelos cerrada diferente a la del Capítulo 2. La denominaremos “cilíndrica”. Asociada a ella aparecen los conceptos de fibración, cofibración, equivalencia débil, que para diferenciarlos de las definidas en el Capítulo 2 llamaremos fibraciones cilíndricas, cofibraciones cilíndricas, equivalencias débiles cilíndricas, abreviadas c -fibraciones c -cofibraciones y c -equivalencias débiles. En el caso de que pueda existir confusión con la estructura exterior

denotaremos a $\mathcal{E}t$ provista de la estructura de categoría de modelos cerrada cilíndrica por $\mathcal{E}t_c$.

(b) Sea $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ la categoría de los espacios exteriores bajo \mathbb{R}^+ , esto es espacios exteriores con un rayo base y aplicaciones exteriores entre ellas que preservan rayos base. Por el Teorema 0.1.6 queda inducida una estructura de categoría de modelos cerrada cilíndrica, que denotaremos $\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$ siempre que pueda existir confusión. En esta estructura las fibrationes son aplicaciones exteriores bajo \mathbb{R}^+ que, olvidada su estructura bajo \mathbb{R}^+ , tienen la propiedad de elevación de homotopía a derecha respecto a $\partial_0: T^q \rightarrow T^q \times I$ para $q \geq 0$ en $\mathcal{E}t$. Por equivalencias débiles entendemos aplicaciones exteriores bajo \mathbb{R}^+ que, si prescindimos de su estructura bajo \mathbb{R}^+ , son c -equivalencias. Las cofibraciones son aquellas aplicaciones exteriores bajo \mathbb{R}^+ que tienen la propiedad de elevación a izquierda respecto a las aplicaciones en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ que son fibrationes y equivalencias débiles.

5.3 Teoremas de Whitehead.

Definiremos en primer lugar una nueva noción, la de \mathbb{R}^+ -complejo.

Definición 5.3.1 Sea $X \in \mathcal{E}t$, se dice que es un \mathbb{R}^+ -complejo si admite una filtración $X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X$ con $X_{-1} = \emptyset$ tal que X tiene la topología y externología débiles respecto a la filtración anterior y cada X_n se obtiene a partir de X_{n-1} por un push-out en $\mathcal{E}t$ de la forma:

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\lambda^{n-1} & \xrightarrow{\bigsqcup_{\lambda} g_\lambda^n} & X_{n-1} \\
 \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \bar{t}_\lambda & & \downarrow i_n \\
 \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda^n & \xrightarrow{\bigsqcup_{\lambda} f_\lambda^n} & X_n
 \end{array} \tag{1}$$

A cada $f_\lambda^n(\mathcal{T}_\lambda^n)$ le llamamos \mathbb{R}^+ -celda, denotada C_λ^n , a $f_\lambda^n: \mathcal{T}_\lambda^n \rightarrow X_n$ aplicación característica de la \mathbb{R}^+ -celda C_λ^n y a $g_\lambda^n: \mathcal{R}_\lambda^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$ aplicación pegamiento de dicha \mathbb{R}^+ -celda.

Denominamos n -esqueleto al n -ésimo elemento de la anterior filtración de X , X_n .

Por la Proposición 5.2.4 todo objeto en $\mathcal{E}t$ es c -fibrante. Dados $X, Y \in \mathcal{E}t$ c -cofibrantes, por el Teorema 0.2.2, tenemos que si $f: X \rightarrow Y$ es c -equivalencia débil

entonces f es equivalencia de homotopía exterior. Este hecho pone de manifiesto que puede resultar de interés el estudio de los objetos c -cofibrantes en $\mathcal{E}t$.

Teorema 5.3.2

Todo \mathbb{R}^+ -complejo $X \in \mathcal{E}t$ es un objeto c -cofibrante en $\mathcal{E}t$.

Demostración:

Dado X \mathbb{R}^+ -complejo es necesario demostrar que $\emptyset \longrightarrow X$ es c -cofibración. Procederemos por inducción.

Para $n = 0$ tenemos que $\mathcal{R}^{n-1} = \emptyset$, $\mathcal{T}^n = \mathbb{R}^+ \times \{*\}$ y X se obtiene como el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\lambda^{n-1} & \longrightarrow & \emptyset \\ \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \bar{i}_\lambda & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda^0 & \longrightarrow & X_0 \end{array}$$

Por la Proposición 5.2.9 concluimos que $\bar{i}_\lambda: \mathcal{R}_\lambda^{n-1} \longrightarrow \mathcal{T}_\lambda^0$ es c -cofibración para todo $n \geq 0$, luego también lo es $\bigsqcup_{\lambda} \bar{i}_\lambda: \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\lambda^{n-1} \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda^0$. De esta forma, como $\emptyset \longrightarrow X_0$ es el lado opuesto en un push-out a una c -cofibración, es c -cofibración.

Supongamos demostrado para $n - 1$, que $\emptyset \longrightarrow X_{n-1}$ es c -cofibración. Como X_n se obtiene mediante el push-out en $\mathcal{E}t$:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\lambda^{n-1} & \longrightarrow & X_{n-1} \\ \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \bar{i}_\lambda & & \downarrow i_n \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda^n & \longrightarrow & X_n \end{array}$$

Por los mismos argumentos que en el caso $n = 0$, podemos concluir que $i_n: X_{n-1} \longrightarrow X_n$ es c -cofibración.

Si X es \mathbb{R}^+ -complejo, es el colímite de los X_n , $X = \text{colim} X_n$ y $\emptyset \longrightarrow X$ es c -cofibración repitiendo los argumentos de la demostración de CM5 en el Teorema 2.1.6. \square

Sea Y^I el espacio exterior de la Definición 2.2.5 y $d_i: Y^I \longrightarrow Y$ para $i = 1, 2$ las aplicaciones exteriores a las que hicimos referencia en la Proposición 2.2.7. Podemos probar el resultado siguiente:

Proposición 5.3.3

Sea la aplicación $(d_0, d_1): Y^I \longrightarrow Y \times Y$. Se verifica que (d_0, d_1) es c -fibración.

Demostración:

Por el Lema 5.2.6 (a) se tiene que $(d_0, d_1): Y^I \longrightarrow Y \times Y$ es c -fibración si y sólo si $(d_0, d_1)^{\mathbb{R}^+}: (Y^I)^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow (Y \times Y)^{\mathbb{R}^+}$ es fibración en Top. Observemos que en $(Y^I)^{\mathbb{R}^+}$ tenemos la topología $T_{Y^I}^{\mathbb{R}^+}$ y en $(Y \times Y)^{\mathbb{R}^+}$ la topología $T_{Y \times Y}^{\mathbb{R}^+}$. Es casi inmediato probar que $(Y \times Y)^{\mathbb{R}^+}$ es homeomorfo a $Y^{\mathbb{R}^+} \times Y^{\mathbb{R}^+}$.

Veamos que $(Y^I)^{\mathbb{R}^+}$ es homeomorfo a $(Y^{\mathbb{R}^+})^I$.

Sea $\rho: (Y^{\mathbb{R}^+})^I \longrightarrow (Y^I)^{\mathbb{R}^+}$ definida para toda $f \in (Y^{\mathbb{R}^+})^I$ como $\rho(f)(r): I \longrightarrow Y$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$ de tal manera que $\rho(f)(r)(t) = f(t)(r)$, para todo $t \in I$. Sea un elemento de la subbase de $T_{Y^I}^{\mathbb{R}^+}$, $S([a, +\infty), (I, E))$ donde $E \in \mathcal{E}_Y$, entonces se tiene que $\rho^{-1}(S([a, +\infty), (I, E))) = (I, S([a, +\infty), E))$ que es un elemento de la subbase de T_{ca} de $(Y^{\mathbb{R}^+})^I$.

Los otros elementos de la subbase de $T_{Y^I}^{\mathbb{R}^+}$ son de la forma $S([a, b], (K, U))$ con $(K, U) \in T_{ca}^{Y^I}$ y $\rho^{-1}(S([a, b], (K, U))) = (K, S([a, b], U))$, que es un elemento de la subbase de T_{ca} de $(Y^{\mathbb{R}^+})^I$. Así ρ es continua.

También podemos definir $\bar{\rho}: (Y^I)^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow (Y^{\mathbb{R}^+})^I$ para toda $g \in (Y^I)^{\mathbb{R}^+}$ y $r \in \mathbb{R}^+$ como $\bar{\rho}(g)(r): I \longrightarrow Y$ de modo que para todo $t \in I$, $\bar{\rho}(g)(t)(r) = g(r)(t)$. Es sencillo probar que $\bar{\rho}$ es continua empleando argumentos similares a los anteriores.

Además es claro que $\bar{\rho}\rho = id_{(Y^{\mathbb{R}^+})^I}$ y que $\rho\bar{\rho} = id_{(Y^I)^{\mathbb{R}^+}}$.

De esta forma tenemos que $(d_0, d_1)^{\mathbb{R}^+}: (Y^I)^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow (Y \times Y)^{\mathbb{R}^+}$ es fibración en Top si y sólo si $(d_0, d_1): (Y^{\mathbb{R}^+})^I \longrightarrow Y^{\mathbb{R}^+} \times Y^{\mathbb{R}^+}$ es fibración en Top. \square

Corolario 5.3.4

La factorización de la diagonal $\Delta_Y: Y \xrightarrow{s} Y^I \xrightarrow{(d_0, d_1)} Y \times Y$ es un objeto de caminos en $\mathcal{E}t$ en el sentido de la Definición 3.1.5.

Demostración:

Recordemos que en $\mathcal{E}t$ consideramos la estructura de categoría de modelos cerrada cilíndrica. Por tanto, el resultado es equivalente a probar que (d_0, d_1) es c -cofibración y s c -equivalencia débil. Pero por la Proposición 5.3.3 se tiene que (d_0, d_1) es c -cofibración y por el Teorema 2.2.9, s es equivalencia de homotopía exterior, luego c -equivalencia débil. \square

Teorema 5.3.5

La relación de homotopía a derecha de Quillen en $\mathcal{E}t$ con la estructura de categoría de modelos cerrada cilíndrica coincide con la relación de homotopía exterior.

Demostración:

Para todo $X, Y \in \mathcal{E}t$ por el Teorema 1.3.5 tenemos la biyección $\mathcal{E}t(X \times I, Y) \cong \mathcal{E}t(X, Y^I)$. Aplicando ahora el Corolario 5.3.5 vemos que la relación de homotopía a derecha de Quillen, en la estructura cilíndrica, coincide con la relación de homotopía exterior estándar. Escribiremos esto como $\Pi^c(\mathcal{E}t)(X, Y) \cong \Pi(\mathcal{E}t)(X, Y)$. \square

Teorema de Whitehead para espacios exteriores 5.3.6

Sean $X, Y \in \mathcal{E}t, \mathbb{R}^+$ -complejos. Si $f: X \rightarrow Y$ es una aplicación en $\mathcal{E}t$, f es c -equivalencia débil si y sólo si f es equivalencia de homotopía exterior.

Demostración:

Es claro que si f es equivalencia de homotopía exterior entonces es c -equivalencia débil.

Para la otra implicación tengamos en cuenta que tanto X como Y son fibrantes por ser objetos en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ y cofibrantes por el Teorema 5.3.2 y el Teorema 5.3.5. Así podemos aplicar el Teorema 0.2.2. \square

Teorema 5.3.7

Si X es un CW -complejo finito, entonces $\mathbb{R}^+ \times X$ admite una estructura de \mathbb{R}^+ -complejo inducida por la de X .

Demostración:

Por ser X CW -complejo finito, X admite una filtración $X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = X$, con $X_{-1} = \emptyset$ y de modo que X_n se obtiene a partir de X_{n-1} mediante un push-out (1).

Por el Teorema 1.3.3 tenemos que $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+ \times K, Y) \cong Top(K, Y^{\mathbb{R}^+})$ para todo K compacto e $Y \in \mathcal{E}t$. Así $\mathbb{R}^+ \times _$ es adjunto a izquierda y preserva push-outs. Entonces

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^+ \times \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{R}_\lambda^{n-1}) & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^+} \times \bigsqcup_{\lambda} g_\lambda^n} & \mathbb{R}^+ \times X_{n-1} \\
 \downarrow & & \downarrow id_{\mathbb{R}^+} \times i_n \\
 \mathbb{R}^+ \times \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{T}_\lambda^n) & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^+} \times \bigsqcup_{\lambda} f_\lambda^n} & \mathbb{R}^+ \times X_n
 \end{array} \tag{2}$$

es un cuadrado push-out. De esta manera $\mathbb{R}^+ \times X$ admite la filtración $\mathbb{R}^+ \times X_{-1} \subset \mathbb{R}^+ \times X_0 \subset \mathbb{R}^+ \times X_1 \subset \dots \subset \mathbb{R}^+ \times X_n = X \times \mathbb{R}^+$ con $\mathbb{R}^+ \times X_{-1} = \emptyset$ y de modo que $\mathbb{R}^+ \times X_n$ se obtiene de $\mathbb{R}^+ \times X_{n-1}$ mediante un push-out como (2). Además $\mathbb{R}^+ \times X$ posee la topología y externología débil respecto a la anterior filtración pues el push-out (2) verifica las hipótesis de la Proposición 2.2.3. \square

Proposición 5.3.8

Sea $X \in \mathcal{E}t$ \mathbb{R}^+ -complejo. Se verifica que $\partial_0 + \partial_1: X \sqcup X \longrightarrow X \times I$ es c -cofibración.

Demostración:

Si X es un \mathbb{R}^+ -complejo entonces X admite una filtración $X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X$ de modo que X_n se obtiene de X_{n-1} mediante un push-out como (1).

