

TESIS DOCTORAL

MÉTODO DE MELNIKOV, BANDAS DE
ESTOCASTICIDAD Y NO
INTEGRABILIDAD EN UN GIRÓSTATO
CON MOMENTOS DE INERCIA VARIABLES

Manuel Iñarrea Las Heras



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

MÉTODO DE MELNIKOV, BANDAS DE
ESTOCASTICIDAD Y NO
INTEGRABILIDAD EN UN GIRÓSTATO
CON MOMENTOS DE INERCIA VARIABLES

Manuel Iñarrea Las Heras

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2003

Esta tesis doctoral, dirigida por el Doctor D. Víctor Lanchares Barrasa, fue leída el 18 de diciembre de 1998, y obtuvo la calificación de Sobresaliente cum Laude

© Manuel Iñarrea Las Heras

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 84-688-1525-X

**MÉTODO DE MELNIKOV, BANDAS DE
ESTOCASTICIDAD Y NO INTEGRABILIDAD
EN UN GIRÓSTATO CON MOMENTOS
DE INERCIA VARIABLES.**

Manuel Iñarrea Las Heras



UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Área de Física Aplicada
Departamento de Químicas
Universidad de La Rioja

Esta Tesis Doctoral fue desarrollada dentro del Programa de Doctorado de Física Aplicada de la Universidad de Zaragoza. El autor es miembro del Área de Física Aplicada del Departamento de Químicas de la Universidad de La Rioja. El Director de la Tesis fue el Dr. Víctor Lanchares Barrasa del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja. La Tesis fue leída el día 18 de diciembre de 1998, ante el siguiente tribunal:

Presidente: Dr. José Díaz Bejarano
Vocales: Dr. Antonio Vigueras Campuzano
Dr. José Luís Brun Cabodevilla
Dr. Sebastián Ferrer Martínez
Secretario: Dr. Antonio Elipe Sánchez

La Tesis obtuvo la calificación de Sobresaliente *Cum laude*.

A mi familia y mis amigos.

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento al profesor Víctor Lanchares que no sólo ha llevado la dirección de esta Memoria, sino que también ha participado activamente en la consecución de los resultados que en ella se reflejan.

Así mismo, quiero agradecer al Dr. Juan Antolín la gran amabilidad que ha mostrado al aceptar ser el tutor de esta Memoria, y todas las gestiones que ha tenido que realizar dentro del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Zaragoza.

Por otra parte, expreso mi reconocimiento al Grupo de Mecánica Espacial de la Universidad de Zaragoza por haberme prestado su apoyo científico y equipos informáticos. En particular, quiero agradecer al Dr. Antonio Elipe sus continuas aportaciones y fructíferas sugerencias a lo largo del desarrollo de esta Memoria.

Por supuesto, también quiero agradecer el constante apoyo que he recibido durante estos años de trabajo por parte de mi familia, amigos y compañeros del Departamento de Química de la Universidad de La Rioja, especialmente de José Pablo Salas y José Daniel Sierra.

La financiación de esta Memoria ha provenido en parte de tres Ayudas para la realización de Tesis Doctorales de la Universidad de La Rioja (95TDA01MIL, ATUR97/029 y ATUR98/11).

Finalmente, debo recordar en estas líneas a todas aquellas personas que de un modo u otro han contribuido a la realización de esta Memoria.

Introducción

Básicamente, un giróstato es un sistema mecánico formado por varios cuerpos: un cuerpo principal rígido, llamado plataforma, que soporta a otros cuerpos con simetría axial denominados rotores. Estos rotores no están unidos rígidamente a la plataforma, sino que pueden tener un movimiento de giro relativo respecto a la misma, de tal manera que no se modifica la distribución de masas del sistema.

El modelo que representa el giróstato, esto es, un cuerpo rotante con cierto momento angular interno, ha sido utilizado con éxito en el estudio de la dinámica de diferentes sistemas físicos desde finales del siglo pasado. Así, Peano (1895a, 1895b) y Volterra (1899) aplicaron el modelo del giróstato a la rotación de la Tierra para explicar el movimiento de los polos terrestres y la variación de la latitud en la superficie terrestre. Volterra consideró a la Tierra como un sólido rígido, pero dotado de un cierto momento angular interno a causa de los movimientos de los océanos. Posteriormente, Kramers (1923), siguiendo el ejemplo de Volterra, comenzó a considerar el efecto del momento angular electrónico interno de las moléculas en los espectros rotacionales de éstas.

Un objetivo fundamental en el estudio de la dinámica de sistemas que pueden ser modelados mediante el giróstato, ha sido determinar la evolución de la orientación del sistema y, si ello es posible, desarrollar soluciones analíticas que describan la dinámica del sistema. Rumyantsev (1961) ha estudiado la estabilidad de las rotaciones permanentes de un giróstato con momentos angulares internos constantes. Así mismo, muchos de los resultados clásicos acerca de la dinámica de actitud de giróstatos en diferentes situaciones han sido recogidos en el texto ya clásico de Leimanis (1965, pp. 207–238)

En las últimas décadas, el estudio de la dinámica de los giróstatos ha adquirido un gran interés en astrodinámica e ingeniería aeroespacial. Esto es debido a que en la actualidad, la mayoría de los satélites artificiales posee uno o más discos giratorios para conseguir el control de actitud y la estabilización de las rotaciones

del vehículo, de tal manera que éste mantenga constante una cierta orientación deseada. Por consiguiente, el giróstato constituye un modelo útil y manejable para el estudio, al menos en primera aproximación, de la dinámica de actitud de los satélites artificiales (Hughes, 1986; Junkins y Turner, 1986; Hale, 1994; Wiesel, 1997). La utilización de rotores es una de las técnicas más importantes que se emplean actualmente en la estabilización de satélites. Además de controlar la actitud de estos vehículos, mediante esta técnica es posible transferir todo o la mayor parte del momento angular del satélite a los rotores. De esta forma, se puede conseguir que la plataforma no se encuentre en rotación, o que ésta sea muy lenta. Esta situación puede ser conveniente para la correcta orientación de dispositivos tales como antenas o paneles solares que se encuentren sobre la plataforma.

Pero aún más, el modelo del giróstato también se ajusta a varios problemas de física atómica y nuclear (Ring y Schuck, 1980; Elipe y Ferrer, 1994), así como a problemas de óptica; por ejemplo, las ecuaciones de movimiento de los parámetros de Stokes de un haz de luz simple en un medio no lineal son análogas a las del giróstato (David *et al.*, 1990).

Recientemente, numerosos autores han investigado distintos problemas sobre giróstatos en diferentes situaciones, y la mayoría en relación a la dinámica de actitud de satélites artificiales. Así, Hubert (1980) demuestra que para un giróstato libre con disipación de energía cinética, la acción del rotor hasta un momento angular interno adecuado, produce la reorientación del eje del rotor en una dirección deseada, independientemente de las condiciones iniciales y de la orientación relativa del eje del rotor respecto a la plataforma. Cochran *et al.* (1982) obtienen las soluciones analíticas de las ecuaciones del movimiento de un giróstato triaxial con un rotor cuyo eje es paralelo a uno de los ejes principales del sistema. Estos mismos autores (Cochran *et al.*, 1983) también obtienen las soluciones analíticas correspondientes a un giróstato simétrico con un rotor con momento angular constante y cuyo eje no es paralelo a ninguno de los ejes principales del giróstato. Cid y Viguera (1985) analizan el movimiento de n giróstatos en un campo central, mientras que Cavas y Viguera (1994) obtienen soluciones analíticas para el caso de un giróstato con simetría axial en un campo central. Por otra parte, Hall y Rand (1994, 1995a) investigan la dinámica de actitud del giróstato libre triaxial con momento angular interno constante pequeño. Aplicando la conser-

vación del momento angular total y un método de promedios reducen, de manera aproximada, las ecuaciones de movimiento del sistema a una sola ecuación diferencial de primer orden que estudian numérica y analíticamente. En relación con este mismo problema, Hall (1995b) también analiza fenómenos que él denomina “capturas por resonancias” que pueden aparecer en el proceso de reorientación del giróstato cuando se atraviesa una separatriz del sistema. Este mismo autor también estudia la dinámica de actitud en el caso del giróstato libre axial con dos rotores con momento angular constante (Hall, 1995c) y con momento angular interno con rozamiento o variable en el tiempo según leyes adecuadas (Hall, 1996). Igualmente, también considera las maniobras de reorientación de un giróstato libre axial con un amortiguador discreto paralelo al eje del rotor (Hall, 1997). Por otro lado, Elipe *et al.* (1997) y Elipe y Lanchares (1997a) estudian el flujo fásico y las bifurcaciones del giróstato libre y axial, dentro de un espacio de fases esférico utilizando como coordenadas las componentes del momento angular total en el sistema de referencia unido al giróstato.

Otros autores han analizado el comportamiento caótico de giróstatos sometidos a distintos tipos de perturbaciones. Holmes y Marsden (1983) consideran un giróstato libre axial pero con su rotor ligeramente asimétrico. Koiller (1984) estudia un giróstato libre axial cuyo rotor posee pequeñas imperfecciones puntuales que rompen la integrabilidad del sistema no perturbado. Tong *et al.* (1995) tratan, por su parte, un giróstato axial con plataforma triaxial sometido a un campo gravitatorio uniforme.

Todos estos estudios están basados en la premisa de que todos los componentes del giróstato pueden ser considerados como sólidos perfectamente rígidos. Desgraciadamente, el modelo del sólido rígido es sólo una primera aproximación conveniente para simplificar los análisis. En este sentido, en relación con la dinámica de satélites artificiales, considerar los componentes del sistema como elementos perfectamente rígidos es un aproximación demasiado grosera que conduce a resultados no coincidentes con el comportamiento real de estos vehículos. Todos los materiales reales son deformables y elásticos en mayor o menor medida, y esta propiedad invalida los resultados que se obtienen cuando se suponen los componentes del giróstato como sólidos rígidos. Así, este error se puso dramáticamente de manifiesto en 1958 al aparecer una inesperada inestabilidad en la rotación del primer satélite norteamericano, el Explorer I. Esta inestabilidad fue provocada

por la disipación de energía debida a la flexibilidad de las antenas del satélite (Thomson, 1986, pp. 212–213).

Esta consideración nos ha motivado a centrar nuestra atención en la dinámica de un giróstato deformable en ausencia de momentos externos. Vamos a tener en cuenta la elasticidad de los materiales del giróstato, suponiendo que uno de los momentos de inercia de la plataforma es una función periódica del tiempo. También suponemos que esta variación del momento de inercia no modifica la posición del centro de masas del sistema. Aunque suponemos la plataforma elástica, sin embargo vamos a considerar al rotor perfectamente rígido, con momentos de inercia constantes. Suponer la plataforma elástica, y no el rotor, está de acuerdo con la estructura básica de la mayoría de los satélites actuales, en los cuales el rotor es esencialmente un disco giratorio y, en cambio, la estructura de la plataforma es mucho más compleja ya que soporta diferentes componentes y dispositivos con mayor flexibilidad como pueden ser paneles solares, antenas, cámaras, medidores, etc.

Pensamos que ésta es una aproximación más realista que la del simple sólido rígido, al movimiento de actitud de un satélite artificial, aunque tampoco se encuentra exenta de considerables simplificaciones. Además, este modelo puede servir para abordar el problema de la dinámica de actitud de un sólido rígido en órbita Kepleriana. Así, Arribas y Elipe (1993), después de simplificar el problema mediante un proceso de normalización, han encontrado que su Hamiltoniano simplificado es equivalente al de un sólido “rígido” triaxial pero con momentos de inercia variables en el tiempo.

Siguiendo el ejemplo de numerosos autores, trataremos nuestro problema utilizando variables no canónicas: las componentes del momento angular total del giróstato en el sistema de referencia móvil unido a la plataforma. Como Elipe y Lanchares (1997b) han demostrado, en estas variables el modelo del giróstato libre se reduce a un Hamiltoniano cuadrático cuyo espacio de fases es una superficie esférica de radio constante. Por lo tanto, estas variables, aunque no canónicas, ofrecen la ventaja de que en ellas el flujo fásico del sistema puede ser fácilmente interpretado, además de simplificarse mucho la formulación del problema. Por otra parte, esta clase de Hamiltonianos cuadráticos ha sido ampliamente estudiada, determinándose sus equilibrios, bifurcaciones y la evolución de su flujo fásico (Lanchares y Elipe, 1995a, 1995b; Lanchares *et al.* 1995), por lo que, una

vez formulado el problema, muchos de los aspectos de la dinámica del problema pueden deducirse a partir de estos trabajos.

En el estudio de la dinámica de nuestro problema nos centraremos en dos aspectos: la existencia movimiento caótico debido a intersecciones hetero/homoclínicas y su eliminación por la acción de un rotor y el proceso de reorientación del giróstato. Para nuestro análisis emplearemos, fundamentalmente, dos técnicas de manera paralela: el método de Melnikov (1963) y la generación de superficies de sección de Poincaré.

Como explicamos en el Apéndice de esta Memoria, el método de Melnikov es la técnica adecuada para determinar la existencia de intersecciones transversales hetero/homoclínicas en sistemas afectados por pequeñas perturbaciones periódicas en el tiempo. Por consiguiente, mediante este método se puede determinar, al menos en primer orden de aproximación, la existencia de caos hetero/homoclínico en sistemas perturbados.

El método de Melnikov se ha aplicado ampliamente, en primer orden de aproximación, en el estudio del caos en diversos problemas, desde sistemas mecánicos simples como osciladores perturbados (Lichtenberg y Lieberman, 1992) hasta incluso en modelos epidemiológicos sencillos (Glendinning y Perry, 1997). Con respecto a la dinámica de giróstatos, este método también ha sido empleado en la investigación del comportamiento caótico de giróstatos sometidos a diferentes perturbaciones (Holmes y Marsden, 1983; Koiller, 1984; Tong *et al.*, 1995).

Por otra parte, la generación de superficies de sección de Poincaré es una técnica profusamente utilizada en el análisis cualitativo de la dinámica de problemas multidimensionales. Este método también ha sido aplicado en el estudio del movimiento de sólidos rígidos (Broucke, 1993) y de un giróstato en un campo gravitatorio uniforme (Tong *et al.*, 1995).

Hemos estructurado la presente Memoria en cinco capítulos. En el Capítulo 1, desarrollamos la formulación Hamiltoniana del problema genérico del giróstato libre con plataforma triaxial y tres rotores cuyos ejes se encuentran alineados según tres direcciones cualesquiera. Como ya hemos indicado, esta formulación se ha desarrollado utilizando las variables no canónicas de las componentes del momento angular total en el sistema de referencia móvil solidario a la plataforma.

El Capítulo 2 está dedicado al estudio del giróstato axial perturbado con plataforma con un momento de inercia variable, pero con el rotor en reposo re-

lativo respecto a la plataforma. Aplicando el método de Melnikov y secciones de Poincaré demostramos que el sistema exhibe comportamiento caótico en una banda alrededor de la separatriz no perturbada, independientemente del momento de inercia de la plataforma que sea variable en el tiempo. En este Capítulo también llevamos a cabo estimaciones numérica y analítica de la anchura de la banda de estocasticidad.

En los Capítulos 3 y 4 consideramos al rotor en movimiento relativo respecto a la plataforma. En el Capítulo 3 el eje del rotor coincide con el eje principal del sistema con mínimo momento de inercia. Haciendo uso de las mismas técnicas, mostramos que la aceleración del giro del rotor hasta un valor adecuado de momento angular relativo produce la eliminación del comportamiento caótico del giróstato. Esta eliminación del caos es interpretada como una consecuencia de la desaparición de la separatrices del problema no perturbado. En el Capítulo 4 se consideran los casos en los que el eje del rotor es paralelo tanto al eje principal de momento de inercia intermedio, como al eje de momento de inercia máximo. En ambas situaciones llegamos a conclusiones similares a las del Capítulo 2.

Por último, en el Capítulo 5 investigamos numéricamente el efecto que tienen la perturbación en el proceso de reorientación del giróstato por giro del rotor, respecto a un sistema de referencia inercial fijo en el espacio. En este Capítulo también se estudia analíticamente la influencia de los fenómenos de resonancias no lineales en la anchura de la banda de estocasticidad. Este estudio nos permite explicar las discrepancias halladas en el Capítulo 2 entre las estimaciones numérica y analítica de la anchura de dicha banda.

Índice

Introducción	vii
1 Formulación hamiltoniana del problema	1
1.1 Momento Angular y Energía Cinética	2
1.2 Hamiltoniano	4
1.3 Espacio de fases	9
2 Rotores en reposo relativo: Comportamiento caótico	15
2.1 Ecuaciones del movimiento	16
2.2 Función de Melnikov	18
2.3 Banda de estocasticidad	22
3 Rotor en torno al eje de mínima inercia: Eliminación del caos.	33
3.1 Reducción de las ecuaciones.	34
3.2 Equilibrios y bifurcaciones paramétricas	36
3.3 Órbitas Asintóticas	41
3.4 Función de Melnikov	45
3.4.1 Función de Melnikov para $Q = -1$	46
3.4.2 Función de Melnikov para $Q \in (-1, 0]$	49
3.4.3 Función de Melnikov para $Q \in (P - 1, -1)$	56
3.5 Estabilización de las rotaciones	64
4 Rotor en torno a los ejes intermedio y máximo: Eliminación del caos.	67
4.1 Rotor en torno al eje de inercia intermedia	68
4.1.1 Equilibrios y bifurcaciones paramétricas	69
4.1.2 Órbitas asintóticas	72

4.1.3	Función de Melnikov	76
4.2	Rotor en torno al eje de máxima inercia	81
5	Reorientación del Giróstato	85
5.1	El proceso de reorientación	86
5.2	Reorientación en ausencia de perturbación	88
5.3	Efecto de la perturbación en la reorientación del giróstato.	92
5.4	Cuantificación del caos y función de Melnikov	96
5.5	Resonancias	101
5.5.1	Análisis subarmónico	103
5.6	Anchura de la banda de resonancia	106
	Conclusiones	109
A	Generación de caos por intersecciones homoclínicas. Método de Melnikov	111
	Bibliografía	119

Capítulo 1

Formulación hamiltoniana del problema

En el estudio de la dinámica de giróstatos en distintas condiciones se han utilizado diferentes conjuntos de variables canónicas y no canónicas: Serret–Andoyer, ángulos de Euler, parámetros de Euler, etc. A lo largo de esta memoria vamos a tratar nuestro problema empleando como variables las componentes del momento angular total del giróstato en un sistema de referencia móvil unido a la plataforma. Aunque este es un conjunto de variables no canónicas, sin embargo, en el caso del giróstato libre ofrece dos grandes ventajas. Por un lado, la simplicidad de la formulación de su hamiltoniano y ecuaciones del movimiento. Y por otro lado, la sencillez del espacio de fases que consiste en una superficie esférica de radio constante, por lo cual el flujo fásico puede ser interpretado con gran facilidad.

En la sección 1.1 obtenemos las expresiones del momento angular total y la energía cinética de rotación de un giróstato libre con plataforma triaxial y tres rotores cuyos ejes están orientados en direcciones cualesquiera. Estas magnitudes se expresan en un sistema de referencia móvil unido a la plataforma y cuyos ejes coinciden con los ejes principales del giróstato.

En la sección 1.2, después de deducir el hamiltoniano del problema general, pasamos a considerar, sin pérdida de generalidad, el caso particular en el cual los ejes de los rotores coinciden con los ejes principales del giróstato.

En la última sección de este capítulo, se obtienen las ecuaciones del movimiento del problema, reducimos el espacio de fases a la esfera de radio unidad, y definimos detalladamente la clase de perturbación que vamos a considerar a lo largo de esta

memoria.

1.1 Momento Angular y Energía Cinética

Consideremos un giróstato \mathcal{G} formado por una plataforma \mathcal{P} triaxial y tres rotores $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ con simetría axial, conectados a la plataforma y alineados en tres direcciones distintas cualesquiera, como indica la figura 1.1.

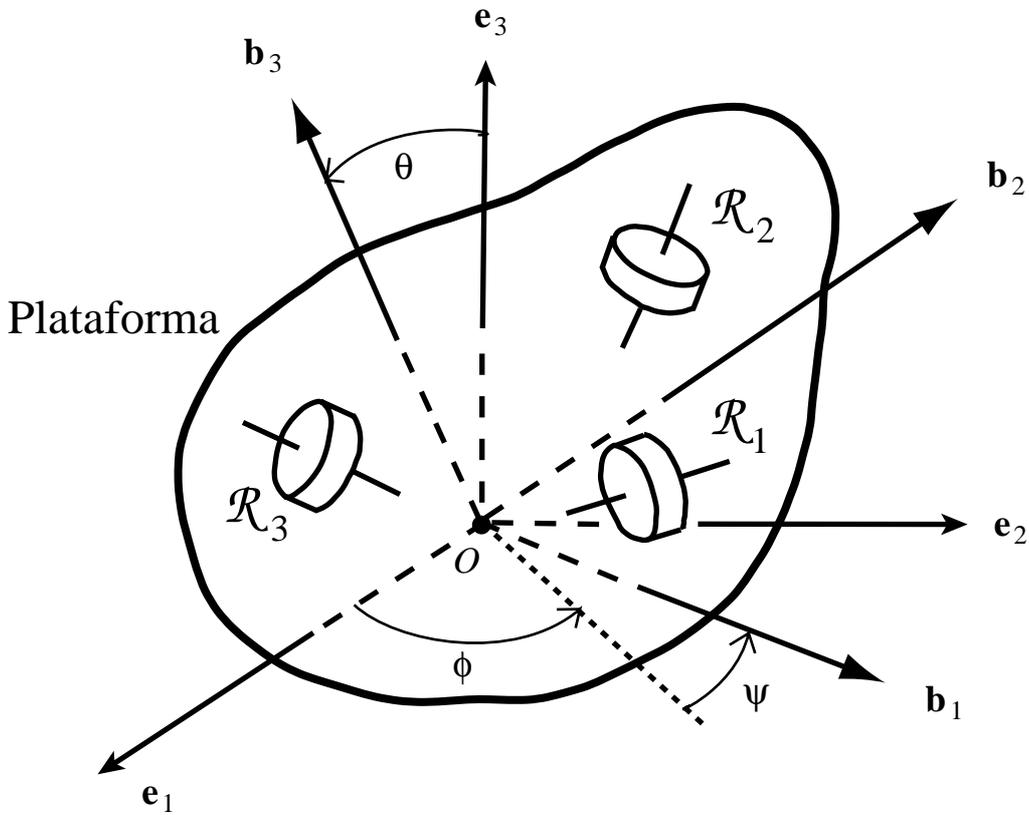


Figura 1.1: Estructura básica de un giróstato con tres rotores alineados en tres direcciones distintas cualesquiera.

Supongamos que el giróstato se encuentra libre de fuerzas y momentos externos, por lo tanto, consideraremos su centro de masas O como un punto fijo en el espacio. Vamos a emplear dos sistemas de referencia ortonormales diferentes centrados ambos en dicho punto fijo O :

- $\mathcal{E}\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ un sistema de referencia inercial fijo en el espacio,
- $\mathcal{B}\{O, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ un sistema de referencia móvil, ligado a la plataforma, por lo cual participa del movimiento de ésta y que, en general, es no inercial.

Los ejes de este sistema de referencia coinciden con los ejes principales del giróstato.

La orientación relativa entre ambos sistemas de referencia viene dada, como es bien sabido, a través de tres rotaciones consecutivas según los ángulos de Euler, por ejemplo, (ϕ, θ, ψ) (Arnold, 1989, pp. 148–149; Goldstein, 1992, pp. 183–188) (ver figura 1.1).

Sea $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3$ el vector posición de una partícula genérica P del giróstato con masa dm . La velocidad absoluta \mathbf{v}_{ab} de esta partícula en el sistema de referencia móvil \mathcal{B} es

$$\mathbf{v}_{ab} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x},$$

donde $\mathbf{v} = \dot{x}_1\mathbf{b}_1 + \dot{x}_2\mathbf{b}_2 + \dot{x}_3\mathbf{b}_3$ es la velocidad relativa de P respecto al sistema de referencia \mathcal{B} unido a la plataforma y $\boldsymbol{\omega}$ es el vector velocidad angular del sistema de referencia móvil \mathcal{B} respecto al sistema de referencia inercial \mathcal{E} fijo en el espacio. Es decir, $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular absoluta de rotación de la plataforma.

Hay que notar que si la partícula P pertenece a la plataforma, su velocidad relativa respecto al sistema de referencia \mathcal{B} es nula, es decir, $\mathbf{v} = 0$.

El momento angular $d\mathbf{G}$ de la partícula P respecto al origen O en el sistema de referencia móvil \mathcal{B} viene dado por

$$d\mathbf{G} = \mathbf{x} \times d\mathbf{p} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}_{ab} dm.$$

Por lo tanto, de la definición del momento angular de un sistema de partículas, podemos calcular el momento angular total \mathbf{G} del giróstato como la integral sobre todo el giróstato

$$\mathbf{G} = \int_{\mathcal{G}} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}_{ab}) dm = \int_{\mathcal{G}} [\mathbf{x} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] dm.$$

Teniendo en cuenta que el giróstato lo podemos considerar como la unión de la plataforma \mathcal{P} más los rotores \mathcal{R} , es decir, $\mathcal{G} = \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$, y que para puntos de la plataforma $\mathbf{v} = 0$, podemos desarrollar el momento angular total \mathbf{G} en el sistema

de referencia móvil \mathcal{B} como

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= G_x \mathbf{b}_1 + G_y \mathbf{b}_2 + G_z \mathbf{b}_3 = \\
&= \int_{\mathcal{P}} [\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] dm + \int_{\mathcal{R}} [\mathbf{x} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] dm = \\
&= \int_{\mathcal{P}} [\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] dm + \int_{\mathcal{R}} [\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] dm + \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dm = \quad (1.1) \\
&= \int_{\mathcal{G}} [\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] dm + \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dm = \\
&= \mathbb{I} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{h},
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{I} = \mathbb{I}_{\mathcal{P}} + \sum \mathbb{I}_{\mathcal{R}_i}$ es la matriz de inercia de todo el giróstato $\mathcal{G} = \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$. Esta matriz, como está expresada en el sistema de referencia \mathcal{B} de los ejes principales del giróstato, es una matriz diagonal, es decir, $\mathbb{I} = \text{diag}(s_{11}, s_{22}, s_{33})$. Por otra parte, el vector \mathbf{h}

$$\mathbf{h} = h_x \mathbf{b}_1 + h_y \mathbf{b}_2 + h_z \mathbf{b}_3 = \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dm,$$

es el momento angular relativo correspondiente al conjunto de los rotores respecto a la plataforma.

Por otro lado, la energía cinética total de rotación del giróstato se puede calcular de manera similar

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} \mathbf{v}_{ab}^2 dm = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 dm = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 dm + \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dm + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{v}^2 dm = \quad (1.2) \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega} + T_{\mathcal{R}},
\end{aligned}$$

donde $T_{\mathcal{R}}$ representa la energía cinética del conjunto de los rotores correspondiente a su movimiento relativo respecto a la plataforma.

1.2 Hamiltoniano

Como estamos considerando un giróstato en rotación libre, es decir, no sometido a fuerzas ni momentos externos, $V = 0$, la lagrangiana \mathcal{L} del sistema es la energía cinética (1.2)

$$\mathcal{L} = T - V = T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega} + T_{\mathcal{R}}. \quad (1.3)$$

Como es bien sabido, las componentes $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ de la velocidad angular absoluta $\boldsymbol{\omega}$ del sistema de referencia móvil \mathcal{B} se pueden expresar en términos de los ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ) y sus derivadas temporales $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ como (ver Goldstein, 1992, pp. 225–226)

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Haciendo uso de estas ecuaciones se podría expresar la lagrangiana del sistema en función explícita de tres coordenadas generalizadas, los ángulos de Euler $\mathbf{q} = (\phi, \theta, \psi)$, y sus derivadas temporales $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$.

El hamiltoniano $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ del sistema es la transformada de Legendre, con respecto a las velocidades, de la lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

donde p_i es el momento canónico conjugado de la coordenada generalizada q_i , y definido como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.5)$$

En el caso concreto del problema considerado, el hamiltoniano viene dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_\phi \dot{\phi} + p_\theta \dot{\theta} + p_\psi \dot{\psi} - \mathcal{L} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} - \mathcal{L} \\ &= \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.2) y (1.4), es evidente que la lagrangiana del giróstato es la suma de tres términos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0 \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \boldsymbol{\omega} \\ \mathcal{L}_1 &= \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\omega} \\ \mathcal{L}_0 &= T_{\mathcal{R}}, \end{aligned}$$

el primero de los cuales, \mathcal{L}_2 , es una función homogénea cuadrática en $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$, el segundo término, \mathcal{L}_1 , es una función homogénea lineal en $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$, y el último término, \mathcal{L}_0 , es independiente de las derivadas temporales de los ángulos de

Euler. Por lo tanto, aplicando el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas (Marsden y Tromba, 1991, p. 183), podemos escribir la ecuación (1.6) como

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L} \\
&= \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}_2 \cdot \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}_1 \cdot \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}\mathcal{L}_0 \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_0 \\
&= 2\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_0 \\
&= \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_0 \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}\boldsymbol{\omega} - T_{\mathcal{R}}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

El hamiltoniano (1.7) puede expresarse, también, en función del momento angular total del giróstato. Para ello, invirtiendo la ecuación (1.1) obtenemos,

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbb{I}^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{h}), \tag{1.8}$$

con lo cual, sustituyendo en la ecuación (1.7) se tiene que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{h}) \cdot \mathbb{I}^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{h}) - T_{\mathcal{R}}. \tag{1.9}$$

Este hamiltoniano está expresado en un conjunto de variables no canónicas como son las componentes (G_x, G_y, G_z) del momento angular total \mathbf{G} en el sistema de referencia móvil \mathcal{B} . Por esta razón, es necesario conocer la estructura de Poisson de dichas variables (G_x, G_y, G_z) . Para obtener esa estructura vamos a llevar a cabo el primero de los pasos del método formal de construcción de un hamiltoniano. Este primer paso consiste en el cálculo de los momentos canónicos conjugados $\mathbf{p} = (p_\phi, p_\theta, p_\psi)$, a partir de la lagrangiana (1.3) según la definición (1.5). En este caso,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \mathbb{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}_i} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}_i} = (\mathbb{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.10}$$

y aplicando la ecuación (1.1)

$$p_i = \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Con lo cual, teniendo en cuenta las ecuaciones (1.4), podemos escribir los momentos canónicos conjugados $(p_\phi, p_\theta, p_\psi)$ en función de las componentes del momento angular total, (G_x, G_y, G_z) , y los ángulos de Euler como

$$\left\{ \begin{array}{l} p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = G_x \sin \theta \sin \psi + G_y \sin \theta \cos \psi + G_z \cos \theta, \\ p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = G_x \cos \psi - G_y \sin \psi, \\ p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = G_z. \end{array} \right. \tag{1.11}$$

Es de destacar que estas relaciones entre los momentos canónicos conjugados y las componentes del momento angular total tienen la misma forma que en el caso del sólido rígido libre. Por otra parte, las ecuaciones (1.11) también coinciden con las relaciones que otros autores han obtenido para el caso en el que los tres rotores están alineados con los ejes principales del giróstato. Esto significa que la relación entre $(p_\phi, p_\theta, p_\psi)$ y (G_x, G_y, G_z) es independiente de la orientación relativa de los rotores respecto a la plataforma.

Mediante la inversión de las ecuaciones (1.11) podemos expresar las componentes (G_x, G_y, G_z) en el conjunto de variables canónicas de los ángulos de Euler $\mathbf{q} = (\phi, \theta, \psi)$ y sus momentos conjugados $\mathbf{p} = (p_\phi, p_\theta, p_\psi)$ en la forma

$$\begin{cases} G_x = \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \right) \sin \psi + p_\theta \cos \psi, \\ G_y = \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \right) \cos \psi - p_\theta \sin \psi, \\ G_z = p_\psi. \end{cases} \quad (1.12)$$

Haciendo uso de estas ecuaciones resulta inmediato el cálculo de la estructura de Poisson de las componentes (G_x, G_y, G_z) del momento angular total,

$$\begin{aligned} \{G_x; G_y\} &= \sum \frac{\partial G_x}{\partial q_i} \frac{\partial G_y}{\partial p_i} - \frac{\partial G_x}{\partial p_i} \frac{\partial G_y}{\partial q_i} = -p_\psi = -G_z, \\ \{G_y; G_z\} &= - \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \right) \sin \psi - p_\theta \cos \psi = -G_x, \\ \{G_z; G_x\} &= - \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \right) \cos \psi + p_\theta \sin \psi = -G_y. \end{aligned} \quad (1.13)$$

En lo que sigue, consideraremos el caso concreto en el cual los ejes de los tres rotores son mutuamente perpendiculares y además coinciden con los ejes principales del giróstato, es decir, con los ejes del sistema de referencia móvil \mathcal{B} .

En esta situación, denotando al rotor del eje x como rotor 1, al rotor del eje y como rotor 2, y al del eje z como rotor 3, las velocidades angulares absolutas $\boldsymbol{\omega}_i$ de cada rotor pueden escribirse como

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_1 = (\omega_x + \Omega_x, \omega_y, \omega_z), \\ \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_2 = (\omega_x, \omega_y + \Omega_y, \omega_z), \\ \boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_3 = (\omega_x, \omega_y, \omega_z + \Omega_z), \end{cases}$$

donde

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = (\Omega_x, 0, 0) \quad \boldsymbol{\Omega}_2 = (0, \Omega_y, 0) \quad \boldsymbol{\Omega}_3 = (0, 0, \Omega_z),$$

son las velocidades angulares relativas de cada rotor respecto a la plataforma.

Además, en este caso, el momento angular relativo \mathbf{h} del conjunto de los tres rotores respecto a la plataforma lo podemos calcular de manera más explícita

$$\begin{aligned}\mathbf{h} &= h_x \mathbf{b}_1 + h_y \mathbf{b}_2 + h_z \mathbf{b}_3 = \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dm = \\ &= \int_{\mathcal{R}_1} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}_1) dm + \int_{\mathcal{R}_2} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}_2) dm + \int_{\mathcal{R}_3} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}_3) dm,\end{aligned}$$

debido a que en esta situación, las velocidades relativas \mathbf{v}_i se pueden escribir en la forma $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\Omega}_i \times \mathbf{x}$, con lo cual tenemos que

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{R}_i} [\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\Omega}_i \times \mathbf{x})] dm = \sum_{i=1}^3 \mathbb{I}_{\mathcal{R}_i} \boldsymbol{\Omega}_i,$$

donde $\mathbb{I}_{\mathcal{R}_i}$ es la matriz de inercia del rotor \mathcal{R}_i , que en el caso considerado es una matriz diagonal en el sistema de referencia \mathcal{B} , esto es, $\mathbb{I}_{\mathcal{R}_i} = \text{diag}(A_{i11}, A_{i22}, A_{i33})$.

Por lo tanto, queda que

$$\mathbf{h} = A_{111} \Omega_x \mathbf{b}_1 + A_{222} \Omega_y \mathbf{b}_2 + A_{333} \Omega_z \mathbf{b}_3,$$

es decir, que las componentes del momento angular relativo \mathbf{h} en el sistema de referencia móvil \mathcal{B} resultan ser

$$h_x = A_{111} \Omega_x \quad h_y = A_{222} \Omega_y \quad h_z = A_{333} \Omega_z,$$

que físicamente representan los momentos angulares relativos de cada rotor respecto a la plataforma.

Por otro lado, en este caso la energía cinética relativa $T_{\mathcal{R}}$ del conjunto de los rotores también puede ser calculada más explícitamente

$$\begin{aligned}T_{\mathcal{R}} &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{v}^2 dm = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{R}_i} \mathbf{v}_i^2 dm = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{R}_i} (\boldsymbol{\Omega}_i \times \mathbf{x})^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{\Omega}_i \cdot \mathbb{I}_{\mathcal{R}_i} \boldsymbol{\Omega}_i = \frac{1}{2} (A_{111} \Omega_x^2 + A_{222} \Omega_y^2 + A_{333} \Omega_z^2) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_x^2}{A_{111}} + \frac{h_y^2}{A_{222}} + \frac{h_z^2}{A_{333}} \right).\end{aligned}$$

Por todo lo anterior, y teniendo en cuenta que la matriz inversa \mathbb{I}^{-1} también es diagonal, el hamiltoniano (1.9) viene dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \left(\frac{G_x^2}{s_{11}} + \frac{G_y^2}{s_{22}} + \frac{G_z^2}{s_{33}} \right) - \left(\frac{G_x h_x}{s_{11}} + \frac{G_y h_y}{s_{22}} + \frac{G_z h_z}{s_{33}} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{h_x^2}{s_{11}} + \frac{h_y^2}{s_{22}} + \frac{h_z^2}{s_{33}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h_x^2}{A_{111}} + \frac{h_y^2}{A_{222}} + \frac{h_z^2}{A_{333}} \right).\end{aligned}\tag{1.14}$$

El hecho de considerar este caso especial en el que los ejes de los rotores coinciden con los ejes principales del giróstato, no significa en absoluto pérdida alguna de generalidad, puesto que el hamiltoniano del giróstato siempre va a tener la misma forma que (1.14), aún cuando los ejes de los rotores no coincidan con los ejes principales del giróstato. Sin embargo, si no se da dicha coincidencia, (h_x, h_y, h_z) no representan los momentos angulares relativos individuales de ningún rotor particular, sino que son las componentes del momento angular relativo del conjunto de los rotores.

1.3 Espacio de fases

Haciendo uso de las expresiones (1.13) de los paréntesis de Poisson entre las componentes (G_x, G_y, G_z) del momento angular total, y mediante el teorema de Liouville podemos obtener las ecuaciones de movimiento correspondientes al hamiltoniano (1.14)

$$\begin{aligned}\dot{G}_x &= \{G_x; \mathcal{H}\} = \left(\frac{1}{s_{33}} - \frac{1}{s_{22}}\right)G_y G_z + \frac{h_y}{s_{22}}G_z - \frac{h_z}{s_{33}}G_y, \\ \dot{G}_y &= \{G_y; \mathcal{H}\} = \left(\frac{1}{s_{11}} - \frac{1}{s_{33}}\right)G_x G_z - \frac{h_x}{s_{11}}G_z + \frac{h_z}{s_{33}}G_x, \\ \dot{G}_z &= \{G_z; \mathcal{H}\} = \left(\frac{1}{s_{22}} - \frac{1}{s_{11}}\right)G_x G_y + \frac{h_x}{s_{11}}G_y - \frac{h_y}{s_{22}}G_x.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Es de destacar que el hamiltoniano (1.14) es invariante bajo el grupo $\text{SO}(2)$ de rotaciones $R(\phi, \mathbf{e}_3)$ alrededor del eje \mathbf{e}_3 fijo en el espacio, ya que el ángulo ϕ no aparece explícitamente en \mathcal{H} como se puede comprobar sustituyendo las ecuaciones (1.12) en (1.14).

Por otra parte, en virtud del teorema del momento angular, y teniendo en cuenta que el giróstato se encuentra libre de momentos externos, el momento angular total \mathbf{G} permanece constante en el sistema de referencia inercial \mathcal{E} fijo en el espacio. Por ello, el problema también es invariante bajo el grupo $\text{SO}(3)$ de rotaciones alrededor del origen O . Sin embargo, en el sistema de referencia móvil \mathcal{B} (en general, no inercial) el momento angular total \mathbf{G} no permanecerá constante. Como es bien sabido, el paso del sistema de referencia inercial \mathcal{E} , al sistema de referencia móvil \mathcal{B} puede hacerse directamente a través de una sola rotación. Como acabamos de comentar, el vector \mathbf{G} es constante en el sistema de referencia \mathcal{E} , y por lo tanto, la norma de G también es constante. Debido a

que la norma de un vector es invariante bajo la acción del grupo de rotaciones $\text{SO}(3)$, podemos decir que la norma de \mathbf{G} también es constante en el sistema de referencia móvil \mathcal{B} ; es decir,

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2} = \text{constante.}$$

Esto, también se puede comprobar fácilmente, ya que haciendo uso de las ecuaciones (1.13), tenemos que

$$\dot{G} = \frac{1}{G}(G_x \dot{G}_x + G_y \dot{G}_y + G_z \dot{G}_z) = 0.$$

Por lo tanto, el espacio de fases del sistema en el conjunto de variables no canónicas (G_x, G_y, G_z) se reduce a una colección de superficies esféricas de radio G

$$S^2(G) = \{(G_x, G_y, G_z) \mid G_x^2 + G_y^2 + G_z^2 = G^2\}.$$

Las trayectorias del sistema en este espacio de fases serán las curvas resultantes de la intersección del hamiltoniano \mathcal{H} con la esfera $S^2(G)$.

Es posible reducir el espacio de fases a un esfera de radio unidad haciendo un cambio de escala en las variables G_i , en los momentos h_i y en el tiempo t . Así, si definimos

$$\bar{G}_i = \frac{G_i}{G}, \quad \bar{h}_i = \frac{h_i}{G}, \quad \tau = Gt,$$

tenemos que

$$\bar{G}_x^2 + \bar{G}_y^2 + \bar{G}_z^2 = 1$$

y

$$\{\bar{G}_x; \bar{G}_y\} = -\frac{\bar{G}_z}{G}, \quad \{\bar{G}_y; \bar{G}_z\} = -\frac{\bar{G}_x}{G}, \quad \{\bar{G}_z; \bar{G}_x\} = -\frac{\bar{G}_y}{G}.$$

De este modo, las ecuaciones (1.15) se transforman en

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{G}_x}{d\tau} &= \{\bar{G}_x; \bar{\mathcal{H}}\} = \left(\frac{1}{s_{33}} - \frac{1}{s_{22}}\right)\bar{G}_y \bar{G}_z + \frac{\bar{h}_y}{s_{22}}\bar{G}_z - \frac{\bar{h}_z}{s_{33}}\bar{G}_y, \\ \frac{d\bar{G}_y}{d\tau} &= \{\bar{G}_y; \bar{\mathcal{H}}\} = \left(\frac{1}{s_{11}} - \frac{1}{s_{33}}\right)\bar{G}_x \bar{G}_z - \frac{\bar{h}_x}{s_{11}}\bar{G}_z + \frac{\bar{h}_z}{s_{33}}\bar{G}_x, \\ \frac{d\bar{G}_z}{d\tau} &= \{\bar{G}_z; \bar{\mathcal{H}}\} = \left(\frac{1}{s_{22}} - \frac{1}{s_{11}}\right)\bar{G}_x \bar{G}_y + \frac{\bar{h}_x}{s_{11}}\bar{G}_y - \frac{\bar{h}_y}{s_{22}}\bar{G}_x, \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{G}_x^2}{s_{11}} + \frac{\bar{G}_y^2}{s_{22}} + \frac{\bar{G}_z^2}{s_{33}} \right) - \left(\frac{\bar{G}_x \bar{h}_x}{s_{11}} + \frac{\bar{G}_y \bar{h}_y}{s_{22}} + \frac{\bar{G}_z \bar{h}_z}{s_{33}} \right) + \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{h}_x^2}{s_{11}} + \frac{\bar{h}_y^2}{s_{22}} + \frac{\bar{h}_z^2}{s_{33}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{h}_x^2}{A_{111}} + \frac{\bar{h}_y^2}{A_{222}} + \frac{\bar{h}_z^2}{A_{333}} \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Para simplificar la notación prescindiremos, en adelante, de las barras y la variable temporal τ será considerada como t . Por otra parte, como supondremos en adelante que s_{jj} , \bar{h}_j y A_{jjj} son funciones conocidas del tiempo, la dinámica del problema queda definida por el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{G_x^2}{s_{11}} + \frac{G_y^2}{s_{22}} + \frac{G_z^2}{s_{33}} \right) - \left(\frac{G_x h_x}{s_{11}} + \frac{G_y h_y}{s_{22}} + \frac{G_z h_z}{s_{33}} \right). \quad (1.18)$$

Según todo lo anterior, el hamiltoniano (1.18) pertenece a la clase de hamiltonianos cuadráticos con estructura algebraica $\mathfrak{su}(2)$ sobre la esfera unidad, S^2 . Esta clase de hamiltonianos puede ser reducida mediante transformaciones de equivalencia a 6 tipos genéricos diferentes en función de los parámetros esenciales del problema (Frauendiener, 1995). Por otra parte, este tipo de hamiltonianos ha sido estudiado en profundidad (Lanchares y Elipe, 1995a; Lanchares y Elipe, 1995b; Lanchares *et al.*, 1995; Elipe y Lanchares, 1997b; Elipe *et al.*, 1997) conociéndose tanto las soluciones de los puntos de equilibrio como la evolución del flujo fásico en términos de los dos parámetros del hamiltoniano.

