Departamento de Análise Matemática

PROBLEMAS DE FRONTERA PARA ECUACIONES DINÁMICAS

Dolores Rodríguez Vivero

Universidade de Santiago de Compostela

Santiago de Compostela

- 2010 -

A mi madre y a mi hermano,
mis mejores maestros.

Agradecimientos

En estas líneas me gustaría expresar mi gratitud hacia todas aquellas personas que me ayudaron a realizar este trabajo. Especialmente, le doy las gracias a:

A la profesora María Victoria Otero Espinar, por brindarme su confianza, tanto profesional como personalmente y contagiarme su entusiasmo.

Al profesor Ravi Agarwal, por su apoyo e interés depositados en mí.

A la profesora Rosa Trinchet por su ayuda durante mi paso por el Departamento de Análisis.

Al Doctor Penzol, por escucharme y aconsejarme siempre que lo necesito.

A Laura y a Tamara, por nuestra gran complicidad.

A Alberto Villafañe, por darme fuerza y compartir conmigo su ilusión y optimismo constantemente.

A Sonia, por animarme en mis decisiones.

A Mateo, por transmitirme tranquilidad, serenidad y seguridad en todo momento.

Y a mi madre, por estar siempre a mi lado enseñándome a luchar por conseguir todos mis sueños.

Índice general

Introducción

Numerosos problemas que han surgido en diversas ciencias como la física, biología o economía han encontrado en las ecuaciones diferenciales y en las ecuaciones en diferencias modelos adecuados para su estudio y resolución. Estas ecuaciones han demostrado su eficacia a la hora de expresar matemáticamente procesos evolutivos continuos o discretos, respectivamente. Un análisis más profundo de algunos fenómenos muestra que en muchos casos estas ecuaciones no son suficientes para encontrar un modelo que los represente y los analice de una forma adecuada. Es así como las ecuaciones dinámicas surgen de la necesidad de encontrar modelos que se adapten mejor a la realidad. Con ellas se estudia la evolución de una gran cantidad de procesos definidos en conjuntos cerrados arbitrarios, resultando ser un adecuado modelo para diferentes problemas económicos y poblacionales. Pensar, por ejemplo, en la evolución de una especie en la que sus individuos viven en un determinado período de tiempo, por ejemplo en una estación, y justamente antes de su muerte ponen sus huevos y los nuevos individuos nacen al inicio de un nuevo período posterior; en [37] se pueden ver diferentes especies que siguen este comportamiento.

Los objetivos de la teoría de ecuaciones dinámicas en conjuntos cerrados de números reales, cuyo origen se encuentra en la tesis doctoral de Stefan Hilger defendida en 1988, son estudiar bajo una misma formulación ecuaciones diferenciales y en diferencias además de estudiar ecuaciones en un conjunto cerrado y no vacío arbitrario de números reales con partes discretas y continuas como puede ser una sucesión y su límite o un conjunto de Cantor, entre otros. Los conceptos básicos y propiedades fundamentales de esta teoría se pueden ver en [25, 26].

Una tarea importante de las matemáticas de hoy en día es armonizar lo continuo y lo discreto, para incluirlos en una matematica global y para eliminar la oscuridad de ambas.

E. T. Bell, Men of Mathematics, Simon and Schuster, New York, 1937.

El trabajo llevado a cabo en esta memoria se puede dividir en dos partes claramente diferenciadas, la primera de ellas, referida al análisis en conjuntos cerrados de números reales arbitrarios, donde se recogen y desarrollan las herramientas necesarias para el estudio, en la segunda, de la existencia de solución, en el sentido clásico, en el sentido de Carathéodory o en el sentido de las distribuciones de ecuaciones dinámicas de primer y segundo orden.

Respecto a la primera parte, recogida en el capítulo 1 y dedicada al análisis en conjuntos cerrados arbitrarios, nos hemos centrado en la teoría de la $\Delta-$medida y $\Delta-$integración de Lebesgue dado que el grado de desarrollo de éstas constituye una pieza clave en el estudio de la existencia de soluciones débiles de ecuaciones dinámicas. Los primeros resultados que hemos obtenido relacionados con este tema se recogen en la sección 1.3, donde se obtiene una nueva fórmula para el cálculo de la $\Delta-$integral de Lebesgue como suma de una integral de Lebesgue más una serie numérica en la que se pone de manifiesto la división del cálculo en sus partes discreta y real; dicha igualdad ha sido demostrada caracterizando previamente la $\Delta-$medida en términos de medidas conocidas. La fórmula anterior ha permitido no sólo calcular explícitamente el valor de las $\Delta-$primitivas de funciones elementales en conjuntos cerrados arbitrarios, lo cual hasta su conocimiento había sido imposible, sino también profundizar en aspectos importantes de la teoría de la $\Delta-$integración como son las diversas caracterizaciones de las funciones absolutamente continuas probadas en la sección 1.4, conocidas cuando el conjunto está formado solamente por puntos densos pero no para un conjunto cerrado arbitrario. Los resultados recogidos en las secciones 1.3 y 1.4 han permitido profundizar en otro de los aspectos fundamentales para la demostración de existencia de soluciones débiles de problemas de frontera como son los espacios de Sobolev. A pesar de la gran importancia de estos espacios y de la información detallada de que se dispone cuando éstos están definidos en un dominio del espacio euclídeo dotado de la medida de Lebesgue, el trabajo que realizamos en la sección 1.5 es el primero en el que se definen y estudian sus propiedades fundamentales cuando éstos están definidos en un conjunto cerrado y acotado arbitrario dotado de la $\Delta-$medida de Lebesgue; asimismo, hemos demostrado una equivalencia entre éstos y los usuales espacios de Sobolev definidos en un intervalo de la recta real. Además, este trabajo ha permitido probar en la sección 1.6 una desigualdad tipo Wirtinger que relaciona la norma en L^2_Δ de la potencia sigma de las funciones absolutamente continuas con $\Delta-$derivada en L^2_Δ con la norma en L^2_Δ de su $\Delta-$derivada, como consecuencia de la cual se deducen de forma inmediata algunas de las conocidas desigualdades tipo Wirtinger en los casos real y discreto.

Dedicamos los capítulos 2 y 3 a la segunda parte de nuestro trabajo, esto es, el estudio de ecuaciones dinámicas.

En el capítulo 2 se trata el problema de existencia de solución en el sentido débil de diversos problemas de ecuaciones dinámicas de primer orden.

En la sección 2.3 se demuestra la existencia de soluciones extremales de un problema con condiciones iniciales de primer orden en el que la función que define la parte no lineal de la ecuación es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory, como consecuencia de dicho resultado, se obtiene el análogo permitiendo discontinuidad en la parte no lineal de la ecuación; el método empleado es una adaptación del clásico método de Peano, esto es, la aproximación de las soluciones extremales mediante subsoluciones y sobresoluciones de dicho problema; como característica a destacar de este trabajo es que los resultados obtenidos son válidos en el caso discreto tanto para el problema implícito como para el explícito. La técnica de las sub y sobresoluciones ha sido empleada en diferentes aplicaciones de una gran cantidad de problemas de frontera tanto discretos como continuos. Esta teoría permite, bajo ciertas condiciones, dar pruebas constructivas de existencia de solución definiendo sucesiones monótonas que convergen a las soluciones extremales del problema considerado en un sector comprendido entre una subsolución y una sobresolución.

El objetivo de la sección 2.4 es el de demostrar la existencia de solución de un problema de frontera de primer orden con condiciones de frontera no lineales en el que la función que determina la parte no lineal de la ecuación es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory y asumiendo la existencia de un par de sub y sobresoluciones de dicho problema. Las hipótesis que verifica la función que define las condiciones en la frontera permiten que el problema estudiado cubra tanto las condiciones periódicas como las antiperiódicas; además, la dependencia funcional en la segunda variable posibilita otros tipos de condiciones de frontera no lineales diferentes. Asimismo, se ha demostrado la unicidad de solución de un problema de frontera que generaliza el antiperiódico y se ha desarrollado un método monótono para aproximarla.

La sección 2.5 está dedicada al estudio de existencia de soluciones extremales en presencia de subsoluciones y sobresoluciones de diversas ecuaciones dinámicas funcionales con condiciones de frontera funcionales en las que la parte no lineal de la ecuación es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory y se proporcionan diversos métodos monótonos para aproximarlas.

La sección 2.6 se dedica al estudio de la existencia, unicidad y aproximación de soluciones de un problema de frontera de primer orden en un intervalo de un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, que toma sus valores en otro subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ a través de su problema recíproco. Los resultados de existencia y aproximación de soluciones extremales para ecuaciones dinámicas con condiciones iniciales probados en secciones anteriores son la clave para obtener los resultados considerando ecuaciones dinámicas cuya parte no lineal es no negativa y verifican un cierto tipo de condiciones de Carathéodory inversas y discontinuidad.

En la sección 2.7 probamos la existencia y aproximación de soluciones extremales de un sistema con infinitas ecuaciones dinámicas funcionales con condiciones de frontera funcionales en presencia de subsoluciones y sobresoluciones. Los resultados obtenidos en secciones anteriores sobre la existencia de soluciones extremales para la ecuación dinámica escalar con condición inicial y el Teorema de Tarski son la base para la obtención de los resultados de esta sección.

Dedicamos el capítulo 3 al estudio de diversos problemas de ecuaciones dinámicas de segundo orden. Hemos utilizado un enfoque variacional, así como la teoría de puntos críticos, para establecer la existencia de múltiples soluciones positivas de diversas ecuaciones dinámicas, tanto regulares como singulares, de segundo orden con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera. En las secciones 3.2 y 3.3 se demuestra la existencia de soluciones en el sentido débil de ciertos problemas mientras que el objetivo de la sección 3.4 es probar la existencia de soluciones en el sentido de las distribuciones de otro problema. La desigualdad de Wirtinger será la clave para garantizar que el operador usado en la formulación variacional de los distintos problemas considerados es acotado superiormente y coercivo, y de ahí poder asegurar, por la teoría de puntos críticos, la existencia de un mínimo que será la solución débil del problema.

Los resultados obtenidos son muy novedosos en la literatura, tanto por la técnica empleada para demostrarlos como por la amplia clase de funciones que se pueden elegir en la parte no lineal de la ecuación.

Al comienzo de cada capítulo se incluye una introducción en la que se detallan los contenidos y objetivos del mismo.

Los trabajos de investigación que han dado lugar a esta memoria han sido publicados en diversas revistas científicas [10, 11, 12, 13, 14, 32, 33, 34, 74, 75, 76, 77].

Capítulo 1

Análisis en conjuntos cerrados de números reales

1.1. Introducción

En la sección 1.2 presentamos las definiciones y conceptos básicos de la teoría de ecuaciones dinámicas así como las propiedades fundamentales que se derivan de la definición de los operadores dados. Las demostraciones detalladas pueden verse en las monografías de Bohner y Peterson [25, 26].

En la sección 1.3 se introduce una medida, la $\Delta-$medida de Lebesgue, y la integración respecto de esa medida en un conjunto cerrado de números reales arbitrario $\mathbb{T}$.

Algunas de las primeras referencias que conocemos que tratan de medida e integración en subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ son [21, 61]. Posteriormente, Bohner y Guseinov han desarrollado, en [26, Capítulo 5], la teoría fundamental de la $\Delta-$integral de Lebesgue, además de establecer la relación entre Riemann y Lebesgue $\Delta-$integrales.

Sin embargo, la obtención del valor exacto de la $\Delta-$integral de una función Riemann $\Delta-$integrable en un conjunto cerrado arbitrario $\mathbb{T}$ era un problema que permanecía sin resolver, de hecho, la mayoría de las $\Delta-$primitivas de funciones elementales eran desconocidas para conjuntos cerrados $\mathbb{T}$ arbitrarios.

En el estudio que realizamos, comparamos la Lebesgue $\Delta-$integrabilidad con la Lebesgue integrabilidad y obtenemos una fórmula para calcular la Lebesgue $\Delta-$integral como una integral de Lebesgue en $\mathbb{T}$, más una serie de números reales en la que sólo están involucrados los puntos aislados por la derecha. Esto nos permitirá obtener $\Delta-$primitivas de funciones importantes en la teoría de ecuaciones dinámicas.

Para finalizar, en la subsección 1.3.5 se introducen los espacios L^p_Δ, relacionados con la $\Delta-$medida de Lebesgue, y se establece la relación entre los espacios L^p_Δ y los habituales espacios L^p relacionados con la medida de Lebesgue.

En la sección 1.4 establecemos el concepto de función absolutamente continua en un conjunto cerrado de números reales $\mathbb{T}$ y probamos una caracterización que generaliza la dada para el caso real en el clásico teorema de Banach-Zarecki. Además, probamos que, como en el caso real, la clase de funciones absolutamente continuas es aquella para la cual el teorema fundamental del cálculo es válido. A continuación obtenemos un criterio para la continuidad absoluta de la función inversa de una función absolutamente continua y estrictamente monótona en $\mathbb{T}$.

Los espacios de Sobolev son una herramienta fundamental en el análisis real, por ejemplo, en el uso de métodos variacionales para resolver problemas en ecuaciones diferenciales, en derivadas parciales y en ecuaciones en diferencias con condiciones de contorno. A pesar de que la teoría es bien conocida para funciones definidas en intervalos abiertos y acotados de números reales, ver [27], y es trivial para funciones definidas en subconjuntos acotados arbitrarios de números enteros, no estaba desarrollada en conjuntos cerrados arbitrarios de $\mathbb{R}$. En la sección 1.5 estudiaremos la teoría de los espacios de Sobolev de funciones definidas en un intervalo cerrado de conjuntos cerrados arbitrarios de números reales con la $\Delta-$medida de Lebesgue. Demostraremos que para estos espacios se verifican propiedades análogas a las de los espacios de Sobolev de funciones definidas en un intervalo abierto de números reales.

Las desigualdades de tipo Wirtinger juegan un papel muy importante en el desarrollo de técnicas variacionales para resolver problemas de frontera de ecuaciones diferenciales ordinarias, en derivadas parciales y ecuaciones en diferencias. Muchas de las versiones de esta clase de desigualdades han sido estudiadas en el caso continuo, ver [7, 22, 41, 55, 69, 71, 84], y en el caso discreto, ver [2, 7, 73]. En [3, Teorema 6.8] o en [25, Teorema 6.33], los autores prueban una desigualdad de tipo Wirtinger para la $\Delta-$integral de Riemann en un conjunto cerrado de números reales $\mathbb{T}$ arbitrario.

En la sección 1.6 estudiamos desigualdades de tipo Wirtinger para la $\Delta-$integral de Lebesgue en un conjunto cerrado arbitrario de números reales $\mathbb{T}$. Demostramos una desigualdad general para una clase de funciones absolutamente continuas en subintervalos cerrados de un adecuado subconjunto de $\mathbb{T}$. Utilizando esta expresión y suponiendo que $\mathbb{T}$ es acotado, deducimos una desigualdad general que es válida para toda función absolutamente continua en $\mathbb{T}$ que se anula en la frontera de $\mathbb{T}$ y tal que su $\Delta-$derivada pertenece a $L^2_\Delta([a,b)\cap\mathbb{T})$. Este tipo de desigualdades pueden ser aplicadas en el estudio de numerosos problemas de frontera para ecuaciones dinámicas y serán utilizadas en el capítulo 3 para demostrar, mediante técnicas variacionales y la teoría de puntos críticos, la existencia de múltiples soluciones positivas de algunas ecuaciones dinámicas de segundo orden con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera. La desigualdad será la clave para garantizar que el operador usado en la formulación variacional de los distintos problemas considerados es acotado superiormente y coercivo, y de ahí poder asegurar, por la teoría de puntos críticos, la existencia de un mínimo que será la solución débil del problema.

1.2. Conceptos básicos

En esta sección presentamos las definiciones y conceptos básicos de la teoría de ecuaciones dinámicas así como las propiedades fundamentales que se derivan de la definición da los operadores dados. Las demostraciones pueden verse en las monografías de Bohner y Peterson [25, 26].

Presentaremos, entre otros, los conceptos de $\Delta-$derivada y $\Delta-$integral de Riemann en subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ o el de función exponencial $e_p(t,s)$.

Usando estos operadores, han sido resueltas algunas cuestiones relativas a las ecuaciones dinámicas tales como, la expresión general de la solución de las ecuaciones lineales de primer y segundo orden [25], la expresión de la función de Green de algunos problemas de frontera lineales [5, 6, 25, 28, 34, 45] o propiedades oscilatorias de ecuaciones dinámicas no lineales de primer y segundo orden [19, 46, 47, 62].

Un estudio exhaustivo de la $\Delta-$ integral de Riemann puede verse en [53, 54, 24].

Se denota por $\mathbb{T}$ un conjunto cerrado arbitrario de números reales. Se considera en $\mathbb{T}$ la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.1 *Se definen los operadores $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ y $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ para cada $t \in \mathbb{T}$ como*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}, \quad si \quad t < \sup(\mathbb{T}) \quad y \quad \sigma(t) = t \quad si \quad t = \sup(\mathbb{T}),$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}, \quad si \quad t > \inf(\mathbb{T}) \quad y \quad \rho(t) = t \quad si \quad t = \inf(\mathbb{T}),$$

respectivamente, y la función $\mu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ para cada $t \in \mathbb{T}$ como

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

La definición de los operadores σ, ρ permite la siguiente clasificación de los puntos de $\mathbb{T}$.

Definición 1.2.2 *Sea $t \in \mathbb{T}$.*

Si $\sigma(t) > t$, se dice que t es aislado por la derecha, mientras que si $\rho(t) < t$ se dice que t es aislado por la izquierda.

Si t es aislado por la derecha y aislado por la izquierda se dice que t es aislado.

Si $t < \sup(\mathbb{T})$ y $\sigma(t) = t$, se dice que t es denso por la derecha.

Si $t > \inf(\mathbb{T})$ y $\rho(t) = t$, se dice que t es denso por la izquierda.

Un punto que es denso por la derecha y denso por la izquierda se dice que es denso.

Mediante un sencillo argumento obtenemos la siguiente propiedad del conjunto de puntos aislados de $\mathbb{T}$.

Proposición 1.2.3 *El conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$ es numerable, esto es, existen $I \subset \mathbb{N}$ y $\{t_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{T}$ tales que*

$$R := \{t \in \mathbb{T} : \ t < \sigma(t)\} = \{t_i\}_{i \in I}. \tag{1.1}$$

Demostración: Supóngase que $\text{mín}\,\mathbb{T} = a$ y $\text{máx}\,\mathbb{T} = b$ y sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(t) = \begin{cases} t, & \text{si} \quad t \in \mathbb{T}, \\ \sigma(s), & \text{si} \quad t \in (s, \sigma(s)),\ s \in \mathbb{T}; \end{cases}$$

es obvio que la función g es monótona en $[a, b]$ y continua en el conjunto

$$[a, b] \backslash \{t \in \mathbb{T} :\ t < \sigma(t)\}.$$

Por lo tanto, el resultado es consecuencia del hecho de que el conjunto de puntos donde una función monótona tiene discontinuidades es numerable, [66].

En el caso en que $\mathbb{T}$ no sea acotado, de la igualdad $\mathbb{T} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{T} \cap (-n, n))$ se deduce la validez del resultado. □

Definición 1.2.4 *Si $\mathbb{T}$ tiene un máximo, m, que es aislado por la izquierda entonces se define $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \{m\}$. En otro caso, $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$.*

Definición 1.2.5 *Dada una función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se define la función $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ como*

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)), \quad \textit{para todo} \quad t \in \mathbb{T},$$

es decir, $f^\sigma = f \circ \sigma$.

Si $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado y $a, b \in \mathbb{T}$, $a < b$, el subintervalo cerrado de $\mathbb{T}$ de extremos a y b se denota como

$$[a, b]_\mathbb{T} = [a, b] \cap \mathbb{T}.$$

Análogamente se denotan el resto de subintervalos de $\mathbb{T}$ de extremos a y b.

Si $J = [a, b]_\mathbb{T}$, denotamos por $J^o = [a, b)_\mathbb{T}$ y para cada $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$, $J^{\kappa^j} = [a, \rho^j(b)]_\mathbb{T}$.

Definición 1.2.6 *Sea $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ una función y $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Se dice que f es* **$\Delta-$diferenciable en** *t si existe un número real, que denotaremos por $f^\Delta(t)$, tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$|(f(\sigma(t)) - f(s)) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon\ |\sigma(t) - s|,$$

para todo $s \in (t - \delta, t + \delta)_\mathbb{T}$.

En este caso, $f^\Delta(t)$ es la **$\Delta-$derivada de** *f* **en** *t.*

Se dice que f es $\Delta-$diferenciable en $\mathbb{T}^\kappa$ si es $\Delta-$diferenciable en todo $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Si esto ocurre, la función

$$f^\Delta : t \in \mathbb{T}^\kappa \to f^\Delta(t) \in \mathbb{R}$$

es la función $\Delta-$derivada de f en $\mathbb{T}^\kappa$.

Teorema 1.2.7 *[25, Teorema 1.16] Sean $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si f es $\Delta-$diferenciable en t, entonces f es continua en t.*

2. *Si f es continua en un punto t aislado por la derecha, entonces f es $\Delta-$diferenciable en t y*
$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}.$$

3. *Si t es denso por la derecha, entonces f es $\Delta-$diferenciable en t si y sólo si existe y es finito el límite*
$$\lim_{\substack{s \to t \\ s \in \mathbb{T}}} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$
en cuyo caso,
$$f^\Delta(t) = \lim_{\substack{s \to t \\ s \in \mathbb{T}}} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

4. *Si f es $\Delta-$diferenciable en t, entonces $f(\sigma(t)) - f(t) = \mu(t) f^\Delta(t)$*

Teorema 1.2.8 *[25, Teorema 1.20] Sean $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ funciones $\Delta-$diferenciables en $t \in \mathbb{T}^\kappa$.*

Se verifican las siguientes propiedades:

1. *La función $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es $\Delta-$diferenciable en t y*
$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t).$$

2. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la función $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es $\Delta-$diferenciable en t y*
$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t).$$

3. *La función $f \cdot g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es $\Delta-$diferenciable en t y*
$$(f \cdot g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) g(t) + f^\sigma(t) g^\Delta(t) = f(t) g^\Delta(t) + f^\Delta(t) g^\sigma(t).$$

4. *Si $g(t) g^\sigma(t) \neq 0$ entonces $\dfrac{f}{g} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es $\Delta-$diferenciable en t y*
$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta (t) = -\frac{f^\Delta(t)\ g(t) - f(t)\ g^\Delta(t)}{g(t)\ g^\sigma(t)}.$$

El siguiente resultado es una versión de la Regla de L'Hopital para funciones $\Delta-$diferenciables que será utilizada en la sección 1.6.

Teorema 1.2.9 *[26, Teorema 4.3] Sean $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ funciones $\Delta-$diferenciables en $\mathbb{T}^\kappa$ y $t_0 \in \mathbb{T} \cup \{\infty\}$. Si $t_0 \in \mathbb{T}$, se supone que t_0 es denso por la izquierda. Además, se supone que*

$$\lim_{t \to t_0^-} f(t) = \lim_{t \to t_0^-} g(t) = 0,$$

y que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$g(t)\ g^\Delta(t) < 0$$

para todo $t \in \mathbb{T}$ tal que $t > \frac{1}{\varepsilon}$, si $t = \infty$, y $0 < t_0 - t < \varepsilon$, en otro caso.

Entonces se verifica

$$\liminf_{t \to t_0^-} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} \ \leq\ \liminf_{t \to t_0^-} \frac{f(t)}{g(t)} \ \leq\ \limsup_{t \to t_0^-} \frac{f(t)}{g(t)} \ \leq\ \limsup_{t \to t_0^-} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)}$$

Definición 1.2.10 *Una función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es* **dos veces $\Delta-$diferenciable** *si la función $\Delta-$derivada de f en $\mathbb{T}^\kappa$, $f^\Delta : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$, es $\Delta-$diferenciable en $\mathbb{T}^{\kappa^2} = (\mathbb{T}^\kappa)^\kappa$.*

La función $f^{\Delta\Delta} = \left(f^\Delta\right)^\Delta : \mathbb{T}^{\kappa^2} \to \mathbb{R}$ se llama **$\Delta-$derivada de f de orden** 2.

Se dice que f es $n+1$ **veces $\Delta-$diferenciable** *si la función $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{\kappa^n} \to \mathbb{R}$, es $\Delta-$diferenciable en $\mathbb{T}^{\kappa^{n+1}} = \left(\mathbb{T}^{\kappa^n}\right)^\kappa$.*

La función $f^{\Delta^{n+1}} : \mathbb{T}^{\kappa^{n+1}} \to \mathbb{R}$ se llama **$\Delta-$derivada de f de orden** *n.*

Se denota por

$$\rho^0 = \sigma^0 = Id, \quad f^{\Delta^0} = f \quad y \quad \mathbb{T}^{\kappa^0} = \mathbb{T}.$$

Definición 1.2.11 *Una función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es* **regular** *si existe el límite por la derecha en los puntos de $\mathbb{T}$ densos por la derecha y existe el límite por la izquierda en los puntos de $\mathbb{T}$ densos por la izquierda.*

Definición 1.2.12 *Una función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es* **rd–continua** *si es continua en los puntos de $\mathbb{T}$ densos por la derecha y existe el límite por la izquierda y es finito en los puntos de $\mathbb{T}$ densos por la izquierda.*

Se denota

$$C_{rd}(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{R} : f \text{ es rd–continua}\},$$

$$C_{rd}^n(\mathbb{T}^{\kappa^n}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{R} : f^{\Delta^j} \in C(\mathbb{T}^{\kappa^j}),\ 0 \leq j \leq n-1;\ f^{\Delta^n} \in C_{rd}(\mathbb{T}^{\kappa^n})\}.$$

Si $J = [a, b]_\mathbb{T} \subset \mathbb{T}$,

$$C_{rd}(J) = \{f : J \to \mathbb{R} : f \text{ es rd–continua en } J\}$$

$$C_{rd}^n(J^{\kappa^n}) = \{f : J \to \mathbb{R} : f^{\Delta^j} \in C(J^{\kappa^j}),\ 0 \leq j \leq n-1;\ f^{\Delta^n} \in C_{rd}(J^{\kappa^n})\}.$$

Definición 1.2.13 *Se dice que una función $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es* **regresiva** *si para cada $t \in \mathbb{T}^\kappa$ se cumple que*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0.$$

Se denota

$$\mathcal{R} = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{R} : f \text{ es regresiva y rd–continua}\}.$$

Proposición 1.2.14 *El conjunto $\mathcal{R}$ es un grupo abeliano con la operación suma directa definida para cada $p, q \in \mathcal{R}$ y $t \in \mathbb{T}^\kappa$ como*

$$f(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t);$$

el elemento simétrico de $p \in \mathcal{R}$ en $(\mathcal{R}, \oplus)$ está definido para cada $t \in \mathbb{T}^\kappa$ como

$$(\ominus p)(t) := -\frac{p(t)}{1 + \mu(t)}.$$

Definición 1.2.15 *En el conjunto $\mathcal{R}$ se define la operación sustracción directa para cada $p, q \in \mathcal{R}$ y $t \in \mathbb{T}^\kappa$ como*

$$(p \ominus q)(t) := (p \oplus (\ominus q))(t).$$

Los dos teoremas siguientes recogen algunas propiedades de las funciones regulares y rd–continuas

Teorema 1.2.16 *[25, Teorema 1.60] Sea $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Se cumplen las siguientes propiedades*

1. *Si f es continua, entonces f es rd–continua.*
2. *Si f es rd–continua entonces f es regular.*
3. *La aplicación σ es rd–continua.*
4. *Si f es regular o rd–continua entonces f^σ también lo es.*
5. *Si f es continua y $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es regular o rd–continua entonces $f \circ g$ verifica dicha propiedad.*

Teorema 1.2.17 *Toda función regular en un intervalo cerrado $[a, b]_\mathbb{T}$ de $\mathbb{T}$ es acotada.*

Definición 1.2.18 *Una partición del intervalo $[a, b]_\mathbb{T}$ es un conjunto finito y ordenado*

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \subset \mathbb{T},$$

donde

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Se denota por $\mathcal{P}(a, b)$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]_\mathbb{T}$.

El siguiente resultado muestra que es posible encontrar una partición cuyos puntos estén tan próximos como se quiera.

Lema 1.2.19 *[26, Lema 5.7] Dados $a, b \in \mathbb{T}$, con $a < b$, para cada $\delta > 0$ existe una partición $P \in \mathcal{P}(a, b)$ dada por $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ tal que para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se verifica o bien*

$$x_k - x_{k-1} \leq \delta$$

o bien

$$x_k - x_{k-1} > \delta \qquad y \qquad \rho(x_k) = x_{k-1}.$$

Se denota como $\mathcal{P}_\delta(a,b)$ *el conjunto de todas las particiones que poseen dicha propiedad.*

A continuación presentaremos el concepto de $\Delta-$integral de Riemann

Definición 1.2.20 *Sean* $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *una función acotada y* $P \in \mathcal{P}(a,b)$, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \subset \mathbb{T}$. *Se llama* $\Delta-$*suma de Riemann de* f *correspondiente a* P *al número real*

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1}),$$

donde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i)_{\mathbb{T}}$ *es arbitrario,* $1 \leq i \leq n$.

Se dice que f *es* **Riemann $\Delta-$integrable en** $[a,b]_{\mathbb{T}}$ *si existe* $I \in \mathbb{R}$ *verificando que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$|S - I| < \varepsilon$$

para toda $\Delta-$*suma de Riemann* S *de* f *correspondiente a cada* $P \in \mathcal{P}_\delta(a,b)$ *independiente de la elección de* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i)_{\mathbb{T}}$ *para cada* $1 \leq i \leq n$.

Si existe $I \in \mathbb{R}$ *verificando tal condición se denota por* $\int_a^b f(t)\ \Delta t$ *y se llama* **$\Delta-$integral de Riemann de f en** $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

En la definición anterior se supone $a < b$*; dicha restricción se elimina con las siguientes definiciones*

$$\int_a^a f(t)\ \Delta t = 0$$

y

$$\int_b^a f(t)\ \Delta t = -\int_a^b f(t)\ \Delta t.$$

El concepto de función exponencial sobre funciones regresivas y rd–continuas que presentaremos a continuación, permitirá la obtención de la expresión general de la solución de una ecuación dinámica de primer orden lineal.

Definición 1.2.21 *Dado* $h > 0$*, se definen los siguientes conjuntos*

$$\mathbb{C}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} :\ z \neq -\frac{1}{h} \right\},$$

y

$$\mathbb{Z}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} :\ -\frac{\pi}{h} < \operatorname{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h} \right\},$$

y la transformación cilíndrica $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ *para cada* $z \in \mathbb{C}_h$ *como*

$$\xi_h(z) = \frac{\operatorname{Log}(1 + zh)}{h},$$

donde Log *es la determinación principal de la función logaritmo.*

Si $h = 0$, *se define*

$$\mathbb{C}_0 := \mathbb{C} =: \mathbb{Z}_0 \qquad y \qquad \xi_0 := Id : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{Z}_0.$$

Definición 1.2.22 *Si* $p \in \mathcal{R}$, *se define la* **función exponencial** $e_p : \mathbb{T}\times\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *para cada* $(s,t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ *como*

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(s)}(p(s))\ \Delta s\right),$$

donde la transformación cilíndrica ξ_h *está introducida en la Definición 1.2.21.*

A continuación enunciaremos una serie de resultados acerca de la función exponencial, cuyas pruebas se pueden ver en [25].

Teorema 1.2.23 *Si* $p, q \in \mathcal{R}$ *y* $t, s, r \in \mathbb{T}$, *entonces se verifican las siguientes propiedades*

1. $e_0(t,s) \equiv 1$ *y* $e_p(t,t) \equiv 1$.
2. $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t,s)$.
3. $\dfrac{1}{e_p(t,s)} = e_{\ominus p}(t,s)$.
4. $e_p(t,s) = \dfrac{1}{e_p(s,t)}$.
5. $e_p(t,s)e_p(s,r) = e_p(t,r)$.
6. $e_p(t,s)e_q(t,s) = e_{p\oplus q}(t,s)$.
7. $\dfrac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} = e_{p\ominus q}(t,s)$.
8. $\left(\dfrac{1}{e_p(\cdot,s)}\right)^{\Delta} = -\dfrac{p(t)}{e_p^{\sigma}(\cdot,s)}$.

Teorema 1.2.24 *Si* $1 + \mu p > 0$ *en* $\mathbb{T}^{\kappa}$, *entonces para todo* $t, t_0 \in \mathbb{T}$ *se cumple que*

$$e_p(t,t_0) > 0.$$

Teorema 1.2.25 *Si* $p \in \mathcal{R}$, *entonces para cada* $t_0 \in \mathbb{T}$, *el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = p(t)x(t); & t \in [t_0, \infty]_{\mathbb{T}}, \\ x(t_0) = 1, \end{cases}$$

tiene una única solución, dada por $e_p(\cdot, t_0) : [t_0, \infty]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$.

Teorema 1.2.26 *Si $p \in \mathcal{R}$, entonces para cada aplicación $f : [t_0, \infty]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ rd–continua, $t_0 \in \mathbb{T}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = p(t)x(t) + f(t); & t \in [t_0, \infty]_{\mathbb{T}}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tiene una única solución, dada para cada $t \in [t_0, \infty] \cap \mathbb{T}$ por

$$x(t) = e_p(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(s))f(s)\ \Delta s.$$

Teorema 1.2.27 *Si $p \in \mathcal{R}$ y $a, b, c \in \mathbb{T}$, entonces se satisfacen las siguientes igualdades*

$$[e_p(c, \cdot)]^{\Delta} = -p[e_p(c, \cdot)]^{\sigma}$$

y

$$\int_{a}^{b} p(s)e_p(c, \sigma(s))\ \Delta s = e_p(c, a) - e_p(c, b).$$

Teorema 1.2.28 *Si $p \in \mathcal{R}$, entonces para cada aplicación rd–continua $f : [t_0, \infty]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = -p(t)x^{\sigma}(t) + f(t); & t \in [t_0, \infty]_{\mathbb{T}}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tiene una única solución, dada para cada $t \in [t_0, \infty]_{\mathbb{T}}$ por

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t, \sigma(s))f(s)\ \Delta s.$$

Ejemplo 1.2.29 *Veamos en varios conjuntos $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ cerrados, cuál es la expresión de la aplicación exponencial.*

1. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, entonces, para todos $\alpha, t, t_0 \in \mathbb{R}$, se verifica que*
$$e_{\alpha}(t, t_0) = e^{\alpha(t - t_0)}.$$

2. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, entonces, para todos $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, $t, t_0 \in \mathbb{Z}$, se verifica que*
$$e_{\alpha}(t, t_0) = (1 + \alpha)^{t - t_0}.$$

3. *Dado $h \in \mathbb{R}^+$, si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, entonces, para todos $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1/h$, $t, t_0 \in h\mathbb{Z}$, se verifica que*
$$e_{\alpha}(t, t_0) = (1 + \alpha h)^{\frac{t - t_0}{h}}.$$

4. *Dado $q > 1$, si $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}}$, entonces, para todos $t, t_0 \in q^{\mathbb{N}}$, tales que $t > t_0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ se cumpla $\alpha \neq -\dfrac{1}{(q-1)q^m}$, se verifica que*
$$e_{\alpha}(t, t_0) = \prod_{s \in [t_0, t)_{\mathbb{T}}} (1 + (q - 1)\alpha s).$$

1.3. $\Delta-$integración de Lebesgue

El objetivo de esta sección es conectar la clásica integral de Lebesgue en conjuntos medibles de $\mathbb{R}$ con la $\Delta-$integral de Lebesgue de funciones definidas en un conjunto cerrado de números reales arbitrario $\mathbb{T}$ tal que $\min \mathbb{T} = a$ y $\max \mathbb{T} = b$.

Para ello, en la subsección 1.3.1 recopilamos conceptos básicos de teoría de la medida e integración, [66, 80, 83], adaptados a un espacio de medida $(\mathbb{T}, \mathcal{M}(m_1^*))$ equipado con la $\Delta-$medida de Lebesgue que fue introducida en [26]. Además, deducimos la relación entre la $\Delta-$medida de Lebesgue, μ_Δ, y la medida de Lebesgue λ y establecemos un criterio para la $\Delta-$medibilidad de conjuntos, que nos permitirá, en la subsección 1.3.2, relacionar las funciones Lebesgue $\Delta-$medibles con las funciones Lebesgue medibles.

Lo más relevante de esta sección se recoge en la subsección 1.3.3, donde se comparan la Lebesgue $\Delta-$integrabilidad con la Lebesgue integrabilidad y se da una fórmula para calcular la $\Delta-$integral de Lebesgue como una integral de Lebesgue, más una serie numérica en la que sólo están involucrados los puntos de $\mathbb{T}$ aislados por la derecha. Esta fórmula pone de manifiesto la separación del cálculo en $\mathbb{T}$ en sus partes continua y discreta.

Usando la fórmula anteriormente mencionada, en la subsección 1.3.4 se deducen las $\Delta-$primitivas de algunas funciones importantes en la teoría de ecuaciones dinámicas como por ejemplo la función potencial, la exponencial o las trigonométricas. Para obtener estas expresiones, es preciso describir detalladamente el conjunto de puntos aislados por la derecha del conjunto elegido $\mathbb{T}$. Para ilustrar los resultados obtenidos, calculamos $\Delta-$integrales en diferentes conjuntos $\mathbb{T}$, entre los que se encuentra el clásico conjunto ternario de Cantor.

Finalizamos la sección introduciendo los espacios L^p_Δ, relacionados con la $\Delta-$medida de Lebesgue, y estableciendo la relación existente entre los espacios L^p_Δ y los habituales espacios L^p relacionados con la medida de Lebesgue.

1.3.1. $\Delta-$medida de Lebesgue

De igual modo que en la medida de Lebesgue, la $\Delta-$medida de Lebesgue μ_Δ sobre un conjunto cerrado de números reales arbitrario $\mathbb{T}$ se define, en [26, Sección 5.7] o [53, Sección 5], como la extensión de Carathéodory de cierta medida cuyo procedimiento se detalla a continuación.

En primer lugar, se definen el conjunto $\mathcal{F}_1 = \left\{ [\tilde{a}, \tilde{b})_\mathbb{T} \, : \, \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{T}, \, \tilde{a} \leq \tilde{b} \right\}$ y una medida numerablemente aditiva $m_1 : \mathcal{F}_1 \to [0, +\infty]$ que asigna a cada intervalo $[\tilde{a}, \tilde{b})_\mathbb{T} \in \mathcal{F}_1$ su longitud, es decir,

$$m_1([\tilde{a}, \tilde{b})) = \tilde{b} - \tilde{a}.$$

Usando el par $(\mathcal{F}_1, m_1)$ se genera una medida exterior m_1^* sobre $\mathcal{P}(\mathbb{T})$, definida para cada $E \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ como

$$m_1^*(E) = \begin{cases} \inf\limits_{\tilde{\mathcal{R}}} \left\{ \sum\limits_{i \in I_{\tilde{R}}} (\tilde{b_i} - \tilde{a_i}) \right\} \in \mathbb{R}^+, & \text{si} \quad \sup \mathbb{T} \notin E, \\ \\ +\infty, & \text{si} \quad \sup \mathbb{T} \in E, \end{cases}$$

con

$$\tilde{R} = \left\{ \left\{ [\tilde{a_i}, \tilde{b_i})_{\mathbb{T}} \in \mathcal{F}_1 \right\}_{i \in I_{\tilde{R}}} : \ I_{\tilde{R}} \subset \mathbb{N}, \ E \subset \bigcup_{i \in I_{\tilde{R}}} [\tilde{a_i}, \tilde{b_i})_{\mathbb{T}} \right\}.$$

Se define la familia

$$\mathcal{M}(m_1^*) = \{ A \subset \mathbb{T} : \ A \text{ es } \Delta\text{−medible} \},$$

donde un conjunto $A \subset \mathbb{T}$ se dice que es $\Delta-$medible si la igualdad

$$m_1^*(E) = m_1^*(E \cap A) + m_1^*(E \cap (\mathbb{T} \backslash A))$$

es válida para todo subconjunto E de $\mathbb{T}$.

Finalmente, la $\Delta-$medida de Lebesgue, denotada como μ_Δ, es la restricción de m_1^* a $\mathcal{M}(m_1^*)$.

En el siguiente resultado caracterizamos la $\Delta-$medida de Lebesgue en términos de medidas conocidas.

Proposición 1.3.1 *La $\Delta-$medida de Lebesgue está definida sobre los conjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{T}$; además, se verifica la siguiente igualdad:*

$$\mu_\Delta = \begin{cases} \lambda + \sum\limits_{i \in I} (\sigma(t_i) - t_i) \cdot \delta_{t_i} + \mu_M, & si \quad M \in \mathbb{T}, \\ \\ \lambda + \sum\limits_{i \in I} (\sigma(t_i) - t_i) \cdot \delta_{t_i}, & si \quad M \notin \mathbb{T}, \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $\{t_i\}_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, es el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$, M es el supremo de $\mathbb{T}$, λ es la medida de Lebesgue, δ_{t_i} es la medida de Dirac concentrada en t_i y μ_M es una medida degenerada definida como $\mu_M(A) = 0$ si $M \notin A$ y $\mu_M(A) = +\infty$ si $M \in A$.

Demostración: Como consecuencia de las propiedades de medida se deduce que una relación análoga a (1.2) es válida para las medidas exteriores relacionadas con dichas medidas.

De la igualdad para las medidas exteriores se deduce que la $\Delta-$medida de Lebesgue está definida sobre los conjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{T}$ y además la validez de la igualdad (1.2). □

Definición 1.3.2 *Sea $A \subset \mathbb{T}$. Se dice que una propiedad P se verifica en $\Delta-$casi todo punto, $\Delta-$c. t. p., de A si existe un conjunto $E \subset A$ de $\Delta-$medida nula tal que P se satisface para todo $t \in A \backslash E$.*

1.3.2. Funciones $\Delta-$medibles

Definición 1.3.3 *Se dice que $f : \mathbb{T} \to \bar{\mathbb{R}} \equiv [-\infty, +\infty]$ es $\Delta-$***medible** *si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{ t \in \mathbb{T} : \ f(t) < \alpha \}$ es $\Delta-$medible.*

Teniendo en cuenta la igualdad (1.2) que relaciona la $\Delta-$medida de Lebesgue con otras medidas conocidas, se establece un criterio para la $\Delta-$medibilidad de funciones. Para ello, dada una función $f : \mathbb{T} \to \bar{\mathbb{R}}$, se define una función auxiliar que extiende f al intervalo real $\mathbb{T} \cup (\text{ínf}\, \mathbb{T}, \sup \mathbb{T})$, $\tilde{f} : \mathbb{T} \cup (\text{ínf}\, \mathbb{T}, \sup \mathbb{T}) \to \bar{\mathbb{R}}$ como

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} f(t), & \text{si} \quad t \in \mathbb{T}, \\ f(t_i), & \text{si} \quad t \in (t_i, \sigma(t_i)), \ i \in I, \end{cases} \tag{1.3}$$

donde $\{t_i\}_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, es el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$.

El resultado obtenido es el siguiente cuya demostración es omitida por su simplicidad.

Proposición 1.3.4 *Sean $f : \mathbb{T} \to \bar{\mathbb{R}}$ y $f : \mathbb{T} \cup (\text{ínf}\, \mathbb{T}, \sup \mathbb{T}) \to \bar{\mathbb{R}}$ la extensión de f a $\mathbb{T} \cup (\text{ínf}\, \mathbb{T}, \sup \mathbb{T})$ definida en* (1.3)*. Entonces, f es $\Delta-$medible si y sólo si $\tilde{f}$ es Lebesgue medible.*

1.3.3. $\Delta-$integración de funciones $\Delta-$medibles

Definición 1.3.5 *Se dice que $S : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es* **simple** *si sólo toma una cantidad finita de valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, todos ellos diferentes.*

Si $A_j = S^{-1}(\{\alpha_j\})$, entonces, $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$, siendo $\chi_{A_j} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ la función característica de A_j, esto es,

$$\chi_{A_j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad t \in A_j, \\ \\ 0, & \text{si} \quad t \in \mathbb{T} \backslash A_j. \end{cases}$$

Nota 1.3.6 *No es difícil comprobar que si $S : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es simple y $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$, entonces S es $\Delta-$medible si y sólo si para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, A_j es $\Delta-$medible.*

Definición 1.3.7 *Sean $E \subset \mathbb{T}$ un conjunto $\Delta-$medible y $S : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ una función simple y $\Delta-$medible con $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$. La $\Delta-$***integral de Lebesgue de** S **en** E *se define como*

$$\int_E S(s) \ \Delta s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_\Delta (A_j \cap E).$$

En esta definición se asume el convenio $0 \cdot \infty = 0$.

Definición 1.3.8 *Sean $E \subset \mathbb{T}$ un conjunto $\Delta-$medible y $f : \mathbb{T} \to [0, +\infty]$ una función $\Delta-$medible. La* $\Delta-$**integral de Lebesgue de** f **en** E *se define como*

$$\int_E f(s)\ \Delta s = \sup \int_E S(s)\ \Delta s,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las funciones simples, $\Delta-$medibles, positivas y menores o iguales que f en $\mathbb{T}$.

Nota 1.3.9 *Nótese que si f es una función simple, las definiciones 1.3.7 y 1.3.8 coinciden.*

Definición 1.3.10 *Sean $E \subset \mathbb{T}$ un conjunto $\Delta-$medible y $f : \mathbb{T} \to \bar{\mathbb{R}}$ una función $\Delta-$medible. Se dice que f es* **Lebesgue** $\Delta-$**integrable en** E *si al menos uno de los elementos*

$$\int_E f^+(s)\ \Delta s \qquad \text{o} \qquad \int_E f^-(s)\ \Delta s,$$

es finito,donde las partes positiva y negativa de f, f^+ y f^- respectivamente, están definidas como $f^+ := \max\{f, 0\}$ y $f^- := \max\{-f, 0\}$.

En tal caso, se define la $\Delta-$**integral de Lebesgue de** f **en** E *como*

$$\int_E f(s)\ \Delta s = \int_E f^+(s)\ \Delta s - \int_E f^-(s)\ \Delta s.$$

La siguiente fórmula para calcular la $\Delta-$integral de Lebesgue fue demostrada en [34] relacionando la $\Delta-$integración de Lebesgue con la integración de Lebesgue, sin embargo, como la igualdad (1.2) expresa μ_Δ como una suma numerable de medidas, mediante un sencillo argumento de teoría de la medida se deduce dicha fórmula.

Proposición 1.3.11 *Sea $E \subset \mathbb{T}$ un conjunto $\Delta-$medible. Si $f : \mathbb{T} \to \bar{\mathbb{R}}$ es $\Delta-$integrable en E, entonces*

$$\int_E f(s)\ \Delta s = \int_E f(s)\ ds + \sum_{i \in I_E} (\sigma(t_i) - t_i) \cdot f(t_i) + r(f, E), \tag{1.4}$$

donde

$$r(f, E) = \begin{cases} \mu_M(E) \cdot f(M), & si \quad M \in \mathbb{T}, \\ \\ 0, & si \quad M \notin \mathbb{T}, \end{cases}$$

$I_E := \{\ i \in I :\ t_i \in E\ \}$, $\{t_i\}_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, es el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$ y M es el supremo de $\mathbb{T}$.

La igualdad (1.4) permite demostrar la siguiente caracterización de las funciones Lebesgue $\Delta-$integrables en términos de funciones Lebesgue integrables.

Proposición 1.3.12 *Supóngase que $E \subset \mathbb{T}$ es un conjunto $\Delta-$medible, $\tilde{E} = E \cup (\inf E, \sup E)$, $f : \mathbb{T} \to \bar{\mathbb{R}}$ es una función $\Delta-$medible y $\tilde{f} : \mathbb{T} \cup (\inf \mathbb{T}, \sup \mathbb{T}) \to \bar{\mathbb{R}}$ es la extensión de f a $\mathbb{T} \cup (\inf \mathbb{T}, \sup \mathbb{T})$ definida en* (1.3).

Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:

i) Si $\sup \mathbb{T} \notin E$ o $\sup \mathbb{T} \in E$ y $f(\sup \mathbb{T}) = 0$, entonces, f es Lebesgue $\Delta-$integrable en E si y sólo si $\tilde{f}$ es Lebesgue integrable en $\tilde{E}$. En cuyo caso, se satisface la siguiente igualdad:

$$\int_E f(s)\ \Delta s = \int_{\tilde{E}} \tilde{f}(s)\ ds.$$

ii) Si $\sup \mathbb{T} \in E$ y $f(\sup \mathbb{T}) > 0$, entonces, f es Lebesgue $\Delta-$integrable en E si y sólo si $\int_{\tilde{E}} (\tilde{f})^{-}(s)\ ds < +\infty$. En cuyo caso, $\int_E f(s)\ \Delta s = +\infty$.

iii) Si $\sup \mathbb{T} \in E$ y $f(\sup \mathbb{T}) < 0$, entonces, f es Lebesgue $\Delta-$integrable en E si y sólo si $\int_{\tilde{E}} (\tilde{f})^{+}(s)\ ds < +\infty$. En cuyo caso, $\int_E f(s)\ \Delta s = -\infty$.

Los siguientes resultados, que pueden verse en [26], muestran la relación entre la $\Delta-$integración de Lebesgue y de Riemann.

Teorema 1.3.13 *[26, Teorema 5.81] Sea $[a,b]_{\mathbb{T}}$ un intervalo cerrado de $\mathbb{T}$ y $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si f es Riemann $\Delta-$integrable en $[a,b]_{\mathbb{T}}$ entonces f es Lebesgue $\Delta-$integrable en $[a,b]_{\mathbb{T}}$, y*

$$\int_a^b f(s)\ \Delta s = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} f(s)\ \Delta s,$$

donde la $\Delta-$integral de la izquierda denota la $\Delta-$integral de Riemann y la de la derecha, la $\Delta-$integral de Lebesgue.

Teorema 1.3.14 *[26, Teorema 5.82] Sea $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ una función acotada en un intervalo cerrado $[a,b]_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$. Entonces f es Riemann $\Delta-$integrable en $[a,b]_{\mathbb{T}}$ si y sólo si el conjunto de todos los puntos de $[a,b)_{\mathbb{T}}$ densos por la derecha en los cuales f es discontinua es un conjunto de $\Delta-$medida cero.*

1.3.4. Cálculo de $\Delta-$primitivas.

A continuación se aplica la ecuación (1.4) al cálculo de $\Delta-$primitivas de funciones definidas en un conjunto cerrado y acotado arbitrario que sean Riemann $\Delta-$integrables.

Nótese que cuando la $\Delta-$integral de Lebesgue y Riemann coinciden, la ecuación (1.4) cubre las dadas en [25, Teorema 1.79] con $E = [a,b)_{\mathbb{T}}$, $a, b \in \mathbb{T}$ y $a \leq b$ para diferentes elecciones de $\mathbb{T}$.

Además, la expresión (1.4) permite aplicar las teorías de integración de Lebesgue y convergencia de series para determinar, en ciertas situaciones, el valor de la $\Delta-$integral o, si no es posible, dar estimaciones de tal valor.

La ecuación (1.4) proporciona un método para calcular el valor exacto de la $\Delta-$integral de Lebesgue de una función Lebesgue $\Delta-$integrable f en un conjunto $\Delta-$medible $E \subset \mathbb{T}$. Para el cálculo de $\Delta-$primitivas, en el siguiente resultado se reescribe dicha expresión para el caso en que el conjunto $\Delta-$medible sea un intervalo de $\mathbb{T}$.

Proposición 1.3.15 *Sea $f : \mathbb{T} \cup (\text{ínf}\,\mathbb{T}, \sup \mathbb{T}) \to \bar{\mathbb{R}}$ una función Lebesgue integrable en $\mathbb{T} \cup (\text{ínf}\,\mathbb{T}, \sup \mathbb{T})$. Entonces, para todos r, $t \in \mathbb{T}$ tales que $r \leq t$, se verifica la siguiente igualdad:*

$$\int_{[r,t)_{\mathbb{T}}} f(s)\ \Delta s = \int_{[r,t)} f(s)\ ds + \sum_{i \in I_{r,t}} \int_{(t_i,\sigma(t_i))} (f(t_i) - f(s))\, ds, \tag{1.5}$$

siendo $I_{r,t} := \{\, i \in I\, :\, t_i \in [r,t)_{\mathbb{T}}\, \}$ y $\{t_i\}_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, es el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$.

Demostración: La ecuación (1.4) y la expresión

$$\int_{[r,t)} f(s)\ ds \quad = \quad \int_{[r,t)_{\mathbb{T}}} f(s)\ ds + \sum_{i \in I_{r,t}} \int_{(t_i,\sigma(t_i))} f(s)\ ds.$$

dan lugar al resultado. □

Dado $[r,t] \subset \mathbb{T} \cup (\text{ínf}\,\mathbb{T}, \sup \mathbb{T})$, por [83, Teorema 6.29], se sabe que si una función acotada $f : \mathbb{T} \cup (\text{ínf}\,\mathbb{T}, \sup \mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[r,t]$, entonces, es Lebesgue integrable en $[r,t)$ y los valores de ambas integrales son iguales.

Además, el clásico criterio de Lebesgue para la Riemann integrabilidad, [83, Teorema 6.29], establece que una función acotada $f : \mathbb{T} \cup (\text{ínf}\,\mathbb{T}, \sup \mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[r,t]$ si y sólo si el conjunto de puntos de discontinuidad de f es de medida de Lebesgue nula. Así pues, por la ecuación (1.2), resulta que el conjunto de puntos densos por la derecha de $[r,t)_{\mathbb{T}}$ en los que $f|_{\mathbb{T}}$ es discontinua es un conjunto de $\Delta-$medida nula. Con lo cual, del teorema 1.3.14 se sigue que $f|_{\mathbb{T}}$ es Riemann $\Delta-$integrable en $[r,t]_{\mathbb{T}}$.

Por consiguiente, si la función acotada $f : \mathbb{T} \cup (\text{ínf}\,\mathbb{T}, \sup \mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[r,t]$, la igualdad (1.5) garantiza que

$$\int_r^t f(s)\ \Delta s = \int_r^t f(s)\ ds + \sum_{i \in I_{r,t}} \int_{t_i}^{\sigma(t_i)} (f(t_i) - f(s))\, ds, \tag{1.6}$$

donde la integral en el lado izquierdo denota la $\Delta-$integral de Riemann en $[r,t]_{\mathbb{T}}$ mientras que las del lado derecho denotan la integral de Riemann en $[r,t]$ y $[t_i, \sigma(t_i)]$ respectivamente.

Como aplicación de la expresión (1.6) se obtienen las $\Delta-$integrales de algunas de las funciones elementales que son Riemann $\Delta-$integrables; dichas expresiones son válidas en cualquier conjunto cerrado de números reales y tienen una gran dependencia de su conjunto de puntos aislados por la derecha.

Denotando $I_{r,t}$ como en la proposición 1.3.15, las siguientes igualdades son válidas para todos $n \in \mathbb{N}$ y $r, t \in \mathbb{T}$ tales que $r \leq t$.

- **Función potencial**.

$$\int_r^t s^n \ \Delta s = \frac{t^{n+1} - r^{n+1}}{n+1} + \sum_{i \in I_{r,t}} \left(\frac{n}{n+1} t_i^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\sigma(t_i))^{n-j} t_i^j}{n+1} \right) \mu(t_i).$$

Si $0 \notin [r,t]$, entonces,

$$\int_r^t \frac{1}{s} \ \Delta s = \log \frac{t}{r} + \sum_{i \in I_{r,t}} \left(\frac{\mu(t_i)}{t_i} - \log \frac{\sigma(t_i)}{t_i} \right).$$

Si $n \neq 1$ y $0 \notin [r,t]$, entonces,

$$\int_r^t \frac{1}{s^n} \ \Delta s = \frac{t^{1-n} - r^{1-n}}{1-n} + \sum_{i \in I_{r,t}} \left(\mu(t_i) t_i^{-n} + \frac{(\sigma(t_i))^{1-n} - t_i^{1-n}}{1-n} \right).$$

- **Función exponencial**. Si $\alpha > 0$, entonces,

$$\int_r^t \alpha^s \ \Delta s = \frac{1}{\log \alpha} \left[\alpha^t - \alpha^r + \sum_{i \in I_{r,t}} \alpha^{t_i} \left(\mu(t_i) \log \alpha + 1 - \alpha^{\mu(t_i)} \right) \right].$$

- **Funciones trigonométricas**. Si $\alpha \neq 0$, entonces,

$$\begin{aligned} \int_r^t \cos \alpha s \ \Delta s \quad &= \quad \frac{1}{\alpha} \Bigg[\operatorname{sen} \alpha t - \operatorname{sen} \alpha r + \sum_{i \in I_{r,t}} \alpha \mu(t_i) \cos \alpha t_i \\ &\quad -2 \sum_{i \in I_{r,t}} \cos \left[\alpha \left(t_i + \frac{\mu(t_i)}{2} \right) \right] \operatorname{sen} \frac{\alpha \mu(t_i)}{2} \Bigg] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_r^t \operatorname{sen} \alpha s \ \Delta s \quad &= \quad \frac{1}{\alpha} \Bigg[\cos \alpha r - \cos \alpha t + \sum_{i \in I_{r,t}} \alpha \mu(t_i) \operatorname{sen} \alpha t_i \\ &\quad -2 \sum_{i \in I_{r,t}} \operatorname{sen} \left[\alpha \left(t_i + \frac{\mu(t_i)}{2} \right) \right] \operatorname{sen} \frac{\alpha \mu(t_i)}{2} \Bigg]. \end{aligned}$$

- Usando la fórmula de integración por partes para la integral de Riemann, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_r^t s \, \mathrm{e}^s \ \Delta s \quad &= \quad (t-1) \, \mathrm{e}^t + (1-r) \, \mathrm{e}^r \\ &\quad + \sum_{i \in I_{r,t}} \mathrm{e}^{t_i} \left[t_i(\mu(t_i) + 1) - (\sigma(t_i) - 1) \, \mathrm{e}^{\mu(t_i)} - 1 \right]. \end{aligned}$$

- Del teorema de cambio de variable en la integral de Riemann se tiene que

$$\int_r^t \frac{s}{1+s^2}\;\Delta s = \log\sqrt{\frac{1+t^2}{1+r^2}} + \sum_{i\in I_{r,t}} \left(\frac{t_i\mu(t_i)}{1+t_i^2} - \log\sqrt{\frac{1+(\sigma(t_i))^2}{1+t_i^2}} \right).$$

- Para obtener la $\Delta-$integral de Riemann de una función f que dependa de $\rho(t)$ o de $\sigma(t)$, se redefine la función f en el intervalo $\mathbb{T}\cup(\inf\mathbb{T},\sup\mathbb{T})$ como f en $\mathbb{T}$ y se identifican $\rho(t)=\sigma(t)=t$ en $(\inf\mathbb{T},\sup\mathbb{T})\backslash\mathbb{T}$; los siguientes ejemplos ilustran este hecho.

  Para cada $r,t\in\mathbb{T}$ tales que $r\le t$ y $j,\,k,\;l\in\mathbb{Z}$ con $j+k+l=n$ y suponiendo que $0\notin[r,t]$ si algún exponente es negativo, se verifican las siguientes igualdades:

  Si $n>0$, entonces,

$$\begin{aligned}\int_r^t \rho(s)^j\, s^k\,\sigma(s)^l\;\Delta s \;=\;& \frac{t^{n+1}-r^{n+1}}{n+1}\\ &+\sum_{i\in I_{r,t}}\left(\rho(t_i)^j\,t_i^k\,\sigma(t_i)^l - \sum_{j=0}^{n}\frac{(\sigma(t_i))^{n-j}\,t_i^j}{n+1}\right)\mu(t_i).\end{aligned}$$

  Si $n>1$, entonces,

$$\begin{aligned}\int_r^t \rho(s)^{-j}s^{-k}\sigma(s)^{-l}\;\Delta s \;=\;& \frac{t^{1-n}-r^{1-n}}{1-n}\\ &+\sum_{i\in I_{r,t}}\left(\frac{\mu(t_i)}{\rho(t_i)^j\,t_i^k\,\sigma(t_i)^l} - \frac{(\sigma(t_i))^{1-n}-t_i^{1-n}}{1-n}\right).\end{aligned}$$

  Si $n=1$, entonces,

$$\int_r^t \rho(s)^{-j}\,s^{-k}\,\sigma(s)^{-l}\;\Delta s = \log\frac{t}{r} + \sum_{i\in I_{r,t}}\left(\frac{\mu(t_i)}{\rho(t_i)^j\,t_i^k\,\sigma(t_i)^l} - \log\frac{\sigma(t_i)}{t_i}\right).$$

- A continuación se calculan las expresiones para funciones que aparecen en la resolución de ecuaciones dinámicas lineales de primer y segundo orden.

  Si $p:\mathbb{T}\cup(\inf\mathbb{T},\sup\mathbb{T})\to\mathbb{R}$ es Riemann integrable y $p_{|\mathbb{T}}$ es rd–continua y regresiva, entonces, para todos $r,t\in\mathbb{T}$ tales que $r<t$, se verifican las siguientes igualdades:

$$e_p(t,r) = \exp\left(\int_r^t p(s)ds\right)\prod_{i\in I_{r,t}}\left[(1+\mu(t_i)p(t_i))\exp\left(-\int_{t_i}^{\sigma(t_i)} p(s)ds\right)\right]$$

y

$$\int_r^t \frac{1}{1+p(s)\mu(s)}\ \Delta s = t-r+\sum_{i\in I_{r,t}} (\ominus p)(t_i)\ \mu^2(t_i),$$

Si $p:\mathbb{T}\cup(\text{ínf}\,\mathbb{T},\sup\mathbb{T}))\to\mathbb{R}$ es Riemann integrable, $p_{|\mathbb{T}}$ es rd–continua y μp^2 es regresiva, entonces, para todos $r,t\in\mathbb{T}$, tales que $r<t$ se verifican las siguientes igualdades:

$$\operatorname{sen}_p(t,r) = \left(\prod_{i\in I_{r,t}} \sqrt{1+p^2(t_i)\mu^2(t_i)}\right) \operatorname{sen}\left(F_p(t,r)\right)$$

y

$$\cos_p(t,r) = \left(\prod_{i\in I_{r,t}} \sqrt{1+p^2(t_i)\mu^2(t_i)}\right) \cos\left(F_p(t,r)\right),$$

con

$$F_p(t,r) = \int_r^t p(s)\ ds + \sum_{i\in I_{r,t}} \left[\arctan p(t_i)\mu(t_i) - \int_{t_i}^{\sigma(t_i)} p(s)\ ds\right].$$

Nota 1.3.16 *Es importante destacar que la expresión obtenida para $e_p(t,r)$ cubre las dadas en [25, Tablas 2.3 y 2.4] para ciertos conjuntos cerrados y acotados particulares.*

Usando dicha relación, se obtienen de modo inmediato el resultado [25, Teorema 2.44, (i)] que garantiza que si $1+p(s)\,\mu(s)>0$ para todo $s\in\mathbb{T}^\kappa$, entonces $e_p(t,r)>0$ en $\mathbb{T}$ y los probados en [25, Teorema 2.48, (ii), (iii)] que establecen que si $1+p(t)\,\mu(t)<0$ para algún $t\in\mathbb{T}^\kappa$, entonces $e_p(t,r)\,e_p(\sigma(t),r)<0$ y si $1+p(s)\,\mu(s)<0$ para todo $s\in\mathbb{T}^\kappa$, entonces $e_p(t,r)$ cambia de signo en cada punto $t\in\mathbb{T}$.

Nótese que si $\mathbb{T}$ solamente tiene puntos aislados por la derecha, entonces,

$$e_p(t,r) = \prod_{i\in I_{r,t}} (1+\mu(t_i)p(t_i)),$$

expresión que generaliza la dada en [25, Teorema 2.44, (ii)] para el caso en que $1+p(s)\,\mu(s)<0$ para todo $s\in\mathbb{T}^\kappa$.

Cálculo de la $\Delta-$primitiva de la función identidad en diversos conjuntos cerrados A continuación se calcula la $\Delta-$integral de Riemann en $[a,t]_\mathbb{T}$ de la función identidad en diversos conjuntos cerrados $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}$ siendo $a,t\in\mathbb{T}$ con $a<t$.

Por la igualdad (1.6), se sabe que

$$\int_a^t s\ \Delta s = \frac{1}{2}\left(t^2-a^2-\sum_{i\in I_{a,t}}\mu^2(t_i)\right). \tag{1.7}$$

- Si $\mathbb{T}=\{0,h,\dots,mh\}$, entonces, para todo $t\in\mathbb{T}$ se cumple que

$$\int_0^t s\ \Delta s=\frac{1}{2}\left(t^2-ht\right).$$

- Si $\mathbb{T}=\bigcup\limits_{k=0}^{m}[k(a+b),k(a+b)+a]$, $a,b>0$, y denotando como $[x]$ la parte entera del número real x, para cada $t\in\mathbb{T}$ se cumple que

$$\int_0^t s\ \Delta s=\frac{1}{2}\left(t^2-b^2\ \left[\frac{t}{a+b}\right]\right).$$

- Si $\mathbb{T}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{q^{-k}\}\cup\{0\}\cup\bigcup\limits_{k=0}^{m}\{q^k\}$, $q>1$, entonces, para todo $t\in\mathbb{T}$ se cumple que

$$\int_0^t s\ \Delta s=\frac{t^2}{q+1}.$$

- Si $\mathbb{T}=\{0,1,4,\dots,m^2\}$, entonces, para todo $t\in\mathbb{T}$ se cumple que

$$\int_0^t s\ \Delta s=\frac{t^2}{2}-\frac{\sqrt{t}(\sqrt{t}-1)(2\sqrt{t}-1)}{3}-t.$$

- A continuación se dedica especial atención al caso $\mathbb{T}=C$, el clásico conjunto ternario de Cantor. Para obtener el valor exacto de la $\Delta-$integral (1.7), previamente es necesario describir el conjunto de puntos aislados por la derecha de C; se puede verificar que está dado por la siguiente ecuación recursiva:

$$R=\{t\in\mathbb{T}:\ t<\sigma(t)\}=\bigcup_{m=0}^{\infty}\left(\bigcup_{l=1}^{2^m}\{t_{m,l}\}\right),$$

donde $t_{0,1}=\dfrac{1}{3}$ y, para todo $m\geq 1$,

$$t_{m,l}=\begin{cases}\dfrac{1}{3^{m+1}}, & \text{si}\quad l=1,\\[2ex] t_{m,k}+\dfrac{2}{3^{m-j}}, & \text{si}\quad l=2^j+k;\ 0\leq j\leq m-1;\ 1\leq k\leq 2^j.\end{cases}$$

Finalmente, fijado $t\in C$, es preciso conocer el conjunto de puntos aislados por la derecha $s\in C$ tales que $s<t$.

Si $t\in R$ es un punto aislado por la derecha de C, esto es, $t=t_{m,l}$ para ciertos $m\in\mathbb{N}$ y $l\in\{1,\dots,2^m\}$. Por construcción, se sabe que

$$R\cap[0,t_{m,l})=\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{i_k(t_{m,l})}\{t_{k,j}\}\right),$$

donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, $i_k(t_{m,l})$ denota el número de puntos aislados por la derecha de C que son menores o iguales que $t_{m,l}$ y que aparecen en la etapa $k-$ésima de la construcción del conjunto ternario de Cantor; su valor está dado por

$$i_k(t_{m,l}) = \begin{cases} (2l-1)\ 2^{k-(m+1)}, & \text{si} \quad m \leq k-1, \\ l-1, & \text{si} \quad m = k, \\ j - 1 + \dfrac{(-1)^l + 1}{2}, & \text{si} \quad m = k+1, \\ i_k(t_{m-1,j}), & \text{si} \quad m \geq k+2, \end{cases}$$

con $j = \dfrac{1}{2}\left[l + \dfrac{1-(-1)^l}{2}\right]$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\mu(t_{k,j}) = 3^{-(k+1)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $j \in \{1, \ldots, 2^m\}$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{m,l}} s\ \Delta s &= \frac{t_{m,l}^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{i_k(t_{m,l})} \mu^2(t_{k,j})\right) \\ &= \frac{t_{m,l}^2}{2} - \frac{1}{2}S(t_{m,l}), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} S(t_{m,l}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i_k(t_{m,l})}{3^{2(k+1)}} \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{i_k(t_{m-1,j})}{3^{2(k+1)}} + \left(j - 1 + \frac{(-1)^l + 1}{2}\right)\frac{1}{3^{2m}} \\ &\quad + \frac{l-1}{3^{2(m+1)}} + (2l-1)\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{2^{k-(m+1)}}{3^{2(k+1)}} \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{i_k(t_{m-1,j})}{3^{2(k+1)}} + \left(j - 1 + \frac{(-1)^l + 1}{2}\right)\frac{1}{3^{2m}} \\ &\quad + \frac{9l-2}{7 \cdot 3^{2(m+1)}}. \end{aligned}$$

En particular, dado $m \in \mathbb{N}$, si $t = t_{m,2^m} = \dfrac{1}{3^{m+1}} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{2}{3^k}$ es el último punto en la etapa $m-$ésima de la construcción del conjunto C, entonces, está claro que para todo $k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$, se verifica que $i_k(t_{m,2^m}) = 2^k$ e $i_m(t_{m,2^m}) = 2^m - 1$, con lo cual,

$$S(t_{m,2^m}) = \frac{1}{7}\left(1 - \frac{2}{3^{2(m+1)}}\right),$$

de donde se sigue que

$$\int_0^{t_{m,l}} s\ \Delta s = \frac{t_{m,2^m}^2}{2} - \frac{1}{14}\left(1 - \frac{2}{3^{2(m+1)}}\right).$$

Por último, si $t \in C$ es un punto denso por la derecha, entonces, existe una sucesión de puntos aislados por la derecha $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a t y como consecuencia del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y de la relación entre la $\Delta-$integral de Riemann y de Lebesgue, se tiene que

$$\int_0^t s\ \Delta s = \lim_{n\to\infty} \int_0^{t_n} s\ \Delta s,$$

donde las integrales de la derecha están calculadas anteriormente.