Entonces $X \times I$ admite una filtración $(X \times I)_{-1} \subset (X \times I)_0 \subset (X \times I)_1 \subset \dots \subset X \times I$, con $(X \times I)_{-1} = \emptyset$, $(X \times I)_0 = X \sqcup X$, y tal que $(X \times I)_1$ se obtiene por el push-out:

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_1} \mathcal{R}_\lambda^0 & \xrightarrow{\hspace{10em}} & X \sqcup X \\
 \downarrow \bigsqcup_{\lambda} \bar{v}_\lambda & & \downarrow (\partial_0 + \partial_1)^! \\
 \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_1} \mathcal{T}_\lambda^1 \cong \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_0} \mathcal{T}_\lambda^0 \times I & \longrightarrow & (X \times \{0\}) \sqcup (X_0 \times I) \sqcup (X \times \{1\})
 \end{array}$$

Si suponemos construido $(X \times I)_{n-1} \cong (X \times \{0\}) \sqcup (X_{n-2} \times I) \sqcup (X \times \{1\})$, $(X \times I)_n$ se obtiene a partir de él mediante un push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{\lambda \in \Lambda_n} \mathcal{R}_\lambda^{n-1} & \longrightarrow & (X \times \{0\}) \sqcup (X_{n-2} \times I) \sqcup (X \times \{1\}) \\
\downarrow \coprod_{\lambda} \bar{v}_\lambda & & \downarrow (\partial_0 + \partial_1)^n \\
\coprod_{\lambda \in \Lambda_n} \mathcal{T}_\lambda^n \cong \coprod_{\lambda \in \Lambda_{n-1}} \mathcal{T}_\lambda^{n-1} \times I & \longrightarrow & (X \times \{0\}) \sqcup (X_{n-1} \times I) \sqcup (X \times \{1\})
\end{array}$$

donde $(X \times \{0\}) \sqcup (X_{n-1} \times I) \sqcup (X \times \{1\}) \cong (X \times I)_n$. Se verifica que $X \times I = \text{colim}(X \times I)_n$

Como $\coprod_{\lambda} \bar{v}_\lambda$ es c -cofibración y $(\partial_0 + \partial_1)^n$ el lado opuesto de un push-out, se tiene que también es c -cofibración para todo $n \geq 0$.

Dado que $X \times I = \text{colim}(X \times I)_n$, se verifica que $(\partial_0 + \partial_1): X \sqcup X \longrightarrow X \times I$ es la inducida en el colímite por las c -cofibraciones $(\partial_0 + \partial_1)^n: X \sqcup X \longrightarrow (X \times I)_n$. Repitiendo el argumento empleado en el Teorema 2.1.6 en la demostración del axioma de factorización tenemos que $\partial_0 + \partial_1$ es c -cofibración. \square

Nota 5.3.9

En la estructura de categoría de modelos cerrada cilíndrica para $\mathcal{E}t$ se tiene que si X es \mathbb{R}^+ -complejo, entonces $X \times I$ es un objeto cilindro de Quillen, esto es, en el sentido de la Definición 3.1.7. Esto es así pues $\partial_0 + \partial_1$ es c -cofibración por la proposición anterior y $pr_1: X \times I \longrightarrow X$ es c -equivalencia débil por ser equivalencia de homotopía exterior, como probamos en la Nota 3.1.8 (b).

Observación 5.3.10

Notemos que la noción de \mathbb{R}^+ -complejo es un análogo de la noción de CW-complejo propio dada por Rivas [Riv] y estudiada por Extremiana, Hernández y Rivas en [E-H-R.1] en el caso de que no se utilicen celdas compactas.

Capítulo 6

Sucesión exacta larga de homotopía de un morfismo en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$

El propósito de este capítulo es similar al del cuarto, obtener la sucesión exacta larga de homotopía de un morfismo, pero en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ esta vez. Como caso particular conseguiremos la de un par en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, denotado $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

En $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ tenemos una estructura de categoría de modelos cerrada inducida por la estructura de modelos cilíndrica en $\mathcal{E}t$. La categoría $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ es no basada.

En la primera sección definimos la categoría $(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})_{id_{\mathbb{R}^+}}$, que escribiremos $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ y que también tiene una estructura de categoría de modelos inducida por la de $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. Para todo objeto en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, definimos su cilindro $I^{\mathbb{R}^+}X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. Además si X es un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, también lo es su cilindro. A partir de aquí definimos la categoría de homotopía de $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, $\Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})$, y el n -ésimo grupo de homotopía cilíndrica de $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, $\mathbb{R}_+ \Pi_n^c(X)$. Además definimos el wedge en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

Para definir el smash, el cono y la suspensión necesitamos trabajar en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Definimos el espacio de lazos de $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ que es un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, $\Omega Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, mediante un proceso análogo al utilizado en el Capítulo 4 para definir el espacio de lazos de $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$.

De esta manera tenemos funtores suspensión, $\Sigma: \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, y lazo, $\Omega: \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$. Demostramos que Σ es adjunto a izquierda de Ω , así como en las respectivas categorías de homotopía.

En la segunda sección obtenemos la sucesión exacta larga de homotopía de un morfismo en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

Primero consideramos un espacio de caminos algo modificado. Después definimos la fibra homotópica de una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, P_f^c , y la fibra homotópica derivada cilíndrica de f en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, $(P_f^c)'$. Además consideramos diferentes nociones de exactitud de una sucesión exacta corta en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ dependiendo de que en ella el primer término, los dos primeros, o todos estén en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$. Con estas modificaciones al desarrollo clásico logramos la sucesión buscada

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \Pi_n^c(X) \xrightarrow{\Pi_n(f)} \mathbb{R}_+ \Pi_n^c(Y) \xrightarrow{\partial=\rho_*'} \mathbb{R}_+ \Pi_{n-1}^c(P_f^c) \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \Pi_1^c(X) \xrightarrow{\Pi_1(f)} \mathbb{R}_+ \Pi_1^c(Y) \xrightarrow{\partial=\rho_*'} \mathbb{R}_+ \Pi^c(P_f^c) \xrightarrow{\pi_*} \Pi_0^c(X) \xrightarrow{j_*} \Pi_0^c(Y) \end{aligned} \quad (1)$$

En la tercera sección, definimos la categoría $\mathcal{PEt}^{\mathbb{R}^+}$ y el n -ésimo grupo de homotopía cilíndrica del par $(X, A) \in \mathcal{PEt}^{\mathbb{R}^+}$ como el $(n-1)$ -ésimo grupo de homotopía cilíndrico de P_i^c , con $i: A \rightarrow X$ inclusión canónica del subespacio exterior A en X en $\mathcal{Et}^{\mathbb{R}^+}$. De esta manera obtenemos la sucesión exacta larga de homotopía de $(X, A) \in \mathcal{PEt}^{\mathbb{R}^+}$ aplicando la sucesión (1) a la inclusión i .

En la cuarta sección, obtenemos el resultado de que la sucesión exacta larga de grupos de homotopía propia tipo Steenrod de un par $(X, A) \in \mathcal{PPro}^{\mathbb{R}^+}$ es un caso particular de la sucesión exacta larga del par $(X, A) \in \mathcal{PEt}^{\mathbb{R}^+}$.

6.1 Definiciones.

Sea $\mathcal{Et}^{\mathbb{R}^+}$ la categoría de modelos cerrada cilíndrica a la que aludimos en la Nota 5.2.17 (b). El objeto inicial es $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ y el objeto final $c_*: \mathbb{R}^+ \rightarrow *$, que no son isomorfos. Por tanto se plantea de nuevo el trabajo en una categoría no basada.

Consideremos ahora $(\mathcal{Et}^{\mathbb{R}^+})_{id_{\mathbb{R}^+}}$ categoría de los espacios exteriores bajo \mathbb{R}^+ que además son sobre \mathbb{R}^+ . Los objetos en $(\mathcal{Et}^{\mathbb{R}^+})_{id_{\mathbb{R}^+}}$ son factorizaciones de la identidad, $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\delta_X} \mathbb{R}^+$ en \mathcal{Et} .

Los morfismos son diagramas conmutativos en \mathcal{Et} de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R}^+ & \\
 \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\
 X & \xrightarrow{g} & Y \\
 \delta_X \searrow & & \swarrow \delta_Y \\
 & \mathbb{R}^+ &
 \end{array}$$

Se trata pues de aplicaciones exteriores, $f: X \rightarrow Y$, tales que $f\alpha = \beta$ y $\delta_X f = \delta_Y$.

Como en el Capítulo 4 abreviaremos la notación escribiendo $\mathcal{Et}_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ en vez $(\mathcal{Et}^{\mathbb{R}^+})_{id_{\mathbb{R}^+}}$, y escribiremos $X \in \mathcal{Et}_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ para referirnos a los objetos en $\mathcal{Et}_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ y $f \in \mathcal{Et}_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}(X, Y)$ para los morfismos en $\mathcal{Et}_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Por la Proposición 0.1.12, la estructura de categoría de modelos cerrada cilíndrica en $\mathcal{Et}^{\mathbb{R}^+}$ induce en $\mathcal{Et}_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ otra estructura que también denominaremos cilíndrica.

En $\mathbb{R}^+ \times I$ consideramos la misma topología y externología que en el Teorema 1.3.3 en el caso particular $K = I$, donde en I tenemos la topología euclídea T_e . De forma similar

en $X \times I$ tomamos la estructura de espacio exterior de $X \times K$ en el Teorema 1.3.5 para $K = I$ provisto de T_e .

Definición 6.1.1 Sea $\alpha: \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ objeto en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. definimos *cilindro de X bajo \mathbb{R}^+* , denotado $I^{\mathbb{R}^+}X$, como el morfismo α_{IX} inducido en el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times I & \xrightarrow{pr_1} & \mathbb{R}^+ \\ \downarrow \alpha \times id_I & & \downarrow \alpha_{IX} \\ X \times I & \longrightarrow & I^{\mathbb{R}^+}X \end{array}$$

Si $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, determina un diagrama $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\delta_X} \mathbb{R}^+$. Aplicando la propiedad universal del push-out a $\delta_X pr_1$ y a $id_{\mathbb{R}^+}$ existe una única $\delta_{IX}: I^{\mathbb{R}^+}X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ verificando que $\delta_{IX} \alpha_{IX} = id_{\mathbb{R}^+}$. De esta forma tenemos un diagrama que representa un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ y escribiremos $I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ para poner de manifiesto este hecho.

Como es usual, tenemos las aplicaciones $\partial_i: X \longrightarrow I^{\mathbb{R}^+}X$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ definidas como $\partial_i(x) = [x, i]$ para $i = 0, 1$, que son morfismos en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. De igual forma se definen las correspondientes ∂_i en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Dadas dos aplicaciones $f, g: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ decimos que f es exteriormente homótopa bajo \mathbb{R}^+ y sobre \mathbb{R}^+ (en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$) a g , $f \underset{\mathbb{R}^+}{\simeq} g$, si existe $H: I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ con $H\partial_0 = f$ y $H\partial_1 = g$.

Notemos que $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, con $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, se dice nulhomótopa exterior bajo \mathbb{R}^+ si y sólo si existe una homotopía exterior $H: I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}X \longrightarrow Y$ verificando que $H\partial_0 = f$, $H\partial_1 = \beta\delta_X$ y $H\alpha_{IX} = \beta$.

Denominamos a H nulhomotopía exterior de f .

La relación ser “ser exteriormente homótopa bajo \mathbb{R}^+ y sobre \mathbb{R}^+ a” es una relación de equivalencia en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}(X, Y)$. Denotamos por $[f]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ la clase de aplicaciones exteriormente homótopas bajo \mathbb{R}^+ y sobre \mathbb{R}^+ a f .

Denotamos por $[X, Y]^{\mathbb{R}^+}$ al conjunto de clases de homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ de aplicaciones en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ de X en Y .

De forma análoga escribimos como $[X; Y]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ el conjunto de clases de homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ y sobre \mathbb{R}^+ de aplicaciones en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ de X en Y .

También denotamos por $\Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})$ a la correspondiente categoría de homotopía, que llamamos categoría de homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ y sobre \mathbb{R}^+ . Los objetos en $\Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})$

son los mismos que en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ y los morfismos son clases de homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ y sobre \mathbb{R}^+ de aplicaciones en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Para cada $n \geq 0$, podemos considerar el functor $\mathbb{R}^+ \Pi_n^c: \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \rightarrow \text{Set}$ que a todo $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ le asigna el conjunto $\mathbb{R}^+ \Pi_n^c(X) = \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(\mathbb{R}^+ \times S^n, X)$. Aquí $\mathbb{R}^+ \times S^n$ denota el diagrama $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\alpha_{S^n}} \mathbb{R}^+ \times S^n \xrightarrow{\delta_{S^n}} \mathbb{R}^+$ con $\alpha_{S^n}(r) = (r, s_0)$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$, s_0 punto base de S^n y $\delta_{S^n} = pr_1$. A cada morfismo en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, $f \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}(X, Y)$, este functor le asigna $\mathbb{R}^+ \Pi_n^c(f) = f_*: \mathbb{R}^+ \Pi_n^c(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \Pi_n^c(Y)$ que a todo $[g]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \in \mathbb{R}^+ \Pi_n^c(X)$ le hace corresponder $f_*([g]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}) = [fg]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \in \mathbb{R}^+ \Pi_n^c(Y)$.

