UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

NUMEROS DE SCHUR Y DE RADO

María Isabel Sanz Domínguez

Sevilla, 2009

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

NÚMEROS DE SCHUR Y DE RADO

Memoria presentada por
María Isabel Sanz Domínguez
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

V° B° de la Directora:

Fdo.: Dra. Dña. María Pastora
Revuelta Marchena

Sevilla, Diciembre del 2009

Dedicatoria

A Juan , Juan Ignacio y Alberto

Agradecimientos

Al ver finalizada esta memoria quiero mostrar mi agradecimiento a todas las personas en las que he encontrado apoyo científico o humano desde el comienzo de este proyecto.

En primer lugar quiero dar las gracias a Mª Pastora Revuelta no sólo por dirigir este trabajo, sino por hacerme creer que esto era posible, animándome en todo momento, por estar ahí cuando la he necesitado a lo largo de estos años, a pesar de todas sus ocupaciones.

Gracias a todos mis compañeros del Departamento de Matemática Aplicada I, que me han prestado su colaboración, su tiempo o su atención. A Tiki en especial por su ayuda inestimable en el cálculo de la programación y por ser el primero que me ilusionó sobre este estudio. A Raúl, Antonio y Pedro por su ayuda en el soporte informático de este trabajo.

En especial a Mª José y a Yolanda por las palabras de ánimo que en algunos momentos clave he necesitado. Y no me gustaría olvidar a muchos otros como Angelines, Chari, Mª Ángeles, Juan, Paco,..., por su interés en el progreso de esta memoria.

Quiero también resaltar la inestimable ayuda y colaboración que he recibido por parte del profesor Shalom Eliahou. Gracias a sus enriquecedoras aportaciones la lectura de esta memoria puede resultar más asequible.

Para terminar no puedo dejar de mencionar a mi familia, por el apoyo incondicional que he recibido en todo momento. A pesar de todo el esfuerzo personal y la gran cantidad de tiempo que este trabajo me ha requerido y que son horas que les he tenido que quitar a ellos, no he sentido su queja. Sin ellos, sin su ánimo y su compresión nada de esto hubiera sido posible.

Resumen

Nuestro objetivo en esta tesis es encontrar valores exactos, cotas inferiores y superiores de los *números de Schur estrictos* y los *números de Rado estrictos*.

Un conjunto A de enteros se dice *libre de suma* si

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 + x_2 \notin A$$

Si designamos al conjunto de enteros por $\{1, 2, ..., N\}$, el *número de Schur*, denotado por $S(n, 2)$, se define como el mayor número natural $N + 1$, tal que el conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ pueda particionarse en n subconjuntos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *libres de suma*, donde x_1 y x_2 **no necesariamente son distintos**.

Son conocidos muy pocos *números de Schur* debido a la gran dificultad de su cálculo, incluso utilizando el cálculo computacional.

Desde 1916 que Schur [25] demostró la existencia de dicho número y obtuvo acotaciones, se han producido pocos avances. En 1961, Baumert [2] encontró el valor exacto de $S(4, 2) = 45$.

Para valores de $n \geq 5$ es difícil obtener el *número de Schur* $S(n, 2)$.

Existen estudios realizados por diferentes autores tales como Abbott y Hanson (1972) [1], Whitehead (1973) [29], Exoo (1994) [7], Radziszowki (1999) [21], Fredricksen y Sweet (2000) [10], que determinan cotas inferiores y superiores de estos números.

La definición de *número de Schur* se generaliza para n conjuntos *libres de k-sumas*, y se denota por $S(n, k)$.

Un conjunto A de enteros se dice *libre de k-sumas* si

$$\forall x_1, x_2, ..., x_k \in A \Rightarrow x_1 + x_2 + .. + x_k \notin A$$

donde los x_i **no necesariamente son distintos**.

En 1966, Znám [30] obtiene una cota inferior que generaliza la dada por Schur.

Posteriormente en 1973 Irving [15] mejora la cota superior dada por Znám. En 1982, Beutelspacher y Brestovansky [3] demuestran que para dos conjuntos *libres de k-sumas* se verifica la siguiente igualdad:

$$S(2,k) = k^2 + k - 1$$

para $k \geq 2$.

El objetivo de nuestra investigación son los *números de Schur estrictos*, los denotaremos por $HS(n,k)$ y se definen como el mayor entero positivo $N+1$, tal que el conjunto $\{1,2,...,N\}$ pueda particionarse en n subconjuntos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *libres de k-sumas estrictas*, es decir :

$$\forall x_1, x_2, ..., x_k \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 + .. + x_k \notin A_i$$

con $i = 1, 2, ..., n$ y donde los x_i son todos **distintos**.

Este problema es más complejo que el anteriormente descrito de los *números de Schur*.

Los únicos resultados conocidos hasta el momento se deben a Sierpinski en 1964 , a Irving [15] en 1973 y en 2002 Bornsztein [4] obtiene una cota superior para el caso particular de n conjuntos *libres de sumas estrictas*.

En nuestro trabajo, abordamos la difícil tarea de calcular valores exactos de los *números de Schur estrictos*, cotas inferiores y superiores generales para ellos. Además nos planteamos también el problema relacionado de los *números de Rado*.

En 1933, Rado [19], [20] consideró el problema de determinar si un sistema de ecuaciones lineales admite solución monocromática para cada *n-coloración* de números naturales. Después de 76 años de los primeros resultados de Rado, se han obtenido muy pocos progresos sobre los números de Rado para algunos sistemas de ecuaciones lineales.

Burr y Loo en [5] [6] investigaron algunas familias particulares de ecuaciones con *2-coloración* de enteros positivos y demostraron que si $c \geq 0$ el *número de Rado*

$$R(2,c) = 4c + 5$$

En 1993, Schaal [23] generaliza la definición del *número de Rado* para k sumandos.

El *número de Rado* $R_k(2,c)$ para $k \geq 2$ y $c \geq 0$ es el mínimo entero tal que para cada *2-coloración* del conjunto $\{1,2,,...,N\}$:

$$\Delta : \{1,2,...,N\} \longrightarrow \{0,1\}$$

existe una solución monocromática a

$$x_1 + x_2 + ...x_k + c = x_{k+1}$$

donde $x_1, x_2, ..x_k$ **no necesariamente son distintos**.

Schaal [23] obtiene el *número de Rado*

$$R_k(2,c) = \begin{cases} \infty & \text{si } k \text{ y } c \text{ impares} \\ (k+1)^2 + (c-1)(k+2) & \text{otro caso} \end{cases}, \text{con } k \geq 0 \text{ y } c \geq 0.$$

Además, en 1995 [24], obtuvo el *número de Rado* para particiones del conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$, formada por tres conjuntos *libres de suma* de la forma definida anteriormente, $R(3, c) = 13c+14$ para $c \geq 0$.

En 2001 Kosek y Schaal [16] obtienen cotas inferiores y superiores de los *número de Rado* , para algunos valores determinados de $c < 0$.

En 2008, Guo y Sun [12] determinan los *números de Rado* $R(a_1, ..., a_m)$, definidos como:

El menor entero positivo tal que para cada *2-coloracion* del conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ con $N \geq R(a_1, ..., a_m)$, existe una solución monocromática a la ecuación :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = x_0$$

con $x_0, x_1, ..., x_m \in \{1, 2, ..., N\}$

En nuestro trabajo definimos el *número de Rado estricto* $SR(n, c)$ como el mayor entero positivo tal que el conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$ pueda particionarse en n subconjuntos *libres de suma estricta en el sentido de Rado* de la siguiente forma:

El conjunto A es *libre de suma estricta en el sentido de Rado* si:

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 + x_2 + c \notin A, c > 0$$

siendo x_1 y x_2 **distintos**.

Nos planteamos el gran reto de obtener los valores exactos de los *números de Rado estrictos* $SR(2, c)$ y $SR(3, c)$.

Introducción

El estudio que se aborda en esta tesis fue iniciado en 1916 por Issai Schur (1875-1941) .

Este matemático de origen ruso [18], comenzó desde muy joven sus estudios en la Universidad de Berlin.

Schur fue discípulo de Frobenius bajo cuya dirección en 1901 realizó su tesis doctoral, basada en representaciones racionales de grupos lineales sobre campos complejos.

Schur también obtuvo resultados en otros campos de las matemáticas, entre los que destacamos estudios sobre ecuaciones algebraicas, grupos simétricos de Galois, teoría de números, series divergentes, ecuaciones diferenciales y por último teoría de funciones.

Entre los años 1920 y 1930 [17], trabajó en el desarrollo de una teoría que mas tarde llegó a ser la Teoría de Ramsey. Hizo público el primer artículo [25] con contenido "tipo Ramsey", (aunque por supuesto esta afirmación puede ser discutida, ya que otras contribuciones anteriores podrían tener una reclamación similar, por ejemplo el famoso artículo de Hilbert[14] y por supuesto los trabajos de Dirichlet sobre el Principio del Palomar).

Schur también identificó problemas que influyeron en el Teorema de Van der Waerden y planteó cuestiones que inspiraron a su estudiante Rado para desarrollar quizás la más importante contribución a la Teoría de Ramsey [19] en sus orígenes.

Schur además estudió las formas modulares del Teorema de Fermat, dando una prueba más sencilla del Teorema de Dickson (Journal für reine und angewandte Mathematik, Vol. 135) usando los resultados de Hurwitz (Journal für reine und angewandte Mathematik, Vol. 136)

Entre los estudiantes que completaron sus estudios de doctorado bajo la dirección de Schur, podemos mencionar a Richard y Alfred Brauer, Robert Frucht, Bernhard Neumann, Richard Rado y Helmut Wielandt.

Otros colaboradores de Schur fueron Kurt Hirsch, Walter Ladermann, Hanna Neumann y Menahem Max Schiffer.

Los trabajos de Schur fueron muy precisos, incluso después de más de 90 años sus originales artículos merecen un estudio más profundo y en esta línea hemos realizado nuestro trabajo.

Cuando comenzamos a estudiar los problemas de Schur sobre teoría de números, nos dimos cuenta que en muchos años se habían producido muy pocos avances científicos, debido fundamentalmente a la gran dificultad que esto conlleva.

En la primera parte de esta memoria describimos los avances que hemos ido obteniendo en los *números de Schur estrictos* y en la segunda nos concentramos en la ardua tarea de encontrar valores exactos de los *números de Rado estrictos*.

En el Capítulo 1 comenzamos exponiendo las nociones básicas del *número de Schur* y del *número de Schur estricto*, incluimos también en este capítulo la cota superior de Irwing [15] de 1973 y la de Bornsztein [4] del 2002 para particiones formadas por subconjuntos *libres de sumas estrictas*.

Comenzamos el Capítulo 2 exponiendo la aplicación Backtrack de programación en C, que hemos utilizado para el cálculo de valores exactos de los *números de Schur* y de los *números de Schur estrictos*.

Hemos programado un algoritmo **Backtrack** que en cada caso calcula todas las soluciones posibles del problema y devuelve al final el *número de Schur* o el *número de Schur estricto* correspondiente.

Debido a la dificultad de obtener valores exactos causada principalmente por gran la cantidad de memoria que se necesita para este cálculo, en el Capítulo 3 obtenemos cotas inferiores del *número de Schur estricto* para particiones del conjunto de enteros $\{1, 2, ..., N\}$, formadas por dos y tres subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*.

Conseguimos además una importante generalización que nos proporciona una cota inferior para particiones del conjunto de enteros formada por n subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*.

En el Capítulo 4 se obtienen cotas inferiores para particiones del conjunto $\{1, 2, ..., N\}$, formadas por cuatro subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*. Basándonos en un procedimiento similar al realizado en el Capítulo 3, conseguimos obtener un afinamiento de la cota inferior para n subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*, así como aportar una técnica de mejora, a partir de la cual se puede continuar avanzando.

Concluimos esta primera parte con el Capítulo 5, extendiendo la relación existente entre los *números de Schur* y los *números de Ramsey* a los *números de Schur estrictos*, acotando éstos superiormente por los *números de Ramsey*.

Teniendo en cuenta las cotas inferiores encontradas y la relevante relación entre los *números de Schur estrictos* y los *números de Ramsey* (como cotas superiores) podemos seguir avanzando tanto en los *Ramsey* como en los *Schur*.

La segunda parte de esta memoria, comienza en el Capítulo 6, en el que exponemos las nociones básicas de los *números de Rado* y algunos resultados conocidos sobre estos números.

En 1933 Rado [19][20] consideró el problema de determinar si un sistema de ecuaciones diofánticas admite solución monocromática para cada *n-coloración* de los números naturales.

Después de 75 años de los primeros resultados de Rado, se han obtenido muy pocos progresos. Se han obtenido los *números de Rado* para algunos sistemas de ecuaciones particulares. En nuestro estudio definimos el *número de Rado estricto* para particiones formadas por dos y tres subconjuntos *libres de sumas estrictas* en el sentido de Rado.

Obtenemos en el Capítulo 7 el valor exacto del *número de Rado estricto* $SR(2, c)$ y la partición que lo determina.

En el Capítulo 8 enunciamos el resultado fundamental de este estudio que es el valor exacto del *número de Rado estricto* $SR(3,c)$.

Para demostrar este resultado se obtiene en el Capítulo 9 la cota inferior de $SR(3,c)$. Se define una *3-coloración* en el conjunto $\{1,2,...,13c+21\}$ y probamos que no contiene una solución monocromática a la ecuación de Rado.

En el Capítulo 10 demostramos que la cota inferior es óptima. Esta demostración precisa del análisis exhaustivo de los cinco casos que se obtienen al asignar a los tres primeros enteros positivos 1 , 2 y 3 distintas coloraciones.

Comprobamos que para cada *3-coloración* del conjunto $\{1,2,,...,13c+22\}$ siempre existe una solución *monocromática* de la ecuación de Rado.

Con los resultados de los Capítulos 9 y 10 concluimos la demostración del resultado principal enunciado en el Capítulo 8, es decir $SR(3,c)=13c{+}22$, exponiendo además la distribución formada por los tres subconjuntos *libres de suma estricta* en el sentido de Rado.

Índice general

Dedicatoria V

Agradecimientos VII

Resumen IX

Introducción XIII

Índice general XVII

I Número de Schur Estricto

1. Nociones Básicas del Número de Schur y del Número de Schur Estricto 3

2. Valores exactos de los Números de Schur y de los Números de Schur Estrictos 9
- 2.1. Algoritmo para la obtención de valores exactos. Programación Backtrack . . . 9
- 2.2. Valor exacto del Número de Schur $S(3,3)$ 10
- 2.3. Valores exactos de los Números de Schur Estrictos 14

3. Cotas Inferiores generales del Número de Schur Estricto 19
- 3.1. Cotas de $HS(2,k)$ y $HS(3,k)$ 19
- 3.2. Relación entre $HS(r+1,k)$ y $HS(r,k)$ 25
- 3.3. Afinamiento de la Cota Inferior del Número de Schur Estricto 29

4. Procedimiento de mejora de las Cotas Inferiores del Número de Schur Estricto 37
- 4.1. Cota de $HS(4,k)$ 37
- 4.2. Relación entre $HS(r+1,k)$ y $HS(r,k)$ 42
- 4.3. Generalización de la Cota Inferior del Número de Schur Estricto 45

5. Cota Superior del Número de Schur Estricto : El Número de Ramsey 51
- 5.1. Definición del Número de Schur en términos de coloración 51
- 5.2. Relación entre el Número de Schur y el Número de Ramsey 53
- 5.3. Mejora de la Cota Superior del $S(5,2)$ 55
- 5.4. El Número de Ramsey como Cota Superior del Número de Schur Estricto . . . 56

II Número de Rado Estricto

6. Nociones básicas del Número de Rado **65**

7. Valor exacto del Número de Rado Estricto $SR(2, c)$. **69**
7.1. Número de Rado Estricto $SR(2, c)$ 69

8. Resultado Principal: Valor exacto de $SR(3, c)$ **73**

9. Cota Inferior del Número de Rado Estricto $SR(3, c)$ **77**

10. Cota Superior del Número de Rado Estricto $SR(3, c)$ **81**
10.1. Caso 1: $A_1 \supseteq \{1, 2, 3\}$ 82
10.2. Caso 2: $A_1 \supseteq \{1, 2\}$ y $A_2 \supseteq \{3\}$ 121
10.3. Caso 3 : $A_1 \supseteq \{1, 3\}$ y $A_2 \supseteq \{2\}$ 172
10.4. Caso 4: $A_1 \supseteq \{1\}$ y $A_2 \supseteq \{2, 3\}$ 221
10.5. Caso 5: $A_1 \supseteq \{1\}$, $A_2 \supseteq \{2\}$ y $A_3 \supseteq \{3\}$ 270

11. Conclusiones y Problemas Abiertos **321**
11.1. Conclusiones 321
11.2. Problemas Abiertos 321

Referencias **323**

Parte I

Número de Schur Estricto

Capítulo 1

Nociones Básicas del Número de Schur y del Número de Schur Estricto

En este capítulo definimos los *Números de Schur* y los *Números de Schur Estrictos* y describimos los avances conseguidos hasta el momento.

Un conjunto A de enteros se dice *libre de suma* si

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 + x_2 \notin A$$

x_1 y x_2 **no necesariamente son distintos**.

Si designamos al conjunto de enteros por $\{1, 2, ..., N\}$, el *Número de Schur* , denotado por $S(n, 2)$ se define como el mayor número natural $N + 1$, tal que el conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ pueda particionarse en n subconjuntos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *libres de suma*.

La expresión $S(n, 2)$, indica *n* subconjuntos *libres de suma* con dos sumandos.

A modo de ejemplo para calcular el *números de Schur* $S(2, 2)$, vemos que para cualquier partición del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\} = A_1 \sqcup A_2$, los subconjuntos A_1 ó A_2 no son *libres de suma*.

Suponemos $1 \in A_1 \Rightarrow 2 \in A_2$, por tanto $4 = 2 + 2 \in A_1 \Rightarrow 5 = 1 + 4 \in A_2$

Tenemos $A_1 \supseteq \{1, 4\}$

$A_2 \supseteq \{2, 5\}$

Si $3 \in A_1 \Rightarrow 4 = 1 + 3$, si $3 \in A_2 \Rightarrow 5 = 2 + 3$

Por tanto 3 no pertenece ni al subconjunto A_1 ni al subconjunto A_2, es decir concluimos que $S(2, 2) \leq 5$.

Veamos que $S(2, 2) \geq 5$.

Si consideramos la partición $A_1 = \{1, 4\}$ y $A_2 = \{2, 3\}$, los subconjuntos son *libres de suma*, por tanto $S(2, 2) = 5$

Son conocidos muy pocos *números de Schur* debido a la gran dificultad de su cálculo.

El *número Schur* $S(4,2) = 45$ fue obtenido por Baumert [2] en 1961 .

Una partición del conjunto de enteros $\{1, 2, ..., 44\}$ formada por cuatro subconjuntos *libres de suma* se obtiene con los conjuntos :

$$A_1 = \{1, 3, 5, 15, 17, 19, 26, 28, 40, 42, 44\}$$

$$A_2 = \{2, 7, 8, 18, 21, 24, 27, 33, 37, 38, 43\}$$

$$A_3 = \{4, 6, 13, 20, 22, 23, 25, 30, 32, 39, 41\}$$

$$A_4 = \{9, 10, 11, 12, 14, 16, 29, 31, 34, 35, 36\}$$

Para valores de $n \geq 5$ es difícil obtener el *número de Schur* $S(n,2)$. Existen estudios que determinan cotas inferiores y superiores de este número.

En 1916 Schur [25] obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 1.1. *Dado un entero positivo n, existe el mayor entero positivo $S(n,2)$, con la propiedad de que el conjunto $\{1, 2, ..N\}$ puede ser particionado en n subconjuntos libres de suma.*

Schur [25], determinó la siguiente acotación:

$$1/2(3^n + 1) \leq S(n,2) \leq [n!e]$$

donde $[x]$ denota el mayor entero que no exceda de x.

También demostró la siguiente relación:

$$S(n,2) \geq 3S(n-1,2) - 1$$

En 1972 Abbott y Hanson [1] mejoraron la cota inferior obteniendo,

$$S(n,2) - 1 \geq c89^{\frac{n}{2}} \qquad [1]$$

siendo c una constante positiva.

Existe una relación estrecha entre los *números de Schur* y los *números de Ramsey* .

Dados dos enteros p y q el *número de Ramsey* es el mínimo entero $r = R(p,q)$ tal que cualquier coloración con dos colores de las aristas del grafo completo K_r, contiene un subgrafo K_p del primer color o un subgrafo K_q del segundo color.

Esta definición se puede generalizar a un número mayor de colores.

Dados los enteros p_1, p_2 , ..., p_t el número de Ramsey $N = R(p_1, p_2, ..., p_t)$ es el mínimo entero tal que cualquier *t-coloración* de las aristas del grafo completo K_N contiene un subgrafo K_{p_i} monocromático $i = 1, 2, ..., t$.

La cota superior obtenida por Schur [25] fue mejorada en 1973 por Whitehead [29] usando la Teoría de Ramsey.

$$S(n,2) \leq [n!(e - \frac{1}{24})] \qquad [29]$$

Las mejores cotas conocidas del $S(5,2)$ son:

$$161 \leq S(5,2) \leq 316$$

La primera inecuación es de Exoo [7] obtenida en 1994 y la segunda se obtiene de una cota superior de $R_5(3) = R(5,5,5,5,5)$ dada en el survey de Radziszowski [21].

Para particiones de seis y siete subconjuntos *libres de suma* en el 2000, Fredricksen y Sweet [10] construyeron particiones en las que obtuvieron las cotas inferiores siguientes:

$$S(6,2) \geq 537$$

$$S(7,2) \geq 1681$$

Una extensión natural del concepto de conjunto *libre de suma* se obtiene para k sumandos.

Un conjunto A de enteros se dice *libre de k-sumas* si

$$\forall x_1, x_2, ..., x_k \in A \Rightarrow x_1 + x_2 + .. + x_k \notin A$$

donde los x_i **no necesariamente son distintos**.

La definición de *número de Schur* se generaliza para n conjuntos *libres de k-sumas*, y se denota por $S(n,k)$.

En 1934, de los resultados de Rado [19], se obtiene la siguiente generalización.

Teorema 1.2. *[19]*

Dados dos enteros positivos n y k , $k \geq 2$ existe el mayor entero positivo $N+1$, denotado por $S(n,k)$ con la propiedad de que el conjunto $\{1,2,..N\}$ puede ser particionado en n conjuntos libres de k-sumas.

Por ejemplo para el conjunto de enteros $\{1,2,3,..,10\}$ se puede conseguir la partición formada por dos subconjuntos *libres de 3-sumas*

$$A_1 = \{1,2,9,10\}$$

$$A_2 = \{3,4,5,6,7,8\}$$

siendo el *número de Schur* $S(2,3) = 11$.

En 1966, Znám [30] obtiene una cota inferior que generaliza la dada por Schur:

$$S(n,k) \geq (\frac{k-1}{k})((k+1)^n - 1) + 1$$

También utilizando la Teoría de Ramsey

$$S(n,k) \leq R_n(k+1) - 1$$

y un conocido resultado de Greenwood y Gleason [11] de 1955,obtiene una cota superior:

$$S(n,k) \leq \frac{(nk)!}{(k!)^n} - 1$$

Irving [15] en 1973 mejora la cota superior dada por Znám obteniendo :

$$S(n,k) \leq [n!(k-1)^n exp(\frac{1}{(k-1)}]$$

En 1982 Beutelspacher y Brestovansky [3] demuestran que para dos conjuntos *libres de k-sumas* se verifica la igualdad:

$$S(2,k) = k^2 + k - 1$$

para $k \geq 2$.

En la siguiente tabla representamos los *números de Schur* $S(n,k)$, para valores determinados de n y k, conocidos hasta el momento.

$S(n,k)$

k	**2**	**3**	**4**	**5**	k
n=*2*	5	11	19	29	$k^2 + k - 1$
n=*3*	14				$\geq k^3 + 2k^2 - 2$
n=*4*	45				

En nuestro trabajo consideramos una variante del problema anterior. Definimos conjuntos *libres de sumas estrictas* , si

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 + x_2 \notin A$$

donde x_1 y x_2 son **distintos**.

Este caso para dos sumandos, $k = 2$, fue discutido por Sierpinski [26] en 1964.

Esta definición se puede generalizar para k sumandos.

Un conjunto A de enteros es *libre de k-sumas estrictas* si

$$\forall x_1, x_2, ..., x_k \in A \Rightarrow x_1 + x_2 + .. + x_k \notin A$$

donde los x_i son todos **distintos**.

Llamamos *Número de Schur Estricto* y los denotaremos por $HS(n,k)$, al mayor entero $N+1$, tal que el conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ pueda particionarse en n subconjuntos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *libres de k-sumas estrictas*, es decir :

$$\forall x_1, x_2, ..., x_k \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 + .. + x_k \notin A_i$$

con $i = 1, 2, ..., n$ y donde los x_i son todos **distintos**.

La expresión $HS(n,k)$, indica *n* conjuntos *libres de k-sumas estrictas*.

El *número de Schur estricto* $HS(3,2) = 24$

Obtenemos tres distribuciones distintas del conjunto de enteros $\{1, 2, ..., 23\}$ formada por tres subconjuntos *libres de sumas estrictas* :

1. $A_1 = \{1, 2, 4, 8, 11, 16, 22\}$
   $A_2 = \{3, 5, 6, 7, 19, 21, 23\}$
   $A_3 = \{9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20\}$

2. $A_1 = \{1, 2, 4, 8, 11, 17, 22\}$
   $A_2 = \{3, 5, 6, 7, 19, 21, 23\}$
   $A_3 = \{9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20\}$

3. $A_1 = \{1, 2, 4, 8, 11, 22\}$
   $A_2 = \{3, 5, 6, 7, 19, 21, 23\}$
   $A_3 = \{9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20$

Para obtener el *número de Schur estricto* $HS(2,3)$, podemos conseguir una partición del conjunto $\{1, 2, ., 23\}$, formada por dos subconjuntos *libres de 3-sumas estrictas*

$$A_1 = \{1, 2, .., 5, 21, 22, 23\}$$

$$A_2 = \{6, 7, 8, ..., 20\}$$

Con esta partición podemos comprobar que $HS(2,3) = 24$.

Para $k = 2$ son conocidos los *números de Schur estrictos*:

$$HS(2,2) = 9$$

$$HS(3,2) = 24$$

$$HS(4,2) = 67$$

$$HS(5,2) = 197$$

Este último sin prueba conocida.

En 1973 Irving [15] demostró el siguiente resultado:

Teorema 1.3. *[15]*

Dados dos enteros positivos n y $k \geq 2$, existe el mayor entero positivo $HS(n,k)$ con la propiedad de que el conjunto de enteros $\{1,2,..N\}$ pueda ser particionado en n conjuntos libres de k-sumas estrictas.

Además obtuvo una cota superior de los $HS(n,k)$:

$$HS(n,k) \leq [\frac{1}{2}n!(k-1)^n(kn+1)exp(\frac{1}{k-1}) + \frac{k}{k-1}]$$

En 2002, Bornsztein [4] demuestra el resultado siguiente:

Teorema 1.4. *[4]*

Sea $n \geq 2$ un entero. Si el conjunto de enteros $\{1,2,...,[n! \cdot ne]+1\}$ se divide en n clases de cualquier manera, entonces al menos una de las clases contiene dos números distintos y su suma.

Con la cota inferior obtenida por Sierpinski [27]:

$$HS(n,2) \geq 1 + 315^{\frac{(n-1)}{5}}$$

Bornsztein [4] obtiene una acotación para los *números de Schur estrictos* para particiones formada por n subconjuntos *libres de sumas estrictas*.

$$1 + 315^{\frac{(n-1)}{5}} \leq HS(n,2) \leq [n! \cdot ne] + 1$$

Nuestras aportaciones consisten en calcular valores exactos de algunos *números de Schur estrictos* y cotas inferiores y superiores generales para ellos.

Capítulo 2

Valores exactos de los Números de Schur y de los Números de Schur Estrictos

En este capítulo explicaremos la aplicación Backtrack de programación en C, que hemos utilizado para el cálculo de valores exactos de los *números de Schur* y de los *números de Schur estrictos*.

2.1. Algoritmo para la obtención de valores exactos. Programación Backtrack

La programación Backtrack es una conocida y potente técnica para resolver problemas de búsqueda en combinatoria. La búsqueda se organiza como un proceso de decisión de multiples fases, donde en cada fase se hace una elección entre un número de alternativas.

Cuando las elecciones previas no consiguen que se alcance una solución, el algoritmo *backtrack*, vuelve atrás, es decir reestablece su estado, exactamente a la posición en la cual como máximo entró el último punto elegido y elige la siguiente alternativa a ese punto no probada.

Helsgaun [13] en su artículo de 1995 describe una simple herramienta CBack, para programar *backtrack* en lenguaje de programación C.

La herramienta es una librería que contiene una pequeña colección de programas , todos escritos en ANSI standard de C.CBack. Se puede implementar fácilmente en la mayoría de los ordenadores y compilar en C.

El código fuente está incluido en el artículo y funciona en cualquier implementación en C.

Las principales herramientas de CBack son las dos funciones: **Choice** y **Backtrack**.

Choice se utiliza cuando se hace una elección entre un número de alternativas. **Choice**(N), siendo N un entero positivo, denota el número de alternativas.

Choice elige primero el valor 1 y continúa el programa. Los valores desde 2 a N se alcanzan desde **Choice** a través de una subsecuencia que llama a **Backtrack**.

Una llamada de **Backtrack** causa en el programa un *backtrack*, es decir vuelve a la llamada mas reciente de **Choice**, que todavía no ha retornado todos sus valores.

El estado del programa se reestablece exactamente cuando **Choice** fue llamado y entra el valor siguiente.

Todas las variables automáticas del programa, variables locales y variables registradas se reinician. Las variables estáticas no varían. Esta propiedad de las variables estáticas hacen posible la comunicación entre las llamadas de **Choice** y **Backtrack**. Además el usuario, también puede especificar que variables estáticas se pueden reiniciar.

Como ejemplo veamos un fragmento de un programa.

```
int i,j; \

i=Choise(3); \

j=Choise(2); \

 print("i=%d ,j=%d\ n " ,i,j);\

Backtrack(); \
```

El programa produce la siguiente salida:

i=1, j=1
i=1, j=2
i=2, j=1
i=2, j=2
i=3, j=1
i=3, j=2

2.2. Valor exacto del Número de Schur $S(3,3)$

Con la técnica **Backtrack** explicada anteriormente expondré cómo hemos calculado el *número de Schur* $S(3,3)$.

Recordemos que es el mayor número natural $N+1$, tal que el conjunto $\{1,2,...,N\}$ pueda particionarse en 3 subconjuntos $\{A_1,A_2,A_3\}$ *libres de 3-sumas*, es decir

$$\forall x_1,x_2,x_3 \in A_i \Rightarrow x_1+x_2+x_3 \notin A_i,\ i=1,2,3$$

x_1 y x_2 **no necesariamente son distintos**.

El algoritmo **Backtrack** que hemos programado calcula todas las soluciones posibles de este problema y devuelve al final el *número de Schur* correspondiente. El algoritmo en programación C es el siguiente:

```
#include "CBack.c"
int i, j, k, l, N, Count;
FILE *fp;

void PrintSol()
{ fprintf(fp,"N = %d es el maximo con soluciones.\n",Count); }

int Problem()
{
int r, c;
int R[4][60]={0};
int L[4]={0};
Fiasco=PrintSol;
N=Select(42,43);
for (r = 1; r <= N; r++)
{
  c = Choice(3);
  for (i = 0; i <= L[c]-1; i++)
   for (j = 0; j <= i; j++)
    for (k = 0; k <= j; k++)
     if (r==R[c][i]+R[c][j]+R[c][k])

     Backtrack();
R[c][L[c]++] = r;
}
Count=0;
for (c = 1; c <= 3; c++)
{
 Count+=L[c];
 for (r = 0; r <= L[c]; r++)
    {
    fprintf(fp,"(%d)",R[c][r]);
    }
    fprintf(fp,"((%d))\n",L[c]);
}
    fprintf(fp,"%c",'\n');
Backtrack();
}

main(int argc, char *argv[])
{
char str[80];
strcpy (str,argv[0]);
strcat (str,".txt");
fp = fopen(str,"w");
Backtracking(Problem())
fclose(fp);
}
```

El programa devuelve 16 distribuciones y sus simétricas, que son un total de 96 distintas que detallamos a continuación.

Llamamos a los subconjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$. El subconjunto A_2 en todas las distribuciones es el mismo formado por 12 elementos. Los distintos subconjuntos A_1 y A_3 se obtienen de las distintas formas de colocar los elementos $17, 18, 25$ y 26.

- Tenemos 6 casos según coloquemos los elementos $17, 18, 25$ y 26 de distinta forma dos a dos en los conjuntos A_1 y A_3.

```
 (1)(2)(9)(10)(17)(18)(33)(34)(41)(42)(0)((10))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(30)(31)
(32)(0)((20))
```

```
(1)(2)(9)(10)(17)(25)(33)(34)(41)(42)(0)((10))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(26)(27)(28)(29)(30)(31)
(32)(0)((20))
```

```
(1)(2)(9)(10)(17)(26)(33)(34)(41)(42)(0)((10))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(27)(28)(29)(30)(31)
(32)(0)((20))
```

```
(1)(2)(9)(10)(18)(25)(33)(34)(41)(42)(0)((10))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(26)(27)(28)(29)(30)(31)
(32)(0)((20))
```

```
(1)(2)(9)(10)(18)(26)(33)(34)(41)(42)(0)((10))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(27)(28)(29)(30)(31)
(32)(0)((20))
```

```
(1)(2)(9)(10)(25)(26)(33)(34)(41)(42)(0)((10))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(27)(28)(29)(30)(31)
(32)(0)((20))
```

- Tenemos dos casos si los elementos $17, 18, 25$ y 26 están en A_1 o A_3.

```
 (1)(2)(9)(10)(17)(18)(25)(26)(33)(34)(41)(42)(0)((12))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(27)(28)(29)(30)(31)
(32)(0)((18))
```

```
(1)(2)(9)(10)(33)(34)(41)(42)(0)((8))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
```

```
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)
(28)(29)(30)(31)(32)(0)((22))
```

- Por último se obtienen 8 casos según coloquemos los elementos $17, 18, 25$ de tres en tres en A_1 o A_3.

```
(1)(2)(9)(10)(17)(18)(25)(33)(34)(41)(42)(0)((11))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(26)(27)(28)(29)(30)
(31)(32)(0)((19))
```

```
(1)(2)(9)(10)(17)(18)(26)(33)(34)(41)(42)(0)((11))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(27)(28)(29)(30)
(31)(32)(0)((19))
```

```
(1)(2)(9)(10)(17)(25)(26)(33)(34)(41)(42)(0)((11))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(27)(28)(29)(30)
(31)(32)(0)((19))
```

```
(1)(2)(9)(10)(17)(33)(34)(41)(42)(0)((9))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)
(29)(30)(31)(32)(0)((21))
```

```
(1)(2)(9)(10)(18)(25)(26)(33)(34)(41)(42)(0)((11))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(27)(28)(29)(30)
(31)(32)(0)((19))
```

```
(1)(2)(9)(10)(18)(33)(34)(41)(42)(0)((9))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)
(29)(30)(31)(32)(0)((21))
```

```
(1)(2)(9)(10)(25)(33)(34)(41)(42)(0)((9))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(26)(27)(28)
(29)(30)(31)(32)(0)((21))
```

```
(1)(2)(9)(10)(26)(33)(34)(41)(42)(0)((9))
(3)(4)(5)(6)(7)(8)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(0)((12))
(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(27)(28)
```

```
(29)(30)(31)(32)(0)((21))
```

El último número que aparece detrás de la secuencia de elementos con paréntesis doble es el número de componentes de dicho subconjunto.

Concluimos por tanto, que el valor exacto del *número de Schur* $S(3,3)$ es igual a 43.

2.3. Valores exactos de los Números de Schur Estrictos

En esta sección expondremos los *número de Schur estrictos*, detallando en alguno de ellos el programa de **Backtrack**, que hemos implementado para su cálculo.

Recordemos que el *Número de Schur Estricto* $HS(n,2)$, es el mayor entero $N+1$, tal que el conjunto $\{1,2,...,N\}$ pueda particionarse en n subconjuntos $\{A_1,A_2,...,A_n\}$ *libres de sumas estrictas*, es decir :

$$\forall x_1, x_2 \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 \notin A_i$$

con $i = 1,2,...,n$ y donde los x_i son todos **distintos**.

A continuación detallamos los *números de Schur estrictos* conocidos hasta el momento y daremos en cada caso una distribución.

- $HS(2,2) = 9$

  $$A_1 = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$$

  $$A_2 = \{3,\ 5,\ 6,\ 7\}$$

- $HS(3,2) = 24$

  $$A_1 = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 11,\ 16,\ 22\}$$

  $$A_2 = \{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 19,\ 21,\ 23\}$$

  $$A_3 = \{9,\ 10,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 17,\ 18,\ 20\}$$

  En este caso existen tres soluciones distintas.

- $HS(4,2) = 67$

  $$A_1 = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 11,\ 16,\ 22,\ 25,\ 50,\ 53,\ 56,\ 63\}$$

  $$A_2 = \{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 19,\ 21,\ 23,\ 51,\ 52,\ 64,\ 65,\ 66\}$$

  $$A_3 = \{24,\ 26,\ 27,\ 20,\ ...,\ 48,\ 49\}$$

- $HS(5,2) = 197$

Este último número lo cita Walker [28], aunque no se conoce la partición de los cinco subconjuntos *libres de sumas estrictas*.

Llamamos *Número de Schur Estricto* $HS(2,k)$, al mayor entero $N+1$, tal que el conjunto $\{1,2,...,N\}$ pueda particionarse en dos subconjuntos $\{A_1, A_2\}$ *libres de k-sumas estrictas*, es decir :

$$\forall x_1, x_2, ..., x_k \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 + .. + x_k \notin A_i$$

con $i = 1, 2, ..., n$ y donde los x_i son todos **distintos**.

Hemos calculado con la ayuda de la programación **Backtrack** los *números de Schur estrictos* $HS(2,k)$, para los valores de $k = 3, 4, 5$

- Para el cálculo de $HS(2,3)$ hemos implementado el algoritmo en programación C que exponemos a continuación:

```
 #include "CBack.c"
int i, j, k, l, N, Count;
FILE *fp;

void PrintSol()
{ fprintf(fp,"N = %d es el maximo con soluciones.\n",Count); }

int Problem()
{
int r, c;
int R[3][60]={0};
int L[3]={0};
Fiasco=PrintSol;
N=Select(23,24);
for (r = 1; r <= N; r++)
{
  c = Choice(2);
  for (i = 0; i <= L[c]-1; i++)
   for (j = 0; j < i; j++)
    for (k = 0; k < j; k++)
     if (r==R[c][i]+R[c][j]+R[c][k])
     Backtrack();
R[c][L[c]++] = r;
}
Count=0;
for (c = 1; c <= 2; c++)
{
 Count+=L[c];
 for (r = 0; r <= L[c]; r++)
    {
    fprintf(fp,"(%d)",R[c][r]);
    }
    fprintf(fp,"((%d))\n",L[c]);
}
    fprintf(fp,"%c",'\n');
Backtrack();
}

main(int argc, char *argv[])
{
```

```
char str[80];
strcpy (str,argv[0]);
strcat (str,".txt");
fp = fopen(str,"w");
Backtracking(Problem())
fclose(fp);
}

 El programa devuelve una única solución y su simétrica

 (1)(2)(3)(4)(5)(21)(22)(23)(0)((8))
(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)(19)(20)(0)((15))

(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)(19)(20)(0)((15))
(1)(2)(3)(4)(5)(21)(22)(23)(0)((8))
```

Los dos conjuntos *libres de 3-sumas estrictas* son:

$A_1 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 21,\ 22,\ 23\}$

$A_2 = \{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ ...,\ 19,\ 20\}$

Siendo $HS(2,3) = 24$

- El *número de Schur estricto* $HS(2,4) = 52$
  El programa que calcula este número devuelve tres soluciones y sus simétricas, una de estas soluciones formada por los dos subconjuntos *libres de 4-sumas estrictas* es:

  $A_1 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 46,\ 47,\ 48,\ 49,\ 50,\ 51\}$

  $A_2 = \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ ...,\ 44,\ 45\}$

- El *número de Schur estricto* $HS(2,5) = 101$
  El programa que calcula este número devuelve una solución y su simétrica, los dos subconjuntos *libres de 5-sumas estrictas* son:

  $A_1 = \{1,\ 20,\ 21,\ 22,...,\ 86\}$

  $A_2 = \{2,\ 3,\ ...,\ 19,\ 87,\ 88,\ ...,\ 99,\ 100\}$

Llamamos *número de Schur estricto* $HS(3,k)$, al mayor entero $N+1$, tal que el conjunto $\{1,2,...,N\}$ pueda particionarse en tres subconjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$ *libres de k-sumas estrictas*, es decir :

$$\forall x_1, x_2, ..., x_k \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 + .. + x_k \notin A_i$$

con $i = 1,2,...,n$ y donde los x_i son todos **distintos**.

Tenemos calculado con el algoritmo de programación **Backtrack** las cotas inferiores de los *números de Schur estrictos*, $HS(3,3)$ y $HS(3,4)$, así cómo las distribuciones en ambos casos.

- El *número de Schur estricto* $HS(3,3) \geq 94$
  El programa que calcula este número devuelve 395 soluciones, una de estas soluciones formada por los tres subconjuntos *libres de 3-sumas estrictas* es:

$A_1 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 21,\ 22,\ 23,\ 75,\ 76,\ 77,\ 91,\ 92,\ 93\}$

$A_2 = \{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ ...,\ 19,\ 20,\ 78,\ 79,\ ...,\ 89,\ 90\}$

$A_3 = \{24,\ 25,\ 26,\ 27,\ ...,\ 73,\ 74\}$

- El *número de Schur estricto* $HS(3,4) \geq 259$
  Debido a la dificultad de este cálculo sólo hemos calculado una de las distribuciones formada por los tres subconjuntos *libres de 4-sumas estrictas* :

$A_1 = \{1,\ 2,\ ..,9,\ ,\ 46,\ 47,\ ...,\ 51,\ 214,\ 215,\ ...,\ 219,\ 253,\ 254,\ ...,\ 258\}$

$A_2 = \{10,\ 11,\ 12,\ ...,\ 44,\ 45,\ 220,\ 221,\ 222,\ ...,\ 251,\ 252\}$

$A_3 = \{52,\ 53,\ 54,\ ...,\ 211,\ 212,\ 213\}$

Hemos intentado compilar el programa para calcular los valores exactos de $HS(3,3)$, $HS(3,4)$, $HS(2,6)$ y $HS(4,3)$ entre otros y no ha sido posible. El ordenador ha estado funcionando varios días y no consigue calcular ninguna de las distribuciones que determinan estos *números de Schur estrictos*. Esperamos seguir avanzando en este algoritmo para poder ampliar estos resultados, incluyendo la programación en paralelo.

En la tabla siguiente representamos nuestros avances en el cálculo de los valores exactos así como de las cotas inferiores de los *números de Schur estrictos* $HS(n,k)$, para valores de n y k.

$HS(n,k)$

k	**2**	**3**	**4**	**5**	*k*
n=2	9	24	52	101	$\geq (k+2)T_k - 2k$
n=3	24	≥ 94	≥ 259		
n=4	67				
n=5	197				

En los siguientes capítulos obtenemos cotas inferiores y superiores que permitirán en posteriores estudios avanzar en estos cálculos.

Capítulo 3

Cotas Inferiores generales del Número de Schur Estricto

En este capítulo obtenemos cotas inferiores generales del *número de Schur estricto*, al relacionar el *número de Schur estricto* en $r+1$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* con el *número de Schur estricto* en r subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*.

Recordemos la definición de *número de Schur estricto*.

Un conjunto A de enteros es *libres de k-sumas estrictas* si

$$\forall x_1, x_2, ..., x_k \in A \Rightarrow x_1 + x_2 + .. + x_k \notin A$$

donde los x_i **son todos distintos**.

Llamamos *número de Schur estricto* y los denotaremos por $HS(n,k)$, al mayor entero $N+1$, tal que el conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ pueda particionarse en n subconjuntos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *libres de k-sumas estrictas*.

3.1. Cotas de $HS(2,k)$ y $HS(3,k)$

En la construcción que realizamos obtenemos cotas inferiores del *número de Schur estricto* para particiones del conjunto de enteros $\{1, 2, ..., N\}$ formada por $n = 2$ y $n = 3$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*. Con este desarrollo generalizamos la construcción para $r+1$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*.

La cota inferior para $n = 2$ la obtenemos en el siguiente resultado.

Lema 3.1. *El número de Schur estricto* $HS(2,k) \geq (k+2)T_k - 2k$

siendo $T_k = \frac{(1+k)}{2}k$

Demostración. Se pretende conseguir particiones del conjunto de enteros $\{1, 2, ..., N\}$, formadas por dos subconjuntos $\{A_1, A_2\}$, *libres de k-sumas estrictas*.

Veamos primero el caso $k = 2$ y luego el caso general para k sumandos.

Comenzaremos con una partición del conjunto de enteros formada por dos subconjuntos *libres de suma estricta* , es decir $x_1 + x_2 \notin A_i$ para $i = 1, 2$, siendo x_1 y x_2 **distintos**.

En este caso hay dos particiones posibles :

A_1	1	2		7
A_2	3	4	5	6

A_1	1	2	4	8
A_2	3	5	6	7

El *número de Schur estricto* es $HS(2,2) = 9$

Para una partición del conjunto de enteros formada por dos subconjuntos *libres de 3-sumas estrictas*, es decir $x_1 + x_2 + x_3 \notin A_i$ para $i = 1, 2$, siendo x_1, x_2 y x_3 **distintos**, obtenemos la siguiente distribución:

A_1	1	2	3	4	5	21	22	23
A_2	6	7	8	9	...			20

Observando estas distribuciones y designando por T_k a los números triangulares de orden k, siendo $T_k = \frac{k(1+k)}{2}$, la suma de los k primeros términos de la progresión $\{1, 2, 3, ..., k\}$.

$T_1 = 1$
$T_2 = 3$
$T_3 = 6...$

El procedimiento utilizado se puede resumir en los siguientes pasos:

Paso 1º

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ...x_s\}$$

siendo $x_s = (x_1 + x_2 + x_3) - 1 = T_3 - 1$

Paso 2º

$$A_2 = \{y_1, y_2, y_3, ...y_r\}$$

siendo $y_r = (y_1 + y_2 + y_3) - 1$

$y_1 = T_3$

$y_2 = T_3 + 1$

$y_3 = T_3 + 2$

siendo el último elemento $y_r = T_3 + (T_3 + 1) + (T_3 + 2) - 1 = 3T_3 + 2$

Paso 3º

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ...x_s, y_{r+1}, y_{r+2}, ...y_t\}$$

El último elemento $y_t = (x_1 + x_2 + y_{r+1}) - 1 = 1 + 2 + 3T_3 + 3 - 1 = 3T_3 + 5 = 23$

Con esta cota obtenida el *número de Schur estricto* $HS(2,3) \geq 24$

En el Paso 1º se colocan enteros en el conjunto A_1 *libres de 3-sumas estrictas*. El primer entero que no se puede colocar en este conjunto es $x_1 + x_2 + x_3$ que pasa al conjunto A_2, continuando con los enteros consecutivos hasta que sea posible Paso 2º.

El primer entero que no podemos situar en A_2 es $y_1 + y_2 + y_3$, que pasa al conjunto A_1 continuamos hasta que obtengamos un entero que no sea *libre de 3-sumas estrictas*, con este entero se obtiene la cota inferior del *número de Schur estricto*.

Aplicando el procedimiento descrito podemos comprobar que para una partición del conjunto de enteros formada por dos subconjuntos *libres de 4-sumas estrictas*, obtenemos la siguiente distribución.

A_1	1	2	3	4	...	9	46	...	51
A_2	10	11	12					...	45

En general para particiones formadas por dos subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* y siguiendo el razonamiento anterior obtenemos la distribución.

A_1	1	2	...	$T_k - 1$	$(k+1)T_k - k$		...	$(k+2)T_k - 2k - 1$
A_2	T_k	$T_k + 1$		...	$T_k + k - 1$	...		$(k+1)T_k - k - 1$

Paso 1º

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ...x_s\}$$

siendo $x_s = (x_1 + x_2 + ... + x_k) - 1 = T_k - 1$

Paso 2º

$$A_2 = \{y_1, y_2, y_3, ...y_r\}$$

siendo $y_r = (y_1 + y_2 + ... + y_k) - 1$

El último elemento del conjunto A_2 se obtiene sumando los k primeros términos de la serie menos uno:

$$y_r = T_k + T_k + 1 + T_k + k - 1 - 1$$

$$= kT_k + 1 + 2 + ... + (k-1) - 1$$

$$= (k+1)T_k - k - 1$$

Paso 3º

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ...x_s, y_{r+1}, y_{r+2}, ...y_t\}$$

El último elemento $y_t = (x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + y_{r+1}) - 1$

El último término del conjunto A_1 se obtiene sumando el primer elemento de esta serie con los $(k-1)$ primeros términos de la primera serie menos uno:

$$y_t = 1+2+...+(k-1)+(k+1)T_k - k - 1$$

$$= T_k - k + (k+1)T_k - k - 1$$

$$= (k+2)T_k - 2k - 1$$

Obtenemos la cota inferior del *número de Schur estricto* $HS(2,k) \geq (k+2)T_k - 2k$

siendo $T_k = \frac{(1+k)}{2}k$

□

Pretendemos conseguir particiones del conjunto de enteros $\{1, 2, ..., N\}$, formadas por tres subconjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$, *libres de k-sumas estrictas*, obteniendo así la cota inferior para $n = 3$ en el siguiente resultado.

Lema 3.2. *El número de Schur estricto* $HS(3,k) \geq [k^2 + 3k + 3]T_k - 2k^2 - 5k + 1$

siendo $T_k = \frac{(1+k)}{2}k$

Demostración. Veamos primero el caso $k = 2$ y $k = 3$ y luego el caso general para k sumandos.

Comenzaremos con una partición del conjunto de enteros formada por tres subconjuntos *libres de suma estricta* , es decir $x_1 + x_2 \notin A_i$ para $i = 1, 2, 3$, siendo x_1 y x_2 distintos.

A_1	1	2			7	17		21
A_2	3	4	5	6		18	19	20
A_3	8	9	10	11			...	16

El *número de Schur estricto* es $HS(3,2) \geq 22$

Comenzamos con la distribución obtenida para dos subconjuntos *libres de suma estricta*, llamaremos a esta distribución A_{22}.

El procedimiento de pasar de un conjunto a otro en la obtención de $HS(2,2)$ es el siguiente:

$$A_{22} = \{A_1 \to A_2 \to A_1\}$$

Si designamos por A_{32} a la distribución anterior, podemos observar que para obtener la cota inferior del *número de Schur estricto* $HS(3,2)$ se ha realizado el siguiente proceso:

$$A_{32} = \{A_{22} \to A_3 \to A_1 \to A_2 \to A_1\}$$

Explicaremos el procedimiento en los siguientes pasos:

Paso 1º

Partimos de la distribución obtenida para $HS(2,2)$

1	2		7
3	4	5	6

Paso 2º
Comenzamos colocando los elementos en el tercer conjunto:

$$A_3 = \{z_1, z_2, ..., z_s\}$$

siendo $z_s = z_1 + z_2 - 1$

Paso 3º
Continuamos en el conjunto $A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_r\}$ de la distribución de $HS(2, 2)$.

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_r, x_{r+1}\}$$

siendo $x_{r+1} = z_s + 1$.

No podemos colocar mas elementos al ser $x_{r+2} = x_{r+1} + x_1$

Paso 4º
Pasamos al conjunto $A_2 = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_t\}$ de la distribución de $HS(2, 2)$.

$$A_2 = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_t, y_{t+1}, .., y_v\}$$

siendo $y_v = y_{t+1} + y_1 - 1$

Paso 5º
Se continua con el conjunto A_1, repitiendo el esquema del Paso 3º

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ...x_r, x_{r+1}, x_{r+2}\}$$

siendo $x_{r+2} = y_v + 1$.

No podemos colocar mas elementos al ser $x_{r+3} = x_{r+2} + x_1$
El método concluye con este paso siendo x_{r+2} el último elemento que se puede situar en cualquiera de los tres subconjuntos.

El siguiente entero es la cota inferior del *número de Schur estricto* $HS(3, 2)$.

El *número de Schur estricto* $HS(3, 2) \geq x_{r+3}$.

Aplicaremos este procedimiento para obtener la cota inferior del *número de Schur* estricto para tres subconjuntos *libres de 3-sumas estrictas*.

Comenzamos con la distribución obtenida para dos subconjuntos *libres de 3-sumas estrictas* y aplicamos sucesivamente los pasos descritos en el esquema anterior.

A_1	1	2	...	5	21	22	23	75	76	77	91	92	93
A_2	6	7	8			...	20		78	79	80	...	90
A_3	24	25	26	27							...	73	74

El *número de Schur estricto* es $HS(3, 3) \geq 94$

Para tres subconjuntos *libres de 4-sumas estrictas*, es decir $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \notin A_i$, $i = 1, 2, 3$, si comenzamos con la distribución obtenida para dos subconjuntos *libres de 4-sumas estrictas* obtenemos la siguiente distribución, que nos permite conseguir una cota inferior de $HS(3, 3)$:

A_1	1	2	...	9	46	...	51	214	...	219	253	...	258
A_2	10	11	12			...	45		220	221		...	252
A_3	52	53	54	55							...	212	213

El *número de Schur estricto* es $HS(3,4) \geq 259$

En general para tres subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*, siguiendo el razonamiento anterior obtenemos la distribución:

A_1	$[1, T_k - 1]$	$[(k+1)T_k - k, (k+2)T_k - 2k - 1]$	$[\alpha_2, \beta_2]$	$[\alpha_4, \beta_4]$
A_2	$[T_k, (k+1)T_k - k - 1]$		$[\alpha_3, \beta_3]$	
A_3	$[\alpha_1, \beta_1]$			

El elemento $\alpha_1 = (k+2)T_k - 2k$ y el β_1 es la suma de los k primeros elementos de A_3 menos uno.

$$\beta_1 = (k+2)T_k - 2k + (k+2)T_k - 2k + 1 + ... + (k+2)T_k - 2k + k - 1 - 1$$

$$= k[(k+2)T_k - 2k] + 1 + 2 + ...k - 1 - 1$$

$$= (k^2 + 2k)T_k - 2k^2 + T_k - k - 1$$

$$= (k+1)^2 T_k - 2k^2 - k - 1$$

En el conjunto A_1, el intervalo $[\alpha_2, \beta_2]$ tiene como extremos $\alpha_2 = (k+1)^2 T_k - 2k^2 - k$

$$\beta_2 = \alpha_2 + 1 + 2 + ... + k - 1 - 1 = (k^2 + 2k + 2)T_k - 2k^2 - 2k - 1$$

β_2 es la suma del primer elemento del intervalo con los $(k-1)$ términos iniciales de la primera serie de A_1 menos uno.

El intervalo $[\alpha_3, \beta_3]$ tiene como extremos $\alpha_3 = \beta_2 + 1 = (k^2 + 2k + 2)T_k - 2k^2 - 2k$ y

$$\beta_3 = \alpha_3 + T_k + T_k + 1 ... T_k + k - 2 - 1$$

$$= [k^2 + 3k + 2]T_k - 2k^2 - 4k$$

β_3 es la suma del primer elemento del intervalo con los $(k-1)$ términos iniciales de la primera serie de A_2 menos uno.

En el último intervalo $[\alpha_4, \beta_4]$, el extremo $\alpha_4 = \beta_3 + 1 = [k^2 + 3k + 2]T_k - 2k^2 - 4k + 1$

$$\beta_4 = \alpha_4 + 1 + 2 + ...(k-1) - 1$$

$$= [k^2 + 3k + 2]T_k - 2k^2 - 4k + 1 + T_k - k - 1$$

$$= [k^2 + 3k + 3]T_k - 2k^2 - 5k$$

β_4 es la suma del primer elemento del intervalo con los $(k-1)$ términos iniciales de la primera serie de A_1 menos uno.

Obtenemos la cota inferior del *número de Schur estricto* para tres conjuntos *libres de k-sumas estrictas*

$$HS(3,k) \geq [k^2+3k+3]T_k - 2k^2 - 5k + 1$$

□

3.2. Relación entre $HS(r+1,k)$ y $HS(r,k)$

Observando el procedimiento realizado para la obtención de las cotas inferiores de los *números de Schur estrictos* para dos y tres subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*, podemos generalizar esta construcción para $r+1$ subconjuntos *estrictamente k- libres de suma*, obteniendo así una relación entre dichos subconjuntos.

Lema 3.3.

$$HS(r+1,k) \geq k(HS(r,k)+k-1)$$

para $r \geq 1$

Demostración. Si tenemos r subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* en $\{1,2,...,N\}$, es decir $x_1+x_2+...+x_k \notin A_i$, $i=1,2,...,r$. Designamos al *número de Schur estricto* por $HS(r,k)$, se verifica que $HS(r,k) \geq N+1$.

Para $r+1$ subconjuntos obtenemos una distribución formada por tres bloques:

$$\begin{array}{c|c} B_1 & B_3 \\ \hline B_2 & \end{array}$$

siendo $B_1=[1,N]$, el bloque obtenido para los r subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*, $B_2=[N+1,N+2,...,E_N]$, y $E_N=N+1+N+2+...+N+k-1$

El último término de B_2 es la suma de los k primeros términos menos uno.

$E_N = kN+1+2+...k-1 = kN+T_k-1$

El bloque tercero $B_3=[E_N+1,F_N]$, siendo

$F_N = E_N+1+(1+2+...k-1)-1$

Este último término de B_3 es la suma del primer elemento de B_3 mas los $(k-1)$ primeros términos de B_1 menos uno.

$$F_N = E_N+1+T_{k-1}-1 = kN+T_k-1+1+T_{k-1}-1 = kN+T_k+T_{k-1}-1$$

El *número de Schur estricto* para $r+1$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* es mayor o igual que F_N+1, es decir:

$HS(r+1,k) \geq kN+T_k+T_{k-1} = kN+k+T_k+T_{k-1}-k$

$= k(N+1)+T_k+T_{k-1}-k$

$$= k(N+1) + 2T_{k-1}$$

$$HS(r+1,k) \geq kHS(r,k) + 2T_{k-1}$$

Hemos obtenido así una relación entre los *números de Schur estrictos* en $r+1$ y r subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*.

Aplicando esta desigualdad sucesivamente para distintos valores de k

Para $k = 2$ sumandos:

$$HS(r+1,2) \geq 2HS(r,2) + 2 = 2(HS(r,2) + 1)$$

Para $k = 3$ sumandos:

$$HS(r+1,3) \geq 3HS(r,3) + 6 = 3(HS(r,3) + 2)$$

Para $k = 4$ sumandos:

$$HS(r+1,4) \geq 4HS(r,4) + 12 = 4(HS(r,4) + 3)$$

Generalizando para k sumandos:

$$HS(r+1,k) \geq k(HS(r,k) + k - 1), \qquad r \geq 1 \qquad [I]$$

Obtenemos por tanto una relación entre los *números de Schur estrictos* para $r+1$ y r subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*.

□

Aplicando el Lema 3.3 para los distintos valores de r, determinamos la expresión de la cota inferior de los *números de Schur estrictos* para n conjuntos *libres de k-sumas estrictas* en función de los números triangulares, de n y de k.

Teorema 3.4.

$$HS(n,k) \geq k^{n-1}T_k + k^n - k$$

para $r \geq 1$

Demostración. Aplicando la definición de *número de Schur estricto*, observamos que para $r = 1$ conjunto *libres de k-sumas estrictas.* , tenemos:

Para $k = 2$ sumandos: $HS(1,2) = 3$

Para $k = 3$ sumandos: $HS(1,3) = 6$

En general para k sumandos: $HS(1,k) = 1 + 2 + ...k = T_k$

Aplicando la expresión $[I]$ del lema 3.3

Para $r = 2$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* en $\{1,2,...,N\}$, $/x_1 + x_2 + ... + x_k \notin A_i$ para $i = 1,2,...,n$

$$HS(2,k) \geq k(HS(1,k) + k - 1) =$$

$$= kT_k + k^2 - k$$

Para $r = 3$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* en $\{1, 2, ..., N\}$

$HS(3, k) \geq k(HS(2, k) + k - 1) =$

$= k(kT_k + k^2 - k + k - 1)$

$= k^2 T_k + k^3 - k$

Para $r = 4$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* en $\{1, 2, ..., N\}$

$HS(4, k) \geq k(HS(3, k) + k - 1) =$

$= k(k^2 T_k + k^3 - k + k - 1)$

$= k^3 T_k + k^4 - k$

En general para n subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* en $\{1, 2, ..., N\}$

$$HS(n, k) \geq k^{n-1} T_k + k^n - k$$

Se ha obtenido una cota inferior del *número de Schur estricto* $HS(n, k)$, en función de los números triangulares, de n y de k.

$\square$

Aplicando los resultados del Teorema 3.4 obtenemos la cota inferior de los *números de Schur estrictos* para n subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*. Esta cota depende de n y de k .

Teorema 3.5.

$$HS(n, k) \geq \frac{1}{2}(k + 3)k^n - k$$

siendo $n \geq 2$ *y* $k \geq 2$

Demostración. Para $k = 2$ sumandos *libres de suma estricta* tenemos :

$HS(n, 2) \geq 2^{n-1} T_2 + 2^n - 2$

$= 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} - 2$

$= 5 \cdot 2^{n-1} - 2$

Para $k = 3$:

$HS(n, 3) \geq 3^{n-1} T_3 + 3^n - 3$

$= 6 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1} - 3$

$= 9 \cdot 3^{n-1} - 3$

Para $k = 4$:

$HS(n, 4) \geq 4^{n-1} T_4 + 4^n - 4$

$= 10 \cdot 4^{n-1} + 4 \cdot 4^{n-1} - 4$

$= 14 \cdot 4^{n-1} - 4$

Para $k = 5$:
$HS(n, 5) \geq 5^{n-1} T_5 + 5^n - 5$

$= 15 \cdot 5^{n-1} + 5 \cdot 5^{n-1} - 5$

$= 20 \cdot 5^{n-1} - 5$

Generalizando n subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*:

$$HS(n, k) \geq p(k) k^{n-1} - k$$

Tenemos que calcular el polinomio $p(k)$
Para los distintos valores de k se obtiene la progresión $\{5, 9, 14, 20, ...\}$

5 9 14 20

4 5 6

1 1

El polinomio es de segundo grado $p(k) = ak^2 + bk + c$ y verifica para los distintos valores de k:

$p(2) = 4a + 2b + c = 5$

$p(3) = 9a + 3b + c = 9$

$p(4) = 16a + 4b + c = 14$

Resolviendo este sistema la expresión del polinomio es :

$$p(k) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k = \frac{1}{2}k(k+3)$$

Por tanto la cota inferior del *número de Schur estricto* es:
$HS(n, k) \geq \frac{1}{2} k(k+3) k^{n-1} - k$

$= \frac{1}{2}(k+3)k^n - k$

$\square$

3.3. Afinamiento de la Cota Inferior del Número de Schur Estricto

Mejoramos esta cota inferior ampliando los bloques utilizados en la demostración del Lema 3.3.

De esta forma obtenemos una nueva relación entre los *números de Schur estrictos* para r y $r+1$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*, consiguiendo así el afinamiento de los Teoremas 3.4 y 3.5

Lema 3.6.

$$HS(r+1,k) \geq kHS(r,k) + p(k)$$

siendo $p(k) = \frac{1}{2}(k-1)(k^2+5k-2)$
y $r \geq 2$

Demostración. Para la obtención de la cota inferior del Teorema 3.4 habíamos encontrado una relación entre los *números de Schur estrictos* de orden r y los de orden $r+1$.

Consideremos A_i, $i = 1, 2, ..., r$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* en $\{1, 2, ..., N\}$, es decir: $x_1 + x_2 + ... + x_k \notin A_i$ para $i = 1, 2, ..., r$.

Recordemos que el *número de Schur estricto* denotado por $HS(r,k)$, verifica que
$HS(r,k) \geq N+1$.
Para $r+1$ subconjuntos consideramos una distribución formada por tres bloques:

$$\begin{array}{c|c} B_1 & B_3 \\ \hline B_2 & \end{array}$$

siendo $B_1 = [1, N]$, el bloque obtenido para los r subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* .

$B_2 = [N+1, kN+T_k-1]$ y $B_3 = [kN+T_k, kN+T_k+T_{k-1}-1]$

Para la obtención de la mejora de la cota inferior consideraremos el bloque B_1 descompuesto en dos bloques:

$$\begin{array}{c|c} B_{11} & \\ \hline B_{12} & \end{array}$$

Esta descomposición se observa en la construcción realizada para la obtención de la cota inferior del *número de Schur estricto* $HS(2,k)$. Para los distintos valores de k teníamos :
$k = 2$

$$\begin{array}{c|cccc} B_{11} & 1 & 2 & & 7 \\ \hline B_{12} & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$k = 3$

B_{11}	1	2	3	4	5	21	22	23
B_{12}	6	7	8	9	...			20

En general paras dos subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*:

B_{11}	1	2	...	$T_k - 1$	$(k+1)T_k - k$	...	$(k+2)T_k - 2k - 1$
B_{12}	T_k	$T_k + 1$	...		$T_k + k - 1$	...	$(k+1)T_k - k - 1$

Si observamos los bloques que se obtienen para la obtención de la cota inferior del *número de Schur estricto* $HS(3, k)$ y generalizando para $r + 1$ subconjuntos, la distribución esta formada por seis bloques de la forma siguiente:

B_{11}	B_3	B_5
B_{12}	B_4	
B_2		

Hemos añadido los bloques B_4 y B_5

El bloque $B_4 = [F_N + 1, G_N]$, siendo GN la suma del primer elemento de B_4 mas los $(k-1)$ primeros términos de la serie B_{12}.

$$G_N = kN + T_k + T_{k-1} + T_k + T_k + 1 + ... + T_k + k - 2 - 1$$

$$= kN + kT_k + T_{k-1} + T_{k-2} - 1$$

El bloque $B_5 = [G_N + 1, H_N]$, siendo H_N la suma del primer elemento de B_5 mas los $(k-1)$ primeros términos de la serie B_{11} menos uno .

$$H_N = kN + kT_k + T_{k-1} + T_{k-2} + (1 + 2 + +...k - 1) - 1$$

$$= kN + kT_k + 2T_{k-1} + T_{k-2} - 1$$

El *número de Schur estricto* para $r + 1$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* es mayor o igual que $H_N + 1$, es decir

$$HS(r + 1, k) \geq H_N + 1 \geq kN + kT_k + 2T_{k-1} + T_{k-2} + k - k$$

$$= kN + k + kT_k + 2T_{k-1} + T_{k-2} - k$$

$$= k(N + 1) + (k - 1)T_k + T_k - k + 2T_{k-1} + T_{k-2}$$

$$= k(N + 1) + (k - 1)T_k + 3T_{k-1} + T_{k-2}$$

$$HS(r + 1, k) \geq kHS(r, k) + (k - 1)T_k + 3T_{k-1} + T_{k-2} \qquad r \geq 2$$

Se ha obtenido una relación entre el *número de Schur estricto* en $r+1$ y r subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* . Esta cota mejora la obtenida en lema 3.3

Si aplicamos esta desigualdad para los distintos valores de $k = 2, 3, 4...$, se obtiene

Para $k = 2$ sumandos:

$$HS(r+1,2) \geq 2HS(r,2) + T_2 + 3T_1 + T_0 = 2HS(r,2) + 6$$

Para $k = 3$ sumandos:

$$HS(r+1,3) \geq 3HS(r,3) + 2T_3 + 3T_2 + T_1 = 3HS(r,3) + 22$$

Para $k = 4$ sumandos:

$$HS(r+1,4) \geq 4HS(r,4) + 3T_4 + 3T_3 + T_2 = 4HS(r,4) + 51$$

Para $k = 5$ sumandos:

$$HS(r+1,5) \geq 5HS(r,5) + 4T_5 + 3T_4 + T_3 = 5HS(r,5) + 96$$

Generalizando para k sumandos:

$$HS(r+1,k) \geq kHS(r,k) + p(k) \qquad [II]$$

Tenemos que calcular el polinomio $p(k)$

Para los distintos valores de k se obtiene la progresión $\{6, 22, 51, 96, 160, ...\}$

6 22 51 96 160

16 29 45 64

13 16 19

3 3

El polinomio $p(k)$ es de tercer grado $p(k) = ak^3 + bk^2 + ck + d$ verifica :

$p(2) = 8a + 4b + 2c + d = 6$

$p(3) = 27a + 9b + 3c + d = 22$

$p(4) = 64a + 16b + 4c + d = 51$

$p(5) = 125a + 25b + 5c + d = 96$

Resolviendo este sistema se obtiene el polinomio

$$p(k) = \frac{1}{2}k^3 + 2k^2 - \frac{7}{2}k + 1 = \frac{1}{2}(k-1)(k^2 + 5k - 2)$$

Obtenemos para k sumandos la siguiente relación entre los *número de Schur estricto*:

$$HS(r+1,k) \geq kHS(r,k) + p(k) \qquad r \geq 2 \qquad [III]$$

$\square$

La cota inferior de los *números de Schur estrictos* para n subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*, que mejora la obtenida en el Teorema 3.4 se obtiene en el siguiente resultado.

Teorema 3.7.

$$HS(n,k) \geq k^{n-1}(T_k + k - 1) + (k^{n-2} - 1)p(k)$$

siendo $p(k) = \frac{1}{2}(k^2 + 5k - 2)$
y $r \geq 2$

Demostración. Para $r = 1$, tenemos la cota inferior del *número de Schur estricto* obtenida en el Lema 3.1:

$$HS(2,k) \geq (k+2)T_k - 2k$$

$$= kT_k + k^2 - k$$

Aplicaremos la expresión $[III]$ para $r = 2, 3, 4.....$ conjuntos *libres de k-sumas estrictas*.
Para $r = 2$

$$HS(3,k) \geq kHS(2,k) + p(k)$$

$$= k[kT_k + k^2 - k] + p(k)$$

$$= k^2T_k + k^3 - k^2 + p(k)$$

Para $r = 3$

$$HS(4,k) \geq kHS(3,k) + p(k)$$

$$= k[k^2T_k + k^3 - k^2 + p(k)] + p(k)$$

$$= k^3T_k + k^4 - k^3 + kp(k) + p(k)$$

$$= k^3T_k + k^3(k-1) + (k+1)p(k)$$

Para $r = 4$

$$HS(5,k) \geq kHS(3,k) + p(k)$$

$$= k[k^3T_k + k^3(k-1) + (k+1)p(k)] + p(k)$$

$$= k^4T_k + k^4(k-1) + (k^2 + k + 1)p(k)$$

En general para n subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*.

$$HS(n,k) \geq k^{n-1}T_k + k^{n-1}(k-1) + (k^{n-3} + (k^{n-4} + ... + k^2 + k + 1)p(k)$$

El último sumando de esta expresión es la suma de una progresión geométrica :

$$k^{n-4} + ... + k^2 + k + 1 = \frac{k^{n-3}k - 1}{k - 1}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$HS(n,k) \geq k^{n-1}T_k + k^{n-1}(k-1) + p(k)\frac{k^{n-3}k-1}{k-1}$

$= k^{n-1}(T_k + k - 1]) + \frac{1}{2}(k^{n-2} - 1)(k^2 + 5k - 2)$

Se ha obtenido una cota inferior del *número de Schur estricto* $HS(n,k)$, en función de los números triangulares, de n y de k.