Destaquemos que la topología del espacio de fases permanece inalterada aunque los momentos de inercia sean funciones del tiempo, que es el tipo de perturbación que vamos a considerar en esta memoria.

En concreto, consideraremos la plataforma deformable de tal manera que uno de sus momentos de inercia varía periódicamente con el tiempo. Así, si llamamos $\mathbb{I}_{\mathcal{P}}$ a la matriz de inercia de la plataforma, en el sistema de referencia \mathcal{B} unido a la misma, $\mathbb{I}_{\mathcal{P}}$ es una matriz diagonal, esto es, $\mathbb{I}_{\mathcal{P}} = \text{diag}(A, B, C)$, ya que los ejes de los rotores coinciden con los ejes principales del giróstato. Además, como estamos considerando un giróstato con plataforma triaxial, supondremos, sin pérdida de generalidad, que se verifica la relación $A > B > C$. En particular, consideraremos el mayor momento de inercia de la plataforma como el que varía periódicamente con el tiempo, es decir, $A = A(t)$, mientras que los otros dos momentos de inercia, B y C , permanecen constantes.

Aunque A varíe con el tiempo, supondremos que la plataforma se mantiene triaxial en todo momento, es decir, en todo instante se cumple la relación $A(t) > B > C$. También supondremos que esta variación no modifica la posición del centro de masas de todo el giróstato. La figura 1.2 representa un modelo de este sistema. En esta figura hemos indicado una pequeña oscilación en la dimensión de la plataforma a lo largo de la dirección del eje principal de mayor momento de

inercia, en este caso, \mathbf{b}_1 . Esta oscilación sería la responsable de que el mayor momento de inercia de la plataforma variase periódicamente con el tiempo, $A = A(t)$. En la práctica, este modelo podría aplicarse, como una primera aproximación, en el estudio de la dinámica de actitud de un satélite artificial con una plataforma que soporta diversos dispositivos cuyo anclaje y estructura no sean perfectamente rígidos, sino que puedan tener pequeños movimientos de vibración. De hecho, algunos autores tienen en cuenta estas características de elasticidad introduciendo en el modelo del giróstato un amortiguador discreto basado en una partícula conectada a un muelle y restringida a un movimiento de oscilación sobre una línea fija respecto a la plataforma (Hall, 1997).

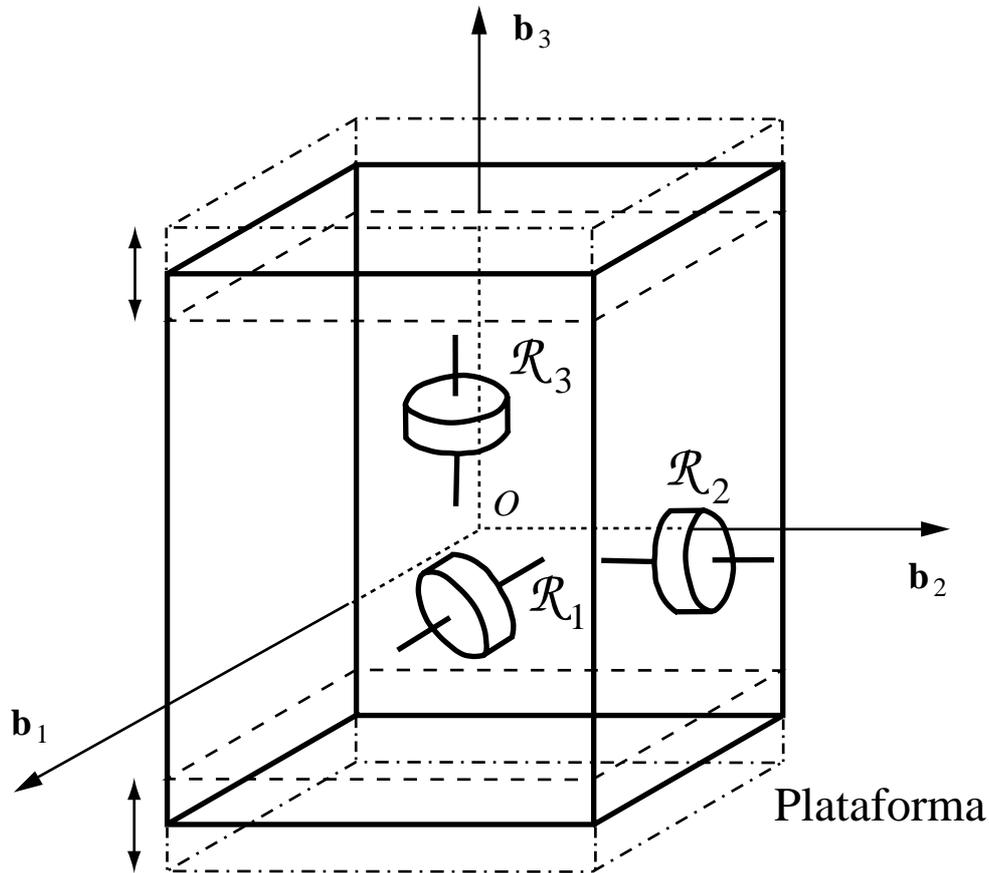


Figura 1.2: Modelo de un giróstato con una plataforma cuyo mayor momento de inercia, A , varía periódicamente con el tiempo, $A = A(t)$.

Es importante destacar que la elección del mayor momento de inercia como variable en el tiempo, y no cualquiera de los otros dos, no supone pérdida de generalidad alguna ya que, como veremos, los resultados que vamos a obtener son

análogos independientemente del momento de inercia que se escoja como variable.

Por otra parte, en toda la memoria supondremos que los rotores son perfectamente rígidos, es decir, $A_{ijj} = \text{constante}$, y en consecuencia los momentos angulares relativos h_j del rotor no se van a ver afectados por la elasticidad de la plataforma.

La función que define la variación del mayor momento de inercia $A(t)$ de la plataforma la supondremos tal que

$$\frac{1}{s_{11}(t)} = \frac{1}{A(t) + A_{111} + A_{211} + A_{311}} = a_1(t) = a_{10} + \epsilon \cos \nu t, \quad (1.19)$$

donde ϵ es un pequeño parámetro mucho menor que a_{10} ($\epsilon \ll a_{10}$). Esto es, $a_1(t)$ es una función periódica de frecuencia ν y amplitud ϵ . De esta forma, el hamiltoniano que describe el problema tratado a lo largo de esta memoria queda

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2}(a_{10}G_x^2 + a_2G_y^2 + a_3G_z^2) - (a_{10}G_xh_x + a_2G_yh_y + a_3G_zh_z) + \\ & (\frac{1}{2}G_x^2 - G_xh_x)\epsilon \cos \nu t, \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde $a_2 = 1/s_{22}$ y $a_3 = 1/s_{33}$.

Nótese que para el hamiltoniano del sistema perturbado (1.20) existen dos situaciones límite en las cuales el problema resulta integrable. Estas dos situaciones se presentan para $\nu = 0$ y para $\nu \rightarrow \infty$.

Para el límite $\nu \rightarrow \infty$ el problema es integrable porque en dicho límite el periodo T de la perturbación es nulo, $T = 0$, lo que significa que, aunque $a_1(t) = 1/s_{11}(t)$ está oscilando, tarda un tiempo nulo, $T = 0$, en realizar una oscilación completa. Por esta razón, en este límite el valor de la perturbación $(\epsilon G_x^2 \cos \nu t)/2$ es constante en todo momento, siendo este valor es el que tiene en el instante inicial $t = 0$, esto es, $\epsilon G_x^2/2$. Por lo tanto, en el límite $\nu \rightarrow \infty$, la perturbación toma un valor constante independiente del tiempo, con lo que el problema perturbado se reduce al caso integrable de un hamiltoniano cuadrático.

Por otra parte, para el otro límite $\nu = 0$, el problema también es integrable. En este caso la explicación es más simple ya que, para $\nu = 0$, la perturbación se reduce a una constante, $\epsilon G_x^2/2$, que no depende del tiempo. Por esta razón, en el límite $\nu = 0$, el problema perturbado también coincide con el caso integrable de un hamiltoniano cuadrático.

Capítulo 2

Rotores en reposo relativo: Comportamiento caótico

El punto de partida lógico, para abordar la dinámica definida por el hamiltoniano (1.20), es suponer los rotores en reposo relativo. De esta forma puede verse cuál es el efecto que produce la acción de los rotores. En este sentido, el problema inicial, o de partida, va a coincidir con el de un sólido rígido triaxial sometido a una pequeña perturbación.

Es conocido que, bajo ciertas perturbaciones, un sólido triaxial puede exhibir comportamiento caótico. De hecho, algunos satélites naturales dentro del sistema solar se comportan de manera irregular (Wisdom y Peale, 1984; Wisdom, 1987a, 1987b). Este tipo de comportamiento es el que cabe esperar para nuestro problema de partida, toda vez que puede considerarse similar a ciertos problemas relacionados con osciladores perturbados tratados por otros autores (Chirikov, 1979; Zaslavsky *et. al* 1991).

Para demostrar la existencia de comportamiento caótico es preciso estudiar el sistema en ausencia de perturbación. Esto es lo que hacemos en la sección 2.1 donde se considera un sólido rígido en rotación libre.

En la sección 2.2 aplicamos el método de Melnikov para demostrar que el problema presenta comportamiento caótico en el sentido de que exhibe herraduras de Smale, independientemente de cuál sea el momento de inercia variable.

La existencia de caos se manifiesta en el espacio de fases a través de una banda de estocasticidad en torno a la separatriz del problema no perturbado. En la sección 2.3, mediante figuras de superficies de sección de Poincaré temporales del

espacio de fases extendido (G_x, G_y, G_z, t) mostramos esta banda de estocasticidad alrededor de la separatriz no perturbada. Además, estudiamos el efecto de las resonancias en la anchura de esta banda.

2.1 Ecuaciones del movimiento

Como ya hemos indicado, vamos a estudiar la dinámica de un giróstato libre de fuerzas y momentos externos, constituido por una plataforma triaxial elástica y un solo rotor perfectamente rígido con simetría axial.

En este capítulo consideraremos el giróstato con su rotor bloqueado, esto es, en reposo relativo respecto a la plataforma, por lo que, $h_x = h_y = h_z = 0$.

En estas circunstancias, teniendo en cuenta la ecuación (1.20), podemos escribir el hamiltoniano del giróstato como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(a_{10}G_x^2 + a_2G_y^2 + a_3G_z^2) + \frac{1}{2}G_x^2\epsilon \cos \nu t = \mathcal{H}_0 + \epsilon V(G_x, G_y, G_z; t). \quad (2.1)$$

donde supondremos que se verifica la relación $a_1(t) < a_2 < a_3$, ya que $A(t) > B > C$.

Es decir, el hamiltoniano del sistema se puede expresar como suma de una parte \mathcal{H}_0 integrable, más una perturbación periódica en el tiempo $\epsilon V(G_x, G_y, G_z; t)$, de periodo $T = 2\pi/\nu$.

La parte integrable \mathcal{H}_0 coincide con el hamiltoniano correspondiente a un sólido rígido triaxial libre, de momentos de inercia $\frac{1}{a_{10}} > \frac{1}{a_2} > \frac{1}{a_3}$.

Para la aplicación del método de Melnikov es necesario conocer previamente las soluciones de las trayectorias heteroclinicas del sistema no perturbado, esto es, las correspondientes al hamiltoniano \mathcal{H}_0 del sólido rígido libre.

A partir de las ecuaciones (1.13) se obtienen las conocidas ecuaciones de Euler del movimiento del sólido rígido libre

$$\begin{aligned} \dot{G}_x &= \{G_x; \mathcal{H}_0\} = (a_3 - a_2)G_y G_z, \\ \dot{G}_y &= \{G_y; \mathcal{H}_0\} = (a_{10} - a_3)G_x G_z, \\ \dot{G}_z &= \{G_z; \mathcal{H}_0\} = (a_2 - a_{10})G_x G_y. \end{aligned} \quad (2.2)$$

De las ecuaciones (2.2) es fácil deducir que existen seis puntos de equilibrio diferentes, localizados en las intersecciones de los ejes del sistema de referencia móvil con la esfera S^2 . Los dos equilibrios correspondientes al eje de momento

de inercia intermedio, en este caso el eje \mathbf{b}_2 , son inestables, mientras que los otros cuatro equilibrios son estables. Los dos puntos de equilibrio inestables, que denotaremos como E_1 y E_2 , están conectados por cuatro órbitas heteroclínicas que constituyen las separatrices del espacio de fases. La figura 2.1 muestra las características del flujo fásico del sólido rígido libre.

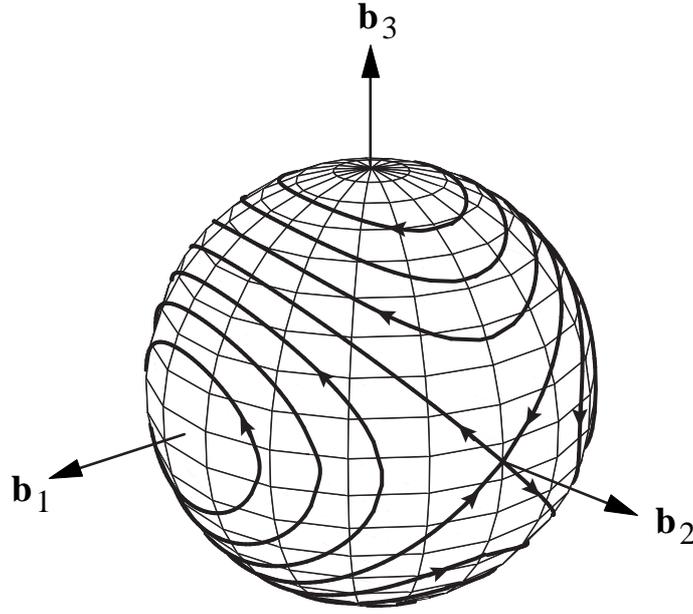


Figura 2.1: Flujo fásico del sólido rígido libre en la esfera para el caso $a_{10} < a_2 < a_3$.

El valor del hamiltoniano correspondiente a las separatrices, y por tanto, en los equilibrios inestables es $a_2/2$. Estas separatrices dividen el espacio de fases en dos zonas con dos tipos diferentes de trayectorias: circulaciones alrededor del eje \mathbf{b}_1 de mayor momento de inercia, cuando $a_{10} < 2\mathcal{H}_0 < a_2$; y circulaciones en torno al eje \mathbf{b}_3 de menor momento de inercia, cuando $a_2 < 2\mathcal{H}_0 < a_3$.

Las expresiones explícitas de los tres tipos de trayectorias se obtienen a partir de las ecuaciones de movimiento (2.2), en términos de funciones elípticas e hiperbólicas, aplicando las dos integrales \mathcal{H}_0 y G (para más detalles ver Deprit y Elipe, 1993).

• **A:** CIRCULACIONES EN TORNO AL EJE DE MAYOR MOMENTO DE INERCIA

En este caso $a_{10} < 2\mathcal{H}_0 < a_2$ y las soluciones son

$$G_x = \Gamma_1 \operatorname{dn}(n_1 t, k_1), \quad G_y = \Gamma_2 \operatorname{sn}(n_1 t, k_1), \quad G_z = \Gamma_3 \operatorname{cn}(n_1 t, k_1), \quad (2.3)$$

donde

$$\Gamma_1 = \sqrt{\frac{a_3 - 2\mathcal{H}_0}{a_3 - a_{10}}}, \quad \Gamma_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{H}_0 - a_{10}}{a_2 - a_{10}}}, \quad \Gamma_3 = \sqrt{\frac{2\mathcal{H}_0 - a_{10}}{a_3 - a_{10}}}$$

y

$$n_1 = \sqrt{(a_2 - a_{10})(a_3 - 2\mathcal{H}_0)}, \quad k_1^2 = \frac{(2\mathcal{H}_0 - a_{10})(a_3 - a_2)}{(a_2 - a_{10})(a_3 - 2\mathcal{H}_0)}.$$

• **B CIRCULACIONES EN TORNO AL EJE DE MENOR MOMENTO DE INERCIA**

Aquí, $a_2 < 2\mathcal{H}_0 < a_3$ y las soluciones son

$$G_x = \Gamma_1 \operatorname{cn}(n_3 t, k_3), \quad G_y = \gamma_2 \operatorname{sn}(n_3 t, k_3), \quad G_z = \Gamma_3 \operatorname{dn}(n_3 t, k_3) \quad (2.4)$$

donde

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{a_3 - 2\mathcal{H}_0}{a_3 - a_2}}, \quad n_3 = \sqrt{(2\mathcal{H}_0 - a_{10})(a_3 - a_2)}, \quad k_3 = \frac{1}{k_1}.$$

• **C ÓRBITAS ASINTÓTICAS (TRAYECTORIAS HETEROCLÍNICAS)**

Cuando $2\mathcal{H}_0 = a_2$, las cuatro diferentes soluciones asintóticas, correspondientes a las órbitas heteroclínicas, son

$$\begin{cases} G_x = (-1)^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \sqrt{\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_{10}}} \operatorname{sech}(n_2 t), \\ G_y = (-1)^{k-1} \tanh(n_2 t), \\ G_z = (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} \sqrt{\frac{a_2 - a_{10}}{a_3 - a_{10}}} \operatorname{sech}(n_2 t) \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (2.5)$$

donde

$$n_2 = \sqrt{(a_2 - a_{10})(a_3 - a_2)} \quad (2.6)$$

y $\lfloor b \rfloor$ significa la parte entera de b .

2.2 Función de Melnikov

Como ya hemos indicado anteriormente, en el sistema no perturbado existen dos puntos de equilibrio inestables, E_1 y E_2 , conectados por cuatro trayectorias heteroclínicas en S^2 como indica la figura 2.1. Estas cuatro trayectorias heteroclínicas constituyen las variedades estables $W_s(E_1), W_s(E_2)$ e inestables $W_u(E_1), W_u(E_2)$ de los dos equilibrios inestables. Cuando no existe perturbación ocurre que la

variedad estable de E_1 coincide con la inestable de E_2 , y viceversa, es decir, se cumple que $W_s(E_1) = W_u(E_2)$ y $W_u(E_1) = W_s(E_2)$. En el caso de que exista alguna perturbación, estas variedades no tienen por qué coincidir entre sí, y por ello, las variedades estable e inestable correspondientes pueden llegar a intersectarse transversalmente en un número infinito de puntos heteroclínicos. Por esta razón, podemos imaginar que, debido a la perturbación, el movimiento del giróstato en las proximidades de la separatriz no perturbada tenga lugar de una forma extremadamente complicada, apareciendo una banda de movimiento caótico alrededor de dicha separatriz. Dentro de esta banda también pueden aparecer pequeñas regiones aisladas de trayectorias periódicas, esto es, pequeñas islas de movimiento regular en el interior de la banda de estocasticidad.

La existencia de intersecciones heteroclínicas puede determinarse, en primer orden de aproximación, mediante el denominado método de Melnikov, descrito en el apéndice A. Es precisamente este método el que vamos a utilizar para probar la presencia de intersecciones heteroclínicas en el sistema definido por el hamiltoniano (2.1).

La función de Melnikov para el hamiltoniano (2.1) viene dada por

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{H}_0(G_i(t-t_0)); \epsilon V(G_i(t-t_0), t)\} dt \quad i = x, y, z.$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.13), podemos calcular el paréntesis de Poisson $\{\mathcal{H}_0; \epsilon V\}$ obteniendo

$$\{\mathcal{H}_0; \epsilon V\} = (a_2 - a_3)\epsilon G_x G_y G_z \cos \nu t. \quad (2.7)$$

De esta forma, la función de Melnikov resulta ser

$$M(t_0) = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} (a_2 - a_3) G_x G_y G_z \cos \nu t dt. \quad (2.8)$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (2.5) en (2.8) tenemos que

$$M(t_0) = \epsilon \frac{(a_2 - a_3)n_2}{(a_3 - a_{10})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh[n_2(t-t_0)]}{\cosh^3[n_2(t-t_0)]} \cos \nu t dt. \quad (2.9)$$

Para calcular la integral anterior realizamos, en primer lugar, el siguiente cambio de variable $t - t_0 = \tau$, $dt = d\tau$. De esta manera queda

$$M(t_0) = \epsilon \frac{(a_2 - a_3)n_2}{(a_3 - a_{10})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(n_2\tau)}{\cosh^3(n_2\tau)} \cos[\nu(\tau + t_0)] d\tau.$$

Desarrollando ahora el coseno de la suma se tiene

$$M(t_0) = \epsilon \frac{(a_2 - a_3)n_2}{(a_3 - a_{10})} \left[\cos \nu t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(n_2\tau)}{\cosh^3(n_2\tau)} \cos \nu\tau \, d\tau \right. \\ \left. - \sin \nu t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(n_2\tau)}{\cosh^3(n_2\tau)} \sin \nu\tau \, d\tau \right].$$

La primera de estas integrales se anula debido a que su integrando es una función impar. Por otra parte, el integrando de la segunda integral es una función par, y podemos escribir

$$M(t_0) = -2\epsilon \frac{(a_2 - a_3)n_2}{(a_3 - a_{10})} \sin \nu t_0 \int_0^{\infty} \frac{\sinh(n_2\tau)}{\cosh^3(n_2\tau)} \sin \nu\tau \, d\tau$$

Integrando por partes, según

$$u = \sin \nu\tau, \quad dv = \frac{\sinh(n_2\tau)}{\cosh^3(n_2\tau)} \, d\tau \\ du = \nu \cos \nu\tau \, d\tau, \quad v = -\frac{1}{2n_2 \cosh^2(n_2\tau)}$$

resulta

$$M(t_0) = -2\epsilon \frac{(a_2 - a_3)n_2}{(a_3 - a_{10})} \sin \nu t_0 \left\{ \left[\frac{-\sin \nu\tau}{2n_2 \cosh^2(n_2\tau)} \right]_0^{\infty} \right. \\ \left. + \frac{\nu}{2n_2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \nu\tau}{\cosh^2(n_2\tau)} \, d\tau \right\} \quad (2.10) \\ = -\epsilon\nu \frac{(a_2 - a_3)}{(a_3 - a_{10})} \sin \nu t_0 \int_0^{\infty} \frac{\cos \nu\tau}{\cosh^2(n_2\tau)} \, d\tau.$$

Esta integral, que puede calcularse mediante el teorema de los residuos, aparece tabulada en el libro de tablas de integrales de Gradshteyn (1980, p. 505) siendo su expresión

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\cosh^2(\beta x)} \, dx = \frac{a\pi}{2\beta^2 \sinh(\frac{a\pi}{2\beta})}.$$

Llevando este resultado a la ecuación (2.10), la función de Melnikov queda finalmente como

$$M_1(t_0) = \frac{(a_3 - a_2)\epsilon\pi\nu^2}{2(a_3 - a_{10})n_2^2 \sinh(\frac{\pi\nu}{2n_2})} \sin \nu t_0 = \Delta\mathcal{H}(\epsilon, \nu) \sin \nu t_0. \quad (2.11)$$

Podemos concluir de este resultado, que la función de Melnikov, $M_1(t_0)$, tiene ceros simples cuando $\nu t_0 = k\pi$ con $k = 0, 1, 2, \dots$. Por lo tanto, la perturbación produce la aparición de intersecciones heteroclínicas entre las variedades estables e

inestables correspondientes a los equilibrios E_1 y E_2 . En definitiva, la perturbación genera alrededor de las separatrices no perturbadas una banda de movimiento caótico en el sentido de que el sistema presenta herraduras de Smale.

Es importante resaltar aquí, y como ya adelantamos anteriormente, que si suponemos como variable cualquiera de los otros dos momentos de inercia de la plataforma, llegamos a expresiones similares a (2.11).

Así, si suponemos el momento de inercia intermedio $B(t)$ como variable $B = B(t)$ de la forma

$$\frac{1}{s_{22}(t)} = \frac{1}{B(t) + A_{i22}} = a_2(t) = a_{20} + \epsilon \cos \nu t,$$

y los otros dos momentos de inercia, A y C constantes, tenemos que el hamiltoniano del sistema resulta ser ahora

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(a_1 G_x^2 + a_{20} G_y^2 + a_3 G_z^2) + \frac{1}{2} G_y^2 \epsilon \cos \nu t = \mathcal{H}_0 + \epsilon V(G_x, G_y, G_z; t).$$

Obsérvese que en este caso el paréntesis de Poisson $\{\mathcal{H}_0; \epsilon V\}$

$$\{\mathcal{H}_0; \epsilon V\} = (a_3 - a_1) \epsilon G_x G_y G_z \cos \nu t.$$

es idéntico al que hemos obtenido en el caso anterior (2.7) salvo el factor constante $(a_3 - a_1)$. Por lo tanto, la función de Melnikov $M_2(t_0)$ puede obtenerse a partir de (2.11) resultando ser

$$M_2(t_0) = -\frac{\epsilon \pi \nu^2}{2n_2^2 \sinh(\frac{\pi \nu}{2n_2})} \sin \nu t_0.$$

Con lo cual, también podemos concluir que, en este caso, la función de Melnikov $M_2(t_0)$, tiene ceros simples para $\nu t_0 = k\pi$ con $k = 0, 1, 2, \dots$. Y por lo tanto, el sistema presenta intersecciones heteroclínicas y, en consecuencia movimiento caótico en torno a las separatrices no perturbadas.

Por otro lado, si suponemos como variable al menor momento de inercia de la plataforma $C(t)$, y con suposiciones similares a las anteriores se tiene ahora

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(a_1 G_x^2 + a_2 G_y^2 + a_{30} G_z^2) + \frac{1}{2} G_z^2 \epsilon \cos \nu t = \mathcal{H}_0 + \epsilon V(G_x, G_y, G_z; t).$$

Como en el caso anterior, el paréntesis de Poisson

$$\{\mathcal{H}_0; \epsilon V\} = (a_1 - a_2) \epsilon G_x G_y G_z \cos \nu t.$$

resulta idéntico al obtenido para las situaciones anteriores salvo un factor constante $(a_1 - a_2)$. Así, en este caso la función de Melnikov $M_3(t_0)$ es

$$M_3(t_0) = \frac{(a_2 - a_1)\epsilon\pi\nu^2}{2(a_{30} - a_1)n_2^2 \sinh(\frac{\pi\nu}{2n_2})} \sin \nu t_0.$$

Por lo tanto, llegamos a la misma conclusión que en las dos situaciones anteriores. Esto es, el sistema presenta intersecciones heteroclínicas y por ello exhibe comportamiento caótico alrededor de las separatrices no perturbadas.

En resumen, independientemente del momento de inercia variable, el resultado es el mismo. Es más, si los tres momentos de inercia del giróstato son variables con el tiempo, tenemos que la función de Melnikov correspondiente es $M(t_0) = M_1(t_0) + M_2(t_0) + M_3(t_0)$. Esto significa que en este caso, $M(t_0)$ también tiene ceros simples cuando $\nu t_0 = k\pi$ con $k = 0, 1, 2, \dots$, y por consiguiente, existen intersecciones heteroclínicas y una banda de movimiento estocástico en torno a las separatrices no perturbadas.

2.3 Banda de estocasticidad

En la sección anterior se ha visto cómo el sistema presenta comportamiento caótico, cualquiera que sea el momento de inercia que varíe con el tiempo, en el sentido que aparece una banda de movimiento estocástico en torno a la separatriz del problema no perturbado.

Es importante el estimar la anchura de esta banda con el objeto de conocer el grado de caoticidad del sistema y el conjunto de condiciones iniciales que se ven afectadas por un comportamiento no regular.

Centrándonos en el caso en el que el máximo momento de inercia de la plataforma $A(t)$ varía con el tiempo, el factor que aparece en la ecuación (2.11)

$$\Delta\mathcal{H}(\epsilon, \nu) = \frac{(a_3 - a_2)\epsilon\pi\nu^2}{2(a_3 - a_{10})n_2^2 \sinh(\frac{\pi\nu}{2n_2})}, \quad (2.12)$$

nos da una estimación teórica (Zaslavsky *et al.*, 1991) del valor del hamiltoniano en el borde de la banda de estocasticidad generada por la perturbación. De manera que, según (2.12), la anchura de la banda en términos del valor del hamiltoniano resulta ser una función de la amplitud ϵ y la frecuencia ν de la perturbación.

En la figura 2.2 se muestran dos gráficas con el comportamiento del factor $\Delta\mathcal{H}(\epsilon, \nu)$ como función de ϵ y ν , para un giróstato con $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, y

$a_3 = 0.3$. La gráfica 2.2 a) refleja el hecho de que, para un valor de la frecuencia fijo, en este caso $\nu = 0.3$, $\Delta\mathcal{H}(\epsilon)$ es una función lineal de la amplitud ϵ . Esto significa que cuando aumenta la amplitud de la perturbación, también crece la anchura de la banda, y en la misma proporción. Por otra parte, para una amplitud constante, $\Delta\mathcal{H}(\nu)$ crece con la frecuencia hasta alcanzar un valor máximo, y después disminuye asintóticamente a cero. Este comportamiento está representado en la gráfica 2.2 b) para una amplitud $\epsilon = 0.01$.

El comportamiento caótico del giróstato cerca de la separatriz no perturbada podemos visualizarlo por medio de superficies de sección de Poincaré temporales en el espacio de fases tetradimensional extendido (G_x, G_y, G_z, t) .

Definición: Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.13)$$

y siendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ una función periódica en t , con periodo $T = 2\pi/\omega$, es decir, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + T)$. La ecuación (2.13) es equivalente al sistema autónomo de $n + 1$ ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta), \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde $(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^1$ ($\mathcal{S}^1 \equiv \mathbb{R} \bmod 2\pi$).

Definimos una superficie de sección de Poincaré temporal $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$ en el espacio de fases extendido $\mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^1$ como

$$\Sigma^{\bar{\theta}_0} = \{(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^1 \mid \theta = \bar{\theta}_0 \in (0, 2\pi]\},$$

y la aplicación de Poincaré correspondiente a dicha superficie de sección hace corresponder a cada condición inicial el valor de la solución en $t = 0, T, 2T$, etc.

La figura 2.3 corresponde a una superficie de sección temporal donde puede verse la existencia de una banda de estocasticidad en torno a la separatriz no perturbada en el caso de un giróstato cuyo mayor momento de inercia $A(t)$ varía según (1.19). Como se puede observar en esta figura, las trayectorias regulares aparecen como curvas cerradas, mientras que las trayectorias caóticas aparecen como una nube de puntos alrededor de la separatriz del problema no perturbado.

Esta observación nos va a permitir comprobar numéricamente la validez de la estimación teórica (2.12) sobre la anchura de la banda de estocasticidad que hemos obtenido anteriormente.

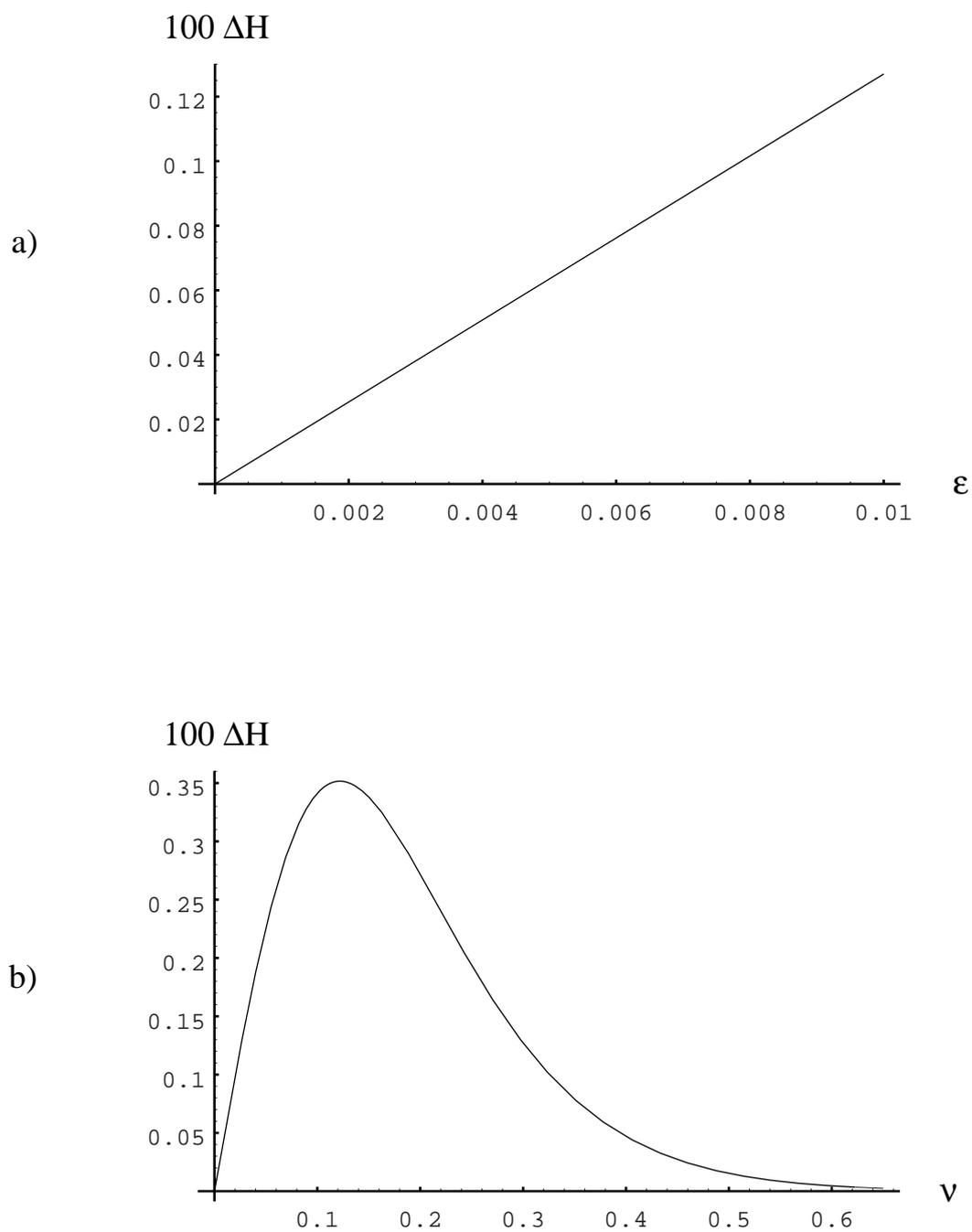


Figura 2.2: Evolución de la estimación teórica $\Delta\mathcal{H}(\epsilon, \nu)$ de la anchura de la banda de estocasticidad. a) Como función de la amplitud ϵ , para $\nu = 0.3$. b) Como función de la frecuencia ν , para $\epsilon = 0.01$. En ambos casos $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, y $a_3 = 0.3$.

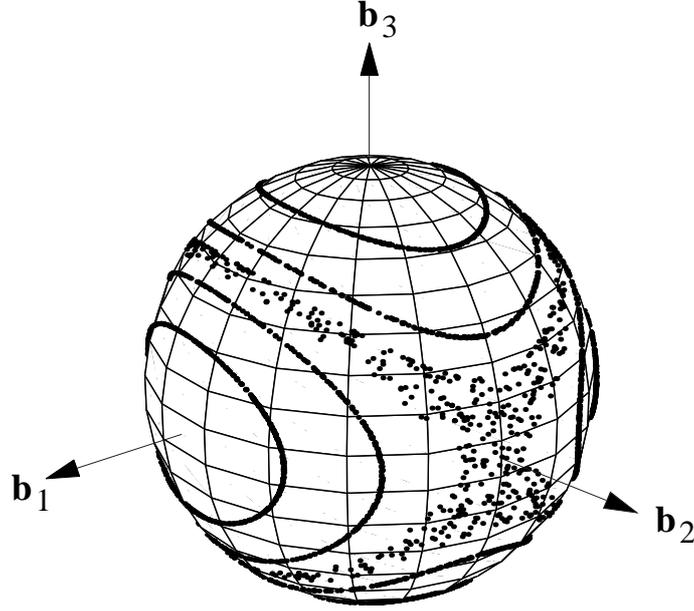


Figura 2.3: Superficie de sección de Poincaré para $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.3$, $\epsilon = 0.005$ y $\nu = 0.1$.

La evaluación numérica de la anchura de la banda la obtendremos a partir de la integración numérica de las ecuaciones del movimiento perturbado, que en el caso correspondiente a un giróstatos con el máximo momento de inercia de su plataforma $A(t)$ variable son

$$\begin{aligned}\dot{G}_x &= \{G_x; \mathcal{H}\} = (a_3 - a_2)G_y G_z \\ \dot{G}_y &= \{G_y; \mathcal{H}\} = (a_{10} - a_3 + \epsilon \cos \nu t)G_x G_z \\ \dot{G}_z &= \{G_z; \mathcal{H}\} = (a_2 - a_{10} - \epsilon \cos \nu t)G_x G_y.\end{aligned}$$

Estas ecuaciones las hemos integrado numéricamente usando un algoritmo Runge–Kutta de quinto orden con paso fijo (Lambert, 1976, pp. 121–123), de manera que se mantenga “constante” la relación $G_x^2 + G_y^2 + G_z^2 = 1$ entre las tres componentes del momento angular \mathbf{G} . Es decir, la conservación de la norma del vector \mathbf{G} en el sistema de referencia móvil \mathcal{B} .

En este momento debemos decidir cuándo una trayectoria resulta regular o no.

El siguiente razonamiento sobre el flujo fásico en S^2 ha sido la base del diseño del algoritmo que hemos utilizado para estimar la anchura de la banda de estocasticidad. En el problema no perturbado todas las trayectorias que atraviesan el meridiano $G_x = 0$ descansan bien en el hemisferio norte ($G_z > 0$), bien en el he-

misferio sur ($G_z < 0$). Por otra parte, en el problema perturbado las trayectorias caóticas cubren la banda de estocasticidad, de forma que, en estas trayectorias la componente G_z toma valores tanto positivos como negativos. Por lo tanto, podemos considerar como regular una trayectoria que se mantenga siempre en el mismo hemisferio, mientras que podemos considerar como caótica una trayectoria que atraviese el ecuador $G_z = 0$.

Teniendo presente este argumento, hemos barrido el meridiano $G_x = 0$ desde $G_z = 1$ hasta $G_z = 0$, para valores dados de la amplitud ϵ y la frecuencia ν de la perturbación, buscando las condiciones iniciales de la primera trayectoria que atraviese el ecuador hacia el hemisferio sur. Cada trayectoria la hemos propagado durante 1000 periodos de la perturbación, y las condiciones iniciales de la primera trayectoria caótica las hemos calculado con una precisión de 10^{-3} . Esta primera trayectoria determina la frontera de la banda de estocasticidad, y nos permite calcular su anchura.

Con las componentes iniciales $(0, G_y, G_z)$ de esta trayectoria límite podemos calcular el valor \mathcal{H}_{lim} del hamiltoniano en el instante inicial $t = 0$, correspondiente a la frontera superior de la banda de estocasticidad en el meridiano $G_x = 0$.

En las figuras 2.4 y 2.5 se incluyen tres gráficas que muestran de manera comparativa las estimaciones numérica y teórica del valor \mathcal{H}_{lim} en el límite de la banda. La estimación teórica de \mathcal{H}_{lim} la hemos calculado como $\mathcal{H}_{lim} = \mathcal{H}_s + \Delta\mathcal{H}$, donde \mathcal{H}_s es el valor del hamiltoniano en la separatriz no perturbada, y $\Delta\mathcal{H}$ la estimación teórica (2.12) de la anchura de la banda obtenida anteriormente al calcular la función de Melnikov. En estas tres gráficas hemos considerado un giróstato con $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, y $a_3 = 0.3$. Las tres gráficas presentan la evolución de ambas estimaciones de \mathcal{H}_{lim} como función de la amplitud ϵ de la perturbación y para determinadas frecuencias ν constantes. Los valores que toma ϵ varían desde 0.001 hasta 0.01 a intervalos de una milésima.

En la gráfica 2.4 a) vemos que, fijado un valor bajo de la frecuencia $\nu = 0.04$, existe un gran acuerdo entre la estimación teórica y numérica. Así, la estimación numérica nos confirma el hecho de que para una frecuencia constante, la anchura de la banda de estocasticidad crece linealmente con la amplitud ϵ de la perturbación.

En la gráfica 2.4 b) se observa que para una frecuencia intermedia $\nu = 0.15$, hay una gran concordancia entre las dos estimaciones para valores pequeños de

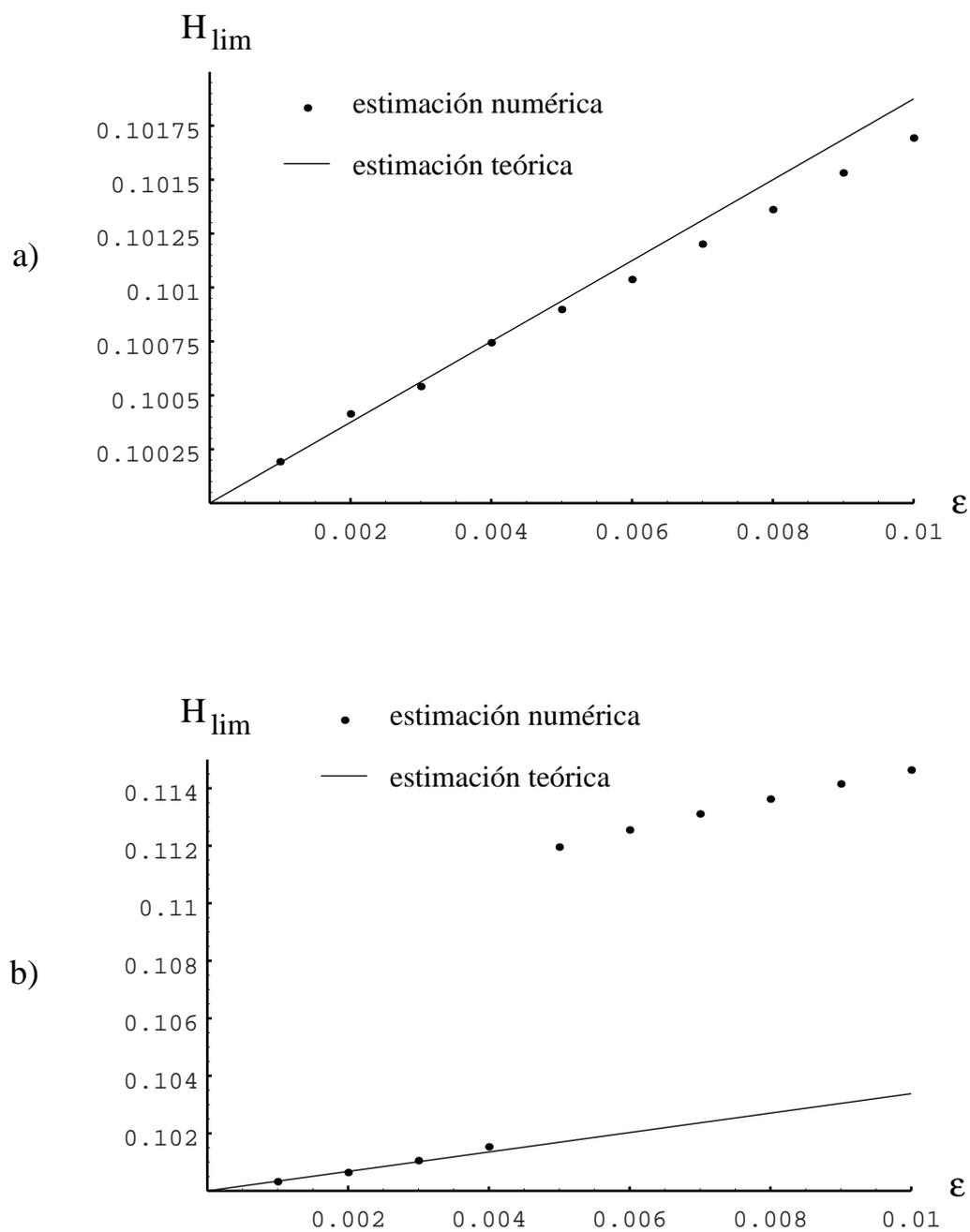


Figura 2.4: Comparación de la evolución de las estimaciones de la anchura de la banda de estocasticidad como funciones de ϵ para dos frecuencias fijas distintas: a) $\nu = 0.04$ y b) $\nu = 0.15$. En ambos casos $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.3$.

la amplitud $\epsilon \leq 0.004$. Sin embargo, entre los valores $\epsilon = 0.004$ y $\epsilon = 0.005$ destaca un brusco aumento en la estimación numérica de \mathcal{H}_{lim} , de manera que, para valores $\epsilon \geq 0.005$, la estimación numérica resulta siempre bastante mayor que la teórica.