Definición 6.1.2 Sea $X, Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, definimos *wedge de X y Z bajo \mathbb{R}^+* , $W = X \mathbb{R}^+ \vee Z$, como el morfismo $\alpha_W = in_1 \alpha = in_2 \gamma$ obtenido mediante el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{\gamma} & Z \\ \downarrow \alpha & & \downarrow in_2 \\ X & \xrightarrow{in_1} & X \mathbb{R}^+ \vee Z \end{array}$$

Si $X, Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, es decir representan sendos diagramas $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\delta_X} \mathbb{R}^+$, $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\gamma} Z \xrightarrow{\delta_Z} \mathbb{R}^+$, aplicando la propiedad universal del push-out a δ_X y δ_Z vemos que existe una única $\delta_W: X \mathbb{R}^+ \vee Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\delta_W \alpha_W = id_{\mathbb{R}^+}$. Así tenemos un diagrama $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\alpha_W} X \mathbb{R}^+ \vee Z \xrightarrow{\delta_W} \mathbb{R}^+$, que representa un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, y que por comodidad será denotado por $X \mathbb{R}^+ \vee Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Definición 6.1.3 Dados $X, Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ definimos el *producto smash de X y Z bajo \mathbb{R}^+ y sobre \mathbb{R}^+* , $S = X \mathbb{R}^+ \wedge Z$, como el objeto de $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ obtenido por el proceso siguiente. Sea $k: W = X \mathbb{R}^+ \vee Z \rightarrow P = X \mathbb{R}^+ \times Z$ con $k([x]) = (x, \gamma \delta_X([x]))$, $k([z]) = (\alpha \delta_Z([z]), z)$ para todo $x \in X$ y $z \in Z$. Tomamos el coigualador en $\mathcal{E}t$ de k y $\alpha_P \delta_W$, esto es:

$$X \mathbb{R}^+ \vee Z \xrightarrow[k \quad \alpha_P \delta_W]{k} X \mathbb{R}^+ \times Z \xrightarrow{q} X \mathbb{R}^+ \wedge Z$$

Es claro que existe $\alpha_S = qk\alpha_W: \mathbb{R}^+ \rightarrow X \mathbb{R}^+ \wedge Z$. Además, por la propiedad universal del coigualador aplicada a (\mathbb{R}^+, δ_P) , existe una única $\delta_S: X \mathbb{R}^+ \wedge Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ verificando que

$\delta_S q = \delta_P$. Así $\delta_S \alpha_S = \delta_S q k \alpha_W = \delta_S q \alpha_P \delta_W \alpha_W = \delta_S q \alpha_P = \delta_P \alpha_P = id_{\mathbb{R}^+}$. De esta forma obtenemos el diagrama $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\alpha_S} X \underset{\mathbb{R}^+}{\overset{\mathbb{R}^+}{\wedge}} Z \xrightarrow{\delta_S} \mathbb{R}^+$ que representa un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, lo que escribimos abreviadamente por $X \underset{\mathbb{R}^+}{\overset{\mathbb{R}^+}{\wedge}} Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Ahora definiremos el cono y la suspensión para objetos en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Definición 6.1.4 Sea $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, definimos el *cono de X en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$* , denotado CX , al diagrama obtenido mediante el proceso siguiente. En primer lugar consideramos el morfismo α_{CX} inducido en el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta_X} & \mathbb{R}^+ \\ \downarrow \partial_0 & & \downarrow \alpha_{CX} \\ I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} X & \xrightarrow{k} & CX \end{array}$$

Aplicando la propiedad universal del push-out a δ_{IX} y a $id_{\mathbb{R}^+}$ obtenemos una única $\delta_{CX}: CX \rightarrow \mathbb{R}^+$ verificando que $\delta_{CX} k = \delta_{IX}$ y que $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\alpha_{CX}} CX \xrightarrow{\delta_{CX}} \mathbb{R}^+$, y así este último diagrama es un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, lo que escribiremos como $CX \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Definición 6.1.5 Sea $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, definimos la *suspensión de X en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$* , ΣX , de la siguiente manera. Sea el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} X \underset{\mathbb{R}^+}{\overset{\mathbb{R}^+}{\vee}} X & \xrightarrow{\delta_X + \delta_X} & \mathbb{R}^+ \\ \downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow \alpha_{\Sigma X} \\ I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} X & \xrightarrow{\bar{k}} & \Sigma X \end{array}$$

Aplicando la propiedad universal del push-out $id_{\mathbb{R}^+}$ y a δ_{IX} vemos que existe una única $\delta_{\Sigma X}: \Sigma X \rightarrow \mathbb{R}^+$ verificando que $\delta_{\Sigma X} \bar{k} = \delta_{IX}$ y que $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\alpha_{\Sigma X}} \Sigma X \xrightarrow{\delta_{\Sigma X}} \mathbb{R}^+$, con lo que queda determinado un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, ΣX .

Es posible definir la suspensión de forma alternativa a través del push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta_X} & \mathbb{R}^+ \\ \downarrow \partial_1 & & \downarrow \alpha_{\Sigma X} \\ CX & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

y aplicando de nuevo la propiedad universal del push-out a δ_{CX} y a $id_{\mathbb{R}^+}$.

La suspensión n -ésima se obtiene aplicando la definición anterior a $\Sigma^{n-1}X$ de forma inductiva.

Observemos que además podemos definir la suspensión n -ésima empleando el producto smash en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ pues $X \underset{\mathbb{R}^+}{\wedge}^{\mathbb{R}^+} (\mathbb{R}^+ \times S^n) \cong \Sigma^n X$.

Definiremos ahora, para todo $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, el espacio de lazos de Y que denotaremos ΩY , y que será un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Sea Y^I el espacio exterior de la Definición 2.2.5 y las aplicaciones exteriores $d_i: Y^I \rightarrow Y$ para $i = 0, 1$, a las que hacíamos referencia en la Proposición 2.2.7. Se verifica el siguiente resultado:

Lema 6.1.6

Sea $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, entonces $Y^I \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

Demostración:

Definimos $\beta_{Y^I}: \mathbb{R}^+ \rightarrow Y^I$ como sigue. Para todo $r \in \mathbb{R}^+$, $\beta_{Y^I}(r) = \widetilde{\beta}(r)$ donde $\widetilde{\beta}(r): I \rightarrow Y$ es el camino constante en $\beta(r)$.

Es claro que β_{Y^I} es continua. Observemos que, si e es la aplicación exponencial del Teorema 1.3.5 que establece la biyección $\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+ \times I, X) \cong \mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, Top(I, X))$, entonces β_{Y^I} se corresponde por e con $\mathbb{R}^+ \times I \xrightarrow{pr_1} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\beta_Y} Y$, que es externa por ser composición de externas. Así concluimos que β_{Y^I} es exterior. \square

Notas 6.1.7

(a) Las aplicaciones $d_i: Y^I \rightarrow Y, i = 0, 1$, son morfismos en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ y en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

(b) El Lema 6.1.6 puede generalizarse para un $Y^K = \mathcal{E}t(K, Y)$ con K espacio topológico compacto, tomando la estructura de espacio exterior que detallamos en la Sección 1.3 para probar el Teorema 1.3.5.

(c) Si $Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, K conexo y compacto, $Y^K \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$. Para probar este hecho basta tomar $\delta_{Y^K}: Y^K \rightarrow \mathbb{R}^+$ como $\delta_{Y^K} = \delta_Y q_k, k \in K$, donde $q_k: Y^K \rightarrow Y$ generaliza q_t del Lema 2.2.6. Además δ_{Y^K} no depende del $k \in K$ pues K es conexo.

Definición 6.1.8 Sea $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. llamamos *espacio de lazos de Y bajo \mathbb{R}^+* . al morfismo $\beta_{\Omega Y}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \Omega Y$ que obtenemos por el proceso siguiente. Tomamos el pull-back en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \Omega Y & \xrightarrow{i_{\Omega Y}} & YI \\ \downarrow \delta_{\Omega Y} & & \downarrow (d_0, d_1) \\ \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{(\beta, \beta)} & Y \times Y \end{array}$$

y aplicamos la propiedad universal del pull-back a β_{YI} y a $id_{\mathbb{R}^+}$, obteniendo un único $\beta_{\Omega Y}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \Omega Y$ verificando que $i_{\Omega Y}\beta_{\Omega Y} = \beta_{YI}$ y que $\delta_{\Omega Y}\beta_{\Omega Y} = id_{\mathbb{R}^+}$. Así tenemos que $\beta_{\Omega Y}$ no sólo es un objeto en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ sino que el diagrama $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\beta_{\Omega Y}} \Omega Y \xrightarrow{\delta_{\Omega Y}} \mathbb{R}^+$ determina un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, que escribiremos abreviadamente $\Omega Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Podemos definir un functor suspensión $\Sigma: \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. de la siguiente forma. A cada $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, Σ le asigna ΣX como en la Definición 6.1.5 y olvida su estructura sobre \mathbb{R}^+ . Dada una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, Σ le hace corresponder Σf mediante el proceso siguiente. Primero recordemos que ΣX y ΣY se construyen empleando push-outs de la forma:

$$\begin{array}{ccc} X \underset{\mathbb{R}^+}{\vee} X & \xrightarrow{\delta_X + \delta_X} & \mathbb{R}^+ \\ \downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow \alpha_{\Sigma X} \\ I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} X & \xrightarrow{\bar{k}_X} & \Sigma X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y \underset{\mathbb{R}^+}{\vee} Y & \xrightarrow{\delta_Y + \delta_Y} & \mathbb{R}^+ \\ \downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow \beta_{\Sigma Y} \\ I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} Y & \xrightarrow{\bar{k}_Y} & \Sigma Y \end{array}$$

Aplicando la propiedad universal del push-out que sirve para definir $I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} X$ a β_{IY} y a $in_1(f \times id_I)$ existe una única $If: I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} X \longrightarrow I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} Y$ con $If\alpha_{IX} = \beta_{IY}$.

Tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X \underset{\mathbb{R}^+}{\vee} X & \xrightarrow{f+f} & Y \underset{\mathbb{R}^+}{\vee} Y \\ \downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow \partial_0 + \partial_1 \\ I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} X & \xrightarrow{If} & I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} Y \end{array}$$

Se verifica que $\beta_{\Sigma Y}(\delta_X + \delta_X) = \beta_{\Sigma Y}(\delta_Y + \delta_Y)(f + f) = \bar{k}_Y(\partial_0 + \partial_1)(f + f) = \bar{k}_Y If(\partial_0 + \partial_1)$. Así podemos aplicar de nuevo la propiedad universal del push-out de construcción de ΣX a $\bar{k}_Y If$ y a $\beta_{\Sigma Y}$, luego existe una única $\Sigma f: \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$ verificando que $\Sigma f\bar{k}_X = \bar{k}_Y If$ y que $\Sigma f\alpha_{\Sigma X} = \beta_{\Sigma Y}$. Por tanto Σf está en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

Además podemos definir un functor lazo $\Omega: \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ que a cada $Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ le asigna ΩY , espacio de lazos de Y bajo \mathbb{R}^+ como en la Definición 6.1.8, que es un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$. A cada morfismo $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, Ω le hace corresponder $\Omega f: \Omega X \longrightarrow \Omega Y$ que obtenemos de forma única mediante la construcción siguiente.

Recordemos que ΩY se obtiene mediante el pull-back:

$$\begin{array}{ccc} \Omega Y & \xrightarrow{i_{\Omega Y}} & Y^I \\ \downarrow \delta_{\Omega Y} & & \downarrow (d_0, d_1) \\ \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{(\beta, \beta)} & Y \times Y \end{array}$$

Tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X^I & \xrightarrow{f^I} & Y^I \\ \downarrow (d_0, d_1) & & \downarrow (d_0, d_1) \\ X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y \end{array}$$

Como $(d_0, d_1)f^I i_{\Omega X} = (f \times f)(d_0, d_1)i_{\Omega X} = (f \times f)(\alpha, \alpha)\delta_{\Omega X} = (\beta, \beta)\delta_{\Omega X}$ podemos aplicar la propiedad universal del pull-back a $f^I i_{\Omega X}$ y a $\delta_{\Omega X}$. De esta manera existe una única $\Omega f: \Omega X \longrightarrow \Omega Y$ verificando que $\delta_{\Omega Y}\Omega f = \delta_{\Omega X}$. También $(d_0, d_1)i_{\Omega Y}\Omega f\alpha_{\Omega X} = (\beta, \beta)\delta_{\Omega Y}\Omega f\alpha_{\Omega X} = (\beta, \beta)\delta_{\Omega X}\alpha_{\Omega X} = (\beta, \beta)$, así podemos aplicar la propiedad universal del pull-back a $id_{\mathbb{R}^+}$ y a $i_{\Omega Y}\Omega f\alpha_{\Omega X}$ y existe una única $\beta_{\Omega Y} = \Omega f\alpha_{\Omega X}$. De esta forma podemos afirmar que Ωf es un morfismo en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Lema 6.1.9

Dado $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, $\Omega X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ tiene estructura de objeto grupo en la categoría $\Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})$.

Demostración:

Podemos definir una multiplicación $\mu: \Omega Y \times_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$ para cualquier pareja $(w_1, w_2) \in \Omega X \times_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \Omega Y$ y $t \in I$ como:

$$\mu(w_1, w_2) = \begin{cases} w_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ w_2(1-2t) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Razonando de forma similar al Lema 4.1.10 se puede probar que μ es exterior y es homotópicamente asociativa.

Su elemento neutro es $\mathbb{R}^+ \xrightarrow{\beta_{\Omega Y}} \Omega Y \xrightarrow{\delta_{\Omega Y}} \mathbb{R}^+$. Aquí $\beta_{\Omega Y}$ está definido para todo $r \in \mathbb{R}^+$ como $\beta_{\Omega Y}(r) = (\widetilde{\beta(r)}): I \rightarrow Y$, lazo constante en $\beta(r)$ y $\delta_{\Omega Y}$ como $\delta_{\Omega Y}(w) = r$, donde $d_0(w) = \beta(r)$ para todo $w \in \Omega Y$. La inversa de homotopía $\psi: \Omega Y \rightarrow \Omega Y$ se define como en el Lema 4.1.10 y por las mismas razones se tiene que es exterior y también es bajo y sobre \mathbb{R}^+ . \square

Lema 6.1.10

Dado $Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, se verifica que $\Omega(Y^I)$ es isomorfo a $(\Omega Y)^I$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Demostración:

Como en el Lema 4.1.11 distinguimos entre los intervalos unidad empleados designándolos como I, I' y entre Ω y Ω' según utilicemos uno u otro en la construcción del espacio de lazos. Sea $\beta: \mathbb{R}^+ \rightarrow Y$ el rayo base en $Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Definimos $\theta: \Omega'(Y^I) \rightarrow (\Omega Y)^{I'}$, para un $\gamma \in \Omega'(Y^I)$ con $\gamma: I' \rightarrow Y^I$ verificando que $\gamma(0) = \gamma(1) = \widetilde{\beta(r)}$ camino constante en $\beta(r)$ para un cierto $r \in \mathbb{R}^+$, como $\theta(\gamma): I' \rightarrow \Omega Y$ tal que para todo $s \in I'$ y $t \in I$, $\theta(\gamma)(s)(t) = \gamma(t)(s)$.