□

Aplicando este Teorema para distintos valores k obtenemos la mejora de la cota del Teorema 3.5.

Teorema 3.8.

$$HS_3(n,k) \geq q(k)k^{n-2} - p(k)$$

siendo $q(k) = \frac{1}{2}k^3 + 2k^2 + \frac{3}{2}k - 1$

y $p(k) = \frac{1}{2}(k^2 + 5k - 2)$

Demostración. Para $k = 2$ sumandos :

$HS(n,2) \geq 2^{n-1}(T_2 + 1) + \frac{1}{2}(2^{n-2} - 1)(4 + 10 - 2)$

$= 4 \cdot 2^{n-1} + 6 \cdot (2^{n-2} - 1)$

$= 4 \cdot 2^{n-1} + 3(2^{n-1} - 2)$

$= 7 \cdot 2^{n-1} - 6$

Para $k = 3$ sumandos :
$HS(n,3) \geq 3^{n-1}(T_3 + 2) + \frac{1}{2}(3^n - 1)(9 + 15 - 2)$

$= 8 \cdot 3^{n-1} + 11 \cdot (3^{n-2} - 1)$

$= 8 \cdot 3^{n-1} + \frac{11}{3}(3^{n-1} - 3)$

$= \frac{35}{3} \cdot 3^{n-1} - 11$

Para $k = 4$ sumandos :
$HS(n, 4) \geq 4^{n-1}(T_4 + 3) + \frac{1}{2}(4^{n-2} - 1)(16 + 20 - 2)$

$= 13 \cdot 4^{n-1} + 17 \cdot (4^{n-2} - 1)$

$= 13 \cdot 4^{n-1} + \frac{17}{4} \cdot (4^{n-1} - 4)$

$= \frac{69}{4} \cdot 4^{n-1} - 17$

Para $k = 5$ sumandos :
$HS(n, 5) \geq 5^{n-1}(T_5 + 4) + \frac{1}{2}(5^{n-2} - 1)(25 + 25 + -2)$

$= 19 \cdot 5^{n-1} + 24 \cdot (5^{n-2} - 1)$

$= 19 \cdot 5^{n-1} + \frac{24}{5} \cdot (5^{n-1} - 5)$

$= \frac{119}{5} \cdot 5^{n-1} - 24$

Generalizando n subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*:

$$HS(n, k) \geq q(k)k^{n-2} - p(k)$$

Tenemos que calcular el polinomio $q(k)$
Para los distintos valores de k se obtiene una progresión $\{14, 35, 69, 119, 188, ...\}$

14 35 69 119 188

21 34 50 69

13 16 19

3 3

El polinomio $q(k)$ es de tercer grado $q(k) = ak^3 + bk^2 + ck + d$ verifica :

$q(2) = 8a + 4b + 2c + d = 14$

$q(3) = 27a + 9b + 3c + d = 35$

$q(4) = 64a + 16b + 4c + d = 69$

$q(5) = 125a + 25b + 5c + d = 119$

Resolviendo este sistema la expresión del polinomio es:

$$q(k) = \frac{1}{2}k^3 + 2k^2 + \frac{3}{2}k - 1$$

Para obtener el polinomio $p(k)$, observamos la progresión que se obtiene para los distintos valores de k $\{6, 11, 17, 24, ...\}$

6		11		17		24
	5		6		7	
		1		1		

El polinomio $p(k) = ak^2 + bk + c$ verifica para los distintos valores de k:

$$p(2) = 4a + 2b + c = 6$$

$$p(3) = 9a + 3b + c = 11$$

$$p(4) = 16a + 4b + c = 17$$

Resolviendo este sistema la expresión del polinomio es

$$p(k) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2}k - 1 = \frac{1}{2}(k^2 + 5k - 2)$$

La cota inferior de los *números de Schur estrictos* :
$HS(n, k) \geq \ q(k)k^{n-2} - p(k)$

$$= (\tfrac{1}{2}k^3 + 2k^2 + \tfrac{3}{2}k - 1)k^{n-2} - \tfrac{1}{2}(k^2 + 5k - 2)$$

Esta expresión determina las cotas inferiores de los *números de Schur estrictos* para n subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* para $n \geq 2$ y $k \geq 2$.

$\square$

Capítulo 4

Procedimiento de mejora de las Cotas Inferiores del Número de Schur Estricto

En el capítulo anterior hemos obtenido las cotas inferiores de los *números de Schur estrictos* para particiones del conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ formada por n subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* para $n = 2$ y $n = 3$.

La generalización de este estudio nos ha permitido conseguir mejoras de las cotas inferiores de los *números de Schur estrictos* para n subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*.

4.1. Cota de $HS(4, k)$

A continuación obtendremos las cotas inferiores de los *números de Schur estrictos* para particiones del conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ formada por $n = 4$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*. Con la generalización de este caso conseguiremos mejorar las cotas inferiores obtenidas anteriormente, así como aportar un procedimiento de mejora, a partir del cual se puede continuar avanzando.

Pretendemos conseguir particiones del conjunto de enteros $\{1, 2, ..., N\}$, formadas por cuatro subconjuntos $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, *libres de k-sumas estrictas*.

Comenzaremos con una partición del conjunto de enteros formada por cuatro subconjuntos *libres de suma estricta* , es decir $x_1 + x_2 \notin A_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$, siendo x_1 y x_2 **distintos**.

La distribución que determinaba la cota inferior del *número de Schur estricto* $HS(3, 2)$ para tres subconjuntos con dos sumandos *libres de suma estricta*, es la siguiente:

A_1	1	2			7	17		21
A_2	3	4	5	6		18	19	20
A_3	8	9	10	11			...	16

Aplicando un procedimiento similar al del Lema 3.2 anteriormente mencionado se obtiene la cota para el *número de Schur estricto* $HS(4, 2)$.

A_1	1	2			7	17		21		45		49		58
A_2	3	4	5	6	18	19	20		46	47	48	59	60	61
A_3	8	9	10	11			...	16	50	51			...	57
A_4	22	23	24									...	44	

El *número de Schur estricto* es $HS(4,2) \geq 62$

La distribución obtenida para tres subconjuntos con dos sumandos *libres de suma estricta*, la llamaremos A_{32}.

Si designamos por A_{42} a la distribución anterior, podemos observar que para obtener la cota inferior del *número de Schur estricto* $HS(4,2)$ se ha realizado el siguiente proceso:

$$A_{42} = \{A_{32} \rightarrow A_4 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2\}$$

Explicaremos el procedimiento en los siguientes pasos:

Paso 1º
Partimos de la distribución obtenida para $HS(3,2)$

A_1	1	2			7	17		21
A_2	3	4	5	6		18	19	20
A_3	8	9	10	11			...	16

Paso 2º
Comenzamos colocando los elementos en el cuarto conjunto:

$$A_4 = \{t_1, t_2, ..., t_u\}$$

siendo $t_u = t_1 + t_2 - 1$.

Paso 3º
Continuamos en el conjunto $A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_r\}$ de la distribución de $HS(3,2)$.

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_r, x_{r+1}\}$$

siendo $x_{r+1} = t_u + 1$, no podemos colocar mas elementos al ser $x_{r+2} = x_{r+1} + x_1$.

Paso 4º
Pasamos al conjunto $A_2 = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_t\}$ de la distribución de $HS(3,2)$.

$$A_2 = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_t, y_{t+1}, .., y_v\}$$

siendo $y_v = y_{t+1} + y_1 - 1$.

Paso 5º
Se continua con el conjunto A_1, repitiendo el esquema del Paso 3º

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ...x_r, x_{r+1}, x_{r+2}\}$$

siendo $x_{r+2} = y_v + 1$, no podemos colocar mas elementos al ser $x_{r+3} = x_{r+2} + x_1$.

Paso 6º

Continuamos en el conjunto A_3 de la distribución de $HS(3, 2)$

$$A_3 = \{z_1, z_2, ..., z_s, z_{s+1}, ..., z_p\}$$

siendo $z_p = z_{s+1} + z_1 - 1$.

Paso 7º

Pasamos al conjunto A_1, repitiendo el esquema de los Pasos 3º y 5º

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ...x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3}\}$$

siendo $x_{r+3} = z_p + 1$, no podemos colocar mas elementos al ser $x_{r+4} = x_{r+3} + x_1$.

Paso 8º

Se continua en el conjunto A_2

$$A_2 = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_t, y_{t+1}, .., y_v, y_{v+1}, .., y_q\}$$

siendo $y_q = y_{v+1} + y_1 - 1$.

El método concluye en este paso siendo y_q el último elemento que se puede colocar en cualquiera de los cuatro conjuntos. El siguiente entero es la cota inferior del *número de Schur estricto* $HS(4, 2)$.

El *número de Schur estricto* $HS(4, 2) \geq y_q + 1$.

Aplicaremos este procedimiento para obtener la cota inferior del *número de Schur estricto* para cuatro conjuntos *libres de 3-sumas estrictas*.

Comenzamos con la distribución obtenida para tres subconjuntos *libres de 3-sumas estrictas* y aplicamos sucesivamente los pasos descritos en el esquema anterior.

A_1	1 .. 5	21 .. 23	75	.. 77	91	.. 93	285	.. 287	301	.. 303	353	.. 355
A_2	6	7	.. 20	78	79	.. 90	288	..	300	356	..	368
A_3	24	25			..	73	74	304	305	306	..	352
A_4	94	95	96								..	284

El *número de Schur* estricto es $HS(4, 3) \geq 369$

Siguiendo los procedimientos descritos anteriormente para obtener las mejoras de las cotas de $HS(4, 2)$ y $HS(4, 3)$, conseguimos el siguiente resultado para cuatro subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*.

Teorema 4.1. *El número de Schur estricto*

$$HS(4, k) \geq [k^3 + 4k^2 + 6k + 3]T_k - 2k^3 - 7k^2 - 7k + 3$$

siendo $T_k = \frac{(1+k)}{2}k$

Demostración. Para k sumandos tenemos la distribución:

A_1	A_{1k}		$[\alpha_6, \beta_6]$		$[\alpha_8, \beta_8]$	$[\alpha_{10}, \beta_{10}]$
A_2	A_{2k}			$[\alpha_7, \beta_7]$		$[\alpha_{11}, \beta_{11}]$
A_3	A_{3k}			$[\alpha_9, \beta_9]$		
A_4		$[\alpha_5, \beta_5]$				

Siendo A_{1k}, A_{2k} y A_{3k} los intervalos que se han obtenido para el cálculo de la cota inferior de $HS(3, k)$ para tres subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*, descritos en el Lema 3.6

$$\begin{aligned}
A_{1k} &= \{[1, T_k - 1], [(k+1)T_k - k, (k+2)T_k - 2k - 1], [\alpha_2, \beta_2], [\alpha_4, \beta_4]\} \\
A_{2k} &= \{[T_k, (k+1)T_k - k - 1], [\alpha_3, \beta_3]\} \\
A_{3k} &= \{[\alpha_1, \beta_1]\}
\end{aligned}$$

El elemento $\alpha_5 = HS(3, k) + 1 = (k^2 + 3k + 3)T_k - 2k^2 - 5k + 1$ y el elemento β_5 es la suma de los k primeros elementos de A_4 menos uno.

$$\begin{aligned}
\beta_5 &= (k^2 + 3k + 3)T_k - 2k^2 - 5k + 1 + (k^2 + 3k + 3)T_k - 2k^2 - 5k + 1 + 1 + ... \\
&\quad + (k^2 + 3k + 3)T_k - 2k^2 - 5k + 1 + 1 + k - 1 - 1 \\
&= k[(k^2 + 3k + 3)T_k - 2k^2 - 5k + 1] + 1 + 2 + ... + k - 1 - 1 \\
&= (k^3 + 3k^2 + 3k)T_k - 2k^3 - 5k^2 + k + T_k - k - 1 \\
&= (k + 1)^3 T_k - 2k^3 - 5k^2 - 1
\end{aligned}$$

En el conjunto A_1, el intervalo $[\alpha_6, \beta_6]$ tiene como extremos $\alpha_6 = \beta_5 + 1$

$$\begin{aligned}
\beta_6 &= \alpha_6 + 1 + 2 + ... + k - 1 - 1 = (k + 1)^3 T_k - 2k^3 - 5k^2 + T_k - k - 1 \\
&= (k^3 + 3k^2 + 3k + 2)T_k - 2k^3 - 5k^2 - k - 1
\end{aligned}$$

β_6 es la suma del primer elemento del intervalo con los $(k - 1)$ términos iniciales de la primera serie de A_1 menos uno.

El intervalo $[\alpha_7, \beta_7]$ tiene como extremos $\alpha_7 = \beta_6 + 1$ y

$$\begin{aligned}
\beta_7 &= \alpha_7 + T_k + T_k + 1 + ... + T_k + k - 2 - 1 \\
&= \alpha_7 + (k - 1)T_k + (T_k - k - (k - 1)) - 1 \\
&= \alpha_7 + kT_k - 2k \\
&= (k^3 + 3k^2 + 4k + 2)T_k - 2k^3 - 5k^2 - 3k
\end{aligned}$$

β_7 es la suma del primer elemento del intervalo con los $(k - 1)$ términos iniciales de la primera serie de A_2 menos uno.

En el intervalo $[\alpha_8, \beta_8]$ del conjunto A_1 , el extremo $\alpha_8 = \beta_7 + 1$

$\beta_8 = \alpha_8 + 1 + 2 + ... + (k-1) - 1$

$= \alpha_8 + T_k - k - 1$

$= (k^3 + 3k^2 + 4k + 3)T_k - 2k^3 - 5k^2 - 4k$

En el conjunto A_3 el intervalo $[\alpha_9, \beta_9]$, el extremo $\alpha_9 = \beta_8 + 1$

β_9 es la suma del primer elemento del intervalo mas los $(k-1)$ primeros elementos de A_3 menos uno.

$\beta_9 = \alpha_9 + (k+2)T_k - 2k + (k+2)T_k - 2k + 1 + ... + (k+2)T_k - 2k + k - 2 - 1$

$= \alpha_9 + (k-1)[(k+2)T_k - 2k] + 1 + 2 + ... + k - 2 - 1$

$= \alpha_9 + (k^2 + k - 2)T_k - 2k^2 + 2k + T_k - 2k$

$= \alpha_9 + (k^2 + k - 1)T_k - 2k^2$

$= (k^3 + 4k^2 + 5k + 2)T_k - 2k^3 - 7k^2 - 4k + 1$

En el conjunto A_1 el intervalo $[\alpha_{10}, \beta_{10}]$, el extremo $\alpha_{10} = \beta_9 + 1$

$\beta_{10} = \alpha_{10} + 1 + 2 + ... + (k-1) - 1$

$= \alpha_{10} + T_k - k - 1$

$= (k^3 + 4k^2 + 5k + 3)T_k - 2k^3 - 7k^2 - 5k + 1$

En el último intervalo $[\alpha_{11}, \beta_{11}]$ del conjunto A_2, $\alpha_{11} = \beta_{10} + 1$

β_{11} es la suma del primer elemento del intervalo mas los $(k-1)$ primeros términos de A_2 menos uno.

$\beta_{11} = \alpha_{11} + T_k + T_k + 1 + ... + T_k + (k-2) - 1$

$= \alpha_{11} + (k-1)T_k + (T_k - k - (k-1)) - 1$

$= \alpha_{11} + kT_k - 2k$

$= (k^3 + 4k^2 + 6k + 3)T_k - 2k^3 - 7k^2 - 7k + 2$

La cota inferior del *número de Schur estricto* es $HS(4,k) \geq \beta_{11} + 1$

Es decir $HS(4,k) \geq [k^3 + 4k^2 + 6k + 3]T_k - 2k^3 - 7k^2 - 7k + 3$

$\square$

4.2. Relación entre $HS(r+1,k)$ y $HS(r,k)$

Generalizando la construcción realizada para la cota de $HS(4,k)$, obtenemos una nueva expresión expresión que relaciona los *números de Schur estrictos* para r y $r+1$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*.

Teorema 4.2.

$$HS(r+1,k) \geq kHS(r,k) + p(k)$$

siendo $p(k) = (k-1)(\frac{1}{2}k^3 + \frac{5}{2}k^2 + \frac{7}{2}k - 3)$
y $r \geq 3$

Demostración. Considerando el procedimiento utilizado en el Teorema 4.1 para la obtención de las cotas inferiores de los *números de Schur estrictos* para cuatro subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*.

Sean A_i, $i = 1,2,...,r$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* en $\{1,2,...,N\}$, es decir:
$x_1 + x_2 + ... + x_k \notin A_i$ para $i = 1,2,...,r$.

Recordemos que el *número de Schur estricto* denotado por $HS(r,k)$, verifica que
$HS(r,k) \geq N+1$.

Para $r+1$ subconjuntos se obtienen los siguientes bloques, si se considera la descomposición obtenida en el Teorema 4.1 para cuatro subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*,

B_1	B_3	B_5	B_7
	B_4		B_8
	B_6		
B_2			

Los bloques B_1, B_2, B_3, B_4 y B_5, coinciden con los bloques estudiados en la mejora de la cota inferior del Lema 3.6 .

Llamamos B_1 al bloque obtenido para r subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* en el conjunto $\{1,2,...,N\}$, es decir:

$B_1 = [1,N]$, $B_2 = [N+1, E_N]$, $B_3 = [E_N+1, F_N]$, $B_4 = [F_N+1, G_N]$ y $B_5 = [G_N+1, H_N]$, siendo

$$E_N = kN + T_k - 1$$

$$F_N = kN + T_k + T_{k-1} - 1$$

$$G_N = kN + kT_k + T_{k-1} + T_{k-2} - 1$$

$$H_N = kN + kT_k + 2T_{k-1} + T_{k-2} - 1$$

Comenzaremos construyendo el bloque $B_6 = [H_N+1, J_N]$ que pertenece al conjunto A_3 del bloque B_1.

$$J_N = H_N + 1 + (k+2)T_k - 2k + (k+2)T_k - 2k + 1 + ... + (k+2)T_k - 2k + k - 2 - 1$$

$$= H_N + 1 + (k-1)(k+2)T_k + (k-1)(-2k) + (1+2+...+k-2) - 1$$

$$= H_N + (k^2+k-2)T_k - 2k^2 + 2k + T_{k-2}$$

$$= kN + (k^2+2k-2)T_k + 2T_{k-1} + 2T_{k-2} - 2k^2 + 2k - 1$$

$$= kN + (k^2+2k)T_k + 2T_{k-2} - 2k^2 - 1$$

El bloque $B_7 = [J_N + 1, L_N]$ pertenece al conjunto A_1, siendo L_N la suma del primer elemento del bloque B_7 mas los $(k-1)$ primeros términos A_1 menos uno.

$$L_N = J_N + 1 + (1+2+...+(k-1)) - 1$$

$$= kN + (k^2+2k)T_k + T_{k-1} + 2T_{k-2} - 2k^2 - 1$$

El bloque $B_8 = [L_N + 1, M_N]$ pertenece al conjunto A_2, siendo M_N la suma del primer elemento del bloque B_8 mas los $(k-1)$ primeros términos A_2 menos uno.

$$M_N = L_N + 1 + (T_k + T_k + 1 + ... + T_k + k - 2) - 1$$

$$= L_N + 1 + (k-1)T_k + T_{k-2} - 1$$

$$= kN + (k^2+3k-1)T_k + T_{k-1} + 3T_{k-2} - 2k^2 - 1$$

El *número de Schur estricto* para $r+1$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* es mayor o igual que $M_N + 1$ para $r \geq 3$, es decir

$$HS(r+1,k) \geq M_N + 1 \geq kN + (k^2+3k-1)T_k + T_{k-1} + 3T_{k-2} - 2k^2$$

$$= kN + k + (k^2+3k-1)T_k + T_{k-1} + 3T_{k-2} - 2k^2 - k$$

$$= k(N+1) + (k^2+3k-1)T_k + T_{k-1} + 3T_{k-2} - 2k^2 - k$$

$$HS(r+1,k) \geq kHS(r,k) + (k^2+3k-1)T_k + T_{k-1} + 3T_{k-2} - 2k^2 - k$$

Se ha obtenido una relación entre el *número de Schur estricto* en $r+1$ subconjuntos *estrictamemte k-libre de suma* y el *número de Schur estricto* en r subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* .

Si se aplica esta desigualdad para los distintos valores de $k = 2, 3, 4...$, se obtiene:

Para $k = 2$ sumandos:

$$HS(r+1,2) \geq 2HS(r,2) + 9T_2 + T_1 + 3T_0 - 10 = 2HS(r,2) + 18$$

Para $k = 3$ sumandos:

$$HS(r+1,3) \geq 3HS(r,3) + 17T_3 + T_2 + 3T_1 - 21 = 3HS(r,3) + 87$$

Para $k = 4$ sumandos:

$$HS(r+1,4) \geq 4HS(r,4) + 27T_4 + T_3 + 3T_2 - 36 = 4HS(r,4) + 249$$

Para $k = 5$ sumandos:

$$HS(r+1,5) \geq 5HS(r,5) + 39T_5 + T_4 + 3T_3 - 55 = 5HS(r,5) + 558$$

Para $k = 6$ sumandos:

$$HS(r+1,6) \geq 6HS(r,6) + 53T_6 + T_5 + 3T_4 - 78 = 6HS(r,6) + 1080$$

Para $k = 7$ sumandos:

$$HS(r+1,7) \geq 7HS(r,7) + 69T_7 + T_6 + 3T_5 - 105 = 7HS(r,7) + 1893$$

Generalizando para k sumandos:

$$HS(r+1,k) \geq kHS(r,k) + p(k) \qquad [I]$$

Tenemos que calcular el polinomio $p(k)$

Para los distintos valores de k se obtiene la progresión $\{18, 87, 249, 558, 1080, 18993, ...\}$

18 87 249 558 1080 1893

69 162 309 522 813

93 147 213 291

54 66 78

12 12

El polinomio $p(k)$ es de cuarto grado $p(k) = ak^4 + bk^3 + ck^2 + dk + e$ verifica :

$p(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e = 18$

$p(3) = 81a + 27b + 9c + 3d + e = 87$

$p(4) = 256a + 64b + 16c + 4d + de = 249$

$p(5) = 625a + 125b + 25c + 5d + e = 558$

$p(6) = 1296a + 216b + 36cc + 6d + e = 1080$

Resolviendo este sistema se obtiene el polinomio

$$p(k) = \frac{1}{2}k^4 + 2k^3 + k^2 - \frac{13}{2}k + 3 = (k-1)(\frac{1}{2}k^3 + \frac{5}{2}k^2 + \frac{7}{2}k - 3)$$

Obtenemos para k sumandos la siguiente relación entre los *números de Schur estrictos*:

$$HS(r+1,k) \geq kHS(r,k) + p(k) \qquad [III]$$

para $r \geq 3$

$\square$

4.3. Generalización de la Cota Inferior del Número de Schur Estricto

Utilizando la relación del Teorema 4.2, obtenemos la generalización para n conjuntos *libres de k-sumas estrictas* , mejorando el resultado del Teorema 3.8

Teorema 4.3.

$$HS_4(n,k) \geq q(k)k^{n-3} - p(k)$$

siendo $p(k) = \frac{1}{2}k^3 + \frac{5}{2}k^2 + \frac{7}{2}k - 3$

y $q(k) = \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{2}k^3 + \frac{7}{2}k^2 - 2$

para $n \geq 3$ *y* $k \geq 2$

Demostración. Para $r = 1$ y $r = 2$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* tenemos las cotas inferiores de los *números de Schur estrictos*:

$$HS(2,k) \geq (k+2)T_k - 2k$$

$$HS(3,k) \geq [k^2 + 3k + 3]T_k - 2k^2 - 5k + 1$$

Para $r = 4, 5, ...$ subconjuntos *libres de k-sumas estrictas*, aplicamos la expresión $[III]$

Para $r = 3$

$$HS(4,k) \geq kHS(3,k) + p(k)$$

$$\geq k[(k^2 + 3k + 3)T_k - 2k^2 - 5k + 1] + p(k)$$

$$= (k^3 + 3k^2 + 3k)T_k - 2k^3 - 5k^2 + k + p(k)$$

Para $r = 4$

$$HS(5,k) \geq kHS(4,k) + p(k)$$

$$\geq k[(k^3 + 3k^2 + 3k)T_k - 2k^3 - 5k^2 + k + p(k)] + p(k)$$

$$= (k^4 + 3k^3 + 3k^2)T_k - 2k^4 - 5k^3 + k^2 + kp(k) + p(k)$$

Para $r = 5$

$$HS(6, k) \geq kHS(5, k) + p(k)$$

$$\geq k[(k^4 + 3k^3 + 3k^2)T_k - 2k^4 - 5k^3 + k^2 + kp(k) + p(k)] + p(k)$$

$$= (k^5 + 3k^4 + 3k^3)T_k - 2k^5 - 5k^4 + k^3 + (k^2 + k + 1)p(k)$$

En general para $(n - 1)$ conjuntos *libres de k-sumas estrictas* en $\{1, 2, ..., N\}$

$$HS(n, k) \geq (k^{n-1} + 3k^{n-2} + 3k^{n-3})T_k - 2k^{n-1} - 5k^{n-2} + k^{n-3} + (k^{n-4} + ... + k^2 + k + 1)p(k)$$

El último sumando de esta expresión es la suma de una progresión geométrica :

$$k^{n-4} + ... + k^2 + k + 1 = \frac{k^{n-4}k - 1}{k - 1} = \frac{k^{n-3} - 1}{k - 1}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$HS(n, k) \geq (k^{n-1} + 3k^{n-2} + 3k^{n-3})T_k - 2k^{n-1} - 5k^{n-2} + k^{n-3} + (k^{n-3} - 1)(\tfrac{1}{2}k^3 + \tfrac{5}{2}k^2 + \tfrac{7}{2}k - 3)$$

$$= (T_k - 2)k^{n-1} + (3T_k - 5)k^{n-2} + (3T_k + 1)k^{n-3} + (k^{n-3} - 1)(\tfrac{1}{2}k^3 + \tfrac{5}{2}k^2 + \tfrac{7}{2}k - 3)$$

Hemos obtenido una cota inferior de los *números de Schur estrictos* $HS(n, k)$, en función de los números triangulares, de n y de k.

Podemos obtener otra expresión de la cota inferior de $HS(n, k)$, aplicando la expresión anterior para los distintos valores de k en n conjuntos .

Para $k = 2$ sumandos, $T_2 = 3$:

$$HS(n, 2) \geq (3 - 2)2^{n-1} + (9 - 5)2^{n-2} + (9 + 1)2^{n-3} + (2^{n-3} - 1)(18)$$

$$= 2^{n-1} + 2^n + 10 \cdot 2^{n-3} + 18 \cdot 2^{n-3} - 18$$

$$= 2^{n-1} + 2^n + 5 \cdot 2^{n-2} + 9 \cdot 2^{n-2} - 18$$

$$= 2^{n-1} + 2^n + 14 \cdot 2^{n-2} - 18$$

$$= 75 \cdot 2^n - 18$$

Para $k = 3$ sumandos , $T_3 = 6$:

$$HS(n, 3) \geq (6 - 2)3^{n-1} + (18 - 5)3^{n-2} + (18 + 1)3^{n-3} + (3^{n-3} - 1)\tfrac{87}{2}$$

$$= 4 \cdot 3^{n-1} + 13 \cdot 3^{n-2} + 19 \cdot 3^{n-3} + (3^{n-3} - 1)\tfrac{87}{2}$$

$$= 3^2 \cdot 4 \cdot 3^{n-3} + 13 \cdot 3 \cdot 3^{n-3} + 19 \cdot 3^{n-3} + (3^{n-3} - 1)\tfrac{87}{2}$$

$$= (36 + 39 + 19 + \tfrac{87}{2}3^{n-3} - \tfrac{87}{2}$$

$$= \tfrac{275}{2} \cdot 3^{n-3} - \tfrac{87}{2}$$

Para $k = 4$ sumandos , $T_4 = 10$:

$$HS(n, 4) \geq (10 - 2)4^{n-1} + (30 - 5)4^{n-2} + (30 + 1)4^{n-3} + (4^{n-3} - 1) \cdot 83$$

$$= 8 \cdot 4^{n-1} + 25 \cdot 4^{n-2} + 31 \cdot 4^{n-3} + (4^{n-3} - 1) \cdot 83$$

$$= 8 \cdot 4^2 \cdot 4^{n-3} + 25 \cdot 4 \cdot 4^{n-3} + 31 \cdot 4^{n-3} + 83 \cdot 4^{n-3} - 83$$

$$= (128 + 100 + 31 + 83) \cdot 4^{n-3} - 83$$

$$= 342 \cdot 4^{n-3} - 83$$

Para $k = 5$ sumandos, $T_5 = 15$:

$$HS(n, 5) \geq (15 - 2)5^{n-1} + (45 - 5)5^{n-2} + (45 + 1)5^{n-3} + (5^{n-3} - 1) \cdot \tfrac{279}{2}$$

$$= 13 \cdot 5^{n-1} + 40 \cdot 5^{n-2} + 46 \cdot 5^{n-3} + (5^{n-3} - 1) \cdot \tfrac{279}{2}$$

$$= 13 \cdot 5^2 \cdot 5^{n-3} + 40 \cdot 5 \cdot 5^{n-3} + 46 \cdot 45^{n-3} + (5^{n-3} - 1) \cdot \tfrac{279}{2}$$

$$= (325 + 200 + 46 + \tfrac{279}{2}) \cdot 5^{n-3} - \tfrac{279}{2}$$

$$= \tfrac{1421}{2} \cdot 5^{n-3} - \tfrac{279}{2}$$

Para $k = 6$ sumandos , $T_6 = 21$:

$$HS(n, 6) \geq (21 - 2)6^{n-1} + (63 - 5)6^{n-2} + (63 + 1)6^{n-3} + (6^{n-3} - 1) \cdot 216$$

$$= 19 \cdot 6^{n-1} + 58 \cdot 6^{n-2} + 64 \cdot 6^{n-3} + (6^{n-3} - 1) \cdot 216$$

$$= 19 \cdot 36 \cdot 6^{n-3} + 58 \cdot 6 \cdot 6^{n-3} + 64 \cdot 6^{n-3} + (6^{n-3} - 1) \cdot 216$$

$$= (684 + 348 + 64 + 216) \cdot 6^{n-3} - 216$$

$$= 1312 \cdot 6^{n-3} - 216$$

Para $k = 7$ sumandos , $T_7 = 28$:

$$HS(n, 7) \geq (28 - 2)7^{n-1} + (84 - 5)7^{n-2} + (84 + 1)7^{n-3} + (7^{n-3} - 1) \cdot \tfrac{631}{2}$$

$$= 26 \cdot 7^{n-1} + 79 \cdot 7^{n-2} + 85 \cdot 7^{n-3} + (7^{n-3} - 1) \cdot \tfrac{631}{2}$$

$= 26 \cdot 49 \cdot 7^{n-3} + 58 \cdot 7 \cdot 7^{n-3} + 64 \cdot 7^{n-3} + (7^{n-3} - 1) \cdot \frac{631}{2}$

$= (1274 + 553 + 85 + \frac{631}{2}) \cdot 7^{n-3} - \frac{631}{2}$

$= \frac{4455}{2} \cdot 7n - 3 - \frac{631}{2}$

Generalizando para k sumandos en n conjuntos *libres de k-sumas estrictas*:

$$HS(n,k) \geq q(k)k^{n-3} - p(k)$$

para $n \geq 3$

Tenemos que calcular los polinomios $q(k)$ y $p(k)$
Para los distintos valores de $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ el polinomio $q(k)$ toma los valores de de la siguiente progresión :

$40 \quad \frac{275}{2} \quad 342 \quad \frac{1421}{2} \quad 1312 \quad \frac{4455}{2}$

$\frac{195}{2} \quad \frac{409}{2} \quad \frac{737}{2} \quad \frac{1203}{2} \quad \frac{1831}{2}$

$107 \quad 164 \quad 233 \quad 314$

$57 \quad 69 \quad 81$

$12 \quad 12$

El polinomio $q(k)$ es de cuarto grado $p(k) = ak^4 + bk^3 + ck^2 + dk + e$ verifica :

$q(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e = 40$

$q(3) = 81a + 27b + 9c + 3d + e = \frac{275}{2}$

$q(4) = 256a + 64b + 16c + 4d + de = 342$

$q(5) = 625a + 125b + 25c + 5d + e = 1421$

$q(6) = 1296a + 216b + 36cc + 6d + e = 1312$

Resolviendo este sistema se obtiene el polinomio

$$q(k) = \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{2}k^3 + \frac{7}{2}k^2 - 2$$

Para obtener el polinomio $p(k)$, tenemos la siguiente progresión para los distintos valores de $k = 2, 3, 4, 5, 6$

$$\begin{array}{ccccccccc}
18 & & \frac{87}{2} & & 83 & & \frac{279}{2} & & 216 \\
 & \frac{51}{2} & & \frac{79}{2} & & \frac{113}{2} & & \frac{153}{2} & \\
 & & 14 & & 17 & & 20 & & \\
 & & & 3 & & 3 & & &
\end{array}$$

El polinomio p(k) es de tercer grado $p(k) = ak^3 + bk^2 + ck + d$ verifica :

$p(2) = 8a + 4b + 2c + d = 18$

$p(3) = 27a + 9b + 3c + d = \frac{87}{2}$

$p(4) = 64a + 16b + 4c + d = 83$

$p(5) = 125a + 25b + 5c + d = \frac{279}{2}$

Resolviendo el sistema se obtiene el polinomio

$$p(k) = \frac{1}{2}k^3 + \frac{5}{2}k^2 + \frac{7}{2}k - 3$$

Sustituyendo los polinomios $p(k)$ y $q(k)$ en la expresión de la cota inferior de los *números de Schur estrictos* se tiene la siguiente expresión:

$$HS(n,k) \geq (\frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{2}k^3 + \frac{7}{2}k^2 - 2)k^{n-3} - (\frac{1}{2}k^3 + \frac{5}{2}k^2 + \frac{7}{2}k - 3)$$

para $n \geq 3$ y $k \geq 2$

Simplificando se obtiene la cota inferior de $HS(n,k)$ obtenida en la generalización de cuatro subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* para $n \geq 3$ y $k \geq 2$

$$HS(n,k) \geq \frac{1}{2}k^{n+1} + \frac{5}{2}k^n + \frac{7}{2}k^{n-1} - 2k^{n-3} - \frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{2}k^2 - \frac{7}{2}k + 3$$

$\square$

La cota inferior de $HS(n,k)$ obtenida en el Teorema 3.7 para n subconjuntos *libres de k-sumas estrictas* para $n \geq 2$ y $k \geq 2$ es :

$$HS(n,k) \geq \frac{1}{2}k^{n+1} + 2k^n + \frac{3}{2}k^{n-1} - k^{n-2} - \frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k + 1$$

En las siguientes tablas observamos las mejoras de la cotas obtenidas.

$HS(n, k)$: Teorema 3.7

k	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
n=2	9	24	52	95	≥ 156
n=3	22	94	259	≥ 571	≥ 1096
n=4	67	≥ 304	≥ 1087	≥ 2951	≥ 6736
n=5	197	≥ 934	≥ 4399	≥ 14851	≥ 40576

$HS(n, k)$: Teorema 4.3

k	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
n=3	24	94	259	≥ 571	≥ 1096
n=4	67	≥ 369	≥ 1285	≥ 3413	≥ 7656
n=5	197	≥ 1194	≥ 5389	≥ 17623	≥ 47016

Capítulo 5

Cota Superior del Número de Schur Estricto : El Número de Ramsey

En este capítulo acotaremos superiormente a los *números de Schur estrictos* por los *Números de Ramsey*, además conseguimos mejorar la cota superior del *números de Schur* $S(5,2)$.

5.1. Definición del Número de Schur en términos de coloración

Como se ha definido anteriormente el *número de Schur* denotado por $S(n,2)$, es el mayor entero $N+1$, tal que el conjunto $\{1,2,...,N\}$ pueda particionarse en n subconjuntos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *libres de suma*, es decir:

$$\forall x_1, x_2 \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 \notin A_i, i = 1, 2, ..n$$

donde x_1 y x_2 **no necesariamente son distintos**.

Para expresar el Teorema de Schur [25] en términos de coloraciones necesitamos definir el concepto de coloración en un conjunto.

Dado el conjunto $A = \{1, 2, ..., N\}$, sea

$$N_n = \{1, 2, , ..., n\}$$

un conjunto de enteros positivos.

Una *coloración finita en el conjunto* A es simplemente una partición de A en conjuntos disjuntos :

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_n$$

donde a cada elemento del conjunto A_i se le asigna el color i. Se puede expresar mediante la función:

$$\Delta : A \longrightarrow N_n$$

Esta función asigna a cada elemento de la partición su color. Decimos que tenemos una *n-coloración* de A.

Cualquier conjunto $B \subseteq A_i$ se dice que es *monocromático* , es decir todos sus elementos son del mismo color.

El Teorema de Schur [25] puede enunciarse de la siguiente forma:

Teorema 5.1. *[24]*

Para cualquier entero positivo n, existe el mínimo entero positivo $S(n,2)$ tal que para cada n -coloración de $\{1,2,...,N\}$:

$$\Delta : \{1,2,...,N\} \longrightarrow \{1,2,...,n\}$$

existe una solución monocromática a la ecuación:

$$x_1 + x_2 = x_3$$

es decir,

$$\Delta(x_1) = \Delta(x_2) = \Delta(x_3)$$

Comprobemos con un ejemplo que los enunciados son equivalentes.

El *número de Schur* $S(3,2) = 14$ es el mayor entero de forma que el conjunto $\{1,2,3,...,13\}$ pueda particionarse en tres subconjuntos *libres de suma*, siendo estos conjuntos :

$$A_1 = \{1,4,10,13\}$$

$$A_2 = \{2,3,11,12\}$$

$$A_3 = \{5,6,7,8,9\}$$

$\forall x_1, x_2 \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 \notin A_i, i = 1,2,3$

Si el *número de Schur* $S(3,2) = 14$ es el menor entero tal que el conjunto $\{1,2,3,...,14\}$ no se puede particionar en tres subconjuntos *libres de suma*, entonces si definimos una coloración en el conjunto $\{1,2,3,...,14\}$, asignándole a cada conjunto A_i un color:

$$\Delta : \{1,2,3,...,14\} \longrightarrow \{1,2,3\}$$

siendo:

$$\Delta(A_1) = 1$$
$$\Delta(A_2) = 2$$
$$\Delta(A_3) = 3$$

Si se considera la partición anterior, en cualquiera de los tres conjuntos que coloquemos el 14 se verificaría:

En el conjunto $A_1 : 14 = 1 + 13$

En el conjunto $A_2 : 14 = 2 + 12$

En el conjunto $A_3 : 14 = 6 + 8$

En términos de coloración por tanto, el *número de Schur* $S(3,2) = 14$, es el menor entero, tal que para cada *3-coloración* del conjunto $\{1,2,3,...,14\}$ existe una solución monocromática a la ecuación:

$$x_1 + x_2 = x_3$$

es decir ,

$$\Delta(x_1) = \Delta(x_2) = \Delta(x_3)$$

5.2. Relación entre el Número de Schur y el Número de Ramsey

Ramsey (1903-1929) a pesar de su corta vida dejó brillantes y originales aportaciones en disciplinas diversas como la Lógica, la Teoría de la probabilidad y la Decisión, la Filosofía, la Economía, etc.

Sin embargo Ramsey no creó ni desarrolló la teoría que lleva su nombre, que fue iniciada por Erdös y Szekeres en 1933. Tiempo después descubrieron la conexión con los trabajos de Ramsey que en este contexto habían pasado inadvertidos.

La teoría de Ramsey afirma que, en general, en sistemas suficientemente grandes siempre existen subsistemas no pequeños con estructura con orden.

Recordemos que dados dos enteros p y q el *número de Ramsey* es el mínimo entero $r = R(p,q)$ tal que cualquier coloración con dos colores de las aristas del grafo completo K_r, contiene un subgrafo K_p del primer color o un subgrafo K_q del segundo color.

Esta definición se puede generalizar a un número mayor de colores.

Dados los enteros p_1, p_2 , ..., p_t el número de Ramsey $N = R(p_1, p_2, ..., p_t)$ es el mínimo entero tal que cualquier *t-coloración* de las aristas del grafo completo K_N contiene un subgrafo K_{p_i} monocromático $i = 1, 2, ..., t$.

El primer ejemplo sencillo que podemos interpretar dentro de la Teoría de Ramsey es el siguiente.

En cualquier reunión de 6 personas, o bien 3 de ellas se conocen entre sí, o bien 3 de ellas no se conocen entre sí.

Estamos suponiendo que si una persona conoce a otra, entonces ésta también conoce a la primera y que nadie se conoce a sí mismo. Veremos cómo describir este problema en términos de coloración de las aristas de un grafo y observaremos que el resultado no es cierto si sólo hay cinco personas. Esto nos proporcionará el primer ejemplo no trivial de un *número de Ramsey* que enunciamos a continuación.

El *número de Ramsey* $R(3,3) = 6$

Si se considera en el grafo completo K_6 una *2-coloración* de sus aristas, por ejemplo de colores 1 y 2.

$$\Delta : K_6 \longrightarrow \{1,2\}$$

Sean los vértices $\{a, b, c, d, e, f\}$ de K_6 .

Sea a un vértice cualquiera, a dicho vértice le llegan cinco aristas, al menos tres aristas son del color 1 ó tres son del color 2.

Supongamos el primer caso, y que las aristas del color 1 son las que unen el vértice a con los vértices b, c y d.

Si alguna de las aristas entre los tres vértices $\{b, c, d\}$ es del color 1 , ya se tiene un triángulo de dicho color. Si no fuese así, tendríamos un triángulo del color 2 con los vértices $\{b, c, d\}$.

El mismo resultado se obtendría en el segundo caso, si el vértice a recibe al menos tres aristas del color 2.

K_6 con la *2-coloración* definida contiene un K_3 del color 1 ó un K_3 del color 2.

Para obtener la relación entre el *número de Schur* y el *número de Ramsey*, necesitamos la definición dada anteriormente de conjunto *libre de k-sumas*.

Un conjunto A de enteros se dice *libre de k-sumas* si

$$\forall x_1, x_2, ..., x_k \in A \Rightarrow x_1 + x_2 + .. + x_k \notin A$$

donde los x_i **no necesariamente son distintos**.

En 1934 de los resultados de Rado [19] se obtiene la siguiente generalización.

Teorema 5.2. *[19]*

Dados dos enteros positivos n y k , $k \geq 2$ existe el mayor entero positivo $S(n,k)$ con la propiedad de que el conjunto $\{1, 2, ..N\}$ puede ser particionado en n conjuntos libres de k- sumas.

En términos de coloración el *número de Schur* $S(n,k)$ es el menor entero N, tal que para cualquier *n-coloración* del conjunto $\{1, 2, ..., N\}$:

$$\Delta : \{1, 2, ..., N\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$$

existe una solución monocromática a la ecuación:

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = x_{k+1}$$

es decir

$$\Delta(x_1) = \Delta(x_2) = ... = \Delta(x_{k+1})$$

donde los x_i **no necesariamente son distintos**.

La relación entre el *número de Schur* y el *número de Ramsey* viene dada por Robertson [22] en el siguiente resultado.

Lema 5.3. *[22]*

$$S(n,k) \leq R(k+1, k+1, \overset{n}{\ldots}, k+1) - 1$$

siendo el número de Ramsey $r = R(k+1, k+1, \overset{n}{\ldots}, k+1)$ el menor entero tal que cualquier n-coloración del grafo completo K_r contiene un subgrafo completo K_{k+1} del primer color, o del segundo color,..., ó del n-ésimo color.

Aplicando este Lema para los distintos valores de n y k se obtienen las distintas relaciones entre los *números de Schur* y los *números de Ramsey*.

Para una *2-coloración*:

Si $k = 2$ sumandos $S(2,2) \leq R(3,3) - 1$

Si $k = 3$ sumandos $S(2,3) \leq R(4,4) - 1$

Si $k = 4$ sumandos $S(2,4) \leq R(5,5) - 1$

$\vdots$

En general para k sumandos : $S(2,k) \leq R(k+1,k+1) - 1$

Para una *3-coloración*:

Si $k = 2$ sumandos $S(3,2) \leq R(3,3,3) - 1$

Si $k = 3$ sumandos $S(3,3) \leq R(4,4,4) - 1$

Si $k = 4$ sumandos $S(3,4) \leq R(5,5,5) - 1$

$\vdots$

En general para k sumandos : $S(3,k) \leq R(k+1,k+1,k+1) - 1$

Para una *n-coloración*:

Si $k = 2$ sumandos $S(n,2) \leq R(3,3,\overset{n}{\ldots},3) - 1$

Si $k = 3$ sumandos $S(n,3) \leq R(4,4,\overset{n}{\ldots},4) - 1$

Si $k = 4$ sumandos $S(n,4) \leq R(5,5,\overset{n}{\ldots},5) - 1$

$\vdots$

En general para k sumandos : $S(n,k) \leq R(k+1,k+1,\overset{n}{\ldots},k+1) - 1$

5.3. Mejora de la Cota Superior del $S(5,2)$

Como hemos visto en el Capítulo 1 la última acotación conocida del *número de Schur* $S(5,2)$ es

$$161 \leq S(5,2) \leq 316$$

La primera inecuación es de Exoo [7] obtenida en 1994 y la segunda se obtiene de una cota superior de $R_5(3) = R(5,5,5,5,5)$ dada en el survey de Radziszowski [21].

Lema 5.4. $S(5,2) \leq 306$

Demostración. Utilizaremos la cota superior del número de Ramsey $R_4(3)$, obtenida en 2004 por Fettes, Kramer y Radziszowki [9].

Si designamos al número de Ramsey $R_4(3) = R(3,3,3,3)$, veamos que con la cota superior de $R_4(3)$ y utilizando una relación entre los números de Ramsey $R_4(3)$ y $R_5(3)$ se obtiene la mejora de la cota superior del *número de Schur* $S(5,2)$.

De la cota superior dada por Greenwood y Gleason [11]:

$R(K_1, K_2, ..., K_r) \leq 2 - r + \sum_{i=1}^{r} R(K_1, ..., K_{i-1}, K_i - 1, K_{i+1}, ..., K_r)$
Se obtiene :
$R(3,3,3,3,3) \leq 2 - 5 + R(2,3,3,3,3) + R(3,2,3,3,3) + ... + R(3,3,3,3,2)$
$\leq\ 2 - 5 + 5R(2,3,3,3,3)$
$\leq -3 + 5R(2,3,3,3,3)$
$= -3 + 5R(3,3,3,3)$

De la cota obtenida en [9], tenemos que $R_4(3) \leq 62,$ entonces

$$R_5(3) \leq -3 + 5R_4(3) \leq 307$$

Además con la relación entre los *números de Schur* y los números de Ramsey

$$S(5,2) \leq R_5(3) - 1$$

conseguimos la mejora de la cota superior:

$$S(5,2) \leq 306$$

□

5.4. El Número de Ramsey como Cota Superior del Número de Schur Estricto

El estudio que abordamos es de gran importancia ya que conseguimos acotar superiormente a los *números de Schur estrictos* por los *números de Ramsey* .

Recordemos que hemos llamamos *número de Schur estricto* y lo denotamos por $HS(n,k)$, al mayor entero $N + 1$, tal que el conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ pueda particionarse en n subconjuntos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *libres de k- sumas estrictas*, es decir :

$$\forall x_1, x_2, ..., x_k \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 + .. + x_k \notin A_i$$

con $i = 1, 2, ..., n$ y donde los x_i son todos **distintos**.

En términos de coloración el *número de Schur estricto*, $HS(n,k)$ es el mínimo entero $N,$ tal que para cada *n-coloración* del conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., N\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$$

existe una solución monocromática a la ecuación:

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = x_{k+1},$$

siendo los x_i todos **distintos**.

Sea $T_k = \frac{(1+k)}{2} k$ los números triangulares.

Para una *n-coloración* obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.5. *El número de Schur estricto $HS(n,2)$ verifica:*

$HS(n,2) \leq R(T_2+1, T_2+1, \overset{n}{\ldots}, T_2+1) - 1$
siendo $T_2 = \frac{(1+2)}{2}2 = 3$

Demostración. El *número de Schur estricto*, $HS(n,2)$ es el mínimo entero $N,$ tal que para cada *n-coloración* del conjunto $\{1,2,,...,N\}$

$$\Delta : \{1,2,...,N\} \longrightarrow \{1,2,...,n\}$$

existe una solución monocromática a la ecuación:

$$x_1 + x_2 = x_3$$

siendo los x_1 y x_2 todos **distintos**.

El *número de Ramsey* $t = R(4,4,\overset{n}{\ldots},4)$ garantiza que toda *n-coloración* de las aristas del grafo completo K_t contiene un subgrafo completo K_4 de aristas monocromáticas.

Veamos que el *número de Schur estricto* correspondiente es menor o igual que $t-1$, es decir $HS(n,2) \leq t-1$.

En efecto, sea una *n-coloración* del conjunto $\{1,2,...,t-1\}$:

$$\Delta : \{1,2,...,t-1\} \longrightarrow \{1,2,...,n\}$$

Veamos que existen x_1, x_2, x_3 monocromáticos, tal que $x_1 + x_2 = x_3$ con $x_1 \neq x_2$.

Asociada a la coloración Δ podemos definir una *n-coloración* Δ_1 de las aristas del grafo K_t .

$$\Delta_1 : K_t \longrightarrow \{1,2,...,n\}$$

A cada arista $\{a_i a_j\}$ se le asigna el color $\Delta(|a_i - a_j|)$, es decir :

$$\Delta_1(a_i a_j) = \Delta(|a_i - a_j|)$$

Por la definición de *número de Ramsey* $t = R(4,4,\overset{n}{\ldots},4),$ K_t contiene un K_4 con aristas monocromáticas.
Consideremos el grafo K_4 monocromático de vértices $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
Supongamos que $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ sin pérdida de generalidad.
Consideremos las aristas del grafo K_4

$$\begin{array}{ccc} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & a_3 - a_4 \\ & a_1 - a_3 & a_2 - a_4 \\ & & a_1 - a_4 \end{array}$$

Se pueden presentar los siguientes casos:

Caso 1º
Si $(a_1 - a_2) \neq (a_2 - a_3)$. Sea $x_1 = a_1 - a_2$. Llamamos $x_2 = a_2 - a_3$ entonces:
$x_1 + x_2 = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) = a_1 - a_3 = x_3$

Se verifica que $x_1 + x_2 = x_3$ siendo $\Delta(x_1)$=$\Delta(x_2)$= $\Delta(x_3)$
Por tanto, hemos obtenido una solución monocromática a la ecuación $x_1 + x_2 = x_3$, siendo $x_1 \neq x_2$.

Caso 2º
Si $(a_1 - a_2) = (a_2 - a_3)$. Sea $x_1 = (a_1 - a_2)$.
Llamamos $x_2 = (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) = (a_2 - a_4)$ entonces:
$x_1 + x_2 = (a_1 - a_4) = x_3$
Se verifica que $x_1 + x_2 = x_3$ siendo $\Delta(x_1)$=$\Delta(x_2)$= $\Delta(x_3)$
Por tanto, hemos obtenido una solución monocromática a la ecuación $x_1 + x_2 = x_3$, siendo $x_1 \neq x_2$.

Concluimos que para $N \geq t - 1$ y para cualquier *n-coloración* del conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ siempre es posible encontrar una terna $\{x_1, x_2, x_3\}$ con $x_1 \neq x_2$ tal que, $x_1 + x_2 = x_3$.

Como el *número de Schur estricto*, $HS(n, 2)$ es el mínimo entero N tal que para cada *n-coloración* del conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$ existe una solución monocromática a la ecuación $x_1 + x_2 = x_3$.

Es decir $HS(n, 2) \leq t - 1$, por tanto $HS(n, 2) \leq R(4, 4, \overset{n}{\ldots}, 4) - 1$

$\square$

Podemos demostrar un resultado similar para el *número de Schur estricto*, $HS(n, k)$

Teorema 5.6. *El número de Schur estricto* $HS(n, k)$ *verifica:*
$HS(n, k) \leq R(T_k + 1, T_k + 1, \overset{n}{\ldots}, T_k + 1) - 1$
siendo $T_k = (1 + k)k/2$

Demostración. El *número de Schur estricto*, $HS(n, k)$ es el mínimo entero N, tal que para cada *n-coloración* del conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., N\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$$

existe una solución monocromática a la ecuación:

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = x_{k+1}$$

siendo todos los x_i **distintos**.

El *número de Ramsey* $t = R(T_k + 1, T_k + 1, ..., T_k + 1)$ es el menor entero tal que cualquier *n-coloración* del grafo completo K_t, contiene un subgrafo completo K_{T_k+1} de aristas monocromáticas.

Veamos que el *número de Schur estricto* $HS(n, k)$ es menor o igual que $t-1$, es decir $HS(n, k) \leq t-1$.
En efecto, sea una *n-coloración* del conjunto $\{1, 2, ..., t - 1\}$:

$$\Delta : \{1, 2, ..., t - 1\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$$

Veamos que existen $x_1, x_2, ..., x_k$ aristas monocromáticas, tal que $x_1 + x_2 + ... + x_k = x_{k+1}$, siendo todas las x_i **distintas**.

Asociada a la coloración Δ podemos definir una *n-coloración* Δ_1 de las aristas del grafo K_t .

$$\Delta_1 : K_t \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$$

A cada arista $\{a_i a_j\}$ se le asigna el color $\Delta(|a_i - a_j|)$, es decir :

$$\Delta_1(a_i a_j) = \Delta(|a_i - a_j|)$$

Por la definición de *número de Ramsey* $t = R(T_k + 1, T_k + 1, \overset{n}{\ldots}, T_k + 1)$, K_t contiene un K_{T_k+1} con aristas monocromáticas.

Sea el grafo K_{T_k+1} monocromático de vértices $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{T_k}, a_{T_k+1}\}$

Supongamos que $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > ... > a_{T_k} > a_{T_k+1}$ sin pérdida de generalidad

Consideremos las aristas del grafo K_{T_k+1}:

$$\begin{array}{cccc}
a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & a_3 - a_4 ... & a_{T_k} - a_{T_k+1} \\
 & a_1 - a_3 & a_2 - a_4 ... & a_{T_k-1} - a_{T_k+1} \\
 & & \ddots & \\
 & & & a_1 - a_{T_k+1}
\end{array}$$

Tenemos que probar que existen $x_1, x_2, ..., x_k$ aristas monocromáticas, siendo todas las x_i **distintas** y verificando la ecuación, $x_1 + x_2 + ... + x_k = x_{k+1}$.

Esta demostración la hacemos por inducción.

• Para $k = 1$, $T_1 = 1$

Tenemos el grafo completo K_2, cuyos vértices son $\{a_1, a_2\}$ y forman una arista monocromática $x_1 = a_1 - a_2$

• Para $k = 2$, $T_2 = 3$

Tenemos el grafo completo K_4, cuyos vértices son $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Hemos probado en el Teorema5.5 que existe una solución monocromática a la ecuación $x_1 + x_2 = x_3$, siendo $x_1 \neq x_2$.

• Probemos para k este resultado. Por inducción, suponemos que se verifica para $k - 1$.

Sean los vértices del grafo completo monocromático K_{T_k+1} :

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{T_k}, a_{T_k+1}\}$$

Cualquier grafo completo K_n tiene un total de $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas. De las aristas totales del grafo K_{T_k+1} sabemos que en la primera fila hay T_k aristas, en este conjunto de aristas aplicamos la inducción.

Sea este conjunto:

$A_1 = \{a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, ..., a_{T_k} - a_{T_k+1}\}$, como $T_k = T_{k-1} + k$.

Sabemos que en el conjunto A_1 hay un subconjunto de T_{k-1} aristas, que contiene $(k - 1)$ aristas, todas distintas entre sí que verifican la ecuación monocromática, por hipótesis de inducción.

A estas aristas las designamos por $\{x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$ y a las k restantes aristas del conjunto A_1, las llamaremos $B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$.

Tenemos que obtener una arista de este conjunto o suma de elementos de este conjunto que sea distinta a todas las aristas x_i, $i = 1, 2, ..., k-1$.

- Si $b_1 \neq x_1$, se verifica la primera condición
  Si $b_1 = x_1$, elegimos la arista $b_1 + b_2 \neq x_1$, se verifica también en este caso la primera condición.
- Si $b_1 + b_2 \neq x_2$, se verifica la segunda condición
  Si $b_1 + b_2 = x_2$, elegimos la arista $b_1 + b_2 + b_3 \neq x_2$, se verifica también en este caso la segunda condición.

Continuamos con este procedimiento, en el caso $k-1$ tenemos:

- Si $b_1 + b_2 + ... + b_{k-1} \neq x_{k-1}$, se verifica la condición $k-1$.
  Si $b_1 + b_2 + ... + b_{k-1} = x_{k-1}$, elegimos la arista $b_1 + b_2 + ..., +b_k \neq x_{k-1}$, se verifica también en este caso la condición $k-1$.

Hemos obtenido, por tanto una arista del conjunto B o del conjunto de aristas totales del grafo completo K_{T_k+1}, que designamos por x_k, que es distinta a todas las aristas $\{x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$.

Resumiendo , hemos probado que existen $x_1, x_2, ..., x_k$ aristas monocromáticas, tal que $x_1 + x_2 + ... + x_k = x_{k+1}$, siendo todas las x_i **distintas**.

Concluimos que para $N \geq t-1$ y para cualquier *n-coloración* del conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ siempre es posible encontrar una solución monocromática a la ecuación $x_1 + x_2 + ... + x_k = x_{k+1}$,
siendo todos los x_i **distintos**.

Como el *número de Schur estricto*, $HS(n,k)$ es el mínimo entero N tal que para cada *n-coloración* del conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$ existe una solución monocromática a la ecuación $x_1 + x_2 + ... + x_k = x_{k+1}$.

Es decir $HS(n,k) \leq t-1$, por tanto

$$HS(n,k) \leq R(K_{T_k+1}, K_{T_k+1}, \overset{n}{\ldots}, K_{T_k+1}) - 1$$

□

Aplicando este Teorema para los distintos valores de n y k se obtienen las relaciones entre los *números de Schur estrictos* y los *números de Ramsey*.

Para una *2-coloración*:

Si $k = 2$ sumandos $HS(2,2) \leq R(4,4) - 1$

Si $k = 3$ sumandos $HS(2,3) \leq R(7,7) - 1$

Si $k = 4$ sumandos $HS(2,4) \leq R(11,11) - 1$

Si $k = 5$ sumandos $HS(2,5) \leq R(16,16) - 1$

$\vdots$

En general para k sumandos : $HS(2,k) \leq R(T_k+1, T_k+1) - 1$

Para una *3-coloración*:

Si $k=2$ sumandos $HS(3,2) \leq R(4,4,4) - 1$

Si $k=3$ sumandos $HS(3,3) \leq R(7,7,7) - 1$

Si $k=4$ sumandos $HS(3,4) \leq R(11,11,11) - 1$

Si $k=5$ sumandos $HS(3,5) \leq R(16,16,16) - 1$

$\vdots$

En general para k sumandos : $HS(3,k) \leq R(T_k+1, T_k+1, T_k+1) - 1$

Para una *n-coloración*:

Si $k=2$ sumandos $HS(n,2) \leq R(4,4,\overset{n}{\ldots},4) - 1$

Si $k=3$ sumandos $HS(n,3) \leq R(7,7,\overset{n}{\ldots},7) - 1$

Si $k=4$ sumandos $HS(n,4) \leq R(11,11,\overset{n}{\ldots},11) - 1$

$\vdots$

En general para k sumandos : $HS(n,k) \leq R(T_k+1, T_k+1, \overset{n}{\ldots}, T_k+1) - 1$

Hemos conseguido acotar superiormente los *números de Schur estrictos* por los *números de Ramsey*, con estas acotaciones se puede avanzar en posteriores estudios en el cálculo de estos números.

Parte II

Número de Rado Estricto

Capítulo 6

Nociones básicas del Número de Rado

En la segunda parte de esta memoria presentamos resultados sobre los *Números de Rado*.

Como se ha definido anteriormente el *número de Schur* denotado por $S(n,2)$, es el mayor entero $N+1$ tal que el conjunto $\{1,2,...,N\}$ pueda particionarse en n subconjuntos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *libres de suma*, es decir:

$$\forall x_1, x_2 \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 \notin A_i, i = 1, 2, ..n$$

donde x_1 y x_2 **no necesariamente son distintos**.

La expresión $S(n,2)$, indica *n* conjuntos *libres de suma* con dos sumandos.

Como hemos visto en el capítulo anterior Teorema de Schur [25] puede enunciarse en términos de coloración de la siguiente forma:

Teorema 6.1. *[24]*

Para cualquier entero positivo n, existe el mínimo entero positivo $S(n,2) = N$ tal que para cada coloración de $\{1,2,...,N\}$:

$$\Delta : \{1,2,...,N\} \longrightarrow \{1,2,...,n\}$$

existe una solución monocromática a la ecuación:

$$x_1 + x_2 = x_3$$

es decir

$$\Delta(x_1) = \Delta(x_2) = \Delta(x_3)$$

En 1933 Rado [19][20] consideró el problema de determinar si un sistema de ecuaciones lineales admite solución monocromática para cada *n-coloración* de números naturales.

Después de 75 años de los primeros resultados de Rado, se han obtenido muy pocos progresos sobre los números de Rado para algunos sistemas de ecuaciones lineales.

Burr y Loo en [5] [6] investigaron algunas familias particulares de ecuaciones con *2-coloración* de enteros positivos. En este sentido podemos considerar el siguiente problema:

Dado un entero positivo $c \geq 0$ y el conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$, llamamos *Número de Rado* $R(2, c)$ al mayor entero positivo $N + 1$, para que el conjunto pueda subdividirse en dos conjuntos *libres de suma* en el sentido de Rado:

El conjunto A es *libre de suma* en el sentido de Rado si:

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 + x_2 + c \notin A$$

donde x_1 y x_2 **no necesariamente son distintos**.

En términos de coloraciones se define:

El *Número de Rado* $R(2, c)$ como es el mínimo entero N, tal que para cada *2-coloración* del conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$:

$$\Delta : \{1, 2, ..., N\} \longrightarrow \{1, 2\}$$

existe una solución monocromática de la ecuación

$$x_1 + x_2 + c = x_3$$

donde x_1 y x_2 **no necesariamente son distintos**.

Bur y Loo [6] demostraron que si $c \geq 0$ el *número de Rado*

$$R(2, c) = 4c + 5$$

En 1993 Schaal [23] generaliza la definición del *número de Rado* para k sumandos.

El *número de Rado* $R_k(2, c)$ para $k \geq 2$ y $c \geq 0$ es el mínimo entero N, tal que para cada *2-coloración* del conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$:

$$\Delta : \{1, 2, ..., N\} \longrightarrow \{1, 2\}$$

existe una solución monocromática a

$$x_1 + x_2 + ...x_k + c = x_{k+1}$$

donde $x_1, x_2, ..x_k$ **no necesariamente son distintos**.

En el caso de que no exista se define $R_k(2, c) = \infty$

Schaal [23] obtiene el siguiente resultado :

Teorema 6.2. *[23]*

Si $k \geq 0$ y $c \geq 0$ entonces el número de Rado es:

$$R_k(2, c) = \begin{cases} \infty & \textit{si k y c impares} \\ (k+1)^2 + (c-1)(k+2) & \textit{otro caso} \end{cases}$$

Los resultados de Bur y Loo [6] se obtienen como un corolario de este Teorema [23] para $k = 2$

En 1995 Schaal [24] obtuvo el *número de Rado* para particiones del conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$, formada por tres conjuntos *libres de suma* en el sentido de Rado.

El *Número de Rado* $R(3, c)$ es el mínimo entero N, tal que para cada *3-coloración* del conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., N\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

existe una solución monocromática a la ecuación:

$$x_1 + x_2 + c = x_3$$

donde x_1 y x_2 **no necesariamente son distintos**.

Schaal [24] demuestra $R(3, c) = 13c + 14$ para $c \geq 0$

Para el conjunto de enteros $\{1, 2, ..., 13c + 13\}$, obtiene la partición :

$$A_1 = \{1, 2, .., c + 1, 3c + 4, ..., 4c + 4, 9c + 10, ..., 10c + 10, 12c + 13, ..., 13c + 13\}$$

$$A_2 = \{c + 2, ..., 3c + 3, 10c + 11, ..., 12c + 12\}$$

$$A_3 = \{4c + 5, ..., 9c + 9\}$$

Los conjuntos A_1, A_2 y A_3 son *libres de suma* en el sentido de Rado.
Si se coloca el $13c + 14$ en cualquiera de los tres conjuntos:

En el conjunto $A_1 : 13c + 14 = 3c + 4 + 9c + 10 + c$

En el conjunto $A_2 : 13c + 14 = c + 2 + 11c + 12 + c$

En el conjunto $A_3 : 13c + 14 = 4c + 5 + 8c + 9 + c$

y $13c + 14 = 6c + 7 + 6c + 7 + c$

Se obtendrían soluciones monocromáticas a la ecuación:

$$x_1 + x_2 + c = x_3$$

donde x_1 y x_2 **no necesariamente son distintos**.

En 2001 Kosek y Schaal [16] obtienen cotas inferiores y superiores de los *números de Rado* para algunos valores determinados de $c < 0$.

En 2008 Guo y Sun [12] determinan los *número de Rado* $R(a_1, ..., a_m)$:

Sean $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ enteros positivos, el *Número de Rado* $R(a_1, ..., a_m)$ es el menor entero positivo tal que para cada *2-coloracion* del conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ con $N \geq R(a_1, ..., a_m)$, existe una solución monocromática a la ecuación:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = x_0$$

con $x_0, x_1, ..., x_m \in \{1, 2, ..., N\}$

Se obtienen los valores de los *números de Rado* $R(a_1, ..., a_m)$ para $av^2 + v - a$, siendo $a = min\{a_1, ..., a_m\}$ y $v = a_1 + ... + a_m$.

En nuestro trabajo definimos el *Número de Rado estricto* $SR(2, c)$ como el mayor entero positivo $N + 1$, para que el conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$ pueda subdividirse en dos subconjuntos *libres de suma estricta* en el sentido de Rado.

El conjunto A es *libre de suma estricta* si:

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 + x_2 + c \notin A$$

siendo x_1 y x_2 **distintos**.

De forma análoga definimos el *Número de Rado estricto* $SR(3, c)$, es decir el mayor entero positivo $N + 1$, para que el conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ pueda subdividirse en tres conjuntos *libres de suma estricta* en el sentido de Rado.

En términos de coloración el *Número de Rado estricto*, $SR(3, c)$ es el mínimo entero N, tal que para cada *3-coloración* del conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., N\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

existe una solución monocromática a la ecuación:

$$x_1 + x_2 + c = x_3,$$

siendo $x_1 \neq x_2$ y $c > 0$.

El resultado fundamental que obtenemos son los *números de Rado estrictos* $SR(2, c)$ y $SR(3, c)$, probaremos los teoremas correspondientes y obtendremos las distribuciones que determinan estos números

Teorema 6.3. *El Número de Rado estricto* $SR(2, c) = 4c + 8$, *siendo* $c > 0$
Los dos subconjuntos libres de suma estricta en el sentido de Rado son:

$$A_1 = \{1, 2, ..., c + 2, 3c + 7, ..., 4c + 7\}$$

$$A_2 = \{c + 3, c + 4, ..,3c + 6\}$$

Teorema 6.4. *El Número de Rado estricto* $SR(3, c) = 13c + 22$, *siendo* $c > 0$
Los tres subconjuntos libres de suma estricta en el sentido de Rado son:

$$A_1 = \{1, ..c + 2, 3c + 7, .., 4c + 7, 9c + 17, .,10c + 17, 12c + 21, ..., 13c + 21\}$$

$$A_2 = \{c + 3, ..., 3c + 6, 10c + 18, ..., 12c + 20\}$$

$$A_3 = \{4c + 8, 4c + 9, ..., 9c + 16\}$$

Capítulo 7

Valor exacto del Número de Rado Estricto $SR(2,c)$.

En este capítulo obtendremos el *número de Rado estricto* $SR(2,c)$.

7.1. Número de Rado Estricto $SR(2,c)$

Dado un entero positivo $c > 0$ y el conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$, llamamos *Número de Rado estricto* $SR(2,c)$ al mayor entero positivo $N + 1$, para que el conjunto pueda subdividirse en dos subconjuntos *libres de suma estricta* en el sentido de Rado:

El conjunto A es *libre de suma estricta* en el sentido de Rado si

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 + x_2 + c \notin A$$

siendo x_1 y x_2 **distintos**.

Probaremos el siguiente resultado para el *número de Rado estricto* en dos subconjuntos.

Lema 7.1. *El número de Rado estricto* $SR(2,c) \geq 4c + 8$ *con* $c > 0$

Demostración. Comenzaremos demostrando que $SR(2,c) \geq 4c + 8$, para los valores de $c = 1, 2, 3...$

Para $c = 1$, podemos obtener la partición siguiente formada por dos subconjuntos $\{A_1, A_2\}$, *estrictamente libres de suma* :

$$\forall x_1, x_2 \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 + 1 \notin A_i, i = 1, 2$$

A_1	1	2	3		10	11
A_2	4	5	6	7	8	9

El *número de Rado estricto* $SR(2,1) \geq 12$

Para $c = 2$, se obtiene dos subconjuntos $\{A_1, A_2\}$ *libres de suma estricta* con la siguiente distribución :

$$\forall x_1, x_2 \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 + 2 \notin A_i, i = 1, 2$$

A_1	1	2	3	4		13	14	15
A_2	5	6	7	8	9	10	11	12

El *número de Rado estricto* obtenido $SR(2, 2) \geq 16$

Para $c = 3$, se obtiene dos subconjuntos $\{A_1, A_2\}$ *libres de suma estricta* con la siguiente distribución :

$$\forall x_1, x_2 \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 + 3 \notin A_i, i = 1, 2$$

A_1	1	2	3	4	5		16	17	18	19
A_{12}	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

El *número de Rado estricto* $SR(2, 3) \geq 20$

En general el procedimiento utilizado se puede resumir en los siguientes pasos:

Paso 1º

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ...x_s\}$$

siendo $x_s = (x_1 + x_2 + c) - 1$

Paso 2º

$$A_2 = \{y_1, y_2, y_3, ...y_r\}$$

siendo $y_r = (y_1 + y_2 + c) - 1$
$y_1 = x_1 + x_2 + c$
$y_2 = x_1 + x_2 + c + 1$
siendo el último elemento $y_r = (x_1 + x_2 + c) + (x_1 + x_2 + c + 1) + c - 1 =$
$2x_1 + 2x_2 + 3c$

Paso 3º

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ...x_s, y_{r+1}, y_{r+2}, ...y_t\}$$

El último elemento $y_t = (x_1 + y_{r+1} + c) - 1 = x_1 + (2x_1 + 2x_2 + 3c + 1) + c - 1$
$= 3x_1 + 2x_2 + 4c$

El *número de Rado estricto* obtenido para cualquier valor de c es :

$$SR(2, c) > 3x_1 + 2x_2 + 4c = 7 + 4c$$

Obteniendo para cualquier valor de c la siguiente distribución:

	1	2	...	$c+2$	$3c+7$	...	$3c+7+1+c-1$
	c+3	c+4	...			...	$c+3+c+4+c-1$

El *número de Rado estricto* obtenido para cualquier valor de $c > 0$ es :

$$SR(2, c) \geq 4c + 8$$

□

Probemos la desigualdad contraria:

Lema 7.2. *El número de Rado estricto $SR(2, c) \leq 4c + 8$ con $c > 0$*

Demostración. Supongamos lo contrario :

Existe una partición de dos conjuntos $\{A_1, A_2\}$, *libres de suma estricta* del conjunto $\{1, 2, .., 4c + 8\}$:

$$\forall x_1, x_2 \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 + c \notin A_i, i = 1, 2$$

Según la distribución obtenida en Lema 7.1 el número $4c + 8$ se puede expresar como suma de dos elementos del primer conjunto:

$$4c + 8 = (3c + 7) + 1 + c$$

y también como suma de dos elementos del segundo:

$$4c + 8 = (c + 3) + (2c + 5) + c$$

Si conseguimos otra distribución y colocamos $4c + 8$, los elementos $3c + 7$ y 1 no pueden pertenecer al mismo conjunto, lo mismo sucede con los elementos $c + 3$ y $2c + 5$, por el razonamiento anterior.