En la gráfica 2.5, para una frecuencia alta $\nu = 0.5$ constante, podemos comprobar un fenómeno similar. Aquí también aparece un fuerte salto en la estimación numérica de \mathcal{H}_{lim} entre $\epsilon = 0.008$ y $\epsilon = 0.009$, aunque en este caso la estimación teórica es siempre menor que la numérica para todo el rango de amplitudes $\epsilon \leq 0.01$.

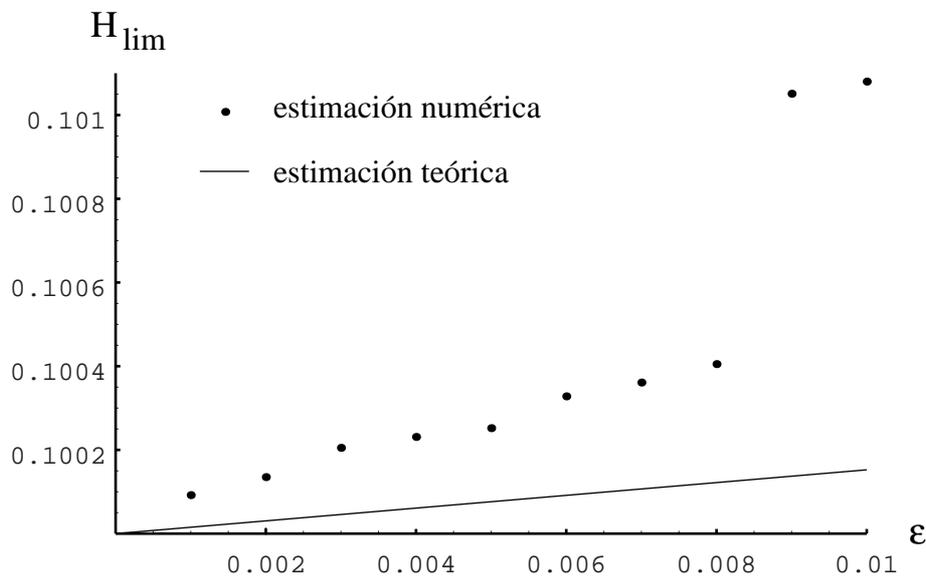


Figura 2.5: Comparación de la evolución de las estimaciones de la anchura de la banda de estocasticidad como funciones de ϵ para una frecuencia fija $\nu = 0.5$. En este caso $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.3$.

Estos abruptos crecimientos en las estimaciones numéricas, y que no se ven reflejados en las estimaciones teóricas, se deben, como se verá en detalle en el capítulo 5, a que entre esos valores críticos de ϵ , la banda de estocasticidad alcanza en su crecimiento alguna resonancia no lineal existente en el meridiano $G_x = 0$ del espacio de fases. En este proceso de absorción, la zona del espacio de fases próxima a la resonancia persiste como una pequeña isla de movimiento regular en el interior de la banda estocástica, lo que provoca el fuerte crecimiento repentino de la misma.

Dos ejemplos de este proceso de absorción de resonancias se ilustran en las

figuras 2.6 y 2.7. La figura 2.6 nos presenta dos secciones temporales de Poincaré del espacio de fases (G_x, G_y, G_z, t) del giróstato perturbado con una frecuencia fija $\nu = 0.15$ y amplitudes a) $\epsilon = 0.004$ y b) $\epsilon = 0.006$. Precisamente entre estos valores de la amplitud se produce el abrupto aumento en la estimación numérica de \mathcal{H}_{lim} por absorción de una resonancia 2:1, que queda reflejado en la figura 2.4 b). La figura 2.7 incluye otras dos secciones temporales de Poincaré en una ampliación del espacio de fases esférico centrada en el punto $(0, 1, 0)$. En este caso la frecuencia de la perturbación toma el valor constante $\nu = 0.5$ y amplitudes a) $\epsilon = 0.008$ y b) $\epsilon = 0.014$. Entre estos valores de ϵ se produce el salto brusco de \mathcal{H}_{lim} debido a la absorción de una resonancia 10:1, que muestra la figura 2.5.

La figura 2.8 presenta comparativamente la evolución de las estimaciones del límite \mathcal{H}_{lim} de la banda estocástica como funciones de la frecuencia ν de la perturbación, para un valor fijo de la amplitud $\epsilon = 0.01$. Los valores de ν varían desde 0.01 hasta 0.7 a intervalos de una centésima. Además esta figura pone también de manifiesto los dos límites integrables del problema perturbado: para $\nu = 0$, y para $\nu \rightarrow \infty$.

En la figura 2.8 se observa que, para valores altos de la frecuencia, conforme crece ν , el valor de \mathcal{H}_{lim} tiende asintóticamente a cero, es decir, la banda de estocasticidad tiende a desaparecer. Esta tendencia coincide con el límite integrable del problema para $\nu \rightarrow \infty$, que ya hemos comentado anteriormente.

Por otro lado, esta figura 2.8 nos muestra cómo para valores de la frecuencia ν próximos a cero, al disminuir la frecuencia el valor de \mathcal{H}_{lim} también se aproxima a cero. Esto significa que, para el límite $\nu \rightarrow 0$, la banda de movimiento caótico también tiende a desaparecer. Esta tendencia coincide con el otro límite integrable del problema para $\nu = 0$.

En esta misma figura 2.8, y como ocurre en las gráficas 2.4 b) y 2.5, podemos apreciar saltos bruscos en la evolución de la estimación numérica de \mathcal{H}_{lim} , por ejemplo, para valores de ν como 0.18 ó 0.37. También podemos observar grandes discrepancias entre las dos estimaciones de \mathcal{H}_{lim} para frecuencias intermedias. La explicación de estos saltos y desacuerdos es esencialmente la misma que hemos dado anteriormente al comentar los saltos y discrepancias entre ambas estimaciones para frecuencias fijas. Para ciertos valores de ν existen resonancias en las proximidades de la frontera de la banda de estocasticidad, bien en el interior de la misma, o externas a ella. El tamaño de estas resonancias depende fuertemente

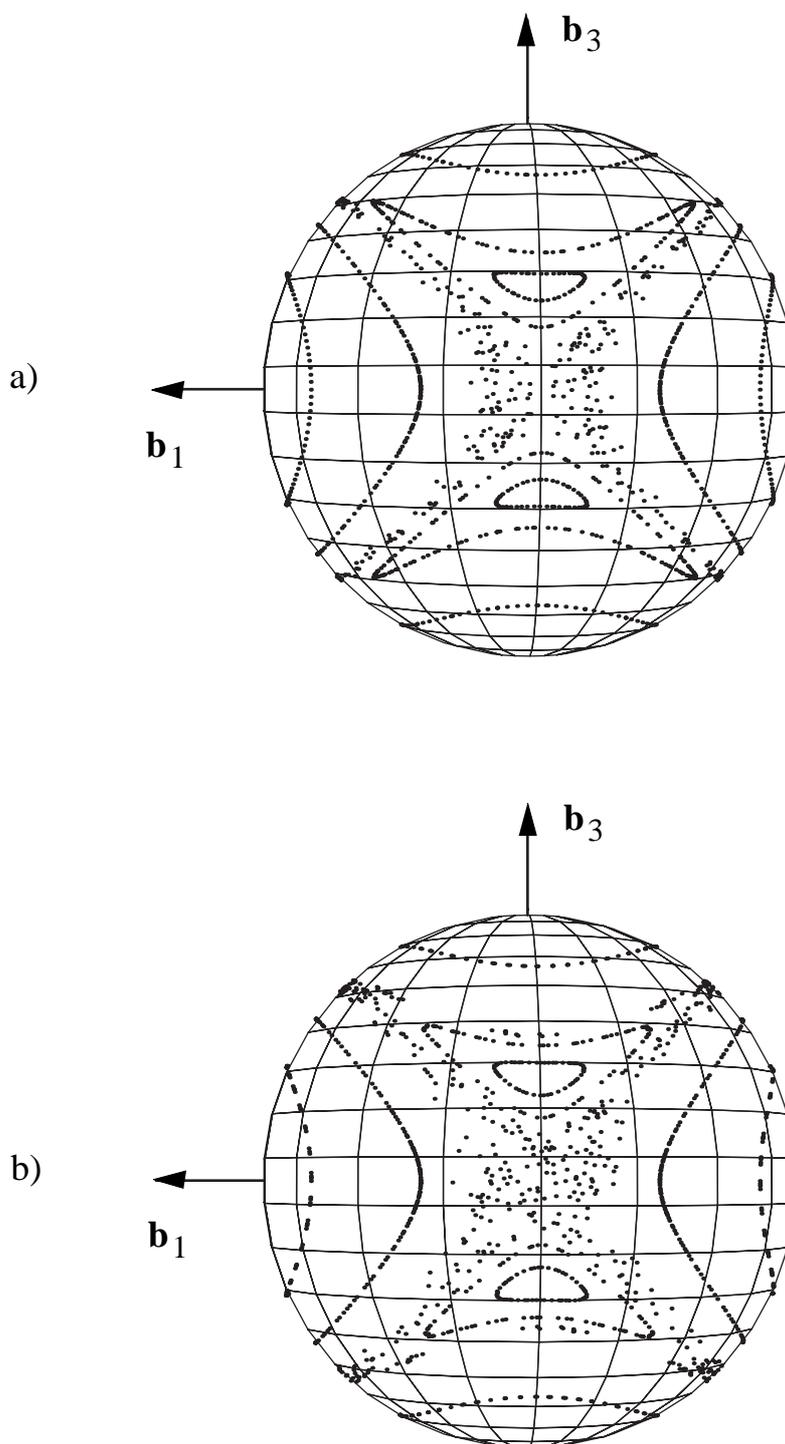


Figura 2.6: Absorción por la banda de estocasticidad de una resonancia al aumentar la amplitud ϵ de la perturbación para una frecuencia fija $\nu = 0.15$. $a_{10} = 0.1, a_2 = 0.2, a_3 = 0.3$. a) $\epsilon = 0.004$. b) $\epsilon = 0.006$.

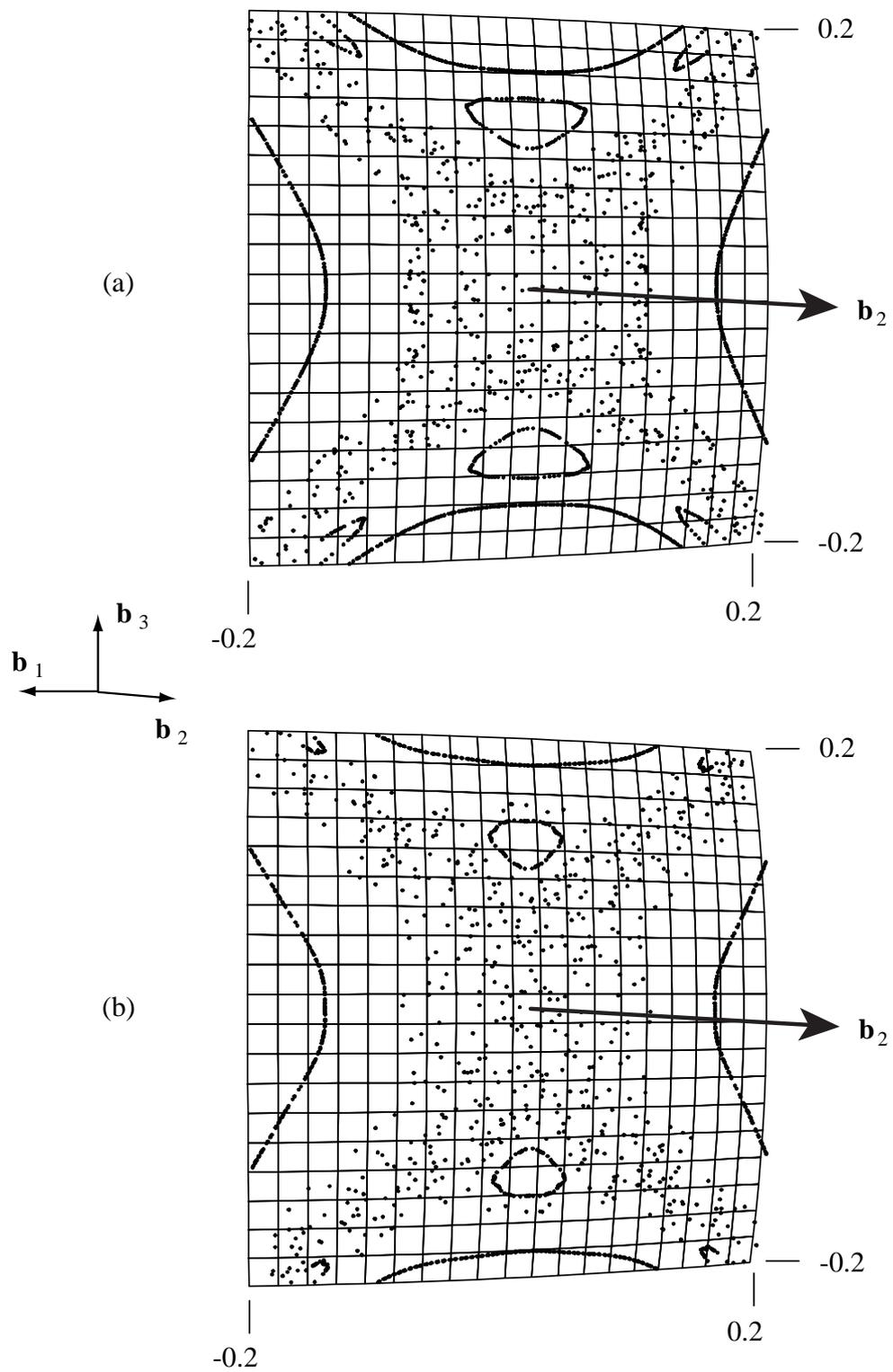


Figura 2.7: Absorción por la banda de estocasticidad de una resonancia al aumentar la amplitud ϵ de la perturbación para una frecuencia fija $\nu = 0.5$. $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.3$. a) $\epsilon = 0.008$. b) $\epsilon = 0.014$.

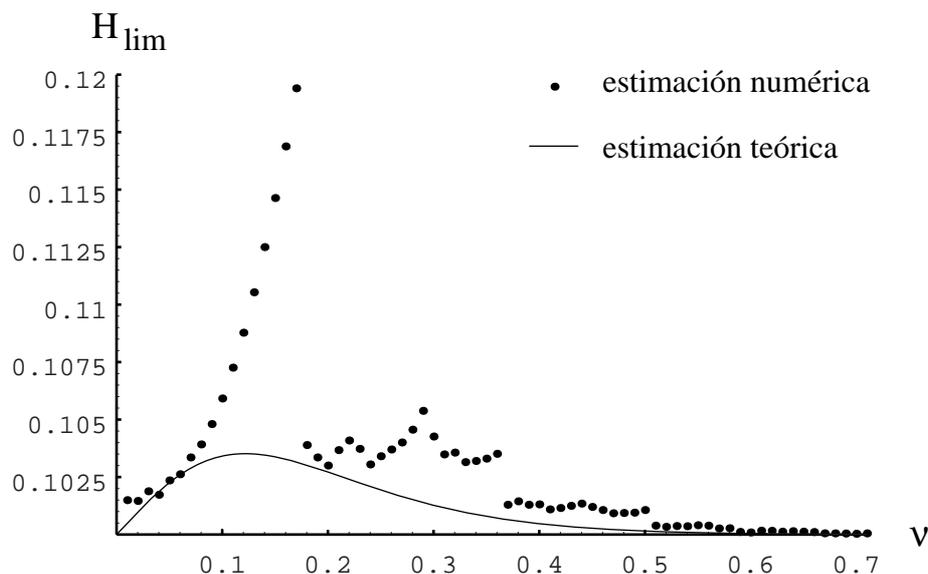


Figura 2.8: Comparación de la evolución de las estimaciones de la anchura de la banda de estocasticidad como funciones de ν para una amplitud fija $\epsilon = 0.01$. En este caso $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.3$.

de la frecuencia ν , aumentando, disminuyendo o incluso llegando a desaparecer repentinamente al variar ν . Es este hecho el que afecta a la evolución del límite de la banda de estocasticidad provocando esas bruscas variaciones que se pueden observar en la figura 2.8.

En los dos siguientes capítulos estudiamos el efecto que tiene el giro relativo del rotor en la eliminación del caos homo/heteroclínico cuando el eje del rotor coincide con cada uno de los tres ejes principales de la plataforma. Sin embargo, el lector puede perfectamente dejar estos dos capítulos para una lectura posterior, y pasar directamente al capítulo 5, donde estudiamos el efecto de la perturbación en el proceso de reorientación del giróstato y la relación que dicha maniobra tiene con los resultados obtenidos en este capítulo 2.

Capítulo 3

Rotor en torno al eje de mínima inercia: Eliminación del caos.

Una vez visto que el sistema se comporta de forma irregular cuando los rotores se encuentran en reposo relativo, nuestro objetivo es observar la evolución del mismo cuando el rotor aumenta, progresivamente, su momento angular relativo. Este progresivo incremento del momento angular relativo da lugar a lo que se conoce como *spinup* (Hall y Rand, 1994; Hall, 1995a, 1995c) y tiene, entre otras consecuencias, la reorientación del giróstato.

Aunque el fenómeno de la reorientación es de especial interés, y a ello le dedicaremos el último capítulo de esta memoria, trataremos, en primer lugar, el estudio de un fenómeno de “estabilización” producido por el efecto del giro del rotor. Esta estabilización consiste en la eliminación del caos inicial (Lanchares *et al.* 1998) frente a otro tipo de estabilizaciones producidas por elementos externos de control (Tsiotras y Longuski, 1994).

El capítulo queda dividido en cinco secciones. En la sección 3.1 reducimos el problema, mediante una serie de transformaciones, al caso de un hamiltoniano cuadrático biparamétrico con la estructura que estudian Lanchares y Elipe (1995b). En la sección 3.2 estudiamos, en ausencia de perturbación, la estructura del flujo fásico en términos de los equilibrios y bifurcaciones paramétricas. La siguiente sección está dedicada al cálculo de las órbitas asintóticas para los diferentes valores de los parámetros del problema. Aquí, hacemos especial hincapié en la continuidad de estas órbitas en función de los parámetros.

Una vez estudiado el sistema sin perturbar, procedemos, en la sección 3.4, al

cálculo de la función de Melnikov para los diferentes valores de los parámetros del problema. Así, determinamos la existencia de caos homo/heteroclínico mientras los parámetros del problema cumplen determinadas relaciones. Finalmente, en la sección 3.5 analizamos, mediante superficies de sección, el efecto que el giro del rotor tiene en la estabilización de las rotaciones.

3.1 Reducción de las ecuaciones.

En este capítulo consideraremos un giróstato de las mismas características que el estudiado en el capítulo anterior, es decir, el mayor momento de inercia $A(t)$ de la plataforma varía según la ecuación (1.19). El eje del único rotor coincide con el eje principal \mathbf{b}_3 . Pero además, en este capítulo supondremos que el rotor se encuentra en giro relativo respecto a la plataforma, es decir, $h_z \neq 0$ y $h_x = h_y = 0$.

En este caso, teniendo en cuenta la ecuación (1.20) se puede escribir el hamiltoniano del giróstato como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2}(a_{10}G_x^2 + a_2G_y^2 + a_3G_z^2) - a_3h_zG_z + \frac{1}{2}G_x^2\epsilon \cos vt \\ &= \mathcal{H}_0 + \epsilon V(G_x, G_y, G_z; t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Es decir, como en el capítulo anterior, el hamiltoniano del sistema lo podemos expresar como suma de una parte integrable \mathcal{H}_0 más la perturbación $\epsilon V(G_x, G_y, G_z; t)$.

La parte integrable \mathcal{H}_0 pertenece a la clase de hamiltonianos cuadráticos con estructura algebraica $\text{su}(2)$ y sobre una esfera de radio constante S^2 y puede ser reducida, mediante transformaciones de equivalencia, a uno de los dos tipos genéricos de hamiltonianos cuadráticos biparamétricos (Elipe y Lanchares, 1997b).

La primera transformación consiste en añadir al hamiltoniano un múltiplo adecuado del cuadrado del radio del espacio de fases esférico, con el objetivo de que uno de los coeficientes de la parte cuadrática del hamiltoniano sea cero. Esto es lo que Frauendiener (Frauendiner, 1995) denomina una transformación de equivalencia aditiva que resulta equivalente a hacer cero uno de los valores propios de la forma cuadrática.

La segunda transformación está asociada a un cambio de la variable temporal, con la finalidad de que uno de los dos coeficientes de la parte cuadrática del hamiltoniano sea igual a la unidad. Esto es una transformación de cambio de

escala, que es equivalente a hacer igual a 1 uno de los valores propios de la forma cuadrática.

Es decir, tras las dos transformaciones los valores propios de la forma cuadrática serán 0, 1 y λ , quedando reducida ésta a $(G_\alpha^2 + \lambda G_\beta^2)/2$, donde α y β son elegibles entre x, y, z .

En nuestro caso, la primera transformación resulta equivalente a restar al hamiltoniano \mathcal{H}_0 la cantidad $a_2/2 = a_2(G_x^2 + G_y^2 + G_z^2)/2$, con lo que el término cuadrático en G_y desaparece. Esto es,

$$\mathcal{H}'_0 = \mathcal{H}_0 - \frac{a_2}{2} = \frac{1}{2}(a_{10}G_x^2 + a_2G_y^2 + a_3G_z^2 - a_2G_x^2 - a_2G_y^2 - a_2G_z^2) - a_3h_zG_z$$

$$\mathcal{H}'_0 = \frac{1}{2}[(a_{10} - a_2)G_x^2 + (a_3 - a_2)G_z^2] - a_3h_zG_z.$$

La segunda transformación la realizamos a través de un cambio a una nueva variable τ según la ecuación $\tau = (a_3 - a_2)t$. Teniendo en cuenta que las ecuaciones que rigen el movimiento de cada componentes G_i en la variable t son

$$\dot{G}_i = \{G_i; \mathcal{H}'_0\} = \frac{dG_i}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dG_i}{d\tau} (a_3 - a_2),$$

las ecuaciones del movimiento para G_i en la nueva variable τ resultan ser

$$\frac{dG_i}{d\tau} = \{G_i; \mathcal{H}'_0\} \frac{1}{a_3 - a_2} = \{G_i; \frac{\mathcal{H}'_0}{a_3 - a_2}\} = \{G_i; \mathcal{H}''_0\},$$

donde \mathcal{H}''_0 es el nuevo hamiltoniano

$$\mathcal{H}''_0 = \frac{\mathcal{H}'_0}{a_3 - a_2} = \frac{1}{2}(G_z^2 + \frac{a_{10} - a_2}{a_3 - a_2}G_x^2) - \frac{a_3h_z}{a_3 - a_2}G_z.$$

Definamos ahora los parámetros

$$P = \frac{a_{10} - a_2}{a_3 - a_2}, \quad Q = -\frac{a_3h_z}{a_3 - a_2}. \quad (3.2)$$

De esta manera, el hamiltoniano \mathcal{H}''_0 toma la forma biparamétrica

$$\mathcal{H}''_0 = \frac{1}{2}(G_z^2 + PG_x^2) + QG_z. \quad (3.3)$$

Nótese que el parámetro P depende únicamente de la distribución de masas del giróstato y el parámetro Q depende, al mismo tiempo, de la distribución de masas del giróstato y del momento angular relativo h_z del rotor.

Además, debido a que estamos considerando la relación $a_{10} < a_2 < a_3$, $P \in (-\infty, 0)$ y es una cantidad constante para valores fijos de a_{10} , a_2 y a_3 . Con lo cual,

fijados los momentos de inercia, el hamiltoniano \mathcal{H}_0'' depende sólo del parámetro Q , o lo que es lo mismo, del momento angular relativo h_z del rotor. Suponiendo, también, que h_z es positivo, tenemos que

$$P = \frac{a_{10} - a_2}{a_3 - a_2} < 0, \quad Q = -\frac{a_3 h_z}{a_3 - a_2} < 0.$$

En este punto es necesario destacar que si aplicamos unas transformaciones parecidas a las que hemos hecho, se puede convertir el hamiltoniano \mathcal{H}_0 en otro con estructura cuadrática biparamétrica diferente

$$\mathcal{H}_0^* = \frac{1}{2}(G_z^2 + P^* G_y^2) + Q^* G_z.$$

En este hamiltoniano \mathcal{H}_0^* no aparece el término G_x^2 , y los parámetros P^* y Q^* son

$$P^* = \frac{a_2 - a_{10}}{a_3 - a_{10}}, \quad Q^* = -\frac{a_3 h_z}{a_3 - a_{10}}.$$

Los puntos de equilibrio de \mathcal{H}_0^* expresados en función de los parámetros P^* y Q^* tienen una forma distinta que los equilibrios del hamiltoniano (3.3), y en este caso $P^* \in (0, 1)$. Sin embargo, si escribimos los equilibrios de ambos hamiltonianos en función de las cantidades a_{10}, a_2, a_3 , a través de las expresiones de los parámetros P, Q, P^* y Q^* , lógicamente encontramos que coinciden tanto los equilibrios de \mathcal{H}_0^* y \mathcal{H}_0'' , como las condiciones de existencia de dichos puntos.

3.2 Equilibrios y bifurcaciones paramétricas

El hamiltoniano (3.3) coincide con el estudiado por Elipe y Lanchares (1995) sin más que hacer el cambio de variables $(G_x, G_y, G_z) \longrightarrow (v, w, u)$.

Teniendo en cuenta los paréntesis de Poisson entre las componentes (G_x, G_y, G_z) obtenemos las ecuaciones del movimiento

$$\begin{aligned} \frac{dG_x}{d\tau} &= \{G_x; \mathcal{H}_0''\} = (Q + G_z) G_y, \\ \frac{dG_y}{d\tau} &= \{G_y; \mathcal{H}_0''\} = [(P - 1)G_z - Q]G_x, \\ \frac{dG_z}{d\tau} &= \{G_z; \mathcal{H}_0''\} = -PG_x G_y. \end{aligned} \tag{3.4}$$

A partir de estas ecuaciones se pueden encontrar los equilibrios del sistema, que proporcionan la información básica sobre el flujo fásico en término de los parámetros P y Q .

Punto de equilibrio en variables (G_x, G_y, G_z)	Condición de existencia	Valor de \mathcal{H}_0''
$E_{1\pm} \equiv \left(\pm \sqrt{1 - \frac{Q^2}{(P-1)^2}}, 0, \frac{Q}{P-1} \right)$	$ Q \leq P-1 $	$\frac{1}{2} \left(P + \frac{Q^2}{P-1} \right)$
$E_{2\pm} \equiv (0, \pm \sqrt{1-Q^2}, -Q)$	$ Q \leq 1$	$-\frac{Q^2}{2}$
$E_{3+} \equiv (0, 0, 1)$	Siempre	$\frac{1}{2} + Q$
$E_{3-} \equiv (0, 0, -1)$	Siempre	$\frac{1}{2} - Q$

Tabla 3.1: Puntos de equilibrio, condiciones de existencia, y valores que toma \mathcal{H}_0'' en ellos.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos por Lanchares y Elipe (1995b), en la tabla 3.1 mostramos los diferentes puntos de equilibrio que puede tener el giróstato no perturbado en función de los parámetros P y Q . Estos puntos de equilibrio los denotaremos como $E_{1\pm}, E_{2\pm}, E_{3\pm}$. También se indican en esta tabla las condiciones para la existencia de dichos equilibrios, así como el valor del hamiltoniano \mathcal{H}_0'' en los mismos.

Las condiciones para la existencia de estos puntos de equilibrio nos proporcionan una partición del plano de los parámetros (P, Q) , como el que refleja la figura 3.1. En esta figura se han numerado de 1 a 7 las distintas regiones, y entre paréntesis se indica el número de puntos de equilibrio existentes en cada una de las regiones. Como el hamiltoniano \mathcal{H}_0'' es invariante bajo la transformación $(G_z, Q) \rightarrow (-G_z, -Q)$, hemos denotado las regiones simétricas respecto al eje $Q = 0$ con $(2, 2'), (3, 3'), (4, 4')$ y $(5, 5')$, ya que de acuerdo con dicha simetría, el comportamiento del giróstato será el mismo en la región n que en la $n'(n = 2, 3, 4, 5)$.

Puesto que estamos interesados en estudiar el efecto que tiene el giro relativo del rotor en la dinámica del giróstato, es interesante conocer el comportamiento del flujo fásico en función del parámetro Q . Es evidente que para $Q = 0$, el momento angular relativo h_z es nulo ($h_z = 0$) y el problema se reduce al estudiado en el capítulo anterior. Por lo tanto, si volvemos a la figura 3.1, la evolución del

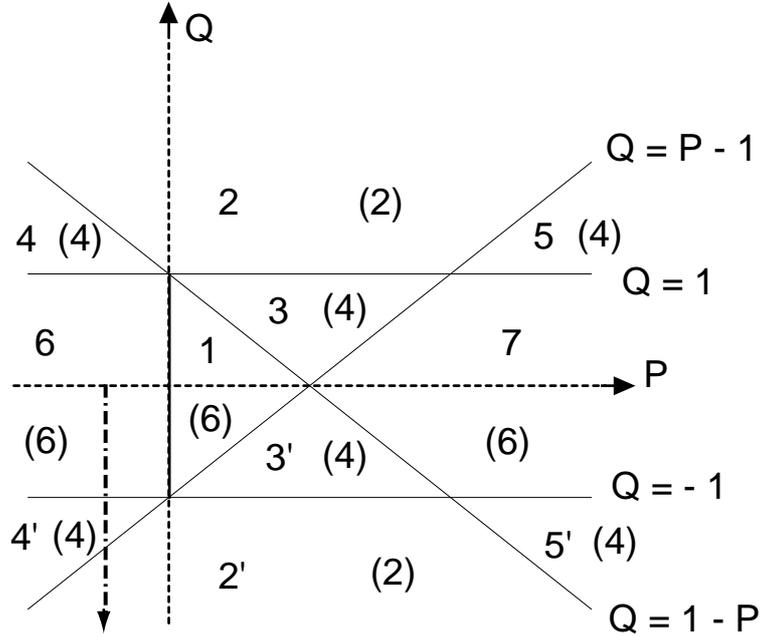


Figura 3.1: Partición del plano de los parámetros (P, Q) para el hamiltoniano no perturbado \mathcal{H}_0'' , correspondiente al giróstato con un solo rotor alrededor del eje \mathbf{b}_3 . La línea gruesa discontinua representa la evolución del sistema al aumentar h_z para $a_{10} < a_2 < a_3$.

sistema al aumentar progresivamente h_z , se manifiesta en el plano de parámetros (P, Q) como un recorrido sobre una línea recta paralela al eje Q en el cuadrante $P < 0, Q < 0$. Este recorrido comienza para $Q = 0$ en la región 6, atraviesa toda la región 4', y termina en la región 2'. En esta evolución, el sistema tiene inicialmente seis puntos de equilibrio en la región 6, pasa a tener cuatro equilibrios en la región 4' y finalmente acaba con sólo dos equilibrios en la región 2'. Esto significa que el sistema sufre en dicha evolución dos bifurcaciones diferentes, la primera de ellas al pasar de seis a cuatro equilibrios en $Q = -1$, y la segunda al pasar de cuatro a dos equilibrios en $Q = P - 1$.

La figura 3.2 muestra la evolución del espacio de fases del sistema no perturbado para una disminución progresiva de Q (un aumento de h_z) desde $Q = 0$ ($h_z = 0$) hasta $Q = -2.1$ ($h_z = 0.7$). Los momentos principales de inercia son en este caso ($a_{10} = 0.1, a_2 = 0.2, a_3 = 0.3$), para los que se tiene $P = -1$. En esta figura se observa claramente cómo tienen lugar ambas bifurcaciones. Según va disminuyendo el valor de Q desde 0 hasta -1 , los puntos heteroclínicos $E_{2\pm}$ se van desplazando sobre el meridiano $G_x = 0$ hacia el polo norte. Simultáneamente,

los equilibrios estables $E_{1\pm}$ se mueven sobre el meridiano $G_y = 0$ también hacia el punto E_{3+} . Para el valor $Q = -1$ tiene lugar una primera bifurcación tipo *pitchfork*, al colapsar los dos puntos heteroclínicos $E_{2\pm}$ con el punto E_{3+} , que se transforma en un punto homoclínico. Conforme el parámetro Q disminuye dentro del intervalo $-1 > Q > P - 1$, los equilibrios $E_{1\pm}$ continúan su desplazamiento hacia el polo norte. Para el valor $Q = P - 1$, ocurre la segunda bifurcación, también de tipo *pitchfork*, al coincidir $E_{1\pm}$ con el punto homoclínico E_{3+} , que pasa a ser un equilibrio estable. Para valores de $Q < P - 1$, sólo permanecen dos puntos de equilibrio estables, $E_{3\pm}$, situados en ambos polos de la esfera S^2 .

En la primera fase de esta evolución, para valores de $Q \in (-1, 0]$, que corresponden a la región 6 del plano (P, Q) existen cuatro trayectorias heteroclínicas que conectan los equilibrios $E_{2\pm}$. En cambio, en la segunda fase, para valores de $Q \in (P - 1, -1]$, región 4' del plano (P, Q) , hay dos trayectorias homoclínicas que nacen y mueren en el punto E_{3+} . Toda esta evolución ha sido descrita con mayor detalle por Lanchares (1993).

Además, es de destacar que para $Q = -1$, el tipo de trayectorias homoclínicas es especial, ya que los dos lóbulos homoclínicos son tangentes en el punto E_{3+} . Estas órbitas son el límite asintótico para $Q \rightarrow -1$ de las trayectorias heteroclínicas para $Q > -1$ y de las homoclínicas para $Q < -1$.

En la sección anterior hemos comentado que si se aplican las transformaciones de equivalencia adecuadas, se puede convertir \mathcal{H}_0 en otro hamiltoniano biparamétrico con $P \in (0, 1)$. Hay que notar aquí, que la evolución del espacio de fases del sistema en la región $P \in (0, 1)$ es idéntica a la que acabamos de comentar para $P < 0$, existiendo las mismas bifurcaciones y en el mismo orden.

De la evolución que sufre el espacio de fases del sistema no perturbado al aumentar h_z podemos destacar dos de los efectos que produce el giro relativo del rotor sobre la dinámica del giróstato. El más evidente de estos efectos es que al aumentar h_z suficientemente, se consigue eliminar todas las órbitas asintóticas del problema no perturbado. Como hemos encontrado (Lanchares *et al.*, 1998) y veremos posteriormente, este hecho tiene como consecuencia importante que el caos homoclínico (que aparece al añadir la perturbación) puede llegar a ser eliminado por el giro relativo del rotor.

Otro efecto interesante y bien conocido del giro del rotor, y que discutiremos en el capítulo 5, es la reorientación del giróstato. Y es que, como se observa en la

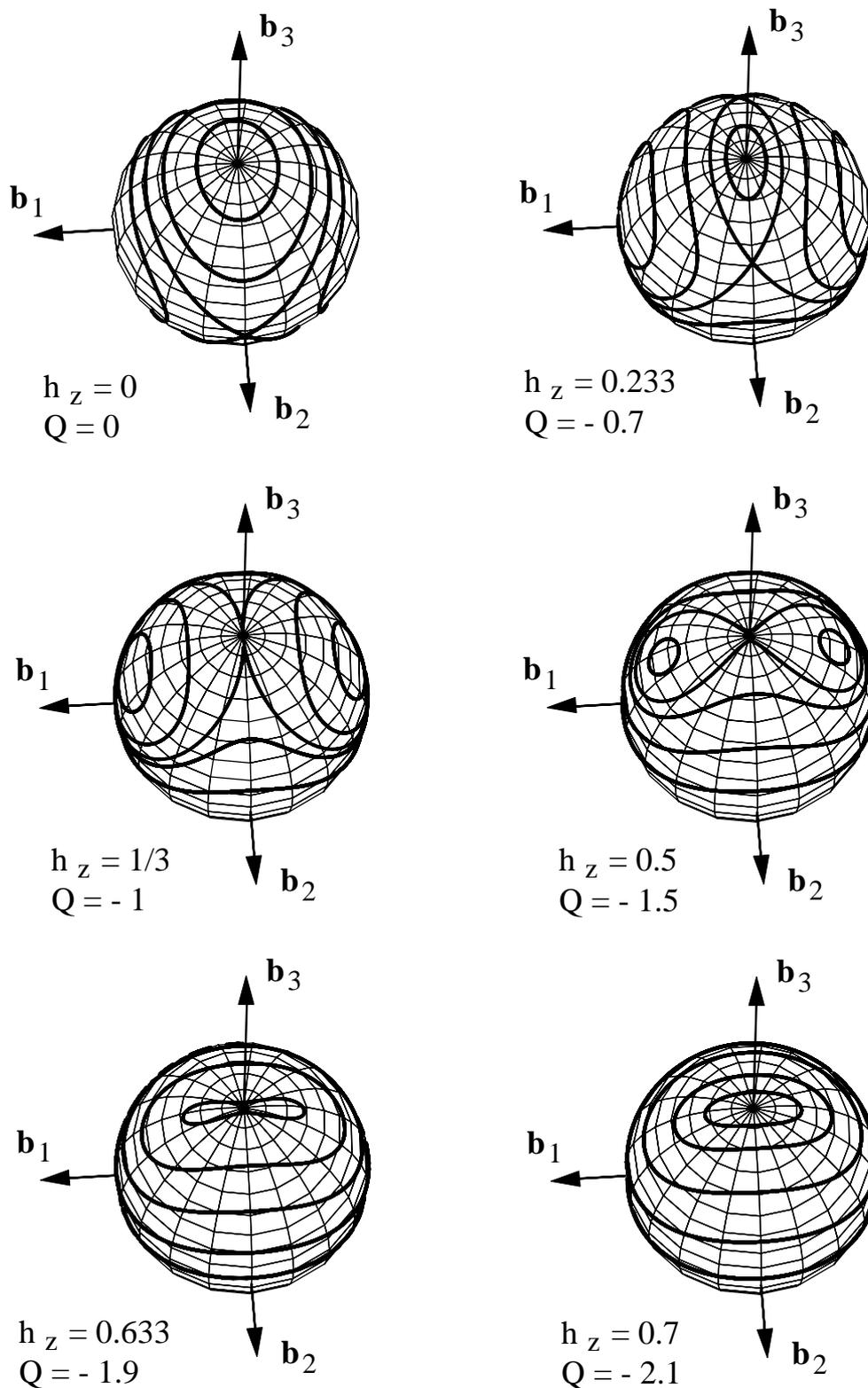


Figura 3.2: Evolución del espacio de fases del sistema \mathcal{H}_0'' , con $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.3$ (o $P = -1$), desde $Q = 0$ ($h_z = 0$) hasta $Q = -2.1$ ($h_z = 0.7$). La primera bifurcación ocurre para $Q = -1$ ($h_z = 1/3$), y la segunda para $Q = -2$ ($h_z = 2/3$).

figura 3.2, para un h_z suficientemente alto, en el espacio de fases no perturbado sólo existen circulaciones alrededor de dos únicos puntos de equilibrio hacia los cuales se puede hacer tender el sistema. Como Hubert (1980) ha demostrado, si el giróstato posee alguna fuente de disipación de energía cinética, aumentando h_z suficientemente, el sistema tenderá de forma inevitable hacia el único punto de equilibrio estable por efecto de la disipación de energía. Con lo cual, el giróstato terminará finalmente orientado en una misma dirección con independencia de sus condiciones iniciales.

3.3 Órbitas Asintóticas

Para estudiar el efecto de la perturbación sobre la dinámica del problema, haremos uso, como en el capítulo anterior, del método de Melnikov. Para ello es preciso conocer las ecuaciones de las trayectorias asintóticas (órbitas homoclínicas o heteroclínicas) para \mathcal{H}_0'' .

Las soluciones explícitas de las trayectorias sobre el espacio de fases S^2 se obtienen a partir de las ecuaciones de movimiento (3.4) teniendo en cuenta las dos integrales del movimiento \mathcal{H}_0'' y G . Estas soluciones se expresan, en general, en términos de funciones circulares, elípticas e hiperbólicas (para más detalles ver Lanchares, 1993).

En nuestro caso, solamente estamos interesados en las soluciones asintóticas, que serán diferentes según la región del plano de parámetros (P, Q) en que nos encontremos. Según esto, las soluciones asintóticas pueden clasificarse en tres tipos.

• **A ÓRBITAS ASINTÓTICAS EN LA REGION 6** ($P < 0, -1 < Q < 0$).

En este caso, $\mathcal{H}_0'' = -Q^2/2$, y las soluciones de las cuatro trayectorias heteroclínicas que conectan los puntos $E_{2\pm}$ son:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_x^{(1)} = \pm \frac{\alpha^2}{(-P)^{3/2}} \frac{1}{K_3 \cosh(\alpha t) + K_4} \\ G_y^{(1)} = \pm K_3 \frac{\alpha}{\sqrt{-P}} \frac{\sinh(\alpha t)}{K_3 \cosh(\alpha t) + K_4} \\ G_z^{(1)} = \frac{K_1 \cosh(\alpha t) + K_2}{K_3 \cosh(\alpha t) + K_4} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

donde

$$\begin{aligned} K_1 &= -QK_3, & K_2 &= 1, \\ K_3 &= \pm\sqrt{\frac{P-1+Q^2}{P}}, & K_4 &= -Q, \end{aligned}$$

y

$$\alpha = \sqrt{P(Q^2 - 1)}.$$

• **B ÓRBITAS ASINTÓTICAS EN LA FRONTERA** ($P < 0, Q = -1$).

En esta situación estamos justamente en la frontera entre las regiones 6 y 4', y las cuatro trayectorias heteroclínicas de la región 6 se transforman en dos trayectorias homoclínicas. Teniendo en cuante que valor del hamiltoniano es $\mathcal{H}_0'' = -1/2$, las ecuaciones de estas dos trayectorias son:

$$\left\{ \begin{aligned} G_x^{(2)} &= \frac{\pm 2\sqrt{-P}}{1 - P + P^2 t^2} \\ G_y^{(2)} &= \frac{\pm 2\sqrt{-P^3} t}{1 - P + P^2 t^2} \\ G_z^{(2)} &= \frac{1 + P + P^2 t^2}{1 - P + P^2 t^2} \end{aligned} \right. \quad (3.6)$$

ótese que $G_x = \pm \frac{G_z - 1}{\sqrt{-P}}$, es decir, estas órbitas están contenidas en sendos planos que se cortan en la recta $G_x = 0, G_z = 1$. Por tanto, las dos órbitas son tangentes en el punto E_{3+} como se puede observar en la figura 3.2.

• **C ÓRBITAS ASINTÓTICAS EN LA REGION 4'** ($P < 0, P - 1 < Q < -1$).

