UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID

FACULTAD DE INFORMATICA

TESIS DOCTORAL

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LA LOGICA Y DE LOS CONDICIONALES BORROSOS

Autor: Susana Cubillo Villanueva

Director: Dr. Enrique Trillas

Madrid, Mayo 1993

DEPARTAMENTO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL
FACULTAD DE INFORMATICA
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID

TESIS DOCTORAL

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LA LOGICA Y DE LOS CONDICIONALES BORROSOS

Autor: Susana Cubillo Villanueva

Director: Dr. Enrique Trillas

Madrid, Mayo 1993

RESUMEN

La Tesis CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LA LOGICA Y DE LOS CONDICIONALES BORROSOS constituye, a la vez, una nueva visión y un conjunto de nuevas aportaciones sobre algunos conceptos básicos de la Lógica difusa. El primer capítulo se dedica a los conectivos, particularmente a la conjunción. Las t-normas han sido las funciones comúnmente utilizadas a fín de representar el "Y" en Lógica Difusa; en este trabajo se propone un modelo de conjunción que incluye la media geométrica, y parcialmente, las medias ponderadas, utilizadas tanto en el Razonamiento de sentido común, como en algunas aplicaciones al Reconocimiento de formas.

El Capítulo II recoge algunos resultados sobre condicionales, y sobre estados lógicos. Se aporta una generalización de la Transformada Lógica de Zadeh, y se hace un estudio de las propiedades de las diversas generalizaciones borrosas del Condicional Material clásico.

El siguiente Capítulo se dedica exclusivamente a la monotonía, obteniendo una caracterización para los preórdenes, por medio de los estados lógicos, y estudiando diversos tipos de monotonía debilitada.

Completa la Tesis el análisis de propiedades de reflexividad, transitividad y monotonía, entre otras, para algunas relaciones "racionales "definidas en un álgebra probabilizada.

ABSTRACT

The Thesis CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LA LOGICA Y DE LOS CONDICIONALES BORROSOS is a contribution to the basic concepts of Fuzzy Logic. The first chapter is devoted to logical connectives, in particular, the conjunction. T-norms have been commonly used to represent "AND" in Fuzzy Logic. In this work, we propose a conjunction model including the geometric mean, and partialy, the weigted means, so much used both in the Commonsense Reasoning and in some applications to Pattern Recognition.

Chapter II presents some results on conditionals and logical states. We propose a generalization of the Zadeh's Logic Transform, and make a study of the different fuzzy generalizations of the classical Material Conditional.

Next chapter is exclusively devoted to monotonicity. We obtain a characterization for preorders throughout Logical States, and we also analyse some cases of restricted Monotonicity.

Finally, we study the reflexivity, transitivity and monotonicity properties of some "rational" relations defined in Probabilized Algebras.

A mis padres

Quiero expresar mi agradecimiento:

Muy especialmente a **D. Enrique Trillas** , por haberme iniciado en el estudio de la Lógica Borrosa, y sobre todo, por su paciencia conmigo en la dirección de este trabajo, que de otro modo no podría haber sido realizado.

A los profesores **Claudi Alsina**, **Gaspar Mayor**, y **Juan Luis Castro**, por sus ideas, sugerencias y conversaciones a lo largo de estos años, sobre diversas partes de esta memoria.

A los profesores **Luis Laíta** y **José Cuena**, por cuanto en sus cursos de doctorado recibí suficientes motivaciones para interesarme por las bases teóricas de la I.A.

A todos mis compañeros y a la secretaria del **Departamento de Matemática Aplicada**, por su incondicional ayuda en todos los pequeños problemas que siempre surgen en la elaboración y presentación de una Tesis Doctoral.

INDICE

INTRODUCCION

La presente Memoria tiene cuatro grandes apartados.

1. En el primero, se estudian los conectivos "y", "o" para subconjuntos borrosos, sin pretender hacer una simple analogía con lo que se hace en lógica clásica, pero manteniéndola como un caso particular de la misma.

1.1. En un comienzo se consideraron como funciones conectivas "y", "o" para la lógica borrosa sólo las Min y Max, respectivamente; es decir, dados dos predicados vagos P y Q sobre un mismo universo del discurso E con funciones de compatibilidad respectivas μ_P y μ_Q, se definieron

$$\mu_{P \wedge Q}(x) := (\mu_P \cap \mu_Q)(x) = Min(\mu_P(x), \mu_Q(x))$$
$$\mu_{P+Q}(x) := (\mu_P \cup \mu_Q)(x) = Max(\mu_P(x), \mu_Q(x))$$

para todos los $x \in E$. Ello se hizo, en primer lugar, como extensión inmediata de los conectivos bivaluados clásicos a través del símil

$$\varphi_{A \cap B}(x) = Min(\varphi_A(x), \varphi_B(x)), \quad \varphi_{A \cup B}(x) = Max(\varphi_A(x), \varphi_B(x)),$$

donde A y B son dos subconjuntos clásicos de E y φ_A, φ_B son funciones características. Además, Bellman y Giertz ([9]) probaron que bajo condiciones de continuidad, asociatividad y distributividad, esas funciones eran las únicas posibles.

Sin embargo, si se aceptan como razonables las desigualdades

$$\mu_{P \cdot Q}(x) \leq \mu_P(x) \leq \mu_{P+Q}(x)$$
$$\mu_{P \cdot Q}(x) \leq \mu_Q(x) \leq \mu_{P+Q}(x)$$

es inmediato obtener, equivalentemente:

$$\mu_{P \cdot Q}(x) \leq Min(\mu_P(x), \mu_Q(x)) \leq Max(\mu_P(x), \mu_Q(x)) \leq \mu_{P+Q}(x),$$

para todo $x \in E$. Con ello, en principio, cabe expresar

$$\mu_{P \cdot Q}(x) = T(\mu_P(x), \mu_Q(x))$$
$$\mu_{P+Q}(x) = T^*(\mu_P(x), \mu_Q(x)$$

con funciones $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ y $T^* : [0,1]^2 \to [0,1]$, tales que $T \leq Min$ y $Max \leq T^*$.

Si, además, se quiere mantener la asociatividad de la intersección y de la unión de los subconjuntos borrosos:

- $\mu_{(P\cdot Q)\cdot R}(x) = \mu_{P\cdot(Q\cdot R)}(x)$, o lo que es lo mismo

$$[\mu_{P\cdot Q} \cap \mu_R](x) = [(\mu_P \cap \mu_Q) \cap \mu_R](x) = [\mu_P \cap (\mu_Q \cap \mu_R)](x) = \mu_{P\cdot(Q\cdot R)}(x)$$

- $\mu_{(P+Q)+R}(x) = \mu_{P+(Q+R)}(x)$, o lo que es lo mismo

$$[\mu_{P+Q} \cup \mu_R](x) = [(\mu_P \cup \mu_Q) \cup \mu_R](x) = [\mu_P \cup (\mu_Q \cup \mu_R)](x) = \mu_{P+(Q+R)}(x),$$

entonces T y T^* deben ser operaciones asociativas; es decir, deben verificar

$$T(u, T(v, w)) = T(T(u, v), w)$$
$$T^*(u, T^*(v, w)) = T^*(T^*(u, v), w)$$

para cualesquiera u, v, w en $[0, 1]$.

Con ello, y con

$$(\mu_P \cap \varphi_E)(x) = T(\mu_P(x), \varphi_E(x)) = T(\mu_P(x), 1) = \mu_P(x)$$
$$(\mu_P \cup \varphi_\emptyset)(x) = T^*(\mu_P(x), \varphi_\emptyset(x)) = T^*(\mu_P(x), 0) = \mu_P(x),$$

que exigen $T(u, 1) = u$, $T^*(u, 0) = u$, para todo $u \in [0, 1]$, se llega a utilizar como T a una t-norma cualquiera y como T^* a una t-conorma cualquiera.

Está claro que si se desean mantener las leyes de De Morgan:

$$\mu_{(P\cdot Q)'}(x) = \mu_{P'+Q'}(x), \quad \mu_{(P+Q)'}(x) = \mu_{P'\cdot Q'}(x),$$

que con $\mu_{P'}(x) = 1 - \mu_P(x)$, se escriben

$$1 - (\mu_P \cap \mu_Q)(x) = (1 - \mu_P(x)) \cup (1 - \mu_Q(x))$$
$$1 - (\mu_P \cup \mu_Q)(x) = (1 - \mu_P(x)) \cap (1 - \mu_Q(x)),$$

se requiere

$$1 - T(u, v) = T^*(1 - u, 1 - v)$$
$$1 - T^*(u, v) = T(1 - u, 1 - v);$$

es decir, $T^*(u, v) = 1 - T(1 - u, 1 - v)$, para cualesquiera u, v en $[0, 1]$. Por tanto, T^* debe ser la t-conorma dual de la t-norma T.

A partir del trabajo ([6]), ya clásico, se ha hecho un uso extensivo de estas funciones para expresar el "y" y el "o" entre predicados vagos.