En estos casos tendríamos una de las dos distribuciones siguientes:

1	c+3
3c+7	2c+5

1	2c+5
3c+7	c+3

La primera no es posible, puesto que el 2 no se podría colocar, ya que si se pudiese colocar tendríamos:

$$1 + 2 + c = c + 3$$

ó

$$2c + 5 + 2 + c = 3c + 7$$

Además en la segunda distribución tampoco se podría colocar $c + 4$, ya que en caso de colocarse se tendría :

$$c + 4 + 1 + c = 2c + 5$$

ó

$$c + 4 + c + 3 + c = 3c + 7$$

Llegando con ambas distribuciones a un absurdo.

□

Con los resultados de los Lema 7.1 y Lema 7.2, concluimos con el resultado:

Teorema 7.3. *El número de Rado estricto* $SR(2, c) = 4c + 8 \quad$ *con* $c > 0$

De esta forma queda demostrado que *número de Rado estricto* $SR(2, c) = 4c + 8$, para cualquier $c > 0$ con $x_1 + x_2 + c$ *libres de suma estricta*, siendo $x_1 \neq x_2$

Capítulo 8

Resultado Principal: Valor exacto de $SR(3, c)$

En este capítulo describimos cómo se obtiene el resultado que consideramos más relevante en esta tesis: El valor exacto de $SR(3, c)$.

La prueba de este resultado tiene una casuística tan grande que hemos decidido incluir éste capítulo para explicar cómo en los dos capítulos siguientes llegamos a probar este importante resultado.

Dado un entero positivo $c > 0$ y el conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$, llamamos *número de Rado estricto* $SR(3, c)$ al mayor entero positivo $N + 1$, para que el conjunto pueda subdividirse en tres subconjuntos *libres de suma estricta* en el sentido de Rado:

El conjunto A es *libres de suma estricta* en el sentido de Rado:

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 + x_2 + c \notin A$$

siendo x_1 y x_2 **distintos**.

En términos de coloración el *número de Rado estricto*, $SR(3, c)$ es el mínimo entero N, tal que para cada *3-coloración* del conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., N\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

existe una solución monocromática a la ecuación:

$$x_1 + x_2 + c = x_3,$$

siendo $x_1 \neq x_2$ y $c > 0$.

Nuestro resultado principal es:

Teorema 8.1. *El número de Rado estricto* $SR(3, c) = 13c + 22$

Los tres subconjuntos libres de suma estricta en el sentido de Rado son:

$$A_1 = \{1, ..c + 2, 3c + 7, .., 4c + 7, 9c + 17, ., 10c + 17, 12c + 21, ..., 13c + 21\}$$

$$A_2 = \{c + 3, ..., 3c + 6, 10c + 18, ..., 12c + 20\}$$

$A_3 = \{4c + 8, 4c + 9, ..., 9c + 16\}$

La demostración de este importante resultado se ha divido en dos partes. En el Capitulo 9 probaremos que el número $13c + 22$ es una cota inferior del *número de Rado estricto* $SR(3, c)$. Para ello obtendremos una coloración

$$\Delta : \{1, 2, ..., 13c + 21\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

que no contiene soluciones monocromáticas a la ecuación:

$$x_1 + x_2 + c = x_3$$

para $c > 0$ y $x_1 \neq x_2$

En el Capitulo 10,para demostrar que el número $13c + 22$ es una cota superior del *número de Rado estricto* $SR(3, c)$, probamos que para cada *3-coloración* del conjunto $\{1, 2, , ..., 13c + 22\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., 13c + 22\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

siempre existe una solución *monocromática* de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + c = x_3,$$

siendo $x_1 \neq x_2$ y $c > 0$.

En esta demostración realizamos un análisis exhaustivo de todos los casos que se obtienen al asignar a los tres primeros enteros positivos 1 , 2 y 3 distintos colores.

Esto nos va a dar lugar a las distribuciones siguientes :

Caso 1 $A_1 \supseteq \{1, 2, 3\}$

Caso 2 $A_1 \supseteq \{1, 2\}$ y $A_3 \supseteq \{3\}$

Caso 3 $A_1 \supseteq \{1, 3\}$ y $A_2 \supseteq \{2\}$

Caso 4 $A_1 \supseteq \{1\}$ y $A_2 \supseteq \{2, 3\}$

Caso 5 $A_1 \supseteq \{1\}$, $A_2 \supseteq \{2\}$ y $A_3 \supseteq \{3\}$

A los conjuntos A_1, A_2 y A_3 le asignamos los colores:

$$\Delta(A_1) = 1$$
$$\Delta(A_2) = 2$$
$$\Delta(A_3) = 3$$

El procedimiento que utilizaremos en cada uno de los cinco casos consiste en ir obteniendo subconjuntos *libres de suma estricta* en el sentido de Rado.

Si los subconjuntos son:

$$A_1 \supseteq \{a_{11}, a_{12}, ..., a_{1m}\}$$

$$A_2 \supseteq \{a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}\}$$

$$A_3 \supseteq \{a_{31}, a_{32}, ..., a_{3p}\}$$

Llamaremos $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ y $\bar{A}_3$ a los subconjuntos que contienen a todas las soluciones monocromáticas de los subconjuntos de A_1, A_2 y A_3 respectivamente, es decir:

$$\bar{A}_1 \supseteq \{\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, ..., \bar{a}_{1r}\}$$

$$\bar{A}_2 \supseteq \{\bar{a}_{21}, \bar{a}_{22}, ..., \bar{a}_{2s}\}$$

$$\bar{A}_3 \supseteq \{\bar{a}_{31}, \bar{a}_{32}, ..., \bar{a}_{3t}\}$$

donde los elementos $\bar{a}_{ij}$ son soluciones monocromáticas de los A_i, $i = 1, 2, 3$

Si $\exists \bar{a} \in \bar{A}_i \cap \bar{A}_j$, $i \neq j \Rightarrow \bar{a} \in A_k$, $k \neq i, j$

Cuando un elemento pertenece a dos subconjuntos de las soluciones monocromáticas,por ejemplo $\bar{A}_i$ y $\bar{A}_j$ decimos que **a la fuerza** pertenece al conjunto A_k, $k \neq i, j$.

Con este nuevo elemento añadido al subconjunto de A_k, se amplia el correspondiente de las soluciones monocromáticas $\bar{A}_k$.

Este procedimiento se sigue repitiendo hasta obtener un elemento $\bar{a} \in \bar{A}_i$, $\forall i, j, k$, es decir cuando tengamos un elemento que en los tres subconjuntos de A_1, A_2 y A_3 proporcione soluciones monocromáticas.

Capítulo 9

Cota Inferior del Número de Rado Estricto $SR(3,c)$

Para obtener la Cota Inferior del *número de Rado estricto*, $SR(3,c)$ tenemos que demostrar el siguiente resultado.

Lema 9.1. *El número de Rado estricto $SR(3,c)$ satisface $SR(3,c) \geq 13c+22$ con $c > 0$*

Demostración. Para demostrar que $SR(3,c) \geq 13c+22$, obtenemos una coloración

$$\Delta : \{1,2,...,13c+21\} \longrightarrow \{1,2,3\}$$

que no contenga una solución monocromática a la ecuación:

$$x_1 + x_2 + c = x_3$$

$c > 0$ y $x_1 \neq x_2$
Definimos la coloración siguiente:

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x \leq c+2 \\ 2 & \text{si } c+3 \leq x \leq 3c+6 \\ 1 & \text{si } 3c+7 \leq x \leq 4c+7 \\ 3 & \text{si } 4c+8 \leq x \leq 9c+16 \\ 1 & \text{si } 9c+17 \leq x \leq 10c+17 \\ 2 & \text{si } 10c+18 \leq x \leq 12c+20 \\ 1 & \text{si } 12c+21 \leq x \leq 13c+21 \end{cases}$$

Demostraremos que no existe una solución monocromática a la ecuación :

$$x_1 + x_2 + c = x_3,$$

siendo $x_1 \neq x_2$

Es decir, probaremos que para dos enteros positivos

x_1, x_2 con el mismo color , $\Delta(x_1) = \Delta(x_2)$,
Si $x_1 + x_2 + c$ pertenece al dominio de la función $\Delta(x)$ entonces

$$\Delta(x_1 + x_2 + c) \neq \Delta(x_1)$$

Sin perdida de generalidad supondremos que $x_1 < x_2$
Necesitamos considerar los siguientes casos:

Caso 1º

Suponemos que $\Delta(x_1) = \Delta(x_2) = 1$, como hemos supuesto que $x_1 < x_2$, se pueden considerar los diez subcasos siguientes:

Caso 1.1

$1 \leq x_1 < c + 2$
$1 < x_2 \leq c + 2$
entonces $2 < x_1 + x_2 < 2c + 4 \Longrightarrow 2 + c < x_1 + x_2 + c < 3c + 4$
Es decir,

$$\Delta(x_1 + x_2 + c) = 2 \neq \Delta(x_1)$$

Caso 1.2

$1 \leq x_1 \leq c + 2$
$3c + 7 \leq x_2 \leq 4c + 7$
entonces $3c + 8 \leq x_1 + x_2 \leq 5c + 9 \Longrightarrow 4c + 8 \leq x_1 + x_2 + c \leq 6c + 9$
Es decir,

$$\Delta(x_1 + x_2 + c) = 3 \neq \Delta(x_1)$$

Caso 1.3

$1 \leq x_1 \leq c + 2$
$9c + 17 \leq x_2 \leq 10c + 17$
entonces $9c + 18 \leq x_1 + x_2 \leq 11c + 19 \Longrightarrow 10c + 18 \leq x_1 + x_2 + c \leq 12c + 9$
Es decir,

$$\Delta(x_1 + x_2 + c) = 2 \neq \Delta(x_1)$$

Caso 1.4

$1 \leq x_1 \leq c + 2$
$12c + 21 \leq x_2 \leq 13c + 21$
entonces $12c + 22 \leq x_1 + x_2 \leq 14c + 23 \Longrightarrow 13c + 22 \leq x_1 + x_2 + c \leq 15c + 23$
por lo tanto $(x_1 + x_2 + c)$ no pertenece al dominio de la función $\Delta(x)$

Caso 1.5

$3c + 7 \leq x_1 < 4c + 7$
$3c + 7 < x_2 \leq 4c + 7$
entonces $6c + 14 < x_1 + x_2 < 8c + 14 \Longrightarrow 7c + 14 < x_1 + x_2 + c < 9c + 14$
Es decir,

$$\Delta(x_1 + x_2 + c) = 3 \neq \Delta(x_1)$$

Caso 1.6

$3c + 7 \leq x_1 \leq 4c + 7$
$9c + 17 \leq x_2 \leq 10c + 17$
entonces $12c + 24 \leq x_1 + x_2 \leq 14c + 24 \Longrightarrow 13c + 24 \leq x_1 + x_2 + c \leq 15c + 24$
por lo tanto $(x_1 + x_2 + c)$ no pertenece al dominio de la función $\Delta(x)$

Caso 1.7

$3c + 7 \leq x_1 \leq 4c + 7$
$12c + 21 \leq x_2 \leq 13c + 21$
entonces $15c + 28 \leq x_1 + x_2 \leq 17c + 28 \Longrightarrow 16c + 28 \leq x_1 + x_2 + c \leq 18c + 28$
por lo tanto $(x_1 + x_2 + c)$ no pertenece al dominio de la función $\Delta(x)$

Caso 1.8

$9c + 17 \leq x_1 < 10c + 17$
$9c + 17 < x_2 \leq 10c + 17$
entonces $18c + 24 < x_1 + x_2 < 20c + 34$
por lo tanto $(x_1 + x_2 + c)$ no pertenece al dominio de la función $\Delta(x)$

Caso 1.9

$9c + 17 \leq x_1 < 10c + 17$
$12c + 21 \leq x_2 \leq 13c + 21$
entonces
$(x_1 + x_2 + c)$ no pertenece al dominio de la función $\Delta(x)$

Caso 1.10

$12c + 21 \leq x_1 < 13c + 21$
$12c + 21 < x_2 \leq 13c + 21$
entonces
$(x_1 + x_2 + c)$ no pertenece al dominio de la función $\Delta(x)$

Caso 2^o

Suponemos que $\Delta(x_1) = \Delta(x_2) = 2$, es decir que x_1 y x_2 están en el segundo conjunto, como hemos supuesto que $x_1 < x_2$, podemos considerar los dos subcasos siguientes:

Caso 2.1

$c + 3 \leq x_1 < 3c + 6$
$c + 3 < x_2 \leq 3c + 6$
entonces $2c + 6 < x_1 + x_2 < 6c + 12 \Longrightarrow 3c + 6 < x_1 + x_2 + c < 7c + 12$
Es decir,

$$\Delta(x_1 + x_2 + c) = 1$$
o
$$\Delta(x_1 + x_2 + c) = 3$$

entonces $\Delta(x_1 + x_2 + c) \neq 2$

Caso 2.2

$c + 3 \leq x_1 \leq 3c + 6$
$10c + 18 \leq x_2 \leq 12c + 20$
entonces $11c + 21 \leq x_1 + x_2 <\leq 15c + 26 \Longrightarrow 12c + 21 \leq x_1 + x_2 + c \leq 16c + 26$
Es decir,
$\Delta(x_1 + x_2 + c) = 1$ o no pertenece al dominio de la función $\Delta(x)$
entonces $\Delta(x_1 + x_2 + c) \neq 2$

Caso 3º

Suponemos que $\Delta(x_1) = \Delta(x_2) = 3$, es decir que x_1 y x_2 están en el tercer conjunto.
$4c + 8 \leq x_1 < 9c + 16$
$4c + 8 < x_2 \leq 9c + 16$
entonces $8c + 16 < x_1 + x_2 < 18c + 32 \Longrightarrow 9c + 16 < x_1 + x_2 + c < 19c + 32$
Es decir,

$$\Delta(x_1 + x_2 + c) = 1$$
o
$$\Delta(x_1 + x_2 + c) = 2$$

o no pertenece al dominio de la función $\Delta(x)$
entonces $\Delta(x_1 + x_2 + c) \neq 3$

De esta forma hemos demostrado que no existe una solución monocromática a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$ y podemos concluir que $SR(3, c) \geq 13c + 22$.

$\square$

Capítulo 10

Cota Superior del Número de Rado Estricto $SR(3, c)$

En este capítulo demostraremos que la cota inferior del *número de Rado estricto* $SR(3, c)$ obtenida en el capítulo anterior es óptima.

Para ello probaremos que el *número de Rado estricto* $SR(3, c)$ es menor o igual que el número $13c + 22$.

Esta demostración precisa del análisis exhaustivo de todos los casos que se obtienen al asignar a los tres primeros enteros positivos 1 , 2 y 3 distintas coloraciones.

Probaremos el siguiente resultado:

Teorema 10.1. *El Número de Rado estricto,* $SR(3, c)$ *satisface* $SR(3, c) \leq 13c + 22$.

Demostración

Vamos a comprobar que para cada *3-coloración* del conjunto $\{1, 2, , ..., 13c + 22\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., 13c + 22\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

siempre existe una solución *monocromática* de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + c = x_3,$$

siendo $x_1 \neq x_2$ y $c > 0$.

A los conjuntos los designamos A_1, A_2 y A_3 y se le asignan los colores:

$$\Delta(A_1) = 1$$
$$\Delta(A_2) = 2$$
$$\Delta(A_3) = 3$$

Estudiaremos los cinco casos generales que se obtienen al asignar al 1 , 2 y 3 , las distintas posibilidades de coloración.

Esto da lugar a las distribuciones siguientes :

Caso 1 $A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$

Caso 2 $A_1 \supseteq \{1,\ 2\}$ y $A_3 \supseteq \{3\}$

Caso 3 $A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$ y $A_2 \supseteq \{2\}$

Caso 4 $A_1 \supseteq \{1\}$ y $A_2 \supseteq \{2,\ 3\}$

Caso 5 $A_1 \supseteq \{1\}$, $A_2 \supseteq \{2\}$ y $A_3 \supseteq \{3\}$

10.1. Caso 1: $A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$

Para cualquier *3-coloración* definida en el conjunto $\{1, 2, ..., 13c + 22\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., 13c + 22\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

A los conjuntos $\{A_1,\ A_2\ \text{ y }\ A_3\}$ se le asignan los colores:

$$\Delta(A_1) = 1$$
$$\Delta(A_2) = 2$$
$$\Delta(A_3) = 3$$

Considerando que $A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$

Vamos a demostrar que en este caso hay soluciones *monocromáticas* de la ecuación
$x_1 + x_2 + c = x_3$, siendo $x_1 \neq x_2$ y $c > 0$.

Dado el conjunto $A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$

El elemento $c + 3 = 1 + 2 + c$ es una solución monocromática, por lo tanto no puede pertenecer al conjunto A_1. Se le asigna sin pérdida de generalidad el color $\Delta(c + 3) = 2$.
El elemento $c + 4 = 1 + 3 + c$ es una solución monocromática, por lo tanto no puede pertenecer al conjunto A_1. Podemos asignarle el color 2 ó 3.

En el **Caso 1.1** estudiaremos qué sucede si le asignamos el color 2, es decir $\Delta(c + 4) = 2$ y en el **Caso 1.2** estudiaremos qué sucede si le asignamos el color 3, es decir $\Delta(c + 4) = 3$.

CASO 1.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c + 3,\ c + 4\}$

CASO 1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c + 3\}$
$A_3 \supseteq \{c + 4\}$

Analicemos el **Caso 1.1**:

Como $3c+7=(c+3)+(c+4)+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2. Por tanto podemos asignarle el color 1 ó 3.

En el **Caso 1.1.1** se estudia que sucede si $\Delta(3c+7)=1$ y en el **Caso 1.1.2** se estudia si $\Delta(3c+7)=3$.

CASO 1.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4\}$

CASO 1.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7\}$

Desarrollaremos estos casos hasta conseguir soluciones monocromáticas a la ecuación
$x_1+x_2+c=x_3$,

En el **Caso 1.1.1**

Como el elemento $4c+10=(3c+7)+(3)+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Podemos asignarle el color 2 ó 3.

En el **Caso 1.1.1.1** analizaremos qué ocurre si $\Delta(4c+10)=2$ y en el **Caso 1.1.1.2** si $\Delta(4c+10)=3$.

Podemos resumir la casuística analizada hasta el momento en el siguiente esquema:

$$\Delta(c+4)\neq 1 \begin{cases} \Delta(c+4)=2 \begin{cases} \Delta(3c+7)=1 \begin{cases} \Delta(4c+10)=2 \\ \\ \Delta(4c+10)=3 \end{cases} \\ \\ \Delta(3c+7)=3 \end{cases} \\ \\ \Delta(c+4)=3 \end{cases}$$

CASO 1.1.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 4c+10\}$

Como se tienen las soluciones monocromáticas $3c+7=(2c+6)+(1)+c$ y $4c+10=(2c+6)+(c+4)+c$, **a la fuerza** el elemento $2c+6\in A_3$ y mantiene la propiedad de que el conjunto sea *libre de suma estricta*.

El elemento $3c+7=2c+5+2+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $2c+5$

no puede pertenecer al conjunto A_1.

En el **Caso 1.1.1.1 a** analizaremos que ocurre si $\Delta(2c{+}5) = 2$ y en el **Caso 1.1.1.1 b** si $\Delta(2c{+}5) = 3$
.

CASO 1.1.1.1

a) $\boldsymbol{\Delta(2c+5)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 4c+10,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

El procedimiento que utilizamos en esta demostración consiste en obtener todas las soluciones monocromáticas en los tres conjuntos. Si un elemento se repite en dos de estos conjuntos, **a la fuerza** debe pertenecer al tercero entre A_1, A_2 o A_3.

Llamamos $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ y $\bar{A}_3$ a los conjuntos que contienen a los elementos que son soluciones monocromáticas de A_1, A_2 y A_3 respectivamente.

$\bar{A}_1 \supseteq \{c+5,\ 4c+8,\ 4c+9,\ 4c+10,\ 2c+4\}$
$\bar{A}_2 \supseteq \{6c+13,\ 6c+14,\ 4c+8,\ 4c+9,\ c+5,\ 7c+15\}$

Decimos en esta situación que el elemento $4c+9 \in A_3$ o se introduce **a la fuerza** en A_3.

$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+9\}$

Se deduce por tanto que $7c+15 = (4c+9)+(2c+6)+c$ no puede pertenecer a A_3.

$\bar{A}_3 \supseteq \{7c+15\}$
El elemento $7c+15$ se introduce **a la fuerza** en A_1 y se obtiene :

$\bar{A}_1 \supseteq \{c+5,\ 4c+8,\ 4c+9,\ 4c+10,\ 2c+4,\ 8c+16,\ 8c+17,\ 8c+18,\ 11c+22,\ 6c+14,$
$6c+13,\ 6c+12,\ 3c+8\}$
$\bar{A}_2 \supseteq \{6c+13,\ 6c+14,\ 4c+8,\ 4c+9,\ c+5,\ 7c+15\}$
$\bar{A}_3 \supseteq \{7c+15\}$

El elemento $6c+14$ se introduce **a la fuerza** en A_3 y se obtiene :

$\bar{A}_1 \supseteq \{c+5,\ 4c+8,\ 4c+9,\ 4c+10,\ 2c+4,\ 8c+16,\ 8c+17,\ 8c+18,\ 11c+22,\ 6c+14,$
$6c+13,\ 6c+12,\ 3c+8\}$
$\bar{A}_2 \supseteq \{6c+13,\ 6c+14,\ 4c+8,\ 4c+9,\ c+5,\ 7c+15\}$
$\bar{A}_3 \supseteq \{7c+15,\ 9c+20,\ 11c+23,\ 3c+8,\ c+5\}$

Resumimos este procedimiento en el que se han introducido **a la fuerza** los elementos $7c+15, 4c+9$ y $6c+14$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 7c+15\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 4c+10,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+9,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}5$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(c+5) = 1 \Rightarrow c+5 = 2+3+c$
Si $\Delta(c+5) = 2 \Rightarrow 4c+10 = (c+5)+(2c+5)+c$
Si $\Delta(c+5) = 3 \Rightarrow 6c+14 = (4c+9)+(c+5)+c$

CASO 1.1.1.1

b) $\boldsymbol{\Delta(2c+5) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+5\}$

El elemento $5c+11 = 2c+6+2c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3, es decir $\Delta(5c+11) \neq 3$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(5c+11) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(5c+11) = 2$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(5c+11) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+21, 9c+18, 6c+13$ y $4c+8$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 5c+11,\ 11c+21\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 4c+10,\ 9c+18\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+5,\ 6c+13,\ 4c+8\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}14$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(7c+14) = 1 \Rightarrow 11c+21 = (7c+14)+(3c+7)+c$
Si $\Delta(7c+14) = 2 \Rightarrow 9c+18 = (7c+14)+(c+4)+c$
Si $\Delta(7c+14) = 3 \Rightarrow 7c+14 = (2c+6)+(4c+8)+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(5c+11) = 2}$

Como el elemento $7c+14 = 5c+11+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Para el caso **b2.1** se le asigna el color $\Delta(7c+14) = 1$ y para el **b2.2** el color $\Delta(7c+14) = 3$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(7c+14) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+8$, $9c+19, 4c+9, 6c+13$ y $7c+15$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 7c+14,\ 3c+8,\ 9c+19\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 4c+10,\ 5c+11,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+5,\ 6c+13,\ 7c+15\}$

Según coloquemos el elemento $10c{+}20$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(10c+20) = 1 \Rightarrow 10c + 20 = (9c + 19) + 1 + c$
Si $\Delta(10c+20) = 2 \Rightarrow 10c + 20 = (5c + 11) + (4c + 9) + c$
Si $\Delta(10c+20) = 3 \Rightarrow 10c + 20 = (7c + 15) + (2c + 5) + c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(7c+14) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c + 20, 4c + 9$ y $9c + 19$, en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 10c+20\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 4c+10,\ 5c+11,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+5,\ 7c+14,\ 9c+19\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}13$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(6c+13) = 1 \Rightarrow 10c + 20 = 6c + 13 + 3c + 7 + c$
Si $\Delta(6c+13) = 2 \Rightarrow 6c + 13 = c + 4 + 4c + 9 + c$
Si $\Delta(6c+13) = 3 \Rightarrow 9c + 19 = 6c + 13 + 2c + 6 + c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 1.1.1.1**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(4c+10) = 2 \begin{cases} \Delta(2c+5) = 2 \\ \Delta(2c+5) = 3 \begin{cases} \Delta(5c+11) = 1 \\ \Delta(5c+11) = 2 \begin{cases} \Delta(7c+14) = 1 \\ \Delta(7c+14) = 3 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 1.1.1.2** con $\Delta(4c+10) = 3$.

CASO 1.1.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10\}$

El elemento $4c + 9 = 3c + 7 + 2 + c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(4c+9) \neq 1$.

Se obtendría el caso **Caso 1.1.1.2 a** si $\Delta(4c+9) = 2$ y el caso **Caso 1.1.1.2 b** si $\Delta(4c+9) = 3$.

CASO 1.1.1.2

a) $\boldsymbol{\Delta(4c+9) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10\}$

Introducimos a la fuerza el elemento $c+5$ en el conjunto A_2 y los elementos $2c+5, 2c+6$ y $2c+4$ en A_3, estos conjuntos mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 4c+9,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 2c+5,\ 2c+6,\ 2c+4\}$

Como el elemento $5c+11 = 2c+5+2c+6+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Se tendría el caso **a1** si $\Delta(5c+11) = 1$ y el caso **a2** si $\Delta(5c+11) = 2$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(5c+11) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+8, 9c+18$ y $6c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 5c+11,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 4c+9,\ c+5,\ 9c+18\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 2c+5,\ 2c+6,\ 2c+4,\ 6c+12\}$

Según coloquemos el elemento $7c+15$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(7c+15) = 1 \Rightarrow 7c+15 = 3c+7+3c+8+c$
Si $\Delta(7c+15) = 2 \Rightarrow 9c+18 = 7c+15+c+3+c$
Si $\Delta(7c+15) = 3 \Rightarrow 7c+15 = 4c+10+2c+5+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(5c+11) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+15$ y $6c+13$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 7c+15\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 4c+9,\ c+5,\ 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 2c+5,\ 2c+6,\ 2c+4,\ 6c+13\}$

Según coloquemos el elemento $3c+8$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(3c+8) = 1 \Rightarrow 7c+15 = 3c+8+3c+7+c$
Si $\Delta(3c+8) = 2 \Rightarrow 5c+11 = 3c+8+c+3+c$
Si $\Delta(6c+13) = 3 \Rightarrow 6c+13 = 3c+8+2c+5+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 1.1.1.2 a**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(4c+10)=3\begin{cases}\Delta(4c+9)=2\begin{cases}\Delta(5c+11)=1\\ \\ \Delta(5c+11)=2\end{cases}\\ \\ \Delta(4c+9)=3\end{cases}$$

CASO 1.1.1.2

b) $\mathbf{\Delta(4c+9)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9\}$

Como el elemento $9c+19=4c+10+4c+9+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Se obtendría el caso **b1** si se le asigna el color $\Delta(9c+19)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(9c+19)=2$.

b1) $\mathbf{\Delta(9c+19)=1}$

Como el elemento $9c+19=8c+18+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $8c+18$ al conjunto A_1.

Tendríamos el caso **b1.1** si $\Delta(8c+18)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(8c+18)=3$.

b1.1) $\mathbf{\Delta(8c+18)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+15, 6c+14, 5c+12, 10c+21, 2c+6$ y $3c+8$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 9c+19,\ 7c+15,\ 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 8c+18,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9,\ 10c+21,\ 2c+6,\ 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento $7c+16$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(7c+16)=1 \Rightarrow 7c+16=6c+14+2+c$
Si $\Delta(7c+16)=2 \Rightarrow 7c+16=5c+12+c+4+c$
Si $\Delta(7c+16)=3 \Rightarrow 7c+16=4c+10+2c+6+c$

b1.2) $\mathbf{\Delta(8c+18)=3}$

Como el elemento $9c+19=5c+12+3c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $5c+12$ al conjunto A_1.

Se obtendría el caso **b1.2.1** si $\Delta(5c+12)=2$ y el caso **b1.2.2** si $\Delta(5c+12)=3$.

b1.2.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+8, 2c+5, 7c+15$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 9c+19,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 5c+12,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9,\ 8c+18,\ 7c+15,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $4c{+}8$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(4c+8)=1 \Rightarrow 4c+8=3c+7+1+c$
Si $\Delta(4c+8)=2 \Rightarrow 4c+8=c+3+2c+5+c$
Si $\Delta(4c+8)=3 \Rightarrow 7c+15=4c+8+2c+7+c$

b1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+21, 2c+6, 2c+5, 10c+20, 2c+4, 10c+22$,$8c+17$, $4c+8$ y $8c+16$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 9c+19\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 10c+21,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 10c+20,\ 2c+4,\ 10c+22\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9,\ 8c+18,\ 5c+12,\ 8c+17,\ 4c+8,\ 8c+16\}$

Como el elemento $10c+20 = 7c+16+2c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $7c+16$ al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **b1.2.2.1** si $\Delta(7c+16)=1$ y el caso **b1.2.2.2** si $\Delta(7c+16)=3$.

b1.2.1.1) $\boldsymbol{\Delta(7c+16)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+9$ y $6c+15$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 9c+19,\ 7c+16\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 10c+21,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 10c+20,\ 2c+4,\ 10c+22,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9,\ 8c+18,\ 5c+12,\ 8c+17,\ 4c+8,\ 8c+16,\ 6c+15\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}5$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(c+5)=1 \Rightarrow c+5=2+3+c$
Si $\Delta(c+5)=2 \Rightarrow 3c+9=c+5+c+4+c$
Si $\Delta(c+5)=3 \Rightarrow 6c+15=c+5+4c+10+c$

b1.2.1.2) $\boldsymbol{\Delta(7c+16)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $12c+26, 4, 12c+25, 12c+27, 12c+24$, $2c+7$, $10c+23, 2c+8$ $4c+11$, $8c+19$ y $8c+20$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 9c+19,\ 12c+26,\ 4,\ 12c+25,\ 12c+27,\ 12c+24\}$

$$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 10c+21,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 10c+20,\ 2c+4,\ 10c+22,\ 2c+7,$$
$$10c+23,\ 2c+8\}$$
$$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9,\ 8c+18,\ 5c+12,\ 8c+17,\ 4c+8,\ 8c+16,\ 7c+16,\ 4c+11,$$
$$8c+19,\ 8c+20\}$$

Esta es una distribución óptima, es decir determina una distribución completa para el *número de Rado estricto* $SR(3,c)$.

Para comprobar que el elemento $13c+22$ no se puede colocar en ningún conjunto, lo hacemos por reducción al absurdo.

Se obtiene el caso **a** si $\Delta(13c+22)=1$, el caso **b** si $\Delta(13c+22)=2$ y el caso **c** si $\Delta(13c+22)=3$.

a) $\boldsymbol{\Delta(13c+22)=1}$

Como el elemento $13c+22=12c+21+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $12c+21$ al conjunto A_1.

El caso **a1** se obtiene si $\Delta(12c+21)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(12c+21)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(12c+21)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+7, 10c+18, 3c+3, 9c+15$ y $5c+10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 9c+19,\ 12c+26,\ 4,\ 12c+25,\ 12c+27,\ 12c+24,\ 13c+22,$$
$$4c+7,\ 10c+18\}$$
$$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 10c+21,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 10c+20,\ 2c+4,\ 10c+22,\ 2c+7,$$
$$10c+23,\ 2c+8,\ 12c+21,\ 3c+3\}$$
$$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9,\ 8c+18,\ 5c+12,\ 8c+17,\ 4c+8,\ 8c+16,\ 7c+16,\ 4c+11,$$
$$8c+19,\ 8c+20,\ 9c+15,\ 5c+10\}$$

Según coloquemos el elemento $9c+17$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(9c+17)=1 \Rightarrow 10c+18=9c+17+1+c$
Si $\Delta(9c+17)=2 \Rightarrow 12c+21=9c+17+2c+4+c$
Si $\Delta(9c+17)=3 \Rightarrow 9c+17=4c+9+4c+8+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(12c+21)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+13$ y $6c+9$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 9c+19,\ 12c+26,\ 4,\ 12c+25,\ 12c+27,\ 12c+24,\ 13c+22,\ 7c+13\}$$
$$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 10c+21,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 10c+20,\ 2c+4,\ 10c+22,\ 2c+7,$$
$$10c+23,\ 2c+8,\ 6c+9\}$$
$$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9,\ 8c+18,\ 5c+12,\ 8c+17,\ 4c+8,\ 8c+16,\ 7c+16,\ 4c+11,$$
$$8c+19,\ 8c+20,\ 12c+21\}$$

Según coloquemos el elemento $3c{+}3$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(3c+3) = 1 \Rightarrow 13c+22 = 9c+19+3c+3+c$
Si $\Delta(3c+3) = 2 \Rightarrow 6c+9 = 3c+3+2c+6+c$
Si $\Delta(3c+3) = 3 \Rightarrow 12c+21 = 3c+3+8c+18+c$

b) $\boldsymbol{\Delta(13c+22) = 2}$

Como el elemento $13c+22 = 10c+20+2c+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+2$ al conjunto A_2.

El caso **b1** se obtiene si $\Delta(2c+2) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(2c+2) = 3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(2c+2) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+5, c+1, 6c+17$ y 5 en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 9c+19,\ 12c+26,\ 4,\ 12c+25,\ 12c+27,\ 12c+24,\ 2c+2\}$$
$$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 10c+21,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 10c+20,\ 2c+4,\ 10c+22,\ 2c+7,$$
$$10c+23,\ 2c+8,\ 13c+22,\ 3c+5,\ c+1\}$$
$$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9,\ 8c+18,\ 5c+12,\ 8c+17,\ 4c+8,\ 8c+16,\ 7c+16,\ 4c+11,$$
$$8c+19,\ 8c+20,\ 6c+17,\ 5\}$$

Según coloquemos el elemento $3c{+}4$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(3c+4) = 1 \Rightarrow 3c+4 = 2c+2+2+c$
Si $\Delta(3c+4) = 2 \Rightarrow 3c+4 = c+3+c+1+c$
Si $\Delta(3c+4) = 3 \Rightarrow 4c+9 = 3c+4+5+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(2c+2) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+14, 9c+21$ y $11c+25$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 9c+19,\ 12c+26,\ 4,\ 12c+25,\ 12c+27,\ 12c+24,\ 5c+14\}$$
$$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 10c+21,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 10c+20,\ 2c+4,\ 10c+22,\ 2c+7,$$
$$10c+23,\ 2c+8,\ 13c+22,\ 9c+21\}$$
$$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9,\ 8c+18,\ 5c+12,\ 8c+17,\ 4c+8,\ 8c+16,\ 7c+16,\ 4c+11,$$
$$8c+19,\ 8c+20,\ 2c+2,\ 11c+25\}$$

Según coloquemos el elemento $6c{+}16$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(6c+16) = 1 \Rightarrow 6c+16 = 5c+14+2+c$
Si $\Delta(6c+16) = 2 \Rightarrow 9c+21 = 6c+16+2c+5+c$
Si $\Delta(6c+16) = 3 \Rightarrow 11c+25 = 6c+16+4c+9+c$

c) $\boldsymbol{\Delta(13c+22)=3}$

Como el elemento $13c+22 = 8c+16+4c+6+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+6$ al conjunto A_3.

El caso **c1** se obtiene si $\Delta(4c+6)=1$ y el caso **c2** si $\Delta(4c+6)=2$.

c1) $\boldsymbol{\Delta(4c+6)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+13$ y $c+7$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3,\, 3c+7,\, 9c+19,\, 12c+26,\, 4,\, 12c+25,\, 12c+27,\, 12c+24,\, 4c+6\}$$
$$A_2 \supseteq \{c+3,\, c+4,\, 10c+21,\, 2c+6,\, 2c+5,\, 10c+20,\, 2c+4,\, 10c+22,\, 2c+7,$$
$$10c+23,\, 2c+8,\, 8c+13\}$$
$$A_3 \supseteq \{4c+10,\, 4c+9,\, 8c+18,\, 5c+12,\, 8c+17,\, 4c+8,\, 8c+16,\, 7c+16,\, 4c+11,$$
$$8c+19,\, 8c+20,\, 13c+22,\, c+7\}$$

Según coloquemos el elemento $7c{+}19$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(7c+19)=1 \Rightarrow 12c+25 = 7c+19+4c+6+c$

Si $\Delta(7c+19)=2 \Rightarrow 10c+23 = 7c+19+2c+4+c$

Si $\Delta(7c+19)=3 \Rightarrow 7c+19 = 5c+12+c+7+c$

c2) $\boldsymbol{\Delta(4c+6)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+10, 8c+14$ y $c+6$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3,\, 3c+7,\, 9c+19,\, 12c+26,\, 4,\, 12c+25,\, 12c+27,\, 12c+24,\, 7c+10\}$$
$$A_2 \supseteq \{c+3,\, c+4,\, 10c+21,\, 2c+6,\, 2c+5,\, 10c+20,\, 2c+4,\, 10c+22,\, 2c+7,$$
$$10c+23,\, 2c+8,\, 4c+6,\, 8c+14\}$$
$$A_3 \supseteq \{4c+10,\, 4c+9,\, 8c+18,\, 5c+12,\, 8c+17,\, 4c+8,\, 8c+16,\, 7c+16,\, 4c+11,$$
$$8c+19,\, 8c+20,\, 13c+22,\, c+6\}$$

Según coloquemos el elemento $2c{+}3$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(2c+3)=1 \Rightarrow 3c+7 = 2c+3+4+c$

Si $\Delta(2c+3)=2 \Rightarrow 4c+6 = 2c+3+c+3+c$

Si $\Delta(2c+3)=1 \Rightarrow 4c+9 = 2c+3+c+6+c$

Con este último caso hemos demostrado que no podemos colocar el elemento $13c+22$ y se ha concluido el caso **b1.2.1.2)**

CASO 1.1.1.2

b2) $\Delta(9c+19)=2$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 9c+19\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9\}$

Como el elemento $9c+19=7c+16+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $7c+16$ al conjunto A_2.

Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(7c+16)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(7c+16)=3$.

b2.1) $\Delta(7c+16)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+13, 11c+23$ y $2c+6$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 7c+16\}$
$A_2\{c+3,\ c+4,\ 9c+19,\ 6c+13\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9,\ 11c+23,\ 2c+6\}$

Según coloquemos el elemento $8c+17$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(8c+17)=1 \Rightarrow 8c+17=7c+16+1+c$
Si $\Delta(8c+17)=2 \Rightarrow 8c+17=6c+13+c+4+c$
Si $\Delta(8c+17)=3 \Rightarrow 11c+23=8c+17+2c+6+c$

b2.2) $\Delta(7c+16)=3$

Como el elemento $11c+22=9c+19+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **b2.2.1** si $\Delta(11c+22)=1$ y el caso **b2.2.2** si $\Delta(11c+22)=3$.

b2.2.1) $\Delta(11c+22)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+6$ y $7c+15$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 11c+22\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 9c+19,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9,\ 7c+16,\ 7c+15\}$

Según coloquemos el elemento $12c+25$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(12c+25)=1 \Rightarrow 12c+25=11c+22+3+c$
Si $\Delta(12c+25)=2 \Rightarrow 12c+25=9c+19+2c+6+c$
Si $\Delta(12c+25)=3 \Rightarrow 12c+25=4c+10+7c+15+c$

b2.2.2) $\quad \Delta(11c+22)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $12c+25, 6c+13, 6c+14$ $2c+6, 2c+5, 10c+20$,$c+5$, $2c+7$,$7c+15, 5c+11, 11c+24$ y $11c+23$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 12c+25,\ 6c+13,\ 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 9c+19,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 10c+20,\ c+5,\ 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{4c+10,\ 4c+9,\ 7c+16,\ 11c+22,\ 7c+15,\ 5c+11,\ 11c+24,\ 11c+23\}$

Según coloquemos el elemento $5c+12$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(5c+12)=1 \Rightarrow 6c+13=5c+12+1+c$
Si $\Delta(5c+12)=2 \Rightarrow 5c+12=2c+5+2c+7+c$
Si $\Delta(5c+12)=3 \Rightarrow 11c+23=5c+12+5c+11+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 1.1.1.2 b)**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(4c+9)=3\begin{cases}\Delta(9c+19)=1\begin{cases}\Delta(8c+18)=2\\ \Delta(8c+18)=3\begin{cases}\Delta(5c+12)=2\\ \Delta(5c+12)=3\begin{cases}\Delta(7c+16)=1\\ \Delta(7c+16)=3\begin{cases}\Delta(13c+22)=1\\ \Delta(13c+22)=2\\ \Delta(13c+22)=3\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(9c+19)=2\begin{cases}\Delta(7c+16)=1\\ \Delta(7c+16)=3\begin{cases}\Delta(11c+22)=1\\ \Delta(11c+22)=3\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 1.1.2** con $\Delta(3c+7)=3$

CASO 1.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7\}$

Como el elemento $c+5=2+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

En el **Caso 1.1.2.1** se le asigna el color $\Delta(c+5)=2$ y en el **Caso 1.1.2.2** se le asigna el color

$\Delta(c+5) = 3$.

CASO 1.1.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7\}$

El elemento $3c+9 = c+4+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

En el **Caso 1.1.2.1 a** analizaremos que ocurre si $\Delta(3c+9) = 1$ y en el **Caso 1.1.2.1 b** si $\Delta(3c+9) = 3$.

CASO 1.1.2.1

a) $\mathbf{\Delta(3c+9) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7\}$

El elemento $3c+9 = 2c+8+1+c$ es una solución monocromática, el elemento $2c+8$ no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(2c+8) \neq 1$.

Se obtendría el caso **a1** si $\Delta(2c+8) = 2$ y el **a2** si $\Delta(2c+8) = 3$.

a1) $\mathbf{\Delta(2c+8) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4, 5, 4c+11$ y $4c+12$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 4,\ 5\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 2c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 4c+11,\ 4c+12\}$

Como el elemento $8c+18 = 3c+7+4c+11+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

En el caso **a1.1** se estudia si $\Delta(8c+18) = 1$ y en el caso **a1.2** si $\Delta(8c+18) = 2$.

a1.1) $\mathbf{\Delta(8c+18) = 1}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $9c+23$ en el conjunto A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 4,\ 5,\ 8c+18\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 2c+8,\ 9c+23\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 4c+11,\ 4c+12\}$

Como el elemento $9c+23 = 6c+15+2c+8+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $6c+15$ al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **a1.1.1** si $\Delta(6c+15)=1$ y el caso **a1.1.2** si $\Delta(6c+15)=3$.

a1.1.1) $\quad \mathbf{\Delta(6c+15)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+26, 2c+7$, $7c+19$ y $12c+31$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 4,\ 5,\ 8c+18,\ 6c+15,\ 11c+26\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 2c+8,\ 9c+23,\ 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 4c+11,\ 4c+12,\ 7c+19,\ 12c+31\}$

Según coloquemos el elemento $7c+20$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(7c+20)=1 \Rightarrow 7c+20=6c+15+5+c$
Si $\Delta(7c+20)=2 \Rightarrow 9c+23=7c+20+c+3+c$
Si $\Delta(7c+20)=3 \Rightarrow 12c+31=7c+20+4c+11+c$

a1.1.2) $\quad \mathbf{\Delta(6c+15)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+27, 7c+20$, $8c+24, 10c+22, 12c+30$, $12c+31$ y $7c+18$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 4,\ 5,\ 8c+18,\ 11c+27,\ 7c+20\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 2c+8,\ 9c+23,\ 8c+24,\ 10c+22,\ 12c+30\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 4c+11,\ 4c+12,\ 6c+15,\ 12c+31,\ 7c+18\}$

Según coloquemos el elemento $2c+7$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(2c+7)=1 \Rightarrow 3c+9=2c+7+2+c$
Si $\Delta(2c+7)=2 \Rightarrow 12c+30=9c+23+2c+7+c$
Si $\Delta(2c+7)=3 \Rightarrow 7c+18=2c+7+4c+11+c$

a1.2) $\quad \mathbf{\Delta(8c+18)=2}$

Como el elemento $8c+18=6c+14+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $6c+14$ al conjunto A_2.
En el caso **a1.2.1** se le asigna el color $\Delta(6c+14)=1$ y en el caso **a1.2.2** si $\Delta(6c+14)=3$.

a1.2.1) $\quad \mathbf{\Delta(6c+14)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+22, 7c+15, 5c+10, 10c+23$ y $3c+8$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 4,\ 5,\ 6c+14,\ 10c+22\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 2c+8,\ 8c+18,\ 7c+15\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 4c+11,\ 4c+12,\ 5c+10,\ 10c+23,\ 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento $9c+18$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(9c+18)=1 \Rightarrow 10c+22=9c+18+4+c$

Si $\Delta(9c+18)=2 \Rightarrow 9c+18=7c+15+c+3+c$
Si $\Delta(9c+18)=3 \Rightarrow 9c+18=5c+10+3c+8+c$

a1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(6c+14)=3}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $11c+26$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 4,\ 5,\ 11c+26\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 2c+8,\ 8c+18\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 4c+11,\ 4c+12,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $10c{+}21$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(10c+21)=1 \Rightarrow 11c+26=10c+21+5+c$
Si $\Delta(10c+21)=2 \Rightarrow 10c+21=c+3+8c+18+c$
Si $\Delta(10c+21)=3 \Rightarrow 10c+21=3c+7+6c+14+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(2c+8)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 4c+11,\ 4c+12,\ 2c+8\}$

Como el elemento $6c+15=3c+7+2c+8+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.
En el caso **a2.1** se asigna el color $\Delta(6c{+}15)=1$ y en el caso **a2.2** se asigna el color $\Delta(6c{+}15)=2$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(6c+15)=1}$

Como el elemento $6c+15=5c+14+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $5c+14$ al conjunto A_1.
Tendríamos el caso **a2.1.1** si $\Delta(5c+14)=2$ y el caso **a2.1.2** si $\Delta(5c+14)=3$.

a2.1.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+14)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+10, 10c+25\,, 7c+17$ y $4c+11$ en los conjuntos $A_1\,, A_2$ y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq= \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 6c+15,\ 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 5c+14,\ 10c+25\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 2c+8,\ 7c+17,\ 4c+11\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}19$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(7c+19)=1 \Rightarrow 17c+19=6c+15+4+c$
Si $\Delta(7c+19)=2 \Rightarrow 7c+19=c+5+5c+14+c$
Si $\Delta(7c+19)=3 \Rightarrow 7c+19=2c+8+4c+11+c$

a2.1.2) $\mathbf{\Delta(5c+14)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+6, 10c+24$ y $4c+10$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 6c+15\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 2c+6,\ 10c+24\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 2c+8,\ 5c+14,\ 4c+10\}$

Según coloquemos el elemento $7c+18$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(7c+18)=1 \Rightarrow 7c+18=6c+15+3+c$
Si $\Delta(7c+18)=2 \Rightarrow 10c+24=7c+18+2c+6+c$
Si $\Delta(7c+18)=3 \Rightarrow 7c+18=2c+8+4c+10+c$

a2.2) $\mathbf{\Delta(6c+15)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+19, 9c+22$, $4c+12$ y $4c+10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 8c+19\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 6c+15,\ 9c+22\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 2c+8,\ 4c+12,\ 4c+10\}$

Según coloquemos el elemento $7c+18$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(7c+18)=1 \Rightarrow 8c+19=7c+18+1+c$
Si $\Delta(7c+18)=2 \Rightarrow 9c+22=7c+18+c+4+c$
Si $\Delta(7c+18)=1 \Rightarrow 7c+18=2c+8+4c+10+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 1.1.2.1 a)**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(c+5)=2\begin{cases}\Delta(3c+9)=1\begin{cases}\Delta(2c+8)=2\begin{cases}\Delta(8c+18)=1\begin{cases}\Delta(6c+15)=1\\ \Delta(6c+15)=3\end{cases}\\ \Delta(8c+18)=2\begin{cases}\Delta(6c+14)=1\\ \Delta(6c+14)=3\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(2c+8)=3\begin{cases}\Delta(6c+15)=1\begin{cases}\Delta(5c+14)=2\\ \Delta(5c+14)=3\end{cases}\\ \Delta(6c+15)=2\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(3c+9)=3\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 1.1.2.1** con $\Delta(3c+9)=3$

CASO 1.1.2.1

b) $\quad \boldsymbol{\Delta(3c+9)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9\}$

El elemento $7c+16 = 3c+7+3c+9+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

En el caso **b1** se estudia si $\Delta(7c+16) = 1$ y en el caso **b2** si $\Delta(7c+16) = 2$.

b1) $\quad \boldsymbol{\Delta(7c+16)=1}$

El elemento $7c+16 = 6c+14+2+c$ es una solución monocromática, el elemento $6c+14$ no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(6c+14) \neq 1$.

Se obtiene el caso **b1.1** si $\Delta(6c+14) = 2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(6c+14) = 3$.

b1.1) $\quad \boldsymbol{\Delta(6c+14)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+10, 4c+9, 2c+5$, $12c+26, 9c+19, 8c+17, 5c+12$ y $3c+8$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 7c+16,\ 4c+10,\ 4c+9,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 6c+14,\ 12c+26,\ 9c+19\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 8c+17,\ 5c+12,\ 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento $7c+15$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$.

Si $\Delta(7c+15) = 1 \Rightarrow 7c+15 = 4c+10+2c+5+c$
Si $\Delta(7c+15) = 2 \Rightarrow 9c+19 = 7c+15+c+4+c$
Si $\Delta(7c+15) = 3 \Rightarrow 7c+15 = 3c+7+3c+8+c$

b1.2) $\quad \boldsymbol{\Delta(6c+14)=3}$

Como el elemento $8c+18 = 7c+16+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $8c+18$ al conjunto A_1.

Se obtendría el caso **b1.2.1** si $\Delta(8c+18) = 2$ y el caso **b1.2.2** si $\Delta(8c+18) = 3$.

b1.2.1) $\quad \boldsymbol{\Delta(8c+18)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+21, 4c+9$, $2c+5, 2c+7$, $11c+23$ y $5c+12$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 7c+16,\ 10c+21,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 8c+18,\ 2c+5,\ 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 6c+14,\ 11c+23,\ 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $5c+11$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$.

Si $\Delta(5c+11)=1 \Rightarrow 5c+11=4c+9+2+c$
Si $\Delta(5c+11)=2 \Rightarrow 8c+18=5c+11+2c+7+c$
Si $\Delta(5c+11)=3 \Rightarrow 11c+23=5c+11+5c+12+c$

b1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(8c+18)=3}$

Como el elemento $8c+18=4c+11+3c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+11$ al conjunto A_3.
El caso **b1.2.2.1** se obtiene si se asigna el color $\Delta(4c+11)=1$ y el caso **b1.2.2.2** si $\Delta(4c+11)=2$.

b1.2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(4c+11)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+9$, $2c+5, 12c+25, 5c+12$, $3c+8$ y $9c+20$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 7c+16,\ 4c+11,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 2c+5,\ 12c+25,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 6c+14,\ 8c+18,\ 3c+8,\ 9c+20\}$

Según coloquemos el elemento $2c+7$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(2c+7)=1 \Rightarrow 7c+16=2c+7+4c+9+c$
Si $\Delta(2c+7)=2 \Rightarrow 5c+12=2c+7+2c+5+c$
Si $\Delta(2c+7)=3 \Rightarrow 6c+14=2c+7+3c+7+c$

b1.2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(4c+11)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+7, 12c+27, 2c+6, 10c+23, 4c+9, 4c+10, 9c+20$ y $3c+8$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 7c+16,\ 2c+7,\ 12c+27,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 4c+11,\ 10c+23,\ 4c+9,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 6c+14,\ 8c+18,\ 9c+20,\ 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento $5c+13$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(5c+13)=1 \Rightarrow 5c+13=2c+7+2c+6+c$
Si $\Delta(5c+13)=2 \Rightarrow 10c+23=5c+13+4c+10+c$
Si $\Delta(5c+13)=3 \Rightarrow 9c+20=5c+13+3c+7+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(7c+16)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9\}$

El elemento $7c+16 = 5c+12+c+4+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $5c+12$ no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(5c+12) \neq 2$.
Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(5c+12)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(5c+12)=3$.

b2.1) $\Delta(5c + 12) = 1$

Como el elemento $5c + 12 = 4c + 10 + 2 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c + 10$ al conjunto A_1.

En el caso **b2.1.1** se asigna el color $\Delta(4c + 10) = 2$ y en el caso **b2.1.2** si $\Delta(4c + 10) = 3$.

b2.1.1) $\Delta(4c + 10) = 2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c + 7$ y $6c + 14$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 5c + 12,\ 2c + 7\}$
$A_2 \supseteq \{c + 3,\ c + 4,\ c + 5,\ 7c + 16,\ 4c + 10\}$
$A_3 \supseteq \{3c + 7,\ 3c + 9,\ 6c + 14\}$

Según coloquemos el elemento $2c+5$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(2c + 5) = 1 \Rightarrow 5c + 12 = 2c + 5 + 2c + 7 + c$
Si $\Delta(2c + 5) = 2 \Rightarrow 4c + 10 = 2c + 5 + c + 5 + c$
Si $\Delta(2c + 5) = 3 \Rightarrow 6c + 14 = 2c + 5 + 3c + 9 + c$

b2.1.2) $\Delta(4c + 10) = 3$

Como el elemento $8c+17 = 3c+7+4c+10+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $8c + 17$ al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **b2.1.2.1** si se asigna el color $\Delta(8c+17) = 1$ y el caso **b2.1.2.2** si $\Delta(8c+17) = 2$.

b2.1.2.1) $\Delta(8c + 17) = 1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c + 11, 4c + 9, 9c + 20, 9c + 19$ y $2c + 5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 5c + 12,\ 8c + 17,\ 5c + 11\}$
$A_2 \supseteq \{c + 3,\ c + 4,\ c + 5,\ 7c + 16,\ 4c + 9\}$
$A_3 \supseteq \{3c + 7,\ 3c + 9,\ 4c + 10,\ 9c + 20,\ 9c + 19,\ 2c + 5\}$

Según coloquemos el elemento $6c+14$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(6c + 14) = 1 \Rightarrow 6c + 14 = 5c + 12 + 2 + c$
Si $\Delta(6c + 14) = 2 \Rightarrow 6c + 14 = c + 5 + 4c + 9 + c$
Si $\Delta(6c + 14) = 3 \Rightarrow 9c + 19 = 6c + 14 + 2c + 5 + c$

b2.1.2.2) $\Delta(8c + 17) = 2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c + 21, 2c + 7, 11c + 24, 2c + 5$ y $6c + 14$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 5c + 12,\ 10c + 21,\ 2c + 7\}$
$A_2 \supseteq \{c + 3,\ c + 4,\ c + 5,\ 7c + 16,\ 8c + 17,\ 11c + 24,\ 2c + 5\}$
$A_3 \supseteq \{3c + 7,\ 3c + 9,\ 4c + 10,\ 6c + 14\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}19$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(8c+19) = 1 \Rightarrow 8c+19 = 5c+12+2c+7+c$
Si $\Delta(8c+19) = 2 \Rightarrow 11c+24 = 8c+19+2c+5+c$
Si $\Delta(8c+19) = 3 \Rightarrow 8c+19 = 3c+9+4c+10+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+12) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 5c+12\}$

Introducimos en el conjunto A_1 los elementos $9c+19$ y $9c+21$ *libres de suma estricta*.

Como el elemento $10c+22 = 9c+21+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **b2.2.1** si se asigna el color $\Delta(10c+22) = 2$ y el caso **b2.2.2** si se asigna el color $\Delta(10c+22) = 3$.

b2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(10c+22) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+19, 9c+21, 12c+25$ y $8c+18$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 9c+19,\ 9c+21,\ 12c+25\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 7c+16,\ 10c+22\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 5c+12,\ 8c+18\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}6$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(2c+6) = 1 \Rightarrow 12c+25 = 2c+6+9c+19+c$
Si $\Delta(2c+6) = 2 \Rightarrow 10c+22 = 2c+6+7c+16+c$
Si $\Delta(2c+6) = 3 \Rightarrow 8c+18 = 2c+6+5c+12+c$

b2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(10c+22) = 3}$

Como el elemento $10c+22 = 4c+10+5c+12+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+10$ al conjunto A_3.

Obtendríamos el caso **b2.2.2.1** si se asigna el color $\Delta(4c+10) = 1$ y el caso **b2.2.2.2** si se asigna el color $\Delta(4c+10) = 2$.

b2.2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(4c+10) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+15, 2c+5, 4c+11, 5c+11$ y $2c+6$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 9c+19,\ 9c+21,\ 4c+10,\ 6c+15,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 7c+16,\ 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 5c+12,\ 10c+22,\ 5c+11,\ 2c+6\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}20$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(9c+20) = 1 \Rightarrow 9c+20 = 6c+15+2c+5+c$
Si $\Delta(9c+20) = 2 \Rightarrow 9c+20 = 7c+16+c+4+c$
Si $\Delta(9c+20) = 3 \Rightarrow 9c+20 = 9c+20 = 3c+9+5c+11+c$

b2.2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(4c+10) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c{+}19, 9c{+}21, 6c{+}15, 2c{+}7$, $8c{+}18, 7c{+}17,$ $2c{+}6, 5c{+}13$ y $10c+23$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 9c+19,\ 9c+21,\ 6c+15,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ c+5,\ 7c+16,\ 4c+10,\ 8c+18,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 5c+12,\ 10c+22,\ 2c+6,\ 5c+13,\ 10c+23\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}22$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(9c+22) = 1 \Rightarrow 9c+22 = 6c+15+2c+7+c$
Si $\Delta(9c+22) = 2 \Rightarrow 9c+22 = 7c+17+c+5+c$
Si $\Delta(9c+22) = 3 \Rightarrow 9c+22 = 3c+9+5c+13+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 1.1.2.1 b)**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+9)=3 \begin{cases} \Delta(7c+16)=1 \begin{cases} \Delta(6c+14)=2 \\ \Delta(6c+14)=3 \begin{cases} \Delta(8c+18)=2 \\ \Delta(8c+18)=3 \begin{cases} \Delta(4c+11)=1 \\ \Delta(4c+11)=2 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(7c+16)=2 \begin{cases} \Delta(5c+12)=1 \begin{cases} \Delta(4c+10)=2 \\ \Delta(4c+10)=3 \begin{cases} \Delta(8c+17)=1 \\ \Delta(8c+17)=2 \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(5c+12)=3 \begin{cases} \Delta(10c+22)=2 \\ \Delta(10c+22)=3 \begin{cases} \Delta(4c+10)=1 \\ \Delta(4c+10)=2 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 1.1.2.2** con $\Delta(c+5) = 2$

CASO 1.1.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ c+5\}$

El elemento $5c+12 = 3c+7+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $5c+12$ al conjunto A_3.

Se obtendría el caso **Caso 1.1.2.2 a** si $\Delta(5c+12) = 1$ y el caso **Caso 1.1.2.2 b** si $\Delta(5c+12) = 2$.

CASO 1.1.2.2

a) $\boldsymbol{\Delta(5c+12) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ c+5\}$

El elemento $5c+12 = 4c+10+2+c$ es una solución monocromática, el elemento $4c+10$ no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(4c+10) \neq 1$.

Se obtendría el caso **a1** si se le asigna el color $\Delta(4c+10) = 2$ y el caso **a2** si $\Delta(4c+10) = 3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(4c+10) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+7$, $4c+9, 3c+9, 6c+14$ y $2c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 5c+12,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 4c+10,\ 4c+9,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ c+5,\ 6c+14,\ 2c+5\}$

Según coloquemos el elemento $8c+19$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(8c+19) = 1 \Rightarrow 8c+19 = 5c+12+2c+7+c$
Si $\Delta(8c+19) = 2 \Rightarrow 8c+19 = 4c+10+3c+9+c$
Si $\Delta(8c+19) = 3 \Rightarrow 8c+19 = 6c+14+c+5+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(4c+10) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+18, 6c+15, 2c+6$ y $4c+11$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 5c+12,\ 8c+18\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 6c+15,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ c+5,\ 4c+10,\ 4c+11\}$

Según coloquemos el elemento $9c+21$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(9c+21) = 1 \Rightarrow 9c+21 = 8c+18+3+c$
Si $\Delta(9c+21) = 2 \Rightarrow 9c+21 = 6c+15+2c+6+c$
Si $\Delta(9c+21) = 3 \Rightarrow 9c+21 = 4c+10+4c+11+c$

CASO 1.1.2.2

b) $\mathbf{\Delta(5c+12)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ c+5\}$

El elemento $5c+12 = 3c+9+c+3+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $3c+9$ no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(3c+9) \neq 2$.
Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(3c+9) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(3c+9) = 3$.

b1) $\mathbf{\Delta(3c+9)=1}$

El elemento $3c+9 = 2c+7+2+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $2c+7$ no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(2c+7) \neq 1$.
Se obtendría el caso **b1.1** si $\Delta(2c+7) = 2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(2c+7) = 3$.

b1.1) $\mathbf{\Delta(2c+7)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+18, 2c+5, 2c+6$, $4c+11, 7c+15$ y $7c+16$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 8c+18,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 5c+12,\ 2c+7,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ c+5,\ 4c+11,\ 7c+15,\ 7c+16\}$

Según coloquemos el elemento $3c{+}8$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(3c+8) = 1 \Rightarrow 3c+8 = 2c+5+3+c$
Si $\Delta(3c+8) = 2 \Rightarrow 5c+12 = 3c+8+c+4+c$
Si $\Delta(3c+8) = 3 \Rightarrow 7c+15 = 3c+8+3c+7+c$

b1.2) $\mathbf{\Delta(2c+7)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+15$, $4c+12, 2c+8$ y $10c+24$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 6c+15\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 5c+12,\ 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ c+5,\ 2c+7,\ 2c+8,\ 10c+24\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}16$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(7c+16) = 1 \Rightarrow 7c+16 = 6c+15+1+c$
Si $\Delta(7c+16) = 2 \Rightarrow 7c+16 = c+4+5c+12+c$
Si $\Delta(7c+16) = 3 \Rightarrow 10c+24 = 7c+16+2c+8+c$

b2) $\quad \mathbf{\Delta(3c+9)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ c+5, 3c+9\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $7c+16$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $7c+16 = 6c+14+2+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $6c+14$ no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(6c+14) \neq 1$.

Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(6c+14) = 2$ y el **b2.2** si $\Delta(6c+14) = 3$.

b2.1) $\quad \mathbf{\Delta(6c+14)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+16, 12c+26$ y $8c+17$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 7c+16,\ 12c+26\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 5c+12,\ 6c+14\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ c+5,\ 3c+9,\ 8c+17\}$

Según coloquemos el elemento $4c+10$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(4c+10) = 1 \Rightarrow 12c+26 = 4c+10+7c+16+c$
Si $\Delta(4c+10) = 2 \Rightarrow 6c+14 = 4c+10+c+4+c$
Si $\Delta(4c+10) = 3 \Rightarrow 8c+17 = 4c+10+3c+7+c$

b2.2) $\quad \mathbf{\Delta(6c+14)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+16, 10c+23$ y $8c+19$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 7c+16,\ 10c+23\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 5c+12,\ 8c+19\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ c+5,\ 3c+9,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $2c+7$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(2c+7) = 1 \Rightarrow 10c+23 = 2c+7+7c+16+c$
Si $\Delta(2c+7) = 2 \Rightarrow 8c+19 = 2c+7+5c+12+c$
Si $\Delta(2c+7) = 3 \Rightarrow 6c+14 = 2c+7+3c+7+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 1.1.2.2**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(c+5)=3\begin{cases}\Delta(5c+12)=1\begin{cases}\Delta(4c+10)=2\\[2ex]\Delta(4c+10)=3\end{cases}\\[6ex]\Delta(5c+12)=2\begin{cases}\Delta(3c+9)=1\begin{cases}\Delta(2c+7)=2\\[2ex]\Delta(2c+7)=3\end{cases}\\[6ex]\Delta(3c+9)=3\begin{cases}\Delta(6c+14)=2\\[2ex]\Delta(6c+14)=3\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 1.2** con $\Delta(c+4)=3$.

CASO 1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

Como el elemento $c+5=2+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_1.
En el **Caso 1.2.1** analizamos que ocurre si $\Delta(c+5)=2$ y en el **Caso 1.2.2** si $\Delta(c+5)=3$.

CASO 1.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

CASO 1.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5\}$

Desarrollaremos estos casos hasta conseguir soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$,

En el **Caso 1.2.1**

Como el elemento $3c+8=c+3+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.
En el **Caso 1.2.1.1** se analiza si $\Delta(3c+8)=1$ y en el **Caso 1.2.1.2** si $\Delta(3c+8)=3$.

CASO 1.2.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3,\, 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\, c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

El elemento $4c+11 = 3c+8+3+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_1.

En el **Caso 1.2.1.1 a** se estudia si $\Delta(4c+11) = 2$ y en el **Caso 1.2.1.1 b** si $\Delta(4c+11) = 3$.

CASO 1.2.1.1

a) $\boldsymbol{\Delta(4c+11) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3,\, 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\, c+5,\, 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+10, 4c+9, 2c+6, 2c+5$ y $2c+7$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3,\, 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\, c+5,\, 4c+11,\, 4c+10,\, 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 2c+6,\, 2c+5,\, 2c+7\}$

El elemento $6c+14 = c+5+4c+9+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(6c+14) \neq 2$.

Se obtendría el caso **a1** si $\Delta(6c+14) = 1$ y el caso **a2** si $\Delta(6c+14) = 3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(6c+14) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+12$ y $10c+22$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3,\, 3c+8,\, 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\, c+5,\, 4c+11,\, 4c+10,\, 4c+9,\, 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 2c+6,\, 2c+5,\, 2c+7,\, 10c+22\}$

Según coloquemos el elemento $7c+15$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$.

Si $\Delta(7c+15) = 1 \Rightarrow 7c+15 = 6c+14+1+c$
Si $\Delta(7c+15) = 2 \Rightarrow 7c+15 = c+3+5c+12+c$
Si $\Delta(7c+15) = 3 \Rightarrow 10c+22 = 7c+15+2c+7+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(6c+14) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+20, 3c+7$, $5c+12$ y $10c+22$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+8,\ 9c+20,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5,\ 4c+11,\ 4c+10,\ 4c+9,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 2c+7,\ 6c+14,\ 10c+22\}$

Según coloquemos el elemento $7c+15$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(7c+15) = 1 \Rightarrow 7c+15 = 3c+8+3c+7+c$
Si $\Delta(7c+15) = 2 \Rightarrow 7c+15 = c+3+5c+12+c$
Si $\Delta(7c+15) = 3 \Rightarrow 10c+22 = 7c+15+2c+7+c$

CASO 1.2.1.1

b) $\boldsymbol{\Delta(4c+11) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 4c+11\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+7, 2c+6, 2c+5$, $4c+10$ y $4c+9$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5,\ 2c+7,\ 2c+6,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 4c+11,\ 4c+10,\ 4c+9\}$

El elemento $6c+14 = c+4+4c+10+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_3, es decir $\Delta(6c+14) \neq 3$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(6c+14) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(6c+14) = 2$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(6c+14) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+22$ y $5c+11$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+8,\ 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5,\ 2c+7,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 10c+22\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 4c+11,\ 4c+10,\ 4c+9,\ 5c+11\}$

Según coloquemos el elemento $7c+15$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(7c+15) = 1 \Rightarrow 7c+15 = 6c+14+1+c$
Si $\Delta(7c+15) = 2 \Rightarrow 10c+22 = 7c+15+2c+7+c$
Si $\Delta(7c+15) = 3 \Rightarrow 7c+15 = c+4+5c+11+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(6c+14) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+21, 3c+9$, $10c+23, 8c+19$ y $5c+13$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+8,\ 9c+21,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5,\ 2c+7,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 6c+14,\ 10c+23\}$

$A_3 \supseteq \{c+4,\, 4c+11,\, 4c+10,\, 4c+9,\, 8c+19,\, 5c+13\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}17$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(7c+17) = 1 \Rightarrow 7c+17 = 3c+8+3c+9+c$
Si $\Delta(7c+17) = 2 \Rightarrow 10c+23 = 7c+17+2c+6+c$
Si $\Delta(7c+17) = 3 \Rightarrow 7c+17 = c+4+5c+13+c$

Con este resultado hemos concluido la demostración del **Caso 1.2.1.1**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(c+4)=3\begin{cases}\Delta(c+5)=2\begin{cases}\Delta(3c+8)=1\begin{cases}\Delta(4c+11)=2\begin{cases}\Delta(6c+14)=1\\ \Delta(6c+14)=3\end{cases}\\ \Delta(4c+11)=3\begin{cases}\Delta(6c+14)=1\\ \Delta(6c+14)=2\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(3c+8)=3\end{cases}\\ \Delta(c+5)=3\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 1.2.1.2** con $\Delta(3c+8) = 3$

CASO 1.2.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\, c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 3c+8\}$

El elemento $5c+12 = c+4+3c+8+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $5c+12$ al conjunto A_3.

En el **Caso 1.2.1.2 a** analizaremos que ocurre si $\Delta(5c+12) = 1$ y en el **Caso 1.2.1.2 b** analizaremos que ocurre si $\Delta(5c+12) = 2$.

CASO 1.2.1.2

a) $\boldsymbol{\Delta(5c+12) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3,\, 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\, c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 3c+8\}$

El elemento $5c+12 = 4c+10+2+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $4c+10$ no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(4c+10) \neq 1$.