Por ejemplo, para $t = 1$, como $1 = \lim\limits_{m\to\infty} t_{m,2^m}$, se tiene que

$$\int_0^1 s\ \Delta s = \lim_{m\to\infty} \int_0^{t_{m,2^m}} s\ \Delta s = \frac{3}{7}.$$

1.3.5. Espacios L_Δ^p

Definición 1.3.17 *Sean $E \subset \mathbb{T}$ un conjunto $\Delta-$medible, $p \in \bar{\mathbb{R}}$ tal que $p \geq 1$ y $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ una función $\Delta-$medible. Se dice que f* **pertencece a** $L_\Delta^p(E)$ *supuesto que o bien se verifica que*

$$\int_E |f|^p(s)\ \Delta s < \infty \qquad si \qquad p \in \mathbb{R},$$

o bien existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f| \leq C \qquad \Delta - c.t.p.\ de\ E \qquad si \qquad p = +\infty.$$

Nótese que la igualdad (1.4) garantiza que para que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ pertenezca a $L_\Delta^p(\mathbb{T})$ para algún $p \in \mathbb{R}$ siendo $\mathbb{T}$ acotado superiormente, es necesario que $f(\sup \mathbb{T}) = 0$. Es por ello que se trabajará con los conjuntos $L_\Delta^p(J^o)$, donde $J = [a,b]_\mathbb{T}$, $a, b \in \mathbb{T}$, $a < b$, es un subintervalo cerrado arbitrario de $\mathbb{T}$ y $J^o = [a,b)_\mathbb{T}$.

A continuación se enuncian algunas de sus propiedades cuyas demostraciones para una medida arbitraria se pueden encontrar en [58, 80].

Teorema 1.3.18 *Sea $p \in \bar{\mathbb{R}}$ tal que $p \geq 1$. Entonces, el conjunto $L_\Delta^p(J^o)$, con la identificación para cada $f \in L_\Delta^p(J^o)$, $f = 0$ si y sólo si $f = 0$ en $\Delta-$casi* *todo punto de J^o, es un espacio de Banach con la norma definida para cada $f \in L^p_\Delta(J^o)$ como*

$$\|f\|_{L^p_\Delta} := \begin{cases} \left[\displaystyle\int_{J^o} |f|^p(s)\ \Delta s\right]^{1/p}, & si \quad p \in \mathbb{R}, \\ \text{ínf}\left\{C \in \mathbb{R}\ :\ |f| \le C\ \Delta - c.\ t.\ p.\ de\ J^o\right\}, & si \quad p = +\infty. \end{cases} \tag{1.8}$$

Además, el conjunto $L^2_\Delta(J^o)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior dado para cada $(f,g) \in L^2_\Delta(J^o) \times L^2_\Delta(J^o)$ por

$$(f,g)_{L^2_\Delta} := \int_{J^o} f(s) \cdot g(s)\ \Delta s. \tag{1.9}$$

Proposición 1.3.19 *Sean $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \ge 1$ y $p' \in \bar{\mathbb{R}}$ verificando que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.*

Entonces, si $f \in L^p_\Delta(J^o)$ y $g \in L^{p'}_\Delta(J^o)$, entonces $f \cdot g \in L^1_\Delta(J^o)$ y

$$\|f \cdot g\|_{L^1_\Delta} \le \|f\|_{L^p_\Delta} \cdot \|g\|_{L^{p'}_\Delta}. \tag{1.10}$$

Esta expresión se llama desigualdad de Hölder y desigualdad de Cauchy–Schwarz cuando $p = 2$.

Proposición 1.3.20 *Para cada $p \in \mathbb{R}$ con $p \ge 1$, el conjunto $C_c(J^o)$ de todas las funciones continuas en J^o con soporte compacto en J^o es denso en $L^p_\Delta(J^o)$.*

Como consecuencia de la proposición 1.3.11 se establece la siguiente equivalencia entre los espacios $L^p_\Delta(J^o)$ y los habituales espacios $L^p([a,b])$ relacionados con la medida de Lebesgue.

Corolario 1.3.21 *Sean $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \ge 1$, $f : J \to \bar{\mathbb{R}}$ y $\tilde{f} : [a,b] \to \bar{\mathbb{R}}$ la extensión de f a $[a,b]$ definida en (1.3).*

Entonces, f pertenece a $L^p_\Delta(J^o)$ si y sólo si $\tilde{f}$ pertenece a $L^p([a,b])$. En cuyo caso, se verifica la siguiente igualdad:

$$\|f\|_{L^p_\Delta} = \|\tilde{f}\|_{L^p}. \tag{1.11}$$

1.3.6. Derivación de $\Delta-$integrales

Teorema 1.3.22 *Sea $E \subset \mathbb{T}$ un conjunto $\Delta-$medible tal que $\sup \mathbb{T} \notin E$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto.*

Si $g : \Omega \times E \to \mathbb{R}$ verifica las siguientes propiedades:

i) Para cada $x \in \Omega$, $g(x,\cdot) \in L^1_\Delta(E)$.

ii) Para cada $t \in E$, $g(\cdot,t)$ tiene derivada $D_1 g(\cdot,t)$ continua en Ω uniformemente en E.

iii) Existe una función $m \in L^1_\Delta(E)$ *tal que*

$$|D_1 g(x,t)| \leq m(t) \qquad \text{para todo } (x,t) \in \Omega \times E.$$

Entonces, la función $G : \Omega \to \mathbb{R}$ *definida para cada* $x \in \Omega$ *como*

$$G(x) := \int_E g(x,t)\ \Delta t \tag{1.12}$$

tiene derivada continua en Ω*,* $G' : \Omega \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$G'(x) = \int_E D_1 g(x,t)\ \Delta t. \tag{1.13}$$

Demostración: Sean $x \in \Omega$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a cero tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n : E \to \mathbb{R}$ definida como

$$g_n(t) := \frac{g(x+x_n,t) - g(x,t)}{x_n} \qquad \text{para todo } t \in E.$$

Para cada $t \in E$, de *ii)* se sigue que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = D_1 g(x,t)$; además, se sabe, por el teorema del valor medio del cálculo diferencial, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\eta_n(t) \in \mathbb{R}$ tal que $g_n(t) = D_1 g(x + \eta_n(t), t)$, con lo cual, de *iii)* se deduce que $|g_n(t)| \leq m(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como consecuencia del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que $D_1 g(x,\cdot) \in L^1_\Delta(E)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{g(x+x_n,t) - g(x,t)}{x_n}\ \Delta t = \int_E D_1 g(x,t)\ \Delta t,$$

lo cual concluye la demostración. □

1.4. Continuidad absoluta

Es esta sección establecemos el concepto de función absolutamente continua en un conjunto cerrado de números reales $\mathbb{T}$ y probamos una caracterización que generaliza la dada para el caso real en el clásico teorema de Banach-Zarecki (ver, por ejemplo, [58]). Además, mostramos la relación entre continuidad absoluta en un intervalo cerrado J de conjunto cerrado de números reales $\mathbb{T}$ y continuidad absoluta en un intervalo real $[a,b]$.

Teniendo en cuenta la equivalencia establecida entre continuidad absoluta en el intervalo cerrado J de $\mathbb{T}$ y la continuidad absoluta en el intervalo real $[a,b]$ y usando la fórmula que relaciona la $\Delta-$integral de Lebesgue con la integral de Lebesgue, se probará que, como en el caso real, la clase de funciones absolutamente continuas es aquella para la cual el teorema fundamental del cálculo es válido.

A continuación obtenemos un criterio para la continuidad absoluta de la función inversa de una función absolutamente continua y estrictamente monótona en un subintervalo cerrado J de $\mathbb{T}$. Asimismo, se deducirá la fórmula para calcular la $\tilde{\Delta}-$derivada de la función inversa cuando ésta sea absolutamente continua en su dominio.

1.4.1. Definiciones y propiedades

Sea $J = [a, b]_{\mathbb{T}}$, con $a, b \in \mathbb{T}$ y $a < b$, un subintervalo cerrado de $\mathbb{T}$.

Definición 1.4.1 *Sean $f : J \to \mathbb{R}$ y $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de J, se define*

$$V(P, f) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Se define la **variación total de** f **en** J *como*

$$V_a^b(f) := \sup \{ \ V(P, f) \ : \ P \text{ partición de } J \ \} \in [0, \infty].$$

Si $V_a^b(f) \in \mathbb{R}$, se dice que f es una **función de variación acotada en** J.

El conjunto de todas las funciones de variación acotada en J tiene estructura de espacio vectorial con respecto a las operaciones habituales de suma de aplicaciones y producto por escalares.

Definición 1.4.2 *Una función $f : J \to \mathbb{R}$ se dice que es* **absolutamente continua en** J *si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\{[a_k, b_k)_{\mathbb{T}}\}_{k=1}^{n}$, con $a_k, b_k \in J$, es una familia de subintervalos de J que son dos a dos disjuntos y se verifica que*

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Se denota como $AC(J)$ el espacio vectorial de las funciones absolutamente continuas en J y para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, como

$$AC^n(J) := \{ \, x \in AC(J) \, : \, x^{\Delta^j} \in AC(J^{\kappa^j}) \text{ para todo } j \in \{1, \cdots, n\} \, \},$$

siendo, para cada $j \in \mathbb{N}$ con $j \geq 1$, $J^{\kappa^j} = [a, \rho^j(b)]_{\mathbb{T}}$.

El teorema de Banach–Zarecki, [58, (18.25)], asegura que una función real $g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua en el intervalo cerrado X si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

i) La aplicación g es continua y de variación acotada en X.

ii) La imagen por g de cualquier subconjunto de medida de Lebesgue nula de X es un conjunto de medida de Lebesgue nula.

A continuación se probará un teorema similar para funciones definidas en el intervalo cerrado J de $\mathbb{T}$ y de dicho resultado se deducirá una equivalencia entre funciones absolutamente continuas en el intervalo J de $\mathbb{T}$ y funciones absolutamente continuas en el intervalo real $[a, b]$.

Para ello, dada una función $f : J \to \mathbb{R}$, se considera una función auxiliar que extiende f al intervalo real $[a, b]$, $\bar{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$\bar{f}(t) := \begin{cases} f(t), & \text{si} \quad t \in \mathbb{T}, \\ \\ f(t_i) + \dfrac{f(\sigma(t_i)) - f(t_i)}{\mu(t_i)}(t - t_i), & \text{si} \quad t \in (t_i, \sigma(t_i)), \ i \in I, \end{cases} \tag{1.14}$$

donde $\{t_i\}_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, es el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$; nótese que la aplicación $\bar{f}$ no es más que la interpolación lineal entre cada punto aislado por la derecha y su siguiente punto en $\mathbb{T}$.

Las funciones f y $\bar{f}$ están relacionadas mediante las siguientes propiedades.

Lema 1.4.3 *Sean $f : J \to \mathbb{R}$ y $\bar{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ la extensión de f a $[a, b]$ definida en* (1.14)*. Entonces, f es de variación acotada en J si y sólo si $\bar{f}$ es de variación acotada en $[a, b]$.*

Lema 1.4.4 *Sean $f : J \to \mathbb{R}$ y $\bar{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ la extensión de f a $[a, b]$ definida en* (1.14)*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) La imagen por f de cualquier subconjunto de J de $\Delta-$medida nula es un conjunto de medida de Lebesgue nula.

i) La imagen por $\bar{f}$ de cualquier subconjunto de $[a, b]$ de medida de Lebesgue nula es un conjunto de medida de Lebesgue nula.

Demostración: En primer lugar, supóngase que *i)* es cierto. Sea $E \subset [a, b]$ un conjunto de medida de Lebesgue nula; se probará que $\bar{f}(E)$ es un conjunto de medida de Lebesgue nula.

Se puede suponer que $\sup \mathbb{T} \notin E$ ya que en caso de que $\mathbb{T}$ estuviese acotado superiormente y $\sup \mathbb{T} \in E$, se verificaría que $\lambda(\{\bar{f}(\sup \mathbb{T})\}) = 0$.

Si $R = \{t_i\}_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, es el conjunto de puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$, se puede reescribir E como

$$E = \left[\bigcup_{i \in I} (E \cap [t_i, \sigma(t_i))) \right] \cup (E \cap (\mathbb{T} \backslash R)),$$

con lo cual, de la subaditividad numerable de la medida de Lebesgue se sigue que

$$\lambda(\bar{f}(E)) \leq \left[\sum_{i \in I} \lambda(\bar{f}(E \cap [t_i, \sigma(t_i)))) \right] + \lambda(\bar{f}(E \cap (\mathbb{T} \backslash R))). \tag{1.15}$$

Para cada $i \in I$ fijado, puesto que $\bar{f}|_{[t_i, \sigma(t_i)]}$ es absolutamente continua en $[t_i, \sigma(t_i)]$ y $\lambda(E \cap [t_i, \sigma(t_i))) = 0$, el teorema de Banach–Zarecki afirma que

$$\lambda(\bar{f}(E \cap [t_i, \sigma(t_i)))) = 0. \tag{1.16}$$

Además, dado que el conjunto $E \cap (\mathbb{T} \backslash R)$ no tiene puntos aislados por la derecha y $\sup \mathbb{T} \notin E \cap (\mathbb{T} \backslash R)$, resulta, por (1.2), que

$$\mu_\Delta(E \cap (\mathbb{T} \backslash R)) = \lambda(E \cap (\mathbb{T} \backslash R)) = 0,$$

por lo tanto, la igualdad $\bar{f}|_{\mathbb{T}} = f$ y la condición *i)* garantizan que

$$\lambda(\bar{f}(E \cap (\mathbb{T} \backslash R))) = \lambda(f(E \cap (\mathbb{T} \backslash R))) = 0. \tag{1.17}$$

Como consecuencia de las igualdades (1.15), (1.16) y (1.17), se tiene que $\lambda(\bar{f}(E)) = 0$.

Recíprocamente, asúmase que se verifica *ii)* y sea $E \subset J$ un conjunto de $\Delta-$medida nula. De la igualdad (1.2) se sigue que E es un conjunto de medida de Lebesgue nula , así que, la relación $f(E) = \bar{f}(E)$ y la condición *ii)* garantizan la validez de *i)*. $\square$

Las propiedades anteriores permiten probar el siguiente criterio para la continuidad absoluta en J análogo al dado en el teorema de Banach-Zarecki para funciones reales.

Teorema 1.4.5 *Una aplicación $f : J \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua en J si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

i) La aplicación f es continua y de variación acotada en J.

ii) La imagen por f de cualquier subconjunto de $\Delta-$medida nula de J es un conjunto de medida de Lebesgue nula.

Demostración: Sea $\bar{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ la extensión de f a $[a, b]$ definida en (1.14).

Supóngase en primer lugar que f es una función absolutamente continua en J. Puesto que la continuidad de f en J está garantizada por la continuidad absoluta, para probar el enunciado *i)*, solamente es necesario comprobar que f es de variación acotada en J.

Sea $\delta > 0$ correspondiente a $\varepsilon = 1$ en la definición de función absolutamente continua en J; para $\delta/2 > 0$, por el lema 1.2.19, se sabe que existe alguna partición de J, $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tal que para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica o bien

$$x_k - x_{k-1} \leq \delta/2$$

o bien

$$x_k - x_{k-1} > \delta/2 \quad \text{y} \quad \sigma(x_{k-1}) = x_k.$$

Si $x_k - x_{k-1} \leq \delta/2$, entonces, la continuidad absoluta de f en J garantiza que $V(\bar{P}, f|_{[x_{k-1}, x_k]_{\mathbb{T}}}) < \varepsilon = 1$ para cada partición $\bar{P}$ de $[x_{k-1}, x_k]_{\mathbb{T}}$, por lo tanto, $V_{x_{k-1}}^{x_k}(f) \leq 1$ y así, $f|_{[x_{k-1}, x_k]_{\mathbb{T}}}$ es de variación acotada en $[x_{k-1}, x_k]_{\mathbb{T}}$.

Por el contrario, si $x_k - x_{k-1} > \delta/2$, entonces, como $\sigma(x_{k-1}) = x_k$, se tiene que $V_{x_{k-1}}^{x_k}(f) = |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ lo cual establece que $f|_{[x_{k-1}, x_k]_{\mathbb{T}}}$ es de variación acotada en $[x_{k-1}, x_k]_{\mathbb{T}}$.

Como consecuencia del lema 1.4.3 resulta que para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\bar{f}|_{[x_{k-1}, x_k]}$ es de variación acotada en $[x_{k-1}, x_k]$ y por lo tanto, $\bar{f}$ es de variación acotada en $[a, b]$; así pues, el lema 1.4.3 permite concluir que f es de variación acotada en J y la afirmación *i)* está probada.

Para demostrar *ii)*, se considera un conjunto $E \subset J$ de $\Delta-$medida nula y se verá que $f(E)$ es un conjunto de medida de Lebesgue nula.

Sean ε un número real positivo arbitrario y un $\delta > 0$ relacionado con ε como en la definición de función absolutamente continua en J.

Si $\mathbb{T}$ no está acotado superiormente, entonces $\sup \mathbb{T} \notin E$ mientras que si $\mathbb{T}$ está acotado superiormente, como la $\Delta-$medida de $\sup \mathbb{T}$ no es finita y $\mu_\Delta(E) = 0$, resulta que $\sup \mathbb{T} \notin E$; por consiguiente, se puede elegir una familia $\{[a_k, b_k)_\mathbb{T}\}_{k=1}^{\infty}$, con $a_k, b_k \in J$, de subintervalos de J que son dos a dos disjuntos y se verifica que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k)_\mathbb{T} \tag{1.18}$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta. \tag{1.19}$$

De (1.18) se sigue que

$$f(E) \subset f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} ([a_k, b_k)_\mathbb{T})\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f([a_k, b_k)_\mathbb{T}),$$

lo cual garantiza que

$$\lambda(f(E)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f([a_k, b_k)_\mathbb{T})). \tag{1.20}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ fijado, la continuidad de f en $[a_k, b_k]_\mathbb{T}$ establece la existencia de $c_k, d_k \in [a_k, b_k] \cap \mathbb{T}$ con $c_k < d_k$ tales que

$$\lambda(f([a_k, b_k)_\mathbb{T})) = \lambda(f([a_k, b_k]_\mathbb{T})) \leq |f(d_k) - f(c_k)|. \tag{1.21}$$

Además, como $[c_k, d_k]_\mathbb{T} \subset [a_k, b_k]_\mathbb{T}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por la continuidad absoluta de f en J y la desigualdad (1.19), se sabe que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(d_k) - f(c_k)| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

de donde se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(d_k) - f(c_k)| \leq \varepsilon. \tag{1.22}$$

Por lo tanto, de (1.20), (1.21) y (1.22) se deduce que

$$\lambda(f(E)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f([a_k, b_k) \cap \mathbb{T})) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(d_k) - f(c_k)| \leq \varepsilon$$

y así, por la arbitrariedad de ε se concluye que $\lambda(f(E)) = 0$.

Por consiguiente, la propiedad *ii)* es cierta.

Recíprocamente, asúmase que se verifican los enunciados *i)* e *ii)*.

De los lemas 1.4.3 y 1.4.4 se deduce que $\bar{f}$ es continua y de variación acotada en $[a, b]$ y $\bar{f}$ aplica cada subconjunto de medida de Lebesgue nula de $[a, b]$ en un conjunto de medida de Lebesgue nula por lo que, el teorema de Banach–Zarecki asegura que $\bar{f}$ es absolutamente continua en $[a, b]$; la igualdad $f = \bar{f}_{|\mathbb{T}}$ establece la continuidad absoluta de f en J. □

Como consecuencia directa del teorema 1.4.5 y los lemas 1.4.3 y 1.4.4, se obtiene la siguiente caracterización de las funciones absolutamente continuas en J.

Corolario 1.4.6 *Sean $f : J \to \mathbb{R}$ y $\bar{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ la extensión de f a $[a, b]$ definida en* (1.14)*. Entonces, f es absolutamente continua en J si y sólo si $\bar{f}$ es absolutamente continua en $[a, b]$.*

1.4.2. Teorema fundamental del cálculo

Teniendo en cuenta la equivalencia establecida en el corolario 1.4.6 entre continuidad absoluta en el intervalo J de $\mathbb{T}$ y la continuidad absoluta en el intervalo real $[a, b]$ y usando la fórmula (1.4) que relaciona la $\Delta-$integral de Lebesgue con la integral de Lebesgue, se probará que, como en el caso real, la clase de funciones absolutamente continuas es aquella para la cual el teorema fundamental del cálculo es válido.

Previamente se demuestra la siguiente propiedad sobre $\Delta-$diferenciabilidad y diferenciabilidad de las funciones f y $\bar{f}$.

Lema 1.4.7 *Sean $R = \{t_i\}_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, el conjunto de puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$, $f : J \to \mathbb{R}$ y $\bar{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ la extensión de f a $[a, b]$ definida en* (1.14)*. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos:*

1. *La función $\bar{f}$ es diferenciable en el conjunto $[a, b] \backslash \mathbb{T} = \bigcup_{i \in I} (t_i, \sigma(t_i))$ y*

$$\bar{f}'(t) = \frac{f(\sigma(t_i)) - f(t_i)}{\mu(t_i)} \qquad \text{si } t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ para algún } i \in I.$$

2. *Si $\bar{f}$ es diferenciable en $t \in J^o$, entonces f es $\Delta-$diferenciable en t y su $\Delta-$derivada en t verifica la igualdad*

$$f^{\Delta}(t) = \bar{f}'(t).$$

3. Si f es $\Delta-$diferenciable en $t \in J^o \backslash (R \cup \sigma(R))$, entonces $\bar{f}$ es diferenciable en t y su derivada en t satisface la igualdad

$$\bar{f}'(t) = f^{\Delta}(t).$$

Demostración: Ya que la afirmación *1* es una consecuencia directa de la definición de $\bar{f}$ solamente queda probar *2* y *3*.

Sea $t \in J^o$ un punto en el que $\bar{f}$ es diferenciable. Si t es aislado por la derecha, como $\bar{f}$ es continua en t, f es continua en t y como consecuencia, f es $\Delta-$diferenciable en t y de la definición de $\bar{f}$ se tiene que

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \bar{f}'(t).$$

Por el contrario, si t es denso por la derecha, entonces, por la definición de $\bar{f}$, se sabe que

$$\lim_{\substack{s \to t \\ s \in \mathbb{T}}} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \lim_{\substack{s \to t \\ s \in \mathbb{T}}} \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(s)}{t - s} = \lim_{s \to t} \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(s)}{t - s} = \bar{f}'(t),$$

y como consecuencia, f es $\Delta-$diferenciable en t y

$$f^{\Delta}(t) = \bar{f}'(t).$$

Por lo tanto, se verifica la afirmación *2*.

Sea $t \in J^o \backslash (R \cup \sigma(R))$ un punto en el que f es $\Delta-$diferenciable. Fijado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $s \in (t - \delta, t + \delta)_{\mathbb{T}}$ con $s \neq t$ se cumple que

$$\left| \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t) \right| = \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t) \right| < \varepsilon. \tag{1.23}$$

Sea $s \in (t - \delta, t + \delta) \backslash \mathbb{T}$; se puede suponer sin pérdida de generalidad que $s \in (t_i, \sigma(t_i))$ para algún $i \in I$ tal que $t_i, \sigma(t_i) \in (t - \delta, t + \delta)$.

Definiendo

$$m := \text{mín} \left\{ \frac{f(t) - f(t_i)}{t - t_i}, \frac{f(t) - f(\sigma(t_i))}{t - \sigma(t_i)} \right\}$$

y

$$M := \text{máx} \left\{ \frac{f(t) - f(t_i)}{t - t_i}, \frac{f(t) - f(\sigma(t_i))}{t - \sigma(t_i)} \right\},$$

se prueban las siguientes desigualdades

$$m \leq \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(s)}{t - s} \leq M,$$

así pues, de (1.23), se deduce que

$$\left| \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t) \right| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, $\bar{f}$ es diferenciable en t y

$$\bar{f}'(t) = f^{\Delta}(t),$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

La propiedad anterior permite probar el teorema de la $\Delta-$derivación de la $\Delta-$integral de Lebesgue.

Teorema 1.4.8 *Sean $f \in L^1_{\Delta}(J^o)$, $c \in \mathbb{R}$ y $F : J \to \mathbb{R}$ definida para cada $t \in J$ como*

$$F(t) = c + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} f(s)\ \Delta s. \tag{1.24}$$

Entonces, F es absolutamente continua en J, F es $\Delta-$diferenciable en $\Delta-$casi todo punto de J^o y $F^{\Delta} = f$ en $\Delta-$casi todo punto de J^o. Además, si f es continua en $t \in J^o$, entonces F es $\Delta-$diferenciable en t y $F^{\Delta}(t) = f(t)$.

Demostración: Sean R el conjunto de puntos aislados por derecha de $\mathbb{T}$ y $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ la extensión de f al intervalo real $[a,b]$ definida en (1.3); Corolario 1.3.21 establece que $\tilde{f}$ pertenece a $L^1([a,b])$ y como consecuencia de la igualdad (1.4) se tiene que

$$F(t) - c = \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} f(s)\ \Delta s = \int_{[a,t)} \tilde{f}(s)\ ds, \qquad \text{para cada } t \in J,$$

de donde es fácil probar que la extensión de F al intervalo $[a,b]$, $\bar{F} : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida en (1.14) satisface la siguiente igualdad:

$$\bar{F}(t) = c + \int_{[a,t)} \tilde{f}(s)\ ds, \qquad \text{para cada } t \in [a,b];$$

con lo cual, el teorema de la derivación de la integral de Lebesgue, [83, (6.84)], garantiza que $\bar{F}$ es absolutamente continua en J y así, el corolario 1.4.6 permite afirmar que F es absolutamente continua en J.

De la continuidad de F y la igualdad (1.24) se sigue que $F^{\Delta} = f$ en $R \cap J^o$; además, por el teorema de la derivación de la integral de Lebesgue se sabe que existe un conjunto $E \subset [a,b]$ tal que $\lambda([a,b] \backslash E) = 0$ y $\bar{F}' = \tilde{f}$ en E y así, por la propiedad *2* del lema 1.4.7 se obtiene que $F^{\Delta} = \bar{F}' = f$ en $E \cap (J^o \backslash R)$. Por consiguiente, la igualdad (1.2) permite concluir que $F^{\Delta} = f$ en $\Delta-$casi todo punto de J^o.

Finalmente, sea $t \in J^o$ un punto denso por la derecha en el que f es continua. Fijado $\varepsilon > 0$, como f es continua en t, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $s \in (t-\delta, t+\delta)_{\mathbb{T}} \cap J$ se cumple que $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$. Por lo tanto, para todo

$s \in (t-\delta, t+\delta)_{\mathbb{T}} \cap J$ tal que $t < s$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(s)-F(t)}{s-t} - f(t)\right| &= \left|\frac{1}{s-t}\int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} (f(r)-f(t))\ \Delta r\right| \\
&\leq \frac{1}{|s-t|}\int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} |f(r)-f(t)|\ \Delta r \\
&\leq \varepsilon;
\end{aligned}$$

análogamente se prueba la anterior desigualdad para cada $s \in (t-\delta, t+\delta)_{\mathbb{T}} \cap J$ tal que $s < t$. Por lo tanto, F es $\Delta-$diferenciable en t y $F^{\Delta}(t) = f(t)$. □

A continuación se prueba el teorema fundamental del cálculo.

Teorema 1.4.9 *Una función $f : J \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua en J si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

i) La función f es $\Delta-$diferenciable en $\Delta-$casi todo punto de J^o y $f^{\Delta} \in L^1_{\Delta}(J^o)$.

ii) La igualdad

$$f(t) = f(a) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} f^{\Delta}(s)\ \Delta s,$$

es válida para cada $t \in J$.

Demostración: Del teorema de la $\Delta-$ derivación de la $\Delta-$ integral de Lebesgue, teorema 1.4.8, se sigue que si se cumplen *i)* e *ii)*, f es absolutamente continua en J.

Supóngase que f es absolutamente continua en J, por el corolario 1.4.6 se sabe que la extensión de f al intervalo $[a,b]$ definida en (1.14), $\bar{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$, es absolutamente continua en $[a,b]$ y por tanto, el clásico teorema fundamental del cálculo, [83, (6.85)], permite afirmar que:

1) La función $\bar{f}$ es diferenciable en casi todo punto de $[a,b]$ y $\bar{f}' \in L^1([a,b])$.

2) Para cada $t \in [a,b]$ se verifica que

$$\bar{f}(t) = \bar{f}(a) + \int_{[a,t)} \bar{f}'(s)\ ds.$$

En primer lugar se probará que f es $\Delta-$diferenciable en $\Delta-$casi todo punto de J^o. La propiedad *2* del lema 1.4.7 establece la siguiente relación:

$$E_1 := \{t \in J^o : \nexists\, f^{\Delta}(t)\} \subset \{t \in [a,b) : \nexists\, \bar{f}'(t)\} =: E_2. \qquad (1.25)$$

De la continuidad de f en J se sigue que f es $\Delta-$diferenciable en cada punto aislado por la derecha de J^o, con lo que E_1 no tiene puntos aislados por la derecha. Así pues, de (1.2) resulta que $\mu_\Delta(E_1) = \lambda(E_1)$ y como $\bar{f}$ es diferenciable en casi todo punto de $[a, b]$, se tiene que $\lambda(E_2) = 0$, lo cual implica, por (1.25), que $\mu_\Delta(E_1) = 0$. Por consiguiente, f es $\Delta-$diferenciable en $\Delta-$casi todo punto de J^o.

Finalmente, redefiniendo la función $f^\Delta : J \to \mathbb{R}$ como

$$f^\Delta(t) := \begin{cases} f^\Delta(t), & \text{si} \quad t \in J^o \backslash E_1, \\ 0, & \text{si} \quad t \in E_1 \cup \{b\}, \end{cases}$$

se verá que $f^\Delta \in L^1_\Delta(J^o)$ y que la afirmación *ii)* es cierta. Considérese $\widetilde{f^\Delta} : [a, b] \to \mathbb{R}$, la extensión de f^Δ a $[a, b]$ definida en (1.3), de la propiedad *2* del lema 1.4.7 se sigue que

$$\widetilde{f^\Delta}(t) = \bar{f}'(t) \text{ para cada } t \in [a, b) \backslash E_2,$$

con lo cual, como $\lambda(E_2) = 0$ y $\bar{f}' \in L^1([a, b])$, resulta que $\widetilde{f^\Delta} \in L^1([a, b])$ y

$$\int_{[a,t)} \widetilde{f^\Delta}(s)\ ds = \int_{[a,t)} \bar{f}'(s)\ ds \qquad \text{para cada } t \in [a, b].$$

Por consiguiente, la proposición 1.3.12 y el corolario 1.3.21 aseguran que $f^\Delta \in L^1_\Delta(J^o)$ y

$$\int_{[a,t)_\mathbb{T}} f^\Delta(s)\ \Delta s = \int_{[a,t)} \widetilde{f^\Delta}(s)\ ds = \int_{[a,t)} \bar{f}'(s)\ ds \qquad \text{para cada } t \in J,$$

y así, la condición 2) permite concluir que la igualdad

$$f(t) - f(a) = \bar{f}(t) - \bar{f}(a) = \int_{[a,t)} \bar{f}'(s)\ ds = \int_{[a,t)_\mathbb{T}} f^\Delta(s)\ \Delta s,$$

se verifica para todo $t \in J$. $\square$

1.4.3. Integración por partes

Las funciones absolutamente continuas en J verifican la siguiente fórmula de integración por partes.

Teorema 1.4.10 *Si $f, g : J \to \mathbb{R}$ son funciones absolutamente continuas en J, entonces $f \cdot g$ es absolutamente continua en J y se verifican las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} \int_{J^o} \left(f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta\right)(s)\ \Delta s &= f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) \\ &= \int_{J^o} \left(f g^\Delta + f^\Delta g^\sigma\right)(s)\ \Delta s. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Demostración: Puesto que f y g son absolutamente continuas en J, existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|g|, |f| \leq \alpha$ en J, con lo que, para cada familia finita de subintervalos de J dos a dos disjuntos, $\{[a_k, b_k)_{\mathbb{T}}\}_{k=1}^n$, con $a_k, b_k \in J$, se cumple que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |(fg)(b_k) - (fg)(a_k)| &\leq \sum_{k=1}^{n} |g(b_k)| \cdot |f(b_k) - f(a_k)| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} |f(a_k)| \cdot |g(b_k) - g(a_k)| \\ &\leq \alpha \left[\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| \right]\end{aligned}$$

y por tanto, la continuidad absoluta de f y g en J aseguran la continuidad absoluta de $f \cdot g$ en J.

Además, por la regla del producto, teorema 1.2.8, resulta que para cada $t \in J^o$ en el cual f y g sean $\Delta-$diferenciables, se satisface que

$$(f \cdot g)^{\Delta}(t) = \left(f^{\Delta} g + f^{\sigma} g^{\Delta}\right)(t) = \left(f g^{\Delta} + f^{\Delta} g^{\sigma}\right)(t),$$

así pues, el resultado es consecuencia del teorema fundamental del cálculo. $\square$

1.4.4. Condiciones de continuidad absoluta para la función inversa. $\tilde{\Delta}-$Derivada de la función inversa

Si una función real es absolutamente continua y estrictamente monótona en algún intervalo real $X \subset \mathbb{R}$ y aplica X en un intervalo real $Y \subset \mathbb{R}$, se sabe que, ver [31, Lema 1.1], para que su función inversa sea absolutamente continua en Y es necesario y suficiente que la derivada de la función sea no nula en casi todo punto de X.

A continuación se probará el resultado análogo para el caso de una función absolutamente continua y estrictamente monótona en un subintervalo cerrado J de $\mathbb{T}$ y con valores en un subintervalo cerrado $\tilde{J}$ de otro conjunto cerrado de números reales $\tilde{\mathbb{T}} \subset \mathbb{R}$. Asimismo, se deducirá la fórmula para calcular la $\tilde{\Delta}-$derivada de la función inversa cuando ésta sea absolutamente continua en su dominio.

Dada una función $f : J \to \mathbb{R}$ absolutamente continua y estrictamente monótona en J, sean $\tilde{\mathbb{T}} := f(J)$, $\tilde{a} := \min \tilde{\mathbb{T}}$, $\tilde{b} := \max \tilde{\mathbb{T}}$, $\tilde{J} := [\tilde{a}, \tilde{b}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, $f^{-1} : \tilde{J} \to \mathbb{R}$ la función inversa de f y $\overline{f^{-1}} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{R}$ la extensión de f^{-1} a $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ definida en (1.14).

Inicialmente se determinará la expresión de $\overline{f^{-1}}$ para lo cual es necesario conocer el conjunto de puntos aislados por la derecha de $\tilde{\mathbb{T}}$, $\tilde{R} := \{\tilde{t} : \ \tilde{t} < \tilde{\sigma}(\tilde{t})\}$, donde los operadores $\tilde{\sigma}, \tilde{\rho} : \tilde{\mathbb{T}} \to \tilde{\mathbb{T}}$ y $\tilde{\mu} : \tilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^+$ se definen del modo habitual. Se tratan separadamente el caso en que f es estrictamente creciente en J y aquel en que f es estrictamente decreciente en J.

Sea $\tilde{I} := \{\, i \in I \,:\, t_i \in J^o \,\}$ con $R = \{t_i\}_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$.

Si f es estrictamente creciente en J, entonces

$$\tilde{R} = \{\tilde{t}_i\}_{i \in \tilde{I}}, \qquad \text{con } \tilde{t}_i = f(t_i) \quad \text{para todo } i \in \tilde{I}$$

y

$$\tilde{\sigma}(\tilde{t}_i) = \tilde{\sigma}(f(t_i)) = f(\sigma(t_i)) \qquad \text{para todo } i \in \tilde{I},$$

y así resulta, por (1.14), que

$$\overline{f^{-1}}(\tilde{t}) = \begin{cases} f^{-1}(\tilde{t}), & \text{si} \quad \tilde{t} \in \tilde{\mathbb{T}}, \\ \\ t_i + \dfrac{\mu(t_i)}{f(\sigma(t_i)) - f(t_i)}(\tilde{t} - f(t_i)), & \text{si} \quad \tilde{t} \in (\tilde{t}_i, \tilde{\sigma}(\tilde{t}_i)),\ i \in \tilde{I}, \end{cases} \tag{1.27}$$

Por el contrario, si f es estrictamente decreciente en J, entonces

$$\tilde{R} = \{\tilde{t}_i\}_{i \in \tilde{I}}, \qquad \text{con } \tilde{t}_i = f(\sigma(t_i)) \quad \text{para todo } i \in \tilde{I}$$

y

$$\tilde{\sigma}(f(\sigma(t_i))) = f(t_i) \qquad \text{para todo } i \in \tilde{I},$$

de donde se obtiene, por (1.14), que

$$\overline{f^{-1}}(\tilde{t}) = \begin{cases} f^{-1}(\tilde{t}), & \text{si } \tilde{t} \in \tilde{\mathbb{T}}, \\ \\ \sigma(t_i) + \dfrac{\mu(t_i)}{f(\sigma(t_i)) - f(t_i)}(\tilde{t} - f(\sigma(t_i))), & \text{si } \tilde{t} \in (\tilde{t}_i, \tilde{\sigma}(\tilde{t}_i)),\ i \in \tilde{I}, \end{cases} \tag{1.28}$$

Sea $\bar{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ la extensión de f a $[a,b]$ definida en (1.14), puesto que f es estrictamente monótona en J, se tiene que $\bar{f}$ es estrictamente monótona en $[a,b]$ y $\bar{f}([a,b]) = [\tilde{a}, \tilde{b}]$.

Si $(\bar{f})^{-1} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{R}$ es la función inversa de $\bar{f}$, entonces, es fácil comprobar que se verifica la siguiente igualdad:

$$\overline{f^{-1}} = (\bar{f})^{-1} \qquad \text{en } [\tilde{a}, \tilde{b}]; \tag{1.29}$$

esta igualdad junto con la siguiente equivalencia permite probar el resultado acerca de la continuidad absoluta de la función inversa en su dominio.

Lema 1.4.11 *Supóngase que $f : J \to \mathbb{R}$ es continua en t_i para todo $i \in \tilde{I}$, con $\tilde{I} := \{\, i \in I \,:\, t_i \in J^o \,\}$ y $R = \{t_i\}_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$ y sea $\bar{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ la extensión de f a $[a,b]$ definida en* (1.14)*. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) $f^{\Delta}(t) \neq 0$ *para* $\Delta-$*casi todo punto* $t \in J^o$.

ii) $\bar{f}'(t) \neq 0$ *para casi todo punto* $t \in [a,b]$.

Demostración: En primer lugar supóngase que *i)* es cierta.

Para cada $i \in \tilde{I}$, la continuidad de f en t_i garantiza que f es $\Delta-$diferenciable en t_i y, como $\mu_\Delta(\{t_i\}) > 0$, de la condición *i)* se sigue que

$$f^\Delta(t_i) \neq 0, \tag{1.30}$$

con lo cual, la propiedad *1* del lema 1.4.7 establece que

$$\bar{f}'(t) = f^\Delta(t_i) \neq 0, \qquad \text{para todo } t \in (t_i, \sigma(t_i)).$$

Así pues, se verifica la siguiente igualdad

$$\{\, t \in [a,b) : \ \bar{f}'(t) = 0 \,\} = \{\, t \in J^o : \ \bar{f}'(t) = 0 \,\}. \tag{1.31}$$

Además, del enunciado *2* del lema 1.4.7 se sigue que

$$\{\, t \in J^o : \ \bar{f}'(t) = 0 \,\} \subset \{\, t \in J^o : \ f^\Delta(t) = 0 \,\},$$

con lo cual, de la desigualdad (1.30) y de la expresión (1.2) que relaciona la $\Delta-$medida de Lebesgue con la medida de Lebesgue, se obtiene que

$$\lambda\left(\{\, t \in J^o : \ \bar{f}'(t) = 0 \,\}\right) = \mu_\Delta\left(\{\, t \in J^o : \ f^\Delta(t) = 0 \,\}\right) = 0. \tag{1.32}$$

Por tanto, las igualdades (1.31) y (1.32) garantizan la condición *ii)*.

Recíprocamente, supóngase que se verifica *ii)*.

Para cada $i \in \tilde{I}$, la continuidad de f en t_i garantiza que f es $\Delta-$diferenciable en t_i y de la condición *ii)* y la propiedad *1* del lema 1.4.7 se deduce que

$$f^\Delta(t_i) = \frac{f(\sigma(t_i)) - f(t_i)}{\mu(t_i)} \neq 0,$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} \{\, t \in J^o : \ f^\Delta(t) = 0 \,\} &= \{\, t \in J^o \backslash R : \ f^\Delta(t) = 0 \,\} \\ &= \{\, t \in (J^o \cap \sigma(R)) \backslash R : \ f^\Delta(t) = 0 \,\} \qquad (1.33) \\ &\quad \bigcup \{\, t \in J^o \backslash (R \cup \sigma(R)) : \ f^\Delta(t) = 0 \,\}. \end{aligned}$$

Usando la expresión (1.2) y teniendo en cuenta que el conjunto $\sigma(R) = \{\sigma(t_i)\}_{i \in I}$ tiene medida de Lebesgue nula por ser numerable, resulta que

$$\mu_\Delta\left(\{\, t \in (J^o \cap \sigma(R)) \backslash R : \ f^\Delta(t) = 0 \,\}\right) = 0. \tag{1.34}$$

Además, el enunciado *3* de Lema 1.4.7 permite afirmar que

$$\{\, t \in J^o \backslash (R \cup \sigma(R)) : \ f^\Delta(t) = 0 \,\} \subset \{\, t \in [a,b] : \ \bar{f}'(t) = 0 \,\}$$

y como consecuencia de la condición *ii)* y la relación (1.2) se tiene que

$$\mu_\Delta\left(\{\, t \in J^o \backslash (R \cup \sigma(R)) : \ f^\Delta(t) = 0 \,\}\right) = \lambda\left(\{\, t \in [a,b] : \ \bar{f}'(t) = 0 \,\}\right) = 0. \tag{1.35}$$

Así pues, de (1.33), (1.34) y (1.35) se obtiene la validez del enunciado *i).* $\square$

El siguiente teorema establece un criterio para la continuidad absoluta de la función inversa en su dominio y proporciona una fórmula para calcular la $\tilde{\Delta}-$derivada de la función inversa.

Teorema 1.4.12 *Sea $f : J \to \tilde{J}$ una función absolutamente continua y estrictamente monótona en J.*

La aplicación $f^{-1} : \tilde{J} \to J$ es absolutamente continua en $\tilde{J}$ si y sólo si $f^{\Delta}(t) \neq 0$ para $\Delta-$casi todo punto $t \in J^o$.

Además, si f^{-1} es absolutamente continua en $\tilde{J}$, entonces, se verifican los siguientes enunciados:

i) Si f^{-1} es estrictamente creciente en $\tilde{J}$, entonces,

$$(f^{-1})^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \frac{1}{f^{\Delta}(f^{-1}(\tilde{t}))} \qquad \text{para } \tilde{\Delta} - \text{c. t. p. } \tilde{t} \in \tilde{J}^o.$$

ii) Si f^{-1} es estrictamente decreciente en $\tilde{J}$, entonces,

$$(f^{-1})^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \frac{1}{f^{\Delta}(f^{-1}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})))} \qquad \text{para } \tilde{\Delta} - \text{c. t. p. } \tilde{t} \in \tilde{J}^o.$$

Demostración: Puesto que f es una función absolutamente continua en J, por el corolario 1.4.6 se sabe que $\bar{f}$ es absolutamente continua en $[a, b]$.

El corolario 1.4.6 y la igualdad (1.29) establecen que la función f^{-1} es absolutamente continua en $\tilde{J}$ si y sólo si $\overline{f^{-1}} = (\bar{f})^{-1}$ es absolutamente continua en $[\tilde{a}, \tilde{b}]$.

Como $\bar{f}$ es absolutamente continua en $[a, b]$, una condición necesaria y suficiente para la afirmación precedente es, ver [31, Lema 1.1],

$$\bar{f}'(t) \neq 0 \qquad \text{para c. t. p. } \; t \in [a, b],$$

lo cual es equivalente, por Lema 1.4.11, a

$$f^{\Delta}(t) \neq 0 \qquad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in J^o,$$

y por tanto, la primera parte de la demostración está concluida.

Supóngase que f^{-1} es absolutamente continua en $\tilde{J}$. Por el corolario 1.4.6 y la igualdad (1.29) se sabe que $\overline{f^{-1}} = (\bar{f})^{-1}$ es absolutamente continua en $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, con lo cual, el teorema de derivación de la función inversa, ver [31, Lema 1.1], asegura que

$$\left((\bar{f})^{-1}\right)'(\tilde{t}) = \frac{1}{\bar{f}'\left((\bar{f})^{-1}(\tilde{t})\right)} \qquad \text{para c. t. p. } \; \tilde{t} \in [\tilde{a}, \tilde{b}],$$

de donde se sigue, por (1.29), que

$$\left(\overline{f^{-1}}\right)'(\tilde{t}) = \frac{1}{\bar{f}'\left(\overline{f^{-1}}(\tilde{t})\right)} \qquad \text{para c. t. p. } \; \tilde{t} \in [\tilde{a}, \tilde{b}],$$

esto es, existe un conjunto $E_1 \subset [\tilde{a}, \tilde{b}]$ verificando que

$$\left(\overline{f^{-1}}\right)'(\tilde{t}) = \frac{1}{\bar{f}'\left(\overline{f^{-1}}(\tilde{t})\right)} \qquad \text{para todo } \tilde{t} \in E_1 \tag{1.36}$$

y

$$\lambda([\tilde{a}, \tilde{b}] \backslash E_1) = 0. \tag{1.37}$$

Sean

$$E := \Big(\ (\tilde{a}, \tilde{b}) \cap (\tilde{\mathbb{T}} \backslash \tilde{R}) \cap E_1 \ \Big) \bigcup \tilde{R}$$

y $\tilde{t} \in E$ arbitrario; se probará que f^{-1} es $\tilde{\Delta}-$diferenciable en $\tilde{t}$ y se calculará el valor de su $\tilde{\Delta}-$derivada, $(f^{-1})^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t})$.

Si $\tilde{t} \in (\tilde{a}, \tilde{b}) \cap (\tilde{\mathbb{T}} \backslash \tilde{R}) \cap E_1$, dado que $\overline{f^{-1}}$ y $\bar{f}$ son diferenciables en $\tilde{t}$ y $\overline{f^{-1}}(\tilde{t}) = f^{-1}(\tilde{t}) \in J^o$ respectivamente, entonces, la propiedad *2* del lema 1.4.7 y la igualdad (1.36) garantizan que f^{-1} es $\tilde{\Delta}-$diferenciable en $\tilde{t}$, f es $\Delta-$diferenciable en $f^{-1}(\tilde{t})$ y

$$(f^{-1})^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \left(\overline{f^{-1}}\right)'(\tilde{t}) = \frac{1}{\bar{f}'\left(\overline{f^{-1}}(\tilde{t})\right)} = \frac{1}{f^{\Delta}(f^{-1}(\tilde{t}))}, \tag{1.38}$$

lo cual es equivalente, ya que $\tilde{t}$ es un punto denso por la derecha de $\tilde{\mathbb{T}}$, a

$$(f^{-1})^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \frac{1}{f^{\Delta}(f^{-1}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})))}. \tag{1.39}$$

Por el contrario, si $\tilde{t} \in \tilde{R}$, entonces, la continuidad de f^{-1} en $\tilde{t}$ asegura que f^{-1} es $\tilde{\Delta}-$diferenciable en $\tilde{t}$ y

$$(f^{-1})^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \frac{f^{-1}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})) - f^{-1}(\tilde{t})}{\tilde{\sigma}(\tilde{t}) - \tilde{t}}.$$

Si f^{-1} es estrictamente creciente en $\tilde{J}$, entonces, de la continuidad de f^{-1} en $\tilde{t}$ se sigue que

$$f^{-1}(\tilde{t}) \in R \qquad \text{y} \qquad \sigma(f^{-1}(\tilde{t})) = f^{-1}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})),$$

con lo cual,

$$(f^{-1})^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \frac{\sigma(f^{-1}(\tilde{t})) - f^{-1}(\tilde{t})}{f(\sigma(f^{-1}(\tilde{t}))) - f(f^{-1}(\tilde{t}))} = \frac{1}{f^{\Delta}(f^{-1}(\tilde{t}))}. \tag{1.40}$$

Mientras que si f^{-1} es estrictamente decreciente en $\tilde{J}$, entonces, como f^{-1} es continua en $\tilde{t}$, resulta que

$$f^{-1}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})) \in R \qquad \text{y} \qquad \sigma(f^{-1}(\tilde{\sigma}(\tilde{t}))) = f^{-1}(\tilde{t})$$

y así,

$$(f^{-1})^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \frac{f^{-1}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})) - \sigma(f^{-1}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})))}{f(f^{-1}(\tilde{\sigma}(\tilde{t}))) - f(\sigma(f^{-1}(\tilde{\sigma}(\tilde{t}))))} = \frac{1}{f^{\Delta}(f^{-1}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})))}. \tag{1.41}$$

Para finalizar se probará que $\mu_{\tilde{\Delta}}(\tilde{J}^o \backslash E) = 0$.
Como

$$\tilde{J}^o \backslash E = \begin{cases} \Big([\tilde{a}, \tilde{b}) \backslash E_1\Big) \cap (\tilde{\mathbb{T}} \backslash \tilde{R}), & \text{si} \quad \tilde{a} \in \tilde{R}, \\ \Big[\Big([\tilde{a}, \tilde{b}) \backslash E_1\Big) \cap (\tilde{\mathbb{T}} \backslash \tilde{R})\Big] \bigcup \{\tilde{a}\}, & \text{si} \quad \tilde{a} \notin \tilde{R}, \end{cases}$$

de la expresión (1.2) que relaciona la $\Delta-$medida de Lebesgue con la medida de Lebesgue se tiene que

$$\mu_{\tilde{\Delta}}(\tilde{J}^o \backslash E) = \mu_{\tilde{\Delta}}\left(\Big([\tilde{a}, \tilde{b}) \backslash E_1\Big) \cap (\tilde{\mathbb{T}} \backslash \tilde{R})\right) = \lambda\left(\Big([\tilde{a}, \tilde{b}) \backslash E_1\Big) \cap (\tilde{\mathbb{T}} \backslash \tilde{R})\right),$$

de donde se obtiene, por (1.37), que

$$\mu_{\tilde{\Delta}}(\tilde{J}^o \backslash E) = 0. \tag{1.42}$$

Por consiguiente, de (1.38), (1.40) y (1.42) se deduce la afirmación *i)* mientras que (1.39), (1.41) y (1.42) prueban el enunciado *ii)*. □

1.5. Espacios de Sobolev

En esta sección estudiaremos la teoría de los espacios de Sobolev de funciones definidas en un intervalo cerrado de conjuntos cerrados arbitrarios de números reales con la $\Delta-$medida de Lebesgue.

Los espacios de Sobolev son una herramienta fundamental en el análisis real, por ejemplo, en el uso de métodos variacionales para resolver problemas en ecuaciones diferenciales, en derivadas parciales y en ecuaciones en diferencias con condiciones de contorno. A pesar de que la teoría es bien conocida para funciones definidas en intervalos abiertos acotados de números reales, ver [27], y es trivial para funciones definidas en subconjuntos acotados arbitrarios de números enteros, no estaba desarrollada en conjuntos cerrados arbitrarios de $\mathbb{R}$. En esta sección daremos una introducción de los espacios de Sobolev de funciones definidas en un intervalo cerrado $[a, b]_{\mathbb{T}}$ de un conjunto cerrado $\mathbb{T}$ con la Lebesgue $\Delta-$medida. Definimos los espacios de Sobolev de primer orden como el espacio de funciones en $L^p_\Delta([a, b)_{\mathbb{T}})$ cuya $\Delta-$derivada generalizada pertenece a $L^p_\Delta([a, b)_{\mathbb{T}})$.

Por último, demostraremos que estos espacios verifican propiedades análogas a las de los espacios de Sobolev de funciones definidas en un intervalo abierto de números reales.

1.5.1. Definición de los espacios $W_\Delta^{1,p}(J)$

El objetivo de esta sección es introducir los espacios de Sobolev de primer orden sobre un subintervalo cerrado arbitrario de $\mathbb{T}$, $J = [a,b]_\mathbb{T}$ con $a, b \in \mathbb{T}$ y $a < b$, considerándose sobre $\mathbb{T}$ la $\Delta-$integración de Lebesgue.

Definición 1.5.1 *Sean $p \in \bar{\mathbb{R}}$ tal que $p \geq 1$ y $u : J \to \bar{\mathbb{R}}$. Se dice que u* **pertenece a** $W_\Delta^{1,p}(J)$ *si y sólo si $u \in L_\Delta^p(J^o)$ y existe una función $g : J^\kappa \to \bar{\mathbb{R}}$ verificando que $g \in L_\Delta^p(J^o)$ y*

$$\int_{J^o} \left(u \cdot \varphi^\Delta\right)(s)\ \Delta s = -\int_{J^o} \left(g \cdot \varphi^\sigma\right)(s)\ \Delta s \qquad \text{para todo } \varphi \in C_{0,rd}^1(J^\kappa) \tag{1.43}$$

donde

$$C_{0,rd}^1(J^\kappa) := \left\{\ f : J \to \mathbb{R} :\ f \in C_{rd}^1(J^\kappa),\ f(a) = 0 = f(b)\ \right\} \tag{1.44}$$

y $C_{rd}^1(J^\kappa)$ es el conjunto de todas las funciones continuas en J que son $\Delta-$diferenciables en J^κ y sus $\Delta-$derivadas son rd–continuas en J^κ.

La fórmula de integración por partes para funciones absolutamente continuas en J establece que la relación

$$V_\Delta^{1,p}(J) := \{\ x \in AC(J)\ :\ x^\Delta \in L_\Delta^p(J^o)\ \} \subset W_\Delta^{1,p}(J) \tag{1.45}$$

es válida para todo $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \geq 1$; se probará que ambos conjuntos son, como clases de funciones, equivalentes, para lo cual son necesarios los siguientes lemas.

Lema 1.5.2 *Sea $f \in L_\Delta^1(J^o)$ verificando que*

$$\int_{J^o} (f \cdot u)(s)\ \Delta s = 0, \qquad \text{para todo } \ u \in C_c(J^o), \tag{1.46}$$

entonces,

$$f = 0 \qquad \Delta - c.\ t.\ p.\ de\ \ J^o. \tag{1.47}$$

Demostración: Fijado $\varepsilon > 0$, la densidad del conjunto $C_c(J^o)$ en $L_\Delta^1(J^o)$ garantiza la existencia de una función $f_1 \in C_c(J^o)$ tal que $\|f - f_1\|_{L_\Delta^1} < \varepsilon$ y así, de (1.46) se deduce que para cada $u \in C_c(J^o)$, es cierto que

$$\left|\int_{J^o} (f_1 \cdot u)(s)\ \Delta s\right| \leq \|u\|_{C(J^o)} \cdot \|f - f_1\|_{L_\Delta^1} < \varepsilon\ \|u\|_{C(J^o)}.$$

Como los conjuntos

$$A_1 := \{\ s \in J^o\ :\ f_1(s) \geq \varepsilon\ \} \qquad \text{y} \qquad A_2 := \{\ s \in J^o\ :\ f_1(s) \leq -\varepsilon\ \}$$

son subconjuntos compactos y disjuntos de J^o, el lema de Urysohn, [80, 2.2.10], permite construir una aplicación $u_0 : J^o \to \mathbb{R}$ perteneciente a $C_c(J^o)$ verificando que

$$u_0 \equiv \begin{cases} 1; & \text{en} \quad A_1, \\ -1; & \text{en} \quad A_2, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad |u_0| \leq 1 \text{ en } J^o;$$

con lo cual, definiendo $A := A_1 \cup A_2$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{J^o} |f_1|(s)\ \Delta s &= \int_{J^o} (f_1 \cdot u_0)(s)\ \Delta s - \int_{J^o\setminus A} (f_1 \cdot u_0)(s)\ \Delta s \\ &\quad + \int_{J^o\setminus A} |f_1|(s)\ \Delta s \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon\ (b-a).\end{aligned}$$

Como consecuencia de la elección arbitraria de $\varepsilon > 0$, se obtiene (1.47). $\square$

Lema 1.5.3 *Sea $f \in L^1_\Delta(J^o)$. Entonces, una condición necesaria y suficiente para la validez de la igualdad*

$$\int_{J^o} \left(f \cdot \varphi^\Delta\right)(s)\ \Delta s = 0, \qquad \textit{para cada } \varphi \in C^1_{0,rd}(J^\kappa), \tag{1.48}$$

es la existencia de una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f = c \qquad \Delta - c.\ t.\ p.\ de\ J^o. \tag{1.49}$$

Demostración: La condición suficiente es consecuencia del teorema fundamental del cálculo. Recíprocamente, fijada $u \in C_c(J^o)$ arbitraria, definiendo $h, \varphi : J \to \mathbb{R}$ como

$$h(t) := \begin{cases} u(t) - \dfrac{\int_{J^o} u(r)\ \Delta r}{b-a}, & \text{si} \quad t \in J^o, \\[2ex] -\dfrac{\int_{J^o} u(r)\ \Delta r}{b-a}, & \text{si} \quad t = b, \end{cases}$$

y

$$\varphi(t) := \int_{[a,t)_\mathbb{T}} h(s)\ \Delta s, \qquad \text{para todo } t \in J,$$

el teorema de la $\Delta-$derivación de la $\Delta-$integral de Lebesgue establece que $\varphi \in C^1_{0,rd}(J^\kappa)$, con lo cual, por la igualdad (1.48) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{J^o} \left[f \cdot \left(u - \frac{\int_{J^o} u(r)\ \Delta r}{b-a} \right) \right](s)\ \Delta s \\ &= \int_{J^o} \left[\left(f - \frac{\int_{J^o} f(r)\ \Delta r}{b-a} \right) \cdot u \right](s)\ \Delta s. \end{aligned}$$

Por consiguiente, del lema 1.5.2 se deduce la igualdad (1.49) para el valor $c = \dfrac{\int_{J^o} f(r)\ \Delta r}{b-a}$. $\square$

El siguiente resultado muestra una caracterización de las funciones pertenecientes a $W^{1,p}_\Delta(J)$ en términos de funciones de $V^{1,p}_\Delta(J)$.

Teorema 1.5.4 *Supóngase que* $u \in W^{1,p}_{\Delta}(J)$ *para algún* $p \in \bar{\mathbb{R}}$ *con* $p \geq 1$ *y que* (1.43) *se verifica para* $g \in L^p_{\Delta}(J^o)$. *Entonces, existe una única función* $x \in V^{1,p}_{\Delta}(J)$ *verificando las siguientes igualdades:*

$$x = u \ \ y \ \ x^{\Delta} = g \qquad \Delta - c.\ t.\ p.\ de\ J^o. \tag{1.50}$$

Además, si $g \in C_{rd}(J^{\kappa})$, *entonces, existe una única función* $x \in C^1_{rd}(J^{\kappa})$ *para la cual se satisface*

$$x = u \ \ \Delta - c.\ t.\ p.\ de\ J^o \qquad y \qquad x^{\Delta} = g\ en\ J^{\kappa}. \tag{1.51}$$

Demostración: Sea $v : J \to \mathbb{R}$ definida como

$$v(t) := \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(s)\ \Delta s, \qquad \text{para todo } t \in J;$$

el teorema de la $\Delta-$derivación de la $\Delta-$integral de Lebesgue garantiza que $v \in V^{1,p}_{\Delta}(J)$ y por la fórmula de integración por partes para funciones absolutamente continuas se tiene que para cada $\varphi \in C^1_{0,rd}(J^{\kappa})$ se cumple que

$$\int_{J^o} \left[(v-u)\cdot \varphi^{\Delta}\right](s)\ \Delta s = -\int_{J^o} \left[(v^{\Delta} - g)\cdot \varphi^{\sigma}\right](s)\ \Delta s = 0;$$

con lo cual, el lema 1.5.3 asegura la existencia de una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $v - u = c$ en $\Delta-$casi todo punto de J^o.

Como consecuencia del teorema fundamental del cálculo se concluye que la aplicación $x : J \to \mathbb{R}$ definida como $x(t) := v(t) - c$ para todo $t \in J$ es la única función perteneciente a $V^{1,p}_{\Delta}(J)$ para la cual la igualdad (1.50) es válida.

Además, si $g \in C_{rd}(J^{\kappa})$, entonces, el teorema de la $\Delta-$derivación de la $\Delta-$integral de Lebesgue establece que $x \in C^1_{rd}(J^{\kappa})$ y $x^{\Delta} = g$ en J^{κ}. $\square$

Identificando cada función de $W^{1,p}_{\Delta}(J)$ con su representante absolutamente continuo de $V^{1,p}_{\Delta}(J)$ para el cual se verifican las igualdades (1.50), el conjunto $W^{1,p}_{\Delta}(J)$ adquiere estructura de espacio de Banach como muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.5.5 *Sea* $p \in \bar{\mathbb{R}}$ *con* $p \geq 1$. *El conjunto* $W^{1,p}_{\Delta}(J)$ *es un espacio de Banach con la norma definida para cada* $x \in W^{1,p}_{\Delta}(J)$ *como*

$$\|x\|_{W^{1,p}_{\Delta}} := \|x\|_{L^p_{\Delta}} + \|x^{\Delta}\|_{L^p_{\Delta}}. \tag{1.52}$$

Además, el conjunto $H^1_{\Delta}(J) := W^{1,2}_{\Delta}(J)$ *es un espacio de Hilbert con el producto interior dado para cada* $(x,y) \in H^1_{\Delta}(J) \times H^1_{\Delta}(J)$ *por*

$$(x,y)_{H^1_{\Delta}} := (x,y)_{L^2_{\Delta}} + (x^{\Delta}, y^{\Delta})_{L^2_{\Delta}}. \tag{1.53}$$

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}_{\Delta}(J)$; el teorema 1.3.18 garantiza la existencia de $u, g \in L^p_{\Delta}(J^o)$ tales que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x^{\Delta}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

convergen fuertemente en $L^p_\Delta(J^o)$ a u y g respectivamente, con lo cual, tomando límites en la igualdad

$$\int_{J^o} \left(x_n \cdot \varphi^\Delta\right)(s)\ \Delta s = -\int_{J^o} \left(x_n^\Delta \cdot \varphi^\sigma\right)(s)\ \Delta s, \qquad \varphi \in C^1_{0,rd}(J^\kappa),$$

se concluye que $u \in W^{1,p}_\Delta(J)$.

Así pues, por el teorema 1.5.4 se sabe que existe $x \in W^{1,p}_\Delta(J)$ verificando que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $W^{1,p}_\Delta(J)$ a x. □

1.5.2. Propiedades de los espacios $W^{1,p}_\Delta(J)$

En esta subsección se probarán algunas propiedades del espacio de Banach $W^{1,p}_\Delta(J)$ con $p \in \bar{\mathbb{R}}$ y $p \geq 1$; la primera de ellas garantiza la continuidad de la inclusión del espacio $W^{1,p}_\Delta(J)$ en el espacio de las funciones continuas $C(J)$ con la norma del supremo $\|\cdot\|_{C(J)}$.

Proposición 1.5.6 *Existe una constante $K > 0$ que sólo depende de $b - a$ tal que la desigualdad*

$$\|x\|_{C(J)} \leq K \cdot \|x\|_{W^{1,p}_\Delta} \tag{1.54}$$

se verifica para todo $x \in W^{1,p}_\Delta(J)$ y todo $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \geq 1$ y por tanto, para todo $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \geq 1$, la inclusión $W^{1,p}_\Delta(J) \hookrightarrow C(J)$ es continua.

Demostración: Fijados $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \geq 1$ y $x \in W^{1,p}_\Delta(J)$, sea $t \in J$ verificando que $|x(t)| := \min_{s\in J} |x(s)|$. Por el teorema fundamental del cálculo y la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\|x\|_{C(J)} \leq |x(t)| + \int_{J^o} |x^\Delta|(s)\ \Delta s \leq K \cdot \|x\|_{W^{1,p}_\Delta},$$

para alguna constante $K > 0$, solamente dependiente de $b - a$. □

El criterio de compacidad fuerte en $C(J)$, teorema de Ascoli, [42, (7.5.7)], y la proposición 1.5.6 permiten probar la siguiente propiedad de compacidad en $C(J)$.

Proposición 1.5.7 *Sea $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \geq 1$. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos:*

1. *Si $p > 1$, entonces, la inclusión $W^{1,p}_\Delta(J) \hookrightarrow C(J)$ es compacta.*

2. *Si $p = 1$, entonces, la inclusión $W^{1,p}_\Delta(J) \hookrightarrow C(J)$ es compacta si y sólo si todo punto de J es aislado, entendiendo que a es aislado por la derecha y b es aislado por la izquierda.*

Demostración: Sea $\mathcal{F}^p$ la bola unidad en $W^{1,p}_\Delta(J)$; por la proposición 1.5.6 se sabe que $\mathcal{F}^p$ es cerrado y acotado en $C(J)$.

Si $p > 1$, entonces, el teorema fundamental del cálculo y la desigualdad de Hölder aseguran que $\mathcal{F}^p$ is equicontinuo.

Por el contrario, si $p = 1$, entonces, cuando cada punto de J es aislado, está claro que $\mathcal{F}^p$ es equicontinuo mientras que si existe algún $t_0 \in J$ tal que t_0 no es aislado, se verá que $\mathcal{F}^p$ no es equicontinuo.

Sea $S := \dfrac{1}{b-a+1}$, se fija $\delta > 0$ arbitrario y se elije $s_\delta \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)_{\mathbb{T}}$ tal que $s_\delta \neq t_0$, no es pérdida de generalidad asumir que $s_\delta < t_0$.

Se define $f_\delta : J \to \mathbb{R}$ como

$$f_\delta(t) := \begin{cases} \dfrac{S}{t_0 - s_\delta}, & \text{si} \quad t \in ([s_\delta, t_0) \cap J), \\ \\ 0, & \text{si} \quad t \notin ([s_\delta, t_0) \cap J); \end{cases}$$

el teorema de la $\Delta-$derivación de la $\Delta-$integral de Lebesgue afirma que la función $F_\delta : J \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_\delta(t) := \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} f_\delta(s)\ \Delta s, \qquad t \in J,$$

pertenece a $\mathcal{F}^p$ de modo que, como

$$F_\delta(t_0) - F_\delta(s_\delta) = \int_{[s_\delta, t_0)_{\mathbb{T}}} f_\delta(s)\ \Delta s = S,$$

se concluye que $\mathcal{F}^p$ no es equicontinuo.

Por consiguiente, el teorema de Ascoli establece el resultado. $\square$

Como consecuencia de la proposición 1.5.6, se obtiene la siguiente condición suficiente para convergencia fuerte en $C(J)$.

Corolario 1.5.8 *Sean $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p > 1$, $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}_\Delta(J)$ y $x \in W^{1,p}_\Delta(J)$. Si $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en $W^{1,p}_\Delta(J)$ a x, entonces, $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $C(J)$ a x.*

Demostración: Supóngase que $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en $W^{1,p}_\Delta(J)$ a x; la proposición 1.5.6 establece que $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en $C(J)$ a x y así, como $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es equicontinuo, resulta, por [42, (7.5.6)] que $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $C(J)$ a x. $\square$

La proposición 1.5.6 permite deducir la siguiente equivalencia entre los espacios de Sobolev en J, $W^{1,p}_\Delta(J)$ y los habituales espacios de Sobolev en (a,b), $W^{1,p}((a,b))$.