También definimos $\bar{\theta}: (\Omega Y)^{I'} \rightarrow \Omega'(Y^I)$, para todo $\sigma: I' \rightarrow \Omega Y$ con $\sigma(s)(0) = \sigma(s)(1) = \widetilde{\beta(r)}$ para un $r \in \mathbb{R}^+$ y para todo $s \in I'$, como $\bar{\theta}(\sigma)(t)(s) = \sigma(s)(t)$ para todo $s \in I'$ y $t \in I$.

Es sencillo probar que tanto θ como $\bar{\theta}$ están bien definidas y son exteriores sin más que reproducir la demostración de el Lema 4.1.11. Además se verifica que $\theta\bar{\theta} = id_{(\Omega Y)^{I'}}$ y $\bar{\theta}\theta = id_{\Omega'(Y^I)}$. \square

Teorema 6.1.11

Los funtores suspensión $\Sigma: \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \rightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ y lazo $\Omega: \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \rightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ definidos en esta sección verifican que Σ es adjunto a izquierda de Ω .

Demostración:

Es necesario probar que existe la siguiente biyección natural

$$\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}(\Sigma X, Y) \cong \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}(X, \Omega Y)$$

para todo $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ e $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

Por el teorema 1.3.5 para $K = I$ la aplicación exponencial e proporciona la biyección natural

$$\mathcal{E}t(X \times I, Y) \stackrel{e}{\cong} \mathcal{E}t(X, Y^I)$$

Si tomamos el cilindro de $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}, \alpha_{IX}: \mathbb{R}^+ \rightarrow I^{\mathbb{R}^+} X$ que está definido para todo $r \in \mathbb{R}^+$ como $\alpha_{IX}(r) = [\alpha(r), t_0]$ donde t_0 punto base de I y $[\alpha(r), t_0] = \{(\alpha(r), t) \in X \times I; t \in I, r \in \mathbb{R}^+\}$, se verifica que e induce la biyección natural

$$\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}((I^{\mathbb{R}^+} X, \alpha_{IX}); (Y, \beta)) \stackrel{e}{\cong} \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}((X, \alpha); (Y^I, \beta_{Y^I}))$$

Esto es sencillo de probar porque dada $f \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}((I^{\mathbb{R}^+} X, \alpha_{IX}); (Y, \beta))$, $e(f)(\alpha(r))(t) = f([\alpha(r), t]) = \beta(r)$ para todo $t \in I, r \in \mathbb{R}^+$. Por tanto $e(f)(\alpha(r)) = \beta(r)$ el lazo constante en $\beta(r)$, pero $\widetilde{\beta(r)} = \beta_{Y^I}(r)$ y así $e(f) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}((X, \alpha); (Y^I, \beta_{Y^I}))$. Además dada $g \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}((X, \alpha); (Y^I, \beta_{Y^I}))$ se verifica que $e^{-1}(g)([\alpha(r), t]) = g(\alpha(r))(t) = \beta(r)$ para todo $t \in I, r \in \mathbb{R}^+$, luego $e^{-1}(g) \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}((I^{\mathbb{R}^+} X, \alpha_{IX}); (Y, \beta))$.

Recordemos que ΣX se define a través del push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} X \underset{\mathbb{R}^+}{\vee} X & \xrightarrow{\partial_0 + \partial_1} & \mathbb{R}^+ \\ \downarrow \delta_X + \delta_X & & \downarrow \alpha_{\Sigma X} \\ I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} X & \xrightarrow{\bar{k}} & \Sigma X \end{array} \quad (1)$$

y tomando el diagrama $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\alpha_{\Sigma X}} \Sigma X \xrightarrow{\delta_X} \mathbb{R}^+$ como en la Definición 6.1.6.

El lazo de $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}, \Omega Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ se definía mediante el pull-back en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} \Omega Y & \xrightarrow{i_{\Omega Y}} & Y^I \\ \downarrow \delta_{\Omega Y} & & \downarrow (d_0, d_1) \\ \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{(\beta, \beta)} & Y \times Y \end{array} \quad (2)$$

y tomando el diagrama $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\beta_{\Omega Y}} \Omega Y \xrightarrow{\delta_{\Omega Y}} \mathbb{R}^+$ inducido por la propiedad universal del pull-back como en la Definición 6.1.9.

Definimos $\bar{e}: \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}(\Sigma X, Y) \rightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}(X, \Omega Y)$ que a toda $f: \Sigma X \rightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ le asigna $\bar{e}(f) = i_{\Omega Y}^{-1} e(f \bar{k}_X)$.

Para probar que \bar{e} está bien definida y que es una biyección sólo es preciso reproducir la demostración del Teorema 4.1.12. pues las construcciones de la suspensión de X y del lazo de Y son análogas así como la definición de la inducida por la exponencial \bar{e} .

La naturalidad de \bar{e} se demuestra también mediante argumentos idénticos a los del Teorema 4.1.12. \square

Corolario 6.1.12

Los funtores suspensión, $\Sigma: \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, y lazo, $\Omega: \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, citados en el teorema anterior verifican que Σ es adjunto a izquierda de Ω en las respectivas categorías de homotopía.

Demostración:

Es preciso probar la biyección natural siguiente

$$[\Sigma X, Y]^{\mathbb{R}^+} \cong [X, \Omega Y]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$$

para todo $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, $Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. El proceso es similar al de la demostración del Corolario 4.1.13 pues el Teorema 4.1.12 y el Lema 4.1.11 que son utilizados para dicha demostración son similares al Lema 6.1.10 y al Teorema 6.1.11. que acabamos de probar en esta sección. y el resto de razonamientos siguen siendo válidos trabajando en las categorías $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ y $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, en vez de en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. \square

6.2 Sucesión exacta larga de homotopía exterior (bajo \mathbb{R}^+) de una aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

Sea $\tilde{Y}^I \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ construido por el proceso siguiente.

Sea el pull-back en $\mathcal{E}t$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y}^I & \xrightarrow{pr_2} & Y^I \\ \downarrow \delta_{\tilde{Y}^I} & & \downarrow d_0 \\ \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array} \quad (1)$$

Aplicando la propiedad universal de este pull-back a β_{Y^I} y a $id_{\mathbb{R}^+}$ existe una única $\beta_{\tilde{Y}^I}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \tilde{Y}^I$, lo que escribiremos $\tilde{Y}^I \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. Pero como $\beta_{\tilde{Y}^I}$ verifica que $\delta_{\tilde{Y}^I} \beta_{\tilde{Y}^I} = id_{\mathbb{R}^+}$ se tiene que queda determinado un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, esto es, $\tilde{Y}^I \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Observemos que el codominio de $\beta_{\tilde{Y}^I}$ es el conjunto de pares $(r, w) \in \mathbb{R}^+ \times Y^I$ tales que $w(0) = \beta(r)$. Así se puede identificar \tilde{Y}^I con $pr_2(\tilde{Y}^I)$, es decir, el subconjunto de Y^I constituido por los caminos continuos en Y que comienzan en un punto del rayo base. De esta manera, podríamos considerarlo dotado de la topología y externología heredadas como subespacio exterior de las existentes en Y^I .

Definimos una aplicación $p: \tilde{Y}^I \rightarrow Y$ tal que para todo $(r, w) \in \tilde{Y}^I$, $p(w) = w(1)$ que es exterior pues p es la composición de pr_2 con d_1 , ambas aplicaciones exteriores.

Además p es bajo \mathbb{R}^+ ya que $p\beta_{\tilde{Y}^I}(r) = p(r, \beta_{Y^I}(r)) = d_1pr_2(r, \widetilde{\beta}(r)) = \beta(r)$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$.

Proposición 6.2.1

Sea $f: X \rightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, con $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$. Se verifica que f es nulhomotopa exterior bajo \mathbb{R}^+ si y sólo si f tiene una elevación en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, $g: X \rightarrow \tilde{Y}^I$, verificando que $pg = f$.

Demostración:

La construcción efectuada para obtener \tilde{Y}^I en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ es idéntica a la realizada en la Sección 4.2, al igual que la definición de p . Por ello para probar este resultado sólo es necesario repetir la demostración de la Proposición 4.2.1, pero trabajando en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ y $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ en vez de $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. \square

Definición 6.2.2 Llamamos *fibra homotópica cilíndrica de una aplicación $f: X \rightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$* , denotada $P_f^c \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, al morfismo $\alpha_{P_f^c}: \mathbb{R}^+ \rightarrow P_f^c$ que obtenemos tomando el pull-back en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} P_f^c & \xrightarrow{pr_2} & \tilde{Y}^I \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

y aplicando la propiedad universal a las aplicaciones α y $\beta_{\tilde{Y}^I}$.

Observamos que $P_f^c \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ tomando $\delta_{P_f^c} = \delta_{\tilde{Y}^I}pr_2$.

De forma más detallada el codominio de $\alpha_{P_f^c}$ es el conjunto de ternas $(x, r, w) \in X \times \mathbb{R}^+ \times Y^I$, verificando que $p(r, w) = w(1) = f(x)$ y $d_0w = w(0) = \beta(r)$.

La aplicación $\pi: P_f^c \longrightarrow X$ asigna a toda $(x, r, w) \in P_f^c$, $\pi(x, r, w) = x$. es decir π es la primera proyección que es exterior y bajo \mathbb{R}^+ .

Proposición 6.2.3

Dadas $f: X \longrightarrow Y, g: Z \longrightarrow X$. aplicaciones en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ con $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Entonces fg es nulhomótopa exterior bajo \mathbb{R}^+ si y sólo si existe una extensión $h: Z \longrightarrow P_f^c$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ verificando que $\pi h = g$.

Demostración:

Es similar a la de de la Proposición 4.2.3 pero trabajando en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ y $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ con P_f^c , en vez de en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{E}t_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ con P_f^c , por ser las construcciones de las fibras análogas. \square

Definición 6.2.4 Sea $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ con $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, definimos la *fibra homotópica derivada cilíndrica de f* , denotada $(P_f^c)' \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. como la aplicación exterior $\alpha_{(P_f^c)': \mathbb{R}^+ \longrightarrow (P_f^c)'$ obtenida al aplicar la propiedad universal del pull-back

$$\begin{array}{ccc} (P_f^c)' & \xrightarrow{pr_2} & \tilde{Y}^I \\ \downarrow \rho & & \downarrow (pr_1, p) \\ X & \xrightarrow{(\delta_X, f)} & \mathbb{R}^+ \times Y \end{array}$$

a las aplicaciones α y $\beta_{\tilde{Y}^I}$.

El codominio de $\alpha_{(P_f^c)'}$ es, en concreto, el conjunto de ternas $(x, r, w) \in X \times \mathbb{R}^+ \times Y^I$ tales que $w(0) = \beta(r), w(1) = f(x)$ y $\delta_X(x) = r$.

Observemos que $\rho = pr_1$ y que si tomamos $\delta_{(P_f^c)'} = \delta_{\tilde{Y}^I} pr_2$ queda determinado un diagrama $id_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\alpha_{(P_f^c)'}} (P_f^c)' \xrightarrow{\delta_{(P_f^c)'}} \mathbb{R}^+$ y por tanto tenemos que $(P_f^c)' \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Proposición 6.2.5

Sean $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}, g: Z \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$. Entonces fg es nulhomótopa exterior bajo \mathbb{R}^+ si y sólo si existe una extensión $h: Z \longrightarrow (P_f^c)'$ en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ tal que $\rho h = g$.

Demostración:

Puesto que la construcción de $(P_f^c)'$ es similar a la de $(P_f^c)'$, basta repetir los argumentos de la Proposición 4.2.5 pero en las categorías $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ y $\mathcal{E}t_{\mathbb{D}_+}^{\mathbb{R}^+}$. \square

Definición 6.2.6 Una sucesión en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, con $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{D}_+}^{\mathbb{R}^+}$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} T$$

se dice *exacta* si la sucesión de homotopía inducida para todo $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{D}_+}^{\mathbb{R}^+}$

$$[Z, X]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \xrightarrow{f_*} [Z, Y]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \xrightarrow{g_*} [Z, T]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$$

verifica que $Im f_* = Kerg_*$.

Definición 6.2.7 Una sucesión en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, con $X, Y \in \mathcal{E}t_{\mathbb{D}_+}^{\mathbb{R}^+}$ y f morfismo en $\mathcal{E}t_{\mathbb{D}_+}^{\mathbb{R}^+}$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} T$$

se dice *exacta* si la sucesión de homotopía inducida para todo $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{D}_+}^{\mathbb{R}^+}$

$$[Z, X]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \xrightarrow{f_*} [Z, Y]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \xrightarrow{g_*} [Z, T]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$$

verifica que $Im f_* = Kerg_*$.

Definición 6.2.8 Una sucesión en $\mathcal{E}t_{\mathbb{D}_+}^{\mathbb{R}^+}$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} T$$

se dice *exacta* si la sucesión de homotopía inducida para todo $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{D}_+}^{\mathbb{R}^+}$

$$[Z, X]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \xrightarrow{f_*} [Z, Y]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \xrightarrow{g_*} [Z, T]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$$

verifica que $Im f_* = Kerg_*$.