Se obtendría el caso **a1** si $\Delta(4c+10) = 2$ y el caso **a2** si $\Delta(4c+10) = 3$.

a1) $\mathbf{\Delta(4c+10)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+7$, $6c+15$ y $2c+5$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 5c+12,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+8,\ 6c+15,\ 2c+5\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}13$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+13)=1 \Rightarrow 6c+13=5c+12+1+c$
Si $\Delta(6c+13)=2 \Rightarrow 6c+13=c+3+4c+10+c$
Si $\Delta(6c+13)=3 \Rightarrow 6c+13=3c+8+2c+5+c$

a2) $\mathbf{\Delta(4c+10)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+17$, $6c+14, 2c+5$ y $4c+9$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 5c+12,\ 8c+17\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5,\ 6c+14,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+8,\ 4c+10,\ 4c+9\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}19$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(9c+19)=1 \Rightarrow 9c+19=8c+17+2+c$
Si $\Delta(9c+19)=2 \Rightarrow 9c+19=6c+14+2c+5+c$
Si $\Delta(9c+19)=3 \Rightarrow 9c+19=4c+10+4c+9+c$

CASO 1.2.1.2

b) $\mathbf{\Delta(5c+12)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+8\}$

El elemento $7c+15 = c+3+5c+12+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(7c+15)\neq 2$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(7c+15)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(7c+15)=3$.

b1) $\mathbf{\Delta(7c+15)=1}$

Como el elemento $7c+15=6c+14+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $6c+14$ al conjunto A_1.

Se tiene el caso **b1.1** si $\Delta(6c+14)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(6c+14)=3$.

b1.1) $\mathbf{\Delta(6c+14)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+9, 12c+24, 6c+13, 8c+17$ y $3c+7$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 7c+15,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5,\ 5c+12,\ 6c+14,\ 12c+24,\ 6c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+8,\ 8c+17,\ 3c+7\}$

Según coloquemos el elemento $5c+11$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(5c+11) = 1 \Rightarrow 5c+11 = 4c+9+2+c$
Si $\Delta(5c+11) = 2 \Rightarrow 12c+24 = 5c+11+6c+13+c$
Si $\Delta(5c+11) = 3 \Rightarrow 5c+11 = c+4+3c+7+c$

b1.2) $\quad \boldsymbol{\Delta(6c+14) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+6, 8c+18$ y $10c+21$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 7c+15,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5,\ 5c+12,\ 8c+18\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+8,\ 6c+14,\ 10c+21\}$

Según coloquemos el elemento $3c+7$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(3c+7) = 1 \Rightarrow 3c+7 = 2c+6+1+c$
Si $\Delta(3c+7) = 2 \Rightarrow 5c+12 = 3c+7+c+5+c$
Si $\Delta(3c+7) = 3 \Rightarrow 10c+21 = 3c+7+6c+14+c$

b2) $\quad \boldsymbol{\Delta(7c+15) = 3}$

El elemento $3c+7$ se introduce **a la fuerza** en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $4c+10 = 3c+7+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(4c+10) = 2$ y el caso **b2.2** si $\Delta(4c+10) = 3$.

b2.1) $\quad \boldsymbol{\Delta(4c+10) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+7, 6c+13, 10c+20, 4c+9$ y $2c+5$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 6c+13\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5,\ 5c+12,\ 4c+10,\ 10c+20,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+8,\ 7c+15,\ 2c+5\}$

Según coloquemos el elemento $5c+11$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(5c+11) = 1 \Rightarrow 6c+13 = 5c+11+2+c$
Si $\Delta(5c+11) = 2 \Rightarrow 10c+20 = 5c+11+4c+9+c$
Si $\Delta(5c+11) = 3 \Rightarrow 7c+15 = 5c+11+c+4+c$

b2.2) $\Delta(4c+10)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+7, 8c+18, 2c+6$ y $12c+25$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+7,\ 8c+18\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ c+5,\ 5c+12,\ 2c+6,\ 12c+25\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+8,\ 7c+15,\ 4c+10\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}19$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(9c+19)=1 \Rightarrow 9c+19=8c+18+1+c$
Si $\Delta(9c+19)=2 \Rightarrow 12c+25=9c+19+2c+6+c$
Si $\Delta(9c+19)=3 \Rightarrow 9c+19=c+4+7c+15+c$

Con este resultado hemos concluido la demostración del **Caso 1.2.1.2**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+8)=3\begin{cases}\Delta(5c+12)=1\begin{cases}\Delta(4c+10)=2\\ \\ \Delta(4c+10)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(5c+12)=2\begin{cases}\Delta(7c+15)=1\begin{cases}\Delta(6c+14)=2\\ \\ \Delta(6c+14)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(7c+15)=3\begin{cases}\Delta(4c+10)=2\\ \\ \Delta(4c+10)=3\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 1.2.2** con $\Delta(c+5)=3$.

CASO 1.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5\}$

Como el elemento $3c+9=c+4+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

En el **Caso 1.2.2.1** analizaremos que ocurre si $\Delta(3c+9)=1$ y en el **Caso 1.2.2.2** si $\Delta(3c+9)=2$.

CASO 1.2.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{c+3\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5\}$

El elemento $4c+10 = 3c+9+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

En el caso **Caso 1.2.2.1 a** se estudia si $\Delta(4c+10) = 2$ y en el **Caso 1.2.2.1 b** si $\Delta(4c+10) = 3$.

CASO 1.2.2.1

a) $\boldsymbol{\Delta(4c+10) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+11, 4c+12, 2c+7$ y $2c+8$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 4c+11,\ 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 2c+7,\ 2c+8\}$

El elemento $5c+15 = 2c+7+2c+8+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_3, es decir $\Delta(5c+15) \neq 3$.

Se obtendría el caso **a1** si $\Delta(5c+15) = 1$ y el caso **a2** si $\Delta(5c+15) = 2$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(5c+15) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+13$ y $6c+16$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 5c+15\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 4c+11,\ 4c+12,\ 4c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 2c+7,\ 2c+8,\ 6c+16\}$

Según coloquemos el elemento $9c+24$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(9c+24) = 1 \Rightarrow 9c+24 = 3c+9+5c+15+c$
Si $\Delta(9c+24) = 2 \Rightarrow 9c+24 = 4c+11+4c+13+c$
Si $\Delta(9c+24) = 3 \Rightarrow 9c+24 = 2c+8+6c+16+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(5c+15) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos 4 y $4c+13$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 4\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 4c+11,\ 4c+12,\ 5c+15,\ 4c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 2c+7,\ 2c+8\}$

Como el elemento $10c+25 = 5c+15+4c+10+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Se obtendría el caso **a2.1** si $\Delta(10c+25)=1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(10c+25)=3$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(10c+25)=1}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $6c+16$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 4,\ 10c+25\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 4c+11,\ 4c+12,\ 5c+15,\ 4c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 2c+7,\ 2c+8,\ 6c+16\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}23$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(9c+23)=1 \Rightarrow 10c+25=9c+23+2+c$
Si $\Delta(9c+23)=2 \Rightarrow 9c+23=4c+10+4c+13+c$
Si $\Delta(9c+23)=3 \Rightarrow 9c+23=2c+7+6c+16+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(10c+25)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+18, 9c+22, 3c+7, 8c+18, 3c+11$ y $6c+14$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9,\ 4,\ 7c+18,\ 9c+22,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 4c+11,\ 4c+12,\ 5c+15,\ 4c+13,\ 8c+18,\ 3c+11\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 2c+7,\ 2c+8,\ 10c+25,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}21$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(8c+21)=1 \Rightarrow 8c+21=7c+18+3+c$
Si $\Delta(8c+21)=2 \Rightarrow 8c+21=3c+11+4c+10+c$
Si $\Delta(8c+21)=3 \Rightarrow 10c+25=8c+21+c+4+c$

CASO 1.2.2.1

b) $\boldsymbol{\Delta(4c+10)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{c+3\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 4c+10\}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $2c+6$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $4c+10=2c+5+c+5+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $2c+5$ no puede pertenecer al conjunto A_3, es decir $\Delta(2c+5)\neq 3$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(2c+5)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(2c+5)=2$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(2c+5)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c{+}21, 6c{+}14, 2c{+}7, 5c{+}12, 3c{+}8$ y $4c{+}11$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3,\, 3c+9,\, 2c+5,\, 9c+21\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\, 2c+6,\, 6c+14,\, 2c+7,\, 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, c+5,\, 4c+10,\, 3c+8,\, 4c+11\}$

Según coloquemos el elemento $8c+18$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(8c+18)=1 \Rightarrow 9c+21=8c+18+3+c$
Si $\Delta(8c+18)=2 \Rightarrow 8c+18=2c+6+5c+12+c$
Si $\Delta(8c+18)=3 \Rightarrow 8c+18=4c+10+3c+8+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(2c+5)=2}$

Como el elemento $6c+14=c+4+4c+10+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.
Tendríamos el caso **b2.1** si $\Delta(6c+14)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(6c+14)=2$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(6c+14)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+21, 7c+16, 11c+23, 5c+11$ y $9c+19$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3,\, 3c+9,\, 6c+14,\, 10c+21\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\, 2c+6,\, 2c+5,\, 7c+16,\, 11c+23\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, c+5,\, 4c+10,\, 5c+11,\, 9c+19\}$

Según coloquemos el elemento $3c+7$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(3c+7)=1 \Rightarrow 10c+21=3c+7+6c+14+c$
Si $\Delta(3c+7)=2 \Rightarrow 11c+23=3c+7+7c+16+c$
Si $\Delta(3c+7)=3 \Rightarrow 5c+11=3c+7+c+4+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(6c+14)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+21, 7c+16, 2c+7, 10c+22, 4c+11$ y $5c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3,\, 3c+9,\, 9c+21,\, 7c+16\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\, 2c+6,\, 2c+5,\, 6c+14,\, 2c+7,\, 10c+22\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, c+5,\, 4c+10,\, 4c+11,\, 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $3c+7$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(3c+7)=1 \Rightarrow 7c+16=3c+7+3c+9+c$
Si $\Delta(3c+7)=2 \Rightarrow 6c+14=3c+7+2c+7+c$
Si $\Delta(3c+7)=3 \Rightarrow 5c+12=3c+7+c+5+c$

Con este resultado hemos concluido la demostración del **Caso 1.2.2.1**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+9)=1\begin{cases}\Delta(4c+10)=2\begin{cases}\Delta(5c+15)=1\\ \Delta(5c+15)=2\begin{cases}\Delta(10c+25)=1\\ \Delta(10c+25)=3\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(4c+10)=3\begin{cases}\Delta(2c+5)=1\\ \Delta(2c+5)=2\begin{cases}\Delta(6c+14)=1\\ \Delta(6c+14)=2\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 1.2.2.2** con $\Delta(3c+9)=2$.

CASO 1.2.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5\}$

El elemento $5c+12 = c+3+3c+9+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_2.

En el **Caso 1.2.2.2 a** analizamos que ocurre si $\Delta(5c+12)=1$ y en el **Caso 1.2.2.2 b** analizamos que ocurre si $\Delta(5c+12)=3$.

CASO 1.2.2.2

a) $\mathbf{\Delta(5c+12)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5\}$

El elemento $5c+12 = 4c+10+2+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $4c+10$ no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(4c+10) \neq 1$.

Se obtendría el caso **a1** si $\Delta(4c+10)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(4c+10)=3$.

a1) $\mathbf{\Delta(4c+10)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+18$, $4c+9$, $6c+13$ y $2c+6$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 5c+12,\ 8c+18\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ 3c+9,\ 4c+10,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 6c+13,\ 2c+6\}$

Según coloquemos el elemento $9c+19$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(9c+19) = 1 \Rightarrow 9c+19 = 8c+18+1+c$

Si $\Delta(9c+19) = 2 \Rightarrow 9c+19 = 4c+10+4c+9+c$

Si $\Delta(9c+19) = 3 \Rightarrow 9c+19 = 6c+13+2c+6+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(4c+10)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+5, 6c+14, 3c+7, 8c+17$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 5c+12,\ 2c+5\}$

$A_2 \supseteq \{c+3,\ 3c+9,\ 6c+14,\ 3c+7\}$

$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 4c+10,\ 8c+17,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $4c+11$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(4c+11) = 1 \Rightarrow 5c+12 = 4c+11+1+c$

Si $\Delta(4c+11) = 2 \Rightarrow 6c+14 = 4c+11+c+3+c$

Si $\Delta(4c+11) = 3 \Rightarrow 4c+11 = c+4+2c+7+c$

CASO 1.2.2.2

b) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3\}$

$A_2 \supseteq \{c+3,\ 3c+9\}$

$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 5c+12\}$

El elemento $5c+12 = 3c+8+c+4+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $3c+8$ no puede pertenecer al conjunto A_3, es decir $\Delta(3c+8) \neq 3$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(3c+8) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(3c+8) = 2$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=1}$

Como el elemento $4c+10 = 3c+8+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Tendríamos el caso **b1.1** si $\Delta(4c+10) = 2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(4c+10) = 3$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(4c+10)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+19, 2c+5, 4c+11$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+8,\ 8c+19\}$

$A_2 \supseteq \{c+3,\ 3c+9,\ 4c+10,\ 2c+5,\ 4c+11\}$

$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 5c+12,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $7c+16$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(7c+16)=1 \Rightarrow 8c+19=7c+16+3+c$
Si $\Delta(7c+16)=2 \Rightarrow 7c+16=4c+11+2c+5+c$
Si $\Delta(7c+16)=3 \Rightarrow 7c+16=c+4+5c+12+c$

b1.2) $\mathbf{\Delta(4c+10)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+15, 10c+22, 2c+6$ y $7c+16$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 3c+8,\ 6c+15,\ 10c+22\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ 3c+9,\ 2c+6,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 5c+12,\ 4c+10\}$

Según coloquemos el elemento $3c+7$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(3c+7)=1 \Rightarrow 10c+22=3c+7+6c+15+c$
Si $\Delta(3c+7)=2 \Rightarrow 7c+16=3c+7+3c+9+c$
Si $\Delta(3c+7)=3 \Rightarrow 5c+12=3c+7+c+5+c$

b2) $\mathbf{\Delta(3c+8)=2}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $7c+17$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libres de suma estricta*

Como el elemento $7c+17=6c+15+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $6c+15$ al conjunto A_1.

Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(6c+15)=2$ y el caso **b2.2** si $\Delta(6c+15)=3$.

b2.1) $\mathbf{\Delta(6c+15)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+23$ y $8c+18$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 7c+17,\ 10c+23\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ 3c+9,\ 3c+8,\ 6c+15\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 5c+12,\ 8c+18\}$

Según coloquemos el elemento $2c+6$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(2c+6)=1 \Rightarrow 10c+23=2c+6+7c+17+c$
Si $\Delta(2c+6)=2 \Rightarrow 6c+15=2c+6+3c+9+c$
Si $\Delta(2c+6)=3 \Rightarrow 8c+18=2c+6+5c+12+c$

b2.2) $\mathbf{\Delta(6c+15)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $12c+27$ y $8c+19$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 7c+17,\ 12c+27\}$
$A_2 \supseteq \{c+3,\ 3c+9,\ 3c+8,\ 8c+19\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ c+5,\ 5c+12,\ 6c+15\}$

Según coloquemos el elemento $4c{+}10$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(4c+10) = 1 \Rightarrow 12c + 27 = 4c + 10 + 7c + 17 + c$
Si $\Delta(4c+10) = 2 \Rightarrow 8c + 19 = 4c + 10 + 3c + 9 + c$
Si $\Delta(4c+10) = 3 \Rightarrow 6c + 15 = 4c + 10 + c + 5 + c$

Resumimos el **Caso 1.2.2.2**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+9) = 12 \begin{cases} \Delta(5c+12) = 1 \begin{cases} \Delta(4c+10) = 2 \\ \\ \Delta(4c+10) = 3 \end{cases} \\ \\ \Delta(5c+12) = 3 \begin{cases} \Delta(3c+8) = 1 \begin{cases} \Delta(4c+10) = 2 \\ \\ \Delta(4c+10) = 3 \end{cases} \\ \\ \Delta(3c+8) = 2 \begin{cases} \Delta(6c+15) = 2 \\ \\ \Delta(6c+15) = 3 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 1**

Recordemos que el *número de Rado estricto* $SR(3, c)$, es el mayor entero positivo $N + 1$, para que el conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ pueda subdividirse en tres conjuntos *libres de suma estricta* en el sentido de Rado, es decir:

$$\forall x_1, x_2 \in A_i \Rightarrow x_1 + x_2 + c \notin A_i, i = 1, 2, 3$$

siendo x_1 y x_2 **distintos** y $c > 0$.

En términos de coloración el *número de Rado estricto*, $SR(3, c)$ es el mínimo entero positivo N, tal que para cada *3-coloración* del conjunto $\{1, 2, , ..., N\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., N\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

existe una solución monocromática a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$, siendo $x_1 \neq x_2$ y $c \geq 0$.

En esta demostración en el **Caso 1.1.1.2** apartado **b1.2.1.2** hemos obtenido una distribución óptima para obtener dicho número, siendo la partición *libre de suma estricta* en el sentido de Rado la dada por los subconjuntos:

$$A_1 = \{1, ..c + 2, 3c + 7, .., 4c + 7, 9c + 17, .,10c + 17, 12c + 21, ..., 13c + 21\}$$

$$A_2 = \{c + 3, ..., 3c + 6, 10c + 18, ..., 12c + 20\}$$

$$A_3 = \{4c + 8, 4c + 9, ..., 9c + 16\}$$

10.2. Caso 2: $A_1 \supseteq \{1,\ 2\}$ y $A_2 \supseteq \{3\}$

Para cualquier *3-coloración* definida en el conjunto $\{1, 2, ..., 13c + 22\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., 13c + 22\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

A los conjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$ se le asignan los colores:

$$\Delta(A_1) = 1$$
$$\Delta(A_2) = 2$$
$$\Delta(A_3) = 3$$

siendo $A_1 \supseteq \{1,\ 2\}$ y $A_2 \supseteq \{3\}$

Vamos a demostrar que en este caso hay soluciones *monocromáticas* de la ecuación:
$x_1 + x_2 + c = x_3,$ siendo $x_1 \neq x_2$ y $c > 0.$

Dados los conjuntos $A_1 \supseteq \{1,\ 2\}$ y $A_2 \supseteq \{3\}$
El elemento $c + 3 = 1 + 2 + c$ es una solución monocromática no puede al conjunto A_1.
En el **Caso 2.1** estudiaremos qué sucede si le asignamos el color 2, es decir $\Delta(c + 3) = 2$ y en el **Caso 2.2** estudiaremos qué sucede si le asignamos el color 3, es decir $\Delta(c + 3) = 3$.

CASO 2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c + 3\}$

CASO 2.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2\}$
$A_2 \supseteq \{3\}$
$A_3 \supseteq \{c + 3\}$

En el **Caso 2.1** como el elemento $2c + 6 = 3 + c + 3$ es una solución monocromática no puede pertenecer al conjunto A_2.
En el **Caso 2.1.1** se estudia que sucede si $\Delta(2c + 6) = 1$ y en el **Caso 2.1.2** se estudia que sucede si $\Delta(2c + 6) = 3$.

CASO 2.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c + 6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c + 3\}$

CASO 2.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c + 3\}$
$A_3 \supseteq \{2c + 6\}$

Desarrollaremos estos casos hasta conseguir soluciones monocromáticas a la ecuación
$x_1 + x_2 + c = x_3$

En el **Caso 2.1.1**

Como el elemento $3c + 7 = 2c + 6 + 1 + c$ es una solución monocromática no puede pertenecer al conjunto A_1.

En el **Caso 2.1.1.1** analizaremos qué ocurre si $\Delta(3c+7) = 2$ y en el **Caso 2.1.1.2** si $\Delta(3c+7) = 3$.

Podemos representar estas distribuciones en el siguiente esquema:

$$\Delta(c+3) \neq 1 \begin{cases} \Delta(c+3) = 2 \begin{cases} \Delta(2c+6) = 1 \begin{cases} \Delta(3c+7) = 2 \\ \\ \Delta(3c+7) = 3 \end{cases} \\ \\ \Delta(2c+6) = 3 \end{cases} \\ \\ \Delta(c+3) = 3 \end{cases}$$

CASO 2.1.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+7\}$

A la fuerza el elemento $c + 4 \in A_3$ y mantiene la propiedad de que el conjunto sea *libre de suma estricta*.

El elemento $5c + 10 = 3c + 7 + c + 3 + c$ es una solución monocromática , no puede pertenecer al conjunto A_2.

Estudiaremos el **Caso 2.1.1.1 a** si $\Delta(5c + 10) = 1$ y el **Caso 2.1.1.1 b** si $\Delta(5c + 10) = 3$.

CASO 2.1.1.1

a) $\boldsymbol{\Delta(5c + 10) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6,\ 5c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+15, 4c+8, 5c+9, 2c+4, 6c+11$ y $2c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6,\ 5c+10,\ 8c+15\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+7,\ 4c+8,\ 5c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+4,\ 6c+11,\ 2c+5\}$

Según coloquemos el elemento $9c+16$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(9c + 16) = 1 \Rightarrow 9c + 16 = 8c + 15 + 1 + c$
Si $\Delta(9c + 16) = 2 \Rightarrow 9c + 16 = 5c + 9 + 3c + 7 + c$
Si $\Delta(9c + 16) = 3 \Rightarrow 9c + 16 = 6c + 11 + 2c + 5 + c$

CASO 2.1.1.1

b) $\boldsymbol{\Delta(5c+10)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 5c+10\}$

El elemento $3c+8=2c+6+2+c$ es una solución monocromática , por tanto no puede pertenecer al conjunto A_1 , es decir $\Delta(3c+8)\neq 1$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(3c+8)=2$ y el caso **b2** si $\Delta(3c+8)=3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+15$ y $c+5$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

Como el elemento $4c+10=3c+7+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **b1.1** si $\Delta(4c+10)=1$ y el el caso **b1.2** si $\Delta(4c+10)=3$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(4c+10)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+8, 4c+9$, $2c+5$ y $5c+12$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6,\ 7c+15,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+7,\ 3c+8,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 5c+10,\ c+5,\ 2c+5,\ 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $8c+17$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(8c+17)=1 \Rightarrow 8c+17=7c+15+2+c$
Si $\Delta(8c+17)=2 \Rightarrow 8c+17=4c+9+3c+8+c$
Si $\Delta(8c+17)=3 \Rightarrow 8c+17=5c+12+2c+5+c$

b1.2) $\boldsymbol{\Delta(4c+10)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+5, 3c+8, 6c+14$ y $5c+11$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6,\ 7c+15,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+7,\ 3c+8,\ 6c+14\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 5c+10,\ c+5,\ 4c+10,\ 5c+11\}$

Según coloquemos el elemento $10c+21$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(10c+21)=1 \Rightarrow 10c+21=7c+15+2c+6+c$
Si $\Delta(10c+21)=2 \Rightarrow 10c+21=6c+14+3c+7+c$
Si $\Delta(10c+21)=3 \Rightarrow 10c+21=5c+11+4c+10+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 5c+10,\ 3c+8\}$

Como el elemento $5c+12=3c+8+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $5c+12$ al conjunto A_3.
Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(5c+12)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(5c+12)=2$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+21$, $6c+14, 8c+18, 4c+10$ y $4c+11$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6,\ 5c+12,\ 9c+21\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+7,\ 6c+14,\ 8c+18\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 5c+10,\ 3c+8,\ 4c+10,\ 4c+11\}$

Según coloquemos el elemento $6c+15$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+15)=1 \Rightarrow 9c+21=6c+15+2c+6+c$
Si $\Delta(6c+15)=2 \Rightarrow 8c+18=6c+15+c+3+c$
Si $\Delta(6c+15)=3 \Rightarrow 6c+15=4c+11+c+4+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+9, c+5$ y $4c+10$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+7,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 5c+10,\ 3c+8,\ c+5,\ 4c+10\}$

Según coloquemos el elemento $6c+15$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+15)=1 \Rightarrow 6c+15=3c+9+2c+6+c$
Si $\Delta(6c+15)=2 \Rightarrow 6c+15=5c+12+3+c$
Si $\Delta(6c+15)=3 \Rightarrow 6c+15=4c+10+c+5+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del , **Caso 2.1.1.1**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+7)=2\begin{cases}\Delta(5c+10)=1\\ \\ \Delta(5c+10)=3\begin{cases}\Delta(3c+8)=1\begin{cases}\Delta(4c+10)=1\\ \\ \Delta(4c+10)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(3c+8)=3\begin{cases}\Delta(5c+12)=1\\ \\ \Delta(5c+12)=2\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 2.1.1.2** con $\Delta(3c+7)=3$.

CASO 2.1.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7\}$

El elemento $3c+8=2c+6+2+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_1.

Estudiaremos el **Caso 2.1.1.2 a** si $\Delta(3c+8)=2$ y el **Caso 2.1.1.2 b** si $\Delta(3c+8)=3$.

CASO 2.1.1.2

a) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $c+5$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $2c+6=c+4+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_1.

Se obtendría el caso **a1** si $\Delta(c+4)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(c+4)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+12, 6c+15$, $8c+18$, $4c+11$ y $4c+10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6,\ 5c+12,\ 6c+15\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+8,\ c+4,\ 8c+18\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ c+5,\ 4c+11,\ 4c+10\}$

Según coloquemos el elemento $9c+21$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(9c+21)=1 \Rightarrow 9c+21=6c+15+2c+6+c$
Si $\Delta(9c+21)=2 \Rightarrow 9c+21=8c+18+3+c$
Si $\Delta(9c+21)=3 \Rightarrow 9c+21=4c+10+4c+11+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+11, 4c+9$ y $2c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6,\ 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+8,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ c+5,\ c+4,\ 2c+5\}$

Según coloquemos el elemento $6c+12$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+12)=1 \Rightarrow 6c+12=5c+11+1+c$
Si $\Delta(6c+12)=2 \Rightarrow 6c+12=4c+9+c+3+c$
Si $\Delta(6c+12)=3 \Rightarrow 6c+12=3c+7+2c+5+c$

CASO 2.1.1.2

b) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+8\}$

Como el elemento $7c+15=3c+7+3c+8+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **b1** si $\Delta(7c+15)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(7c+15)=2$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(7c+15)=1}$

Como el elemento $7c+15=6c+13+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $6c+13$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **b1.1** si $\Delta(6c+13)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(6c+13)=3$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(6c+13)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+12, 3c+6$, $4c+9$, $8c+16, c+4$ y $4c+10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6,\ 7c+15,\ 5c+12,\ 3c+6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+13,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+8,\ 8c+16,\ c+4,\ 4c+10\}$

Según coloquemos el elemento $6c+12$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+12)=1 \Rightarrow 6c+12=3c+6+2c+6+c$
Si $\Delta(6c+12)=2 \Rightarrow 6c+12=4c+9+c+3+c$
Si $\Delta(6c+12)=3 \Rightarrow 8c+16=6c+12+c+4+c$

b1.2) $\boldsymbol{\Delta(6c+13)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\,2,\,2c+6,\,7c+15\}$
$A_2 \supseteq \{3,\,c+3\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\,3c+8,\,6c+13\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $10c+21$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $2c+6 = c+5+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_1.

En el caso **b1.2.1** se asigna el color $\Delta(c+5)=2$ y en el caso **b1.2.2** se asigna el color $\Delta(c+5)=3$.

b1.2.1) $\boldsymbol{\Delta(c+5)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $12c+24, 2c+4, 4c+9\,, 5c+10, 8c+16, 6c+14, 9c+18$ y $3c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\,2,\,2c+6,\,7c+15,\,12c+24,\,2c+4\}$
$A_2 \supseteq \{3,\,c+3,\,10c+21,\,c+5,\,4c+9,\,5c+10\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\,3c+8,\,6c+13,\,8c+16,\,6c+14,\,9c+18,\,3c+5\}$

Según coloquemos el elemento $4c+11$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(4c+11)=1 \Rightarrow 7c+15 = 4c+11+2c+4+c$
Si $\Delta(4c+11)=2 \Rightarrow 10c+21 = 4c+11+5c+10+c$
Si $\Delta(4c+11)=3 \Rightarrow 8c+16 = 4c+11+3c+5+c$

b1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(c+5)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+18\,, 5c+12, 8c+17$ y $4c+9$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\,2,\,2c+6,\,7c+15,\,8c+18\}$
$A_2 \supseteq \{3,\,c+3,\,10c+21,\,5c+12,\,8c+17\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\,3c+8,\,6c+13,\,c+5,\,4c+9\}$

Según coloquemos el elemento $6c+14$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+14)=1 \Rightarrow 7c+15 = 6c+14+1+c$
Si $\Delta(6c+14)=2 \Rightarrow 8c+17 = 6c+14+c+3+c$
Si $\Delta(6c+14)=3 \Rightarrow 6c+14 = 4c+9+c+5+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(7c+15)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\,2,\,2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\,c+3,\,7c+15\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\,3c+8\}$

Como el elemento $7c+15 = 5c+12+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $5c+12$ al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **b2.1** si $\Delta(5c+12)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(5c+12)=3$.

b2.1) $\quad \boldsymbol{\Delta(5c+12)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+5$, $4c+10, 4c+11, 8c+18, 6c+13$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6,\ 5c+12,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 7c+15,\ 4c+10,\ 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+8,\ 8c+18,\ 6c+13,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}14$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+14)=1 \Rightarrow 6c+14=5c+12+2+c$
Si $\Delta(6c+14)=2 \Rightarrow 6c+14=4c+11+c+3+c$
Si $\Delta(6c+14)=3 \Rightarrow 6c+14=2c+7+3c+7+c$

b2.2) $\quad \boldsymbol{\Delta(5c+12)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+20, 4c+9, c+5, 12c+26, 6c+14$, $8c+18$ y $10c+21$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+6,\ 9c+20,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 7c+15,\ c+5,\ 12c+26,\ 6c+14\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+8,\ 5c+12,\ 8c+18,\ 10c+21\}$

Según coloquemos el elemento $4c{+}11$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(4c+11)=1 \Rightarrow 9c+20=4c+11+4c+9+c$
Si $\Delta(4c+11)=2 \Rightarrow 6c+14=4c+11+c+3+c$
Si $\Delta(4c+11)=3 \Rightarrow 8c+18=4c+11+3c+7+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 2.1.1.2** cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+7)=3 \begin{cases} \Delta(3c+8)=2 \begin{cases} \Delta(c+4)=2 \\ \Delta(c+4)=3 \end{cases} \\ \Delta(3c+8)=3 \begin{cases} \Delta(7c+15)=1 \begin{cases} \Delta(6c+13)=2 \\ \Delta(6c+13)=3 \begin{cases} \Delta(c+5)=2 \\ \Delta(c+5)=3 \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(7c+15)=2 \begin{cases} \Delta(5c+12)=1 \\ \Delta(5c+12)=3 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 2.1.2** con , $\Delta(2c+6)=2$.

CASO 2.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\, 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, c+3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

Con esta distribución no tenemos ningún elemento que se introduzca **a la fuerza** en algunos de los conjuntos $\{A_1,\, A_2,\, A_3\}$ y que sigan manteniendo la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

Consideremos el elemento arbitrario $3c+10$. Estudiaremos el **Caso 2.1.2.1** si $\Delta(3c+10)=1$, el **Caso 2.1.2.2** si $\Delta(3c+10)=2$ y el **Caso 2.1.2.3** si $\Delta(3c+10)=3$.

CASO 2.1.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, c+3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

El elemento $4c+11 = 3c+10+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se obtendría el **Caso 2.1.2.1 a** si $\Delta(4c+11)=2$ y el **Caso 2.1.2.1 b** si $\Delta(4c+11)=3$.

CASO 2.1.2.1

a) $\boldsymbol{\Delta(4c+11)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, c+3,\, 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+14$ y $2c+8$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+10,\, 5c+14\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, c+3,\, 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 2c+8\}$

Como el elemento $5c+14 = c+4+3c+10+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(c+4)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(c+4)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+7, 9c+21, 4c+9$, $6c+15, 7c+17$ y $4c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+10,\, 5c+14,\, 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, c+3,\, 4c+11,\, c+4,\, 9c+21,\, 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 2c+8,\, 6c+15,\, 7c+17,\, 4c+12\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}5$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(2c+5) = 1 \Rightarrow 3c+7 = 2c+5+2+c$
Si $\Delta(2c+5) = 2 \Rightarrow 4c+9 = 2c+5+c+4+c$
Si $\Delta(2c+5) = 3 \Rightarrow 7c+17 = 2c+5+4c+12+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(c+4) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+9$, $4c+12$ y $6c+15$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+10,\ 5c+14,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 4c+11,\ 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+8,\ c+4,\ 6c+15\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}23$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(9c+23) = 1 \Rightarrow 9c+23 = 5c+14+3c+9+c$
Si $\Delta(9c+23) = 2 \Rightarrow 9c+23 = 4c+11+4c+12+c$
Si $\Delta(9c+23) = 3 \Rightarrow 9c+23 = 2c+8+6c+15+c$

CASO 2.1.2.1

b) $\boldsymbol{\Delta(4c+11) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11\}$

Como el elemento $4c+12 = 3c+10+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se estudia el caso **b1** si $\Delta(4c+12) = 2$ y el caso **b2** si $\Delta(4c+12) = 3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(4c+12) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+15$, $3c+8$, $c+5$, $9c+23$, $2c+9$, $6c+17$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+10,\ 5c+15,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 4c+12,\ c+5,\ 9c+23\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 2c+9,\ 6c+17,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}18$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(7c+18) = 1 \Rightarrow 7c+18 = 3c+10+3c+8+c$
Si $\Delta(7c+18) = 2 \Rightarrow 9c+23 = 7c+18+c+5+c$
Si $\Delta(7c+18) = 3 \Rightarrow 7c+18 = 4c+11+2c+7+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(4c+12) = 3}$

Como el elemento $4c+11 = c+5+2c+6+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_3.

En el caso **b2.1** se estudia si $\Delta(c+5)=1$ y en el caso **b2.2** si $\Delta(c+5)=2$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(c+5)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+10,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 4c+12\}$

Como el elemento $5c+15=3c+10+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $5c+15$ al conjunto A_1.

Obtendremos el caso **b2.1.1** si $\Delta(5c+15)=2$ y el caso **b2.1.2** si $\Delta(5c+15)=3$.

b2.1.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+15)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+18, 11c+26, 9c+23$ y $8c+20$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+10,\ c+5,\ 7c+18,\ 11c+26\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 5c+15,\ 9c+23\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 4c+12,\ 8c+20\}$

Según coloquemos el elemento $3c+8$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(3c+8)=1 \Rightarrow 11c+26=3c+8+7c+18+c$
Si $\Delta(3c+8)=2 \Rightarrow 9c+23=5c+15+3c+8+c$
Si $\Delta(3c+8)=3 \Rightarrow 8c+20=3c+8+4c+12+c$

b2.1.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+15)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+6, 2c+9, 4, 2c+8$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+10,\ c+5,\ c+6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 2c+9,\ 4,\ 2c+8\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 4c+12,\ 5c+15,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $c+4$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(c+4)=1 \Rightarrow 3c+10=c+4+c+6+c$
Si $\Delta(c+4)=2 \Rightarrow 2c+8=c+4+4+c$
Si $\Delta(c+4)=3 \Rightarrow 4c+11=c+4+2c+7+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(c+5)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 4c+12\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $2c+8$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre* *de suma estricta*. Como el elemento $7c + 18 = 2c + 6 + 4c + 12 + c$ es una solución monocromática, al conjunto A_3.

Se obtendría el caso **b2.2.1** si $\Delta(7c + 18) = 1$ y el caso **b2.2.2** si $\Delta(7c + 18) = 2$.

b2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(7c + 18) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c + 16$ y $3c + 8$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c + 10,\, 7c + 18\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, c + 3,\, c + 5,\, 6c + 16\}$
$A_3 \supseteq \{2c + 6,\, 4c + 11,\, 4c + 12,\, 2c + 8,\, 3c + 8\}$

Según coloquemos el elemento $8c+19$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(8c + 19) = 1 \Rightarrow 8c + 19 = 7c + 18 + 1 + c$
Si $\Delta(8c + 19) = 2 \Rightarrow 8c + 19 = c + 3 + 6c + 16 + c$
Si $\Delta(8c + 19) = 3 \Rightarrow 8c + 19 = 4c + 11 + 3c + 8 + c$

b2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(7c + 18) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+23$ y $5c+13$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c + 10,\, 9c + 23\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, c + 3,\, c + 5,\, 7c + 18\}$
$A_3 \supseteq \{2c + 6,\, 4c + 11,\, 4c + 12,\, 2c + 8,\, 5c + 13\}$

Según coloquemos el elemento $8c+21$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(8c + 21) = 1 \Rightarrow 9c + 23 = 8c + 21 + 2 + c$
Si $\Delta(8c + 21) = 2 \Rightarrow 8c + 21 = 7c + 18 + 3 + c$
Si $\Delta(8c + 21) = 3 \Rightarrow 8c + 21 = 2c + 8 + 5c + 13 + c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 2.1.2.1**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+10)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(4c+11)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(c+4)=2\\ \\ \Delta(c+4)=3\end{array}\right.\\ \\ \Delta(4c+11)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(4c+12)=2\\ \\ \Delta(4c+12)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(c+5)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(5c+15)=2\\ \\ \Delta(5c+15)=3\end{array}\right.\\ \\ \Delta(c+5)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(7c+18)=1\\ \\ \Delta(7c+18)=2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Continuamos con el **Caso 2.1.2.2** con $\Delta(3c+10)=2$

CASO 2.1.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\,2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\,c+3,\,3c+10\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

El elemento $5c+13 = c+3+3c+10+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_2.

Analizaremos el **Caso 2.1.2.2 a** si se le asigna el color $\Delta(5c+13)=1$ y el **Caso 2.1.2.2 b** si se le asigna el color $\Delta(5c+13)=3$.

CASO 2.1.2.2

a) $\boldsymbol{\Delta(5c+13)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\,2,\,5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{3,\,c+3,\,3c+10\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

Como el elemento $5c+13 = 4c+11+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+11$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(4c+11)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(4c+11)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(4c+11)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+8$, $11c+24$, $8c+18$, $9c+21$, $7c+17$, $6c+14$, $2c+7$, $4c+10$ y $5c+11$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c+13,\ 3c+8,\ 11c+24,\ 8c+18\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+10,\ 4c+11,\ 9c+21,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 6c+14,\ 2c+7,\ 4c+10,\ 5c+11\}$

Según coloquemos el elemento $9c+20$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(9c+20) = 1 \Rightarrow 9c+20 = 8c+18+2+c$
Si $\Delta(9c+20) = 2 \Rightarrow 9c+20 = c+3+7c+17+c$
Si $\Delta(9c+20) = 3 \Rightarrow 9c+20 = 2c+6+6c+14+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(4c+11) = 3}$

Como el elemento $4c+11 = c+5+2c+6+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **a2.1** si $\Delta(c+5) = 1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(c+5) = 2$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(c+5) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c+13,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+10\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+18$,$2c+7$ y $3c+8$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c+13,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+10,\ 7c+18\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 2c+7,\ 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento $6c+15$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(6c+15) = 1 \Rightarrow 6c+15 = 5c+13+2+c$
Si $\Delta(6c+15) = 2 \Rightarrow 7c+18 = 6c+15+3+c$
Si $\Delta(6c+15) = 3 \Rightarrow 6c+15 = 2c+7+3c+8+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(c+5) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+10,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11\}$

Como el elemento $3c+8 = c+3+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Se obtendría el caso **a2.2.1** si $\Delta(3c+8) = 1$ y el caso **a2.2.2** si $\Delta(3c+8) = 3$.

a2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(3c+8) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c+13,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+10,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11\}$

El elemento $6c + 15 = 5c + 13 + 2 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Tendríamos el caso **a2.2.1.1** si $\Delta(6c + 15) = 2$ y el caso **a2.2.1.2** si $\Delta(6c + 15) = 3$.

a2.2.1.1) $\boldsymbol{\Delta(6c + 15) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c + 18$, $11c + 26$, $2c + 7$, $4c + 10$ y $8c + 20$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c + 13,\ 3c + 8,\ 7c + 18\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c + 3,\ 3c + 10,\ c + 5,\ 6c + 15,\ 11c + 26\}$
$A_3 \supseteq \{2c + 6,\ 4c + 11,\ 2c + 7,\ 4c + 10,\ 8c + 20\}$

Según coloquemos el elemento $9c+21$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(9c + 21) = 1 \Rightarrow 9c + 21 = 5c + 13 + 3c + 8 + c$
Si $\Delta(9c + 21) = 2 \Rightarrow 11c + 26 = 9c + 21 + c + 5 + c$
Si $\Delta(9c + 21) = 3 \Rightarrow 9c + 21 = 4c + 11 + 4c + 10 + c$

a2.2.1.2) $\boldsymbol{\Delta(6c + 15) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c + 26$, $9c + 21$ y $3c + 8$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c + 13,\ 3c + 8,\ 11c + 26\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c + 3,\ 3c + 10,\ c + 5,\ 9c + 21\}$
$A_3 \supseteq \{2c + 6,\ 4c + 11,\ 2c + 7,\ 6c + 15\}$

Según coloquemos el elemento $7c+18$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(7c + 18) = 1 \Rightarrow 11c + 26 = 7c + 18 + 3c + 8 + c$
Si $\Delta(7c + 18) = 2 \Rightarrow 9c + 21 = 7c + 18 + c + 3 + c$
Si $\Delta(7c + 18) = 3 \Rightarrow 7c + 18 = 4c + 11 + 2c + 7 + c$

a2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(3c + 8) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c + 13\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c + 3,\ 3c + 10,\ c + 5\}$
$A_3 \supseteq \{2c + 6,\ 4c + 11,\ 3c + 8\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c + 19$ y $6c + 14$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c + 13,\ 8c + 19\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c + 3,\ 3c + 10,\ c + 5,\ 6c + 14\}$
$A_3 \supseteq \{2c + 6,\ 4c + 11,\ 3c + 8\}$

Según coloquemos el elemento $7c+17$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(7c + 17) = 1 \Rightarrow 8c + 19 = 7c + 17 + 2 + c$

Si $\Delta(7c+17) = 2 \Rightarrow 7c+17 = 6c+14+3+c$
Si $\Delta(7c+17) = 3 \Rightarrow 7c+17 = 2c+6+4c+11+c$

CASO 2.1.2.2

b) $\boldsymbol{\Delta(5c+13) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, c+3,\, 3c+10\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 5c+13\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $2c+7$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $3c+8 = 2c+7+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(3c+8) = 2$ y el caso **b2** si $\Delta(3c+8) = 3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(3c+8) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+11$ y $c+5$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 2c+7,\, 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, c+3,\, 3c+10,\, 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 5c+13,\, c+5\}$

Según coloquemos el elemento $7c+18$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$.

Si $\Delta(7c+18) = 1 \Rightarrow 7c+18 = 2c+7+4c+11+c$
Si $\Delta(7c+18) = 2 \Rightarrow 7c+18 = 3c+10+3c+8+c$
Si $\Delta(7c+18) = 3 \Rightarrow 7c+18 = 5c+13+c+5+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(3c+8) = 3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $c+5$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $6c+14 = 2c+6+3c+8+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **b2.1** si $\Delta(6c+14) = 1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(6c+14) = 2$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(6c+14) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+24$, $9c+21$, $10c+22$, $7c+16$ y $12c+25$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 2c+7,\, 6c+14,\, 11c+24\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, c+3,\, 3c+10,\, c+5,\, 9c+21,\, 10c+22\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 5c+13,\, 3c+8,\, 7c+16,\, 12c+25\}$

Según coloquemos el elemento $8c+17$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$.

Si $\Delta(8c+17)=1 \Rightarrow 11c+24 = 8c+17+2c+7+c$
Si $\Delta(8c+17)=2 \Rightarrow 10c+22 = 8c+17+c+5+c$
Si $\Delta(8c+17)=3 \Rightarrow 12c+25 = 8c+17+3c+8+c$

b2.2) $\quad \boldsymbol{\Delta(6c+14)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+19$, $4c+11$, $c+4$ y $7c+17$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+7,\ 8c+19,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 3c+10,\ c+5,\ 6c+14,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 5c+13,\ 3c+8,\ 7c+17\}$

Según coloquemos el elemento $3c+9$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(3c+9)=1 \Rightarrow 4c+11 = 3c+9+2+c$
Si $\Delta(3c+9)=2 \Rightarrow 3c+9 = c+5+c+4+c$
Si $\Delta(3c+9)=3 \Rightarrow 7c+17 = 3c+9+3c+8+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 2.1.2.2**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+10)=2 \begin{cases} \Delta(5c+13)=1 \begin{cases} \Delta(4c+11)=2 \\ \Delta(4c+11)=3 \begin{cases} \Delta(c+5)=1 \\ \Delta(c+5)=2 \begin{cases} \Delta(3c+8)=1 \begin{cases} \Delta(6c+15)=2 \\ \Delta(6c+15)=3 \end{cases} \\ \Delta(3c+8)=3 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(5c+13)=3 \begin{cases} \Delta(3c+8)=2 \\ \Delta(3c+8)=3 \begin{cases} \Delta(6c+14)=1 \\ \Delta(6c+14)=2 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 2.1.2.3** con $\Delta(3c+10)=3$.

CASO 2.1.2.3

$A_1 \supseteq \{1,\ 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10\}$

El elemento $6c+16 = 2c+6+3c+10+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_3.

Analizaremos el **Caso 2.1.2.3 a** si $\Delta(6c+16)=1$ y el **Caso 2.1.2.3 b** si $\Delta(6c+16)=2$.

CASO 2.1.2.3

a) $\mathbf{\Delta(6c+16)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 6c+16\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10\}$

Como el elemento $6c+16 = 5c+15+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $5c+15$ al conjunto A_1.

Tendríamos el caso **a1** si $\Delta(5c+15)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(5c+15)=3$.

a1) $\mathbf{\Delta(5c+15)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+12$, $11c+28$, $7c+18$ y $5c+13$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 6c+16,\ 4c+12\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 5c+15,\ 11c+28\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 7c+18,\ 5c+13\}$

Como el elemento $7c+18 = 5c+13+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **a1.1** si $\Delta(c+5)=1$ y el **a1.2** si $\Delta(c+5)=2$.

a1.1) $\mathbf{\Delta(c+5)=1}$

El elemento $2c+7$ se introduce **a la fuerza** en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 6c+16,\ 4c+12,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 5c+15,\ 11c+28,\ 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 7c+18,\ 5c+13\}$

Según coloquemos el elemento 4 en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(4)=1 \Rightarrow c+5=4+1+c$
Si $\Delta(4)=2 \Rightarrow 2c+7=c+3+4+c$
Si $\Delta(4)=3 \Rightarrow 3c+10=2c+6+4+c$

a1.2) $\mathbf{\Delta(c+5)=2}$

Introducimos **a la fuerza** en los conjuntos A_1 y A_2 los elementos $3c+8$ y 4 que mantienen la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 6c+16,\ 4c+12,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 5c+15,\ 11c+28,\ c+5,\ 4\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 7c+18,\ 5c+13\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}7$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(2c+7) = 1 \Rightarrow 3c+8 = 2c+7+1+c$
Si $\Delta(2c+7) = 2 \Rightarrow 2c+7 = c+3+4+c$
Si $\Delta(2c+7) = 3 \Rightarrow 5c+13 = 2c+6+2c+7+c$

a2) $\Delta(5c+15) = 3$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 6c+16\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 5c+15\}$

Como el elemento $5c{+}15 = c{+}5{+}3c{+}10{+}c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **a2.1** si $\Delta(c+5) = 1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(c+5) = 2$.

a2.1) $\Delta(c+5) = 1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+24$, 4 , $8c+21$, $4c+11$, $7c+18$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 6c+16,\ c+5,\ 10c+24\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 4,\ 8c+21,\ 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 5c+15,\ 7c+18,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $3c{+}8$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(3c+8) = 1 \Rightarrow 10c+24 = 3c+8+6c+16+c$
Si $\Delta(3c+8) = 2 \Rightarrow 4c+11 = 3c+8+3+c$
Si $\Delta(3c+8) = 3 \Rightarrow 7c+18 = 3c+8+3c+10+c$

a2.2) $\Delta(c+5) = 2$

Como el elemento $7c+17 = 6c+16+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer A_1.

En el caso **a2.2.1** se le asigna el color $\Delta(7c+17) = 2$ y el caso **a2.2.2** se le asigna el color y $\Delta(7c+17) = 3$.

a2.2.1) $\Delta(7c+17) = 2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+8$, $9c+24$, $5c+14$ y $c+7$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 6c+16,\ 2c+8\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ c+5,\ 7c+17,\ 9c+24\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 5c+15,\ 5c+14,\ c+7\}$

Según coloquemos el elemento $3c{+}8$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(3c+8) = 1 \Rightarrow 6c+16 = 3c+8+2c+8+c$
Si $\Delta(3c+8) = 2 \Rightarrow 3c+8 = c+3+c+5+c$
Si $\Delta(3c+8) = 3 \Rightarrow 5c+15 = 3c+8+c+7+c$

a2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(7c+17) = 3}$

El elemento $7c+17 = 3c+7+3c+10+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c+7$ al conjunto A_3.

Estudiaremos el caso **a2.2.2.1** si $\Delta(3c+7) = 1$ y el caso **a2.2.2.2** si $\Delta(3c+7) = 2$.

a2.2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(3c+7) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4, 4c+12$, $2c+9, 4c+11$, $c+6$ y $5c+14$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 6c+16,\ 3c+7,\ 4,\ 4c+12\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ c+5,\ 2c+9,\ 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 5c+15,\ 7c+17,\ c+6,\ 5c+14\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}20$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(7c+20) = 1 \Rightarrow 7c+20 = 6c+16+4+c$
Si $\Delta(7c+20) = 2 \Rightarrow 7c+20 = 2c+9+4c+11+c$
Si $\Delta(7c+20) = 3 \Rightarrow 7c+20 = c+6+5c+14+c$

a2.2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(3c+7) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+2$, $5c+10$, $6c+12$, $7c+18$, $2c+4$ y $3c+8$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 6c+16,\ c+2,\ 5c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ c+5,\ 3c+7,\ 6c+12,\ 7c+18\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 5c+15,\ 7c+17,\ 2c+4,\ 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento 6 en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(6) = 1 \Rightarrow 6c+16 = 6+5c+10+c$
Si $\Delta(6) = 2 \Rightarrow 7c+18 = 6c+12+6+c$
Si $\Delta(6) = 3 \Rightarrow 3c+10 = 2c+4+6+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 2.1.2.3 a)**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c{+}10)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(6c+16)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(5c+15)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(c+5)=1\\ \Delta(c+5)=2\end{array}\right.\\ \Delta(5c+15)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(c+5)=1\\ \Delta(c+5)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(7c+17)=2\\ \Delta(7c+17)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(3c+7)=1\\ \Delta(3c+7)=2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \Delta(6c+16)=2\end{array}\right.$$

CASO 2.1.2.3

b) $\boldsymbol{\Delta(6c+16)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10\}$

Como el elemento $6c+16=4c+13+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+13$ al conjunto A_2.

Estudiaremos el caso **b1** si $\Delta(4c+13)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(4c+13)=3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(4c+13)=1}$

Como el elemento $4c+13=3c+11+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c+11$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **b1.1** si $\Delta(3c+11)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(3c+11)=3$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(3c+11)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+13\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+16,\ 3c+11\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+8$ y $5c+14$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

Como el elemento $6c+16=2c+5+3c+11+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+5$ al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **b1.1.1** si $\Delta(2c+5)=1$ y el caso **b1.1.2** si $\Delta(2c+5)=3$.

b1.1.1) $\Delta(2c+5)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+20$, $c+4$ y $c+7$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+13,\ 2c+8,\ 2c+5,\ 8c+20\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+16,\ 3c+11,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 5c+14,\ c+7\}$

Según coloquemos el elemento $3c+7$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(3c+7)=1 \Rightarrow 8c+20=3c+7+4c+13$
Si $\Delta(3c+7)=2 \Rightarrow 3c+7=c+3+c+4+c$
Si $\Delta(3c+7)=3 \Rightarrow 5c+14=3c+7+c+7+c$

b1.1.2) $\Delta(2c+5)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+19$, 5 , $9c+22$, $5c+11$ y $3c+8$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+13,\ 2c+8,\ 8c+19,\ 5,\ 9c+22\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+16,\ 3c+11,\ 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 5c+14,\ 2c+5,\ 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento $6c+14$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+14)=1 \Rightarrow 9c+22=6c+14+2c+8+c$
Si $\Delta(6c+14)=2 \Rightarrow 6c+14=5c+11+3+c$
Si $\Delta(6c+14)=3 \Rightarrow 6c+14=2c+6+3c+8+c$

b1.2) $\Delta(3c+11)=3$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+13\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 3c+11\}$

Como el elemento $5c+14=4c+13+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se estudia el caso **b1.2.1** si $\Delta(5c+14)=2$ y el caso **b1.2.2** si $\Delta(5c+14)=3$.

b1.2.1) $\Delta(5c+14)=2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+17, 9c+27, 8c+24$, $11c+30$, $2c+10$, $7c+19, 5c+16$ y $4c+14$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+13,\ 6c+17,\ 9c+27,\ 8c+24\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+16,\ 5c+14,\ 11c+30,\ 2c+10\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 3c+11,\ 7c+19,\ 5c+16,\ 4c+14\}$

Según coloquemos el elemento $9c+26$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(9c+26) = 1 \Rightarrow 9c+26 = 8c+24+2+c$
Si $\Delta(9c+26) = 2 \Rightarrow 9c+26 = 6c+16+2c+10+c$
Si $\Delta(9c+26) = 3 \Rightarrow 9c+26 = 3c+10+5c+16+c$

b1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+14) = 3}$

El elemento $5c+14 = 2c+8+2c+6+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer el elemento $2c+8$ al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **b1.2.2.1** si $\Delta(2c+8) = 1$ y el caso **b1.2.2.2** si $\Delta(2c+8) = 2$.

b1.2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(2c+8) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos 5, $8c+24$, $7c+21$, $9c+29$ y $5c+18$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+13,\ 2c+8,\ 5,\ 8c+24\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+16,\ 7c+21,\ 9c+29\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 3c+11,\ 5c+14,\ 5c+18\}$

Según coloquemos el elemento $11c+32$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(11c+32) = 1 \Rightarrow 11c+32 = 2c+8+8c+24+c$
Si $\Delta(11c+32) = 2 \Rightarrow 11c+32 = 9c+29+c+3+c$
Si $\Delta(11c+32) = 3 \Rightarrow 11c+32 = 5c+14+5c+18+c$

b1.2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(2c+8) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+24, 8c+22$ y $4c+11$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+13,\ 9c+24\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+16,\ 2c+8,\ 8c+22\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 3c+11,\ 5c+14,\ 4c+11\}$

Según coloquemos el elemento $10c+25$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(10c+25) = 1 \Rightarrow 10c+25 = 9c+24+1+c$
Si $\Delta(10c+25) = 2 \Rightarrow 10c+25 = 8c+22+c+3+c$
Si $\Delta(10c+25) = 3 \Rightarrow 10c+25 = 5c+14+4c+11+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(4c+13) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 4c+13\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $7c+19$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $4c+13 = 2c+6+c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+7$ al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **b2.1** si $\Delta(c+7)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(c+7)=2$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(c+7)=1}$

Como el elemento $2c+8=c+7+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Estudiamos el caso **b2.1.1** si $\Delta(2c+8)=2$ y el caso **b2.1.2** si $\Delta(2c+8)=3$.

b2.1.1) $\boldsymbol{\Delta(2c+8)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+8$ y 5 en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 7c+19,\ c+7,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+16,\ 2c+8\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 4c+13,\ 5\}$

Según coloquemos el elemento $3c+11$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(3c+11)=1 \Rightarrow 7c+19=3c+11+3c+8+c$
Si $\Delta(3c+11)=2 \Rightarrow 3c+11=2c+8+3+c$
Si $\Delta(3c+11)=3 \Rightarrow 3c+11=2c+6+5+c$

b2.1.2) $\boldsymbol{\Delta(2c+8)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+21, 6c+18$, $8c+23$ y $6c+20$ en los conjuntos A_1 A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 7c+19,\ c+7,\ 7c+21\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+16,\ 6c+18,\ 8c+23\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 4c+13,\ 2c+8,\ 6c+20\}$

Según coloquemos el elemento $9c+26$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(9c+26)=1 \Rightarrow 9c+26=7c+19+c+7+c$
Si $\Delta(9c+26)=2 \Rightarrow 9c+26=8c+23+3+c$
Si $\Delta(9c+26)=3 \Rightarrow 9c+26=2c+6+6c+20+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(c+7)=2}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento 4 en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 7c+19,\ 4\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+3,\ 6c+16,\ c+7\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 4c+13\}$

Según coloquemos el elemento $8c+23$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(8c+23) = 1 \Rightarrow 8c+23 = 7c+19+4+c$
Si $\Delta(8c+23) = 2 \Rightarrow 8c+23 = 6c+16+c+7+c$
Si $\Delta(8c+23) = 3 \Rightarrow 8c+23 = 3c+10+4c+13+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 2.1.2.3 b)**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(6c+16) = 2 \begin{cases} \Delta(4c+13) = 1 \begin{cases} \Delta(3c+11) = 2 \begin{cases} \Delta(2c+5) = 1 \\ \Delta(2c+5) = 3 \end{cases} \\ \Delta(3c+11) = 3 \begin{cases} \Delta(5c+14) = 2 \\ \Delta(5c+14) = 3 \begin{cases} \Delta(2c+8) = 1 \\ \Delta(2c+8) = 2 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(4c+13) = 3 \begin{cases} \Delta(c+7) = 1 \begin{cases} \Delta(2c+8) = 2 \\ \Delta(2c+8) = 3 \end{cases} \\ \Delta(c+7) = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 2.2** con $\Delta(c+3) = 3$.

CASO 2.2

$A_1 \supseteq \{1,\, 2\}$
$A_2 \supseteq \{3\}$
$A_3 \supseteq \{c+3\}$

Con esta distribución no tenemos ningún elemento que se introduzca **a la fuerza** en algunos de los conjuntos $\{A_1,\, A_2,\, A_3\}$ y que sigan manteniendo la propiedad de ser *libres de suma estricta*. .

Consideremos el elemento arbitrario $4c+10$. Analizamos el **Caso 2.2.1** si $\Delta(4c+10) = 1$, el **Caso 2.2.2** si $\Delta(4c+10) = 2$ y el **Caso 2.2.3** si $\Delta(4c+10) = 3$.

CASO 2.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3\}$
$A_3 \supseteq \{c+3\}$

CASO 2.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\, 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3\}$

CASO 2.2.3

$A_1 \supseteq \{1,\, 2\}$
$A_2 \supseteq \{3\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10\}$

Desarrollaremos estos casos hasta conseguir soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$,

En el **Caso 2.2.1**
Como el elemento $4c+10 = 3c+8+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c+8$ al conjunto A_1.
Se obtiene el caso **2.2.1.1** si $\Delta(3c+8) = 2$ y el caso **2.2.1.2** si $\Delta(3c+8) = 3$.

CASO 2.2.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+3\}$

El elemento $3c+8 = 2c+5+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+5$ al conjunto A_2.
Estudiaremos el **Caso 2.2.1.1 a** si $\Delta(2c+5) = 1$ y el **Caso 2.2.1.1 b** si $\Delta(2c+5) = 3$.

CASO 2.2.1.1

a) $\quad \boldsymbol{\Delta(2c+5) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 4c+10,\, 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+3\}$

Como el elemento $2c+5 = c+4+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_1.
Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(c+4) = 2$ y el caso **a2** si $\Delta(c+4) = 3$.

a1) $\quad \boldsymbol{\Delta(c+4) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+15$, $c+5$, $5c+12$ y $3c+7$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 4c+10,\, 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, c+4,\, 7c+15,\, c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 5c+12,\, 3c+7\}$

Según coloquemos el elemento $3c+9$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(3c+9) = 1 \Rightarrow 4c+10 = 3c+9+1+c$
Si $\Delta(3c+9) = 2 \Rightarrow 3c+9 = c+4+c+5+c$
Si $\Delta(3c+9) = 3 \Rightarrow 5c+12 = c+3+3c+9+c$

a2) $\mathbf{\Delta(c+4)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+19$, $3c+7$, $5c+12$, $5c+11$, $7c+15, 4c+9$ y $c+5$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+10,\ 2c+5,\ 9c+19\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 3c+7,\ 5c+12,\ 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 7c+15,\ 4c+9,\ c+5\}$

Según coloquemos el elemento $6c+14$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+14)=1 \Rightarrow 9c+19=6c+14+2c+5+c$
Si $\Delta(6c+14)=2 \Rightarrow 6c+14=5c+11+3+c$
Si $\Delta(6c+14)=3 \Rightarrow 6c+14=4c+9+c+5+c$

CASO 2.2.1.1

b) $\mathbf{\Delta(2c+5)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 2c+5\}$

El elemento $5c+11=4c+10+1+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(5c+11)\neq 1$.
Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(5c+11)=2$ y el caso **b2** si $\Delta(5c+11)=3$.

b1) $\mathbf{\Delta(5c+11)=2}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $4c+8$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

Como el elemento $5c+10=4c+8+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Estudiamos el caso **b1.1** si $\Delta(5c+10)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(5c+10)=3$.

b1.1) $\mathbf{\Delta(5c+10)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+21$ y $9c+18$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+10,\ 4c+8,\ 11c+21\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 5c+11,\ 5c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 2c+5,\ 9c+18\}$

Según coloquemos el elemento $6c+13$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+13)=1 \Rightarrow 11c+21=6c+13+4c+8+c$
Si $\Delta(6c+13)=2 \Rightarrow 6c+13=5c+10+3+c$
Si $\Delta(6c+13)=3 \Rightarrow 9c+18=6c+13+2c+5+c$

b1.2) $\Delta(5c+10) = 3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+15$, $8c+15$, $11c+21$, $3c+7$, $12c+23, 7c+13,$ $6c+13$, $9c+18$ y $8c+16$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+10,\ 4c+8,\ 7c+15,\ 8c+15,\ 11c+21\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 5c+11,\ 3c+7,\ 12c+23,\ 7c+13,\ 6c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ c+4,\ 2c+5,\ 5c+10,\ 9c+18,\ 8c+16\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}6$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(2c+6) = 1 \Rightarrow 11c+21 = 8c+15+2c+6+c$
Si $\Delta(2c+6) = 2 \Rightarrow 6c+13 = 2c+6+3c+7+c$
Si $\Delta(2c+6) = 3 \Rightarrow 8c+16 = 2c+6+5c+10+c$

b2) $\Delta(5c+11) = 3$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 2c+5,\ 5c+11\}$

Como el elemento $8c{+}16 = 2c{+}5{+}5c{+}11{+}c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **b2.1** si $\Delta(8c+16) = 1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(8c+16) = 2$.

b2.1) $\Delta(8c+16) = 1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+11$, $7c+14$, $9c+17$ y $3c+6$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+10,\ 8c+16,\ 6c+11\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 7c+14,\ 9c+17\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 2c+5,\ 5c+11,\ 3c+6\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}9$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(5c+9) = 1 \Rightarrow 6c+11 = 5c+9+2+c$
Si $\Delta(5c+9) = 2 \Rightarrow 9c+17 = 5c+9+3c+8+c$
Si $\Delta(5c+9) = 3 \Rightarrow 5c+9 = c+3+3c+6+c$

b2.2) $\Delta(8c+16) = 2$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $4c+8$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $9c{+}18 = 4c{+}10{+}4c{+}8{+}c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se estudia el caso **b2.2.1** si $\Delta(9c+18) = 2$ y el caso **b2.2.2** si $\Delta(9c+18) = 3$.

b2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(9c+18)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+15$, $3c+7$ y $5c+10$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+10,\ 4c+8,\ 8c+15\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 8c+16,\ 9c+18,\ 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 2c+5,\ 5c+11,\ 5c+10\}$

Según coloquemos el elemento $7c+13$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(7c+13)=1 \Rightarrow 8c+15=7c+13+2+c$
Si $\Delta(7c+13)=2 \Rightarrow 8c+16=7c+13+3+c$
Si $\Delta(7c+13)=3 \Rightarrow 7c+13=5c+10+c+3+c$

b2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(9c+18)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $12c+23$ y $3c+7$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+10,\ 4c+8,\ 12c+23\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 8c+16,\ 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 2c+5,\ 5c+11,\ 9c+18\}$

Según coloquemos el elemento $7c+15$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.
Si $\Delta(7c+15)=1 \Rightarrow 12c+23=7c+15+4c+8+c$
Si $\Delta(7c+15)=2 \Rightarrow 7c+15=3c+8+3c+7+c$
Si $\Delta(7c+15)=3 \Rightarrow 9c+18=7c+15+c+3+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 2.2.1.1**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(4c{+}10)=1\left\{\begin{array}{l}
\Delta(3c+8)=2\left\{\begin{array}{l}
\Delta(2c+5)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(c+4)=2\\ \Delta(c+4)=3\end{array}\right.\\[2ex]
\Delta(2c+5)=3\left\{\begin{array}{l}
\Delta(5c+11)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(5c+10)=2\\ \Delta(5c+10)=3\end{array}\right.\\[2ex]
\Delta(5c+11)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(8c+16)=1\\ \Delta(8c+16)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(9c+18)=2\\ \Delta(9c+18)=3\end{array}\right.\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.\\[4ex]
\Delta(3c+8)=3
\end{array}\right.$$

Continuamos con el **Caso 2.2.1.2** con $\Delta(3c+8)=3$

CASO 2.2.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+8\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $5c+11$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $3c+8 = c+5+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_3.

Se analiza el **Caso 2.2.1.2 a** si $\Delta(c+5) = 1$ y **Caso 2.2.1.2 b** si $\Delta(c+5) = 2$.

CASO 2.2.1.2

a) $\boldsymbol{\Delta(c+5) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 4c+10,\, c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+8\}$

Como el elemento $6c+15 = 4c+10+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(6c+15) = 2$ y el caso **a2** si $\Delta(6c+15) = 3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(6c+15) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+4, 2c+7$, $3c+9$, 4 , $5c+12$ y $2c+6$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 4c+10,\, c+5,\, c+4\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 5c+11,\, 6c+15,\, 2c+7,\, 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+8,\, 4,\, 5c+12,\, 2c+6\}$

Según coloquemos el elemento $6c+14$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(6c+14) = 1 \Rightarrow 6c+14 = 4c+10+c+4+c$
Si $\Delta(6c+14) = 2 \Rightarrow 6c+14 = 5c+11+3+c$
Si $\Delta(6c+14) = 3 \Rightarrow 6c+14 = 3c+8+2c+6+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(6c+15) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+18$, $2c+7$, $10c+23$, $2c+5$ y $9c+20$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 4c+10,\, c+5,\, 8c+18\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 5c+11,\, 2c+7,\, 10c+23,\, 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+8,\, 6c+15,\, 9c+20\}$

Según coloquemos el elemento $5c+12$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(5c+12)=1 \Rightarrow 5c+12=4c+10+2+c$
Si $\Delta(5c+12)=2 \Rightarrow 5c+12=2c+7+2c+5+c$
Si $\Delta(5c+12)=3 \Rightarrow 9c+20=5c+12+3c+8+c$

CASO 2.2.1.2

b) $\mathbf{\Delta(c+5)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 3c+8\}$

Como el elemento $6c+14=5c+11+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **b1** si $\Delta(6c+14)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(6c+14)=3$.

b1) $\mathbf{\Delta(6c+14)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c{+}24$ y $7c{+}16$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+10,\ 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ c+5,\ 11c+24\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 3c+8,\ 7c+16\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}13$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(5c+13)=1 \Rightarrow 6c+14=5c+13+1+c$
Si $\Delta(5c+13)=2 \Rightarrow 11c+24=5c+13+5c+11+c$
Si $\Delta(5c+13)=3 \Rightarrow 7c+16=5c+13+c+3+c$

b2) $\mathbf{\Delta(6c+14)=3}$

Como el elemento $4c+10=3c+9+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c+9$ al conjunto A_1.

Estudiamos el caso **b2.1** si $\Delta(3c+9)=2$ y el caso **b2.2** si $\Delta(3c+9)=3$.

b2.1) $\mathbf{\Delta(3c+9)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+6$, $5c+12$ y $c+4$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 4c+10,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ c+5,\ 3c+9,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 3c+8,\ 6c+14,\ c+4\}$

Según coloquemos el elemento $3c{+}7$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(3c+7)=1 \Rightarrow 3c+7=2c+6+1+c$
Si $\Delta(3c+7)=2 \Rightarrow 5c+12=3c+7+c+5+c$

Si $\Delta(3c+7)=3 \Rightarrow 3c+7=c+3+c+4+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(3c+9)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+17$, $5c+12$, $2c+7$ y $6c+15$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 4c+10,\, 7c+17\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 5c+11,\, c+5,\, 5c+12,\, 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+8,\, 6c+14,\, 3c+9,\, 6c+15\}$

Según coloquemos el elemento $8c+18$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(8c+18)=1 \Rightarrow 8c+18=7c+17+1+c$
Si $\Delta(8c+18)=2 \Rightarrow 8c+18=5c+11+2c+7+c$
Si $\Delta(8c+18)=3 \Rightarrow 8c+18=c+3+6c+15+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 2.2.1.2**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+8)=3\left\{\begin{array}{l} \Delta(c+5)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(6c+15)=2\\ \\ \Delta(6c+15)=3\end{array}\right. \\ \\ \Delta(c+5)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(6c+14)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(3c+9)=2\\ \\ \Delta(3c+9)=3\end{array}\right.\\ \\ \Delta(6c+14)=3\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Continuamos con el **Caso 2.2.2** con $\Delta(4c+10)=2$

CASO 2.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\, 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3\}$

Como el elemento $4c+10=3c+7+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c+7$ al conjunto A_2.

Analizaremos el **Caso 2.2.2.1** si $\Delta(3c+7)=1$ y el **Caso 2.2.2.2** si $\Delta(3c+7)=3$.

CASO 2.2.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3\}$

El elemento $3c+7=2c+5+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento

$2c+5$ al conjunto A_1.

En el **Caso 2.2.2.1 a** se le asigna el color $\Delta(2c+5)=2$ y en el **Caso 2.2.2.1 b** se le asigna el color $\Delta(2c+5)=3$.