Corolario 1.5.9 *Sean $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \geq 1$, $x : J \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$ la extensión de x a $[a,b]$ definida en (1.14). Entonces, x pertenece a $W^{1,p}_\Delta(J)$ si y sólo si $\bar{x}$ pertenece a $W^{1,p}((a,b))$.*

Además, existen dos constantes $K_1, K_2 > 0$ que sólo dependen de $(b-a)$ tal que las desigualdades

$$K_1 \cdot \|\bar{x}\|_{W^{1,p}} \;\leq\; \|x\|_{W^{1,p}_\Delta} \;\leq\; K_2 \cdot \|\bar{x}\|_{W^{1,p}} \tag{1.55}$$

se verifican para todo $x \in W_\Delta^{1,p}(J)$ *y todo* $p \in \bar{\mathbb{R}}$ *con* $p \geq 1$.

Demostración: Sean $\widetilde{x^\Delta}, \bar{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$ las extensiones de x^Δ y x a $[a,b]$ definidas en (1.3) y (1.14) respectivamente, del lema 1.4.7 se deduce que

$$\widetilde{x^\Delta} = \bar{x}' \qquad \text{c. t. p. de } [a,b].$$

Por tanto, de los corolarios 1.3.21 y 1.4.6 y la proposición 1.5.6 se obtienen las afirmaciones . □

Del resultado anterior se deducirá que algunas de las propiedades conocidas para $W^{1,p}((a,b))$ se transfieren a $W_\Delta^{1,p}(J)$.

Se necesita el siguiente resultado.

Proposición 1.5.10 *Si* $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ *pertenece a* $W^{1,p}((a,b))$ *para algún* $p \in \bar{\mathbb{R}}$ *con* $p \geq 1$, *entonces,* $y|_J$ *pertenece a* $W_\Delta^{1,p}(J)$. *Además, existe una constante* $D > 0$ *que sólo depende de* $(b-a)$ *tal que*

$$\|y|_J\|_{W_\Delta^{1,p}} \leq D \cdot \|y\|_{W^{1,p}}, \qquad \textit{para todo } \ y \in W^{1,p}((a,b)),\ p \in \bar{\mathbb{R}},\ p \geq 1. \tag{1.56}$$

Demostración: Sea $\tilde{I} = \{\, i \in I \ : \ t_i \in J^o \,\}$, con $R = \{t_i\}_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$ y supóngase que $y \in W^{1,p}((a,b))$ para algún $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \geq 1$. El clásico teorema fundamental del cálculo permite afirmar que

$$(y|_J)^\Delta(t_i) = \frac{\int_{[t_i,\sigma(t_i)]} y'(s)\ ds}{\sigma(t_i) - t_i} \qquad \text{para cada } i \in \tilde{I}$$

y

$$(y|_J)^\Delta = y' \qquad \text{c. t. p. de } J^o \cap (\mathbb{T}\backslash R).$$

Por consiguiente, si $p = +\infty$, entonces, $y_{|J} \in W_\Delta^{1,p}(J)$ y se verifica (1.56) mientras que si $p \in \mathbb{R}$, entonces, por la igualdad (1.4) que relaciona la $\Delta-$integral de Lebesgue con la integral de Lebesgue, se tiene que

$$\left\|(y|_J)^\Delta\right\|_{L_\Delta^p}^p \leq \int_{J^o \cap (\mathbb{T}\backslash R)} |y'|^p(s)\ ds + \sum_{i \in \tilde{I}} \int_{[t_i,\sigma(t_i)]} |y'|^p(s)\ ds \leq \|y\|_{W^{1,p}}^p$$

y puesto que la desigualdad

$$\|y|_J\|_{L_\Delta^p} \leq (b-a)^{1/p} \cdot \|y\|_{C([a,b])} \leq C \cdot (b-a)^{1/p} \cdot \|y\|_{W^{1,p}},$$

se verifica para algún $C > 0$, resulta que $y|_J \in W_\Delta^{1,p}(J)$ y la desigualdad (1.56) es válida. □

A continuación se deducirán algunas propiedades para los espacios $W_\Delta^{1,p}(J)$ de las análogas para los espacios $W^{1,p}((a,b))$.

Corolario 1.5.11 *Sea* $p \in \bar{\mathbb{R}}$ *tal que* $p \geq 1$. *Entonces, para cada* $q \in [1,+\infty)$, *la inclusión* $W_\Delta^{1,p}(J) \hookrightarrow L_\Delta^q(J^o)$ *es compacta.*

Demostración: Sea $q \in [1, +\infty)$ fijado. Como consecuencia de la proposición 1.5.7 y del hecho de que la inclusión $C(J) \hookrightarrow L^q_\Delta(J^o)$ es continua, sólo falta probar que la bola unidad en $W^{1,1}_\Delta(J)$, $\mathcal{F}^1$, es compacta en $L^q_\Delta(J^o)$ cuando J tiene al menos un punto no aislado.

Supongamos que $t_0 \in J$ es un punto no aislado de J y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $\mathcal{F}^1$. El corolario 1.5.9 asegura que la sucesión $\{\overline{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida en (1.14), es una sucesión acotada en $W^{1,1}((a,b))$, con lo cual, existe una subsucesión $\{\overline{x_{n_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y una función $y \in L^q([a,b])$ tales que $\{\overline{x_{n_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $L^q([a,b])$ a y.

Por tanto, definiendo $x := y|_J$, la proposición 1.5.10 asegura que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $L^q_\Delta(J^o)$ a x. $\square$

Corolario 1.5.12 *El espacio de Banach $W^{1,p}_\Delta(J)$ es reflexivo para todo $p \in (1, +\infty)$ y separable para todo $p \in [1, +\infty)$.*

Demostración: Sea $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \geq 1$. Por el corolario 1.5.9, se sabe que el operador $T_p : W^{1,p}_\Delta(J) \to W^{1,p}((a,b))$ dado para cada $x \in W^{1,p}_\Delta(J)$ por $T_p(x) := \bar{x}$, con $\bar{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida en (1.14), es lineal y continuo.

Puesto que $T_p(W^{1,p}_\Delta(J))$ es un subespacio cerrado de $W^{1,p}((a,b))$ y éste es reflexivo cuando $p \in (1, +\infty)$ y separable cuando $p \in [1, +\infty)$, $T_p(W^{1,p}_\Delta(J))$ verifica las mismas propiedades. $\square$

Corolario 1.5.13 *Si $x \in W^{1,p}_\Delta(J)$ para algún $p \in [1, +\infty)$, entonces, existe una sucesión de funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto en $\mathbb{R}$ $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{y_n|_J\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $W^{1,p}_\Delta(J)$ a x.*

Demostración: Si $x \in W^{1,p}_\Delta(J)$ para algún $p \in [1, +\infty)$, entonces, el corolario 1.5.9 establece que la función $\bar{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida en (1.14), pertenece a $W^{1,p}((a,b))$; así pues, existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de aplicaciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en $\mathbb{R}$ tales que $\{y_{n|[a,b]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{x}$ en $W^{1,p}((a,b))$.

Por consiguiente, el resultado es consecuencia de la igualdad $\bar{x}|_J = x$ y la proposición 1.5.10. $\square$

1.5.3. Definición y propiedades de los espacios $W^{1,p}_{0,\Delta}(J)$

Del corolario 1.5.13 se deduce que el conjunto $C^1_{rd}(J^\kappa)$ es denso en $W^{1,p}_\Delta(J)$ para cada $p \in [1, +\infty)$, sin embargo, para un conjunto cerrado de números reales arbitrario no es cierto que el conjunto de funciones test $C^1_{0,rd}(J^\kappa)$, definido en (1.44), sea denso en $W^{1,p}_\Delta(J)$; esta subsección está dedicada a demostrar algunas de las propiedades de la clausura de $C^1_{0,rd}(J^\kappa)$ en $W^{1,p}_\Delta(J)$.

Definición 1.5.14 *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $p \geq 1$, se define el conjunto $W^{1,p}_{0,\Delta}(J)$ como la clausura del conjunto $C^1_{0,rd}(J^\kappa)$ en $W^{1,p}_\Delta(J)$. Se denota $H^1_{0,\Delta}(J) := W^{1,2}_{0,\Delta}(J)$.*

Los espacios $W_{0,\Delta}^{1,p}(J)$ y $H_{0,\Delta}^{1}(J)$ están dotados de la norma inducida por la norma $\|\cdot\|_{W_\Delta^{1,p}}$, definida en (1.52), y del producto interior inducido por el producto interior $(\cdot,\cdot)_{H_\Delta^1}$, definido en (1.53), respectivamente. Como $W_{0,\Delta}^{1,p}(J)$ es cerrado en $W_\Delta^{1,p}(J)$, el teorema 1.5.5 y el corolario 1.5.12 aseguran que $W_{0,\Delta}^{1,p}(J)$ es un espacio de Banach separable y reflexivo cuando $p > 1$ y $H_{0,\Delta}^1(J)$ es un espacio de Hilbert separable.

El espacio $W_{0,\Delta}^{1,p}(J)$ se caracteriza en el siguiente resultado.

Proposición 1.5.15 *Sea $x \in W_\Delta^{1,p}(J)$. Entonces, $x \in W_{0,\Delta}^{1,p}(J)$ si y sólo si $x(a) = 0 = x(b)$.*

Demostración: En primer lugar, supóngase que $x \in W_{0,\Delta}^{1,p}(J)$, entonces, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{0,rd}^1(J^\kappa)$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $W_\Delta^{1,p}(J)$ a x. Por tanto, la desigualdad (1.54) permite afirmar que $x(a) = 0 = x(b)$.

Recíprocamente, asúmase que $x(a) = 0 = x(b)$. Por el corolario 1.5.9 se sabe que la función $\bar{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida en (1.14), pertenece a $W_0^{1,p}((a,b))$, con lo cual, existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^1((a,b))$ que converge fuertemente en $W^{1,p}((a,b))$ a $\bar{x}$. Definiendo $x_n := y_n|_J$, $n \in \mathbb{N}$, se deduce que $x_n \in C_{0,rd}^1(J^\kappa)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $W_\Delta^{1,p}(J)$ a x. □

Como consecuencia inmediata del resultado anterior, el corolario 1.5.9 y la caracterización del espacio $W_0^{1,p}((a,b))$ se obtiene la siguiente relación entre los conjuntos $W_{0,\Delta}^{1,p}(\mathbb{T})$ y $W_0^{1,p}((a,b))$.

Corolario 1.5.16 *Sean $p \in \mathbb{R}$ con $p \geq 1$, $x : J \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$ la extensión de x a $[a,b]$ definida en (1.14). Entonces, $x \in W_{0,\Delta}^{1,p}(J)$ si y sólo si $\bar{x} \in W_0^{1,p}((a,b))$.*

Usando la proposición 1.5.15 se prueba la validez de la desigualdad de Poincaré.

Proposición 1.5.17 *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $p \geq 1$. Entonces, existe una constante $L > 0$ que solamente depende de $(b-a)$ tal que*

$$\|x\|_{W_\Delta^{1,p}} \leq L \cdot \|x^\Delta\|_{L_\Delta^p} \qquad \text{para todo } x \in W_{0,\Delta}^{1,p}(J), \tag{1.57}$$

esto es, en el espacio $W_{0,\Delta}^{1,p}(J)$, la norma definida para cada $x \in W_{0,\Delta}^{1,p}(J)$ como $\|x^\Delta\|_{L_\Delta^p}$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{W_\Delta^{1,p}}$.

Demostración: Fijado $x \in W_{0,\Delta}^{1,p}(J)$, el teorema fundamental del cálculo y la proposición 1.5.15 permiten afirmar que la siguiente desigualdad

$$|\,x(t)\,| = \left| x(a) + \int_{[a,t)_\mathbb{T}} x^\Delta(s)\ \Delta s \right| = \left| \int_{[a,t)_\mathbb{T}} x^\Delta(s)\ \Delta s \right| \leq \|x^\Delta\|_{L_\Delta^1}$$

es cierta para todo $t \in J$, con lo cual, (1.57) se sigue de la desigualdad de Hölder. □

Nota 1.5.18 *Se puede comprobar que la función definida para cada* $x, y \in H^1_{0,\Delta}(J)$ *como* $(x^\Delta, y^\Delta)_{L^2_\Delta}$ *es un producto interior en el espacio* $H^1_{0,\Delta}(J)$ *y su norma asociada es equivalente a la norma asociada al producto interior* $(\cdot,\cdot)_{H^1_\Delta}$.

1.5.4. Definición y propiedades de los espacios $W^{n,p}_\Delta(J)$

El propósito de esta subsección es definir recursivamente los espacios de Sobolev de orden n en J para $n \geq 2$, $W^{n,p}_\Delta(J)$, que son los espacios formados por las $\Delta-$primitivas de funciones pertenecientes $W^{n-1,p}_\Delta(J^\kappa)$.

Definición 1.5.19 *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 2$, $p \in \bar{\mathbb{R}}$ *con* $p \geq 1$ *y* $u : J \to \bar{\mathbb{R}}$. *Se dice que la función* u *pertenece a* $W^{n,p}_\Delta(J)$ *si y sólo si* $u \in W^{n-1,p}_\Delta(J)$ *y existe una función* $g_1 : J^\kappa \to \mathbb{R}$ *verificando que* $g_1 \in W^{n-1,p}_\Delta(J^\kappa)$ *y*

$$\int_{J^o} \left(u \cdot \varphi^\Delta\right)(s)\ \Delta s = -\int_{J^o} \left(g_1 \cdot \varphi^\sigma\right)(s)\ \Delta s \qquad \text{para todo } \varphi \in C^1_{0,rd}(J^\kappa). \tag{1.58}$$

El espacio $W^{n,p}_\Delta(J)$ se caracteriza en el siguiente resultado cuya demostración se omite por su simplicidad.

Proposición 1.5.20 *Supóngase que* $u : J \to \bar{\mathbb{R}}$ *es tal que* $u \in L^p_\Delta(J^o)$, *entonces,* $u \in W^{n,p}_\Delta(J)$ *si y sólo si existen* $g_j : J^{\kappa^j} \to \bar{\mathbb{R}}$, $j \in \{1, \cdots, n\}$, *tales que para todo* $j \in \{1, \cdots, n\}$, $g_j \in L^p_\Delta\left(\left(J^{\kappa^{j-1}}\right)^o\right)$, *para cada* $\varphi \in C^1_{0,rd}(J^\kappa)$ *se cumple que*

$$\int_{J^o} \left(u \cdot \varphi^\Delta\right)(s)\ \Delta s = -\int_{J^o} \left(g_1 \cdot \varphi^\sigma\right)(s)\ \Delta s \tag{1.59}$$

y para todo $j \in \{2, \cdots, n\}$ *y todo* $\varphi \in C^1_{0,rd}(J^{\kappa^j})$ *se satisface la igualdad*

$$\int_{\left(J^{\kappa^{j-1}}\right)^o} \left(g_{j-1} \cdot \varphi^\Delta\right)(s)\Delta s = -\int_{\left(J^{\kappa^{j-1}}\right)^o} \left(g_j \cdot \varphi^\sigma\right)(s)\Delta s, \tag{1.60}$$

con

$$C^1_{0,rd}(J^{\kappa^j}) := \left\{\ f : J^{\kappa^{j-1}} \to \mathbb{R} :\ f \in C^1_{rd}(J^{\kappa^j}),\ f(a) = 0 = f\left(\rho^{j-1}(b)\right)\ \right\} \tag{1.61}$$

y siendo $C^1_{rd}(J^{\kappa^j})$ *el conjunto de todas las funciones continuas en* $J^{\kappa^{j-1}}$ *que son* $\Delta-$*diferenciables en* J^{κ^j} *y sus* $\Delta-$*derivadas son rd–continuas en* J^{κ^j}.

La fórmula de integración por partes para funciones absolutamente continuas en subintervalos cerrados de $\mathbb{T}$ establece que la relación

$$V^{n,p}_\Delta(J) := \left\{\ x \in AC^{n-1}(J)\ :\ x^{\Delta^n} \in L^p_\Delta\left(\left(J^{\kappa^{n-1}}\right)^o\right)\ \right\} \subset W^{n,p}_\Delta(J) \tag{1.62}$$

es cierta para cada $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \geq 1$; además, ambos conjuntos, como clases de funciones, son equivalentes como se puede comprobar en el siguiente resultado.

Teorema 1.5.21 *Supóngase que $u \in W_\Delta^{n,p}(J)$ para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \geq 1$ y que* (1.58) *se verifica para $g_1 \in L_\Delta^p(J^o)$. Entonces, existe una única función $x \in V_\Delta^{n,p}(J)$ tal que*

$$x = u \quad \Delta - c.\ t.\ p.\ de\ J^o \quad y \quad x^{\Delta^j} = g_j \quad \Delta - c.\ t.\ p.\ de\ \left(J^{\kappa^{j-1}}\right)^o,\ 1 \leq j \leq n, \tag{1.63}$$

donde $J^{\kappa^0} = J$ y $g_j : J^{\kappa^j} \to \bar{\mathbb{R}}$, $1 \leq j \leq n$, están dados en la proposición 1.5.20.

Inductivamente se prueba que el conjunto $W_\Delta^{n,p}(J)$ tiene estructura de espacio de Banach.

Teorema 1.5.22 *Sean $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $p \in \bar{\mathbb{R}}$ con $p \geq 1$. El conjunto $W_\Delta^{n,p}(J)$ es un espacio de Banach con la norma definida para cada $x \in W_\Delta^{n,p}(J)$ como*

$$\|x\|_{W_\Delta^{n,p}} := \sum_{j=0}^{n} \|x^{\Delta^j}\|_{L_\Delta^p}, \tag{1.64}$$

donde $x^{\Delta^0} = x$. Además, el conjunto $H_\Delta^n(J) := W_\Delta^{n,2}(J)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior dado para cada $(x,y) \in H_\Delta^n(J) \times H_\Delta^n(J)$ por

$$(x,y)_{H_\Delta^n} := \sum_{j=0}^{n} (x^{\Delta^j}, y^{\Delta^j})_{L_\Delta^2}. \tag{1.65}$$

Todas aquellas propiedades válidas para los espacios $W_\Delta^{1,p}(J)$ pueden ser demostradas para los espacios $W_\Delta^{n,p}(J)$; a continuación se enuncia una de ellas a modo de ejemplo.

Proposición 1.5.23 *La inclusión $W_\Delta^{n,p}(J) \hookrightarrow C^{n-1}(J^{\kappa^{n-1}})$ es continua, donde $C^{n-1}(J^{\kappa^{n-1}})$ es el conjunto de todas las funciones definidas en J verificando que para cada $j \in \{1, \cdots, n-1\}$ su $\Delta-$derivada de orden j es continua en J^{κ^j}.*

Finalmente, extendiendo, cuando sea necesario, la función $x^{\Delta^{n-1}}$ a J como

$$x^{\Delta^{n-1}}\left(\rho^j(b)\right) = x^{\Delta^{n-1}}\left(\rho^{n-1}(b)\right) \qquad \text{para todo } j \in \{0, \ldots, n-2\},$$

donde $\rho^0(b) = b$, se prueba inductivamente la siguiente relación entre los espacios $W_\Delta^{n,p}(J)$ y $W^{n,p}((a,b))$.

Teorema 1.5.24 *Sean $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, $x : J \to \mathbb{R}$ verificando que $x \in C^{n-1}(J^{\kappa^{n-1}})$.*

Entonces, $x \in W_\Delta^{n,p}(J)$ si y sólo si la aplicación $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida para cada $t \in [a,b]$ como

$$y(t) := \sum_{j=0}^{n-2} x^{\Delta^j}(a)\frac{(t-a)^j}{j!} + \int_{A_t} \overline{x^{\Delta^{n-1}}}(s_{n-1})\, ds_{n-1} \ldots ds_1, \tag{1.66}$$

pertenece a $W^{n,p}((a,b))$*, siendo* $\overline{x^{\Delta^{n-1}}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ *la extensión de la función* $x^{\Delta^{n-1}} : J^{\kappa^{n-1}} \to \mathbb{R}$ *al intervalo real* $[a,b]$ *definida en* (1.14) *y*

$$A_t := \left\{ \ (s_1, \ldots, s_{n-1}) \in [a,b]^{n-1} \ : \ s_{n-1} < \ldots < s_1 < t \ \right\}.$$

Además, se verifican las siguientes igualdades:

$$y^n = x^{\Delta^n} \ \Delta - c. \ t. \ p. \ de \ J^{\kappa^n} \qquad y \qquad y^{n-1} = x^{\Delta^{n-1}} \ en \ J^{\kappa^{n-1}}.$$

1.6. Desigualdades de Wirtinger

En esta sección obtenemos una generalización para la $\Delta-$integral de Lebesgue en un conjunto cerrado arbitrario $\mathbb{T}$ de números reales de la clásica desigualdad cuadrática unidimensional tipo Wirtinger.

La prueba de una desigualdad de Wirtinger más general para la $\Delta-$integral de Lebesgue, que es válida en todo $\mathbb{T}$ excepto quizá en su máximo cuando $\mathbb{T}$ es acotado superiormente, se obtiene para funciones absolutamente continuas en subintervalos cerrados de un adecuado subconjunto de $\mathbb{T}$ que pueden tener una singularidad en los extremos de $\mathbb{T}$ cuando estos son densos.

Usando la desigualdad mencionada y suponiendo que $\mathbb{T}$ es acotado, deducimos una desigualdad tipo Wirtinger para funciones absolutamente continuas en $\mathbb{T}$ con $\Delta-$derivada en $L^2_\Delta([a,b)_\mathbb{T})$ que generaliza la dada en [69, Teorema 6 con $\alpha = 2$] o en [84, Teorema 2] para $\mathbb{T} = [a,b]$. Además, como aplicación de esta desigualdad, mostraremos desigualdades particulares, alguna de las cuales unifica las análogas conocidas en el análisis discreto y real; desgraciadamente, no hemos podido deducir de ella una generalización de la clásica desigualdad de Wirtinger para funciones periódicas absolutamente continuas con integral de Lebesgue nula.

1.6.1. Resultado principal

En esta sección se deduce una desigualdad cuadrática de tipo Wirtinger para una clase de funciones absolutamente continuas en subintervalos cerrados del subconjunto de $\mathbb{T}$ definido para algún par de valores $a, b \in \mathbb{T} \cup \{\inf \mathbb{T}, \sup \mathbb{T}\}$ tales que $a < b$ como

$$W := \begin{cases} [a,b]_\mathbb{T}, & \text{si} \quad a < \sigma(a) \text{ y } \rho(b) < b, \\ [a,b)_\mathbb{T}, & \text{si} \quad a < \sigma(a) \text{ y } \bar{\rho}(b) = b, \\ (a,b]_\mathbb{T}, & \text{si} \quad a = \bar{\sigma}(a) \text{ y } \rho(b) < b, \\ (a,b)_\mathbb{T}, & \text{si} \quad a = \bar{\sigma}(a) \text{ y } \bar{\rho}(b) = b, \end{cases} \tag{1.67}$$

con $\bar{\sigma}(a) = \sigma(a)$ si $a \in \mathbb{T}$ y $\bar{\sigma}(a) = a$ si $a \notin \mathbb{T}$ y $\bar{\rho}(b) = \rho(b)$ si $b \in \mathbb{T}$ y $\bar{\rho}(b) = b$ si $b \notin \mathbb{T}$.

Se denota como

$$W^o := \begin{cases} [a,b)_\mathbb{T}, & \text{si} \quad a < \sigma(a), \\ (a,b)_\mathbb{T}, & \text{si} \quad a = \bar{\sigma}(a), \end{cases}$$

Para cada conjunto $A \subset \mathbb{T}$, se denota como

- $AC_c(A)$ el conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en subintervalos cerrados de A,

- $C^1_{rd}(A\cap[a,\bar{\rho}(b)])$ el conjunto de todas las funciones continuas en A, $\Delta-$diferenciables en $A\cap[a,\bar{\rho}(b)]$ y tales que sus $\Delta-$derivadas pertenecen a $C_{rd}(A\cap[a,\bar{\rho}(b)])$,

- $C^2_{rd}(A\cap[a,\bar{\rho}(b)))$ el conjunto de todas las funciones tales que ellas y sus $\Delta-$derivadas son continuas en A y $A\cap[a,\bar{\rho}(b)]$ respectivamente, sus $\Delta-$derivadas son $\Delta-$diferenciables en $A\cap[a,\bar{\rho}(b))$ y sus segundas $\Delta-$derivadas pertenecen a $C_{rd}(A\cap[a,\bar{\rho}(b)))$.

Se define el operador $\Delta-$diferencial $L : C^2_{rd}(W\cap[a,\bar{\rho}(b))) \to C_{rd}(W\cap[a,\bar{\rho}(b)))$ para cada $v\in C^2_{rd}(W\cap[a,\bar{\rho}(b)))$ como

$$Lv := \left(p\cdot v^{\Delta}\right)^{\Delta} + q\cdot v^{\sigma} \qquad \text{en } W\cap[a,\bar{\rho}(b)), \tag{1.68}$$

con $q\in C_{rd}(W\cap[a,\bar{\rho}(b)])$, $p\in C^1_{rd}(W\cap[a,\bar{\rho}(b)])$ y $p>0$ en W.

Se considerarán soluciones $v\in C^2_{rd}(W\cap[a,\bar{\rho}(b)))$ de la desigualdad $\Delta-$diferencial:

$$-Lv \geq \lambda_0\cdot r\cdot v^{\sigma} \qquad \text{en } W\cap[a,\bar{\rho}(b)), \tag{1.69}$$

donde λ_0 es un número real y $r\in C_{rd}(W\cap[a,\bar{\rho}(b)])$ es positiva en $W\cap[a,\bar{\rho}(b)]$.

Es fácil probar que si $\rho(b)<b$, entonces, extendiendo v^{Δ} a b como

$$v^{\Delta}(b) := \frac{\left[p\cdot v^{\Delta} - \mu\cdot(q+\lambda_0\cdot r)\cdot v^{\sigma}\right](\rho(b))}{p(b)}, \tag{1.70}$$

la función $v^{\Delta}: W\to\mathbb{R}$ es continua en W, $v^{\Delta\Delta}\in C_{rd}(W\cap[a,\rho(b)])$ y v es una solución de la desigualdad $\Delta-$diferencial:

$$-\left(p\cdot v^{\Delta}\right)^{\Delta} - q\cdot v^{\sigma} \geq \lambda_0\cdot r\cdot v^{\sigma} \qquad \text{en } W\cap[a,\rho(b)]. \tag{1.71}$$

Para una solución $v\in C^2_{rd}(J\cap[a,\bar{\rho}(b)))$ de la desigualdad (1.69) que es no–negativa en W y positiva en $(a,b)\cap W$, se considerarán funciones $u\in AC_c(J)$ tales que las expresiones siguientes existan y sean finitas:

$$S_1(u,v) := \begin{cases} \left(\dfrac{p\cdot u^2\cdot v^{\Delta}}{v}\right)(a), & \text{si} \quad v(a)>0, \\[2ex] \left(\dfrac{p\cdot u^2\cdot v^{\Delta}}{v}\right)(\sigma(a)), & \text{si} \quad v(a)=0, \\[2ex] \lim\limits_{\substack{t\to a^+ \\ t\in\mathbb{T}}} \left(\dfrac{p\cdot u^2\cdot v^{\Delta}}{v}\right)(t), & \text{si} \quad a=\bar{\sigma}(a), \end{cases} \tag{1.72}$$

$$S_2(u,v) := \begin{cases} \left(\dfrac{p\cdot (u^\sigma)^2 \cdot v^\Delta}{v^\sigma}\right)(\rho(b)), & \text{si} \quad v(b) > 0, \\ \\ \left(\dfrac{p\cdot u^2 \cdot v^\Delta}{v}\right)(\rho(b)), & \text{si} \quad v(b) = 0, \\ \\ \lim\limits_{\substack{t\to b^- \\ t\in\mathbb{T}}} \left(\dfrac{p\cdot u^2 \cdot v^\Delta}{v}\right)(t), & \text{si} \quad \bar\rho(b) = b. \end{cases} \tag{1.73}$$

Se denota como

$$T_1(u,v) := \begin{cases} 0, & \text{si} \quad a = \bar\sigma(a) \\ & \quad\ \text{o } v(a) > 0, \\ \\ \left\{\mu \cdot \left[(q+\lambda_0 r)\cdot (u^\sigma)^2 - p\cdot \left(u^\Delta\right)^2\right]\right\}(a), & \text{si} \quad v(a) = 0, \end{cases} \tag{1.74}$$

y

$$T_2(u,v) := \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \bar\rho(b) = b, \\ \\ \left[\mu \cdot (q+\lambda_0 r)\cdot (u^\sigma)^2\right](\rho(b)), & \text{si} \quad v(b) > 0, \\ \\ \left\{\mu \cdot \left[(q+\lambda_0 r)\cdot (u^\sigma)^2 - p\cdot \left(u^\Delta\right)^2\right]\right\}(\rho(b)), & \text{si} \quad v(b) = 0. \end{cases} \tag{1.75}$$

Nótese que la definición de W permite que todas las funciones que se están usando puedan ser singulares en los extremos de $\mathbb{T}$ cuando éstos sean densos.

La desigualdad de tipo Wirtinger para la $\Delta-$integral de Lebesgue es la siguiente.

Teorema 1.6.1 *Sean $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $p \in C^1_{rd}(W \cap [a, \bar\rho(b)])$ una función positiva en W, $q \in C_{rd}(W \cap [a, \bar\rho(b)])$, $r \in C_{rd}(W \cap [a, \bar\rho(b)])$ una función positiva en $W \cap [a, \bar\rho(b)]$ y $v \in C^2_{rd}(W \cap [a, \bar\rho(b)))$ una solución de (1.69) no–negativa en W y positiva en $(a,b)\cap W$.*

Si $u \in AC_c(W)$ es tal que $(q+\lambda_0 r)\cdot (u^\sigma)^2 \in L^1_\Delta([a,b)_\mathbb{T})$, $p \cdot \left(u^\Delta\right)^2 \in L^1_\Delta([a,b)_\mathbb{T})$ y las expresiones (1.72) y (1.73) existen y son finitas, entonces, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \int_{W^o} \left[(q+\lambda_0 r)\cdot (u^\sigma)^2\right](t)\ \Delta t \quad \leq \quad & \int_{W^o} \left[p\cdot \left(u^\Delta\right)^2\right](t)\ \Delta t \\ & + S_1(u,v) \ - \ S_2(u,v) \\ & + T_1(u,v) \ + \ T_2(u,v), \end{aligned} \tag{1.76}$$

donde $T_1(u,v)$ y $T_2(u,v)$ están dados en (1.74) y (1.75) respectivamente.

Además, se satisface la igualdad si y sólo si v es una solución de la igualdad $\Delta-$diferencial

$$-Lv = \lambda_0 \cdot r \cdot v^\sigma \qquad \text{en } W \cap [a, \bar{\rho}(b)) \tag{1.77}$$

y existe una constante $K \in \mathbb{R}$ tal que $u(t) = K \cdot v(t)$ para cada $t \in W$ para el cual se verifica que $v(t) > 0$.

Demostración: Como $u \in AC_c(W)$, de la fórmula de integración por partes se obtiene que la identidad $\Delta-$diferencial

$$p \cdot v \cdot v^\sigma \left[\left(\frac{u}{v} \right)^\Delta \right]^2 + \left[\frac{p \cdot u^2 \cdot v^\Delta}{v} \right]^\Delta = p \cdot \left(u^\Delta\right)^2 + \frac{(u^\sigma)^2}{v^\sigma} \cdot Lv - q \cdot (u^\sigma)^2$$

se verifica para $\Delta-$casi todo punto de $(a, \bar{\rho}(b)) \cap \mathbb{T}$. La igualdad anterior se satisface en el punto a cuando $v(a) > 0$ y si $\rho(b) < b$, extendiendo v^Δ a b como en (1.70), entonces, como v es una solución de la desigualdad $\Delta-$diferencial (1.71), se tiene que la igualdad anterior sigue siendo válida en el punto $\rho(b)$ siempre que $v(b) > 0$.

Integrando la anterior igualdad sobre cualquier subintervalo $[t_1, t_2)_\mathbb{T}$ de W para el cual se cumpla que $t_1 \geq \sigma(a)$ si $v(a) = 0$ y $t_2 < b$ si $v(b) = 0$ o $\bar{\rho}(b) = b$, se tiene que

$$\int_{[t_1, t_2)_\mathbb{T}} \left[p \cdot \left(u^\Delta\right)^2 - (q + \lambda_0 r) \cdot (u^\sigma)^2 \right](t) \ \Delta t \ \geq \left[\frac{p \cdot u^2 \cdot v^\Delta}{v} \right]_{t_1}^{t_2}, \tag{1.78}$$

verificándose la igualdad si y sólo si v es solución de la igualdad $\Delta-$diferencial (1.77) y $(u/v)^\Delta = 0$ para $\Delta-$casi todo punto de $[t_1, t_2)_\mathbb{T}$ lo cual es equivalente a la existencia de una constante real K tal que $u = K \cdot v$ en $[t_1, t_2]_\mathbb{T}$.

Finalmente, como $u \in AC_c(W)$ y se sabe que para cada $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ y $t \in [a, b)_\mathbb{T}$ es cierto que

$$\int_{[t, \sigma(t))_\mathbb{T}} f(s) \ \Delta s = f(t) \cdot (\sigma(t) - t),$$

tomando límites, cuando sea necesario, en (1.78) cuando $t_1 \to a^+$ y $t_2 \to b^-$, se obtiene la desigualdad (1.76). $\square$

1.6.2. Algunas consecuencias

Utilizando el teorema 1.6.1, en esta subsección se probará una desigualdad general de tipo Wirtinger válida para funciones que a lo sumo se anulen en la frontera del intervalo cerrado $J = [a, b]_\mathbb{T}$ con $a, b \in \mathbb{T}$ y $a < b$ y que pertenezcan al espacio de Sobolev $H^1_\Delta(J)$, es decir, aplicaciones absolutamente continuas en J cuyas $\Delta-$derivadas pertenecen al conjunto $L^2_\Delta(J^o)$. Asimismo, se ilustra la aplicación de dicha expresión para algunas condiciones particulares.

Se asumirá que la rd-continuidad de p^Δ, q y r se extiende a todo el intervalo $[a, \rho(b)]_\mathbb{T}$ y que $v \in C^2_{rd}([a, \rho(b))_\mathbb{T})$ es no–negativa en J, positiva en $(a, b)_\mathbb{T}$ y es un autovector asociado al autovalor $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ del problema de frontera:

$$\begin{cases} Lv + \lambda_0 \cdot r \cdot v^\sigma = 0, & \text{en } [a, \rho(b))_{\mathbb{T}}, \\ c_1 v(a) + c_2 v^\Delta(a) = 0, \\ c_3 v(b) + c_4 v^\Delta(\rho(b)) = 0, \end{cases} \tag{1.79}$$

donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes reales tales que $(c_1^2 + c_2^2)(c_3^2 + c_4^2) \neq 0$.

Definiendo

$$A_1 := \begin{cases} \left(\dfrac{p \cdot v^\Delta}{v}\right)(a), & \text{si} \quad v(a) > 0, \\ 1, & \text{si} \quad v(a) = 0;\ a = \sigma(a), \\ 0, & \text{si} \quad v(a) = 0;\ a < \sigma(a), \end{cases} \tag{1.80}$$

$$A_2 := \begin{cases} 0, & \text{si} \quad v(a) > 0 \text{ o } a = \sigma(a), \\ \left[\left(\dfrac{p \cdot v^\Delta}{v}\right)^\sigma + \mu \cdot (q + \lambda_0 r)\right](a), & \text{si} \quad v(a) = 0;\ a < \sigma(a), \end{cases} \tag{1.81}$$

$$A_3 := \begin{cases} 0, & \text{si} \quad v(a) > 0, \\ -\left(\mu \cdot p\right)(a), & \text{si} \quad v(a) = 0, \end{cases} \tag{1.82}$$

$$B_1 := \begin{cases} 0, & \text{si} \quad v(b) > 0 \text{ o } \rho(b) = b, \\ \left(\dfrac{p \cdot v^\Delta}{v}\right)(\rho(b)), & \text{si} \quad v(b) = 0;\ \rho(b) < b, \end{cases} \tag{1.83}$$

$$B_2 := \begin{cases} \left[\left(\dfrac{p \cdot v^\Delta}{v^\sigma}\right) - \mu \cdot (q + \lambda_0 r)\right](\rho(b)), & \text{si} \quad v(b) > 0;\ \rho(b) < b, \\ \left(\dfrac{p \cdot v^\Delta}{v}\right)(b), & \text{si} \quad v(b) > 0;\ \rho(b) = b, \\ -\left[\mu \cdot (q + \lambda_0 r)\right](\rho(b)), & \text{si} \quad v(b) = 0;\ \rho(b) < b, \\ 1, & \text{si} \quad v(b) = 0;\ \rho(b) = b, \end{cases} \tag{1.84}$$

y

$$B_3 := \begin{cases} 0, & \text{si} \quad v(b) > 0 \text{ o } \rho(b) = b, \\ \left(\mu \cdot p\right)(\rho(b)), & \text{si} \quad v(b) = 0;\ \rho(b) < b, \end{cases} \tag{1.85}$$

se deduce que si a es denso por la derecha y $v(a) > 0$ o si a es aislado por la derecha, entonces

$$S_1(u, v) + T_1(u, v) = \left[A_1 u^2 + A_2 (u^\sigma)^2 + A_3 \left(u^\Delta\right)^2\right](a), \tag{1.86}$$

y si b es denso por la izquierda y $v(b) > 0$ o si b es aislado por la izquierda, entonces,

$$T_2(u,v) - S_2(u,v) = -\left[B_1 u^2 + B_2 (u^\sigma)^2 + B_3 \big(u^\Delta\big)^2\right](\rho(b)), \tag{1.87}$$

donde $S_1(u,v)$, $S_2(u,v)$, $T_1(u,v)$ y $T_2(u,v)$ están dados en (1.72), (1.73), (1.74) y (1.75) respectivamente.

Teorema 1.6.2 *Sean $q \in C_{rd}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$, $p \in C^1_{rd}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$ con $p > 0$ en J, $r \in C_{rd}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$ con $r > 0$ en $[a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}$ y $v \in C^2_{rd}([a,\rho(b))_{\mathbb{T}})$ un autovector asociado al autovalor $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ de* (1.79) *verificando que es no-negativo en J, positivo en $(a,b)_{\mathbb{T}}$, $v^\Delta(a) > 0$ si a es denso por la derecha y $v(a) = 0$ y $v^\Delta(b) < 0$ si b es denso por la izquierda y $v(b) = 0$.*

Entonces, para cada $u \in H^1_\Delta(J)$ verificando que $u(t) = 0$ para cada $t \in \{a,b\}$ tal que t es denso y $v(t) = 0$, se satisface la siguiente desigualdad de tipo Wirtinger:

$$\begin{aligned}\int_{J^o} \left[(q+\lambda_0 r)\cdot(u^\sigma)^2\right](t)\ \Delta t \quad \leq \quad & \int_{J^o} \left[p\cdot\big(u^\Delta\big)^2\right](t)\ \Delta t \\ & + \left[A_1 u^2 + A_2 (u^\sigma)^2 + A_3 \big(u^\Delta\big)^2\right](a) \\ & - \left[B_1 u^2 + B_2 (u^\sigma)^2 + B_3 \big(u^\Delta\big)^2\right](\rho(b)),\end{aligned} \tag{1.88}$$

con A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 y B_3 los dados en (1.80), (1.81), (1.82), (1.83), (1.84) *y* (1.85) *respectivamente.*

Además, la igualdad se verifica si y sólo si u es múltiplo de v en J.

Demostración: Como consecuencia del teorema 1.6.1 y las igualdades (1.86) y (1.87), solamente falta probar que la desigualdad (1.88) es válida cuando existe $t \in \{a,b\}$ tal que t es denso y $v(t) = 0$; puesto que todos los casos son análogos, sólo se probará uno de ellos.

Supóngase que a es denso por la derecha y $v(a) = 0$ y que b es denso por la izquierda y $v(b) > 0$ o que b es aislado por la izquierda. Sea $u \in H^1_\Delta(J)$ verificando que $u(a) = 0$.

En primer lugar, supóngase que u^Δ es continua en $[a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}$. Como $v^\Delta(a) > 0$

y $u(a)=0$, la regla de L'Hôpital, teorema 1.2.9, permite afirmar que

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{t\to a^+\\ t\in\mathbb{T}}} \left(\frac{p\cdot u^2\cdot v^\Delta}{v}\right)(t) &= \lim_{\substack{t\to a^+\\ t\in\mathbb{T}}} \left[\frac{\left(p\cdot u^2\cdot v^\Delta\right)^\Delta}{v^\Delta}\right](t)\\
&= \lim_{\substack{t\to a^+\\ t\in\mathbb{T}}} \left[u^\Delta\cdot(u+u^\sigma)\cdot p\right](t)\\
&\quad - \lim_{\substack{t\to a^+\\ t\in\mathbb{T}}} \left[\frac{(u^\sigma)^2\cdot(q+\lambda_0 r)\cdot v^\sigma}{v^\Delta}\right](t)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$S_1(u,v)+T_1(u,v)=0=\left[A_1u^2+A_2(u^\sigma)^2+A_3\big(u^\Delta\big)^2\right](a), \tag{1.89}$$

donde $S_1(u,v)$ y $T_1(u,v)$ están dados en (1.72) y (1.74) respectivamente.

Por consiguiente, de las igualdades (1.87) y (1.89) y el teorema 1.6.1 se sigue que la desigualdad (1.88) es válida.

Finalmente, supóngase que $u^\Delta\in L^2_\Delta(J^o)$. Como el conjunto de todas las funciones continuas en J^o con soporte compacto en J^o es denso en $L^2_\Delta(J^o)$, proposición 1.3.20, existe una sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas en J tal que su restricción a J^o converge a u^Δ fuertemente en $L^2_\Delta(J^o)$.

Así pues, del teorema de la $\Delta-$derivación de la $\Delta-$integral de Lebesgue se deduce que para cada $n\in\mathbb{N}$, la aplicación $u_n: J\to\mathbb{R}$ definida como

$$u_n(t):=\int_{[a,t)_\mathbb{T}} g_n(s)\ \Delta s \qquad \text{para todo } t\in J,$$

es absolutamente continua en J y $u_n^\Delta=g_n$ es continua en $[a,\rho(b)]_\mathbb{T}$.

Por tanto, como $u_n(a)=0$ para cada $n\in\mathbb{N}$, la desigualdad (1.88) se verifica para cada $n\in\mathbb{N}$, esto es, la desigualdad

$$\begin{aligned}
\int_{J^o}\left[(q+\lambda_0 r)\cdot(u_n^\sigma)^2\right](t)\ \Delta t &\le \int_{J^o}\left[p\cdot\big(u_n^\Delta\big)^2\right](t)\ \Delta t\\
&\quad+\left[A_1u_n^2+A_2(u_n^\sigma)^2+A_3\big(u_n^\Delta\big)^2\right](a)\\
&\quad-\left[B_1u_n^2+B_2(u_n^\sigma)^2+B_3\big(u_n^\Delta\big)^2\right](\rho(b)).
\end{aligned} \tag{1.90}$$

es válida para todo $n\in\mathbb{N}$.

Además, como $u(a)=0=u_n(a)$ para cada $n\in\mathbb{N}$, el teorema fundamental del cálculo para la $\Delta-$integral de Lebesgue y la desigualdad de Hölder garantizan la existencia de una constante $k_1>0$ tal que para cada $n\in\mathbb{N}$ y $t\in J$, se verifica que

$$|u - u_n|(t) \leq k_1 \cdot \|u^{\Delta} - g_n\|_{L^2_{\Delta}},$$

con lo cual, de la convergencia fuerte de $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a u^{Δ} en $L^2_{\Delta}(J^o)$ y la desigualdad (1.90) se obtiene la validez de la desigualdad (1.88).

La última afirmación es una consecuencia directa del teorema 1.6.1. $\square$

La última parte de esta sección está dedicada a mostrar algunas aplicaciones del resultado anterior. La siguiente desigualdad es válida para los elementos del espacio de Sobolev $H^1_{0,\Delta}(J)$ caracterizado en la proposición 1.5.15 como los elementos de $H^1_{\Delta}(J)$ que se anulan en la frontera de J.

Corolario 1.6.3 *Sean $q \in C_{rd}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$, $p \in C^1_{rd}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$ verificando que $p > 0$ en J y $p^{\Delta}(a) = 0$ y $r \in C_{rd}([a,\rho(b)] \cap \mathbb{T})$ con $r > 0$ en $[a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}$.*

Si el problema (1.79) *con $c_2 = 0 = c_4$ tiene un autovalor $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ y un autovector $v \in C^2_{rd}([a,\rho(b))_{\mathbb{T}})$ positivo en $(a,b)_{\mathbb{T}}$, entonces, para cada $u \in H^1_{0,\Delta}(J)$ se satisface la siguiente desigualdad de tipo Wirtinger:*

$$\int_{J^o} \left[(q + \lambda_0 r) \cdot (u^{\sigma})^2\right](t)\ \Delta t \quad \leq \quad \int_{J^o} \left[p \cdot \left(u^{\Delta}\right)^2\right](t)\ \Delta t. \qquad (1.91)$$

Además, se satisface la igualdad si y sólo si u es múltiplo de v en J.

Se sabe, por [26, Teorema 7.15], que el problema (1.79) con $c_2 = 0 = c_4$, $p = 1 = r$ y $q = 0$ tiene un menor autovalor positivo y los autovectores pueden ser elegidos de modo que sean positivos en $(a,b)_{\mathbb{T}}$. Así pues, del corolario 1.6.3 se deduce la siguiente propiedad que cubre la dada en [2, Teorema 11.6.1] para el caso discreto, esto es, para $\mathbb{T} = \mathbb{N}$.

Corolario 1.6.4 *Si $u \in H^1_{0,\Delta}(J)$, entonces, se verifica la siguiente desigualdad de tipo Wirtinger:*

$$\int_{J^o} (u^{\sigma})^2(t)\ \Delta t \quad \leq \quad \frac{1}{\lambda_0}\int_{J^o} \left(u^{\Delta}\right)^2(t)\ \Delta t, \qquad (1.92)$$

donde λ_0 es el menor autovalor positivo del problema (1.79) *con $c_2 = 0 = c_4$, $p = 1 = r$ y $q = 0$.*

Además, se satisface la igualdad si y sólo si u es un autovector asociado al autovalor λ_0.

La siguiente desigualdad es válida para los elementos del espacio $H^1_{\Delta}(J)$ que se anulen en a.

Corolario 1.6.5 *Sean $q \in C_{rd}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$, $p \in C^1_{rd}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$ con $p > 0$ en J y $p^{\Delta}(a) = 0$ y $r \in C_{rd}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$ con $r > 0$ en $[a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}$.*

Si el problema (1.79) *con $c_2 = 0 = c_3$ tiene un autovalor $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ y un autovector $v \in C^2_{rd}([a,\rho(b))_{\mathbb{T}})$ positivo en $(a,b)_{\mathbb{T}}$, entonces, para cada $u \in H^1_{\Delta}(J)$ tal que $u(a) = 0$ se verifica la siguiente desigualdad de tipo Wirtinger:*

$$\int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} \left[(q + \lambda_0 r) \cdot (u^{\sigma})^2\right](t)\ \Delta t \quad \leq \quad \int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} \left[p \cdot \left(u^{\Delta}\right)^2\right](t)\ \Delta t. \qquad (1.93)$$

Además, se satisface la igualdad si y sólo si u es múltiplo de v en J.

De [26, Teorema 7.15] se sigue que el problema (1.79) con $c_2 = 0 = c_3$, $p = 1 = r$ y $q = 0$ tiene un menor autovalor positivo y los autovectores pueden ser elegidos de modo que sean positivos en $(a,b)_{\mathbb{T}}$. Por tanto, como consecuencia del corolario 1.6.5 se obtiene la siguiente desigualdad que generaliza las dadas para el caso discreto, esto es, $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, en [2, Teorema 11.6.2] y para funciones de clase uno en el caso real, esto es, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, o bien en [69, Corolario 9] o bien en [84, Corolario 3].

Corolario 1.6.6 *Si $u \in H^1_\Delta(J)$, entonces, se verifica la siguiente desigualdad de tipo Wirtinger:*

$$\int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} (u^\sigma - u(a))^2(t)\ \Delta t \quad \leq \quad \frac{1}{\lambda_0} \int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} \left(u^\Delta\right)^2(t)\ \Delta t, \tag{1.94}$$

donde λ_0 es el menor autovalor positivo del problema (1.79) *con $c_2 = 0 = c_3$, $p = 1 = r$ y $q = 0$.*

Además, se satisface la igualdad si y sólo si la función $u - u(a)$ es un autovector asociado al autovalor λ_0.

Si $p = 1$, $r = 0$, $\lambda_0 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ son tales que $v^\Delta(\rho(b)) \geq 0$, del teorema 1.6.2 se deduce el siguiente resultado que coincide con [22, Teorema 1.1] cuando $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ y $J = [0,a]$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

Corolario 1.6.7 *Supóngase que el problema* (1.79) *con $p = 1$, $r = 0$, $\lambda_0 = 0$ y $q \in C_{rd}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$ tiene una solución $v \in C^2_{rd}([a,\rho(b))_{\mathbb{T}})$ verificando que es positiva en $(a,b)_{\mathbb{T}}$, $v(a) = 0$ y $v^\Delta(\rho(b)) \geq 0$.*

Entonces, para cada $u \in H^1_\Delta(J)$ tal que $u(a) = 0$ se verifica la siguiente desigualdad de tipo Wirtinger:

$$\int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} \left[q \cdot (u^\sigma)^2\right](t)\ \Delta t \quad \leq \quad \int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} \left(u^\Delta\right)^2(t)\ \Delta t. \tag{1.95}$$

Además, se satisface la igualdad si y sólo si $u = K \cdot v$ en $[a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}$ para alguna constante $K \in \mathbb{R}$ tal que $K = 0$ cuando $v^\Delta(\rho(b)) > 0$.

Si se cambia en el corolario 1.6.7 la condición inicial $u(a) = 0$ por las propiedades

$$\int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} q(t)\ \Delta t \geq 0 \qquad \text{y} \qquad u(a) \cdot \int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} (q \cdot u^\sigma)(t)\ \Delta t \leq 0$$

y aplicando el corolario 1.6.7 a la función $w := u - u(a) \in H^1_\Delta(J)$, se obtiene el siguiente resultado que se corresponde, eligiendo como $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ y $J = [0,a]$ para algún $a \in \mathbb{R}$, con [22, Teorema 1,1*].

Corolario 1.6.8 *Supónganse las hipótesis de Corolario 1.6.7 y*

$$\int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} q(t)\ \Delta t \geq 0.$$

Entonces, para cada $u \in H^1_\Delta(J)$ *tal que*

$$u(a) \cdot \int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} (q \cdot u^\sigma)(t)\ \Delta t \leq 0,$$

se verifica la siguiente desigualdad de tipo Wirtinger:

$$\int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} \left[q \cdot (u^\sigma)^2\right](t)\ \Delta t \quad \leq \quad \int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} \left(u^\Delta\right)^2(t)\ \Delta t. \tag{1.96}$$

A continuación se permite que los autovectores asociados a los autovalores del problema (1.79) cambien de signo en algún punto del intervalo J. Supuesto que $v \in C^2_{rd}([a,\rho(b))_{\mathbb{T}})$ es tal que $v(a) > 0$, $v(b) < 0$, v es decreciente en J y estrictamente decreciente en $(a,b)_{\mathbb{T}}$, entonces, existe un único punto $\bar{t} \in J^o$ tal que $(v \cdot v^\sigma)(\bar{t}) \leq 0$; procediendo como en el teorema 1.6.2 para la función $w := u - u(\bar{t})$ y cada uno de los subintervalos $[a,\rho(\bar{t}))_{\mathbb{T}}$, $[\rho(\bar{t}),\bar{t})_{\mathbb{T}}$, $[\bar{t},\sigma(\bar{t}))_{\mathbb{T}}$ y $[\sigma(\bar{t}),b)_{\mathbb{T}}$, se obtiene el siguiente resultado el cual, para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ y $J = [0,a]$ con $a \in \mathbb{R}$, está dado en [22, Teorema 1.2].

Corolario 1.6.9 *Supóngase que el problema* (1.79) *con* $p = 1$, $r = 0$, $\lambda_0 = 0$ *y* $q \in C_{rd}([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$ *tal que*

$$\int_{J^o} q(t)\ \Delta t \geq 0.$$

tiene una solución $v \in C^2_{rd}([a,\rho(b))_{\mathbb{T}})$ *tal que* $v(a) > 0$, $v(b) < 0$, v *es decreciente en* J *y estrictamente decreciente en* $(a,b)_{\mathbb{T}}$.

Entonces, para cada $u \in H^1_\Delta(J)$ *tal que*

$$u(a) \cdot \int_{J_o} (q \cdot u^\sigma)(t)\ \Delta t \leq 0,$$

se verifica la siguiente desigualdad tipo Wirtinger:

$$\int_{J^o} \left[q \cdot (u^\sigma)^2\right](t)\ \Delta t \quad \leq \quad \int_{J^o} \left(u^\Delta\right)^2(t)\ \Delta t + \left[q \cdot \mu \cdot (u^\sigma)^2\right](\bar{t}), \tag{1.97}$$

siendo $\bar{t} \in J^o$ *el único punto de* J^o *tal que* $(v \cdot v^\sigma)(\bar{t}) \leq 0$.

Además, se satisface la igualdad si y sólo si $u = u(\bar{t}) + Kv$ *en* $[a,\rho(\bar{t})]_{\mathbb{T}} \cup [\sigma(\bar{t}),b]_{\mathbb{T}}$ *para alguna constante* $K \in \mathbb{R}$, *siendo* $u(\bar{t}) = 0$ *siempre que, o bien* $\displaystyle\int_{J^o} q(t)\ \Delta t > 0$ *o bien* $\displaystyle\int_{J_o} (q \cdot u^\sigma)(t)\ \Delta t < 0$ *y* $K = 0$ *cuando o bien* $v^\Delta(a) = 0$ *o bien* $v^\Delta(\rho(b)) = 0$.

Capítulo 2

Ecuaciones dinámicas de primer orden

2.1. Introducción

Este capítulo está dedicado a demostrar la existencia y aproximación de soluciones extremales de diversas ecuaciones dinámicas de primer orden.

Para cada $i \in \{1, \cdots, 6\}$, se considera la siguiente ecuación dinámica:

$$(P_i) \begin{cases} L_i u(t) = N_i u(t); & \Delta - \text{c. t. p. } t \in D^o = [t_0, T)_{\mathbb{T}}, \\ B(u(t_0), u) = 0, \end{cases}$$

donde $L_i, N_i : AC(D) \to L^1_\Delta(D^o)$ se definen posteriormente, $D = [t_0, T]_{\mathbb{T}}$, $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado de números reales arbitrario, $t_0, T \in \mathbb{T}$ y $B : \mathbb{R} \times C(D) \to \mathbb{R}$; además se consideran los problemas (P_7) y (P_8) que se definirán en el momento de su estudio.

El capítulo está organizado de la siguiente forma. Después de una primera sección dedicada a las definiciones y los resultados más generales, en la sección 2.3 se demuestra la existencia de solución minimal y maximal para ecuaciones dinámicas con condiciones iniciales adaptando el método de aproximación mediante subfunciones de Peano, que se puede encontrar en [78], supuesto que la función que define la parte no lineal de la ecuación verifica condiciones $L^1_\Delta-$Carathéodory. Posteriormente, mejoramos este resultado debilitando la condición de continuidad. Estos resultados suponen un gran avance en los resultados conocidos sobre la existencia y aproximación de soluciones extremales para ecuaciones dinámicas de primer orden por la gran cantidad de problemas que pueden ser incluidos en esta formulación.

Para terminar la sección, se prueba la existencia y aproximación de soluciones extremales de ecuaciones dinámicas con condiciones iniciales entre una subsolución y una sobresolución.

En la sección 2.4 estudiamos ecuaciones dinámicas con condiciones de frontera funcionales en presencia de subsoluciones y sobresoluciones. Las hipótesis que verifica la función que define la condición de frontera permiten que el problema cubra tanto las condiciones periódicas $u(t_0) = u(T)$ como las antiperiódicas $u(t_0) = -u(T)$; además, la dependencia funcional en la segunda variable posibilita otros tipos de condiciones de frontera no lineales diferentes como por ejemplo $u(t_0) = \max_{t \in J} u(t)$ o $u(t_0) = \int_J u^3(t)\,\Delta t$, siendo J un subconjunto $\Delta-$medible de D^o.

Los resultados obtenidos relativos a los problemas anteriores nos permiten probar en la sección 2.5 resultados análogos para una ecuación dinámica funcional, una ecuación dinámica implícita y una ecuación dinámica $\phi-$Laplaciana con condiciones de frontera funcionales no lineales en (P_3), (P_4) y (P_5), respectivamente.

En las secciones 2.4 y 2.5 se estudiará también la ecuación dinámica de primer orden:

$$(P_{(i,R)}) \begin{cases} L_i u(t) = N_i u(t); & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D^o, \\ B_R(u, u(T)) = 0, & \end{cases}$$

para cada $i \in \{2, \cdots, 5\}$ donde $B_R : C(D) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $L_i, N_i : AC(D) \to L^1_\Delta(D^o)$ son los dados en el problema (P_i).

Deduciremos la existencia y aproximación de soluciones extremales del problema $(P_{(i,R)})$ entre una sobresolución y una subsolución en orden inverso. Mostraremos, por un simple cambio de variables, que el problema $(P_{(i,R)})$ es equivalente al problema (P_i) y de ahí que, como consecuencia de los resultados para el problema (P_i), obtendremos los análogos para el problema $(P_{(i,R)})$.

La sección 2.6 se dedica al estudio de la existencia, unicidad y aproximación de soluciones del problema (P_7), un problema de frontera de primer orden en un intervalo de un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, que toma los valores en otro subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Obtenemos los resultados considerando ecuaciones dinámicas cuya parte no lineal es no negativa y verifican un tipo de condiciones de Carathéodory inversas y discontinuidad.

Para finalizar el capítulo, en la sección 2.7 probaremos la existencia y aproximación de soluciones extremales del problema (P_8), un sistema con infinitas ecuaciones dinámicas funcionales con condiciones de frontera funcionales. Los resultados de esta sección generalizan algunos de los obtenidos en las secciones anteriores sobre existencia y aproximación de soluciones extremales de ecuaciones dinámicas escalares.

2.2. Preliminares

Denotaremos por $g : [t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}} \to D$ la función identidad en $[t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}}$ o el operador σ restringido a $[t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}}$.

Definición 2.2.1 *Sea $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$. Se dice que f es una* **función de Carathéodory** *si y sólo si se verifica la siguiente condición:*

(C^1) *i) Para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, x)$ es $\Delta-$medible en D.*

ii) Para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^0$, $f(g(t), \cdot)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Se dice que f es una **función $L^1_\Delta-$Carathéodory** *si y sólo si f es una función de Carathéodory y además se satisface la siguiente propiedad:*

(C^2) *Existe una función $m : D \to [0, +\infty]$ tal que $m \in L^1_\Delta(D^o)$ y*

$$|f(g(t), x)| \leq m(t)$$

para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in \mathbb{R}$.

Se dice que f es una **función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos** *si y sólo si f es una función de Carathéodory y además se satisface la siguiente propiedad:*

(C^2_c) *Para todo $p > 0$ existe una función $m_p : D \to [0, +\infty]$ tal que $m_p \in L^1_\Delta(D^o)$ y*

$$|f(g(t), x)| \leq m_p(t)$$

para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq p$.

Lema 2.2.2 *Cualquier función $H : D \to \bar{\mathbb{R}}$ es $\Delta-$medible en D si y sólo si $H \circ g : D^o \to \bar{\mathbb{R}}$ es $\Delta-$medible en D^o.*

Demostración: Se sabe, por la proposición 1.3.1, que cualquier conjunto es $\Delta-$medible si y sólo si es Lebesgue medible, con lo cual, el resultado es consecuencia de la igualdad $H \circ g = H$ en $D^o \backslash R$ y el hecho de que el conjunto R de puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$ es a lo sumo numerable. $\square$

Lema 2.2.3 *Supóngase que $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ es una función $L^1_\Delta-$ Carathéodory o una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos. Si $u : D \to \mathbb{R}$ es una función continua en D, entonces, la función $f_u : D \to \bar{\mathbb{R}}$ definida como*

$$f_u(s) := \begin{cases} f(g(s), (u \circ g)(s)); & si \quad s \in D^o, \\ \\ 0; & si \quad s = T, \end{cases}$$

pertenece a $L^1_\Delta(D^o)$.

Demostración: Si u es una aplicación continua en D, entonces, los teoremas 1.2.16, 1.3.13 y 1.3.14 garantizan que $u \circ g$ es $\Delta-$medible en D^o.

Por lo tanto, razonando como en [57, Teorema 1.4.3], se prueba que la función f_u es $\Delta-$ medible en D y así, las condiciones (C^2) o (C^2_c) permiten establecer la validez del resultado. $\square$

Obviamente, el resultado anterior sigue siendo cierto si se asume o bien la condición (C^2) o bien la condición (C^2_c) y se cambia la condición (C^1) por la siguiente:

(B^1) i) Para cada $u \in AC(D)$, la función $f(\cdot, u(\cdot))$ es $\Delta-$medible en D.

ii) Para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$\limsup_{y \to x^-} f(g(t), y) \leq f(g(t), x) \leq \liminf_{y \to x^+} f(g(t), y).$$

Lema 2.2.4 *Sea $F \subset D^o \backslash R$ un conjunto $\Delta-$medible con $\Delta-$medida positiva y sea $M : D \to [0, +\infty]$ una función tal que $M \in L^1_\Delta(D^o)$.*

Entonces, existe un conjunto $F_1 \subset F$ tal que $\mu_\Delta(F \backslash F_1) = 0$ y para todo $t_1 \in F_1$ las siguientes propiedades son ciertas:

i) $\displaystyle \lim_{t \to t_1^+} \frac{\mu_\Delta([t_1, t)_{\mathbb{T}} \cap F_1)}{t - t_1} = 1,$

ii) $\displaystyle \lim_{t \to t_1^+} \frac{\mu_\Delta([t_1, t)_{\mathbb{T}} \backslash F_1)}{t - t_1} = 0,$

iii) $\displaystyle \lim_{t \to t_1^+} \frac{\int_{[t_1, t)_{\mathbb{T}} \backslash F_1} M(s)\, \Delta s}{t - t_1} = 0.$

Demostración: Los enunciados *i)* e *ii)* son consecuencia de la igualdad (1.2) y del teorema de la densidad de Lebesgue, [58, (18.2)]; además, del teorema de la $\Delta-$derivación de la $\Delta-$integral de Lebesgue, teorema 1.4.8, se deduce el enunciado *iii)*. $\square$

A continuación se enuncia el teorema de Scorza–Dragoni cuya demostración se puede ver en [81].

Teorema 2.2.5 *Si $f(x, y)$ es medible en x y continua en y en el conjunto $[x_0, x_1] \times (-\infty, \infty)$, entonces, existe una sucesión de subconjuntos perfectos y disjuntos de $[x_0, x_1]$, cuya unión tiene medida $x_1 - x_0$, con la propiedad de que f es continua en (x, y) cuando x pertenece a cualquier conjunto de la sucesión.*

Lema 2.2.6 *Si $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ es una función de Carathéodory, existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subintervalos cerrados de $[t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}}$ dos a dos disjuntos tales que $\mu_\Delta\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap (D^o \backslash R)\right) = \mu_\Delta(D^o \backslash R)$ y la función $F : [t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ definida para cada $(t, x) \in [t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}$ como*

$$F(t, x) := f(g(t), x) \tag{2.1}$$

es continua en $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times \mathbb{R}$.

Demostración: De la proposición 1.3.1 se deduce que $\hat{F} : [t_0, \rho(T)] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para cada $(t, x) \in [t_0, \rho(T)] \times \bar{\mathbb{R}}$ como

$$\hat{F}(t, x) = \begin{cases} F(t, x), & \text{si} \quad t \in [t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}}, \\ F(t_i, x), & \text{si} \quad t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ para algún } i \in I, \end{cases}$$

donde $\{t_i\}_{i\in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, es el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$, satisface que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\hat{F}(\cdot, x)$ es Lebesgue medible en $[t_0, \rho(T)]$ y para casi todo $t \in [t_0, \rho(T)]$, $\hat{F}(t, \cdot)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Por consiguiente, el teorema de Scorza–Dragoni establece la existencia de una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subintervalos perfectos del intervalo real $[t_0, \rho(T)]$ dos a dos disjuntos tales que $\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \rho(T) - t_0$ y $\hat{F}$ es continua en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \times \mathbb{R}$.

Así pues, definiendo para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_n := B_n \cap [t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}}$, como consecuencia de la igualdad (1.2) se obtiene el resultado. $\square$

A continuación se establecen diversos conceptos y notaciones que se utilizarán en todo el capítulo.

Definición 2.2.7 *Se dice que* $u_- : D \to \mathbb{R}$ *es una* **subsolución del problema** (P_i) *si* $u_- \in AC(D)$, $B(u_-(t_0), u) \le 0$ *y se verifica la siguiente desigualdad*

$$L_i u_-(t) \le N_i u_-(t) \qquad \textit{para } \Delta - \textit{c. t. p. } \; t \in D^o.$$

El concepto de **sobresolución de** (P_i) *se define cambiando el sentido de las desigualdades anteriores.*

Se denota como S_i^- *y* S_i^+ *el conjunto de todas las subsoluciones y sobresoluciones de* (P_i) *respectivamente.*

Análogamente se definen los mismos conceptos para el problema $(P_{(i,R)})$ *y se denota como* $S_{(i,R)}^-$ *y* $S_{(i,R)}^+$ *el conjunto de todas las subsoluciones y sobresoluciones de* $(P_{(i,R)})$ *respectivamente.*

Una función $u : D \to \mathbb{R}$ *se dice que es una* **solución de** (P_i) **o** $(P_{(i,R)})$ *si* u *es tanto una subsolución como una sobresolución de* (P_i) *o* $(P_{(i,R)})$.

Definición 2.2.8 *Para un subconjunto* $Y \subset AC(D)$, *se dice que* $u_* \in Y$ *es la* **solución minimal de** (P_i) **en** Y *si* u_* *es una solución de* (P_i) *y* $u_* \le u$ *en* D *para cualquier solución* $u \in Y$ *de* (P_i); *la* **solución maximal de** (P_i) **en** Y *se define cambiando el sentido de las desigualdades anteriores. Siempre que las soluciones minimal y maximal de* (P_i) *en* Y *existan, se llaman* **soluciones extremales de** (P_i) **en** Y.

Análogamente se definen los mismos conceptos para el problema $(P_{(i,R)})$.

Si $u, v \in AC(D)$ son tales que $u(t) \le v(t)$ para todo $t \in D$, se denota como

$$[u, v] := \{\, w \in AC(D) \,:\, u(t) \le w(t) \le v(t) \text{ para todo } t \in D \,\}$$

y si $p, q \in L^1_\Delta(D^o)$ son tales que $p(t) \le q(t)$ para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$, se denota como

$$[p, q] := \{\, r \in L^1_\Delta(D^o) \,:\, p(t) \le r(t) \le q(t) \text{ para } \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in D^o \,\}.$$

2.3. Ecuaciones dinámicas con condiciones iniciales

En esta sección se probará la existencia y aproximación de soluciones extremales de la ecuación dinámica con condiciones iniciales (P_1), que se describirá a continuación, en el conjunto las funciones absolutamente continuas.

Se asume la siguiente hipótesis:

(H_1^0) Si $g = Id|_{[t_0,\rho(T)]_{\mathbb{T}}}$, entonces, para cada punto aislado por la derecha $t \in D^o$, la función definida para cada $x \in \mathbb{R}$ como $x + (\sigma(t) - t)f(t,x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

Suponiendo que f es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory o $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos o que se verifican las condiciones (B^1) y (C^2) o (C^2_c), por el lema 2.2.3, se sabe que los operadores $L_1, N_1 : AC(D) \to L^1_\Delta(D^o)$ dados para cada $u \in AC(D)$ y para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ por

$$L_1 u(t) := u^\Delta(t) \qquad \text{y} \qquad N_1 u(t) := f(g(t), u(g(t))) \tag{2.2}$$

están bien definidos.

Fijado $u_0 \in \mathbb{R}$, para cada $(x,u) \in \mathbb{R} \times C(D)$ se define $B(x,u) = u(t_0) - u_0$.

Con las definiciones anteriores, el problema (P_1) es la siguiente ecuación dinámica con condiciones iniciales:

$$(P_1) \begin{cases} u^\Delta(t) = f(g(t), u(g(t))); & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D^o, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Nótese que solamente cuando todo punto de $\mathbb{T}$ es denso, los dos problemas que se consideran en (P_1) coinciden y para $\mathbb{T} \subset \mathbb{N}$ son una ecuación en diferencias explícita e implícita respectivamente.