En este caso, $\mathcal{H}_0'' = Q + 1/2$, y las soluciones de las dos trayectorias homoclínicas que nacen y mueren en el equilibrio E_{3+} son:

$$\left\{ \begin{aligned} G_x^{(3)} &= \pm 2\beta\sqrt{Q(1+Q)} \frac{\cosh(\beta t/2)}{L_3 \cosh(\beta t) + L_4} \\ G_y^{(3)} &= \pm 2\beta\sqrt{Q(P-1-Q)} \frac{\sinh(\beta t/2)}{L_3 \cosh(\beta t) + L_4} \\ G_z^{(3)} &= \frac{L_1 \cosh(\beta t) + L_2}{L_3 \cosh(\beta t) + L_4} \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} L_1 &= PQ, & L_2 &= 2(1 - P) + 3Q(2 - P) + 4Q^2, \\ L_3 &= PQ, & L_4 &= 2(P - 1) + Q(P - 2), \end{aligned}$$

y

$$\beta = 2\sqrt{[P - 1 - Q](Q + 1)}.$$

Aunque en las soluciones (3.5), (3.6) y (3.7) deberíamos haber denotado la variable temporal correctamente como τ , la hemos denotado con t por mayor comodidad en posteriores cálculos matemáticos.

Como vemos, en las regiones 6 y 4' del plano (P, Q) las soluciones de las separatrices del sistema se expresan en términos de funciones hiperbólicas. Sin embargo, justo en la primera bifurcación ($Q = -1$) entre dichas regiones, las soluciones de las separatrices no tienen forma de funciones hiperbólicas sino que se expresan como una función racional de t . Además, las ecuaciones (3.6) correspondientes a las órbitas asintóticas en la bifurcación $Q = -1$ tienen una forma muy parecida a la ecuación de la trayectoria homoclínica en la llamada bifurcación de la lágrima, que aparece en uno de los hamiltonianos cuadráticos estudiados por Lanchares en su tesis doctoral (Lanchares, 1993, pp. 94–96).

A pesar de las distintas formas de las ecuaciones de las separatrices en diferentes regiones del plano (P, Q) , debe probarse que las soluciones hiperbólicas de las regiones 6 y 4' coinciden con las soluciones racionales para ($Q = -1$) cuando el parámetro $Q \rightarrow -1$.

Para probar que cuando $Q \rightarrow -1$, las expresiones (3.5) y (3.7) tienen como límite (3.6), será suficiente considerar las soluciones de la componente G_z del momento angular total del giróstato.

Primero vamos a considerar las soluciones (3.5) de las separatrices en la región 6 del plano (P, Q) , donde $-1 < Q < 0$.

Las ecuaciones (3.5) correspondientes a las cuatro órbitas heteroclínicas que conectan los equilibrios $E_{2\pm}$ podemos dividirlos en dos clases que corresponden a lo que denominaremos ramas superiores, para $K_3 > 0$, y ramas inferiores, para $K_3 < 0$. No es difícil comprobar que para las ramas superiores, $K_3 > 0$, es posible calcular el límite de las expresiones (3.5) sin mayor dificultad, ya que no aparecen indeterminaciones. En este caso se tiene que $(G_x(t), G_y(t), G_z(t)) \rightarrow (0, 0, 1)$ cuando $Q \rightarrow -1$. Esto es una consecuencia de lo que puede observarse en la figura 3.2 donde se aprecia cómo dos de las cuatro trayectorias heteroclínicas colapsan en el equilibrio E_{3+} . Por otra parte, son las ramas inferiores, $K_3 < 0$, las que evolucionan para transformarse en las nuevas órbitas homoclínicas que vienen dadas por (3.6).

Para las ramas inferiores ($K_3 < 0$), sin embargo, aparece una indeterminación en el cálculo del límite de $G_z^{(1)}$ cuando $Q \rightarrow -1$. Aplicando la regla de L'Hospital, encontramos que

$$\lim_{Q \rightarrow -1} G_z^{(1)} = \lim_{Q \rightarrow -1} \frac{-\alpha(PK_3^2 + Q^2) \cosh(\alpha t) - P^2 K_3^2 Q^2 t \sinh(\alpha t)}{\alpha Q \cosh(\alpha t) + P^2 K_3^2 Q t \sinh(\alpha t) - PK_3 \alpha}.$$

Nuevamente aparece una indeterminación del mismo tipo que la anterior, por lo que, aplicando otra vez la regla de L'Hospital resulta

$$\lim_{Q \rightarrow -1} G_z^{(1)} = \lim_{Q \rightarrow -1} \frac{F_1 \cosh(\alpha t) + F_2 \sinh(\alpha t)}{F_3 \cosh(\alpha t) + F_4 \sinh(\alpha t) + F_5}$$

siendo

$$F_1 = -Q(P^2 K_3^2 + PQ^2 + 4\alpha^2 + P^3 Q^2 K_3^2 t^2),$$

$$F_2 = -3\alpha PQ t(PK_3^2 + Q^2),$$

$$F_3 = \alpha^2 + PQ^2 + P^3 K_3^2 Q^2 t^2,$$

$$F_4 = \alpha t(P(K_3^2 + Q^2) + 2Q^2),$$

$$F_5 = -Q\left(\frac{\alpha^2}{K_3} + P^2 K_3\right).$$

Podemos ver que ya se ha eliminado la indeterminación de manera que se tiene

$$\lim_{Q \rightarrow -1} G_z^{(1)} = \frac{1 + P + P^2 t^2}{1 - P + P^2 t^2} = G_z^{(2)},$$

que es la expresión (3.6) de la componente G_z de la separatriz en la frontera donde $Q = -1$.

Considerando ahora las soluciones (3.5) de las trayectorias homoclínicas en la región 4' del plano (P, Q) donde $P - 1 < Q < -1$, ocurre lo mismo que con las ramas inferiores de $G_z^{(1)}$, es decir, aparece una indeterminación al calcular el límite de $G_z^{(3)}$ cuando $Q \rightarrow -1$.

Procediendo igual que en el caso anterior, si aplicamos dos veces la regla de L'Hospital podemos eliminar dicha indeterminación obteniendo

$$\lim_{Q \rightarrow -1} G_z^{(3)} = \lim_{Q \rightarrow -1} \frac{H_1 \cosh(\alpha t) + H_2 \sinh(\alpha t) + H_3}{H_4 \cosh(\alpha t) + H_5 \sinh(\alpha t) + H_6}$$

donde

$$H_1 = 2P(P - 2(Q + 1))[1 + 2Q(P - 2 - 2Q)t^2],$$

$$H_2 = 4\beta P(P - 2 - 3Q)t,$$

$$H_3 = 8\beta^2 + 2[3(2 - P) + 8Q][P - 2(Q + 1)],$$

$$H_4 = 2P(P - 2(Q + 1))[1 + 2Q(P - 2 - 2Q)t^2],$$

$$H_5 = 4\beta P(P - 2 - 3Q)t,$$

$$H_6 = 2(P - 2(Q + 1))(P - 2).$$

De esta forma tenemos que

$$\lim_{Q \rightarrow -1} G_z^{(3)} = \frac{1 + P + P^2 t^2}{1 - P + P^2 t^2} = G_z^{(2)},$$

y por lo tanto, resulta que las expresiones (3.5) tienen como límite (3.6) cuando $Q \rightarrow -1$.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos concluir diciendo que la evolución de las órbitas heteroclínicas en la región 6 a las órbitas homoclínicas en la región 4' se produce de manera continua en función del parámetro Q .

Antes de terminar esta sección podemos estudiar el límite de las expresiones (3.5) cuando $Q \rightarrow P - 1$, es decir, cuando tiene lugar la segunda bifurcación. En este caso, el cálculo de estos límites es mucho más sencillo puesto que no aparecen indeterminaciones, obteniéndose que $(G_x(t), G_y(t), G_z(t)) \rightarrow (0, 0, 1)$ cuando $Q \rightarrow P - 1$. Esto se puede ver en la figura 3.2, en la cual se aprecia cómo las dos trayectorias homoclínicas existentes en la región 4' desaparecen al colapsar en el equilibrio E_{3+} cuando $Q = P - 1$.

3.4 Función de Melnikov

Una vez conocidas las expresiones de las órbitas asintóticas para el sistema no perturbado, es posible determinar la existencia de comportamiento caótico para el sistema perturbado

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(a_{10}G_x^2 + a_2G_y^2 + a_3G_z^2) - a_3h_zG_z + \frac{1}{2}G_x^2\epsilon \cos \nu t$$

Mediante las transformaciones de equivalencia realizadas en la sección 3.1 el hamiltoniano (3.1) se puede expresar como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' &= \mathcal{H}_0'' + \frac{\epsilon V}{a_3 - a_2} = \mathcal{H}_0'' + \epsilon V' \\ &= \frac{1}{2}(G_z^2 + PG_x^2) + QG_z + \frac{\epsilon}{2(a_3 - a_2)}G_x^2 \cos(\nu t),\end{aligned}\tag{3.8}$$

donde P y Q vienen dadas por las ecuaciones (3.2).

La existencia de comportamiento caótico como consecuencia de intersecciones homoclínicas (y heteroclínicas) puede deducirse a partir de la función de Melnikov, que para el sistema (3.8) viene dada por

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{H}_0''(G_i(t - t_0)); \epsilon V'(G_i(t - t_0), t)\} dt \quad i = x, y, z.$$

Teniendo en cuenta los paréntesis de Poisson entre las variables G_x, G_y, G_z obtenemos para la función de Melnikov

$$M(t_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{a_3 - a_2} (G_x G_y G_z - Q G_x G_y) \cos \nu t dt.\tag{3.9}$$

donde (G_x, G_y, G_z) son las componentes correspondientes a las órbitas asintóticas del sistema \mathcal{H}_0'' .

Ya hemos visto que dependiendo del valor del momento angular relativo h_z , o lo que es lo mismo del valor de Q , \mathcal{H}_0'' presenta distintos tipos de órbitas asintóticas. Así, para valores de $Q \in (-1, 0]$, existen cuatro trayectorias heteroclínicas que conectan los puntos $E_{2\pm}$, mientras que para $Q \in (P - 1, -1]$, sólo hay dos trayectorias homoclínicas asociadas al equilibrio E_{3+} . Además debemos tener en cuenta que para $Q = -1$, cuando tiene lugar la primera bifurcación, existen dos trayectorias homoclínicas especiales dadas por las ecuaciones (3.6). Por este motivo la función de Melnikov $M(t_0)$ deber ser evaluada para los distintos valores de Q , es decir, para $Q \in (-1, 0]$, para $Q = -1$, y para $Q \in (P - 1, -1)$.

3.4.1 Función de Melnikov para $Q = -1$

Debido a la mayor sencillez de las expresiones de las soluciones de las separatrices, calcularemos primero $M(t_0)$ para $Q = -1$. En este caso concreto, como separatrices tenemos las trayectorias homoclínicas definidas por las ecuaciones (3.6).

Sustituyendo esas expresiones de (G_x, G_y, G_z) en la función de Melnikov (3.9), tenemos que

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \frac{4\epsilon P^2}{a_2 - a_3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(t - t_0)[1 + P + P^2(t - t_0)^2]}{[1 - P + P^2(t - t_0)^2]^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t - t_0}{[1 - P + P^2(t - t_0)^2]^2} \right] \cos(\nu t) dt \\ &= \frac{8\epsilon P^2}{a_2 - a_3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t - t_0)[1 + P^2(t - t_0)^2]}{[1 - P + P^2(t - t_0)^2]^3} \cos(\nu t) dt. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable

$$\tau = t - t_0; \quad d\tau = dt,$$

resulta

$$M(t_0) = \frac{8\epsilon P^2}{a_2 - a_3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(1 + P^2\tau^2)}{(1 - P + P^2\tau^2)^3} \cos[\nu(\tau + t_0)] d\tau,$$

y desarrollando $\cos[\nu(\tau + t_0)]$ queda

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \frac{8\epsilon P^2}{a_2 - a_3} \left\{ \cos(\nu t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(1 + P^2\tau^2) \cos(\nu\tau)}{(1 - P + P^2\tau^2)^3} \tau \right. \\ &\quad \left. - \sin(\nu t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(1 + P^2\tau^2) \sin(\nu\tau)}{(1 - P + P^2\tau^2)^3} d\tau \right\}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Teniendo en cuenta la paridad de las funciones que aparecen en los integrandos de (3.10), podemos escribir la función de Melnikov como

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \frac{16\epsilon P^2}{a_3 - a_2} \operatorname{sen}(\nu t_0) \int_0^{\infty} \frac{\tau(1 + P^2\tau^2) \sin(\nu\tau)}{(1 - P + P^2\tau^2)^3} d\tau \\ &= \frac{16\epsilon P^2}{a_3 - a_2} \operatorname{sen}(\nu t_0) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\tau \operatorname{sen}(\nu\tau)}{(1 - P + P^2\tau^2)^3} d\tau \right. \\ &\quad \left. + P^2 \int_0^{\infty} \frac{\tau^3 \operatorname{sen}(\nu\tau)}{(1 - P + P^2\tau^2)^3} d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando un nuevo cambio de variable

$$x = P\tau; \quad dx = P d\tau,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
M(t_0) &= \frac{16\epsilon P^2}{a_3 - a_2} \text{sen}(\nu t_0) \left\{ \frac{1}{P^2} \int_0^\infty \frac{x \sin(\frac{\nu}{P}x)}{(1 - P + x^2)^3} dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{P^2} \int_0^\infty \frac{x^3 \text{sen}(\frac{\nu}{P}x)}{(1 - P + x^2)^3} dx \right\} \\
&= \frac{16\epsilon}{a_3 - a_2} \text{sen}(\nu t_0) \left\{ - \int_0^\infty \frac{x \sin(\frac{-\nu}{P}x)}{(1 - P + x^2)^3} dx \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty \frac{x^3 \text{sen}(\frac{-\nu}{P}x)}{(1 - P + x^2)^3} dx \right\} \\
&= -\frac{16\epsilon}{a_3 - a_2} \text{sen}(\nu t_0) \{I_1 + I_2\}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Estas dos integrales I_1, I_2 , pueden resolverse aplicando el teorema de los residuos; sin embargo las encontramos en el libro de tablas de integrales de Gradshteyn (1980). La primera de ellas, I_1 , (p. 413) aparece como

$$\int_0^\infty \frac{x \text{sen}(ax)}{(b^2 + x^2)^3} dx = \frac{\pi a}{16b^3} (1 + ab) e^{-ab} \quad [a > 0, b > 0].$$

En nuestro caso, $a = -\nu/P > 0$ y $b = \sqrt{1-P} > 0$, de manera que con este resultado tenemos que

$$I_1 = -\frac{\pi\nu(P - \nu\sqrt{1-P})}{16P^2(1-P)^{3/2}} e^{\frac{\nu\sqrt{1-P}}{P}}.$$

Para la segunda integral, I_2 , (p. 429) resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{2m+1} \text{sen}(ax)}{(z + x^2)^{n+1}} dx &= \frac{(-1)^{n+m} \pi}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^m e^{-a\sqrt{z}}) \\
[a > 0, |\arg z| < \pi, 0 \leq m \leq n].
\end{aligned}$$

En este caso $a = -\nu/P > 0, m = 1, n = 2$, y $z = 1 - P$ es real, resultando

$$I_2 = -\frac{\pi\nu(3P + \nu\sqrt{1-P})}{16P^2\sqrt{1-P}} e^{\frac{\nu\sqrt{1-P}}{P}}.$$

Así pues, sustituyendo las expresiones de I_1 e I_2 en la ecuación (3.11), obtenemos que la función de Melnikov tiene la forma

$$M(t_0) = \frac{\pi\nu\epsilon(4 - 3P - \nu\sqrt{1-P})}{(a_3 - a_2)P(1-P)^{3/2}} e^{\frac{\nu\sqrt{1-P}}{P}} \text{sen}(\nu t_0).$$

Es fácil deducir de este resultado que, salvo para el valor concreto de la frecuencia de la perturbación dado por

$$\nu = \frac{4 - 3P}{\sqrt{1 - P}},$$

la función de Melnikov tiene ceros simples cuando $\nu t_0 = k\pi$ con $k = 1, 2, \dots$. Por lo tanto, la perturbación produce la aparición de herraduras de Smale, dependencia sensible de las condiciones iniciales y, en definitiva, movimiento caótico en una zona alrededor de las separatrices del sistema no perturbado.

Para el caso en que $\nu = (4 - 3P)/\sqrt{1 - P}$, no podemos asegurar que el sistema presente caos homoclínico, ya que la función de Melnikov, $M(t_0)$, no es más que el primer término del desarrollo asintótico de la distancia entre las variedades estable e inestable y, salvo que no se verifique que todos los términos del desarrollo se anulen para dicho valor de ν , nada puede concluirse.

No obstante, dado el carácter puntual de esta situación, no creemos conveniente el desarrollar la teoría de Melnikov para órdenes superiores, toda vez que la complejidad de las funciones va en aumento con el orden (Liu y Gu, 1990) y en algunos casos es preciso desarrollar métodos alternativos que permitan simplificar las expresiones que van apareciendo (Dankowicz, 1996, 1997). Además, el valor ν es lo suficientemente alto ($\nu > 4$ para $P < 0$) como para poder considerarlo cerca del límite integrable y, por lo tanto, la zona de movimiento caótico, de existir, será exponencialmente pequeña.

3.4.2 Función de Melnikov para $Q \in (-1, 0]$

En esta región, las separatrices son las trayectorias heteroclínicas definidas por las ecuaciones (3.5). Sustituyendo estas expresiones de (G_x, G_y, G_z) en la función de Melnikov (3.9), tenemos que

$$M(t_0) = \frac{\epsilon K_3 \alpha^3}{(a_2 - a_3) P^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sinh[\alpha(t - t_0)](K_1 \cosh[\alpha(t - t_0)] + K_2)}{[K_3 \cosh[\alpha(t - t_0)] + K_4]^3} - \frac{Q \sinh[\alpha(t - t_0)]}{[K_3 \cosh[\alpha(t - t_0)] + K_4]^2} \right] \cos(\nu t) dt.$$

Mediante el cambio de variable

$$\begin{cases} \tau = \alpha(t - t_0) \\ d\tau = \alpha dt \end{cases}$$

queda

$$M(t_0) = \frac{\epsilon K_3 \alpha^2}{(a_2 - a_3) P^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sinh(\tau)(K_1 \cosh(\tau) + K_2)}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^3} - \frac{Q \sinh(\tau)}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^2} \right] \cos\left[\nu\left(\frac{\tau}{\alpha} + t_0\right)\right] d\tau,$$

y desarrollando $\cos\left[\nu\left(\frac{\tau}{\alpha} + t_0\right)\right]$ obtenemos

$$\begin{aligned} M(t_0) = & \frac{\epsilon K_3 \alpha^2}{(a_2 - a_3) P^2} \left\{ \cos(\nu t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\nu}{\alpha}\tau\right) \sinh(\tau)[K_1 \cosh(\tau) + K_2]}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^3} d\tau \right. \\ & - \sin(\nu t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\nu}{\alpha}\tau\right) \sinh(\tau)[K_1 \cosh(\tau) + K_2]}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^3} d\tau \\ & - Q \cos(\nu t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\nu}{\alpha}\tau\right) \sinh(\tau)}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^2} d\tau \\ & \left. + Q \sin(\nu t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\nu}{\alpha}\tau\right) \sinh(\tau)}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^2} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Teniendo en cuenta la paridad o imparidad de las funciones $\sin(\nu\tau/\alpha)$, $\sinh(\tau)$, $\cos(\nu\tau/\alpha)$ y $\cosh(\tau)$ podemos deducir que la primera y la tercera integrales de (3.12) son nulas ya que sus integrandos son funciones impares. Por otro lado, debido a que los integrandos de la segunda y cuarta integrales de (3.12) son funciones pares, podemos expresar la función de Melnikov como

$$\begin{aligned} M(t_0) = & \frac{2\epsilon K_3 \alpha^2}{(a_3 - a_2) P^2} \sin(\nu t_0) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\nu}{\alpha}\tau\right) \sinh(\tau)[K_1 \cosh(\tau) + K_2]}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^3} d\tau \right. \\ & \left. - Q \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\nu}{\alpha}\tau\right) \sinh(\tau)}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^2} d\tau \right\} \\ = & \frac{2\epsilon K_3 \alpha^2}{(a_3 - a_2) P^2} \sin(\nu t_0) \{I_1 - QI_2\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La integral I_1 puede resolverse por partes según

$$\begin{aligned} u = \sin\left(\frac{\nu}{\alpha}\tau\right), \quad dv = \frac{\sinh(\tau)[K_1 \cosh(\tau) + K_2]}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^3} d\tau, \\ du = \frac{\nu}{\alpha} \cos\left(\frac{\nu}{\alpha}\tau\right) d\tau, \quad v = \int_0^{\infty} \frac{\sinh(\tau)[K_1 \cosh(\tau) + K_2]}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^3} d\tau. \end{aligned}$$

La expresión final para v resulta del siguiente cambio de variable,

$$\begin{cases} z = K_3 \cosh(\tau) + K_4 \\ dz = K_3 \sinh(\tau) d\tau \end{cases}$$

quedando

$$v = \frac{1}{K_3^2} \left[\frac{K_1 K_4 - K_2 K_3}{2(K_3 \cosh(\tau) + K_4)^2} - \frac{K_1}{K_3 \cosh(\tau) + K_4} \right].$$

Por lo tanto, I_1 queda como

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{\sin(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{K_3^2} \left(\frac{K_1 K_4 - K_2 K_3}{2(K_3 \cosh(\tau) + K_4)^2} - \frac{K_1}{K_3 \cosh(\tau) + K_4} \right) \right]_0^\infty \\ &\quad - \frac{\nu(K_1 K_4 - K_2 K_3)}{2\alpha K_3^2} \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^2} d\tau \\ &\quad + \frac{\nu K_1}{\alpha K_3^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{K_3 \cosh(\tau) + K_4} \\ &= \frac{\nu K_1}{\alpha K_3^2} \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{K_3 \cosh(\tau) + K_4} d\tau \\ &\quad - \frac{\nu(K_1 K_4 - K_2 K_3)}{2\alpha K_3^2} \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^2} d\tau. \end{aligned}$$

Por otro lado la integral I_2 también se puede resolver por partes según

$$\begin{aligned} u &= \sin\left(\frac{\nu}{\alpha}\tau\right), & dv &= \frac{\sinh(\tau)[K_1 \cosh(\tau) + K_2]}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^2} d\tau \\ du &= \frac{\nu}{\alpha} \cos\left(\frac{\nu}{\alpha}\tau\right) d\tau, & v &= \int_0^\infty \frac{\sinh(\tau)[K_1 \cosh(\tau) + K_2]}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^2} d\tau, \end{aligned}$$

y mediante el mismo cambio de variable usado anteriormente, tenemos que

$$v = -\frac{1}{K_3(K_3 \cosh(\tau) + K_4)}.$$

De este modo, I_2 resulta ser

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[-\frac{\sin(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{K_3(K_3 \cosh(\tau) + K_4)} \right]_0^\infty + \frac{\nu}{\alpha K_3} \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{K_3 \cosh(\tau) + K_4} d\tau \\ &= \frac{\nu}{\alpha K_3} \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{K_3 \cosh(\tau) + K_4} d\tau. \end{aligned}$$

Por consiguiente, podemos escribir la función de Melnikov como

$$\begin{aligned}
M(t_0) &= \frac{2\epsilon K_3 \alpha^2}{(a_3 - a_2) P^2} \operatorname{sen}(\nu t_0) \left\{ -\frac{\nu(K_1 K_4 - K_2 K_3)}{2\alpha K_3^2} \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^2} d\tau \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\nu K_1}{\alpha K_3^2} - \frac{\nu Q}{\alpha K_3} \right) \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{K_3 \cosh(\tau) + K_4} d\tau \right\} \\
&= \frac{2\alpha\epsilon\nu}{(a_3 - a_2) K_3 P^2} \operatorname{sen}(\nu t_0) \left\{ (K_1 - QK_3) \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{K_3 \cosh(\tau) + K_4} d\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{K_1 K_4 - K_2 K_3}{2} \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^2} d\tau \right\} \\
&= \frac{2\alpha\epsilon\nu}{(a_3 - a_2) K_3 P^2} \operatorname{sen}(\nu t_0) \left[(K_1 - QK_3) I_3 - \frac{K_1 K_4 - K_2 K_3}{2} I_4 \right],
\end{aligned}$$

y recordando que $K_1 = -QK_3$, $K_2 = 1$ y $K_4 = -Q$ tenemos que

$$M(t_0) = \frac{2\alpha\epsilon\nu}{(a_2 - a_3) P^2} \left[2QI_3 + \frac{\alpha^2}{2P} I_4 \right] \operatorname{sen}(\nu t_0). \quad (3.14)$$

Las integrales I_3 e I_4 pueden resolverse mediante el conocido teorema de los residuos (e.g. Rudin, 1988). Para ello basta considerar las integrales curvilíneas de la forma

$$\oint \frac{e^{iaz}}{[b \cosh(\eta z) + c]^n} dz \quad \text{con} \quad b \cosh(\eta z) + c \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

sobre un recinto de integración como el que aparece en la figura 3.3, con $R > \operatorname{Re} \frac{\operatorname{Arg} \cosh(c/b)}{\eta}$.

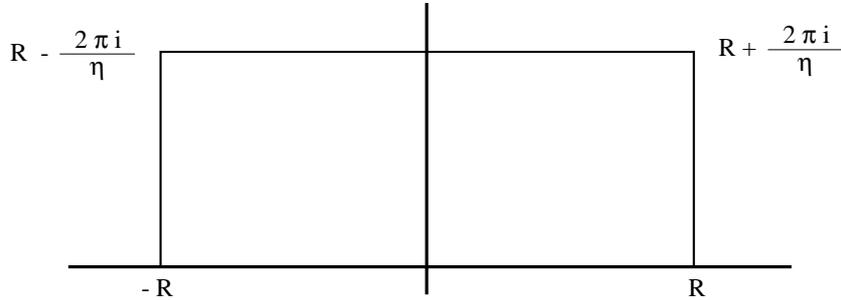


Figura 3.3: Recinto de integración empleado en el cálculo de las integrales I_3 e I_4 .

En este recinto el integrando presenta dos polos

$$\frac{\pi i - \operatorname{Arg} \cosh(c/b)}{\eta} \quad \frac{\pi i + \operatorname{Arg} \cosh(c/b)}{\eta}$$

en donde los residuos pueden ser calculados por medio de la fórmula de Cauchy

$$\operatorname{res}[f(z)]|_{z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)].$$

Mediante este procedimiento es fácil obtener que para $n = 1$

$$\operatorname{res}[f(z)]|_{z_0} = \frac{e^{iaz_0}}{b \eta \operatorname{senh}(\eta z_0)}$$

y para $n = 2$

$$\operatorname{res}[f(z)]|_{z_0} = \frac{a i e^{iaz_0}}{b^2 \eta^2 \operatorname{senh}^2(\eta z_0)} - \frac{e^{iaz_0} \operatorname{cosh}(\eta z_0)}{b^2 \eta \operatorname{senh}^3(\eta z_0)}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} & \oint \frac{e^{iaz}}{[b \operatorname{cosh}(\eta z) + c]^n} dz = \\ &= \int_{-R}^R \left[\frac{e^{iaz}}{[b \operatorname{cosh}(\eta z) + c]^n} - \frac{e^{ia(z+2\pi i/\eta)}}{[b \operatorname{cosh}[\eta(z+2\pi i/\eta)] + c]^n} \right] dz = \\ &= (1 - e^{-\frac{2\pi a}{\eta}}) \int_{-R}^R \frac{e^{iaz}}{[b \operatorname{cosh}(\eta z) + c]^n} dz = \\ &= 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left[\frac{\pi i - \operatorname{Arg} \operatorname{cosh}(c/b)}{\eta}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\pi i + \operatorname{Arg} \operatorname{cosh}(c/b)}{\eta}\right] \right\}, \end{aligned}$$

resulta para $b > |c|$

$$\begin{aligned} n = 1 \quad & \int_0^\infty \frac{\cos(az)}{b \operatorname{cosh}(\eta z) + c} dz = \frac{\pi \operatorname{senh}\left[\frac{a}{\eta} \arccos(c/b)\right]}{\eta \sqrt{b^2 - c^2} \operatorname{senh}(a\pi/\eta)} \\ n = 2 \quad & \int_0^\infty \frac{\cos(az)}{[b \operatorname{cosh}(\eta z) + c]^2} dz = \\ &= \pi \left\{ \frac{a \sqrt{b^2 - c^2} \operatorname{cosh}\left[\frac{a}{\eta} \arccos(c/b)\right] - \eta c \operatorname{senh}\left[\frac{a}{\eta} \arccos(c/b)\right]}{\eta^2 (b^2 - c^2)^{3/2} \operatorname{senh}(a\pi/\eta)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

en el caso en que $|b| > |c|$ y $b < 0$

$$\begin{aligned} n = 1 \quad & \int_0^\infty \frac{\cos(az)}{b \operatorname{cosh}(\eta z) + c} dz = -\frac{\pi \operatorname{senh}\left[\frac{a}{\eta} \arccos(c/b)\right]}{\eta \sqrt{b^2 - c^2} \operatorname{senh}(a\pi/\eta)} \\ n = 2 \quad & \int_0^\infty \frac{\cos(az)}{[b \operatorname{cosh}(\eta z) + c]^2} dz = \\ &= \pi \left\{ \frac{a \sqrt{b^2 - c^2} \operatorname{cosh}\left[\frac{a}{\eta} \arccos(c/b)\right] + \eta c \operatorname{senh}\left[\frac{a}{\eta} \arccos(c/b)\right]}{\eta^2 (b^2 - c^2)^{3/2} \operatorname{senh}(a\pi/\eta)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

y para $c < b < 0$

$$\begin{aligned}
 n = 1 \quad & \int_0^\infty \frac{\cos(az)}{b \cosh(\eta z) + c} dz = -\frac{\pi \operatorname{sen}\left[\frac{a}{\eta} \operatorname{arccosh}(c/b)\right]}{\eta \sqrt{c^2 - b^2} \operatorname{senh}(a\pi/\eta)} \\
 n = 2 \quad & \int_0^\infty \frac{\cos(az)}{[b \cosh(\eta z) + c]^2} dz = \\
 & = -\pi \left\{ \frac{a \sqrt{c^2 - b^2} \cosh\left[\frac{a}{\eta} \operatorname{arccos}(c/b)\right] + \eta c \operatorname{sen}\left[\frac{a}{\eta} \operatorname{arccosh}(c/b)\right]}{\eta^2 (c^2 - b^2)^{3/2} \operatorname{senh}(a\pi/\eta)} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

En el caso concreto de las integrales I_3 e I_4 , tenemos que $a = \nu/\alpha$, $b = K_3$, $c = K_4 = -Q > 0$, y $\eta = 1$. Debido a que $b = K_3$ puede ser positivo o negativo según consideremos las ramas superiores o inferiores de las trayectorias heteroclínicas, debemos calcular por separado las integrales I_3 e I_4 correspondientes a cada rama.

Así para las ramas superiores, como $K_3 > K_4 > 0$, de las ecuaciones (3.15) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{\pi \operatorname{senh}\left[\frac{\nu}{\alpha} \operatorname{arccos}\left(\frac{-Q}{K_3}\right)\right]}{\sqrt{K_3^2 - Q^2} \operatorname{senh}\left(\frac{\nu\pi}{\alpha}\right)} \\
 I_4 &= \pi \left\{ \frac{\frac{\nu}{\alpha} \sqrt{K_3^2 - Q^2} \cosh\left[\frac{\nu}{\alpha} \operatorname{arccos}\left(\frac{-Q}{K_3}\right)\right] + Q \operatorname{senh}\left[\frac{\nu}{\alpha} \operatorname{arccos}\left(\frac{-Q}{K_3}\right)\right]}{(K_3^2 - Q^2)^{3/2} \operatorname{senh}\left(\frac{\nu\pi}{\alpha}\right)} \right\},
 \end{aligned}$$

con lo cual, de la ecuación (3.14) resulta

$$\begin{aligned}
 M(t_0) &= \frac{2\pi\alpha\varepsilon\nu}{(a_2 - a_3)P^2} \operatorname{sen}(\nu t_0) \left\{ \frac{2Q \operatorname{senh}\left[\frac{\nu}{\alpha} \operatorname{arccos}\left(\frac{-Q}{K_3}\right)\right]}{\sqrt{K_3^2 - Q^2} \operatorname{senh}\left(\frac{\nu\pi}{\alpha}\right)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha^2}{2P} \left[\frac{\frac{\nu}{\alpha} \sqrt{K_3^2 - Q^2} \cosh\left[\frac{\nu}{\alpha} \operatorname{arccos}\left(\frac{-Q}{K_3}\right)\right] + Q \operatorname{senh}\left[\frac{\nu}{\alpha} \operatorname{arccos}\left(\frac{-Q}{K_3}\right)\right]}{(K_3^2 - Q^2)^{3/2} \operatorname{senh}\left(\frac{\nu\pi}{\alpha}\right)} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Para las ramas inferiores, como $|K_3| > K_4 > 0$, de las ecuaciones (3.16) tenemos que

$$\begin{aligned}
 I_3 &= -\frac{\pi \operatorname{senh}\left[\frac{\nu}{\alpha} \operatorname{arccos}\left(\frac{-Q}{K_3}\right)\right]}{\sqrt{K_3^2 - Q^2} \operatorname{senh}\left(\frac{\nu\pi}{\alpha}\right)} \\
 I_4 &= \pi \left\{ \frac{\frac{\nu}{\alpha} \sqrt{K_3^2 - Q^2} \cosh\left[\frac{\nu}{\alpha} \operatorname{arccos}\left(\frac{-Q}{K_3}\right)\right] - Q \operatorname{senh}\left[\frac{\nu}{\alpha} \operatorname{arccos}\left(\frac{-Q}{K_3}\right)\right]}{(K_3^2 - Q^2)^{3/2} \operatorname{senh}\left(\frac{\nu\pi}{\alpha}\right)} \right\},
 \end{aligned}$$

por lo tanto, sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.14) obtenemos

$$M(t_0) = \frac{2\pi\alpha\epsilon\nu}{(a_2 - a_3)P^2} \operatorname{sen}(\nu t_0) \left\{ -\frac{2Q \operatorname{senh}\left[\frac{\nu}{\alpha} \arccos\left(\frac{-Q}{K_3}\right)\right]}{\sqrt{K_3^2 - Q^2} \operatorname{senh}\left(\frac{\nu\pi}{\alpha}\right)} + \frac{\alpha^2}{2P} \left[\frac{\frac{\nu}{\alpha} \sqrt{K_3^2 - Q^2} \cosh\left[\frac{\nu}{\alpha} \arccos\left(\frac{-Q}{K_3}\right)\right] - Q \operatorname{senh}\left[\frac{\nu}{\alpha} \arccos\left(\frac{-Q}{K_3}\right)\right]}{(K_3^2 - Q^2)^{3/2} \operatorname{senh}\left(\frac{\nu\pi}{\alpha}\right)} \right] \right\}.$$

A pesar de haber obtenido una expresión explícita para la función de Melnikov, no resulta fácil deducir de ésta en qué condiciones se puede asegurar la existencia de ceros simples, y por consiguiente de caos heteroclínico. Para el análisis de $M(t_0)$ podemos proceder de otro modo, teniendo en cuenta el comportamiento funcional del integrando de $M(t_0)$.

Para ello, podemos escribir primero la función de Melnikov (3.13) como

$$M(t_0) = \frac{2\epsilon K_3 \alpha^2}{(a_3 - a_2)P^2} \operatorname{sen}(\nu t_0) \int_0^\infty f(\tau) d\tau \quad (3.18)$$

con el integrando

$$f(\tau) = \operatorname{sen}\left(\nu \frac{\tau}{\alpha}\right) \left[\frac{\operatorname{senh}(\tau)[K_1 \cosh(\tau) + K_2]}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^3} - \frac{Q \operatorname{senh}(\tau)}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^2} \right].$$

En el estudio que se va a realizar a continuación de la función $f(\tau)$, sólo vamos a considerar las ramas superiores de las trayectorias heteroclínicas, es decir, para $K_3 > 0$. Para las ramas inferiores, $K_3 < 0$, podría hacerse un estudio análogo.

En la figura 3.4 se muestran tres representaciones gráficas del integrando $f(\tau)$ para tres valores diferentes de la frecuencia ν de la perturbación y con los mismos valores de los parámetros $P = -1$ y $Q = -0.5$. Lógicamente, estos valores de P y Q corresponden a la zona 6 del plano (P, Q) , que es la que estamos considerando ahora.

De la observación de esta figura 3.4, nos resulta fácil concluir que para valores pequeños de la frecuencia, ($\nu \leq 1$) el integrando $f(\tau)$ es mayoritariamente positivo, antes de aproximarse a cero. Esto se debe a que para esos valores de la frecuencia, la función $\operatorname{sen}(\nu\tau/\alpha)$ varía muy poco antes de que la otra parte de $f(\tau)$ se haga despreciable al tender asintóticamente a cero para $\tau \rightarrow \infty$.

Para ese rango de frecuencias ($\nu \leq 1$), por lo tanto, el integrando es básicamente positivo, por consiguiente también es positiva la correspondiente integral que aparece en (3.18). Y en definitiva, en esas condiciones, la función de Melnikov

$M(t_0)$ tiene ceros simples para $\nu t_0 = k\pi$ con $k = 0, 1, 2, \dots$. Esto significa que la perturbación provoca la existencia de herraduras de Smale alrededor de las separatrices del giróstato no perturbado. Así pues, dentro de la región 6 del plano (P, Q) y para valores de $(\nu \leq 1)$ volvemos a encontrar en la dinámica del sistema la dependencia sensible de las condiciones iniciales y, por lo tanto, movimiento caótico en torno a las separatrices no perturbadas.

Por otra parte, como podemos observar en la gráfica c) de la figura 3.4, para valores de $\nu > 2$ tenemos que el integrando $f(\tau)$ oscila varias veces entre valores positivos y negativos antes de hacerse despreciable al tender asintóticamente a cero. Este comportamiento se debe a que para esos valores de la frecuencia, la función $\sin(\nu\tau/\alpha)$ oscila entre valores positivos y negativos antes de que la otra parte del integrando se haga despreciable.

Cuanto mayor es el valor de ν , por lo tanto, más rápida es la oscilación de $f(\tau)$ entre valores positivos y negativos, y por ello menor y más despreciable es el valor de la correspondiente integral que aparece en (3.18). En consecuencia, no podemos decir que $M(t_0)$ tenga ceros simples en el rango de altas frecuencias, y por consiguiente la perturbación puede no producir herraduras de Smale ni movimiento caótico alrededor de las separatrices del sistema no perturbado.

Este resultado lo podemos confirmar numéricamente mediante la generación de superficies de sección de Poincaré temporales dentro del espacio de fases tetradi-mensional extendido (G_x, G_y, G_z, t) . En la figura 3.5 mostramos tres superficies de sección que corresponden a tres valores distintos de la frecuencia ν de la perturbación (0.2, 0.6 y 2.0) y a un mismo valor de la amplitud $\epsilon = 0.01$. Los parámetros P y Q tienen los mismos valores en las tres superficies de sección, $P = -1$ y $Q = -0.5$, que pertenecen a la región 6, y son iguales a los valores de la figura 3.4 anterior.

Como era de esperar, la figura 3.5 confirma el resultado que acabamos de comentar al estudiar la función de Melnikov $M(t_0)$ en dicha región 6, esto es, al aumentar la frecuencia ν de la perturbación disminuye la banda de estocasticidad alrededor de la separatriz no perturbada.

3.4.3 Función de Melnikov para $Q \in (P - 1, -1)$

Después de estudiar la función de Melnikov dentro de la zona 6 del plano (P, Q) , vamos a ahora a obtener la expresión de la función de Melnikov en la zona 4',

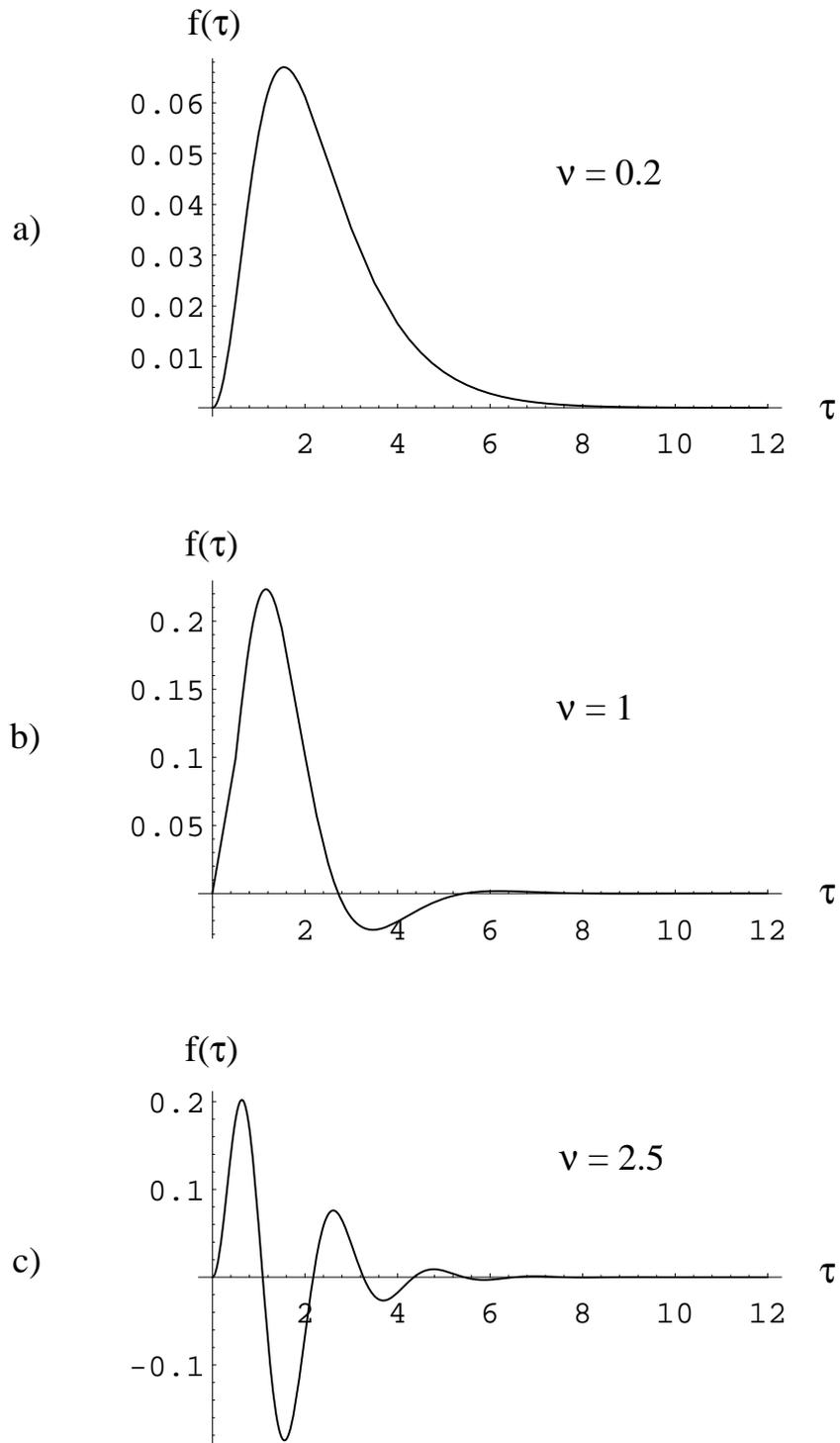


Figura 3.4: Representaciones gráficas del integrando $f(\tau)$ para tres valores distintos de la frecuencia ν de la perturbación. $P = -1$ y $Q = -0.5$.