CASO 2.2.2.1

a) $\Delta(2c+5)=2$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+3\}$

Como el elemento $4c+10=c+5+2c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(c+5)=1$ y el caso **a2** si $\Delta(c+5)=3$.

a1) $\Delta(c+5)=1$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $c+2$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*. Como el elemento $5c+12=3c+7+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Tendríamos el caso **a1.1** si $\Delta(5c+12)=2$ y el caso **a1.2** si $\Delta(5c+12)=3$.

a1.1) $\Delta(5c+12)=2$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $4c+9$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+7,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+5,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ c+2,\ 4c+9\}$

Según coloquemos el elemento $2c+7$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(2c+7)=1 \Rightarrow 2c+7=c+5+2+c$
Si $\Delta(2c+7)=2 \Rightarrow 5c+12=2c+7+2c+5+c$
Si $\Delta(2c+7)=3 \Rightarrow 4c+9=2c+7+c+2+c$

a1.2) $\Delta(5c+12)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+15$, $12c+25$, $9c+20$, $5c+10$, $3c+8$ y $8c+17$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+7,\ c+5,\ 7c+15,\ 12c+25\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+5,\ 9c+20,\ 5c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ c+2,\ 5c+12,\ 3c+8,\ 8c+17\}$

Según coloquemos el elemento $10c+20$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(10c + 20) = 1 \Rightarrow 12c + 25 = 10c + 20 + c + 5 + c$
Si $\Delta(10c + 20) = 2 \Rightarrow 10c + 20 = 4c + 10 + 5c + 10 + c$
Si $\Delta(10c + 20) = 3 \Rightarrow 10c + 20 = 8c + 17 + c + 3 + c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(c + 5) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c + 7\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 4c + 10,\ 2c + 5\}$
$A_3 \supseteq \{c + 3,\ c + 5\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c + 8$ y $7c + 15$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

Como el elemento $4c + 8 = 3c + 7 + 1 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Estudiaremos el caso **a2.1** si $\Delta(4c + 8) = 2$ y el caso **a2.2** si $\Delta(4c + 8) = 3$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(4c + 8) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+18$, $5c+12$, $5c+10$, $8c+17$ y $10c+20$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c + 7,\ 3c + 8,\ 9c + 18,\ 5c + 12\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 4c + 10,\ 2c + 5,\ 4c + 8,\ 5c + 10,\ 8c + 17\}$
$A_3 \supseteq \{c + 3,\ c + 5,\ 7c + 15,\ 10c + 20\}$

Según coloquemos el elemento $9c+20$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(9c + 20) = 1 \Rightarrow 9c + 20 = 5c + 12 + 3c + 8 + c$
Si $\Delta(9c + 20) = 2 \Rightarrow 9c + 20 = 8c + 17 + 3 + c$
Si $\Delta(9c + 20) = 3 \Rightarrow 9c + 20 = 7c + 15 + c + 5 + c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(4c + 8) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c + 12$, $2c + 7$ y $6c + 13$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c + 7,\ 3c + 8,\ 5c + 12\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 4c + 10,\ 2c + 5,\ 2c + 7,\ 6c + 13\}$
$A_3 \supseteq \{c + 3,\ c + 5,\ 7c + 15,\ 4c + 8\}$

Según coloquemos el elemento $9c+20$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(9c + 20) = 1 \Rightarrow 9c + 20 = 5c + 12 + 3c + 8 + c$
Si $\Delta(9c + 20) = 2 \Rightarrow 9c + 20 = 2c + 7 + 6c + 13 + c$
Si $\Delta(9c + 20) = 3 \Rightarrow 9c + 20 = 7c + 15 + c + 5 + c$

CASO 2.2.2.1

b) $\quad \boldsymbol{\Delta(2c+5)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 2c+5\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $4c+8$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $5c+11 = 4c+8+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(5c+11)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(5c+11)=3$.

b1) $\quad \boldsymbol{\Delta(5c+11)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+21$, $7c+13$, $6c+13$, $12c+23$, $8c+15$, $9c+18$ y $5c+10$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+7,\, 5c+11,\, 11c+21,\, 7c+13\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 4c+10,\, 4c+8,\, 6c+13,\, 12c+23,\, 8c+15\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 2c+5,\, 9c+18,\, 5c+10\}$

Según coloquemos el elemento $3c+8$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(3c+8)=1 \Rightarrow 11c+21 = 7c+13+3c+8+c$
Si $\Delta(3c+8)=2 \Rightarrow 12c+23 = 8c+15+3c+8+c$
Si $\Delta(3c+8)=3 \Rightarrow 9c+18 = 5c+10+3c+8+c$

b2) $\quad \boldsymbol{\Delta(5c+11)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+14$, $3c+8$, $7c+16$, $c+2$, $2c+6$, $8c+16$, $c+6$, $11c+22$, $3c+6$ y $3c+9$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+7,\, 7c+14,\, 3c+8,\, 7c+16,\, c+2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 4c+10,\, 4c+8,\, 2c+6,\, 8c+16,\, c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 2c+5,\, 5c+11,\, 11c+22,\, 3c+6,\, 3c+9\}$

Según coloquemos el elemento $6c+14$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+14)=1 \Rightarrow 7c+16 = 6c+14+2+c$
Si $\Delta(6c+14)=2 \Rightarrow 6c+14 = 4c+8+c+6+c$
Si $\Delta(6c+14)=3 \Rightarrow 6c+14 = 2c+5+3c+9+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 2.2.2.1**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+7)=1\begin{cases}\Delta(2c+5)=2\begin{cases}\Delta(c+5)=1\begin{cases}\Delta(5c+12)=2\\ \Delta(5c+12)=3\end{cases}\\ \Delta(c+5)=3\begin{cases}\Delta(4c+8)=2\\ \Delta(4c+8)=3\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(2c+5)=3\begin{cases}\Delta(5c+11)=1\\ \Delta(5c+11)=3\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 2.2.2.2** con $\Delta(3c+7)=2$

CASO 2.2.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 3c+7\}$

El elemento $5c+13 = 4c+10+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Estudiaremos el **Caso 2.2.2.2 a** si $\Delta(5c+13)=1$ y el **Caso 2.2.2.2 b** si $\Delta(5c+13)=3$.

CASO 2.2.2.2

a) $\boldsymbol{\Delta(5c+13)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 3c+7\}$

Como el elemento $6c+14 = 5c+13+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(6c+14)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(6c+14)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(6c+14)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+4$, $11c+24$, $9c+20$, $7c+17$ y $2c+6$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c+13,\ c+4,\ 11c+24\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 6c+14,\ 9c+20\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 3c+7,\ 7c+17,\ 2c+6\}$

Según coloquemos el elemento $10c+23$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(10c+23) = 1 \Rightarrow 11c+24 = 10c+23+1+c$
Si $\Delta(10c+23) = 2 \Rightarrow 10c+23 = 9c+20+3+c$
Si $\Delta(10c+23) = 3 \Rightarrow 10c+23 = 7c+17+2c+6+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(6c+14) = 3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $4c+11$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $6c+14 = 2c+7+3c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+7$ al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **a2.1** si $\Delta(2c+7) = 1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(2c+7) = 2$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(2c+7) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+6$ y $3c+8$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 5c+13,\, 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 4c+10,\, 4c+11,\, 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7,\, 6c+14,\, 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento $c+5$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$.
Si $\Delta(c+5) = 1 \Rightarrow 2c+7 = c+5+2+c$
Si $\Delta(c+5) = 2 \Rightarrow 4c+11 = c+5+2c+6+c$
Si $\Delta(c+5) = 3 \Rightarrow 3c+8 = c+5+c+3+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(2c+7) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+4$,$3c+10$ y $7c+17$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 5c+13,\, c+4,\, 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 4c+10,\, 4c+11,\, 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7,\, 6c+14,\, 7c+17\}$

Según coloquemos el elemento $5c+14$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$.
Si $\Delta(5c+14) = 1 \Rightarrow 5c+14 = 3c+10+c+4+c$
Si $\Delta(5c+14) = 2 \Rightarrow 5c+14 = 4c+11+3+c$
Si $\Delta(5c+14) = 3 \Rightarrow 7c+17 = 5c+14+c+3+c$

CASO 2.2.2.2

b) $\boldsymbol{\Delta(5c+13) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7,\, 5c+13\}$

Como el elemento $5c+13 = 3c+10+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c+10$ al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(3c+10) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(3c+10) = 2$..

b1) $\boldsymbol{\Delta(3c+10) = 1}$

Como el elemento $5c+13 = c+6+3c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+6$ al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **b1.1** si $\Delta(c+6) = 1$ y el caso **b1.2** si $\Delta(c+6) = 2$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(c+6) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+14$, $c+4$, $7c+16$, 4 y $2c+7$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+10,\, c+6,\, 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 4c+10,\, c+4,\, 7c+16,\, 4\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7,\, 5c+13,\, 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $8c+20$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(8c+20) = 1 \Rightarrow 8c+20 = c+6+6c+14+c$
Si $\Delta(8c+20) = 2 \Rightarrow 8c+20 = 7c+16+4+c$
Si $\Delta(8c+20) = 3 \Rightarrow 8c+20 = 5c+13+2c+7+c$

b1.2) $\boldsymbol{\Delta(c+6) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+16$, $4c+12$, $2c+9$ y $2c+6$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+10,\, 6c+16\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 4c+10,\, c+6,\, 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7,\, 5c+13,\, 2c+9,\, 2c+6\}$

Según coloquemos el elemento $5c+15$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(5c+15) = 1 \Rightarrow 6c+16 = 5c+15+1+c$
Si $\Delta(5c+15) = 2 \Rightarrow 5c+15 = 4c+12+3+c$
Si $\Delta(5c+15) = 3 \Rightarrow 5c+15 = 2c+9+2c+6+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(3c+10) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 4c+10,\, 3c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7,\, 5c+13\}$

Como el elemento $5c+13 = c+6+3c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+6$ al conjunto A_3.

Estudiaremos el caso **b2.1** si $\Delta(c+6) = 1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(c+6) = 2$.

b2.1) $\Delta(c+6)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+20$, $c+4$, 4 , $6c+14$, $2c+6$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ c+6,\ 8c+20,\ c+4,\ 4\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 3c+10,\ 6c+14,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 3c+7,\ 5c+13,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}16$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(7c+16)=1 \Rightarrow 8c+20=7c+16+4+c$
Si $\Delta(7c+16)=2 \Rightarrow 7c+16=4c+10+2c+6+c$
Si $\Delta(7c+16)=3 \Rightarrow 7c+16=c+3+5c+13+c$

b2.2) $\Delta(c+6)=2$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $c+4$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $2c+9=c+6+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **b2.2.1** si $\Delta(2c+9)=1$ y el caso **b2.2.2** si $\Delta(2c+9)=3$.

b2.2.1) $\Delta(2c+9)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c{+}20$ y $4c{+}13$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ c+4,\ 2c+9,\ 8c+20\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 3c+10,\ c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 3c+7,\ 5c+13,\ 4c+13\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}16$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+16)=1 \Rightarrow 8c+20=6c+16+c+4+c$
Si $\Delta(6c+16)=2 \Rightarrow 6c+16=4c+10+c+6+c$
Si $\Delta(6c+16)=3 \Rightarrow 6c+16=c+3+4c+13+c$

b2.2.2) $\Delta(2c+9)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+16$, $4c+13$, $6c+17$, $2c+6$, $8c+20$ y $5c+14$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ c+4,\ 6c+16,\ 4c+13\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 3c+10,\ c+6,\ 6c+17,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 3c+7,\ 5c+13,\ 2c+9,\ 8c+20,\ 5c+14\}$

Según coloquemos el elemento $3c{+}11$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(3c+11)=1 \Rightarrow 4c+13=3c+11+2+c$

Si $\Delta(3c+11) = 2 \Rightarrow 6c+17 = 3c+11+2c+6+c$
Si $\Delta(3c+11) = 3 \Rightarrow 5c+14 = 3c+11+c+3+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 2.2.2.2**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+7)=3 \begin{cases} \Delta(5c+13)=1 \begin{cases} \Delta(6c+14)=2 \\ \Delta(6c+14)=3 \begin{cases} \Delta(2c+7)=1 \\ \Delta(2c+7)=2 \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(5c+13)=3 \begin{cases} \Delta(3c+10)=1 \begin{cases} \Delta(c+6)=1 \\ \Delta(c+6)=2 \end{cases} \\ \Delta(3c+10)=2 \begin{cases} \Delta(c+6)=1 \\ \Delta(c+6)=2 \begin{cases} \Delta(2c+9)=1 \\ \Delta(2c+9)=3 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 2.2.3** con $\Delta(4c+10) = 3$

CASO 2.2.3

$A_1 \supseteq \{1,\, 2\}$
$A_2 \supseteq \{3\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10\}$

Como el elemento $4c+10 = 2c+7+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+7$ al conjunto A_3.

Analizaremos el **Caso 2.2.3.1** si $\Delta(2c+7) = 1$ y el **Caso 2.2.3.2** si $\Delta(2c+7) = 2.$.

CASO 2.2.3.1

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{3\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10\}$

El elemento $3c+8 = 2c+7+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Estudiaremos el **Caso 2.2.3.1 a** si se le asigna el color $\Delta(3c+8) = 2$ y el **Caso 2.2.3.1 b** si se le asigna el color $\Delta(3c+8) = 3$.

CASO 2.2.3.1

a) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10\}$

Como el elemento $3c+8=2c+5+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+5$ al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(2c+5)=1$ y el caso **a2** si $\Delta(2c+5)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(2c+5)=1}$

Como el elemento $5c+12=2c+7+2c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Tendríamos el caso **a1.1** si $\Delta(5c+12)=2$ y el caso **a1.2** si $\Delta(5c+12)=3$.

a1.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+15$, $3c+7$, $3c+9$, $c+4$, $c+5$ y $9c+20$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+7,\ 2c+5,\ 6c+15\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 5c+12,\ 3c+7,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ c+4,\ c+5,\ 9c+20\}$

Según coloquemos el elemento $7c+16$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(7c+16)=1 \Rightarrow 7c+16=6c+15+1+c$
Si $\Delta(7c+16)=2 \Rightarrow 7c+16=3c+7+3c+9+c$
Si $\Delta(7c+16)=3 \Rightarrow 9c+20=7c+16+c+4+c$

a1.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+7,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 5c+12\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $3c+9$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $7c+15=c+3+5c+12+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **a1.2.1** si se le asigna el color $\Delta(7c+15)=1$ y el caso **a1.2.2** si se le asigna el color $\Delta(7c+15)=2$.

a1.2.1) $\boldsymbol{\Delta(7c+15)=1}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $10c+22$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 2c+7,\, 2c+5,\, 7c+15\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 3c+9,\, 10c+22\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $6c+13$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(6c+13) = 1 \Rightarrow 7c+15 = 6c+13+2+c$
Si $\Delta(6c+13) = 2 \Rightarrow 10c+22 = 6c+13+3c+9+c$
Si $\Delta(6c+13) = 3 \Rightarrow 6c+13 = c+3+4c+10+c$

a1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(7c+15) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+5$ y $3c+7$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 2c+7,\, 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 3c+9,\, 7c+15,\, c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, 5c+12,\, 3c+7\}$

Según coloquemos el elemento $c+4$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(c+4) = 1 \Rightarrow 2c+5 = c+4+1+c$
Si $\Delta(c+4) = 2 \Rightarrow 3c+9 = c+4+c+5+c$
Si $\Delta(c+4) = 3 \Rightarrow 3c+7 = c+4+c+3+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(2c+5) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, 2c+5\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $c+5$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $5c+13 = 3c+8+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Se obtendría el caso **a2.1** si $\Delta(5c+13) = 1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(5c+13) = 3$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+13) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+8$, $6c+14$, $c+6$, $3c+9$, $4c+11$ y $8c+20$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 2c+7,\, 5c+13,\, 2c+8\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, c+5,\, 6c+14,\, c+6,\, 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, 2c+5,\, 4c+11,\, 8c+20\}$

Según coloquemos el elemento $5c+15$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(5c+15) = 1 \Rightarrow 5c+15 = 2c+7+2c+8+c$
Si $\Delta(5c+15) = 2 \Rightarrow 5c+15 = c+6+3c+9+c$
Si $\Delta(5c+15) = 3 \Rightarrow 8c+20 = 5c+15+2c+5+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+13)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+8$, $7c+18$, $3c+10$, $10c+25$ y $5c+15$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+7,\ 2c+8,\ 7c+18\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ c+5,\ 3c+10,\ 10c+25\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 2c+5,\ 5c+13,\ 5c+15\}$

Según coloquemos el elemento $8c+20$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(8c+20)=1 \Rightarrow 8c+20=7c+18+2+c$
Si $\Delta(8c+20)=2 \Rightarrow 10c+25=8c+20+c+5+c$
Si $\Delta(8c+20)=3 \Rightarrow 8c+20=5c+15+2c+5+c$

CASO 2.2.3.1

b) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{3\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 3c+8\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $c+5$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $6c+13=4c+10+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(6c+13)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(6c+13)=2$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(6c+13)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+9$, $5c+11$, $7c+14$, $3c+6$ y $4c+8$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 2c+7,\ 6c+13,\ 5c+9\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ c+5,\ 5c+11,\ 7c+14\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 3c+8,\ 3c+6,\ 4c+8\}$

Según coloquemos el elemento $6c+11$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+11)=1 \Rightarrow 6c+11=5c+9+2+c$
Si $\Delta(6c+11)=2 \Rightarrow 7c+14=6c+11+3+c$
Si $\Delta(6c+11)=3 \Rightarrow 6c+11=4c+8+c+3+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(6c+13)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+18$, $11c+24$, $9c+19$ y $7c+16$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 2c+7,\, 8c+18,\, 11c+24\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, c+5,\, 6c+13,\, 9c+19\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, 3c+8,\, 7c+16\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}6$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(2c+6) = 1 \Rightarrow 11c + 24 = 2c + 6 + 8c + 18 + c$
Si $\Delta(2c+6) = 2 \Rightarrow 9c + 19 = 2c + 6 + 6c + 13 + c$
Si $\Delta(2c+6) = 3 \Rightarrow 7c + 16 = 2c + 6 + 4c + 10 + c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 2.2.3.1**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(2c+7) = 1 \begin{cases} \Delta(3c+8) = 2 \begin{cases} \Delta(2c+5) = 1 \begin{cases} \Delta(5c+12) = 2 \\ \Delta(5c+12) = 3 \begin{cases} \Delta(7c+15) = 1 \\ \Delta(7c+15) = 2 \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(2c+5) = 3 \begin{cases} \Delta(5c+13) = 1 \\ \Delta(5c+13) = 3 \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(3c+8) = 3 \begin{cases} \Delta(6c+13) = 1 \\ \Delta(6c+13) = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 2.2.3.2** con $\Delta(2c+7) = 2$.

CASO 2.2.3.2

$A_1 \supseteq \{1,\, 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10\}$

El elemento $3c{+}10 = 2c{+}7{+}3{+}c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Analizaremos el **Caso 2.2.3.2 a** si se le asigna el color $\Delta(3c+10) = 1$ y el **Caso 2.2.3.2 b** si se le asigna el color $\Delta(3c+10) = 3$.

CASO 2.2.3.2

a) $\boldsymbol{\Delta(3c+10) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10\}$

Como el elemento $3c+10=2c+8+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+8$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(2c+8)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(2c+8)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(2c+8)=2}$

Como el elemento $2c+8=c+5+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **a1.1** si $\Delta(c+5)=1$ y el caso **a1.2** si $\Delta(c+5)=3$.

a1.1) $\boldsymbol{\Delta(c+5)=1}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $5c+15$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $4c+11=3c+10+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Estudiaremos el caso **a1.1.1** si $\Delta(4c+11)=2$ y el caso **a1.1.2** si $\Delta(4c+11)=3$.

a1.1.1) $\boldsymbol{\Delta(4c+11)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+18$, $9c+23$, $3c+8$ y $4c+12$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+10,\ c+5,\ 7c+18\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 2c+7,\ 2c+8,\ 4c+11,\ 9c+23\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 5c+15,\ 3c+8,\ 4c+12\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}20$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(8c+20)=1 \Rightarrow 8c+20=7c+18+2+c$
Si $\Delta(8c+20)=2 \Rightarrow 9c+23=8c+20+3+c$
Si $\Delta(8c+20)=3 \Rightarrow 8c+20=3c+8+4c+12+c$

a1.1.2) $\boldsymbol{\Delta(4c+11)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+12$, $10c+29$, $9c+24$, 4 , $7c+22$, $6c+17$, $c+7$ y $4c+14$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+10,\ c+5,\ 3c+12,\ 10c+29,\ 9c+24\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 2c+7,\ 2c+8,\ 4,\ 7c+22,\ 6c+17\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 5c+15,\ 4c+11,\ c+7,\ 4c+14\}$

Según coloquemos el elemento 5 en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(5)=1 \Rightarrow 10c+29=9c+24+5+c$
Si $\Delta(5)=2 \Rightarrow 7c+22=6c+17+5+c$
Si $\Delta(5)=3 \Rightarrow 5c+15=4c+10+5+c$

a1.2) $\Delta(c+5)=3$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 2c+7,\, 2c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, c+5\}$

Como el elemento $6c+15=4c+10+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Se obtendría el caso **a1.2.1** si $\Delta(6c+15)=1$ y el caso **a1.2.2** si $\Delta(6c+15)=2$.

a1.2.1) $\Delta(6c+15)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+23$, $2c+5$, $7c+16$ y $5c+13$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+10,\, 6c+15,\, 10c+23\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 2c+7,\, 2c+8,\, 2c+5,\, 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, c+5,\, 5c+13\}$

Según coloquemos el elemento $6c+13$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(6c+13)=1 \Rightarrow 10c+23=6c+13+3c+10+c$
Si $\Delta(6c+13)=2 \Rightarrow 7c+16=6c+13+3+c$
Si $\Delta(6c+13)=3 \Rightarrow 6c+13=c+3+4c+10+c$

a1.2.2) $\Delta(6c+15)=2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+8, 5c+15$ y $7c+18$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+10,\, 3c+8,\, 5c+15\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 2c+7,\, 2c+8,\, 6c+15\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, c+5,\, 7c+18\}$

Según coloquemos el elemento $9c+23$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(9c+23)=1 \Rightarrow 9c+23=3c+8+5c+15+c$
Si $\Delta(9c+23)=2 \Rightarrow 9c+23=2c+8+6c+15+c$
Si $\Delta(9c+23)=3 \Rightarrow 9c+23=7c+18+c+5+c$

a2) $\Delta(2c+8)=3$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, 2c+8\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+18, c+5$, $4c+11$, $6c+16$, $5c+15$, $3c+8, 9c+23$ y 4 en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 3c+10,\ 7c+18,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 2c+7,\ 4c+11,\ 6c+16,\ 5c+15\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 2c+8,\ 3c+8,\ 9c+23,\ 4\}$

Según coloquemos el elemento $4c+12$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(4c+12) = 1 \Rightarrow 4c+12 = 3c+10+2+c$
Si $\Delta(4c+12) = 2 \Rightarrow 5c+15 = 4c+12+3+c$
Si $\Delta(4c+12) = 3 \Rightarrow 4c+12 = 3c+8+4+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 2.2.3.2 a**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(2c+7)=2 \begin{cases} \Delta(3c+10)=1 \begin{cases} \Delta(2c+8)=2 \begin{cases} \Delta(c+5)=1 \begin{cases} \Delta(4c+11)=2 \\ \Delta(4c+11)=3 \end{cases} \\ \Delta(c+5)=3 \begin{cases} \Delta(6c+15)=1 \\ \Delta(6c+15)=2 \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(2c+8)=3 \end{cases} \\ \Delta(3c+10)=3 \end{cases}$$

CASO 2.2.3.2

b) $\boldsymbol{\Delta(3c+10)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 3c+10\}$

Como el elemento $5c+13 = 3c+10+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(5c+13) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(5c+13) = 2$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(5c+13)=1}$

Como el elemento $5c+13 = 4c+11+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+11$ al conjunto A_1.

Tendríamos el caso **b1.1** si $\Delta(4c+11) = 2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(4c+11) = 3$.

b1.1) $\Delta(4c+11)=2$

El elemento $4c+11=3c+8+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c+8$ al conjunto A_2.

Estudiaremos el caso **b1.1.1** si $\Delta(3c+8)=1$ y el caso **b1.1.2** si $\Delta(3c+8)=3$.

b1.1.1) $\Delta(3c+8)=1$

El elemento $3c+8=2c+6+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+6$ al conjunto A_1.

Se obtendría el caso **b1.1.1.1** si $\Delta(2c+6)=2$ y el caso **b1.1.1.2** si $\Delta(2c+6)=3$.

b1.1.1.1) $\Delta(2c+6)=2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+26$, $6c+15$, $c+5$ y $9c+21$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 5c+13,\, 3c+8,\, 11c+26\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 2c+7,\, 4c+11,\, 2c+6,\, 6c+15\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, 3c+10,\, c+5,\, 9c+21\}$

Según coloquemos el elemento $7c+18$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(7c+18)=1 \Rightarrow 11c+26=7c+18+3c+8+c$
Si $\Delta(7c+18)=2 \Rightarrow 7c+18=3+6c+15+c$
Si $\Delta(7c+18)=3 \Rightarrow 9c+21=7c+18+c+3+c$

b1.1.1.2) $\Delta(2c+6)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+4$, $6c+16$, $4c+9$, $3c+9$ y $5c+12$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 5c+13,\, 3c+8,\, c+4,\, 6c+16\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 2c+7,\, 4c+11,\, 4c+9,\, 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, 3c+10,\, 2c+6,\, 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $8c+20$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(8c+20)=1 \Rightarrow 8c+20=6c+16+c+4+c$
Si $\Delta(8c+20)=2 \Rightarrow 8c+20=4c+11+3c+9+c$
Si $\Delta(8c+20)=3 \Rightarrow 8c+20=4c+10+3c+10+c$

b1.1.2) $\Delta(3c+8)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+18$, $2c+6$, $c+5$, $10c+24$ y $6c+16$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 5c+13,\, 7c+18,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 2c+7,\, 4c+11,\, c+5,\, 10c+24\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, 3c+10,\, 3c+8,\, 6c+16\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}19$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(8c+19) = 1 \Rightarrow 8c+19 = 7c+18+1+c$
Si $\Delta(8c+19) = 2 \Rightarrow 10c+24 = 8c+19+c+5+c$
Si $\Delta(8c+19) = 3 \Rightarrow 8c+19 = c+3+6c+16+c$

b1.2) $\quad \mathbf{\Delta(4c+11) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 3c+10,\ 4c+11\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+21$, $6c+14$ y $8c+20$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c+13,\ 9c+21\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 2c+7,\ 6c+14,\ 8c+20\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 3c+10,\ 4c+11\}$

El elemento $8c+21 = 3c+10+4c+11+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **b1.2.1** si $\Delta(8c+21) = 1$ y el caso **b1.2.2** si $\Delta(8c+21) = 2$.

b1.2.1) $\quad \mathbf{\Delta(8c+21) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+8$, $7c+19$ y $9c+22$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c+13,\ 9c+21,\ 8c+21\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 2c+7,\ 6c+14,\ 8c+20,\ 2c+8,\ 7c+19\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 3c+10,\ 4c+11,\ 9c+22\}$

Según coloquemos el elemento $4c{+}12$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(4c+12) = 1 \Rightarrow 5c+13 = 4c+12+1+c$
Si $\Delta(4c+12) = 2 \Rightarrow 7c+19 = 4c+12+2c+7+c$
Si $\Delta(4c+12) = 3 \Rightarrow 9c+22 = 4c+12+4c+10+c$

b1.2.2) $\quad \mathbf{\Delta(8c+21) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+7$, $7c+18$, $7c+14$, $2c+8$, $11c+28$ y $5c+11$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 5c+13,\ 9c+21,\ c+7,\ 7c+18\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 2c+7,\ 6c+14,\ 8c+20,\ 8c+21,\ 7c+14,\ 2c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 3c+10,\ 4c+11,\ 11c+28,\ 5c+11\}$

Según coloquemos el elemento $10c+22$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

Si $\Delta(10c+22) = 1 \Rightarrow 10c+22 = 9c+21+1+c$
Si $\Delta(10c+22) = 2 \Rightarrow 10c+22 = 7c+14+2c+8+c$

Si $\Delta(10c+22)=3 \Rightarrow 10c+22=4c+11+5c+11+c$

b2) $\quad \boldsymbol{\Delta(5c+13)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 2c+7,\, 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, 3c+10\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $8c+20$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $8c+20=7c+18+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $7c+18$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **b2.1** si $\Delta(7c+18)=2$ y el caso **b2.2** si $\Delta(7c+18)=3$.

b2.1) $\quad \boldsymbol{\Delta(7c+18)=2}$

El elemento $5c+13=2c+6+2c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+6$ al conjunto A_2.

Estudiaremos el caso **b2.1.1** si $\Delta(2c+6)=1$ y el caso **b2.1.2** si $\Delta(2c+6)=3$.

b2.1.1) $\quad \boldsymbol{\Delta(2c+6)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+8$, $c+5$ y $11c+26$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 8c+20,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 2c+7,\, 5c+13,\, 7c+18,\, 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, 3c+10,\, c+5,\, 11c+26\}$

Según coloquemos el elemento $9c+21$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(9c+21)=1 \Rightarrow 9c+21=8c+20+1+c$
Si $\Delta(9c+21)=2 \Rightarrow 9c+21=5c+13+3c+8+c$
Si $\Delta(9c+21)=3 \Rightarrow 11c+26=9c+21+c+5+c$

b2.1.2) $\quad \boldsymbol{\Delta(2c+6)=3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $6c+16$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2,\, 8c+20,\, 6c+16\}$
$A_2 \supseteq \{3,\, 2c+7,\, 5c+13,\, 7c+18\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 4c+10,\, 3c+10,\, 2c+6\}$

El elemento $c+4$ no se puede colocar en ningún conjunto, puesto que : Según coloquemos el elemento $c+4$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(c+4)=1 \Rightarrow 8c+20=c+4+6c+16+c$
Si $\Delta(c+4)=2 \Rightarrow 2c+7=c+4+3+c$
Si $\Delta(c+4)=3 \Rightarrow 4c+10=c+4+2c+6+c$

b2.2) $\Delta(7c+18)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $12c+28$ y $9c+21$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2,\ 8c+20,\ 12c+28\}$
$A_2 \supseteq \{3,\ 2c+7,\ 5c+13,\ 9c+21\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 4c+10,\ 3c+10,\ 7c+18\}$

Según coloquemos el elemento $3c+8$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$.

Si $\Delta(3c+8)=1 \Rightarrow 12c+28=3c+8+8c+20+c$
Si $\Delta(3c+8)=2 \Rightarrow 9c+21=5c+13+3c+8+c$
Si $\Delta(3c+8)=3 \Rightarrow 7c+18=3c+8+3c+10+c$

La demostración del **Caso 2.2.3.2 b)** está representada en el esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+10)=3\left\{\begin{array}{l}
\Delta(5c+13)=1\left\{\begin{array}{l}
\Delta(4c+11)=2\left\{\begin{array}{l}
\Delta(3c+8)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(2c+6)=2\\ \\ \Delta(2c+6)=3\end{array}\right.\\ \\
\Delta(3c+8)=3
\end{array}\right.\\ \\
\Delta(4c+11)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(8c+21)=1\\ \\ \Delta(8c+21)=2\end{array}\right.
\end{array}\right.\\ \\
\Delta(5c+13)=2\left\{\begin{array}{l}
\Delta(7c+18)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(2c+6)=1\\ \\ \Delta(2c+6)=3\end{array}\right.\\ \\
\Delta(7c+18)=3
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 2**

10.3. Caso 3 : $A_1 \supseteq \{1,\,3\}$ y $A_2 \supseteq \{2\}$

Para cualquier *3-coloración* definida en el conjunto $\{1, 2, ..., 13c + 22\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., 13c + 22\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

A los conjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$ se le asignan los colores:

$$\Delta(A_1) = 1$$

$$\Delta(A_2) = 2$$

$$\Delta(A_3) = 3$$

siendo $A_1 \supseteq \{1,\,3\}$ y $A_2 \supseteq \{2\}$

Vamos a demostrar que en este caso hay soluciones *monocromáticas* de la ecuación

$x_1 + x_2 + c = x_3$, siendo $x_1 \neq x_2$ y $c > 0$.

Dados los conjuntos $A_1 \supseteq \{1,\,3\}$ y $A_2 \supseteq \{2\}$

Como $c + 4 = 1 + 3 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1, por tanto podemos asignarle el color 2 ó 3.

En el **Caso 3.1** estudiaremos qué sucede si le asignamos el color 2, es decir si $\Delta(c + 4) = 2$ y en **Caso 3.2** estudiaremos qué sucede si le asignamos el color 3, es decir si $\Delta(c + 4) = 3$.

CASO 3.1

$A_1 \supseteq \{1,\,3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\,c + 4\}$

CASO 3.2

$A_1 \supseteq \{1,\,3\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{c + 4\}$

Analicemos el **Caso 3.1**:
Como $2c + 6 = 2 + c + 4 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.
El elemento $2c + 6$ puede pertenecer al conjunto A_1 ó al conjunto A_3, obteniéndose:

CASO 3.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\,3,\,2c + 6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\,c + 4\}$

CASO 3.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\, 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

Desarrollaremos estos dos últimos casos hasta conseguir soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$.

En el **Caso 3.1.1** como $2c+6 = c+3+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+3$ al conjunto A_1.

En el **Caso 3.1.1.1** estudiaremos qué sucede si $\Delta(c+3) = 2$ y en el **Caso 3.1.1.2** si $\Delta(c+3) = 3$.

CASO 3.1.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+3\}$

Como $3c+7 = 2c+6+1+c$ y $3c+7 = c+4+c+3+c$, el color asignado a este elemento es $\Delta(3c+7) = 3$.

Además como $3c+9 = 2c+6+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se obtendría el **Caso 3.1.1.1 a** si $\Delta(3c+9) = 2$ y el **Caso 3.1.1.1 b** si $\Delta(3c+9) = 3$.

Podemos representar estas distribuciones en el siguiente esquema:

$$\Delta(c+4) \neq 1 \begin{cases} \Delta(c+4) = 2 \begin{cases} \Delta(2c+6) = 1 \begin{cases} \Delta(c+3) = 2 \begin{cases} \Delta(3c+9) = 2 \\ \Delta(3c+9) = 3 \end{cases} \\ \Delta(c+3) = 3 \end{cases} \\ \Delta(2c+6) = 3 \end{cases} \\ \Delta(c+4) = 3 \end{cases}$$

CASO 3.1.1.1

a) $\boldsymbol{\Delta(3c+9) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+3,\, 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+12$, $9c+20$, $8c+18$, $c+5$, $4c+11$, $4c+9$ y $6c+15$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6,\, 5c+12,\, 9c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+3,\, 3c+9,\, 8c+18\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\, c+5,\, 4c+11,\, 4c+9,\, 6c+15\}$

Según coloquemos el elemento $6c+14$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* ala ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(6c+14) = 1 \Rightarrow 9c+20 = 6c+14+2c+6+c$
Si $\Delta(6c+14) = 2 \Rightarrow 8c+18 = 6c+14+c+4+c$
Si $\Delta(6c+14) = 3 \Rightarrow 6c+14 = 4c+9+c+5+c$

CASO 3.1.1.1

b) $\boldsymbol{\Delta(3c+9) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+3\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\, 3c+9\}$

El elemento $7c+16 = 3c+7+3c+9+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.
Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(7c+16) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(7c+16) = 2$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(7c+16) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6,\, 7c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+3\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\, 3c+9\}$

El elemento $7c+16 = 4c+10+2c+6+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+10$ al conjunto A_1, es decir $\Delta(4c+10) \neq 1$.
Se obtendría el caso **b1.1** si $\Delta(4c+10) = 2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(4c+10) = 3$

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(4c+10) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $12c+26$, $2c+7$, $10c+22$, $5c+13$, $6c+13$, $8c+19$, $9c+20$ y $3c+10$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6,\, 7c+16,\, 12c+26,\, 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+3,\, 4c+10,\, 10c+22,\, 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\, 3c+9,\, 6c+13,\, 8c+19,\, 9c+20,\, 3c+10\}$

Según coloquemos el elemento $10c+23$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(10c+23) = 1 \Rightarrow 10c+23 = 7c+16+2c+7+c$
Si $\Delta(10c+23) = 2 \Rightarrow 10c+23 = 5c+13+4c+10+c$
Si $\Delta(10c+23) = 3 \Rightarrow 10c+23 = 6c+13+3c+10+c$

b1.2) $\Delta(4c+10)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+19$ y $6c+15$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6,\ 7c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+3,\ 8c+19\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 4c+10,\ 6c+15\}$

Según coloquemos el elemento $10c+22$ en A_1, A_2 o A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(10c+22)=1 \Rightarrow 10c+22=7c+16+2c+6+c$
Si $\Delta(10c+22)=2 \Rightarrow 10c+22=8c+19+c+3+c$
Si $\Delta(10c+22)=3 \Rightarrow 10c+22=6c+15+3c+7+c$

b2) $\Delta(7c+16)=2$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+3,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9\}$

El elemento $8c+18=2+7c+16+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(8c+18)\neq 2$.

Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(8c+18)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(8c+18)=3$

b2.1) $\Delta(8c+18)=1$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $5c+12$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6,\ 8c+18\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+3,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $9c+19$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+19)=1 \Rightarrow 9c+19=8c+18+1+c$
Si $\Delta(9c+19)=2 \Rightarrow 9c+19=7c+16+c+3+c$
Si $\Delta(9c+19)=3 \Rightarrow 9c+19=5c+12+3c+7+c$

b2.2) $\Delta(8c+18)=3$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+3,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 8c+18\}$

El elemento $9c+20=7c+16+c+4+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(9c+20)\neq 2$.

Se obtendría el caso **b2.2.1** si $\Delta(9c+20)=1$ y el caso **b2.2.2** si $\Delta(9c+20)=3$

b2.2.1) $\Delta(9c+20)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $12c+25$, $10c+21$ y $6c+14$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6,\ 9c+20,\ 12c+25\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+3,\ 7c+16,\ 10c+21\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 8c+18,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $2c+5$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+5)=1 \Rightarrow 12c+25=2c+5+9c+20+c$
Si $\Delta(2c+5)=2 \Rightarrow 2c+5=c+3+2+c$
Si $\Delta(2c+5)=3 \Rightarrow 6c+14=2c+5+3c+9+c$

b2.2.2) $\Delta(9c+20)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+13$, $10c+23$, $3c+8$, $2c+7$, $11c+24$, $6c+14$ y $4c+10$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6,\ 5c+13,\ 10c+23,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+3,\ 7c+16,\ 2c+7,\ 11c+24\}$
$A_3 \supseteq \{3c+7,\ 3c+9,\ 8c+18,\ 9c+20,\ 6c+14,\ 4c+10\}$

Según coloquemos el elemento $4c+11$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(4c+11)=1 \Rightarrow 4c+11=3+3c+8+c$
Si $\Delta(4c+11)=2 \Rightarrow 4c+11=c+4+2c+7+c$
Si $\Delta(4c+11)=3 \Rightarrow 8c+18=4c+11+3c+7+c$

Hemos concluido la demostración del **Caso 3.1.1.1**, el esquema de esta demostración es el siguiente:

$$\Delta(3c+9)=3 \begin{cases} \Delta(7c+16)=1 \begin{cases} \Delta(4c+10)=2 \\ \Delta(4c+10)=3 \end{cases} \\ \Delta(7c+16)=2 \begin{cases} \Delta(8c+18)=1 \\ \Delta(8c+18)=3 \begin{cases} \Delta(9c+20)=1 \\ \Delta(9c+20)=3 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 3.1.1.2** con $\Delta(c+3)=3$.

CASO 3.1.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{c+3\}$

El elemento $3c+7 = 2c+6+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(3c+7) \neq 1$.

Se obtendría el **Caso 3.1.1.2 a** si se le asigna el color $\Delta(3c+7) = 2$ y el **Caso 3.1.1.2 b** si se le asigna el color $\Delta(3c+7) = 3$.

CASO 3.1.1.2

a) $\mathbf{\Delta(3c+7) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+3\}$

El elemento $5c+11 = c+4+3c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(5c+11) \neq 2$.

Se obtendría el caso **a1** si le asignamos el color $\Delta(5c+11) = 1$ y el caso **a2** si le asignamos el color $\Delta(5c+11) = 3$.

a1) $\mathbf{\Delta(5c+11) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+15$, $4c+8$, $5c+9$, $2c+5$, $6c+12$ y $2c+4$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6,\ 5c+11,\ 8c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 3c+7,\ 4c+8,\ 5c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 2c+5,\ 6c+12,\ 2c+4\}$

Según coloquemos el elemento $9c+16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(9c+16) = 1 \Rightarrow 9c+16 = 8c+15+1+c$
Si $\Delta(9c+16) = 2 \Rightarrow 9c+16 = 3c+7+5c+9+c$
Si $\Delta(9c+16) = 3 \Rightarrow 9c+16 = 6c+12+2c+4+c$

a2) $\mathbf{\Delta(5c+11) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 5c+11\}$

El elemento $4c+9 = 3c+7+2+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(4c+9) \neq 2$.

Se obtendría el caso **a2.1** si $\Delta(4c+9) = 1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(4c+9) = 3$

a2.1) $\mathbf{\Delta(4c+9)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+8$ y $7c+15$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6,\, 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 3c+7,\, 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 5c+11,\, 7c+15\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}12$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(5c+12)=1 \Rightarrow 5c+12=3+4c+9+c$
Si $\Delta(5c+12)=2 \Rightarrow 5c+12=c+4+3c+8+c$
Si $\Delta(5c+12)=3 \Rightarrow 7c+15=5c+12+c+3+c$

a2.2) $\mathbf{\Delta(4c+9)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 5c+11,\, 4c+9\}$

El elemento $10c+20=5c+11+4c+9+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_3, es decir $\Delta(10c+20)\neq 3$.

Tendríamos el caso **a2.2.1** si $\Delta(10c+20)=1$ y el caso **a2.2.2** si $\Delta(10c+20)=2$

a2.2.1) $\mathbf{\Delta(10c+20)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+12$, $7c+14$ y $11c+21$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6,\, 10c+20,\, 6c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 3c+7,\, 7c+14\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 5c+11,\, 4c+9,\, 11c+21\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+18)=1 \Rightarrow 9c+18=2c+6+6c+12+c$
Si $\Delta(9c+18)=2 \Rightarrow 9c+18=c+4+7c+14+c$
Si $\Delta(9c+18)=3 \Rightarrow 11c+21=9c+18+c+3+c$

a2.2.2) $\mathbf{\Delta(10c+20)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 3c+7,\, 10c+20\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 5c+11,\, 4c+9\}$

El elemento $10c+20=8c+16+c+4+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $8c+16$ no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(8c+16)\neq 2$.

Se obtendría el caso **a2.2.2.1** si $\Delta(8c+16)=1$ y el **a2.2.2.2** si $\Delta(8c+16)=3$

a2.2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(8c+16)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+13$, $7c+14$, $7c+14$, $9c+19$, $4c+9$, $11c+22$, $c+5$ y $5c+10$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6,\ 8c+16,\ 6c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 3c+7,\ 10c+20,\ 7c+14,\ 9c+19\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 5c+11,\ 4c+9,\ 11c+22,\ c+5,\ 5c+10\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}12$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(5c+12)=1 \Rightarrow 6c+13=5c+12+1+c$
Si $\Delta(5c+12)=2 \Rightarrow 9c+19=5c+12+3c+7+c$
Si $\Delta(5c+12)=3 \Rightarrow 11c+22=5c+12+5c+10+c$

a2.2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(8c+16)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+13, 11c+21, 2c+5, 7c+14, 3c+8$, $c+5$, $5c+10$ y $3c+6$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6,\ 6c+13,\ 11c+21,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 3c+7,\ 10c+20,\ 7c+14,\ 3c+8,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 5c+11,\ 4c+9,\ 8c+16,\ 5c+10,\ 3c+6\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+15)=1 \Rightarrow 11c+21=8c+15+2c+6+c$
Si $\Delta(8c+15)=2 \Rightarrow 10c+20=8c+15+c+5+c$
Si $\Delta(8c+15)=3 \Rightarrow 8c+15=4c+9+3c+6+c$

Con esta última demostración hemos concluido el **Caso 3.1.1.2 a)**, que resumimos con el siguiente esquema:

$$\Delta(c{+}3)=3\begin{cases} \Delta(3c+7)=2\begin{cases} \Delta(5c+11)=1 \\ \Delta(5c+11)=3\begin{cases} \Delta(4c+9)=1 \\ \Delta(4c+9)=3\begin{cases} \Delta(10c+20)=1 \\ \Delta(10c+20)=2\begin{cases} \Delta(8c+16)=1 \\ \Delta(8c+16)=3 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(3c+7)=3 \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 3.1.1.2 b)**, con $\Delta(3c+7)=3$

CASO 3.1.1.2

b) $\mathbf{\Delta(3c+7)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7\}$

El elemento $5c+10 = c+3+3c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3, es decir $\Delta(5c+10) \neq 3$.
Se obtendría el caso **b1** si se asigna el color $\Delta(5c{+}10)=1$ y el caso **b2** si el color es $\Delta(5c{+}10)=2$

b1) $\mathbf{\Delta(5c+10)=1}$

El elemento $6c+13 = 5c+10+3+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(6c+13) \neq 1$.
Se estudia el caso **b1.1** si $\Delta(6c+13)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(6c+13)=3$

b1.1) $\mathbf{\Delta(6c+13)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+12$, $8c+16$, $4c+9$ y $5c+11$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6,\, 5c+10,\, 6c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 6c+13,\, 8c+16\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7,\, 4c+9,\, 5c+11\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+18)=1 \Rightarrow 9c+18 = 2c+6+6c+12+c$
Si $\Delta(9c+18)=2 \Rightarrow 9c+18 = 8c+16+2+c$
Si $\Delta(9c+18)=3 \Rightarrow 9c+18 = 3c+7+5c+11+c$

b1.2) $\mathbf{\Delta(6c+13)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c{+}20$, $8c{+}16$, $11c{+}21$ y $7c{+}14$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6,\, 5c+10,\, 10c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 8c+16,\, 11c+21\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7,\, 6c+13,\, 7c+14\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+17)=1 \Rightarrow 10c+20 = 9c+17+3+c$
Si $\Delta(9c+17)=2 \Rightarrow 11c+21 = 9c+17+c+4+c$
Si $\Delta(9c+17)=3 \Rightarrow 9c+17 = c+3+7c+14+c$

b2) $\mathbf{\Delta(5c+10)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 5c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7\}$

El elemento $6c+12 = 2+5c+10+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(6c+12) \neq 2$.
Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(6c+12)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(6c+12)=3$

b2.1) $\mathbf{\Delta(6c+12)=1}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $7c+13$ y $3c+6$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6,\, 6c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 5c+10,\, 7c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7,\, 3c+6\}$

Según coloquemos el elemento $5c+9$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$
Si $\Delta(5c+9)=1 \Rightarrow 6c+12 = 5c+9+3+c$
Si $\Delta(5c+9)=2 \Rightarrow 7c+13 = 5c+9+c+4+c$
Si $\Delta(5c+9)=3 \Rightarrow 5c+9 = c+3+3c+6+c$

b2.2) $\mathbf{\Delta(6c+12)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 5c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7,\, 6c+12\}$

El elemento $8c+15 = c+3+6c+12+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_3, es decir $\Delta(8c+15) \neq 3$.
Tendríamos el caso **b2.2.1** si $\Delta(8c+15)=1$ y el caso **b2.2.2** si $\Delta(8c+15)=2$

b2.2.1) $\mathbf{\Delta(8c+15)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+17$, $11c+21$, $8c+16$, $7c+14$ y $12c+23$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+6,\, 8c+15,\, 9c+17\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 5c+10,\, 11c+21,\, 8c+16\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\, 3c+7,\, 6c+12,\, 7c+14,\, 12c+23\}$

Según coloquemos el elemento $10c+20$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$
Si $\Delta(10c+20)=1 \Rightarrow 10c+20 = 9c+17+3+c$
Si $\Delta(10c+20)=2 \Rightarrow 10c+20 = 8c+16+c+4+c$
Si $\Delta(10c+20)=3 \Rightarrow 12c+23 = 10c+20+c+3+c$

b2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(8c+15)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+19$, $11c+20$ y $7c+13$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+6,\ 10c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 5c+10,\ 8c+15,\ 11c+20\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 3c+7,\ 6c+12,\ 7c+13\}$

Según coloquemos el elemento $9c+16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+16)=1 \Rightarrow 10c+19=9c+16+3+c$
Si $\Delta(9c+16)=2 \Rightarrow 11c+20=9c+16+c+4+c$
Si $\Delta(9c+16)=3 \Rightarrow 9c+16=c+3+7c+13+c$

Con este último resultado hemos concluido el **Caso 3.1.1.2 b)**, que resumimos con el siguiente esquema:

$$\Delta(3c+7)=3\begin{cases}\Delta(5c+10)=1\begin{cases}\Delta(6c+13)=2\\ \\ \Delta(6c+13)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(5c+10)=2\begin{cases}\Delta(6c+12)=1\\ \\ \Delta(6c+12)=3\begin{cases}\Delta(8c+15)=1\\ \\ \Delta(8c+15)=2\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 3.1.2** con $\Delta(2c+6)=3$

CASO 3.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

Con esta distribución no tenemos ningún elemento que se introduzca **a la fuerza** en algunos de los conjuntos $\{A_1,\ A_2,\ A_3\}$ y que sigan manteniendo la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

Partimos de un elemento aleatorio, por ejemplo el $c+6$. Se obtendría el **Caso 3.1.2.1** si $\Delta(c+6)=1$, el **Caso 3.1.2.2** si $\Delta(c+6)=2$ y el **Caso 3.1.2.3** si $\Delta(c+6)=3$.

CASO 3.1.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

El elemento $2c+9=c+6+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(2c+9)\neq 1$.

En el **Caso 3.1.2.1 a** estudiaremos qué sucede si $\Delta(2c+9)=2$ y en el **Caso 3.1.2.1 b** si $\Delta(2c+9)=3$

CASO 3.1.2.1

a) $\mathbf{\Delta(2c+9)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 2c+9\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

Los elementos $3c+11$ y 5 se introducen **a la fuerza** en los conjuntos conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+6,\ 3c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 2c+9\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 5\}$

El elemento $4c+12 = 3c+11+1+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(4c+12) \neq 1$.
Se obtendría el caso **a1** si $\Delta(4c+12)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(4c+12)=2$

a1) $\mathbf{\Delta(4c+12)=2}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $5c+14$ y $2c+8$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+6,\ 3c+11,\ 5c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 2c+9,\ 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 5,\ 2c+8\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}3$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(c+3)=1 \Rightarrow 5c+14 = c+3+3c+11+c$
Si $\Delta(c+3)=2 \Rightarrow 4c+12 = c+3+2c+9+c$
Si $\Delta(c+3)=3 \Rightarrow 2c+8 = c+3+5+c$

a2) $\mathbf{\Delta(4c+12)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+13, 4c+13$, $5c+17$, $2c+8$ y $c+7$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+6,\ 3c+11,\ 3c+13,\ 4c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 2c+9,\ 5c+17\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 5,\ 4c+12,\ 2c+8,\ c+7\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}19$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+19)=1 \Rightarrow 6c+19 = c+6+4c+13+c$
Si $\Delta(6c+19)=2 \Rightarrow 6c+19 = 2+5c+17+c$
Si $\Delta(6c+19)=3 \Rightarrow 6c+19 = 4c+12+c+7+c$

Hemos concluido el **Caso 3.1.2.1 a**, que resumimos con el esquema siguiente:

$$\Delta(2c+6)=3\begin{cases}\Delta(c+6)=1\begin{cases}\Delta(2c+9)=2\begin{cases}\Delta(4c+12)=2\\ \\ \Delta(4c+12)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(2c+9)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(c+6)=2\\ \\ \Delta(c+6)=3\end{cases}$$

CASO 3.1.2.1

b) $\mathbf{\Delta(2c+9)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+9\}$

El elemento $5c+15 = 2c+6+2c+9+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_3, es decir $\Delta(5c+15) \neq 3$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(5c+15)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(5c+15)=2$.

b1) $\mathbf{\Delta(5c+15)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+6,\ 5c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+9\}$

El elemento $5c+15 = 4c+14+1+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $4c+14$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(4c+14) \neq 1$.

Se obtiene el caso **b1.1** si $\Delta(4c+14)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(4c+14)=3$.

b1.1) $\mathbf{\Delta(4c+14)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+12, 11c+31$, $3c+9$, $9c+27$, $6c+18$, $4c+13$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+6,\ 5c+15,\ 3c+12,\ 11c+31\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 4c+14,\ 3c+9,\ 9c+27\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+9,\ 6c+18,\ 4c+13,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(5c+16)=1 \Rightarrow 11c+31 = 5c+16+5c+15+c$
Si $\Delta(5c+16)=2 \Rightarrow 5c+16 = 4c+14+2+c$
Si $\Delta(5c+16)=3 \Rightarrow 5c+16 = 2c+9+2c+7+c$

b1.2) $\mathbf{\Delta(4c+14)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, c+6,\, 5c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 2c+9,\, 4c+14\}$

El elemento $7c+20 = 2c+6+4c+14+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_3, es decir $\Delta(7c+20) \neq 3$.

Tendríamos el caso **b1.2.1** si $\Delta(7c+20) = 1$ y el caso **b1.2.2** si $\Delta(7c+20) = 2$

b1.2.1) $\mathbf{\Delta(7c+20)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+5, 8c+23$ y $3c+9$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, c+6,\, 5c+15,\, 7c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+5,\, 8c+23\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 2c+9,\, 4c+14,\, 3c+9\}$

Según coloquemos el elemento $6c+18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(6c+18) = 1 \Rightarrow 6c+18 = 5c+15+3+c$
Si $\Delta(6c+18) = 2 \Rightarrow 8c+23 = 6c+18+c+5+c$
Si $\Delta(6c+18) = 3 \Rightarrow 6c+18 = 2c+9+3c+9+c$

b1.2.2) $\mathbf{\Delta(7c+20)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+5$, $3c+9$, $6c+18$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, c+6,\, 5c+15,\, c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 7c+20,\, 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 2c+9,\, 4c+14,\, 6c+18,\, 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $3c+11$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(3c+11) = 1 \Rightarrow 3c+11 = c+6+c+5+c$
Si $\Delta(3c+11) = 2 \Rightarrow 7c+20 = 3c+11+3c+9+c$
Si $\Delta(3c+11) = 3 \Rightarrow 6c+18 = 3c+11+2c+7+c$

b2) $\mathbf{\Delta(5c+15)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 5c+15\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 2c+9\}$

El elemento $5c+15 = 4c+13+2+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $4c+13$ no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(4c+13) \neq 2$.

Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(4c+13) = 1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(4c+13) = 3$

b2.1) $\mathbf{\Delta(4c+13)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, c+6,\, 4c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 5c+15\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 2c+9\}$

El elemento $4c+13 = 3c+10+3+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $3c+10$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(3c+10) \neq 1$.

Se obtendría el caso **b2.1.1** si $\Delta(3c+10) = 2$ y el caso **b2.1.2** si $\Delta(3c+10) = 3$.

b2.1.1) $\mathbf{\Delta(3c+10)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+8$, $6c+17$, $9c+25$, $8c+23$, $5c+14$, $3c+11$ y $7c+21$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, c+6,\, 4c+13,\, 2c+8,\, 6c+17,\, 9c+25\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 5c+15,\, 3c+10,\, 8c+23\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 2c+9,\, 5c+14,\, 3c+11,\, 7c+21\}$

Según coloquemos el elemento $4c+12$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$

Si $\Delta(4c+12) = 1 \Rightarrow 9c+25 = 4c+12+4c+13+c$
Si $\Delta(4c+12) = 2 \Rightarrow 4c+12 = 3c+10+2+c$
Si $\Delta(4c+12) = 3 \Rightarrow 7c+21 = 2c+9+4c+12+c$

b2.1.2) $\mathbf{\Delta(3c+10)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos 4, $8c+23$,$6c+19$, $c+7$, $3c+12$,$5c+17$ y $7c+22$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, c+6,\, 4c+13,\, 4,\, 8c+23\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 5c+15,\, 6c+19,\, c+7,\, 3c+12\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 2c+9,\, 3c+10,\, 5c+17,\, 7c+22\}$

Según coloquemos el elemento $c+5$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$

Si $\Delta(c+5) = 1 \Rightarrow c+5 = 1+4+c$
Si $\Delta(c+5) = 2 \Rightarrow 3c+12 = c+5+c+7+c$
Si $\Delta(c+5) = 3 \Rightarrow 7c+22 = c+5+5c+17+c$

b2.2) $\mathbf{\Delta(4c+13)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 5c+15\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 2c+9,\, 4c+13\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $7c+19$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:.

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+6,\ 7c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 5c+15\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+9,\ 4c+13\}$

El elemento $7c+19 = 6c+16+3+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $6c+16$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(6c+16) \neq 1$.

Se estudia el caso **b2.2.1** si $\Delta(6c+16) = 2$ y el caso **b2.2.2** si $\Delta(6c+16) = 3$.

b2.2.1) $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{6c}+\mathbf{16}) = \mathbf{2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+14, 3c+11$, $6c+16$, $3c+8, c+3$ $8c+20, 6c+17$ y $c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+6,\ 7c+19,\ 5c+14,\ 3c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 5c+15,\ 6c+16,\ 3c+8,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+9,\ 4c+13,\ 8c+20,\ 6c+17,\ c+5\}$

Según coloquemos el elemento $2c+8$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$

Si $\Delta(2c+8) = 1 \Rightarrow 3c+11 = 2c+8+3$
Si $\Delta(2c+8) = 2 \Rightarrow 6c+16 = 2c+8+3c+8+c$
Si $\Delta(2c+8) = 3 \Rightarrow 4c+13 = 2c+8+c+5+c$

b2.2.2) $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{6c}+\mathbf{16}) = \mathbf{3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+29$ y $9c+25$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+6,\ 7c+19,\ 11c+29\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 5c+15,\ 9c+25\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+9,\ 4c+13,\ 6c+16\}$

Según coloquemos el elemento $3c+10$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$

Si $\Delta(3c+10) = 1 \Rightarrow 11c+29 = 3c+10+7c+19+c$
Si $\Delta(3c+10) = 2 \Rightarrow 9c+25 = 3c+10+5c+15+c$
Si $\Delta(3c+10) = 3 \Rightarrow 6c+16 = 3c+10+2c+6+c$

Podemos resumir el **Caso 3.1.2.1 b** en el siguiente esquema:

$$\Delta(2c+9)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(5c+15)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(4c+14)=2\\ \Delta(4c+14)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(7c+20)=1\\ \Delta(7c+20)=2\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \Delta(5c+15)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(4c+13)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(3c+10)=2\\ \Delta(3c+10)=3\end{array}\right.\\ \Delta(4c+13)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(6c+16)=2\\ \Delta(6c+16)=3\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Continuamos con el **Caso 3.1.2.2** con $\Delta(c+6)=2$

CASO 3.1.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

El elemento $3c+10=c+4+c+6+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(3c+10)\neq 2$.

Se obtendría el **Caso 3.1.2.2 a** si $\Delta(3c+10)=1$ y el caso **Caso 3.1.2.2 b** si $\Delta(3c+10)=3$.

CASO 3.1.2.2

a) $\mathbf{\Delta(3c+10)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

El elemento $4c+13=3c+10+3+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(4c+13)\neq 1$.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(4c+13)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(4c+13)=3$.

a1) $\mathbf{\Delta(4c+13)=2}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $5c+15$ en el conjunto A_1 y los elementos $2c+9$ y $2c+7$ en A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+10,\ 5c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6,\ 4c+13\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+9,\ 2c+7\}$

El elemento $9c+25=3c+10+5c+15+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(9c+25)\neq 1$.

Tendríamos el caso **a1.1** si $\Delta(9c+25)=2$ y el caso **a1.2** si $\Delta(9c+25)=3$.

a1.1) $\mathbf{\Delta(9c+25)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+19$, $c+5$, $4c+12$, $11c+29$ y $3c+9$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+10,\ 5c+15,\ 7c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6,\ 4c+13,\ 9c+25,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+9,\ 2c+7,\ 4c+12,\ 11c+29,\ 3c+9\}$

Según coloquemos el elemento $6c+18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+18)=1 \Rightarrow 7c+19=6c+18+1+c$
Si $\Delta(6c+18)=2 \Rightarrow 6c+18=4c+13+c+5+c$
Si $\Delta(6c+18)=3 \Rightarrow 6c+18=2c+9+3c+9+c$

a1.2) $\mathbf{\Delta(9c+25)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+3$, $6c+16$ y $4c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+10,\ 5c+15,\ c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6,\ 4c+13,\ 6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+9,\ 2c+7,\ 9c+25,\ 4c+12\}$

Según coloquemos el elemento $7c+18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+18)=1 \Rightarrow 7c+18=5c+15+c+3+c$
Si $\Delta(7c+18)=2 \Rightarrow 7c+18=6c+16+2+c$
Si $\Delta(7c+18)=3 \Rightarrow 7c+18=2c+6+4c+12+c$

a2) $\mathbf{\Delta(4c+13)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+13\}$

El elemento $3c+10=2c+7+3+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $2c+7$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(2c+7)\neq 1$.

Se obtendría el caso **a2.1** si $\Delta(2c+7)=2$ y el **a2.2** si $\Delta(2c+7)=3$.

a2.1) $\mathbf{\Delta(2c+7)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+5$, $3c+9$, $5c+15$, $4c+11$, $2c+8$ y 4 en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+10,\ c+5,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6,\ 2c+7,\ 5c+15\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+13,\ 4c+11,\ 2c+8,\ 4\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}19$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(7c+19) = 1 \Rightarrow 7c+19 = 3c+10+3c+9+c$

Si $\Delta(7c+19) = 2 \Rightarrow 7c+19 = c+4+5c+15+c$

Si $\Delta(7c+19) = 3 \Rightarrow 7c+19 = 4c+11+2c+8+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(2c+7) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+6\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 4c+13,\, 2c+7\}$

El elemento $5c+13 = 2c+6+2c+7+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_3, es decir $\Delta(5c+13) \neq 3$.

Se estudia el caso **a2.2.1** si $\Delta(5c+13) = 1$ y el caso **a2.2.2** si $\Delta(5c+13) = 2$.

a2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+13) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 3c+10,\, 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+6\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 4c+13,\, 2c+7\}$

El elemento $9c+23 = 3c+10+5c+13+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(9c+23) \neq 1$.

Se obtendría el caso **a2.2.1.1** si $\Delta(9c+23) = 2$ y el caso **a2.2.1.2** si $\Delta(9c+23) = 3$.

a2.2.1.1) $\boldsymbol{\Delta(9c+23) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+19$, $6c+16$ y $11c+29$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 3c+10,\, 5c+13,\, 7c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+6,\, 9c+23,\, 6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 4c+13,\, 2c+7,\, 11c+29\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}22$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(8c+22) = 1 \Rightarrow 8c+22 = 7c+19+3+c$

Si $\Delta(8c+22) = 2 \Rightarrow 8c+22 = c+6+6c+16+c$

Si $\Delta(8c+22) = 3 \Rightarrow 11c+29 = 8c+22+2c+7+c$

a2.2.1.2) $\boldsymbol{\Delta(9c+23) = 3}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $6c+16$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 3c+10,\, 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+6,\, 6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 4c+13,\, 2c+7,\, 9c+23\}$

Según coloquemos el elemento $4c{+}10$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4c+10) = 1 \Rightarrow 5c + 13 = 4c + 10 + 3 + c$
Si $\Delta(4c+10) = 2 \Rightarrow 6c + 16 = 4c + 10 + c + 6 + c$
Si $\Delta(4c+10) = 3 \Rightarrow 9c + 23 = 4c + 10 + 4c + 13 + c$

a2.2.2) $\quad \boldsymbol{\Delta(5c+13) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6,\ 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+13,\ 2c+7\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+19$, $6c+16$ y $3c+9$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+10,\ 7c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6,\ 5c+13,\ 6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+13,\ 2c+7,\ 3c+9\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}22$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(8c+22) = 1 \Rightarrow 8c + 22 = 7c + 19 + 3 + c$
Si $\Delta(8c+22) = 2 \Rightarrow 8c + 22 = c + 6 + 6c + 16 + c$
Si $\Delta(8c+22) = 3 \Rightarrow 8c + 22 = 4c + 13 + 3c + 9 + c$

Con este resultado concluimos el **Caso 3.1.2.2 a)**, resumido en el siguiente esquema:

$$\Delta(c{+}6) = 2 \begin{cases} \Delta(3c+10) = 1 \begin{cases} \Delta(4c+13) = 2 \begin{cases} \Delta(9c+25) = 2 \\ \Delta(9c+25) = 3 \end{cases} \\ \Delta(4c+13) = 3 \begin{cases} \Delta(2c+7) = 2 \\ \Delta(2c+7) = 3 \begin{cases} \Delta(5c+13) = 1 \begin{cases} \Delta(9c+23) = 2 \\ \Delta(9c+23) = 3 \end{cases} \\ \Delta(5c+13) = 2 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(3c+10) = 3 \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 3.1.2.2 b** con $\Delta(3c+10) = 3$.

CASO 3.1.2.2

b) $\quad \boldsymbol{\Delta(3c+10) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10\}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento 4 en A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+6\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 3c+10\}$

El elemento $6c+16 = 2c+6+3c+10+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_3, es decir $\Delta(6c+16) \neq 3$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(6c+16) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(6c+16) = 2$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(6c+16) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 4,\, 6c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+6\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 3c+10\}$

El elemento $6c+16 = 5c+15+1+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $5c+15$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(5c+15) \neq 1$.

Obtenemos el caso **b1.1** si $\Delta(5c+15) = 2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(5c+15) = 3$

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+15) = 2}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $3c+9$ y $7c+19$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 4,\, 6c+16,\, 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+6,\, 5c+15\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 3c+10,\, 7c+19\}$

Según coloquemos el elemento $4c+13$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4c+13) = 1 \Rightarrow 4c+13 = 3c+9+4+c$
Si $\Delta(4c+13) = 2 \Rightarrow 5c+15 = 4c+13+2+c$
Si $\Delta(4c+13) = 3 \Rightarrow 7c+19 = 4c+13+2c+6+c$

b1.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+15) = 3}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $c+5$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 4,\, 6c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, c+6,\, c+5\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, 3c+10,\, 5c+15\}$

El elemento $2c+7 = 2+c+5+c+$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(2c+7) \neq 2$.

Tendremos el caso **b1.2.1** si $\Delta(2c+7) = 1$ y el caso **b1.2.2** si $\Delta(2c+7) = 3$.

b1.2.1) $\Delta(2c+7)=1$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $7c+19$ en A_2 y los elementos $3c+9$ y $5c+13$ en A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\,3,\,4,\,6c+16,\,2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\,c+4,\,c+6,\,c+5,\,7c+19\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\,3c+10,\,5c+15,\,3c+9,\,5c+13\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}23$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+23)=1 \Rightarrow 9c+23=6c+16+2c+7+c$
Si $\Delta(9c+23)=2 \Rightarrow 9c+23=c+4+7c+19+c$
Si $\Delta(9c+23)=3 \Rightarrow 9c+23=3c+10+5c+13+c$

b1.2.2) $\Delta(2c+7)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+8$,$5c+13$ y $3c+9$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\,3,\,4,\,6c+16,\,2c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\,c+4,\,c+6,\,c+5,\,5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\,3c+10,\,5c+15,\,2c+7,\,3c+9\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}19$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+19)=1 \Rightarrow 7c+19=6c+16+3+c$
Si $\Delta(7c+19)=2 \Rightarrow 7c+19=c+6+5c+13+c$
Si $\Delta(7c+19)=3 \Rightarrow 7c+19=3c+10+3c+9+c$

b2) $\Delta(6c+16)=2$

$A_1 \supseteq \{1,\,3,\,4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\,c+4,\,c+6,\,6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\,3c+10\}$

El elemento $6c+16=5c+14+2+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $5c+14$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(5c+14)\neq 1$.

Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(5c+14)=2$ y el caso **b2.2** si $\Delta(5c+14)=3$

b2.1) $\Delta(5c+14)=2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+20$,$7c+16$ y $4c+10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\,3,\,4,\,5c+14,\,8c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\,c+4,\,c+6,\,6c+16,\,7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\,3c+10,\,4c+10\}$

El elemento $9c+21=8c+20+1+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(9c+21) \neq 1$.

Obtenemos el caso **b2.1.1** si $\Delta(9c+21) = 2$ y el caso **b2.1.2** si $\Delta(9c+21) = 3$

b2.1.1) $\boldsymbol{\Delta(9c+21) = 2}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $11c+27$ en A_1 y el elemento $7c+17$ en A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4,\ 5c+14,\ 8c+20,\ 11c+27\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6,\ 6c+16,\ 7c+16,\ 9c+21\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 4c+10,\ 7c+17\}$

Según coloquemos el elemento $10c+23$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$

Si $\Delta(10c+23) = 1 \Rightarrow 11c+27 = 10c+23+4+c$
Si $\Delta(10c+23) = 2 \Rightarrow 10c+23 = 9c+21+2+c$
Si $\Delta(10c+23) = 3 \Rightarrow 10c+23 = 2c+6+7c+17+c$

b2.1.2) $\boldsymbol{\Delta(9c+21) = 3}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $4c+11$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4,\ 5c+14,\ 8c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6,\ 6c+16,\ 7c+16,\ 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 4c+10,\ 9c+21\}$

Según coloquemos el elemento $6c+15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$

Si $\Delta(6c+15) = 1 \Rightarrow 6c+15 = 5c+14+1+c$
Si $\Delta(6c+15) = 2 \Rightarrow 6c+15 = 4c+11+c+4+c$
Si $\Delta(6c+15) = 3 \Rightarrow 9c+21 = 6c+15+2c+6+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+14) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6,\ 6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 5c+13\}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $2c+8$ y $8c+20$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4,\ 2c+8,\ 8c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6,\ 6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 5c+14\}$

El elemento $9c+23 = 8c+20+3+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(9c+23) \neq 1$.

Se estudia el caso **b2.2.1** si $\Delta(9c+23) = 2$ y el caso **b2.2.2** si $\Delta(9c+23) = 3$

b2.2.1) $\mathbf{\Delta(9c+23)=2}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $11c+29$ en A_1 y el elemento $7c+19$ en A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4,\ 2c+8,\ 8c+20,\ 11c+29\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6,\ 6c+16,\ 9c+23\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 5c+14,\ 7c+19\}$

Según coloquemos el elemento $10c+25$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(10c+25)=1 \Rightarrow 11c+29=10c+25+4+c$
Si $\Delta(10c+25)=2 \Rightarrow 10c+25=9c+23+2+c$
Si $\Delta(10c+25)=3 \Rightarrow 10c+25=2c+6+7c+19+c$

b2.2.2) $\mathbf{\Delta(9c+23)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+11$,$3c+9$ y $c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4,\ 2c+8,\ 8c+20,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ c+6,\ 6c+16,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+10,\ 5c+14,\ 9c+23,\ c+5\}$

Según coloquemos el elemento $5c+15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(5c+15)=1 \Rightarrow 5c+15=4c+11+4+c$
Si $\Delta(5c+15)=2 \Rightarrow 5c+15=3c+9+c+6+c$
Si $\Delta(5c+15)=3 \Rightarrow 5c+15+=3c+10+c+5+c$

Con este resultado hemos concluido el **Caso 3.1.2.2 b**, que resumimos en el esquema siguiente:

$$\Delta(3c+10)=3\begin{cases}\Delta(6c+16)=1\begin{cases}\Delta(5c+15)=2\\ \Delta(5c+15)=3\begin{cases}\Delta(2c+7)=1\\ \Delta(2c+7)=3\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(6c+16)=2\begin{cases}\Delta(5c+14)=1\begin{cases}\Delta(9c+21)=2\\ \Delta(9c+21)=3\end{cases}\\ \Delta(5c+14)=3\begin{cases}\Delta(9c+23)=2\\ \Delta(9c+23)=3\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 3.1.2.3** con $\Delta(c+6)=2$

CASO 3.1.2.3

$A_1 \supseteq \{1,\, 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, c+6\}$

El elemento $4c+12 = 2c+6+c+6+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3, es decir $\Delta(4c+12) \neq 3$.

Se obtendría el caso **Caso 3.1.2.3 a** si se asigna el color $\Delta(4c+12) = 1$ y el caso **Caso 3.1.2.3 b** si $\Delta(4c+12) = 2$.

CASO 3.1.2.3

a) $\boldsymbol{\Delta(4c+12) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 4c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, c+6\}$

El elemento $4c+12 = 3c+9+3+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $3c+9$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(3c+9) \neq 1$.