Existe una gran variedad de publicaciones en las que se estudia la existencia y aproximación de soluciones extremales para este problema en el caso real. Entre ellos destaca el trabajo de Goodman, [52], donde se demuestra la existencia de solución minimal y maximal adaptando el método de aproximación mediante subfunciones de Peano, que se puede encontrar en [78], supuesto que la función que define la parte no lineal de la ecuación verifica condiciones de Carathéodory. Posteriormente, este resultado fue mejorado debilitando la condición de continuidad, por ejemplo, por Biles y Binding en [23] y por Hassan y Rzymowski en [56], entre otros. En las monografías [35] y [57], y en algunas de las referencias allí indicadas, se demuestran muchos resultados de existencia de solución de ecuaciones definidas sobre distintos espacios de Banach ordenados o bien cambiando algunas hipótesis o bien estudiando diversas variaciones en las ecuaciones.

Para $\mathbb{T} \subset \mathbb{N}$ y $g = Id$, esto es, una ecuación en diferencias de primer orden explícita, la existencia y unicidad de solución es trivial pero su aproximación por subsoluciones y sobresoluciones no siempre es posible como se puede ver en [30, Ejemplo 2.2]. Además, en [30] los autores demuestran un resultado de existencia sin aproximación cuando $g = \sigma$ y se verifican condiciones de Carathéodory; más aún, con diferentes hipótesis, desarrollan un método monótono para aproximar las soluciones extremales de una ecuación en diferencias con condiciones de frontera no lineales y funcionales que incluyen como caso particular las condiciones iniciales.

En esta sección deducimos la existencia de soluciones extremales de (P_1) por aproximación cuando f es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory. Para la prueba de este resultado usaremos una revisión de los argumentos de Goodman.

Posteriormente rebajamos las hipótesis, de un modo análogo al trabajo realizado en [23], se asume la hipótesis (C^2) y se cambia la condición (C^1) por (B^1) y demostramos un nuevo resultado de existencia y aproximación de soluciones extremales de (P_1).

Se termina la sección demostrando la existencia y aproximación de soluciones extremales de una ecuación dinámica con condiciones iniciales entre una subsolución y una sobresolución en el orden habitual.

2.3.1. Condiciones $L^1_\Delta-$Carathéodory

Esta subsección está dedicada a probar la existencia de soluciones extremales del problema (P_1) en el conjunto $AC(D)$ supuesto que la función que define la parte no lineal de la ecuación es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory. Se utilizará el método de aproximación mediante subsoluciones y sobresoluciones que Peano o Goodman emplean en el caso real adaptado a un conjunto cerrado de números reales arbitrario.

El resultado obtenido es el siguiente.

Teorema 2.3.1 *Sea $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ una función $L^1_\Delta-$ Carathéodory.*

Si se verifica (H_1^0), entonces, (P_1) tiene soluciones extremales en el conjunto $AC(D)$. Además, si u_* y u^* denotan, respectivamente, la solución minimal y maximal de (P_1) en $AC(D)$, entonces, las siguientes igualdades se verifican para todo $t \in D$:

$$u_*(t) = \text{mín}\,\{\, u_+(t) \ : \ u_+ \in S_1^+ \,\} \quad y \quad u^*(t) = \text{máx}\,\{\, u_-(t) \ : \ u_- \in S_1^- \,\}.$$

Debido a la similitud entre las demostraciones de la existencia de solución minimal y maximal de (P_1) en $AC(D)$, solamente se probará la segunda de ellas. Se mostrará que la función $U : D \to \mathbb{R}$ definida para cada $t \in D$ como

$$U(t) := \sup\,\{\, u_-(t) \ : \ u_- \in S_1^- \,\} \tag{2.3}$$

es una solución de (P_1), con lo cual, como cada solución de (P_1) es también una subsolución de (P_1), está claro que U es la solución maximal de (P_1) en $AC(D)$.

Previamente es necesario demostrar el siguiente lema que establece que U es una subsolución de (P_1) la cual es aproximada uniformemente en D por una sucesión creciente de subsoluciones de (P_1).

Lema 2.3.2 *Sea $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ una función $L^1_\Delta-$Carathéodory para la cual la condición (H_1^0) es válida. Si S_1^- es el conjunto de todas las subsoluciones de*

(P_1) y $U : D \to \mathbb{R}$ es la función definida en (2.3), entonces, se satisfacen las siguientes propiedades:

i) El conjunto S_1^- es no vacío y acotado superiormente y por tanto la función U está bien definida.

ii) Para cada $t_1, t_2 \in D$ tales que $t_1 < t_2$, se verifica la siguiente desigualdad

$$|U(t_2) - U(t_1)| \leq \int_{[t_1,t_2)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s \tag{2.4}$$

y así, $U \in AC(D)$.

iii) Si $u_1, u_2 \in S_1^-$, entonces, la función $M : D \to \mathbb{R}$ definida para cada $t \in D$ como $M(t) := \max\{u_1(t), u_2(t)\}$ también pertenece a S_1^-.

iv) Existe una sucesión creciente $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S_1^-$ tal que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a U uniformemente en D.

v) $U \in S_1^-$, entonces, para todo $t \in D$, $U(t) = \max\{\, u_-(t) \ : \ u_- \in S_1^- \,\}$.

Demostración: *i)* El teorema de la $\Delta-$derivación de la $\Delta-$integral de Lebesgue, teorema 1.4.8, y la condición (C^2) garantizan que $U^-, U^+ : D \to \mathbb{R}$ definidas para cada $t \in D$ como

$$U^-(t) = u_0 - \int_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s \qquad \text{y} \qquad U^+(t) = u_0 + \int_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s \tag{2.5}$$

satisfacen que $U^- \in S_1^-$ y U^+ es una cota superior del conjunto S_1^-.

ii) Sean $t_1, t_2 \in D$ tales que $t_1 < t_2$. Para cada $\varepsilon > 0$, existen $u, v \in S_1^-$ verificando que

$$u(t_2) \geq U(t_2) - \varepsilon, \qquad u(t_1) \leq U(t_1),$$

y

$$v(t_1) \geq U(t_1) - \epsilon, \qquad v(t_2) \leq U(t_2);$$

así pues, se obtiene que

$$U(t_2) - U(t_1) \leq u(t_2) - u(t_1) + \varepsilon = \int_{[t_1,t_2)_{\mathbb{T}}} u^{\Delta}(s)\,\Delta s + \varepsilon \leq \int_{[t_1,t_2)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s + \varepsilon.$$

Además, definiendo $v_1 : D \to \mathbb{R}$ como

$$v_1(t) := \begin{cases} v(t), & \text{si} \quad t \in [t_0, t_1)_{\mathbb{T}}, \\ v(t_1) - \displaystyle\int_{[t_1,t)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s, & \text{si} \quad t \in [t_1, T]_{\mathbb{T}}, \end{cases}$$

se tiene que $v_1 \in S_1^-$ y

$$\begin{aligned} U(t_2) - U(t_1) &\geq v_1(t_1) - U(t_1) + v_1(t_2) - v_1(t_1) \\ &= v(t_1) - U(t_1) - \int_{[t_1,t_2)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s \\ &\geq -\varepsilon - \int_{[t_1,t_2)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s. \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$|U(t_2) - U(t_1)| \leq \int_{[t_1,t_2)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s;$$

con lo cual, esta desigualdad permite concluir, por el teorema de la $\Delta-$derivación de la $\Delta-$integral de Lebesgue, teorema 1.4.8, que $U \in AC(D)$.

iii) De la igualdad $M = \dfrac{u_1 + u_2 + |u_1 - u_2|}{2}$ se deduce que $M \in AC(D)$ y así, el teorema fundamental del cálculo establece que $M^{\Delta}(t)$ existe para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$.

Fíjese $t \in D^o$ para el cual existen $M^{\Delta}(t)$, $u_1^{\Delta}(t)$ y $u_2^{\Delta}(t)$; es fácil comprobar que o bien existe un $i \in \{1,2\}$ tal que

$$M^{\Delta}(t) = u_i^{\Delta}(t) \leq f(g(t), u_i(g(t))) = f(g(t), M(g(t))),$$

o bien $t < \sigma(t)$ y existen $i, j \in \{1,2\}$ tales que $i \neq j$ y

$$M^{\Delta}(t) = \frac{u_j(\sigma(t)) - u_i(t)}{\sigma(t) - t} \leq \frac{u_j(t) + f(g(t), u_j(g(t))(\sigma(t) - t) - u_i(t)}{\sigma(t) - t},$$

en cuyo caso, si $g = \sigma|_{[t_0,\rho(T)]_{\mathbb{T}}}$, entonces,

$$M^{\Delta}(t) \leq u_j^{\Delta}(t) \leq f(\sigma(t), u_j(\sigma(t))) = f(\sigma(t), M(\sigma(t))),$$

mientras que si $g = Id|_{[t_0,\rho(T)]_{\mathbb{T}}}$, entonces, de la condición (H_1^0) se sigue que

$$M^{\Delta}(t) \leq f(t, u_i(t)) = f(t, M(t)).$$

Por consiguiente, M es una subsolución de (P_1).

iv) Sea $u_1 := U^- \in S_1^-$ definida en (2.5).

Para $n > 1$, supónganse $u_1, \ldots, u_{n-1} \in S_1^-$ definidas. Por el lema 1.2.19 se sabe que existe $P_n = \{t_0^n, \ldots, t_{l_n}^n\}$, $l_n \leq n$, una partición de D tal que para cada $k \in K_n = \{0, \ldots, l_n - 1\}$ se satisface o bien $t_{k+1}^n - t_k^n \leq \dfrac{T - t_0}{n}$ o bien $t_{k+1}^n - t_k^n > \dfrac{T - t_0}{n}$ y $\sigma(t_k^n) = t_{k+1}^n$.

Para cada $k \in \{0, \ldots, l_n\}$, elíjase $v_k \in S_1^-$ verificando que

$$U(t_k^n) - \frac{1}{n} \leq v_k(t_k^n) \leq U(t_k^n)$$

y defínase $u_n := \max\{u_{n-1}, v_0, \ldots, v_{l_n}\}$.

Del enunciado *iii)* se sigue que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S_1^-$ y además, está claro que esta sucesión es creciente.

Fíjense $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, $k \in K_n$ y $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n)_{\mathbb{T}}$. Si $k \in \tilde{K}_n := \{\, k \in K_n \;:\; \sigma(t_k^n) = t_{k+1}^n \,\}$, entonces,

$$0 \;\leq\; U(t) - v_k(t) \;=\; U(t_k^n) - v_k(t_k^n) \;\leq\; \frac{1}{n},$$

mientras que, en otro caso, de (2.4) y (C^2) se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq U(t) - v_{k+1}(t) \quad &\leq \quad U(t_{k+1}^n) - v_{k+1}(t_{k+1}^n) + v_{k+1}(t_{k+1}^n) - v_{k+1}(t) \\ &\qquad + \left|U(t_{k+1}^n) - U(t)\right| \\ &\leq \quad \frac{1}{n} + 2\int_{[t_k^n, t_{k+1}^n)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $t \in D$, es cierto que

$$0 \;\leq\; U(t) - u_n(t) \;\leq\; \frac{1}{n} + 2 \max_{k \notin \tilde{K}_n} \int_{[t_k^n, t_{k+1}^n)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s$$

y así, el teorema de la $\Delta-$derivación de la $\Delta-$integral de Lebesgue, teorema 1.4.8, permite afirmar que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a U uniformemente en D.

v) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S_1^-$ una sucesión creciente convergente a U uniformemente en D. El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue asegura que para cada $t, s \in D$ tales que $t < s$ se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{U(s) - U(t)}{s - t} \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n(s) - u_n(t)}{s - t} = \frac{1}{s-t} \lim_{n\to\infty} \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} u_n^{\Delta}(r)\,\Delta r \\ &\leq \quad \frac{1}{s-t} \lim_{n\to\infty} \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} f(g(r), u_n(g(r)))\,\Delta r \qquad (2.6) \\ &= \quad \frac{1}{s-t} \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} f(g(r), U(g(r)))\,\Delta r. \end{aligned}$$

Así pues, como consecuencia del teorema 1.4.8, se tiene que

$$U^{\Delta}(t) \leq f(g(t), U(g(t))), \qquad \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in D^o$$

y, como $U(t_0) = u_0$, resulta que U es una subsolución de (P_1). □

Nótese que el hecho de que la función $U^- : D \to \mathbb{R}$ definida en (2.5) pertenezca a S_1^- establece que para cada $t \in D$, se cumple que $U(t) = \max\{\, u_-(t) \;:\; u_- \in S_1^-,\; u(t_0) = u_0 \,\}$.

Demostración del teorema 2.3.1: Inicialmente se verá que U satisface la ecuación dinámica en el conjunto $R \cap D^o$ de puntos aislados por la derecha de D^o. Fíjese $t_i \in R \cap D^o$ y supóngase que

$$U^\Delta(t_i) < f(g(t_i), U(g(t_i))). \tag{2.7}$$

Si $g = \sigma|_{[t_0,\rho(T)]_\mathbb{T}}$, entonces, de la propiedad ii) en (C^1) y la condición (C^2) se deduce que la función $G : [U^\sigma(t_i), U(t_i)+m(t_i)\mu(t_i)] \to \mathbb{R}$ definida para cada $x \in [U^\sigma(t_i), U(t_i) + m(t_i)\mu(t_i)]$ como

$$G(x) = x - \mu(t_i) f(\sigma(t_i), x) - U(t_i)$$

es continua en su dominio el cual es un intervalo no degenerado; además, de (2.7) y (C^2) se sigue que $G(U^\sigma(t_i)) < 0$ y $G(U(t_i)) + m(t_i)\mu(t_i)) \geq 0$. Por tanto, el teorema de Bolzano establece la existencia de al menos un $c \in (U^\sigma(t_i), U(t_i) + m(t_i)\mu(t_i)]$ tal que $c - \mu(t_i) f(\sigma(t_i), c) = U(t_i)$; fíjese uno de ellos.

Por el contrario, si $g = Id|_{[t_0,\rho(T)]_\mathbb{T}}$, entonces, se elige como c el valor $c = U(t_i) + \mu(t_i) f(t_i, U(t_i)) > U^\sigma(t_i)$.

Así pues, definiendo $u_i : D \to \mathbb{R}$ como

$$u_i(t) := \begin{cases} U(t), & \text{si } t \in [t_0, t_i]_\mathbb{T}, \\ c - \displaystyle\int_{[\sigma(t_i),t)_\mathbb{T}} m(s)\,\Delta s, & \text{si } t \in [\sigma(t_i), T]_\mathbb{T}, \end{cases}$$

resulta que $u_i \in S_1^-$ y $u_i(\sigma(t_i)) > U(\sigma(t_i))$ lo cual contradice la definición de U.

A continuación se verá que U satisface la ecuación dinámica en $\Delta-$casi todo punto de $D^o \backslash R$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [t_0, \rho(T)]_\mathbb{T}$ una sucesión en las condiciones del lema 2.2.6; como $\mu_\Delta\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap (D^o\backslash R)\right) = \mu_\Delta(D^o\backslash R)$, es suficiente probar que U verifica la ecuación dinámica en $\Delta-$casi todo punto de cada conjunto $A_n \cap (D^o\backslash R)$ tal que $\mu_\Delta(A_n \cap (D^o\backslash R)) > 0$; fíjese uno de ellos.

Sea $V : D \to \mathbb{R}$ definida para cada $t \in D$ como

$$V(t) := \int_{[t_0,t)_\mathbb{T}} f(g(s), U(g(s)))\ \Delta s;$$

por el lema 2.2.3 y el teorema 1.4.8 se sabe que existe $V^\Delta(t)$ para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$.

Se define $F := \{\, t \in A_n \cap (D^o\backslash R)\ :\ U^\Delta(t) \text{ y } V^\Delta(t) \text{ existen} \,\}$ y sea $F_1 \subset F$ como en el lema 2.2.4; se comprobará que U verifica la ecuación dinámica en todo $t_1 \in F_1$ y así, como $\mu_\Delta(F_1) = \mu_\Delta(F) = \mu_\Delta(A_n \cap (D^o\backslash R))$, se finaliza la demostración.

Sean $t_1 \in F_1$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios; el lema 2.2.6 establece que la gráfica de U restringida a cada A_n pertenece a un conjunto compacto en el cual la función F definida en (2.1) es uniformemente continua, con lo cual, existe un $\delta > 0$ tal que si $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in A_n$ son tales que $|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2| < \delta$ y $x \in \mathbb{R}$ es tal que $|U(\tilde{t}_1) - x| < 3\delta$, entonces,

$$|f(g(\tilde{t}_1), U(\tilde{t}_1)) - f(g(\tilde{t}_2), x)| < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Además, por el teorema de la $\Delta-$derivación de la $\Delta-$integral de Lebesgue, teorema 1.4.8, se sabe que existe un $\eta \in (0, \delta)$ tal que $\varepsilon \cdot \eta < \delta$ y

$$\int_{[t,t+\eta)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s < \delta \qquad \text{para todo } t \in D. \tag{2.9}$$

Se definen $v_1 : [t_1, T]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ y $u_1 : D \to \mathbb{R}$ como

$$v_1(t) := \begin{cases} f(t, U(t)) - \varepsilon, & \text{si } t \in [t_1, t_1 + \eta)_{\mathbb{T}} \cap F_1, \\ -m(t), & \text{si } t \notin [t_1, t_1 + \eta)_{\mathbb{T}} \cap F_1, \end{cases}$$

y

$$u_1(t) := \begin{cases} U(t), & \text{si } t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}, \\ U(t_1) + \displaystyle\int_{[t_1,t)_{\mathbb{T}}} v_1(s)\,\Delta s, & \text{si } t \in (t_1, T]_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

Se verá que $u_1 \in S_1^-$. Puesto que U es absolutamente continua en D, la continuidad absoluta de u_1 se deduce del lema 2.2.3 y el teorema 1.4.8. Por consiguiente, como U es una subsolución de (P_1), de la igualdad $u_1(t_0) = u_0$, de la condición (C_2), resulta que solamente queda probar que u_1 verifica la inecuación dinámica en $\Delta-$casi todo punto de $[t_1, t_1 + \eta)_{\mathbb{T}} \cap F_1$.

Por (2.4) y (2.9) se sabe que para cada $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in [t_1, t_1 + \eta)_{\mathbb{T}} \cap F_1$, se verifica que

$$\begin{aligned} |U(\tilde{t}_1) - u_1(\tilde{t}_2)| &\leq |U(\tilde{t}_1) - U(t_1)| + |u_1(t_1) - u_1(\tilde{t}_2)| \\ &\leq \int_{[t_1,\tilde{t}_1)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s + \int_{[t_1,\tilde{t}_2)_{\mathbb{T}}} m(s)\,\Delta s + \varepsilon|\tilde{t}_2 - t_1| \\ &\leq 3\delta \end{aligned}$$

de donde se sigue, por (2.8), que

$$|f(\tilde{t}_1, U(\tilde{t}_1)) - f(\tilde{t}_2, u_1(\tilde{t}_2))| < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Fíjense $t \in [t_1, t_1 + \eta)_{\mathbb{T}} \cap F_1$ para el cual $u_1^{\Delta}(t)$ existe y $s \in (t, t_1 + \eta)_{\mathbb{T}}$; por

(C^2) y (2.10), se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{u_1(s)-u_1(t)}{s-t} &= f(t,u_1(t)) + \frac{1}{s-t}\int_{[t,s)_{\mathbb{T}}\cap F_1} [v_1(r) - f(t,u_1(t))]\,\Delta r \\
&\quad + \frac{1}{s-t}\int_{[t,s)_{\mathbb{T}}\setminus F_1} [v_1(r) - f(t,u_1(t))]\,\Delta r \\
&\leq f(t,u_1(t)) + \frac{1}{s-t}\int_{[t,s)_{\mathbb{T}}\cap F_1} [f(r,U(r)) - f(t,u_1(t))]\,\Delta r \\
&\quad - \varepsilon\,\frac{\mu_\Delta([t,s)_{\mathbb{T}}\cap F_1)}{s-t} + \frac{1}{s-t}\int_{[t,s)_{\mathbb{T}}\setminus F_1} m(r)\,\Delta r \\
&\quad + |f(t,u_1(t))|\,\frac{\mu_\Delta([t,s)_{\mathbb{T}}\setminus F_1)}{s-t} \\
&< f(t,u_1(t)) + \frac{1}{s-t}\int_{[t,s)_{\mathbb{T}}\setminus F_1} m(r)\,\Delta r \\
&\quad + |f(t,u_1(t))|\,\frac{\mu_\Delta([t,s)_{\mathbb{T}}\setminus F_1)}{s-t},
\end{aligned}$$

con lo cual, tomando límites, del lema 2.2.4 se tiene que $u_1^\Delta(t) \leq f(t,u_1(t))$.

Finalmente, para probar que U verifica la ecuación dinámica en t_1, se fija $s \in (t_1, t_1+\eta)_{\mathbb{T}}$ arbitrario y teniendo en cuenta que $u_1 \in S_1^-$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{U(s)-U(t_1)}{s-t_1} &\geq \frac{u_1(s)-u_1(t_1)}{s-t_1} \\
&= \frac{1}{s-t_1}\int_{[t_1,s)_{\mathbb{T}}} f(g(r),U(g(r)))\,\Delta r - \varepsilon\,\frac{\mu_\Delta([t_1,s)_{\mathbb{T}}\cap F_1)}{s-t_1} \\
&\quad - \frac{1}{s-t_1}\int_{[t_1,s)_{\mathbb{T}}\setminus F_1} [m(r) + f(g(r),U(g(r)))]\,\Delta r,
\end{aligned}$$

de donde se obtiene, por (C^2) y el lema 2.2.4, que

$$\lim_{s\to t_1^+} \frac{U(s)-U(t_1)}{s-t_1} \geq \lim_{s\to t_1^+} \frac{1}{s-t_1}\int_{[t_1,s)_{\mathbb{T}}} f(g(r),U(g(r)))\,\Delta r - \varepsilon,$$

además, de (2.6) se deduce que

$$\lim_{s\to t_1^+} \frac{U(s)-U(t_1)}{s-t_1} \leq \lim_{s\to t_1^+} \frac{1}{s-t_1}\int_{[t_1,s)_{\mathbb{T}}} f(g(r),U(g(r)))\,\Delta r,$$

así pues, como consecuencia de la elección arbitraria de $\varepsilon > 0$ se deduce que

$$U^\Delta(t_1) = f(g(t_1),U(g(t_1)))$$

lo cual concluye la prueba. $\square$

Nota 2.3.3 *La condición (H_1^0) es necesaria incluso en el caso más simple, es decir, para $\mathbb{T} \subset \mathbb{N}$ en el cual la unicidad de solución garantiza la existencia de soluciones extremales mas se puede probar que dicha solución no es ni el mínimo de sobresluciones ni el máximo de subsoluciones como muestran las siguientes elecciones, ver [30, Ejemplo 2.2].*

Sean $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3\}$ y $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para cada $(t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ como

$$f(t, x) := 2x\,(x - 2)$$

y considérese el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(t, u(t)); & t \in \{0, 1, 2\} \\ \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Las funciones $u_- \equiv \{0, 0, 0, 0\}$ y $u_+ \equiv \{2, 2, 2, 2\}$ son una subsolución y una sobresolución de dicho problema respectivamente, sin embargo, su única solución está dada por $u \equiv \{1, -1, 5, 35\}$ que ni es el mínimo de sobresoluciones ni el máximo de subsoluciones.

Se puede pensar que la condición (H_1^0) solamente es necesaria en el caso discreto, no obstante, si se eligen $\mathbb{T} = [-1, 0] \cup \{1\} \cup [2, 3]$, $D = \mathbb{T}$ y $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para cada $(t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ como

$$f(t, x) := \begin{cases} 0; & t < 0 \ \text{o} \ t > 2, \ x \in \mathbb{R}, \\ \\ 2; & t \in \{0, 1, 2\}, \ x \leq -1, \\ \\ -2x; & t \in \{0, 1, 2\}, \ -1 \leq x \leq 1, \\ \\ -2; & t \in \{0, 1, 2\}, \ x \geq 1, \end{cases}$$

y se estudia la existencia de solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(t, u(t)); & \Delta - c.\ t.\ p.\ \ t \in D^o, \\ \\ u(-1) = 1, \end{cases}$$

entonces, se concluye que la función $v : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dada para cada $t \in \mathbb{T}$ por

$$v(t) := \begin{cases} 1; & t \leq 0 \ \text{o} \ t \geq 2, \\ \\ -1; & t = 1, \end{cases}$$

es la única solución de dicho problema la cual no es ni el mínimo de sobresoluciones ni el máximo de subsoluciones ya que las funciones $v_-, v_+ : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definidas para cada $t \in \mathbb{T}$ como

$$v_-(t) := 0 \qquad y \qquad v_+(t) = \begin{cases} 2; & t \leq 0, \\ \\ 0; & t > 0, \end{cases}$$

son una subsolución y una sobresolución del problema anterior respectivamente.

2.3.2. Discontinuidad

El resultado de existencia y aproximación de soluciones extremales obtenido en el teorema 2.3.1 es válido sin necesidad de suponer continuidad en la segunda variable de la función que define la parte no lineal de la ecuación. En el próximo resultado se supondrá la validez de la condición (C^2) y se reemplazará la condición (C^1) por (B^1).

El resultado se probará aplicando el teorema 2.3.1 a un problema auxiliar cuya parte no lineal es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory. Para ello, se define la función $\beta : D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ para cada $(t,x,y) \in D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como

$$\beta(t,x,y) = \begin{cases} f(t,x); & \text{si} \quad t \notin g(B) \\ \sup\{f(t,z) : x \le z \le y\}; & \text{si} \quad t \in g(B) \ \text{ y } \ x \le y, \\ \inf\{f(t,z) : y \le z \le x\}; & \text{si} \quad t \in g(B) \ \text{ y } \ y \le x, \end{cases} \tag{2.11}$$

siendo B el subconjunto de D^o formado por los puntos de D^o donde se verifican simultaneamente la propiedad ii) de (B^1) y (C^2). La condición (C^2) garantiza que la función β está bien definida y para cada $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $\beta(t,x,x) = f(t,x)$ para todo $t \in D$ y que la función $\beta(g(t),x,\cdot)$ es creciente en $\mathbb{R}$ para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$.

Se necesita el siguiente lema.

Lema 2.3.4 *Supóngase que* $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ *verifica* (B^1) *y* (C^2) *y sea* $\beta : D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ *la función definida en* (2.11). *Entonces, para cada función* $u : D \to \mathbb{R}$ *absolutamente continua en* D*, la función* $F_u : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ *definida para cada* $(t,x) \in D \times \mathbb{R}$ *como*

$$F_u(t,x) := \beta(t,x,u(t)) \tag{2.12}$$

es una función $L^1_\Delta-$*Carathéodory.*

Demostración: Sea $u : D \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua en D arbitraria.

Se verá que para cada $x \in \mathbb{R}$, la función $F_u(g(\cdot),x) = \beta(g(\cdot),x,u(g(\cdot)))$ es $\Delta-$medible en D^o de donde se sigue, por el lema 2.2.2, que para cada $x \in \mathbb{R}$, $F_u(\cdot,x)$ es una función $\Delta-$medible en D. Elíjase $x \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Dado $a \in \mathbb{R}$, como $D^o \backslash B$ es un conjunto de $\Delta-$medida nula, es suficiente demostrar que el conjunto

$$\begin{aligned} E &= \{\, t \in B \,:\, F_u(g(t),x) \le a \,\} \\ &= \{\, t \in E \,:\, u(g(t)) \le x \,\} \cup \{ t \in E \,;\, u(g(t)) \ge x \,\} \\ &= \{\, t \in B \,:\, \inf \{\, f(g(t),s) \,:\, u(g(t)) \le s \le x \,\} \le a \,\} \\ &\quad \cup \{\, t \in B \,:\, \sup \{ f(g(t),s) \,:\, x \le s \le u(g(t)) \,\} \le a \,\} \end{aligned}$$

es $\Delta-$medible.

Se comprobará que las funciones $I, S : B \to \bar{\mathbb{R}}$ dadas para cada $t \in B$ por

$$I(t) := \text{ínf}\,\{\, f(g(t), s) \;:\; u(g(t)) \leq s \leq x \,\}$$

y

$$S(t) := \sup\,\{\, f(g(t), s) \;:\; x \leq s \leq u(g(t)) \,\}$$

son funciones $\Delta-$medibles en B, lo cual es equivalente a que E es un conjunto $\Delta-$medible.

Para cada $t \in B$ fijado, se tiene que

$$\begin{aligned} I(t) &= \text{ínf}\,\{\, f(g(t), u(g(t)) + l) \;:\; l \in [0, x - u(g(t))] \,\} \\ &= \text{ínf}\,\{\, f\,(g(t), \text{mín}\,\{\, u(g(t)) + q, x \,\}) \;:\; q \in \mathbb{R}^+ \,\}. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe algún $z \in [u(g(t)), x]$ tal que $f(g(t), z) < I(t) + \epsilon$ y además, de la condición ii) en (B^1) se sigue que para cada $z \in [u(g(t)), x]$, existe un $\delta > 0$ tal que $f(g(t), s) < f(g(t), z) + \epsilon$, para todo $s \in (z - \delta, z)$.

Por tanto, existe algún $q \in [0, z - u(g(t))] \cap \mathbb{Q}^+$ para el cual se verifica que

$$f(g(t), u(g(t)) + q) < f(g(t), z) + \epsilon < I(t) + 2\epsilon.$$

Como consecuencia se obtiene la siguiente igualdad:

$$I(t) = \text{ínf}\,\{\, f\,(g(t), \text{mín}\,\{\, u(g(t)) + q, x \,\}) \;:\; q \in \mathbb{Q}^+ \,\};$$

así pues, dado que el lema 2.2.2 y la condición i) de la hipótesis (B^1) aseguran que para cada $q \in \mathbb{Q}^+$, la función $f(g(\cdot), \text{mín}\,\{\, u(g(\cdot)) + q, x \,\})$ es una función $\Delta-$medible en B, la igualdad anterior permite concluir que la función $I : B \to \bar{\mathbb{R}}$ es $\Delta-$medible en B ya que es el ínfimo de una cantidad numerable de funciones $\Delta-$medibles en B.

Análogamente se prueba que la función $S : B \to \bar{\mathbb{R}}$ es $\Delta-$medible en B.

Para probar la continuidad de la función $F_u(g(t), \cdot)$ en $\mathbb{R}$ para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$, nótese que para todo $t \in B$ la función definida para cada $x \in \mathbb{R}$ como $H(x) = \beta(g(t), x, u(g(t)))$ es decreciente, con lo que para cada $x \in \mathbb{R}$ fijado, existe

$$\lim_{z \to x^-} H(z) \geq H(x) \geq \lim_{z \to x^+} H(z).$$

Se probará la igualdad para $\lim_{z \to x^-} H(z)$; la otra se puede probar mediante argumentos similares.

Supóngase que $x \leq u(g(t))$; como para cada $z \leq x$, es cierto que

$$H(z) = \sup\,\{\, \sup\,\{\, f(g(t), s) \;:\; z \leq s < x \,\},\; \sup\,\{\, f(g(t), s) \;:\; x \leq s \leq u(g(t)) \,\} \,\}$$

y dado que la condición ii) de (B^1) permite afirmar que

$$\limsup_{z \to x^-} \;\sup\,\{\, f(g(t), s) \;:\; z \leq s < x \,\} = \limsup_{z \to x^-} f(g(t), z) \leq f(g(t), x),$$

resulta que

$$\lim_{z\to x^-} H(z) \leq \sup\{\, f(g(t),x), \sup\{\, f(g(t),s)\ :\ x\leq s\leq u(g(t))\,\}\,\} = H(x).$$

Por el contrario, si $x > u(g(t))$, entonces, se sabe que para cada $z \in (u(g(t)),x)$, se cumple que

$$H(z) = \inf\{\, f(g(t),s)\ :\ u(g(t))\leq s\leq z\,\}.$$

Supóngase que $\lim\limits_{z\to x^-} H(z) = A > H(x)$. Para cada $\epsilon > 0$, exite un $\delta > 0$ tal que si $z \in (x-\delta, x)$, entonces, $H(z) \in [A, A+\epsilon)$ y así,

$$\inf\{\, f(g(t),s)\ :\ u(g(t))\leq s\leq z\,\} \geq A > H(x);$$

con lo cual,

$$f(g(t),s) \geq A > H(x), \qquad \text{para todo } s\in[u(g(t)),x). \tag{2.13}$$

Por consiguiente, de la igualdad $H(x) = \inf\{\,\inf\{\, f(g(t),s)\ :\ u(g(t))\leq s < x\,\},\ f(g(t),x)\}$ se sigue que

$$H(x) = f(g(t),x) \quad \text{y} \quad f(g(t),s) \geq A > f(g(t),x) \ \ \text{para todo}\, s\in[u(g(t)),x).$$

Sea $\epsilon_1 = A - f(g(t),x) > 0$, puesto que $\limsup\limits_{z\to x^-} f(g(t),z) \leq f(g(t),x)$ existe un $\delta > 0$ tal que si $s \in (x-\delta, x)$, entonces,

$$f(g(t),s) < f(g(t),x) + \epsilon_1 = A,$$

lo cual contradice (2.13) terminándose así la demostración de la primera de las igualdades.

Finalmente, la propiedad (C^2) es consecuencia de la desigualdad

$$|F_u(g(t),x)| = |\beta(g(t),x,u(g(t)))| \leq m(t)$$

para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^0$ y todo $x \in \mathbb{R}$. □

Teorema 2.3.5 *Asúmanse* (B^1), (C^2) *y* (H_1^0). *Entonces,* (P_1) *tiene soluciones extremales en el conjunto* $AC(D)$. *Además, si* u_* *y* u^* *denotan, respectivamente, la solución minimal y maximal de* (P_1) *en* $AC(D)$, *entonces, se cumplen las siguientes igualdades para todo* $t \in D$:

$$u_*(t) = \min\{\, u_+(t)\ :\ u_+\in S_1^+\,\} \quad y \quad u^*(t) = \max\{\, u_-(t)\ :\ u_-\in S_1^-\,\}.$$

Demostración: Sean $U(t) := \sup\{\, u_-(t)\ :\ u_-\in S_1^-\,\}$ la función absolutamente continua en D definida en (2.3), y F_U la función definida en (2.12).

Por el teorema 2.3.1 se sabe que el problema

$$u^\Delta(t) = F_U(g(t), u(g(t))) \qquad \Delta-\text{c. t. p. } \ t\in D^o, \quad u(t_0) = u_0. \tag{2.14}$$

tiene solución maximal en el conjunto $AC(D)$, $w \in AC(D)$ y para todo $t \in D$, la siguiente igualdad

$$w(t) = \text{máx}\,\{\, u(t) \,:\, u \text{ es una subsolución de } (2.14) \,\}$$

es cierta.

Además, para cada $v \in S_1^-$ y Δ−casi todo punto $t \in D^0$, se tiene que

$$\begin{aligned} v^\Delta(t) &\leq f(g(t), v(g(t))) = \beta(g(t), v(g(t)), v(g(t))) \\ &\leq \beta(g(t), v(g(t)), U(g(t))) = F_U(g(t), v(g(t))), \end{aligned}$$

con lo cual, v es una subsolución del problema (2.14) y $v \leq w$ en D.

Por consiguiente, $U \leq w$ en D, con lo cual, del crecimiento de la función β en la tercera variable se sigue que

$$w^\Delta(t) = \beta(g(t), w(g(t)), U(g(t))) \leq \beta(g(t), w(g(t)), w(g(t))) = f(g(t), w(g(t))),$$

por tanto, $w \leq U$ en D y así, $w = U$ en D, de donde se concluye que

$$U^\Delta(t) = \beta(g(t), U(g(t)), U(g(t))) = f(g(t), U(g(t))).$$

Un razonamiento similar permite probar la otra parte del resultado. $\square$

Para finalizar esta sección se aplicará el teorema 2.3.5 para probar la existencia y aproximación de soluciones extremales en el conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en el conjunto ternario de Cantor de una clase de ecuaciones dinámicas de primer orden con condiciones iniciales.

Ejemplo 2.3.6 *Sean C el conjunto ternario de Cantor y $\mathbb{T} = C$. Para cada $t \in \mathbb{T}$, se denota como $I_t = \{\, i \in I \,:\, t_i \in R \cap [0, t) \,\}$ siendo $R = \{t_i\}_{i \in I}$ el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$.*

Se define $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para cada $(t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ como

$$f(t, x) := h(t)\,\text{sen}(F(t)) + v(x),$$

donde $h, F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ están dadas para cada $t \in \mathbb{T}$ por

$$h(t) := \prod_{i \in I_t} \left(\sqrt{1 + \tan^2(t_i)\mu^2(t_i)} \right)$$

y

$$F(t) := -\ln(t) + \sum_{i \in I_t} \left[t_i \mu(t_i) + \ln\left(\frac{\cos(\sigma(t_i))}{\cos(t_i)} \right) \right]$$

y $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está definida como*

$$v(x) := \begin{cases} -\dfrac{x}{x-1}, & si \quad x < 0, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(x^2 - \displaystyle\sum_{i \in I_x} \mu^2(t_i)\right), & si \quad x \in \mathbb{T}, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(t_i^2 - \displaystyle\sum_{i \in I_{t_i}} \mu^2(t_i)\right), & si \quad x \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ para algún } i \in I, \\[2ex] \dfrac{3}{7} + \operatorname{sen}(\pi x), & si \quad x > 1. \end{cases}$$

Para cada $k \in \mathbb{R}$*, considérese el siguiente problema de valor inicial:*

$$(P_k) \begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(\sigma(t), u(\sigma(t))) & \Delta - c.\ t.\ p.\ t \in [0,1)_{\mathbb{T}}, \\[1ex] u(0) = k. \end{cases}$$

Como consecuencia inmediata de la definición de la función f*, se deduce la validez de la condición* (B^1) *y además, la desigualdad*

$$|f(t,x)| \le h(t) + \frac{10}{7} \qquad \text{para cada } (t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

garantiza la condición (C^2)*.*

Por consiguiente, el teorema 2.3.5 establece, para cada $k \in \mathbb{R}$*, la existencia de soluciones extremales en el conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en* $\mathbb{T}$ *del problema* (P_k)*.*

Además, si u_{k*} *y* u_k^* *denotan, respectivamente, la solución minimal y maximal de* (P_k) *en el conjunto* $AC(\mathbb{T})$*, entonces, se verifican las siguientes igualdades para todo* $t \in \mathbb{T}$*:*

$$u_{k*}(t) = \min \{\, u_{k+}(t) \ : \ u_{k+} \text{ es una sobresolución de } (P_k) \,\}$$

y

$$u_k^*(t) = \max \{\, u_{k-}(t) \ : \ u_{k-} \text{ es una subsolución de } (P_k) \,\}.$$

Finalmente, nótese que la desigualdad (2.15) *permite localizar todas las soluciones del problema* (P_k) *en el conjunto*

$$[U_k{}^-, U_k{}^+] = \{\, H \in AC(\mathbb{T}) \, : \, U_k{}^- \le H \le U_k{}^+ \,\},$$

donde $U_k{}^-, U_k{}^+ : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *están dadas para cada* $t \in \mathbb{T}$ *por*

$$U_k{}^-(t) = k - \frac{10\ t}{7} - \int_{[0,t)_{\mathbb{T}}} h(s)\ \Delta s \qquad y \qquad U_k{}^+(t) = k + \frac{10\ t}{7} + \int_{[0,t)_{\mathbb{T}}} h(s)\ \Delta s.$$

2.3.3. Subsoluciones y sobresoluciones en orden habitual

En esta subsección se adaptarán las demostraciones dadas en las secciones anteriores para probar, siempre que f sea una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos o que se verifiquen las condiciones (B^1) y (C^2_c), la existencia y aproximación de soluciones extremales del problema (P_1) en el conjunto $[\alpha, \beta]$ suponiendo la siguiente condición:

(H^1_1) Existen α y β una subsolución y una sobresolución respectivamente del problema (P_1) tales que $\alpha \leq \beta$ en D.

El primero de los resultados obtenidos es el siguiente.

Teorema 2.3.7 *Sea $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos.*

Si se verifican las condiciones (H^0_1) y (H^1_1), entonces, (P_1) tiene una solución minimal, u_*, y una solución maximal, u^*, en $[\alpha, \beta]$. Además, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$u_* = \min\{ u_+ \in [\alpha, \beta] \, : \, u_+ \in S^+_1 \} \quad y \quad u^* = \max\{ u_- \in [\alpha, \beta] \, : \, u_- \in S^-_1 \}. \tag{2.16}$$

Solamente se probará la existencia de solución minimal ya que la existencia de solución maximal se obtiene mediante argumentos análogos. Se verá que la función $U : D \to \mathbb{R}$ definida como

$$U := \sup\{ u_- \in [\alpha, \beta] \; : \; u_- \in S^-_1 \} \tag{2.17}$$

es una solución de (P_1) y así, puesto que toda solución de (P_1) es una subsolución de (P_1), resulta que U es la solución maximal de (P_1) en $[\alpha, \beta]$.

Para ello se necesita el siguiente lema que asegura que U es una subsolución de (P_1) la cual es aproximada uniformemente en D por una sucesión creciente de subsoluciones de (P_1) que pertenecen al conjunto $[\alpha, \beta]$; su demostración es similar a la del lema 2.3.2.

Lema 2.3.8 *Sea $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos tal que se verifica (H^0_1). Si $U : D \to \mathbb{R}$ es la función definida en (2.17), entonces, los siguientes enunciados son ciertos:*

i) El conjunto $[\alpha, \beta] \cap S^-_1$ es no vacío y acotado superiormente, de donde se sigue que U está bien definida.

ii) Para cada $t_1, t_2 \in D$ con $t_1 < t_2$, se tiene

$$|U(t_2) - U(t_1)| \leq \int_{[t_1, t_2)_\mathbb{T}} m_{\bar{p}}(s) \, \Delta s, \tag{2.18}$$

donde $\bar{p} = \max\{ \|\alpha\|_{C(D)}, \|\beta\|_{C(D)} \}$ y por tanto, $U \in AC(D)$.

iii) Existe una sucesión creciente $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [\alpha,\beta] \cap S_1^-$ *tal que* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* U *uniformemente en* D.

iv) $U \in S_1^-$, *con lo cual,* $U = \max\{\, u_- \in [\alpha,\beta] \ : \ u_- \in S_1^- \,\}$.

Demostración del teorema 2.3.7: Sea $R = \{t_i\}_{I\subset\mathbb{N}}$ el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de D^o. Solamente se probará que U satisface la ecuación dinámica en R ya que la demostración de que U verifica la ecuación dinámica en $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o\backslash R$ es similar a la del teorema 2.3.1. Fíjese $t_i \in R$ y supóngase que

$$U^\Delta(t_i) < f(g(t_i), U(g(t_i))). \tag{2.19}$$

Si $g = \sigma|_{[t_0,\rho(T)]_\mathbb{T}}$, entonces, de (2.19) se deduce que $U^\sigma(t_i) < \beta^\sigma(t_i)$, con lo cual, la condición ii) de (C^1) garantiza que la función $G : [U^\sigma(t_i), \beta^\sigma(t_i)] \to \mathbb{R}$ definida para cada $x \in [U^\sigma(t_i), \beta^\sigma(t_i)]$ como

$$G(x) = x - (\sigma(t_i) - t_i) f(\sigma(t_i), x) - U(t_i)$$

es continua en su dominio; además, se sabe que $G(\beta^\sigma(t_i)) \geq 0$ y, por (2.19), que $G(U^\sigma(t_i)) < 0$. Por consiguiente, el teorema de Bolzano asegura la existencia de al menos un $c \in (U^\sigma(t_i), \beta^\sigma(t_i)]$ tal que $c - (\sigma(t_i) - t_i) f(\sigma(t_i), c) = U(t_i)$; fíjese uno de ellos.

Por el contrario, si $g = Id|_{[t_0,\rho(T)]_\mathbb{T}}$, entonces, de (2.19) y (H_1^0), se obtiene que $\beta^\sigma(t_i) > U^\sigma(t_i)$ y $\beta^\sigma(t_i) > U(t_i) + (\sigma(t_i) - t_i) f(t_i, U(t_i))$ y así, $c = U(t_i) + (\sigma(t_i) - t_i) f(t_i, U(t_i)) \in (U^\sigma(t_i), \beta^\sigma(t_i))$.

Por consiguiente, definiendo $u_i : D \to \mathbb{R}$ como

$$u_i(t) = \begin{cases} U(t), & \text{si } t \in [t_0, t_i]_\mathbb{T}, \\ \\ u_i(t) = c - \displaystyle\int_{[\sigma(t_i),t)_\mathbb{T}} m_{\bar{p}}(s)\, \Delta s, & \text{si } t \in [\sigma(t_i), T]_\mathbb{T}, \end{cases}$$

con $\bar{p} = \max\{\, \|\alpha\|_{C(D)}, \|\beta\|_{C(D)} \,\}$, se sigue que $u_i \in S_1^-$ y $u_i(\sigma(t_i)) > U(\sigma(t_i))$; además, el enunciado *iii)* del lema 2.3.2 permite afirmar que la función $\bar{\alpha} := \max\{\, u_i, \alpha \,\}$ pertenece a $[\alpha,\beta] \cap S_1^-$ y $\bar{\alpha}(\sigma(t_i)) > U(\sigma(t_i))$ lo cual contradice la definición de U. $\square$

Cambiando la condición (C^1) por (B^1), los mismos argumentos usados en el teorema 2.3.5 permiten deducir el siguiente resultado de existencia y aproximación de soluciones extremales en el conjunto $[\alpha,\beta]$ como consecuencia del teorema 2.3.7 aplicado a un problema auxiliar cuya parte no lineal es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos.

Teorema 2.3.9 *Supónganse* (H_1^0), (H_1^1), (B^1) *y* (C_c^2). *Entonces, el problema* (P_1) *tiene una solución minimal,* u_*, *y una solución maximal,* u^*, *en* $[\alpha,\beta]$. *Además, se verifican las igualdades* (2.16).

2.4. Ecuaciones dinámicas con condiciones de frontera funcionales en presencia de subsoluciones y sobresoluciones

Suponiendo que f es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos o que se verifican las condiciones (B^1) y (C^2_c), entonces, se sabe que los operadores $L_2 := L_1$ y $N_2 := N_1$, con L_1 y N_1 dados en (2.2), están bien definidos y el problema (P_2) es la siguiente ecuación dinámica con condiciones de frontera funcionales:

$$(P_2)\left\{\begin{array}{ll} u^\Delta(t) = f(g(t), u(g(t))); & \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in D^o, \\ B(u(t_0), u) = 0. & \end{array}\right.$$

Se asumirán las siguientes condiciones:

(H^1_2) Existen α y β una subsolución y una sobresolución respectivamente del problema (P_2) tales que $\alpha \leq \beta$ en D.

Las hipótesis que verifica la función B permiten que el problema (P_2) cubra tanto las condiciones periódicas $u(t_0) = u(T)$ como las antiperiódicas $u(t_0) = -u(T)$; además, la dependencia funcional en la segunda variable posibilita otros tipos de condiciones de frontera no lineales como por ejemplo $u(t_0) = \max_{t \in J} u(t)$ o $u(t_0) = \int_J u^3(t)\,\Delta t$, siendo J un subconjunto $\Delta-$medible de D^o.

En la subseccion 2.4.1, usando el teorema del punto fijo de Schauder, se prueba la existencia de solución del problema (P_2). Algunos resultados de existencia en este contexto se han obtenido en [20] para la ecuación inclusión de primer orden:

$$y^\nabla(t) \in F(t, y(t)), \text{ c. t. p. } t \in [a, b]_\kappa, \quad L(y(a), y(b)) = 0,$$

con $F : [a, b]_\kappa \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \backslash \emptyset$ una aplicación multivaluada y $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que $L(x, y)$ es no creciente en $y \in [\alpha(b), \beta(b)]$, con α y β un par de subsoluciones y sobresoluciones para tal problema.

En [5, 6, 29] son probados varios resultados de unicidad de solución de problemas discretos antiperiódicos, mientras que el caso continuo ha sido tratado en [50, 51]. La subsección 2.4.2 se dedica a demostrar la unicidad de solución de una ecuación dinámica con condiciones de frontera que generalizan las antiperiódicas en presencia de un par de subsoluciones y sobresoluciones acopladas del problema y condiciones convenientes en la parte no lineal de la ecuación. Además, se construye un metodo iterativo monótono para aproximarla. Este resultado generaliza el dado por Jankowski en [63] para ecuaciones diferenciales ordinarias y son nuevos para ecuaciones en diferencias.

Finalizamos la sección obteniendo resultados de existencia y aproximación de soluciones extremales para el problema (P_2) en el sector comprendido entre una subsolución y una sobresolución análogos a los demostrados en la sección anterior para el problema (P_1), así como para el problema $(P_{(2,R)})$.

2.4.1. Existencia de solución

En esta subsección, utilizando el teorema de punto fijo de Schauder se probará la existencia de al menos una solución de la ecuación dinámica (P_2) en el conjunto $[\alpha, \beta]$ siempre que f sea una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos y se verifiquen las condiciones (H^0_1), (H^1_2) y las siguientes:

(H^2_2) Para todo $u \in [\alpha, \beta]$, con α y β dadas (H^1_2), se verifican las siguientes desigualdades:

$$B(\alpha(t_0), u) \leq 0 \leq B(\beta(t_0), u).$$

(H^3_2) $B \in C(\mathbb{R} \times C(D))$.

Se considera el siguiente problema modificado:

$$(P'_2) \begin{cases} u^\Delta(t) = F(g(t), u(g(t))); & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D^o, \\ u(t_0) = \xi(t_0, u(t_0) - B(u(t_0), u)), \end{cases}$$

donde $F, \xi : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ están definidas para cada $(t, x) \in D \times \mathbb{R}$ como

$$F(t, x) = f(t, \xi(t, x)) \quad \text{y} \quad \xi(t, x) = \text{máx}\{\alpha(t), \text{mín}\{x, \beta(t)\}\}.$$

El siguiente resultado muestra la regularidad de las funciones que definen el problema (P'_2); su demostración es inmediata a partir del lema 2.2.3.

Lema 2.4.1 *Si $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos y se verifica la hipótesis (H^1_2), entonces los siguientes enunciados son ciertos:*

1. *Para cada $x \in \mathbb{R}$, la función $\xi(\cdot, x)$ es continua en D.*
2. *La función $\xi(t, \cdot)$ es continua en $\mathbb{R}$, uniformemente en $t \in D$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces se cumple que $|\xi(t, x) - \xi(t, y)| < \varepsilon$ para todo $t \in D$.*
3. *La función ξ está acotada en $D \times \mathbb{R}$.*
4. *La función F es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory.*

Para deducir la existencia de soluciones de la ecuación dinámica (P_2) en el sector $[\alpha, \beta]$, se considera en el espacio normado $(C(D), || \cdot ||_{C(D)})$ el conjunto

$$S := \bar{B}(0, K) := \{x \in C(D) : \ \|x\|_{C(D)} \leq K\}, \tag{2.20}$$

donde

$$K := \sup\{|\xi(t, x)| : \ (t, x) \in D \times \mathbb{R}\} + ||M_{\bar{p}}||_{C(D)},$$

con

$$M_{\bar{p}}(t) = \int_{[t_0, t)_\mathbb{T}} m_{\bar{p}}(s)\, \Delta s, \quad t \in D,$$

siendo $m_{\bar{p}} : D \to \bar{\mathbb{R}}$ una función tal que $m_{\bar{p}} \in L^1_\Delta(D^o)$ y la desigualdad

$$|f(g(t), x)| \leq m_{\bar{p}}(t)$$

se verifica para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^0$ y todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq \bar{p} = \text{máx}\{ \|\alpha\|_{C(D)}, \|\beta\|_{C(D)} \}$.

Se define el operador $T : C(D) \to C(D)$ para cada $u \in C(D)$ y $t \in D$ como

$$Tu(t) := \xi(t_0, u(t_0) - B(u(t_0), u)) + \int_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} F(g(s), u(g(s)))\ \Delta s. \tag{2.21}$$

Está claro que u es un punto fijo del operador T si y sólo si u es una solución del problema (P_2').

El siguiente resultado garantiza que toda solución del problema (P_2') es una solución del problema (P_2) y pertenece al sector $[\alpha, \beta]$.

Lema 2.4.2 *Si $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos y se verifican las condiciones (H_1^0), (H_2^1) y (H_2^2), entonces, todas las soluciones de la ecuación dinámica (P_2') pertenecen la conjunto $[\alpha, \beta]$ y son soluciones del problema (P_2).*

Demostración: Sea $u : D \to \mathbb{R}$ una solución del problema (P_2').

Supóngase que es falso que $z := u - \beta \leq 0$ en D; por la definición de ξ se sabe que $z(t_0) \leq 0$, así pues, existe un $c \in D \backslash \{t_0\}$ tal que $z(c) = \text{máx}\{z(t) : t \in \mathbb{T}\} > 0$ y $z(t) < z(c)$ para todo $t \in D$ con $t < c$.

Si $\rho(c) = c$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $z(t) > 0$ para todo $t \in [c - \delta, c]_{\mathbb{T}}$ y como para $\Delta-$casi todo punto $s \in [c - \delta, c)_{\mathbb{T}}$, existe $z^\Delta(s)$ y además se verifica que

$$z^\Delta(s) \leq F(g(s), u(g(s))) - f(g(s), \beta(g(s))) = 0,$$

del teorema fundamental del cálculo se sigue que para todo $t \in [c - \delta, c)_{\mathbb{T}}$ se cumple que

$$z(c) - z(t) = \int_{[t,c)_{\mathbb{T}}} z^\Delta(s)\ \Delta s \leq 0,$$

lo cual contradice la elección de c.

Por el contrario, si $\rho(c) < c$, entonces, si $g = Id|_{[t_0,\rho(T)]_{\mathbb{T}}}$ y $u(\rho(c)) \leq \beta(\rho(c))$, de la hipótesis (H_1^0) se sigue que

$$\begin{aligned} u(c) &= u(\rho(c)) + (c - \rho(c)) f(\rho(c), \xi(\rho(c), u(\rho(c)))) \\ &\leq \xi(\rho(c), u(\rho(c))) + (c - \rho(c)) f(\rho(c), \xi(\rho(c), u(\rho(c)))) \\ &\leq \beta(\rho(c)) + (c - \rho(c)) f(\rho(c), \beta(\rho(c))) \leq \beta(c) \end{aligned}$$

que es una contradicción con la desigualdad $z(c) > 0$; mientras que si $g = Id|_{[t_0,\rho(T)]_{\mathbb{T}}}$ y $u(\rho(c)) > \beta(\rho(c))$ o $g = \sigma|_{[t_0,\rho(T)]_{\mathbb{T}}}$ se tiene que

$$z^\Delta(\rho(c)) \leq F(g(\rho(c)), u(g(\rho(c)))) - f(g(\rho(c)), \beta(g(\rho(c)))) = 0$$

lo cual contradice la desigualdad

$$z^\Delta(\rho(c)) = \frac{z(c) - z(\rho(c))}{c - \rho(c)} > 0.$$

Por consiguiente, $u \leq \beta$ en D. Análogamente se prueba que $\alpha \leq u$ en D.

Para terminar la demostración sólo falta probar que $u(t_0) - B(u(t_0), u) \in [\alpha(t_0), \beta(t_0)]$.

Si $u(t_0) - B(u(t_0), u) < \alpha(t_0)$, entonces $u(t_0) = \alpha(t_0)$ y así, $B(\alpha(t_0), u) > 0$, que es una contradicción con la hipótesis (H_2^2).

Un razonamiento similar permite probar que $u(t_0) - B(u(t_0), u) \leq \beta(t_0)$. $\square$

A continuación se prueba un resultado de existencia de solución para el problema (P_2).

Teorema 2.4.3 *Sea $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos. Supóngase la validez de las hipótesis (H_1^0), $(H_2^1) - (H_2^3)$. Entonces, el problema (P_2) tiene al menos una solución en el conjunto $[\alpha, \beta]$.*

Demostración: Puesto que f es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos y B es una aplicación continua en su dominio, del teorema de Ascoli–Arzelá se deduce que el operador $T : C(D) \to C(D)$ definido en (2.21) es completamente continuo, además se verifica que $T(S) \subset S$.

Como el conjunto S es no vacío, acotado, cerrado y convexo en $C(D)$, el teorema del punto fijo de Schauder asegura que el conjunto de puntos fijos de T es no vacío. Por consiguiente, el problema (P_2') tiene al menos una solución que, por el lema 2.4.2, es una solución de la ecuación dinámica (P_2) y pertenece al conjunto $[\alpha, \beta]$. $\square$

2.4.2. Unicidad de solución y método monótono

Esta subsección está dedicada a demostrar la unicidad de solución del siguiente caso particular de la ecuación dinámica (P_2) que generaliza las condiciones de frontera antiperiódicas:

$$(P_3) \left\{ \begin{array}{ll} u^\Delta(t) = f(g(t), u(g(t))); & \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in D^o, \\ u(t_0) = A(u(T)) & \end{array} \right.$$

donde $f : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos y $A : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$.

Definición 2.4.4 *Se dice que $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ son un* **par de subsoluciones y sobresoluciones acopladas del problema** (P_3) *si $\alpha, \beta \in AC(D)$ y se verifican las siguientes desigualdades:*

$$\left\{ \begin{array}{lll} \alpha^\Delta(t) \leq f(g(t), \alpha(g(t))) & \textit{para } \Delta - \textit{c. t. p.} \; t \in D^o; & \alpha(t_0) \leq A(\beta(T)), \\ \beta^\Delta(t) \geq f(g(t), \beta(g(t))) & \textit{para } \Delta - \textit{c. t. p.} \; t \in D^o; & \beta(t_0) \geq A(\alpha(T)). \end{array} \right.$$

Se dice que $u \in AC(D)$ es una **solución de** (P_3) *si $u(t_0) = A(u(T))$ y $u^\Delta(t) = f(g(t), u(g(t)))$ para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$.*

Se define $\lambda(g) \in \mathbb{R}$ como

$$\lambda(g) := \left\{ \begin{array}{lll} 1, & \text{si} & g = Id|_{[t_0, \rho(T)]_\mathbb{T}}, \\ & & \\ -1, & \text{si} & g = \sigma|_{[t_0, \rho(T)]_\mathbb{T}}. \end{array} \right. \tag{2.22}$$

Para probar la unicidad del problema (P_3) se asumen las siguientes condiciones:

(H_3^1) Existen α y β un par de subsoluciones y sobresoluciones acopladas del problema (P_3) tales que $\alpha \leq \beta$ en D.

(H_3^2) La función A es continua y decreciente en $[\alpha(T), \beta(T)]$, con α y β dadas en (H_3^1).

(H_3^3) Existe una función $l : D \to \bar{\mathbb{R}}$ tal que $l \in L^1_\Delta(D^o)$ y para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ se verifica que $1 + \lambda(g)\,(\sigma(t) - t)\,l(t) > 0$, con $\lambda(g)$ definida en (2.22), y para todo $x, y \in [\alpha(g(t)), \beta(g(t))]$ con $x \leq y$ se cumple

$$f(g(t), y) - f(g(t), x) \leq l(t)\,(y - x),$$

con α y β dadas en (H_3^1).

Nota 2.4.5 *Si $l : D \to \bar{\mathbb{R}}$ es tal que para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ se verifica que $1 + \lambda(g)(\sigma(t) - t)l(t) > 0$, con $\lambda(g)$ definida en* (2.22)*, entonces la función $\varphi(l) : D \to \bar{\mathbb{R}}$ definida para cada $t \in D$ como*

$$\varphi(l)(t) := \begin{cases} l(t), & si \quad g = Id|_{[t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}}}, \\ \\ \dfrac{l(t)}{1 - (\sigma(t) - t)l(t)}, & si \quad g = \sigma|_{[t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}}}, \end{cases} \tag{2.23}$$

verifica que $1 + (\sigma(t) - t)\varphi(l)(t) > 0$ para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$.

El resultado de existencia y unicidad de solución del problema (P_3) es el siguiente.

Teorema 2.4.6 *Sea $f : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos.*

Si se verifican las condiciones (H_1^0) y $(H_3^1) - (H_3^3)$, entonces, el problema (P_3) tiene una única solución en el conjunto $[\alpha, \beta]$.

Demostración: Como el problema (P_3) es un caso particular del problema (P_2) con $B(x, u) := x - A(u(T))$ y de las condiciones (H_3^1) y (H_3^2) se deducen las condiciones $(H_2^1) - (H_2^3)$, la existencia de al menos una solución del problema (P_3) en el sector $[\alpha, \beta]$ está asegurada por el teorema 2.4.3.

A continuación se probará la unicidad de solución; supóngase que el problema (P_3) tiene al menos dos soluciones distintas u y $\bar{u}$ en $[\alpha, \beta]$.

Si $u(t_0) \neq \bar{u}(t_0)$, entonces, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $u(t_0) > \bar{u}(t_0)$ de donde se sigue que $A(u(T)) = u(t_0) > \bar{u}(t_0) = A(\bar{u}(T))$ y como la función A es decreciente en $[\alpha(T), \beta(T)]$, se cumple que $u(T) < \bar{u}(T)$.

Por lo tanto, existe $t_1 \in D^o$ tal que $u(t) < \bar{u}(t)$ para todo $t \in (t_1, T]$ y $u(t_1) = \bar{u}(t_1)$ o $u(\rho(t_1)) > \bar{u}(\rho(t_1))$ y $u(t_1) < \bar{u}(t_1)$, con lo cual, de la hipótesis

(H_3^3) se deduce que la función $\bar{u} - u$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (\bar{u}-u)^{\Delta}(t) - l(t)(\bar{u}-u)(g(t)) = r(t) \le 0; & \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in [t_2, T)_{\mathbb{T}}, \\ (\bar{u}-u)(t_2) = \tilde{k} \le 0, \end{cases}$$

donde t_2 denota $\rho(t_1)$ o t_1 según corresponda. Se sabe, por la nota 2.4.5, que la condición (H_3^3) establece que $1 + (\sigma(t) - t)\varphi(l)(t) > 0$ para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$, con $\varphi(l)$ definida en (2.23), por lo que, de los teoremas 1.2.26 y 1.2.28, se deduce que para todo $t \in [t_2, T]$ se cumple que

$$(\bar{u}-u)(t) = e_{\varphi(l)}(t, t_2)\,(\bar{u}-u)(t_1) + \int_{[t_2,t)_{\mathbb{T}}} e_{\varphi(l)}(t, \sigma(s))\, r(s)\ \Delta s$$

y como $1 + (\sigma(t) - t)\varphi(l)(t) > 0$ para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$, el teorema 1.2.24 afirma que $e_{\varphi(l)} > 0$ en $D \times D$, por lo tanto, se tiene que

$$(\bar{u}-u)(t) \le 0 \quad \text{para todo } t \in [t_2, T]_{\mathbb{T}};$$

en particular, se verifica que $\bar{u}(T) \le u(T)$ lo cual contradice la desigualdad $u(T) < \bar{u}(T)$.

Por el contrario, si $u(t_0) = \bar{u}(t_0)$, como u y $\bar{u}$ son distintas, entonces, existen $t_3, t_4 \in (t_0, T]_{\mathbb{T}}$, con $t_3 < t_4$, tales que $u < \bar{u}$ en $(t_3, t_4]$ y $u(t_3) = \bar{u}(t_3)$ o $u(t_3) < \bar{u}(t_3)$ y $u(\rho(t_3)) > \bar{u}(\rho(t_3))$. Así pues, procediendo como en el caso anterior se prueba que $\bar{u}(t_4) \le u(t_4)$ que es una contradicción con la elección del punto t_4.

Por consiguiente, el problema (P_3) tiene una única solución en $[\alpha, \beta]$. $\square$

A continuación se propone un método iterativo para aproximar la única solución del problema (P_3) en el conjunto $[\alpha, \beta]$, asumiendo las siguientes condiciones:

(H_3^4) Existe una constante $L > 0$ tal que para todo $x, y \in [\alpha(g(t)), \beta(g(t))]$ con $x \le y$ se cumple

$$f(g(t), y) - f(g(t), x) \ge -L\,(y - x),$$

con α y β dadas en (H_3^1) y si $g = Id|_{[t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}}}$, entonces, para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ se cumple que $1 - (\sigma(t) - t)\,L > 0$.

(H_3^5) Existe una constante $N > 0$ tal que $N\, e_{\varphi(l)}(T, t_0) < 1$, con l dada en (H_3^3) y $\varphi(l)$ definido en (2.23), y para todo $x, y \in [\alpha(T), \beta(T)]$ con $x \le y$ se verifica

$$A(y) - A(x) \ge -N\,(y - x)$$

con α y β dadas en (H_3^1).

Teorema 2.4.7 *Si $f : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función $L^1_{\Delta}-$Carathéodory en compactos y se verifican las condiciones (H_1^0) y $(H_3^1) - (H_3^5)$, entonces, existen dos sucesiones monótonas $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\alpha =: v_0 \le v_n \le w_n \le w_0 := \beta$ en D y convergen en $C(D)$ a la única solución del problema (P_3) en el conjunto $[\alpha, \beta]$.*

Demostración: Para cada $\eta,\ \xi \in [\alpha,\beta]$ se considera el problema de valor inicial

$$(P_{(\eta,\xi)}) \begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(g(t),\eta(g(t))) + L\,(\eta-u)(g(t));\ \ \Delta-\text{c. t. p. }\ t\in D^o, \\ u(t_0) = A(\xi(T)) \end{cases}$$

y se define $G_\eta : D\times\mathbb{R}\to\bar{\mathbb{R}}$ para cada $(t,x)\in D\times\mathbb{R}$ como

$$G_\eta(t,x) := f(t,\eta(t)) + L(\eta(t)-x)$$

que, por el lema 2.2.3, es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos.

Para cada $\eta,\ \xi\in[\alpha,\beta]$ de las condiciones (H_3^2) y (H_3^4) se obtiene que

$$\begin{array}{lllll} \alpha^{\Delta}(t) & \le & f(g(t),\alpha(g(t))) & \le & G_\eta(g(t),\alpha(g(t))); \qquad \Delta-\text{c. t. p. }\ t\in D^o, \\ \alpha(t_0) & \le & A(\beta(T)) & \le & A(\xi(T)), \\ \beta^{\Delta}(t) & \ge & f(g(t),\beta(g(t))) & \ge & G_\eta(g(t),\beta(g(t))); \qquad \Delta-\text{c. t. p. }\ t\in D^o, \\ \beta(t_0) & \ge & A(\alpha(T)) & \ge & A(\xi(T)). \end{array}$$

Por consiguiente, el teorema 2.4.6 establece la unicidad de solución del problema $(P_{(\eta,\xi)})$ en $[\alpha,\beta]$.

Sean v_1 y w_1 las únicas soluciones de los problemas $(P_{(\alpha,\beta)})$ y $(P_{(\beta,\alpha)})$ en $[\alpha,\beta]$ respectivamente.

Se verá que $v_1\le w_1$ en D. De la condición (H_3^4) se deduce que v_1-w_1 es una solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (v_1-w_1)^{\Delta}(t) + L(v_1-w_1)(g(t)) = r(t)\le 0; \qquad \Delta-\text{c. t. p. }\ t\in D^o, \\ (v_1-w_1)(t_0) = k_0\le 0. \end{cases}$$

Como de la condición (H_3^4) y la nota 2.4.5 se sigue que para $\Delta-$casi todo punto $t\in D^o$ se cumple que $1+(\sigma(t)-t)\,\varphi(-L)(t)>0$, con $\varphi(-L)$ definida en (2.23), de los teoremas 1.2.26 y 1.2.28 se obtiene que para todo $t\in D$ se verifica que

$$(v_1-w_1)(t) = e_{\varphi(-L)}(t,t_0)\,(v_1-w_1)(t_0) + \int_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} e_{\varphi(-L)}(t,\sigma(s))\,r(s)\ \Delta s;$$

y dado que $1+(\sigma(t)-t)\varphi(-L)(t)>0$ para $\Delta-$casi todo punto $t\in D^o$, el teorema 1.2.24 asegura que $e_{\varphi(-L)}>0$ en $D\times D$ y así, $v_1-w_1\le 0$ en D.

Además, como las condiciones (H_3^2) y (H_3^4) garantizan que v_1 y w_1 son un par de subsoluciones y sobresoluciones acopladas del problema (P_3), por lo anterior se sabe que para cada $\eta,\ \xi\in[v_1,w_1]$, el problema $(P_{(\eta,\xi)})$ tiene una única solución en $[v_1,w_1]$.