1.2. Sin embargo, en el cálculo con predicados vagos P, Q, en muchas ocasiones $P \cap Q$ expresa más que una **intersección** una **agregación** de los significados extensionales expresados por las funciones de compatibilidad μ_P y μ_Q. En algunos de estos casos, puede ser más razonable aceptar la cadena de desigualdades

$$Min(\mu_P(x), \mu_Q(x)) \leq \mu_{P\cdot Q}(x) \leq \mu_{P+Q}(x) \leq Max(\mu_P(x), \mu_Q(x))$$

con lo que si $\mu_{P\cdot Q}(x) = A(\mu_P(x), \mu_Q(x))$, $\mu_{P+Q}(x) = A^*(\mu_P(x), \mu_Q(x))$, será:

$$Min \leq A \leq A^* \leq Max$$

Por este motivo, por ejemplo, se han estudiado funciones de agregación ([41]) del tipo $A_\alpha = \alpha T + (1-\alpha)T^*$, siendo T y T^* una t-norma y una t-conorma, respectivamente. Tales funciones, obviamente pueden estar entre el Min y el Max. También algunos autores ([3],[93]) han usado medias aritméticas.

Debe observarse que en esos casos no existe asociatividad, y que también se pierden otras propiedades típicas del "y" como intersección conjuntista. Así, si T^* es la dual de T:

$A^*_\alpha(u,v) = 1 - A_\alpha(1-u, 1-v) = 1 - \alpha T(1-u, 1-v) - (1-\alpha)T^*(1-u, 1-v) = 1 - \alpha T(1-u, 1-v) - (1-\alpha)(1 - T(u,v)) = 1 - \alpha T(1-u, 1-v) - (1-\alpha) + (1-\alpha)T(u,v) = \alpha - \alpha T(1-u, 1-v) + (1-\alpha)T(u,v) = \alpha(1 - T(1-u, 1-v)) + (1-\alpha)T(u,v) = \alpha T^*(u,v) + (1-\alpha)T(u,v) = A_{1-\alpha}(u,v)$,

con lo que si $\alpha = 1/2$, la función de agregación $A_{1/2}$ es auto-dual. Es el caso de

$$A_{1/2}(u,v) = \frac{1}{2}Min(u,v) + \frac{1}{2}Max(u,v) = \frac{u+v}{2}.$$

Análogamente, se pierden las neutralidades del 1 y del 0:

$A_\alpha(u,1) = \alpha T(u,1) + (1-\alpha)T^*(u,1) = \alpha u + (1-\alpha)1 = \alpha u - \alpha + 1$, que vale u si y sólo si $\alpha = 1$ ($A_\alpha = T$);
$A^*_\alpha(u,0) = 1 - A_\alpha(1-u,1) = 1 - \alpha T(1-u,1) - (1-\alpha)T^*(1-u,1) = \alpha u$, que vale u si y sólo si $\alpha = 1$, ($A^*_\alpha = T^*$).

Por otra parte, C. Alsina y E. Trillas ([5]) han considerado, para sintetizar preórdenes borrosos, funciones que son medias aritméticas generalizadas y que también están entre el Min y el Max. Es el caso de las medias ponderadas

$$M_\alpha(u,v) = \alpha u + (1-\alpha)v \ , \ \ \alpha \in [0,1]$$

o de la media geométrica

$$M_{\surd}(u,v) = \sqrt{u \cdot v}.$$

Tales funciones, ni son asociativas ni tienen al 1 como neutro.
Todas esas funciones son, sin embargo, funciones conmutativas.

1.3. No obstante, siendo la Lógica Borrosa esencialmente un cálculo con proposiciones del tipo

$$"x \text{ es } P" \text{ es } \tau$$

(donde P es un predicado vago, eventualmente clásico, sobre un universo del discurso E, $x \in E$ y τ un predicado de los contenidos en la variable lingüística VERDAD) cuyo valor de verdad se expresa por

$$\mu_\tau(\mu_P(x)) = (\mu_\tau \circ \mu_P)(x)$$

(con $\mu_P \in [0,1]^E$ y $\mu_\tau \in [0,1]^{[0,1]}$), es decir, por una modificación veritativa de la función μ_P, parece adecuado, como es usual en muchas ramas de la Lógica, relacionar los conectivos "y", "o" con la relación implicación que ligue "x es P" es τ con "y es Q" es ν en las proposiciones condicionales del tipo

$$\text{Si } "x \text{ es } P" \text{ es } \tau, \text{ entonces } "y \text{ es } Q" \text{ es } \nu.$$

El problema, así enunciado, es de una gran envergadura teórica; por ello, sólo se ha abordado, en la presente Memoria, en una primera fase consistente en considerar el hecho de que, finalmente, los cálculos se efectúan en el intervalo $[0,1]$, de cuya estructura se tiene en cuenta, casi exclusivamente, el orden total usual $\leq$. Es decir, si $\Rightarrow$ fuese una relación trasladando entre proposiciones el condicional

$$\text{Si } p \text{ entonces } q \quad \text{si y sólo si} \quad p \Rightarrow q,$$

entonces se aceptaría la definición de "y" como una operación $\cdot$ entre proposiciones tal que

$$p \Rightarrow q \quad \text{si y sólo si} \quad p = q \cdot r(p,q)$$

para alguna proposición $r(p,q)$ dependiente de ambas p y q. Así, por ejemplo, en un álgebra de Boole es

$$p \to q \ \underline{\text{ssi}}\ p' + q = 1 \ \underline{\text{ssi}}\ p \leq q \ \underline{\text{ssi}}\ p = q \cdot p = q \cdot (q' + p),$$

con lo que $r(p, q) = p$ o $r(p, q) = q' + p$.

Para la Lógica Borrosa, se ha adoptado la definición:
T es una operación "y" en el intervalo $[0, 1]$ (una función capaz de expresar $\mu_{P \cdot Q}(x) = T(\mu_P(x), \mu_Q(x))$), si

$$x \leq y \quad \underline{\text{ssi}} \quad x = T(y, r(x, y))$$

siendo $r(x, y)$ alguna función que relacione x, y. Por ejemplo, está claro que al ser

$$x \leq y \quad \underline{\text{ssi}} \quad x = Min(y, x)$$

$(r(x, y) = x)$, cabe considerar a la función Min como una función capaz de expresar el "y" entre predicados vagos, como sabemos. Análogamente, si T es una t-norma con pseudo-inversa $T^{\wedge}$, de $x = T(y, r(x, y))$ se seguirá $r(x, y) = T^{\wedge}(y, x)$, y con ello,

$$x \leq y \quad \underline{\text{ssi}} \quad x = T(y, T^{\wedge}(y, x))$$

Por ejemplo, si $T = \mathcal{L}$, al ser $\mathcal{L}^{\wedge}(y, x) = Min(1, 1 - y + x)$, sigue:
$\mathcal{L}(y, Min(1, 1 - y + x)) = Max(0, y + Min(1, 1 - y + x) - 1) = Max(0, Min(y, x)) = Min(y, x) = x$ $\underline{\text{ssi}}$ $x \leq y$.

Es decir, toda t-norma es una función capaz de expresar el "y" entre predicados vagos.

Sin embargo, no todas las funciones que permiten "agregar" información pueden incorporarse a esta definición (y a la análoga para la conectiva "o"). Por ejemplo, con la función

$$A(u, v) = \frac{u + v}{2}$$

se obtiene que si $A(y, r) = \frac{y+r}{2} = x$, entonces $r = 2x - y$, función que es $0 \leq r \leq 1$ $\underline{\text{ssi}}$ $y \leq 2x \leq 1 + y$. Por tanto, $A(y, r) = x$ vale en la región limitada por las rectas $y = 2x$, $y = 2x - 1$.
Así, si $x \leq y$, es $A(y, r) = x$ con $r(x, y) = 2x - y$, sólo en la región del cuadrado unidad entre las rectas $y = 2x$, $y = x$; de la misma forma, si $y \leq x$, $A(x, r) = y$ con $r(y, x) = 2y - x$, sólo en la región entre las rectas $y = \frac{x}{2}$, $y = x$. La media aritmética $\frac{u+v}{2}$ permite, por tanto, expresar el "y" sólo para los valores

$(\mu_P(x), \mu_Q(x))$ que estén en tales regiones. Ello ha obligado a considerar funciones que se han llamados "locales".

2. En la Memoria se ha reconsiderado, a continuación, el concepto de operador de implicación. En los trabajos anteriores de Trillas y Valverde ([80,81]), se estudió tal concepto a partir de la idea lógica de implicación, con una serie de propiedades no siempre tenidas en cuenta en los trabajos de lógica borrosa; así sucede con la propiedad de intercambio

$$R(x, R(y, z)) = R(y, R(x, z))$$

de uso nulo al nivel semántico en que suelen producirse los trabajos de lógica fuzzy.

Por ello, se ha limitado el trabajo aquí presentado a la consideración de la Meta-regla del Modus Ponens como definidora de las relaciones inexactas que permitan representar proposiciones condicionales en la línea de los trabajos de Trillas y Alsina ([70],[71]), y se ha extendido el estudio al caso de relaciones que permitan hacer largas cadenas de inferencias, es decir, a las transitivas. Siempre, naturalmente, respecto de una t-norma y, por tanto, de todas las que son menores que ella. Se ha completado el estudio con el análisis de los resultados que, en el cálculo borroso, puedan considerarse como consecuencias lógicas, adaptando la clásica definición de Tarski de consecuencia (vid. ([15])). Todo ello se ha particularizado al caso exacto y se han analizado los casos en que, al particularizar a subconjuntos clásicos, se obtiene el condicional material.