Obtenemos el caso **a1** si $\Delta(3c+9) = 2$ y el caso **a2** si $\Delta(3c+9) = 3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(3c+9) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+7$, $7c+19$, $5c+13$, $3c+10$ y $c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 4c+12,\, 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 3c+9,\, 7c+19\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, c+6,\, 5c+13,\, 3c+10,\, c+5\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$

Si $\Delta(5c+15) = 1 \Rightarrow 5c+15 = 4c+12+3+c$
Si $\Delta(5c+15) = 2 \Rightarrow 7c+19 = 5c+15+c+4+c$
Si $\Delta(5c+15) = 3 \Rightarrow 5c+15 = 3c+10+c+5+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(3c+9) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+17$, $5c+15$, $c+5$ y $3c+11$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 4c+12,\, 6c+17\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 5c+15,\, c+5\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, c+6,\, 3c+9,\, 3c+11\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}20$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$

Si $\Delta(7c+20) = 1 \Rightarrow 7c+20 = 6c+17+3+c$
Si $\Delta(7c+20) = 2 \Rightarrow 7c+20 = 5c+15+c+5+c$
Si $\Delta(7c+20) = 3 \Rightarrow 7c+20 = 3c+9+3c+11+c$

CASO 3.1.2.3

b) $\mathbf{\Delta(4c+12)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ c+6\}$

El elemento $4c+12=3c+10+2+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $3c+10$ no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(3c+10)\neq 2$.
Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(3c+10)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(3c+10)=3$.

b1) $\mathbf{\Delta(3c+10)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ c+6\}$

El elemento $3c+10=2c+7+3+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $2c+7$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(2c+7)\neq 1$.
Se estudia el caso **b1.1** si $\Delta(2c+7)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(2c+7)=3$

b1.1) $\mathbf{\Delta(2c+7)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+5$, $5c+14$, $2c+7$, $4c+11$ y $2c+8$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+10,\ c+5,\ 5c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 4c+12,\ 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ c+6,\ 4c+11,\ 2c+8\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}19$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+19)=1 \Rightarrow 7c+19=c+5+5c+14+c$
Si $\Delta(7c+19)=2 \Rightarrow 7c+19=4c+12+2c+7+c$
Si $\Delta(7c+19)=3 \Rightarrow 7c+19=4c+11+2c+8+c$

b1.2) $\mathbf{\Delta(2c+7)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+15$, $4c+13$, $2c+9$ y $9c+25$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+10,\ 5c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 4c+12,\ 4c+13\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ c+6,\ 2c+7,\ 2c+9,\ 9c+25\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+16)=1 \Rightarrow 6c+16=5c+15+1+c$
Si $\Delta(6c+16)=2 \Rightarrow 6c+16=c+4+4c+12+c$
Si $\Delta(6c+16)=3 \Rightarrow 9c+25=6c+16+2c+9+c$

b2) $\mathbf{\Delta(3c+10)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 6c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, c+6,\, 3c+10\}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $6c+16$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Podemos expresar $6c+16 = 5c+13+3+c$ que es una solución monocromática, por tanto el elemento $5c+13$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(5c+13) \neq 1$.

Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(5c+13)=2$ y el caso **b2.2** si $\Delta(5c+13)=3$.

b2.1) $\mathbf{\Delta(5c+13)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+11$, $2c+8$, $11c+27$, $9c+24$, $7c+17$ y $5c+14$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 6c+16,\, 4c+11,\, 2c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 4c+12,\, 5c+13,\, 11c+27,\, 9c+24\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, c+6,\, 3c+10,\, 7c+17,\, 5c+14\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}3$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(c+3)=1 \Rightarrow 4c+11 = c+3+2c+8+c$
Si $\Delta(c+3)=2 \Rightarrow 11c+27 = c+3+9c+24+c$
Si $\Delta(c+3)=3 \Rightarrow 7c+17 = c+3+5+c+14+c$

b2.2) $\mathbf{\Delta(5c+13)=3}$

Introducimos **a la fuerza** lo elementos $9c+23$ y $7c+19$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 36c+16,\, 9c+23\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+4,\, 4c+12,\, 7c+19\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\, c+6,\, 3c+10,\, 5c+13\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}7$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+7)=1 \Rightarrow 9c+23 = 2c+7+6c+16+c$
Si $\Delta(2c+7)=2 \Rightarrow 7c+19 = 2c+7+4c+12+c$
Si $\Delta(2c+7)=3 \Rightarrow 5c+13 = 2c+7+2c+6+c$

Con este último resultado hemos concluido el **Caso 3.1.2.3** que resumimos el siguiente esquema .

$$
\Delta(4c+12)\neq 3
\begin{cases}
\Delta(4c+12)=1
\begin{cases}
\Delta(3c+9)=2\\[1em]
\Delta(3c+9)=3
\end{cases}\\[3em]
\Delta(4c+12)=2
\begin{cases}
\Delta(3c+10)=1
\begin{cases}
\Delta(2c+7)=2\\[1em]
\Delta(2c+7)=3
\end{cases}\\[1em]
\Delta(3c+10)=3
\begin{cases}
\Delta(5c+13)=2\\[1em]
\Delta(5c+13)=3
\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Continuamos con el **Caso 3.2** con $\Delta(c+4)=2$

CASO 3.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

Con esta distribución no tenemos ningún elemento que se introduzca **a la fuerza** en algunos de los conjuntos $\{A_1,\ A_2,\ A_3\}$ y que sigan manteniendo la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

Consideramos un elemento aleatorio, por ejemplo el $2c+5$.

En el **Caso 3.2.1** estudiaremos que sucede si $\Delta(2c+5)=1$, en el **Caso 3.2.2** si $\Delta(2c+5)=2$ y en el **Caso 3.2.3** si $\Delta(2c+5)=3$.

CASO 3.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

CASO 3.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

CASO 3.2.3

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5\}$

Desarrollaremos estos casos hasta conseguir soluciones monocromáticas a la ecuación
$x_1+x_2+c=x_3$,

En el **Caso 3.2.1**

Como el elemento $3c+6=2c+5+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1. Se le puede asignar el color 2 ó 3.

En el **Caso 3.2.1.1** analizaremos que ocurre si $\Delta(3c+6)=2$ y en el **Caso 3.2.1.2** si $\Delta(3c+6)=2$.

CASO 3.2.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

Como el elemento $4c+8=2+3c+6+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Se obtendría el caso **Caso 3.2.1.1 a** si $\Delta(4c+8)=1$ y el **Caso 3.2.1.1 b** si $\Delta(4c+8)=3$.

CASO 3.2.1.1

a) $\boldsymbol{\Delta(4c+8)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5,\ 4c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

Podemos expresar $7c+13=2c+5+4c+8+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(7c+13)\neq 1$.

Tendríamos el caso **a1** si $\Delta(7c+13)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(7c+13)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(7c+13)=2}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $7c+13, 5c+11, 5c+9$, $3c+7$ y $c+2$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5,\ 4c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+6,\ 7c+13,\ 5c+11,\ 5c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+7,\ c+2\}$

Según coloquemos el elemento $c+3$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(c+3)=1 \Rightarrow 4c+8=c+3+2c+5+c$
Si $\Delta(c+3)=2 \Rightarrow 5c+9=c+3+3c+6+c$
Si $\Delta(c+3)=3 \Rightarrow 3c+7=c+3+c+4+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(7c+13)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+16$,$4c+7$, $5c+9$, $3c+7$, $c+3$, $6c+11$ y $9c+15$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5,\ 4c+8,\ 9c+16,\ 4c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+6,\ 5c+9,\ 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 7c+13,\ c+3,\ 6c+11,\ 9c+15\}$

Según coloquemos el elemento $c+2$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(c+2)=1 \Rightarrow 2c+5=c+2+3+c$
Si $\Delta(c+2)=2 \Rightarrow 5c+9=c+2+3c+7+c$
Si $\Delta(c+2)=3 \Rightarrow 9c+15=c+2+7c+13+c$

CASO 3.2.1.1

b) $\boldsymbol{\Delta(4c+8)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 4c+8\}$

El color asignado al elemento $2c+4$ es $\Delta(2c+4)=1$, puesto que $3c+6=2c+4+2+c$ y $4c+8=2c+4+c+4+c$ son soluciones *monocromáticas*.

Podemos expresar el elemento $5c+9=2c+5+2c+4+c$, que es una solución monocromática, por tanto el no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(5c+9)\neq 1$.

Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(5c+9)=2$ y el caso **b2** si $\Delta(5c+9)=3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(5c+9)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+11$,$3c+7$, $3c+5$, $c+3$, $9c+15$ y $c+2$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5,\ 2c+4,\ 6c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+6,\ 5c+9,\ 3c+7,\ 3c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 4c+8,\ c+3,\ 9c+15,\ c+2\}$

Según coloquemos el elemento $7c+12$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+12)=1 \Rightarrow 7c+12=6c+11+1+c$
Si $\Delta(7c+12)=2 \Rightarrow 7c+12=3c+7+3c+5+c$
Si $\Delta(7c+12)=3 \Rightarrow 9c+15=7c+12+c+3+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(5c+9)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5,\ 2c+4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 4c+8,\ 5c+9\}$

El color asignado al elemento $3c+5$ es $\Delta(3c+5)=2$, puesto que $5c+9=3c+5+c+4+c$ y $3c+5=2c+4+1+c$ son soluciones *monocromáticas*.

Podemos expresar el elemento $7c+11=3c+6+3c+5+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(7c+11)\neq 2$.

Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(7c+11)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(7c+11)=3$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(7c+11)=1}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $10c+16, 8c+14, 4c+7$ y $6c+10$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+5,\, 2c+4,\, 7c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3c+6,\, 3c+5,\, 10c+16,\, 8c+14\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 4c+8,\, 5c+9,\, 4c+7,\, 6c+10\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}2$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+2) = 1 \Rightarrow 2c+5 = c+2+3+c$
Si $\Delta(c+2) = 2 \Rightarrow 10c+16 = c+2+8c+14+c$
Si $\Delta(c+2) = 3 \Rightarrow 6c+10 = c+2+4c+8+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(7c+11) = 3}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $2c+3$ y $c+2$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+5,\, 2c+4,\, 2c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3c+6,\, 3c+5,\, c+2\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 4c+8,\, 5c+9,\, 7c+11\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}7$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(5c+7) = 1 \Rightarrow 5c+7 = 2c+4+2c+3+c$
Si $\Delta(5c+7) = 2 \Rightarrow 5c+7 = 3c+5+c+2+c$
Si $\Delta(5c+7) = 3 \Rightarrow 7c+11 = 5c+7+c+4+c$

Con este último resultado hemos concluido el **Caso 3.2.1.1**, que resumimos en el siguiente esquema :

$$\Delta(2c+5)=1 \left\{\begin{array}{l} \Delta(3c+6)=2 \left\{\begin{array}{l} \Delta(4c+8)=1 \left\{\begin{array}{l} \Delta(7c+13)=2 \\ \\ \Delta(7c+13)=3 \end{array}\right. \\ \Delta(4c+8)=3 \left\{\begin{array}{l} \Delta(5c+9)=2 \\ \\ \Delta(5c+9)=3 \left\{\begin{array}{l} \Delta(7c+11)=1 \\ \\ \Delta(7c+11)=3 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \\ \Delta(3c+6)=3 \end{array}\right.$$

Continuamos con el **Caso 3.2.1.2** cuando $\Delta(3c+6) = 3$

CASO 3.2.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 3c+6\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $c+2$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Podemos expresar $5c+10=c+4+3c+6+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_3, es decir $\Delta(5c+10)\neq 3$.

Se obtendría el **Caso 3.2.1.2 a** si $\Delta(5c+10)=1$ y el **Caso 3.2.1.2 b** si $\Delta(5c+10)=2$.

CASO 3.2.1.2

a) $\boldsymbol{\Delta(5c+10)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5,\ 5c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+2\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+6\}$

Podemos expresar $6c+11=5c+10+1+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(6c+11)\neq 1$.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(6c+11)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(6c+11)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(6c+11)=2}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $6c+13$ y $4c+9$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5,\ 5c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+2,\ 6c+11,\ 6c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+6,\ 4c+9\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+15)=1 \Rightarrow 8c+15=2c+5+5c+10+c$
Si $\Delta(8c+15)=2 \Rightarrow 8c+15=c+2+6c+13+c$
Si $\Delta(8c+15)=3 \Rightarrow 8c+15=3c+6+4c+9+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(6c+11)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+17$, $2c+7$, $4c+7$, $8c+15$, $4c+9$,$7c+12$, $3c+8$, $6c+13$ y $9c+16$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5,\ 5c+10,\ 10c+17,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+2,\ 4c+7,\ 8c+15,\ 4c+9,\ 7c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+6,\ 6c+11,\ 3c+8,\ 6c+13,\ 9c+16\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}3$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+3)=1 \Rightarrow 5c+10=2c+3+2c+7+c$
Si $\Delta(2c+3)=2 \Rightarrow 7c+12=2c+3+4c+9+c$
Si $\Delta(2c+3)=3 \Rightarrow 6c+11=2c+3+3c+8+c$

CASO 3.2.1.2

b) $\boldsymbol{\Delta(5c+10)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+2,\ 5c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+6\}$

El color asignado al elemento $3c+8$ es $\Delta(3c+8)=3$, puesto que $3c+8=3+2c+5+c$ y $5c+10=3c+8+c+2+c$ son soluciones *monocromáticas*.

Podemos expresar $6c+12=5c+10+2+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(6c+12)\neq 2$.

Tendríamos el caso **b1** si $\Delta(6c+12)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(6c+12)=3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(6c+12)=1}$

Se puede expresar el elemento $6c+12=3c+7+2c+5+c$, que es una solución monocromática, por tanto el elemento $3c+7$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(3c+7)\neq 1$.

Se obtendría el caso **b1.1** si $\Delta(3c+7)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(3c+7)=3$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(3c+7)=2}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $9c+17$ en el conjunto A_3 que mantienen la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5,\ 6c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+2,\ 5c+10,\ 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+6,\ 3c+8,\ 9c+17\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}9$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(5c+9)=1 \Rightarrow 6c+12=5c+9+3+c$
Si $\Delta(5c+9)=2 \Rightarrow 5c+9=c+2+3c+7+c$
Si $\Delta(5c+9)=3 \Rightarrow 9c+17=5c+9+3c+8+c$

b1.2) $\boldsymbol{\Delta(3c+7)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+3$, $7c+13$ y $4c+8$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 2c+5,\ 6c+12,\ c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+2,\ 5c+10,\ 7c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+6,\ 3c+8,\ 3c+7,\ 4c+8\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+15)=1 \Rightarrow 8c+15=6c+12+c+3+c$
Si $\Delta(8c+15)=2 \Rightarrow 8c+15=7c+13+2+c$
Si $\Delta(8c+15)=3 \Rightarrow 8c+15=3c+7+4c+8+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(6c+12)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+2,\, 5c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 3c+6,\, 3c+8,\, 6c+12\}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $2c+4$ y $4c+8$ en el conjunto A_1 y el elemento $7c+12$ en A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

Podemos expresar $2c+4=c+3+1+c$ que es una solución monocromática, por tanto el elemento $c+3$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(c+3)\neq 1$.

Se obtiene el caso **b2.1** si $\Delta(c+3)=2$ y el caso **b2.2** si $\Delta(c+3)=3$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(c+3)=1}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $3c+5$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+5,\, 2c+4,\, 4c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+2,\, 5c+10,\, c+3\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 3c+6,\, 3c+8,\, 6c+12,\, 7c+12,\, 3c+5\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}13$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+13)=1 \Rightarrow 7c+13=2c+5+4c+8+c$
Si $\Delta(7c+13)=2 \Rightarrow 7c+13=5c+10+c+3+c$
Si $\Delta(7c+13)=3 \Rightarrow 7c+13=3c+8+3c+5+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(c+3)=3}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $3c+7$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 2c+5,\, 2c+4,\, 4c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, c+2,\, 5c+10,\, 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 3c+6,\, 3c+8,\, 6c+12,\, 7c+12,\, c+3\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}9$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(5c+9)=1 \Rightarrow 5c+9=4c+8+1+c$
Si $\Delta(5c+9)=2 \Rightarrow 5c+9=c+2+3c+7+c$
Si $\Delta(5c+9)=3 \Rightarrow 5c+9=3c+6+c+3+c$

Con esta última demostración concluimos el **Caso 3.2.1.2**, resumido en el siguiente esquema:

$$\Delta(3c+6)=3\begin{cases}\Delta(5c+10)=1\begin{cases}\Delta(6c+11)=2\\ \\ \Delta(6c+11)=3\end{cases}\\ \Delta(5c+10)=2\begin{cases}\Delta(6c+12)=1\begin{cases}\Delta(3c+7)=2\\ \\ \Delta(3c+7)=3\end{cases}\\ \Delta(6c+12)=3\begin{cases}\Delta(c+3)=2\\ \\ \Delta(c+3)=3\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 3.2.2** con $\Delta(2c+5)=2$

CASO 3.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\, 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

Como el elemento $3c+7 = 2c+5+2+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_2.

En el **Caso 3.2.2.1** analizaremos que ocurre si $\Delta(3c+7)=1$ y en el **Caso 3.2.2.2** si $\Delta(3c+7)=3$.

CASO 3.2.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

El elemento $4c+8 = 1+3c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se obtendría el **Caso 3.2.2.1 a** si $\Delta(4c+8)=2$ y el **Caso 3.2.2.1 b** si $\Delta(4c+8)=3$.

CASO 3.2.2.1

a) $\boldsymbol{\Delta(4c+8)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 2c+5,\, 4c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+4\}$

Podemos expresar $7c+13 = 2c+5+4c+8+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(7c+13) \neq 2$.

Se obtendría el caso **a1** si $\Delta(7c+13)=1$ y el caso **a2** si $\Delta(7c+13)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(7c+13)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+10$, $3c+6$ y $c+3$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+7,\ 7c+13,\ 5c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 4c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+6,\ c+3\}$

Podemos expresar el elemento $9c+17 = 5c+10+3c+7+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1 .

Tendríamos el caso **a1.1** si $\Delta(9c+17)=2$ y el caso **a1.2** si $\Delta(9c+17)=3$.

a1.1) $\boldsymbol{\Delta(9c+17)=2}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $4c+9$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+7,\ 7c+13,\ 5c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 4c+8,\ 9c+17\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+6,\ c+3,\ 4c+9\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}12$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+12)=1 \Rightarrow 7c+13 = 6c+12+1+c$
Si $\Delta(6c+12)=2 \Rightarrow 9c+17 = 6c+12+2c+5+c$
Si $\Delta(6c+12)=3 \Rightarrow 6c+12 = 4c+9+c+3+c$

a1.2) $\boldsymbol{\Delta(9c+17)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+15$, $11c+20$, $7c+14$ y $6c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+7,\ 7c+13,\ 5c+10,\ 8c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 4c+8,\ 11c+20,\ 7c+14\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+6,\ c+3,\ 9c+17,\ 6c+12\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}6$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+6)=1 \Rightarrow 3c+7 = 2c+6+1+c$
Si $\Delta(2c+6)=2 \Rightarrow 7c+14 = 4c+8+2c+6+c$
Si $\Delta(2c+6)=3 \Rightarrow 6c+12 = 3c+6+2c+6+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(7c+13)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 4c+8\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 7c+13\}$

Podemos expresar el elemento $4c+8 = c+3+2c+5+c$, que es una solución monocromática, por tanto el elemento $c+3$ no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(c+3)\neq 2$.

Se obtiene el caso **a2.1** si $\Delta(c+3)=1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(c+3)=3$.

a2.1) $\Delta(c+3)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+6,\ 10c+17\ ,5c+9\ ,\ 5c+10$ y $2c+4$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+7,\ c+3,\ 3c+6,\ 10c+17\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 4c+8,\ 5c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 7c+13,\ 5c+10,\ 2c+4\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}14$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+14)=1 \Rightarrow 10c+17=8c+14+c+3+c$
Si $\Delta(8c+14)=2 \Rightarrow 8c+14=2c+5+5c+9+c$
Si $\Delta(8c+14)=3 \Rightarrow 8c+14=5c+10+2c+4+c$

a2.2) $\Delta(c+3)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+10\ ,\ 9c+17,\ 2c+4$ y $4c+9$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+7,\ 5c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 4c+8,\ 9c+17,\ 2c+4\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 7c+13,\ c+3,\ 4c+9\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}13$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+13)=1 \Rightarrow 6c+13=5c+10+3+c$
Si $\Delta(6c+13)=2 \Rightarrow 9c+17=6c+13+2c+4+c$
Si $\Delta(6c+13)=3 \Rightarrow 6c+13=c+4+4c+9+c$

CASO 3.2.2.1

b) $\Delta(4c+8)=3$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 4c+8\}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $2c+4$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 2c+4\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 4c+8\}$

Podemos expresar el elemento $6c+12=4c+8+c+4+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_3, es decir $\Delta(6c+12)\neq 3$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(6c+12)=1$ y el **b2** si $\Delta(6c+12)=2$.

b1) $\Delta(6c+12)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+17$, $7c+13$, $3c+5$, $5c+9$ y $11c+20$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+7,\ 6c+12,\ 10c+17\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 2c+4,\ 7c+13,\ 3c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 4c+8,\ 5c+9,\ 11c+18\}$

Según coloquemos el elemento $6c+10$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+10)=1 \Rightarrow 10c+17=6c+10+3c+7+c$
Si $\Delta(6c+10)=2 \Rightarrow 6c+10=2c+5+3c+5+c$
Si $\Delta(6c+10)=3 \Rightarrow 11c+18=6c+10+4c+8+c$

b2) $\Delta(6c+12)=2$

Se puede expresar el elemento $6c+12=5c+10+2+c$, que es una solución monocromática, por tanto el elemento $5c+10$ no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(5c+10)\neq 2$.

Obtenemos el caso **b2.1** si $\Delta(5c+10)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(5c+10)=3$.

b2.1) $\Delta(5c+10)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+13$, $c+2$, $4c+9$, $9c+17$ y $3c+6$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+7,\ 5c+10,\ 7c+13,\ c+2\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 2c+4,\ 6c+12,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 4c+8,\ 9c+17,\ 3c+6\}$

Según coloquemos el elemento $5c+11$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(5c+11)=1 \Rightarrow 7c+13=5c+11+c+2+c$
Si $\Delta(5c+11)=2 \Rightarrow 5c+11=4c+9+2+c$
Si $\Delta(5c+11)=3 \Rightarrow 9c+17=5c+11+3c+6+c$

b2.2) $\Delta(5c+10)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+6$, $7c+14$, $c+2$, $2c+7$, $5c+12$, $3c+8$, $8c+17$ y $4c+10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+7,\ 3c+6,\ 7c+14,\ c+2,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 2c+4,\ 6c+12,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 4c+8,\ 5c+10,\ 3c+8,\ 8c+17,\ 4c+10\}$

Según coloquemos el elemento $6c+14$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+14)=1 \Rightarrow 6c+14=3c+7+2c+7+c$
Si $\Delta(6c+14)=2 \Rightarrow 6c+14=5c+12+2+c$
Si $\Delta(6c+14)=3 \Rightarrow 6c+14=4c+10+c+4+c$

Con este último resultado hemos concluido el **Caso 3.2.2.1**, que representamos con el siguiente esquema.

$$\Delta(2c+5)=2\begin{cases}\Delta(3c+7)=1\begin{cases}\Delta(4c+8)=2\begin{cases}\Delta(7c+13)=1\begin{cases}\Delta(9c+17)=2\\ \Delta(9c+17)=3\end{cases}\\ \Delta(7c+13)=3\begin{cases}\Delta(c+3)=1\\ \Delta(c+3)=3\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(4c+8)=3\begin{cases}\Delta(6c+12)=1\\ \Delta(6c+12)=2\begin{cases}\Delta(5c+10)=1\\ \Delta(5c+10)=3\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(3c+7)=3\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 3.2.2.2** con $\Delta(3c+7)=2$

CASO 3.2.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+7\}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $c+3$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+7\}$

El elemento $5c+11=c+4+3c+7+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_3, es decir $\Delta(5c+11)\neq 3$.

En el **Caso 3.2.2.2 a** se estudia qué sucede si $\Delta(5c+11)=1$ y en el **Caso 3.2.2.2 b** si $\Delta(5c+11)=2$

CASO 3.2.2.2

a) $\boldsymbol{\Delta(5c+11)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+3,\ 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+7\}$

Podemos expresar $7c+14=c+3+5c+11+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(7c+14)\neq 1$.

Se obtendría el caso **a1** si $\Delta(7c+14)=2$ y el **a2** si $\Delta(7c+14)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(7c+14)=2}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $8c+16$ y $6c+12$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+3,\ 5c+11,\ 8c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 7c+14\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+7,\ 6c+12\}$

Según coloquemos el elemento $10c{+}19$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(10c+19)=1 \Rightarrow 10c+19=c+3+8c+16+c$
Si $\Delta(10c+19)=2 \Rightarrow 10c+19=2c+5+7c+14+c$
Si $\Delta(10c+19)=3 \Rightarrow 10c+19=3c+7+6c+12+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(7c+14)=3}$

El elemento $6c+12=5c+11+1+c$, es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(6c+12)\neq 1$.

Tendríamos el caso **a2.1** si $\Delta(6c+12)=2$ y el caso **a2.2** si $\Delta(6c+12)=3$

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(6c+12)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+10$, $8c+16$,$11c+21$, $6c+13$, $4c+9$ y $4c+8$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+3,\ 5c+11,\ 5c+10,\ 8c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 6c+12,\ 11c+21,\ 6c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+7,\ 7c+14,\ 4c+9,\ 4c+8\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+17)=1 \Rightarrow 9c+17=8c+16+1+c$
Si $\Delta(9c+17)=2 \Rightarrow 9c+17=2c+5+6c+12+c$
Si $\Delta(9c+17)=3 \Rightarrow 9c+17=4c+9+4c+8+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(6c+12)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+10$, $10c+19$,$4c+8$ y $11c+21$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ c+3,\ 5c+11,\ 5c+10,\ 10c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 4c+8,\ 11c+21\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+7,\ 7c+14,\ 6c+12\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+16)=1 \Rightarrow 10c+19=8c+16+c+3+c$
Si $\Delta(8c+16)=2 \Rightarrow 11c+21=8c+16+2c+5+c$
Si $\Delta(8c+16)=3 \Rightarrow 8c+16=c+4+6c+12+c$

CASO 3.2.2.2

b) $\boldsymbol{\Delta(5c+11)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+7\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+13$, $3c+8$, $4c+10$, $2c+6$ y $5c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 6c+13,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 5c+11,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 3c+7,\ 2c+6,\ 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $c+5$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(c+5)=1 \Rightarrow 3c+8=c+3+c+5+c$
Si $\Delta(c+5)=2 \Rightarrow 4c+10=c+5+2c+5+c$
Si $\Delta(c+5)=3 \Rightarrow 5c+12=c+5+3c+7+c$

Con esta última demostración concluimos el **Caso 3.2.2.2**, resumido en el siguiente esquema:

$$\Delta(3c+7)=3\begin{cases}\Delta(5c+11)=1\begin{cases}\Delta(7c+14)=2\\ \Delta(7c+14)=3\begin{cases}\Delta(6c+12)=2\\ \Delta(6c+12)=3\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(5c+11)=2\end{cases}$$

Con este último resultado hemos concluido el **Caso 3.2.2**.

Continuamos con el **Caso 3.2.3** con $\Delta(2c+5)=3$

CASO 3.2.3

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5\}$

Como el elemento $4c+9=c+4+2c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

En el **Caso 3.2.3.1** analizaremos que ocurre si $\Delta(4c+9)=1$ y en el **Caso 3.2.3.2** si $\Delta(4c+9)=3$.

CASO 3.2.3.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5\}$

El elemento $5c+12=4c+9+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se obtendría el caso **Caso 3.2.3.1 a** si $\Delta(5c+12)=2$ y el **Caso 3.2.3.1 b** si $\Delta(5c+12)=3$.

CASO 3.2.3.1

a) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5\}$

Podemos expresar $6c+14 = 2+5c+12+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(6c+14) \neq 2$.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(6c+14)=1$ y el caso **a2** si $\Delta(6c+14)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(6c+14)=1}$

El elemento $6c+14 = c+5+4c+9+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $c+5$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(c+5) \neq 1$.

Tendríamos el caso **a1.1** si $\Delta(c+5)=2$ y el caso **a1.2** si $\Delta(c+5)=3$.

a1.1) $\boldsymbol{\Delta(c+5)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+25$, $2c+7$, $5c+13$, $5c+11$, $7c+17$, $3c+8$, $4c+11$ y $3c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9,\ 6c+14,\ 11c+25,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12,\ c+5,\ 5c+13,\ 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 7c+17,\ 3c+8,\ 4c+11,\ 3c+7\}$

Según coloquemos el elemento $7c+16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+16)=1 \Rightarrow 7c+16 = 4c+9+2c+7+c$
Si $\Delta(7c+16)=2 \Rightarrow 7c+16 = 5c+11+c+5+c$
Si $\Delta(7c+16)=3 \Rightarrow 7c+16 = 2c+5+4c+11+c$

a1.2) $\boldsymbol{\Delta(c+5)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9,\ 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ c+5\}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $4c+10$ y $3c+9$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9,\ 6c+14,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ c+5\}$

El elemento $9c+19 = 4c+9+4c+10+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(9c+19) \neq 1$.

Se obtendría el caso **a1.2.1** si $\Delta(9c+19)=2$ y el caso **a1.2.2** si $\Delta(9c+19)=3$.

a1.2.1) $\mathbf{\Delta(9c+19)=2}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $3c+6$ en A_2 y el elemento $5c+10$ en A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 4c+9,\, 6c+14,\, 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 5c+12,\, 3c+9,\, 9c+19,\, 3c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 2c+5,\, c+5,\, 5c+10\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+15)=1 \Rightarrow 7c+15=6c+14+1+c$
Si $\Delta(7c+15)=2 \Rightarrow 7c+15=3c+9+3c+6+c$
Si $\Delta(7c+15)=3 \Rightarrow 7c+15=c+5+5c+10+c$

a1.2.2) $\mathbf{\Delta(9c+19)=3}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $11c+24$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 4c+9,\, 6c+14,\, 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 5c+12,\, 3c+9,\, 11c+24\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 2c+5,\, c+5,\, 9c+19\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+15)=1 \Rightarrow 7c+15=6c+14+1+c$
Si $\Delta(7c+15)=2 \Rightarrow 11c+24=7c+15+3c+9+c$
Si $\Delta(7c+15)=3 \Rightarrow 9c+19=7c+15+c+4+c$

a2) $\mathbf{\Delta(6c+14)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 2c+5,\, 6c+14\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+10$, $2c+7$, $3c+9$, $9c+19$ y $3c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 4c+9,\, 4c+10,\, 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 5c+12,\, 3c+9,\, 9c+19\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 2c+5,\, 6c+14,\, 3c+7\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}3$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(c+3)=1 \Rightarrow 4c+10=c+3+2c+7+c$
Si $\Delta(c+3)=2 \Rightarrow 5c+12=c+3+3c+9+c$
Si $\Delta(c+3)=3 \Rightarrow 3c+7=c+3+c+4+c$

CASO 3.2.3.1

b) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 5c+12\}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $3c+8$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Podemos expresar el elemento $7c+16 = c+4+5c+12+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_3, es decir $\Delta(7c+16) \neq 3$.

Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(7c+16)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(7c+16)=2$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(7c+16)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $12c+27$, $8c+17$, $2c+7$, $8c+19$ y $6c+15$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9,\ 7c+16,\ 12c+27\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 8c+17,\ 2c+7,\ 8c+19\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 5c+12,\ 6c+15\}$

Según coloquemos el elemento $4c+11$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(4c+11)=1 \Rightarrow 12c+27 = 4c+11+7c+16+c$
Si $\Delta(4c+11)=2 \Rightarrow 8c+19 = 4c+11+3c+8+c$
Si $\Delta(4c+11)=3 \Rightarrow 6c+15 = 4c+11+c+4+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(7c+16)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 5c+12\}$

Podemos expresar el elemento $8c+18 = 7c+16+2+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(8c+18) \neq 2$.

Se obtendría el caso **b2.1** si $\Delta(8c+18)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(8c+18)=3$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(8c+18)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9,\ 8c+18\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 5c+12\}$

El elemento $8c+18 = 3c+9+4c+9+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $3c+9$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(3c+9) \neq 1$.

Se estudia el caso **b2.1.1** si $\Delta(3c+9)=2$ y el caso **b2.1.2** si $\Delta(3c+9)=3$.

b2.1.1) $\boldsymbol{\Delta(3c+9)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+7$, $5c+13$, $9c+21$, $7c+17$ y $2c+6$ en los conjuntos

A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9,\ 8c+18,\ 2c+7,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 7c+16,\ 3c+9,\ 9c+21\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 5c+12,\ 7c+17,\ 2c+6\}$

Según coloquemos el elemento $4c+10$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4c+10) = 1 \Rightarrow 5c+13 = 4c+10+3+c$
Si $\Delta(4c+10) = 2 \Rightarrow 4c+10 = 2+3c+8+c$
Si $\Delta(4c+10) = 3 \Rightarrow 4c+10 = c+4+2c+6+c$

b2.1.2) $\boldsymbol{\Delta(3c+9) = 3}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $c+5$ y $9c+21$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9,\ 8c+18,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 7c+16,\ 9c+21\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 5c+12,\ 3c+9\}$

Según coloquemos el elemento $6c+14$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(6c+14) = 1 \Rightarrow 6c+14 = 4c+9+c+5+c$
Si $\Delta(6c+14) = 2 \Rightarrow 7c+16 = 6c+14+2+c$
Si $\Delta(6c+14) = 3 \Rightarrow 6c+14 = 2c+5+3c+9+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(8c+18) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 5c+12,\ 8c+18\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+14, 4c+10$, $5c+13$, $3c+9$ y $c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 4c+9,\ 6c+14,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 7c+16,\ 5c+13,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 5c+12,\ 8c+18,\ c+5\}$

Según coloquemos el elemento $7c+17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(7c+17) = 1 \Rightarrow 7c+17 = 6c+14+3+c$
Si $\Delta(7c+17) = 2 \Rightarrow 7c+17 = 3c+8+3c+9+c$
Si $\Delta(7c+17) = 3 \Rightarrow 7c+17 = 5c+12+c+5+c$

Con este último resultado hemos concluido el **Caso 3.2.3.1** , que representamos con el siguiente esquema.

$$\Delta(2c{+}5)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(4c+9)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(5c+12)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(6c+14)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(c+5)=2\\ \Delta(c+5)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(9c+19)=2\\ \Delta(9c+19)=3\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \Delta(6c+14)=3\end{array}\right.\\ \Delta(5c+12)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(7c+16)=1\\ \Delta(7c+16)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(8c+18)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(3c+9)=2\\ \Delta(3c+9)=3\end{array}\right.\\ \Delta(8c+18)=3\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \Delta(4c+9)=2\end{array}\right.$$

Continuamos con el **Caso 3.2.3.2** con $\Delta(4c+9)=2$

CASO 3.2.3.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5\}$

Podemos expresar el elemento $5c+11=4c+9+2+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(5c+11)\neq 2$.

Se obtendría el **Caso 3.2.3.2 a** si $\Delta(5c+11)=1$ y el **Caso 3.2.3.2 b** si $\Delta(5c+11)=3$.

CASO 3.2.3.2

a) $\boldsymbol{\Delta(5c+11)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5\}$

Podemos expresar el elemento $6c+14=5c+11+3+c$, que es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(6c+14)\neq 1$.

Tendríamos el caso **a1** si $\Delta(6c+14)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(6c+14)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(6c+14)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 6c+14\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5\}$

El elemento $6c+14=c+5+4c+9+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $c+5$ no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(c+5)\neq 2$.

Se obtendría el caso **a1.1** si $\Delta(c+5)=1$ y el caso **a1.2** si $\Delta(c+5)=3$.

a1.1) $\boldsymbol{\Delta(c+5)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+5$, $5c+12$, $7c+16$ y $11c+23$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:
$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 5c+11,\, c+5,\, 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+9,\, 6c+14\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 2c+5,\, 7c+16,\, 11c+23\}$

Según coloquemos el elemento $3c{+}7$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$
Si $\Delta(3c+7)=1 \Rightarrow 5c+12=3c+7+c+5+c$
Si $\Delta(3c+7)=2 \Rightarrow 4c+9=3c+7+2+c$
Si $\Delta(3c+7)=3 \Rightarrow 11c+23=3c+7+7c+16+c$

a1.2) $\boldsymbol{\Delta(c+5)=3}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $4c+10$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Podemos expresar el elemento $4c+10=3c+8+2+c$, que es una solución monocromática, por tanto el elemento $3c+8$ no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(3c+8)\neq 2$.

Se obtiene el caso **a1.2.1** si $\Delta(3c+8)=1$ y el caso **a1.2.2** si $\Delta(3c+8)=3$.

a1.2.1) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+23$, $12c+24$ y $9c+19$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 5c+11,\, 3c+8,\, 11c+23\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+9,\, 6c+14,\, 4c+10,\, 12c+24\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 2c+5,\, c+5,\, 9c+19\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$
Si $\Delta(7c+15)=1 \Rightarrow 11c+23=7c+15+3c+8+c$
Si $\Delta(7c+15)=2 \Rightarrow 12c+24=7c+15+4c+9+c$
Si $\Delta(7c+15)=3 \Rightarrow 9c+19=7c+15+c+4+c$

a1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+12$, $9c+19$, $3c+9$, $8c+18$, $c+3$ y $11c+23$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3,\, 5c+11,\, 5c+12,\, 9c+19,\, 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+9,\, 6c+14,\, 4c+10,\, 8c+18,\, c+3\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\, 2c+5,\, c+5,\, 3c+8,\, 11c+23\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$
Si $\Delta(6c+15)=1 \Rightarrow 6c+13=5c+12+1+c$
Si $\Delta(6c+15)=2 \Rightarrow 6c+13=4c+10+c+3+c$
Si $\Delta(6c+15)=3 \Rightarrow 6c+13=2c+5+3c+8+c$

a2) $\quad \mathbf{\Delta(6c+14)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 6c+14\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+19,\ 5c+12,\ c+3$, $4c+10,\ 6c+12,\ 3c+8$, $3c+7$ y $11c+22$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 5c+11,\ 9c+19,\ 5c+12,\ c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 4c+10,\ 6c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 6c+14,\ 3c+8,\ 3c+7,\ 11c+22\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}14$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+14)=1 \Rightarrow 7c+14=5c+11+c+3+c$
Si $\Delta(7c+14)=2 \Rightarrow 7c+14=6c+12+2+c$
Si $\Delta(7c+14)=3 \Rightarrow 11c+22=7c+14+3c+8+c$

Con este resultado hemos concluido el **Caso 3.2.3.2 a)** .

Continuamos con el **Caso 3.2.3.2** con $\Delta(5c+11)=3$

CASO 3.2.3.2

b) $\quad \mathbf{\Delta(5c+11)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 5c+11\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+7,\ 7c+15,\ c+3$, $2c+6,\ 8c+16$, $3c+8$ y $11c+22$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3,\ 3c+7,\ 7c+15,\ c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 2c+6,\ 8c+16\}$
$A_3 \supseteq \{c+4,\ 2c+5,\ 5c+11,\ 3c+8,\ 11c+22\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+18)=1 \Rightarrow 9c+18=7c+15+c+3+c$
Si $\Delta(9c+18)=2 \Rightarrow 9c+18=8c+16+2+c$
Si $\Delta(9c+18)=3 \Rightarrow 11c+22=9c+18+c+4+c$

En el siguiente esquema resumimos el **Caso 3.2.3.2**

$$\Delta(4c+9)=2\begin{cases}\Delta(5c+11)=1\begin{cases}\Delta(6c+14)=2\begin{cases}\Delta(c+5)=1\\ \\ \Delta(c+5)=3\begin{cases}\Delta(3c+8)=1\\ \\ \Delta(3c+8)=3\end{cases}\end{cases}\\ \\ \Delta(6c+14)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(5c+11)=3\end{cases}$$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 3**

10.4. Caso 4: $A_1 \supseteq \{1\}$ y $A_2 \supseteq \{2,\, 3\}$

Para cualquier *3-coloración* definida en el conjunto $\{1, 2, ..., 13c + 22\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., 13c + 22\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

A los conjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$ se le asignan los colores:

$$\Delta(A_1) = 1$$

$$\Delta(A_2) = 2$$

$$\Delta(A_3) = 3$$

siendo $A_1 \supseteq \{1\}$ y $A_2 \supseteq \{2,\, 3\}$

Vamos a demostrar que en este caso hay soluciones *monocromáticas* de la ecuación

$x_1 + x_2 + c = x_3$, siendo $x_1 \neq x_2$ y $c > 0$.

Dados los conjuntos $A_1 \supseteq \{1\}$ y $A_2 \supseteq \{2,\, 3\}$

Como $c + 5 = 2 + 3 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2. Por tanto podemos asignarle el color 1 ó 3.

En el **Caso 4.1** estudiaremos qué sucede si le asignamos el color 1, es decir si $\Delta(c + 5) = 1$ y en **Caso 4.2** estudiaremos qué sucede si le asignamos el color 3, es decir si $\Delta(c + 5) = 3$.

CASO 4.1

$A_1 \supseteq \{1,\, c + 5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3\}$

CASO 4.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3\}$
$A_3 \supseteq \{c + 5\}$

Analicemos el **Caso 4.1**:
Como $2c + 6 = 1 + (c + 5) + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.
El elemento $2c + 6$ puede pertenecer al conjunto A_2 ó al conjunto A_3, obteniéndose:

CASO 4.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\, c + 5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 2c + 6\}$

CASO 4.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

Desarrollaremos estos dos últimos casos hasta conseguir soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$,

En el **Caso 4.1.1** como $3c+8 = 2c+6+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Estudiaremos en el **Caso 4.1.1.1** qué sucede si $\Delta(3c+8) = 1$ y en el **Caso 4.1.1.2** si $\Delta(3c+8) = 3$.

CASO 4.1.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6\}$

Como el elemento $3c+8 = c+3+c+5+c$ y $2c+6 = c+3+3+c$, al elemento $c+3$ se le asigna el color 2, $\Delta(c+3) = 2$.

Además como $5c+13 = c+5+3c+8+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se obtendría el **Caso 4.1.1.1 a** si $\Delta(5c+13) = 2$ y el **Caso 4.1.1.1 b** si $\Delta(5c+13) = 3$.

Podemos representar estas distribuciones en el siguiente esquema:

$$\Delta(c+5) \neq 2 \begin{cases} \Delta(c+5) = 1 \begin{cases} \Delta(2c+6) = 2 \begin{cases} \Delta(3c+8) = 1 \begin{cases} \Delta(5c+13) = 2 \\ \Delta(5c+13) = 3 \end{cases} \\ \Delta(3c+8) = 3 \end{cases} \\ \Delta(2c+6) = 3 \end{cases} \\ \Delta(c+5) = 3 \end{cases}$$

CASO 4.1.1.1

a) $\boldsymbol{\Delta(5c+13) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+3\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+10,\ 6c+16, c+4$, $6c+14$, $2c+7,\ 3c+9$ y $4c+11$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+8,\ 4c+10,\ 6c+16,\ c+4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 5c+13,\ 6c+14\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 2c+7,\ 3c+9,\ 4c+11\}$

Según coloquemos el elemento $5c+12$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(5c+12) = 1 \Rightarrow 5c+12 = 3c+8+c+4+c$
Si $\Delta(5c+12) = 2 \Rightarrow 6c+14 = 5c+12+2+c$
Si $\Delta(5c+12) = 3 \Rightarrow 5c+12 = 3c+9+c+3+c$

CASO 4.1.1.1

b) $\boldsymbol{\Delta(5c+13) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 5c+13\}$

El elemento $3c+9 = 2c+6+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(3c+9) \neq 2$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(3c+9) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(3c+9) = 3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(3c+9) = 1}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $7c+17$ y $c+4$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* .

Como el elemento $7c+17 = 6c+15+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $6c+15$ al conjunto A_2.

Tendremos el caso **b1.1** si $\Delta(6c+15) = 1$ y el caso **b1.2** si $\Delta(6c+15) = 3$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(6c+15) = 1}$

Introducimos a al fuerza el elemento $10c+23$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+8,\ 3c+9,\ 6c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 5c+13,\ c+4,\ 10c+23\}$

Según coloquemos el elemento $8c+20$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(8c+20) = 1 \Rightarrow 8c+20 = 6c+15+c+5+c$
Si $\Delta(8c+20) = 2 \Rightarrow 8c+20 = 7c+17+3+c$
Si $\Delta(8c+20) = 3 \Rightarrow 10c+23 = 8c+20+c+3+c$

b1.2) $\boldsymbol{\Delta(6c+15) = 3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $8c+19$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos :

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+8,\ 3c+9,\ 8c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 5c+13,\ c+4,\ 6c+15\}$

Según coloquemos el elemento $4c{+}11$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4c+11) = 1 \Rightarrow 8c+19 = 3c+8+4c+11+c$
Si $\Delta(4c+11) = 2 \Rightarrow 7c+17 = 4c+11+2c+6+c$
Si $\Delta(4c+11) = 3 \Rightarrow 6c+15 = 4c+11+c+4+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(3c+9) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 5c+13,\ 3c+9\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+4$,$8c+18, 4c+11,$ $5c+12,$ $10c+23, 3c+10,$ $4c+9$ y $6c+14$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+8,\ c+4,\ 8c+18,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 5c+12,\ 10c+23,\ 3c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+3,\ 5c+13,\ 3c+9,\ 4c+9,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento 4 en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4) = 1 \Rightarrow c+5 = 1+4+c$
Si $\Delta(4) = 2 \Rightarrow 3c+10 = 2c+6+4+c$
Si $\Delta(4) = 3 \Rightarrow 5c+13 = 4c+9+4+c$

Hemos concluido la demostración del **Caso 4.1.1.1**, el esquema de esta demostración es el siguiente:

$$\Delta(5c+13) \neq 1 \begin{cases} \Delta(5c+13) = 2 \\ \Delta(5c+13) = 3 \begin{cases} \Delta(3c+9) = 1 \begin{cases} \Delta(6c+15) = 1 \\ \Delta(6c+15) = 3 \end{cases} \\ \Delta(3c+9) = 3 \end{cases} \end{cases}$$

CASO 4.1.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8\}$

El elemento $3c+9 = 2c+6+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(3c+9) \neq 2$.

Se obtendría el **Caso 4.1.1.2 a** si $\Delta(3c+9) = 1$ y el **Caso 4.1.1.2 b** si $\Delta(3c+9) = 3$

CASO 4.1.1.2

a) $\boldsymbol{\Delta(3c+9) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $c+4$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como $3c+9=2c+8+1+c$ es una solución monocromática, el elemento $2c+8$ no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(2c+8)\neq 1$.

Se obttiene el caso **a1** si $\Delta(2c+8)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(2c+8)=3$.

a1) $\quad \mathbf{\Delta(2c+8)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+6,\ 3c+10,\ 8c+22,\ 5c+15,\ 7c+19$, $5c+14,\ 3c+11$, $4c+11$ y $6c+16$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9,\ c+6,\ 3c+10,\ 8c+22\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 2c+8,\ 5c+15,\ 7c+19\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8,\ c+4,\ 5c+14,\ 3c+11,\ 4c+11,\ 6c+16\}$

Según coloquemos el elemento $10c+27$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(10c+27)=1 \Rightarrow 10c+27=8c+22+c+5+c$
Si $\Delta(10c+27)=2 \Rightarrow 10c+27=7c+19+2c+8+c$
Si $\Delta(10c+27)=3 \Rightarrow 10c+27=4c+11+6c+16+c$

a2) $\quad \mathbf{\Delta(2c+8)=3}$

Introducimos **a la fuerza** elemento 4 en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 4\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8,\ c+4,\ 2c+8\}$

Como el elemento $5c+12=3c+8+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

En el caso **a2.1** se estudia si $\Delta(5c+12)=1$ y en el caso **a2.2** si $\Delta(5c+12)=2$.

a2.1) $\quad \mathbf{\Delta(5c+12)=1}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $4c+11$ y $c+3$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9,\ 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 4,\ 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8,\ c+4,\ 2c+8,\ c+3\}$

Según coloquemos el elemento $3c+7$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(3c+7)=1 \Rightarrow 5c+12=3c+7+c+5+c$
Si $\Delta(3c+7)=2 \Rightarrow 4c+11=3c+7+4+c$
Si $\Delta(3c+7)=3 \Rightarrow 3c+7=c+4+c+3+c$

a2.2) $\mathbf{\Delta(5c+12)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+16$, $6c+14$, $7c+17$, $4c+10$, $4c+9$ y $8c+19$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9,\ 6c+16,\ 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 4,\ 5c+12,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8,\ c+4,\ 2c+8,\ 4c+10,\ 4c+9,\ 8c+19\}$

Según coloquemos el elemento $10c+23$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(10c+23)=1 \Rightarrow 10c+23=6c+14+3c+9+c$
Si $\Delta(10c+23)=2 \Rightarrow 10c+23=7c+17+2c+6+c$
Si $\Delta(10c+23)=3 \Rightarrow 10c+23=8c+19+c+4+c$

CASO 4.1.1.2

b) $\mathbf{\Delta(3c+9)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8,\ 3c+9\}$

El elemento $7c+17=3c+8+3c+9+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3, es decir $\Delta(7c+17)\neq 3$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(7c+17)=1$ y el **b2** si $\Delta(7c+17)=2$

b1) $\mathbf{\Delta(7c+17)=1}$

Como el elemento $7c+17=5c+12+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $5c+12$ al conjunto A_1.

Tendríamos el caso **b1.1** si $\Delta(5c+12)=2$ y el **b1.2** si $\Delta(5c+12)=3$.

b1.1) $\mathbf{\Delta(5c+12)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+10$,$5c+13$, $2c+7$, $8c+18$, $6c+15$ y $2c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 7c+17,\ 4c+10,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 5c+12,\ 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8,\ 3c+9,\ 8c+18,\ 6c+15,\ 2c+5\}$

Según coloquemos el elemento $6c+14$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+14)=1 \Rightarrow 6c+14=5c+13+1+c$
Si $\Delta(6c+14)=2 \Rightarrow 6c+14=5c+12+2+c$
Si $\Delta(6c+14)=3 \Rightarrow 6c+14=3c+9+2c+5+c$

b1.2) $\mathbf{\Delta(5c+12)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+4$, $12c+27$, $c+2$, $9c+21$, $4c+10$, $2c+5$, $10c+25$, $8c+18$, $5c+13$ y $6c+16$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 7c+17,\ c+4,\ 12c+27,\ c+2\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 9c+21,\ 4c+10,\ 2c+5,\ 10c+25\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8,\ 3c+9,\ 5c+12,\ 8c+18,\ 5c+13,\ 6c+16\}$

Según coloquemos el elemento 4 en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(4)=1 \Rightarrow c+5=1+4+c$
Si $\Delta(4)=2 \Rightarrow 10c+25=9c+21+4+c$
Si $\Delta(4)=3 \Rightarrow 6c+16=5c+12+4+c$

b2) $\mathbf{\Delta(7c+17)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8,\ 3c+9\}$

Como el elemento $7c+17=6c+14+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $6c+14$ al conjunto A_2.
Estudiamos el caso **b2.1** si $\Delta(6c+14)=1$ y el **b2.2** si $\Delta(6c+14)=3$.

b2.1) $\mathbf{\Delta(6c+14)=1}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $4c+11$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8,\ 3c+9,\ 4c+11\}$

Según coloquemos el elemento $8c+19$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+19)=1 \Rightarrow 8c+19=6c+14+c+5+c$
Si $\Delta(8c+19)=2 \Rightarrow 8c+19=7c+17+2+c$
Si $\Delta(8c+19)=3 \Rightarrow 8c+19=3c+8+4c+11+c$

b2.2) $\mathbf{\Delta(6c+14)=3}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $10c+23$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 10c+23\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8,\ 3c+9,\ 6c+14\}$

El elemento $2c+6=c+4+2+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $c+4$ no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(c+4)\neq 2$.

Se obtendría el caso **b2.2.1** si $\Delta(c+4)=1$ y el **b2.2.2** si $\Delta(c+4)=3$.

b2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+11$, $2c+5$, $2c+7$, $9c+22$, $8c+19$, $6c+15$, $3c+10$ y $5c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 10c+23,\ c+4,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 7c+17,\ 2c+5,\ 2c+7,\ 9c+22\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8,\ 3c+9,\ 6c+14,\ 8c+19,\ 6c+15,\ 3c+10,\ 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $12c{+}27$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(12c+27)=1 \Rightarrow 12c+27=10c+23+c+4+c$
Si $\Delta(12c+27)=2 \Rightarrow 12c+27=9c+22+2c+5+c$
Si $\Delta(12c+27)=3 \Rightarrow 12c+27=8c+19+3c+8+c$

b2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+12$, $6c+15$, $8c+18$ y $4c+11$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 10c+23,\ 5c+12,\ 6c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+6,\ 7c+17,\ 8c+18\}$
$A_3 \supseteq \{3c+8,\ 3c+9,\ 6c+14,\ c+4,\ 4c+11\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}20$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+20)=1 \Rightarrow 8c+20=6c+15+c+5+c$
Si $\Delta(8c+20)=2 \Rightarrow 8c+20=7c+17+3+c$
Si $\Delta(8c+20)=3 \Rightarrow 8c+20=3c+9+4c+11+c$

Con este último resultado hemos concluido la demostración del **Caso 4.1.1.2**, cuyo esquema es el siguiente:

$$\Delta(3c+8)=3\begin{cases}\Delta(3c+9)=1\begin{cases}\Delta(2c+8)=2\\ \Delta(2c+8)=3\begin{cases}\Delta(5c+12)=1\\ \Delta(5c+12)=2\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(3c+9)=3\begin{cases}\Delta(7c+17)=1\begin{cases}\Delta(5c+12)=2\\ \Delta(5c+12)=3\end{cases}\\ \Delta(7c+17)=2\begin{cases}\Delta(6c+14)=1\\ \Delta(6c+14)=3\begin{cases}\Delta(c+4)=1\\ \Delta(c+4)=3\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 4.1.2** con $\Delta(2c+6)=3$

CASO 4.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

Con esta distribución no obtenemos ningún elemento que no sea *libre de suma estricta* en alguno de los conjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$.

Partimos de un elemento aleatorio, por ejemplo el $3c+9$.

Se obtendría el **Caso 4.1.2.1**, si $\Delta(3c+9)=1$ el **Caso 4.1.2.2** si $\Delta(3c+9)=2$ y el **Caso 4.1.2.3** si $\Delta(3c+9)=3$.

CASO 4.1.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

El elemento $4c+10 = 3c+9+1+c$, es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(4c+10) \neq 1$.

Se obtiene el **Caso 4.1.2.1 a** si $\Delta(4c+10)=2$ y el **Caso 4.1.2.1 b** si $\Delta(4c+10)=3$.

CASO 4.1.2.1

a) $\boldsymbol{\Delta(4c+10)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

El elemento $5c + 13 = 4c + 10 + 3 + c,$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(5c + 13) \neq 2$.

Tendríamos el caso **a1** si $\Delta(5c + 13) = 1$ y el caso **a2** si $\Delta(5c + 13) = 3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(5c + 13) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c + 12,\ 6c + 14,\ 9c + 21$, $3c + 8,\ c + 4$ y $7c + 17$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c + 5,\ 3c + 9,\ 5c + 13,\ 5c + 12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c + 10,\ 6c + 14,\ 9c + 21\}$
$A_3 \supseteq \{2c + 6,\ 3c + 8,\ c + 4,\ 7c + 17\}$

Según coloquemos el elemento $4c+11$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4c + 11) = 1 \Rightarrow 5c + 12 = 4c + 11 + 1 + c$
Si $\Delta(4c + 11) = 2 \Rightarrow 9c + 21 = 4c + 10 + 4c + 11 + c$
Si $\Delta(4c + 11) = 3 \Rightarrow 7c + 17 = 4c + 11 + 2c + 6 + c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(5c + 13) = 3}$

Como $4c + 10 = 3c + 8 + 2 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c + 8$ al conjunto A_2.

En el caso **a2.1** se estudia si $\Delta(3c + 8) = 1$ y en el **a2.2** si $\Delta(3c + 8) = 3$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(3c + 8) = 1}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $2c + 7$ en el conjunto A_2 y los elementos $c + 3$ y $7c + 17$ en A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c + 5,\ 3c + 9,\ 3c + 8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c + 10,\ 2c + 7\}$
$A_3 \supseteq \{2c + 6,\ 5c + 13,\ c + 3,\ 7c + 17\}$

Según coloquemos el elemento $c+4$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c + 4) = 1 \Rightarrow 3c + 9 = c + 5 + c + 4 + c$
Si $\Delta(c + 4) = 2 \Rightarrow 2c + 7 = c + 4 + 3 + c$
Si $\Delta(c + 4) = 3 \Rightarrow 7c + 17 = 5c + 13 + c + 4 + c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(3c + 8) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c + 5,\ 3c + 9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c + 10\}$
$A_3 \supseteq \{2c + 6,\ 5c + 13,\ 3c + 8\}$

El elemento $3c + 9 = c + 5 + c + 4 + c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $c + 4$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(c + 4) \neq 1$.

Se obtendría el caso **a2.2.1** si $\Delta(c + 4) = 2$ y el caso **a2.2.2** si $\Delta(c + 4) = 3$.

a2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+14,\ 2c+7\ ,c+4$ y $8c+19$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9,\ 6c+14,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ c+4,\ 8c+19\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 5c+13,\ 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}21$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+21)=1 \Rightarrow 9c+21=6c+14+2c+7+c$
Si $\Delta(9c+21)=2 \Rightarrow 9c+21=8c+19+2+c$
Si $\Delta(9c+21)=3 \Rightarrow 9c+21=5c+13+3c+8+c$

a2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+12,\ 7c+17,\ c+3$ y $3c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9,\ 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 7c+17,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 5c+13,\ 3c+8,\ c+4,\ 3c+7\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}13$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+13)=1 \Rightarrow 6c+13=5c+12+1+c$
Si $\Delta(6c+13)=2 \Rightarrow 6c+13=4c+10+c+3+c$
Si $\Delta(6c+13)=3 \Rightarrow 6c+13=2c+6+3c+7+c$

CASO 4.1.2.1

b) $\boldsymbol{\Delta(4c+10)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+10\}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $c+4$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $3c+9=2c+8+1+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $2c+8$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(2c+8)\neq 1$.

Tendríamos el caso **b1** si $\Delta(2c+8)=2$ y el caso **b2** si $\Delta(2c+8)=3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(2c+8)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+10$, $5c+14$, $4,\ 4c+11$ y $7c+19$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9,\ 3c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ c+4,\ 2c+8,\ 5c+14\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+10,\ 4,\ 4c+11,\ 7c+19\}$

Según coloquemos el elemento $4c$+13 en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4c+13) = 1 \Rightarrow 8c+23 = 4c+13+3c+10+c$
Si $\Delta(4c+13) = 2 \Rightarrow 5c+15 = 4c+13+2+c$
Si $\Delta(4c+13) = 3 \Rightarrow 7c+19 = 4c+13+2c+6+c$

b2) $\quad \mathbf{\Delta(2c+8) = 3}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $5c+14$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $6c+16 = 5c+14+2+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(6c+16) \neq 2$.

Se obtiene el caso **b2.1** si $\Delta(6c+16) = 1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(6c+16) = 3$.

b2.1) $\quad \mathbf{\Delta(6c+16) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+18$, $9c+23$, $4c+11$,$2c+7$ y $6c+17$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9,\ 6c+16,\ 7c+18\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ c+4,\ 5c+14,\ 9c+23\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+10,\ 2c+8,\ 4c+11,\ 2c+7,\ 6c+17\}$

Según coloquemos el elemento $11c$+27 en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(11c+27) = 1 \Rightarrow 11c+27 = 7c+18+3c+9+c$
Si $\Delta(11c+27) = 2 \Rightarrow 11c+27 = 9c+23+c+4+c$
Si $\Delta(11c+27) = 3 \Rightarrow 11c+27 = 6c+17+4c+10+c$

b2.2) $\quad \mathbf{\Delta(6c+16) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+10$, $8c+21$, $2c+7$,$7c+19$, $10c+26$, $c+6$, $4c+11$ y $5c+15$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 3c+9,\ 3c+10,\ 8c+21,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ c+4,\ 5c+14,\ 7c+19,\ 10c+26,\ c+6\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+10,\ 2c+8,\ 6c+16,\ 4c+11,\ 5c+15\}$

Según coloquemos el elemento $2c$+9 en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(2c+9) = 1 \Rightarrow 3c+10 = 2c+9+1+c$
Si $\Delta(2c+9) = 2 \Rightarrow 2c+9 = c+6+3+c$
Si $\Delta(2c+9) = 3 \Rightarrow 5c+15 = 2c+9+2c+6+c$

Podemos resumir el **Caso 4.1.2.1** en el siguiente esquema:

$$\Delta(3c+9)=1\begin{cases}\Delta(4c+10)=2\begin{cases}\Delta(5c+13)=1\\ \Delta(5c+13)=3\begin{cases}\Delta(3c+8)=1\\ \Delta(3c+8)=3\begin{cases}\Delta(c+4)=2\\ \Delta(c+4)=3\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(4c+10)=3\begin{cases}\Delta(2c+8)=2\\ \Delta(2c+8)=3\begin{cases}\Delta(6c+16)=1\\ \Delta(6c+16)=3\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 4.1.2.2** con $\Delta(3c+9)=2$.

CASO 4.1.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

El elemento $4c+11=3c+9+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(4c+11)\neq 2$.

Se obtendría el **Caso 4.1.2.2 a** si $\Delta(4c+11)=1$ y el **Caso 4.1.2.2 b** si $\Delta(4c+11)=3$.

CASO 4.1.2.2

a) $\boldsymbol{\Delta(4c+11)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6\}$

El elemento $3c+9=2c+7+2+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $2c+7$ no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(2c+7)\neq 2$.

Obtenemos el caso **a1** si $\Delta(2c+7)=1$ y el caso **a2** si $\Delta(2c+7)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(2c+7)=1}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $7c+18,\ c+6,\ 4c+12,\ 4$ y $5c+12$ los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 4c+11,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ 7c+18,\ c+6\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+12,\ 4,\ 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(6c+16) = 1 \Rightarrow 6c+16 = 4c+11+c+5+c$
Si $\Delta(6c+16) = 2 \Rightarrow 7c+18 = 6c+16+2+c$
Si $\Delta(6c+16) = 3 \Rightarrow 6c+16 = 5c+12+4+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(2c+7) = 3}$

Como el elemento $5c+13 = 2c+6+2c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Se estudia el caso **a2.1** si $\Delta(5c+13) = 1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(5c+13) = 2$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+13) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+20$,$7c+18, 3c+10$, $4c+12$, $6c+16$ y $3c+8$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 4c+11,\ 5c+13,\ 8c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ 7c+18,\ 3c+10\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+7,\ 4c+12,\ 6c+16,\ 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(6c+15) = 1 \Rightarrow 8c+20 = 6c+15+c+5+c$
Si $\Delta(6c+15) = 2 \Rightarrow 7c+18 = 6c+15+3+c$
Si $\Delta(6c+15) = 3 \Rightarrow 6c+15 = 2c+7+3c+8+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+13) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+22$, $9c+23$, $c+4$,$3c+10$, $6c+16$ y $4c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 4c+11,\ 9c+22,\ 9c+23,\ c+4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ 5c+13,\ 3c+10\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 2c+7,\ 6c+16,\ 4c+12\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}19$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(7c+19) = 1 \Rightarrow 9c+23 = 7c+19+c+4+c$
Si $\Delta(7c+19) = 2 \Rightarrow 7c+19 = 3c+10+3c+9+c$
Si $\Delta(7c+19) = 3 \Rightarrow 7c+19 = 4c+12+2c+7+c$

CASO 4.1.2.2

b) $\boldsymbol{\Delta(4c+11) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11\}$

El elemento $3c+9=2c+7+2+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $2c+7$ no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(2c+7)\neq 2$.

Tendríamos el caso **b1** si $\Delta(2c+7)=1$ y el **b2** si $\Delta(2c+7)=3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(2c+7)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+15,\ c+2\,,\ c+6,\ 3c+8,\ 4c+12$ y 4 en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 2c+7,\ 5c+15,\ c+2\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ c+6,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 4c+12,\ 4\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+17)=1 \Rightarrow 7c+17=5c+15+c+2+c$
Si $\Delta(7c+17)=2 \Rightarrow 7c+17=3c+9+3c+8+c$
Si $\Delta(7c+17)=3 \Rightarrow 7c+17=4c+11+2c+6+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(2c+7)=3}$

Como el elemento $5c{+}13=2c{+}6{+}2c{+}7{+}c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

En el caso **b2.1** se estudia si $\Delta(5c+13)=1$ y en el caso **b2.2** si $\Delta(5c+13)=2$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+13)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 2c+7\}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $4c+12$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 2c+7,\ 4c+12\}$

Como el elemento $6c+14=5c+13+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **b2.1.1** si $\Delta(6c+14)=2$ y el caso **b2.1.2** si $\Delta(6c+14)=3$.

b2.1.1) $\boldsymbol{\Delta(6c+14)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+17,\ 8c+18$ y $5c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 5c+13,\ 7c+17\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ 6c+14,\ 8c+18\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 2c+7,\ 4c+12,\ 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}4$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+4) = 1 \Rightarrow 7c + 17 = c + 4 + 5c + 13 + c$
Si $\Delta(c+4) = 2 \Rightarrow 8c + 18 = 6c + 14 + c + 4 + c$
Si $\Delta(c+4) = 3 \Rightarrow 4c + 11 = 2c + 7 + c + 4 + c$

b2.1.2) $\boldsymbol{\Delta(6c+14) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c{+}17, 9c{+}21$, $2c{+}8$, $3c{+}8$, $c{+}4$, $8c{+}18$, $11c{+}26, 5c{+}12$ y $9c + 22$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 5c+13,\ 7c+17,\ 9c+21,\ 2c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ 3c+8,\ c+4,\ 8c+18,\ 11c+26\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 2c+7,\ 4c+12,\ 6c+14,\ 5c+12,\ 9c+22\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}5$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(2c+5) = 1 \Rightarrow 5c + 13 = 2c + 5 + 2c + 8 + c$
Si $\Delta(2c+5) = 2 \Rightarrow 3c + 8 = 2c + 5 + 3 + c$
Si $\Delta(2c+5) = 3 \Rightarrow 5c + 12 = 2c + 5 + 2c + 7 + c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+13) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 2c+7\}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $c + 4$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ c+4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 2c+7\}$

Como el elemento $6c + 15 = 5c + 13 + 2 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **b2.2.1** si $\Delta(6c+15) = 1$ y el caso **b2.2.2** si $\Delta(6c+15) = 3$.

b2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(6c+15) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c + 25$, $3c + 8$, $7c + 16$, $9c + 21$, $4c + 10$ y $8c + 19$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ c+4,\ 6c+15,\ 11c+25,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ 5c+13,\ 7c+16,\ 9c+21\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 2c+7,\ 4c+10,\ 8c+19\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}12$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(5c+12) = 1 \Rightarrow 5c+12 = 3c+8+c+4+c$
Si $\Delta(5c+12) = 2 \Rightarrow 9c+21 = 5c+12+3c+9+c$
Si $\Delta(5c+12) = 3 \Rightarrow 8c+19 = 5c+12+2c+7+c$

b2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(6c+15) = 3}$

Introducimos **a la fuerza** $9c+22$ y $7c+17$ en los conjuntos A_1 y A_2 elementos *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ c+4,\ 9c+22\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ 5c+13,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 4c+11,\ 2c+7,\ 6c+15\}$

Según coloquemos el elemento $11c+26$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$
Si $\Delta(11c+26) = 1 \Rightarrow 11c+26 = 9c+22+c+4+c$
Si $\Delta(11c+26) = 2 \Rightarrow 11c+26 = 7c+17+3c+9+c$
Si $\Delta(11c+26) = 3 \Rightarrow 11c+26 = 6c+15+4c+11+c$

Resumimos el **Caso 4.1.2.2** en el siguiente esquema:

$$\Delta(3c+9)=2 \begin{cases} \Delta(4c+11)=1 \begin{cases} \Delta(2c+7)=1 \\ \Delta(2c+7)=3 \begin{cases} \Delta(5c+13)=1 \\ \Delta(5c+13)=2 \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(4c+11)=3 \begin{cases} \Delta(2c+7)=1 \\ \Delta(2c+7)=3 \begin{cases} \Delta(5c+13)=1 \begin{cases} \Delta(6c+14)=2 \\ \Delta(6c+14)=3 \end{cases} \\ \Delta(5c+13)=2 \begin{cases} \Delta(6c+15)=1 \\ \Delta(6c+15)=3 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 4.1.2.3** con $\Delta(3c+9) = 3$.

CASO 4.1.2.3

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+9\}$

El elemento $6c+15=2c+6+3c+9+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3, es decir $\Delta(6c+15)\neq 3$.

Se obtendría el **Caso 4.1.2.3 a** si $\Delta(6c+15)=1$ y el **Caso 4.1.2.3 b** si $\Delta(6c+15)=2$.

CASO 4.1.2.3

a) $\boldsymbol{\Delta(6c+15)=1}$

$A_1\supseteq\{1,\ c+5,\ 6c+15\}$
$A_2\supseteq\{2,\ 3\}$
$A_3\supseteq\{2c+6,\ 3c+9\}$

El elemento $6c+15=4c+10+c+5+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $4c+10$ no pertenece al conjunto A_1, es decir $\Delta(4c+10)\neq 1$.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(4c+10)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(4c+10)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(4c+10)=2}$

El elemento $4c+10=3c+8+2+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $3c+8$ no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(3c+8)\neq 2$.