Para cada $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 1$ se definen recursivamente v_{n+1} y w_{n+1} como las únicas soluciones de los problemas $(P_{(v_n,w_n)})$ y $(P_{(w_n,v_n)})$, respectivamente, en $[v_n,w_n]$; procediendo como en el caso anterior, se prueba que

$$\alpha =: v_0\le v_n\le v_{n+1}\le w_{n+1}\le w_n\le z_0 := \beta \qquad \text{en } D,$$

con lo cual, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen puntualmente en D a v y w respectivamente y se verifica que $\alpha \leq v \leq w \leq \beta$ en D, por lo tanto, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen en $C(D)$ a v y w respectivamente y se verifica que

$$v^{\Delta}(t) = f(g(t), v(g(t))) \quad \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D, \qquad v(t_0) = A(w(T))$$

y

$$w^{\Delta}(t) = f(g(t), w(g(t))) \quad \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D, \qquad w(t_0) = A(v(T)).$$

Para finalizar se probará que $v = w$ en D de donde se concluye que $v = w$ es la única solución del problema (P_3). De la condición (H_3^3) se obtiene que

$$(w-v)^{\Delta}(t) \leq l(t)\,(w-v)(g(t)) \qquad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D^o$$

y dado que para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ se cumple que $1+(\sigma(t)-t)\,\varphi(l)(t) > 0$, con $\varphi(l)$ definida en (2.23), los teoremas 1.2.26 y 1.2.28 garantizan que

$$0 \leq (w-v)(t) \leq e_{\varphi(l)}(t, t_0)\,(w-v)(t_0) \qquad \text{para todo } t \in D,$$

con lo cual, de (H_3^5) resulta que

$$0 \leq (w-v)(t_0) = A(v(T)) - A(w(T)) \leq N\,(w-v)(T) \leq N\,e_{\varphi(l)}(T, t_0)\,(w-v)(t_0),$$

así pues, la condición (H_3^5) permite afirmar que $(w-v)(t_0) = 0$ y por consiguiente se concluye que $v = w$ en D. $\square$

2.4.3. Existencia y aproximación de soluciones extremales

Los resultados de existencia y aproximación de soluciones extremales para el problema (P_1) en el sector comprendido entre una subsolución y una sobresolución demostrados en la sección anterior permiten probar los análogos para el problema (P_2) sin más que suponer que f verifica las condiciones (B^1) y (C_c^2), que se cumple la condición (H_2^1) y la función B satisface la siguiente hipótesis:

$(\tilde{H}_2^2)$ Para cada $x \in [\alpha(t_0), \beta(t_0)]$, con α y β dadas (H_2^1), la función $B(x, \cdot)$ es decreciente en $[\alpha, \beta]$ y para todo $v \in [\alpha, \beta]$ se cumple que

$$\liminf_{y\to x^-} B(y, v) \geq B(x, v) \geq \limsup_{y \to x^+} B(y, v).$$

Para probar los resultados es necesario el siguiente lema.

Lema 2.4.8 *[30, Lema 4.1] Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$ y $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función para la que se verifica que $\psi(a) \leq 0 \leq \psi(b)$ y*

$$\liminf_{y\to x^-} \psi(y) \geq \psi(x) \geq \limsup_{y\to x^+} \psi(y), \qquad \textit{para todo } x \in [a, b].$$

Entonces, existen $c_1, c_2 \in [a, b]$ tales que $\psi(c_1) = 0 = \psi(c_2)$ y si $\psi(c) = 0$ para algún $c \in [a, b]$ entonces

$$c_1 \leq c \leq c_2,$$

es decir, c_1 y c_2 son el menor y el mayor cero de ψ en $[a, b]$ respectivamente.

Teorema 2.4.9 *Supónganse* (B^1), (C^2), (H_1^0), (H_2^1) *y* $(\tilde{H}_2^2)$. *Entonces,* (P_2) *tiene una solución minimal,* u_*, *y una solución maximal,* u^*, *en* $[\alpha, \beta]$. *Además, se verifican las siguientes igualdades:*

$$u_* = \text{mín}\{\, u_+ \in [\alpha, \beta] \; : \; u_+ \in S_2^+ \,\} \quad y \quad u^* = \text{máx}\{\, u_- \in [\alpha, \beta] \; : \; u_- \in S_2^- \,\}. \tag{2.24}$$

Demostración: Solamente se probará la existencia de solución minimal ya que con argumentos similares se obtiene la existencia de solución maximal.

Por las hipótesis (H_2^1) y $(\tilde{H}_2^2)$ se sabe que para cada $v \in [\alpha, \beta]$, es cierto que

$$B(\alpha(t_0), v) \leq B(\alpha(t_0), \alpha) \leq 0 \leq B(\beta(t_0), \beta) \leq B(\beta(t_0), v)$$

con lo cual, la condición $(\tilde{H}_2^2)$ y el lema 2.4.8 garantizan la existencia del menor cero τ_v de $B(\cdot, v)$ en $[\alpha(t_0), \beta(t_0)]$.

Además, α y β son una subsolución y una sobresolución respectivamente del problema inicial

$$(P_{\tau_v}) \begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(g(t), u(g(t))); & \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in D^o, \\ u(t_0) = \tau_v \end{cases}$$

y así, el teorema 2.3.9 establece la existencia de solución minimal de dicho problema en $[\alpha, \beta]$ y la primera igualdad de (2.16) es válida.

Sea $G : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ definida para cada $v \in [\alpha, \beta]$ como

$$Gv := \text{la solución minimal de } (P_{\tau_v}) \text{ en } [\alpha, \beta].$$

Se verá que G es creciente. Sean $v_1, v_2 \in [\alpha, \beta]$ tales que $v_1 \leq v_2$, de la condición $(\tilde{H}_2^2)$ se sigue que

$$B(x, v_1) \geq B(x, v_2) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

de donde se deduce que $\tau_{v_1} \leq \tau_{v_2}$ y por tanto, Gv_2 es una sobresolución del problema $(P_{\tau_{v_1}})$; así pues, la igualdad (2.16) permite afirmar que $Gv_1 \leq Gv_2$ en D.

Dado que G aplica sucesiones monótonas en sucesiones convergentes, [57, Teorema 1.2.2] asegura que G tiene un punto fijo minimal u_* en $[\alpha, \beta]$ el cual satisface la igualdad

$$u_* = \text{mín}\,\{\, v \in [\alpha, \beta] \; : \; Gv \leq v \text{ en } D \,\}\,. \tag{2.25}$$

Para finalizar se probará que u_* es la solución minimal de (P_2) en $[\alpha, \beta]$ y que verifica la primera igualdad de (2.24).

Por la definición de G se sabe que u_* es una solución de (P_2). Si $u^+ \in [\alpha, \beta]$ es una sobresolución de (P_2), entonces $u^+(t_0) \geq \tau_{u^+}$ lo cual garantiza que u^+ es una sobresolución del problema inicial $(P_{\tau_{u^+}})$.

Como consecuencia de la definición de G y de la igualdad (2.16) se tiene que $Gu^+ \leq u^+$ en D y así, de la igualdad (2.25) se deduce que $u_* \leq u^+$ en D.

Además, como $u_* \in [\alpha, \beta]$ es una solución de (P_2), se sabe que $u_* \in S_2^+$, con lo cual, se concluye que la primera igualdad de (2.24) es válida. $\square$

Puesto que si f es una función $L^1_\Delta-$ Carathéodory en compactos, entonces, razonando como en el lema 2.2.3, se deduce la validez de la condición (B^1), como consecuencia del teorema 2.4.9 se obtiene la siguiente generalización del teorema 2.3.7 para el caso de condiciones de frontera funcionales.

Corolario 2.4.10 *Sea $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos.*

Si se verifican las condiciones (H_1^0), (H_2^1) y $(\tilde{H}_2^2)$, entonces, (P_2) tiene una solución minimal, u_*, y una solución maximal, u^*, en $[\alpha, \beta]$. Además, se verifican las igualdades (2.24)*.*

2.4.4. Subsoluciones y sobresoluciones en orden inverso

En esta subsección se probará la existencia y aproximación de soluciones extremales del problema $(P_{(2,R)})$ en el conjunto $[\beta, \alpha]$ suponiendo que se verifican las siguientes condiciones:

$(H^1_{(2,R)})$ Existen α y β una subsolución y una sobresolución respectivamente del problema $(P_{(2,R)})$ tales que $\beta \leq \alpha$ en D.

$(H^2_{(2,R)})$ Para cada $x \in [\beta(t_0), \alpha(t_0)]$, con α y β dadas en $(H^1_{(2,R)})$, $B_R(x, \cdot)$ es creciente en $[\beta, \alpha]$ y para todo $v \in [\beta, \alpha]$ se cumple que

$$\limsup_{y \to x^-} B_R(v, y) \leq B_R(v, x) \leq \liminf_{y \to x^+} B_R(y, v).$$

Con las definiciones de los operadores L_2 y N_2 dadas anteriormente, el problema $(P_{(2,R)})$ es el siguiente:

$$(P_{(2,R)}) \begin{cases} u^\Delta(t) = f(g(t), u(g(t))); & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D^o, \\ B_R(u, u(T)) = 0. \end{cases}$$

Se verá que este problema es equivalente, mediante un cambio de variables, a un problema del tipo de (P_2), para ello se considera la siguiente ecuación dinámica:

$$(\tilde{P}_{(2,R)}) \begin{cases} w^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \tilde{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), w(\tilde{g}(\tilde{t}))); & \tilde{\Delta} - \text{c. t. p. } \ \tilde{t} \in \tilde{D}^o, \\ \tilde{B}_R(w(-t_0), w) = 0, \end{cases}$$

donde $\tilde{f} : \tilde{D} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida para cada $(\tilde{t}, x) \in \tilde{D} \times \mathbb{R}$ como $\tilde{f}(\tilde{t}, x) := -f(-\tilde{t}, x)$, $\tilde{D} := [-T, -t_0]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, $\tilde{\mathbb{T}} := -\mathbb{T}$, $\tilde{g} : [-T, -\sigma(t_0)]_{\tilde{\mathbb{T}}} \to \tilde{D}$ está definida como

$$\tilde{g} := \begin{cases} \tilde{\sigma}|_{[-T, -\sigma(t_0)]_{\tilde{\mathbb{T}}}}, & \text{si } g = Id|_{[t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}}}, \\ \\ Id|_{[-T, -\sigma(t_0)]_{\tilde{\mathbb{T}}}}, & \text{si } g = \sigma|_{[t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}}}, \end{cases}$$

y $\tilde{B}_R : \mathbb{R} \times C(\tilde{D}) \to \mathbb{R}$ está dada para cada $(x, \tilde{w}) \in \mathbb{R} \times C(\tilde{D})$ por $\tilde{B}_R(x, \tilde{w}) := -B_R(w, x)$, con $w : D \to \mathbb{R}$ definida para cada $t \in D$ como $w(t) = \tilde{w}(-t)$.

Los dos problemas anteriores son equivalentes como muestra el siguiente resultado cuya demostración es una consecuencia inmediata de las anteriores definiciones y de la caracterización de la $\Delta-$medida establecida en la proposición 1.3.1.

Proposición 2.4.11 *Sea $u : D \to \mathbb{R}$. Entonces, u es una subsolución, una sobresolución o una solución de $(P_{(2,R)})$ si y sólo si la función $\tilde{u} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$, con $\tilde{D} := [-T, -t_0]_{\tilde{\mathbb{T}}}$ y $\tilde{\mathbb{T}} := -\mathbb{T}$, definida para cada $\tilde{t} \in \tilde{D}$ como $\tilde{u}(\tilde{t}) := u(-t)$ es una sobresolución, una subsolución o una solución de $(\tilde{P}_{(2,R)})$ respectivamente.*

La propiedad anterior permite probar la existencia y aproximación de soluciones extremales de $(P_{(2,R)})$ en el conjunto $[\beta, \alpha]$ bajo las siguientes condiciones:

$(H^0_{(2,R)})$ Si $g = \sigma|_{[t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}}}$, entonces, para cada punto aislado por la derecha $t \in D^o$, la función definida para cada $x \in \mathbb{R}$ como $x + (\sigma(t) - t)f(t, x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

(B^1_R) i) Para cada $u \in AC(D)$, $f(\cdot, u(\cdot))$ es $\Delta-$medible en D.

ii) Para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\liminf_{y \to x^-} f(g(t), y) \geq f(g(t), x) \geq \limsup_{y \to x^+} f(g(t), y).$$

Las caracterizaciones de la $\Delta-$medida y de la $\Delta-$integral dadas en las proposiciones 1.3.1 y 1.3.12 respectivamente garantizan que si se verifican las condiciones (B^1_R), (C^2_c) y $(H^0_{(2,R)}) - (H^2_{(2,R)})$, entonces, las condiciones (B^1), (C^2_c), (H^0_1), (H^1_2) y $(\tilde{H}^2_2)$ son válidas para el problema $(\tilde{P}_{(2,R)})$, con lo cual, como consecuencia del teorema 2.4.9 y de la proposición 2.4.11 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.4.12 *Supónganse las condiciones $(H^0_{(2,R)}) - (H^2_{(2,R)})$, (B^1_R) y (C^2_c). Entonces, $(P_{(2,R)})$ tiene una solución minimal, u_*, y una solución maximal, u^*, en $[\beta, \alpha]$. Además, la siguientes igualdades son ciertas:*

$$u_* = \text{mín}\{u_- \in [\beta, \alpha] : u_- \in S^-_{(2,R)}\} \text{ y } u^* = \text{máx}\{u_+ \in [\beta, \alpha] : u_+ \in S^+_{(2,R)}\},$$

Para finalizar, señalar que dado que si f es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos, entonces se cumple la condición (B^1_R), el resultado anterior se verifica reemplazando la segunda condición por la primera.

2.5. Ecuaciones dinámicas funcionales en presencia de subsoluciones y sobresoluciones

En esta sección se estudia la ecuación dinámica (P_i) para cada $i \in \{4, 5, 6\}$; se probará la existencia y aproximación de soluciones extremales de (P_i) en un conjunto $V_i \subset [\alpha, \beta]$ asumiendo las siguientes condiciones:

(H_i^1) Existen α y β una subsolución y una sobresolución respectivamente de (P_i) tales que $\alpha \leq \beta$ en D.

(H_i^2) Para cada $x \in [\alpha(t_0), \beta(t_0)]$, con α y β dadas en (H_i^1), $B(x, \cdot)$ es decreciente en $[\alpha, \beta]$ y para cada $v \in [\alpha, \beta]$ se cumple que

$$\liminf_{y \to x^-} B(y, v) \geq B(x, v) \geq \limsup_{y \to x^+} B(y, v).$$

2.5.1. Ecuación dinámica funcional

Esta subsección está dedicada a deducir, supuestas las condiciones (H_4^1) y (H_4^2), la existencia de soluciones extremales por aproximación de la ecuación dinámica funcional (P_4) que se detallará a continuación.

Para definir (P_4), se considera $h : D \times \mathbb{R} \times C(D) \to \bar{\mathbb{R}}$ una función verificando las siguientes hipótesis:

(H_4^3) Si $g = Id|_{[t_0, \rho(T)]_{\mathbb{T}}}$, entonces, para cada punto aislado por la derecha $t \in D^o$ y cada $v \in C(D)$, la función definida para cada $x \in \mathbb{R}$ como $x + (\sigma(t) - t)h(t, x, v)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

(H_4^4) Para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in \mathbb{R}$, $h(g(t), x, \cdot)$ es creciente en $[\alpha, \beta]$, con α y β dadas en (H_4^1).

(C_4^1) Para cada $v \in C(D)$, $h(\cdot, \cdot, v)$ es una función de Carathéodory.

(C_4^2) Para cada $p > 0$ existe $m_p : D \to [0, +\infty]$ tal que $m_p \in L_\Delta^1(D^o)$ y

$$|h(g(t), x, v)| \leq m_p(t)$$

para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$, todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x| \leq p$ y todo $v \in C(D)$ con $\|v\|_{C(D)} \leq p$.

(B_4^1) Para cada $v \in C(D)$, $h(\cdot, \cdot, v)$ satisface la condición (B^1).

Las condiciones anteriores garantizan que los operadores $L_4 := L_1$, L_1 dado en (2.2), y $N_4 : AC(D) \to L_\Delta^1(D^o)$ dado para cada $u \in AC(D)$ y para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ por $N_4 u(t) := h(g(t), u(g(t)), u)$ están bien definidos; así pues, el problema (P_4) es la siguiente ecuación dinámica funcional con condiciones de frontera funcionales:

$$(P_4) \left\{ \begin{array}{ll} u^\Delta(t) = h(g(t), u(g(t)), u); & \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in D^o, \\ B(u(t_0), u) = 0. & \end{array} \right.$$

El primer resultado relacionado con (P_4) es el siguiente.

Teorema 2.5.1 *Asúmanse las condiciones (H_4^1)$-$(H_4^4), (B_4^1) y (C_4^2). Entonces, (P_4) tiene una solución minimal, u_*, y una solución maximal, u^*, en $[\alpha, \beta]$. Además, se verifican las siguientes igualdades:*

$$u_* = \min\{\, u_+ \in [\alpha, \beta] \,:\, u_+ \in S_4^+ \,\} \quad y \quad u^* = \max\{\, u_- \in [\alpha, \beta] \,:\, u_- \in S_4^- \,\}.$$

Demostración: A causa de la similitud entre la demostración de la existencia de solución minimal y maximal, solamente se deducirá la primera de ellas.

Para cada $v \in [\alpha, \beta]$, se considera la siguiente ecuación dinámica:

$$(P_4^v) \begin{cases} u^{\Delta}(t) = h(g(t), u(g(t)), v); & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D^o, \\ B(u(t_0), u) = 0; \end{cases}$$

nótese que este problema es del tipo (P_2) estudiado en la sección anterior.

Las condiciones (H_4^1) y (H_4^4) garantizan que α y β son una subsolución y una sobresolución respectivamente de (P_4^v) y puesto que se verifican las condiciones (H_4^2), (H_4^3), (B_4^1) y (C_4^2), el teorema 2.4.9 establece la existencia de solución minimal del problema (P_4^v) en $[\alpha, \beta]$ para la cual se verifica la primera igualdad de (2.24).

Definiendo $H : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ para cada $v \in [\alpha, \beta]$ como

$$Hv := \text{la solución minimal de } \ (P_4^v) \text{ en } [\alpha, \beta]$$

y procediendo de un modo análogo a como se hizo en la demostración del teorema 2.4.9 se obtiene el resultado. □

Nótese que, como de (C_4^1) se deduce (B_4^1), del teorema 2.5.1 se obtiene el resultado análogo reemplazando (B_4^1) por (C_4^1).

En el siguiente ejemplo se demuestra la existencia y aproximación de soluciones extremales de una ecuación dinámica funcional definida sobre el conjunto ternario de Cantor unión una cantidad finita de intervalos cerrados disjuntos.

Ejemplo 2.5.2 *Sean C el conjunto ternario de Cantor, $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$ fijado y* $\mathbb{T} = C \cup \left[4/3^2, 5/3^2\right] \cup \bigcup_{n=3}^{m} \{ [4/3^n, 5/3^n] \cup [2/3 + 4/3^n, 2/3 + 5/3^n] \}.$

Considérese la siguiente ecuación dinámica funcional:

$$\begin{cases} u^{\Delta}(t) = h(\sigma(t), u(\sigma(t)), u); & \Delta - c. \ t. \ p. \ \ t \in [0,1)_{\mathbb{T}}, \\ \\ u(0) = \min\limits_{t \in \mathbb{T}} u(t), \end{cases} \tag{2.26}$$

donde $h : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times C(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ está dada para $\Delta-$casi todo punto $t \in [0,1)_{\mathbb{T}}$ y todo $(x, v) \in \mathbb{R} \times C(\mathbb{T})$ por

$$h(t, x, v) = \frac{x - x^2}{\sqrt{t}} \cdot \exp\left(\max_{t \in \mathbb{T}} v(t) - \frac{1}{2} - \int_{[0,1)_{\mathbb{T}}} \frac{\max_{r \in [0,s]_{\mathbb{T}}} \{1, -v(r)\}}{\sqrt{s}} \ \Delta s \right).$$

Las funciones $\alpha, \beta : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definidas para cada $t \in \mathbb{T}$ como

$$\alpha(t) := \frac{1}{4} \quad y \quad \beta(t) := \frac{1}{2} + \int_{[0,t)_{\mathbb{T}}} \frac{1}{\sqrt{s}} \ \Delta s$$

son una subsolución y una sobresolución respectivamente de la ecuación dinámica (2.26) tales que $\alpha \leq \beta$ en D. Además, no es difícil verificar las condiciones (H_4^2), (H_4^4), (C_4^1) y (C_4^2), con lo cual, el teorema 2.5.1 garantiza la existencia de soluciones extremales de (2.26) en $[\alpha, \beta]$ las cuales verifican las igualdades allí expresadas.

2.5.2. Ecuación dinámica funcional implícita

Usaremos algunos de los resultados de existencia de solución para ecuaciones de operadores definidos sobre espacios de Banach ordenados probados en [35] junto con los resultados de existencia de soluciones extremales para el problema (P_2) demostrados en la sección anterior para deducir la existencia de soluciones extremales de la ecuación dinámica funcional implícita (P_5) asumiendo las condiciones (H_5^1) y (H_5^2).

Inicialmente se definirán los operadores L_5 y N_5. Suponiendo que $f : D\times\mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ es o bien una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos o tal que se verifican las condiciones (B^1) y (C_c^2), entonces, el operador $L_5 : AC(D) \to L^1_\Delta(D^o)$ dado para cada $u \in AC(D)$ y para $\Delta-$casi todo $t \in D^o$ por

$$L_5u(t) := u^\Delta(t) - f(g(t), u(g(t))) \tag{2.27}$$

está bien definido.

Sea $F : D \times AC(D) \times L^1_\Delta(D^o) \to \bar{\mathbb{R}}$ una función para la que se verifican las siguientes condiciones:

(H_5^3) Para cada $(u, v) \in AC(D) \times L^1_\Delta(D^o)$, $F(\cdot, u, v)$ es $\Delta-$medible en D y existe una función $M : D \to [0, +\infty]$ tal que $M \in L^1_\Delta(D^o)$ y

$$|F(g(t), u, v)| \leq M(t)$$

para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $(u, v) \in AC(D) \times L^1_\Delta(D^o)$.

(H_5^4) Para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$, $F(g(t), \cdot, \cdot)$ es una función creciente en $AC(D) \times L^1_\Delta(D^o)$.

Así pues, el operador $N_5 : AC(D) \to L^1_\Delta(D^o)$ dado para cada $u \in AC(D)$ y para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ por

$$N_5u(t) := F(g(t), u, L_5u) \tag{2.28}$$

está bien definido y el problema (P_5) es la siguiente ecuación dinámica funcional implícita:

$$(P_5)\begin{cases} L_5u(t) = F(g(t), u, L_5u); & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D^o, \\ B(u(t_0), u) = 0. \end{cases}$$

Asúmase la siguiente hipótesis:

(H_5^5) Para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$, $h_-(t) := L_5\alpha(t) \leq L_5\beta(t) =: h_+(t)$, con α y β dadas en (H_5^1).

Considérense los conjuntos dados por

$$Z := \{\, u \in AC(D) \ : \ u \in [\alpha, \beta], \ L_5u \in [h_-, h_+] \,\} \tag{2.29}$$

y

$$V := \{\, u \in Z \ : \ B(u(t_0), u) = 0 \,\}; \tag{2.30}$$

como consecuencia de las hipótesis y definiciones anteriores se prueba el siguiente resultado.

Proposición 2.5.3 *Supónganse las condiciones* (H_5^3), (H_5^5), (B^1) *y* (C_c^2), *sean* L_5, $N_5 : AC(D) \to L^1_\Delta(D^o)$ *definidos en* (2.27) *y* (2.28) *respectivamente y sean* Z, V *definidos en* (2.29) *y* (2.30) *respectivamente.*

Entonces, $u \in Z$ *es una solución de* (P_5) *si y sólo si* $u \in V$ *y* $L_5u(t) = N_5u(t)$ *para* $\Delta-$*casi todo punto* $t \in D^o$.

Se necesitan los siguientes lemas.

Lema 2.5.4 *Si se verifican las condiciones* $(H_5^1) - (H_5^5)$, (H_1^0), (B^1) *y* (C_c^2), *entonces los siguientes enunciados son ciertos:*

i) *Si* $u, v \in V$ *son tales que* $u \leq v$ *y* $L_5u \leq L_5v$, *entonces,* $h_- \leq N_5u \leq N_5v \leq h_+$.

ii) *El conjunto* V *es no vacío y la ecuación* $L_5u = h$ *tiene para cada* $h \in [h_-, h_+]$ *soluciones extremales en* V *y son crecientes con respecto a* h.

iii) *Sucesiones monótonas de* $N_5[V]$ *convergen en* $L^1_\Delta(D^o)$.

Demostración: Sean $u, v \in V$ tales que $u \leq v$ y $L_5u \leq L_5v$. Por (H_5^1), (H_5^4) y (H_5^5) se tiene que para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ se cumple que

$$\begin{aligned} L_5\alpha(t) \ &\leq \ F(g(t), \alpha, L_5\alpha) \ \leq \ F(g(t), u, L_5u) \ \leq \ F(g(t), v, L_5v) \\ &\leq \ F(g(t), \beta, L_5\beta) \ \leq \ L_5\beta(t), \end{aligned}$$

de modo que, de (2.28), se sigue la afirmación *i)*.

Para cada $h \in [h_-, h_+]$, considérese el problema

$$(P_5^h) \begin{cases} u^\Delta(t) = f(g(t), u(g(t))) + h(t); & \Delta - \text{c t. p. } \ t \in D^o, \\ B(u(t_0), u) = 0, \end{cases}$$

que es del tipo (P_2) estudiado anteriormente.

Las condiciones (H_5^1) y (H_5^5) permiten afirmar que α y β son una subsolución y una sobresolución de (P_5^h) respectivamente, con lo cual, como se verifican las condiciones (B^1), (C_c^2), (H_1^0) y (H_5^2), el teorema 2.4.9 establece que (P_5^h) tiene una solución minimal, u_h, y una solución maximal, u^h, en $[\alpha, \beta]$ que son el mínimo y el máximo de sobresoluciones y subsoluciones respectivamente de (P_5^h) en $[\alpha, \beta]$. Por lo tanto, la definición de L_5, (2.27), y la igualdad $L_5u_h = L_5u^h = h \in [h_-, h_+]$ garantizan que el conjunto V es no vacío y que la ecuación $L_5u = h$ tiene soluciones extremales en V.

A continuación se verá que las soluciones minimales de la ecuación $L_5u = h$ son crecientes con respecto a h; mediante un argumento análogo se deduce el mismo resultado para las soluciones maximales.

Sean h_1, $h_2 \in [h_-, h_+]$ tales que $h_1 \leq h_2$ en D y sean u_1, u_2 las soluciones minimales de la ecuación $L_5u = h$ para $h = h_1$ y $h = h_2$ respectivamente en V. Por consiguiente, u_1 y u_2 son una solución minimal y una sobresolución respectivamente del problema $(P_5^{h_1})$ en $[\alpha, \beta]$, con lo cual, puesto que se sabe que u_1 es el mínimo de sobresoluciones de dicho problema en $[\alpha, \beta]$, se concluye que $u_1 \leq u_2$ en D y por lo tanto, la propiedad *ii)* es válida.

La afirmación *iii)* es una consecuencia inmediata del teorema de la convergencia monótona. □

A continuación se enuncia un resultado de existencia de solución de ecuaciones de operadores.

Lema 2.5.5 *[35, Teorema 1.1.2] Dados un espacio métrico ordenado X, un conjunto parcialemente ordenado V, aplicaciones $L : V \to X$ y $N : V \to X$ y elementos $h_\pm$ de X, tales que $h_- \leq h_+$ y supóngase la validez de las siguientes condiciones:*

(I) *Si $u, v \in V$ son tales que $u \leq v$ y $Lu \leq Lv$, entonces, $h_- \leq Nu \leq Nv \leq h_+$.*

(II) *La ecuación $Lu = h$ tiene para cada $h \in [h_-, h_+]$ soluciones extremales que son crecientes con respecto a h.*

(III) *Sucesiones monótonas de $N[V]$ convergen en X.*

Entonces, la ecuación $Lu = Nu$ tiene soluciones extremales u_* y u^* en el sentido de que si $u \in V$ y $Lu = Nu$, entonces $u_* \leq u \leq u^*$ y $Lu_* \leq Lu \leq Lu^*$. Además, u_* y u^* son crecientes con respecto a N.

Como consecuencia de la proposición 2.5.3 y de los lemas 2.5.4 y 2.5.5 se deduce el siguiente resultado de existencia de solución para el problema (P_5).

Teorema 2.5.6 *Asúmanse las condiciones $(H_5^1) - (H_5^5)$, (H_1^0), (B^1) y (C_c^2). Entonces, el problema (P_5) tiene una solución minimal, u_*, y una solución maximal, u^*, en V en el sentido de que si $u \in Z$ es una solución de (P_5), entonces, $u_* \leq u \leq u^*$ y $L_5 u_* \leq L_5 u \leq L_5 u^*$. Además, u_* y u^* son crecientes con respecto a la función F.*

Finalmente, destacar que el resultado anterior sigue siendo cierto si la función f es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en compactos en lugar de verificarse la condición (B^1).

2.5.3. Ecuación $\Phi-$Laplaciana

En esta subsección se demuestran los resultados análogos a los de la subsección 2.4.3 para la ecuación dinámica $\phi-$Laplaciana (P_6) siempre que las hipótesis (H_6^1) y (H_6^2) sean ciertas.

Sea $\phi : \mathbb{R} \to \phi(\mathbb{R})$ un homeomorfismo estrictamente creciente y sea $f : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$; si f o bien es una función $L^1_\Delta-$Carathóedory en compactos o bien verifica las condiciones (B^1) y (C^2), entonces se sabe que los operadores L_6, $N_6 : AC(D) \to L^1_\Delta(D^o)$ dados para cada $u \in AC(D)$ y para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ por $L_6 u(t) = (\phi \circ u)^\Delta(t)$ y $N_6 u(t) = N_1 u(t)$, con N_1 dado en

(2.2), están bien definidos y el problema (P_6) es la siguiente ecuación dinámica $\phi-$Laplaciana:

$$(P_6)\begin{cases} (\phi\circ u)^{\Delta}(t) = f(g(t),u(g(t))); & \Delta - \text{c t. p. } \ t\in D^o, \\ B(u(t_0),u)=0. \end{cases}$$

Considérese la siguiente ecuación dinámica:

$$(\bar{P}_6)\begin{cases} v^{\Delta}(t) = \bar{f}(g(t),v(g(t))); & \Delta - \text{c. t. p. } \ t\in D^o, \\ \bar{B}(v(t_0),v)=0, \end{cases}$$

donde $\bar{f}: D\times\phi(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ está definida para cada $(t,x)\in D\times\phi(\mathbb{R})$ como $\bar{f}(t,x):=f(t,\phi^{-1}(x))$ y $\bar{B}:\phi(\mathbb{R})\times W\to\mathbb{R}$ está dada para cada $(x,v)\in\phi(\mathbb{R})\times W$ por $\bar{B}(x,v):=B(\phi^{-1}(x),\phi^{-1}\circ v)$ siendo $W:=\{\, w\in C(D)\,:\, w(D)\subset\phi(\mathbb{R})\,\}$.

Los conceptos de subsolución, sobresolución y solución para el problema $(\bar{P}_6)$ se definen como cualquier elemento del conjunto $W\cap AC(D)$ que verifique las relaciones habituales en la ecuación dinámica.

Nótese que $(\bar{P}_6)$ es un problema del tipo (P_2) y si f satisface la condición (H_1^0) y es una función $L^1_{\Delta}-$Carathéodoy en compactos o verifica las condiciones (B^1) y (C_c^2), entonces, las mismas condiciones son ciertas para la función $\bar{f}$ definida anteriormente.

El siguiente resultado, cuya demostración se omite por su simplicidad, establece que los problemas (P_6) y $(\bar{P}_6)$ son equivalentes.

Proposición 2.5.7 *Sea $u: D\to\mathbb{R}$. Entonces, u es una subsolución, una sobresolución o una solución de (P_6) si y sólo si la función $\bar{u}: D\to\mathbb{R}$ definida para cada $t\in D$ como $\bar{u}:=\phi\circ u$ es una subsolución, una sobresolución o una solución de $(\bar{P}_6)$ respectivamente.*

Como la validez de (H_6^1) y (H_6^2) garantizan que se verifican las condiciones (H_2^1) y $(\tilde{H}_2^2)$ para el problema $(\bar{P}^6)$, como consecuencia de la proposición 2.5.7 y el teorema 2.4.9 se deduce la existencia y aproximación de soluciones extremales de (P_6) en $[\alpha,\beta]$.

Teorema 2.5.8 *Sea $\phi:\mathbb{R}\to\phi(\mathbb{R})$ un homeomorfismo estrictamente creciente. Asúmanse (H_1^0), (H_6^1), (H_6^2), (B^1) y (C_c^2). Entonces, (P_6) tiene una solución minimal, u_*, y una solución maximal, u^*, en $[\alpha,\beta]$. Además, se verifican las siguientes condiciones:*

$$u_* = \min\{\, u_+\in[\alpha,\beta]\,:\, u_+\in S_6^+\,\} \quad y \quad u^* = \max\{\, u_-\in[\alpha,\beta]\,:\, u_-\in S_6^-\,\}.$$

Una vez más, destacar que el resultado anterior es cierto al reemplazar la condición (B^1) por la condición de que f sea una función $L^1_{\Delta}-$Carathéodory en compactos.

Se finaliza esta subsección demostrando la existencia y aproximación de soluciones extremales de una ecuación en $q-$diferencias $\phi-$Laplaciana.

Ejemplo 2.5.9 *Para* $q > 1$ *fijado se define* $q^{\mathbb{Z}} := \{\, q^k \;:\; k \in \mathbb{Z}\,\}$*, sea* $\overline{q^{\mathbb{Z}}} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ *su clausura, considérese el conjunto cerrado de números reales dado por* $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}}$ *y sea* C *el conjunto ternario de Cantor.*

Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definido como*

$$\phi(x) := \begin{cases} exp(x), & si \quad x \le 0, \\[2ex] 2 - \dfrac{1}{x+1}, & si \quad x > 0; \end{cases}$$

fijado $m \in \mathbb{N}$*, sea* $f : [0, q^m]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(t,x) := \begin{cases} \big(2t + 3exp(t^2)\big)\, x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{-\pi}{2x}\right) + sgn(x) + [x] + \chi_C(t) & \\[2ex] + \displaystyle\int_{[0,t)_{\mathbb{T}}} \frac{\Delta s}{1+\mu(s)}, & si \quad x \neq 0, \\[2ex] \chi_C(t) + \displaystyle\int_{[0,t)_{\mathbb{T}}} \frac{\Delta s}{1+\mu(s)}, & si \quad x = 0, \end{cases}$$

donde $sgn(x) = x/|x|$ *para* $x \neq 0$ *y* $sgn(0) = 0$*,* $[x]$ *significa parte entera de* x*, esto es, el mayor entero menor o igual que* x *y* χ_C *la función característica del conjunto* C*, es decir,* $\chi_C(t) = 1$ *si* $t \in C$ *y* $\chi_C(t) = 0$ *si* $t \notin C$*.*

Considérese la siguiente ecuación en $q-$*diferencias* $\phi-$*Laplaciana:*

$$\begin{cases} (\phi \circ u)^{\Delta}(t) = f(g(t), u(g(t))); \qquad \Delta - c.\ t.\ p. \;\; t \in [0, q^m)_{\mathbb{T}}, \\[2ex] u(0) = q^{-m} \displaystyle\int_{[0,q^m)_{\mathbb{T}}} u(s)\ \Delta s. \end{cases} \tag{2.31}$$

Se puede probar que las funciones $\alpha, \beta : [0, q^m]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *definidas como* $\alpha := -1$ *y* $\beta := 1$ *en* $[0, q^m]_{\mathbb{T}}$ *son una subsolución y una sobresolución respectivamente de* (2.31) *tales que* $\alpha \le \beta$ *en* $[0, q^m]_{\mathbb{T}}$*,* ϕ *es un homeomorfismo estrictamente creciente y que* f *es una función* $L^1_{\Delta}-$*Carathéodory en compactos y que la condición* (H_6^2) *es cierta.*

Por consiguiente, el teorema 2.5.8 establece la existencia de soluciones extremales de (2.31) *en* $[\alpha, \beta]$ *y además se verifica que las soluciones minimal y maximal son es el mínimo de las sobresoluciones y el máximo de las subsoluciones respectivamente de dicho problema en* $[\alpha, \beta]$*.*

2.5.4. Subsoluciones y sobresoluciones en orden inverso

Realizando el mismo cambio de variable que en la subsección 2.4.4, se puede probar para cada $i \in \{4, 5, 6\}$ la existencia y aproximación de soluciones extremales del problema $(P_{(i,R)})$ en el conjunto $[\beta, \alpha]$ supuestas las condiciones recíprocas para la función que define la parte no lineal de la ecuación y las siguientes condiciones:

($H^1_{(i,R)}$) Existen α y β una subsolución y una sobresolución respectivamente del problema ($P_{(i,R)}$) tales que $\beta \leq \alpha$ en D.

($H^2_{(i,R)}$) Para cada $x \in [\alpha(t_0), \beta(t_0)]$, con α y β dadas en ($H^1_{(i,R)}$), $B_R(x, \cdot)$ es creciente en $[\beta, \alpha]$ y para todo $v \in [\beta, \alpha]$ se cumple que

$$\limsup_{y \to x^-} B_R(v, y) \leq B_R(v, x) \leq \liminf_{y \to x^+} B_R(y, v).$$

Se omiten los resultados por su analogía con los obtenidos anteriormente.

2.6. Ecuaciones dinámicas con condiciones iniciales a través de sus problemas recíprocos

Esta sección se dedica al estudio de la existencia, unicidad y aproximación de soluciones de un problema de frontera de primer orden en un intervalo de un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, que toma los valores en otro subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Obtenemos los resultados considerando ecuaciones dinámicas cuya parte no lineal es no negativa y verifican un tipo de condiciones de Carathéodory inversas y discontinuidad.

Consideramos la siguiente ecuación dinámica con condición inicial:

$$(P_7) \begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(g(t), u(g(t))) & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \geq t_0, \ t \in \mathbb{T}, \\ \\ u(t_0) = \tilde{t}_0, \end{cases}$$

donde $f : [t_0, T] \times \tilde{D} \to \mathbb{R}$, $\tilde{D} = [\tilde{t}_0, \tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, $t_0, T \in \mathbb{T}$, $\tilde{t}_0, \tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}$, $\mathbb{T}$ y $\tilde{\mathbb{T}}$ son conjuntos cerrados arbitrarios de $\mathbb{R}$. Denotamos por $D := [t_0, T]_{\mathbb{T}}$.

Una **solución de** (P_7) es una función $u : [t_0, T_u]_{\mathbb{T}} \to \tilde{D}$ absolutamente continua en $[t_0, T_u]_{\mathbb{T}}$, donde $T_u \in (t_0, T]_{\mathbb{T}}$, tal que $u^{\Delta}(t) = f(g(t), u(g(t)))$ para $\Delta-$casi todo punto $t \in [t_0, T_u)_{\mathbb{T}}$ y $u(t_0) = \tilde{t}_0$.

Sea $\tilde{g} : \tilde{\mathbb{T}} \to \tilde{\mathbb{T}}$ definida como $Id|_{\tilde{\mathbb{T}}}$ si $g = Id|_{\mathbb{T}}$ y como $\tilde{\sigma}|_{\tilde{\mathbb{T}}}$ si $g = \sigma|_{\mathbb{T}}$. Si $f : [t_0, T] \times \tilde{D} \to \mathbb{R}$, entonces se define $\tilde{f} : \tilde{D} \times [t_0, T] \to \mathbb{R}$ como

$$\tilde{f}(\tilde{t}, t) := \begin{cases} \dfrac{1}{f(t, \tilde{t})}; & \text{si} \quad f(t, \tilde{t}) \neq 0, \\ \\ 0; & \text{si} \quad f(t, \tilde{t}) = 0, \end{cases} \tag{2.32}$$

notar que $\tilde{\tilde{f}} = f$, y consideramos el problema recíproco

$$(\tilde{P}_7) \begin{cases} v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \tilde{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), v(\tilde{g}(\tilde{t}))) & \tilde{\Delta} - \text{c. t. p. } \ \tilde{t} \geq \tilde{t}_0, \ \tilde{t} \in \tilde{\mathbb{T}}, \\ \\ v(\tilde{t}_0) = t_0. \end{cases}$$

Una **solución de** $(\tilde{P}_7)$ es una función $v : [\tilde{t}_0, \tilde{T}_v]_{\tilde{\mathbb{T}}} \to D$ absolutamente continua en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_v]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, donde $\tilde{T}_v \in (\tilde{t}_0, \tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, tal que $v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \tilde{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), v(\tilde{g}(\tilde{t})))$ para $\tilde{\Delta}-$casi todo punto $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T}_v)_{\tilde{\mathbb{T}}}$ y $v(\tilde{t}_0) = t_0$.

En esta sección se establece la relación entre los problemas (P_7) y $(\tilde{P}_7)$ con Δ-derivada débil estrictamente positiva y $\tilde{\Delta}$-derivada, respectivamente. Estos resultados se combinan con ciertos resultados de existencia y aproximación de soluciones extremales para ecuaciones dinámicas con condiciones iniciales probados en secciones anteriores, para obtener nuevos resultados de existencia y aproximación de soluciones extremales de (P_7). Suponiendo un cierto tipo de condición de Carathéodory inversa y discontinuidad, obtenemos condiciones suficientes para la existencia de soluciones extremales locales del problema en ausencia de cotas superiores para f. También se garantiza la existencia y la aproximación de soluciones extremales globales para el problema. Estos resultados generalizan para subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ arbitrarios los dados en [39] y en [40] para el caso particular $\mathbb{T} = \tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{R}$. Además, se presenta una condición adicional que garantiza la existencia de una única solución de (P_7).

Se finaliza presentando algunos ejemplos, que incluyen un modelo simple de la población, para ilustrar la aplicabilidad de los resultados obtenidos.

2.6.1. Equivalencia entre (P_7) y $(\tilde{P}_7)$

Esta subsección la dedicaremos a probar la relación que existe entre los problemas (P_7) y $(\tilde{P}_7)$; para ello necesitaremos algunos resultados relacionados con la $\Delta-$medida y la $\Delta-$integración, que se pueden ver en el primer capítulo, y el criterio para la continuidad absoluta de la función inversa de cualquier función absolutamente continua y estrictamente monótona en un intervalo cerrado $[a, b]_{\mathbb{T}}$ dado en el teorema 1.4.12 así como la fórmula para calcular la $\tilde{\Delta}-$derivada de la función inversa. Además, necesitaremos el siguiente resultado

Proposición 2.6.1 *Sea $F : [a, b]_{\mathbb{T}} \to F([a, b]_{\mathbb{T}}) \subset [\tilde{a}, \tilde{b}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$ una función absolutamente continua en $[a, b]_{\mathbb{T}}$ y sea $\tilde{N} \subset [\tilde{a}, \tilde{b})_{\tilde{\mathbb{T}}}$ un conjunto de $\tilde{\Delta}-$medida nula.*

Si $F^{\Delta} > 0$ en $\Delta-$casi todo punto de $[a, b)_{\mathbb{T}}$ y $F \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ F$ en $[a, b)_{\mathbb{T}}$, entonces, $F^{-1}(\tilde{N})$ es un conjunto de $\Delta-$medida nula.

Demostración: Por el Teorema 1.4.12, como $F^{\Delta} > 0$ en $\Delta-$casi todo punto de $[a, b)_{\mathbb{T}}$, sabemos que $F^{-1} : F([a, b]_{\mathbb{T}}) \subset [\tilde{a}, \tilde{b}]_{\tilde{\mathbb{T}}} \to [a, b]_{\mathbb{T}}$ es una función absolutamente continua en $F([a, b]_{\mathbb{T}})$.

Como $\tilde{N} \subset [\tilde{a}, \tilde{b})_{\tilde{\mathbb{T}}}$ es un conjunto de $\tilde{\Delta}-$medida nula, por el Teorema 1.4.5 deducimos que $F^{-1}(\tilde{N}) \subset [a, b)_{\mathbb{T}}$ es un conjunto de medida de Lebesgue nula; además, a partir de (1.2) se sigue que $\tilde{N}$ no tienen puntos aislados por la derecha de $[\tilde{a}, \tilde{b})_{\tilde{\mathbb{T}}}$ y, puesto que F es estrictamente creciente en $[a, b]_{\mathbb{T}}$, la igualdad $F \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ F$ en $[a, b)_{\mathbb{T}}$ asegura que $F^{-1}(\tilde{N})$ no tiene puntos aislados por la derecha en $[a, b)_{\mathbb{T}}$. Por tanto, de (1.2), deducimos que $F^{-1}(\tilde{N})$ es un conjunto de $\Delta-$medida nula. □

Nota 2.6.2 *Contrariamente al caso real, para un subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}$ *arbitrario, la condición* $F^\Delta \neq 0$ *en* $\Delta-$*casi todo punto de* $[a,b)_\mathbb{T}$ *no es suficiente para garantizar que* $F^{-1}(\tilde{N})$ *es un conjunto de* $\Delta-$*medida nula. Por ejemplo, si* $\mathbb{T} = \tilde{\mathbb{T}} = [0,1] \cup [2,3]$*, y* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *está definida como* $F(t) = 3 - t$*, entonces,* $F^\Delta \equiv -1$ *en* $[0,1] \cup [2,3)$*, sin embargo,* $\{0\}$ *es un conjunto de* $\Delta-$*medida nula y* $F^{-1}\{0\} = \{3\}$ *tiene* $\Delta-$*medida infinita.*

De esta propiedad se obtiene la siguiente regla de la cadena para funciones absolutamente continuas.

Proposición 2.6.3 *Sea* $F \in AC([a,b]_\mathbb{T})$ *tal que* $F([a,b]_\mathbb{T}) \subset [\tilde{a},\tilde{b}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$ *y sea* $\tilde{F} \in AC([\tilde{a},\tilde{b}]_{\tilde{\mathbb{T}}})$.

Si $F^\Delta > 0$ *en* $\Delta-$*casi todo punto de* $[a,b)_\mathbb{T}$ *y* $F \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ F$ *en* $[a,b)_\mathbb{T}$*, entonces,*

$$(\tilde{F} \circ F)^\Delta(t) = \tilde{F}^{\tilde{\Delta}}(F(t)) \cdot F^\Delta(t) \qquad \textit{para } \ \Delta - c.\ t.\ p.\ t \in [a,b)_\mathbb{T}.$$

Demostración: Como consecuencia del teorema fundamental del cálculo para $\Delta-$derivadas se establece la existencia de un conjunto de $\Delta-$medida nula N tal que F es $\Delta-$diferenciable en $[a,b)_\mathbb{T} \backslash N$ y la existencia de un conjunto de $\tilde{\Delta}-$medida nula $\tilde{N} \subset [\tilde{a},\tilde{b})_{\tilde{\mathbb{T}}}$ tal que $\tilde{F}$ es $\tilde{\Delta}-$diferenciable en $[\tilde{a},\tilde{b})_{\tilde{\mathbb{T}}} \backslash \tilde{N}$ y de este modo, la regla de la cadena para $\Delta-$derivadas que se puede ver en [25, Teorema 8.35] garantiza que

$$(\tilde{F} \circ F)^\Delta(t) = \tilde{F}^{\tilde{\Delta}}(F(t)) \cdot F^\Delta(t) \qquad \text{para todo } \ t \in [a,b)_\mathbb{T} \backslash (F^{-1}(\tilde{N}) \cap N);$$

por lo tanto, la conclusión se sigue de la proposición 2.6.1. □

Como consecuencia directa de los resultados anteriores se deduce el siguiente corolario que será utilizado posteriormente.

Corolario 2.6.4 *Sean* $N \subset [a,b)_\mathbb{T}$ *y* $\tilde{N} \subset [\tilde{a},\tilde{b})_{\tilde{\mathbb{T}}}$ *conjuntos de* $\Delta-$ *y* $\tilde{\Delta}-$ *medida nula respectivamente, y sean* $f_1, f_2 : [a,b]_\mathbb{T} \times [\tilde{a},\tilde{b}]_{\tilde{\mathbb{T}}} \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$f_1(g(t), \tilde{g}(\tilde{t})) = f_2(g(t), \tilde{g}(\tilde{t})) \qquad \textit{para todo } \ (t,\tilde{t}) \in ([a,b)_\mathbb{T} \backslash N) \times ([\tilde{a},\tilde{b})_{\tilde{\mathbb{T}}} \backslash \tilde{N}). \tag{2.33}$$

Sea $u : [a_1,b_1]_\mathbb{T} \subset [a,b]_\mathbb{T} \to [\tilde{a},\tilde{b}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$*,* $u \in AC([a_1,b_1]_\mathbb{T})$ *tal que* $u^\Delta > 0$ *en* $\Delta-$*casi todo punto de* $[a_1,b_1)_\mathbb{T}$ *y* $u \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ u$ *en* $[a_1,b_1)_\mathbb{T}$*. Entonces,* u *es una solución de*

$$u^\Delta(t) = f_1(g(t), u(g(t))) \quad \textit{para } \ \Delta - c.\ t.\ p. \ \ t \in [a_1,b_1)_\mathbb{T}, \qquad u(a_1) = u_0, \tag{2.34}$$

si y sólo si u *es una solución de*

$$u^\Delta(t) = f_2(g(t), u(g(t))) \quad \textit{para } \ \Delta - c.\ t.\ p. \ \ t \in [a_1,b_1)_\mathbb{T}, \qquad u(a_1) = u_0. \tag{2.35}$$

El siguiente paso será probar que la inversa de una solución de $(\tilde{P}_7)$ resuelve (P_7).

Teorema 2.6.5 *Si $v : [\tilde{t}_0, \tilde{T}_v]_{\tilde{\mathbb{T}}} \to D$ es una solución de $(\tilde{P}_7)$ tal que $v^{\tilde{\Delta}} > 0$ en $\tilde{\Delta}-$casi todo punto de $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_v)_{\tilde{\mathbb{T}}}$, y $v \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ v$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_v)_{\tilde{\mathbb{T}}}$, entonces, la función $v^{-1} : [t_0, v(\tilde{T}_v)]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$, es una solución de (P_7) y $v^{-1} \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ v^{-1}$ en $[t_0, v(\tilde{T}_v))_{\mathbb{T}}$.*

Demostración: Puesto que $v^{\tilde{\Delta}} > 0$ en $\tilde{\Delta}-$casi todo punto de $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_v)_{\tilde{\mathbb{T}}}$, sabemos que v es estrictamente creciente en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_v]_{\tilde{\mathbb{T}}}$ y así, de las relaciones $v([\tilde{t}_0, \tilde{T}_v]_{\tilde{\mathbb{T}}}) \subset [t_0, T]_{\mathbb{T}}$ y $v \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ v$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_v)_{\tilde{\mathbb{T}}}$, obtenemos que $t_0 < v(\tilde{T}_v) \leq T$, $v([\tilde{t}_0, \tilde{T}_v]_{\tilde{\mathbb{T}}}) = [t_0, v(\tilde{T}_v)]_{\mathbb{T}}$, y $v^{-1} \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ v^{-1}$ en $[t_0, v(\tilde{T}_v))_{\mathbb{T}}$. Además, el teorema 1.4.12 establece que $v^{-1} : [t_0, v(\tilde{T}_v)]_{\mathbb{T}} \to [\tilde{t}_0, \tilde{T}_v]_{\tilde{\mathbb{T}}} \subset \tilde{D}$ es una función absolutamente continua en $[t_0, v(\tilde{T}_v)]_{\mathbb{T}}$ y la existencia de un conjunto de $\Delta-$medida nula $N_1 \subset [t_0, v(\tilde{T}_v))_{\mathbb{T}}$ tal que

$$(v^{-1})^{\Delta}(t) = \frac{1}{v^{\tilde{\Delta}}(v^{-1}(t))} > 0 \qquad \text{para todo } \; t \in [t_0, v(\tilde{T}_v))_{\mathbb{T}} \backslash N_1. \tag{2.36}$$

Por otra parte, existe $\tilde{N} \subset [\tilde{t}_0, \tilde{T}_v)_{\tilde{\mathbb{T}}}$ un conjunto de $\tilde{\Delta}-$medida nula tal que

$$0 < v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \tilde{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), v(\tilde{g}(\tilde{t}))) = \frac{1}{f(v(\tilde{g}(\tilde{t})), \tilde{g}(\tilde{t}))} \qquad \text{para todo } \; \tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T}_v)_{\tilde{\mathbb{T}}} \backslash \tilde{N},$$

lo que implica, por la igualdad $v \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ v$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_v)_{\tilde{\mathbb{T}}}$ y $v([\tilde{t}_0, \tilde{T}_v)_{\tilde{\mathbb{T}}}) = [t_0, v(\tilde{T}_v))_{\mathbb{T}}$, que

$$0 < v^{\tilde{\Delta}}(v^{-1}(t)) = \frac{1}{f(g(t), v^{-1}(g(t)))} \qquad \text{para todo } \; t \in [t_0, v(\tilde{T}_v))_{\mathbb{T}} \backslash v(\tilde{N}) \tag{2.37}$$

y como sabemos, por la proposición 2.6.1, que $v(\tilde{N})$ es un subconjunto de $\Delta-$medida nula de $[t_0, v(\tilde{T}_v))_{\mathbb{T}}$, por (2.36) y (2.37), concluimos que v^{-1} es una solución de (P_7). □

Nota 2.6.6 *Un resultado análogo se obtiene cambiando los papeles de los problemas (P_7) y $(\tilde{P}_7)$*

Como consecuencia de los resultados anteriores se deduce el siguiente corolario.

Corolario 2.6.7 *Si el problema $(\tilde{P}_7)$ tiene a lo sumo una solución v en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_1]_{\tilde{\mathbb{T}}}$ tal que $v^{\tilde{\Delta}} > 0$ en $\tilde{\Delta}-$casi todo punto de $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_1)_{\tilde{\mathbb{T}}}$, y $v \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ v$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_1)_{\tilde{\mathbb{T}}}$, para cada $\tilde{T}_1 \in (\tilde{t}_0, \tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, entonces, el problema (P_7) tiene a lo sumo una solución u en $[t_0, T_1]_{\mathbb{T}}$, tal que $u^{\Delta} > 0$ en $\Delta-$casi todo punto de $[t_0, T_1)_{\mathbb{T}}$, y $u \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ u$ en $[t_0, T_1)_{\mathbb{T}}$, para cada $T_1 \in (t_0, T]_{\mathbb{T}}$.*

2.6.2. Condiciones suficientes para la existencia de soluciones de (P_7)

En primer lugar, definiremos algunos conceptos relacionados con la ecuación dinámica con condiciones iniciales (P_7).

Definición 2.6.8 *Sea $T_0 \in (t_0, T]_{\mathbb{T}}$.*

1. *Se dice que u_- es una* **subsolución de** (P_7) **en** $[t_0, T_0]_{\mathbb{T}}$ *si u_- es una función absolutamente continua en $[t_0, T_0]_{\mathbb{T}}$, $u_-([t_0, T_0]_{\mathbb{T}}) \subset \tilde{D}$, $u_-(t_0) = \tilde{t}_0$ y*

$$(u_-)^{\Delta}(t) \leq f(g(t), u_-(g(t))) \qquad \textit{para } \; \Delta - c.\ t.\ p. \;\; t \in [t_0, T_0)_{\mathbb{T}}.$$

   Si $T_0 = T$, entonces, se dice que u_- es una **subsolución de** (P_7).

   Los conceptos de **sobresolución de** (P_7) **en** $[t_0, T_0]_{\mathbb{T}}$ *y* **sobresolución de** (P_7) *se definen cambiando el sentido de las desigualdades anteriores.*

2. *Para un subconjunto $Y \subset AC([t_0, T_0]_{\mathbb{T}})$, una función $u_* \in Y$ se dice que es la* **solución minimal de** (P_7) **en** Y *si u_* es una solución de (P_7) y $u_* \leq u$ en $[t_0, T_0]_{\mathbb{T}}$ para cualquier otra solución $u \in Y$; la* **solución maximal de** (P_7) **en** Y *se define cambiando el sentido de las desigualdades. Cuando las soluciones minimal y maximal de (P_7) en Y existen, se llaman* **soluciones extremales de** (P_7) **en** Y.

Análogamente, se pueden definir los conceptos de subsolución y sobresolución de $(\tilde{P}_7)$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_0]_{\tilde{\mathbb{T}}}$ con $\tilde{T}_0 \in (\tilde{t}_0, \tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$.

Condiciones para la existencia de soluciones locales

Teniendo en cuenta la relación entre las soluciones de (P_7) con $\Delta-$derivada débil estrictamente positiva y las soluciones de $(\tilde{P}_7)$ con $\tilde{\Delta}-$derivada débil estrictamente positiva obtenida en el teorema 2.6.5 y resultados de existencia y aproximación de soluciones extremales en el conjunto de funciones absolutamente continuas de una ecuación dinámica con condiciones iniciales obtenidos en la sección 2,3, probaremos la existencia y aproximación de soluciones extremales locales de (P_7) en el conjunto de las funciones absolutamente continuas con $\Delta-$derivada débil estrictamente positiva.

Vamos a suponer que $f : [t_0, T] \times \tilde{D} \to \mathbb{R}$ y $\tilde{g} : \tilde{\mathbb{T}} \to \tilde{\mathbb{T}}$ satisfacen las siguientes hipótesis:

(HLf) Se verifican las siguientes condiciones:

(HLf$_1$) Para cada $v \in AC(\tilde{D})$ tal que $v(\tilde{D}) \subset [t_0, T]$, la función $f(v(\cdot), \cdot)$ es $\tilde{\Delta}-$medible en $\tilde{D}$.

(HLf$_2$) Para $\tilde{\Delta}-$casi todo $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}$, se tiene,

$$\liminf_{s \to t^-} f(s, \tilde{g}(\tilde{t})) \geq f(t, \tilde{g}(\tilde{t})) \qquad \text{para todo } \; t \in (t_0, T]$$

y

$$f(t, \tilde{g}(\tilde{t})) \geq \limsup_{s \to t^+} f(s, \tilde{g}(\tilde{t})) \qquad \text{para todo } \; t \in [t_0, T).$$

(HLf$_3$) Existe $\tilde{m} : \tilde{D} \to \bar{\mathbb{R}}$ tal que $\tilde{m} \circ \tilde{g} \in L^1_{\tilde{\Delta}}([\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}})$ y

$$0 < \frac{1}{\tilde{m}(\tilde{g}(\tilde{t}))} \leq f(t, \tilde{g}(\tilde{t})) \ \text{ y } \ 0 < f(t, \tilde{t})$$

para todo $t \in [t_0, T]$ y para $\tilde{\Delta}-$casi todo punto $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}$.

(Hg) Si $\tilde{g} = Id|_{\tilde{\mathbb{T}}}$, entonces, para cada punto aislado por la derecha $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}$, la función definida para cada $t \in [t_0, T]$ como $t + (\tilde{\sigma}(\tilde{t}) - \tilde{t})\dfrac{1}{f(t, \tilde{t})}$ es no decreciente en $[t_0, T]$.

Además vamos a suponer la condición siguiente acerca de las soluciones de $(\tilde{P})$ con $\tilde{\Delta}-$derivada débil estrictamente positiva.

(Hs) Si $v \in AC([\tilde{t}_0, \tilde{T}_v]_{\tilde{\mathbb{T}}})$ es una función que verifica $(\tilde{P}_7)$ y $v^{\tilde{\Delta}} > 0$ en $\tilde{\Delta}-$casi todo punto de $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_v)_{\tilde{\mathbb{T}}}$, entonces, $v([\tilde{t}_0, \tilde{T}_v]_{\tilde{\mathbb{T}}}) \subset [t_0, T]_{\mathbb{T}}$ y $v \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ v$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_v)_{\tilde{\mathbb{T}}}$.

Nota 2.6.9 *Puesto que nos interesan las soluciones de* (P_7) *con* $\Delta-$*derivada sea estrictamente positiva, podemos suponer sin perdida de generalidad que las condiciones* (HLf$_2$) *y* (HLf$_3$) *se verifican para todo* $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}$ *ya que si estas condiciones son válidas sólo para* $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}} \backslash \tilde{N}$*, donde* $\tilde{N} \neq \emptyset$ *es un conjunto de* $\tilde{\Delta}-$*medida nula, entonces, consideramos*

$$S := \{\tilde{t} \in (\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}, \ \tilde{t} \text{ es denso por la izquierda y aislado por la derecha}\} \subset R$$

donde $R = \{\tilde{t}_i\}_{i \in \tilde{I}}$ *es el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de* $\tilde{D}^o$ *el cual es a lo sumo numerable.*

Al definir $f^* : [t_0, T] \times \tilde{D} \to \bar{\mathbb{R}}$ *y* $m^* : \tilde{D} \to (0, +\infty)$ *como*

$$f^*(t, \tilde{t}) := f^*(t, \tilde{g}(\tilde{t}_1)) = \begin{cases} f(t, \tilde{g}(\tilde{t}_1)); & si \ \ \tilde{t}_1 \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}} \backslash \tilde{N}, \\ \\ 1; & si \ \ \tilde{t}_1 \in \tilde{N}, \end{cases}$$

y

$$m^*(\tilde{t}) = m^*(\tilde{g}(\tilde{t}_1)) := \begin{cases} \tilde{m}(\tilde{g}(\tilde{t}_1)); & si \ \ \tilde{t}_1 \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}} \backslash \tilde{N}, \\ \\ 1; & si \ \ \tilde{t}_1 \in \tilde{N}, \end{cases}$$

si g *es la identidad o* $\tilde{t} \notin S$ *y* $\tilde{g}(\tilde{t}_1) = \tilde{t}$*, y* $f^*(t, \tilde{t}) := 1$*,* $m^*(\tilde{t}) := 1$ *si* $\tilde{t} \in S$ *y* g *no es la identidad, resulta que* f^* *verifica las condiciones* (HLf$_2$) *y* (HLf$_3$) *para todo* $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}$ *y* m^* *en* (HLf$_3$).

Por otra parte, se deduce que

$$f(g(t), \tilde{g}(\tilde{t})) = f^*(g(t), \tilde{g}(\tilde{t})) \qquad \text{para todo } \ (t, \tilde{t}) \in [t_0, T)_{\mathbb{T}} \times ([\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}} \backslash \tilde{N})$$

y por tanto, el corolario 2.6.4 garantiza que el problema (P_7) *y el problema*

$$\begin{cases} u^{\Delta}(t) = f^*(g(t), u(g(t))) & \Delta - c.\ t.\ p.\ \ t \geq t_0,\ t \in \mathbb{T}, \\ \\ u(t_0) = \tilde{t}_0, \end{cases}$$

tienen las mismas soluciones con $\Delta-$*derivada débil estrictamente positiva.*

El resultado de existencia y aproximación de soluciones extremales locales es el siguiente.

Teorema 2.6.10 *Asúmanse las condiciones* (HLf), (Hg) *y* (Hs). *Entonces, existe* $T_0 \in (t_0, T]_{\mathbb{T}}$ *tal que* (P_7) *tiene soluciones extremales en el conjunto*

$$Y_0 := \{u \in AC([t_0, T_0]_{\mathbb{T}}) : u^{\Delta} > 0\ \Delta - c.\ t. [t_0, T_0)_{\mathbb{T}}, u \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ u \ en\ [t_0, T_0)_{\mathbb{T}}\}.$$

Además, si u_* *y* u^* *denotan, respectivamente, la solución minimal y maximal de* (P_7) *en* Y_0*, entonces, para todo* $t \in [t_0, T_0]_{\mathbb{T}}$*, se verifican las siguientes igualdades:*

$$u_*(t) = \text{mín}\,\{\, u_+(t)\ :\ u_+ \in Y_0 \ es\ sobresolución\ de\ (P_7)\ en\ [t_0, T_0]_{\mathbb{T}}\,\},$$

$$u^*(t) = \text{máx}\,\{\, u_-(t)\ :\ u_- \in Y_0 \ es\ subsolución\ de\ (P_7)\ en\ [t_0, T_0]_{\mathbb{T}}\,\}.$$

Demostración: Por la nota 2.6.9 podemos suponer que f verifica la condición (HLf_2) y (HLf_3) para todo $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}$. Dividiremos la demostración en varias etapas

Etapa 1: Existe $T_0 \in (t_0, T]_{\mathbb{T}}$ *tal que* (P_7) *tiene al menos una solución en* Y_0*.*

Consideramos la extensión a $\mathbb{R}$ de $\tilde{f}$, $\hat{f} : \tilde{D} \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ definida como

$$\hat{f}(\tilde{t}, t) := \begin{cases} 0; & \text{si}\ \ t < t_0, \\ \\ \tilde{f}(\tilde{t}, t); & \text{si}\ \ t \in [t_0, T], \\ \\ \tilde{m}(\tilde{t}); & \text{si}\ \ t > T. \end{cases} \tag{2.38}$$

Mostraremos que $\hat{f}$ verifica las siguientes propiedades:

i) *Para cada* $v \in AC(\tilde{D})$*, la función* $\hat{f}(\cdot, v(\cdot))$ *es* $\tilde{\Delta}-$*medible en* $\tilde{D}$*.*

Fijada $v \in AC(\tilde{D})$. Por (HLf_3) y la nota 2.6.9, tenemos que para cada $\tilde{t} \in \tilde{D}$,

$$\hat{f}(\tilde{t}, v(\tilde{t})) = \begin{cases} 0; & \text{si}\ \ v(\tilde{t}) < t_0, \\ \\ \dfrac{1}{f(V(\tilde{t}), \tilde{t})}; & \text{si}\ \ v(\tilde{t}) \in [t_0, T], \\ \\ \tilde{m}(\tilde{t}); & \text{si}\ \ v(\tilde{t}) > T, \end{cases}$$

donde $V : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ está definida como $V(\tilde{t}) := \text{máx}\,\{\, \text{mín}\,\{\, v(\tilde{t}), T\,\}, t_0\,\}$. Puesto que $V \in AC(\tilde{D})$ y $V(\tilde{D}) \subset [t_0, T]$, deducimos, de ($HLf_1$), que $\hat{f}(\cdot, v(\cdot))$ es $\tilde{\Delta}-$medible en $\tilde{D}$.

ii) *Para todo* $(\tilde{t}, t) \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}} \times \mathbb{R}$*, tenemos*

$$\limsup_{s\to t^-} \hat{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), s) \leq \hat{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), t) \leq \liminf_{s\to t^+} \hat{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), s).$$

Estas desigualdades son triviales en $\tilde{D} \times ((-\infty, t_0) \cup (T, +\infty))$, la primera es trivial en t_0 y la segunda es trivial en T. Por otra parte, si $(\tilde{t}, t) \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}} \times (t_0, T]$, entonces, se sigue de (HLf$_2$) y (HLf$_3$) que

$$\begin{aligned}\limsup_{s\to t^-} \hat{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), s) &= \limsup_{s\to t^-} \frac{1}{f(s, \tilde{g}(\tilde{t}))} = \frac{1}{\liminf\limits_{s\to t^-} f(s, \tilde{g}(\tilde{t}))} \\ &\leq \frac{1}{f(t, \tilde{g}(\tilde{t}))} = \hat{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), t);\end{aligned}$$

análogamente, se puede deducir la segunda desigualdad en $[\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}} \times [t_0, T)$.

iii) *Para todo* $(\tilde{t}, t) \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}} \times \mathbb{R}$, $|\hat{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), t)| \leq \tilde{m}(\tilde{g}(\tilde{t}))$*;* esto es consecuencia directa de (HLf$_3$) y de la nota 2.6.9.

iv) *Si* $\tilde{g} = Id|_{\tilde{\mathbb{T}}}$*, entonces, para cada punto aislado por la derecha* $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}$*, la función definida para cada* $t \in \mathbb{R}$ *como* $t + (\tilde{\sigma}(\tilde{t}) - \tilde{t})\hat{f}(\tilde{t}, t)$ *es no decreciente en* $\mathbb{R}$*;* es obvio por (Hg).

Por tanto, $\hat{f}$ verifica la hipótesis del teorema 2.3.5 y como consecuencia, existen $v^*, v_* \in AC(\tilde{D})$ que satisfacen la igualdad en el problema global

$$(\hat{P}_7) \begin{cases} v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \hat{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), v(\tilde{g}(\tilde{t}))) & \tilde{\Delta} - \text{c. t. p. } \; \tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}, \\ \\ v(\tilde{t}_0) = t_0, \end{cases}$$

y $v_* \leq v \leq v^*$ en $\tilde{D}$ para cualquier $v \in AC(\tilde{D})$ que verifica el problema $(\hat{P}_7)$; además, v^* es la mayor de las subsoluciones y v_* es la menor de las sobresoluciones, en el sentido de la sección 2.3.