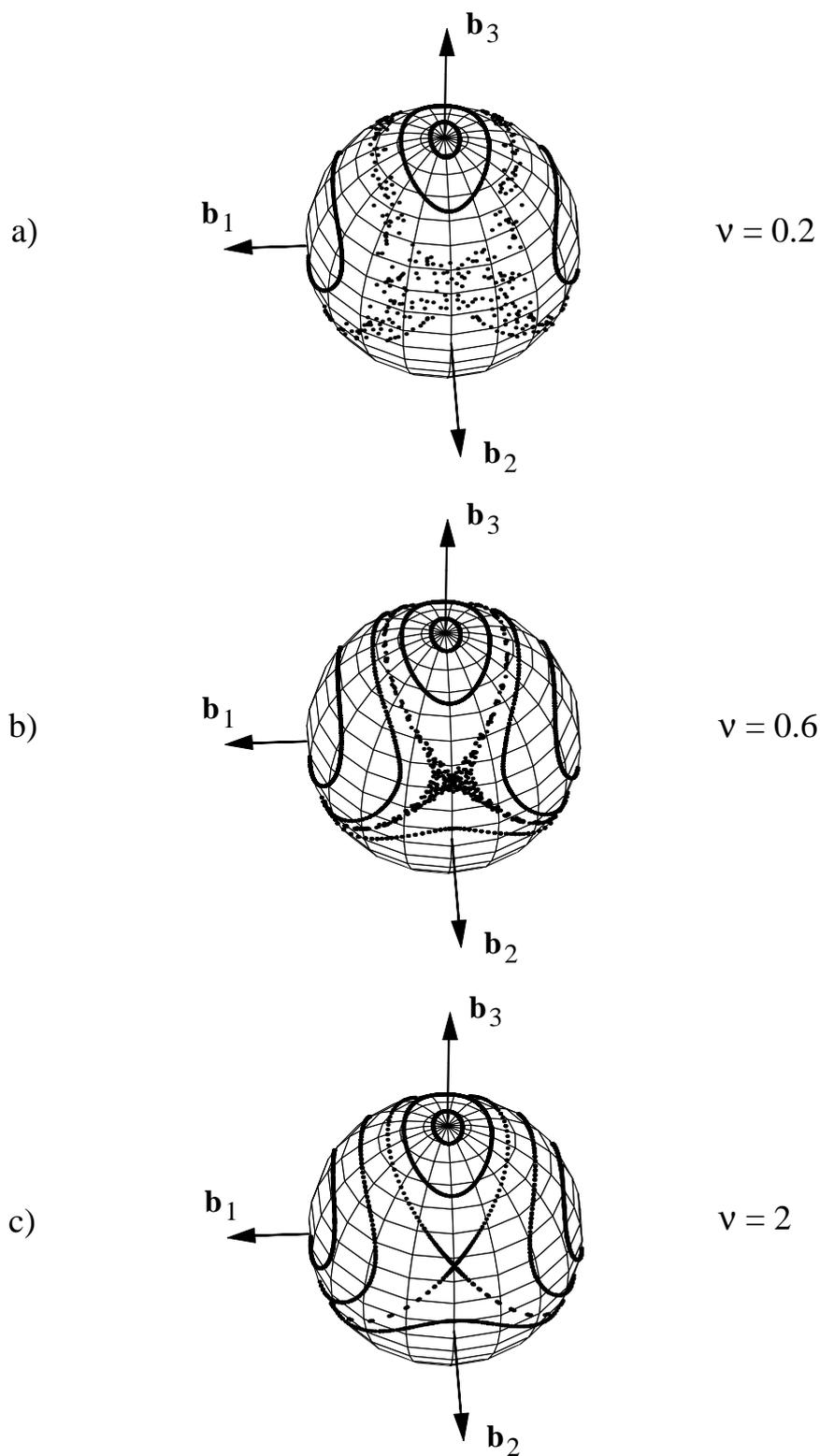


Figura 3.5: Superficies de sección de Poincaré para tres valores distintos de la frecuencia ν de la perturbación, y una misma amplitud $\epsilon = 0.01$, dentro de la región 6: $P = -1$, $(a_{10} = 0.1, a_2 = 0.2, a_3 = 0.3)$, $Q = -0.5$ ($h_z = 0.16667$).

entre las dos bifurcaciones, esto es, para $Q \in (P - 1, -1)$. Dentro de esta región $4'$, como separatrices del espacio de fases existen dos trayectorias homoclínicas, definidas por las ecuaciones (3.7), que comienzan y terminan en el equilibrio E_{3+} . Si sustituimos esas expresiones en la ecuación (3.9), resulta

$$M(t_0) = \frac{2Q\beta^3\epsilon}{a_2 - a_3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-Q \frac{\cosh[\frac{\beta}{2}(t - t_0)] \sinh[\frac{\beta}{2}(t - t_0)]}{[L_3 \cosh[\beta(t - t_0)] + L_4]^2} \right. \\ \left. + \frac{\cosh[\frac{\beta}{2}(t - t_0)] \sinh[\frac{\beta}{2}(t - t_0)][L_1 \cosh[\beta(t - t_0)] + L_2]}{[L_3 \cosh[\beta(t - t_0)] + L_4]^3} \right] \cos(\nu t) dt.$$

Aplicando la relación $\sinh(A) = 2 \sinh(A/2) \cosh(A/2)$ se obtiene

$$M(t_0) = \frac{Q\beta^3\epsilon}{a_2 - a_3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sinh[\beta(t - t_0)][L_1 \cosh[\beta(t - t_0)] + L_2]}{[L_3 \cosh[\beta(t - t_0)] + L_4]^3} \right. \\ \left. - Q \frac{\sinh[\beta(t - t_0)]}{[L_3 \cosh[\beta(t - t_0)] + L_4]^2} \right] \cos(\nu t) dt.$$

Si realizamos ahora el cambio de variable

$$\begin{cases} \tau = \beta(t - t_0) \\ d\tau = \beta dt \end{cases}$$

tenemos que

$$M(t_0) = \frac{Q\beta^2\epsilon}{a_2 - a_3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sinh(\tau)[L_1 \cosh(\tau) + L_2]}{[L_3 \cosh(\tau) + L_4]^3} \right. \\ \left. - \frac{Q \sinh(\tau)}{[L_3 \cosh(\tau) + L_4]^2} \right] \cos[\nu(\frac{\tau}{\beta} + t_0)] d\tau.$$

Teniendo en cuenta el desarrollo de $\cos[\nu(\frac{\tau}{\beta} + t_0)]$ y la paridad o imparidad de las funciones $\sin(\nu\tau/\beta)$, $\sinh(\tau)$, $\cos(\nu\tau/\beta)$ y $\cosh(\tau)$, resulta

$$M(t_0) = \frac{2Q\beta^2\epsilon}{a_3 - a_2} \sin(\nu t_0) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sin(\frac{\nu}{\beta}\tau) \sinh(\tau)[L_1 \cosh(\tau) + L_2]}{[L_3 \cosh(\tau) + L_4]^3} d\tau \right. \\ \left. - Q \int_0^{\infty} \frac{\sin(\frac{\nu}{\beta}\tau) \sinh(\tau)}{[L_3 \cosh(\tau) + L_4]^2} d\tau \right\}. \quad (3.19)$$

La ecuación (3.19) tienen la misma forma que la expresión que aparece en la ecuación (3.13). Por lo tanto, siguiendo el mismo procedimiento utilizado en la

subsección anterior, se llega a que

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \frac{2\beta\epsilon\nu}{(a_3 - a_2)P} \operatorname{sen}(\nu t_0) \left[(1 - Q) \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\beta}\tau)}{L_3 \cosh(\tau) + L_4} d\tau \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{L_4 - L_2}{2} \right) \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\beta}\tau)}{[L_3 \cosh(\tau) + L_4]^2} d\tau \right] \\ &= \frac{2\beta\epsilon\nu}{(a_3 - a_2)P} \left[(1 - Q)I_3 - \frac{\beta^2}{2} I_4 \right] \operatorname{sen}(\nu t_0). \end{aligned}$$

En este caso, y aunque L_4 puede ser positivo o negativo, como $L_3 > |L_4|$, las integrales I_3 e I_4 pueden resolverse haciendo uso de las ecuaciones (3.15) con $a = \nu/\beta, b = L_3, c = L_4$ y $\eta = 1$, obteniéndose finalmente para la función de Melnikov

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \frac{2\pi\beta\epsilon\nu}{(a_3 - a_2)P} \operatorname{sen}(\nu t_0) \left\{ \frac{(1 - Q) \operatorname{senh}\left[\frac{\nu}{\beta} \arccos\left(\frac{L_4}{L_3}\right)\right]}{\sqrt{L_3^2 - L_4^2} \operatorname{senh}\left(\frac{\nu\pi}{\beta}\right)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta^2}{2} \left[\frac{\frac{\nu}{\beta} \sqrt{L_3^2 - L_4^2} \cosh\left[\frac{\nu}{\beta} \arccos\left(\frac{L_4}{L_3}\right)\right] - L_4 \operatorname{senh}\left[\frac{\nu}{\beta} \arccos\left(\frac{L_4}{L_3}\right)\right]}{(L_3^2 - L_4^2)^{3/2} \operatorname{senh}\left(\frac{\nu\pi}{\beta}\right)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como ya comentamos al estudiar la función de Melnikov en la región 6, debido a la complejidad de la fórmula (3.20) resulta difícil determinar la existencia de ceros simples en $M(t_0)$, y por tanto, la existencia de caos homoclínico. Por esta razón, vamos a recurrir a la misma técnica que hemos empleado anteriormente para analizar el valor de la función de Melnikov. Esto es, vamos a agrupar las integrales de la ecuación (3.19) en una sola, y estudiaremos gráficamente su integrando para tratar de obtener alguna información sobre $M(t_0)$ en la región 4' del plano (P, Q) . En este caso, $M(t_0)$ puede expresarse como

$$M(t_0) = \frac{2Q\beta^2\epsilon}{a_3 - a_2} \operatorname{sen}(\nu t_0) \int_0^\infty g(\tau) d\tau \quad (3.21)$$

donde el integrando $g(\tau)$ es

$$g(\tau) = \operatorname{sen}\left(\frac{\nu}{\beta}\tau\right) \left[\frac{\operatorname{senh}(\tau)[L_1 \cosh(\tau) + L_2]}{[L_3 \cosh(\tau) + L_4]^3} - \frac{Q \operatorname{senh}(\tau)}{[L_3 \cosh(\tau) + L_4]^2} \right].$$

En la figura 3.6 aparecen tres gráficas del integrando $g(\tau)$ para tres valores distintos de la frecuencia ν de la perturbación. Las tres gráficas corresponden a

los mismos valores de los parámetros $P = -1$ y $Q = -1.5$, valores que pertenecen a la región 4' del plano (P, Q) .

De la simple comparación de las figura 3.4 y 3.6 resulta evidente la gran similitud entre ambas. Por ello, los comentarios que hemos hecho sobre la figura 3.4 también son aplicables en este caso.

Así, para valores de $\nu \leq 1$, el integrando $g(\tau)$ es predominantemente positivo antes de tender asintóticamente a cero para $\tau \rightarrow \infty$. Por lo tanto, la integral que aparece en (3.21) también es positiva. Por consiguiente, en este rango de frecuencias ($\nu \leq 1$), la función de Melnikov tiene ceros simples para $\nu t_0 = k\pi$ con $k = 0, 1, 2, \dots$. En definitiva, llegamos a la conclusión de que, en la región 4' y para valores ($\nu \leq 1$), la dinámica del giróstato perturbado exhibe dependencia sensible de las condiciones iniciales, y por ello, hay comportamiento caótico alrededor de las separatrices no perturbadas.

Por otro lado, como se puede apreciar en la gráfica c) de la figura 3.6, para valores de $\nu > 2$ el integrando $g(\tau)$ oscila muchas veces entre valores positivos y negativos antes de tender asintóticamente a cero. De esta manera, cuanto mayor es ν , mayor es la oscilación de $g(\tau)$, y por lo tanto, menor es el valor de la integral que aparece en (3.21). Por esta razón, para valores de $\nu > 2$ no podemos afirmar que la función de Melnikov tenga ceros simples, por lo cual, para ese rango de frecuencias, la perturbación puede no producir herraduras de Smale, ni movimiento caótico en torno a las separatrices del sistema no perturbado.

Como hemos hecho al estudiar la región 6, podemos confirmar este resultado numéricamente mediante la generación de superficies de sección de Poincaré temporales en el espacio de fases tetradimensional extendido (G_x, G_y, G_z, t) . Así, la figura 3.7 muestra tres superficies de sección para tres valores de la frecuencia ν de la perturbación (0.3, 0.5 y 2.0) y el mismo valor de la amplitud $\epsilon = 0.01$. En estas tres superficies de sección $P = -1$ y $Q = -1.5$, valores que corresponden a la región 4' y que son los mismos que los de la figura 3.6 anterior.

La figura 3.7 concuerda con el resultado que hemos obtenido al analizar la función de Melnikov $M(t_0)$ en la región 4'. Es decir, el aumento de la frecuencia ν de la perturbación produce una disminución de la banda de estocasticidad existente alrededor de la separatriz no perturbada.

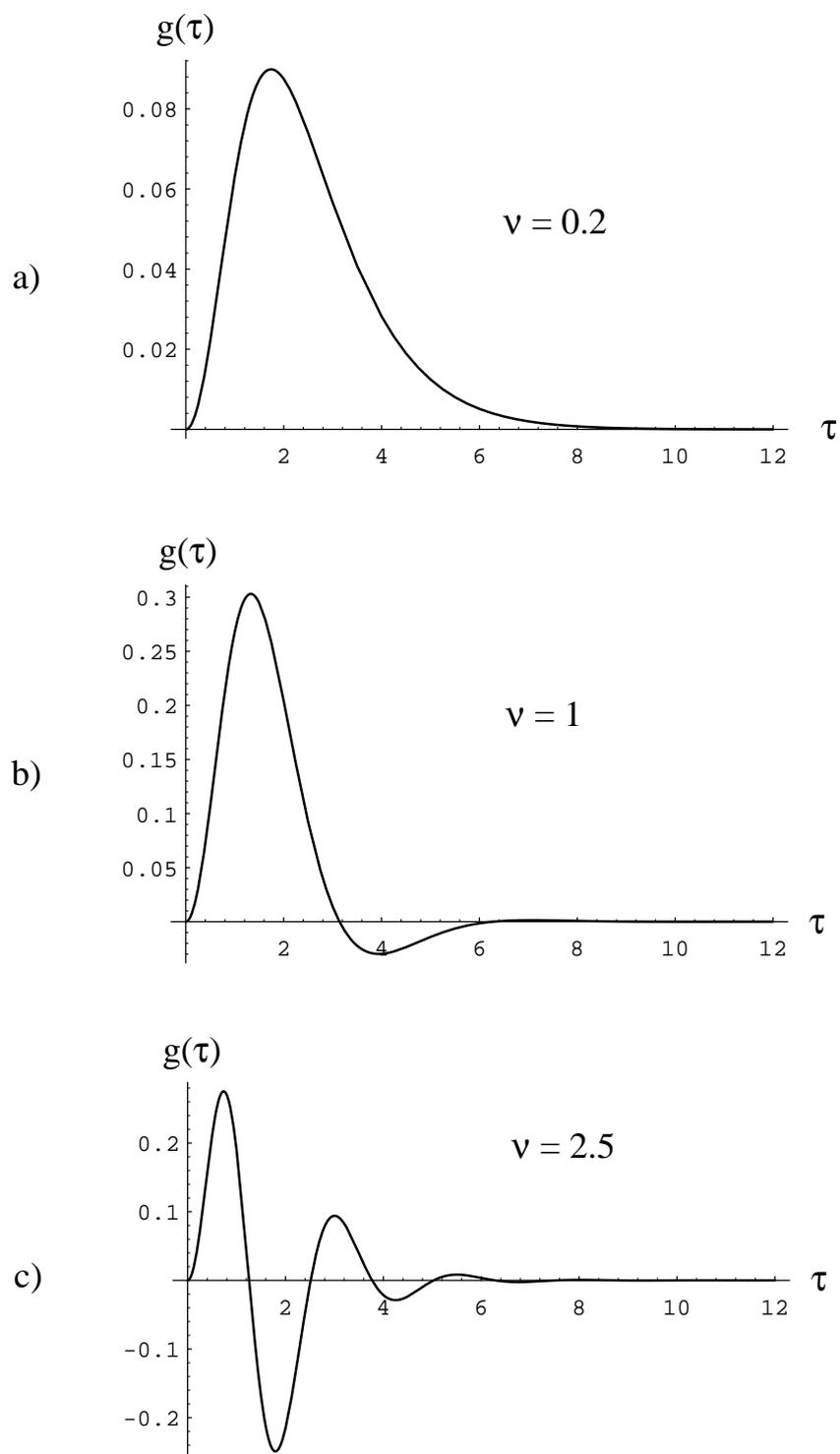


Figura 3.6: Representaciones gráficas del integrando $g(\tau)$ para tres valores distintos de la frecuencia ν de la perturbación. $P = -1$ y $Q = -1.5$.

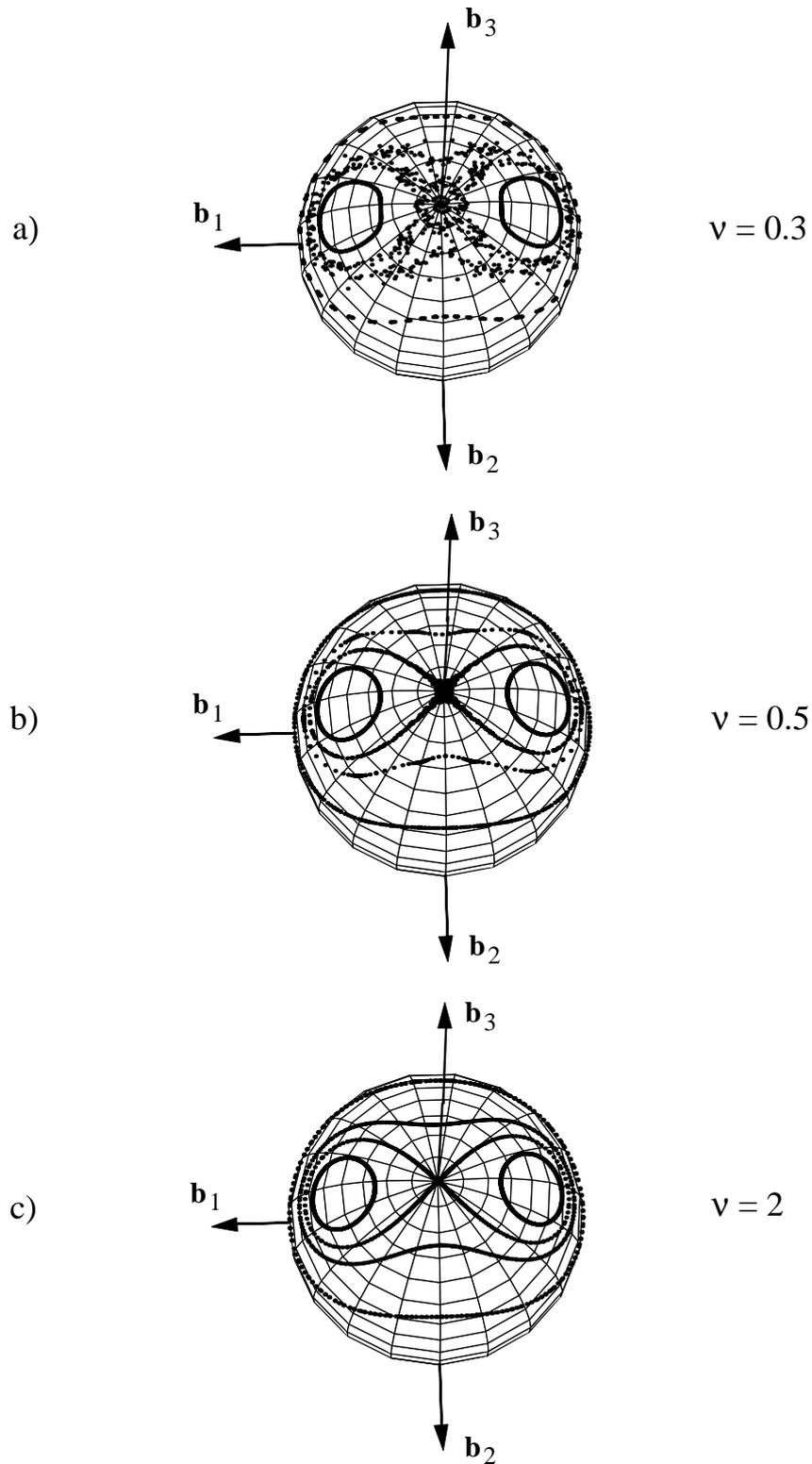


Figura 3.7: Superficies de sección de Poincaré para tres valores distintos de la frecuencia ν de la perturbación, y una misma amplitud $\epsilon = 0.01$, dentro de la región $4'$: $P = -1$, $(a_{10} = 0.1, a_2 = 0.2, a_3 = 0.3)$ y $Q = -1.5 (h_z = 0.5)$.

3.5 Estabilización de las rotaciones

Recordemos en este punto que nuestro objetivo es analizar el efecto del giro relativo del rotor en la dinámica del giróstato perturbado. Para ello hemos estudiado con anterioridad el sistema sin la perturbación, la evolución de su espacio de fases y sus separatrices en función de los parámetros P y Q . En todo nuestro estudio, estamos suponiendo un giróstato tal que, $a_{10} < a_2 < a_3$, un $h_z > 0$, con lo cual, los parámetros P y Q son ambos negativos. Por lo tanto, teniendo en cuenta la expresión del parámetro Q , el aumento progresivo de la velocidad relativa del rotor implica una disminución progresiva de Q . Así pues, como ya hemos comentado anteriormente, al aumentar desde el reposo el giro del rotor, el sistema evoluciona en el espacio paramétrico (P, Q) de la figura 3.1 a lo largo de una línea recta paralela al eje Q , comenzando en el eje P , es decir, en la región 6, atravesando la región 4', y terminando en la región 2'. En este recorrido el sistema sufre dos bifurcaciones: la primera para $Q = -1$, y la segunda para $Q = P - 1$. En la segunda bifurcación desaparecen las dos separatrices homoclinicas que existen en la región 4' al colapsar los equilibrios $E_{1\pm}$ con el polo E_{3+} .

En la región 2', por lo tanto, el espacio de fases del giróstato no perturbado no contiene ni trayectorias homoclinicas ni heteroclinicas. Por consiguiente, la aplicación de la perturbación al sistema dentro de esta región 2', no puede producir la aparición de zonas de movimiento caótico generadas por las intersecciones transversales entre las trayectorias homo/heteroclinicas desdobladas por la perturbación. Sin embargo, este mecanismo de generación de caos si que puede aparecer en las regiones 6 y 4', como hemos comprobado anteriormente.

Para un valor fijo del parámetro P (es decir, una geometría dada del giróstato), la ubicación del sistema en una región concreta (6, 4' ó 2') del plano (P, Q) solamente depende del valor del parámetro Q , esto es, del momento angular relativo, h_z , del rotor. Por lo tanto, si tenemos el giróstato perturbado en la región 6 ó 4' con bandas de estocasticidad en torno a la separatriz no perturbada, podemos eliminar estas zonas de movimiento caótico llevando al sistema a la región 2', es decir, aumentando suficientemente el momento angular relativo, h_z , del rotor.

Esta eliminación de las bandas de estocasticidad del espacio de fases del sistema perturbado puede observarse gráficamente a través de la secuencia de superficies de sección de Poincaré temporales para valores crecientes de h_z (valores decrecientes de Q) que mostramos en la figura 3.8. En esta figura podemos comprobar cómo

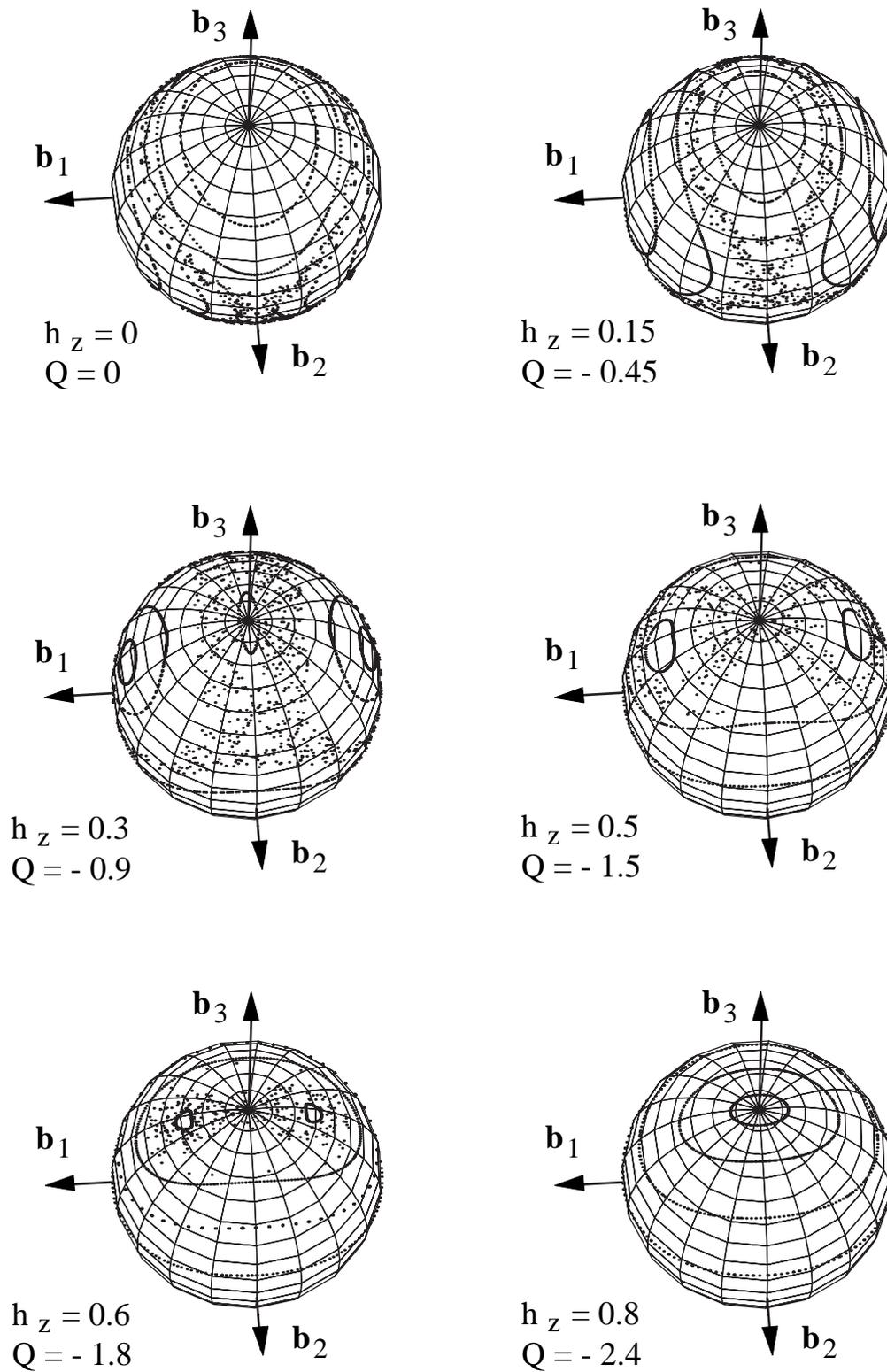


Figura 3.8: Evolución de las secciones de Poincaré temporales del giróstatto perturbado para $P = -1$ ($a_{10} = 0.1, a_2 = 0.2, a_3 = 0.3$), $\epsilon = 0.005$ y $\nu = 0.1$ para valores crecientes de h_z (decrecientes de Q).

conforme aumenta h_z (o disminuye Q), la banda de estocasticidad se desplaza siguiendo la evolución de la separatriz no perturbada, evolución que refleja la figura 3.2. Una vez que esta separatriz no perturbada desaparece en la segunda bifurcación, para $Q = P - 1$, no se observa ninguna zona de movimiento caótico en la sección de Poincaré correspondiente.

Capítulo 4

Rotor en torno a los ejes intermedio y máximo: Eliminación del caos.

Como se pone de manifiesto en el trabajo de Elipe y Lanchares (1997) el problema de un giróstato triaxial con un sólo rotor se reduce a un único tipo de hamiltoniano cuadrático biparamétrico, $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(u^2 + Pv^2) + Qu$. Sin embargo, es necesario considerar el rotor en cada uno de los ejes principales de inercia para poder cubrir todo el plano paramétrico (P, Q) y, por tanto, cabe esperar diferentes aspectos dinámicos según esté alineado el rotor.

Por otra parte, debido a la evidente simetría entre los ejes de máxima y mínima inercia el comportamiento en ambos casos debiera ser parecido. Esto es cierto en ausencia de perturbación y, de hecho, ambos casos se reducen al mismo hamiltoniano, dando lugar a la misma dinámica. Sin embargo, como veremos, la perturbación afecta de manera distinta cuando el rotor está alineado con el eje de máxima inercia y se hace necesario considerar este caso por separado.

El capítulo está dividido en dos secciones. En la primera sección consideramos un giróstato con un rotor alineado con el eje de inercia intermedia. Una vez analizada la estructura del flujo fásico para el sistema sin perturbar, demostramos la existencia de comportamiento caótico. Este comportamiento puede ser eliminado cuando el rotor alcanza un cierto momento angular relativo suficiente. En la segunda sección consideramos el rotor alineado según el eje de inercia máximo. Aquí, a pesar de que la perturbación es más compleja, encontramos que el pro-

blema presenta un comportamiento cualitativo semejante al encontrado para el caso con el rotor en el eje de mínima inercia. Es decir, se mantiene la simetría entre los dos casos al margen de la perturbación.

4.1 Rotor en torno al eje de inercia intermedia

En esta sección vamos a estudiar el giróstato con un solo rotor cuyo eje de giro es paralelo al eje principal de la plataforma de momento de inercia intermedio, esto es, el eje del rotor coincide con el eje \mathbf{b}_2 , manteniendo la misma relación entre los momentos de inercia del giróstato que hemos supuesto en los capítulos anteriores, $a_{10} < a_2 < a_3$

Como en los dos capítulos anteriores vamos a aplicar el método de Melnikov y superficies de sección de Poincaré para analizar el efecto del giro del rotor en la eliminación del movimiento caótico generado por la perturbación dependiente del tiempo.

En estas condiciones, el hamiltoniano total de sistema se puede escribir como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \epsilon V(G_x, G_y, G_z; t), \quad (4.1)$$

donde la perturbación ϵV tiene la misma dependencia periódica del tiempo que en el capítulo anterior,

$$V = \frac{1}{2} G_x^2 \cos \nu t.$$

y teniendo en cuenta que, en este caso $h_x = h_z = 0$ y $h_y = cte$, la parte integrable \mathcal{H}_0 toma la forma

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(a_{10}G_x^2 + a_2G_y^2 + a_3G_z^2) - a_2h_yG_y, \quad (4.2)$$

donde h_y es el momento angular del rotor relativo a la plataforma del giróstato.

Como hemos hecho en el capítulo anterior, vamos a aplicar dos transformaciones al hamiltoniano (4.2) para que sólo dependa explícitamente de dos parámetros. Primero restamos a \mathcal{H}_0 la cantidad $a_{10}/2 = a_{10}(G_x^2 + G_y^2 + G_z^2)/2$, así eliminamos el término cuadrático en G_x ,

$$\mathcal{H}'_0 = \mathcal{H}_0 - \frac{a_{10}}{2} = \frac{1}{2}(a_{10}G_x^2 + a_2G_y^2 + a_3G_z^2 - a_{10}G_x^2 - a_{10}G_y^2 - a_{10}G_z^2) - a_2h_yG_y$$

$$\mathcal{H}'_0 = \frac{1}{2}[(a_2 - a_{10})G_y^2 + (a_3 - a_{10})G_z^2] - a_2h_yG_y.$$

La segunda transformación consiste en un cambio a una nueva variable temporal τ , mediante la ecuación $\tau = (a_2 - a_{10})t$. Con esta transformación, la variación de cada componente G_i respecto a la nueva variable τ viene dada por

$$\frac{dG_i}{d\tau} = \{G_i; \mathcal{H}'_0\} \frac{1}{a_2 - a_{10}} = \left\{G_i; \frac{\mathcal{H}'_0}{a_2 - a_{10}}\right\} = \{G_i; \mathcal{H}''_0\},$$

donde \mathcal{H}''_0 es el nuevo hamiltoniano

$$\mathcal{H}''_0 = \frac{\mathcal{H}'_0}{a_2 - a_{10}} = \frac{1}{2}(G_y^2 + \frac{a_3 - a_{10}}{a_2 - a_{10}}G_z^2) - \frac{a_2 h_y}{a_2 - a_{10}}G_y,$$

Mediante estas dos transformaciones, y definiendo los parámetros

$$P = \frac{a_3 - a_{10}}{a_2 - a_{10}}, \quad Q = -\frac{a_2 h_y}{a_2 - a_{10}}, \quad (4.3)$$

podemos escribir el hamiltoniano \mathcal{H}''_0 en la forma biparamétrica

$$\mathcal{H}''_0 = \frac{1}{2}(G_y^2 + PG_z^2) + QG_y. \quad (4.4)$$

Como en el giróstato estudiado en el capítulo anterior, P es un parámetro adimensional que sólo depende de la geometría del giróstato, mientras que el parámetro Q depende de la distribución de masas así como del momento angular relativo h_y del rotor.

4.1.1 Equilibrios y bifurcaciones paramétricas

Teniendo en cuenta los paréntesis de Poisson entre las componentes (G_x, G_y, G_z) las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} \frac{dG_x}{d\tau} &= \{G_x; \mathcal{H}''_0\} = [(P - 1)G_y - Q]G_z, \\ \frac{dG_y}{d\tau} &= \{G_y; \mathcal{H}''_0\} = -PG_x G_z, \\ \frac{dG_z}{d\tau} &= \{G_z; \mathcal{H}''_0\} = (Q + G_y)G_x. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nótese que estas ecuaciones coinciden con las (3.4) haciendo una permutación cíclica de las componentes (G_x, G_y, G_z) del momento angular. Esta permutación es equivalente a una composición de dos rotaciones consecutivas de ángulo $-\pi/2$ primero alrededor del eje \mathbf{b}_3 y después alrededor del eje \mathbf{b}_2 .

Por tanto, los equilibrios y condiciones de existencia de los mismos pueden deducirse fácilmente a partir de la tabla 3.1 del capítulo anterior. En este caso,

Punto de equilibrio en variables (G_x, G_y, G_z)	Condición de existencia	Valor de \mathcal{H}_0''
$E_{1\pm} \equiv (\pm\sqrt{1-Q^2}, -Q, 0)$	$ Q \leq 1$	$-\frac{Q^2}{2}$
$E_{2+} \equiv (0, 1, 0)$	Siempre	$\frac{1}{2} + Q$
$E_{2-} \equiv (0, -1, 0)$	Siempre	$\frac{1}{2} - Q$
$E_{3\pm} \equiv \left(0, \frac{Q}{P-1}, \pm\sqrt{1 - \frac{Q^2}{(P-1)^2}}\right)$	$ Q \leq P-1 $	$\frac{1}{2} \left(P + \frac{Q^2}{P-1}\right)$

Tabla 4.1: Puntos de equilibrio, condiciones de existencia, y valores que toma \mathcal{H}_0'' en ellos.

hemos denotado a los equilibrios por $E_{1\pm}$, $E_{2\pm}$, $E_{3\pm}$ y sus coordenadas, condiciones de existencia y valores de \mathcal{H}_0'' en los mismos aparecen en la tabla 4.1.

Como es lógico, las condiciones de existencia de los puntos de equilibrio son las mismas que aparecían en el capítulo anterior. Por lo tanto, el plano de los parámetros (P, Q) correspondiente al giróstato con un rotor en el eje de momento de inercia intermedio es idéntico al plano que mostramos en la figura 3.1 del capítulo precedente.

La diferencia esencial entre el problema que se trata en esta sección y el del capítulo precedente radica en que, como $a_{10} < a_2 < a_3$, $P > 1$, por lo que para esta estructura del giróstato, el sistema siempre va estar en zonas del plano biparamétrico (P, Q) distintas a las que se encontraba en el capítulo anterior, en las cuales $P < 0$ ó bien $0 < P < 1$.

En este punto debemos señalar que aplicando otra transformación similar podemos convertir el hamiltoniano (4.2) en otra forma cuadrática biparamétrica diferente

$$\mathcal{H}_0^* = \frac{1}{2}(G_y^2 + P^*G_x^2) + Q^*G_y.$$

pero equivalente a (4.4) en la que no aparece el término G_z^2 , y donde los parámetros P^* y Q^* son

$$P^* = \frac{a_{10} - a_3}{a_2 - a_3}, \quad Q^* = -\frac{a_2 h_y}{a_2 - a_3}.$$

Sin embargo, nuevamente se obtiene $P > 1$, por lo que los parámetros (P, Q) vuelven a estar en la misma zona del plano (P, Q) .

El que $P > 1$ hace que la evolución del espacio de fases sea completamente distinta a la de giróstato que hemos analizado en el capítulo 3, en el sentido en que la estructura del espacio de fases es diferente en la zona del plano biparamétrico (P, Q) en la que nos encontramos ahora, $P > 1, Q < 0$.

Por tanto, la evolución que sigue el giróstato al aumentar progresivamente el momento angular relativo desde $h_y = 0$, se manifiesta en el plano biparamétrico (P, Q) en un recorrido sobre una línea recta paralela al eje Q en el semiplano $Q < 0$.

Así pues, teniendo presente la figura 3.1 del plano (P, Q) , podemos distinguir dos evoluciones diferentes al aumentar h_y (o disminuir Q) dependiendo del valor del parámetro P . Para $1 < P < 2$, la evolución comienza en la región 7 con $Q = 0$, y al disminuir el valor de Q , el sistema atraviesa toda la zona 3' y termina en la región 2'. En cambio, para $P > 2$, el recorrido empieza también en la región 7, pero después el sistema cruza la zona 5' y acabando también en la región 2'.

Aunque en estos dos posibles recorridos, el sistema transita por diferentes zonas dependiendo del valor de P , ambas evoluciones son muy similares. De hecho, la evolución correspondiente a $P > 2$ se puede obtener a partir de la evolución correspondiente a $1 < P < 2$ sin más que girar el espacio de fases un ángulo de $\pi/2$ alrededor del eje \mathbf{b}_2 . Estas evoluciones ya han sido descritas con detalle por Elipe y Lanchares (1995).

En las figuras 4.1 y 4.2 mostramos la evolución del espacio de fases del giróstato no perturbado conforme disminuye el parámetro Q (o aumenta h_y). Esta evolución corresponde a un giróstato con valores $a_{10} = 0.1, a_2 = 0.2$ y $a_3 = 0.35$, que equivalen a un parámetro $P = 2.5$. En las figuras se puede apreciar con claridad que durante dicha evolución tienen lugar tres bifurcaciones.

La primera bifurcación, denominada de *bola de tenis*, ocurre en $Q = 0$ y en ella las cuatro trayectorias heteroclínicas se transforman en cuatro trayectorias homoclínicas. La segunda bifurcación, que es de tipo *horca*, ocurre en $Q = -1$ (para $1 < P < 2$ en $Q = 1 - P$) y en ella desaparecen los puntos $E_{1\pm}$ al colapsar con el E_{2+} . Por último, en la tercera bifurcación, también de tipo *horca* y que tiene lugar en $Q = 1 - P$ (para $1 < P < 2$ en $Q = -1$) desaparecen los equilibrios $E_{3\pm}$ al coincidir con el E_{2-} .

Para el valor concreto $P = 2$, las dos últimas bifurcaciones ocurren simultáneamente, al colapsar a la vez los puntos $E_{1\pm}$ con E_{2+} por un lado, y por otro los equilibrios $E_{3\pm}$ con E_{2-} .

4.1.2 Órbitas asintóticas

Debemos tener presente que estamos interesados en la dinámica del problema perturbado definido por el hamiltoniano (4.1). La estructura del mismo, muy similar a la del estudiado en el capítulo anterior, nos hace presuponer la existencia de caos homoclínico. Para demostrar este hecho necesitamos conocer previamente las soluciones explícitas de las trayectorias homoclínicas que existen en el espacio de fases del sistema no perturbado.

Las soluciones de las trayectorias sobre el espacio de fases S^2 se calculan a partir de las ecuaciones de movimiento (4.5) y haciendo uso de las dos cantidades que se conservan, \mathcal{H}_0'' y G . En las expresiones de estas soluciones intervienen funciones circulares, elípticas e hiperbólicas (para más detalles ver Lanchares, 1993).

En nuestro caso, solamente estamos interesados en las soluciones asintóticas, que serán diferentes según la región del plano de parámetros (P, Q) en que nos encontremos. Según esto, las soluciones asintóticas pueden clasificarse en dos tipos.

- **A ÓRBITAS ASINTÓTICAS EN EL EQUILIBRIO $E_{2+} \equiv (0, 1, 0)$.**

En este caso tenemos dos trayectorias homoclínicas que nacen y mueren en el punto E_{2+} , y que sólo existen para $-1 < Q < 0$ y todo $P > 1$. El valor del hamiltoniano en estas trayectorias es $\mathcal{H}_0'' = Q + 1/2$, y las soluciones de estas dos trayectorias homoclínicas son:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_x = \pm 2\beta \sqrt{Q(1-P+Q)} \frac{\cosh(\beta t/2)}{L_3 \cosh(\beta t) + L_4}, \\ G_y = \frac{L_1 \cosh(\beta t) + L_2}{L_3 \cosh(\beta t) + L_4}, \\ G_z = \pm 2\beta \sqrt{-Q(Q+1)} \frac{\sinh(\beta t/2)}{L_3 \cosh(\beta t) + L_4}, \end{array} \right. \quad (4.6)$$

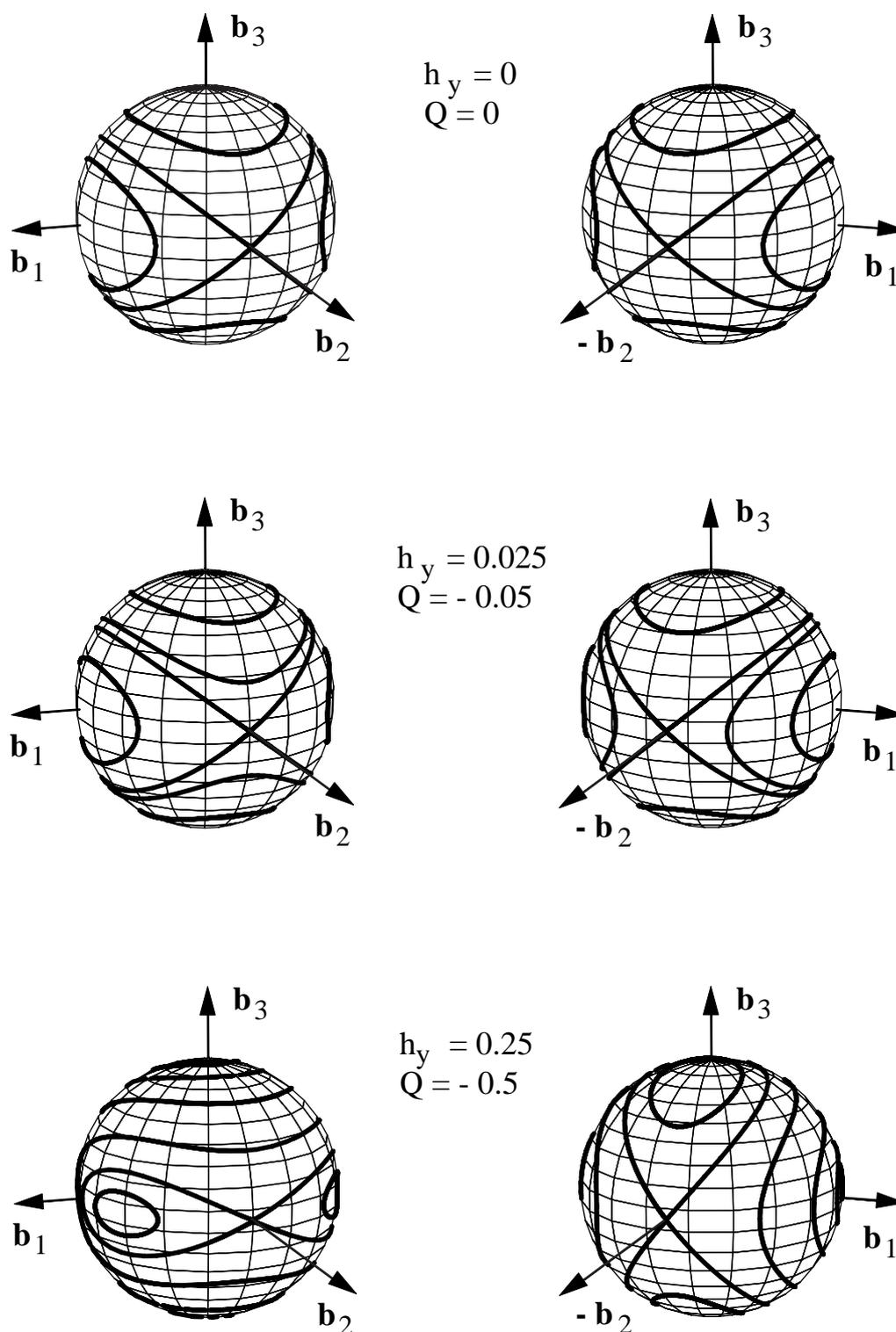


Figura 4.1: Evolución del espacio de fases del sistema \mathcal{H}_0'' , con $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.35$ (ó $P = 2.5$), desde $Q = 0$ ($h_y = 0$) hasta $Q = -0.5$ ($h_y = 0.25$). Una bifurcación tipo *bola de tenis* ocurre en $Q = 0$ ($h_y = 0$).