A este respecto, debe observarse que si bien muchos condicionales $R(y/x) = F(\mu_P(x), \mu_P(y))$ generalizan perfectamente al condicional material, existen casos en los que este último se alcanza con un estado lógico que no sólo no es el clásico φ_V, sino que puede tener valores positivos tan pequeños como se quiera sobre el conjunto V.

En la línea de los trabajos citados de E. Trillas y C. Alsina, se han estudiado los estados lógicos asociados a cada condicional y cada t-norma. Se hace observar, que es indispensable utilizar para modelizar la regla composicional de inferencia sólo aquellas t-normas para las cuales la relación dada es efectivamente un condicional, lo que en algunos trabajos de lógica borrosa no se hace. Por ejemplo, Zadeh ha considerado muchas veces al condicional de Lukasiewicz respecto de la t-norma Min, para la que precisamente esa relación inexacta no es un condicional (ni por tanto, siendo reflexiva, es un preorden).

3. En el tercer apartado se ha abordado el análisis de las relaciones inexactas (y de las exactas como caso particular) que son monótonas. Esto se hace con la intención de clarificar el concepto y poder disponer en la lógica borrosa de relaciones que sean no-monótonas.

A este respecto, se ha conseguido caracterizar los preórdenes borrosos (y por tanto los clásicos) que son monótonos. El resultado, esquemáticamente, es que se trata de aquellos preórdenes tales que todos sus estados lógicos son funciones crecientes, es decir, que sus valores crecen al añadir información. Por lo tanto, la no monotonía de los preórdenes proviene de las variaciones que puedan sufrir los estados lógicos al aumentar la información en el universo del discurso.

En el caso particular clásico, la caracterización revela que una relación exacta es monótona si y sólo si, para cualquier estado lógico V de la misma, se verifica

$$\text{Si } a \cdot b \in V, \text{ entonces } a \in V \ \text{ y } \ b \in V.$$

Se muestran algunos ejemplos en el caso especial en que el universo del discurso sea un álgebra de Boole probabilizada.

Con respecto a los condicionales que no son transitivos sólo se ha conseguido, en el mismo sentido, una condición necesaria que no es suficiente. Por ello, para intentar caracterizarlos, se ha considerado la Monotonía Débil y la n-Monotonía ($n \in \mathbb{N}$), y se ha estudiado la relación entre ellas y con la monotonía de los estados lógicos: Todo condicional monótono será n-monótono para todo $n \in \mathbb{N}$;los estados lógicos de cualquier condicional n-monótono son crecientes, y cualquier condicional que cumpla esta propiedad, es débilmente monótono. De estos contenidos, algunos se demuestra que son estrictos, mientras que en otros, la igualdad queda como problema abierto.

Por último, algunos ejemplos parecen apoyar la tesis de la falta de conexión entre la monotonía de los estados lógicos, y otro tipo de monotonía muy utilizada, la monotonía restringida.

4. En el cuarto capítulo de la Memoria, básicamente se han intentado estudiar condicionales en un álgebra de Boole probabilizada (E, p) que son funciones racionales de la probabilidad. Tras unas consideraciones generales dirigidas a encontrar los valores que pueden tener los coeficientes, se ha limitado el trabajo a relaciones similares a los tres tipos que son más usados en la lógica probabilística:

- Tipo Nilsson: $R(b/a) = p(a \to b) = p(a' + b) = 1 - p(a) + p(b) - p(a'b)$

- Tipo Łukasiewicz: $R(b/a) = Min(1, 1 - p(a) + p(b))$

- Tipo Pólya: $R(b/a) = p(b/a) = \frac{p(ab)}{p(a)}$

De los diversos tipos se ha analizado tanto el carácter de condicionales, como el de relaciones monótonas o no-monótonas.

La Memoria finaliza con un capítulo de conclusiones, en el que se citan algunos de los problemas que no han quedado cerrados.

CAPITULO 1

CONJUNCIONES Y DISJUNCIONES

En Lógica Clásica, una proposición "p y q" es cierta si y sólo si "p" es cierta y "q" también lo es. En lógica multivaluada, para obtener funcionalmente el valor de "p y q" comúnmente han sido utilizados el Mínimo, el Producto y Lukasiewicz, por una parte por su simplicidad, y por otra, porque el caso clásico se obtiene como un caso particular de las mismas. El mismo Zadeh ha sugerido en muchas ocasiones que los conectivos deben ser elegidos dependiendo de la situación determinada.

R. Yager, en ([86]) propone la familia de conectivos

$$C_p(a,b) = 1 - Min[1, [(1-a)^p + (1-b)^p]^{1/p}]$$

para $p \geq 1$, que es una subclase de las t-normas. Estas últimas, son las más utilizadas en la literatura fuzzy.

Pero es un hecho ([3],[93]) que en el razonamiento de sentido común, en muchas ocasiones algunas funciones de tipo compensatorio, como la media aritmética y la geométrica, modelizan mejor el pensamiento humano que cualquiera de las normas triangulares.

Por ejemplo, si deseo comprar un electrodoméstico, me pueden interesar esencialmente dos aspectos: el precio y la calidad. Si puedo decir que el precio de un artículo determinado se adecúa a mis intereses en un grado 0.6, y la calidad en un grado 0.4, posiblemente le asignaré en conjunto un valor 0.5 de concordancia con lo que yo deseo. Sin embargo, si encuentro otro cuyo precio puede ser admisible en un grado 1, y la calidad en grado 0, no se me ocurrirá darle en conjunto un grado 0.5, sino que lo más probable es que automáticamente lo elimine de los posibles candidatos; es decir, en este caso parece más aceptable utilizar entre los dos valores 1 y 0 una función no compensatoria, como pueden ser las normas triangulares.

En ([6]), se da una forma general funcional, asociativa y no distributiva, para los conectivos lógicos, estudiando sus propiedades y algunas caracterizaciones. Diez años después, nos volvemos a plantear la construcción de un modelo de conjunción lógica que, de alguna forma, incluya tanto la media geométrica como las medias ponderadas.

En la primera sección de este capítulo, se hará una revisión del concepto de conjunción en una estructura relacional cualquiera, obteniendo algunas propiedades elementales, y su relación con los subconjuntos del universo y con la monotonía.

Sin embargo, la estructura relacional que nos interesa en Lógica Fuzzy es el intervalo $[0,1]$ con el orden natural de los números reales, es decir, $([0,1], \leq)$, ya que este intervalo es el rango usual para la pertenencia en la teoría de conjuntos difusos. En la segunda sección se define la conjunción estricta, y mediante su sección vertical se da una caracterización que nos permitirá obtener de una manera sencilla algunos teoremas.

Entre las aportaciones a la modelización de los conectivos lógicos, cabe destacar la de las funciones de agregación de G. Mayor ([41]), entre las que se encuentran tanto las t-normas como las t-conormas. Algunos resultados muestran la relación existente entre los operadores con los que trabajamos y dichas funciones.

Las t-normas entran dentro de nuestra definición de conjunción estricta, pero no la media geométrica. Una definición más amplia, la de conjunción, hará posible en la tercera sección, considerar algunas medias cuasilineales, entre ellas la media geométrica, como posibles candidatos a representar la función "y". De nuevo un teorema de caracterización, nos servirá para estudiar variados ejemplos.

Existen funciones que no se comportan en todo punto como conjunciones, sino que sólo lo hacen en algunas regiones de $[0,1] \times [0,1]$; serán conjunciones locales; a ellas se dedica la siguiente sección; de las medias cuasilineales, y en particular la media aritmética, se halla la zona en que pueden ser utilizadas como tales.

El hablar de conjunción, lleva inmediatamente a tratar de su operación simétrica, la disjunción, y de la negación, que permite obtener una a partir de la otra y viceversa. En Lógica clásica una proposición "p o q" es cierta si al menos una de las dos proposiciones "p" y "q" es cierta. El hecho de que este concepto coincida con la negación de la conjunción, ha motivado que el Lógica Multivaluada se hayan utilizado como disjunciones las duales de las conjunciones, en particular las t-conormas.

En este trabajo, se parte de una definición simétrica a la de conjunción, llegando al resultado de que se trata de un concepto dual.

1.1. CONJUNCIONES EN UNA ESTRUCTURA RELACIONAL

DEFINICION 1.1.1. Dada una estructura relacional $(E, \Rightarrow)$, se dice que una operación $\cdot : E \times E \longrightarrow E$ es una *operación "y"* o una *conjunción* si existe $r : E \times E \longrightarrow E$, tal que para todo a, b de E se verifica:

$$a \Rightarrow b \text{ si y sólo si } a = b \cdot r(a, b)$$

EJEMPLOS 1.1.2.

1.- El Mínimo es una conjunción en $([0,1], \leq)$. Tomando $r(a,b) = a$, será: $Min(b, r(a,b)) = Min(b,a) = a$ si y sólo si $a \leq b$.

Observemos que $r(a,b) = a$ no es la única operación con esta propiedad; si tomamos

$$r(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = b \\ a, & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

se cumplirá

$$Min(b, r(a,b)) = \begin{cases} Min(b,1) = a, & \text{si } a = b \\ Min(b,a), & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

que es igual a a si y sólo si $a \leq b$.