Proposición 6.2.9

Dada $f: X \rightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, la sucesión

$$P_f^c \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

es exacta en el sentido de la Definición 6.2.6.

Demostración:

Consiste en reproducir los argumentos de la Proposición 4.2.9 en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ y para P_f^c en vez de en $\mathcal{E}t^{\mathbb{N}}$ y para P_f^c , apoyándose en la Proposición 6.2.3. \square

Proposición 6.2.10

Dada $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, con $X \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, la secuencia

$$(P_f^c)' \xrightarrow{\rho} X \xrightarrow{f} Y$$

es exacta en el sentido de la Definición 6.2.7.

Demostración:

Dado que $(P_f^c) \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, basta repetir la demostración del Lema 4.1.10 con las modificaciones oportunas, apoyándonos en la Proposición 6.2.5. \square

Lema 6.2.11

Para cualquier $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ la secuencia

$$(P_f^c)' \xrightarrow{\sigma} (P_\pi^c)' \xrightarrow{\rho} P_f^c \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

es exacta en el sentido de las Definiciones 6.2.6, 6.2.7, 6.2.8, según corresponda y donde π, ρ, σ son las proyecciones naturales.

Demostración:

Aplicando las Proposiciones 6.2.9 y 6.2.10 a π y a ρ respectivamente se prueba la exactitud hasta $(P_f^c)'$.

El codominio de la fibra derivada homotópica de π es $(P_\pi^c)' = \{((x, r, w), r', u) \in P_f^c \times \mathbb{R}^+ \times X^I; w(0) = \beta(r), w(1) = f(x), u(0) = \alpha(r'), u(1) = \pi(x, r, w) = x \text{ y } \delta_{P_f^c}(x, r, w) = r = r'\}$.

Definimos $\rho: (P_\pi^c)' \longrightarrow P_f^c$, para todo $((x, r, w), r', u) \in (P_\pi^c)'$, como $\rho((x, r, w), r', u) = (x, r, w)$. El codominio de la fibra derivada homotópica cilíndrica de ρ es de la

forma $(P_\rho^c)' = \left\{ \left(((x, r, w), r', u), r'', \gamma \right) \in (P_\pi^c)' \times \mathbb{R}^+ \times (P_f^c)^I; \gamma(0) = \alpha_{P_f^c}(r'') = (\alpha(r''), r'', \widetilde{\beta(r'')}) \right\}$, $\gamma(1) = \rho \left(((x, r, w), r', u) \right) = (x, r, w)$, $\delta_{P_\rho^c}((x, r, w), r'', u) = r' = r''$.

Además $\sigma: (P_\rho^c)' \rightarrow (P_\pi^c)'$ está definida para todo $\left(((x, r, w), r', u), r'', \gamma \right) \in (P_\rho^c)'$ como $\sigma \left(((x, r, w), r', u), r'', \gamma \right) = ((x, r, w), r', u)$.

Se tiene que σ y ρ son aplicaciones en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$. Aplicando de nuevo los razonamientos de la Proposición 6.2.10 concluimos que $(P_\rho^c)' \xrightarrow{\sigma} (P_\pi^c)' \xrightarrow{\rho} P_f^c$ es exacta en el sentido de la Definición 6.2.8. \square

A continuación identificaremos $(P_\pi^c)'$ y $(P_\rho^c)'$ con ΩY y con ΩX , respectivamente.

Lema 6.2.12

Sea $f: X \rightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. La aplicación $q: \Omega Y \rightarrow (P_\pi^c)'$, definida como $q(w) = \left((\alpha(r), r, w), r, \widetilde{\alpha(r)} \right)$ para todo $w \in \Omega Y$ verificando que $\beta(r) = w(0)$ y $w(1) = \beta(r) = f\alpha(r)$ y con $r \in \mathbb{R}^+$, es una equivalencia de homotopía exterior en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Demostración:

Es similar a la del Lema 4.2.12 realizando las modificaciones oportunas derivadas de trabajar en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ y $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, pues esencialmente las aplicaciones se definen de forma idéntica. \square

Para la otra identificación definimos $q': \Omega X \rightarrow (P_\rho^c)'$ para todo $u \in \Omega X$ por $q'(u) = \left(((\alpha(r), r, \widetilde{\beta(r)}), r, u), r, (\alpha(r), r, \widetilde{\beta(r)}) \right)$, donde $(\alpha(r), r, \widetilde{\beta(r)})$ denota el camino constante en $(\alpha(r), r, \widetilde{\beta(r)}) \in (P_f^c)$ y $u \in \Omega X$ verifica que $u(0) = u(1) = \alpha(r)$ y $f\alpha(r) = \beta(r)$. Se prueba que q' es exterior y equivalencia de homotopía en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, procediendo de la forma similar al lema anterior.

El siguiente diagrama conmuta, salvo homotopía, en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 (P_f^c)' & \xrightarrow{\sigma} & (P_\pi^c)' & \xrightarrow{\rho} & P_f^c & \xrightarrow{\pi} & X \xrightarrow{f} Y \\
 \uparrow q' & & \uparrow q\vartheta & \nearrow \rho'\vartheta & & & \\
 \Omega X & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega Y & & & &
 \end{array}$$

donde $\rho' = \rho q$ es la aplicación definida para todo $w \in \Omega Y$ verificando que $w(1) = f(x)$, $w(0) = \beta(r)$, como $\rho'(w) = (\alpha(r), r, w)$ y $\vartheta: \Omega X \rightarrow \Omega Y$ es la inversa de homotopía del objeto grupo ΩX .

Así obtenemos para toda $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ la sucesión exacta

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\rho'} P_f^c \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

Teorema 6.2.13

Dada $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ tenemos la sucesión

$$\dots \longrightarrow \Omega^n(P_f^c) \xrightarrow{\Omega^n \pi} \Omega^n X \xrightarrow{\Omega^n f} \Omega^n Y \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\rho'} P_f^c \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

de modo que, para todo $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^+$, la sucesión

$$\dots \longrightarrow \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^+)(Z, \Omega^n P_f^c) \xrightarrow{(\Omega^n \pi)_*} \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^+)(Z, \Omega^n X) \xrightarrow{(\Omega^n f)_*} \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^+)(Z, \Omega^n Y) \longrightarrow$$

$$\dots \longrightarrow \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^+)(Z, \Omega X) \xrightarrow{(\Omega f)_*} \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^+)(Z, \Omega Y) \xrightarrow{(\rho')_*} \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^+)(Z, P_f^c) \xrightarrow{\pi_*}$$

$$\longrightarrow \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(Z, X) \xrightarrow{f_*} \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(Z, Y)$$

es exacta.

Demostración:

Sólo es preciso tomar la sucesión

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\rho'} P_f^c \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

y aplicar su exactitud. \square

Corolario 6.2.14

Dada $f: X \longrightarrow Y$ aplicación en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, obtenemos la sucesión

$$\longrightarrow \Pi_n^c(X) \xrightarrow{\Pi_n^c(f)} \Pi_n^c(Y) \xrightarrow{\partial=\rho'_*} \Pi_{n-1}^c(P_f^c) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \Pi_1^c(X) \xrightarrow{\Pi_1^c(f)} \Pi_1^c(Y) \xrightarrow{\partial=\rho'_*} \mathbb{R}^+ \Pi_0^c(P_f^c) \xrightarrow{\pi_*} \Pi_0^c(X) \xrightarrow{f_*} \Pi_0^c(Y)$$

que es exacta.

A esta sucesión la denominaremos *sucesión exacta larga de homotopía exterior bajo \mathbb{R}^+ de la aplicación $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$* .

Demostración:

En primer lugar recordemos que, por el Teorema 6.1.12, tenemos que el functor suspensión $\Sigma: \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t$ es adjunto a izquierda del functor $\Omega: \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ en las categorías de homotopía. También se verifica una adjunción análoga entre los funtores $\Sigma: \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ y $\Omega: \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Tomemos ahora $Z = \mathcal{R}^0 = \mathbb{R}^+ \times S^0$ y tengamos en cuenta que $\Sigma^n \mathcal{R}^0 = \mathcal{R}^n$.

Ahora a la sucesión

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \Omega^n(P_f^c) \xrightarrow{\Omega^n \pi} \Omega^n X \xrightarrow{\Omega^n f} \Omega^n Y \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\rho'} P_f^c \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y \end{aligned}$$

le aplicamos el functor $\Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(\mathbb{R}^+ \times S^0, -) = [\mathcal{R}^0, -]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, y el functor $\Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(\mathbb{R}^+ \times S^0, -) = [\mathcal{R}^0, -]^{\mathbb{R}^+}$ en los dos primeros términos. Así obtenemos la sucesión:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^0, \Omega^n P_f^c) \xrightarrow{(\Omega^n \pi)_*} \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^0, \Omega^n X) \xrightarrow{(\Omega^n f)_*} \\ &\Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^0, \Omega^n Y) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^0, \Omega X) \xrightarrow{(\Omega f)_*} \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^0, \Omega Y) \xrightarrow{\rho'_*} \\ &\longrightarrow \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^0, P_f^c) \xrightarrow{\pi_*} \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^0, X) \xrightarrow{f_*} (\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^0, Y) \end{aligned}$$

Esta sucesión es exacta por el Teorema 6.2.13. Si aplicamos las adjunciones anteriores, junto con que $\mathbb{R}^+ \times S^n \cong \Sigma^n(\mathbb{R}^+ \times S^0)$, tenemos la sucesión

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^n, X) \xrightarrow{\Pi_n(f)} \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^n, Y) \xrightarrow{\partial = \rho'_*} \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^{n-1}, X) \longrightarrow \\ \dots &\longrightarrow \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^1, X) \xrightarrow{\Pi_1^c(f)} \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^1, Y) \xrightarrow{\partial = \rho'_*} \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^0, P_f^c) \longrightarrow \\ &\xrightarrow{\pi_*} \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^0, X) \xrightarrow{f_*} \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(\mathcal{R}^0, Y) \end{aligned}$$

que es exacta y es la sucesión de los grupos de homotopía cilíndrica buscada. \square

Observaciones 6.2.15

(a) Sea $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$. El Teorema 3.3.9, para el caso $\mathcal{C} = \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, puede obtenerse como corolario del Teorema 6.2.13. Dado $Z \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, podemos sustituirlo por su modelo c-cofibrante y suponer que $Z \in (\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})_c$ (y en $(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})_c$). Puesto que todo objeto es fibrante en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ (y en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$) podemos aplicar [Q; I.1. Corolario 1] y se tiene que $Ho(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(Z, X) \cong \Pi(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(Z, X)$ y similarmente $Ho(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(Z, X) \cong \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(Z, X)$. De esta forma la sucesión

$$\longrightarrow Ho(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(Z, \Omega^n X) \xrightarrow{\Omega^n f_*} Ho(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(Z, \Omega^n Y) \xrightarrow{\Omega^n \partial_*} Ho(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(Z, \Omega^{n-1} P_f^c) \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow Ho(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(Z, \Omega X) \xrightarrow{\Omega f_*} Ho(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(Z, \Omega Y) \xrightarrow{\partial_*} \\ &\longrightarrow Ho(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(Z, P_f^c) \xrightarrow{\pi_*} Ho(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(Z, X) \xrightarrow{f_*} Ho(\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+})(Z, Y) \end{aligned}$$

es isomorfa a la obtenida en el Teorema 6.2.13 y por tanto exacta.

(b) En general, dada $f: X \longrightarrow Y$, en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ la sucesión obtenida en el Teorema 3.3.9 es distinta a la conseguida mediante el Teorema 6.2.13.

6.3 Sucesión exacta larga de homotopía en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ de un par $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

Sea $\mathcal{P}\mathcal{E}t$ la categoría de los pares de espacios exteriores descrita en la Sección 4.3. La categoría de los pares de espacios exteriores bajo \mathbb{R}^+ , $\mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, tiene por objetos los triángulos conmutativos en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^+ & \\ \alpha_A \swarrow & & \searrow \alpha \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

y por morfismos los diagramas conmutativos en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{R}^+ & & \\ & & \alpha_A \swarrow & & \searrow \beta_B \\ & & A & \xrightarrow{f|_A} & B \\ \alpha_A \swarrow & & \downarrow i & & \downarrow j \\ \mathbb{R}^+ & & X & \xrightarrow{f} & Y \\ \alpha \swarrow & & & & \searrow \beta \\ & & \mathbb{R}^+ & & \end{array}$$

Esto es, los objetos son pares de espacios exteriores que comparten el rayo base, que denotaremos (X, A, α) , y los morfismos son aplicaciones exteriores entre pares de espacios exteriores que preservan sucesiones base, lo que escribiremos como $f: (X, A, \alpha) \longrightarrow$

(Y, B, β) . Usualmente la sucesión base se sobreentiende y utilizaremos la notación aún más abreviada $(X, A) \in \mathcal{PEt}^{\mathbb{R}^+}$ y $f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ en $\mathcal{PEt}^{\mathbb{R}^+}$, respectivamente.

Observemos que dado $(X, A) \in \mathcal{PEt}^{\mathbb{R}^+}$, por razonamientos similares a los empleados en la Sección 4.3 con la fibra exterior, si tomamos la fibra cilíndrica de $i: A \longrightarrow X$, $P_i^c \in \mathcal{Et}^{\mathbb{R}^+}$, puede interpretarse como el conjunto de caminos en X que comienzan en un punto del rayo base y que finalizan en A .

Definición 6.3.1 Llamamos *n-ésimo conjunto de homotopía cilíndrica del par* $(X, A) \in \mathcal{PEt}^{\mathbb{R}^+}$ a:

- a) El conjunto $\Pi_n^c(X, A)$ definido como $\Pi_{n-1}^c(P_i^c)$, si $n > 1$.
- b) El conjunto $\Pi_n^c(X, A)$ definido como $\mathbb{R}_+ \Pi_{n-1}^c(P_i^c)$, si $n = 1$.