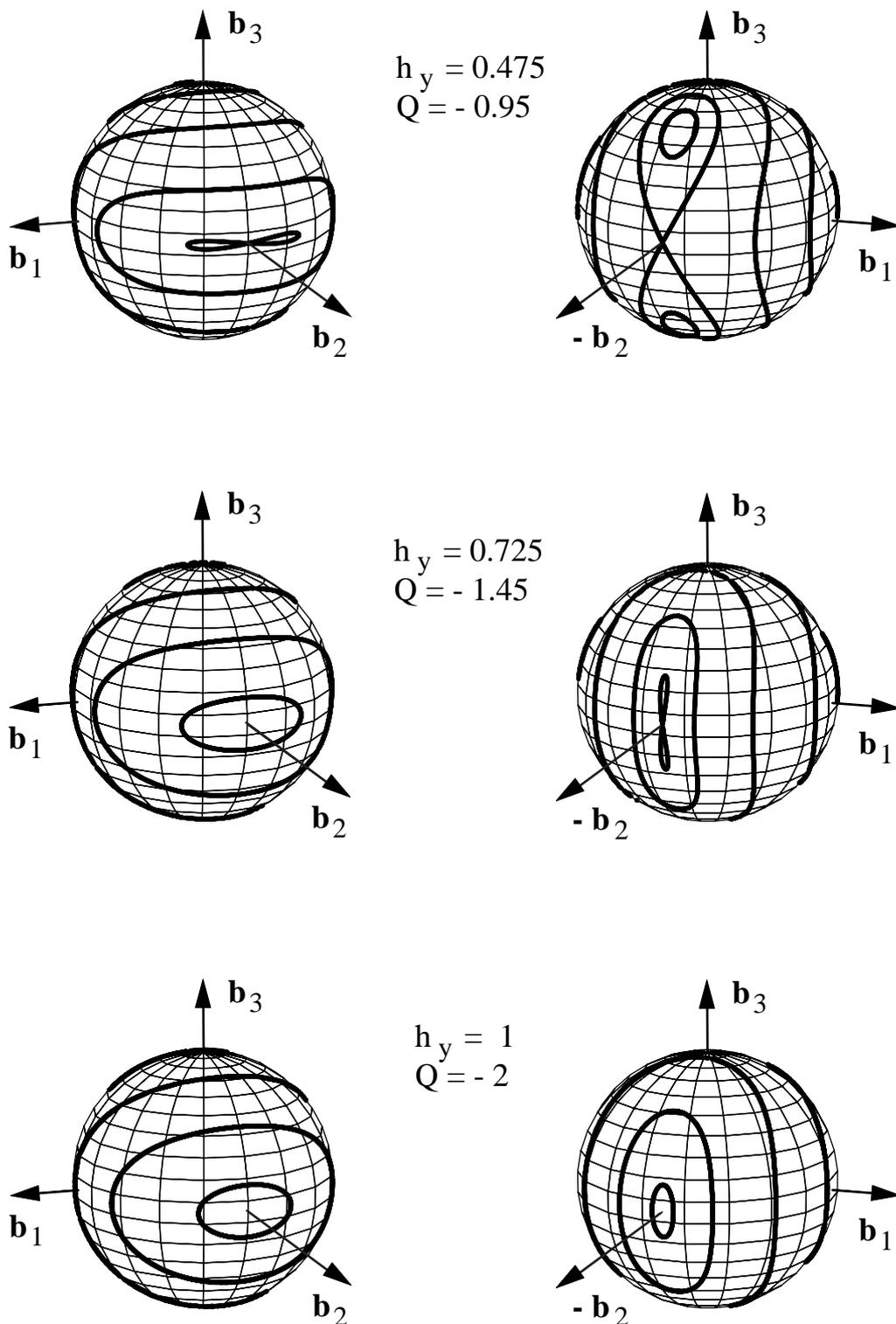


Figura 4.2: Evolución del espacio de fases del sistema \mathcal{H}_0'' , con $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.35$ (ó $P = 2.5$), desde $Q = -0.95$ ($h_y = 0.475$) hasta $Q = -2$ ($h_y = 1$). Una primera bifurcación tipo *horca* ocurre en $Q = -1$ ($h_y = 0.5$), y otra segunda para $Q = -1.5$ ($h_y = 0.75$).

donde

$$\begin{aligned} L_1 &= PQ, & L_2 &= 2(P-1) + 3Q(P-2) - 4Q^2, \\ L_3 &= PQ, & L_4 &= 2(1-P) + Q(2-P), \end{aligned}$$

y

$$\beta = 2\sqrt{(Q+1)(P-1-Q)}.$$

• **B ÓRBITAS ASINTÓTICAS EN EL EQUILIBRIO $E_{2-} \equiv (0, -1, 0)$.**

En esta situación se dan dos trayectorias homoclínicas que parten y terminan en el punto E_{2-} , y que únicamente existen para $1-P < Q < 0$ y todo $P > 1$. El valor del hamiltoniano en estas órbitas es $\mathcal{H}_0'' = 1/2 - Q$, y las soluciones de estas dos trayectorias homoclínicas son:

$$\begin{cases} G_x = \pm 2\alpha\sqrt{Q(1-P-Q)} \frac{\sinh(\alpha t/2)}{K_3 \cosh(\alpha t) + K_4}, \\ G_y = \frac{K_1 \cosh(\alpha t) + K_2}{K_3 \cosh(\alpha t) + K_4}, \\ G_z = \pm 2\alpha\sqrt{Q(Q-1)} \frac{\cosh(\alpha t/2)}{K_3 \cosh(\alpha t) + K_4}, \end{cases} \quad (4.7)$$

donde

$$\begin{aligned} K_1 &= -PQ, & K_2 &= 2(1-P) + 3Q(P-2) + 4Q^2, \\ K_3 &= PQ, & K_4 &= 2(1-P) + Q(P-2), \end{aligned}$$

y

$$\alpha = 2\sqrt{(Q-1)(1-P-Q)}.$$

Hay que notar que, salvo el valor de los coeficientes, la estructura de las ecuaciones (4.6) y (4.7) es idéntica sin más que intercambiar entre sí las componentes G_x y G_z . También es de destacar que estas ecuaciones (4.6) y (4.7) tienen una estructura muy similar a las ecuaciones (3.7) de las trayectorias homoclínicas asociadas al equilibrio E_{3+} existentes en la región 4' del plano (P, Q) y que hemos considerado en el capítulo precedente con el rotor en el eje \mathbf{b}_3 .

Por otra parte, en el caso $P > 2$, que corresponde a la evolución representada en la figuras 4.1 y 4.2, vemos que en la segunda bifurcación, cuando $Q = -1$, la separatriz que pasa por el equilibrio $E_{2+} \equiv (0, 1, 0)$ desaparece al colapsar en dicho punto. Esto lo podemos confirmar a partir de las ecuaciones (4.6), puesto

que cuando el parámetro $Q \rightarrow -1$, es fácil comprobar que $(G_x, G_y, G_z) \rightarrow (0, 1, 0)$. Es decir, esa separatriz tiende efectivamente al equilibrio E_{2+} en el límite $Q \rightarrow -1$.

De forma parecida, para $P > 2$, la tercera bifurcación ocurre cuando $Q = 1 - P$, y en ella, como se aprecia en la figura 4.2, desaparecen las trayectorias homoclínicas que nacen y mueren en el equilibrio $E_{2-} \equiv (0, -1, 0)$ al colapsar en ese punto. Es posible corroborar este colapso analizando las ecuaciones (4.7), ya que cuando $Q \rightarrow 1 - P$, resulta sencillo encontrar que $(G_x, G_y, G_z) \rightarrow (0, -1, 0)$. Esto significa que, en efecto, estas trayectorias homoclínicas tienden al punto E_{2-} cuando el parámetro $Q \rightarrow 1 - P$.

4.1.3 Función de Melnikov

Después de determinar las expresiones de las trayectorias homoclínicas del hamiltoniano no perturbado (4.4), podemos pasar a analizar el sistema completo (4.1) que incluye la perturbación que representa cierta elasticidad de la plataforma del giróstato. Como en el capítulo anterior, estudiaremos el efecto del giro del rotor en la dinámica del giróstato perturbado haciendo uso del método de Melnikov y de superficies de sección de Poincaré.

El hamiltoniano completo del giróstato perturbado es

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \epsilon V = \frac{1}{2}(a_{10}G_x^2 + a_2G_y^2 + a_3G_z^2) - a_2h_yG_y + \frac{1}{2}\epsilon G_x^2 \cos(\nu t)$$

Aplicando a este hamiltoniano las dos transformaciones que hemos realizado antes sobre el hamiltoniano no perturbado \mathcal{H}_0 , resulta el nuevo hamiltoniano transformado

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \mathcal{H}_0'' + \frac{\epsilon V}{a_2 - a_{10}} = \mathcal{H}_0'' + \epsilon V' \\ &= \frac{1}{2}(G_y^2 + PG_z^2) + QG_y + \frac{\epsilon}{2(a_2 - a_{10})}G_x^2 \cos(\nu t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como el giróstato no perturbado es un sistema de un grado de libertad, podemos aplicar el método de Melnikov para determinar la existencia de intersecciones homoclínicas, y por lo tanto, la presencia de herraduras de Smale, dependencia sensible de las condiciones iniciales, y en resumen, la existencia de caos cerca de las separatrices del giróstato no perturbado.

La función de Melnikov $M(t_0)$ correspondiente al hamiltoniano (4.8) viene dada por

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathcal{H}_0''(G_i(t - t_0)); \epsilon V'(G_i(t - t_0), t) \} dt \quad i = x, y, z,$$

donde G_i son las componentes del momento angular total del giróstato correspondientes a las separatrices del hamiltoniano no perturbado (4.4).

Haciendo uso de las expresiones (1.13), tenemos que

$$\{\mathcal{H}_0''; \epsilon V'\} = \frac{\epsilon}{a_2 - a_{10}} [(1 - P)G_x G_y G_z + QG_x G_z] \cos(\nu t).$$

Por lo tanto, en esta situación, la función de Melnikov toma la forma

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{a_2 - a_{10}} [(1 - P)G_x G_y G_z + QG_x G_z] \cos \nu t dt. \quad (4.9)$$

Puesto que hemos determinado la existencia de dos tipos de trayectorias homoclínicas asociadas a dos puntos de equilibrio diferentes, deberemos calcular la función de Melnikov para cada uno de esos dos tipos de trayectorias.

• **A ÓRBITAS ASINTÓTICAS EN EL EQUILIBRIO $E_{2+} \equiv (0, 1, 0)$.**

Dado que las expresiones de estas trayectorias son análogas a las obtenidas en (3.7), si sustituimos las ecuaciones (4.6) en (4.9), y realizamos las mismas manipulaciones que hemos aplicado en el capítulo precedente, llegamos a que

$$M(t_0) = \frac{2\beta\epsilon\nu}{(a_{10} - a_2)P} \left[(1 - P + Q)I_1 + \frac{(1 - P)\beta^2}{2} I_2 \right] \text{sen}(\nu t_0), \quad (4.10)$$

donde

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\frac{\nu}{\beta}\tau)}{L_3 \cosh(\tau) + L_4} d\tau, \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\frac{\nu}{\beta}\tau)}{[L_3 \cosh(\tau) + L_4]^2} d\tau.$$

Como en este caso $L_4 < L_3 < 0$, las integrales I_1 e I_2 se pueden resolver haciendo uso de las ecuaciones (3.17) del capítulo anterior con $a = \nu/\beta$, $b = L_3$, $c = L_4$, y $\eta = 1$. De esta forma, podemos escribir la función de Melnikov como

$$M(t_0) = \frac{2\pi\beta\epsilon\nu}{(a_2 - a_{10})P} \text{sen}(\nu t_0) \left\{ (1 - P + Q) \frac{\text{sen}[\frac{\nu}{\beta} \text{arccosh}(\frac{L_4}{L_3})]}{\sqrt{L_4^2 - L_3^2} \text{senh}(\frac{\nu\pi}{\beta})} + \frac{(1 - P)\beta^2}{2} \left[\frac{\frac{\nu}{\beta} \sqrt{L_4^2 - L_3^2} \cosh[\frac{\nu}{\beta} \text{arccos}(\frac{L_4}{L_3})] + L_4 \text{sen}[\frac{\nu}{\beta} \text{arccosh}(\frac{L_4}{L_3})]}{(L_4^2 - L_3^2)^{3/2} \text{senh}(\frac{\nu\pi}{\beta})} \right] \right\}.$$

• **B ÓRBITAS ASINTÓTICAS EN EL EQUILIBRIO $E_{2-} \equiv (0, -1, 0)$.**

De manera similar, sustituyendo las expresiones (4.7) de estas trayectorias en la ecuación (4.9), y llevando a cabo las mismas manipulaciones tenemos que

$$M(t_0) = \frac{2\alpha\epsilon\nu}{(a_{10} - a_2)P} \left[(P - 1 + Q)I_3 - \frac{(1 - P)\alpha^2}{2} I_4 \right] \text{sen}(\nu t_0), \quad (4.11)$$

donde

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{K_3 \cosh(\tau) + K_4} d\tau, \quad I_4 = \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\nu}{\alpha}\tau)}{[K_3 \cosh(\tau) + K_4]^2} d\tau.$$

En este caso, como $K_4 < K_3 < 0$, las integrales I_3 e I_4 también las podemos resolver aplicando las ecuaciones (3.17), pero ahora con $a = \nu/\alpha$, $b = K_3$, $c = K_4$, y $\eta = 1$. Por lo tanto, $M(t_0)$ resulta ser

$$M(t_0) = \frac{2\pi\alpha\epsilon\nu}{(a_2 - a_{10})P} \operatorname{sen}(\nu t_0) \left\{ (P - 1 + Q) \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\nu}{\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{K_4}{K_3}\right)\right]}{\sqrt{K_4^2 - K_3^2} \operatorname{senh}\left(\frac{\nu\pi}{\alpha}\right)} \right. \\ \left. - \frac{(1 - P)\alpha^2}{2} \left[\frac{\frac{\nu}{\alpha} \sqrt{K_4^2 - K_3^2} \cosh\left[\frac{\nu}{\alpha} \operatorname{arccos}\left(\frac{K_4}{K_3}\right)\right] + K_4 \operatorname{sen}\left[\frac{\nu}{\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{K_4}{K_3}\right)\right]}{(K_4^2 - K_3^2)^{3/2} \operatorname{senh}\left(\frac{\nu\pi}{\alpha}\right)} \right] \right\}.$$

Después de calcular las funciones de Melnikov asociadas a cada una de los dos tipos de trayectorias homoclínicas existentes en el problema perturbado, podemos pasar ahora a considerar el efecto del giro del rotor en el comportamiento caótico del giróstato perturbado. Un giróstato no perturbado de geometría fija tiene asociado un parámetro P constante que, con la suposición $a_{10} < a_2 < a_3$, en este caso es además $P > 1$. Suponiendo también un momento angular relativo del rotor $h_y > 0$, un aumento progresivo de la velocidad relativa del rotor implica una disminución también progresiva del parámetro Q . Por lo tanto, como ya hemos indicado, un aumento desde el reposo ($h_y = 0$) del giro relativo del rotor, se refleja en el plano biparamétrico (P, Q) en un recorrido sobre una línea recta paralela al eje Q y en el semiplano $Q < 0$. Recordamos que al aumentar h_y desde cero (disminuir Q), el sistema no perturbado sufre tres bifurcaciones. Entre la primera y la segunda de ellas, en el espacio de fases coexisten dos separatrices diferentes. Después de la segunda bifurcación sólo permanece una de ellas, y tras la tercera bifurcación, cuando el sistema no perturbado llega a la región $2'$ del plano (P, Q) su espacio de fases no contiene ninguna trayectoria homoclínica ni heteroclínica.

Así pues, en esta región $2'$, la perturbación no es capaz de producir comportamiento caótico generado por intersecciones transversales entre las trayectorias homo/heteroclínicas desdobladas de las separatrices iniciales por efecto de la perturbación. Sin embargo, este método de generación de caos sí puede darse en las otras regiones del plano (P, Q) por las que pasa el sistema, como lo acabamos de confirmar al estudiar las funciones de Melnikov asociadas a las dos separatrices del problema no perturbado.

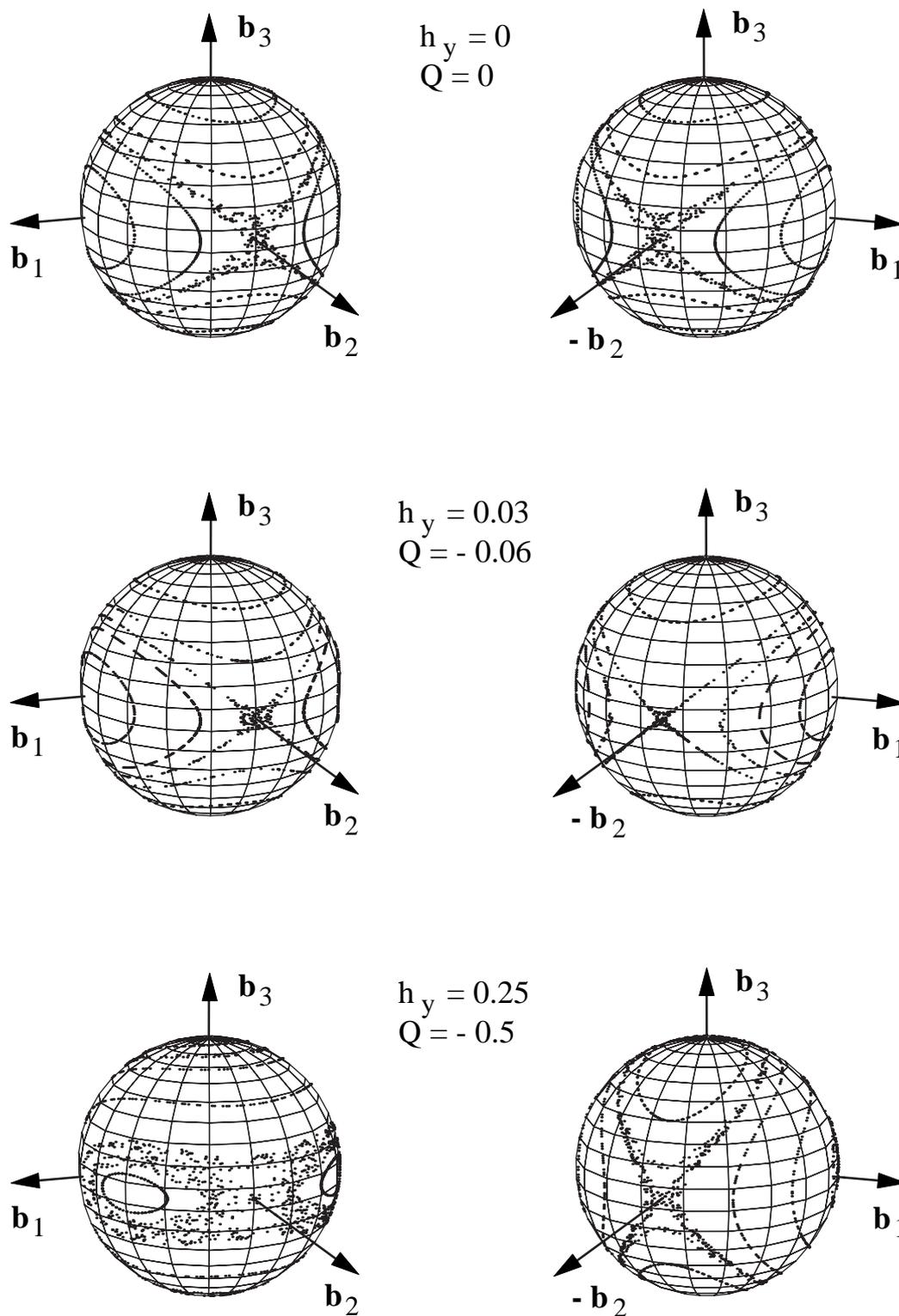


Figura 4.3: Evolución de las secciones de Poincaré temporales del giróstatO perturbado para $P = 2.5$ ($a_{10} = 0.1, a_2 = 0.2, a_3 = 0.35$), $\epsilon = 0.01$ y $\nu = 0.1$ desde $h_y = 0$ hasta $h_y = 0.25$.

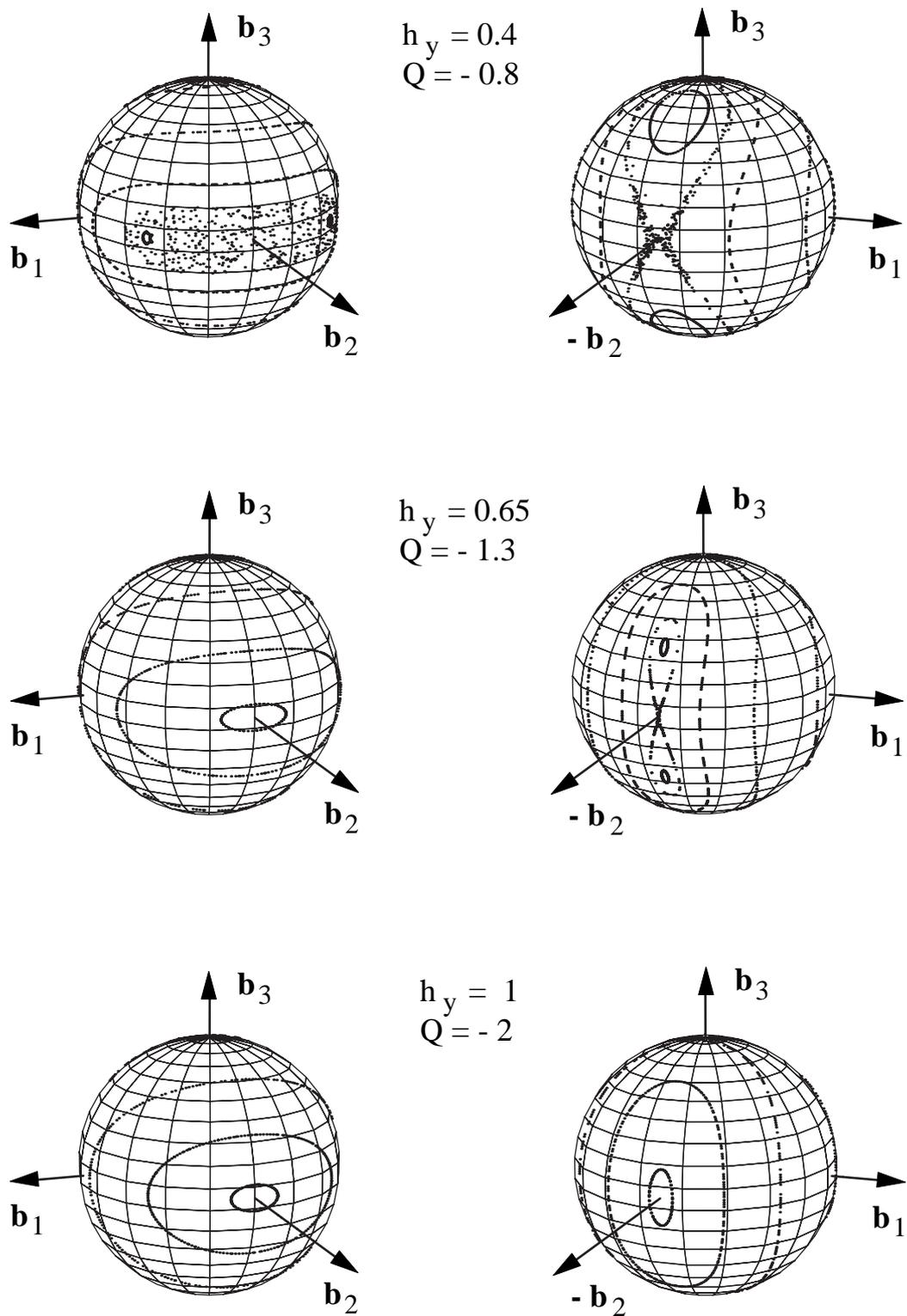


Figura 4.4: Evolución de las secciones de Poincaré temporales del giróstat perturbado para $P = 2.5$ ($a_{10} = 0.1, a_2 = 0.2, a_3 = 0.35$), $\epsilon = 0.01$ y $\nu = 0.1$ desde $h_y = 0.4$ hasta $h_y = 1$.

Por consiguiente, si inicialmente tenemos al giróstato perturbado con su rotor girando con un h_y suficientemente bajo, en el correspondiente espacio de fases no perturbado existirán una o las dos separatrices y, por lo tanto, el sistema perturbado exhibirá comportamiento caótico en torno a dichas separatrices. Estas zonas de movimiento caótico pueden ser eliminadas aumentando adecuadamente el momento angular relativo h_y del rotor (disminuyendo Q) hasta que el sistema alcance la región $2'$ del plano (P, Q) en la cual no existe ninguna separatriz en el espacio de fases no perturbado.

Este método de eliminación de las zonas de comportamiento caótico en el espacio de fases del giróstato perturbado lo podemos comprobar de manera gráfica en las figuras 4.3 y 4.4 en las cuales mostramos una secuencia de superficies de sección de Poincaré temporales para valores crecientes de h_y (valores decrecientes de Q).

En esta figuras podemos observar cómo según aumenta el giro relativo del rotor, las bandas de estocasticidad se mueven siguiendo la evolución de las correspondientes separatrices no perturbadas. También destaca en estas figuras la desaparición de cada una de las bandas de estocasticidad después de que tienen lugar la segunda y tercera bifurcación en el correspondiente sistema no perturbado, cuando colapsan cada una de las separatrices asociadas a dichas bandas de estocasticidad. Vemos que al final, la última sección de Poincaré del espacio de fases del giróstato perturbado no muestra ninguna zona de movimiento caótico.

4.2 Rotor en torno al eje de máxima inercia

En esta sección vamos a estudiar el giróstato con el eje de su único rotor paralelo al eje principal de la plataforma de momento de inercia máximo. Seguiremos suponiendo la relación $a_{10} < a_2 < a_3$, por consiguiente, en este caso el eje del rotor coincide con el eje principal \mathbf{b}_1 .

En estas condiciones, el hamiltoniano total del sistema se puede expresar de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2}(a_{10}G_x^2 + a_2G_y^2 + a_3G_z^2) - a_{10}h_xG_x + \epsilon\left(\frac{1}{2}G_x^2 - h_xG_x\right) \cos \nu t \\ &= \mathcal{H}_0 + \epsilon V(G_x, G_y, G_z; t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Esto significa que, como ocurría en los casos estudiado anteriormente, el hamiltoniano total del sistema es equivalente a la suma de una parte integrable

\mathcal{H}_0

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(a_{10}G_x^2 + a_2G_y^2 + a_3G_z^2) - a_{10}h_xG_x, \quad (4.13)$$

más una perturbación ϵV periódica en el tiempo

$$\epsilon V = \epsilon\left(\frac{1}{2}G_x^2 - h_xG_x\right) \cos \nu t.$$

Nótese que, en este caso, la perturbación no conserva la estructura que aparecía cuando el eje del rotor estaba alineado con los ejes principales \mathbf{b}_2 y \mathbf{b}_3 , apareciendo un nuevo término, como es $-\epsilon h_x G_x \cos \nu t$. Este hecho es el que hace que debamos considerar este caso a pesar de la evidente simetría que presentan los ejes principales de mínima y máxima inercia. No obstante, como veremos más adelante, la determinación de caos homo/heteroclínico por medio de la función de Melnikov puede derivarse de lo expuesto en el capítulo 3.

Aplicando transformaciones de equivalencia similares a las que hemos empleado en el capítulo 3, se puede convertir el hamiltoniano (4.13) en la forma biparamétrica

$$\mathcal{H}_0'' = \frac{1}{2}(G_x^2 + PG_z^2) + QG_x, \quad (4.14)$$

con los parámetros

$$P = \frac{a_3 - a_2}{a_{10} - a_2} < 0, \quad Q = -\frac{a_{10}h_x}{a_{10} - a_2}, \quad (4.15)$$

Hay que destacar que el hamiltoniano (4.14) es formalmente idéntico al (3.3) estudiado en el capítulo 3, sin más que intercambiar entre sí las componentes G_x y G_z . Por lo tanto, podemos decir que la estructura del espacio de fases de (4.14) y la evolución del flujo fásico al variar el parámetro Q , son iguales que las del hamiltoniano (3.3) sin más que hacer dicho intercambio entre las componentes G_x y G_z .

Así mismo, las ecuaciones de las órbitas asintóticas correspondientes a (4.14) tienen la misma estructura que las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) de las trayectorias asintóticas del hamiltoniano (3.3) del capítulo precedente.

Aplicando las mismas transformaciones de equivalencia al hamiltoniano (4.13), se obtiene como nuevo hamiltoniano total del sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \mathcal{H}_0'' + \frac{\epsilon V}{a_{10} - a_2} = \mathcal{H}_0'' + \epsilon V' \\ &= \frac{1}{2}(G_x^2 + PG_z^2) + QG_x + \frac{\epsilon}{(a_{10} - a_2)}\left(\frac{1}{2}G_x^2 - h_xG_x\right) \cos(\nu t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

La función de Melnikov $M(t_0)$ correspondiente al hamiltoniano (4.16) viene definida por

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{H}_0''(G_i(t-t_0)); \epsilon V'(G_i(t-t_0), t)\} dt \quad i = x, y, z,$$

donde G_i son las componentes del momento angular total del giróstato correspondientes a las órbitas asintóticas del hamiltoniano no perturbado (4.14).

Teniendo en cuenta las expresiones (1.13), resulta

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon P}{a_2 - a_{10}} [G_x G_y G_z - h_x G_y G_z] \cos \nu t dt. \quad (4.17)$$

Nótese que en este caso, aunque la perturbación periódica en el tiempo $\epsilon V'$ es diferente a la de los casos considerados previamente, la función de Melnikov (4.17) es idéntica, salvo coeficientes, a la obtenida en el capítulo anterior, sin más que intercambiar entre sí G_x y G_z . Por consiguiente, todo el estudio de la función de Melnikov que hemos llevado a cabo en el capítulo 3 en el caso del rotor en el eje de mínima inercia, se puede aplicar de igual modo al caso del rotor en el eje de máxima inercia que tratamos en esta sección. Por tanto, podemos concluir que el giro del rotor produce la desaparición del caos homo/heteroclínico y de esta manera una “estabilización” de las rotaciones.

Capítulo 5

Reorientación del Giróstato

Ya hemos indicado al comienzo de esta memoria, que el estudio de la dinámica de los giróstatos es de gran interés para el control de actitud y estabilización de las rotaciones de vehículos espaciales. Así por ejemplo, los satélites comerciales de comunicaciones tienen la estructura básica de un giróstato. En la gran mayoría de los casos, interesa que el vehículo espacial mantenga constante cierta orientación respecto a un sistema de referencia inercial $\mathcal{E}\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ fijo en el espacio, debido a la necesidad de fijar la dirección de dispositivos como antenas, cámaras, paneles solares, etc. Para lograr una orientación fija se aprovecha la conservación del momento angular total \mathbf{G} del vehículo espacial, ya que, si el vehículo está libre de momentos externos, o éstos son muy pequeños y el momento angular del sistema es suficientemente grande, éste se mantiene constante tanto en módulo como en dirección.

La maniobra de reorientación o *spinup* se consigue mediante la acción de rotores que provocan pequeñas fuerzas internas que pueden modelarse suponiendo que el momento relativo del rotor es una función lineal del tiempo de variación lenta, es decir $dh/dt = \varepsilon \ll 1$. Bajo esta suposición puede verse que la acción del rotor se traduce en una evolución continua del flujo fásico cuando se describe una trayectoria en el espacio paramétrico PQ (Hall y Rand, 1994; Hall, 1995a, 1995c).

Es importante destacar que el formalismo no canónico resulta de gran ayuda para describir la dinámica de éste y otros procesos como así ponen de manifiesto diversos autores (Hubert, 1980; Krishnaprasad, 1985; Hall, 1995a). Además, esta formulación no canónica permite dar cuenta, de manera sencilla, de procesos más complejos como los de transferencia de momento (Hall, 1996, 1997) o de “captura”

y “escape” (Hall, 1995b) que están directamente relacionados con el proceso de reorientación.

En este capítulo, explicamos cómo influye la perturbación producida por la pequeña variación de los momentos de inercia sobre la maniobra de reorientación. En la sección 5.1 discutimos el problema de la reorientación y razonamos que es posible reorientar el giróstato en cualquier dirección, siempre que se parta de una orientación próxima a un equilibrio estable. En las siguientes secciones investigamos de forma numérica el proceso de reorientación, primero para un giróstato no perturbado y después para uno perturbado.

Debido a la presencia de caos homoclínico durante la mayor parte de la maniobra encontramos evidencias de desorden o aleatoriedad que pueden enmarcarse dentro del fenómeno denominado *mezcla* y que pueden ser cuantificados mediante una *medida ergódica* relacionada con la entropía de Kolmogorov-Sinai (Zaslavsky *et al.*, 1991). Así, en la sección 5.4 introducimos un parámetro que nos permite medir el grado de aleatoriedad del proceso de reorientación y lo relacionamos con el caos existente antes de comenzar la maniobra en términos de la función de Melnikov.

Finalmente, en la sección 5.5 tratamos de explicar algunos aspectos de la variación de este parámetro teniendo en cuenta las órbitas resonantes y su influencia en la dinámica del problema. Para ello hacemos uso de la extensión de la teoría de Melnikov para órbitas subarmónicas resonantes.

5.1 El proceso de reorientación

En los capítulos anteriores, para estudiar la dinámica del giróstato perturbado hemos utilizado como variables del problema las componentes (G_x, G_y, G_z) del momento angular total \mathbf{G} en el sistema de referencia móvil $\mathcal{B}\{O, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Este sistema de referencia se mueve unido a la plataforma del giróstato, y sus ejes coinciden con los ejes principales del mismo.

Aquí vamos a continuar considerando un giróstato con un solo rotor cuyo eje de rotación coincide con el eje principal \mathbf{b}_3 del giróstato.

Si suponemos inicialmente al rotor en reposo relativo ($h_z = 0$), en ausencia de la perturbación que venimos considerando, el giróstato coincide con un sólido rígido libre, de manera que su espacio de fases en las variables (G_x, G_y, G_z) tiene

la forma que muestra la figura 2.1.

Como ya hemos indicado, en el sistema de referencia \mathcal{E} fijo en el espacio el momento angular total \mathbf{G} es constante. Por otra parte, en dicho sistema de referencia \mathcal{E} , la orientación del giróstato varía con el tiempo debido a movimientos de precesión y nutación alrededor de la dirección fija de \mathbf{G} . Es decir, la orientación del sistema de referencia \mathcal{B} respecto al sistema \mathcal{E} cambia con el tiempo.

Esta variación queda reflejada en las trayectorias que describen la evolución del momento angular total \mathbf{G} respecto al sistema de referencia \mathcal{B} , es decir, en los diagramas de fases que hemos venido considerando a lo largo de la memoria.

Como es bien sabido, los seis puntos de equilibrio que existen en este espacio de fases corresponden a rotaciones estacionarias en las que no existe movimiento de precesión alrededor de la dirección de \mathbf{G} , y el giróstato mantiene una orientación fija en el sistema de referencia \mathcal{E} .

Así pues, si inicialmente el giróstato tuviera un movimiento de precesión por no estar orientado adecuadamente como acabamos de describir, interesaría reorientarlo de manera que alguno de sus ejes principales coincidiera con la dirección de \mathbf{G} . De esta forma, se eliminaría ese movimiento de precesión inicial consiguiendo así que el giróstato conservara una orientación fija en el espacio.

Esta reorientación se puede lograr haciendo girar a gran velocidad el rotor respecto a la plataforma del giróstato. Para entender cualitativamente por qué se puede conseguir de esta manera la reorientación del giróstato, debemos recordar cómo evoluciona el espacio de fases (G_x, G_y, G_z) del giróstato no perturbado al aumentar el momento angular relativo h_z del rotor. Esta evolución está reflejada en la figura 3.2. En esta figura se aprecia la forma en que, partiendo del rotor en reposo relativo ($h_z = 0$), de los seis puntos de equilibrio iniciales se pasa primero a cuatro equilibrios, y finalmente se llega a un espacio de fases con sólo dos equilibrios estables en el eje \mathbf{b}_3 (que coincide con el eje del rotor), a través de dos bifurcaciones.

Observando esta evolución, es fácil imaginar que, al aumentar suficientemente el momento angular relativo h_z del rotor desde el reposo, las rotaciones iniciales de \mathbf{G} alrededor del eje \mathbf{b}_1 puedan verse “arrastradas” por las trayectorias heteroclínicas de manera que al final el eje principal \mathbf{b}_3 del giróstato termine aproximadamente paralelo a la dirección de \mathbf{G} . Así se podría eliminar, o al menos reducir, un fuerte movimiento de precesión del giróstato alrededor de la dirección de \mathbf{G} .

De este modo, si es necesario que el eje principal \mathbf{b}_3 del giróstato se mantenga paralelo a la dirección fija de \mathbf{G} , deberemos colocar el rotor en el giróstato de forma que su eje de giro coincida con dicho eje principal.

La reorientación es posible para cualquier eje del giróstato. De hecho, imprimiendo al rotor un momento angular relativo h_z suficientemente alto, se puede reorientar el giróstato de manera que el eje del rotor sea paralelo a \mathbf{G} , cualquiera que sea la dirección del eje del rotor, independientemente de que el eje del mismo coincida con un eje principal del giróstato. Esto se puede comprender recordando la expresión general (1.9) del hamiltoniano del giróstato no perturbado con tres rotores en tres direcciones cualesquiera, que dedujimos en el primer capítulo. Para el caso de un giróstato con un sólo rotor en una dirección cualquiera, su hamiltoniano consiste en una parte cuadrática en G_x, G_y, G_z y una parte lineal en G_x, G_y, G_z , en la cual aparecen las componentes h_x, h_y, h_z en el sistema de referencia \mathcal{B} del momento angular relativo \mathbf{h} . Por lo tanto, con un \mathbf{h} suficientemente grande, la parte lineal dominará sobre la cuadrática, que podríamos considerarla despreciable. En esta situación, el espacio de fases del giróstato sería muy parecido al del hamiltoniano estrictamente lineal, en el cual sólo existen dos puntos de equilibrio situados, precisamente, en la dirección del eje del rotor.

En definitiva, vemos que se puede reorientar al giróstato de forma que cualquiera de sus ejes coincida con la dirección de \mathbf{G} , y por lo tanto, permanezca fija en el espacio. Para conseguirlo, no hay más que disponer el eje del rotor en aquél eje del giróstato que queremos se mantenga fijo en el espacio, y hacer girar el rotor con un momento angular relativo suficientemente alto, aunque también se puede reorientar al giróstato en cualquier dirección haciendo girar adecuadamente a tres rotores colocados en los ejes principales del giróstato.

5.2 Reorientación en ausencia de perturbación

Para comprobar que la reorientación del giróstato se puede lograr mediante el giro relativo del rotor, y siguiendo el ejemplo de otros autores como Hubert (1980), hemos realizado numerosas simulaciones, mediante ordenador, del movimiento del giróstato conforme aumenta el momento angular relativo h_z .

El sistema de referencia \mathcal{E} fijo en el espacio lo vamos a elegir de forma que su eje \mathbf{e}_3 coincida con la dirección del momento angular total \mathbf{G} . Esta dirección es

la que queremos que tome el eje principal \mathbf{b}_3 del giróstato.

Con esta elección del sistema de referencia \mathcal{E} , y teniendo en cuenta la matriz de transformación entre los sistemas de referencia \mathcal{E} y \mathcal{B} (Goldstein, 1992, p. 187), la relación entre los ángulos de Euler y las componentes (G_x, G_y, G_z) del momento angular total \mathbf{G} en el sistema de referencia móvil \mathcal{B} tiene la forma

$$\begin{cases} G_x = G \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta, \\ G_y = G \cos \psi \operatorname{sen} \theta, \\ G_z = G \cos \theta. \end{cases}$$

Por consiguiente, si la orientación que preferimos para el giróstato es de manera que su eje \mathbf{b}_3 coincida con la del momento angular total \mathbf{G} , es decir, paralela al eje \mathbf{e}_3 , esto implica que el ángulo de nutación θ debe ser nulo, o lo que es lo mismo, $G = G_z$.

Para estudiar el efecto del giro relativo del rotor en la orientación del giróstato, realizamos las simulaciones del movimiento de éste siguiendo la evolución del ángulo de nutación θ . Para ello, a partir de unas condiciones iniciales (G_{x0}, G_{y0}, G_{z0}) , o lo que es igual, (ψ_0, θ_0) , integramos numéricamente las ecuaciones del movimiento del giróstato, empleando un método Runge–Kutta de quinto orden con paso fijo.

En estas simulaciones, comenzamos con el rotor en reposo relativo durante cierto intervalo de tiempo, a continuación, ponemos en marcha el rotor de forma que aumentamos linealmente el momento angular relativo h_z hasta un cierto valor máximo h_{zmax} , y a partir de ese instante, lo mantenemos constante durante otro periodo de tiempo. En cada paso de integración el algoritmo calcula el ángulo de nutación θ .

Hemos realizado simulaciones para distintas condiciones iniciales (ψ_0, θ_0) recorriendo el ángulo de nutación inicial θ_0 desde 0 hasta $\pi/2$ y el ángulo de spin inicial ψ_0 también desde 0 hasta $\pi/2$ debido a la simetría del problema respecto al ángulo de spin ψ .

Estamos interesados en conocer el conjunto de condiciones iniciales para las cuales, el efecto del giro del rotor es reorientar al giróstato de manera que su eje principal \mathbf{b}_3 termine paralelo o muy próximo a la dirección de \mathbf{G} . Esto quiere decir que el ángulo de nutación θ final debe ser nulo o suficientemente pequeño.

A partir de estas simulaciones hemos encontrado el conjunto de condiciones iniciales para las cuales el giro del rotor produce una correcta reorientación del

giróstato. Como así esperábamos, dicho conjunto lo forman dos zonas aproximadamente circulares situadas diametralmente opuestas en el espacio de fases (G_x, G_y, G_z) cuyos centros están situados en la intersección de S^2 con el eje \mathbf{b}_1 de momento de inercia máximo.

En la figura 5.1 aparece sombreado el conjunto de condiciones iniciales para las cuales el giro del rotor reorienta al giróstato con un ángulo de nutación final medio $\theta < \pi/9$. En la figura se observa cómo la zona sombreada se desplaza desde el eje principal \mathbf{b}_1 hasta el eje principal \mathbf{b}_3 conforme el momento angular relativo h_z aumenta desde 0 hasta un valor final de 0.8, atravesándose las dos bifurcaciones ya descritas en el capítulo 3.

La figura 5.2 refleja la evolución temporal del ángulo de nutación correspondiente a una de las trayectorias para las cuales el giro del rotor produce la deseada reorientación del giróstato. Las condiciones iniciales de esta trayectoria cuyo ángulo θ se representa en la figura 5.2 son $\theta_0 = 100^\circ$ y $\psi_0 = 90^\circ$. Las dos líneas verticales discontinuas representan el instante en que se pone en marcha el rotor, y el instante en que después se alcanza el valor h_{zmax} , y se detiene la aceleración del rotor. En este caso hemos elegido $h_{zmax} = 0.8$, valor para el cual, el sistema ya ha pasado por las dos bifurcaciones y han desaparecido las separatrices en el espacio de fases (G_x, G_y, G_z) .