Si $v \in AC(\tilde{D})$ es una función que verifica $(\hat{P}_7)$, como $\hat{f} \geq 0$ en $\tilde{D} \times \mathbb{R}$, entonces, $v \geq t_0$ en $\tilde{D}$; por lo que, se sigue de (2.38) y (HLf$_3$) que para $\tilde{\Delta}-$casi todo $\tilde{t} \in \tilde{D}$, se tiene que

$$v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) > 0. \tag{2.39}$$

Definiendo

$$T_0 := \min\{\, T, v_*(\tilde{T})\,\}, \tag{2.40}$$

sabemos, por (2.39) y (Hs), que existe $\tilde{T}_{v_*} \in (\tilde{t}_0, \tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$ tal que $v_*([\tilde{t}_0, \tilde{T}_{v_*}]_{\tilde{\mathbb{T}}}) = [t_0, T_0]_{\mathbb{T}}$. Si $v \in AC(\tilde{D})$ verifica $(\hat{P}_7)$, entonces, se sigue de (2.39), que existe $\tilde{T}_v \in (\tilde{t}_0, \tilde{T}_{v_*}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$ tal que

$$v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \hat{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), v(\tilde{g}(\tilde{t}))) \qquad \text{para } \tilde{\Delta} - \text{c. t. p. } \; \tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T}_v]_{\tilde{\mathbb{T}}},$$

por lo cual deducimos, por (Hs), que $[t_0,T_0]_{\mathbb{T}} = v_*([\tilde{t}_0,\tilde{T}_{v_*}]_{\tilde{\mathbb{T}}}) \subset v([\tilde{t}_0,\tilde{T}_v]_{\tilde{\mathbb{T}}}) = [t_0, v(\tilde{T}_v)]_{\mathbb{T}}$; en consecuencia, el teorema 2.6.5 establece que la función $v^{-1} : [t_0,T_0]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ es una solución de (P_7) la cual, por el teorema 1.4.12, pertenece a Y_0.

Etapa 2: El problema (P_7) *tiene soluciones extremales en* Y_0.

Sabemos que si $v \in AC(\tilde{D})$ es una función que verifica $(\hat{P}_7)$ entonces, $(v_*)^{-1}$, $(v^*)^{-1}$ y v^{-1} definen soluciones de (P_7) en Y_0 y $(v_*)^{-1} \geq v^{-1} \geq (v^*)^{-1}$ en $[t_0,T_0]_{\mathbb{T}}$. Por lo tanto, con el fin de garantizar que $u^* := (v_*)^{-1}$ y $u^* := (v_*)^{-1}$ son la solución minimal y maximal, respectivamente, de (P_7) en Y_0 es suficiente probar que cada solución de (P_7) en Y_0 es la inversa de una solución de $(\hat{P}_7)$. En efecto, sea $u \in Y_0$ una solución de (P_7).

Si $u(T_0) < \tilde{T}$, entonces, sabemos, por el teorema 2.6.5 y la nota 2.6.6, que $u^{-1} : [\tilde{t}_0, u(T_0)]_{\tilde{\mathbb{T}}} \to \mathbb{R}$, donde $[\tilde{t}_0, u(T_0)]_{\tilde{\mathbb{T}}} \subsetneq \tilde{D}$, es una solución de

$$\begin{cases} v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \hat{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), v(\tilde{g}(\tilde{t}))) & \tilde{\Delta} - \text{c. t. p. } \ \tilde{t} \in [\tilde{t}_0, u(T_0))_{\tilde{\mathbb{T}}}, \\ v(\tilde{t}_0) = t_0. \end{cases}$$

Puesto que el problema

$$\begin{cases} v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \hat{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), v(\tilde{g}(\tilde{t}))) & \tilde{\Delta} - \text{c. t. p. } \ \tilde{t} \in [u(T_0), \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}, \\ v(u(T_0)) = T_0 \end{cases}$$

verifica las hipótesis del teorema 2.3.5, resulta que éste tiene al menos una solución $v_1 \in AC([u(T_0), \tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}})$.

Por tanto, la función $v : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ definida como

$$v(\tilde{t}) := \begin{cases} u^{-1}(\tilde{t}); & \text{si } \tilde{t} \in [\tilde{t}_0, u(T_0)]_{\tilde{\mathbb{T}}}, \\ v_1(\tilde{t}); & \text{si } \tilde{t} \in [u(T_0), \tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}} \end{cases}$$

es una solución de $(\hat{P}_7)$.

Si $u(T_0) = \tilde{T}$, entonces, el teorema 2.6.5 y la nota 2.6.6 garantizan que u^{-1} está definida en $\tilde{D}$ y es una solución de $(\hat{P}_7)$.

Etapa 3: Si u_* *denota la solución minimal de* (P_7) *en* Y_0*, entonces, para todo* $t \in [t_0,T_0]_{\mathbb{T}}$*,*

$u_*(t) = \min\{\, u_+(t) \ : \ u_+ \in Y_0$ *es sobresolución de* (P_7) *en* $[t_0,T_0]_{\mathbb{T}} \,\}$.

Puesto que u_* es una sobresolución de (P_7) en $[t_0,T_0]_{\mathbb{T}}$ y $u_* \in Y_0$, es suficiente probar que si $u \in Y_0$ es una sobresolución de (P_7) en $[t_0,T_0]_{\mathbb{T}}$, entonces, $u_* \leq u$ en $[t_0,T_0]_{\mathbb{T}}$. Sea $u \in Y_0$ una sobresolución de (P_7) en $[t_0,T_0]_{\mathbb{T}}$, siguiendo un argumento similar al de la prueba del teorema 2.6.5, se puede probar que $u^{-1} : [\tilde{t}_0, u(T_0)]_{\tilde{\mathbb{T}}} \to \mathbb{R}$ es una subsolución de

$$\begin{cases} v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \tilde{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), v(\tilde{g}(\tilde{t}))) & \tilde{\Delta} - \text{c. t. p. } \ \tilde{t} \in [\tilde{t}_0, u(T_0))_{\tilde{\mathbb{T}}}, \\ v(\tilde{t}_0) = t_0 \end{cases}$$

y razonando como en la etapa 2, se puede mostrar que existe $v \in AC(\tilde{D})$ subsolución de $(\hat{P}_7)$ que corresponde a u^{-1} en $[\tilde{t}_0, u(T_0)]_{\tilde{\mathbb{T}}}$. Consecuentemente, tenemos que $u^{-1} \leq v^*$ en $[\tilde{t}_0, u(T_0)]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, o equivalentemente, $u \geq (v^*)^{-1}$ en $[t_0, T_0]_{\mathbb{T}}$.

Análogamente, se puede probar que si u_* denota la solución minimal de (P_7) en Y_0, entonces, para todo $t \in [t_0, T_0]_{\mathbb{T}}$, la relación

$$u^*(t) = \max \{ u_-(t) \ : \ u_- \in Y_0 \text{ es una subsolución de } (P_7) \text{ en } [t_0, T_0]_{\mathbb{T}} \}.$$

se verifica y la prueba está completa. □

Notar que para el caso real, esto es, $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T} = \mathbb{R}$, la condición (Hs) no es una restricción puesto que siempre se verifica.

A continuación presentamos dos ejemplos simples en los cuales se verifica (Hf), no se verifica (Hs) y el problema (P_7) no tiene solución.

En el primero, (Hs) no se verifica pues existe una solución de $(\tilde{P}_7)$ con $\tilde{\Delta}-$derivada débil estrictamente positiva cuya imagen no es un subconjunto de D.

Ejemplo 2.6.11 *Sea $\mathbb{T} = \tilde{\mathbb{T}} = \{0, 1, 2\}$, entonces, $f_1 : [0, 2] \times \{0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(t, \tilde{t}) = \tilde{t} + 1$ verifica* (HLf)*, sin embargo* (Hs) *no se cumple pues la única solución del problema*

$$v(n+1) - v(n) = \frac{1}{n+2}; \qquad v(0) = 0$$

está dada por $v \equiv \{0, 1/2, 5/6\} \nsubseteq \{0, 1, 2\}$; además, es obvio que el problema

$$u(n+1) - u(n) = u(n+1) + 1; \qquad u(0) = 0$$

no tiene solución.

Se puede pensar que la condición $v([\tilde{t}_0, \tilde{T}_v]_{\tilde{\mathbb{T}}}) \subset [t_0, T]_{\mathbb{T}}$ en (Hs) es suficiente para garantizar la existencia de soluciones extremales de (P_7), sin embargo, en el siguiente ejemplo en el que no hay solución vamos a ver que este requisito se cumple, pero no se cumple la relación $v \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ v$ en los puntos aislados por la derecha de $[t_0, T_v)_{\mathbb{T}}$.

Ejemplo 2.6.12 *Sea $\mathbb{T} = \tilde{\mathbb{T}} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y sea $f_2 : [0, 4] \times \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$ definida por $f_2(t, \tilde{t}) = 1/2$ si $\tilde{t} = 1$ y $f_2(t, \tilde{t}) = 1$ si $\tilde{t} \neq 1$; la condición* (HLf) *es es de fácil comprobación y, puesto que la única solución del problema*

$$v(n+1) - v(n) = \tilde{f}_2(n+1, v(n+1)); \qquad v(0) = 0$$

está definida en $\{0, 1, 2, 3\}$, su imagen es $\{0, 2, 3, 4\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $v(\tilde{\sigma}(\tilde{t})) = \sigma(v(\tilde{t}))$ para todo $\tilde{t} \in \{1, 2\}$ y $v(\tilde{\sigma}(0)) = v(1) = 2 \neq 1 = \sigma(v(0))$, resulta que (Hs) *no se cumple; por otra parte, es fácil comprobar que el problema*

$$u(n+1) - u(n) = f_2(n+1, u(n+1)); \qquad u(0) = 0$$

no tiene solución.

Condiciones para la existencia de solución global

Deduciremos condiciones suficientes para garantizar la existencia de soluciones extremales de (P_7) en el conjunto

$$Y := \{\, u \in AC(D) : u^{\Delta} > 0 \ \Delta - \text{c.t.p. de } D^0 \text{ y } u \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ u \text{ en } D^0 \,\}, \quad (2.41)$$

notar que cada solución $u \in Y$ de (P_7) está definida en todo el subintervalo cerrado D de $\mathbb{T}$ y por tanto, es una solución global.

Es fácil deducir que la condición (HLf) no es suficiente para garantizar la existencia de una solución global en D del problema (P_7).

Vamos a suponer que $f : [t_0, T] \times \tilde{D} \to \bar{\mathbb{R}}$ satisface la siguiente condición:

(HGf) Se verifica la condición (HLf) y existe $\tilde{M} \in L^1_{\tilde{\Delta}}([\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}})$ tal que

(HGf$_1$) Para todo $t \in [t_0, T]$ y para $\tilde{\Delta}-$casi todo $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}$,

$$f(t, \tilde{g}(\tilde{t})) \leq \frac{1}{\tilde{M}(\tilde{t})}.$$

(HGf$_2$) $\displaystyle\int_{[\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}} \tilde{M}(\tilde{t}) \ \tilde{\Delta}\tilde{t} \geq T - t_0.$

Teorema 2.6.13 *Asúmanse* (HGf), (Hg) *y* (Hs). *Entonces,* (P_7) *tiene soluciones extremales en el conjunto* Y *definido en* (2.41). *Además, si denotamos por* u_* *y* u^**, respectivamente, la solución minimal y maximal de* (P_7) *en* Y*, entonces, para todo* $t \in D$*, se verifica la siguiente igualdad:*

$$u_*(t) = \min \{\, u_+(t) \ : \ u_+ \in Y \textit{ es sobresolución de } (P_7) \,\}, \quad (2.42)$$

$$u^*(t) = \max \{\, u_-(t) \ : \ u_- \in Y \textit{ es subsolución de } (P_7) \,\}. \quad (2.43)$$

Demostración: Por la nota 2.6.9 podemos suponer que f verifica la condición (HGf) para todo $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}$. Como consecuencia del teorema 2.6.10 sólo tenemos que demostrar que T_0 definido en (2.40) satisface que

$$T_0 := \min \{\, T, v_*(\tilde{T}) \,\} = T. \quad (2.44)$$

Si $v \in AC(\tilde{D})$ es una función que satisface $(\hat{P}_7)$, entonces, por (2.38), (HLf$_3$) y (HGf$_1$), sabemos que $v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) \geq \tilde{M}(\tilde{t})$, para $\tilde{\Delta}-$casi todo $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}$, por lo que, por (HGf$_2$), tenemos que

$$v(\tilde{T}) = t_0 + \int_{[\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}} v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) \ \tilde{\Delta}\tilde{t} \geq t_0 + \int_{[\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}} \tilde{M}(\tilde{t}) \ \tilde{\Delta}\tilde{t} \geq T,$$

lo que implica que se verifica (2.44). □

Teorema 2.6.14 *Supongamos que se cumple la condición* (Hs) *y que existe* $\tilde{M} \in L^1_{\tilde{\Delta}}([\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}})$ *tal que se verifica* (HGf$_1$) *y* (HGf$_2$) *y, para todo* $(t, \tilde{t}) \in [t_0, T) \times [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}$*, existe* $\varepsilon = \varepsilon(t, \tilde{t}) > 0$ *y* $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(t, \tilde{t}) > 0$ *tal que* $t + \varepsilon \in D$ *cuando* $t \in D$*,* $\tilde{t} + \tilde{\varepsilon} \in \tilde{D}$*, la restricción* $f : [t, t+\varepsilon] \times [\tilde{t}, \tilde{t} + \tilde{\varepsilon}]_{\tilde{\mathbb{T}}} \to \bar{\mathbb{R}}$ *satisface* (HLf) *y* (Hg) *y, además, si* $t \in D$*, entonces* $\displaystyle\int_{[\tilde{t}, \tilde{t}+\tilde{\varepsilon})_{\tilde{\mathbb{T}}}} \tilde{M}(\tilde{s})\ \tilde{\Delta}\tilde{s} \geq \varepsilon$*.*

Entonces, (P_7) *tiene soluciones extremales en el conjunto* Y *definido en* (2.41)*. Además, se verifican las igualdades* (2.42) *y* (2.43)*.*

Demostración: Sean ε y $\tilde{\varepsilon}$ tales que $f : [t_0, t_0 + \varepsilon] \times [\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \tilde{\varepsilon}]_{\tilde{\mathbb{T}}} \to \bar{\mathbb{R}}$ satisface (HLf) y (Hg) y, $\displaystyle\int_{[\tilde{t}_0, \tilde{t}_0+\tilde{\varepsilon})_{\tilde{\mathbb{T}}}} \tilde{M}(\tilde{s})\ \tilde{\Delta}\tilde{s} \geq \varepsilon$; el teorema 2.6.13 establece que el problema (P_7) tiene soluciones extremales en $[t_0, t_0 + \varepsilon]_{\mathbb{T}}$ con $\Delta-$derivada débil estrictamente positiva en $[t_0, t_0 + \varepsilon)_{\mathbb{T}}$.

Sea $t_1 \in D$ el supremo de $t \in (t_0, T]_{\mathbb{T}}$ tal que el problema (P_7) tiene soluciones extremales en el conjunto de funciones absolutamente continuas en $[t_0, t]_{\mathbb{T}}$ con $\Delta-$derivada débil estrictamente positiva en $[t_0, t)_{\mathbb{T}}$. Se verifica que $t_1 = T$; en efecto, si $t_1 < T$, entonces, la solución maximal u^* de (P_7) en $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ satisface que o bien $u^*(t_1) < \tilde{T}$ o $u^*(t_1) = \tilde{T}$.

Si $u^*(t_1) < \tilde{T}$, entonces, el argumento utilizado anteriormente permite obtener una prolongación de u^* lo que es una contradicción con la elección de t_1.

En otro caso, si $u^*(t_1) = \tilde{T}$, entonces, por el teorema 2.6.5, la nota 2.6.6 y la condición (HGf$_1$), sabemos que $v := (u^*)^{-1}$ verifica

$$v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) = \tilde{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), v(\tilde{g}(\tilde{t}))) \geq \tilde{M}(\tilde{t}) \qquad \tilde{\Delta} - \text{c. t. p. } \ \tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}},$$

de donde se deduce, por (HGf$_2$), que

$$t_1 = v(\tilde{T}) = t_0 + \int_{[\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}} v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t})\ \tilde{\Delta}\tilde{t} \geq T,$$

que es una contradicción con $t_1 < T$. □

2.6.3. Resultados de unicidad

A continuación, introduciremos condiciones para garantizar la existencia de a lo sumo una o una única solución de (P_7) en el conjunto Y definido en (2.41).

Vamos a suponer que $f : [t_0, T] \times \tilde{D} \to \bar{\mathbb{R}}$ verifica la siguiente condición:

(HUf) Para todo $t_1, t_2 \in [t_0, T]_{\mathbb{T}}$, $t_1 \leq t_2$, y para $\tilde{\Delta}-$casi todo $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T})_{\tilde{\mathbb{T}}}$,

$$f(t_1, \tilde{g}(\tilde{t})) - f(t_2, \tilde{g}(\tilde{t})) \leq h(t_2 - t_1, \tilde{g}(\tilde{t})),$$

donde $h : \mathbb{R}_+ \times \tilde{D} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ es una función tal que $w \equiv 0$ es la única función absolutamente continua en $\tilde{D}$ que verifica

$$(\tilde{P}_h)\begin{cases} w^{\tilde{\Delta}}(\tilde{t}) \leq \text{mín}\left\{h(w(\tilde{g}(\tilde{t})),\tilde{g}(\tilde{t}))\cdot \tilde{m}^2(\tilde{g}(\tilde{t})), \tilde{m}(\tilde{g}(\tilde{t}))\right\} \ \tilde{\Delta} - \text{c. t. } \tilde{t} \in \tilde{D}^0, \\ \\ w(\tilde{t}_0) = 0. \end{cases}$$

Teorema 2.6.15 *El problema* (P_7) *tiene a lo sumo una solución* u *en* D *tal que* $u \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ u$ *on* D^0 *si se verifican las hipótesis* (HLf$_3$)*,* (HUf) *y* (Hg)*.*

Demostración: Si $u \in AC(D)$ es una solución de (P_7), se deduce de (HLf$_3$) que $u^{\Delta} > 0$ en $[t_0, T]_{\mathbb{T}}$.

Por el corolario 2.6.7 basta demostrar que $(\tilde{P}_7)$ tiene a lo sumo una solución v en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_1]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, tal que $v^{\tilde{\Delta}} > 0$ en $\tilde{\Delta}-$casi todo punto de $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_1)_{\tilde{\mathbb{T}}}$ y $v \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ v$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_1)_{\tilde{\mathbb{T}}}$, para cada $\tilde{T}_1 \in (\tilde{t}_0, \tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$.

Supongamos que v_1 y v_2 son dos soluciones de $(\tilde{P}_7)$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_1]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, donde $\tilde{T}_1 \in (\tilde{t}_0, \tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$. Del lema 2.3.2 se sigue que $x(\tilde{t}) = \text{máx}\{v_1(\tilde{t}), v_2(\tilde{t})\}$ es una subsolución de $(\tilde{P}_7)$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_1]_{\tilde{\mathbb{T}}}$. Definimos

$$v(\tilde{t}) := \begin{cases} x(\tilde{t}) - v_1(\tilde{t}); & \text{si} \quad \tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T}_1)_{\tilde{\mathbb{T}}}, \\ \\ x(\tilde{T}_1) - v_1(\tilde{T}_1); & \text{si} \quad \tilde{t} \in [\tilde{T}_1, \tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}}, \end{cases} \tag{2.45}$$

Debido a que v_1 es una solución y x es una subsolución de $(\tilde{P}_7)$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_1]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, deducimos, de (HLf$_3$) y (HUf), que para $\tilde{\Delta}-$casi todo $\tilde{t} \in [\tilde{t}_0, \tilde{T}_1)_{\tilde{\mathbb{T}}}$

$$\begin{aligned} v^{\tilde{\Delta}}(\tilde{g}(\tilde{t})) &\leq \tilde{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), x(\tilde{g}(\tilde{t}))) - \tilde{f}(\tilde{g}(\tilde{t}), v_1(\tilde{g}(\tilde{t}))) \\ &= \frac{f(v_1(\tilde{g}(\tilde{t})), \tilde{g}(\tilde{t})) - f(x(\tilde{g}(\tilde{t})), \tilde{g}(\tilde{t}))}{f(v_1(\tilde{g}(\tilde{t})), \tilde{g}(\tilde{t})) \cdot f(x(\tilde{g}(\tilde{t})), \tilde{g}(\tilde{t}))} \\ &\leq \text{mín}\left\{h(v(\tilde{g}(\tilde{t})), \tilde{g}(\tilde{t})) \cdot \tilde{m}^2(\tilde{g}(\tilde{t})),\ \tilde{m}(\tilde{g}(\tilde{t}))\right\}; \end{aligned}$$

entonces v verifica (P_h), lo que implica que $x = v_1$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_1]_{\tilde{\mathbb{T}}}$. Por otra parte, de una manera similar, se deduce que $x = v_2$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_1]_{\tilde{\mathbb{T}}}$. Así $v_1 = v_2$ en $[\tilde{t}_0, \tilde{T}_1]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, lo que finaliza la prueba. □

El siguiente teorema de existencia y unicidad es una consecuencia de los teoremas 2.6.13 y 2.6.15.

Teorema 2.6.16 *Supongamos que se verifican* (HGf)*,* (Hg)*,* (Hs) *y* (HUf)*. Entonces,* (P_7) *tiene exactamente una solución en el conjunto* Y *definido en* (2.41)*.*

2.6.4. Ejemplos

En esta sección se ilustra la aplicabilidad de algunos de los anteriores resultados para dos elecciones particulares de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ y ecuaciones dinámicas de primer orden.

En el ejemplo siguiente se trata de ilustrar en un caso particular una técnica que puede ser aplicada para obtener las soluciones de muchas ecuaciones dinámicas de primer orden. Por ejemplo, es útil para tratar la siguiente ecuación dinámica.

$$x^{\Delta}(t) = \frac{a(x)}{a_n(x)t^n + \cdots + a_1(x)t + a_0(x)}$$

en apropiados subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.6.17 *Para $q > 1$ fijado, se define $q^{\mathbb{Z}} := \{\, q^k \; : \; k \in \mathbb{Z}\,\}$, sea $\overline{q^{\mathbb{Z}}} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ su clausura, se considera $\tilde{\mathbb{T}} = \overline{q^{\mathbb{Z}}}$.*

Sea $f : [0,\infty) \times [0,\infty)_{\tilde{\mathbb{T}}} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t,x) = \begin{cases} 0, & si \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{(q+1)\, x}, & si \quad x \in (0,1], \\ \dfrac{(q-1)\, x\, \tilde{\sigma}(x)}{(x^2-1)\, \tilde{\sigma}(x)\, t + (q^2-1)\, x^2\, e^{\frac{\ln^2(\tilde{\sigma}(x))}{\ln(q)}}}, & si \quad x > 1, \end{cases}$$

Es fácil comprobar que f cumple (HLf) *y* (Hg) *en $[0,T] \times [0,\tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, para todo $T \in \mathbb{R}^+$ y $\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}$. Así, el teorema 2.6.10 garantiza la existencia de soluciones extremales de (P_7) en un intervalo de $\mathbb{T}$ si la condición* (Hs) *se verifica.*

Consideramos el problema $(\tilde{P}_7)$ con $\tilde{f}$ definida en (2.32) *y $t_0 = \tilde{t}_0 = 0$.*

En la sección 1.3.4 se vio que $\displaystyle\int_{[0,s)_{\mathbb{T}}} \tau\; \tilde{\Delta}\tau = s^2/(q+1)$ y así, la función $v(s) = s^2$ es la única solución de $(\tilde{P}_7)$ en $[0,\tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$, para $\tilde{T} \in [0,1]_{\tilde{\mathbb{T}}}$.

Por otro lado, el problema

$$z^{\tilde{\Delta}}(s) = \frac{s^2-1}{(q-1)s}\, z + e^{\frac{\ln^2(\tilde{\sigma}(s))}{\ln(q)}}\, \frac{(q+1)s}{\tilde{\sigma}(s)} = p(s)\, z + g(s) \quad s \geq 1, \;\; s \in \tilde{\mathbb{T}},$$

con la condición inicial $z(1) = 1$, es una $q-$ecuación en diferencias lineal regresiva, es decir, $1 + \tilde{\mu}(s)p(s) \neq 0$ para todo $s \in \tilde{\mathbb{T}}$, y g es rd-continua, por lo que existe una única solución de este problema, ver [25, Capítulo 2], que viene dada por

$$z(s) = e_p(s,1)\left(z(1) + \int_{[1,s)_{\tilde{\mathbb{T}}}} \frac{g(\tau)}{e_p(\sigma(\tau),1)} \Delta\tau\right).$$

Consideramos ahora el caso especial cuando $p(s) = \frac{s^2-1}{(q-1)s}$. Usando las técnicas de [25, Capítulo 2] obtenemos que $e_p(s,1) = \frac{1}{s}\, e^{\frac{\ln^2(s)}{\ln(q)}}$ y $z(s) = \frac{s^2-1}{s}\, e^{\frac{\ln^2(s)}{\ln(q)}} + 1$, $s \in [1,\infty)_{\tilde{\mathbb{T}}}$.

Es fácil comprobar que la única solución

$$v(s) = \begin{cases} s^2, & si \quad s \in [0,1]_{\tilde{\mathbb{T}}}, \\ \dfrac{s^2-1}{s}\, e^{\frac{\ln^2(s)}{\ln(q)}} + 1, & si \quad s \in \tilde{\mathbb{T}},\, s > 1, \end{cases}$$

de la ecuación dinámica ($\tilde{P}_7$) *verifica las condiciones del teorema 2.6.5 y el corolario 2.6.7 en todo intervalo compacto del tipo* $[0,\tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$*, si* $\mathbb{T} = \{\, q^{-2k} \,:\, k \in \mathbb{N}_0 \,\} \cup \{\, q^{k(k+1)} - q^{k(k-1)} + 1 \,:\, k \in \mathbb{N}_0 \,\}$*. Así, la única solución de* (P_7) *en* $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ *existe y está únicamente determinada por* $v^{-1} : [0,\infty)_{\mathbb{T}} \to [0,\infty)_{\tilde{\mathbb{T}}}$.

En el siguiente ejemplo, los resultados obtenidos se aplican a un modelo de población para garantizar la existencia y la aproximación de soluciones extremales de una ecuación dinámica con condiciones iniciales en un conjunto definido como la unión disjunta de intervalos.

Ejemplo 2.6.18 *Sea* $\tilde{\mathbb{T}} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} [2k, 2k+1]$.

Se define $f : \mathbb{R} \times \tilde{\mathbb{T}} \to \bar{\mathbb{R}}$ *para cada* $(x,t) \in \mathbb{R} \times \tilde{\mathbb{T}}$ *como*

$$f(x,t) := \frac{1}{p(t)\,x + e_p(t,0)} \tag{2.46}$$

si $t \neq 2k + \frac{1}{n}$*,* $k, n \in \mathbb{N}_0$*,* $n > 1$*, y* $f(x, 2k + \frac{1}{n}) := 0$*, donde* $p : \tilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *es una función rd-continua y regresiva. Es evidente que las hipótesis* (HLf) *y* (Hg) *se cumplen en* $[0,X] \times [0,\tilde{T}]_{\tilde{\mathbb{T}}}$*, para todo* $X \in \mathbb{R}^+$ *y* $\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}$*. De este modo, el teorema 2.6.10 garantiza la existencia de soluciones extremales de* (P_7) *con* f *definida en* (2.46)*,* $t_0 = \tilde{t}_0 = 0$ *y* g *la identidad en* $\mathbb{T} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [x(2k), x(2k+1)]$*, donde* x *es la única solución del problema lineal:*

$$x^{\tilde{\Delta}}(t) = p(t)\; x + e_p(t,0) \tag{2.47}$$

para $\tilde{\Delta}-$*casi todo* $t \in \tilde{\mathbb{T}}$ *y* $x(0) = 0$*. Esta solución está dada, para* $\tilde{\Delta}-$*casi todo punto* $t \in \tilde{\mathbb{T}}$*, ver [25, Capítulo 2], por*

$$x(t) = e_p(t,0) \int_{[0,t)_{\tilde{\mathbb{T}}}} \frac{\tilde{\Delta}\tau}{1 + \tilde{\mu}(\tau)p(\tau)}.$$

La unicidad de solución del último problema junto con el teorema 2.6.5 y corolario 2.6.7 permiten garantizar que el problema (P_7) *tiene una única solución.*

Para terminar este ejemplo señalamos que la ecuación (2.47) *puede ser utilizada tanto en el caso real como en el discreto como modelo matemático de dinámica de poblaciones en un cierto período de tiempo, pero el sistema también cubre el modelo de población de una única especie en un subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}$*; este conjunto considerado puede interpretarse de la siguiente forma: una unidad de tiempo es la duración de la vida de esta especie que justo antes de su muerte pone sus huevos que son incubados hasta una unidad de tiempo posterior. Para estas especies, el resultado significa que se puede encontrar una función de tiempo,* T*, cuyo crecimiento está influido por el número de individuos en la población* x*, de acuerdo a la ecuación dinámica* $T^{\Delta}(x) = f(x, T(x))$ *para* $\Delta-$*casi todo* $x \in \mathbb{T}$*, y* f *es la dada en* (2.46)*.*

2.7. Sistemas con infinitas ecuaciones dinámicas funcionales en presencia de subsoluciones y sobresoluciones

El objetivo de esta sección es probar la existencia y aproximación de soluciones extremales del siguiente sistema con infinitas ecuaciones funcionales con condiciones de frontera funcionales:

$$(P_8)\begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(g(t), u(g(t)), u) & \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D^o := [t_0, T)_{\mathbb{T}}, \\ \\ B(\theta, u(\theta), u) = 0_{\mathbb{R}^M} & \text{para todo } \ \theta \in D_- := [t_{-1}, t_0]_{\mathbb{T}}, \end{cases}$$

donde $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado arbitrario, $t_{-1}, t_0, T \in \mathbb{T}$ son tales que $t_{-1} < t_0 < T$, $f := (f_\nu)_{\nu \in M} : D \times \mathbb{R}^M \times \prod_{\nu \in M} A(D_1) \to \bar{\mathbb{R}}^M$, M es un conjunto de índices arbitrario, $D := [t_0, T]_{\mathbb{T}}$,

$$A(D_1) := \left\{ \gamma : D_1 \to \mathbb{R} \, : \, \gamma|_{D_-} \in B(D_-) \text{ y } \gamma|_D \in AC(D) \right\},$$

donde $D_1 := D_- \cup D$, $B(D_-)$ denota la clase de funciones acotadas en D_- y $B := (B_\nu)_{\nu \in M} : D_- \times \mathbb{R}^M \times \prod_{\nu \in M} A(D_1) \to \mathbb{R}^M$.

Muchas de las ecuaciones dinámicas funcionales conocidas pueden ser reducidas a una ecuación de la forma de (P_8), por ejemplo, ecuaciones dinámicas con máximo o ecuaciones dinámicas con retardo. Ambos tipos de ecuaciones han atraido recientemente gran atención debido a su importancia en la modelización de diversos procesos, entre los que se pueden citar, para las ecuaciones dinámicas con máximo, el control automático de sistemas técnicos, y para las ecuaciones dinámicas con retardo, fenómenos biológicos biotecnológicos o ecológicos que dependen de su prehistoria.

Es importante destacar que las condiciones de frontera consideradas en (P_8) cubren tanto las condiciones iniciales $u(t_0) = u_0$ como múltiples tipos de condiciones periódicas, tales como las condiciones periódicas usuales $u(t_0) = u(T)$ o las condiciones periódicas funcionales $u(\theta) = u(\theta + T)$ para todo $\theta \in D_-$, además de condiciones más generales como condiciones del supremo, para cada $\nu \in M$, $u_\nu(t_0) = \sup_{t \in S} u_\nu(t)$ para algún $S \subset D_1$ o condiciones integrales, para cada $\nu \in M$, $\lambda_\nu = \int_P u_\nu(s) \, \Delta s$, siendo λ_ν una constante real arbitraria, o las de tipo media, para cada $\nu \in M$, $u_\nu(0) = \int_P u_\nu(s) \, \Delta s$ para algún conjunto $\Delta-$medible $P \subset D^o$.

Los resultados de esta sección generalizan algunos de los obtenidos en las secciones anteriores sobre la existencia y aproximación de soluciones extremales de ecuaciones dinámicas escalares. Además, también se generalizan los resultados demostrados en [38] para el caso particular en el que el conjunto cerrado $\mathbb{T}$ coincida con todo $\mathbb{R}$ y las condiciones de frontera sean de la forma $B(\theta, u(\theta), u) = u(\theta) - \bar{B}u(\theta)$ para alguna función $\bar{B} : \prod_{\nu \in M} A(D_1) \to (B(D_-))^M$.

Esta sección está organizada del siguiente modo. La subsección 2.7.1 está dedicada a introducir las definiciones y propiedades necesarias para el resto de la sección. En la subsección 2.7.2, asumiendo que una conveniente ecuación dinámica escalar con condición inicial tiene soluciones extremales en cierto conjunto, se probará, usando el teorema de punto fijo de Tarski, que el problema infinito funcional (P_8) tiene soluciones extremales en otro conjunto y se darán las fórmulas para obtener su aproximación. La última parte de dicha subsección está dedicada a probar una consecuencia del resultado principal que supone una generalización a orden infinito con dependencia funcional en la parte no lineal de la ecuación de los resultados de la sección 2.4. Finalmente, en la subsección 2.7.3 se ilustra la aplicabilidad de los resultados de existencia con dos ejemplos; el primero de ellos se trata de un sistema de infinitas ecuaciones dinámicas funcionales con condiciones de frontera funcionales en un conjunto cerrado de números reales definido como la unión de un intervalo cerrado de números reales y el conjunto ternario de Cantor; el segundo es un sistema finito de ecuaciones dinámicas con retardo con condiciones de frontera periódicas funcionales en un conjunto cerrado de números reales definido como la unión finita y disjunta de diversos intervalos cerrados de números reales el cual aparece de modo natural en los modelos matemáticos de dinámica de poblaciones de ciertas especies.

2.7.1. Preliminares

En esta subsección se introducen algunas notaciones y definiciones relacionadas con el problema (P_8) y se enuncia el teorema de punto fijo de Tarski.

Las relaciones de orden que se usarán son las siguientes. En $AC(D)$ y en $A(D_1)$, se considera la relación de orden parcial componente a componente, es decir,

$$u_1, u_2 \in AC(D), \quad u_1 \leq u_2 \text{ si y sólo si } u_1(t) \leq u_2(t) \text{ para todo } t \in D$$

y

$$\gamma_1, \gamma_2 \in A(D_1), \quad \gamma_1 \leq \gamma_2 \text{ si y sólo si } \gamma_1(t) \leq \gamma_2(t) \text{ para todo } t \in D_1,$$

mientras que en $\prod_{\nu \in M} A(D_1)$ se considera la relación de orden parcial inducida componente a componente, esto es,

$$u, z \in \prod_{\nu \in M} A(D_1), \quad u \leq z \text{ si y sólo si } u_\nu \leq z_\nu \text{ para todo } \nu \in M.$$

Puesto que en esta sección se trabajará con diferentes conjuntos de funciones, se utilizará la siguiente notación. En un conjunto parcialmente ordenado X se define para cada $a, b \in X$ con $a \leq b$ el intervalo

$$[a, b]_X := \{\, x \in X \,:\, a \leq x \leq b \,\}.$$

A continuación se establecen los conceptos relacionados con el problema (P_8).

Definición 2.7.1 *Se dice que* $u := (u_\nu)_{\nu\in M} \in \prod_{\nu\in M} A(D_1)$ *es una* **subsolución de** (P_8) *si para cada* $\nu \in M$ *se cumple que*

$$\begin{cases} u_\nu^\Delta(t) \le f_\nu(g(t), u(g(t)), u) & \text{para } \Delta - c.\ t.\ p.\ \ t \in D^o, \\ \\ B_\nu(\theta, u(\theta), u) \le 0 & \text{para todo } \ \theta \in D_-. \end{cases}$$

El concepto de **sobresolución de** (P_8) *se define cambiando el sentido de las desigualdades anteriores.*

Se dice que $u := (u_\nu)_{\nu\in M} \in \prod_{\nu\in M} A(D_1)$ *es una* **solución de** (P_8) *si* u *es tanto una subsolución como una sobresolución de* (P_8).

Definición 2.7.2 *Para un subconjunto* $Y \subset \prod_{\nu\in M} A(D_1)$, *se dice que* $u_* \in Y$ *es la* **solución minimal de** (P_8) **en** Y *si* u_* *es una solución de* (P_8) *y* $u_* \le u$ *para cualquier otra solución* $u \in Y$ *de* (P_8)*; la* **solución maximal de** (P_8) **en** Y *se define cambiando el sentido de las desigualdades anteriores. Siempre que las soluciones minimal y maximal de* (P_8) *en* Y *existan, se llaman* **soluciones extremales de** (P_8) **en** Y.

Finalmente, se enuncia el teorema de punto fijo de Tarski cuya demostración se puede ver en [85] en el cual se asume la siguiente definición.

Definición 2.7.3 *Se dice que un conjunto parcialmente ordenado* X *es un* **retículo** *si* $\sup\{x_1, x_2\}$ *y* $\text{ínf}\{x_1, x_2\}$ *existen para todo* $x_1, x_2 \in X$. *Un retículo* X *es* **completo** *cuando cada subconjunto no vacío* $Y \subset X$ *tiene supremo e ínfimo en* X. *En particular, cada retículo completo tiene máximo y mínimo.*

Teorema 2.7.4 *Toda aplicación creciente* $G : X \to X$ *en un retículo completo* X *tiene un punto fijo minimal,* x_*, *y un punto fijo maximal,* x^*. *Además,*

$$x_* = \text{mín}\{\, x \in X \ :\ Gx \le x \,\} \quad y \quad x_* = \text{máx}\{\, x \in X \ :\ x \le Gx \,\}.$$

2.7.2. Existencia y aproximación de soluciones extremales

En esta subsección se demuestra la existencia y aproximación de soluciones extremales de (P_8) en cierto conjunto; para ello se trabajará en el espacio que se define a continuación.

Para cada $\nu \in M$, sea $h_\nu : D \to \bar{\mathbb{R}}$ una función perteneciente al conjunto $L^1_\Delta(D^o)$. Se definen los conjuntos

$$AC_{h_\nu}(D) := \left\{ \ \varphi : D \to \mathbb{R} :\ |\varphi(s) - \varphi(t)| \le \left| \int_{[s,t)_\mathbb{T}} h_\nu(r)\,\Delta r \right| \quad \forall\, s, t \in D \right\}$$

y

$$S_{h_\nu} := \left\{\ \gamma : D_1 \to \mathbb{R}\ :\ \gamma|_{D_-} \in B(D_-) \text{ y } \gamma|_D \in AC_{h_\nu}(D)\ \right\};$$

nótese que $AC_{h_\nu}(D) \subset AC(D)$ y $S_{h_\nu} \subset A(D_1)$. Se define $S_h := \prod_{\nu \in M} S_{h_\nu}$.

Para cada $\nu \in M$, se denota como $e^\nu := (\delta_\mu^\nu)_{\mu \in M}$ el elemento de $\mathbb{R}^M$ definido como $\delta_\mu^\nu = 1$ si $\mu = \nu$ y $\delta_\mu^\nu = 0$ si $\mu \neq \nu$.

En el resultado principal se asumirán las siguientes condiciones:

(H_8^1) Existen $\alpha, \beta \in S_h$ con $\alpha \leq \beta$.

(H_8^2) Para cada $\gamma := (\gamma_\nu)_{\nu \in M} \in [\alpha, \beta]_{S_h}$, con α, β dadas en (H_8^1), y cada $\nu \in M$, la ecuación dinámica escalar

$$(P_\nu^\gamma) \begin{cases} v^\Delta(t) = N_\nu^\gamma(g(t), v(g(t))) & \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D^o, \\ \\ v(t_0) = \gamma_\nu(t_0) - B_\nu(t_0, \gamma(t_0), \gamma), \end{cases}$$

donde $N_\nu^\gamma : D \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ está definida como

$$N_\nu^\gamma(t, z) = f_\nu(t, \gamma(t) + (z - \gamma_\nu(t))e^\nu, \gamma) \quad \text{para todo } (t, z) \in D \times \mathbb{R},$$

tiene una solución maximal en $Y := [\alpha_\nu|_D, \beta_\nu|_D]_{AC_{h_\nu}(D)}$, v^*, y una solución minimal en Y, v_*, que, además, verifican las siguientes igualdades:

$$v^* = \max\left\{ v \in Y : \begin{cases} v^\Delta(t) \leq N_\nu^\gamma(g(t), v(g(t))),\ \Delta - \text{c.t.p. } t \in D^o, \\ \\ v(t_0) \leq \gamma_\nu(t_0) - B_\nu(t_0, \gamma(t_0), \gamma) \end{cases} \right\}, \tag{2.48}$$

y

$$v_* = \min\left\{ v \in Y : \begin{cases} v^\Delta(t) \geq N_\nu^\gamma(g(t), v(g(t))),\ \Delta - \text{c.t.p. } t \in D^o, \\ \\ v(t_0) \geq \gamma_\nu(t_0) - B_\nu(t_0, \gamma(t_0), \gamma) \end{cases} \right\}, \tag{2.49}$$

(H_8^3) Para todo $\gamma := (\gamma_\nu)_{\nu \in M} \in [\alpha, \beta]_{S_h}$, con α, β dadas en (H_8^1), cada $\nu \in M$ y $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ se verifica que si $x, y \in \mathbb{R}^M$ son tales que $x \leq y$ y $x_\nu = y_\nu$, entonces, $f_\nu(g(t), x, \gamma) \leq f_\nu(g(t), y, \gamma)$.

(H_8^4) Para cada $\nu \in M$, $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in \mathbb{R}^M$ la función $f_\nu(g(t), x, \cdot)$ es creciente en $[\alpha, \beta]_{S_h}$, con α, β dadas en (H_7^1).

(H_8^5) Si α, β están dadas en (H_8^1), entonces, para todo $\theta \in D_-$ y cada $\nu \in M$, los siguientes enunciados son ciertos:

i) Para cada $\gamma := (\gamma_\nu)_{\nu \in M} \in [\alpha, \beta]_{S_h}$, la función definida para todo $\eta := (\eta_\nu)_{\nu \in M} \in [\alpha, \beta]_{S_h}$ como $\eta_\nu(\theta) - B_\nu(\theta, \eta(\theta), \gamma)$ es creciente en $[\alpha, \beta]_{S_h}$.

ii) $B_\nu(\theta, \alpha(\theta), \alpha) \le 0 \le B_\nu(\theta, \beta(\theta), \beta)$.

iii) Para todo $x \in [\alpha(\theta), \beta(\theta)]_{\mathbb{R}^M}$, la función $B_\nu(\theta, x, \cdot)$ es decreciente en $[\alpha, \beta]_{S_h}$.

El principal resultado de esta sección es el siguiente.

Teorema 2.7.5 *Supóngase que f y B son tales que se verifican las condiciones $(H_8^1) - (H_8^5)$, entonces, el problema (P_8) tiene una solución maximal, u^*, y una solución maximal, u_*, en $[\alpha, \beta]_{S_h}$. Además, se cumplen las siguientes igualdades:*

$$u^* = \text{máx}\{\, u \in [\alpha, \beta]_{S_h} \, : \, u \ \ \textit{es una subsolución de } (P_8)\}, \tag{2.50}$$

y

$$u_* = \text{mín}\{\, u \in [\alpha, \beta]_{S_h} \, : \, u \ \ \textit{es una sobresolución de } (P_8)\}. \tag{2.51}$$

Demostración: Dada la analogía entre la demostración de la existencia de solución minimal y maximal de (P_8) en $[\alpha, \beta]_{S_h}$, solamente se probará la segunda de ellas.

Para cada $\nu \in M$, considérese la aplicación $G_\nu : [\alpha, \beta]_{S_h} \to [\alpha_\nu, \beta_\nu]_{S_{h_\nu}}$ definida para todo $\gamma \in [\alpha, \beta]_{S_h}$ como:

$$G_\nu\gamma(\theta) := \gamma_\nu(\theta) - B_\nu(\theta, \gamma(\theta), \gamma) \qquad \text{para todo } \theta \in D_-$$

y

$$G_\nu\gamma|_D := \text{ la solución maximal de } (P_\nu^\gamma) \text{ en } [\alpha_\nu|_D, \beta_\nu|_D]_{AC_{h_\nu}(D)},$$

además, $G_\nu\gamma|_D$ satisface la igualdad (2.48).

De la condición (H_8^5) se deduce que $\alpha_\nu \le G_\nu\alpha \le G_\nu\gamma \le G_\nu\beta \le \beta_\nu$ en D. Por consiguiente, $G_\nu\gamma \in [\alpha_\nu, \beta_\nu]_{S_{h_\nu}}$.

Considérese la aplicación $G := (G_\nu)_{\nu\in M} : [\alpha, \beta]_{S_h} \to [\alpha, \beta]_{S_h}$ definida para todo $\gamma \in [\alpha, \beta]_{S_h}$ como $G\gamma := (G_\nu\gamma)_{\nu\in M}$.

En primer lugar se verá que $G : [\alpha, \beta]_{S_h} \to [\alpha, \beta]_{S_h}$ es una aplicación creciente. Sean $\gamma, \eta \in [\alpha, \beta]_{S_h}$ tales que $\gamma \le \eta$ y sea $\nu \in M$ arbitrario.

Como consecuencia de (H_8^5) resulta que la desigualdad

$$G_\nu\gamma(\theta) := \gamma_\nu(\theta) - B_\nu(\theta, \gamma(\theta), \gamma) \le \eta_\nu(\theta) - B_\nu(\theta, \eta(\theta), \eta) =: G_\nu\eta(\theta)$$

se verifica para todo $\theta \in D_-$.

Además, $G_\nu\gamma|_D \in [\alpha_\nu|_D, \beta_\nu|_D]_{AC_{h_\nu}(D)}$ y de las condiciones $(H_3) - (H_5)$ se sigue que

$$(G_\nu\gamma)^\Delta(t) = N_\nu^\gamma(g(t), G_\nu\gamma(g(t))) \le N_\nu^\eta(g(t), G_\nu\gamma(g(t))) \,\text{para}\, \Delta\text{-c. t. p. } t \in D^o$$

y

$$G_\nu\gamma(t_0) := \gamma_\nu(t_0) - B_\nu(t_0, \gamma(t_0), \gamma) \le \eta_\nu(t_0) - B_\nu(t_0, \eta(t_0), \eta),$$

de donde se deduce, por (2.48), que $G_\nu\gamma \le G_\nu\eta$.

La arbitrariedad de $\nu \in M$ da lugar a la desigualdad $G\gamma \le G\eta$; por tanto, G es una aplicación creciente.

A continuación se mostrará que $[\alpha,\beta]_{S_h}$ es un retículo completo.

Como $[\alpha,\beta]_{S_h} = \prod_{\nu\in M} [\alpha,\beta]_{S_{h_\nu}}$, es suficiente probar que para cada $\nu \in M$, el conjunto $[\alpha,\beta]_{S_{h_\nu}}$ es un retículo completo.

Fíjese $\nu \in M$ y sea $\emptyset \neq Y \subset [\alpha,\beta]_{S_{h_\nu}}$. Solamente se verá que existe $\sup Y$ en $[\alpha,\beta]_{S_{h_\nu}}$ ya que mediante un argumento similar se obtiene la existencia de $\text{ínf}\, Y$.

Se define

$$\gamma^*(t) := \sup\{\, \gamma(t) \ : \ \gamma \in Y \,\} \quad \text{para todo } t \in D_1.$$

Como para todo $t \in D_1$ se cumple que $\alpha_\nu(t) \leq \gamma(t) \leq \beta_\nu(t)$, resulta que para todo $t \in D_1$, $\gamma^*(t)$ está bien definido y $\alpha_\nu \leq \gamma^* \leq \beta_\nu$ en D_1; así pues, $\gamma^*|_{D_-} \in B(D_-)$. Se probará que $\gamma^*|_D \in AC_{h_\nu}(D)$. Fijados $s,t \in D$ y $\gamma \in Y$, se cumple que

$$\gamma(s) \leq |\gamma(s)-\gamma(t)| + \gamma(t) \leq \left| \int_{[s,t)_{\mathbb{T}}} h_\nu(r)\ \Delta r \right| + \gamma^*(t);$$

tomando el supremo en el lado izquierdo de la desigualdad, se tiene que

$$\gamma^*(s) \leq \left| \int_{[s,t)_{\mathbb{T}}} h_\nu(r)\ \Delta r \right| + \gamma^*(t).$$

Intercambiando s y t, resulta que

$$\gamma^*(t) \leq \left| \int_{[s,t)_{\mathbb{T}}} h_\nu(r)\ \Delta r \right| + \gamma^*(s).$$

Por lo tanto, de la combinación de las dos desigualdades anteriores se concluye que

$$|\gamma^*(s)-\gamma^*(t)| \leq \left| \int_{[s,t)_{\mathbb{T}}} h_\nu(r)\ \Delta r \right|.$$

Como consecuencia, $\gamma^* \in [\alpha,\beta]_{S_{h_\nu}}$ y está claro que $\gamma^* = \sup Y$.

Por lo tanto, la aplicación $G : [\alpha,\beta]_{S_h} \to [\alpha,\beta]_{S_h}$ satisface las condiciones del teorema de punto fijo de Tarski, con lo cual, G tiene un punto fijo maximal, u^*, y además

$$u^* = \text{máx}\{\, u \in [\alpha,\beta]_{S_h} \ : \ u \leq Gu \,\}. \tag{2.52}$$

Para finalizar la demostración, se verá que u^* es la solución maximal de (P_8) en $[\alpha,\beta]_{S_h}$ y verifica la igualdad (2.50). De la definición de G se sigue que u^* es una solución de (P_8).

Sea $u := (u_\nu)_{\nu\in M} \in [\alpha,\beta]_{S_h}$ una subsolución de (P_8), esto es, para cada $\nu \in M$, se tiene que

$$u_\nu^\Delta(t) \leq f_\nu(g(t),u(g(t)),u) = N_\nu^u(g(t),u_\nu(g(t))) \quad \Delta - \text{c. t. p. } t \in D^o, \tag{2.53}$$

y $B_\nu(\theta, u(\theta), u) \leq 0$, para todo $\theta \in D_-$. Así pues, de la definición de G, (2.48) y (2.53) se sigue que $u \leq Gu$, con lo cual, de (2.52), resulta que $u \leq u^*$. Finalmente, como u^* es una solución de (P_8), se sabe que u^* es una subsolución de (P_8) y por lo tanto, la igualdad (2.50) es válida. □

Como una aplicación del resultado anterior, se probará la existencia y aproximación de soluciones extremales del problema (P_8) en $[\alpha, \beta]_{S_h}$, con α y β dadas en (H_8^1), asumiendo la siguiente condición en lugar de (H_8^2).

$(\tilde{H}_8^2)$ Para cada $\gamma := (\gamma_\nu)_{\nu \in M} \in [\alpha, \beta]_{S_h}$, con α, β dadas en (H_8^1) y todo $\nu \in M$, se satisfacen las siguientes propiedades:

i) Para cada $u \in AC(D)$, la función definida para todo $t \in D$ como $f_\nu(t, \gamma(t) + (u(t) - \gamma_\nu(t))e^\nu, \gamma)$ es $\Delta-$medible en D.

ii) Para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y cada $x \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\limsup_{y \to x^-} f_\nu(g(t), \gamma(g(t)) + (y - \gamma_\nu(g(t)))e^\nu, \gamma)$$

$$\leq f_\nu(g(t), \gamma(g(t)) + (x - \gamma_\nu(g(t)))e^\nu, \gamma)$$

$$\leq \liminf_{y \to x^+} f_\nu(g(t), \gamma(g(t)) + (y - \gamma_\nu(g(t)))e^\nu, \gamma).$$

iii) Para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$, se verifica la siguiente desigualdad:

$$|f_\nu(g(t), z, \gamma)| \leq h_\nu(t) \qquad \text{para todo } z \in [\alpha(g(t)), \beta(g(t))]_{\mathbb{R}^M}.$$

iv) Para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$, es cierto que

$$\alpha_\nu^\Delta(t) \leq f_\nu(g(t), \alpha(g(t)), \alpha) \qquad \text{y} \qquad \beta_\nu^\Delta(t) \geq f_\nu(g(t), \beta(g(t)), \beta).$$

v) Si $g = Id|_{[t_0, \rho(T)]_\mathbb{T}}$, entonces, para cada $\gamma := (\gamma_\nu)_{\nu \in M} \in [\alpha, \beta]_{S_h}$ y para todo punto aislado por la derecha $t \in D^o$, la función definida para todo $z \in \mathbb{R}$ como $z + (\sigma(t) - t)f(t, \gamma(t) + (z - \gamma_\nu(t))e^\nu, \gamma)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

Es importante destacar que la condición iii) anterior da un modo natural para elegir la función perteneciente a $L_\Delta^1(D^o)$, h_ν.

Corolario 2.7.6 . *Si f y B son tales que las condiciones (H_8^1), $(\tilde{H}_8^2)$ y $(H_8^3)-(H_8^5)$ son válidas, entonces, el problema (P_8) tiene una solución maximal, u^*, y una solución minimal, u_*, en $[\alpha, \beta]_{S_h}$. Además, se verifican las igualdades* (2.50) *y* (2.51).

Demostración: Solamente se tiene que probar que (H_8^2) se sigue de $(\tilde{H}_8^2)$. Fíjense $\nu \in M$ y $\gamma \in [\alpha, \beta]_{S_h}$.

Como consecuencia de la condición iv) en $(\tilde{H}_8^2)$ y $(H_8^3)-(H_8^5)$, se deduce que para $\Delta-$casi todo punto $t\in D^o$, se cumple que

$$\begin{array}{rcl}\alpha_\nu^\Delta(t) & \leq & f_\nu(g(t),\alpha(g(t)),\alpha)\\ & \leq & f_\nu(g(t),\gamma(g(t))+(\alpha(g(t))-\gamma_\nu(g(t)))e^\nu,\gamma)=N_\nu^\gamma(g(t),\alpha(g(t)))\end{array}$$

y

$$\alpha_\nu(t_0)\leq\alpha_\nu(t_0)-B_\nu(t_0,\alpha(t_0),\alpha)\leq\gamma_\nu(t_0)-B_\nu(t_0,\gamma(t_0),\gamma);$$

de un modo análogo se prueban las desigualdades inversas para la función β_ν. Por consiguiente, $\alpha_\nu|_D$ y $\beta_\nu|_D$ son una subsolución y una sobresolución respectivamente de la ecuación dinámica escalar (P_ν^γ).

Además, $(\tilde{H}_8^2)$ garantiza las siguientes propiedades:

1. Para cada $u\in AC(D)$, la función $N_\nu^\gamma(\cdot,u(\cdot))$ es $\Delta-$medible en D.

2. Para $\Delta-$casi todo punto $t\in D^o$ y todo $x\in\mathbb{R}$, se verifica que

$$\begin{array}{rcl}\limsup\limits_{y\to x^-}N_\nu^\gamma(g(t),y) & = & \limsup\limits_{y\to x^-}f_\nu(g(t),\gamma(g(t))+(y-\gamma_\nu(g(t)))e^\nu,\gamma)\\ & \leq & f_\nu(g(t),\gamma(g(t))+(x-\gamma_\nu(g(t)))e^\nu,\gamma)\\ & = & N_\nu^\gamma(g(t),x)\\ & \leq & \liminf\limits_{y\to x^+}f_\nu(g(t),\gamma(g(t))+(y-\gamma_\nu(g(t)))e^\nu,\gamma)\\ & = & \liminf\limits_{y\to x^+}N_\nu^\gamma(g(t),y).\end{array}$$

3. Para $\Delta-$casi todo punto $t\in D^o$, se cumple que

$$|N_\nu^\gamma(g(t),x)|\leq h_\nu(t)\qquad\text{para todo } x\in[\alpha_\nu(g(t)),\beta_\nu(g(t))].$$

4. Si $g=Id|_{[t_0,\rho(T)]_\mathbb{T}}$, entonces, para cada punto aislado por la derecha $t\in D^o$, la función definida para todo $z\in\mathbb{R}$ como $z+(\sigma(t)-t)N_\nu^\gamma(t,z)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto, una modificación del teorema 2.3.7 para el caso en que α_ν y β_ν pertenezcan al conjunto S_{h_ν} permite afirmar que la ecuación dinámica escalar (P_ν^γ) tiene soluciones extremales en el conjunto $[\alpha_\nu|_D,\beta_\nu|_D]_{AC_{h_\nu}(D)}$ que, además, satisfacen las desigualdades (2.48) y (2.49). $\square$

2.7.3. Ejemplos

A continuación se muestran dos aplicaciones de los resultados anteriores. En la primera de ellas se prueba la existencia y aproximación de soluciones extremales de un sistema con infinitas ecuaciones dinámicas funcionales con condiciones de frontera integrales tipo media sobre un conjunto cerrado de números reales definido como la unión de un intervalo cerrado de números reales y el conjunto ternario de Cantor.

Ejemplo 2.7.7 *Sean C el conjunto ternario de Cantor, $\mathbb{T} = [-1,0] \cup C$ y para cada $t \in \mathbb{T}$, $I_t = \{\, i \in I \,:\, t_i \in R \cap [0,t) \,\}$ siendo $R = \{t_i\}_{i \in I}$ el conjunto de todos los puntos aislados por la derecha de $\mathbb{T}$.*

Sea $f := (f_n)_{n\in\mathbb{N}} : C \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \prod_{n\in\mathbb{N}} A(\mathbb{T}) \to \bar{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$, $\Delta-$casi todo punto $t \in [0,1)_{\mathbb{T}}$ y todo $(x,\gamma) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \prod_{n\in\mathbb{N}} A(\mathbb{T})$ como

$$f_n(t,x,\gamma) := \frac{g(x_n)}{\sqrt{t}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \left(\sum_{j=i+1}^{n} v(x_j) \right) + \left[\sup_{s \in [-1,t]_{\mathbb{T}}} \{\gamma_1(s), \cdots, \gamma_n(s)\} \right] \right\}$$

donde $g, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están definidas como

$$g(z) := \begin{cases} z - z^2, & si \quad z \in [0,1], \\ z^2 - z, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

y

$$v(z) := \begin{cases} 0, & si \quad z < 0, \\ \frac{1}{2}\left(z^2 - \sum_{i \in I_x} \mu^2(t_i) \right), & si \quad z \in C, \\ \frac{1}{2}\left(t_i^2 - \sum_{i \in I_{t_i}} \mu^2(t_i) \right), & si \quad z \in (t_i, \sigma(t_i)) \ para\ algún\ i \in I, \\ 1, & si \quad z > 1 \end{cases}$$

y $[z]$ es la parte entera de z, es decir, el mayor entero menor o igual que z.

Se define $B := (B_n)_{n\in\mathbb{N}} : [-1,0]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \prod_{n\in\mathbb{N}} A(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y todo $(\theta, x, \gamma) \in D_{-1} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \prod_{n\in\mathbb{N}} A(\mathbb{T})$ como

$$B_n(\theta,x,\gamma) := \begin{cases} x - \int_{[0,1)_{\mathbb{T}}} \gamma_n(s)\ \Delta s, & si \quad \theta = 0, \\ 0, & si \quad \theta \neq 0. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n : [0,1]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ definida para $\Delta-$casi todo punto $t \in [0,1)_{\mathbb{T}}$ como

$$h_n(t) := \frac{n(n-1)+2}{8\sqrt{\sigma(t)}};$$

no es difícil comprobar que h_n pertenece al conjunto $L^1_{\Delta}([0,1)_{\mathbb{T}})$.

Sean $\alpha := (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\beta := (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *definidas como*

$$\alpha_n(t) := 0 \quad y \quad \beta_n(t) := 1, \qquad \text{para todos} \;\; n \in \mathbb{N} \;\, y \;\; t \in \mathbb{T};$$

está claro que $\alpha, \beta \in S_h$ *y* $\alpha \leq \beta$, *con lo cual, la hipótesis* (H_8^1) *es cierta.*

A continuación se verá que el sistema de infinitas ecuaciones dinámicas con condiciones de frontera integrales tipo media (P_8) *con* $D_- = [-1, 0]_{\mathbb{T}}$ *y* $D = C$ *tiene soluciones extremales en el conjunto* $[\alpha, \beta]_{S_h}$.

Como consecuencia inmediata de las definiciones anteriores se deducen las condiciones $(\tilde{H}_8^2)$ *y* $(H_8^3)-(H_8^5)$ *y así, el corolario 2.7.6 establece la existencia de soluciones extremales del problema* (P_8) *en* $[\alpha, \beta]_{S_h}$ *y la validez de las igualdades* (2.50) *y* (2.51).

En el siguiente ejemplo se asegura la existencia y aproximación de soluciones extremales para un sistema finito de ecuaciones dinámicas con retardo con condiciones de frontera periódicas funcionales sobre un conjunto cerrado de números reales definido como la unión finita y disjunta de diversos intervalos cerrados de números reales.

Ejemplo 2.7.8 *Sean* $\mathbb{T} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k, 2k+1]$ *y* $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ *fijado.*

Se define $f := (f_j)_{j=1}^N : [0, 10^6]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^N \times \displaystyle\prod_{j=1}^N A([-10^2N, 10^6]) \to \bar{\mathbb{R}}^N$ *para cada* $j \in \{1, \cdots, N\}$ *y todo* $(t, x, \gamma) \in [0, 10^6]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^N \times \displaystyle\prod_{j=1}^N A([-10^2N, 10^6])$ *como*

$$f_j(t, x, \gamma) := x_j \left(a_j(t) - \sum_{i=1}^{10\cdot j} p_{i,j}(t)\; \gamma^i(t - 10i) \right) + \lambda(N) \sum_{i=1}^{j} (x_i(t) - 1)^3$$

con $a_j, p_{i,j} : [0, 10^6]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, \cdots, N\}$, $i \in \{1, \cdots, j\}$, *dadas para cada* $k \in [0, 10^6] \cap \mathbb{N}$ *y todo* $t \in [0, 10)_{\mathbb{T}}$ *por*

$$a_j(10k + t) = -10j^2[t + 1] \qquad y \qquad p_{i,j}(10k + t) = \frac{-j(t + 1)}{(t + 1)^i + 1},$$

donde $[t + 1]$ *significa parte entera de* $t + 1$ *y*

$$\lambda(N) = \begin{cases} 0, & si \;\; N = 1 \\ 1, & si \;\; N \neq 1. \end{cases}$$

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dinámicas funcionales con condiciones de frontera periódicas funcionales:

$$(P_r) \begin{cases} u^{\Delta}(t) = f(\sigma(t), u(\sigma(t)), u) & \text{para } \Delta - c.\ t.\ p.\;\; t \in [0, 10^6)_{\mathbb{T}}, \\ \\ u_j(\theta) = u_j(\theta + 10^6) & \text{para todo } \theta \in [-10^2 j, 0]_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

A continuación se deducirá la existencia y aproximación de soluciones extremales de (P_r) *en el conjunto* $[\alpha,\beta]_{S_h}$*, donde* $\alpha := (\alpha_j)_{j=1}^N$, $\beta := (\beta_j)_{j=1}^N :$ $\mathbb{T} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *están definidas como*

$$\alpha_j(t) := 0 \quad y \quad \beta_j(t) := 1, \qquad \text{para todos } j \in \{1,\cdots,N\} \text{ y } t \in \mathbb{T}$$

y para cada $j \in \{1,\cdots,N\}$*, la función* $h_j : [0,10^6]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *está dada por* $h_j = -2a_j \circ \sigma + j$.

Es obvio que la función h_j *pertenece al conjunto* $L^1_{\Delta}([0,10^6)_{\mathbb{T}})$ *y que se verifican las hipótesis* (H_7^1), $(\tilde{H}_7^2)$ *y* $(H_7^3)-(H_7^5)$*. Por consiguiente, el corolario 2.7.6 garantiza la existencia de soluciones extremales de* (P_r) *en* $[\alpha,\beta]_{S_h}$ *y la validez de* (2.50) *y* (2.51).

Para finalizar, señalar que este sistema pertenece al tipo de ecuaciones que se usan tanto en el caso real como en el caso discreto en el análisis matemático de la dinámica de poblaciones de diferentes especies en determinados períodos de tiempo.

Para $N = 1$ *este sistema incluye la ecuación dinámica que se utiliza en el estudio de poblaciones de aquellas especies periódicas cuya vida se modelice en el conjunto cerrado de números reales definido anteriormente lo cual significa que la vida de cada uno de los individuos de dicha especie dura una unidad de tiempo y justamente antes de que el individuo muera pone sus huevos y los nuevos individuos nacen una unidad de tiempo más tarde; en [37] se pueden ver diferentes especies que siguen este comportamiento. Para dichas especies, el resultado obtenido anteriormente significa que en el período de tiempo considerado se pueden encontrar al menos dos especies periódicas.*

Capítulo 3

Ecuaciones dinámicas de segundo orden

3.1. Introducción

Dedicamos este capítulo al estudio de diversos problemas de ecuaciones dinámicas de segundo orden.

En las dos primeras secciones utilizaremos un enfoque variacional, así como la teoría de puntos críticos, para establecer la existencia de múltiples soluciones positivas de diversas ecuaciones dinámicas, tanto regulares como singulares, de segundo orden con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera. La desigualdad de Wirtinger será la clave para garantizar que el operador usado en la formulación variacional de los distintos problemas considerados es acotado superiormente y coercivo, y de ahí poder asegurar, por la teoría de puntos críticos, la existencia de un mínimo que será la solución débil del problema.

Los resultados obtenidos son muy novedosos en la literatura, tanto por la técnica empleada para demostrarlos como por la amplia clase de funciones que se pueden elegir en la parte no lineal de la ecuación.

Para finalizar el capítulo, utilizamos técnicas de perturbación y variacionales para obtener algunas condiciones suficientes para la existencia de múltiples soluciones positivas en el sentido de las distribuciones de una ecuación dinámica singular de segundo orden homogénea con condiciones de frontera de Dirichlet, que incluye los problemas relacionados con la ecuación de Emden–Fowler de exponente negativo.

En todo el capítulo, $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado arbitrario y dados $a, b \in \mathbb{T}$ tales que $a < \rho(b)$, se denota como $D = [a, b]_{\mathbb{T}}$, $D^{\kappa} = [a, \rho(b)]_{\mathbb{T}}$, $D^{\kappa^2} = [a, \rho^2(b)]_{\mathbb{T}}$, $D^o = [a, b)_{\mathbb{T}}$ y $(D^{\kappa})^o = [a, \rho(b))_{\mathbb{T}}$.

3.2. Soluciones débiles de ecuaciones dinámicas con condiciones de Dirichlet en la frontera

Esta sección está dedicada a demostrar la existencia de múltiples soluciones positivas de la siguiente ecuación dinámica de segundo orden con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera:

$$(P_1)\left\{\begin{array}{ll} -u^{\Delta\Delta}(t) = f(t, u^{\sigma}(t)); & t \in J \cap D^{\kappa^2}, \\ \\ u(a) = 0 = u(b), & \end{array}\right.$$

donde

$$J := \left\{\begin{array}{lll} [a,b)_{\mathbb{T}}; & \text{si} & a < \sigma(a), \\ (a,b)_{\mathbb{T}}; & \text{si} & a = \sigma(a) \end{array}\right.$$

y $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica las siguientes condiciones:

(H_1^1) i) Para todo $p \in [0, +\infty)$, $f(\cdot, x) \in C_{rd}(J)$ uniformemente en $x \in [0, p]$, es decir:

Si $t \in J$ es un punto denso por la derecha, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(t', x) - f(t, x)| < \epsilon \quad \text{para todo } t' \in (t - \delta, t + \delta)_{\mathbb{T}} \text{ y } x \in [0, p];$$

mientras que si $t \in J$ es un punto denso por la izquierda y aislado por la derecha, entonces, existe un $l_t : [0, p] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(t', x) - l_t(x)| < \epsilon \quad \text{para todo } t' \in (t - \delta, t)_{\mathbb{T}} \text{ y } x \in [0, p].$$

ii) Para cada $c, d \in J$, $f(t, \cdot) \in C([0, +\infty))$ uniformemente en $t \in [c, d]_{\mathbb{T}}$, esto es, para cada $x \geq 0$ y $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $x' \in (x - \delta, x + \delta)$ y $x' \geq 0$, entonces,

$$|f(t, x) - f(t, x')| < \epsilon \quad \text{para todo } t \in [c, d]_{\mathbb{T}}.$$

iii) Si J no es compacto en $\mathbb{T}$, entonces, para cada $p > 0$, existe $m_p \in L^1_{\Delta}(D^o)$ tal que

$$|f(t, x)| \leq m_p(t) \text{ para todo } (t, x) \in J \times [0, p].$$

(H_1^2) Para cada $t \in J$, $f(t, 0) > 0$.