2.- El producto usual de números reales es una conjunción en $([0,1], \leq)$. Tomando $r(a,b)$ de la forma:

$$r(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{si } b = 0 \\ Min(1, \frac{a}{b}), & \text{si } b > 0 \end{cases}$$

obtendremos

$$b \cdot r(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{si } b = 0 \\ Min(b,a), & \text{si } b > 0 \end{cases}$$

Y por lo tanto, $b \cdot r(a,b) = a$ si y sólo si $a = b = 0$ o $a = Min(b,a)$; en cualquier caso, $b \cdot r(a,b) = a$ si y sólo si $a \leq b$.

También en este caso podríamos haber elegido la operación

$$r(a,b)=\begin{cases} 1, & \text{si } b=0 \\ \frac{a\wedge b}{a\vee b}, & \text{si } b\neq 0 \end{cases}$$

3.- La operación de Lukasiewicz, $\mathcal{L}(a,b)=Max(0,a+b-1)$, es una conjunción en $([0,1]),\leq)$. Tomando

$$r(a,b)=Min(1,1-b+a),$$

obtendremos $\mathcal{L}(b,r(a,b)) = Max(0,b+r(a,b)-1) = Max(0,Min(b,a)) = Min(b,a)$.
Y así, $\mathcal{L}(b,r(a,b))=a$ si y sólo si $a\leq b$.

De nuevo la operación $r(a,b)$ no es única.

4.- La raíz cuadrada del producto $a*b=\sqrt{a\cdot b}$ es una conjunción en $([0,1]),\leq)$. Eligiendo

$$r(a,b)=\begin{cases} 1 & \text{si } b=0 \\ Min(b,\frac{a^2}{b}), & \text{si } b>0 \end{cases}$$

se tiene:

$$b*r(a,b)=\sqrt{b\cdot r(a,b)}=\begin{cases} 0, & \text{si } b=0 \\ Min(b,a), & \text{si } b>0 \end{cases}$$

De nuevo tenemos $b*r(a,b)=a$ si y sólo si $a=b=0$ o $a\leq b$; y en cualquier caso, $a*r(a,b)=a$ si y sólo si $a\leq b$.

5.- La operación $\cdot$ ínfimo de un álgebra de Boole E es una conjunción en $(E,\leq)$, donde $\leq$ es el orden natural dado por: $a\leq b$ si y sólo si $a=b\cdot a$. Está claro que tomando $r(a,b)=a$ se obtiene inmediatamente que: $a\leq b$ si y sólo si $a=b\cdot r(a,b)$.

Además, se puede demostrar que cualquier r tal que para todo a,b de E es $a\cdot b\leq r(a,b)\leq b'+a$, verifica la propiedad anterior. En efecto, se tendría $b\cdot(a\cdot b)\leq b\cdot r(a,b)$ y $a\cdot(b\cdot b)=a\cdot b\leq b\cdot r(a,b)\leq b\cdot(b'+a)=b\cdot a$; así $a\cdot b=b\cdot r(a,b)$ y $b\cdot r(a,b)=a$ si y sólo si $a\leq b$.

En particular, la estructura $(\mathbb{P}(E),\subseteq)$, donde $\mathbb{P}(E)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de E, es un álgebra de Boole, por lo que eligiendo $r(A,B)=A$ es

$B \cap r(A, B) = B \cap A = A$ si y sólo si $A \subseteq B$.

DEFINICION 1.1.3. Dada la estructura $(E, \Rightarrow)$, y un subconjunto no vacío $T \subseteq E$, una conjunción $\cdot$ de (E, R) diremos que es una T-conjunción lógica si para todo a, b de E,

$$a \cdot b \in T \quad \text{si y sólo si} \quad a \in T \; y \; b \in T$$

EJEMPLOS 1.1.4.

1.- Los subconjuntos T de $[0,1]$ para los que el Mínimo es una T-conjunción lógica son los subintervalos de la forma $T = [x, 1]$, y $T = (x, 1]$, con $x \geq 0$.

2.- Los subconjuntos T de $[0,1]$ para los que el Producto es una T-conjunción lógica son $T = \{1\}$, $T = (0,1]$ y $T = [0,1]$.

3.- En el caso de la operación de Lukasiewicz, los únicos son $T = \{1\}$ y $T = [0,1]$.

4.- Para la raíz cuadrada del producto, los subintervalos $T = \{1\}$, $T = (0,1]$ y $T = [0,1]$ son los subconjuntos buscados.

5.- Sea un álgebra de Boole $(E, \leq)$, tal que la operación ínfimo $\cdot$ es una T-conjunción lógica. Si $a \in T$ y $a \leq b$, al ser $a \cdot b = a \in T$, tendremos que $b \in T$; por otra parte, si $a \in T$ y $b \in T$, será $a \cdot b \in T$; de esto, se deduce que los subconjuntos T para los cuales $\cdot$ es una T-conjunción lógica son los $T = V_a = \{b \in E \; ; \; a \leq b\}$, para cualquier $a \in E$.

En particular, y como consecuencia, en $(\mathbb{P}(E), \subseteq)$, los subconjuntos buscados serán los $T = V_A = \{B \in \mathbb{P}(E) \; ; \; A \subseteq B\}$.

TEOREMA 1.1.5. Si $\cdot$ es una T-conjunción lógica en $(E, \Rightarrow)$, se verificará

$$a \cdot b \in E - T \quad \text{si y sólo si} \quad a \in E - T \quad \text{o} \quad b \in E - T$$

Demostración.- $a \cdot b \in E - T$ si y sólo si $a \cdot b \notin T$, o equivalentemente, $a \notin T$ *o* $b \notin T$, lo que ocurre sólo si $a \in E - T$ *o* $b \in E - T$. □

TEOREMA 1.1.6. Si $\cdot$ es una T-conjunción lógica en $(E, \Rightarrow)$, $\Rightarrow$ verifica el Modus Ponens respecto a T; es decir, si $a \in T$ y $a \Rightarrow b$, entonces ha de ser $b \in T$.

Demostración.- Al ser $a \Rightarrow b$, existirá $r(a,b)$ tal que $a = b \cdot r(a,b) \in T$, y por lo tanto, $b \in T$. $\square$

Hemos visto que en el caso del Mínimo en $([0,1], \leq)$ y en el de la operación ínfimo en las álgebras de Boole, la operación $r : E \times E \longrightarrow E$ venía definida como $r(a,b) = a$ para todo a, b de E. Esta observación nos lleva a dar la siguiente

DEFINICION 1.1.7. Una conjunción $\cdot$ en $(E, \Rightarrow)$ diremos que es una conjunción ordenadora si

$$a \Rightarrow b \quad \text{si y sólo si} \quad a = b \cdot a$$

Por ejemplo, la t-norma Producto no es una conjunción ordenadora en $([0,1], \leq)$, pues tomando $a \leq b < 1$, es $a \leq b$ y, sin embargo, $b \cdot a \neq a$.

La operación $a * b = \sqrt{a \cdot b}$ tampoco es ordenadora en $([0,1], \leq)$, ya que si $a < b$, se verifica $a \leq b$, pero $b * a = \sqrt{b \cdot a} \neq a$.

La demostración del siguiente Teorema es un ejercicio sencillo.

TEOREMA 1.1.8. Si en $(E, \Rightarrow)$ existe una conjunción ordenadora $\cdot$, se verifica:

1) $\cdot$ es idempotente si y sólo si $\Rightarrow$ es reflexiva.
2) Si $\cdot$ es conmutativa, $\Rightarrow$ es antisimétrica.
3) Si $\cdot$ es asociativa, $\Rightarrow$ es transitiva.
4) Si existe un elemento $0 \in E$ absorbente para $\cdot$, para todo $x \in E$ se verifica $0 \Rightarrow x$. Si además, $\cdot$ es conmutativa, se verifica el recíproco.
5) Si existe un elemento $1 \in E$ neutro para $\cdot$, para todo $x \in E$ se verifica $x \Rightarrow 1$. También en este caso, si $\cdot$ es conmutativa, se verifica el recíproco.

En general, el recíproco de 2) y de 3) no es cierto. Veamos un contraejemplo.

Sea $E = \{a, b, c\}$, donde se define la relación
$\Rightarrow = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$ y la operación $a \cdot a = a$, $b \cdot b = b$, $c \cdot c = c$, $a \cdot b = c$, $a \cdot c = b$, $b \cdot a = a$, $b \cdot c = a$, $c \cdot a = a$, $c \cdot b = b$.
Claramente, $\cdot$ es ordenadora en $(E, \Rightarrow)$, es no conmutativa, y sin embargo, $\Rightarrow$ es antisimétrica.

COROLARIO 1.1.9.
1) Dada la estructura algebraica $(E, \cdot)$, donde $\cdot$ es una operación idempotente, asociativa y conmutativa, la relación $\Rightarrow$ definida por

$$a \Rightarrow b \quad \text{si y sólo si} \quad a = b \cdot a,$$

es un orden parcial para el cual $\cdot$ es una conjunción ordenadora.

2) Una condición necesaria para que en $(E, \Rightarrow)$ exista una conjunción ordenadora idempotente, asociativa y conmutativa, es que $\Rightarrow$ sea un orden parcial.

Como se verá en el capítulo 3, dada una estructura $(E, \Rightarrow, \cdot)$, la relación $\Rightarrow$ es *$\cdot$-monótona*, si para todo a, b, c de E, $a \Rightarrow b$ implica $a \cdot c \Rightarrow b$.

TEOREMA 1.1.10. Si $\cdot$ es una conjunción ordenadora para $(E, \Rightarrow)$, y es asociativa, la relación $\Rightarrow$ es $\cdot$-monótona.