En esta figura se observa cómo el ángulo de nutación se reduce desde un valor medio inicial de unos 90° , hasta un valor medio final de unos 17° . Es decir, el eje principal \mathbf{b}_3 del giróstato pasa de estar casi perpendicular a la dirección de \mathbf{G} , a estar aproximadamente paralelo, disminuyéndose así los movimientos de precesión y nutación o cabeceo.

Es interesante destacar que cuanto mayor es el momento final del rotor, menor es la variación del ángulo de nutación final, es decir, $\theta(t) \approx \text{cte}$. Esto es debido a que en el límite para $h_z \rightarrow \infty$ las soluciones serán de la forma $\theta(t) = \text{cte}$, a causa del predominio de la parte lineal del hamiltoniano. En este caso, las soluciones serían circunferencias sobre planos perpendiculares al eje \mathbf{b}_3 .

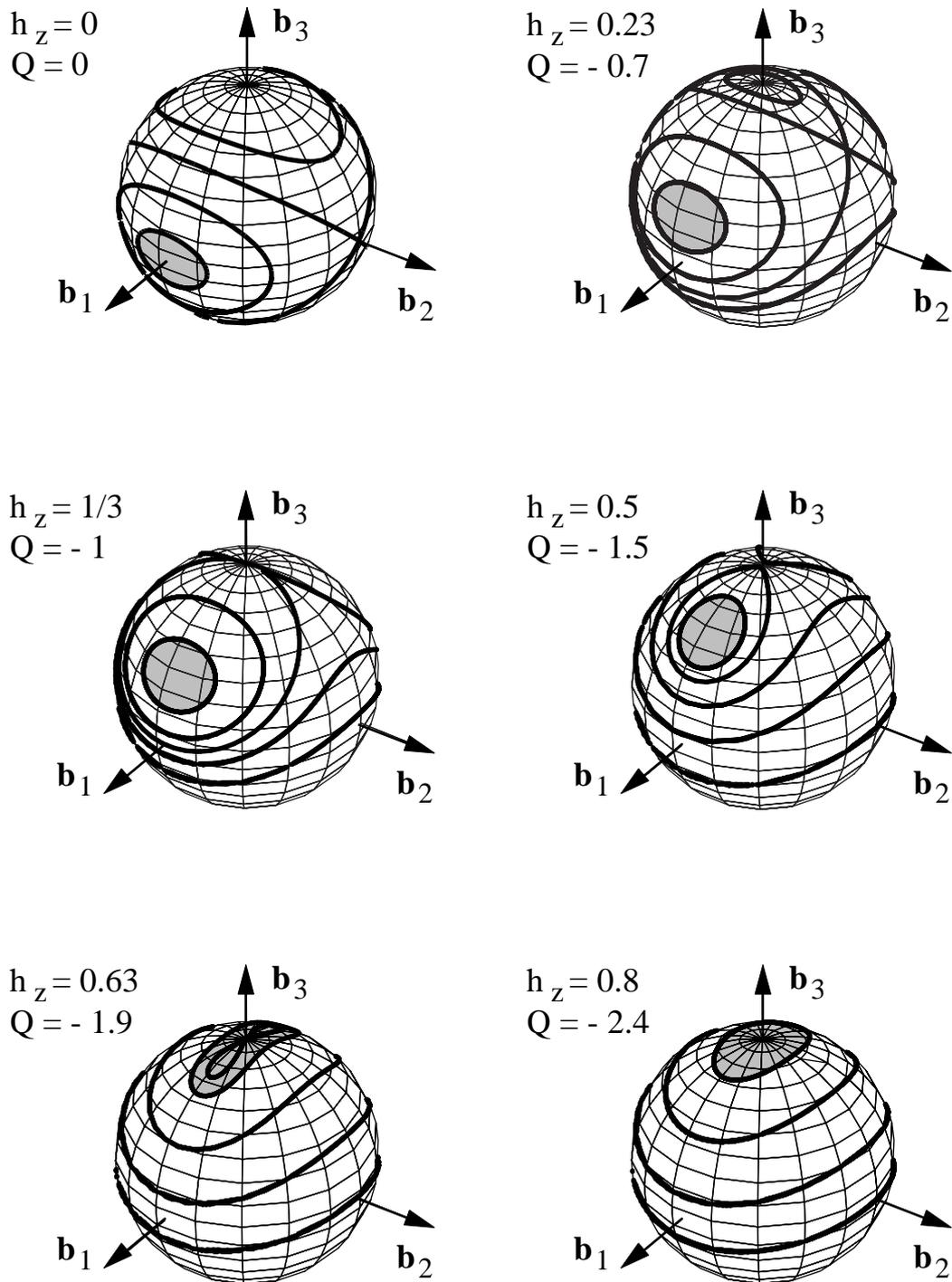


Figura 5.1: Evolución del espacio de fases del giróstatto no perturbado con un rotor en el eje b_3 conforme aumenta el momento angular relativo h_z . Aparece sombreada una de las zonas de condiciones iniciales que terminan con un ángulo de nutación final $\theta < \pi/9$. $a_{10} = 0.1, a_2 = 0.2, a_3 = 0.3$ (o $P = -1$).

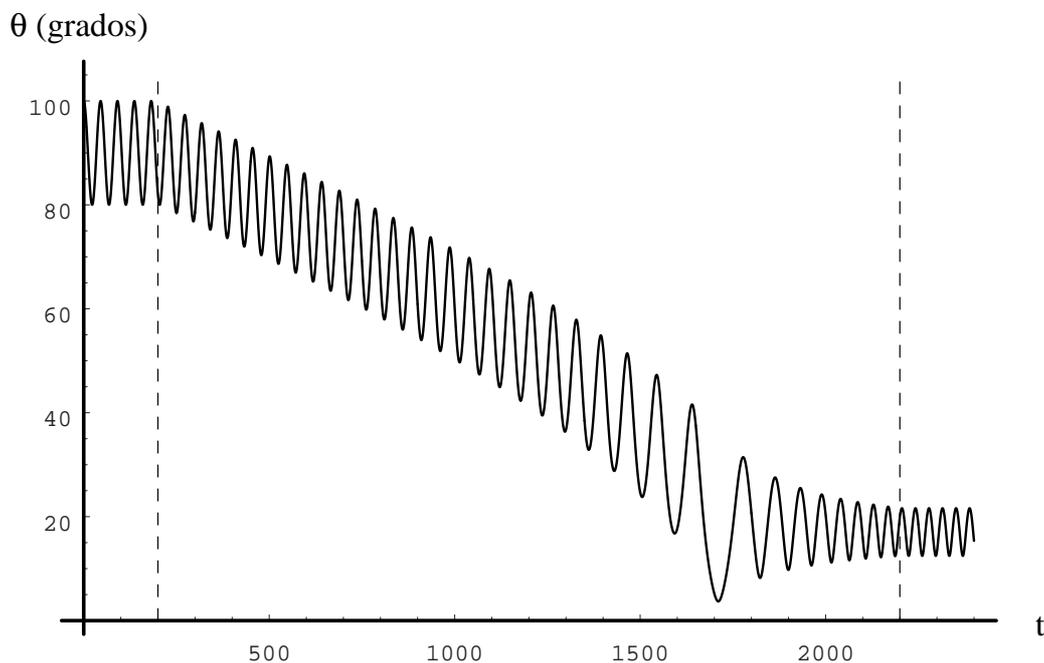


Figura 5.2: Evolución temporal del ángulo de nutación al aumentar el momento angular relativo h_z desde 0 hasta 0.8. Condiciones iniciales $\theta_0 = 100^\circ$ y $\psi_0 = 90^\circ$. $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.3$ (o $P = -1$).

5.3 Efecto de la perturbación en la reorientación del giróstato.

En los capítulos anteriores, hemos analizado el efecto que tiene el giro del rotor en la dinámica del sistema perturbado en relación con la eliminación del caos generado por la perturbación, sin preocuparnos por la orientación del giróstato respecto al sistema de referencia \mathcal{E} fijo en el espacio. En la sección anterior, hemos descrito el efecto del giro del rotor en la reorientación del giróstato en el espacio en ausencia de la perturbación. En esta sección vamos a estudiar la manera en que es alterado dicho proceso de reorientación cuando el giróstato se ve afectado por la misma perturbación que estamos considerando en toda esta memoria.

Para analizar el efecto de la perturbación en la reorientación del giróstato, hemos realizado numerosas simulaciones del movimiento del giróstato integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento del sistema perturbado. El momento angular relativo h_z aumenta linealmente desde 0 hasta un valor máximo $h_{zmax} = 0.8$ en todas las simulaciones.

Ya hemos visto que las condiciones iniciales adecuadas para la deseada reorientación (\mathbf{b}_3 paralelo a \mathbf{G}) están en dos zonas aproximadamente circulares alrededor del eje \mathbf{b}_1 . Nuestro objetivo ahora es, mediante simulaciones numéricas, analizar la influencia de la frecuencia ν y la amplitud ϵ de la perturbación en la modificación de las zonas de condiciones iniciales propicias para la reorientación deseada. Así hemos hecho diferentes simulaciones variando el valor de la frecuencia ν y dejando fijo el valor de la amplitud ϵ , y viceversa. Además esto lo hemos realizado para varios giróstatos de geometrías diferentes, aunque manteniendo en todos ellos la misma relación $a_{10} < a_2 < a_3$.

Para cada pareja de valores (ϵ, ν) de un mismo giróstato, hemos creado un mapa con coordenadas de condiciones iniciales (ψ_0, θ_0) desde 50° hasta 130° . En cada punto de ese mapa hemos reflejado el ángulo de nutación final medio que tiene el giróstato un tiempo después de que el rotor haya alcanzado su momento angular relativo máximo $h_{zmax} = 0.8$.

En dichos mapas hemos determinado la línea que delimita los ángulos de nutación finales menores que un cierto valor límite que hemos elegido arbitrariamente como umbral para la correcta reorientación deseada. Hay que notar que en estos mapas, dicha línea delimita a la vez la zona de condiciones iniciales (ψ_0, θ_0) adecuadas para una reorientación con un ángulo de nutación final menor que el umbral escogido. Hemos elegido como valor límite umbral $\theta_f = 30^\circ$, es decir, que consideramos como reorientaciones correctas todas aquéllas que terminan con un ángulo de nutación final medio $\theta_f < 30^\circ$.

En ausencia de la perturbación, como se puede apreciar en la figura 5.1, la línea que delimita las condiciones iniciales idóneas tiene una forma de gran regularidad puesto que es aproximadamente circular y cuyo centro es la intersección del eje \mathbf{b}_1 con S^2 .

En la figura 5.3 mostramos seis mapas que corresponden a un mismo giróstato con rotor en el eje \mathbf{b}_3 y con perturbaciones de amplitud ϵ creciente y frecuencia constante $\nu = 0.1$. En el eje de ordenadas de cada mapa se representa el ángulo de nutación inicial θ_0 en grados, y en el eje de abscisas el ángulo de spin inicial ψ_0 también en grados. La línea continua indica los límites de la zona de condiciones iniciales adecuadas para la reorientación deseada cuando el giróstato no está perturbado. Las zonas sombreadas representan las condiciones iniciales propicias para dicha reorientación cuando el giróstato se halla sujeto a la perturbación.

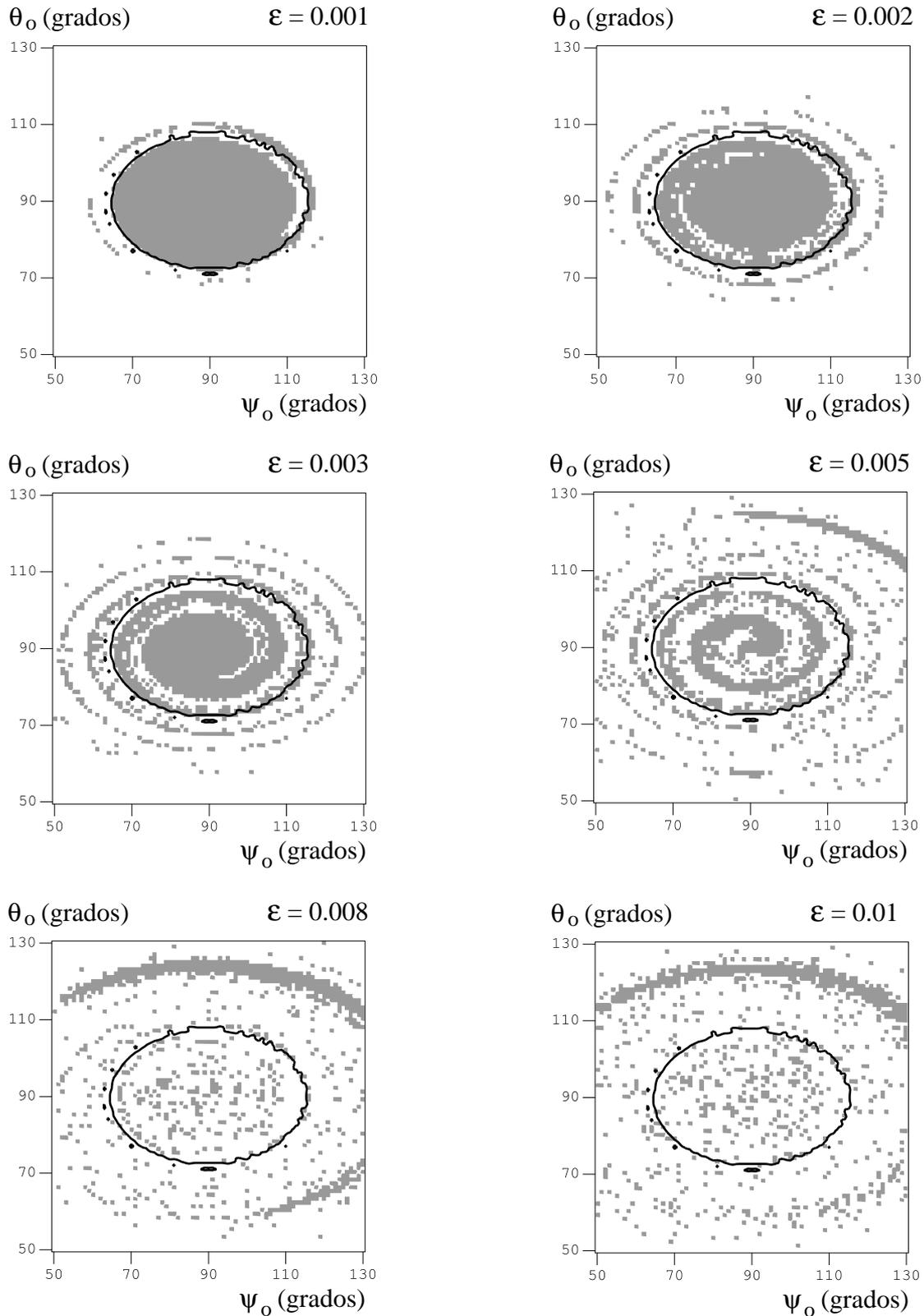


Figura 5.3: Evolución del conjunto de condiciones iniciales idóneas para una reorientación de $\theta_f < 30^\circ$, conforme aumenta la amplitud ϵ de la perturbación y para una frecuencia fija $\nu = 0.1$. $a_{10} = 0.1, a_2 = 0.2, a_3 = 0.3$.

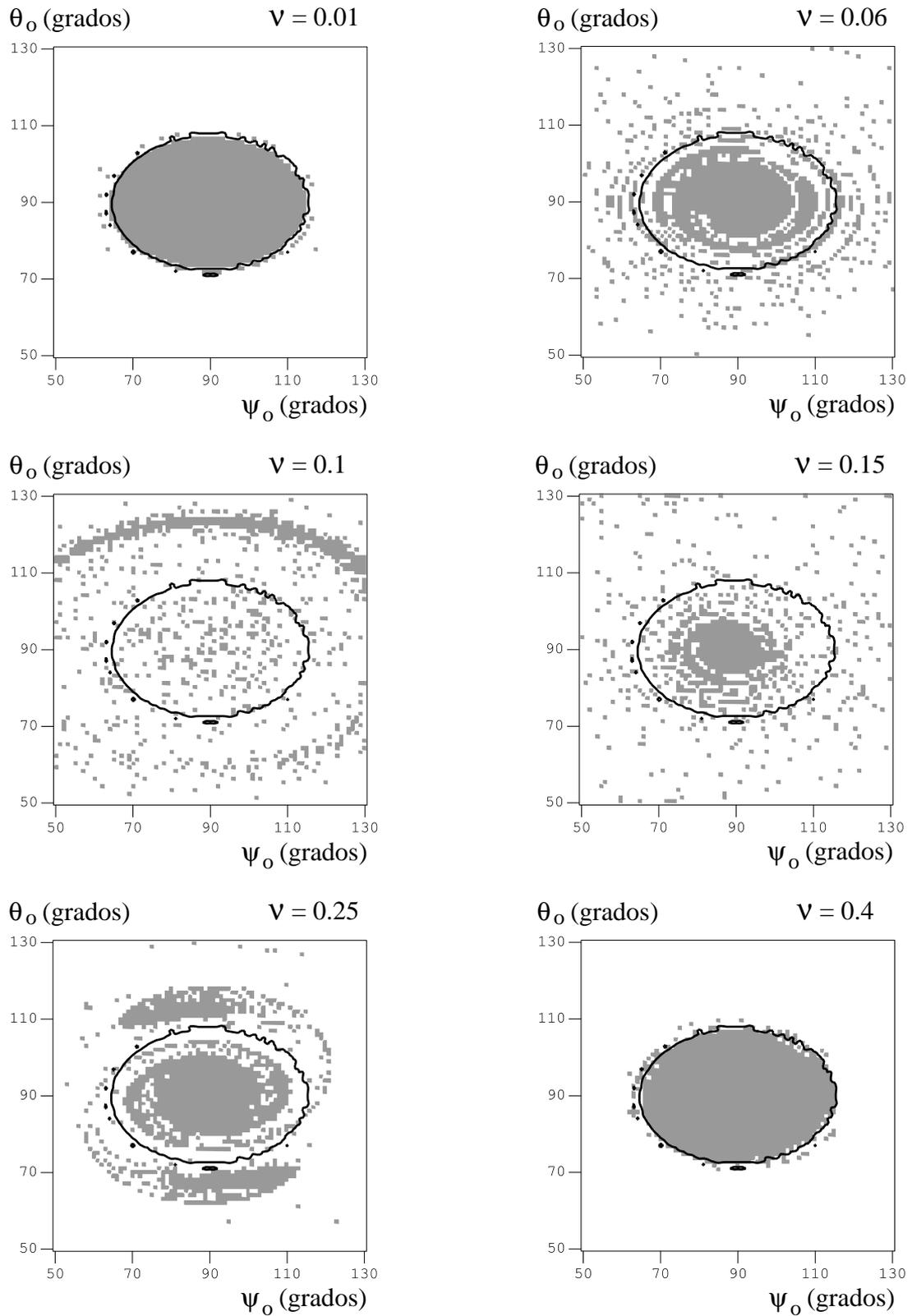


Figura 5.4: Evolución del conjunto de condiciones iniciales idóneas para una reorientación de $\theta_f < 30^\circ$, conforme aumenta la frecuencia ν de la perturbación y para una amplitud fija $\epsilon = 0.01$. $a_{10} = 0.1, a_2 = 0.2, a_3 = 0.3$.

En esta figura se observa cómo conforme aumenta la amplitud ϵ de la perturbación, la zona de condiciones iniciales oportunas se disgrega y disuelve progresivamente. Para $\epsilon = 0.001$ la zona de dichas condiciones iniciales prácticamente coincide con la zona correspondiente al giróstato no perturbado. Sin embargo, para $\epsilon = 0.01$, vemos que no existe una zona definida de condiciones iniciales apropiadas, sino que éstas se hallan distribuidas de manera prácticamente uniforme en todo el rango de condiciones iniciales (ψ_0, θ_0) , es decir, distribuidas al azar. Esto significa que para perturbaciones de amplitudes relativamente grandes, el proceso de correcta reorientación del giróstato resulta altamente aleatorio.

La figura 5.4 incluye otros seis mapas de ángulos de nutación final θ_f . Estos seis mapas corresponden a un giróstato también con el rotor en el eje \mathbf{b}_3 pero con perturbaciones de amplitud fija $\epsilon = 0.01$ y distintas frecuencia ν de valor creciente.

En dicha figura se puede comprobar que para frecuencias bajas y altas la zona de condiciones iniciales idóneas casi coincide con la misma zona perteneciente al giróstato sin perturbación. En cambio, para valores intermedios de la frecuencia, por ejemplo $\nu = 0.1$, dichas condiciones iniciales no se encuentran agrupadas en una zona definida, sino que están repartidas aleatoriamente por todo el mapa (ψ_0, θ_0) .

A partir de estas dos figuras podemos afirmar que el principal efecto de la perturbación en la reorientación del giróstato por giro del rotor, es que para un rango de frecuencias ν intermedias, el proceso de reorientación resulta altamente aleatorio y caótico.

5.4 Cuantificación del caos y función de Melnikov

Según lo visto en la sección anterior, parece adecuado introducir un parámetro cuantitativo que describa, en cierta manera, el grado de aleatoriedad que tiene el proceso de reorientación del giróstato bajo una determinada perturbación de amplitud ϵ y frecuencia ν . Este parámetro, que denotaremos por q , lo definiremos como

$$q = 1 - \frac{\Delta(\nu, \epsilon)}{\Delta(\nu, 0)},$$

y lo denominaremos *parámetro de caoticidad de la reorientación*.

En esta definición, $\Delta(\nu, 0)$ representa el área de la zona de condiciones iniciales adecuadas para una reorientación de $\theta_f < 30^\circ$ cuando el giróstato no está perturbado. $\Delta(\nu, \epsilon)$ es el área correspondiente a las condiciones iniciales que se encuentran dentro de $\Delta(\nu, 0)$ y que son propicias para dicha reorientación cuando el giróstato se encuentra sometido a la perturbación.

De la definición de este parámetro q y observando las figuras 5.3 y 5.4 se puede deducir que cuando $q \rightarrow 1$ el proceso de reorientación se torna fuertemente aleatorio ya que no hay zonas definidas de condiciones iniciales idóneas puesto que éstas se reducen a una colección de islas distribuidas al azar sobre el espacio de fases. En cambio, cuando $q \rightarrow 0$, aún existiendo perturbación sobre el giróstato, el proceso de reorientación prácticamente no se ve afectado por ella debido a que coinciden $\Delta(\nu, 0)$ y $\Delta(\nu, \epsilon)$.

El efecto de la perturbación sobre el proceso de reorientación del giróstato que estamos describiendo en esta sección, está relacionado con los conceptos de inestabilidad local, mezcla (mixing), y la entropía de Kolmogorov-Sinai (Zaslavsky *et al.*, 1991). Efectivamente, es fácil deducir que para ciertas amplitudes ϵ y frecuencias ν dos trayectorias con condiciones iniciales próximas, con el rotor parado, transcurrido un determinado intervalo de tiempo pueden terminar muy separadas entre sí una vez que el rotor ha alcanzado una velocidad angular relativa constante.

De esta manera, para dichas amplitudes y frecuencias de la perturbación, la forma regular inicial de la porción escogida del espacio de fases, al acelerarse el rotor, evoluciona en el tiempo de manera extremadamente complicada, acabando por disgregarse en toda la extensión del espacio de fases. Sin embargo, y como se puede apreciar en la figura 5.1, este fenómeno no se da en el caso del giróstato en ausencia de la perturbación.

Podemos decir por tanto, que el parámetro q cuantifica adecuadamente el grado de caoticidad del sistema. No obstante, existen otro tipo de medidas cuantitativas, como puede ser la anchura de la banda de estocasticidad del problema en el instante inicial, es decir, con el rotor todavía en reposo relativo. Parece lógico que ambas medidas estén, de alguna manera, interrelacionadas, puesto que cuanto mayor sea la banda de estocasticidad inicial, más fácilmente se tornará aleatorio el proceso de reorientación del giróstato.

En primer lugar, representamos gráficamente (Figura 5.5) la evolución del parámetro q con la amplitud ϵ y la frecuencia ν de la perturbación para un

giróstato de las mismas características que el correspondiente a las figuras 5.3 y 5.4.

La gráfica 5.5 a) nos indica cómo evoluciona q con la amplitud ϵ para una frecuencia constante $\nu = 0.3$. En esta gráfica se hace evidente que el parámetro q aumenta con la amplitud de una manera marcadamente lineal.

Por otro lado, en la gráfica 5.5 b) se muestra la variación de q respecto a ν para una amplitud fija $\epsilon = 0.01$. Podemos observar que, en efecto, el proceso de reorientación del giróstato se vuelve caótico solamente para un rango de frecuencias intermedias, en el cual q toma valores cercanos a la unidad. Este hecho ya lo hemos apreciado cualitativamente en la figura 5.4.

Las dos gráficas 5.5 a) y b) muestran el mismo comportamiento que reflejan la figuras 2.2 a) y b) del capítulo 3 que corresponden a la evolución del factor

$$\Delta\mathcal{H}(\epsilon, \nu) = \frac{(a_3 - a_2)\pi\epsilon\nu^2}{2(a_3 - a_{10})n_2^2 \sinh(\frac{\pi\nu}{2n_2})}$$

con la amplitud y la frecuencia de la perturbación. Ya indicamos que este factor nos proporciona una estimación teórica de la anchura de la banda de estocasticidad provocada por la perturbación.

La similitud entre las evoluciones del parámetro q y del factor $\Delta\mathcal{H}$ puede apreciarse en la figura 5.6 donde aparecen superpuestas la figura 5.5 y la evolución de $\Delta\mathcal{H}$ multiplicado por 100. En la gráfica 5.6 a) se representa el factor $100\Delta\mathcal{H}$ como función exclusiva de la amplitud ϵ , y en la gráfica 5.6 b) como función sólo de la frecuencia ν .

Mientras que existe una correlación muy alta entre la variación de $q(\epsilon)$ y de $100\Delta\mathcal{H}(\epsilon)$, ambas crecen paralelamente de forma lineal, se observa que el parámetro $q(\nu)$ se desvía bastante del factor $100\Delta\mathcal{H}(\nu)$ para cierto intervalo de frecuencias intermedias.

En el capítulo 3, encontramos que una desviación similar aparecía entre las evoluciones de las estimaciones numérica y teórica, $\Delta\mathcal{H}(\nu)$, de la banda de estocasticidad, también en frecuencias intermedias. En ese mismo capítulo explicamos que esa desviación entre ambas estimaciones era debida a fenómenos de absorción de resonancias que aparecen en el espacio de fases por efecto de la perturbación.

En este caso, pensamos que la desviación entre q y $100\Delta\mathcal{H}$ para esas mismas frecuencias intermedias tiene una explicación parecida, es decir, fenómenos de absorción de resonancias, aparición de nuevas resonancias dentro de la banda de

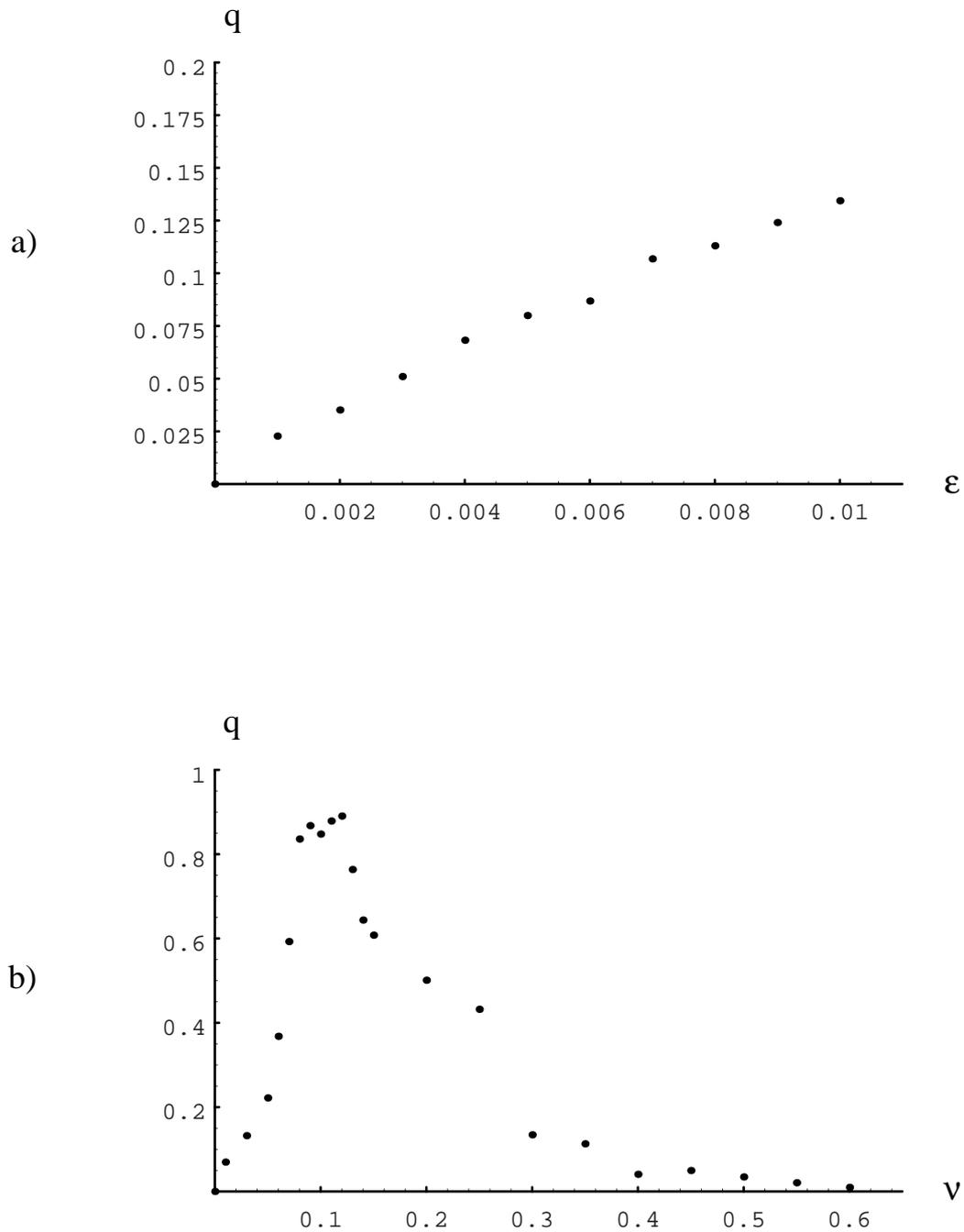


Figura 5.5: a) Evolución del parámetro q con la amplitud ϵ de la perturbación para una frecuencia fija $\nu = 0.3$. b) Evolución del parámetro q con la frecuencia ν de la perturbación para una amplitud fija $\epsilon = 0.01$. En ambos casos $a_{10} = 0.1, a_2 = 0.2, a_3 = 0.3$ y $h_{zmax} = 0.8$.

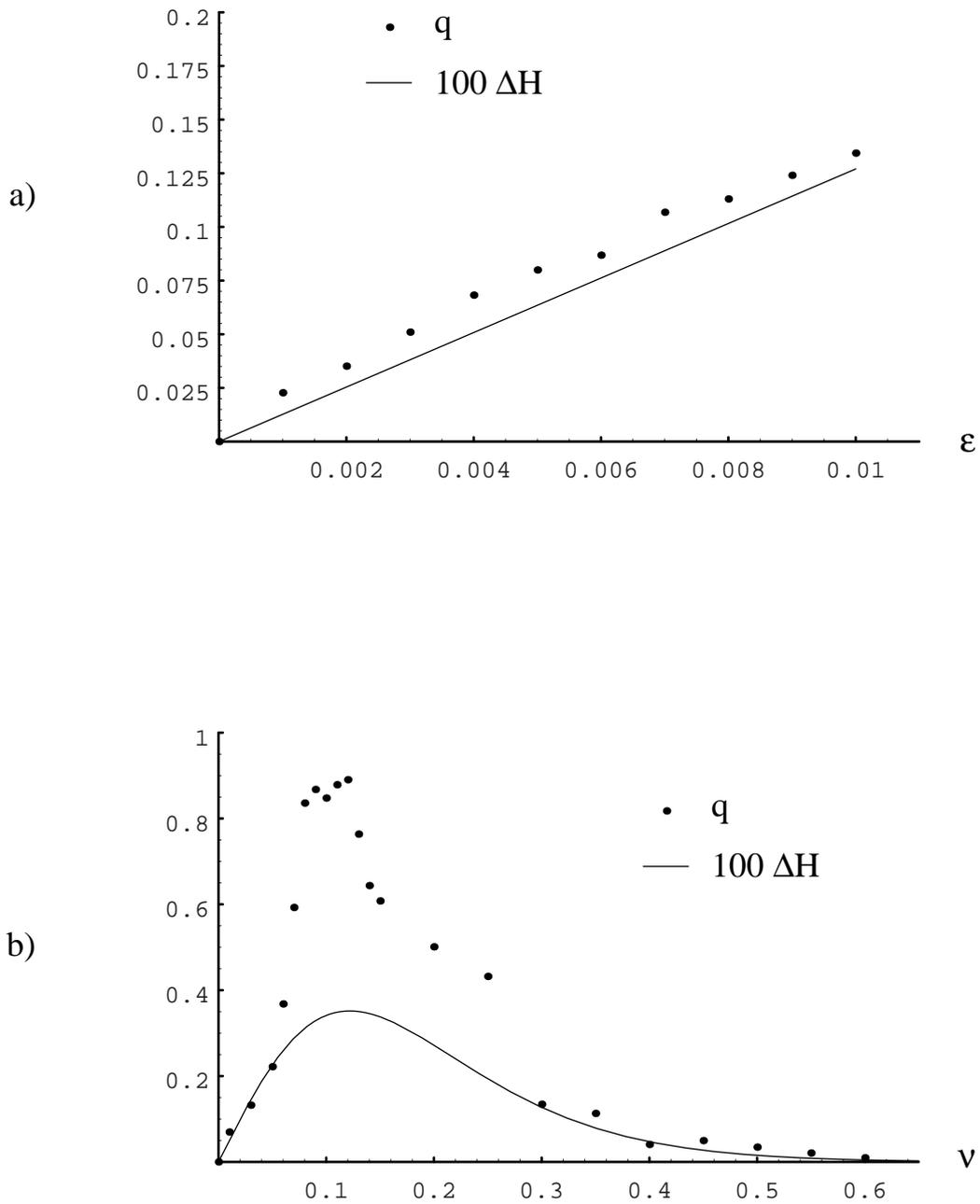


Figura 5.6: Comparación de las evoluciones del parámetro q y del factor $100\Delta\mathcal{H}$. a) Como funciones de la amplitud ϵ para una frecuencia fija $\nu = 0.3$. b) Como funciones de la frecuencia ν para una amplitud fija $\epsilon = 0.01$. En ambos casos $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.3$ y $h_{zmax} = 0.8$.

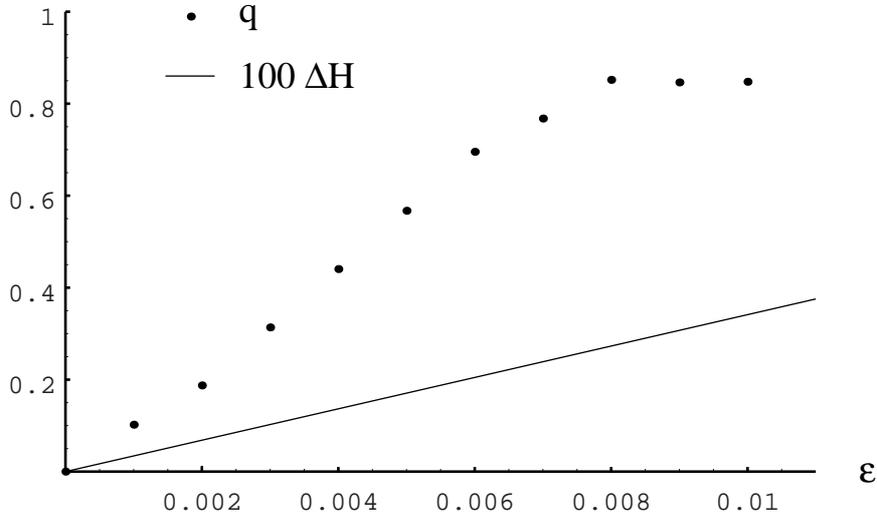


Figura 5.7: Comparación de las evoluciones del parámetro q y del factor $100\Delta\mathcal{H}$ como funciones de la amplitud ϵ para una frecuencia fija intermedia $\nu = 0.1$, $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.3$ y $h_{zmax} = 0.8$.

estocasticidad, o incluso la posible superposición entre bandas de estocasticidad correspondientes a la separatriz principal y a las de resonancias.

Esta desviación entre el parámetro q y el factor $100\Delta\mathcal{H}$ en el intervalo de frecuencias intermedias también se puede observar en la figura 5.7. En esta gráfica representamos $q(\epsilon)$ y $100\Delta\mathcal{H}(\epsilon)$ como funciones de la amplitud para la frecuencia intermedia fija $\nu = 0.1$, y el mismo giróstato que el de las figuras anteriores. Aquí vemos que, efectivamente, para dicha frecuencia el parámetro q se desvía bastante del factor $100\Delta\mathcal{H}$ en todo el rango de amplitudes $\epsilon \leq 0.01$, ya que $q(\epsilon)$ crece de forma mucho más rápida que $100\Delta\mathcal{H}(\epsilon)$ hasta alcanzar un valor próximo a la unidad.

5.5 Resonancias

Con el fin de dar una respuesta analítica a las desviaciones observadas entre q y $100\Delta\mathcal{H}$, o lo que es lo mismo, entre las estimaciones numérica y teórica de la anchura de la banda de estocasticidad, es preciso estudiar la influencia de las resonancias en el incremento de la anchura de la banda.

El fenómeno de las resonancias no lineales es una propiedad esencial de los sistemas dinámicos no lineales y caracteriza su respuesta a una perturbación ex-

terna. No es difícil ver cuál es el efecto de la perturbación si expresamos el hamiltoniano en variables ángulo acción y desarrollamos la perturbación en doble serie de Fourier (Zaslavsky *et al.*, 1991; Chirikov, 1979). En este sentido, si $\omega(I)$ es la frecuencia del problema sin perturbar y ν la frecuencia de la perturbación, siempre que se cumpla la relación de resonancia

$$m\omega(I) - n\nu = 0$$

aparecerán, en un espacio de fases rotante con frecuencia $n\nu$, m puntos críticos hiperbólicos conectados por trayectorias heteroclínicas que encierran en su interior m puntos críticos elípticos (ver figura 5.8). Esto es, una resonancia no lineal transforma la topología del espacio de fases. Además, en las proximidades de las trayectorias heteroclínicas pueden aparecer zonas de movimiento caótico en forma de *bandas de estocasticidad resonantes*.

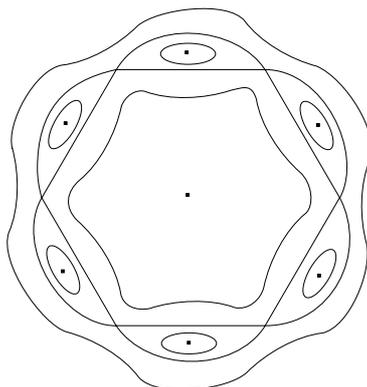


Figura 5.8: Resonancia 6:1.

El estudio de la formación de bandas de estocasticidad resonantes puede hacerse mediante una extensión del método de Melnikov (para más detalles ver Guckenheimer y Holmes, 1983).

Consideremos un sistema de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \epsilon g(\mathbf{x}, t) \quad (5.1)$$

con $\mathbf{x} = (u, v)$ y $g(\mathbf{x}, t)$ periódica de periodo T_0 en t donde $f(\mathbf{x})$ representa un campo hamiltoniano definido en \mathbb{R}^2 , es decir, existe $\mathcal{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_1 = \partial\mathcal{H}/\partial v$ y $f_2 = -\partial\mathcal{H}/\partial u$. Además suponemos que se cumple

A1.- Para $\epsilon = 0$ el sistema posee una separatriz Γ^0 formada por puntos de equilibrio hiperbólicos y órbitas homoclínicas o heteroclínicas $q^0(t)$.

A2.- El interior de Γ^0 está compuesto por una familia de órbitas periódicas $q^\alpha(t)$, $\alpha \in (-1, 0)$.

A3.- Sea $h_\alpha = \mathcal{H}(q^\alpha(t))$ y T_α el periodo de $q^\alpha(t)$. Entonces, T_α es una función diferenciable de h_α y $dT_\alpha/dh_\alpha > 0$ en el interior de Γ^0 .

Sea $q^\alpha(t - t_0)$ una órbita periódica de periodo $T_\alpha = mT_0/n$, con m y n primos entre sí. Definimos la *función subarmónica de Melnikov* como

$$M^{m/n}(t_0) = \int_0^{mT_0} \{f(q^\alpha(t)); g(q^\alpha(t), t + t_0)\} dt, \quad (5.2)$$

donde $\{f; g\}$ representa el paréntesis de Poisson de f y g .

Teorema 1: Si $M^{m/n}(t_0)$ tiene ceros simples y es independiente de ϵ , entonces (5.1) tiene una órbita, denominada subarmónica, de periodo mT_0 . Además si $M^{m/1}(t_0) = M^m(t_0)$, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M^m(t_0) = M(t_0),$$

siendo $M(t_0)$ la integral de Melnikov del sistema (5.1).

5.5.1 Análisis subarmónico

Aplicaremos el resultado anterior para demostrar la existencia de órbitas subarmónicas resonantes en el caso de un giróstato perturbado con los rotores en reposo, en concreto, para el sistema

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(a_{10}G_x^2 + a_2G_y^2 + a_3G_z^2) + \frac{1}{2}\epsilon G_x^2 \cos(\nu t) \quad (5.3)$$

En primer lugar, es necesario conocer la expresión de la frecuencia del giróstato cuando éste se comporta como un sólido rígido, es decir, en ausencia de perturbación y con los rotores en reposo.

De las ecuaciones (2.3) y (2.4) se deduce que G_x, G_y y G_z son funciones periódicas de periodo

$$\begin{cases} T = \frac{n_1}{F(\pi/2, k_1)}, & \mathcal{H} < \frac{a_2}{2} \\ T = \frac{n_3}{F(\pi/2, 1/k_1)}, & \mathcal{H} > \frac{a_2}{2} \end{cases}$$

Por tanto puede definirse una frecuencia $\omega = 2\pi/T$, que resulta ser la frecuencia correspondiente a la variable angular en variables ángulo-acción. En efecto, introduzcamos un par de variables canónicas conjugadas (L, ℓ) , similares a las de

Serret-Andoyer (Deprit, 1967; Deprit y Elipe, 1993), que representan las coordenadas cilíndricas del vector \mathbf{G}

$$G_x = \sqrt{1 - L^2} \cos \ell, \quad G_y = L, \quad G_z = \sqrt{1 - L^2} \sin \ell.$$

De aquí se deduce que L y ℓ son funciones periódicas con el mismo periodo que G_x , G_y y G_z . Así pues, se tiene que la acción viene dada por la expresión

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^T L(t) \dot{\ell}(t) dt.$$

Por tanto,

$$\omega = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \frac{1}{\partial I / \partial \mathcal{H}}$$

donde

$$\frac{\partial I}{\partial \mathcal{H}} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial T}{\partial \mathcal{H}} L(T) \dot{\ell}(t) + \int_0^T \frac{\partial L}{\partial \mathcal{H}} \dot{\ell} dt + \int_0^T L \frac{\partial \dot{\ell}}{\partial \mathcal{H}} dt \right].$$

Teniendo en cuenta la condición inicial $L(0) = 0$, así como que $\dot{\ell}$ es independiente de \mathcal{H} y $\partial L / \partial \mathcal{H} = 1 / \partial \mathcal{H} / \partial L$, resulta

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

De este modo tenemos que la condición de resonancia es, en este caso,

$$\begin{aligned} \frac{mT_0}{n} &= \frac{4K(k_1)}{n_1}, & \mathcal{H}_0 &< \frac{a_2}{2} \\ \frac{mT_0}{n} &= \frac{4K(1/k_1)}{n_3}, & \mathcal{H}_0 &> \frac{a_2}{2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

con $T_0 = 2\pi/\nu$.