Se obtendría el caso **a1.1** si $\Delta(3c+8)=1$ y el **a1.2** si $\Delta(3c+8)=3$.

a1.1) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+4$, $2c+7$, $8c+19$, $5c+13$ y $7c+16$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1\supseteq\{1,\ c+5,\ 6c+15,\ 3c+8,\ c+4\}$
$A_2\supseteq\{2,\ 3,\ 4c+10,\ 2c+7,\ 8c+19\}$
$A_3\supseteq\{2c+6,\ 3c+9,\ 5c+13,\ 7c+16\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}3$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(c+3)=1\Rightarrow 3c+8=c+3+c+5+c$
Si $\Delta(c+3)=2\Rightarrow 4c+10=c+3+2c+7+c$
Si $\Delta(c+3)=3\Rightarrow 7c+16=c+3+5c+13+c$

a1.2) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=3}$

Como el elemento $7c{+}17=3c{+}9{+}3c{+}8{+}c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Se estudia el caso **a1.2.1** si $\Delta(7c+17)=1$ y el caso **a1.2.2** si $\Delta(7c+17)=2$.

a1.2.1) $\boldsymbol{\Delta(7c+17)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c{+}7$, $8c{+}18$, $10c{+}22$, $5c{+}12$ y $7c{+}16$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1\supseteq\{1,\ c+5,\ 6c+15,\ 7c+17,\ 3c+7\}$
$A_2\supseteq\{2,\ 3,\ 4c+10,\ 8c+18,\ 10c+22\}$
$A_3\supseteq\{2c+6,\ 3c+9,\ 3c+8,\ 5c+12,\ 7c+16\}$

Según coloquemos el elemento $11c{+}24$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(11c+24) = 1 \Rightarrow 11c+24 = 7c+17+3c+7+c$
Si $\Delta(11c+24) = 2 \Rightarrow 11c+24 = 10c+22+2+c$
Si $\Delta(11c+24) = 3 \Rightarrow 11c+24 = 7c+16+3c+8+c$

a1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(7c+17) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+12$, $5c+14$, $8c+20$ y $c+3$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 6c+15,\ 4c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 7c+17,\ 5c+14\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+9,\ 3c+8,\ 8c+20,\ c+3\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(6c+17) = 1 \Rightarrow 6c+17 = 4c+12+c+5+c$
Si $\Delta(6c+17) = 2 \Rightarrow 6c+17 = 5c+14+3+c$
Si $\Delta(6c+17) = 3 \Rightarrow 8c+20 = 6c+17+c+3+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(4c+10) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 6c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+9,\ 4c+10\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+19$, $7c+16$, $c+4$ y $9c+20$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 6c+15,\ 8c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 7c+16,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+9,\ 4c+10,\ 9c+20\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}14$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(6c+14) = 1 \Rightarrow 8c+19 = 6c+14+c+5+c$
Si $\Delta(6c+14) = 2 \Rightarrow 7c+16 = 6c+14+2+c$
Si $\Delta(6c+14) = 3 \Rightarrow 9c+20 = 6c+14+2c+6+c$

b) $\boldsymbol{\Delta(6c+15) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 6c+15\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+9\}$

El elemento $6c+15 = 5c+12+3+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $5c+12$ no pertenece al conjunto A_2, es decir $\Delta(5c+12) \neq 2$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(5c+12) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(5c+12) = 3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+8$, $4c+11$, $7c+17$ y $5c+13$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 5c+12,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 6c+15,\ 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+9,\ 7c+17,\ 5c+13\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}4$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+4) = 1 \Rightarrow 5c+12 = c+4+3c+8+c$
Si $\Delta(c+4) = 2 \Rightarrow 6c+15 = c+4+4c+11+c$
Si $\Delta(c+4) = 3 \Rightarrow 7c+17 = c+4+5c+13+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=3}$

El elemento $8c+18 = 5c+12+2c+6+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $8c+18$ no pertenece al conjunto A_3, es decir $\Delta(8c+18) \neq 3$.
Obtenemos el caso **b2.1** si $\Delta(8c+18) = 1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(8c+18) = 2$

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(8c+18)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+8$, $9c+21$, $10c+23$ y $7c+17$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 8c+18,\ 3c+8,\ 9c+21\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 6c+15,\ 10c+23\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+9,\ 5c+12,\ 7c+17\}$

Según coloquemos el elemento $11c{+}26$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(11c+26) = 1 \Rightarrow 11c+26 = 9c+21+c+5+c$
Si $\Delta(11c+26) = 2 \Rightarrow 11c+26 = 10c+23+3+c$
Si $\Delta(11c+26) = 3 \Rightarrow 11c+26 = 7c+17+3c+9+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(8c+18)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+21$, $c+3$, $3c+7$, $10c+22$ y $7c+16$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+5,\ 9c+21,\ c+3,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 6c+15,\ 8c+18,\ 10c+22\}$
$A_3 \supseteq \{2c+6,\ 3c+9,\ 5c+12,\ 7c+16\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}4$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+4) = 1 \Rightarrow 3c+7 = c+4+c+3+c$
Si $\Delta(c+4) = 2 \Rightarrow 10c+22 = c+4+8c+18+c$
Si $\Delta(c+4) = 3 \Rightarrow 7c+16 = c+4+5c+12+c$

Resumimos el **Caso 4.1.2.3** en el siguiente esquema:

$$\Delta(3c+9)=3\begin{cases}\Delta(6c+15)=1\begin{cases}\Delta(4c+10)=2\begin{cases}\Delta(3c+8)=1\\ \Delta(3c+8)=3\begin{cases}\Delta(7c+17)=1\\ \Delta(7c+17)=2\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(4c+10)=3\end{cases}\\ \Delta(6c+15)=2\begin{cases}\Delta(5c+12)=1\\ \Delta(5c+12)=3\begin{cases}\Delta(8c+18)=1\\ \Delta(8c+18)=2\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Hemos concluido con la demostración del **Caso 4.1**

Continuamos con el **Caso 4.2** con $\Delta(c+5)=3$

CASO 4.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3\}$
$A_3 \supseteq \{c+5\}$

Con esta distribución no obtenemos ningún elemento que no sea *libre de suma estricta* en alguno de los conjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$.

Partimos de un elemento arbitrario, por ejemplo el $4c+10$.

Analizaremos el **Caso 4.2.1** si $\Delta(4c+10)=1$, el **Caso 4.2.2** si $\Delta(4c+10)=2$ y el **Caso 4.2.** si $\Delta(4c+10)=3$

CASO 4.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3\}$
$A_3 \supseteq \{c+5\}$

El elemento $4c+10=3c+9+1+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $3c+9$ no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(3c+9)\neq 1$.

Se obtendría el **Caso 4.2.1.1** si $\Delta(3c+9)=1$ y el **Caso 4.2.1.2** si $\Delta(3c+9)=2$.

CASO 4.2.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+5\}$

Como el elemento $3c+9=2+2c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Estudiaremos el **Caso 4.2.1.1 a** si $\Delta(2c+7)=1$ y el **Caso 4.2.1.1 b** si $\Delta(2c+7)=3$.

CASO 4.2.1.1

a) $\boldsymbol{\Delta(2c+7)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+5\}$

El elemento $2c+7=c+6+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+6$ al conjunto A_1, es decir $\Delta(c+6)\neq 1$.

Se obtendría el caso **a1** si $\Delta(c+6)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(c+6)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(c+6)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+14,\ 2c+9$, $c+6,\ 3c+8,\ 8c+21$, $c+3,\ 7c+17,$ 4 y $7c+19$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 2c+7,\ 5c+14,\ 2c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ c+6,\ 3c+8,\ 8c+21\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ c+3,\ 7c+17,\ 4,\ 7c+19\}$

Según coloquemos el elemento $6c+15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+15)=1 \Rightarrow 6c+15=5c+14+1+c$
Si $\Delta(6c+15)=2 \Rightarrow 8c+21=6c+15+c+6+c$
Si $\Delta(6c+15)=3 \Rightarrow 7c+19=6c+15+4+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(c+6)=3}$

Como el elemento $7c+17=4c+10+2c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se estudia el caso **a2.1** si $\Delta(7c+17)=2$ y el caso **a2.2** si $\Delta(7c+17)=3$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(7c+17)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+14, 8c+20,$ $c+4$, $c+3,$ $5c+13$, $3c+8,$ $6c+15$ y $3c+10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 2c+7,\ 5c+14,\ 8c+20,\ c+4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ 7c+17,\ c+3,\ 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ c+6,\ 3c+8,\ 6c+15,\ 3c+10\}$

Según coloquemos el elemento $2c+5$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+5)=1 \Rightarrow 2c+5=c+4+1+c$
Si $\Delta(2c+5)=2 \Rightarrow 2c+5=c+3+2+c$
Si $\Delta(2c+5)=3 \Rightarrow 6c+15=2c+5+3c+10+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(7c+17)=3}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $5c+11$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $7c+17=5c+12+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $5c+12$ al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **a2.2.1** si $\Delta(5c+12)=1$ y el caso **a2.2.2** si $\Delta(5c+12)=2$.

a2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+5, 4c+11$ y $3c+8$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 2c+7,\ 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ 5c+11,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ c+6,\ 7c+17,\ 4c+11,\ 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento $c+3$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(c+3)=1 \Rightarrow 4c+10=2c+7+c+3+c$
Si $\Delta(c+3)=2 \Rightarrow 2c+5=c+3+2+c$
Si $\Delta(c+3)=3 \Rightarrow 3c+8=c+5+c+3+c$

a2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+20$, $9c+22$, $8c+19$, $c+3$, $6c+13$ y $4c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 2c+7,\ 9c+20,\ 9c+22\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9,\ 5c+11,\ 5c+12,\ 8c+19\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ c+6,\ 7c+17,\ c+3,\ 6c+13,\ 4c+12\}$

Según coloquemos el elemento $6c+15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+15)=1 \Rightarrow 9c+22=6c+15+2c+7+c$
Si $\Delta(6c+15)=2 \Rightarrow 6c+15=5c+12+3+c$
Si $\Delta(6c+15)=3 \Rightarrow 6c+15=4c+12+c+3+c$

CASO 4.2.1.1

b) $\boldsymbol{\Delta(2c+7)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 2c+7\}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $4c + 12$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $5c + 13 = 4c + 12 + 1 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(5c + 13) = 2$ y el caso **b2** si $\Delta(5c + 13) = 3$.

b1) $\mathbf{\Delta(5c + 13) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c + 15$, $12c + 29$, $3c + 8$, $11c + 27$, $7c + 19$, $9c + 22$ y $5c + 14$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c + 10,\ 4c + 12,\ 6c + 15,\ 12c + 29,\ 3c + 8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c + 9,\ 5c + 13,\ 11c + 27,\ 7c + 19\}$
$A_3 \supseteq \{c + 5,\ 2c + 7,\ 9c + 22,\ 5c + 14\}$

Según coloquemos el elemento $8c+21$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(8c + 21) = 1 \Rightarrow 12c + 29 = 8c + 21 + 3c + 8 + c$
Si $\Delta(8c + 21) = 2 \Rightarrow 8c + 21 = 7c + 19 + 2 + c$
Si $\Delta(8c + 21) = 3 \Rightarrow 8c + 21 = 5c + 14 + 2c + 7 + c$

b2) $\mathbf{\Delta(5c + 13) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c + 6$, $8c + 20$, $c + 3$, $7c + 18$, $3c + 8$, $9c + 21$, $6c + 17$, $11c + 26$, $3c + 10$ y $2c + 9$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c + 10,\ 4c + 12,\ 2c + 6,\ 8c + 20,\ c + 3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c + 9,\ 7c + 18,\ 3c + 8,\ 9c + 21,\ 6c + 17\}$
$A_3 \supseteq \{c + 5,\ 2c + 7,\ 5c + 13,\ 11c + 26,\ 3c + 10,\ 2c + 9\}$

Según coloquemos el elemento $2c+4$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(2c + 4) = 1 \Rightarrow 2c + 4 = c + 3 + 1 + c$
Si $\Delta(2c + 4) = 2 \Rightarrow 9c + 21 = 2c + 4 + 6c + 17 + c$
Si $\Delta(2c + 4) = 3 \Rightarrow 5c + 13 = 2c + 4 + 2c + 9 + c$

Podemos resumir el **Caso 4.2.1.1** en el siguiente esquema:

$$\Delta(3c+9)=2\begin{cases}\Delta(2c+7)=1\begin{cases}\Delta(c+6)=2\\ \Delta(c+6)=3\begin{cases}\Delta(7c+17)=2\\ \Delta(7c+17)=3\begin{cases}\Delta(5c+12)=1\\ \Delta(5c+12)=2\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(2c+7)=3\begin{cases}\Delta(5c+13)=2\\ \Delta(5c+13)=3\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el siguiente **Caso 4.2.1.2** con $\Delta(3c+9)=3$.

CASO 4.2.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+9\}$

Como el elemento $5c+11 = 4c+10+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se obtendría el **Caso 4.2.1.2 a** si $\Delta(5c+11)=2$ y el **Caso 4.2.1.2 b** si $\Delta(5c+11)=3$.

CASO 4.2.1.2

a) $\boldsymbol{\Delta(5c+11)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+9\}$

El elemento $6c+14 = 5c+11+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(6c+14) \neq 2$.

Estudiaremos el caso **a1** si $\Delta(6c+14)=1$ y el caso **a2** si $\Delta(6c+14)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(6c+14)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+20$, $c+4$, $11c+24$, $7c+15$ y $2c+6$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 6c+14,\ 9c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 5c+11,\ c+4,\ 11c+24\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+9,\ 7c+15,\ 2c+6\}$

Según coloquemos el elemento $10c+21$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(10c+21)=1 \Rightarrow 10c+21=9c+20+1+c$
Si $\Delta(10c+21)=2 \Rightarrow 11c+24=10c+21+3+c$
Si $\Delta(10c+21)=3 \Rightarrow 10c+21=7c+15+2c+6+c$

a2) $\quad \mathbf{\Delta(6c+14)=3}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $4c+9$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $6c+14=3c+9+2c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+5$ al conjunto A_3.

Se estudia el caso **a2.1** si $\Delta(2c+5)=1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(2c+5)=2$.

a2.1) $\quad \mathbf{\Delta(2c+5)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+4$, $3c+6$ y $7c+15$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 4c+10,\, 4c+9,\, 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 5c+11,\, c+4,\, 3c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 3c+9,\, 6c+14,\, 7c+15\}$

Según coloquemos el elemento $5c+10$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(5c+10)=1 \Rightarrow 5c+10=4c+9+1+c$
Si $\Delta(5c+10)=2 \Rightarrow 5c+10=3c+6+c+4+c$
Si $\Delta(5c+10)=3 \Rightarrow 7c+15=5c+10+c+5+c$

a2.2) $\quad \mathbf{\Delta(2c+5)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+3$ y $3c+8$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 4c+10,\, 4c+9,\, c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 5c+11,\, 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 3c+9,\, 6c+14,\, 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento $2c+6$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+6)=1 \Rightarrow 4c+9=2c+6+c+3+c$
Si $\Delta(2c+6)=2 \Rightarrow 5c+11=2c+6+2c+5+c$
Si $\Delta(2c+6)=3 \Rightarrow 6c+14=2c+6+3c+8+c$

CASO 4.2.1.2

b) $\quad \mathbf{\Delta(5c+11)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 3c+9,\, 5c+11\}$

El elemento $7c + 16 = 5c + 11 + c + 5 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3, es decir $\Delta(7c + 16) \neq 3$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(7c + 16) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(7c + 16) = 3$.

b1) $\mathbf{\Delta(7c + 16) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c + 10,\ 7c + 16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3\}$
$A_3 \supseteq \{c + 5,\ 3c + 9,\ 5c + 11\}$

El elemento $7c + 16 = 4c + 10 + 2c + 6 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c + 6$ al conjunto A_1, es decir $\Delta(2c + 6) \neq 1$.

Tendríamos el caso **b1.1** si $\Delta(2c + 6) = 2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(2c + 6) = 3$

b1.1) $\mathbf{\Delta(2c + 6) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+4$, $9c+20$ y $8c+17$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c + 10,\ 7c + 16,\ c + 4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c + 6,\ 9c + 20\}$
$A_3 \supseteq \{c + 5,\ 3c + 9,\ 5c + 11,\ 8c + 17\}$

Según coloquemos el elemento $12c+26$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(12c + 26) = 1 \Rightarrow 12c + 26 = 7c + 16 + 4c + 10 + c$
Si $\Delta(12c + 26) = 2 \Rightarrow 12c + 26 = 9c + 20 + 2c + 6 + c$
Si $\Delta(12c + 26) = 3 \Rightarrow 12c + 26 = 8c + 17 + 3c + 9 + c$

b1.2) $\mathbf{\Delta(2c + 6) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c + 20, 5c + 13,\ 5c + 12$, $8c + 17$, $6c + 15$, $c + 4,\ 6c + 14$, $8c + 19$ y $c + 3$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c + 10,\ 7c + 16,\ 9c + 20,\ 5c + 13,\ 5c + 12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 8c + 17,\ 6c + 15,\ c + 4,\ 6c + 14\}$
$A_3 \supseteq \{c + 5,\ 3c + 9,\ 5c + 11,\ 2c + 6,\ 8c + 19,\ c + 3\}$

Según coloquemos el elemento $4c+11$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4c + 11) = 1 \Rightarrow 5c + 12 = 4c + 11 + 1 + c$
Si $\Delta(4c + 11) = 2 \Rightarrow 6c + 15 = 4c + 11 + c + 4 + c$
Si $\Delta(4c + 11) = 3 \Rightarrow 4c + 11 = 2c + 6 + c + 5 + c$

b2) $\mathbf{\Delta(7c + 16) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c + 10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 7c + 16\}$
$A_3 \supseteq \{c + 5,\ 3c + 9,\ 5c + 11\}$

El elemento $5c+11=3c+9+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_3, es decir $\Delta(c+4)\neq 3$.

Se obtiene el caso **b2.1** si $\Delta(c+4)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(c+4)=2$.

b2.1) $\quad \boldsymbol{\Delta(c+4)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+19$, $9c+20$ y $6c+14$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ c+4,\ 8c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 7c+16,\ 9c+20\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+9,\ 5c+11,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $10c{+}23$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(10c+23)=1 \Rightarrow 10c+23=8c+19+c+4+c$
Si $\Delta(10c+23)=2 \Rightarrow 10c+23=9c+20+3+c$
Si $\Delta(10c+23)=3 \Rightarrow 10c+23=6c+14+3c+9+c$

b2.2) $\quad \boldsymbol{\Delta(c+4)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+20$, $6c+14$, $4c+11$, $5c+13$,$8c+19$, $2c+6$ y $c+3$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 9c+20,\ 6c+14,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 7c+16,\ c+4,\ 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+9,\ 5c+11,\ 8c+19,\ 2c+6,\ c+3\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}12$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(5c+12)=1 \Rightarrow 5c+12=4c+11+1+c$
Si $\Delta(5c+12)=2 \Rightarrow 7c+16=5c+12+c+4+c$
Si $\Delta(5c+12)=3 \Rightarrow 5c+12=3c+9+c+3+c$

Resumimos el **Caso 4.2.1.2** en el siguiente esquema:

$$\Delta(3c+9)=3\begin{cases}\Delta(5c+11)=2\begin{cases}\Delta(6c+14)=1\\ \Delta(6c+14)=3\begin{cases}\Delta(2c+5)=1\\ \Delta(2c+5)=2\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(5c+11)=3\begin{cases}\Delta(7c+16)=1\begin{cases}\Delta(2c+6)=2\\ \Delta(2c+6)=3\end{cases}\\ \Delta(7c+16)=2\begin{cases}\Delta(c+4)=1\\ \Delta(c+4)=2\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **caso 4.2.2** con $\Delta(4c+10)=2$

CASO 4.2.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+5\}$

El elemento $4c+10=3c+8+2+c$ es una solución monocromática, el elemento $3c+8$ no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(3c+8)\neq 2$.

Estudiaremos el **Caso 4.2.2.1** si $\Delta(3c+8)=1$ y el **Caso 4.2.2.2** si $\Delta(3c+8)=3$ Obteniéndose:

CASO 4.2.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+5\}$

Como el elemento $3c+8=2c+7+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Analizaremos el **Caso 4.2.2.1 a** si $\Delta(2c+7)=2$ y el **Caso 4.2.2.1 b** si $\Delta(2c+7)=3$.

CASO 4.2.2.1

a) $\boldsymbol{\Delta(2c+7)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{c+5\}$

El elemento $2c+7=c+4+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento

$c+4$ al conjunto A_2, es decir $\Delta(c+4) \neq 2$.

Se obtendría el caso **a1** si $\Delta(c+4) = 1$ y el caso **a2** si $\Delta(c+4) = 3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(c+4) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+17$, $10c+23$, $9c+21$, $2c+6$, $5c+12$, $3c+9$ y $8c+18$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ c+4,\ 7c+17,\ 10c+23\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 2c+7,\ 9c+21,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 5c+12,\ 3c+9,\ 8c+18\}$

Según coloquemos el elemento $12c+27$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(12c+27) = 1 \Rightarrow 12c+27 = 10c+23+c+4+c$
Si $\Delta(12c+27) = 2 \Rightarrow 12c+27 = 9c+21+2c+6+c$
Si $\Delta(12c+27) = 3 \Rightarrow 12c+27 = 8c+18+3c+9+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(c+4) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+9$, $5c+13$, $8c+19$, $9c+21$, $7c+17$, $6c+14$ y $4c+11$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 3c+9,\ 5c+13,\ 8c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 2c+7,\ 9c+21\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ c+4,\ 7c+17,\ 6c+14,\ 4c+11\}$

Según coloquemos el elemento $12c+28$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(12c+28) = 1 \Rightarrow 12c+28 = 8c+19+3c+9+c$
Si $\Delta(12c+28) = 2 \Rightarrow 12c+28 = 9c+21+2c+7+c$
Si $\Delta(12c+28) = 3 \Rightarrow 12c+28 = 4c+11+7c+17+c$

b) $\boldsymbol{\Delta(2c+7) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 2c+7\}$

El elemento $5c+13 = 4c+10+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2, es decir $\Delta(5c+13) \neq 2$.

Tendríamos el caso **b1** si $\Delta(5c+13) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(5c+13) = 3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(5c+13) = 1}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $4c+12$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $4c+12 = 3c+9+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c+9$ al conjunto A_2.

Se estudia el caso **b1.1** si $\Delta(3c+9) = 1$ y el caso **b1.2** si $\Delta(3c+9) = 3$.

b1.1) $\mathbf{\Delta(3c+9)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+15,\ 12c+29,\ 4c+11$, $7c+17,\ 2c+6$, $9c+22,\ 5c+14,$ $8c+20$ y $c+4$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+13,\ 3c+9,\ 6c+15,\ 12c+29,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 4c+12,\ 7c+17,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 2c+7,\ 9c+22,\ 5c+14,\ 8c+20,\ c+4\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+18)=1 \Rightarrow 12c+29=7c+18+4c+11+c$
Si $\Delta(7c+18)=2 \Rightarrow 7c+18=4c+12+2c+6+c$
Si $\Delta(7c+18)=3 \Rightarrow 7c+18=5c+14+c+4+c$

b1.2) $\mathbf{\Delta(3c+9)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+14$, $11c+27$ y $9c+22$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+13,\ 5c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 4c+12,\ 11c+27\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 2c+7,\ 3c+9,\ 9c+22\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+15)=1 \Rightarrow 6c+15=5c+14+1+c$
Si $\Delta(6c+15)=2 \Rightarrow 11c+27=6c+15+4c+12+c$
Si $\Delta(6c+15)=3 \Rightarrow 9c+22=6c+15+2c+7+c$

b2) $\mathbf{\Delta(5c+13)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 2c+7,\ 5c+13\}$

Como el elemento $5c+13=2c+6+2c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+6$ al conjunto A_3.

Obtenemos el caso **b2.1** si $\Delta(2c+6)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(2c+6)=2$.

b2.1) $\mathbf{\Delta(2c+6)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+12,\ 10c+23$, $6c+14$, $9c+20$, $3c+7,\ 8c+18$ y $7c+17$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 2c+6,\ 5c+12,\ 10c+23\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 6c+14,\ 9c+20\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 2c+7,\ 5c+13,\ 3c+7,\ 8c+18,\ 7c+17\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}4$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+4) = 1 \Rightarrow 5c+12 = c+4+3c+8+c$
Si $\Delta(c+4) = 2 \Rightarrow 6c+14 = c+4+4c+10+c$
Si $\Delta(c+4) = 3 \Rightarrow 7c+17 = c+4+5c+13+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(2c+6) = 2}$

Como el elemento $8c{+}20 = 5c{+}13{+}2c{+}7{+}c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **b2.2.1** si $\Delta(8c+20) = 1$ y el caso **b2.2.2** si $\Delta(8c+20) = 2$.

b2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(8c+20) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+18$, $c+3$, $4c+12$ y $3c+10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 8c+20,\ 7c+18,\ c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 2c+6,\ 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 2c+7,\ 5c+13,\ 3c+10\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(5c+15) = 1 \Rightarrow 7c+18 = 5c+15+c+3+c$
Si $\Delta(5c+15) = 2 \Rightarrow 5c+15 = 4c+12+3+c$
Si $\Delta(5c+15) = 3 \Rightarrow 5c+15 = 3c+10+c+5+c$

b2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(8c+20) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+18$, $9c+23$, $5c+15$ y $3c+10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 7c+18,\ 9c+23\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 2c+6,\ 8c+20,\ 5c+15\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 2c+7,\ 5c+13,\ 3c+10\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(6c+17) = 1 \Rightarrow 7c+18 = 6c+17+1+c$
Si $\Delta(6c+17) = 2 \Rightarrow 6c+17 = 5c+15+2+c$
Si $\Delta(6c+17) = 3 \Rightarrow 6c+17 = 3c+10+2c+7+c$

Resumimos el **Caso 4.2.2.1** en el siguiente esquema:

$$\Delta(3c+8)=1\begin{cases}\Delta(2c+7)=2\begin{cases}\Delta(c+4)=1\\ \Delta(c+4)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(2c+7)=3\begin{cases}\Delta(5c+13)=1\begin{cases}\Delta(3c+9)=1\\ \Delta(3c+9)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(5c+13)=3\begin{cases}\Delta(2c+6)=1\\ \\ \Delta(2c+6)=2\begin{cases}\Delta(8c+20)=1\\ \Delta(8c+20)=2\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 4.2.2.2** con $\Delta(3c+8)=3$

CASO 4.2.2.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+8\}$

El elemento $5c+13$ se introduce **a la fuerza** en el conjunto A_1, es decir $\Delta(5c+13)=1$. Como el elemento $5c+13=4c+12+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+12$ al conjunto A_1.

Analizaremos en el **Caso 4.2.2.2 a** qué sucede si $\Delta(4c+12)=2$ y en el **Caso 4.2.2.2 b** qué sucede si $\Delta(4c+12)=3$.

CASO 4.2.2.2

a) $\boldsymbol{\Delta(4c+12)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+8\}$

El elemento $4c+12=3c+9+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c+9$ al conjunto A_2, es decir $\Delta(3c+9)\neq 2$.

Se obtendría el caso **a1** si $\Delta(3c+9)=1$ y el caso **a2** si $\Delta(3c+9)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(3c+9)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+14$, $11c+27$, $9c+22$ y $6c+15$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13,\ 3c+9,\ 5c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 4c+12,\ 11c+27\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+8,\ 9c+22,\ 6c+15\}$

Como el elemento $3c+8 = c+5+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+3$ al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **a1.1** si $\Delta(c+3) = 1$ y el caso **a1.2** si $\Delta(c+3) = 2$.

a1.1) $\boldsymbol{\Delta(c+3) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+3,\ 2c+7$ y $7c+17$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13,\ 3c+9,\ 5c+14,\ c+3,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 4c+12,\ 11c+27,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+8,\ 9c+22,\ 6c+15\}$

Según coloquemos el elemento $8c+20$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(8c+20) = 1 \Rightarrow 8c+20 = 5c+13+2c+7+c$
Si $\Delta(8c+20) = 2 \Rightarrow 8c+20 = 7c+17+3+c$
Si $\Delta(8c+20) = 3 \Rightarrow 8c+20 = 6c+15+c+5+c$

a1.2) $\boldsymbol{\Delta(c+3) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+7,\ 7c+17$, $8c+20$, $6c+16$, $10c+24$ y $c+4$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13,\ 3c+9,\ 5c+14,\ 2c+7,\ 7c+17\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 4c+12,\ 11c+27,\ c+3,\ 8c+20,\ 6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+8,\ 9c+22,\ 6c+15,\ 10c+24,\ c+4\}$

Según coloquemos el elemento $11c+26$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(11c+26) = 1 \Rightarrow 11c+26 = 3c+9+7c+17+c$
Si $\Delta(11c+26) = 2 \Rightarrow 11c+26 = 4c+10+6c+16+c$
Si $\Delta(11c+26) = 3 \Rightarrow 11c+26 = 9c+22+c+4+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(3c+9) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+8,\ 3c+9\}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $5c+14$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13,\ 5c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+8,\ 3c+9\}$

Como el elemento $3c+9=c+5+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **a2.1** si $\Delta(c+4)=1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(c+4)=2$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+7$, $7c+17$, $3c+10$ y $6c+15$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13,\ 5c+14,\ c+4,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 4c+12,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+8,\ 3c+9,\ 3c+10,\ 6c+15\}$

Según coloquemos el elemento $8c+20$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+20)=1 \Rightarrow 8c+20=5c+13+2c+7+c$
Si $\Delta(8c+20)=2 \Rightarrow 8c+20=7c+17+3+c$
Si $\Delta(8c+20)=3 \Rightarrow 8c+20=6c+15+c+5+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+6$, $6c+14$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13,\ 5c+14,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ 4c+12,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+8,\ 3c+9,\ 6c+14,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $3c+7$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(3c+7)=1 \Rightarrow 3c+7=2c+6+1+c$
Si $\Delta(3c+7)=2 \Rightarrow 4c+10=3c+7+3+c$
Si $\Delta(3c+7)=3 \Rightarrow 6c+14=3c+7+2c+7+c$

CASO 4.2.2.2

b) $\boldsymbol{\Delta(4c+12)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+8,\ 4c+12\}$

El elemento $3c+8=c+5+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+3$ al conjunto A_3, es decir $\Delta(c+3)\neq 3$.

Se obtendría el caso **b1** si $\Delta(c+3)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(c+3)=2$

b1) $\boldsymbol{\Delta(c+3)=1}$

Como el elemento $7c+16=5c+13+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1, es decir $\Delta(7c+16)\neq 1$.

Se obtiene el caso **b1.1** si $\Delta(7c+16)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(7c+16)=3$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(7c+16)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+19$ y $6c+14$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 5c+13,\, c+3,\, 8c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 4c+10,\, 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 3c+8,\, 4c+12,\, 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}6$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+6)=1 \Rightarrow 8c+19=5c+13+2c+6+c$
Si $\Delta(2c+6)=2 \Rightarrow 7c+16=4c+10+2c+6+c$
Si $\Delta(2c+6)=3 \Rightarrow 6c+14=3c+8+2c+6+c$

b1.2) $\boldsymbol{\Delta(7c+16)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 5c+13,\, c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 3c+8,\, 4c+12,\, 7c+16\}$

Introducimos a al fuerza el elemento $2c+4$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $7c+16=5c+11+c+5+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer el elemento $5c+11$ al conjunto A_3, es decir $\Delta(5c+11)\neq 3$.

Se obtendría el caso **b1.2.1** si $\Delta(5c+11)=1$ y el caso **b1.2.2** si $\Delta(5c+11)=2$.

b1.2.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+11)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+20$, $11c+24$ y $9c+21$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 5c+13,\, c+3,\, 5c+11,\, 8c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 4c+10,\, 2c+4,\, 11c+24,\, 9c+21\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 3c+8,\, 4c+12,\, 7c+16\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+17)=1 \Rightarrow 8c+20=6c+17+c+3+c$
Si $\Delta(6c+17)=2 \Rightarrow 9c+21=6c+17+2c+4+c$
Si $\Delta(6c+17)=3 \Rightarrow 6c+17=4c+12+c+5+c$

b1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+11)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+9$, $2c+7$ y $6c+14$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 5c+13,\, c+3,\, 4c+9,\, 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 4c+10,\, 2c+4,\, 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 3c+8,\, 4c+12,\, 7c+16,\, 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}2$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+2) = 1 \Rightarrow 4c+9 = c+2+2c+7+c$
Si $\Delta(c+2) = 2 \Rightarrow 2c+4 = c+2+2+c$
Si $\Delta(c+2) = 3 \Rightarrow 6c+14 = c+2+4c+12+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(c+3) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+8,\ 4c+12\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+7,\ 6c+17$, $8c+20$ y $2c+6$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13,\ 2c+7,\ 6c+17\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 4c+10,\ c+3,\ 8c+20\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 3c+8,\ 4c+12,\ 2c+6\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(7c+18) = 1 \Rightarrow 7c+18 = 6c+17+1+c$
Si $\Delta(7c+18) = 2 \Rightarrow 8c+20 = 7c+18+2+c$
Si $\Delta(7c+18) = 3 \Rightarrow 7c+18 = 4c+12+2c+6+c$

Resumimos el **Caso 4.2.2.2** en el siguiente esquema:

$$\Delta(3c+8)=3 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(4c+12)=2 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(3c+9)=1 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(c+3)=1 \\ \Delta(c+3)=2 \end{array} \right. \\ \\ \Delta(3c+9)=3 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(c+4)=1 \\ \Delta(c+4)=2 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ \Delta(4c+12)=3 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(c+3)=1 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(7c+16)=2 \\ \Delta(7c+16)=3 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(5c+11)=1 \\ \Delta(5c+11)=2 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ \Delta(c+3)=2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Continuamos con el **Caso 4.2.3** con $\Delta(4c+10) = 3$

CASO 4.2.3

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, ,\, 4c+10\}$

El elemento $4c+10 = 2c+5+c+5+c$ es una solución monocromática, el elemento $2c+5$ no puede pertenecer al conjunto A_3, es decir $\Delta(2c+5) \neq 3$.

Estudiaremos en el **Caso 4.2.3.1** que sucede si $\Delta(2c+5) = 1$ y en el **Caso 4.2.3.2** si $\Delta(2c+5) = 2$.

CASO 4.2.3.1

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10\}$

Como el elemento $3c+6 = 2c+5+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se obtendría el **Caso 4.2.3.1 a** si $\Delta(3c+6) = 2$ y el caso **Caso 4.2.3.1 b** si $\Delta(3c+6) = 3$.

CASO 4.2.3.1

a) $\boldsymbol{\Delta(3c+6) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 3c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10\}$

El elemento $4c+9 = 3c+6+3+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(4c+9) = 1$ y el el caso **a2** si $\Delta(4c+9) = 3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(4c+9) = 1}$

Como el elemento $4c+9 = 3c+8+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c+8$ al conjunto A_1.

Obtenemos el caso **a1.1** si $\Delta(3c+8) = 2$ y el caso **a1.2** si $\Delta(3c+8) = 3$.

a1.1) $\boldsymbol{\Delta(3c+8) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+4, 9c+17,\, 5c+11$, $5c+9$, $6c+13$, $7c+14$ y $c+3$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5,\, 4c+9,\, 2c+4,\, 9c+17,\, 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 3c+6,\, 3c+8,\, 5c+9,\, 6c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, 7c+14,\, c+3\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}7$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(2c+7) = 1 \Rightarrow 5c+11 = 2c+7+2c+4+c$
Si $\Delta(2c+7) = 2 \Rightarrow 6c+13 = 2c+7+3c+6+c$
Si $\Delta(2c+78) = 3 \Rightarrow 4c+10 = 2c+7+c+3+c$

a1.2) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+5,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 3c+8\}$

El elemento $5c+13 = 3c+8+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **a1.2.1** si $\Delta(5c+13)=1$ y el caso **a1.2.2** si $\Delta(5c+13)=2$.

a1.2.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+13)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+22,\ 12c+24\ ,8c+18,\ 4,\ 6c+17\ ,4c+12$ y $7c+14$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+5,\ 4c+9,\ 5c+13,\ 9c+22,\ 12c+24\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+6,\ 8c+18,\ 4,\ 6c+17\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 3c+8,\ 4c+12,\ 7c+14\}$

Según coloquemos el elemento $2c+2$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+2)=1 \Rightarrow 12c+24 = 9c+22+2c+2+c$
Si $\Delta(2c+2)=2 \Rightarrow 3c+6 = 2c+2+4+c$
Si $\Delta(2c+2)=3 \Rightarrow 7c+14 = 2c+2+4c+12+c$

a1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+13)=2}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $6c+15$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*. Como el elemento $7c+16 = 6c+15+1+c$ es una solución monocromática, no pertenece al conjunto A_1.

Se estudia el caso **a1.2.2.1** si $\Delta(7c+16)=2$ y el caso **a1.2.2.2** si $\Delta(7c+16)=3$.

a1.2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(7c+16)=2}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $c+3$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y se obtiene:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+5,\ 4c+9,\ 6c+15,\ c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+6,\ 5c+13,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 3c+8\}$

Según coloquemos el elemento $8c+18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+18)=1 \Rightarrow 8c+18 = 6c+15+c+3+c$
Si $\Delta(8c+18)=2 \Rightarrow 8c+18 = 7c+16+2+c$
Si $\Delta(8c+18)=3 \Rightarrow 8c+18 = 4c+10+3c+8+c$

a1.2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(7c+16)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+11$ y $11c+24$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5,\, 4c+9,\, 6c+15,\, 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 3c+6,\, 5c+13,\, 11c+24\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, 3c+8,\, 7c+16\}$

Según coloquemos el elemento $12c{+}26$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(12c+26) = 1 \Rightarrow 12c+26 = 5c+11+6c+15+c$
Si $\Delta(12c+26) = 2 \Rightarrow 12c+26 = 11c+24+2+c$
Si $\Delta(12c+26) = 3 \Rightarrow 12c+26 = 7c+16+4c+10+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(4c+9) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 3c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, 4c+9\}$

Como el elemento $6c+14 = 4c+9+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer dicho elemento al conjunto A_3.

Obtenemos el caso **a2.1** si $\Delta(6c+14) = 1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(6c+14) = 2$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(6c+14) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+22,\ 2c+4, 8c+20\ , 9c+19, 3c+8,\ 7c+18,\ 5c+15,$ $5c+13$ y $3c+10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5,\, 6c+14,\, 10c+22,\, 2c+4,\, 8c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 3c+6,\, 9c+19,\, 3c+8,\, 7c+18,\, 5c+15\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, 4c+9,\, 5c+13,\, 3c+10\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}3$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+3) = 1 \Rightarrow 2c+4 = c+3+1+c$
Si $\Delta(c+3) = 2 \Rightarrow 7c+18 = 5c+15+c+3+c$
Si $\Delta(c+3) = 3 \Rightarrow 5c+13 = 3c+10+c+3+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(6c+14) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 3c+6,\, 6c+14\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, 4c+9\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $2c+4$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $7c+16 = 6c+14+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer dicho elemento al conjunto A_2. Tendremos el caso **a2.2.1** si $\Delta(7c+16) = 1$ y el caso **a2.2.2** si $\Delta(7c+16) = 3$.

a2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(7c+16) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+11,\ 5c+12,\ c+1\ , 8c+15,\ 6c+15\ ,\ 10c+20,\ 10c+21$ y $2c+8$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$$\begin{array}{l} A_1 \supseteq \{1,\ 2c+5,\ 2c+4,\ 7c+16,\ 5c+11,\ 5c+12,\ c+1\} \\ A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+6,\ 6c+14,\ 8c+15,\ 6c+15\} \\ A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 4c+9,\ 10c+20,\ 10c+21,\ 2c+8\} \end{array}$$

Según coloquemos el elemento $c{+}3$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(7c+12) = 1 \Rightarrow 7c+12 = 5c+11+c+1+c$
Si $\Delta(7c+12) = 2 \Rightarrow 8c+15 = 7c+12+3+c$
Si $\Delta(7c+12) = 3 \Rightarrow 10c+20 = 7c+12+2c+8+c$

a2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(7c+16) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+4,\ 5c+11$,$3c+9$, $2c+6$ y $c+4$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$$\begin{array}{l} A_1 \supseteq \{1,\ 2c+5,\ 2c+4,\ 5c+11,\ 3c+9\} \\ A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 3c+6,\ 6c+14,\ 2c+6\} \\ A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 4c+9,\ 7c+16,\ c+4\} \end{array}$$

Según coloquemos el elemento $9c{+}20$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(9c+20) = 1 \Rightarrow 9c+20 = 5c+11+3c+11+c$
Si $\Delta(9c+20) = 2 \Rightarrow 9c+20 = 6c+14+2c+6+c$
Si $\Delta(9c+20) = 3 \Rightarrow 9c+20 = 7c+16+c+4+c$

Podemos resumir el **Caso 4.2.3.1 a** en el siguiente esquema:

$$\Delta(3c+6) = 2 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(4c+9) = 1 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(3c+8) = 2 \\ \Delta(3c+8) = 3 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(5c+13) = 1 \\ \Delta(5c+13) = 2 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(7c+16) = 2 \\ \Delta(7c+16) = 3 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \Delta(4c+9) = 3 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(6c+14) = 1 \\ \Delta(6c+14) = 2 \left\{ \begin{array}{l} \Delta(7c+16) = 1 \\ \Delta(7c+16) = 3 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Continuamos con el **Caso 4.2.3.1 b** con $\Delta(3c+6) = 3$.

CASO 4.2.3.1

b) $\mathbf{\Delta(3c+6)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, 3c+6\}$

El elemento $5c+11 = 3c+6+c+5+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_3.
Obtenemos el caso **b1** si $\Delta(5c+11)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(5c+11)=2$.

b1) $\mathbf{\Delta(5c+11)=1}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $8c+16$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.
Como el elemento $2c+5 = c+4+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_1.
Se estudia el caso **b1.1** si $\Delta(c+4)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(c+4)=3$.

b1.1) $\mathbf{\Delta(c+4)=2}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $6c+12$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5,\, 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 8c+16,\, c+4\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, 3c+6,\, 6c+12\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}6$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+6)=1 \Rightarrow 5c+11 = 2c+6+2c+5+c$
Si $\Delta(2c+6)=2 \Rightarrow 2c+6 = c+4+2+c$
Si $\Delta(2c+6)=3 \Rightarrow 6c+12 = 2c+6+3c+6+c$

b1.2) $\mathbf{\Delta(c+4)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+9$,$8c+16$, $2c+6$ y $c+2$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5,\, 5c+11,\, 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 8c+16,\, 2c+6,\, c+2\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, 3c+6,\, c+4\}$

Según coloquemos el elemento 4 en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(4)=1 \Rightarrow 3c+9 = 4+2c+5+c$
Si $\Delta(4)=2 \Rightarrow 2c+6 = 4+c+2+c$
Si $\Delta(4)=3 \Rightarrow 4c+10 = 4+3c+6+c$

b2) $\mathbf{\Delta(5c+11)=2}$

Como el elemento $5c+11=4c+8+3+c$ es una solución monocromática, el elemento $4c+8$ no puede pertenecer al conjunto A_2.

Obtenemos el caso **b2.1** si $\Delta(4c+8)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(4c+8)=3$.

b2.1) $\mathbf{\Delta(4c+8)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+5,\ 4c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 3c+6\}$

El elemento $4c+8=3c+7+1+c$ es una solución monocromática, por tanto el elemento $3c+7$ no puede pertenecer al conjunto A_1.

Tendremos el caso **b2.1.1** si $\Delta(3c+7)=2$ y el caso **b2.1.2** si $\Delta(3c+7)=3$.

b2.1.1) $\mathbf{\Delta(3c+7)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+14,\ c+2\ ,\ 3c+9$ y $c+4$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+5,\ 4c+8,\ 6c+14,\ c+2\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 5c+11,\ 3c+7,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 3c+6,\ c+4\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}6$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+6)=1 \Rightarrow 4c+8=2c+6+c+2+c$
Si $\Delta(2c+6)=2 \Rightarrow 3c+9=2c+6+3+c$
Si $\Delta(2c+6)=3 \Rightarrow 4c+10=2c+6+c+4+c$

b2.1.2) $\mathbf{\Delta(3c+7)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c{+}2,\ 8c{+}15\ ,\ 7c{+}13,\ 11c{+}20$ y $6c{+}10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+5,\ 4c+8,\ c+2,\ 8c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 5c+11,\ 7c+13,\ 11c+20\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 3c+6,\ 3c+7,\ 6c+10\}$

Según coloquemos el elemento $10c{+}17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(10c+17)=1 \Rightarrow 10c+17=8c+15+c+2+c$
Si $\Delta(10c+17)=2 \Rightarrow 11c+20=10c+17+3+c$
Si $\Delta(10c+17)=3 \Rightarrow 10c+17=6c+10+3c+7+c$

b2.2) $\Delta(4c+8)=3$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, 3c+6,\, 4c+8\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+13,\ 8c+16$ y $9c+18$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5,\, 6c+13,\, 8c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 5c+11,\, 9c+18\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, 3c+6,\, 4c+8\}$

El elemento $8c+14 = 3c+6+4c+8+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_3.

Se estudia el caso **b2.2.1** si y el caso **b2.2.2** si $\Delta(8c+14)=2$.

b2.2.1) $\Delta(8c+14)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+3,\ 10c+20$, $c+1$, $7c+13$, $11c+19$ y $5c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5,\, 6c+13,\, 8c+16,\, 8c+14,\, 2c+3,\, 10c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 5c+11,\, 9c+18,\, c+1,\, 7c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, 3c+6,\, 4c+8,\, 11c+19,\, 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+17)=1 \Rightarrow 10c+20=7c+17+2c+3+c$
Si $\Delta(7c+17)=2 \Rightarrow 9c+18=7c+17+c+1+c$
Si $\Delta(7c+17)=3 \Rightarrow 7c+17=5c+12+c+5+c$

b2.2.2) $\Delta(8c+14)=2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos 4 y $7c+12$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+5,\, 6c+13,\, 8c+16,\, 4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 5c+11,\, 9c+18,\, 8c+14\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, 3c+6,\, 4c+8,\, 7c+12\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+17)=1 \Rightarrow 9c+17=8c+16+1+c$
Si $\Delta(9c+17)=2 \Rightarrow 9c+17=8c+14+3+c$
Si $\Delta(9c+17)=3 \Rightarrow 9c+17=7c+12+c+5+c$

Podemos resumir el **Caso 4.2.3.1 b** en el siguiente esquema:

$$
\Delta(3c+6)=3\begin{cases}\Delta(5c+11)=1\begin{cases}\Delta(c+4)=2\\ \\ \Delta(c+4)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(5c+11)=2\begin{cases}\Delta(4c+8)=1\begin{cases}\Delta(3c+7)=2\\ \\ \Delta(3c+7)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(4c+8)=3\begin{cases}\Delta(8c+14)=1\\ \\ \Delta(8c+14)=2\end{cases}\end{cases}\end{cases}
$$

Continuamos con el **Caso 4.2.3.2** con $\Delta(2c+5)=2$

CASO 4.2.3.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10\}$

Como el elemento $2c+5 = c+3+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+3$ al conjunto A_2.

Estudiaremos el **Caso 4.2.3.2 a** si $\Delta(c+3)=1$ y el **Caso 4.2.3.2 b** si $\Delta(c+3)=3$.

CASO 4.2.3.2

a) $\boldsymbol{\Delta(c+3)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10\}$

El elemento $3c+8 = 2c+5+3+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2.

Se obtiene caso **a1** si $\Delta(3c+8)=1$ y el caso **a2** si $\Delta(3c+8)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=1}$

Como el elemento $5c+11 = 3c+8+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Obtendremos el caso **a1.1** si $\Delta(5c+11)=2$ y el caso **a1.2** si $\Delta(5c+11)=3$.

a1.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+11)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+14$, $2c+4$, $7c+15$, $4c+9$ y $2c+6$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+3,\ 3c+8,\ 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+5,\ 5c+11,\ 2c+4,\ 7c+15\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 4c+9,\ 2c+6\}$

Según coloquemos el elemento $4c{+}11$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4c+11) = 1 \Rightarrow 6c+14 = 4c+11+c+3+c$
Si $\Delta(4c+11) = 2 \Rightarrow 7c+15 = 4c+11+2c+4+c$
Si $\Delta(4c+11) = 3 \Rightarrow 4c+11 = 2c+6+c+5+c$

a1.2) $\quad \mathbf{\Delta(5c+11) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+3,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 5c+11\}$

El elemento $7c+16 = 5c+11+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

En el caso **a1.2.1** se estudia si $\Delta(7c+16) = 1$ y en el caso **a1.2.2** si $\Delta(7c+16) = 2$.

a1.2.1) $\quad \mathbf{\Delta(7c+16) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+18,\ 2c+6\ ,\ 6c+15,\ 9c+21\ ,\ 5c+13,\ 3c+10$ y $8c+19$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+3,\ 3c+8,\ 7c+16,\ 7c+18,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+5,\ 6c+15,\ 9c+21\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 5c+11,\ 5c+13,\ 3c+10,\ 8c+19\}$

Según coloquemos el elemento $10c{+}24$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(10c+24) = 1 \Rightarrow 10c+24 = 7c+18+2c+6+c$
Si $\Delta(10c+24) = 2 \Rightarrow 10c+24 = 9c+21+3+c$
Si $\Delta(10c+24) = 3 \Rightarrow 10c+24 = 8c+19+c+5+c$

a1.2.2) $\quad \mathbf{\Delta(7c+16) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+21$ y $6c+13$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+3,\ 3c+8,\ 10c+21\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+5,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 5c+11,\ 6c+13\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(8c+18) = 1 \Rightarrow 10c+21 = 8c+18+c+3+c$
Si $\Delta(8c+18) = 2 \Rightarrow 8c+18 = 7c+16+2+c$
Si $\Delta(8c+18) = 3 \Rightarrow 8c+18 = 6c+13+c+5+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(3c+8)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 3c+8\}$

Como el elemento $6c+15=4c+10+c+5+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_3.
Se obtiene el caso **a2.1** si $\Delta(6c+15)=1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(6c+15)=2$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(6c+15)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+21$, $8c+18$, $2c+6$ y $7c+16$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+3,\ 6c+15,\ 9c+21\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+5,\ 8c+18,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 3c+8,\ 7c+16\}$

Según coloquemos el elemento $11c{+}24$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$
Si $\Delta(11c+24)=1 \Rightarrow 11c+24=9c+21+c+3+c$
Si $\Delta(11c+24)=2 \Rightarrow 11c+24=8c+18+2c+6+c$
Si $\Delta(11c+24)=3 \Rightarrow 11c+24=7c+16+3c+8+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(6c+15)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+13$, $7c+18$, $5c+15$,$3c+10$ y $4c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+3,\ 5c+13,\ 7c+18\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+5,\ 6c+15,\ 5c+15\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ 3c+8,\ 3c+10,\ 4c+12\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$
Si $\Delta(6c+17)=1 \Rightarrow 7c+18=6c+17+1+c$
Si $\Delta(6c+17)=2 \Rightarrow 6c+17=5c+15+2+c$
Si $\Delta(6c+17)=3 \Rightarrow 6c+17=4c+12+c+5+c$

CASO 4.2.3.2

b) $\boldsymbol{\Delta(c+3)=3}$

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\ 4c+10,\ c+3\}$

Introducimos **a la fuerza** los elementos $3c+8$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta*.
El elemento $6c+13=4c+10+c+3+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece

al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **b1** si $\Delta(6c+13)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(6c+13)=2$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(6c+13)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+7$, $3c+9$,$7c+15$ y $5c+12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+8,\, 6c+13,\, 3c+7,\, 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 2c+5,\, 2c+7,\, 7c+15\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, c+3,\, 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $10c+22$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(10c+22)=1 \Rightarrow 10c+22=6c+13+3c+9+c$
Si $\Delta(10c+22)=2 \Rightarrow 10c+22=7c+15+2c+7+c$
Si $\Delta(10c+22)=3 \Rightarrow 10c+22=5c+12+4c+10+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(6c+13)=2}$

Como el elemento $2c+7=c+4+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **b2.1** si $\Delta(c+4)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(c+4)=3$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+7$ y $5c+12$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+8,\, c+4,\, 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 2c+5,\, 2c+7,\, 6c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, c+3,\, 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $7c+15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+15)=1 \Rightarrow 7c+15=3c+8+3c+7+c$
Si $\Delta(7c+15)=2 \Rightarrow 7c+15=6c+13+2+c$
Si $\Delta(7c+15)=3 \Rightarrow 7c+15=5c+12+c+3+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+7$, $5c+10$ y $7c+15$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+8,\, 3c+7,\, 5c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3,\, 2c+5,\, 2c+7,\, 6c+13\}$
$A_3 \supseteq \{c+5,\, 4c+10,\, c+3,\, c+4,\, 7c+15\}$

Según coloquemos el elemento $9c+18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas*

a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(9c+18) = 1 \Rightarrow 9c+18 = 5c+10+3c+8+c$
Si $\Delta(9c+18) = 2 \Rightarrow 9c+18 = 6c+13+2c+5+c$
Si $\Delta(9c+18) = 3 \Rightarrow 9c+18 = 7c+15+c+3+c$

Podemos resumir el **Caso 4.2.3.2** en el siguiente esquema:

$$\Delta(2c+5)=2 \begin{cases} \Delta(c+3)=1 \begin{cases} \Delta(3c+8)=1 \begin{cases} \Delta(5c+11)=2 \\ \Delta(5c+11)=3 \begin{cases} \Delta(7c+16)=1 \\ \Delta(7c+16)=2 \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(3c+8)=3 \begin{cases} \Delta(6c+15)=1 \\ \Delta(6c+15)=2 \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(c+3)=3 \begin{cases} \Delta(6c+13)=1 \\ \Delta(6c+13)=2 \begin{cases} \Delta(c+4)=1 \\ \Delta(c+4)=3 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Con este último caso concluye la demostración del **Caso 4**

10.5. Caso 5: $A_1 \supseteq \{1\}$, $A_2 \supseteq \{2\}$ y $A_3 \supseteq \{3\}$

Para cualquier *3-coloración* definida en el conjunto $\{1, 2, ..., 13c + 22\}$

$$\Delta : \{1, 2, ..., 13c + 22\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

A los conjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$ se le asignan los colores:

$$\Delta(A_1) = 1$$
$$\Delta(A_2) = 2$$
$$\Delta(A_3) = 3$$

siendo $A_1 \supseteq \{1\},\ A_2 \supseteq \{2\}$ y $A_3 \supseteq \{3\}$

Vamos a demostrar que en este caso hay soluciones *monocromáticas* de la ecuación

$x_1 + x_2 + c = x_3,$ siendo $x_1 \neq x_2$ y $c > 0$.

Dados los conjuntos:
$A_1 \supseteq \{1\}$ y $A_2 \supseteq \{2\}$ y $A_3 \supseteq \{3\}$

Con esta distribución no obtenemos ningún elemento que no sea *libre de suma estricta* en alguno de los conjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$.
Partimos de un elemento arbitrario, por ejemplo el $3c + 8$.
En el **Caso 5.1** estudiaremos que sucede $\Delta(3c+8) = 1$ en el **Caso 5.2** si $\Delta(3c+8) = 2$ y en el **Caso 5.3** si $\Delta(3c + 8) = 3$.

CASO 5.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c + 8\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{3\}$

CASO 5.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c + 8\}$
$A_3 \supseteq \{3\}$

CASO 5.3

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c + 8\}$

Analicemos el **Caso 5.1**.
Como el elemento $4c + 9 = 3c + 8 + 1 + c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_1.

Estudiaremos el **Caso 5.1.1** si se le asigna $\Delta(4c+9)=2$ y el **Caso 5.1.2** si $\Delta(4c+9)=3$

CASO 5.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{3\}$

CASO 5.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 4c+9\}$

Desarrollaremos estos casos hasta conseguir soluciones monocromáticas a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

En el **Caso 5.1.1** como el elemento $5c+11=4c+9+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Estudiaremos en el **Caso 5.1.1.1** qué sucede si $\Delta(5c+11)=1$ y en el **Caso 5.1.1.2** si $\Delta(5c+11)=3$.

CASO 5.1.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+8,\, 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{3\}$

Como el elemento $5c+11=4c+10+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+10$ al conjunto A_1.

Se obtendría el **Caso 5.1.1.1 a** si $\Delta(4c+10)=2$ y el **Caso 5.1.1.1 b** si $\Delta(4c+10)=3$.

CASO 5.1.1.1

a) $\boldsymbol{\Delta(4c+10)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+8,\, 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+9,\, 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{3\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $9c+19$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $5c+11=3c+8+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+3$ al conjunto A_1.

Tendríamos el caso **a1** si $\Delta(c+3)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(c+3)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(c+3)=2}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $2c+7$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 4c+10,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 9c+19,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $6c+12$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+12)=1 \Rightarrow 6c+12=5c+11+1+c$
Si $\Delta(6c+12)=2 \Rightarrow 6c+12=4c+9+c+3+c$
Si $\Delta(6c+12)=3 \Rightarrow 9c+19=6c+12+2c+7+c$

a2) $\mathbf{\Delta(c+3)=3}$

Como el elemento $3c+8=2c+7+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+7$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **a2.1** si $\Delta(2c+7)=2$ y el caso **a2.2** si $\Delta(2c+7)=3$.

a2.1) $\mathbf{\Delta(2c+7)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+16,\ 10c+22\,,\ 11c+24,\ c+5$ y $6c+14$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+11,\ 7c+16,\ 10c+22\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 4c+10,\ 2c+7,\ 11c+24\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 9c+19,\ c+3,\ c+5,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $8c+17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+17)=1 \Rightarrow 8c+17=7c+16+1+c$
Si $\Delta(8c+17)=2 \Rightarrow 11c+24=8c+17+2c+7+c$
Si $\Delta(8c+17)=3 \Rightarrow 8c+17=6c+14+c+3+c$

a2.2) $\mathbf{\Delta(2c+7)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 9c+19,\ c+3,\ 2c+7\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+22, 6c+12,\ 10c+21$ y $7c+14$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+11,\ 11c+22\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 4c+10,\ 6c+12,\ 10c+21\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 9c+19,\ c+3,\ 2c+7,\ 7c+14\}$

Como el elemento $2c+7=c+4+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_3.

Se estudia el caso **a2.2.1** si $\Delta(c+4)=1$ y el caso **a2.2.2** si $\Delta(c+4)=2$.

a2.2.1) $\mathbf{\Delta(c+4)=1}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $5c+12$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+11,\ 11c+22,\ c+4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 4c+10,\ 6c+12,\ 10c+21\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 9c+19,\ c+3,\ 2c+7,\ 7c+14,\ 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $3c{+}7$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(3c+7)=1 \Rightarrow 5c+11=3c+7+c+4+c$
Si $\Delta(3c+7)=2 \Rightarrow 4c+9=3c+7+2+c$
Si $\Delta(3c+7)=3 \Rightarrow 9c+19=3c+7+5c+12+c$

a2.2.2) $\quad \boldsymbol{\Delta(c+4)=2}$

Introducimos **a la fuerza** el elemento $8c+16$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+11,\ 11c+22,\ 8c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 4c+10,\ 6c+12,\ 10c+21,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 9c+19,\ c+3,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}6$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+6)=1 \Rightarrow 11c+22=8c+16+2c+6+c$
Si $\Delta(2c+6)=2 \Rightarrow 2c+6=c+4+2+c$
Si $\Delta(2c+6)=3 \Rightarrow 2c+6=c+3+3+c$

CASO 5.1.1.1

b) $\quad \boldsymbol{\Delta(4c+10)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $3c+7$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

El elemento $5c+11=3c+8+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+3$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(c+3)=2$ y el caso **b2** si $\Delta(c+3)=3$.

b1) $\quad \boldsymbol{\Delta(c+3)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+15$, $2c+6$ y $6c+12$ en los conjuntos , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+11,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ c+3,\ 7c+15\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6,\ 6c+12\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+18)=1 \Rightarrow 9c+18=5c+11+3c+7+c$
Si $\Delta(9c+18)=2 \Rightarrow 9c+18=7c+15+c+3+c$
Si $\Delta(9c+18)=3 \Rightarrow 9c+18=6c+12+2c+6+c$

b2) $\quad \boldsymbol{\Delta(c+3)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+6$, $6c+12$ y $7c+15$ en los conjuntos , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+11,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 2c+6,\ 6c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ c+3,\ 7c+15\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$
Si $\Delta(9c+18)=1 \Rightarrow 9c+18=5c+11+3c+7+c$
Si $\Delta(9c+18)=2 \Rightarrow 9c+18=6c+12+2c+6+c$
Si $\Delta(9c+18)=3 \Rightarrow 9c+18=7c+15+c+3+c$

Resumimos el **Caso 5.1.1.1** en el esquema siguiente:

$$\Delta(4c{+}9)=2\begin{cases}\Delta(5c+11)=1\begin{cases}\Delta(4c+10)=2\begin{cases}\Delta(c+3)=2\\[2ex] \Delta(c+3)=3\begin{cases}\Delta(2c+7)=2\\[2ex] \Delta(2c+7)=3\begin{cases}\Delta(c+4)=1\\ \Delta(c+4)=2\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\[4ex] \Delta(4c+10)=3\begin{cases}\Delta(c+3)=2\\[2ex] \Delta(c+3)=3\end{cases}\end{cases}\\[6ex] \Delta(5c+11)=3\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 5.1.1.2** con $\Delta(5c+11)=3$

CASO 5.1.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11\}$

El elemento $6c+14=5c+11+3+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_3.
Estudiaremos el **Caso 5.1.1.2 a** si $\Delta(6c+14)=1$ y el **Caso 5.1.1.2 b** si $\Delta(6c+14)=2$.

CASO 5.1.1.2

a) $\boldsymbol{\Delta(6c+14)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11\}$

El elemento $6c+14 = 3c+8+2c+6+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+6$ al conjunto A_1.

Tendríamos el caso **a1** si $\Delta(2c+6)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(2c+6)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(2c+6)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+4$, $c+3$, $8c+18$, $c+5$, $7c+15$, $5c+12$ y $3c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 6c+14,\ c+4,\ c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 2c+6,\ 8c+18,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ 7c+15,\ 5c+12,\ 3c+7\}$

Según coloquemos el elemento $2c+4$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+4)=1 \Rightarrow 2c+4 = c+3+1+c$
Si $\Delta(2c+4)=2 \Rightarrow 4c+9 = 2c+4+c+5+c$
Si $\Delta(2c+4)=3 \Rightarrow 3c+7 = 2c+4+3+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(2c+6)=3}$

Como el elemento $3c+8 = 2c+7+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+7$ al conjunto A_1.

Obtenemos el caso **a2.1** si $\Delta(2c+7)=2$ y el caso **a2.2** si $\Delta(2c+7)=3$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(2c+7)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+9, c+3, 7c+16$, $2c+5$, $8c+17$, $5c+12$ y $c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 6c+14,\ 3c+9,\ c+3,\ 7c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 2c+7,\ 2c+5,\ 8c+17\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ 2c+6,\ 5c+12,\ c+5\}$

Según coloquemos el elemento $3c+7$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(3c+7)=1 \Rightarrow 7c+16 = 3c+9+3c+7+c$
Si $\Delta(3c+7)=2 \Rightarrow 3c+7 = 2c+5+2+c$
Si $\Delta(3c+7)=3 \Rightarrow 5c+12 = 3c+7+c+5+c$

a2.2) $\Delta(2c+7)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+11,\ 5c+13, c+3$ y $10c+22$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 6c+14,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 5c+13,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ 2c+6,\ 2c+7,\ 10c+22\}$

Según coloquemos el elemento $3c+10$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(3c+10)=1 \Rightarrow 4c+11=3c+10+1+c$
Si $\Delta(3c+10)=2 \Rightarrow 5c+13=3c+10+c+3+c$
Si $\Delta(3c+10)=3 \Rightarrow 3c+10=2c+7+3+c$

CASO 5.1.1.2

b) $\Delta(6c+14)=2$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 6c+14\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11\}$

El elemento $6c+14=4c+9+c+5+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_2.
Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(c+5)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(c+5)=3$.

b1) $\Delta(c+5)=1$

El elemento $3c+8 = c+5+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+3$ al conjunto A_1.
Se estudia el caso **b1.1** si $\Delta(c+3)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(c+3)=3$.

b1.1) $\Delta(c+3)=2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+17,\ 7c+15,\ 2c+4$, $9c+18, 5c+10$, $2c+6,\ 6c+12,$ $3c+7$ y $11c+21$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ c+5,\ 8c+17,\ 7c+15,\ 2c+4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 6c+14,\ c+3,\ 9c+18,\ 5c+10\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ 2c+6,\ 6c+12,\ 3c+7,\ 11c+21\}$

Según coloquemos el elemento $10c+19$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(10c+19)=1 \Rightarrow 10c+19=7c+15+2c+4+c$
Si $\Delta(10c+19)=2 \Rightarrow 10c+19=5c+10+4c+9+c$
Si $\Delta(10c+19)=3 \Rightarrow 10c+19=6c+12+3c+7+c$

b1.2) $\boldsymbol{\Delta(c+3)=3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $2c+6$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $7c+15=4c+9+2c+6+c$ es una solución monocromática, por tanto al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **b1.2.1** si $\Delta(7c+15)=1$ y el caso **b1.2.2** si $\Delta(7c+15)=3$.

b1.2.1) $\boldsymbol{\Delta(7c+15)=1}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $9c+20$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ c+5,\ 7c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 6c+14,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ c+3,\ 9c+20\}$

Según coloquemos el elemento $11c{+}23$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(11c+23)=1 \Rightarrow 11c+23=7c+15+3c+8+c$
Si $\Delta(11c+23)=2 \Rightarrow 11c+23=6c+14+4c+9+c$
Si $\Delta(11c+23)=3 \Rightarrow 11c+23=9c+20+c+3+c$

b1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(7c+15)=3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $5c+12$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ c+5,\ 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 6c+14,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ c+3,\ 7c+15\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}4$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(c+4)=1 \Rightarrow 5c+12=3c+8+c+4+c$
Si $\Delta(c+4)=2 \Rightarrow 2c+6=c+4+2+c$
Si $\Delta(c+4)=3 \Rightarrow 7c+15=5c+11+c+4+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(c+5)=3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $7c+16$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $6c+14=5c+12+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $5c+12$ al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **b2.1** si $\Delta(5c+12)=1$ y el caso **b2.2**si $\Delta(5c+12)=1$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 7c+16,\ 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 6c+14\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ c+5\}$

El elemento $7c+16=5c+12+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_1.

Tendríamos el caso **b2.1.1** si $\Delta(c+4)=2$ y el caso **b2.1.2** si $\Delta(c+4)=3$.

b2.1.1) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c+18$, $11c+23$, $c+4$, $6c+13$ y $4c+10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 7c+16,\ 5c+12,\ 8c+18,\ 11c+23\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 6c+14,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ c+5,\ 6c+13,\ 4c+10\}$

Según coloquemos el elemento $3c+7$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(3c+7)=1 \Rightarrow 11c+23=3c+7+7c+16+c$
Si $\Delta(3c+7)=2 \Rightarrow 4c+9=3c+7+2+c$
Si $\Delta(3c+7)=3 \Rightarrow 4c+10=3c+7+3+c$

b2.1.2) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+7$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 7c+16,\ 5c+12,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 6c+14,\ 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ c+5,\ c+4\}$

Según coloquemos el elemento $3c+9$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(3c+9)=1 \Rightarrow 7c+16=3c+9+3c+7+c$
Si $\Delta(3c+9)=2 \Rightarrow 3c+9=2+2c+7+c$
Si $\Delta(3c+9)=3 \Rightarrow 3c+9=c+5+c+4+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $11c+23$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 7c+16,\ 11c+23\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+9,\ 6c+14\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ c+5,\ 5c+12\}$

Resumimos el **Caso 5.1.1.2** en el esquema siguiente:

$$
\Delta(5c+11)=3\left\{\begin{array}{l}
\Delta(6c+14)=1\left\{\begin{array}{l}
\Delta(2c+6)=2\\
\Delta(2c+6)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(2c+7)=2\\ \Delta(2c+7)=3\end{array}\right.
\end{array}\right.\\
\\
\Delta(6c+14)=2\left\{\begin{array}{l}
\Delta(c+5)=1\left\{\begin{array}{l}
\Delta(c+3)=2\\
\Delta(c+3)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(7c+15)=1\\ \Delta(7c+15)=3\end{array}\right.
\end{array}\right.\\
\\
\Delta(c+5)=3\left\{\begin{array}{l}
\Delta(5c+12)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(c+4)=2\\ \Delta(c+4)=3\end{array}\right.\\
\Delta(5c+12)=3
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Continuamos con el **Caso 5.1.2** con $\Delta(4c+9)=3$

CASO 5.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9\}$

Como el elemento $5c+12=4c+9+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_2.

Analizaremos el **Caso 5.1.2.1** si se asigna el color $\Delta(5c+12)=1$ y el **Caso 5.1.2.2** si se asigna el color $\Delta(5c+12)=2$.

CASO 5.1.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9\}$

Como el elemento $3c+8=2c+7+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+7$ al conjunto A_1.

Estudiaremos el **Caso 5.1.2.1 a** si $\Delta(2c+7)=2$ y el **Caso 5.1.2.1 b** si $\Delta(2c+7)=3$.

CASO 5.1.2.1

a) $\boldsymbol{\Delta(2c+7)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9\}$

El elemento $5c+12=4c+11+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+11$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(4c+11)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(4c+11)=3$.

a1) $\mathbf{\Delta(4c+11)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+6, 11c+24$, $6c+13$, $10c+23$, $c+4$ y $9c+20$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+12,\ 3c+6,\ 11c+24\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+7,\ 4c+11,\ 6c+13,\ 10c+23\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ c+4,\ 9c+20\}$

Según coloquemos el elemento $7c+16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+16)=1 \Rightarrow 11c+24=7c+16+3c+8+c$
Si $\Delta(7c+16)=2 \Rightarrow 10c+23=7c+16+2c+7+c$
Si $\Delta(7c+16)=3 \Rightarrow 9c+20=7c+16+c+4+c$

a2) $\mathbf{\Delta(4c+11)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+16$, $9c+20$, $c+4$ y $6c+13$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+12,\ 7c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+7,\ 9c+20,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 4c+11,\ 6c+13\}$

Según coloquemos el elemento $11c+24$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(11c+24)=1 \Rightarrow 11c+24=7c+16+3c+8+c$
Si $\Delta(11c+24)=2 \Rightarrow 11c+24=9c+20+c+4+c$
Si $\Delta(11c+24)=3 \Rightarrow 11c+24=6c+13+4c+11+c$

CASO 5.1.2.1

b) $\mathbf{\Delta(2c+7)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+7\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $c+4$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $6c+13=5c+12+1+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_1.

Se estudia el caso **b1** si $\Delta(6c+13)=2$ y el caso **b2**, si $\Delta(6c+13)=3$.

b1) $\mathbf{\Delta(6c+13)=2}$

El elemento $4c+9=2c+7+c+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+2$ al conjunto A_3.

Obtenemos el caso **b1.1** si $\Delta(c+2)=1$ y el caso **b1.2** si $\Delta(c+2)=2$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(c+2)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+10$ y $c+6$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+12,\ c+2\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 6c+13,\ 3c+10\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+7,\ c+6\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}3$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+3)=1 \Rightarrow 2c+3=c+2+1+c$
Si $\Delta(2c+3)=2 \Rightarrow 6c+13=3c+10+2c+3+c$
Si $\Delta(2c+3)=3 \Rightarrow 4c+9=2c+3+c+6+c$

b1.2) $\boldsymbol{\Delta(c+2)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+16, 9c+20$, $4c+11$ y $11c+24$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+12,\ 7c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 6c+13,\ c+2,\ 9c+20\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+7,\ 4c+11,\ 11c+24\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+17)=1 \Rightarrow 8c+17=7c+16+1+c$
Si $\Delta(8c+17)=2 \Rightarrow 8c+17=6c+13+c+4+c$
Si $\Delta(8c+17)=3 \Rightarrow 11c+24=8c+17+2c+7+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(6c+13)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+7,\ 6c+13\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+16, 9c+20$, $6c+15$ y $11c+24$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+12,\ 7c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ c+4,\ 9c+20,\ 6c+15\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+7,\ 6c+13,\ 11c+24\}$

Según coloquemos el elemento $4c{+}11$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(4c+11)=1 \Rightarrow 5c+12=4c+11+1+c$
Si $\Delta(4c+11)=2 \Rightarrow 6c+15=4c+11+c+4+c$
Si $\Delta(4c+11)=3 \Rightarrow 11c+24=6c+13+4c+11+c$

Resumimos el **Caso 5.1.2.1** en el esquema siguiente:

$$\Delta(4c+9)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(5c+12)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(2c+7)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(4c+11)=2\\ \Delta(4c+11)=3\end{array}\right.\\ \Delta(2c+7)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(6c+13)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(c+2)=1\\ \Delta(c+2)=2\end{array}\right.\\ \Delta(6c+13)=3\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \Delta(5c+12)=2\end{array}\right.$$

Continuamos con el **Caso 5.1.2.2** con $\Delta(5c+12)=2$

CASO 5.1.2.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9\}$

El elemento $3c+8=2c+7+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+7$ al conjunto A_1.