Demostración.- Si es $a \Rightarrow b$, por ser $a = b \cdot a$, se sigue que para todo c es $a \cdot c = (b \cdot a) \cdot c = b \cdot (a \cdot c)$, y así, $a \cdot c \Rightarrow b$. $\square$

Por consiguiente, la relación $\leq$ en un álgebra de Boole es $\cdot$-monótona, siendo $\cdot$ la operación ínfimo del álgebra.
Análogamente, en el caso de $([0,1], \leq)$, como la operación Mínimo es asociativa, el orden lineal $\leq$ es Min-monótono. Además, si una operación $\cdot$ en $[0,1]$ es tal que $\cdot \leq Min$, se obtendrá que si $a \leq b$, también es $a \cdot c \leq Min(a,c) \leq b$ para todo $c \in [0,1]$, y por lo tanto, $\leq$ será $\cdot$-monótona; en particular, $\leq$ es $\mathcal{L}$-monótona y Π-monótona.

No ocurre lo mismo con las operaciones que no son menores que el Mínimo; por ejemplo, $a * b = \sqrt{a \cdot b}$ está entre el Mínimo y el Máximo, y $\leq$ no es $*$-monótona: de $0.1 \leq 0.2$ no se sigue que $0.1 * 0.9 = 0.3 \leq 0.2$.

1.2. CONJUNCIONES ESTRICTAS EN $([0,1], \leq)$

DEFINICION 1.2.1. Una operación $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ es una conjunción estricta para el intervalo ordenado $([0,1], \leq)$ si para todo a, b de E se verifica:

$$[a \leq b] \Leftrightarrow [\exists\, c \in [0,1], \text{ con } T(b,c) = a]$$

Observemos que el c no es fijo, sino que dependerá de cada a y b.

De ahora en adelante, T denotará una función de $[0,1]^2$ en $[0,1]$. Llamaremos $T_a : [0,1] \to [0,1]$ a la sección vertical de T en a, es decir, $T_a(b) = T(a,b)$.

Los dos teoremas siguientes caracterizan las conjunciones estrictas.

TEOREMA 1.2.2. T es una conjunción estricta si y sólo si $Im(T_a) = [0,a]$, para todo $a \in [0,1]$.

Demostración.- Supongamos que T es una conjunción estricta; $b \in Im(T_a)$ si y sólo si existe un $c \in [0,1]$ tal que $T(a,c) = b$, lo que ocurre sólo si $b \leq a$ y $b \in [0,a]$; por tanto $Im(T_a) = [0,a]$.

Sea ahora $Im(T_a) = [0,a]$ para todo $a \in [0,1]$; será $b \leq a$ si y sólo si $b \in [0,a]$, lo que equivale a $b \in Im(T_a)$, y a que existe un $c \in [0,1]$ tal que $T_a(c) = T(a,c) = b$.
Por tanto, $b \leq a$ si y sólo si existe un $c \in [0,1]$ verificando $T(a,c) = b$. $\square$

TEOREMA 1.2.3. Si T es tal que:

-es no decreciente.

-tiene al 0 como elemente absorbente a la derecha, y

-tiene al 1 como elemento unidad a la derecha,

entonces T es conjunción estricta si y sólo si T es contínua en la segunda variable.

Demostración.- Es bien conocido que si f es una función no decreciente, entonces:

f es contínua en $[a,b]$ si y sólo si $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

Aplicando este resultado a la función T_a, y teniendo en cuenta que $T_a(0) = 0$ y $T_a(1) = a$, se sigue el Teorema. □

Los dos teoremas siguientes nos proporcionan condiciones necesarias para que T sea una conjunción estricta.

TEOREMA 1.2.4. Si T es una conjunción estricta, entonces $T(a,b) \leq a$ para cualesquiera $a, b \in [0,1]$.

Demostración.- En efecto, existe un $c \in [0,1]$ (que será $c = b$), tal que $T(a,c) = T(a,b)$, y por ser conjunción estricta, $T(a,b) \leq a$. □

COROLARIO 1.2.5. Las t-conormas no son conjunciones estrictas.

Demostración.- Si S es una t-conorma, entonces $S \geq Max$. □

No es cierto que si T es una conjunción estricta, entonces $T(a,b) \leq b$ para cualesquiera $a, b \in [0,1]$.
En efecto, la operación $T(a,b) = a - a \cdot b$ es conjunción estricta, por ser para todo $a \in [0,1]$, $T_a(x) = a - a \cdot x$, que verifica $Im(T_a) = [0,a]$.
Sin embargo, $T(1, 0.1) = 1 - 0.1 = 0.9 \not\leq 0.1$.

TEOREMA 1.2.6. Si T es una conjunción estricta no decreciente, entonces T verifica:

- -es contínua en la segunda variable.
- -tiene al 0 como elemento absorbente a la derecha.
- -tiene al 1 como elemento unidad a la derecha.

Demostración.- Inmediata, estudiando las secciones verticales T_a. □

Algunas condiciones suficientes vienen dadas por el siguiente

TEOREMA 1.2.7. Si T :

-es contínua en la segunda variable,

-es menor o igual que el Mínimo,

-tiene al 0 como elemento absorbente a la derecha,

-tiene al 1 como elemento unidad a la derecha,

entonces T es una conjunción estricta.

Demostración.- Si $a \leq b$, de $T(b,0) = 0 \leq a$ y $T(b,1) = b \geq a$, por la continuidad, existe un $c \in [0,1]$, tal que $T(b,c) = a$.

Si $a > b$, para todo c es $T(b,c) \leq b < a$, por lo que no existe ningún $c \in [0,1]$ verificando $T(b,c) = a$.

Por tanto, $a \leq b$ si y sólo si existe un $c \in [0,1]$ tal que $T(b,c) = a$. □

COROLARIO 1.2.8. Las t-normas contínuas son conjunciones estrictas.

TEOREMA 1.2.9. La única conjunción estricta conmutativa mayor o igual que el Mínimo es $T = Min$.

Demostración.- Si $a \leq b$, entonces $T_a(b) \leq a$ por el Teorema 1.2.4. , y $T_a(b) = T(a,b) \geq a$ ya que T es mayor o igual que el Mínimo. Por tanto, $T_a(b) = T(a,b) = a = T(b,a)$. □

TEOREMA 1.2.10. Sea $T \geq Min$ una conjunción estricta.

-Si $a \leq b$, entonces $T(a,b) = a$.

-Si $a > b$, entonces $T(a,b) \in [b,a]$.

Demostración.- Si $a \leq b$, entonces $T_a(b) \leq a$, y $T_a(b) \geq a$ por ser mayor o igual que el Mínimo; por tanto $T(a,b) = a$.

Si $a > b$, $T_a(b) \leq a$ y $T_a(b) \geq b$; así llegamos a $T(a,b) \in [b,a]$. □

TEOREMA 1.2.11. Si T es una conjunción estricta, entonces la relación $\leq$ es T-monótona.

Demostración.- Veamos que para todo $a, b, c \in [0,1]$, si $a \leq b$ entonces $T(a,c) \leq b$.
Por ser $Im(T_a) = [0, a]$, si $a \leq b$, para todo c, $T(a,c) = T_a(c) \leq a \leq b$. □

TEOREMA 1.2.12. Toda conjunción estricta conmutativa y creciente T es una función de agregación (vid. apéndice).

Demostración.- Hemos de comprobar que para todo x de $[0,1]$:

i) $T(x,0) = T(1,0)x$.

ii) $T(x,1) = (1 - T(1,0))x + T(1,0)$.

Por ser T conjunción estricta creciente, $T_x(0) = T(x,0) = 0$ y $T_x(1) = T(x,1) = x$ para todo $x \in [0,1]$. Por tanto,

i) $T(x,0) = 0 = 0x = T(1,0)x$.

ii) $T(x,1) = x$

$(1 - T(1,0))x + T(1,0) = (1-0)x + 0 = x$. □

TEOREMA 1.2.13. Si T es una función de agregación, T es conjunción estricta si y sólo si $T(x,0) = 0$ para todo x de $[0,1]$.

Demostración.- Si T es conjunción estricta, por ser creciente, $T_x(0) = T(x,0) = 0$ para todo x de $[0,1]$.

Si $T(x,0) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, $T(x,1) = (1 - T(1,0))x + T(1,0) = x$.
Luego para todo x, $T_x(0) = 0$ y $T_x(1) = x$, y por ser T creciente, $Im(T_x) = [0, x]$ y T es conjunción estricta. □

TEOREMA 1.2.14. Si T es una función de agregación, T es conjunción estricta si y sólo si $T(x,1) = x$ para todo x de $[0,1]$.

Demostración.- Si T es conjunción estricta, es claro que $T(x,1) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

Si $T(x,1) = x$ para todo $x \in [0,1]$, $T(x,1) = (1 - T(1,0))x + T(1,0) = x$, y resolviendo, $T(1,0) = 0$.

Por tanto, $T_x(0) = T(x,0) = T(1,0)x = 0$, y $T_x(1) = x$. Luego, T es conjunción estricta. □

TEOREMA 1.2.15. Dada la función de agregación

$$F = (1-k)T + kS,$$

donde T es una t-norma y S una t-conorma contínuas cualesquiera, F es una conjunción estricta si y sólo si $k = 0$.