A partir de la condición de resonancia (5.4) y para $\epsilon \neq 0$ podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema 2: *El sistema (5.3) posee órbitas periódicas resonantes de periodo mT_0/n , para m par y $n = 1$*

Para demostrar este resultado, es necesario, en primer lugar, calcular la integral subarmónica de Melnikov que, en el caso $\mathcal{H}_0 < a_2/2$, resulta ser

$$M^{m/n}(t_0) = \int_0^{mT_0} (a_2 - a_3) \epsilon \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \operatorname{sn}(n_1 t, k_1) \operatorname{cn}(n_1 t, k_1) \operatorname{dn}(n_1 t, k_1) \cos \nu(t + t_0) dt$$

y desarrollando $\cos \nu(t + t_0)$ se tiene

$$M^{m/n}(t_0) = (a_2 - a_3)\epsilon\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \left[\int_0^{mT_0} \operatorname{sn}(n_1t, k_1)\operatorname{cn}(n_1t, k_1)\operatorname{dn}(n_1t, k_1) \cos \nu t \cos \nu t_0 dt - \int_0^{mT_0} \operatorname{sn}(n_1t, k_1)\operatorname{cn}(n_1t, k_1)\operatorname{dn}(n_1t, k_1) \sin \nu t \sin \nu t_0 dt \right].$$

Teniendo en cuenta la paridad de las funciones llegamos a

$$M^{m/n}(t_0) = (a_3 - a_2)\epsilon\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \int_0^{mT_0} \operatorname{sn}(n_1t, k_1)\operatorname{cn}(n_1t, k_1)\operatorname{dn}(n_1t, k_1) \sin \nu t \sin \nu t_0 dt.$$

De la condición de resonancia (5.4) y haciendo el cambio de variable

$$z = n_1t; \quad dz = n_1dt,$$

se tiene que

$$M^{m/n}(t_0) = \frac{(a_3 - a_2)\epsilon\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}{n_1} \sin \nu t_0 \int_0^{4nK} \operatorname{sn}(z, k_1)\operatorname{cn}(z, k_1)\operatorname{dn}(z, k_1) \sin \frac{m\pi z}{2nK} dz.$$

Integrando por partes, haciendo

$$u = \sin\left(\frac{m\pi z}{2nK}\right), \quad dv = \operatorname{sn}(z, k_1)\operatorname{cn}(z, k_1)\operatorname{dn}(z, k_1)dz, \\ du = \frac{m\pi}{2nK} \cos\left(\frac{m\pi z}{2nK}\right) dz, \quad v = \operatorname{sn}^2(z, k_1)/2.$$

resulta

$$M^{m/n}(t_0) = \frac{(a_3 - a_2)m\pi\epsilon\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}{4nn_1K} \sin \nu t_0 \int_0^{4nK} \operatorname{sn}^2(z, k_1) \cos \frac{m\pi z}{2nK} dz$$

Teniendo en cuenta que el desarrollo en serie de Fourier la función $\operatorname{sn}^2(z, k_1)$ (ver Abad *et al.* 1994; Vallejo, 1995) es

$$\operatorname{sn}^2(z, k_1) = \frac{E - K}{k_1^2 K} - \frac{2\pi^2}{k_1^2 K^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1 - q^{2m}} \cos \frac{m\pi z}{K},$$

resulta que la integral subarmónica se anula salvo para $n = 1$ y m par, es decir, para $m = 2\bar{m}$ con $\bar{m} \in \mathbb{N}$. Por tanto, se obtiene que

$$M^m(t_0) = \frac{(a_2 - a_3)m\pi\epsilon\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}{2n_1K} \sin \nu t_0 \frac{2\pi^2}{k_1^2 K} \frac{\bar{m}q^{\bar{m}}}{1 - q^{2\bar{m}}}$$

donde $q = e^{-\pi K'/K}$ y entonces

$$M^m(t_0) = \frac{(a_2 - a_3)\bar{m}^2\pi^3\epsilon\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}{n_1 k_1^2 K^2 \operatorname{sh} \frac{\bar{m}\pi K'}{K}} \sin \nu t_0$$

y a partir de la condición de resonancia (5.4), se tiene, finalmente

$$M^m(t_0) = \frac{(a_2 - a_3)\pi\nu^2\epsilon\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}{n_1^3 k_1^2 \operatorname{sh} \frac{K'\nu}{n_1}} \sin \nu t_0.$$

que tiene ceros simples independientes de ϵ para m par y, por el Teorema 1, el sistema (5.3) posee órbitas subarmónicas de periodo mT_0 con m par. ■

Además, teniendo en cuenta que

$$2\mathcal{H} \longrightarrow a_2, \quad K' \longrightarrow \frac{\pi}{2}, \quad k_1 \longrightarrow 1$$

cuando $m \longrightarrow \infty$ resulta

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M^m(t_0) = 2M(t_0) = \frac{(a_3 - a_2)\pi\epsilon\nu^2}{(a_3 - a_1)n_2^2 \operatorname{sinh} \frac{\pi\nu}{2n_2}}.$$

Nótese que este resultado es el mismo que aparece en el Teorema 1 salvo el factor 2. Esto es debido a que la integral de Melnikov está calculada para una sola trayectoria heteroclínica conectando los dos puntos hiperbólicos del sistema (5.3), mientras que en la integral subarmónica la órbita periódica tendría como límite dos de las trayectorias heteroclínicas.

Aunque el Teorema 2 ha sido demostrado para $\mathcal{H}_0 < a_2/2$, se obtiene el mismo resultado para $\mathcal{H}_0 > a_2/2$, apareciendo la integral subarmónica

$$M^m(t_0) = \frac{(a_2 - a_3)\pi\nu^2\epsilon\Gamma_1\gamma_2\Gamma_3}{\frac{n_3^3}{k_1^2} \operatorname{sh} \frac{K'\nu}{n_3}} \sin \nu t_0.$$

5.6 Anchura de la banda de resonancia

Una vez probada la existencia de resonancias sería conveniente dar una estimación de la anchura de las bandas de estocasticidad resonantes con el fin de ver cómo éstas pueden superponerse a la banda principal.

Existen estimaciones sobre la anchura de la banda resonante para sistemas con dos grados de libertad (Perko, 1992) de la forma

$$\mathcal{H}_\epsilon(p, q, \theta, I) = F(q, p) + G(I) + \epsilon\mathcal{H}_1(q, p, \theta, I)$$

donde $\mathcal{H}_0 = F(q, p) + G(I)$ es un hamiltoniano integrable, $G'(I) > 0$ para $I > 0$ y el espacio de fases (q, p) contiene trayectorias cerradas homoclínicas o heteroclínicas. Pese a que el sistema (5.3) no responde a esta estructura, es posible reducirlo a la misma mediante una extensión canónica de las variables. De este modo, podemos adaptar la fórmula que permite estimar la anchura de la banda resonante de orden m . Así la estimación de la anchura de la banda de estocasticidad para una órbita resonante de orden m viene dada por

$$\Delta\mathcal{H}_m = 2\omega(\mathcal{H}_m) \sqrt{\frac{M_{max}^m - M_{min}^m}{\pi\bar{\omega}^m}}$$

donde

$$\bar{\omega}^m = T_0\omega(\mathcal{H}_m) \frac{d\omega(\mathcal{H}_m)}{d\mathcal{H}}$$

siendo \mathcal{H}_m la energía correspondiente a la órbita resonante, por lo que

$$\omega(\mathcal{H}_m) = \frac{\nu}{m}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{d\omega(\mathcal{H}_m)}{d\mathcal{H}} = \frac{n_1 [(a_2 - 2\mathcal{H})K(k_1) - (a_2 - a_1)E(k_1)]}{4(2\mathcal{H} - a_1)(a_2 - 2\mathcal{H})K^2(k_1)}$$

resulta, finalmente,

$$\Delta\mathcal{H}_m = \sqrt{\frac{16(2\mathcal{H} - a_1)(a_2 - 2\mathcal{H})(a_2 - a_3)K^2(k_1)\nu^4\epsilon\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}{n_1^4\pi mk_1^2 [(a_2 - 2\mathcal{H})K(k_1) - (a_2 - a_1)E(k_1)] \operatorname{sh} \frac{K'\nu}{n_1}}}, \quad (5.5)$$

donde Γ_1, Γ_2 y Γ_3 son los coeficientes que aparecen en las ecuaciones (2.3) y (2.4) y definidos junto a ellas en el capítulo 2.

Con la estimación dada por la fórmula (5.5) es posible ver cómo se superponen las bandas resonantes a la banda principal y así estudiar el efecto del incremento experimentado por el parámetro q de caoticidad de la reorientación.

Centrándonos en la resonancia 2:1 podemos calcular para qué valores de ν la banda principal y la banda resonante se solapan y de este modo corregir la amplitud de la anchura de la banda de estocasticidad. Esto es lo que hemos hecho

para un giróstato con $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.3$ y $\epsilon = 0.01$ y el resultado aparece reflejado en la figura 5.9. Aquí puede apreciarse cómo para valores bajos de ν la banda resonante queda totalmente dentro de la banda principal y éstas empiezan a solaparse para $\nu \approx 0.1$ dejando de hacerlo para $\nu \approx 0.15$. Nótese cómo el pico que aparece en esta figura da cuenta del incremento brusco de q precisamente en este rango de frecuencias. Compárese, también, esta figura con la figura 2.8 del capítulo 2, donde se ponía de manifiesto la discrepancia entre la anchura teórica de la banda de estocasticidad y la estimación numérica.

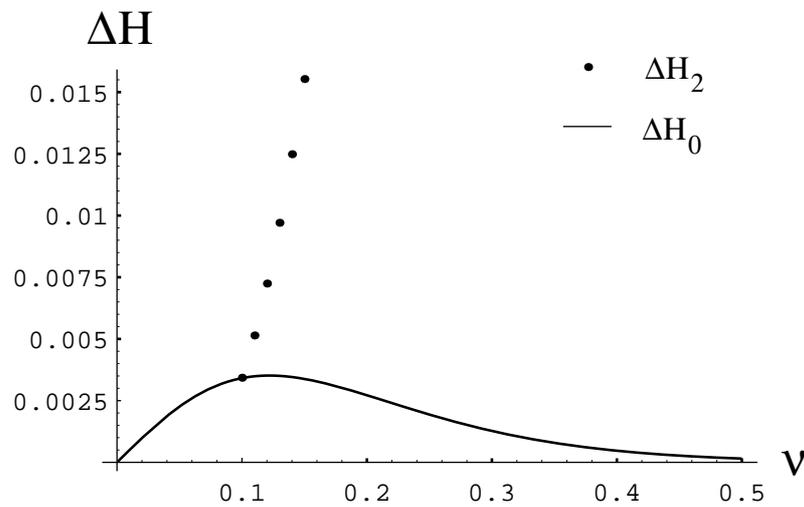


Figura 5.9: Superposición de la banda principal con la banda resonante 2 : 1 para $\epsilon = 0.01$, $a_{10} = 0.1$, $a_2 = 0.2$ y $a_3 = 0.3$.

De este modo podemos concluir que los picos observados en la figura 2.8, así como en la figura 5.6 b) son, como ya habíamos indicado en su momento, producto de la absorción de resonancias y que éstos pueden estimarse gracias al análisis subarmónico de Melnikov.

Conclusiones

Esta Memoria aporta una contribución a la comprensión de la dinámica de un giróstato triaxial en rotación libre con momentos de inercia variables.

Las contribuciones más significativas pueden resumirse en los siguientes puntos:

- ★ Determinación de la existencia de caos hetero/homoclínico con la determinación de la anchura de la banda de estocasticidad y su eliminación cuando el rotor alcanza un momento angular relativo suficiente.

- ★ Descripción de la dinámica en términos de secciones de Poincaré, haciendo especial hincapié en la influencia del rotor en la eliminación del caos.

- ★ Estudio del efecto de la perturbación en el proceso de reorientación del giróstato a través de un parámetro adecuado. En este sentido, tratamos de determinar el grado de aleatoriedad del proceso y lo relacionamos con el caos existente antes de la maniobra en términos de la anchura de la banda de estocasticidad.

- ★ Estudio analítico de la influencia de las resonancias no lineales en el proceso de reorientación y en la anchura de la banda de estocasticidad.

Quedaría por abordar el comportamiento del sistema cuando actúan dos o tres rotores simultáneamente. Este problema es más complejo ya que, aunque en el caso de dos rotores se conoce muy bien la estructura del flujo fásico del problema, no existen soluciones analíticas para las órbitas.

Por otra parte, faltaría por ver en qué medida influye la geometría del giróstato en el grado de caoticidad del problema y ver lo que pasa para giróstatos con simetría axial. En este sentido, sería preciso desarrollar algún método para poder tratar la existencia de caos en torno a las “separatrices” formadas por un conjunto denso de equilibrios.

También podrían abordarse otros problemas relacionados, sin más que someter al giróstato a otro tipo de perturbaciones como campos gravitatorios centrales o uniformes.

Apéndice A

Generación de caos por intersecciones homoclínicas.

Método de Melnikov

En este apéndice vamos a considerar un sencillo mecanismo que puede generar movimiento caótico en sistemas Hamiltonianos autónomos integrables: la introducción de una pequeña perturbación al sistema. También describimos un método debido a Melnikov (1963) que permite determinar si, efectivamente la perturbación añadida al sistema provoca caos en su dinámica.

Consideremos un sistema Hamiltoniano autónomo integrable de n grados de libertad, que posea puntos de equilibrio inestables hiperbólicos con índice de estabilidad menor que n . En \mathbb{R}^2 se trataría de puntos silla y por lo tanto, existen trayectorias separatrices que comienzan y terminan en el mismo punto silla (punto y trayectoria homoclínica), o separatrices que conectan dos puntos silla diferentes (puntos y trayectoria heteroclínica). En la figura A.1 se muestran dos espacios de fase de un sistema Hamiltoniano autónomo de un grado de libertad, en a) con un punto X_0 y trayectoria W_0^\pm homoclínica, y en b) con dos puntos X_0, Y_0 y dos trayectorias W_0^+, W_0^- heteroclínica. Una trayectoria homoclínica es doblemente asintótica al mismo punto homoclínico inestable para $t \rightarrow \pm\infty$. Una trayectoria heteroclínica tiende asintóticamente a un punto heteroclínico para $t \rightarrow \infty$, y a otro punto heteroclínico distinto para $t \rightarrow -\infty$.

La introducción en este sistema de una pequeña perturbación provoca la escisión, el desdoblamiento de cada trayectoria homoclínica (o heteroclínica) no

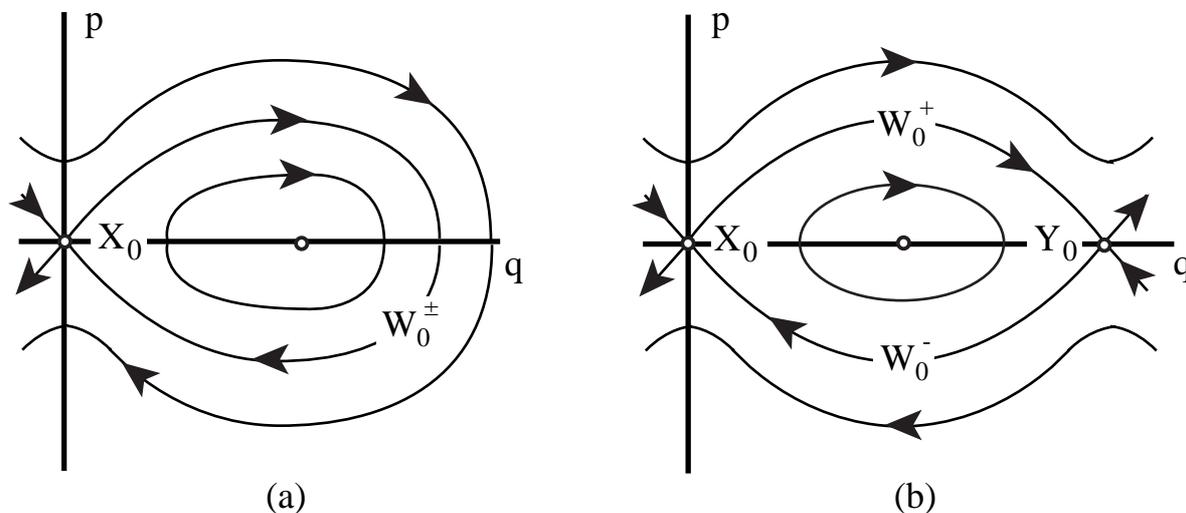


Figura A.1: a) Punto y trayectoria homoclínicos. b) Puntos y trayectorias heteroclínicos.

perturbada en dos nuevas trayectorias distintas: una inestable que partió de un punto silla en el pasado para $t \rightarrow -\infty$, y otra estable que alcanzará un punto silla para $t \rightarrow \infty$. Podemos pensar que cada par de estas nuevas trayectorias desdobladas, en ausencia de la perturbación se unían suavemente entre sí en el sistema Hamiltoniano inicial para formar las separatrices.

Dependiendo de las características de la perturbación que se añada, el desdoblamiento de cada separatriz en dos nuevas trayectorias diferentes puede producirse de las tres formas que indican la figura A.2. En la figura A.2 a) la trayectoria inestable que parte del punto homoclínico rodea y envuelve a la trayectoria sin intersectarse entre sí. Por el contrario, en la figura A.2 b) la trayectoria estable que termina en el punto homoclínico es la que rodea a la trayectoria inestable sin ninguna intersección entre ambas. En cambio, en el caso que muestra la figura A.2 c), las trayectorias estable e inestable se intersectan transversalmente en infinitos nuevos puntos homoclínicos que no existían en el sistema no perturbado.

En este último tipo de situación que muestra la figura A.2 c) las nuevas intersecciones entre las dos trayectorias desdobladas, producen que el movimiento sea extremadamente complicado en una banda alrededor de la separatriz no perturbada. En definitiva, la perturbación introducida genera una zona de movimiento caótico en la que aparecen las llamadas herraduras de Smale (Smale, 1967), y en la cual hay una dependencia muy sensible de las condiciones iniciales. En el interior de la nueva banda de estocasticidad también pueden existir pequeñas zonas de

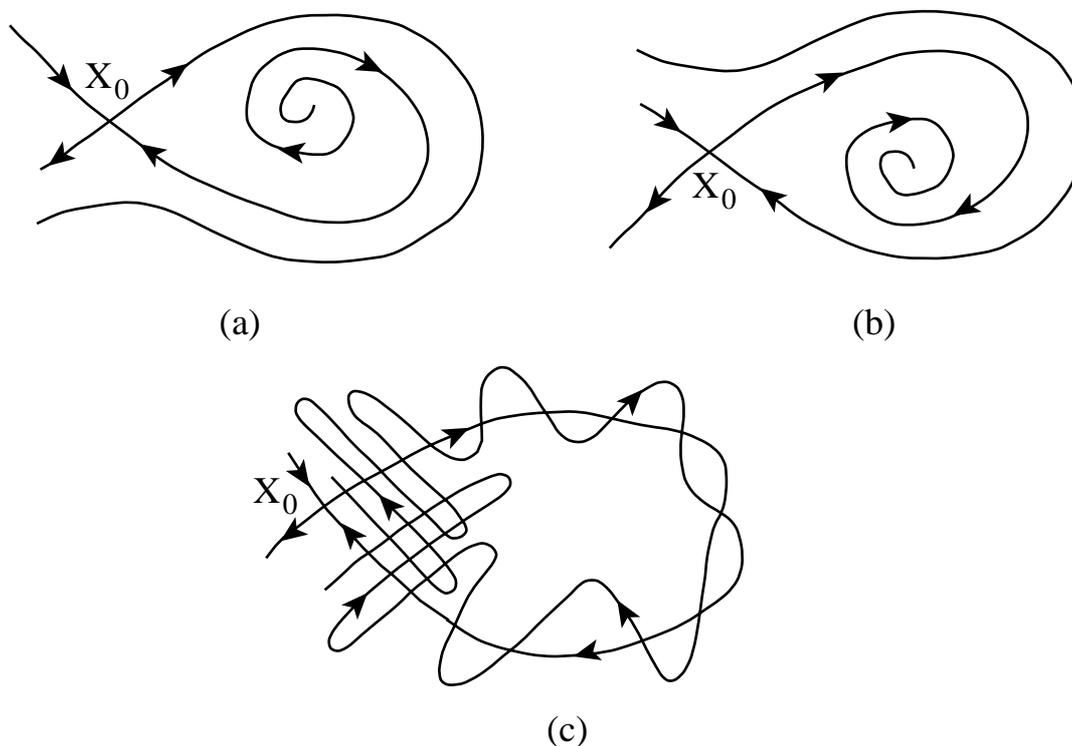


Figura A.2: Tipos de desdoblamiento que la perturbación puede producir en la separatriz.

movimiento regular con trayectorias periódicas.

Aunque una pequeña perturbación genérica provoca el desdoblamiento de la separatriz no perturbada, no necesariamente produce siempre la intersección entre las nuevas trayectorias desdobladas. Por esta razón, es interesante conocer un criterio que establezca la condición para que una perturbación dada provoque intersecciones homoclínicas entre las trayectorias desdobladas.

El método de Melnikov proporciona un criterio para determinar la existencia de intersecciones homoclínicas cerca de la separatriz del sistema no perturbado. A continuación vamos a explicar el fundamento de este método siguiendo las descripciones de Guckenheimer y Holmes (1983, pp. 184–190), y de Lichtenberg y Lieberman (1992, pp. 560–566). La idea básica del método es hacer uso de las soluciones del problema integrable no perturbado para calcular unas soluciones aproximadas del sistema perturbado.

Consideremos un sistema de un grado de libertad con Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{H}_0(\mathbf{x}) + \mathcal{H}_1(\mathbf{x}, t) = \mathcal{H}_0(\mathbf{x}) + \epsilon V(\mathbf{x}, t)$$

donde $\mathcal{H}_1(\mathbf{x}, t)$ es una pequeña perturbación periódica en el tiempo con periodo T

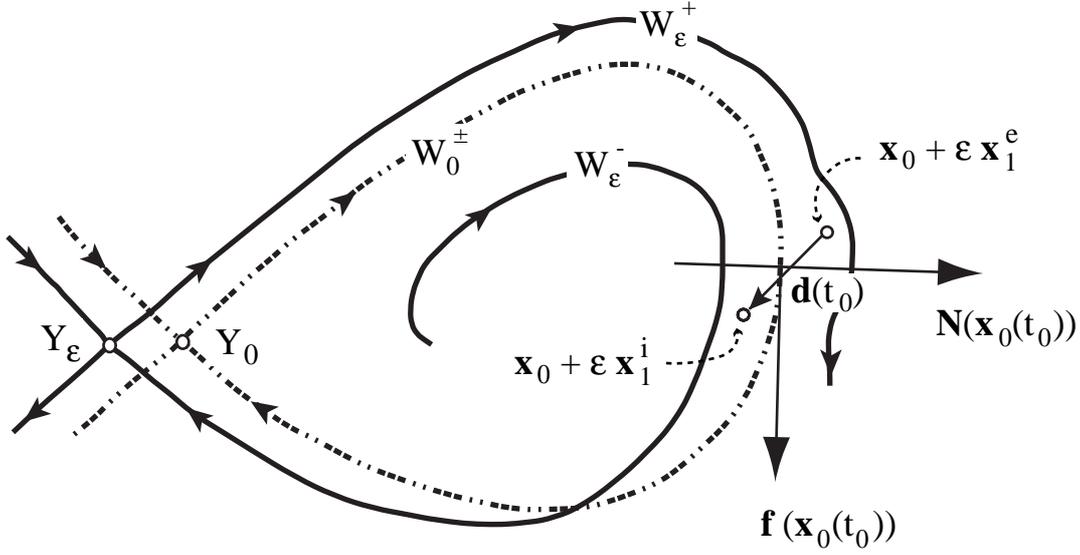


Figura A.3: Distancia entre las trayectorias W_ϵ^+ y W_ϵ^- desdobladas de la separatriz por la perturbación.

y dependiente del pequeño parámetro ϵ ; $\mathcal{H}_0(\mathbf{x})$ es el Hamiltoniano del sistema no perturbado, y $\mathbf{x} = (q, p)$ es el vector formado por la coordenada q y su momento canónico conjugado p .

Suponemos que el sistema no perturbado tiene un punto de equilibrio inestable hiperbólico, esto es, un punto silla Y_0 , y la correspondiente separatriz W_0^\pm , con trazo discontinuo en la figura A.3, que comienza y termina en dicho punto. Como hemos explicado anteriormente, al añadir la perturbación $\mathcal{H}_1(\mathbf{x}, t)$, la separatriz W_0^\pm se desdobla en dos trayectorias distintas: una estable, W_ϵ^+ , y otra inestable, W_ϵ^- , ambas en trazo continuo en la figura A.3.

El método se apoya en la teoría de perturbaciones, ya que se basa en el hecho de que las trayectorias desdobladas W_ϵ^\pm se mantienen próximas a la separatriz no perturbada W_0^\pm .

Las ecuaciones de movimiento del sistema no perturbado son

$$f_1(\mathbf{x}) = \dot{q}_0 = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p}, \quad f_2(\mathbf{x}) = \dot{p}_0 = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial q}, \quad (\text{A.1})$$

o vectorialmente,

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) = \dot{\mathbf{x}}_0 = (\dot{q}_0, \dot{p}_0)$$

y las ecuaciones de movimiento del sistema perturbado son

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial p} = f_1(\mathbf{x}) + \epsilon g_1(\mathbf{x}, t), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q} = f_2(\mathbf{x}) + \epsilon g_2(\mathbf{x}, t),\end{aligned}$$

donde

$$g_1 = \frac{\partial V}{\partial p}, \quad g_2 = \frac{\partial V}{\partial q}.$$

Estas ecuaciones las podemos escribir en forma más compacta, mediante notación vectorial como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.2})$$

con $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{q}, \dot{p})$ y $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$.

Si llamamos $\mathbf{x}_0(t)$ a la solución del sistema no perturbado correspondiente a la trayectoria de la separatriz W_0^\pm , tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{Y}_0.$$

Por otra parte, como las trayectorias desdobladas W_ϵ^\pm se mantienen próximas a la separatriz no perturbada W_0^\pm , podemos escribir las soluciones estable \mathbf{x}^e e inestable \mathbf{x}^i de las trayectorias desdobladas W_ϵ^\pm de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^e(t, t_0) &= \mathbf{x}_0(t - t_0) + (\delta \mathbf{x})^e(t, t_0) = \mathbf{x}_0(t - t_0) + \epsilon \mathbf{x}_1^e(t, t_0) + \dots, \\ \mathbf{x}^i(t, t_0) &= \mathbf{x}_0(t - t_0) + (\delta \mathbf{x})^i(t, t_0) = \mathbf{x}_0(t - t_0) + \epsilon \mathbf{x}_1^i(t, t_0) + \dots,\end{aligned}$$

donde t_0 es un instante inicial arbitrario.

Sustituyendo ahora estas expresiones de \mathbf{x}^e y \mathbf{x}^i en la ecuación (A.2) queda

$$\dot{\mathbf{x}}_0 + \epsilon \dot{\mathbf{x}}_1^{e,i} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.3})$$

Como las trayectorias W_ϵ^\pm permanecen cerca de W_0^\pm , podemos desarrollar en serie de Taylor, hasta primer orden, las funciones $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{e,i})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{e,i}, t)$ en torno a la solución \mathbf{x}_0 de la separatriz no perturbada,

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{e,i}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \cdot \delta \mathbf{x}^{e,i} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \epsilon \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_1^{e,i} + \dots, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^{e,i}, t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, t) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_0) \cdot \delta \mathbf{x}^{e,i} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, t) + \epsilon \mathbf{G}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_1^{e,i} + \dots,\end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ y $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$ son las matrices Jacobianas de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ evaluadas en la solución $\mathbf{x}_0(t - t_0)$ de la separatriz no perturbada.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial p} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}_0}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial q} & \frac{\partial g_1}{\partial p} \\ \frac{\partial g_2}{\partial q} & \frac{\partial g_2}{\partial p} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}_0}.$$

Si sustituimos las expresiones (A.4) en la ecuación diferencial (A.3), y despreciamos términos de segundo orden en ϵ , obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}}_0 + \epsilon \dot{\mathbf{x}}_1^{e,i} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \epsilon \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_1^{e,i} + \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, t)$$

y teniendo en cuenta que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \dot{\mathbf{x}}_0$

$$\dot{\mathbf{x}}_1^{e,i} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_1^{e,i} + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, t) \quad (\text{A.5})$$

de donde se pueden calcular las soluciones $\mathbf{x}_1^{e,i}$.

El vector $\mathbf{d}(t, t_0)$ que describe la separación de las trayectorias desdobladas en un cierto instante t viene dado por

$$\mathbf{d}(t, t_0) = \mathbf{x}^i(t, t_0) - \mathbf{x}^e(t, t_0) = \epsilon [\mathbf{x}_1^i(t, t_0) - \mathbf{x}_1^e(t, t_0)].$$

Llamemos $\mathbf{N}(t, t_0)$ al vector normal a la separatriz no perturbada en su punto $\mathbf{x}_0(t)$,

$$\mathbf{N}(t, t_0) = (-f_2(\mathbf{x}_0(t)), f_1(\mathbf{x}_0(t)))^T.$$

Por lo tanto, podemos definir la “distancia” D entre las trayectorias desdobladas W_ϵ^+ y W_ϵ^- como la proyección del vector $\mathbf{d}(t, t_0)$ sobre la dirección de la normal $\mathbf{N}(t, t_0)$, es decir,

$$D = \frac{\mathbf{N}(t, t_0)}{|\mathbf{N}(t, t_0)|} \cdot \mathbf{d}(t, t_0).$$

Si definimos el operador \wedge como $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ podemos escribir

$$D = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \mathbf{d}(t, t_0)}{|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t))|} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge [\mathbf{x}_1^i(t, t_0) - \mathbf{x}_1^e(t, t_0)]}{|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t))|} \epsilon$$

o bien,

$$D = \frac{\epsilon}{|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t))|} (D^i - D^e) \quad (\text{A.6})$$

donde

$$D^{e,i}(t, t_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \mathbf{x}_1^{e,i}(t, t_0).$$

Vamos a calcular ahora la derivada temporal de la “distancia” D^e ,

$$\begin{aligned} \dot{D}^e &= \frac{dD^e}{dt} = \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \mathbf{x}_1^e(t, t_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \dot{\mathbf{x}}_1^e(t, t_0) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \cdot \dot{\mathbf{x}}_0 \wedge \mathbf{x}_1^e(t, t_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \dot{\mathbf{x}}_1^e(t, t_0). \end{aligned}$$

Como $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \dot{\mathbf{x}}_0$ y aplicando la ecuación (A.5) tenemos que

$$\dot{D}^e = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \mathbf{x}_1^e(t, t_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_1^e(t, t_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t))$$

Los dos primeros términos de la ecuación anterior se pueden combinar para dar

$$\dot{D}^e = (\text{Traza } \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \mathbf{x}_1^e(t, t_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t)).$$

Pero como estamos considerando un sistema hamiltoniano, si tenemos en cuenta las ecuaciones (A.1) resulta que

$$\text{Traza } \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial q} \right)_{\mathbf{x}_0} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p} \right)_{\mathbf{x}_0} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial p \partial q} \right)_{\mathbf{x}_0} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial q \partial p} \right)_{\mathbf{x}_0} = 0$$

y por tanto

$$\dot{D}^e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t)).$$

En la “distancia” D^e interviene la trayectoria estable W_ϵ^- , por lo tanto, ahora debemos integrar la última ecuación desde t_0 hasta ∞ , de manera que

$$D^e(\infty, t_0) - D^e(t_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t - t_0)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t - t_0), t) dt,$$

Sin embargo, como en la separatriz no perturbada $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{Y}_0$ tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) = 0$$

con lo cual resulta que

$$D^e(\infty, t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \mathbf{x}_1^e(t, t_0)) = 0.$$

Por lo tanto,

$$D^e(t_0, t_0) = - \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t - t_0)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t - t_0), t) dt. \quad (\text{A.7})$$

De manera similar, si calculamos la derivada temporal de la “distancia” D^i obtenemos la misma expresión

$$\dot{D}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t))$$

pero como en D^i está implicada la trayectoria inestable W_ϵ^+ , debemos integrar ahora esta última ecuación desde $-\infty$ hasta t_0 ,

$$D^i(t_0, t_0) - D^i(-\infty, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t - t_0)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t - t_0), t) dt.$$

Igual que anteriormente, debido a que en la separatriz homoclínica $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{Y}_0$, resulta que

$$D^i(-\infty, t_0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \wedge \mathbf{x}_1^i(t, t_0)) = 0,$$

y por tanto

$$D^i(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t - t_0)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t - t_0), t) dt. \quad (\text{A.8})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.7) y (A.8) en la ecuación (A.6) podemos expresar la “distancia” D entre las trayectorias desdobladas como

$$D = \frac{\epsilon}{|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t))|} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t - t_0)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t - t_0), t) dt.$$

Si definimos la función de Melnikov $M(t_0)$ como

$$M(t_0) = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t - t_0)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t - t_0), t) dt,$$

la “distancia” D entre las trayectorias desdobladas se puede escribir de la forma

$$D = \frac{M(t_0)}{|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t))|}.$$

De esta manera, la función de Melnikov $M(t_0)$ representa una buena medida de la separación de las trayectorias desdobladas W_ϵ^+ y W_ϵ^- .

En el caso, como el nuestro, de que la función de perturbación $\epsilon \mathbf{g}$ se derive de una función Hamiltoniana dependiente del tiempo (ver Ozorio, 1990, pp. 50–53)

$$\epsilon g_1 = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial p}, \quad \epsilon g_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q},$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f} \wedge \mathbf{g} dt = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 g_2 - f_2 g_1) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial q} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial p} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathcal{H}_0(\mathbf{x}_0(t - t_0)), \mathcal{H}_1(\mathbf{x}_0(t - t_0), t) \} dt, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde $\{ \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1 \}$ es el paréntesis de Poisson entre el Hamiltoniano no perturbado y la perturbación añadida. Esta ecuación (A.9) es precisamente la que utilizamos en esta memoria.

Finalmente, podemos concluir que si la función de Melnikov $M(t_0)$ tiene ceros simples y son independientes del parámetro ϵ , entonces para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, las dos trayectorias desdobladas W_ϵ^+ y W_ϵ^- se intersectan transversalmente. Este resultado nos permite comprobar la existencia de intersecciones transversales homoclínicas, que implican la presencia de herraduras de Smale, dependencia sensible de las condiciones iniciales, y en definitiva movimiento caótico en una banda alrededor de la separatriz no perturbada.

Bibliografía

A. Abad, A. Elipe y M. Vallejo (1994), “Automated Fourier Series Expansions for Elliptic Functions”. *Mechanics Research Communications*, **21**, 361–366.

V. I. Arnold (1989), *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag, New York.

M. Arribas y A. Elipe (1993), “Attitude Dynamics of a Rigid Body on a Keplerian Orbit: A Simplification”. *Celestial Mechanics*, **55**, 243–247.

R. A. Broucke (1993), “On the use of Poincaré Surfaces of Section in Rigid Body Motion”. *Journal of Astronautical Sciences*, **4**, 153–162.

J. A. Cavas y A. Viguera (1994), “An integrable case of a rotational motion analogous to that of Lagrange and Poisson for a gyrostat in a Newtonian force field”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **60**, 317–330.

B. V. Chirikov (1979), “A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems”. *Physics Reports*, **52**, 263–379.

R. Cid y A. Viguera (1985), “About the problem of motion of n gyrostats: I. The first integrals”. *Celestial Mechanics*, **36**, 155–162.

J. E. Cochran, B. H. Shu y S. D. Rews (1982), “Attitude motion of asymmetric dual-spin spacecraft”. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, **5**, 37–42.

J. E. Cochran y P. H. Shu (1983), “Attitude motion of spacecraft with skewed internal angular momenta”. *The Journal of the Astronautical Sciences*, **XXXI**, 203–215.

D. David, D. Holm y M. V. Tratnik (1990), “Hamiltonian Chaos in Nonlinear Optical Polarization Dynamics”. *Phys. Rep.*, **187**, 281–367.

A. Deprit (1967), “Free rotation of a rigid body studied in phase plane”. *American Journal of Physics*, **35**, 424–428.

A. Deprit y A. Elipe (1993), “Complete reduction of the Euler–Poinsot problem”. *Journal of Astronautical Sciences* **41**, 603–628.

H. Dankowicz (1996), “Looking for chaos. An extension an alternative to Melnikov’s method”. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **6**, 485–496.

H. Dankowicz (1997), “Escape of particles orbiting asteroids in the presence of radiation pressure through separatrix splitting”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **67**, 63–85.

A. Elipe y S. Ferrer (1994), “Reductions, Relative Equilibria and Bifurcations in the Generalized van der Waals Potential: Relation to the Integrable Cases”. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 985–988.

A. Elipe, M. Arribas y A. Riaguas (1997), “Complete analysis of bifurcations in the axial gyrostat problem”. *Journal of Physics A*, **30**, 587–601.

A. Elipe y V. Lanchares (1997a), “Phase flow of an axially symmetrical gyrostat with one constant rotor”. *J. Math. Phys.*, **38**, 3533–3544.

A. Elipe y V. Lanchares (1997b), “Two equivalent problems: Gyrostats in free motion and parametric quadratic Hamiltonians”. *Mechanics Research Communications*, **24**, 583–590.

J. Frauendiener (1995), “Quadratic Hamiltonians on the unit sphere”. *Mechanics Research Communications*, **22**, 313–317.

P. Glendinning y L. P. Perry (1997), “Melnikov Analysis of chaos in a simple epidemiological model”. *Journal of Mathematical Biology*, **35**, 359–373.

H. Goldstein(1992), *Mecánica Clásica*. Editorial Reverté, Barcelona.

I.S. Gradshteyn y I.M. Ryzhik (1980), *Table of integrals, series and products*. Academic Press, San Diego.

J. Guckenheimer y P. Holmes (1983), *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer–Verlag, New York.

- F. J. Hale (1994), *Introduction to space flight*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- C. D. Hall y R.H. Rand (1994), “Spinup dynamics of axial dual spin spacecraft”. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **17**, 30–37.
- C. D. Hall (1995a), “Spinup dynamics of gyrostats”. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **18**, 1177–1183.
- C. D. Hall (1995b), “Resonance capture in axial gyrostats”. *The Journal of the Astronautical Sciences*, **43**, 127–138.
- C. D. Hall (1995c), “Spinup dynamics of biaxial gyrostats”. *The Journal of the Astronautical Sciences*, **43**, 263–275.
- C. D. Hall (1996), “Momentum transfer in two-rotor gyrostats”. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **19**, 1157–1161.
- C. D. Hall (1997), “Momentum transfer dynamics of a gyrostat with a discrete damper”. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **20**, 1072–1075.
- P. J. Holmes y J. E. Marsden (1983), “Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups”. *Indiana University Mathematics Journal*, **32**, 273–309.
- C.H. Hubert (1980), *An Attitude Acquisition Technique for Dual-Spin Spacecraft*. Tesis Doctoral, Cornell University. Ithaca, New York.
- P. C. Hughes (1986), *Spacecraft attitude dynamics*. John Wiley & Sons, New York.
- J. L. Junkins y J. D. Turner (1986), *Optimal spacecraft rotational maneuvers*. Elsevier, Amsterdam.
- J. Koiller (1984), “A mechanical system with a “wild” horseshoe”. *Journal of Mathematical Physics*, **25**, 1599–1604.
- H. A. Kramers (1923), “Über die quantelung rotierender moleküle”. *Z. Phys.*, **13**, 343–350.

- P. S. Krishnaprasad (1985), “Lie-Poisson structures, dual-spin spacecraft and asymptotic stability”. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, **9**, 1011–1035.
- J. D. Lambert (1976), *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*. John Willey & Sons, London.
- V. Lanchares (1993), *Sistemas dinámicos bajo la acción del grupo $SO(3)$: El caso de un Hamiltoniano cuadrático*. Tesis Doctoral. Publicaciones del Seminario Matemático García Galdeano. Serie II, No. 44. Universidad de Zaragoza.
- V. Lanchares y A. Elipe (1995a), “Bifurcations in Biparametric Quadratic Potentials”. *Chaos*, **5**, 367–373.
- V. Lanchares y A. Elipe (1995b), “Bifurcations in Biparametric Quadratic Potentials II”. *Chaos*, **5**, 531–535.
- V. Lanchares, M. Iñarrea, J. P. Salas, J. D Sierra y A. Elipe (1995), “Surfaces of Bifurcation in a Triparametric Quadratic Hamiltonian”. *Phys. Rev. E*, **52**, 5540–5548.
- V. Lanchares, M. Iñarrea y J.P. Salas (1998), “Spin rotor stabilization of a dual-spin spacecraft with time dependent moments of inertia”. *International Journal of Bifurcation of Chaos.*, **8**, 609–617.
- E. Leimanis (1965), *The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point*. Springer-Verlag, Berlín.
- A. J. Lichtenberg y M. A. Lieberman (1992), *Regular and chaotic dynamics*. 2ª edición. Springer-Verlag, New York.
- Z. Liu y G. Gu (1990), “Second order Melnikov function and its application”. *Physics Letters A*, **143**, 213–216.
- J. E. Marsden y A. J. Tromba (1991), *Cálculo vectorial*. 3ª edición. Addison-Wesley iberoamericana, Wilmington.
- V. K. Melnikov (1963), “On the stability of the center for time periodic perturbations”. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, **12**, 1–57.

E. Ott (1993), *Chaos en Dynamical Systems*. Cambridge University Press, New York

A. M. Ozorio de Almeida (1990), *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization*. 2ª edición. Cambridge University Press, New York.

G. Peano (1895a) “Sopra lo spostamento del polo sulla terra”. *Atti. R. Accad. Sci. Torino*, **30**, 515–523.

G. Peano (1895b) “Sul moto del polo terrestre”. *Atti. R. Accad. Sci. Torino*, **30**, 845–852.

L. M. Perko (1992), “Melnikov’s method, stochastic layers and nonintegrability of a perturbed Duffing–oscillator”. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **22**, 973–1000.

P. Ring y P. Schuck (1980), *The Nuclear many-body problem*. Springer-Verlag, New York.

W. Rudin (1988), *Análisis real y complejo*. McGraw–Hill, Madrid.

V. V. Rumyantsev (1961), “On the stability of motion of gyrostats”. *Applied Mathematics and Mechanics*, **25**, 9–19.

S. Smale (1967), “Differentiable Dynamical Systems”. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, 747–817.

W.T. Thomson (1986), *Introduction to Space Dynamics*. Dover Publications, New York.

X. Tong, B. Tabarrok y F.P.J. Rimrott (1995), “Chaotic Motion of an Asymmetric Gyrostat in the Gravitation Field”. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **30**, 191–203.

P. Tsiotras y J. M. Longuski (1994), “Spin-axis satabilization of symmetric spacecraft with two control torques”. *Systems and Control Letters*, **23**, 395–402.

M. Vallejo (1995), *Serie de Fourier de funciones elípticas. Aplicación a la Precesión Terrestre*. Tesis Doctoral. Boletín ROA, No. 2/95. Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando. Cádiz.

V. Volterra (1899), “Sur la théorie des variations des latitudes”. *Acta Mathematica*, **22**, 201–358.

W. E. Wiesel (1997), *Spaceflight dynamics*. Second Edition. McGraw–Hill, New York.

J. Wisdom y S. J. Peale (1984), “The chaotic rotation of Hyperion”. *Icarus*, **58**, 137–152.

J. Wisdom (1987a), “Urey Prize lecture: Chaotic dynamics in the solar system”. *Icarus*, **72**, 241–275.

J. Wisdom (1987b) “Rotational dynamics of irregularly shaped natural satellites”. *Astronomical Journal*, **94**, 1350–1360.

G.M. Zaslavsky, R.Z. Sagdeev, D.A. Usikov y A.A. Chernikov (1991), *Weak Chaos and Quasi-Regular Patterns*. Cambridge University Press, Cambridge.