Analizaremos el **Caso 5.1.2.2 a** si se asigna el color $\Delta(2c+7)=2$ y el **Caso 5.1.2.2 b** si se asigna el color $\Delta(2c+7)=3$.

CASO 5.1.2.2

a) $\boldsymbol{\Delta(2c+7)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12,\ 2c+7\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9\}$

El elemento $5c+12=2c+5+2c+7+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+5$ al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(2c+5)=1$ y el caso **a2** si $\Delta(2c+5)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(2c+5)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+10$, $4c+11$, $3c+6$, $c+4$, $6c+13$ y $c+2$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 2c+5,\ 5c+10,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12,\ 2c+7,\ 3c+6,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 6c+13,\ c+2\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(7c+16) = 1 \Rightarrow 7c+16 = 4c+11+2c+5+c$
Si $\Delta(7c+16) = 2 \Rightarrow 7c+16 = 5c+12+c+4+c$
Si $\Delta(7c+16) = 3 \Rightarrow 7c+16 = 6c+13+3+c$

a2) $\quad \mathbf{\Delta(2c+5) = 3}$

El elemento $7c+14 = 4c+9+2c+5+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer, al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **a2.1** si $\Delta(7c+14) = 1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(7c+14) = 2$.

a2.1) $\quad \mathbf{\Delta(7c+14) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+18$, $3c+6$, $c+4$ y $6c+13$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 7c+14,\ 9c+18\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12,\ 2c+7,\ 3c+6,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+5,\ 6c+13\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}10$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(5c+10) = 1 \Rightarrow 9c+18 = 5c+10+3c+8+c$
Si $\Delta(5c+10) = 2 \Rightarrow 5c+10 = 3c+6+c+4+c$
Si $\Delta(5c+10) = 3 \Rightarrow 6c+13 = 5c+10+3+c$

a2.2) $\quad \mathbf{\Delta(7c+14) = 2}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $c+2$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $3c+9 = 2c+7+2+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_2.

Obtenemos el caso **a2.2.1** si $\Delta(3c+9) = 1$ y el caso **a2.2.2** si $\Delta(3c+9) = 3$.

a2.2.1) $\quad \mathbf{\Delta(3c+9) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+5$, $c+4$, $5c+11$, $4c+10$ y $2c+6$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ c+2,\ 3c+9,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12,\ 2c+7,\ 7c+14,\ c+4,\ 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+5,\ 4c+10,\ 2c+6\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}3$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+3) = 1 \Rightarrow 3c+8 = c+3+c+5+c$
Si $\Delta(c+3) = 2 \Rightarrow 7c+14 = c+3+5c+11+c$
Si $\Delta(c+3) = 3 \Rightarrow 2c+6 = c+3+3+c$

a2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(3c+9)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+14$, $c+4$, $2c+6$ y $5c+13$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ c+2,\ 6c+14,\ c+4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12,\ 2c+7,\ 7c+14,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+5,\ 3c+9,\ 5c+13\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+18)=1 \Rightarrow 8c+18=6c+14+c+4+c$
Si $\Delta(8c+18)=2 \Rightarrow 8c+18=5c+12+2c+6+c$
Si $\Delta(8c+18)=3 \Rightarrow 8c+18=2c+5+5c+13+c$

CASO 5.1.2.2

b) $\boldsymbol{\Delta(2c+7)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+7\}$

El elemento $5c+12=4c+10+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+10$ al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **b1** si $\Delta(4c+10)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(4c+10)=3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(4c+10)=1}$

El $8c+18=3c+8+4c+10+c$ es una solución monocromática, no puede al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **b1.1** si $\Delta(8c+18)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(8c+18)=3$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(8c+18)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+16$, $c+3$, $9c+21$, $c+4$, $3c+9$, $5c+13$, $2c+6$, $6c+15$ y $4c+11$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 4c+10,\ 7c+16,\ c+3,\ 9c+21,\ c+4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12,\ 8c+18,\ 3c+9,\ 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+7,\ 2c+6,\ 6c+15,\ 4c+11\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}20$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+20)=1 \Rightarrow 9c+20=7c+16+c+4+c$
Si $\Delta(9c+20)=2 \Rightarrow 9c+20=8c+18+2+c$
Si $\Delta(9c+20)=3 \Rightarrow 9c+20=4c+9+4c+11+c$

b1.2) $\boldsymbol{\Delta(8c+18)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+2$, $9c+21$, $3c+9$, $5c+11$, $6c+12$, $4c+11$, $11c+23$

y $2c+3$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 4c+10,\ c+2,\ 9c+21\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12,\ 3c+9,\ 5c+11,\ 6c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+7,\ 8c+18,\ 4c+11,\ 11c+23,\ 2c+3\}$

Según coloquemos el elemento $5c+10$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(5c+10)=1 \Rightarrow 5c+10=3c+8+c+2+c$
Si $\Delta(5c+10)=2 \Rightarrow 6c+12=5c+10+2+c$
Si $\Delta(5c+10)=3 \Rightarrow 5c+10=2c+7+2c+3+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(4c+10)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+7,\ 4c+10\}$

El elemento $5c+13=4c+10+3+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_3.

Se estudia el caso **b2.1** si $\Delta(5c+13)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(5c+13)=2$.

b2.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+13)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+17, 8c+19$, $c+5$, $9c+21$, $4c+12$, $c+4$, $6c+14$ y $3c+9$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 5c+13,\ 7c+17,\ 8c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12,\ c+5,\ 9c+21,\ 4c+12,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+7,\ 4c+10,\ 6c+14,\ 3c+9\}$

Según coloquemos el elemento $6c+16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+16)=1 \Rightarrow 7c+17=6c+16+1+c$
Si $\Delta(6c+16)=2 \Rightarrow 6c+16=4c+12+c+4+c$
Si $\Delta(6c+16)=3 \Rightarrow 6c+16=2c+7+3c+9+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+13)=2}$

El elemento $6c+15=5c+13+2+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **b2.2.1** si $\Delta(6c+15)=1$ y el caso **b2.2.2** si $\Delta(6c+15)=3$.

b2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(6c+15)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+3$, $c+4$, $7c+16$, $3c+7$, $8c+18$ y $2c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 6c+15,\ c+3,\ c+4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12,\ 5c+13,\ 7c+16,\ 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+7,\ 4c+10,\ 8c+18,\ 2c+5\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}5$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+5) = 1 \Rightarrow 3c+8 = c+5+c+3+c$
Si $\Delta(c+5) = 2 \Rightarrow 5c+12 = 3c+7+c+5+c$
Si $\Delta(c+5) = 3 \Rightarrow 4c+10 = c+5+2c+5+c$

b2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(6c+15) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+25, c+4,\ c+5\ ,\ 7c+17\ ,\ c+3$ y $9c+20$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+8,\ 11c+25,\ c+4,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 5c+12,\ 5c+13,\ 7c+17,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+7,\ 4c+10,\ 6c+15,\ 9c+20\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}5$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(2c+5) = 1 \Rightarrow 2c+5 = c+4+1+c$
Si $\Delta(2c+5) = 2 \Rightarrow 2c+5 = c+3+2+c$
Si $\Delta(2c+5) = 3 \Rightarrow 9c+20 = 6c+15+2c+5+c$

Resumimos el **Caso 5.1.2.2** en el esquema siguiente:

$$\Delta(5c+12)=2\left\{\begin{array}{l}
\Delta(2c+7)=2\left\{\begin{array}{l}
\Delta(2c+5)=1\\
\Delta(2c+5)=3\left\{\begin{array}{l}
\Delta(7c+14)=1\\
\Delta(7c+14)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(3c+9)=1\\ \Delta(3c+9)=3\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.\\
\Delta(2c+7)=3\left\{\begin{array}{l}
\Delta(4c+10)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(8c+18)=2\\ \Delta(8c+18)=3\end{array}\right.\\
\Delta(4c+10)=3\left\{\begin{array}{l}
\Delta(5c+13)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(6c+15)=1\\ \Delta(6c+15)=3\end{array}\right.\\
\Delta(5c+13)=2
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Continuamos con el **Caso 5.2** con $\Delta(3c+8) = 2$

CASO 5.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3\}$

Analicemos el **Caso 5.2**.

Como el elemento $4c+10 = 3c+8+2+c$ es una solución monocromática, por tanto no pertenece al conjunto A_2.

Estudiaremos el **Caso 5.2.1** si $\Delta(4c+10) = 1$ y el **Caso 5.2.2** si $\Delta(4c+10) = 3$

CASO 5.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3\}$

CASO 5.2.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10\}$

Desarrollaremos estos casos hasta conseguir soluciones monocromáticas a la ecuación
$x_1 + x_2 + c = x_3$

En el **Caso 5.2.1** como el elemento $5c+11 = 4c+10+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_1.

Estudiaremos en el **Caso 5.2.1.1** qué sucede si $\Delta(5c+11) = 2$ y en el **Caso 5.2.1.2** si $\Delta(5c+11) = 3$.

CASO 5.2.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3\}$

El elemento $5c+11 = 4c+9+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+9$ al conjunto A_2. Estudiaremos el **Caso 5.2.1.1 a** si se asigna el color $\Delta(4c+9) = 1$ y el **Caso 5.2.1.1 b** si se asigna el color $\Delta(4c+9) = 3$.

CASO 5.2.1.1

a) $\boldsymbol{\Delta(4c+9) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $9c+19$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $5c+11 = 3c+8+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+3$ al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(c+3)=1$ y el caso **a2** si $\Delta(c+3)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(c+3)=1}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $2c+6$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 4c+9,\ c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 9c+19,\ 2c+6\}$

Según coloquemos el elemento $6c+13$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+13)=1 \Rightarrow 6c+13=4c+10+c+3+c$
Si $\Delta(6c+13)=2 \Rightarrow 6c+13=5c+11+2+c$
Si $\Delta(6c+13)=3 \Rightarrow 9c+19=6c+13+2c+6+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(c+3)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+6,\ 11c+24$, $7c+16,\ c+4$, $c+5,\ 6c+14$ y $8c+18$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 4c+9,\ 2c+6,\ 11c+24\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 5c+11,\ 7c+16,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 9c+19,\ c+3,\ c+5,\ 6c+14,\ 8c+18\}$

Según coloquemos el elemento $7c+15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+15)=1 \Rightarrow 7c+15=4c+9+2c+6+c$
Si $\Delta(7c+15)=2 \Rightarrow 7c+15=5c+11+c+4+c$
Si $\Delta(7c+15)=3 \Rightarrow 8c+18=7c+15+3+c$

CASO 5.2.1.1

b) $\boldsymbol{\Delta(4c+9)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 5c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9\}$

El elemento $3c+8=2c+6+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+6$ al conjunto A_2.

Obtenemos el caso **b1** si $\Delta(2c+6)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(2c+6)=3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(2c+6)=1}$

Como el elemento $4c+10=2c+6+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **b1.1** si $\Delta(c+4)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(c+4)=3$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+12,\ 7c+16,\ 6c+13$ y $c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 2c+6,\ 5c+12\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 5c+11,\ c+4,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 6c+13,\ c+5\}$

Según coloquemos el elemento $8c+18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+18)=1 \Rightarrow 8c+18=5c+12+2c+6+c$
Si $\Delta(8c+18)=2 \Rightarrow 8c+18=7c+16+2+c$
Si $\Delta(8c+18)=3 \Rightarrow 8c+18=6c+13+c+5+c$

b1.2) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+13,\ 11c+23$ y $9c+19$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 2c+6,\ 6c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 5c+11,\ 11c+23\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ c+4,\ 9c+19\}$

Según coloquemos el elemento $5c+12$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(5c+12)=1 \Rightarrow 6c+13=5c+12+1+c$
Si $\Delta(5c+12)=2 \Rightarrow 11c+23=5c+11+5c+12+c$
Si $\Delta(5c+12)=3 \Rightarrow 5c+12=4c+9+3+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(2c+6)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+3,\ 9c+19, c+5$, $7c+16$, $6c+13$ y $8c+18$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ c+3,\ 9c+19,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 5c+11,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+9,\ 2c+6,\ 6c+13,\ 8c+18\}$

Según coloquemos el elemento $11c+24$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(11c+24)=1 \Rightarrow 11c+24=9c+19+c+5+c$
Si $\Delta(11c+24)=2 \Rightarrow 11c+24=3c+8+7c+16+c$
Si $\Delta(11c+24)=3 \Rightarrow 11c+24=8c+18+2c+6+c$

Resumimos el **Caso 5.2.1.1** en el siguiente esquema:

$$\Delta(5c+11)=2\begin{cases}\Delta(4c+9)=1\begin{cases}\Delta(c+3)=1\\\Delta(c+3)=3\end{cases}\\[2ex]\Delta(4c+9)=3\begin{cases}\Delta(2c+6)=1\begin{cases}\Delta(c+4)=2\\\Delta(c+4)=3\end{cases}\\[2ex]\Delta(2c+6)=3\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 5.2.1.2** con $\Delta(5c+11)=3$

CASO 5.2.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11\}$

El elemento $3c+8=2c+6+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+6$ al conjunto A_2.

Analizaremos el **Caso 5.2.1.2.a** si el color asignado es $\Delta(2c+6)=1$ y el **Caso 5.2.1.2.b** si el color asignado es $\Delta(2c+6)=3$.

CASO 5.2.1.2

a) $\boldsymbol{\Delta(2c+6)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11\}$

El elemento $2c+6=c+5+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_1.

En el caso **a1** se estudia si $\Delta(c+5)=2$ y en el caso **a2** si $\Delta(c+5)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(c+5)=2}$

El elemento $3c+8=2c+7+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+7$ al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **a1.1** si $\Delta(2c+7)=1$ y el caso **a1.2** si $\Delta(2c+7)=3$.

a1.1) $\boldsymbol{\Delta(2c+7)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+24$, $7c+16$, $c+3$ y $5c+13$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 2c+6,\ 2c+7,\ 11c+24\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ c+5,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ c+3,\ 5c+13\}$

Según coloquemos el elemento $6c+14$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas*

a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(6c + 14) = 1 \Rightarrow 11c + 24 = 6c + 14 + 4c + 10 + c$
Si $\Delta(6c + 14) = 2 \Rightarrow 7c + 16 = 6c + 14 + 2 + c$
Si $\Delta(6c + 14) = 3 \Rightarrow 6c + 14 = 5c + 11 + 3 + c$

a1.2) $\boldsymbol{\Delta(2c + 7) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c + 10,\ 2c + 6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c + 8,\ c + 5\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c + 11,\ 2c + 7\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c + 4$ y $3c + 9$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

El elemento $6c + 14 = 5c + 11 + 3 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $6c + 14$ al conjunto A_3.

Obtenemos el caso **a1.2.1** si $\Delta(6c + 14) = 1$ y el caso **a1.2.2** si $\Delta(6c + 14) = 2$.

a1.2.1) $\boldsymbol{\Delta(6c + 14) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+20$ y $7c+15$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c + 10,\ 2c + 6,\ 6c + 14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c + 8,\ c + 5,\ c + 4,\ 9c + 20\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c + 11,\ 2c + 7,\ 3c + 9,\ 7c + 15\}$

Según coloquemos el elemento $11c+24$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(11c + 24) = 1 \Rightarrow 11c + 24 = 6c + 14 + 4c + 10 + c$
Si $\Delta(11c + 24) = 2 \Rightarrow 11c + 24 = 9c + 20 + c + 4 + c$
Si $\Delta(11c + 24) = 3 \Rightarrow 11c + 24 = 7c + 15 + 3c + 9 + c$

a1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(6c + 14) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $8c + 18$, $4c + 9$, $3c + 7$, $7c + 16$ y $5c + 12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c + 10,\ 2c + 6,\ 8c + 18,\ 4c + 9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c + 8,\ c + 5,\ c + 4,\ 6c + 14,\ 3c + 7\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c + 11,\ 2c + 7,\ 3c + 9,\ 7c + 16,\ 5c + 12\}$

Según coloquemos el elemento $c+3$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c + 3) = 1 \Rightarrow 4c + 9 = 2c + 6 + c + 3 + c$
Si $\Delta(c + 3) = 2 \Rightarrow 3c + 7 = c + 3 + c + 4 + c$
Si $\Delta(c + 3) = 3 \Rightarrow 5c + 12 = 3c + 9 + c + 3 + c$

a2) $\quad \boldsymbol{\Delta(c+5)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 4c+10,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 5c+11,\, c+5\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+14,\ 7c+16, 5c+13$ y $11c+24$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 4c+10,\, 2c+6,\, 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3c+8,\, 7c+16,\, 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 5c+11,\, c+5,\, 11c+24\}$

El elemento $4c+10 = 2c+6+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_1.

Tendremos el caso **a2.1** si $\Delta(c+4)=2$ y el caso **a2.2** si $\Delta(c+4)=3$.

a2.1) $\quad \boldsymbol{\Delta(c+4)=2}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $3c+9$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 4c+10,\, 2c+6,\, 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3c+8,\, 7c+16,\, 5c+13,\, c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 5c+11,\, c+5,\, 11c+24,\, 3c+9\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}20$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+20)=1 \Rightarrow 9c+20 = 6c+14+2c+6+c$
Si $\Delta(9c+20)=2 \Rightarrow 9c+20 = 7c+16+c+4+c$
Si $\Delta(9c+20)=3 \Rightarrow 9c+20 = 5c+11+3c+9+c$

a2.2) $\quad \boldsymbol{\Delta(c+4)=3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $3c+7$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 4c+10,\, 2c+6,\, 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 3c+8,\, 7c+16,\, 5c+13,\, 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 5c+11,\, c+5,\, 11c+24,\, c+4\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+15)=1 \Rightarrow 7c+15 = 6c+14+1+c$
Si $\Delta(7c+15)=2 \Rightarrow 7c+15 = 3c+8+3c+7+c$
Si $\Delta(7c+15)=3 \Rightarrow 7c+15 = 5c+11+c+4+c$

CASO 5.2.1.2

b) $\mathbf{\Delta(2c+6)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ 2c+6\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $3c+9$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

El elemento $5c+11 = 2c+5+2c+6+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+5$ al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(2c+5)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(2c+5)=2$.

b1) $\mathbf{\Delta(2c+5)=1}$

El elemento $3c+9 = 2c+7+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+7$ al conjunto A_2.

Obtenemos el caso **b1.1** si $\Delta(2c+7)=1$ y el caso **b1.2** si $\Delta(2c+7)=3$.

b1.1) $\mathbf{\Delta(2c+7)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+3$ y $7c+17$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 2c+5,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+9,\ c+3\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ 2c+6,\ 7c+17\}$

Según coloquemos el elemento $c+6$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(c+6)=1 \Rightarrow 2c+7 = c+6+1+c$
Si $\Delta(c+6)=2 \Rightarrow 3c+9 = c+6+c+3+c$
Si $\Delta(c+6)=3 \Rightarrow 7c+17 = 5c+11+c+6+c$

b1.2) $\mathbf{\Delta(2c+7)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+11$, $5c+13$, $c+4, 2c+8$ y $c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 2c+5,\ 4c+11,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+9,\ c+4,\ 2c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ 2c+6,\ 2c+7,\ c+5\}$

Según coloquemos el elemento $4c+12$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(4c+12)=1 \Rightarrow 5c+13 = 4c+12+1+c$
Si $\Delta(4c+12)=2 \Rightarrow 4c+12 = c+4+2c+8+c$
Si $\Delta(4c+12)=3 \Rightarrow 4c+12 = 2c+7+c+5+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(2c+5)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+9,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ 2c+6\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+14,\ c+3\ ,\ c+4$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+10,\ 6c+14,\ c+3\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+9,\ 2c+5,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 5c+11,\ 2c+6,\ 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}13$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(5c+13)=1 \Rightarrow 6c+14=5c+13+1+c$
Si $\Delta(5c+13)=2 \Rightarrow 5c+13=3c+9+c+4+c$
Si $\Delta(5c+13)=3 \Rightarrow 5c+13=2c+6+2c+7+c$

Resumimos el **Caso 5.2.1.2** en el siguiente esquema:

$$\Delta(5c+11)=3\left\{\begin{array}{l}
\Delta(2c+6)=1\left\{\begin{array}{l}
\Delta(c+5)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(2c+7)=1\\ \Delta(2c+7)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(6c+14)=1\\ \Delta(6c+14)=2\end{array}\right.\end{array}\right.\\
\Delta(c+5)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(c+4)=2\\ \Delta(c+4)=3\end{array}\right.
\end{array}\right.\\
\Delta(2c+6)=3\left\{\begin{array}{l}
\Delta(2c+5)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(2c+7)=1\\ \Delta(2c+7)=3\end{array}\right.\\
\Delta(2c+5)=2
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Continuamos con el **Caso 5.2.2** con $\Delta(4c+10)=3$

CASO 5.2.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10\}$

El elemento $3c{+}8=2c{+}6{+}2{+}c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+6$ al conjunto A_2.

Analizaremos el **Caso 5.2.2.1** si se asigna el color $\Delta(2c+6)=1$ y el **Caso 5.2.2.2** si se asigna el color $\Delta(2c+6)=3$.

CASO 5.2.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $3c+7$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

Como el elemento $2c+6 = c+5+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_1.

Estudiaremos el **Caso 5.2.2.1 a** si le asignamos el color $\Delta(c{+}5) = 2$ y el **Caso 5.2.2.1 b** si $\Delta(c{+}5) = 3$.

CASO 5.2.2.1

a) $\boldsymbol{\Delta(c+5) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ c+5\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+13, c+3,\ 5c+11$, $7c+16$, $2c+7,\ 4c+9$ y $6c+14$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+6,\ 5c+13,\ c+3,\ 5c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+7,\ c+5,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+7,\ 4c+9,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $11c{+}24$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(11c+24) = 1 \Rightarrow 11c+24 = 5c+13+5c+11+c$
Si $\Delta(11c+24) = 2 \Rightarrow 11c+24 = 3c+8+7c+16+c$
Si $\Delta(11c+24) = 3 \Rightarrow 11c+24 = 6c+14+4c+10+c$

CASO 5.2.2.1

b) $\boldsymbol{\Delta(c+5) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+7\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ c+5\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $2c+5$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libres de suma estricta*.

Como el elemento $2c+5 = c+4+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **b1** si y el caso **b2** si $\Delta(c+4) = 3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(c+4) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+8, 3c+6,\ 5c+11$ y $c+2$ en los conjuntos A_1, A_2 y

A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 4c+8\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+7,\ c+4,\ 3c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ c+5,\ 5c+11,\ c+2\}$

Según coloquemos el elemento $7c+13$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(7c+13) = 1 \Rightarrow 7c+13 = 4c+8+2c+5+c$
Si $\Delta(7c+13) = 2 \Rightarrow 7c+13 = 3c+7+3c+6+c$
Si $\Delta(7c+13) = 3 \Rightarrow 7c+13 = 5c+11+c+2+c$

b2) $\Delta(c+4) = 3$

El elemento $6c+14 = 4c+10+c+4+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_3.

Obtenemos el caso **b2.1** si $\Delta(6c+14) = 1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(6c+14) = 2$.

b2.1) $\Delta(6c+14) = 1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+13$ y $9c+20$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 6c+14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+7,\ 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ c+5,\ c+4,\ 9c+20\}$

Según coloquemos el elemento $7c+15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(7c+15) = 1 \Rightarrow 7c+15 = 6c+14+1+c$
Si $\Delta(7c+15) = 2 \Rightarrow 7c+15 = 3c+8+3c+7+c$
Si $\Delta(7c+15) = 3 \Rightarrow 9c+20 = 7c+15+c+5+c$

b2.2) $\Delta(6c+14) = 2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+7$, $4c+9$ y $5c+12$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+6,\ 2c+5,\ 2c+7,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+7,\ 6c+14\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ c+5,\ c+4,\ 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $7c+16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(7c+16) = 1 \Rightarrow 7c+16 = 4c+9+2c+7+c$
Si $\Delta(7c+16) = 2 \Rightarrow 7c+16 = 6c+14+2+c$
Si $\Delta(7c+16) = 3 \Rightarrow 7c+16 = 5c+12+c+4+c$

Se continua con el **Caso 5.2.2.2** con $\Delta(2c+6) = 3$.

CASO 5.2.2.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6\}$

Como el elemento $3c+9 = 2c+6+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Estudiaremos el **Caso 5.2.2.2 a** si el color que se le asigna es $\Delta(3c+9) = 1$ y el **Caso 5.2.2.2 b** si el color que se le asigna es $\Delta(3c+9) = 2$.

CASO 5.2.2.2

a) $\boldsymbol{\Delta(3c+9) = 1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6\}$

El elemento $4c+10 = 2c+6+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **a1** si $\Delta(c+4) = 1$ y el caso **a2** si $\Delta(c+4) = 2$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(c+4) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+15,\ 5c+13$ y $c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9,\ c+4,\ 6c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6,\ c+5\}$

Según coloquemos el elemento $4c+11$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4c+11) = 1 \Rightarrow 6c+15 = 4c+11+c+4+c$
Si $\Delta(4c+11) = 2 \Rightarrow 5c+13 = 4c+11+2+c$
Si $\Delta(4c+11) = 3 \Rightarrow 4c+11 = 2c+6+c+5+c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(c+4) = 2}$

El elemento $5c+12 = 3c+8+c+4+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_2.

Obtenemos el caso **a2.1** si $\Delta(5c+12) = 1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(5c+12) = 3$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(5c+12) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+7,\ c+3$, $2c+8$ y $c+5$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9,\ 5c+12,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ c+4,\ c+3,\ 2c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6,\ c+5\}$

Según coloquemos el elemento $4c+11$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4c+11) = 1 \Rightarrow 5c+12 = 4c+11+1+c$
Si $\Delta(4c+11) = 2 \Rightarrow 4c+11 = 2c+8+c+3+c$
Si $\Delta(4c+11) = 3 \Rightarrow 4c+11 = 2c+6+c+5+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+12) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6,\ 5c+12\}$

El elemento $5c+12 = 4c+9+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $4c+9$ al conjunto A_3.

Se estudia el caso **a2.2.1** si $\Delta(4c+9) = 1$ y el caso **a2.2.2** si $\Delta(4c+9) = 2$.

a2.2.1) $\boldsymbol{\Delta(4c+9) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+16,\ 10c+22$,$8c+18$ y $5c+13$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9,\ 4c+9,\ 7c+16,\ 10c+22\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ c+4,\ 8c+18,\ 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6,\ 5c+12\}$

Según coloquemos el elemento $6c+15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(6c+15) = 1 \Rightarrow 7c+16 = 6c+15+1+c$
Si $\Delta(6c+15) = 2 \Rightarrow 6c+15 = 5c+13+2+c$
Si $\Delta(6c+15) = 3 \Rightarrow 6c+15 = 5c+12+3+c$

a2.2.2) $\boldsymbol{\Delta(4c+9) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+7,\ 8c+18,\ 7c+15$, $7c+16, 9c+19$, $12c+25$ y $6c+14$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9,\ 3c+7,\ 8c+18,\ 7c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ c+4,\ 4c+9,\ 7c+16,\ 9c+19\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6,\ 5c+12,\ 12c+25,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $11c+24$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(11c+24) = 1 \Rightarrow 11c+24 = 7c+15+3c+9+c$
Si $\Delta(11c+24) = 2 \Rightarrow 11c+24 = 7c+16+3c+8+c$
Si $\Delta(11c+24) = 3 \Rightarrow 11c+24 = 6c+14+4c+10+c$

CASO 5.2.2.2

b) $\Delta(3c+9)=2$

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6\}$

El elemento $4c+10 = 2c+6+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_3.
Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(c+4)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(c+4)=2$.

b1) $\Delta(c+4)=1$

El elemento $3c+9 = 2c+7+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+7$ al conjunto A_2.
Obtenemos el caso **b1.1** si $\Delta(2c+7)=1$ y el caso **b1.2** si $\Delta(2c+7)=3$.

b1.1) $\Delta(2c+7)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+17, 5c+13$ y $4c+11$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+4,\ 2c+7,\ 7c+17\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+9,\ 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6,\ 4c+11\}$

Según coloquemos el elemento $9c+21$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+21)=1 \Rightarrow 9c+21 = 7c+17+c+4+c$
Si $\Delta(9c+21)=2 \Rightarrow 9c+21 = 5c+13+3c+8+c$
Si $\Delta(9c+21)=3 \Rightarrow 9c+21 = 4c+11+4c+10+c$

b1.2) $\Delta(2c+7)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+17,\ 6c+15, 5c+13$ y $9c+21$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ c+4,\ 7c+17,\ 6c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+9,\ 5c+13\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6,\ 2c+7,\ 9c+21\}$

Según coloquemos el elemento $4c+11$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(4c+11)=1 \Rightarrow 6c+15 = 4c+11+c+4+c$
Si $\Delta(4c+11)=2 \Rightarrow 5c+13 = 4c+11+2+c$
Si $\Delta(4c+11)=3 \Rightarrow 9c+21 = 4c+10+4c+11+c$

b2) $\Delta(c+4)=2$

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+9,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $5c+13$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $2c+6=c+3+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+3$ al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **b2.1** si $\Delta(c+3)=1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(c+3)=2$.

b2.1) $\Delta(c+3)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+20, 7c+16$ y $6c+14$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13,\ c+3,\ 9c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+9,\ c+4,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $7c+17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+17)=1 \Rightarrow 9c+20=7c+17+c+3+c$
Si $\Delta(7c+17)=2 \Rightarrow 7c+17=3c+8+3c+9+c$
Si $\Delta(7c+17)=3 \Rightarrow 7c+17=6c+14+3+c$

b2.2) $\Delta(c+3)=2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+7,\ 2c+9, 4c+12$ y $c+6$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 5c+13,\ 3c+7,\ 2c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+8,\ 3c+9,\ c+4,\ c+3,\ 4c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 4c+10,\ 2c+6,\ c+6\}$

Según coloquemos el elemento $6c+16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(6c+16)=1 \Rightarrow 6c+16=2c+9+3c+7+c$
Si $\Delta(6c+16)=2 \Rightarrow 6c+16=4c+12+c+4+c$
Si $\Delta(6c+16)=3 \Rightarrow 6c+16=4c+10+c+6+c$

Resumimos el **Caso 5.2.2** en el siguiente esquema:

$$\Delta(4c+10)=3\begin{cases}\Delta(2c+6)=1\begin{cases}\Delta(c+5)=2\\ \Delta(c+5)=3\begin{cases}\Delta(c+4)=2\\ \Delta(c+4)=3\begin{cases}\Delta(6c+14)=1\\ \Delta(6c+14)=2\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(2c+6)=3\begin{cases}\Delta(3c+9)=1\begin{cases}\Delta(c+4)=1\\ \Delta(c+4)=2\begin{cases}\Delta(5c+12)=1\\ \Delta(5c+12)=3\begin{cases}\Delta(4c+9)=1\\ \Delta(4c+9)=2\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \Delta(3c+9)=2\begin{cases}\Delta(c+4)=1\begin{cases}\Delta(2c+7)=1\\ \Delta(2c+7)=3\end{cases}\\ \Delta(c+4)=2\begin{cases}\Delta(c+3)=1\\ \Delta(c+3)=2\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 5.3** con $\Delta(3c+8)=3$

CASO 5.3

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$

Como el elemento $4c+11=3c+8+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Analizaremos el **Caso 5.3.1** si se le asigna el color $\Delta(4c+11)=1$ y el **Caso 5.3.2** si se le asigna el color $\Delta(4c+11)=2$.

CASO 5.3.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$

CASO 5.3.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$

Desarrollaremos estos casos hasta conseguir soluciones monocromáticas a la ecuación
$x_1+x_2+c=x_3$

En el **Caso 5.3.1**

Como el elemento $3c+8=2c+5+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+5$ al conjunto A_3.

Estudiaremos el **Caso 5.3.1.1** si se le asigna el color $\Delta(2c+5)=1$ y el **Caso 5.3.1.2** si se le asigna el color $\Delta(2c+5)=2$

CASO 5.3.1.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$

El elemento $7c+16=4c+11+2c+5+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_1.

Estudiamos el **Caso 5.3.1.1 a** si $\Delta(7c+16)=2$ y el **Caso 5.3.1.1 b** si $\Delta(7c+16)=3$

CASO 5.3.1.1

a) $\boldsymbol{\Delta(7c+16)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$

El elemento $2c+5=c+4+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(c+4)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(c+4)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+20,\ 6c+15, 5c+12$ y $8c+19$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5,\ 9c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 7c+16,\ c+4,\ 6c+15\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 5c+12,\ 8c+19\}$

Como el elemento $2c+6=c+4+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+6$ al conjunto A_2.

Se estudia el caso **a1.1** si $\Delta(2c+6)=1$ y el caso **a1.2** si $\Delta(2c+6)=3$.

a1.1) $\boldsymbol{\Delta(2c+6)=1}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $6c+14$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5,\ 9c+20,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 7c+16,\ c+4,\ 6c+15\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 5c+12,\ 8c+19,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}17$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(7c + 17) = 1 \Rightarrow 7c + 17 = 4c + 11 + 2c + 6 + c$
Si $\Delta(7c + 17) = 2 \Rightarrow 7c + 17 = 6c + 15 + 2 + c$
Si $\Delta(7c + 17) = 3 \Rightarrow 7c + 17 = 6c + 14 + 3 + c$

a1.2) $\boldsymbol{\Delta(2c + 6) = 3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $6c + 14$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c + 11,\ 2c + 5,\ 9c + 20,\ 6c + 14\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 7c + 16,\ c + 4,\ 6c + 15\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c + 8,\ 5c + 12,\ 8c + 19,\ 2c + 6\}$

Según coloquemos el elemento $5c{+}13$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(5c + 13) = 1 \Rightarrow 6c + 14 = 5c + 13 + 1 + c$
Si $\Delta(5c + 13) = 2 \Rightarrow 6c + 15 = 5c + 13 + 2 + c$
Si $\Delta(5c + 13) = 3 \Rightarrow 8c + 19 = 5c + 13 + 2c + 6 + c$

a2) $\boldsymbol{\Delta(c + 4) = 3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $5c + 12$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c + 11,\ 2c + 5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 7c + 16,\ 5c + 12\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c + 8,\ c + 4\}$

Como el elemento $7c + 16 = 6c + 14 + 2 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $6c + 14$ al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **a2.1** si $\Delta(6c + 14) = 1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(6c + 14) = 3$.

a2.1) $\boldsymbol{\Delta(6c + 14) = 1}$

Como el elemento $6c{+}14 = 3c{+}9{+}2c{+}5{+}c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c + 9$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **a2.1.1** si $\Delta(3c + 9) = 2$ y el caso **a2.1.2** si $\Delta(3c + 9) = 3$.

a2.1.1) $\boldsymbol{\Delta(3c + 9) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c + 7$ y $9c + 21$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c + 11,\ 2c + 5,\ 6c + 14,\ 2c + 7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 7c + 16,\ 5c + 12,\ 3c + 9\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c + 8,\ c + 4,\ 9c + 21\}$

Según coloquemos el elemento $11c{+}25$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas*

a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(11c+25) = 1 \Rightarrow 11c + 25 = 6c + 14 + 4c + 11 + c$
Si $\Delta(11c+25) = 2 \Rightarrow 11c + 25 = 7c + 16 + 3c + 9 + c$
Si $\Delta(11c+25) = 3 \Rightarrow 11c + 25 = 6c + 14 + 4c + 11 + c$

a2.1.2) $\Delta(3c+9) = 3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+7$, $5c+13$, $c+6$, $2c+6$ y $c+3$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5,\ 6c+14,\ 3c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 7c+16,\ 5c+12,\ 5c+13,\ c+6,\ 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ c+4,\ 3c+9,\ c+3\}$

Según coloquemos el elemento $2c$+7 en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(2c+7) = 1 \Rightarrow 6c + 14 = 3c + 7 + 2c + 7 + c$
Si $\Delta(2c+7) = 2 \Rightarrow 5c + 13 = 2c + 6 + 2c + 7 + c$
Si $\Delta(2c+7) = 3 \Rightarrow 2c + 7 = c + 4 + 3 + c$

a2.2) $\Delta(6c+14) = 3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+10$, $2c+7$, $5c+11$, $3c+9$ y $c+5$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5,\ 4c+10,\ 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 7c+16,\ 5c+12,\ 5c+11,\ 3c+9\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ c+4,\ 6c+14,\ c+5\}$

Según coloquemos el elemento c+3 en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+3) = 1 \Rightarrow 4c + 10 = 2c + 7 + c + 3 + c$
Si $\Delta(c+3) = 2 \Rightarrow 5c + 12 = 3c + 9 + c + 3 + c$
Si $\Delta(c+3) = 3 \Rightarrow 3c + 8 = c + 5 + c + 3 + c$

CASO 5.3.1.1

b) $\Delta(7c+16) = 3$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 7c+16\}$

El elemento $4c + 11 = 3c + 10 + 1 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c+10$ al conjunto A_1.
Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(3c+10) = 2$ y el caso **b2** si $\Delta(3c+10) = 3$.

b1) $\Delta(3c+10) = 2$

Como el elemento $2c + 5 = c + 4 + 1 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_1.

Obtenemos el caso **b1.1** si $\Delta(c+4)=2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(c+4)=2$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+14$, $4c+9$, $8c+19$, $c+6$ y $6c+15$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5,\ 5c+14,\ 4c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+10,\ c+4,\ 8c+19\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 7c+16,\ c+6,\ 6c+15\}$

Según coloquemos el elemento $10c+23$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(10c+23)=1 \Rightarrow 10c+23=5c+14+4c+9+c$
Si $\Delta(10c+23)=2 \Rightarrow 10c+23=8c+19+c+4+c$
Si $\Delta(10c+23)=3 \Rightarrow 10c+23=6c+15+3c+8+c$

b1.2) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $5c+12$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

Como el elemento $5c+12=3c+10+c+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+2$ al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **b1.2.1** si $\Delta(c+2)=1$ y el caso **b1.2.2** si $\Delta(c+2)=3$.

b1.2.1) $\boldsymbol{\Delta(c+2)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $10c+19$, $6c+13$, $4c+7$, $2c+3$ y $8c+17$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5,\ c+2,\ 10c+19\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+10,\ 5c+12,\ 6c+13,\ 4c+7\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 7c+16,\ c+4,\ 2c+3,\ 8c+17\}$

Según coloquemos el elemento $11c+20$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(11c+20)=1 \Rightarrow 11c+20=10c+19+1+c$
Si $\Delta(11c+20)=2 \Rightarrow 11c+20=6c+13+4c+7+c$
Si $\Delta(11c+20)=3 \Rightarrow 11c+20=8c+17+2c+3+c$

b1.2.2) $\boldsymbol{\Delta(c+2)=3}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $3c+6$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+10,\ 5c+12,\ 3c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 7c+16,\ c+4,\ c+2\}$

Según coloquemos el elemento $c+6$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+6) = 1 \Rightarrow 11c + 20 = 10c + 19 + 1 + c$
Si $\Delta(c+6) = 2 \Rightarrow 11c + 20 = 6c + 13 + 4c + 7 + c$
Si $\Delta(c+6) = 3 \Rightarrow 11c + 20 = 8c + 17 + 2c + 3 + c$

b2) $\quad \boldsymbol{\Delta(3c+10) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 7c+16,\ 3c+10\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $3c+6$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $7c+18 = 3c+8+3c+10+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer este elemento al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **b2.1** si $\Delta(7c+18) = 1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(7c+18) = 2$.

b2.1) $\quad \boldsymbol{\Delta(7c+18) = 1}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $4c+13$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5,\ 7c+18\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+6,\ 4c+13\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 7c+16,\ 3c+10\}$

Según coloquemos el elemento $8c+19$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(8c+19) = 1 \Rightarrow 8c + 19 = 7c + 18 + 1 + c$
Si $\Delta(8c+19) = 2 \Rightarrow 8c + 19 = 4c + 13 + 3c + 6 + c$
Si $\Delta(8c+19) = 3 \Rightarrow 8c + 19 = 7c + 16 + 3 + c$

b2.2) $\quad \boldsymbol{\Delta(7c+18) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $11c+24$, $5c+10$, $6c+13$, $8c+19$, $c+4$ y $c+6$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 2c+5,\ 11c+24,\ 5c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 3c+6,\ 7c+18,\ 6c+13,\ 8c+19,\ c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 7c+16,\ 3c+10,\ c+6\}$

Según coloquemos el elemento $5c+14$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(5c+14) = 1 \Rightarrow 11c + 24 = 5c + 14 + 5c + 10 + c$
Si $\Delta(5c+14) = 2 \Rightarrow 7c + 18 = 5c + 14 + c + 4 + c$
Si $\Delta(5c+14) = 3 \Rightarrow 5c + 14 = 3c + 8 + c + 6 + c$

Resumimos el **Caso 5.3.1.1** en el esquema siguiente:

$$\Delta(4c+11)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(2c+5)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(7c+16)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(c+4)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(2c+6)=1\\ \Delta(2c+6)=3\end{array}\right.\\ \\ \Delta(c+4)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(6c+14)=1\left\{\begin{array}{l}\Delta(3c+9)=1\\ \Delta(3c+9)=3\end{array}\right.\\ \Delta(6c+14)=3\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \\ \Delta(7c+16)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(3c+10)=2\left\{\begin{array}{l}\Delta(c+4)=2\\ \Delta(c+4)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(c+2)=1\\ \Delta(c+2)=3\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \\ \Delta(3c+10)=3\left\{\begin{array}{l}\Delta(7c+18)=1\\ \Delta(7c+18)=2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \\ \Delta(2c+5)=2\end{array}\right.$$

Continuamos con el **Caso 5.3.1.2** con $\Delta(2c+5)=2$

CASO 5.3.1.2

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$

El elemento $5c+12=4c+11+1+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_1.

Estudiamos el **Caso 5.3.1.2 a** si $\Delta(5c+12)=2$ y el **Caso 5.3.1.2 b** si $\Delta(5c+12)=3$

CASO 5.3.1.2

a) $\boldsymbol{\Delta(5c+12)=2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$

El elemento $2c+5=c+3+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+3$ al conjunto A_2.

Se estudia el caso **a1** si $\Delta(c+3)=1$ y el caso **a2** si $\Delta(c+3)=3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(c+3)=1}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $6c+14$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $6c+14 = 2c+6+3c+8+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+6$ al conjunto A_3.

Tendríamos el caso **a1.1** si $\Delta(2c+6) = 1$ y el caso **a1.2** si $\Delta(2c+6) = 2$.

a1.1) $\mathbf{\Delta(2c+6) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+17$, $2c+8$ y $c+5$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ c+3,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 5c+12,\ 7c+17,\ 2c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 6c+14,\ c+5\}$

Según coloquemos el elemento $4c+9$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4c+9) = 1 \Rightarrow 4c+9 = c+3++2c+6+c$
Si $\Delta(4c+9) = 2 \Rightarrow 7c+17 = 4c+9+2c+8+c$
Si $\Delta(4c+9) = 3 \Rightarrow 6c+14 = 4c+9+c+5+c$

a1.2) $\mathbf{\Delta(2c+6) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+11$, $7c+17, 10c+22$ y $8c+18$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ c+3,\ 5c+11,\ 7c+17\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 5c+12,\ 2c+6,\ 10c+22\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 6c+14,\ 8c+18\}$

Según coloquemos el elemento $4c+10$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(4c+10) = 1 \Rightarrow 5c+11 = 4c+10+1+c$
Si $\Delta(4c+10) = 2 \Rightarrow 5c+12 = 4c+10+2+c$
Si $\Delta(4c+10) = 3 \Rightarrow 8c+18 = 4c+10+3c+8+c$

a2) $\mathbf{\Delta(c+3) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ c+3\}$

Como el elemento $2c+6 = c+3+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **a2.1** si $\Delta(2c+6) = 1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(2c+6) = 2$.

a2.1) $\mathbf{\Delta(2c+6) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+10$, $c+5$, $5c+11$, $c+4$, $3c+7$ y $3c+9$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 4c+11,\, 2c+6,\, 4c+10\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 2c+5,\, 5c+12,\, c+5,\, 5c+11,\, c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, c+3,\, 3c+7,\, 3c+9\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(7c+16) = 1 \Rightarrow 7c+16 = 4c+10+2c+6+c$
Si $\Delta(7c+16) = 2 \Rightarrow 7c+16 = 5c+11+c+5+c$
Si $\Delta(7c+16) = 3 \Rightarrow 7c+16 = 3c+9+3c+7+c$

a2.2) $\quad \boldsymbol{\Delta(2c+6) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+11$, $2c+7$ y $4c+10$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 4c+11,\, 5c+11,\, 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 2c+5,\, 5c+12,\, 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, c+3,\, 4c+10\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(8c+18) = 1 \Rightarrow 8c+18 = 5c+11+2c+7+c$
Si $\Delta(8c+18) = 2 \Rightarrow 8c+18 = 5c+12+2c+6+c$
Si $\Delta(8c+18) = 3 \Rightarrow 8c+18 = 4c+10+3c+8+c$

CASO 5.3.1.2

b) $\quad \boldsymbol{\Delta(5c+12) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 4c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 2c+5\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 5c+12\}$

El elemento $5c+12 = 3c+8+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_3.

Obtenemos el caso **b1** si $\Delta(c+4) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(c+4) = 2$.

b1) $\quad \boldsymbol{\Delta(c+4) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c+20$, $6c+15$, $4c+9$, $7c+16$, $3c+10$ y $11c+24$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 4c+11,\, c+4,\, 9c+20\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 2c+5,\, 6c+15,\, 4c+9,\, 7c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 5c+12,\, 3c+10,\, 11c+24\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}7$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(2c+7) = 1 \Rightarrow 4c+11 = 2c+7+c+4+c$
Si $\Delta(2c+7) = 2 \Rightarrow 7c+16 = 2c+7+4c+9+c$
Si $\Delta(2c+7) = 3 \Rightarrow 3c+10 = 2c+7+3+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $4c+9$, $6c+15$, $9c+20$ y $7c+16$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 4c+11,\ 4c+9,\ 6c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 2c+5,\ c+4,\ 9c+20\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 5c+12,\ 7c+16\}$

Según coloquemos el elemento $11c+24$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$
Si $\Delta(11c+24) = 1 \Rightarrow 11c+24 = 6c+15+4c+9+c$
Si $\Delta(11c+24) = 2 \Rightarrow 11c+24 = 9c+20+c+4+c$
Si $\Delta(11c+24) = 3 \Rightarrow 11c+24 = 7c+16+3c+8+c$

Resumimos el **Caso 5.3.1.2** en el esquema siguiente:

$$\Delta(2c+5)=2 \begin{cases} \Delta(5c+12)=2 \begin{cases} \Delta(c+3)=1 \begin{cases} \Delta(2c+6)=1 \\ \Delta(2c+6)=2 \end{cases} \\ \Delta(c+3)=3 \begin{cases} \Delta(2c+6)=1 \\ \Delta(2c+6)=2 \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(5c+12)=3 \begin{cases} \Delta(c+4)=1 \\ \Delta(c+4)=2 \end{cases} \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 5.3.2** con $\Delta(4c+11) = 2$

CASO 5.3.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$

Como el elemento $4c+11 = 3c+9+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $3c+9$ al conjunto A_2.

Estudiaremos el **Caso 5.3.2.1** si se le asigna el color $\Delta(3c+9) = 1$ y el **Caso 5.3.2.2** si se le asigna el color $\Delta(3c+9) = 3$

CASO 5.3.2.1

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$

El elemento $3c+9 = 2c+8+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+8$ al conjunto A_1.

Estudiamos el **Caso 5.3.2.1 a** si $\Delta(2c+8) = 2$ y el **Caso 5.3.2.1 b** si $\Delta(2c+8) = 3$

CASO 5.3.2.1

a) $\boldsymbol{\Delta(2c+8) = 2}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11,\ 2c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8\}$

El elemento $2c+8 = c+6+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+6$ al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(c+6) = 1$ y el caso **a2** si $\Delta(c+6) = 3$.

a1) $\boldsymbol{\Delta(c+6) = 1}$

Introducimos en el conjunto A_3 el elemento $c+3$ *libre de suma estricta*.

Se introduce **a la fuerza** el elemento $c+3$ en el conjunto A_3 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9,\ c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11,\ 2c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ c+3\}$

Como el elemento $3c+8 = c+5+c+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_3.

Obtenemos el caso **a1.1** si $\Delta(c+5) = 1$ y el caso **a1.2** si $\Delta(c+5) = 2$.

a1.1) $\boldsymbol{\Delta(c+5) = 1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+17$, $5c+13$, $2c+6$, $9c+22$, $5c+14$ y $6c+16$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9,\ c+6,\ c+5,\ 7c+17,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11,\ 2c+8,\ 2c+6,\ 9c+22\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ c+3,\ 5c+14,\ 6c+16\}$

Según coloquemos el elemento $7c+19$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$

Si $\Delta(7c+19) = 1 \Rightarrow 7c+19 = 5c+13+c+6+c$
Si $\Delta(7c+19) = 2 \Rightarrow 7c+19 = 4c+11+2c+8+c$
Si $\Delta(7c+19) = 3 \Rightarrow 7c+19 = 6c+16+3+c$

a1.2) $\Delta(c+5)=2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+15, 4c+10$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1,A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+9,\, c+6,\, 6c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11,\, 2c+8,\, c+5,\, 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, c+3,\, 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}6$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$
Si $\Delta(2c+6)=1 \Rightarrow 6c+15=3c+9+2c+6+c$
Si $\Delta(2c+6)=2 \Rightarrow 4c+11=2c+6+c+5+c$
Si $\Delta(2c+6)=3 \Rightarrow 2c+6=c+3+3+c$

a2) $\Delta(c+6)=3$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11,\, 2c+8\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, c+6\}$

Como el elemento $5c+13=4c+11+2+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_2.
Se estudia el caso **a2.1** si $\Delta(5c+13)=1$ y el caso **a2.2** si $\Delta(5c+13)=3$.

a2.1) $\Delta(5c+13)=1$

Como el elemento $5c+13=3c+9+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_1.
Tendríamos el caso **a2.1.1** si $\Delta(c+4)=2$ y el caso **a2.1.2** si $\Delta(c+4)=3$.

a2.1.1) $\Delta(c+4)=2$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+6$, $4c+12$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+9,\, 5c+13,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11,\, 2c+8,\, c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, c+6,\, 4c+12,\, 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$
Si $\Delta(6c+15)=1 \Rightarrow 6c+15=3c+9+2c+6+c$
Si $\Delta(6c+15)=2 \Rightarrow 6c+15=4c+11+c+4+c$
Si $\Delta(6c+15)=3 \Rightarrow 6c+15=2c+7+3c+8+c$

a2.1.2) $\Delta(c+4)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $3c+10$, $3c+11$, $2c+9$ y $7c+19$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9,\ 5c+13,\ 3c+10,\ 3c+11\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11,\ 2c+8,\ 2c+9\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ c+6,\ c+4,\ 7c+19\}$

Según coloquemos el elemento $c+2$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+2) = 1 \Rightarrow 5c+13 = 3c+11+c+2+c$
Si $\Delta(c+2) = 2 \Rightarrow 4c+11 = 2c+9+c+2+c$
Si $\Delta(c+2) = 3 \Rightarrow 3c+8 = c+2+c+6+c$

a2.2) $\boldsymbol{\Delta(5c+13) = 3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $7c+19$, $9c+21$ y $4c+10$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9,\ 7c+19,\ 9c+21\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11,\ 2c+8,\ 4c+10\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ c+6,\ 5c+13\}$

Según coloquemos el elemento $c+2$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+2) = 1 \Rightarrow 9c+21 = c+2+7c+19+c$
Si $\Delta(c+2) = 2 \Rightarrow 4c+10 = c+2+2c+8+c$
Si $\Delta(c+2) = 3 \Rightarrow 3c+8 = c+2+c+6+c$

CASO 5.3.2.1

b) $\boldsymbol{\Delta(2c+8) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 3c+9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 2c+8\}$

El elemento $5c+13 = 4c+11+2+c$ es una solución monocromática, por tanto no puede pertenecer al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(5c+13) = 1$ y el caso **b2** si $\Delta(5c+13) = 3$.

b1) $\boldsymbol{\Delta(5c+13) = 1}$

Como el elemento $5c+13 = 3c+9+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_1.

Se estudia el caso **b1.1** si $\Delta(c+4) = 2$ y el caso **b1.2** si $\Delta(c+4) = 3$.

b1.1) $\boldsymbol{\Delta(c+4) = 2}$

Como el elemento $4c+11 = 2c+7+c+4+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+7$ al conjunto A_2.

Tendríamos el caso **b1.1.1** si $\Delta(2c+7) = 1$ y el caso **b1.1.2** si $\Delta(2c+7) = 3$.

b1.1.1) $\Delta(2c+7)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+16$ y $4c+12$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+9,\, 5c+13,\, 2c+7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11,\, c+4,\, 6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 2c+8,\, 4c+12\}$

Según coloquemos el elemento $8c+20$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+20)=1 \Rightarrow 8c+20=5c+13+2c+7+c$
Si $\Delta(8c+20)=2 \Rightarrow 8c+20=6c+16+c+4+c$
Si $\Delta(8c+20)=3 \Rightarrow 8c+20=4c+12+3c+8+c$

b1.1.2) $\Delta(2c+7)=3$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+15$, $6c+14$, $2c+6$ y $4c+10$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

0 $A_1 \supseteq \{1,\, 3c+9,\, 5c+13,\, 6c+15\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11,\, c+4,\, 6c+14\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 2c+8,\, 2c+7,\, 2c+6,\, 4c+10\}$

Según coloquemos el elemento $7c+16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(7c+16)=1 \Rightarrow 7c+16=6c+15+1+c$
Si $\Delta(7c+16)=2 \Rightarrow 7c+16=6c+14+2+c$
Si $\Delta(7c+16)=3 \Rightarrow 7c+16=4c+10+2c+6+c$

b1.2) $\Delta(c+4)=3$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+9,\, 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 2c+8,\, c+4\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $4c+12$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

Como el elemento $2c+8=c+5+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_3.

Se obtiene el caso **b1.2.1** si $\Delta(c+5)=1$ y el caso **b1.2.2** si $\Delta(c+5)=2$.

b1.2.1) $\Delta(c+5)=1$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $2c+6$ y $5c+14$ en los conjuntos A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+9,\, 5c+13,\, c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11,\, 4c+12,\, 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 2c+8,\, c+4,\, 5c+14\}$

Según coloquemos el elemento $7c{+}18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(7c + 18) = 1 \Rightarrow 7c + 18 = 5c + 13 + c + 5 + c$
Si $\Delta(7c + 18) = 2 \Rightarrow 7c + 18 = 4c + 12 + 2c + 6 + c$
Si $\Delta(7c + 18) = 3 \Rightarrow 7c + 18 = 5c + 14 + c + 4 + c$

b1.2.2) $\quad \boldsymbol{\Delta(c + 5) = 2}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $2c + 7$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c + 9,\, 5c + 13,\, 2c + 7\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c + 11,\, 4c + 12,\, c + 5\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c + 8,\, 2c + 8,\, c + 4\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}16$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(6c + 16) = 1 \Rightarrow 6c + 16 = 3c + 9 + 2c + 7 + c$
Si $\Delta(6c + 16) = 2 \Rightarrow 6c + 16 = 4c + 11 + c + 5 + c$
Si $\Delta(6c + 16) = 3 \Rightarrow 6c + 16 = 3c + 8 + 2c + 8 + c$

b2) $\quad \boldsymbol{\Delta(5c + 13) = 3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c + 9\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c + 11\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c + 8,\, 2c + 8,\, 5c + 13\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $9c + 21$, $4c + 10$, $8c + 20$ y $5c + 12$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c + 9,\, 9c + 21\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c + 11,\, 4c + 10,\, 8c + 20\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c + 8,\, 2c + 8,\, 5c + 13,\, 5c + 12\}$

Como el elemento $5c + 12 = 3c + 8 + c + 4 + c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c + 4$ al conjunto A_3.

Obtenemos el caso **b2.1** si $\Delta(c + 4) = 1$ y el caso **b2.2** si $\Delta(c + 4) = 2$.

b2.1) $\quad \boldsymbol{\Delta(c + 4) = 1}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $2c + 5$ en el conjunto A_2 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c + 9,\, 9c + 21,\, c + 4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c + 11,\, 4c + 10,\, 8c + 20,\, 2c + 5\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c + 8,\, 2c + 8,\, 5c + 13,\, 5c + 12\}$

Según coloquemos el elemento $c{+}5$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1 + x_2 + c = x_3$

Si $\Delta(c+5) = 1 \Rightarrow 3c+9 = c+5+c+4+c$
Si $\Delta(c+5) = 2 \Rightarrow 4c+10 = c+5+2c+5+c$
Si $\Delta(c+5) = 3 \Rightarrow 2c+8 = c+5+3+c$

b2.2) $\boldsymbol{\Delta(c+4) = 2}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+16$, $2c+6$ y $2c+7$ en los conjuntos A_1 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 3c+9,\, 9c+21,\, 6c+16,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11,\, 4c+10,\, 8c+20,\, c+4\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 2c+8,\, 5c+13,\, 5c+12,\, 2c+7\}$

Según coloquemos el elemento $6c{+}15$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c = x_3$
Si $\Delta(6c+15) = 1 \Rightarrow 6c+15 = 3c+9+2c+6+c$
Si $\Delta(6c+15) = 2 \Rightarrow 6c+15 = 4c+11+c+4+c$
Si $\Delta(6c+15) = 3 \Rightarrow 6c+15 = 5c+12+3+c$

Resumimos el **Caso 5.3.2.1** en el esquema siguiente:

$$\Delta(3c+9)=1 \begin{cases} \Delta(2c+8)=2 \begin{cases} \Delta(c+6)=1 \begin{cases} \Delta(c+5)=1 \\ \Delta(c+5)=2 \end{cases} \\ \Delta(c+6)=3 \begin{cases} \Delta(5c+13)=1 \begin{cases} \Delta(c+4)=2 \\ \Delta(c+4)=3 \end{cases} \\ \Delta(5c+13)=3 \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(2c+8)=3 \begin{cases} \Delta(5c+13)=1 \begin{cases} \Delta(c+4)=2 \begin{cases} \Delta(2c+7)=1 \\ \Delta(2c+7)=3 \end{cases} \\ \Delta(c+4)=3 \begin{cases} \Delta(c+5)=1 \\ \Delta(c+5)=2 \end{cases} \end{cases} \\ \Delta(5c+13)=3 \begin{cases} \Delta(c+4)=1 \\ \Delta(c+4)=2 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Continuamos con el **Caso 5.3.2.2** con $\Delta(3c+9) = 3$

CASO 5.3.2.2

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 3c+9\}$

El elemento $3c+9=2c+6+3+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+6$ al conjunto A_3.

Analizaremos el **Caso 5.3.2.2 a** si $\Delta(2c+6)=1$ y el **Caso 5.3.2.2 b** si $\Delta(2c+6)=2$.

CASO 5.3.2.2

a) $\mathbf{\Delta(2c+6)=1}$

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 3c+9\}$

El elemento $2c+6=c+5+1+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+5$ al conjunto A_1.

Se obtiene el caso **a1** si $\Delta(c+5)=2$ y el caso **a2** si $\Delta(c+5)=3$.

a1) $\mathbf{\Delta(c+5)=2}$

Como el elemento $2c+7=c+5+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $2c+7$ al conjunto A_2.

Se estudia el caso **a1.1** si $\Delta(2c+7)=1$ y el caso **a1.2** si $\Delta(2c+7)=3$.

a1.1) $\mathbf{\Delta(2c+7)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+16, 7c+17$ y $5c+13$ en los conjuntos A_1 ,A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+6,\ 2c+7,\ 6c+16\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11,\ c+5,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 3c+9,\ 5c+13\}$

Según coloquemos el elemento $9c+22$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+22)=1 \Rightarrow 9c+22=6c+16+2c+6+c$
Si $\Delta(9c+22)=2 \Rightarrow 9c+22=7c+17+c+5+c$
Si $\Delta(9c+22)=3 \Rightarrow 9c+22=5c+13+3c+9+c$

a1.2) $\mathbf{\Delta(2c+7)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $6c+16$,$5c+13$, $7c+17$ y $9c+22$ en los conjuntos A_1, A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 2c+6,\ 6c+16,\ 5c+13\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11,\ c+5,\ 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 3c+9,\ 2c+7,\ 9c+22\}$

Según coloquemos el elemento $8c+19$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+19)=1 \Rightarrow 8c+19=5c+13+2c+6+c$
Si $\Delta(8c+19)=2 \Rightarrow 8c+19=7c+17+2+c$
Si $\Delta(8c+19)=3 \Rightarrow 9c+22=8c+19+3+c$

a2) $\quad \boldsymbol{\Delta(c+5)=3}$

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+6\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 3c+9,\, c+5\}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+13,\ 5c+14,\ c+4\ ,\ 4c+12,\ 2c+8$ y $7c+17$ en los conjuntos A_1 y A_2 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 2c+6,\, 5c+13,\, 5c+14,\, c+4\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11,\, 4c+12,\, 2c+8,\, 7c+17\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 3c+9,\, c+5\}$

Según coloquemos el elemento $2c{+}5$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(2c+5)=1 \Rightarrow 2c+5=c+4+1+c$
Si $\Delta(2c+5)=2 \Rightarrow 7c+17=4c+12+2c+5+c$
Si $\Delta(2c+5)=3 \Rightarrow 3c+8=2c+5+3+c$

CASO 5.3.2.2

b) $\quad \boldsymbol{\Delta(2c+6)=2}$

$A_1 \supseteq \{1\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11,\, 2c+6\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 3c+9\}$

Se introduce **a la fuerza** el elemento $7c+17$ en el conjunto A_1 que mantiene la propiedad de ser *libre de suma estricta*.

El elemento $2c+6=c+4+2+c$ es una solución monocromática, no puede pertenecer el elemento $c+4$ al conjunto A_2.

Se obtiene el caso **b1** si $\Delta(c+4)=1$ y el caso **b2** si $\Delta(c+4)=3$.

b1) $\quad \boldsymbol{\Delta(c+4)=1}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $c+5\ ,\ 6c+16$ y $5c+13$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\, 7c+17,\, c+4,\, c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\, 4c+11,\, 2c+6,\, 6c+16\}$
$A_3 \supseteq \{3,\, 3c+8,\, 3c+9,\, 5c+13\}$

Según coloquemos el elemento $9c{+}22$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(9c+22)=1 \Rightarrow 9c+22=7c+17+c+5+c$
Si $\Delta(9c+22)=2 \Rightarrow 9c+22=6c+16+2c+6+c$
Si $\Delta(9c+22)=3 \Rightarrow 9c+22=5c+13+3c+9+c$

b2) $\boldsymbol{\Delta(c+4)=3}$

Se introducen **a la fuerza** los elementos $5c+13$, $c+5$, $5c+12$ y $6c+14$ en los conjuntos A_1 , A_2 y A_3 que mantienen la propiedad de ser *libres de suma estricta* y obtenemos:

$A_1 \supseteq \{1,\ 7c+17,\ 5c+13,\ c+5\}$
$A_2 \supseteq \{2,\ 4c+11,\ 2c+6,\ 5c+12\}$
$A_3 \supseteq \{3,\ 3c+8,\ 3c+9,\ c+4,\ 6c+14\}$

Según coloquemos el elemento $8c{+}18$ en A_1, A_2 ó A_3 se obtienen las siguientes soluciones *monocromáticas* a la ecuación $x_1+x_2+c=x_3$

Si $\Delta(8c+18)=1 \Rightarrow 8c+18=7c+17+1+c$
Si $\Delta(8c+18)=2 \Rightarrow 8c+18=5c+12+2c+6+c$
Si $\Delta(8c+18)=3 \Rightarrow 8c+18=6c+14+c+4+c$

Resumimos el **Caso 5.3.2.2** en el esquema siguiente:

$$\Delta(3c+9)=3\begin{cases}\Delta(2c+6)=1\begin{cases}\Delta(c+5)=2\begin{cases}\Delta(2c+7)=1\\ \Delta(2c+7)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(c+5)=3\end{cases}\\ \\ \Delta(2c+6)=2\begin{cases}\Delta(c+4)=1\\ \Delta(c+4)=3\end{cases}\end{cases}$$

Con este último caso hemos concluido la demostración de la cota superior, es decir que *Número de Rado estricto*, $SR(3,c)$ satisface $SR(3,c)\leq 13c+22$, siendo $c>0$.

Los tres subconjuntos *libres de suma estricta* en el sentido de Rado son:

$$A_1=\{1,..c+2,3c+7,..,4c+7,9c+17,.,10c+17,12c+21,...,13c+21\}$$

$$A_2=\{c+3,...,3c+6,10c+18,...,12c+20\}$$

$$A_3=\{4c+8,4c+9,...,9c+16\}$$

$\square$

Capítulo 11

Conclusiones y Problemas Abiertos

En este capítulo resumiremos los avances que hemos obtenido de los números de Schur estrictos y de los números de Rado estrictos en el desarrollo de esta tesis, así como las nuevas líneas para seguir avanzando.

11.1. Conclusiones

Nuestro objetivo en esta tesis ha sido encontrar nuevos valores exactos, cotas inferiores y/ó cotas superiores de los números de Schur estrictos y de los números de Rado estrictos.

En la primera parte de la memoria nos hemos centrado en el estudio de los números de Schur estrictos. Usando la aplicación Blacktrack hemos conseguido encontrar nuevos valores exactos. Hemos probado una relación entre estos números y los números de Ramsey que ha dado lugar a una cota superior y también hemos obtenido cotas inferiores, así como un procedimiento para continuar mejorando éstas. La relación entre los números de Schur estrictos y los números de Ramsey es de gran relevancia, puesto que el avance en nuestras cotas inferiores puede dar lugar a nuevos avances en los números de Ramsey, ó bien con los progresos que vayan surgiendo de los números de Ramsey mejorar las cotas superiores de los números de Schur estrictos.

La segunda parte de la memoria la hemos dedicado a los resultados que consideramos más importantes de este trabajo, el cálculo de los valores exactos de los números de Rado estrictos, consiguiendo $SR(2, c)$ y $SR(3, c)$.

11.2. Problemas Abiertos

- Avanzar en el cálculo de nuevos valores exactos de los números de Schur y de los números de Schur estrictos, mejorando el algoritmo Backtrack y/ó utilizando programación en paralelo, así como buscar nuevas estrategias como movernos sobre rectas fijadas.
- Seguir afinando las cotas inferiores.
- Estudiar las posibilidades de avances en los números de Ramsey usando los nuevos resultados que vayamos obteniendo de los números de Schur estrictos y viceversa.
- Encontrar el valor exacto de $SR(4, c)$ ó bien acotaciones.
- Hacer estudios similares considerando en lugar de sucesiones de enteros positivos, sucesiones aritméticas ó sucesiones de primos.
- Buscar nuevos números de Rado estrictos considerando dos ó más ecuaciones diofánticas.

Referencias

[1] L.Abbot and D. Hanson, "A problem of Schur ands its generalizations" *Acta Arith.* , Vol.20, pp.175-197, 1972

[2] L.D. Baumert, "Sum-free sets", *J.P.L. Research Summary*, No 36-10, pp. 16-18,1961.

[3] A. Beutelspacher and W. Brestovansky "Generalized Schur Number." *Lecture Note Math.Springer-Verlag*, 969, pp.30-38, 1982

[4] P. Bornsztein , "On an extension of a theorem of Schur " *Acta Arith.* , Vol.101.4, pp.395-399, 2002

[5] S.A. Burr,S. Loo "On Rado number I", preprint

[6] S.A. Burr,S. Loo "On Rado number II", preprint

[7] G.Exoo "A Lower Bound for Schur Numbers and Multicolor Ramsey Numbers of K_3" *The Electronic Journal of Combinatorics* , Vol.1, pp.3, 1994

[8] P. Fernández Gallardo and J.L. Fernández Pérez "El desorden absoluto es imposible. La Teoría de Ramsey" *La Gaceta*, pp.1-23

[9] S. Fettes,R.L.Kramer and S.P. Radziszowki "An Upper Bound of 62 on the Classical Ramsey Numbers $R(3,3,3,3)$" *Ars Combinatoria* , Vol.72, pp.41-63, 2004

[10] H.Fredicken and M.M. Sweet "Symmetric Sum-Free Partitions and Lower Bounds for Schur Numbers." *The Electronic Journal of Combinatorics* , Vol.7, pp.1-9, 2000

[11] R.E. Greenwood and A.M. Gleason "Combinatorial relations and chromatics graphs" *J. Math. Canada* , Vol7, pp. 1-7,1955

[12] S.Guo y Z-W Sun " Determination of the two-color Rado number for $a_1x_1+a_2x_2+...+a_mx_m = x_0$" *J.combi.Theory Ser. A 115* Vol 2, pp.345-353, 2008

[13] K. Helsgaun " CBack: A Simple Tool for Backtrack Programming in C " *Softw. pract.exp.* Vol 25,Nº 8 pp.905-934,1995

[14] D. Hilbert "Uber die Irreduzibilität ganzer ratinaler Functionen mit ganzzahligen Koeffzienten " *J. Reine Ange. Math* Vol 110,pp.104-129,1892

[15] R.W. Irwing "An extension of Schur´s theorem on sum-free partitions" *Acta Arithmetica* , vol XXV pp.55-64,1973

[16] W. Kosek y D. Schaal "Rado Numbers for the Equation $x_1+...+x_{m-1}+c = x_m$ for Negative Values of c" *Advances in Applied Mathematics* Vol 27, pp.805-815, 2001

[17] J. Nesetril y M. Rosenfeld "I. Schur, C.E. Shannon and Ramsey Numbers, a short story" *Discrete Mathematics* Vol 229, pp.185-195, 2001

[18] J. J. O'Connor and E. F. Robertson MacTutor History of Mathematics [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/References/Schur.html] JOC/EFR August 2005

[19] R. Rado, "Studien zur Kombinatorik", *Math. Z.*, Vol 36, pp. 424-480,1933.

[20] R. Rado, "Some recent results in combinatorial analysis", *Congres International des Mathematiciens, Oslo* , 1936.

[21] S.Radziszowki "Small Ramsey Numbers Dynamic Survey DS1" *The Electronic Journal of Combinatorics* , Vol.1, pp.35, 1999

[22] A. Robertson "Difference Ramsey Numbers and Issai Numbers *Abstract* ,

[23] D. Schaal "On generalized Schur Numbers" *Congressus Numeratium* , Vol 98,pp.178-187,1993

[24] D. Schaal "A family of 3-color Rado Numbers." *Congressus Numeratium* , Vol 111,pp.150-160,1995

[25] I.Schur, "Uber die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m (modp)$", *Jber. Deutsch. Math.- Verein.* , Vol.25, pp. 114-117,1916.

[26] W. Sierpinski "Elementary Theory of Numbers" ,Warszawa pp.409, 1964

[27] W. Sierpinski " Theory of Numbers",part 2 ,Warszawa pp. 440 1959

[28] G.W. Walker "Solution to the problem E985" *Amer. Math.* , Monthly 59, pp.253, 1952

[29] E.G.Whitehead "The Ramsey number $N(3, 3, 3, 3; 2)$" *Discrete Mathematics* , Vol.4, pp.389-396, 1973

[30] S. Znám "Generalization of a number-theorical result" *Mat-Fyz. Casopis. Sloven . Akad Vied* , 16, pp.357-361,1966

[31] S. Znám "On k-thin sets and n-extensive graphs" *Mat-Fyz. Casopis. Sloven . Akad Vied* , 17, pp.297-307,1967