Demostración.- Si F es una conjunción estricta, para todo $x \in [0,1]$ $F_x(0) = 0$; es decir, $0 = F(x,0) = (1-k)T(x,0) + kS(x,0) = kx$ para todo x; luego ha de ser $k = 0$. □

Garrett Birkoff, en ([10]), define en un m-retículo G, el resíduo a la derecha $h : k$, de dos elementos cualesquiera h, k de G, como el mayor x si existe, verificando $x \cdot k \leq h$, donde $\cdot$ es la operación ínfimo del retículo. Esto nos sugiere la siguiente definición:

Dada una función $T : [0,1]^2 \to [0,1]$, se define el resíduo $a : b$ como:

$$a : b = \sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(b,z) \leq a\}$$

TEOREMA 1.2.16. Si T es no decreciente, entonces T es una conjunción estricta si y sólo si :

i) para todo a, b de $[0,1]$, existe $a : b$, y

ii) $a \leq b$ si y sólo si $T(b, a : b) = a$.

Demostración.- Sea T una conjunción estricta. Si $a \leq b$ existe un c verificando $T(b,c) = a$, por lo que $sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(b,z) \leq a\} = a : b$ existe.

Si $b < a$, de $a \leq a$, se sigue que existe un $d \in [0,1]$ tal que $T(a,d) = a$, y por ser T no decreciente, $T(b,d) \leq T(a,d) = a$, y $sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(b,z) \leq a\} = a : b$ también existe en este caso.

Por otra parte, si f es una función contínua en $[a,b]$, y $f(a_i) \leq h$ para todo $i \in I$, entonces $f(sup\{a_i\ ;\ i \in I\}) \leq h$. Al ser T no decreciente y conjunción estricta, aplicando el Teorema 1.2.6., obtenemos que T es contínua en la segunda variable, y por tanto,

$$T(b, a : b) = T(b, sup\{z \in [0,1] \; ; \; T(b,z) \leq a\}) \leq a$$

Así, si $a \leq b$, existe un $c \in [0,1]$ tal que $T(b,c) = a$; entonces $T(b, a : b) \geq a$, y $T(b, a : b) = a$.

Recíprocamente, si $[a \leq b$ si y sólo si $T(b, a : b) = a]$, comprobaremos que T es una conjunción estricta, viendo que $Im(T_b) = [0, b]$ para todo $b \in [0,1]$:

i) Si $a < b$, $T(b, a : b) = T_b(a : b) = a$; por tanto, $a \in Im(T_b)$, y $[0, b] \subseteq Im(T_b)$.

ii) Si $b = 1$, $Im(T_1) \subseteq [0,1]$ obviamente.
Por ser $1 \not\leq b$, $T(b, 1 : b) \neq 1$, es decir, $T(b, 1 : b) < 1$; y de $1 : b = sup\{z \in [0,1] \; ; \; T(b,z) \leq 1\} = 1$, se sigue $T(b,1) < 1$.

Por ser T no decreciente, $T(b,c) \leq T(b,1)$ para todo c de $[0,1]$, y $Im(T_b) \subseteq [0, T(b,1)]$. Sea $T(b,1) = m$.

a) Si $m \leq b$, para todo $c \in [0,1]$ será $T(b,c) \leq m \leq b$, y $Im(T_b) \subseteq [0,b]$.
b) Si $m > b$, $T(b, m : b) \neq m$, y $T(b, m : b) < m = T(b,1)$; pero de $m : b = sup\{z \in [0,1] \; ; \; T(b,z) \leq m\} = 1$, se obtiene $T(b,1) < m$, que es una contradicción. □

COROLARIO 1.2.17. Las t-normas contínuas T, verifican: $a \leq b$ si y sólo si $T(b, a : b) = a$.

EJEMPLOS 1.2.18.

1.- Si T es la t-norma producto, el resíduo es:

$$a : b = sup\{z \in [0,1] \; ; \; b \cdot z \leq a\} = \begin{cases} Min(1, \frac{a}{b}), & si \; b \neq 0 \\ 1, & si \; b = 0 \end{cases}$$

Por tanto, $a \leq b$ si y sólo si

$$\begin{cases} T(b, Min(1, \frac{a}{b})) = a, & \text{si } b \neq 0 \\ T(b, 1) = 0 = a, & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

2.- Si $T(a,b) = Max(0, a + b - 1)$ es la t-norma de Lukasiewicz:

$a : b = sup\{z \in [0,1] \; ; \; Max(0, b + z - 1) \leq a\} = Min(1, 1 + a - b).$

Luego, $a \leq b$ si y sólo si $T(b, Min(1, 1 + a - b)) = a.$

3.- Si T es la t-norma Min:

$a : b = sup\{z \in [0,1] \; ; \; Min(b, z) \leq a\}$ que será 1 si $b \leq a$, y a en otro caso.

Aplicando el último teorema: $a \leq b$ si y sólo si $T(b, a : b) = a.$

Las siguientes gráficas, corresponden a algunas conjunciones estrictas.

$$T(a,b) = a \cdot b$$

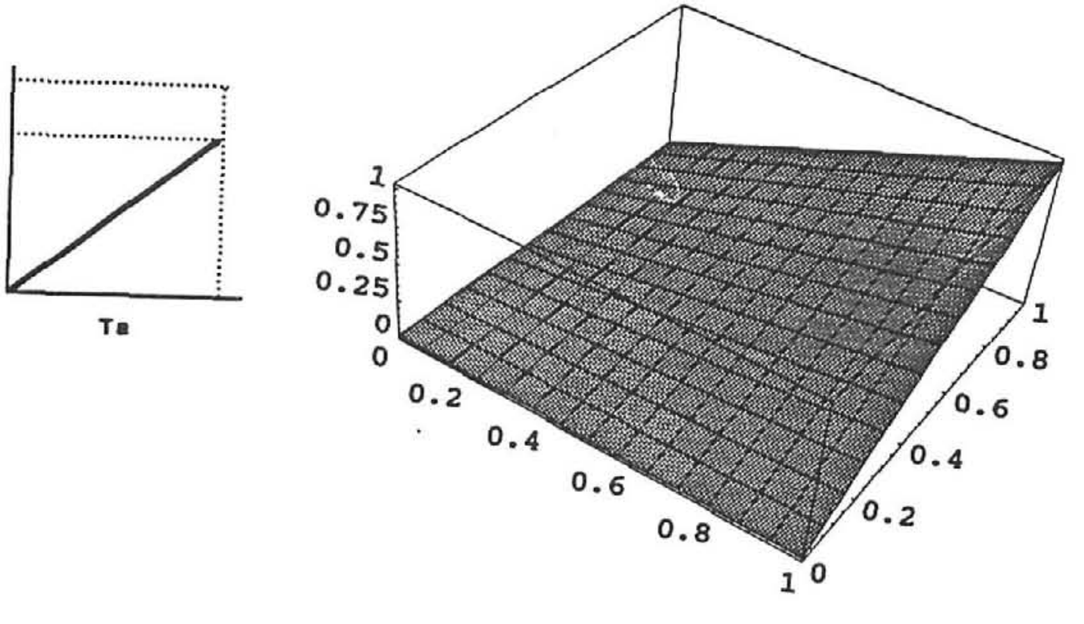

Fig. 1.1.

$$T(a,b) = \begin{cases} 2 \cdot a \cdot b, & \text{si } b \leq 1/2 \\ 2 \cdot a \cdot (1-b), & \text{si } b > 1/2 \end{cases}$$

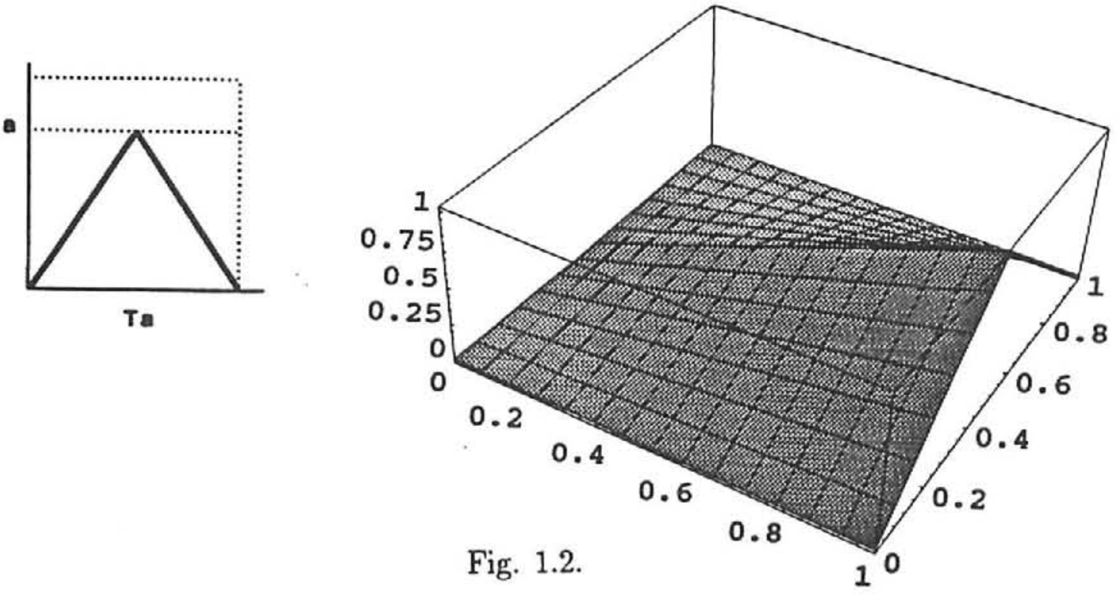

Fig. 1.2.