Notas 6.3.2

(a) Dado que $\Pi_n^c(X, A) = \Pi_{n-1}^c(P_i^c)$ podemos aplicar que el funtor suspensión Σ es adjunto a izquierda del funtor lazo Ω por el Corolario 6.1.13 y escribir

$$\Pi_n^c(X, A) = \Pi_{n-1}^c(P_i^c) \cong \cdots \cong \mathbb{R}_+ \Pi_0^c(\Omega^{n-1} P_i^c)$$

para todo $n > 1$.

(b) Observando la definición y teniendo en cuenta como fueron definidos los grupos de homotopía cilíndrica en \mathcal{Et} podemos reinterpretarla y así

$$\Pi_n^c(X, A) = [\mathcal{R}^{n-1}; P_i^c]^{\mathbb{R}^+} \cong [(\mathcal{T}^n, \mathcal{R}^{n-1}); (X, A)]^{\mathbb{R}^+}$$

para todo $n > 1$.

(c) Puesto que para todo $X \in \mathcal{Et}^{\mathbb{R}^+}$, $\Pi_n^c(X)$ es grupo para $n \geq 1$ y grupo abeliano para $n \geq 2$, deducimos que $\Pi_n^c(X, A)$ es grupo para $n \geq 2$ y grupo abeliano para $n \geq 3$.

Obtenemos de esta manera dos funtores. Uno de la categoría de los pares de espacios exteriores bajo \mathbb{R}^+ , $\mathcal{PEt}^{\mathbb{R}^+}$, en la categoría de los grupos, Grp , y otro de $\mathcal{PEt}^{\mathbb{R}^+}$ en la categoría de los grupos abelianos, Ab :

$$\Pi_n^c: \mathcal{PEt}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow Grp \quad n \geq 2$$

$$\Pi_n^c: \mathcal{PEt}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow Ab \quad n \geq 3$$

Si definimos $\partial: \Pi_n^c(X, A) \longrightarrow \Pi_{n-1}^c(A)$ como $\Pi_{n-1}^c(\pi): \Pi_{n-1}^c(P_i^c) \longrightarrow \Pi_{n-1}^c(A)$, entonces ∂ es una transformación natural entre el funtor $\Pi_n^c: \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \text{Set}$ y el funtor $\Pi_{n-1}^c R: \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \text{Set}$, donde R es la restricción $R: \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ que a todo $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ le asigna $R(X, A) = A$.

Definimos $j_*: \Pi_n^c(X) \longrightarrow \Pi_n^{\mathcal{E}}(X, A)$ como $\Pi_{n-1}^c(\rho'): \Pi_{n-1}^c(\Omega X) \longrightarrow \Pi_{n-1}^c(P_i^c)$, donde ρ' es la aplicación $\rho': \Omega X \longrightarrow P_i^c$ que definimos en la sección anterior.

Teorema 6.3.3

Dado $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, la sucesión

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \Pi_{n+1}^c(X, A) &\xrightarrow{\partial} \Pi_n^c(A) \xrightarrow{i_*} \Pi_n^c(X) \xrightarrow{j_*} \Pi_n^c(X, A) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \Pi_1^c(X, A) &\xrightarrow{\partial} \Pi_0^c(A) \xrightarrow{i_*} \Pi_0^c(X) \end{aligned}$$

es exacta.

A esta sucesión del la denominamos *sucesión exacta larga de homotopía cilíndrica del par* $(X, A) \in \mathcal{P}\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

Demostración:

Por el Corolario 6.2.1 aplicado a $i: A \longrightarrow X$, la secuencia siguiente

$$\begin{aligned} \longrightarrow \Pi_n^c(A) &\xrightarrow{\Pi_n^c(i)} \Pi_n^c(X) \xrightarrow{\partial=\rho'_*} \Pi_{n-1}^c(P_i^c) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \Pi_1^c(A) &\xrightarrow{\Pi_1^c(i)} \Pi_1^c(X) \xrightarrow{\partial=\rho'_*} \Pi_0^c(P_i^c) \xrightarrow{\pi_*} \Pi_0^c(A) \xrightarrow{i_*} \Pi_0^c(X) \end{aligned}$$

es exacta. Teniendo en cuenta la Definición 6.3.1 obtenemos la sucesión del enunciado. \square

Nota 6.3.4

Dado que $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ es una categoría de modelos cerrada no basada podemos aplicar los resultados probados en el Capítulo 3.

Así existen nociones de cilindro, objeto de caminos, funtores lazo y suspensión abstractos adjuntos etc, que llamaremos “de Quillen”. Los que acabamos de definir en este capítulo son diferentes en general, aunque puedan coincidir en casos particulares.

Los denominaremos cilíndricos por estar asociados a la estructura cilíndrica de categoría de modelos cerrada de $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

6.4 Aplicaciones a los grupos de homotopía tipo Steenrod.

En el Capítulo 1 definimos $b: Pro \longrightarrow \mathcal{E}t$, funtor pleno y fiel que a cada $(X, T_X) \in Pro$ le asigna $b(X, T_X) = (X; \mathcal{E}_{cc}, T_X)$ y a cada aplicación propia f , $bf = f$, que es exterior con las externologías de los complementos de los compacto-cerrados por la Proposición 1.1.12.

De forma natural se induce un funtor $b^{\mathbb{R}^+}: Pro^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ que también es pleno y fiel.

En este capítulo hemos definido un funtor suspensión $\Sigma: \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

Proposición 6.4.1

Si $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ entonces se verifica que $\Sigma(X, \mathcal{E}_{cc}, T_X) = (\Sigma X, \mathcal{E}_{cc}^{\Sigma X}, T_{\Sigma X})$ donde por $T_{\Sigma X}$ denotamos la topología inducida por T_X en ΣX , y por $\mathcal{E}_{cc}^{\Sigma X}$ la externología de los complementos de los compacto-cerrados en $(\Sigma X, T_{\Sigma X})$.

Demostración:

Sea $bX \in \mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, su cilindro en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ se construye mediante el push-out en $\mathcal{E}t$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times I & \xrightarrow{pr_1} & \mathbb{R}^+ \\ \downarrow \alpha \times id_I & & \downarrow \alpha_{IX} \\ X \times I & \longrightarrow & I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} X \end{array}$$

En \mathbb{R}^+ tenemos la externología \mathcal{E}_{cc} y en $\mathbb{R}^+ \times I$ y $X \times I$ las definidas en la Sección 1.3 para $K = I$, que coinciden con las de los complementos de los compacto-cerrados. De esta forma $\alpha \times id_I$ y pr_1 son propias y además $\alpha \times id_I$ inyectiva. Así se verifican las hipótesis de la Proposición 2.2.3. Aplicándola podemos afirmar que $I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} X$ posee la externología de los complementos de los compacto-cerrados, \mathcal{E}_{cc}^{IX} .

La suspensión de X , ΣX , se definía por el push-out en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccc} X \underset{\mathbb{R}^+}{\vee}^{\mathbb{R}^+} X & \xrightarrow{\delta_X + \delta_X} & \mathbb{R}^+ \\ \downarrow \partial_0 + \partial_1 & & \downarrow \alpha_{\Sigma X} \\ I_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+} X & \xrightarrow{\bar{k}} & \Sigma X \end{array}$$

Se tiene que $\partial_0 + \partial_1$ es cerrada e inyectiva y por la Proposición 2.2.3 otra vez, la externología push-out coincide con la de los complementos de los compacto-cerrados, $\mathcal{E}_{cc}^{\Sigma X}$. \square

Definición 6.4.2 Se denomina *n-ésimo conjunto de homotopía propia tipo Steenrod* de $X \in Pro^{\mathbb{R}^+}$, ${}^S\Pi_n(X)$, al conjunto de clases de homotopía propia $[(\mathbb{R}^+ \times S^n, \alpha_{\mathcal{R}_0}); (X, \alpha)]^{\mathbb{R}^+}$.

Nota 6.4.3

Es claro que ${}^S\Pi_n(X)$ es grupo para $n \geq 1$ y grupo abeliano para $n > 1$.

Definición 6.4.4 Se denomina *n-ésimo conjunto de homotopía propia relativo tipo Steenrod del par* $(X, A) \in PPro^{\mathbb{R}^+}$ a:

a) El conjunto de clases de homotopía propia ${}^S\Pi_n(X, A) = [(\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}; P_i^c]^{\mathbb{R}^+} \cong [(\mathbb{R}^+ \times D^n, \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}); (X, A)]^{\mathbb{R}^+}$, si $n > 1$.

b) El conjunto de clases de homotopía propia ${}^S\Pi_n(X, A) = [\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}; P_i^c]_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$, si $n = 1$.

Nota 6.4.5

Es claro que ${}^S\Pi_n(X, A)$ es grupo para $n \geq 2$ y grupo abeliano para $n > 2$.

Teorema 6.4.6

La sucesión exacta larga de grupos de homotopía propia tipo Steenrod de un par $(X, A) \in PPro^{\mathbb{R}^+}$ es un caso particular de la sucesión exacta larga de homotopía cilíndrica del par $(X, A) \in P\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

Demostración:

Sólo es preciso observar que X y $\mathbb{R}^+ \times S^n$ pueden sumergirse mediante el funtor b en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, que $\mathbb{R}^+ \times S^n$ es un objeto en $\mathcal{E}t_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$ y aplicar la Proposición 6.4.1 y el Teorema 6.3.3. \square

Capítulo 7

Comparación de las estructuras de categoría de modelos cerrada exterior y cilíndrica de $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$

En $\mathcal{E}t$ tenemos dos estructuras de categoría de modelos cerrada con sus dos nociones de cilindro, grupos de homotopía, fibración, cofibración, equivalencia débil, etc.

La primera, definida en el Capítulo 2, la denominamos exterior al igual que a sus nociones asociadas.

La segunda, que fue tratada en el Capítulo 5, la denominamos cilíndrica lo mismo que a los conceptos conectados con ella.

Por la Proposición 0.1.6 estas dos estructuras inducen en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ otras dos estructuras de categoría de modelos cerrada que llamaremos exterior o cilíndrica según procedan de una o de otra. Las denotamos por $\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$ y $\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$ respectivamente. Para evitar confusiones este capítulo, denotaremos abreviadamente por $\text{cof}_{\mathcal{E}}$ a los objetos \mathcal{E} -cofibrantes y $\text{fib}_{\mathcal{E}}$ a los objetos \mathcal{E} -fibrantes y, análogamente, cof_c a los objetos c -cofibrantes y fib_c a los objetos c -fibrantes.

Nuestro objetivo es comparar las categorías $\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$ y $\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$. Utilizaremos para ello el Teorema 0.3.5 aplicado a los funtores identidad, $\text{id}_c: \mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$ y $\text{id}_{\mathcal{E}}: \mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$.

Probaremos que las \mathcal{E} -equivalencias débiles entre \mathcal{E} -cofibrantes en $\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$ son c -equivalencias débiles, así como que las c -equivalencias débiles entre c -cofibrantes en $\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$ son \mathcal{E} -equivalencias débiles. Además, para poder aplicar el Teorema 0.3.5 precisaremos que toda c -cofibración sea \mathcal{E} -cofibración, que toda \mathcal{E} -fibración sea una c -fibración y que toda \mathcal{E} -equivalencia débil sea una c -equivalencia débil.

Así obtenemos que el funtor $\underline{L}(\text{id}_c)$, derivado total a izquierda del funtor $\text{id}_c: \mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$, y el funtor $\underline{R}(\text{id}_{\mathcal{E}})$, derivado total a derecha de $\text{id}_{\mathcal{E}}: \mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$,

$$\begin{array}{ccc} & \underline{L}(\text{id}_c) & \\ & \xrightarrow{\quad} & \\ \text{Ho}(\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}) & \xleftrightarrow{\quad} & \text{Ho}(\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}) \\ & \xleftarrow{\quad} & \\ & \underline{R}(\text{id}_{\mathcal{E}}) & \end{array}$$

son canónicamente adjuntos.

Si consideramos la subcategoría $\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$ constituida por los objetos c -cofibrantes y restringimos la adjunción anterior a los objetos c -cofibrantes, probamos el resultado central del capítulo, que la categoría $Ho((\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+})_{\text{cof}_c})$ es equivalente a la categoría $Ho((\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+})_{\text{cof}_c})$.

7.1 Funtores derivados de la “identidad”.

Recordemos que por la Proposición 2.2.8 el objeto de caminos estándar, es decir, la factorización de la diagonal Δ_Y como $\Delta_Y: Y \xrightarrow{s} Y^I \xrightarrow{(d_0, d_1)} Y \times Y$ donde s es equivalencia de homotopía exterior y (d_0, d_1) es sobre, es un objeto de caminos “de Quillen” en la estructura exterior de categoría de modelos cerrada de $\mathcal{E}t$. De esta manera podemos deducir que, para todo $X, Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, X \mathcal{E} -cofibrante

$$\Pi^{\mathcal{E}}(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(X, Y) \cong \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(X, Y)$$

donde por $\Pi^{\mathcal{E}}(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})$ entendemos la categoría de homotopía a derecha el sentido de Quillen (que coincide con la de homotopía a izquierda por el Corolario 3.2.6) en la estructura exterior de categoría de modelos de $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

Por otro lado, por el Corolario 5.3.5, el objeto de caminos estándar es un objeto de caminos de “Quillen” en la estructura cilíndrica de categoría de modelos cerrada $\mathcal{E}t$. Como consecuencia, para todo $X, Y \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, X c -cofibrante

$$\Pi^c(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(X, Y) \cong \Pi(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})(X, Y)$$

donde por $\Pi^c(\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+})$ entendemos la categoría de homotopía a derecha el sentido de Quillen (que coincide con la de homotopía a izquierda por el Corolario 3.2.6) en la estructura cilíndrica de categoría de modelos de $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$.