Definición 3.2.1 *Se dice que* $u : D \to \mathbb{R}$ *es una* **solución del problema** (P_1) *si se cumple que*

$$u \in C^2_{rd}(J) = \left\{ u \in C(D) \ : \ u^{\Delta} \in C(J \cap D^{\kappa}), \ u^{\Delta\Delta} \in C_{rd}(J \cap D^{\kappa^2}) \right\}$$

y verifica las dos igualdades de (P_1).

Nótese que si J es compacto en $\mathbb{T}$, entonces, las condiciones i) e ii) en (H_1^1) garantizan que para cada $p > 0$, f es uniformemente acotada en $J \times [0, p]$; además, la condición (H_1^1) permite que, para cada $x \in [0, +\infty)$, la función $f(\cdot, x)$ sea singular en los extremos de D cuando éstos sean densos.

El objetivo de esta sección es usar técnicas variacionales y la teoría de puntos críticos para deducir la existencia de múltiples soluciones positivas de (P_1); en [79] se encuentra una introducción detallada a la teoría de métodos variacionales.

Para ello, se usarán algunas de las propiedades de los espacios de Sobolev definidos en un conjunto cerrado de números reales arbitrario probadas en la sección 1.5 así como alguna de las desigualdades de Wirtinger vistas en la sección 1.6. En la subsección 3.2.1 se demostrará que las soluciones positivas de (P_1) coinciden con los puntos críticos de cierto operador. Dicho resultado permite probar en las subsecciones 3.2.2 y 3.2.3 algunas condiciones suficientes para la existencia de al menos una y dos soluciones positivas de (P) respectivamente. Para las elecciones particulares de $D = [0, T+1]_{\mathbb{N}}$ en [17] y $D = [0, 1]$ en [16] los autores prueban la existencia de múltiples soluciones positivas de (P_1) usando argumentos similares pero asumiendo condiciones distintas sobre la función que define la parte no lineal de la ecuación.

3.2.1. Formulación variacional de (P_1)

A continuación se describe la formulación variacional que se empleará para deducir la existencia de soluciones positivas de (P_1).

Se considera el espacio de Sobolev de primer orden $H := H^1_{0,\Delta}(D)$, definido en la sección 1.5, del cual se sabe que está dotado de una estructura de espacio de Hilbert con el producto interior $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R}$ definido para cada $(v, w) \in H \times H$ como

$$(v, w)_H := (v^\Delta, w^\Delta)_{L^2_\Delta} := \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} v^\Delta(s) \cdot w^\Delta(s)\ \Delta s; \tag{3.1}$$

además, la norma inducida por dicho producto interior, denotada como $\|\cdot\|_H$, es equivalente a la norma inducida por el producto interior $(\cdot, \cdot)_{H^1_\Delta}$.

El siguiente lema garantiza que para cada $\lambda \in (0, 1]$ fijado, una condición suficiente para la existencia de una solución positiva del problema

$$(P_\lambda) \begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = \lambda\, f(t, u^\sigma(t)); & t \in J \cap D^{\kappa^2}, \\ u(a) = 0 = u(b), \end{cases}$$

es la existencia de una solución del problema

$$(P_\lambda^+) \begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = \lambda\, f(t, (u^+)^\sigma(t)); & t \in J \cap D^{\kappa^2}, \\ u(a) = 0 = u(b), \end{cases}$$

donde $v^+ := \text{máx}\{v, 0\}$; se denota como $(P^+) = (P_1^+)$.

Lema 3.2.2 *Supóngase que se verifican las condiciones* (H_1^1) *y* (H_1^2). *Si* $u : D \to \mathbb{R}$ *es una solución del problema* (P_λ^+), $\lambda \in (0,1]$, *entonces, u es positiva en D y $u > 0$ en $(a,b)_{\mathbb{T}}$ y por tanto, u es una solución del problema* (P_λ).

Demostración: Sea u una solución de (P_λ^+), como $u \in C_{rd}^2(J)$, se sabe que $u^- := \text{máx}\{-u, 0\}$ es una función absolutamente continua en D y así, el teorema fundamental del cálculo asegura la existencia de un conjunto $E \subset D^o$ tal que $\mu_\Delta(D^o \backslash E) = 0$ y u^- es $\Delta-$diferenciable en E.

No es difícil comprobar que la siguiente desigualdad

$$\Big[\, (u^-)^\Delta \; + \; u^\Delta \,\Big] \; \cdot \; (u^-)^\Delta \; \leq 0 \qquad \text{en } E$$

es válida; con lo cual, integrándola, se obtiene que

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \Big((u^-)^\Delta\Big)^2(s) \; \Delta s \leq -\int_E (u^-)^\Delta(s) \cdot u^\Delta(s) \; \Delta s \; \leq \; \|(u^-)^\Delta\|_{L^1_\Delta} \cdot \|u^\Delta\|_{C(\mathbb{T}^\kappa)}$$

lo cual establece que $u^- \in H$ y

$$\|u^-\|_H^2 \; \leq \; -\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} (u^-)^\Delta(s) \cdot u^\Delta(s) \; \Delta s = \; -\,(u, u^-)_H. \tag{3.2}$$

Puesto que u es una solución de (P_λ^+), de la fórmula de integración por partes, (H_1^2) y (3.2), se tiene que

$$\begin{aligned}
0 \;\; &= \;\; \int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} \left[\, u^{\Delta\Delta}(s) \; + \; \lambda\, f(s, (u^+)^\sigma(s)) \,\right] \; \cdot \; (u^-)^\sigma(s) \; \Delta s \\
&= \;\; -\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} u^\Delta(s) \cdot (u^-)^\Delta(s) \; \Delta s \; + \; \lambda \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} f(s,0) \cdot (u^-)^\sigma(s) \; \Delta s \\
&\geq \;\; -\,(u, u^-)_H \; \geq \; \|u^-\|_H^2,
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $u \geq 0$ en D.

Además, como consecuencia inmediata de (H_1^2) se deduce que $u > 0$ en $(a,b)_{\mathbb{T}}$ lo cual concluye la demostración. □

Se define el funcional $\Phi : H \to \mathbb{R}$ como

$$\Phi(v) := \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \left[\frac{1}{2}\big(v^\Delta(s)\big)^2 \; - \; F\left(s, (v^+)^\sigma(s)\;\right) \; + \; f(s,0) \cdot (v^-)^\sigma(s)\right] \Delta s, \; v \in H, \tag{3.3}$$

donde la función $F : J \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ está dada para cada $(t,x) \in J \times [0, +\infty)$ por

$$F(t,x) := \int_0^x f(t,r) \; dr. \tag{3.4}$$

De la condición (H_1^1) se deducen las siguientes propiedades de F.

Lema 3.2.3 *Si se verifica* (H_1^1)*, la función* F *definida en* (3.4) *cumple las siguientes propiedades:*

1. *Para cada* $t \in J$*,* $F(t,\cdot)$ *es continuamente diferenciable en* $[0,+\infty)$ *y* $D_2F(t,\cdot) = f(t,\cdot)$.

2. *Para todo* $x \in [0,+\infty)$*,* $F(\cdot,x)$ *es rd-continua en* J.

3. *Para todo* $p \geq 0$*, existe una función* $M_p \in L^1_\Delta(J)$ *tal que*

$$|F(t,x)| \leq M_p(t) \qquad \text{para todo} \quad (t,x) \in J \times [0,p].$$

El funcional Φ verifica las siguientes condiciones de regularidad.

Lema 3.2.4 *Supóngase* (H_1^1)*, entonces* Φ *es débilmente semicontinuo inferiormente, es decir, para toda sucesión* $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset H$ *convergente débilmente en* H *a* $v \in H$*, se cumple que*

$$\Phi(v) \leq \liminf_{m\to+\infty} \Phi(v_m).$$

Demostración: Si $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset H$ converge débilmente en H a $v \in H$, por el corolario 1.5.8, se sabe que $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $C(D)$ a v y como $\|v\|_H \leq \liminf_{m\to+\infty} \|v_m\|_H$, de (H_1^1) y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se obtiene el resultado. $\square$

Lema 3.2.5 *Si* (H_1^1) *es válida, se verifica:*

1. *Los operadores* $J_1, J_2 : H \to H^*$ *definidos para cada* $v, w \in H$ *como*

$$J_1(v)(w) := \int_{[a,b)_\mathbb{T}} v^\Delta(s) \cdot w^\Delta(s)\ \Delta s =: (v,w)_H \tag{3.5}$$

   y

$$J_2(v)(w) := \int_{[a,b)_\mathbb{T}} f\left(s, \left(v^+\right)^\sigma(s)\right) \cdot w^\sigma(s)\ \Delta s, \tag{3.6}$$

   cumplen que J_1 *es un isomorfismo y* J_2 *es continuo y compacto.*

2. Φ *es continuamente diferenciable en* H *y*

$$\Phi'(v)(w) = \int_{[a,b)_\mathbb{T}} \left[\ v^\Delta(s) \cdot w^\Delta(s) - f\left(s, \left(v^+\right)^\sigma(s)\right) \cdot w^\sigma(s)\ \right]\ \Delta s, \tag{3.7}$$

   para cada $v, w \in H$.

Demostración: El teorema de representación de Riesz establece que J_1 es un isomorfismo. Por la proposición 1.5.6 se sabe que la inclusión $H \hookrightarrow C(D)$ es continua, con lo cual, de (H_1^1) y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se deduce que J_2 es continuo.

Sea $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en H, como H es reflexivo, tiene una subsucesión $\{v_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente en H a $v \in H$ que, por el corolario 1.5.8, converge fuertemente en $C(D)$ a v; así pues, de (H_1^1) y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue resulta que $\{J_2(v_{m_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en H^* a $J_2(v)$. Por lo tanto, J_2 es compacto y la afirmación *1* está demostrada. $\square$

Como consecuencia del teorema 1.3.22 se obtienen los siguientes resultados.

Lema 3.2.6 *Sean $y, z \in H$ y sea $r > 0$. La función $I_1 : (-r, r) \to \mathbb{R}$ definida para cada $t \in (-r, r)$ como*

$$I_1(t) := \frac{1}{2} \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \left(y^{\Delta}(s) \; + \; t\, z^{\Delta}(s) \right)^2 \Delta s \tag{3.8}$$

tiene derivada continua en $(-r, r)$, $I_1' : (-r, r) \to \mathbb{R}$ dada para cada $t \in (-r, r)$ por

$$I_1'(t) = \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \left(y^{\Delta}(s) \; + \; t\, z^{\Delta}(s) \right) \cdot z^{\Delta}(s)\, \Delta s \tag{3.9}$$

Lema 3.2.7 *Sean $y, z \in H$ y $r > 0$. Supongamos que se verifica (H_1^1) y sea $F : J \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida en (3.4). Entonces, la función $I_2 : (-r, r) \to \mathbb{R}$ definida para cada $t \in (-r, r)$ como*

$$I_2(t) := \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \Big[\, f(s,0) \cdot (y^{\sigma} + tz^{\sigma})^{-}(s) - F\Big(s, (y^{\sigma} + tz^{\sigma})^{+}(s)\Big) \, \Big] \; \Delta s \tag{3.10}$$

tiene derivada continua en $(-r, r)$, $I_2' : (-r, r) \to \mathbb{R}$ dada para cada $t \in (-r, r)$ por

$$I_2'(t) = -\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} z^{\sigma}(s) \; \cdot \; f\Big(s, (y^{\sigma} + tz^{\sigma})^{+}(s)\Big) \; \Delta s \tag{3.11}$$

Demostración: Sea $G : D^o \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para cada $(s, x) \in D^o \times \mathbb{R}$ como

$$G(s,x) := \begin{cases} -f(s,0) \cdot x, & \text{si} \quad s \in J \text{ y } x \leq 0, \\ -F(s,x), & \text{si} \quad s \in J \text{ y } x \geq 0, \\ 0, & \text{si} \quad s \notin J, \end{cases}$$

con $F : J \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada en (3.4).

Del lema 3.2.3 se sigue que para cada $s \in D^o$, $G(s, \cdot)$ es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$ y $D_2G(s, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$D_2G(s,x) := \begin{cases} -f(s,0), & \text{si} \quad s \in J \text{ y } x \leq 0, \\ -f(s,x), & \text{si} \quad s \in J \text{ y } x \geq 0, \\ 0, & \text{si} \quad s \notin J. \end{cases}$$

Sea $h : (-r, r) \times D \to \mathbb{R}$ definida para cada $(t, s) \in (-r, r) \times D$ como

$$h(t,s) := y^{\sigma}(s) + tz^{\sigma}(s),$$

así, para cada $s \in D$, $h(\cdot, s)$ tiene derivada continua en $(-r, r)$, $D_1 h(\cdot, s)$: $(-r, r) \to \mathbb{R}$ dada para cada $t \in (-r, r)$ por

$$D_1 h(t, s) = z^\sigma(s).$$

Ahora definimos $g_2 : (-r, r) \times D \to \mathbb{R}$ para cada $(t, s) \in (-r, r) \times D$ como

$$g_2(t, s) := G(s, h(t, s)) = f(s, 0) \cdot (y^\sigma + tz^\sigma)^-(s) - F\left(s, (y^\sigma + tz^\sigma)^+(s)\right),$$

y entonces, para cada $s \in D^o$, $g_2(\cdot, s)$ tiene una derivada continua en $(-r, r)$, $D_1 g_2(\cdot, s) : (-r, r) \to \mathbb{R}$ dada para cada $t \in (-r, r)$ por

$$D_1 g_2(t, s) = D_2 G(s, h(t, s)) \cdot D_1 h(t, s), = -z^\sigma(s) \ \cdot \ f\left(s, (y^\sigma + tz^\sigma)^+(s)\right).$$

Por tanto, el resultado se sigue del teorema 1.3.22. □

El siguiente resultado, consecuencia de resultados anteriores, muestra la caracterización de las soluciones de (P^+) como los puntos críticos de Φ.

Lema 3.2.8 *Si* (H_1^1) *es válida, entonces, se verifica que las soluciones de* (P^+) *coinciden con los puntos críticos de* Φ.

Se verá que, bajo diversas condiciones adicionales sobre el comportamiento de f en el infinito, Φ verifica la siguiente condición de compacidad de Cerami la cual asegura la existencia de un punto crítico de Φ, véase [36]:

(C) Cada sucesión $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset H$ que satisfaga las siguientes condiciones:

i) $\{\Phi(v_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada,

ii) $\lim\limits_{m\to+\infty} [(1 + \|v_m\|_H) \|\Phi'(v_m)\|_{H^*}] = 0$,

tiene una subsucesión convergente fuertemente en H.

El siguiente resultado garantiza que para verificar la condición (C) es suficiente comprobar que la sucesión $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada en H supuesto que son válidas las condiciones i) e ii) de (C).

Lema 3.2.9 *Supóngase* (H_1^1). *Si* $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión acotada en* H *tal que* $\{\Phi'(v_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ *converge fuertemente en* H^* *a cero, entonces* $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *tiene una subsucesión convergente fuertemente en* H.

Demostración: Sean J_1 y J_2 los operadores definidos en (3.5) y (3.6) respectivamente. Por (3.7) se sabe que $\Phi'(v) = J_1(v) - J_2(v)$ para todo $v \in H$, lo cual, dado que J_1 es un isomorfismo, es equivalente a

$$v = J_1^{-1}\,(\,\Phi'(v)\,) \,+\, J_1^{-1}\,(\,J_2(v)\,) \qquad \text{para todo } v \in H. \tag{3.12}$$

Sea $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en H tal que $\{\Phi'(v_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en H^* a cero; puesto que J_2 es compacto, existe una subsucesión

$\{v_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{J_2(v_{m_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en H^*. Por consiguiente, la continuidad de J_1^{-1} en H^* y la igualdad (3.12) establecen el resultado. $\square$

A continuación, asumiendo la condición (H_1^2), se probará que para comprobar la validez de la condición (C), es suficiente verificar que la sucesión $\{v_m^+\}_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada en H siempre que se cumplan i) e ii) de (C).

Lema 3.2.10 *Asúmanse* (H_1^1) *y* (H_1^2). *Si* $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* H *tal que* $\{\Phi'(v_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ *converge fuertemente en* H^* *a cero, entonces* $\{v_m^-\}_{m\in\mathbb{N}}$ *converge fuertemente en* H *a cero.*

Demostración: Sea $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H tal que $\{\Phi'(v_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en H^* a cero; usando los mismos argumentos que los utilizados para probar la desigualdad (3.2) y teniendo en cuenta (H_1^2) y (3.7), se obtiene para cada $m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|v_m^-\|_H^2 &\leq -\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} v_m^{\Delta}(s)\cdot\left(v_m^-\right)^{\Delta}(s)\ \Delta s \\
&\leq -\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \left[\ v_m^{\Delta}(s)\cdot\left(v_m^-\right)^{\Delta}(s) - f\left(s,\left(v_m^+\right)^{\sigma}(s)\right)\cdot\left(v_m^-\right)^{\sigma}(s)\ \right]\ \Delta s \\
&= -\Phi'(v_m)\left(v_m^-\right)\ \leq\ \|\Phi'(v_m)\|_{H^*}\cdot\|v_m^-\|_H,
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\{v_m^-\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en H a cero. $\square$

3.2.2. Existencia de una solución positiva

A continuación se probarán, usando la formulación variacional introducida, dos resultados que garantizan la existencia de al menos una solución positiva del problema (P_1). En el primero de ellos se asume la siguiente condición.

(H_1^3) Existe una constante $M>0$, independiente de $\lambda\in(0,1]$, tal que si u es una solución de (P_λ) estrictamente positiva en $(a,b)_{\mathbb{T}}$, se verifica que $\|u\|_H\neq M$.

Teorema 3.2.11 *Si se verifican* $(\mathrm{H}_1^1)-(\mathrm{H}_1^3)$, *el problema* (P_1) *tiene al menos una solución estrictamente positiva en* $(a,b)_{\mathbb{T}}$.

Demostración: Se verá que Φ alcanza su ínfimo en $B:=\{v\in H:\ \|v\|_H\leq M\}$ en algún punto $v_0\in\overset{\circ}{B}$, con lo cual, es un punto de mínimo relativo de Φ y así, por los lemas 3.2.2 y 3.2.8, dicho punto es una solución de (P_1) que es estrictamente positiva en $(a,b)_{\mathbb{T}}$.

La condición (H_1) garantiza que $\inf\Phi(B)>-\infty$. Sea $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset B$ una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}\Phi(v_m)=\inf\Phi(B)$; por la proposición 1.5.7 se puede suponer que, pasando a una subsucesión, $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en H

a algún $v_0 \in B$. Por consiguiente, como Φ es débilmente semi–continuo inferiormente, se tiene que

$$\Phi(v_0) \leq \liminf_{m\to+\infty} \Phi(v_m) = \lim_{m\to+\infty} \Phi(v_m) = \inf_{v\in B} \Phi(v)$$

con lo cual, $\Phi(v_0) = \inf_{v\in B} \Phi(v)$.

Si $v_0 \in \partial B$, entonces, v_0 es un punto de mínimo de $\Phi|_{\partial B}$ y por lo tanto, el gradiente de Φ en v_0 apunta en la dirección del vector normal a ∂B, esto es, se cumple que $\Phi'(v_0) = -\mu\, v_0$ para algún $\mu \geq 0$. Así pues, v_0 es una solución de (P_λ^+) con $\lambda = \dfrac{1}{1+\mu} \in (0,1]$ y $\|v_0\|_H = M$, lo cual contradice la hipótesis (H_1^3). Así pues, se concluye que $v_0 \in \overset{\circ}{B}$. □

Sea $\lambda_1 > 0$ el menor autovalor positivo del problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -u^{\Delta\Delta}(t) = \lambda\, u^\sigma(t); & t \in D^{\kappa^2}, \\ \\ u(a) = 0 = u(b) \end{array} \right. \tag{3.13}$$

y sea $G : J \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida para cada $(t,x) \in J \times [0,+\infty)$ como

$$G(t,x) := F(t,x) - \frac{1}{2}\, x\, f(t,x), \tag{3.14}$$

la parte no cuadrática de la función F definida en (3.4).

En el próximo resultado se comprobará que los siguientes comportamientos de f en el infinito son condiciones suficientes para la existencia de al menos una solución positiva de (P_1).

(H_1^4) No resonancia por debajo de λ_1, esto es, existen dos constantes $C_1, K_1 > 0$ tales que

$$f(t,x) \leq E_1\, x + C_1 \qquad \text{para cada } (t,x) \in J \times [K_1, +\infty),$$

para algún $E_1 < \lambda_1$.

(H_1^5) Resonancia, es decir,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} = \lambda_1 \qquad \text{uniformemente en } t \in J.$$

(H_1^6) Existen dos constantes $C_2, K_2 > 0$ tales que

$$G(t,x) \leq C_2, \qquad \text{para cada } (t,x) \in J \times [K_2, +\infty)$$

y

$$\lim_{x\to+\infty} G(t,x) = -\infty \qquad \text{para cada } t \in J,$$

con $G : J \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida en (3.14).

Teorema 3.2.12 *Supónganse* (H_1^1) *y* (H_1^2).

Si se verifica alguno de los siguientes enunciados:

i) es cierta (H_1^4),

ii) son ciertas (H_1^5) *y* (H_1^6),

entonces, el problema (P_1) *tiene al menos una solución estrictamente positiva en* $(a,b)_{\mathbb{T}}$.

Demostración: En primer lugar, supóngase que es cierta (H_1^4); por (H_1^1) y (H_1^4), se sabe que para cada $t \in J$, se cumple que

$$F(t,x) \leq \begin{cases} K_1\, m_{K_1}(t); & 0 \leq x < K_1, \\ \\ E_1\, \dfrac{x^2}{2} + C_1\, x + K_1\, m_{K_1}(t); & x \geq K_1. \end{cases} \tag{3.15}$$

Como $E_1 < \lambda_1$, de la desigualdad de Wirtinger (1.92) se deduce que Φ está acotado inferiormente y es coercivo; así pues, como Φ es débilmente semi–continuo inferiormente, se sabe que Φ tiene un mínimo global en H, con lo cual, de los lemas 3.2.2 y 3.2.8, se concluye que (P_1) tiene una solución estrictamente positiva en $(a,b)_{\mathbb{T}}$.

Finalmente, supóngase que son ciertas (H_1^5) y (H_1^6); la condición (H_1^5) asegura que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(t,x)}{x^2} = \frac{\lambda_1}{2} \qquad \text{para cada } \ t \in J, \tag{3.16}$$

de donde se sigue, junto con la igualdad

$$D_2\left(\frac{F(t,x)}{x^2}\right) = -\frac{2G(t,x)}{x^3} \qquad \text{para cada } t \in J \text{ y } x > 0, \tag{3.17}$$

y la condición (H_1^6), que

$$F(t,x) = \left[\ \frac{\lambda_1}{2}\ +\ 2\int_x^{+\infty} \frac{G(t,r)}{r^3}\, dr\ \right] x^2\ \leq\ \frac{\lambda_1}{2}\, x^2 + C_2, \tag{3.18}$$

para cada $t \in J$ y $x \geq K_2$.

Además, por la condición (H_1^1) se sabe que

$$F(t,x) \leq K_2\, m_{K_2}(t) \qquad \text{para cada } \ t \in J \text{ y } x < K_2. \tag{3.19}$$

La condición (H_1^2), (3.18), (3.19) y la desigualdad de Wirtinger (1.92) permiten afirmar que Φ está acotado inferiormente.

A continuación se verá que Φ satisface la condición (C). Sea $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset H$ una sucesión verificando i) e ii) en (C).

Supóngase que $\lim\limits_{m\to+\infty} \rho_m := \lim\limits_{m\to+\infty} \|v_m\|_H = +\infty$. Se define $V_m := \dfrac{v_m}{\rho_m}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Como $\|V_m\|_H = 1$ para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\{v_m^-\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en H a cero, la proposición 1.5.7 asegura que, pasando a una subsucesión, $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $C(D)$ a algún $V \in H$ tal que $V \geq 0$ en D.

Por consiguiente, de (3.7) se sigue que para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} V_m^{\Delta}(s) \left(V_m^{\Delta}(s) - V^{\Delta}(s)\right) \; \Delta s = \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} g_m(s) \; \Delta s + \frac{\Phi'(v_m)(V_m - V)}{\rho_m}, \tag{3.20}$$

donde, para cada $m \in \mathbb{N}$, $g_m : J \to \mathbb{R}$ está definida para cada $s \in J$ como

$$g_m(s) := \frac{f\left(s, \left(v_m^+\right)^{\sigma}(s)\right)}{\rho_m} \left(V_m^{\sigma}(s) - V^{\sigma}(s)\right).$$

Las condiciones (H_1^1) y (H_1^5) garantizan la existencia de una función $N : D \to [0, +\infty]$ tal que $N \in L^1_{\Delta}(D^o)$ y

$$|g_m(s)| \leq N(s) \cdot |V_m^{\sigma}(s) - V^{\sigma}(s)| \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N} \text{ y } s \in J,$$

así pues, tomando límites en (3.20) se obtiene que $\|V\|_H = 1$, de modo que $V \not\equiv 0$.

Además, por (H_1^1) y (H_1^6), se tiene, para cada $t \in J$,

$$G(t,x) \leq \begin{cases} \dfrac{3}{2} K_2 \, m_{K_2}(t); & 0 \leq x < K_2, \\ \\ C_2; & x \geq K_2. \end{cases} \tag{3.21}$$

Como el lema 3.2.10 asegura que $\{v_m^-\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en H a cero, de (3.21) y (H_1^6), se deduce que

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{V^{\sigma}>0} G\left(s, \left(v_m^+\right)^{\sigma}(s)\right) \; \Delta s = -\infty$$

y

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{V^{\sigma}=0} G\left(s, \left(v_m^+\right)^{\sigma}(s)\right) \; \Delta s \leq \tilde{K},$$

para algún $\tilde{K} > 0$; por lo tanto, de la condición ii) en (C) se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{m\to+\infty} \Phi(v_m) &= \lim_{m\to+\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left[\Phi'(v_m)(v_m) + \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} f(s,0) \cdot \left(v_m^-\right)^{\sigma}(s) \; \Delta s \right] \right. \\ &\qquad \left. - \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} G\left(s, \left(v_m^+\right)^{\sigma}(s)\right) \Delta s \right\} \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

lo cual contradice la condición i) en (C).

Por consiguiente, el número real $c = \inf_{y\in H} \Phi(y)$ es un valor crítico de Φ y así, de los lemas 3.2.2 y 3.2.8 se concluye que existe una solución de (P_1) que es estrictamente positiva en $(a,b)_{\mathbb{T}}$. $\square$

3.2.3. Existencia de dos soluciones positivas

Teniendo en cuenta el teorema 3.2.11 que garantiza la existencia de un punto crítico de Φ y suponiendo que se verifican condiciones adicionales, se aplicará el lema del paso de la montaña para obtener otro punto crítico de Φ. Las nuevas hipótesis que se emplearán son las siguientes:

(H_1^7) Existen dos constantes $C_3, K_3 > 0$ tales que

$$G(t,x) \geq -C_3 \qquad \text{para cada } (t,x) \in J \times [K_3, +\infty)$$

y

$$\lim_{x \to +\infty} G(t,x) = +\infty \qquad \text{para cada } t \in J,$$

con $G : J \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida en (3.14).

(H_1^8) Existen dos constantes $C_4, K_4 > 0$ tales que

$$|f(t,x)| \leq C_4\, x \qquad \text{para cada } (t,x) \in J \times [K_4, +\infty).$$

(H_1^9) No resonancia por debajo de λ_1, esto es, existen dos constantes $C_5, K_5 > 0$ tales que

$$f(t,x) \geq E_2\, x - C_5 \qquad \text{para cada } (t,x) \in J \times [K_5, +\infty),$$

para algún $E_2 > \lambda_1$.

(H_1^{10}) Existen dos constantes $K_6 > 0$ y $\theta > 2$ tales que

$$0 < \theta\, F(t,x) \leq x\, f(t,x) \qquad \text{para cada } (t,x) \in J \times [K_6, +\infty).$$

Teorema 3.2.13 *Asúmanse* (H_1^1) $-$ (H_1^3). *Si se verifica alguno de los siguientes enunciados:*

i) son ciertas (H_1^5) *y* (H_1^7),

ii) son ciertas (H_1^8) *y* (H_1^9),

iii) es cierta (H_1^{10}),

entonces, el problema (P_1) *tiene al menos dos soluciones positivas en* $(a,b)_{\mathbb{T}}$.

Demostración: Puesto que se satisfacen las condiciones (H_1^1) $-$ (H_1^3), por lo visto en la demostración del teorema 3.2.11, se sabe que el funcional Φ tiene un mínimo local en un punto $v_0 \in \overset{\circ}{B}$ y $\Phi(v_0) \leq \inf\limits_{v \in \partial B} \Phi(v)$.

Se comprobará que, en todos los casos, si $L > M$ es suficientemente grande, con M dado en (H_1^3) y φ_1 un autovector unitario asociado al autovalor λ_1 tal que $\varphi_1 > 0$ en $(a,b)_{\mathbb{T}}$, entonces, $\Phi(L\varphi_1) \leq \inf\limits_{v \in \partial B} \Phi(v)$; además, se verificará (C) y como consecuencia, el lema del paso de la monta na, garantiza la existencia de un segundo punto crítico en el nivel $c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{v\in\gamma([0,1)} \Phi(v)$, donde Γ es la clase de todas las curvas continuas que unen v_0 y $L\varphi_1$; así pues, la conclusión se sigue de los lemas 3.2.2 y 3.2.8.

En primer lugar supóngase la validez de (H_1^5) y (H_1^7). Fijado $t \in J$, de (3.16) y (3.17) se deduce que

$$\frac{\lambda_1}{2}\, x^2 - F(t,x) = -2x^2 \int_x^{+\infty} \frac{G(t,r)}{r^3}\, dr, \qquad x > 0,$$

con lo cual, (H_1^7) establece que

$$\frac{\lambda_1}{2}\, x^2 - F(t,x) \le C_3, \qquad x \ge K_3, \tag{3.22}$$

y

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\lambda_1}{2}\, x^2 - F(t,x)\right] = -\infty; \tag{3.23}$$

además, la condición (H_1^1) garantiza que

$$\frac{\lambda_1}{2}\, x^2 - F(t,x) < K_3 \left(\frac{\lambda_1}{2}\, K_3 + m_{K_3}(t)\right) \qquad \forall\, x < K_3. \tag{3.24}$$

Por lo tanto, de la fórmula de integración por partes y de (3.22), (3.23) y (3.24) se sigue que

$$\lim_{L\to+\infty} \Phi(L\varphi_1) = \lim_{L\to+\infty} \left\{ \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \left[\frac{\lambda_1}{2}\, (L\varphi_1^\sigma(s))^2 - F\left(s, L\varphi_1^\sigma(s)\right)\right] \, \Delta s \right\} = -\infty.$$

La verificación de (C) es similar a la de la demostración de ii) en el teorema 3.2.12 lo cual concluye la demostración del resultado siempre que se satisfaga *i)*.

Supóngase que (H_1^8) y (H_1^9) son ciertas. Las hipótesis (H_1^1) y (H_1^9) aseguran la existencia de una constante $A > 0$ tal que la siguiente desigualdad

$$\frac{\lambda_1}{2}\, x^2 - F(t,x) \le \begin{cases} K_5 \left(\dfrac{\lambda_1}{2}\, K_5 + m_{K_5}(t)\right), & 0 \le x < K_5, \\[2ex] \dfrac{(\lambda_1 - E_2)}{2}\, x^2 + C_5\, x + A + K_5\, m_{K_5}(t), & x \ge K_5, \end{cases} \tag{3.25}$$

es válida para todo $t \in J$; como consecuencia, dado que $E_2 > \lambda_1$, de la fórmula de integración por partes se deduce que

$$\lim_{L\to+\infty} \Phi(L\varphi_1) = \lim_{L\to+\infty} \left\{ \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \left[\frac{\lambda_1}{2}\, (L\varphi_1^\sigma(s))^2 - F\left(s, L\varphi_1^\sigma(s)\right)\right] \, \Delta s \right\} = -\infty.$$

Para comprobar que (C) es cierta, supóngase que la sucesión $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset H$ verifica las propiedades i) e ii) de (C) y que $\lim_{m\to+\infty} \rho_m := \lim_{m\to+\infty} \|v_m\|_H = +\infty$.

Se define $V_m := \dfrac{v_m}{\rho_m}$, $m \in \mathbb{N}$; las condiciones (H_1^1), (H_1^2) y (H_1^8) permiten deducir, razonando como en la demostración de la segunda parte del teorema 3.2.12, que, pasando a una subsucesión, $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $C(D)$ a algún $V \in H$ no nulo tal que $V \geq 0$ en D.

Sea $\varepsilon := E_2 - \lambda_1$, por la fórmula de integración por partes, (H_1^1) y (H_1^9), se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_a^b (V_m\varphi_1)^\sigma(s)\Delta s \;&=\; \frac{1}{\rho_m}\left\{\int_a^b \left[E_2\big(v_m^+\big)^\sigma(s) - f(s,\big(v_m^+\big)^\sigma(s))\right]\varphi_1^\sigma(s)\,\Delta s\right.\\
&\qquad \left. - \,\Phi'(v_m)(\varphi_1) - E_2\int_a^b \big(v_m^-\,\varphi_1\big)^\sigma(s)\,\Delta s\right\}\\
&\leq\; \frac{1}{\rho_m}\left\{\int_{\left(v_m^+\right)^\sigma < K_5} [\,E_2\,K_5 + m_{K_5}(s)\,]\,\varphi_1^\sigma(s)\,\Delta s\right.\\
&\qquad \left. + \int_{\left(v_m^+\right)^\sigma \geq K_5} C_5\,\varphi_1^\sigma(s)\,\Delta s + \|\Phi'(v_m)\|_{H^*}\right\},
\end{aligned}$$

de modo que, tomando límites, se tiene que $\varepsilon \displaystyle\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} (V\,\varphi_1)^\sigma(s)\,\Delta s \leq 0$, lo cual es una contradicción y por lo tanto, el resultado está probado cuando se verifica la condición *ii)*.

Finalmente, supóngase que se cumple la condición (H_1^{10}). Como consecuencia de las condiciones (H_1^1) y (H_1^{10}), se obtiene, para cada $t \in J$,

$$F(t,x) \geq \begin{cases} -K_6\,m_{K_6}(t), & 0 \leq x < K_6,\\[2ex] \left(\dfrac{x}{K_6}\right)^\theta F(t,K_6), & x \geq K_6. \end{cases} \tag{3.26}$$

Así pues, mediante argumentos similares a los empleados cuando se verifica *ii)* y teniendo en cuenta que $\theta > 2$, se concluye que $\displaystyle\lim_{L\to+\infty} \Phi(L\varphi_1) = -\infty$.

Para verificar (C), se fija una sucesión $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset H$ arbitraria para la cual i) e ii) de (C) son ciertas. Las condiciones (H_1^1) y (H_1^{10}) garantizan que la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\theta}{2}-1\right)\|v_m\|_H^2 &= \int_a^b \left[\, \theta\, F(s,\left(v_m^+\right)^\sigma(s)) - f(s,\left(v_m^+\right)^\sigma(s)) \cdot \left(v_m^+\right)^\sigma(s) \,\right] \Delta s \\
&\quad + \theta\, \Phi(v_m) - \Phi'(v_m)(v_m) \\
&\quad + (1-\theta) \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \left(v_m^-\right)^\sigma(s) \cdot f(s,0)\, \Delta s \\
&\leq \left[K_6\,(\theta+1) + (1-\theta)\,\|v_m^-\|_{C(\mathbb{T})} \right] \cdot \|m_{K_6}\|_{L^1_\Delta} \\
&\quad + \theta\, \Phi(v_m) + \|\Phi'(v_m)\|_{H^*}\, \|v_m\|_H
\end{aligned}$$

se cumple para todo $m \in \mathbb{N}$; así pues, como el lema 3.2.10 y la proposición 1.5.7 establecen que $\{v_m^-\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $C(D)$ a cero, resulta que $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada en H y por lo tanto, el resultado es válido asumiendo la condición *iii)*. □

3.3. Soluciones débiles de ecuaciones dinámicas singulares con condiciones de Dirichlet en la frontera

En esta sección se deduce la existencia de múltiples soluciones positivas de la siguiente ecuación dinámica de segundo orden con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera:

$$(P_2)\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = f(\sigma(t), u^\sigma(t)); & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in (D^\kappa)^o, \\ u(a) = 0 = u(b), \end{cases}$$

suponiendo que el conjunto D verifica la siguiente propiedad:

(H_2^1) Existe una constante $\xi \in (0,1)$ tal que

$$\int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} \left(\frac{1}{b-\sigma(s)}\right)^\xi \Delta s < +\infty.$$

Nótese que si $\rho(b) < b$, entonces, la condición (H_2^1) se verifica para todo $\xi \in (0,1)$.

La función $f : D \times (0,+\infty) \to [0+\infty]$ satisface la siguiente condición:

(H_2^2) i) Para cada $x \in (0,+\infty)$, la función $f(\sigma(\cdot),x)$ es $\Delta-$medible en D.

ii) Para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$, $f(\sigma(t),\cdot) \in C((0,+\infty))$.

iii) Existen dos constantes $\varepsilon > 0$ y $C_1 > 0$ tales que para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in (0, \varepsilon)$, se cumple que

$$\frac{\varepsilon}{(b-a)^2} \leq f(\sigma(t), x) \leq C_1 \cdot x^{-\xi}.$$

iv) Para cada $p > \varepsilon$ existe una función $m_p : D \to [0, +\infty]$ tal que $m_p^\sigma \in L^1_\Delta(D^o)$ y para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in [\varepsilon, p]$,

$$f(\sigma(t), x) \leq m_p^\sigma(t).$$

v) Para cada $x \in (0, +\infty)$, la función $F : D \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in [0, +\infty)$ como

$$F(\sigma(t), x) := \int_0^x f(\sigma(t), r)\, dr \tag{3.27}$$

verifica que $F(\sigma(\cdot), x)$ es $\Delta-$medible en D.

Definición 3.3.1 *Se define una* **solución del problema** (P_2) *como cualquier elemento del conjunto*

$$S := \{\ u \in W^{2,1}_\Delta(D)\ :\ u(a),\, u(b) \geq 0,\ u^{\Delta\Delta} \leq 0\ \Delta - c.\ t.\ p.\ \ de\,(D^\kappa)^o\ \} \tag{3.28}$$

que verifique las dos igualdades de (P_2).

Esta sección está dedicada a probar la existencia de múltiples soluciones positivas de (P_2) usando métodos variacionales y la teoría de puntos críticos.

Está organizada del siguiente modo. En la subsección 3.3.1 se presentan algunas cotas superiores e inferiores para los elementos del conjunto S definido en (3.28). El objetivo de la subsección 3.3.2 es definir un operador tal que sus puntos críticos coinciden con las soluciones positivas de (P_2). En las subsecciones 3.3.3 y 3.3.4 se demuestran algunas condiciones suficientes para la existencia de al menos una o dos soluciones positivas de (P_2).

Los resultados de esta sección generalizan los probados en [17] para $D = [0, T+1]_{\mathbb{N}}$ y en [16] para $D = [0, 1]$ donde el problema (P_2) está definido en todo el intervalo $(a, b)_{\mathbb{T}}$ y se asume que $f \in C((a, b)_{\mathbb{T}}, (0, +\infty))$ en lugar de las condiciones i), ii) y v) de (H^2_2). Las condiciones suficientes obtenidas en esta sección se aplican en una amplia clase de conjuntos cerrados de números reales tales como una unión finita de intervalos cerrados, algunas sucesiones convergentes unión su punto límite o el conjunto ternario de Cantor entre otros.

3.3.1. Preliminares

El objetivo de esta subsección es obtener cotas superiores e inferiores para las soluciones de la siguiente ecuación dinámica:

$$(P_h)\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = h(t); \qquad \Delta - \text{c. t. p. }\ t \in (D^\kappa)^o, \\ \\ u(a) = 0 = u(b), \end{cases}$$

siendo $h : D \to [0,+\infty]$ una función perteneciente a $L^1_\Delta((D^\kappa)^o)$; se define la **solución de** (P_h) como la única función $u \in W^{2,1}_\Delta(D)$ para la cual se satisfacen las dos igualdades de (P_h). La solución viene dada por

$$u(t) = \int_{[a,b)_\mathbb{T}} G(t,s)h(s)\Delta s \tag{3.29}$$

donde,

$$G(t,s) = \frac{1}{b-a}\begin{cases}(t-a)(b-\sigma(s)),\ t \le \sigma(s),\\ (\sigma(s)-a)(b-t),\ \sigma(s) \le t,\end{cases}$$

es la función de Green.

Definición 3.3.2 *Una función $v : D \to \mathbb{R}$ se dice que es* **cóncava en** *D si para cada $t_1, t_2 \in D$ con $t_1 < t_2$ y para todo $t \in [t_1,t_2]_\mathbb{T}$ se cumple que*

$$v(t) \ge \frac{(t_2-t)\cdot v(t_1)}{t_2-t_1} + \frac{(t-t_1)\cdot v(t_2)}{t_2-t_1}.$$

A continuación se enuncian algunos resultados que se usarán posteriormente. No se incluyen sus demostraciones por ser análogas a las dadas en [8] para el caso real y en [9] para el caso discreto.

Proposición 3.3.3 *Si $v : D \to \mathbb{R}$ es una función cóncava, continua y positiva en D, entonces, existe un $t_0 \in D$ tal que $v(t_0) = \|v\|_{C(D)}$ y las desigualdades*

$$v(t) \ge \alpha(t,t_0)\cdot\|v\|_{C(D)} \ge q(t)\cdot\|v\|_{C(D)}, \tag{3.30}$$

son válidas para todo $t \in D$, donde $\alpha : D\times D \to \mathbb{R}$ y $q : D \to \mathbb{R}$ están definidas para cada $t, s \in \mathbb{T}$ como

$$\alpha(t,s) := \begin{cases}\dfrac{t-a}{s-a}, & si \quad a \le t \le s,\ a < s,\\[2ex] \dfrac{b-t}{b-s}, & si \quad s \le t \le b,\ s < b,\end{cases} \qquad q(t) := \min\left\{\frac{t-a}{b-a},\ \frac{b-t}{b-a}\right\}. \tag{3.31}$$

Proposición 3.3.4 *Sea $h : D \to [0,+\infty]$ una función verificando que $h \in L^1_\Delta((D^\kappa)^o)$. Entonces, la función $u : D \to \mathbb{R}$ solución de (P_h) verifica que*

$$0 \le u(t) \le \frac{K_h\cdot(b-t)\cdot(t-a)}{b-a} \le \frac{\|h\|_{L^1_\Delta}\cdot(b-t)\cdot(t-a)}{b-a}, \quad para\ todo\ \ t \in D, \tag{3.32}$$

con

$$K_h := \max_{t\in D}\left\{\frac{1}{t-a}\int_{[a,t)_\mathbb{T}}(\sigma(s)-a)\,h(s)\,\Delta s + \frac{1}{b-t}\int_{[t,b)_\mathbb{T}}(b-\sigma(s))\,h(s)\,\Delta s\right\}. \tag{3.33}$$

Como consecuencia de las proposiciones 3.3.3 y 3.3.4 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.3.5 *Si $v \in W_{\Delta}^{2,1}(D)$ es tal que para $\Delta-$casi todo punto de $(D^{\kappa})^{o}$ se cumple que $v^{\Delta\Delta} \leq 0$, entonces, v es cóncava en D. Además, si $v \in S$, entonces, se satisface que*

$$v(t) \geq q(t) \cdot \|v\|_{C(D)} \geq u(t) \cdot \|v\|_{C(D)} \qquad \textit{para todo} \;\; t \in D, \tag{3.34}$$

siendo $q : D \to \mathbb{R}$ la función definida en (3.31) *y $u : D \to \mathbb{R}$ la solución del problema $\left(P_{(b-a)^{-2}}\right)$.*

3.3.2. Formulación variacional de (P_2)

A continuación se describe la formulación variacional que se usará en las siguientes subsecciones para deducir la existencia de soluciones positivas de (P_2).

Es importante señalar que el corolario 3.3.5 y las condiciones (H_2^1) y (H_2^2) garantizan que el problema (P_2) está bien definido y que sus soluciones son estrictamente positivas en $(a,b)_{\mathbb{T}}$.

Se define $f_{\varepsilon} : D \times \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ como

$$f_{\varepsilon}(t,x) := \begin{cases} f(t,(x-\varphi_{\varepsilon})^{+}(t)+\varphi_{\varepsilon}(t)); & t \in (a,b)_{\mathbb{T}}, \; x \in \mathbb{R}, \\ & \text{ó } t \in \{a,b\}, \; x \geq \varepsilon, \\ f(t,\varepsilon); & t \in \{a,b\}, \; x < \varepsilon, \end{cases} \tag{3.35}$$

donde $\varphi_{\varepsilon} : D \to [0,+\infty)$ es la solución del problema $\left(P_{\varepsilon(b-a)^{-2}}\right)$ y para cada función $v : D \to \mathbb{R}$, se denota como $v^{\pm} := \text{máx}\{\pm v, 0\}$. Por las proposiciones 3.3.3 y 3.3.4 y la hipótesis (H_2^1) se sabe que $0 < \varphi_{\varepsilon} \leq \varepsilon$ en $(a,b)_{\mathbb{T}}$ y $(\varphi_{\varepsilon}^{\sigma})^{-\xi} \in L_{\Delta}^{1}((D^{\kappa})^{o})$.

Como consecuencia inmediata de las hipótesis (H_2^1) y (H_2^2), se deducen las siguientes propiedades de la función f_{ε}.

Lema 3.3.6 *Si se verifican las condiciones (H_2^1) y (H_2^2), entonces, la función $f_{\varepsilon} : D \times \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ definida en* (3.35) *verifica las siguientes propiedades:*

1. *Para cada $x \in \mathbb{R}$, la función $f_{\varepsilon}(\sigma(\cdot),x)$ es $\Delta-$medible en D.*

2. *Para $\Delta-$casi todo punto $t \in (D^{\kappa})^{o}$, $f_{\varepsilon}(\sigma(t),\cdot) \in C(\mathbb{R})$.*

3. *Para $\Delta-$casi todo punto $t \in (D^{\kappa})^{o}$ y todo $x \in (-\infty,\varepsilon)$ se cumple que*

$$\frac{\varepsilon}{(b-a)^{2}} \;\leq\; f_{\varepsilon}(\sigma(t),x) \;\leq\; C_1 \cdot (\varphi_{\varepsilon}^{\sigma})^{-\xi}(t).$$

4. Para cada $p > \varepsilon$, existe una función $m_p : D \to [0, +\infty]$ tal que $m_p^\sigma \in L^1_\Delta(D^o)$ y para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in [\varepsilon, p]$ se verifica que

$$f_\varepsilon(\sigma(t), x) \leq m_p^\sigma(t).$$

Se considera el siguiente problema:

$$(P^\varepsilon) \begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = f_\varepsilon(\sigma(t), u^\sigma(t)); & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in (D^\kappa)^o, \\ \\ u(a) = 0 = u(b); \end{cases}$$

se define una **solución del problema** (P^ε) como cualquier función $u \in W^{2,1}_\Delta(D)$ que verifique las dos igualdades de (P^ε).

A continuación se verá que los problemas (P) y (P^ε) son equivalentes.

Lema 3.3.7 *Sea $u : D \to \mathbb{R}$. Si se verifican las condiciones (H_2^1) y (H_2^2), entonces, u es una solución de (P_2) si y sólo si u es una solución de (P^ε).*

Demostración: Supóngase que u es una solución de (P_2); no es difícil deducir que

$$\Big[\left((u-\varphi_\varepsilon)^- \right)^\Delta + (u-\varphi_\varepsilon)^\Delta \Big] \cdot \left((u-\varphi_\varepsilon)^- \right)^\Delta \leq 0 \quad \Delta - \text{c. t. p. de } D^o;$$

así pues, integrando dicha desigualdad, por la fórmula de integración por partes y la condición iii) de (H_2^2), se tiene que

$$\begin{aligned} \|(u-\varphi_\varepsilon)^-\|^2_{L^2_\Delta} &\leq -\int_a^b \Big[(u-\varphi_\varepsilon)^\Delta \left((u-\varphi_\varepsilon)^- \right)^\Delta \Big] (s)\, \Delta s \\ &= \int_a^{\rho(b)} \Big[(u-\varphi_\varepsilon)^{\Delta\Delta} \left((u-\varphi_\varepsilon)^\sigma \right)^- \Big] (s)\, \Delta s \\ &= \int_a^{\rho(b)} \left(f(\sigma(s), u^\sigma(s)) - \frac{\varepsilon}{(b-a)^2} \right) ((u-\varphi_\varepsilon)^\sigma)^-(s)\, \Delta s \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

con lo cual, resulta que $u \geq \varphi_\varepsilon$ en D, de donde se sigue que u es una solución de (P^ε).

Recíprocamente, si u es una solución de (P^ε), procediendo de un modo similar, se puede probar que $u \geq \varphi_\varepsilon$ en D y así, u es una solución de (P_2). □

Se define el funcional $\Phi : H \to \mathbb{R}$, siendo $H := H^1_{0,\Delta}(D)$ el espacio de Sobolev de primer orden definido en la sección 1. 5, como

$$\Phi(v) := \int_{[a,b)_\mathbb{T}} \left[\frac{1}{2} \left(v^\Delta(s) \right)^2 - F_\varepsilon \left(\sigma(s), v^\sigma(s) \right) \right] \Delta s, \ v \in H \tag{3.36}$$

donde la función $F_\varepsilon : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in \mathbb{R}$ como

$$F_\varepsilon(\sigma(t), x) := \int_\varepsilon^x f_\varepsilon(\sigma(t), r)\, dr \tag{3.37}$$

y $f_\varepsilon : D \times \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ es la función dada en (3.35).

Como consecuencia de las propiedades de H, se pueden probar las siguientes condiciones de regularidad del funcional Φ una de las cuales permite afirmar que las soluciones del problema (P^ε), y por lo tanto, por el lema 3.3.7, las soluciones del problema (P_2), son precisamente los puntos críticos de Φ.

Lema 3.3.8 *Supóngase que se verifican las condiciones* (H_2^1) *y* (H_2^2)*. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos:*

1. *Φ es débilmente semi–continuo inferiormente, esto es, si $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en H que converge débilmente en H a $v \in H$, entonces*

$$\Phi(v) \leq \liminf_{m\to+\infty} \Phi(v_m).$$

2. *Φ es continuamente diferenciable en H y*

$$\Phi'(v)(w) = \int_{[a,b)_\mathbb{T}} \left[\, v^\Delta(s) \cdot w^\Delta(s) - f_\varepsilon\left(\sigma(s), v^\sigma(s)\right) \cdot w^\sigma(s) \,\right]\, \Delta s, \tag{3.38}$$

para cada $v, w \in H$.

Además, los operadores $I_1, I_2 : H \to H^*$ definidos para cada $v, w \in H$ como

$$I_1(v)(w) := \int_{[a,b)_\mathbb{T}} v^\Delta(s) \cdot w^\Delta(s)\, \Delta s =: (v, w)_H \tag{3.39}$$

y

$$I_2(v)(w) := \int_{[a,b)_\mathbb{T}} f_\varepsilon\left(\sigma(s), v^\sigma(s)\right) \cdot w^\sigma(s)\, \Delta s, \tag{3.40}$$

verifican que I_1 es un isomorfismo e I_2 es compacto.

3. *Las soluciones de (P^ϵ) coinciden con los puntos críticos de Φ.*

Al igual que en la sección anterior, se verá que, bajo condiciones adicionales en el comportamiento de f en el infinito, Φ satisface la condición de compacidad de Cerami enunciada en la sección anterior.

El siguiente resultado establece que para comprobar la validez de la condición (C), es suficiente demostrar que la sucesión $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada en H cuando se verifican las condiciones i) e ii) de (C); omitimos su demostración por ser análoga a la del lema 3.2.9.

Lema 3.3.9 *Asúmase la validez de las condiciones* (H_2^1) *y* (H_2^2)*. Si $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en H tal que $\{\Phi'(v_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en H^* a cero, entonces $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente fuertemente en H.*

A continuación se probará que para verificar la condición (C), es suficiente mostrar que la sucesión $\{v_m^+\}_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada en H siempre que las condiciones i) e ii) sean válidas.

Lema 3.3.10 *Asúmanse* (H_2^1) *y* (H_2^2). *Si* $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* H *tal que* $\{\Phi'(v_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ *converge fuertemente en* H^* *a cero, entonces* $\{v_m^-\}_{m\in\mathbb{N}}$ *está acotada en* H.

Demostración: Sea $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H tal que $\{\Phi'(v_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en H^* a cero. No es difícil comprobar que para todo $m \in \mathbb{N}$, v_m^- pertenece a H y

$$\|v_m^-\|_H^2 \;\le\; -\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} v_m^\Delta(s)\cdot\left(v_m^-\right)^\Delta(s)\;\Delta s;$$

con lo cual, por la igualdad (3.38) y la proposición 1.5.7, se tiene que la desigualdad

$$\begin{aligned}
\|v_m^-\|_H^2 \;&\le\; -\,\Phi'(v_m)\left(v_m^-\right) \;-\; \int_{v_m^\sigma<0} f_\varepsilon\left(\sigma(s), v_m^\sigma(s)\right)\cdot\left(v_m^-\right)^\sigma(s)\;\Delta s \\
&\le\; \left(\|\Phi'(v_m)\|_{H^*} \;+\; K\cdot\int_{v_m^\sigma<0} f_\varepsilon\left(\sigma(s), v_m^\sigma(s)\right)\;\Delta s\right)\cdot\|v_m^-\|_H
\end{aligned}$$

es cierta para algún $K > 0$; por consiguiente, del enunciado *3* del lema 3.3.6 se deduce que

$$\|v_m^-\|_H \;\le\; \|\Phi'(v_m)\|_{H^*} \;+\; K\cdot C_1\cdot\|(\varphi_\varepsilon^\sigma)^{-\xi}\|_{L^1_\Delta},$$

es decir, la sucesión $\{v_m^-\}_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada en H. □

3.3.3. Existencia de una solución positiva

En esta subsección se establece la existencia de al menos una solución positiva del problema (P_2). Inicialmente, se asume la siguiente condición.

(H_2^3) Existe una constante $M > 0$, independiente de λ, que verifica $M^2 > C_1\cdot\varepsilon\cdot\|(\varphi_\varepsilon^\sigma)^{-\xi}\|_{L^1_\Delta}$ y para cada $\lambda \in (0,1]$ se cumple que si u es una solución del problema

$$(P_\lambda)\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = \lambda\, f(\sigma(t), u^\sigma(t)); & \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in (D^\kappa)^o, \\[2ex] u(a) = 0 = u(b), \end{cases}$$

que es estrictamente positiva en $(a,b)_{\mathbb{T}}$, entonces, se verifica que $\|u\|_H \neq M$.

Teorema 3.3.11 *Asúmase la validez de las condiciones* $(\mathrm{H}_2^1)-(\mathrm{H}_2^3)$. *Entonces, el problema* (P_2) *tiene al menos una solución estrictamente positiva en* $(a,b)_{\mathbb{T}}$.

Demostración: Se verá que Φ alcanza su ínfimo en $B := \{v \in H : \|v\|_H \leq M\}$ en algún punto $v_0 \in \overset{\circ}{B}$, con lo cual, es un punto de mínimo relativo de Φ y, del lema 3.3.7 y el enunciado *3* del lema 3.3.8 se deduce que dicho punto es una solución de (P) que es estrictamente positiva en $(a,b)_{\mathbb{T}}$.

De las condiciones (H_2^1) y (H_2^2) se sigue que $\inf \Phi(B) > -\infty$. Sea $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim\limits_{m\to+\infty} v_m = \inf \Phi(B)$, se puede suponer que, pasando a una subsucesión, $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en H a algún $v_0 \in B$. Por consiguiente, del hecho de que Φ es débilmente semi–continuo inferiormente, se tiene que

$$\Phi(v_0) \leq \liminf_{m\to+\infty} \Phi(v_m) = \lim_{m\to+\infty} \Phi(v_m) = \inf_{v\in B} \Phi(v)$$

y así, $\Phi(v_0) = \inf\limits_{v\in B} \Phi(v)$.

Supóngase que $v_0 \in \partial B$, con lo cual, v_0 es un punto de mínimo de $\Phi_{|\partial B}$ y por lo tanto, el gradiente de Φ en v_0 apunta en la dirección del vector normal a ∂B, esto es, $\Phi'(v_0) = -\mu\, v_0$ para algún $\mu \geq 0$. Así pues, resulta que v_0 es una solución del problema

$$(P_\lambda^\varepsilon)\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = \lambda\, f_\epsilon(\sigma(t), u^\sigma(t)); & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in (D^\kappa)^o, \\ \\ u(a) = 0 = u(b), & \end{cases}$$

con $\lambda = \dfrac{1}{1+\mu} \in (0,1]$.

Si $v_0 \geq \varphi_\varepsilon$ en D, entonces v_0 es también una solución de (P_λ) y $\|v_0\|_H = M$, lo cual contradice la condición (H_2^3); por el contrario, si $v_0(t) < \varphi(t)$ para algún $t \in D$, el corolario 3.3.5 permite afirmar que $\|v_0\|_{C(D)} < \varepsilon$. Por consiguiente, multiplicando la primera ecuación de (P_λ^ε) por v_0^σ e integrándola en el conjunto $(D^\kappa)^o$, de la fórmula de integración por partes y el enunciado *3* del lema 3.3.6 se obtiene que

$$M^2 = \lambda \int_{[a,\rho(b))_{\mathbb{T}}} f_\varepsilon(\sigma(s), v_0^\sigma(s)) \cdot v_o^\sigma(s)\ \Delta s \leq C_1 \cdot \varepsilon \cdot \|(\varphi_\varepsilon^\sigma)^{-\xi}\|_{L^1_\Delta},$$

lo cual contradice la hipótesis (H_2^3). Por lo tanto, resulta que $v_0 \in \overset{\circ}{B}$. □

Sea $\lambda_1 > 0$ el menor autovalor positivo del problema (3.13) y sea $G : D\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in \mathbb{R}$ como

$$G(\sigma(t), x) := F_\epsilon(\sigma(t), x) - \frac{1}{2}\, x\, f_\varepsilon(\sigma(t), x), \tag{3.41}$$

la parte no cuadrática de la función F_ε definida en (3.37).

A continuación se demostrará que los siguientes comportamientos de f en el infinito aseguran la existencia de al menos una solución positiva del problema (P_2).

(H_2^4) No resonancia por debajo de λ_1, es decir, existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$f(\sigma(t), x) \leq E_1\, x + C_2 \quad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D^o \text{ y todo } \ x \in [\varepsilon, +\infty),$$

para algún $E_1 < \lambda_1$.

(H_2^5) Resonancia, esto es,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(\sigma(t), x)}{x} = \lambda_1, \qquad \text{uniformemente para } \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in D^o.$$

(H_2^6) Existe una constante $C_3 > 0$ tal que

$$G(\sigma(t), x) \leq C_3, \qquad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in D^o \text{ y todo } x \in [\varepsilon, +\infty)$$

y

$$\lim_{x \to +\infty} G(\sigma(t), x) = -\infty, \qquad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in D^o,$$

siendo $G : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida en (3.41).

Teorema 3.3.12 *Supónganse las condiciones* (H_2^1) *y* (H_2^2). *Si se verifica alguno de los siguientes enunciados*

i) es cierta (H_2^4),

ii) son ciertas (H_2^5) *y* (H_2^6),

entones, el problema (P_2) *tiene al menos una solución estrictamente positiva en* $(a, b)_{\mathbb{T}}$.

Demostración: En primer lugar, supóngase que se verifica (H_2^4); por el enunciado *3* del lema 3.3.6 y la condición (H_2^4), se sabe que para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$, se cumple que

$$F_\varepsilon(\sigma(t), x) \leq \begin{cases} 0; & x < \varepsilon, \\ \\ E_1 \, \dfrac{x^2}{2} + C_2 \, x; & x \geq \varepsilon. \end{cases} \tag{3.42}$$

Puesto que $E_1 < \lambda_1$, de la desigualdad de Wirtinger (1.92) se sigue que Φ está acotado inferiormente y es coercivo; con lo cual, como Φ es débilmente semi–continuo inferiormente, se sabe que Φ tiene un mínimo global en H y así, por el lema 3.3.7 y el enunciado *3* del lema 3.3.8, resulta que (P_2) tiene una solución estrictamente positiva en $(a, b)_{\mathbb{T}}$.

Finalmente, supóngase la validez de las condiciones (H_2^5) y (H_2^6); la hipótesis (H_2^5) garantiza que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F_\varepsilon(\sigma(t), x)}{x^2} = \frac{\lambda_1}{2}, \qquad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in D^o, \tag{3.43}$$

lo cual implica, junto con la igualdad

$$D_2 \left(\frac{F_\varepsilon(\sigma(t), x)}{x^2} \right) = -\frac{2G(\sigma(t), x)}{x^3} \quad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in D^o \text{ y todo } \; x \neq 0, \tag{3.44}$$

y la hipótesis (H_2^6), que se cumple

$$F_\varepsilon(\sigma(t),x)=\left[\frac{\lambda_1}{2}+2\int_x^{+\infty}\frac{G(\sigma(t),r)}{r^3}\,dr\right]x^2\le\frac{\lambda_1}{2}\,x^2+C_3, \tag{3.45}$$

para $\Delta-$casi todo punto $t\in D^o$ y todo $x\ge\varepsilon$.

Además, por el enunciado *3* del lema 3.3.6, se sabe que

$$F_\varepsilon(\sigma(t),x)\le 0, \qquad \text{para } \Delta-\text{c. t. p. }\ t\in D^o \text{ y todo }\ x<\varepsilon. \tag{3.46}$$

Por consiguiente, (3.45) y (3.46) y la desigualdad de Wirtinger (1.92) establecen que Φ está acotado inferiormente.

A continuación se verá que Φ verifica la condición de Cerami (C). Sea $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset H$ una sucesión para la cual las condiciones i) e ii) de (C) son válidas. Supóngase que $\lim\limits_{m\to+\infty}\rho_m:=\lim\limits_{m\to+\infty}\|v_m\|_H=+\infty$ y sea $V_m:=\dfrac{v_m}{\rho_m}$, $m\in\mathbb{N}$.

Como para cada $m\in\mathbb{N}$ se cumple que $\|V_m\|_H=1$ y $\{v_m^-\}_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada en H, la proposición 1.5.7 asegura que, pasando a una subsucesión, $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $C(D)$ a algún $V\in H$ tal que $V\ge 0$ en D.

Así pues, por la igualdad (3.38) se tiene, para todo $m\in\mathbb{N}$,

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}}V_m^\Delta(s)\left(V_m^\Delta(s)-V^\Delta(s)\right)\,\Delta s=\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}}g_m(s)\,\Delta s+\frac{\Phi'(v_m)(V_m-V)}{\rho_m}, \tag{3.47}$$

donde, para cada $m\in\mathbb{N}$, $g_m:D\to\mathbb{R}$ está definida para $\Delta-$casi todo punto $s\in D^o$ como

$$g_m(s):=\frac{f_\varepsilon\left(\sigma(s),v_m^\sigma(s)\right)}{\rho_m}\left(V_m^\sigma(s)-V^\sigma(s)\right).$$

La condición (H_2^5) y el lema 3.3.6 garantizan la existencia de una función $N:\mathbb{T}\to[0,+\infty]$ tal que $N\in L^1_\Delta(D^o)$ y

$$|g_m(s)|\le N(s)\cdot|V_m^\sigma(s)-V^\sigma(s)|, \qquad \forall\ m\in\mathbb{N} \text{ y } \Delta-\text{c. t. p. }\ s\in D^o,$$

con lo cual, tomando límites en (3.47) resulta que $\|V\|_H=1$ y así, $V\not\equiv 0$.

Además, por (H_2^2) y (H_2^6), se tiene, para $\Delta-$casi todo punto $t\in D^o$,

$$G(\sigma(t),x)\le\begin{cases}\dfrac{1}{2}\,C_1\,|x|\,(\varphi_\varepsilon^\sigma)^{-\xi}(t); & x<0,\ t\in(D^\kappa)^o\\[2ex] \dfrac{1}{2}\,|x|\,f(b,\varepsilon); & x<0,\ t=\rho(b)<b,\\[2ex] 0; & 0\le x<\varepsilon,\\[2ex] C_3; & x\ge\varepsilon.\end{cases} \tag{3.48}$$

Puesto que el lema 3.2.10 afirma que $\{v_m^-\}_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada en H, por (3.48) y (H_2^6), se deduce que

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{V^\sigma>0} G\left(\sigma(s), v_m^\sigma(s)\right)\ \Delta s = -\infty$$

y

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{V^\sigma=0} G\left(\sigma(s), v_m^\sigma(s)\right)\ \Delta s \leq \tilde{K},$$

para algún $\tilde{K} > 0$; de modo que, de la condición ii) de (C) se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\Phi(v_m) &= \lim_{m\to+\infty}\left\{\frac{1}{2}\,\Phi'(v_m)(v_m) - \int_{[a,b)_\mathbb{T}} G\left(\sigma(s), v_m^\sigma(s)\right)\Delta s\right\}\\ &= +\infty,\end{aligned}$$

lo cual contradice la condición i) de (C).

Por lo tanto, el número real $c = \inf_{y\in H}\Phi(y)$ es un valor crítico de Φ, con lo cual, el lema 3.3.7 y el enunciado *3* del lema 3.3.8 permiten afirmar que existe una solución de (P_2) estrictamente positiva en $(a,b)_\mathbb{T}$. □

3.3.4. Existencia de dos soluciones positivas

A continuación se probarán algunas condiciones suficientes para la existencia de al menos dos soluciones positivas del problema (P_2). Se asumirán las siguientes condiciones:

(H_2^7) Existe una constante $C_4 > 0$ tal que

$$G(\sigma(t), x) \geq -\,C_4, \qquad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } \ t\in D^o \text{ y todo } \ x\in[\varepsilon,+\infty)$$

y

$$\lim_{x\to+\infty} G(\sigma(t), x) = +\infty, \qquad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } \ t\in D^o,$$

siendo $G : D\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida en (3.41).

(H_2^8) Existe una constante $C_5 > 0$ tal que

$$f(\sigma(t), x) \leq C_5\, x, \qquad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } \ t\in D^o \text{ y todo } \ x\in[\varepsilon,+\infty).$$

(H_2^9) No resonancia por encima de λ_1, esto es, existe una constante $C_6 > 0$ tal que

$$f(\sigma(t), x) \geq E_2\, x - C_6 \quad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } t\in D^o \text{ y todo } \ x\in[\varepsilon,+\infty),$$

para algún $E_2 > \lambda_1$.

(H_2^{10}) Existen dos constantes $\theta > 2$ y $x_0 > \varepsilon$ para las cuales las siguientes desigualdades
$$0 < \theta\, F(\sigma(t), x) \leq x\, f(\sigma(t), x)$$
se verifican para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \in [x_0, +\infty)$.

Teorema 3.3.13 *Asúmase la validez de las condiciones* (H_2^1) $-$ (H_2^3). *Si se verifica alguno de los siguientes enunciados*

i) son ciertas (H_2^5) *y* (H_2^7),

ii) son ciertas (H_2^8) *y* (H_2^9),

iii) es cierta (H_2^{10}),

entonces, el problema (P_2) *tiene al menos dos soluciones estrictamente positivas en* $(a, b)_{\mathbb{T}}$.

Demostración: Puesto que se verifican las condiciones (H_2^1) $-$ (H_2^3), por lo visto en la demostración del teorema 3.3.11, se sabe que el funcional Φ tiene un mínimo relativo en un punto $v_0 \in \overset{\circ}{B}$ y $\Phi(v_0) \leq \inf_{v \in \partial B} \Phi(v)$.

Se demostrará que, en todos los casos, si $L > M$ es suficientemente grande, con M dado en (H_2^3) y φ_1 un autovector unitario asociado al autovalor λ_1 tal que $\varphi_1 > 0$ en $(a, b)_{\mathbb{T}}$, entonces, $\Phi(L\varphi_1) \leq \inf_{v \in \partial B} \Phi(v)$; además, se verificará la condición de Cerami (C) y así, el lema del paso de la monta na garantiza la existencia de un segundo punto crítico en el nivel $c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{v \in \gamma([0,1)} \Phi(v)$, donde Γ es la clase de todas las curvas continuas que unen v_0 y $L\varphi_1$ de modo que la conclusión es una consecuencia del lema 3.3.7 y el enunciado *3* del lema 3.3.8.