$$T(a,b) = 4 \cdot a \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b + a$$

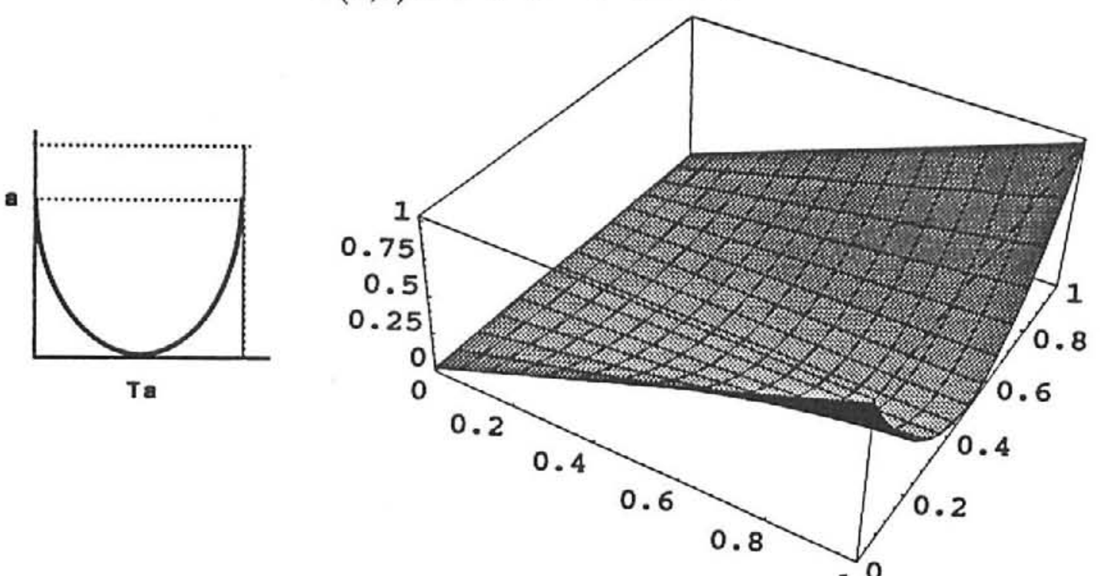

Fig. 1.3.

I.3. CONJUNCIONES EN $([0,1],\leq)$

DEFINICION 1.3.1. $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ es una conjunción si para todo a,b de $[0,1]$ se verifica

$$[a \leq b] \Rightarrow [\exists\, c \in [0,1] \text{ tal que } T(b,c) = a]$$

De nuevo, el c dependerá de cada a y b.

Notemos que si T es una conjunción y existe un $c \in [0,1]$ tal que $T(b,c) = a$, no podemos concluir que $a \leq b$, como ocurría en el caso de las conjunciones estrictas.

EJEMPLOS 1.3.2.

1.- La operación conmutativa $T(a,b) = \sqrt{a \cdot b}$ es una conjunción, ya que si $a,b \in [0,1]$ y $a \leq b$, podemos encontrar $c = \frac{a^2}{b} \in [0,1]$, que verifica $T(b,c) = \sqrt{b \cdot \frac{a^2}{b}} = a$.

Ahora bien, tomando $a = 0.3$ y $b = 0.1$, existe $c = 0.9 \in [0,1]$, tal que $T(b,c) = \sqrt{0.1 \cdot 0.9} = \sqrt{0.09} = 0.3 = a$; y sin embargo, $a \not\leq b$. Por tanto T no es una conjunción estricta.

2.- La operación no conmutativa $T(a,b) = b$ es una conjunción, ya que si $a \leq b$, tomando $c = a$, se obtiene $T(b,c) = a$.

Sin embargo, tomando $a = 0.8$ y $b = 0.2$, $T(b, 0.8) = a$, pero no es $a \leq b$; por tanto, no es una conjunción estricta.

TEOREMA 1.3.3. T es una conjunción si y sólo si existe $r: [0,1]^2 \to [0,1]$ tal que $a \leq b \Leftrightarrow a = T(b, r(a,b))$.

Demostración.- Si T es una conjunción, construímos r de la siguiente forma:
Si $a \leq b$, existirá un $c \in [0,1]$ verificando $T(b,c) = a$; tomamos $r(a,b) = c$.
Si $a > b$, al ser $0 \leq b$, existirá un $d \in [0,1]$ tal que $T(b,d) = 0 \neq a$; elegimos

$r(a,b) = d$
Claramente, $a \leq b$ si y sólo si $T(b, r(a,b)) = a$.

Ahora, si existe $r : [0,1]^2 \to [0,1]$ tal que $a \leq b \Leftrightarrow a = T(b, r(a,b))$, entonces si $a \leq b$, existe $c = r(a,b)$ verificando $T(b,c) = a$.□

Notemos que si T es una conjunción, y por tanto se tiene la función $r(a,b)$ del teorema, el hecho de que exista un $c \in [0,1]$ con $T(b,c) = a$ no significa que dicho c coincida con $r(a,b)$, y por lo tanto, que sea $T(b, r(a,b)) = a$; luego, no tiene por qué ser $a \leq b$.

Por otra parte, es claro que esta caracterización de conjunción coincide con la definición dada en la primera sección de este capítulo para estructuras relacionales, en el caso particular de $([0,1], \leq)$.

TEOREMA 1.3.4. T es una conjunción si y sólo si $[0,a] \subseteq Im(T_a)$ para todo $a \in [0,1]$.

Demostración.- Sea T una conjunción, y sea $b \in [0,a]$; entonces $b \leq a$ y existe un $c \in [0,1]$ tal que $T(a,c) = b = T_a(c)$; por tanto, $b \in Im(T_a)$.

Por otra parte, supongamos que $[0,a] \subseteq Im(T_a)$ para todo $a \in [0,1]$. Si $a \leq b$, será $a \in [0,b] \subseteq Im(T_b)$; por tanto existe un $c \in [0,1]$ tal que $T_b(c) = T(b,c) = a$. □

Es inmediato el siguiente

TEOREMA 1.3.5. Toda conjunción estricta es una conjunción; por tanto, toda t-norma contínua es una conjunción.

TEOREMA 1.3.6. Sea T una conjunción no decreciente en la segunda variable. Entonces $T(a,1) \geq a$ y $T(a,0) = 0$ para todo $a \in [0,1]$.

Demostración.- Como T es no decreciente y $[0,a] \subseteq Im(T_a)$, existe un $c \in [0,1]$ verificando $T(a,c) = a$; así, $a = T(a,c) \leq T(a,1)$.
Al ser $0 \in Im(T_a)$, existe un $d \in [0,1]$ tal que $0 = T(a,d) \geq T(a,0)$; por tanto, $T(a,0) = 0$. □

TEOREMA 1.3.7. Si T es tal que:

- es contínua en la segunda variable,
- tiene al 0 como elemento absorbente a la derecha, y
- $T(a, 1) \geq a$, para todo $a \in [0, 1]$,

entonces T es una conjunción.

Demostración.- Para todo $a \in [0,1]$ es $T_a(0) = T(a, 0) = 0$, $T_a(1) = T(a, 1) \geq a$, y T_a es contínua; por tanto, $[0, a] \subseteq Im(T_a)$ para todo $a \in [0, 1]$. □

TEOREMA 1.3.8. Toda conjunción que a la vez es función de agregación, es conjunción estricta.

Demostración.- Si T es función de agregación y conjunción, por ser creciente, para todo x de $[0,1]$ es $T_x(0) = 0$, y por el Teorema 1.2.13., es conjunción estricta. □

TEOREMA 1.3.9. Sea $T(a, b) = f^{-1}(pf(a) + qf(b))$, con $p + q = 1$ y $pq > 0$, una media cuasilineal([36]), con generador $f : [0, 1] \to [A, \infty)$ biyectivo y decreciente (vid. figura). Entonces T es conjunción.

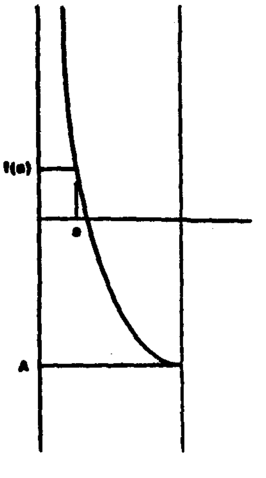

Fig. 1.4.

Demostración.- Para cada $a \in [0, 1]$,

- T_a es contínua.

- Si $b \leq b'$; $f(b) \geq f(b')$; $pf(a) + qf(b) \geq pf(a) + qf(b')$;
$T(a,b) = f^{-1}(pf(a) + qf(b)) \leq f^{-1}(pf(a) + qf(b')) = T(a,b')$, y por tanto, T_a es creciente.

- $T_a(0) = f^{-1}(pf(a) + qf(0)) = f^{-1}(\infty) = 0$.

- $pf(a) + qf(1) = pf(a) + qA \in [A, f(a)]$, luego $T_a(1) = f^{-1}(pf(a) + qf(1)) \in [a,1]$ y $T_a(1) \geq a$.