Proposición 7.1.1

(a) En la categoría $(\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+})_{\text{cof}_{\mathcal{E}}}$ se verifica que las equivalencias débiles exteriores son equivalencias débiles cilíndricas.

(b) En la categoría $(\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+})_{\text{cof}_c}$ se verifica que las equivalencias débiles cilíndricas son equivalencias débiles exteriores.

Demostración:

(a) En $\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$ todo objeto es fibrante, luego $(\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+})_{\text{fib}_{\mathcal{E}\text{cof}_{\mathcal{E}}}} = (\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+})_{\text{cof}_{\mathcal{E}}}$ y por el Teorema 0.2.2 una equivalencia débil exterior es equivalencia de homotopía exterior en $\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$. Pero como $\Pi(\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+})(X, Y) \cong \Pi(\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+})(X, Y) \cong \Pi(\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+})(X, Y)$, es una equivalencia de homotopía en $\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$, luego equivalencia débil cilíndrica.

(b) Razonando de forma similar al apartado (a), tenemos que $(\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+})_{\text{fib}_{c\text{cof}_c}} = (\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+})_{\text{cof}_c}$ y por el Teorema 0.2.2 otra vez una equivalencia débil cilíndrica es equivalencia de homotopía exterior en $\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$, pero por el mismo argumento que en (a) es una equivalencia de homotopía en $\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$, luego equivalencia débil exterior. \square

Teorema 7.1.2

Sean las categorías $\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$ y $\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$. Dados los funtores identidad $id_c: \mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$ e $id_{\mathcal{E}}: \mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$, se verifica que id_c es adjunto a izquierda de $id_{\mathcal{E}}$ de forma que el derivado total de id_c , $\underline{\underline{L}}(id_c)$, y a derecha de $id_{\mathcal{E}}$, $\underline{\underline{R}}(id_{\mathcal{E}})$

$$\begin{array}{ccc} & \underline{\underline{L}}(id_c) & \\ & \xrightarrow{\quad} & \\ Ho(\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}) & \xleftrightarrow{\quad} & Ho(\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}) \\ & \xleftarrow{\quad} & \\ & \underline{\underline{R}}(id_{\mathcal{E}}) & \end{array}$$

son canónicamente adjuntos.

Demostración:

Aplicaremos el Teorema 0.3.5. Para ello es preciso probar que id_c conserva cofibraciones y equivalencias débiles entre c -cofibrantes, así como que $id_{\mathcal{E}}$ preserva fibraciones y equivalencias entre \mathcal{E} -fibrantes.

Afirmar que id_c conserva equivalencias débiles entre c -cofibrantes es equivalente al apartado (b) de la Proposición 7.1.

Veamos que $id_{\mathcal{E}}: \mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$ preserva fibraciones.

Lema 7.1.3

En la categoría $\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$ toda \mathcal{E} -fibración es c -fibración.

Demostración:

Por definición $p: X \longrightarrow Y$ es \mathcal{E} -fibración si tiene la propiedad de elevación de homotopía a derecha respecto a las aplicaciones $\partial_0: \mathbb{N} \times D^{q-1} \longrightarrow \mathbb{N} \times D^{q-1} \times I \cong \mathbb{N} \times D^q$, para todo $q \geq 0$.

Para ver que p es c -fibración sería necesario probar que tiene la propiedad de elevación de homotopía a derecha respecto a las aplicaciones $\partial_0: \mathbb{R}^+ \times D^{q-1} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times D^{q-1} \times I \cong \mathbb{R}^+ \times D^q$, para todo $q \geq 0$. Observemos ahora que $\partial_0: \mathbb{R}^+ \times D^{q-1} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times D^q$ puede verse como el resultado de q push-outs en $\mathcal{E}t$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{N} \times D^{-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times D^{q-1} & \longrightarrow & X \\
 \downarrow \partial_0^0 & & \downarrow \bar{\partial}_0^0 & & \downarrow p \\
 \mathbb{N} \times D^0 & \longrightarrow & P_0 & & \\
 \downarrow \partial_0^1 & & \downarrow \bar{\partial}_0^1 & & \\
 \mathbb{N} \times D^1 & \longrightarrow & P_1 & & (1) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathbb{N} \times \vdots & \longrightarrow & P_{q-2} & & \\
 \downarrow \partial_0^q & & \downarrow \bar{\partial}_0^{q-1} & & \\
 \mathbb{N} \times D^q & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times D^q & \xrightarrow{q} & Y
 \end{array}$$

La categoría $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ soporta la estructura de categoría de modelos cerrada exterior y puesto que ∂_0^i es \mathcal{E} -cofibración, $\bar{\partial}_0^i$ también lo es por ser el lado opuesto de un push-out, para todo $i = 0, 1, \dots, q - 1$.

Dado que la composición finita de \mathcal{E} -cofibraciones es \mathcal{E} -cofibración, tenemos que $\partial_0 = \bar{\partial}_0^{q-1} \dots \bar{\partial}_0^0: \mathbb{R}^+ \times D^{q-1} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times D^q$ es \mathcal{E} -cofibración. Por tanto en el cuadrado conmutativo (1) existe una elevación $q': \mathbb{R}^+ \times D^q \longrightarrow X$ verificando que $pq' = g$ y $q'\partial_0 = f$. \square

Ahora demostremos que $id_c: \mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+}$ preserva cofibraciones mediante el resultado siguiente.

Lema 7.1.4

En la categoría $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ toda c -cofibración es una \mathcal{E} -cofibración.

Demostración:

Necesitamos probar que dada $i: A \rightarrow B$ c -cofibración en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ para todo diagrama conmutativo en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

con p \mathcal{E} -fibración trivial, existe una elevación $g': B \rightarrow X$ que verifica que $pg' = g$ y $g'i = f$. Dado que tenemos una adjunción trivial entre id_c e $id_{\mathcal{E}}$, esto es equivalente a que p sea c -fibración trivial, es decir, a que $id_{\mathcal{E}}: \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+} \rightarrow \mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+}$ preserve fibraciones y equivalencias débiles.

El hecho de que $id_{\mathcal{E}}$ preserve fibraciones se verifica por el Lema 7.1.3.

Mostrar que $id_{\mathcal{E}}$ conserva equivalencias débiles es más complicado. Con este resultado probaríamos no sólo este lema sino que concluiríamos la demostración del Teorema 7.1.2, pues en $\mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$ todos los objetos son \mathcal{E} -fibrantes.

Esto lo demostraremos en el siguiente teorema.

Teorema 7.1.5

Toda equivalencia débil exterior es una equivalencia débil cilíndrica.

Demostración:

Para probar este resultado demostraremos algunos hechos previos. Sea el cuadrado pull-back en Top .

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & (X^{\mathbb{N}})^I \\ \downarrow p & & \downarrow (d_0, d_1) \\ X^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{(id, sh)} & X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \end{array}$$

con $sh: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $sh(n) = n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

El pull-back P es $X^{\mathbb{N}} \times_{X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}} (X^{\mathbb{N}})^I$, esto es, pares $(\bar{a}, w) \in X^{\mathbb{N}} \times (X^{\mathbb{N}})^I$ donde $d_0 w = \bar{a}$ y $d_1 w = \bar{a}sh$. Veamos que P puede interpretarse de otra forma.

Proposición 7.1.6

El pull-back P es homeomorfo a $(\mathcal{E}t(\mathbb{R}^+, X), T^{\mathbb{R}^+})$ en Top .

Demostración:

Tenemos que P puede identificarse con el subespacio de $(X^{\mathbb{N}})^I$ formado por los $w: I \rightarrow \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)$ continuos tales que $d_0 w = \bar{a}$ y $d_1 w = \bar{a}sh$ para $\bar{a} \in \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)$.

Recordemos que en la Proposición 2.2.7 probamos que $(Top(I, \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)), T_{ca}^{X^{\mathbb{N}}})$ es homeomorfo al espacio topológico $(\mathcal{E}t(\mathbb{N}, Top(I, X)), T_{X^I}^{\mathbb{N}})$ donde en $Top(I, X)$ consideramos la topología compacto-abierta T_{ca} y la externología \mathcal{E}_{X^I} definida en la Sección 1.3. Así $T_{X^I}^{\mathbb{N}}$ está generada por la subbase constituida por los conjuntos $S(m_{\leq}, (I, E))$ y $S(n, (K, V))$ con $E \in \mathcal{E}_X$ y $V \in T_X$. Por tanto, reinterpretaremos P como el conjunto de sucesiones exteriores de caminos continuos en X , $\bar{w}: \mathbb{N} \rightarrow Top(I, X)$ tales que $d_0 \bar{w}(n) = \bar{a}(n)$ y $d_1 \bar{w}(n) = \bar{a}sh(n) = \bar{a}(n+1)$, para una $\bar{a} \in \mathcal{E}t(\mathbb{N}, X)$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, que tiene la topología de subespacio de $\mathcal{E}t(\mathbb{N}, Top(I, X))$.

Ahora definimos $\theta: P \rightarrow X^{\mathbb{R}^+}$ para todo $\bar{w} \in P$ como $\theta(\bar{w}) = \alpha$ con $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ definido por $\alpha|_{[n, n+1]} = \bar{w}(n)t_n$, donde $t_n: [n, n+1] \rightarrow [0, 1]$ es el homeomorfismo exterior que a cada $x \in [n, n+1]$ le asigna $t_n(x) = x - n$. Es claro que α es continuo, probemos que α es externo. Dado $E \in \mathcal{E}_X$ se tiene que $m_{\leq} \subset \bar{w}^{-1}((I, E)) \in \mathcal{E}_{cc}^{\mathbb{N}}$ por ser \bar{w} exterior, luego $[m, +\infty) \subset \alpha^{-1}(E)$ con $\alpha^{-1}(E)$ abierto en \mathbb{R}^+ por ser α continuo así, por E.2, $\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{E}_{cc}^{\mathbb{R}^+}$. Por tanto θ está bien definida.

Veamos que θ es continua. Sea $S([a, +\infty), E)$ un elemento de la subbase de $T^{\mathbb{R}^+}$, con $E \in \mathcal{E}_X$. Probemos que $\theta^{-1}(S([a, +\infty), E))$ es abierto en $T_{X^I}^{\mathbb{N}}$. Es claro que $\theta^{-1}(S([m, +\infty), E)) = S(m_{\leq}, (I, E))$. Supongamos que $a \notin \mathbb{N}$, entonces $S([a, +\infty), E) = S([a, m], E) \cap S([m, +\infty), E)$. Luego sólo es preciso probar que $\theta^{-1}(S([a, n], E))$ es abierto. Se tiene que $\theta^{-1}(S([a, n], E)) = S(n-1, (t_{n-1}^{-1}([a, n]), E))$, que está en $T_{X^I}^{\mathbb{N}}$.

Los otros elementos de la subbase de $T^{\mathbb{R}^+}$ son de la forma $S([a, b], V)$ con $V \in T_X$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n < b$, $S([a, b], V)$ puede escribirse como intersección de conjuntos de la forma $S([a, n], V)$ y $S([m, b], V)$ y, si es preciso, de un $S([l, l+1], V)$. Aquí $l, n, m \in \mathbb{N}$, $a < n \leq l \leq m < b$, y m, n los más próximos a a y b respectivamente. Primero es claro que $S(l, (I, V)) = \theta^{-1}(S([l, l+1], V))$. Hemos probado que $\theta^{-1}(S([a, n], E))$ es abierto, luego queda por probar que $\theta^{-1}(S([m, b], E))$ es abierto; pero esto es claro ya que $\theta^{-1}(S([m, b], E)) = S(m, (t_m^{-1}([m, b]), E))$. Sea un elemento de la subbase de $T^{\mathbb{R}^+}$, $S([a, b], V)$, tal que $[a, b] \subset [n, n+1]$. Entonces $\theta^{-1}(S([a, b], V)) = S(n, (t_n^{-1}([a, b]), V))$.

Definimos $\bar{\theta}: X^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow P$ que a todo $\alpha \in X^{\mathbb{R}^+}$ le asigna $\bar{w} = \bar{\theta}(\alpha)$, $\bar{w}: \mathbb{N} \longrightarrow Top(I, X)$ dada para todo $n \in \mathbb{N}$ por $\bar{w}(n) = \alpha t_n^{-1}$. Es claro que $\bar{\theta}(\alpha)$ está en P pues $d_0 \bar{w}(n) = \alpha(n)$ y $d_1 \bar{w}(n) = \alpha(n+1)$ y además \bar{w} es continua por tener \mathbb{N} la topología discreta. También \bar{w} es externa, veámoslo. Dado $(I, E) \in \mathcal{E}_{X^I}$, por ser α externa existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[n, +\infty) \subset \alpha^{-1}(E)$. Así $n_{\leq} \subset \bar{w}^{-1}((I, E))$ y como \bar{w} es continua $\bar{w}^{-1}((I, E)) \in T_d$. Por tanto, aplicando E.2, $\bar{w}^{-1}((I, E))$ es abierto exterior. De esta forma concluimos que $\bar{\theta}$ está bien definida.

Sea $S(m_{\leq}, (I, E)) \in T_{X^I}^{\mathbb{N}}$, entonces $\bar{\theta}^{-1}(S(m_{\leq}, (I, E))) = S([m, +\infty), E)$.

Los otros elementos de la subbase de $T_{X^I}^{\mathbb{N}}$ son de la forma $S(m, (K, V))$ con K compacto en $I, V \in T_X$. Sea $\alpha \in \bar{\theta}^{-1}(S(m, (K, V)))$, entonces procede de un $\bar{w}: \mathbb{N} \longrightarrow Top(I, X)$, con $\bar{w} \in P$. Sea $\alpha t_m^{-1}((K)) = K_m$ compacto, así $\alpha \in S(K_m, V) = \bar{\theta}^{-1}(S(m, (K, V)))$ y por tanto $\bar{\theta}$ es continua.