Inicialmente, supóngase que se verifican las condiciones (H_2^5) y (H_2^7). De las igualdades (3.43) y (3.44) resulta que la siguiente igualdad
$$\frac{\lambda_1}{2}\, x^2 - F_\varepsilon(\sigma(t), x) = -2x^2 \int_x^{+\infty} \frac{G(\sigma(t), r)}{r^3}\, dr$$
se verifica para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ y todo $x \neq 0$; por lo tanto, (H_2^7) establece que
$$\frac{\lambda_1}{2}\, x^2 - F_\varepsilon(\sigma(t), x) \leq C_4, \qquad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } t \in D^o \text{ y todo } x \geq \varepsilon, \tag{3.49}$$
y
$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\lambda_1}{2}\, x^2 - F_\varepsilon(\sigma(t), x)\right] = -\infty, \qquad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } t \in D^o; \tag{3.50}$$
además, el lema 3.3.6 garantiza que para todo $x \in [0, \varepsilon)$ se cumple que
$$\frac{\lambda_1}{2}\, x^2 - F_\varepsilon(\sigma(t), x) < \begin{cases} \varepsilon\left(\dfrac{\lambda_1}{2}\,\varepsilon + C_1\,(\varphi_\varepsilon^\sigma)^{-\xi}(t)\right) & \Delta - \text{c. t. p. } t \in (D^\kappa)^o, \\[2ex] \varepsilon\left(\dfrac{\lambda_1}{2}\,\varepsilon + f(b, \varepsilon)\right) & t = \rho(b) < b. \end{cases} \tag{3.51}$$

Por consiguiente, de la fórmula de integración por partes y de las relaciones (3.49), (3.50) y (3.51) se tiene que

$$\lim_{L\to+\infty} \Phi(L\varphi_1) = \lim_{L\to+\infty} \left\{ \int_a^b \left[\frac{\lambda_1}{2} \left(L\varphi_1^\sigma(s)\right)^2 - F_\varepsilon\left(\sigma(s), L\varphi_1^\sigma(s)\right)\right] \Delta s \right\} = -\infty.$$

La verificación de (C) es similar a la de la demostración de la parte ii) del teorema 3.3.12, con lo cual, el resultado está probado cuando se cumple *i)*.

Supóngase ahora que son ciertas las condiciones (H_2^8) y (H_2^9). El enunciado *3* del lema 3.3.6 y las hipótesis (H_2^1), (H_2^2) y (H_2^9) garantizan que para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ se cumple que

$$F_\varepsilon(\sigma(t), x) \geq \begin{cases} -\varepsilon\, C_1\left(\varphi_\varepsilon^\sigma\right)^{-\xi}(t) & t \in (D^\kappa)^o,\ 0 \leq x < \varepsilon, \\ -\varepsilon\, f(b,\varepsilon) & t = \rho(b) < b,\ 0 \leq x < \varepsilon, \\ \dfrac{E_2}{2}\, x^2 - C_6\, x - \dfrac{E_2}{2}\, \varepsilon^2 & x \geq \varepsilon; \end{cases} \tag{3.52}$$

de modo que, como $E_2 > \lambda_1$, de la fórmula de integración por partes se deduce que

$$\lim_{L\to+\infty} \Phi(L\varphi_1) = \lim_{L\to+\infty} \left\{ \int_a^b \left[\frac{\lambda_1}{2} \left(L\varphi_1^\sigma(s)\right)^2 - F_\varepsilon\left(\sigma(s), L\varphi_1^\sigma(s)\right)\right] \Delta s \right\} = -\infty.$$

Para comprobar la validez de la condición (C), supóngase que $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset H$ verifica las propiedades i) e ii) de (C) y que $\lim\limits_{m\to+\infty} \rho_m := \lim\limits_{m\to+\infty} \|v_m\|_H = +\infty$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, se define $V_m := \dfrac{v_m}{\rho_m}$; el lema 3.3.6 y la hipótesis (H_8) permiten deducir, razonando como en la demostración de la segunda parte del teorema 3.3.12, que, pasando a una subsucesión, la sucesión $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $C(D)$ a algún $V \in H$ no nulo tal que $V \geq 0$ en D.

Sea $\eta := E_2 - \lambda_1$, por la fórmula de integración por partes, el lema 3.3.6 y (H_2^9), se tiene, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \eta \int_a^b \left(V_m \cdot \varphi_1\right)^\sigma(s)\, \Delta s &= \frac{1}{\rho_m} \Bigg\{ \int_a^b \left[E_2\, v_m^\sigma(s) - f_\varepsilon(\sigma(s), v_m^\sigma(s))\right] \varphi_1^\sigma(s)\, \Delta s \\ &\qquad - \Phi'(v_m)(\varphi_1) \Bigg\} \\ &\leq \frac{1}{\rho_m} \Bigg\{ \int_{v_m^\sigma < \varepsilon} E_2\, \varepsilon\, \varphi_1^\sigma(s)\, \Delta s + \int_{v_m^\sigma \geq \varepsilon} C_6\, \varphi_1^\sigma(s)\, \Delta s \\ &\qquad + \|\Phi'(v_m)\|_{H^*} \Bigg\}, \end{aligned}$$

de modo que, tomando límites, resulta que $\eta \displaystyle\int_{[a,b)_\mathbb{T}} \left(V\, \varphi_1\right)^\sigma(s)\, \Delta s \leq 0$, lo cual concluye la demostración siempre que *ii)* sea válido.

Finalmente, supóngase que se cumple la condición (H_2^{10}). Del lema 3.3.6 y (H_2^{10}), se deduce que para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ se verifica

$$F_\varepsilon(\sigma(t), x) \geq \begin{cases} -\varepsilon\, C_1\, (\varphi_\varepsilon^\sigma)^{-\xi}(t), & t \in J,\ 0 \leq x < \varepsilon, \\ -\varepsilon\, f(b, \varepsilon), & t = \rho(b) < b,\ 0 \leq x < \varepsilon, \\ \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^\theta F_\varepsilon(\sigma(t), x_0), & x \geq x_0. \end{cases} \tag{3.53}$$

Por lo tanto, mediante argumentos análogos a los empleados cuando se satisface el enunciado *ii)* y teniendo en cuenta que $\theta > 2$, se concluye que $\lim\limits_{L \to +\infty} \Phi(L\varphi_1) = -\infty$.

Para verificar (C), se considera $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset H$ una sucesión que satisfaga las propiedades i) e ii) de (C); el lema 3.3.6 y (H_2^{10}) garantizan que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \|v_m\|_H^2 &= \int_{[a,b)_\mathbb{T}} [\, \theta\, F_\varepsilon(\sigma(s), v_m^\sigma(s)) - f_\varepsilon(\sigma(s), v_m^\sigma(s)) \cdot v_m^\sigma(s)\,]\ \Delta s \\ &\quad + \theta\, \Phi(v_m) - \Phi'(v_m)(v_m) \\ &\leq \hat{K} + C_1 \cdot \|(\varphi_\varepsilon^\sigma)^{-\xi}\|_{L^1_\Delta} \cdot \|v_m^-\|_{C(D)} \end{aligned}$$

se cumple para todo $m \in \mathbb{N}$ y algún $\hat{K} > 0$; por lo tanto, como el lema 3.2.10 y la proposición 1.5.7 establecen que $\{v_m^-\}_{m \in \mathbb{N}}$ está acotada en H, resulta que $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ está acotada en H de donde se obtiene la validez del resultado asumiendo que se cumple *iii)*. □

3.4. Soluciones en el sentido de las distribuciones de ecuaciones dinámicas singulares con condiciones de frontera

La ecuación de Emden–Fowler

$$u^{\Delta\Delta}(t) + q(t)\ u^\alpha(\sigma(t)) = 0,\ t \in (0,1)_\mathbb{T}, \tag{3.54}$$

aparece en el estudio de dinámica de gases y mecánica de fluídos y en el estudio de mecánica relativista, física nuclear y reacciones químicas; para el modelo continuo ver, por ejemplo, [87] y las referencias que allí se encuentran. La ecuación de Emden–Fowler con exponente negativo ($\alpha < 0$) se ha utilizado en la modelización de fluidos no–newtonianos tales como los lodos del carbón [18]. La existencia de soluciones positivas son las que interesan en la física.

Estamos interesados en el estudio de una amplia clase de problemas singulares que incluyan los relacionados con la ecuación (3.54) y el más general

$$u^{\Delta\Delta}(t) + q(t)\ u^\alpha(\sigma(t)) = g(t, u^\sigma(t)),\ t \in (0,1)_\mathbb{T}, \tag{3.55}$$

Consideraremos en esta sección la ecuación dinámica de segundo orden con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera:

$$(P_3)\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = F(t, u^{\sigma}(t)); & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in (D^{\kappa})^{o}, \\ u(t) > 0; & t \in (a,b)_{\mathbb{T}} \\ u(a) = 0 = u(b), \end{cases}$$

donde $F : D \times (0, +\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ es una función $L^1_\Delta-$Carathéodory en subintervalos compactos de $(0, +\infty)$, es decir, si verifica la siguientes condiciones

(H$_3^1$) i) Para cada $x \in (0, +\infty)$, $F(\cdot, x)$ es $\Delta-$medible en D^o.
ii) Para $\Delta-$casi todo $t \in D^o$, $F(t, \cdot) \in C((0, +\infty))$.

(H$_3^2$) Para todo x_1, $x_2 \in (0, +\infty)$ tal que $x_1 \leq x_2$ existe $m_{(x_1,x_2)} \in L^1_\Delta(D^o)$ tal que

$$|F(t,x)| \leq m_{(x_1,x_2)}(t) \quad \text{para} \ \ \Delta - \text{casi todo } t \in D^o \text{ y todo } \ x \in [x_1, x_2].$$

Además, para usar técnicas variacionales y la teoría de puntos críticos, supondremos que F verifica la siguiente condición

(H$_3^3$) Para cada $x \in (0, +\infty)$, la función $P_F : D \times [0, +\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ definida para $\Delta-$casi todo $t \in D^o$ y todo $x \in [0, +\infty)$ como

$$P_F(t,x) := \int_0^x F(t,r) \ dr \tag{3.56}$$

verifica que $P_F(\cdot, x)$ es $\Delta-$medible en D^o.

Consideramos los espacios

$$C^1_{0,\mathrm{rd}}(D^{\kappa}) := C^1_{\mathrm{rd}}(D^{\kappa}) \cap C_0(D) \quad \text{y} \quad C^1_{\mathrm{c,rd}}(D^{\kappa}) := C^1_{\mathrm{rd}}(D^{\kappa}) \cap C_{\mathrm{c}}(D), \tag{3.57}$$

donde $C^1_{\mathrm{rd}}(D^{\kappa})$ es el conjunto de todas las funciones continuas en D que son $\Delta-$diferenciables en D^{κ} y sus $\Delta-$derivadas son rd–continuas en D^{κ}, $C_0(D)$ es el conjunto de todas las funciones continuas en D que se anulan en la frontera de D y $C_{\mathrm{c}}(D)$ es el conjunto de funciones continuas en D con soporte compacto en $(a,b)_{\mathbb{T}}$.

Por otra parte, consideraremos el espacio de Sobolev de primer orden $H := H^1_{0,\Delta}(D)$, definido en la sección 1.5, del cual se sabe que está dotado de una estructura de espacio de Hilbert con el producto interior $(\cdot, \cdot)_H$ definido en (3.1); denotamos como $\| \cdot \|_H$ su norma inducida.

Además, consideramos los conjuntos

$$H_{0,\mathrm{loc}} := H^1_{\mathrm{loc},\Delta}(D) \cap C_0(D) \quad \text{y} \quad H_{\mathrm{c,loc}} := H^1_{\mathrm{loc},\Delta}(D) \cap C_{\mathrm{c}}(D) \tag{3.58}$$

donde $H^1_{\mathrm{loc},\Delta}(D)$ es el conjunto de funciones cuya restricción a cualquier subintervalo compacto J de $(a,b)_{\mathbb{T}}$ pertenece al espacio de Sobolev $H^1_\Delta(J)$.

Definición 3.4.1 *Se dice que u es una* **solución en el sentido de las distribuciones** *del problema (P_3) si $u \in H_{0,\mathrm{loc}}$, $u > 0$ en $(a,b)_{\mathbb{T}}$ y la igualdad*

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \Big[u^{\Delta}(s) \cdot \varphi^{\Delta}(s) - F(t, u^{\sigma}(t)) \cdot \varphi^{\sigma}(s) \Big] \Delta s = 0 \tag{3.59}$$

se verifica para todo $\varphi \in C^1_{\mathrm{c,rd}}(D^{\kappa})$.

De las propiedades de densidad del los espacios de Sobolev probados en la sección 1.5, se deduce que si u es solución en el sentido de las distribuciones, entonces, se verifica (3.59) para todo $\varphi \in H_{\mathrm{c,loc}}$.

En esta sección vamos a encontrar condiciones suficientes para la existencia de soluciones de (P_3) en el sentido de las distribuciones. Con ciertas hipótesis, aproximaremos dichas soluciones por una sucesión de soluciones débiles de problemas débiles. Además deducimos ciertas condiciones para la existencia de al menos una o dos soluciones positivas de (P_3). Estos resultados generalizan los obtenidos en [15] para $D = [0,1]$ donde el problema (P_3) está definido en todo el intervalo $(0,1)_{\mathbb{T}}$ y los autores suponen que $F \in C((0,1) \times (0,+\infty), \mathbb{R})$ en lugar de verificar $(\mathrm{H}_3^1) - (\mathrm{H}_3^3)$.

3.4.1. Aproximación de (P_3) mediante problemas débiles

En esta subsección deduciremos condiciones suficientes para garantizar la existencia de soluciones en el sentido de las distribuciones de (P_3) donde $F = f + g$ y f, $g : D \times (0,+\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ verifican las hipótesis (H_3^1) y (H_3^3), f verifica (H_3^2) y g verifica la siguiente condición:

(H_3^4) Para cada $p \in (0,+\infty)$ existe $M_p \in L^1_{\Delta}(D^o)$ tal que

$$|g(t,x)| \le M_p(t) \quad \text{para } \Delta - \text{c. t. p. } t \in D^o \text{ y todo } x \in (0,p].$$

Con estas hipótesis podremos aproximar soluciones en el sentido de las distribuciones del problema (P_3) a partir de una sucesión de soluciones débiles de problemas débiles.

En primer lugar, enunciamos una propiedad útil de las funciones absolutamente continuas en D, cuya prueba omitimos por su simplicidad.

Lema 3.4.2 *Si $v \in AC(D)$, entonces, $v^{\pm} := \max\{\pm v, 0\} \in AC(D)$ y*

$$\Big[(v^+)^{\Delta} - v^{\Delta} \Big] \cdot (v^+)^{\Delta} \le 0 \quad y \quad \Big[(v^-)^{\Delta} + v^{\Delta} \Big] \cdot (v^-)^{\Delta} \le 0 \tag{3.60}$$

en $\Delta-$casi todo punto de D^o.

Fijada $\{\varepsilon_j\}_{j\ge1}$ una sucesión de números reales positivos estrictamente decreciente y convergente a cero, definimos, para cada $j \ge 1$, $f_j : D \times (0,+\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ como

$$f_j(t,x) = f(t, \max\{x, \varepsilon_j\}) \qquad \text{para cada } (t,x) \in D \times (0,+\infty), \tag{3.61}$$

notar que f_j verifica (H_3^1) y (H_3^2). Consideramos los siguientes problemas débiles modificados:

$$(P_j)\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = f_j(t, u^\sigma(t)) + g(t, u^\sigma(t)); & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in (D^\kappa)^o, \\ u(t) > 0; & t \in (a,b)_{\mathbb{T}} \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases}$$

Definición 3.4.3 *Se dice que u es una* **solución débil** *de (P_j) si $u \in H$, $u > 0$ en $(a,b)_{\mathbb{T}}$ y se verifica la igualdad*

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \Big[u^\Delta(s)\cdot\varphi^\Delta(s) - \Big(f_j(s,u^\sigma(s)) + g(s,u^\sigma(s))\Big)\cdot\varphi^\sigma(s)\Big]\,\Delta s = 0 \qquad (3.62)$$

para cada $\varphi \in C^1_{0,\mathrm{rd}}(D^\kappa)$.

Se dice que $\underline{u}$ es una **subsolución débil** *de (P_j) si $\underline{u} \in H$, $\underline{u} > 0$ en $(a,b)_{\mathbb{T}}$ y la desigualdad*

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \Big[\underline{u}^\Delta(s)\cdot\varphi^\Delta(s) - \Big(f_j(s,\underline{u}^\sigma(s)) + g(s,\underline{u}^\sigma(s))\Big)\cdot\varphi^\sigma(s)\Big]\,\Delta s \le 0 \qquad (3.63)$$

se verifica para cada $\varphi \in C^1_{0,\mathrm{rd}}(D^\kappa)$ tal que $\varphi \ge 0$ en D.

El concepto de **sobresolución débil** *de (P_j) se define cambiando el sentido de las desigualdades anteriores.*

Notamos que las propiedades de densidad de los espacios de Sobolev de primer orden probadas en la seccion 1.5 permiten deducir que las relaciones en la definición 3.4.3 son válidas para toda $\varphi \in H$ y para toda $\varphi \in H$ tal que $\varphi \ge 0$ en D, respectivamente.

Con argumentos estándar podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 3.4.4 *Se supone que $f, g : D \times (0,+\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ verifican (H_3^1) y (H_3^3), f verifica (H_3^2) y g verifica (H_3^4).*

Si para algún $j \ge 1$ existen $\underline{u}_j$ y $\overline{u}_j$ una subsolución y una sobresolución débil, respectivamente, de (P_j) tales que $\underline{u}_j \le \overline{u}_j$ en D, entonces, (P_j) tiene una solución débil $u_j \in [\underline{u}_j, \overline{u}_j] := \{\, v \in H \,:\, \underline{u}_j \le v \le \overline{u}_j \text{ en } D\,\}$.

A continuación, deduciremos la existencia de una solución de (P_3) en el sentido de las distribuciones a partir de la existencia de una sucesión de soluciones débiles de (P_j); para ello, fijamos $\{a_k\}_{k\ge1}$, $\{b_k\}_{k\ge1} \subset D$ dos sucesiones tales que $\{a_k\}_{k\ge1} \subset (a,(a+b)/2)_{\mathbb{T}}$ es estrictamente decreciente convergente a a si $a = \sigma(a)$ o $a_k = a$ para todo $k \ge 1$ si $a < \sigma(a)$ y $\{b_k\}_{k\ge1} \subset ((a+b)/2, b)_{\mathbb{T}}$ es estrictamente creciente que converge a b si $\rho(b) = b$ o $b_k = b$ para todo $k \ge 1$ si $\rho(b) < b$. Denotamos por $D_k := [a_k, b_k]_{\mathbb{T}}$, $k \ge 1$. Además, fijamos $\{\delta_k\}_{k\ge1}$ una sucesión de números reales positivos estrictamente decreciente convergente a cero tal que

$$[\sigma(a_k), \rho(b_k))_{\mathbb{T}} \subset [a+\delta_k, b-\delta_k)_{\mathbb{T}} \quad \text{y} \quad \delta_k \le \frac{b-a}{2} \qquad \text{para } \ k \ge 1. \qquad (3.64)$$

Proposición 3.4.5 *Se supone que $F = f + g$ y $f, g : D \times (0, +\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ verifica* (H_3^1) *y* (H_3^3)*, f verifica* (H_3^2) *y g verifica* (H_3^4)*.*

Si para cada $j \geq 1$, $u_j \in H$ es una solución débil del problema (P_j) y

$$\nu_\delta := \inf_{j\geq 1} \min_{[a+\delta,b-\delta]_{\mathbb{T}}} u_j > 0 \qquad \textit{para todo} \ \ \delta \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right], \tag{3.65}$$

$$M := \sup_{j\geq 1} \max_D u_j < \infty, \tag{3.66}$$

entonces, una subsucesión de $\{u_j\}_{j\geq 1}$ converge puntualmente en D a una solución en el sentido de las distribuciones u_1 de (P_3).

Demostración: Sea $k \geq 1$ arbitrario; deducimos, por (3.60), (3.64), (3.65) y (3.66) que existe una constante $K_k \geq 0$ tal que para cada $j \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{[a_k,b_k)_{\mathbb{T}}} \left(u_j^\Delta(s)\right)^2 \Delta s &= \left(u_j^\Delta(a_k)\right)^2 \cdot \mu(a_k) + \left(u_j^\Delta(\rho(b_k))\right)^2 \cdot \mu(\rho(b_k)) \\
&\quad + \int_{[\sigma(a_k),\rho(b_k))_{\mathbb{T}}} u_j^\Delta(s) \cdot \left((u_j - \nu_{\delta_k})^+\right)^\Delta(s) \ \Delta s \\
&\leq K_k + (u_j, (u_j - \nu_{\delta_k})^+)_H .
\end{aligned}$$

Por tanto, para cada $j \geq 1$ suficientemente grande para que $\varepsilon_j < \nu_{\delta_1}$, como u_j es una solución débil de (P_j), tomando $\tilde{\varphi}_1 := (u_j - \nu_{\delta_1})^+ \in H$ como la función test en (3.62), de (3.66), (H_3^2) y (H_3^4), podemos asegurar que existe $l \in L^1_\Delta(D^o)$ tal que

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(u_j^\Delta(s)\right)^2 \Delta s \leq K_1 + \int_a^b F(s, u_j^\sigma(s)) \cdot \tilde{\varphi}_1^\sigma(s) \ \Delta s \leq K_1 + M \int_a^b l(s) \ \Delta s;$$

es decir, $\{u_j\}_{j\geq 1}$ está acotada en $H^1_\Delta(D_1)$ y por lo tanto , existe una subsucesión $\{u_{1_j}\}_{j\geq 1}$ que converge débilmente en $H^1_\Delta(D_1)$ y fuertemente en $C(D_1)$ a algún $u^1 \in H^1_\Delta(D_1)$.

Para cada $k \geq 1$, considerando para $j \geq 1$ la solución débil de (P_{k_j}), u_{k_j} y repitiendo el proceso anterior, obtenemos una sucesión $\{u_{(k+1)_j}\}_{j\geq 1}$ que converge débilmente en $H^1_\Delta(D_{k+1})$ y fuertemente en $C(D_{k+1})$ a $u^{k+1} \in H^1_\Delta(D_{k+1})$ con $\{u_{(k+1)_j}\}_{j\geq 1} \subset \{u_{k_j}\}_{j\geq 1}$. Por definición, sabemos que para cada $k \geq 1$, $u^{k+1}|_{D_k} = u^k$.

Sea $u_1 : D \to \mathbb{R}$ dada por $u_1 := u^k$ en D_k para todo $k \geq 1$ y $u_1(a) := 0 =: u_1(b)$; de modo que , $u_1 > 0$ en $(a,b)_{\mathbb{T}}$, $u_1 \in H^1_{\mathrm{loc},\Delta}(D) \cap C((a,b)_{\mathbb{T}})$, u_1 es continua en cada punto aislado de la frontera de D y $\{u_{k_k}\}_{k\geq 1}$ converge puntualmente en D a u_1.

Vamos a demostrar que $u_1 \in C_0(D)$; sólo tenemos que probar que u_1 es continua en cada punto denso de la frontera de D. Sea $0 < \varepsilon < M$ arbitraria, se sigue de (H_3^2) y (H_3^4) que existe $m_\varepsilon \in L^1_\Delta(D^o)$ tal que $m_\varepsilon \geq 0$ en D^o y $F(t,x) \leq m_\varepsilon(t)$ para $\Delta-$casi todo $t \in D^o$ y todo $x \in [\varepsilon, M]$; sea $\varphi_\varepsilon \in H$ una solución débil de

$$-\varphi_\varepsilon^{\Delta\Delta}(t) = m_\varepsilon(t), \quad \Delta - \text{c. t. p. } \; t \in (D^\kappa)^o; \qquad \varphi_\varepsilon(a) = 0 = \varphi_\varepsilon(b);$$

sabemos, por las proposiciones 3.3.3 y 3.3.4, que $\varphi_\varepsilon > 0$ en $(a,b)_{\mathbb{T}}$.

Para toda $k \geq 1$ suficientemente grande $\varepsilon_{k_k} < \varepsilon$, puesto que u_{k_k} y φ_ε son soluciones débiles de ciertos problemas, tomando $\tilde{\varphi}_2 = (u_{k_k} - \varepsilon - \varphi_\varepsilon)^+ \in H$ como la función test en sus respectivos problemas, obtenemos

$$(u_{k_k}, \tilde{\varphi}_2)_H = \int_a^b F(s, u_{k_k}^\sigma(s)) \cdot \tilde{\varphi}_2^\sigma(s)\; \Delta s \leq \int_a^b m_\varepsilon(s) \cdot \tilde{\varphi}_2^\sigma(s)\; \Delta s = (\varphi_\varepsilon, \tilde{\varphi}_2)_H;$$

por lo tanto, de (3.60)

$$\|\tilde{\varphi}_2\|_H^2 \leq (u_{k_k} - \varphi_\varepsilon, \tilde{\varphi}_2)_H \leq 0,$$

lo que implica que $0 \leq u_{k_k} \leq \varepsilon + \varphi_\varepsilon$ en D y así, $0 \leq u_1 \leq \varepsilon + \varphi_\varepsilon$ en D. Por lo tanto, la continuidad de φ_ε en cada punto denso de la frontera de D y la arbitraridad de ε garantizan que $u_1 \in C_0(D)$.

Por último, veremos que la igualdad (3.59) es válida para cada función test $\varphi \in C^1_{\mathrm{c,rd}}(D^\kappa)$; fijamos una de ellas.

Para toda $k \geq 1$ suficientemente grande para que sop $\varphi \subset (a_k, b_k)_{\mathbb{T}}$ y todo $j \geq 1$ suficientemente grande para que $\varepsilon_{k_j} < \nu_{\delta_k}$, puesto que u_{k_j} es una solución débil de (P_{k_j}), tomando $\varphi \in C^1_{\mathrm{c,rd}}(D^\kappa) \subset C^1_{0,\mathrm{rd}}(D^\kappa)$ como la función test en (3.62) y teniendo en cuenta (3.64), obtenemos

$$\int_{[a_k,b_k)_{\mathbb{T}}} u_{k_j}^\Delta(s) \cdot \varphi^\Delta(s)\; \Delta s = (u_{k_j}, \varphi)_H = \int_{[a_k,b_k)_{\mathbb{T}}} F(s, u_{k_j}^\sigma(s)) \cdot \varphi^\sigma(s)\; \Delta s,$$

de donde se sigue, tomando límites, que

$$\int_{[a_k,b_k)_{\mathbb{T}}} \Big((u^k)^\Delta(s) \cdot \varphi^\Delta(s) - F(s, (u^k)^\sigma(s)) \cdot \varphi^\sigma(s) \Big)\; \Delta s = 0,$$

que es equivalente, pues $u_1|_{D_k} = u^k$ y $\varphi = 0 = \varphi^\sigma$ en $D^o \backslash D_k^o$, a

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \Big(u_1^\Delta(s) \cdot \varphi^\Delta(s) - F(s, u_1^\sigma(s)) \cdot \varphi^\sigma(s) \Big)\; \Delta s = 0$$

y la prueba está, por lo tanto completa. □

Las proposiciones 3.4.4 y 3.4.5 llevan a la siguiente condición suficiente para la existencia de al menos una solución en el sentido de las distribuciones del problema (P_3).

Corolario 3.4.6 *Sea $F = f + g$ tal que f, $g : D \times (0, +\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ verifican* (H_3^1) *y* (H_3^3)*, f cumple* (H_3^2) *y g cumple* (H_3^4)*.*

Si para cada $j \geq 1$ existe $\underline{u}_j$ y $\overline{u}_j$ una subsolución débil y una sobresolución débil, respectivamente de (P_j) tal que $\underline{u}_j \leq \overline{u}_j$ en D y

$$\inf_{j\geq 1} \min_{[a+\delta,b-\delta]_{\mathbb{T}}} \underline{u}_j > 0 \quad \textit{para todo} \quad \delta \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right] \quad y \quad \sup_{j\geq 1} \max_{D} \overline{u}_j < \infty, \tag{3.67}$$

entonces, (P_3) tiene una solución en el sentido de las distributiones u_1.

Por último, fijado $u_1 \in H_{0,\mathrm{loc}}$ una solución en el sentido de de las distribuciones de (P_3) con $F = f + g$, vamos a demostrar la existencia de una segunda solución en el sentido de las distribuciones de (P_3) mayor o igual que u_1 en D. Para cada $k \geq 1$, se considera el problema débil

$$(\tilde{P}_k) \begin{cases} -v^{\Delta\Delta}(t) = F(t, (u_1 + v^+)^\sigma(t)) - F(t, u_1^\sigma(t)); & \Delta - \text{c. t.}\, t \in (D_k^\kappa)^o, \\ \\ v(a_k) = 0 = v(b_k). \end{cases}$$

Para cada $k \geq 1$, consideramos $H_k := H^1_{0,\Delta}(D_k)$ un subespacio de H definiendo cada $v \in H_k$ como $v = 0$ en $D \backslash D_k$ y defimos el funcional $\Phi_k : H_k \subset H \to \mathbb{R}$, para cada $v \in H_k$ como

$$\Phi_k(v) := \frac{1}{2} \|v\|_H^2 - \int_{[a_k,b_k)_{\mathbb{T}}} G\left(s, \left(v^+\right)^\sigma(s)\right) \; \Delta s, \tag{3.68}$$

donde la función $G : D \times [0, +\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ está definida para $\Delta-$casi todo $t \in D$ y todo $x \in [0, +\infty)$ como

$$G(t, x) := \int_0^x \Big(F\left(t, u_1^\sigma(t) + r\right) - F\left(t, u_1^\sigma(t)\right) \Big) \; dr. \tag{3.69}$$

Como consecuencia del lema 3.4.2 deducimos que cada solución débil de $(\tilde{P}_k)$ es no-negativa en D_k y razonando como en el lema 3.3.8, se puede probar que Φ_k es débilmente semi–continuo inferiormente, Φ_k es continuamente diferenciable en H_k, para cada v, $w \in H_k$,

$$\Phi_k'(v)(w) = (v, w)_H - \int_{a_k}^{b_k} \Big(F\left(s, \left(u_1 + v^+\right)^\sigma(s)\right) - F\left(s, u_1^\sigma(s)\right) \Big) \cdot w^\sigma(s) \; \Delta s, \tag{3.70}$$

y las soluciones débiles de $(\tilde{P}_k)$ coinciden con los puntos críticos de Φ_k.

A continuación, vamos a asumir la siguiente condición:

(H_3^5) Para $\Delta-$casi todo $t \in D^o$, $f(t, \cdot)$ es no creciente en $(0, +\infty)$.

Proposición 3.4.7 *Se supone que $F = f + g$ es tal que f, $g : D \times (0, +\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ satisfacen* (H_3^1) *y* (H_3^3)*, f cumple* (H_3^2) *y* (H_3^5) *y g cumple* (H_3^4)*.*

Si $\{v_k\}_{k\geq 1} \subset H$, $v_k \in H_k$, *es una sucesión acotada en* H *tal que*

$$\inf_{k\geq 1} \Phi_k(v_k) > 0 \quad y \quad \lim_{k\to+\infty} \|\Phi_k'(v_k)\|_{H_k^*} = 0, \tag{3.71}$$

entonces, $\{v_k\}_{k\geq 1}$ *tiene una subsucesión puntualmente convergente en* D *a una función no trivial* $v \in H$ *tal que* $v \geq 0$ *en* D *y* $u_2 := u_1 + v$ *es una solución en el sentido de las distribuciones de* (P_3).

Demostración: Como $\{v_k\}_{k\geq 1}$ es acotada en H, tiene una subsucesión que converge débilmente en H y fuertemente en $C_0(D)$ a alguna $v \in H$.

Para cada $k \geq 1$, por (3.60), obtenemos

$$\|v_k^-\|_H \leq \|\Phi_k'(v_k)\|_{H_k^*}, \tag{3.72}$$

que implica, de (3.71), que $v \geq 0$ en D y así, $u_2 := u_1 + v > 0$ en $(a,b)_{\mathbb{T}}$.

Con el fin de demostrar que $u_2 := u_1 + v \in H_{0,\mathrm{loc}}$ es una solución en el sentido de las distribuciones de (P_3), fijamos $\varphi \in C^1_{\mathrm{c,rd}}(D^k)$ arbitrario y elegimos $k \geq 1$ suficientemente grande para que sop $\varphi \subset (a_k, b_k)_{\mathbb{T}}$, teniendo en cuenta que u_1 es una solución en el sentido de las distribuciones de (P_3), el paso al límite en (3.70) con $v = v_k$ y $w = \varphi$ permite obtener

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left[v^\Delta(s)\cdot\varphi^\Delta(s) - \Big(F\left(s,(u_1+v)^\sigma(s)\right) - F\left(s,u_1^\sigma(s)\right)\Big)\cdot\varphi^\sigma(s)\right]\Delta s \\ &= \int_a^b \left[u_2^\Delta(s)\cdot\varphi^\Delta(s) - F\left(s,u_2^\sigma(s)\right)\cdot\varphi^\sigma(s)\right]\Delta s; \end{aligned}$$

así, u_2 es una solución en el sentido de las distribuciones de (P_3).

Finalmente, veremos que v es una función no trivial; supongamos que $v = 0$ en D. La condición (H_3^5) permite asegurar que la función G definida en (3.69) verifica para cada $k \geq 1$ y $\Delta-$casi todo $s \in D^o$,

$$\begin{aligned} G\left(s,(v_k^+)^\sigma(s)\right) \;\geq\;& \Big(f\left(s,\left(u_1+v_k^+\right)^\sigma(s)\right) - f\left(s,u_1^\sigma(s)\right)\Big)\cdot(v_k^+)^\sigma(s) \\ &+ \int_0^{(v_k^+)^\sigma(s)} \Big(g\left(s,u_1^\sigma(s)+r\right) - g\left(s,u_1^\sigma(s)\right)\Big)\,dr; \end{aligned}$$

de modo que, por (3.68) y (3.70), tenemos, para cada $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \Phi_k(v_k) \;\leq\;& \frac{1}{2}\|v_k\|_H^2 \;-\; (v_k,v_k^+)_H \;+\; \Phi_k'(v_k)(v_k^+) \\ &- \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \Big(g\left(s,\left(u_1+v_k^+\right)^\sigma(s)\right) - g\left(s,u_1^\sigma(s)\right)\Big)\cdot(v_k^+)^\sigma(s)\;\Delta s \\ &+ \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \left[\int_0^{(v_k^+)^\sigma(s)} \Big(g\left(s,u_1^\sigma(s)+r\right) - g\left(s,u_1^\sigma(s)\right)\Big)\,dr\right]\Delta s; \end{aligned}$$

además, como sabemos que $v_k^+ \leq p$ en D para algún $p > 0$, se deduce de (H_3^4) que existe $m \in L^1_\Delta(D^o)$ tal que

$$\begin{aligned}
\Phi_k(v_k) &\leq \frac{1}{2}\left(\|v_k^-\|_H^2 - \|v_k^+\|_H^2\right) + \Phi_k'(v_k)(v_k^+) + 2\int_a^b m(s)\cdot(v_k^+)^\sigma(s)\,\Delta s \\
&\leq \frac{1}{2}\|v_k^-\|_H^2 + \|\Phi_k'(v_k)\|_{H_k^*}\cdot\|v_k^+\|_H + 2\int_a^b m(s)\cdot(v_k^+)^\sigma(s)\,\Delta s
\end{aligned}$$

por lo tanto, como $\{v_k^+\}_{k\geq 1}$ es acotada en H y converge puntualmente en D a una función no trivial v, deducimos, de la segunda relación en (3.71) y (3.72), que $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k(v_k) \leq 0$ lo que contradice la primera relación en (3.71). Por tanto, v es una función no trivial. □

3.4.2. Existencia y unicidad de solución

En esta subsección demostraremos la existencia de soluciones en el sentido de las distribuciones de (P_3) donde $F = f + g_0 + \eta g_1$, $\eta \geq 0$ es un pequeño parámetro y f, g_0, $g_1 : D \times (0,+\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ satisfacen (H_3^1), (H_3^3) y las siguientes condiciones:

(H_3^6) Existe una constante $x_0 \in (0,+\infty)$ y una función no trivial $f_0 \in L^1_\Delta(D^o)$ tal que $f_0 \geq 0$ en $\Delta-$casi todo punto de D^o y

$$f(t,x) \geq f_0(t), \quad g_0(t,x),\, g_1(t,x) \geq 0,$$

para $\Delta-$casi todo punto de D^o y todo $x \in (0, x_0]$.

(H_3^7) Para cada $p \in (0,+\infty)$, existe $m_p \in L^1_\Delta(D^o)$ y $K_p \geq 0$ tal que para $\Delta-$casi todo punto de D^o se cumple que

$$|f(t,x)| \leq m_p(t) \qquad \text{para todo } \ x \in [p,+\infty)$$

y

$$|g_1(t,x)| \leq K_p \qquad \text{para todo } \ x \in (0,p].$$

(H_3^8) Existe $m_0 \in L^2_\Delta(D^o)$ tal que para $\Delta-$casi todo punto de D^o se verifica que

$$|g_0(t,x)| \leq \lambda\, x + m_0(t) \qquad \text{para todo } \ x \in (0,+\infty),$$

para algún $\lambda < \lambda_1$, donde λ_1 es el menor autovalor positivo del problema

$$\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = \lambda\, u^\sigma(t); \qquad t \in D^{\kappa^2}, \\[2ex] u(a) = 0 = u(b). \end{cases}$$

Teorema 3.4.8 *Se supone que f, g_0, $g_1 : D \times (0,+\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ satisfacen (H_3^1), (H_3^3) y $(\mathrm{H}_3^6) - (\mathrm{H}_3^8)$. Entonces, existe $\eta_0 > 0$ tal que para cada $\eta \in [0,\eta_0)$, el problema (P_3) con $F = f + g_0 + \eta g_1$ tiene una solución en el sentido de las distribuciones u_1.*

Demostración: Sea $\eta \geq 0$ arbitraria; las condiciones $(\mathrm{H}_3^6) - (\mathrm{H}_3^8)$ garantizan que $g := g_0 + \eta g_1$ satisface (H_3^4). Mostraremos que existe $\eta_0 > 0$ tal que para cada $\eta \in [0, \eta_0)$, se verifican las hipótesis del corolario 3.4.6.

Sea x_0 y f_0 dadas en (H_3^6), sabemos, por las proposiciones 3.3.3 y 3.3.4, que podemos elegir $\varepsilon \in (0, 1]$ tan pequeña que la solución débil $\underline{u} \in H$ de

$$-u^{\Delta\Delta}(t) = \varepsilon f_0(t), \quad \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in (D^\kappa)^o; \qquad u(a) = 0 = u(b),$$

cumple $\underline{u} > 0$ en $(a, b)_{\mathbb{T}}$ y $\underline{u} \leq x_0$ en D.

Sea $j \geq 1$ tal que $\varepsilon_j < x_0$; obtenemos, por (H_3^6), que

$$-\underline{u}^{\Delta\Delta}(t) \leq f_0(t) \leq f_j(t, \underline{u}^\sigma(t)) + g(t, \underline{u}^\sigma(t)); \quad \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in D^o,$$

de donde se deduce que $\underline{u}$ es una solución débil de (P_j).

Como consecuencia de (H_3^1), (H_3^3) y $(\mathrm{H}_3^6) - (\mathrm{H}_3^8)$, razonando como en el teorema 3.3.12, deducimos que el problema

$$\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t) = f_j(t, u^\sigma(t)) + g_0(t, u^\sigma(t)) + 1; & \Delta - \text{c. t. p. } \ t \in (D^\kappa)^o, \\ u(t) > 0; & t \in (a, b)_{\mathbb{T}} \\ u(a) = 0 = u(b), & \end{cases}$$

tiene una solución débil $\overline{u}_j \in H$ la cual, por el lema 3.4.2 y (H_3^6), satisface que $\underline{u} \leq \overline{u}_j$ en D. Veremos que $\{\overline{u}_j\}_{j \geq 1}$ es acotada en $C_0(D)$; tomando $\varphi_j := (\overline{u}_j - x_0)^+ \in H$ como una función test, sabemos, de (3.60), (H_3^7) y (H_3^8), que existe $m_{x_0} \in L^2_\Delta(D^o)$ tal que

$$\|\varphi_j\|_H^2 \leq (\overline{u}_j - x_0, \varphi_j)_H = \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \Big(f_j(s, \overline{u}_j^\sigma(s)) + g_0(s, \overline{u}_j^\sigma(s)) + 1 \Big) \cdot \varphi_j^\sigma(s) \; \Delta s$$

$$\leq \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \Big(\lambda \overline{u}_j^\sigma(s) + m_{x_0}(s) + m_0(s) + 1 \Big) \cdot \varphi_j^\sigma(s) \; \Delta s;$$

de modo que, del hecho de que la inmersión de H en $C_0(D)$ es compacta, ver la proposición 1.5.7, la desigualdad de Wirtinger establecida en el corolario 1.6.3 y la relación $\lambda < \lambda_1$, se deduce que $\{\varphi_j\}_{j \geq 1}$ es acotada en H y por lo tanto, $\{\overline{u}_j\}_{j \geq 1}$ es acotada en $C_0(D)$. Así, la condición (H_3^7) permite afirmar que existe $\eta_0 \geq 0$ de tal forma que para todo $\eta \in [0, \eta_0)$ se verifica

$$-\overline{u}_j^{\Delta\Delta}(t) \geq f_j(t, \overline{u}_j^\sigma(t)) + g_0(t, \overline{u}_j^\sigma(t)) + \eta g_1(t, \overline{u}_j^\sigma(t)); \quad \Delta - \text{a. e. } \ t \in D^o,$$

lo que implica que $\overline{u}_j$ es una sobresolución débil de (P_j).

Por tanto, para cada $j \geq 1$ suficientemente grande, tenemos una subsolución y una sobresolución de (P_j) respectivamente verificando las hipótesis del corolario 3.4.6 y así podemos garantizar que el problema (P_3) tiene al menos una solución en el sentido de las distribuciones u_1. □

Teorema 3.4.9 *Si $f : D \times (0, +\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ verifica* (H_3^1), (H_3^2) *y* (H_3^5), *entonces,* (P_3) *con $F = f$ tiene a lo sumo una solución en el sentido de las distribuciones.*

Demostración: Supongamos que (P_3) tiene dos soluciones en el sentido de las distribuciones u_1, $u_2 \in H_{0,\mathrm{loc}}$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomamos $\varphi = (u_1 - u_2 - \varepsilon)^+ \in H_{\mathrm{c,loc}}$ como función test en (3.59), por (3.60) y (H_3^5), tenemos

$$\|\varphi\|_H^2 \leq (u_1 - u_2 - \varepsilon, \varphi)_H = \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \Big(f(s, u_1^\sigma(s)) - f(s, u_2^\sigma(s) \Big) \cdot \varphi^\sigma(s)\ \Delta s \leq 0;$$

así, $u_1 \leq u_2 + \varepsilon$ en D. Al ser ε arbitraria se sigue que $u_1 \leq u_2$ en D e intercambiando u_1 y u_2, se concluye que $u_1 = u_2$ en D. □

Corolario 3.4.10 *Si $f : D \times (0, +\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ verifica* (H_3^1), (H_3^3), (H_3^5) *y* (H_3^6) $-$ (H_3^8) *con $g_0 = 0 = g_1$, entonces,* (P_3) *con $F = f$ tiene una única solución en el sentido de las distribuciones.*

3.4.3. Existencia de dos soluciones ordenadas

A continuación, utilizando el teorema 3.4.8 que garantiza la existencia de una solución en el sentido de las distribuciones de (P_3), deduciremos, aplicando la Proposicion 3.4.7, la existencia de una segunda solución mayor o igual que la primera en el intervalo D; para ello vamos a suponer que f, g_0, $g_1 : D \times (0, +\infty) \to \bar{\mathbb{R}}$ verifican (H_3^1), (H_3^3), (H_3^6) $-$ (H_3^8) y las siguientes condiciones:

(H_3^9) Para $\Delta-$casi todo $t \in D^o$, $f(t, \cdot)$ es no creciente y convexa en $(0, x_0]$, donde x_0 es el dado en (H_1).

(H_3^{10}) Existen constantes $\theta > 2$, C_1, $C_2 \geq 0$ y $x_1 > 0$ tal que para $\Delta-$casi todo punto $t \in D^o$ se satisface que

$$|g_1(t, x)| \leq C_1 x^{\theta - 1} + C_2 \qquad \text{para todo } \ x \in (0, +\infty)$$

y

$$0 < \int_0^x g_1(t, r)\ dr \leq \frac{1}{\theta}\ x\ g_1(t, x) \qquad \text{para todo } \ x \in [x_1, +\infty).$$

Usaremos la siguiente variante del lema del paso de la montaña, cuya demostración se puede ver en [36].

Lema 3.4.11 *Si Φ es un funcional continuamente diferenciable definido en un espacio de Banach H y existe v_0, $v_1 \in H$ tal que*

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{v \in \gamma([0,1])} \Phi(v) > \Phi(v_0), \Phi(v_1), \tag{3.73}$$

donde Γ es la clase de todas las curvas continuas en H que unen v_0 y v_1.

Entonces, existe una sucesión $\{v_k\}_{k \geq 1} \subset H$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} \Phi(v_k) = c, \qquad \lim_{k \to +\infty} (1 + \|v_k\|_H)\ \|\Phi'(v_k)\|_{H^*} = 0. \tag{3.74}$$

Teorema 3.4.12 *Sean f, g_0, $g_1 : D\times(0,+\infty)\to\bar{\mathbb{R}}$ en las condiciones de* (H_3^1), (H_3^3) *y* $(\mathrm{H}_3^6)-(\mathrm{H}_3^{10})$. *Entonces, existe $\eta_0>0$ tal que para cada $\eta\in(0,\eta_0)$, el problema (P_3) con $F=f+g_0+\eta g_1$ tiene dos soluciones en el sentido de las distribuciones u_1, u_2 tales que $u_1\leq u_2$ en D y $u_2-u_1\in H$.*

Demostración: Las condiciones $(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_4)$ permiten suponer que para $\Delta-$ casi todo $t\in D^o$, $f(t,\cdot)$ es no negativa, no creciente y convexa en $(0,+\infty)$ puesto que estas condiciones pueden obtenerse sustituyendo f y g_0 en $D\times(x_0,+\infty)$ por $f(t,x_0)$ y $g_0(t,x)+f(t,x)-f(t,x_0)$, respectivamente.

Sea u_1 una solución en el sentido de las distribuciones de (P), cuya existencia está garantizada por el teorema 3.4.8, y sea $\eta>0$ arbitraria; está claro que $F=f+g$ con $g:=g_0+\eta g_1$ verifica las hipótesis de la proposición 3.4.7; vamos a demostrar la existencia de $\eta_0>0$ tal que para cada $\eta\in(0,\eta_0)$ somos capaces de construir una sucesión $\{v_k\}_{k\geq1}\subset H$ en las condiciones de la proposición 3.4.7.

Para cada $k\geq1$ y $v\in H_k$, como consecuencia de las condiciones (NI), (H_3), (H_5) y de la inmersión compacta de H en $C_0(D)$, deducimos que existen dos constantes C_3, $C_4\geq0$ tales que la función G definida en (3.69) verifica para $\Delta-$casi todo $s\in D^o$,

$$G\left(s,(v^+)^\sigma(s)\right)\leq\frac{\lambda}{2}(v^\sigma)^2(s)+C_3\left(m_0(s)+1\right)\|v\|_H+\eta C_4\Big(1+\|v\|_H\Big)^{\theta-1}\|v\|_H,$$

lo que implica, por (3.68) y la desigualdad de Wirtinger del corolario 1.6.3, que existe una constante $C_5\geq0$ tal que

$$\begin{aligned}\Phi_k(v)&=\frac{1}{2}\|v\|_H^2-\int_{[a_k,b_k)_{\mathbb{T}}}G\left(s,(v^+)^\sigma(s)\right)\,\Delta s\\&\geq\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|v\|_H^2-C_5\left(1+\eta\,(1+\|v\|_H)^{\theta-1}\right)\|v\|_H.\end{aligned}$$

Así, como $\lambda<\lambda_1$, existen constantes R, η_0, $c_0>0$ tales que

$$\inf_{\substack{v\in H_k\\ \|v\|_H=R}}\Phi_k(v)\geq c_0>0\qquad\text{para todos }\ k\geq1\ \text{ y }\ \eta\in(0,\eta_0).\tag{3.75}$$

Sea $\eta\in(0,\eta_0)$ arbitrario. De la segunda relación en (H_3^{10}), obtenemos que para $\Delta-$casi todo punto $t\in D^o$ se cumple que

$$g_1(t,x)\geq C_6x^{\theta-1}\qquad\text{para todo }\ x\in[x_1,+\infty),\tag{3.76}$$

para alguna constante $C_6>0$; por lo tanto, no es difícil demostrar que existe $v_1\in H_1$ tal que $v_1>0$ en $(a,b)_{\mathbb{T}}$, $\|v_1\|_H>R$ y $\Phi_1(v_1)<0$, con lo cual, como $\Phi_1(0)=0$, denotando por Γ_1 la clase de todas las curvas continuas en H_1 que unen 0 y v_1, se sigue de (3.75) que

$$c_1:=\inf_{\gamma\in\Gamma_1}\max_{v\in\gamma([0,1])}\Phi_1(v)\geq c_0>\Phi_1(0),\Phi_1(v_1)$$

y así, el lema 3.4.11 establece la existencia de una sucesión $\{v_k\}_{k\geq 1} \subset H_1$ tal que
$$\lim_{k\to+\infty} \Phi_1(v_k) = c_1, \qquad \lim_{k\to+\infty} (1+\|v_k\|_H)\ \|\Phi_1'(v_k)\|_{H_1^*} = 0.$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que $H_1 \subset H_k$ y $\Phi_k|_{H_1} = \Phi_1$ para todo $k \geq 1$, eliminando un número finito de términos si fuese necesario, se obtiene una sucesión $\{v_k\}_{k\geq 1} \subset H$ tal que $v_k \in H_k$ para cada $k \geq 1$,

$$0 < \frac{c_0}{2} \leq \Phi_k(v_k) \leq 2c_1 \qquad \text{para todo} \ \ k \geq 1 \tag{3.77}$$

y

$$\lim_{k\to+\infty} (1+\|v_k\|_H)\ \|\Phi_k'(v_k)\|_{H_k^*} = 0; \tag{3.78}$$

mostraremos que esta sucesión está acotada en H.

De (3.60) deducimos que

$$0 \leq \lim_{k\to+\infty} \|v_k^-\|_H \leq \lim_{k\to+\infty} \|\Phi_k'(v_k)\|_{H_k^*} = 0, \tag{3.79}$$

Para cada $k \geq 1$, de (3.60), (3.68) y (3.70), tenemos que

$$\Phi_k(v_k) - \frac{1}{2}\,\Phi_k'(v_k)(v_k^+)\ \geq\ \frac{1}{2}\,\|v_k^-\|_H^2\ +\ \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} H_F\left(s,(v_k^+)^\sigma(s)\right)\ \Delta s, \tag{3.80}$$

donde, para $\Delta-$casi todo $s \in D^o$,

$$\begin{aligned} H_F\left(s,(v_k^+)^\sigma(s)\right) \quad &= \quad \frac{1}{2}\Big(F\left(s,\left(u_1+v_k^+\right)^\sigma(s)\right) + F\left(s,u_1^\sigma(s)\right)\Big)\cdot (v_k^+)^\sigma(s) \\ &\quad - \int_{[u_1^\sigma(s),(u_1+v_k^+)^\sigma(s))_{\mathbb{T}}} F(s,r)\ dr; \end{aligned}$$

como consecuencia directa de la convexidad de f y las condiciones (H_3^7), (H_3^8), (H_3^{10}) y (3.76), deducimos que existen constantes $C_7 > 0$ y C_8, $C_9 \geq 0$ tales que

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} H_F\left(s,(v_k^+)^\sigma(s)\right)\ \Delta s\ \geq\ C_7\left\|(v_k^+)^\sigma\right\|_{L_\Delta^\theta}^\theta\ -\ C_8\ \Big(\left\|(v_k^+)^\sigma\right\|_{L_\Delta^2}^2\ +\ 1\Big)\ -\ C_9. \tag{3.81}$$

Por tanto, las relaciones (3.77), (3.78), (3.79), (3.80) y (3.81) permiten afirmar que la sucesión $\{(v_k^+)^\sigma\}_{k\geq 1}$ está acotada en $L_\Delta^\theta(D^o)$ y así, como para todos los $k \geq 1$,

$$\frac{1}{2}\,\|v_k\|_H^2\ \leq\ \Phi_k(v_k) + \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}}\left[\int_0^{(v_k^+)^\sigma(s)}\Big(g\left(s,u_1^\sigma(s)+r\right) - g\left(s,u_1^\sigma(s)\right)\Big)\ dr\right]\ \Delta s$$

concluimos, por (3.77), (3.78), (H_3^8) y (H_3^{10}), que $\{v_k\}_{k\geq 1}$ está acotada en H y la proposición 3.4.7 conduce al resultado. □

Bibliografía

[1] **Adams R. A.** Sobolev spaces, *Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.*

[2] **Agarwal R. P.** Difference equations and inequalities. Theory, methods, and applications. Second edition. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 228. Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.*

[3] **Agarwal R. P., Bohner M. y Peterson A.** *Inequalities on time scales: a survey.*, Math. Inequal. Appl. 4 (2001), no. 4, 535–557.

[4] **Agarwal, R., Bohner M., O'Regan D. y Peterson A.** *Dynamic Equations on Time Scales: a Survey. Dynamic Equations on Time Scales*, J. Compu. Appl. Math., 141 (2002), 1-2, 1–26.

[5] **Agarwal R. P., Cabada A. y Otero–Espinar V.** *Existence and Uniqueness Results for n–th Order Nonlinear Difference Equations in Presence of Lower and Upper Solutions*, Archiv. Inequal. Appl., 1, (2003), 421–432.

[6] **Agarwal R. P., Cabada A., Otero–Espinar V. y Dontha S.** *Existence and Uniqueness of Solutions for Anti–Periodic Difference Equations*, Archiv. Inequal. Appl.

[7] **Agarwal, R. P., Čuljak V. y Pečarić J.** *On discrete and continuous Wirtinger inequalities.* Appl. Anal. 70 (1998), no. 1-2, 195–204.

[8] **Agarwal R. P. y O'Regan D.** Singular differential and integral equations with applications. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003*

[9] **Agarwal R. P., O'Regan D. y Wong P. J. Y.** Positive solutions of differential, difference and integral equations, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.*

[10] **Agarwal R. P., Otero–Espinar V., Perera K. y Vivero D. R.** *Basic Properties of Sobolev's Spaces on Bounded Time Scales.* Adv. Difference Equ. 2006, Art. ID 38121, 14 pages.

[11] **Agarwal R. P., Otero–Espinar V., Perera K. y Vivero D. R.** *Existence of multiple positive solutions for second order nonlinear dynamic BVPs by variational methods.* J. Math. Anal. Appl., 331 (2007) 1263–1274.

[12] **Agarwal R. P., Otero–Espinar V., Perera K. y Vivero D. R.** *Multiple Positive Solutions of Singular Dirichlet Problems on Time Scales via Variational Methods.* Nonlinear Analysis, 67 (2007) 368–381.

[13] **Agarwal R. P., Otero–Espinar V., Perera K. y Vivero D. R.** *Wirtinger's Inequalities on Time Scales.* Canad. Math. Bull. 51 (2008), 161–171.

[14] **Agarwal R. P., Otero–Espinar V., Perera K. y Vivero D. R.** *Multiple Positive Solutions in the Sense of Distributions of Singular BVPs on Time Scales and a application to Emden-Fowler equations.* Advances in Difference Equations, Volume 2008 (2008), Article ID 796851, 13 pages.

[15] **Agarwal R. P., Perera K. y O'Regan D.** *Positive Solutions in the Sense of Distributions of Singular Boundary Value Problems.* Proc. Amer. Math. Soc., 136 (2008), 279-286.

[16] **Agarwal R. P., Perera K. y O'Regan D.** *Multiple Positive Solutions of Singular Problems by Variational Methods.* Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), no. 3, 817–824.

[17] **Agarwal R. P., Perera K. y O'Regan D.** *Multiple positive solutions of singular and nonsingular discrete problems via variational methods.* Nonlinear Analysis 58 (2004) 69–73.

[18] **Agarwal R. P., O'Regan D., Lakshmikantham V. y Leela S.** *An upper and lower solution theory for singular Emden–Fowler equations.* Nonlinear Anal. Real World Appl., 3 (2002) 275–291.

[19] **Akin, E., Erbe, L., Peterson, A. y Kaymakçalan, B.** *Oscillation results for a dynamic equation on a time scale.* J. Difference Equ. Appl. 7, 6, 793-810 (2001).

[20] **Atici, F. y Biles, D. C.** *First Order Dynamic Inclusions on Time Scales*, Preprint.

[21] **Aulbach, B. y Neidhart L.**, 2004, *Integration on measure chains. (English. English summary)* Proceedings of the Sixth International Conference on Difference Equations, 239–252, CRC, Boca Raton, FL.

[22] **Beesack P. R.** *Integral inequalities of Wirtinger type.* Duke Math. J. 25 (1958), 477–498.

[23] **Biles D. C. y Binding P. A.** *On Carathéodory's condition for the initial value problem.* Proceedings of the American Mathematical Society, 125, no. 5, (1997),1371–1376.

[24] **Bohner, M. y Guseinov, G. S.** *Improper integrals on time scales. Special issue: dynamic equations on time scales.* Dynam. Systems Appl. 12, (2003), 1-2, 45 – 65.

[25] **Bohner M. y Peterson A.** Dynamic equations on time scales. An introduction with Applications, *Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.*

[26] **Bohner M. y Peterson A.** Advances in dynamic equations on time scales. *Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.*

[27] **Brezis H.** Analyse Fonctionnelle: Thèorie et Applications. *Masson, Paris. 1996.*

[28] **Cabada A.** *Extremal Solutions and Green's Functions of Higher Order Periodic Boundary Value Problems in Time Scales*, J. Math. Anal. Appl., 290, (2004), 35 - 54.

[29] **Cabada A.** *The Method of Lower and Upper Solutions for Periodic and Anti–Periodic Difference Equations*, Electr. Trans. Numer. Anal., 27 (2007), 13-25 (electrónica).

[30] **Cabada A., Otero–Espinar V. y Pouso R. L.** *Existence and Approximation of Solutions for First–Order Discontinuous Difference Equations with Nonlinear Global Conditions in the Presence of Lower and Upper Solutions.* Computers and Mathematics with Applications, 39, (2000) 21–33.

[31] **Cabada, A. y Pouso, R. L.** *On First Order Discontinuous Scalar Differential Equations.* Nonl. Studies, 6, 2, (1999), 161–170.

[32] **Cabada A. y Vivero D. R.***Existence of Solutions of First Order Dynamic Equations with Nonlinear Functional Boundary Value Conditions.* Nonlinear Analysis, TMA, (2005) 63, e697-e706.

[33] **Cabada A. y Vivero D. R.** *Criterions for Absolutely Continuity on Time Scales.* J. Difference Equ. Appl. 11 (2005), no. 11, 1013–1028.

[34] **Cabada A. y Vivero D. R.** *Expression of the Lebesgue $\Delta-$integral on time scales as a usual Lebesgue integral. Application to the calculus of $\Delta-$antiderivatives.* Math. Comput. Modelling 43 (2006) 194–207.

[35] **Carl, S. y Heikkilä, S.** Nonlinear Differential Equation in Ordered Spaces *London/CRC, Boca Ratón, Fl.: Chapman & Hall, 2000.*

[36] **Cerami G.** *An existence criterion for the critical points on unbounded manifolds.* Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 112(2):332–336 (1979), 1978.

[37] **Christiansen F. B. y Fenchel T. M.** Theories of Populations in Biological Communities. Volume 20 of Lecture Notes in Ecological Studies. *Springer–Verlag, Berlin, 1977.*

[38] **Cid J. A.** *On extending existence theory from scalar ordinary differential equations to infinite quasimonotone systems of functional equations.* Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no. 9, 2661–2670.

[39] **Cid J. A. y Pouso R. L.**, On first-order ordinary differential equations with nonnegative right-hand sides, Nonlinear Analysis: TMA 52 (2003) 1961–1977.

[40] **Cid J. A., Heikkilä, S. y Pouso R. L.**, Uniqueness and existence results for ordinary differential equations, J. Math. Anal. Appl. 316 (2006) 178–188.

[41] **Dautray R. y Lions J.-L.** Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 2. Functional and Variational Methods. *With the collaboration of Michel Artola, Marc Authier, Philippe Bnilan, Michel Cessenat, Jean Michel Combes, Hne Lanchon, Bertrand Mercier, Claude Wild and Claude Zuily. Translated from the French by Ian N. Sneddon. Springer-Verlag, Berlin, 1988.*

[42] **Dieudonné** Fundamentos de análisis moderno *Barcelona: Reverte, D. L. 1979-1983.*

[43] **Du, Z. y Ge, W.** *Existence of multiple positive solutions for a Second-Order Sturm-Liouville-Like Boundary Value Problem on a Measure Chain.* Acta Math. Appl. Sinica, 29 (1) (2006), 124–130.

[44] **Dubinskij J. A.** Sobolev spaces of infinite order and differential equations, *Mathematics and its Applications (East European Series), 3. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1986.*

[45] **Erbe, L. y Peterson, A.** *Green's functions and comparison theorems for differential equations on measure chains.* Dyn. Contin. Discrete Impulsive Syst. 6, 1, 121-137 (1999).

[46] **Erbe, L. y Peterson, A.** *Boundedness and oscillation for nonlinear dynamic equations on a time scale.* Proc. Amer. Math. Soc. 132, (2004), 3, 735 – 744.

[47] **Erbe, L., Peterson, A. y Saker, S. H.** *Oscillation criteria for second-order nonlinear dynamic equations time scales.* J. London Math. Soc. 67, (2003), 3, 701 – 714.

[48] **Fazly M., y Hesaaraki M.**, Periodic solutions for predator-prey systems with Beddington-DeAngelis functional response on time scales, Nonlinear Analysis: Real World Appl., 9 (2008) 1224-1235.

[49] **Figueiredo D. G.** , *Lect. Notes Math. No 957, Springer, Berlin, 1982.*

[50] **Franco D., Nieto, J. J. y O'Regan D.** *Anti–periodic Boundary Value Problem for Nonlinear First Order Ordinary Differential Equations*, Math. Inequal. Appl., 6, 3, (2003), 477 – 485.

[51] **Franco, D., Nieto, J. J. y O'Regan, D.** *Existence of solutions of first order ordinary differential equations with nonlinear boundary conditions.* Appl. Math. Comput. (to appear).

[52] **Goodman G. S.** *Subfunctions and the Initial-Value Problem for Differential Equations Satisfying Carathéodory's Hypotheses.* Journal of Differential Equations, (1970), 7, 232–242.

[53] **Guseinov G. Sh.** *Integration on time scales.* J. Math. Anal. Appl., 285 (2003), no. 1, 107–127.

[54] **Guseinov, G. S. y Kaymakçalan, B.** *Basics of Riemann delta and nabla integration on time scales.* J. Difference Equ. Appl. 8, 11, (2002), 1001–1017.

[55] **Hardy G. H., Littlewood J. E. y Pólya, G.** Inequalities. Second edition. *Cambridge, at the University Press, 1952.*

[56] **Hassan E. R. and Rzymowski W.** *Extremal solutions of a discontinuous scalar differential equations.* Nonlinear Analysis, (1999), 37, 997–1017.

[57] **Heikkilä, S. y Lakshmikantham, V.** Monotone Iterative Techniques for Discontinuous Nonlinear Differential Equation. (New York: Marcel Dekker) (1994).

[58] **Hewitt E. y Stromberg K. R.** Real and Abstract Analysis, *Springer–Verlag, New York; Third Edition (1975).*

[59] **Hilscher, R.** *A time scales version of a Wirtinger-type inequality and applications. Dynamic equations on time scales.* J. Comput. Appl. Math. 141 (2002), no. 1-2, 219–226.

[60] **Hilger S.** *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten.* Ph. D. Thesis, Universität Würzburg, 1988. (In German).

[61] **Hilger S.** *Analysis on measure chains– a unified approach to continuous and discrete calculus*, Results Math., (1990), 18:18–56.

[62] **Huff, S., Olumolode, G., Pennington, N. y Peterson, A.** *Oscillation of an Euler-Cauchy dynamic equation.* Dynamical systems and differential equations (Wilmingon, NC, 2002). Discrete Contin. Dyn. Syst. (2003), 423–431.

[63] **Jankowski T.** *Ordinary Differential Equations with Nonlinear Boundary Conditions*, Georgian Math. J., 9 (2002), 2, 287–294.

[64] **Kaymakçalan B., Lakshmikantham V. y Sivasundaram S.** Dynamical Systems on Measure Chains. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.*

[65] **Khan R.A., Nieto J.J. y Otero-Espinar V.** *Existence and approximation of solution of three-point boundary value problems on time scale.* J. Difference Equ. Appl., 14 (2008) 723–736.

[66] **Kolmogórov A. N. y Fomín S. V.** Elements of the theory of functions and functional analysis., Vol. 2: Measure. The Lebesgue integral. Hilbert space. *Translated from the first (1960) Russian ed. by Hyman Kamel and Horace Komm Graylock Press, Albany,* N.Y. 1961.

[67] **Kufner A. y Sndig A.-M.** Some applications of weighted Sobolev spaces, *Teubner-Texte zur Mathematik [Teubner Texts in Mathematics], 100. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1987.*

[68] **Liz E. y Pouso R. L.** *Existence theory for first order discontinuous functional differential equations.* Proc. Amer. Math. Soc. 130, 11 (2002), 3301-3311.

[69] **Lee, Chung-Fen; Yeh, Cheh-Chih; Hong, Chen-Huang y Agarwal, R. P.** *Lyapunov and Wirtinger inequalities.* Appl. Math. Lett. 17 (2004), no. 7, 847–853.

[70] **Marti J. T.** Introduction to Sobolev spaces and finite element solution of elliptic boundary value problems, *Computational Mathematics and Applications. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 1986.*

[71] **Mawhin J. y Willem M.** Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. *Applied Mathematical Sciences 74. Springer–Verlag, New York, 1989.*

[72] **Mazýa V. G. y Poborchi S. V.** Differentiable functions on bad domains. *World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1997.*

[73] **Milovanović G. V. y Milovanović, I. Z.** Discrete inequalities of Wirtinger's type. *Recent progress in inequalities (Niš, 1996), 289–308, Math. Appl., 430, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.*

[74] **Otero-Espinar V. y Vivero D. R.** *Existence of extremal solutions by approximation to a first–order initial dynamic equation with Carathéodory's conditions and discontinuous non–linearities.* J. Difference Equ. Appl. 12 (2006), no. 12, 1225–1241.

[75] **Otero-Espinar V. y Vivero D. R.**, *Existence and Approximation of Extremal Solutions to Several First–Order Discontinuous Dynamic Equations with Nonlinear Boundary Value Conditions*, Nonlinear Analysis: TMA, 68 (2008) 2027-2037.

[76] **Otero-Espinar V. y Vivero D. R.**, *Existence and Approximation of Extremal Solutions to First-Order Infinite Systems of Functional Dynamic Equations*, J. Math. Anal. Appl., 339 (2008) 590-597.

[77] **Otero-Espinar V. y Vivero D. R.**, *Uniqueness and existence results for initial value problems on time scales through a reciprocal problem and applications*, Computers and Mathematics with Applications, 58(2009) 700-710.

[78] **Peano G.** *Sull'integrabilitá delle equazione differentiali di primo ordine* Atti R. Accad. Torino, (1985–1986), 21, 677–685.

[79] **Rabinowitz P. H.** Minimax methods in critical point theory with apinimax methods in critical point theory with applications to differential equations. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986.*

[80] **Rudin W.** Real and complex analysis. Third edition. *McGraw-Hill Book Co.,* New York, 1987. (First edition: New York, 1966)

[81] **Scorza Dragoni G.** *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, (Italian) Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, (1948), 17, 102–106.

[82] **Sheng Q., Fadag M., Henderson J. y Davis J.M.**, An exploration of combined dynamic derivatives on time scales and their applications, Nonlinear Analysis: Real World Appl. 7 (2006) 395-413.

[83] **Stromberg K. R.** An introduction to classical real analysis, *Chapman & Hall,* London, 1996. (First edition: Chapman & Hall, 1981).

[84] **Swanson C. A.** *Wirtinger's inequality.* SIAM J. Math. Anal. 9 (1978), no. 3, 484–491.

[85] **Tarski A.** *A lattice–theoretical fixed point theorem and its applications.* Pacific J. Math. 5 (1955), 285–309.

[86] **Tian, Y., Du, Z. y Ge, W.** *Existence results for discrete Sturm- Liouville problem via variational methods.* J. Difference Equ. Appl., 13 (6), (2007), 467–478.

[87] **Wong, J. S. W.** *On the generalized Emden–Fowler equation.* SIAM Rev., 17 (1975), 339–360.

[88] **Ziemer W. P.** Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation. *Graduate Texts in Mathematics, 120. Springer-Verlag, New York, 1989.*