Es sencillo comprobar que $\theta \bar{\theta} = id_{X^{\mathbb{R}^+}}$ y $\bar{\theta} \theta = id_P$. \square

Tras este resultado, $p: P \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$ puede considerarse como una restricción $r^*: X^{\mathbb{R}^+} \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$ que a cada $\alpha: \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ le asigna $\alpha r: \mathbb{N} \longrightarrow X$ donde $r: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es la inclusión natural.

Observemos ahora que podemos construir el cubo conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X^{\mathbb{R}^+} & \xrightarrow{u} & (X^{\mathbb{N}})^I \\
 & \swarrow f^{\mathbb{R}^+} & \downarrow r^* & & \downarrow (f^{\mathbb{N}})^I \\
 Y^{\mathbb{R}^+} & \xrightarrow{\bar{u}} & (Y^{\mathbb{N}})^I & & \downarrow (d_0, d_1) \\
 \downarrow r^* & & \downarrow & & \downarrow (d_0, d_1) \\
 & & X^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{(id, sh)} & X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \\
 \swarrow f^{\mathbb{N}} & & \downarrow & & \swarrow f^{\mathbb{N}} \times f^{\mathbb{N}} \\
 Y^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{(id, sh)} & Y^{\mathbb{N}} \times Y^{\mathbb{N}} & &
 \end{array}$$

Las caras anterior y posterior son pull-backs por la Proposición 7.1.6. Tenemos que $f^{\mathbb{R}^+}$ existe y es única al aplicar la propiedad universal del pull-back a $(f^{\mathbb{N}})^I u$ y a $f^{\mathbb{N}} r^*$.

Recordemos que f es equivalencia débil exterior si y sólo si $f^{\mathbb{N}}$ es equivalencia débil en Top , por el Lema 2.1.7 (b). También $f^{\mathbb{N}} \times f^{\mathbb{N}}$ y $(f^{\mathbb{N}})^I$ son equivalencias débiles por serlo $f^{\mathbb{N}}$, si tenemos en cuenta el Lema 0.1.14 y el Lema 0.1.15 respectivamente.

Además (d_0, d_1) es \mathcal{E} -fibración por la Proposición 2.2.7.

Así por el Lema 0.1.13 $f^{\mathbb{R}^+}$ es equivalencia débil en Top .

Pero esta afirmación es equivalente por el Lema 5.2.6 (b) a que f sea c -equivalencia débil. \square

Nota 7.7

Si $X \in \mathcal{E}t^{\mathbb{R}^+}$, objeto c -cofibrante, también es \mathcal{E} -cofibrante por el Lema 7.1.4.

Corolario 7.8

Sean las categorías $(\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+})_{\text{cof}_c}$ y $(\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+})_{\text{cof}_c}$. Entonces la categoría $Ho((\mathcal{E}t_c^{\mathbb{R}^+})_{\text{cof}_c})$ es equivalente a la categoría $Ho((\mathcal{E}t_{\mathcal{E}}^{\mathbb{R}^+})_{\text{cof}_c})$.

Demostración:

Si restringimos la adjunción del Teorema 7.1.2 a los objetos c -cofibrantes es sencillo comprobar que la unidad y la counidad son la identidad. \square

BIBLIOGRAFÍA

- [A-D-Q] Ayala R., Domínguez E. y Quintero A., *A theoretical framework for proper homotopy theory*. Math. Phil. Soc. **107** (1990), 475-481.
- [A-D-M-Q] Ayala R., Domínguez E., Márquez A. y Quintero A., *Moore spaces in proper homotopy*. Tsukuba J. Math. **19**, num.2 (1995), 305-327.
- [A-H] Ardanza S. y Hernández L.J., *Fundamental pro-grupoid and bundles with a structural category*. Top. and its Appl. **90** (1998), 1-15.
- [A-M] Artin M. y Mazur B., *Étale Homotopy*. Lec. Notes in Math. **100**, Springer (1969).
- [Ba.1] Baues H.J., *Algebraic homotopy*. Cambridge Univ. Press (1988).
- [Ba.2] Baues H.J., *Foundations of proper homotopy theory*. Preprint, (1992).
- [Bas] Bassendoski D., *Whitehead and Hurewicz theorems in proper homotopy theory*. Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld (1977).
- [Be] Beattie M., *A brief tour of Moore spaces in proper homotopy*. Proceedings of the Workshop on proper homotopy theory. Logroño (1992).
- [Bo] Borceaux F., *Handbook of categorical Algebra I. Basic Category Theory*. Cambridge University Press (1994).
- [Bor] Borsuk K., *Concerning homotopy properties of compacta*. Fund. Math. **62** (1968), 223-254.
- [Bro.1] Brown E.M., *On the proper homotopy type of simplicial complexes*. Lect. Notes in Math. **375** (1975).
- [Bro.2] Brown E.M., *Contractible 3-manifolds of finite genus at infinity*. Trans. Amer. Math. Soc. **245** (1978), 503-514.
- [Brow] Brown K.S., *Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology*. Trans. Amer. Math. Soc. **186** (1973), 419-458.
- [B-K] Bousfield A.K. y Kan D.M., *Homotopy limits, Completions and Localizations*. Lecture Notes in Maths **304**. Springer-Verlag (1972).
- [Ba-Q] Baues H.J. y Quintero A., *On the locally finite chain algebra of a proper homotopy type*. Bull. Belg. Soc. Simon Stevin. **3**, num. 2 (1996), 161-175.

- [Br-Th] Brin M.G. y Thickstun T.L., *On the proper Steenrod homotopy and proper embeddings of planes into 3-manifolds. (Preprint).*
- [Bro-M] Brown E.M. y Messer R., *The classification of two dimensional manifolds. Trans. Amer. Math* **255** (1979), 377-402.
- [Bro-T] Brown E.M. y Tucker T.W., *On proper homotopy Theory for non compact 3-manifolds. Trans. Amer. Math. Soc.* **188** (1977), 105-126.
- [C-E-H] Cabeza J., Elvira M.C. y Hernández L.J. *Una categoría cofibrada para las aplicaciones propias. Actas XIV Jor. Hispano-Lusas, Vol. II, (Univ. de la Laguna, 1989), 595-590.*
- [Če] Čerin A., *On various relative proper homotopy groups. Tsukuba J. Math. vol 4* (1980), 177-202.
- [D-H] Domínguez E. y Hernández L.J., *Groupes d'homotopie propre associés à une catégorie de prébordisme. C.R. Acad. Sc. Paris* **295** (1982), 143-146.
- [Du] Dugundji J., *Topology. Allyn and Bacon, Boston* (1966).
- [E-H] Edwards D. and Hastings H., *Čech and Steenrod homotopy theories with applications to Geometric Topology. Lect. Notes. Math. Springer* **542** (1976).
- [Ei-Ste] Eilenberg S. y Steenrod N.E., *Foundations of algebraic topology. Princeton* (1952).
- [El] Elvira M.C., *Aplicaciones propias de X en \mathbb{R}^+ . Actas del IV Sem. de Topología de Bilbao. (1988).*
- [El] Elvira M.C., *n-tipos y cohomotopía. Tesis Doctoral* (1991).
- [El-H] Elvira C. y Hernández L.J., *Suspension Theorems for proper homotopy and strong shape categories. Cahiers Geom. Top. Diff.* **36-2** (1995), 98-125.
- [E-H-R.1] Extremiana J.I., Hernández L.J. y Rivas M.T., *Proper CW- complexes: A category for the study of proper homotopy. Collectanea Mathematica* **39** (1988), 149-179.

- [E-H-R.2] *Extremiana J.I., Hernández L.J. y Rivas M.T. An isomorphism theorem of the Hurewicz type in the proper homotopy category. Fund. Math.* **132** (1989), 195-214.
- [E-H-R.3] *Extremiana J.I., Hernández L.J. y Rivas M.T., Cellular homologies of finite proper CW-complexes. Atti del IV Convegno Nazionale di Topologia. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1990).
- [E-H-R.4] *Extremiana J.I., Hernández L.J. y Rivas M.T., Sobre el infinito de los espacios. P. of the workshop on proper homotopy theory Univ. La Rioja.*(1993), 23-69.
- [E-H-R.5] *J.I. Extremiana, L.J. Hernández y M.T. Rivas, A closed model category for $(n-1)$ -connected spaces, Math. Proc. of the A.M.S.* (1996), 3545-3553.
- [Ex] *Extremiana J.I., Una teoría de obstrucción para la extensión y clasificación de aplicaciones propias. Pub. Sem. García de Galdeano, Serie II, sección 2,* **18** (1987).
- [F] *Freudenthal H., Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. Math. Zeith.* **53** (1931), 692-713.
- [F-T-W] *Farrel F.T., Taylor J.R. y Wagoner J.B., The Whitehead Theorem in the proper category. Com. Math.* **27** (1973), 1-23.
- [F-W.1] *Farrel F.T. y Wagoner J.B., Infinite Matrices in Algebraic K-Theory and Topology. Comment. Math. Helv.,* **47** (1972), 474-502.
- [F-W.2] *Farrel F.T. y Wagoner J.B., Algebraic Torsion for Infinite Simple homotopy Types. Comment. Math. Helv.* **47** (1972), 502-513.
- [Gros.1] *Grossman J.W., Homotopy classes of maps between pro-spaces. Michigan Math. J.* **21** (1974), 355-362.
- [Gros.2] *Grossman J.W., A homotopy theory of pro-spaces. Trans. Amer. Math. Soc.* **201** (1975), 161-176.
- [Gros.3] *Grossmann J.W., Homotopy groups of Pro-spaces. Illinois J. Math.* **20** (1976), 622-625.

- [Grot] Grothendieck A., *Tecniqne De Decente Et Theorems D'Existence En Geometrie Algebrique I-V*. Seminar Bourbaki, Exp. 190, 195, 212, 221 1959-60, 1960-61.
- [G-Ga-H] García J.M., García M. y Hernández L.J., *A closed simplicial model category for proper homotopy and shape theories*. Bull. Austr. Math. Soc. **57**, num. 2 (1998).
- [H.1] Hernández L.J., *A note on proper invariants*. Publ. del Sem. Mat. García de Galdeano, sección 1, **12** (1984).
- [H.2] Hernández L.J., *Proper cohomologies and the proper classification problem*. Lecture Notes in Math., **1298** (1987), 171-191. (Proceedings of the "Conference on Algebraic Topology").
- [H.3] Hernández L.J., *Application of simplicial M -sets to proper homotopy and strong shape theories*. Transactions of the AMS, (1995), 363-409.
- [H.4] Hernández L.J., *Functorial and algebraic properties of Brown's P functor*. Theory and Appl. of categories, Vol. 1, **2** (1995), 10-53.
- [H.5] Hernández L.J., *Fundamental pro-grupoid and covering projections*. Fund. Math. **156** (1998), 1-31.
- [H-P.1] Hernández L.J. y Porter T., *Proper pointed maps from \mathbb{R}^{n+1} to a σ -compact space*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **103** (1988), 457-462.
- [H-P.2] Hernández L.J. y Porter T., *Global analogues of the Brown-Grossman proper homotopy groups*. Math. Proc. Camb. Philos. Society, **104** (1988), 483-496.
- [H-P.3] Hernández L.J. y Porter T., *An embedding theorem for proper n -types*. Top. and its Appl. **483** (1992), 215-235.
- [H-P.4] Hernández L.J. y Porter T., *Categorical models for the n -types of pro-crossed complexes and J_n -prospaces*. Lect. Notes in Math. **1509** (1992), 146-186.
- [Hu] Hu S.T., *Algebraic Local invariants of topological spaces*. Comp. Math. **13** (1958), 173-218.
- [J] James I.M., *General Topology and Homotopy Theory*. Springer Verlag (1984).
- [Ke] Kerékjártó B., *Vorlesungen uber Topologie*. Springer-Verlag **1** (1923).

- [P.1] Porter T., *Abstract homotopy theory in procategories*. Cahiers de topologie et geometrie differentielle, **17** (1976)113-124.
- [P.2] Porter T., *Čech and Steenrod homotopy and the Quigley exact couple in strong shape and proper homotopy theory*. J. Pure Appl. Alg. **24** (1983), 303-312.
- [P.3] Porter T., *Homotopy groups for strong shape and proper homotopy*. Convegno di Topologia serie II **4** (1984), 101-103.
- [P.4] Porter T., *Stability Results for Topological spaces*. Math. Z. **140** (1974), 1-21.
- [P.5] Porter T., *Coherent prohomotopical algebra*. Cahiers de topologie et geometrie differentielle, **18** (1977), 139-179.
- [Q] Quillen D., *Homotopical Algebra*. Lect. Notes in Math., Springer **43** (1976).
- [Riv] Rivas M.T., *Sobre invariantes de homotopía propia y sus relaciones*. Publ. del Sem. Mat. García de Galdeano, sección II, **17** (1987).
- [S.1] Siebenmann L.C., *The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five*. (1965).
- [S.2] Siebenmann L.C., *Infinite simple homotopy types*. Indag. Math. **32** (1970), 479-495.
- [Ste] Steenrod N.E., *Regular cycles on Compact Metric Spaces*. Ann. of Math. **41** (1940), 833-855.
- [Str] Strøm, *The homotopy category is a homotopy category*. Arch. Math. **23** (1973), 435-441.
- [Sw] Switzer R.M., *Algebraic Topology , Homotopy and Homology*. Springer-Verlag (1980).
- [Tay] Taylor L.R., *Surgery on paracompact manifolds*. Thesis University of California at Berkeley (1971).