Así, $[0,a] \subseteq Im(T_a)$, y T es conjunción. □

Observemos que si $a \leq b$, el $c \in [0,1]$ verificando $T(b,c) = a$ será $c = f^{-1}(\frac{f(a)-pf(b)}{q})$.

TEOREMA 1.3.10. Si T es una media cuasilineal en las condiciones del Teorema anterior, entonces T no es conjunción estricta.

Demostración.- Si $a < 1$, $pf(a) + qf(1) = pf(a) + qA < f(a)$;
$T_a(1) = f^{-1}(pf(a) + qf(1)) > a$; $[0,a] \neq Im(T_a)$, y por lo tanto, T no es conjunción estricta. □

COROLARIO 1.3.11. La media geométrica $T(a,b) = \sqrt{ab}$ es una conjunción, pero no es una conjunción estricta.

Demostración.- La media geométrica es la media cuasilineal con $p = q = \frac{1}{2}$, y generada por $f(x) = -logx$, que es una función de $[0,1]$ en $\mathbb{R}^+$ biyectiva y decreciente. □

En este caso, si $a \leq b$, $c = f^{-1}(2f(a) - f(b)) = e^{-(2f(a)-f(b))} = e^{2loga-logb} = e^{log\frac{a^2}{b}} = \frac{a^2}{b}$.

TEOREMA 1.3.12. Si $T(a,b) = f^{-1}(pf(a) + qf(b))$, con $p + q = 1$ y $pq > 0$, es una media cuasilineal, con un generador $f : [0,1] \rightarrow [A,B]$, $B < \infty$, biyectivo y decreciente (vid. figura), entonces T no es conjunción.

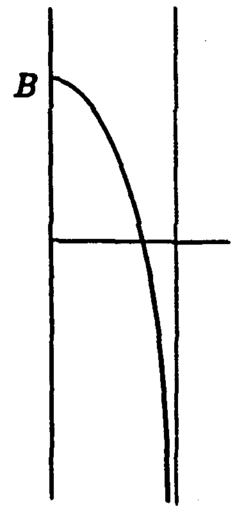

Fig. 1.5.

Demostración.- Para cada $a \in [0,1]$,

- T_a es contínua.
- T_a es creciente.
- Si $a > 0$; $f(a) < B$, ; $pf(a)+qB < B$ y $T_a(0) = f^{-1}(pf(a)+qB) > 0$.

Por tanto, $[0,a] \not\subseteq Im(T_a)$, y T no es conjunción. □

COROLARIO 1.3.13. La media aritmética no es una conjunción.

Demostración.- La media aritmética es $T(a,b) = \frac{a+b}{2} = f^{-1}(\frac{f(a)+f(b)}{2})$, donde $f : [0,1] \to [0,1]$ es $f(x) = 1-x$, que es biyectiva y decreciente. □

TEOREMA 1.3.14 Si T es una conjunción no estricta, entonces la relación $\leq$ no es T-monótona.

Demostración.- Existirá $a \in [0,1]$ tal que el contenido $[0,a] \subset Im(T_a)$ es estricto, y por lo tanto, para algún c es $T_a(c) = T(a,c) > a$. Tomando $b = \frac{a+T(a,c)}{2}$, es $a \leq b$, y sin embargo, $T(a,c) \not\leq b$. □

En lo que sigue, denotamos las funciones Mínimo y Máximo por $a \wedge b = Min(a,b)$ y $a \vee b = Max(a,b)$.

TEOREMA 1.3.15. Sea T creciente y contínua a la derecha en la segunda variable; entonces T es una conjunción si y sólo si se verifican las condiciones:

i) para todo $a, b \in [0,1]$, existe $a : b$.

ii) $a \leq b$ si y sólo si $T(b, a \wedge b : a \vee b) = a$.

Demostración.- Sea T una conjunción. La demostración de i) es similar a la del Teorema 1.2.16.

Por otra parte, $T(b, a \wedge b : a \vee b) = T(b, sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(a \vee b, z) \leq a \wedge b\}) = sup\{T(b,z)\ ;\ T(a \vee b, z) \leq a \wedge b\}$, por ser T creciente y contínua a la derecha en la segunda variable.

Si $a \leq b$, $T(b, a \wedge b : a \vee b) = sup\{T(b,z)\ ;\ T(b,z) \leq a\}$.
Como T es una conjunción, $[0,b] \subseteq Im(T_b)$, $a \in [0,b]$ y $a \in Im(T_b)$; por tanto, existe un h tal que $T(b,h) = a$, y obtenemos que $sup\{T(b,z)\ ;\ T(b,z) \leq a\} = a$.

Ahora, si $T(b, a \wedge b : a \vee b) = a$, será $sup\{T(b,z)\ ;\ T(a \vee b, z) \leq a \wedge b\} = a$.
Como T es creciente y $b \leq a \vee b$, para cada z es $T(b,z) \leq T(a \vee b, z)$; para cada z verificando $T(a \vee b, z) \leq a \wedge b$, será $T(b,z) \leq a \wedge b$, y $sup\{T(b,z)\ ;\ T(a \vee b, z) \leq a \wedge b\} \leq a \wedge b$.
Así tenemos que $a \leq a \wedge b$ y $a \leq b$.

Recíprocamente, supongamos que $a \leq b$ si y sólo si $T(b, a \wedge b : a \vee b) = a$. Si $a \leq b$, entonces $a = T(b, a \wedge b : a \vee b) = T_b(a \wedge b : a \vee b)$; por tanto $a \in Im(T_b)$ y $[0,b] \subseteq Im(T_b)$ para todo b. □

EJEMPLOS 1.3.16.

1.- Si $T(a,b) = f^{-1}(pf(a) + qf(b))$ es una media cuasilineal cuyo generador $f : [0,1] \to I\!R^+$ es una función biyectiva y decreciente, entonces:

$a \wedge b : a \vee b = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ T(a \vee b, z) \leq a \wedge b\} = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ f^{-1}(pf(a \vee b) + qf(z)) \leq a \wedge b\} = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ pf(a \vee b) + qf(z) \geq f(a \wedge b)\} = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ z \leq f^{-1}(\frac{f(a \wedge b) - pf(a \vee b)}{q})\} = f^{-1}(\frac{f(a \wedge b) - pf(a \vee b)}{q})$.

Por el Teorema, $a \leq b$ si y sólo si $T(b, f^{-1}(\frac{f(a \wedge b) - pf(a \vee b)}{q})) = a$.

2.- En particular, si T es la media geométrica $T(a,b) = \sqrt{ab}$, al ser $f^{-1}(\frac{f(a\wedge b)-pf(a\vee b)}{q}) = f^{-1}(2f(a\wedge b)-f(a\vee b)) = e^{-(-2log(a\wedge b)+log(a\vee b))} = e^{log\frac{(a\wedge b)^2}{a\vee b}} = \frac{(a\wedge b)^2}{a\vee b}$, se obtendrá
$a \leq b$ si y sólo si $T(b, \frac{(a\wedge b)^2}{a\vee b}) = a$.

Las siguientes figuras corresponden a conjunciones que no son conjunciones estrictas

$$T(a,b) = \frac{b}{2}(1+a)$$

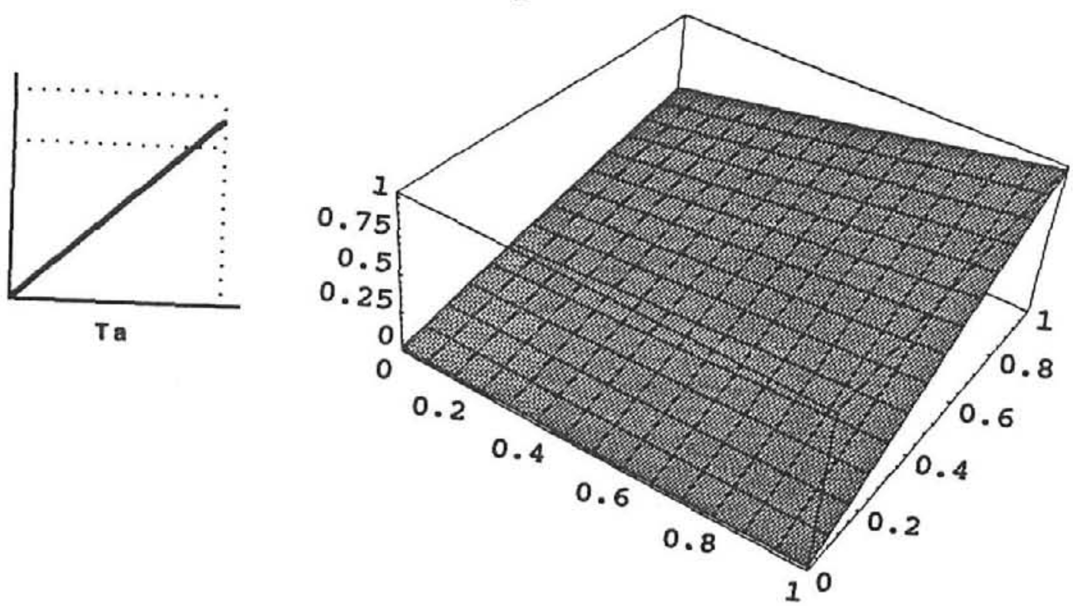

Fig. 1.6.

$$T(a,b) = \begin{cases} 2 \cdot b, & \text{si } b \leq 1/2 \\ 2 \cdot (1-b) & \text{si } b > 1/2 \end{cases}$$

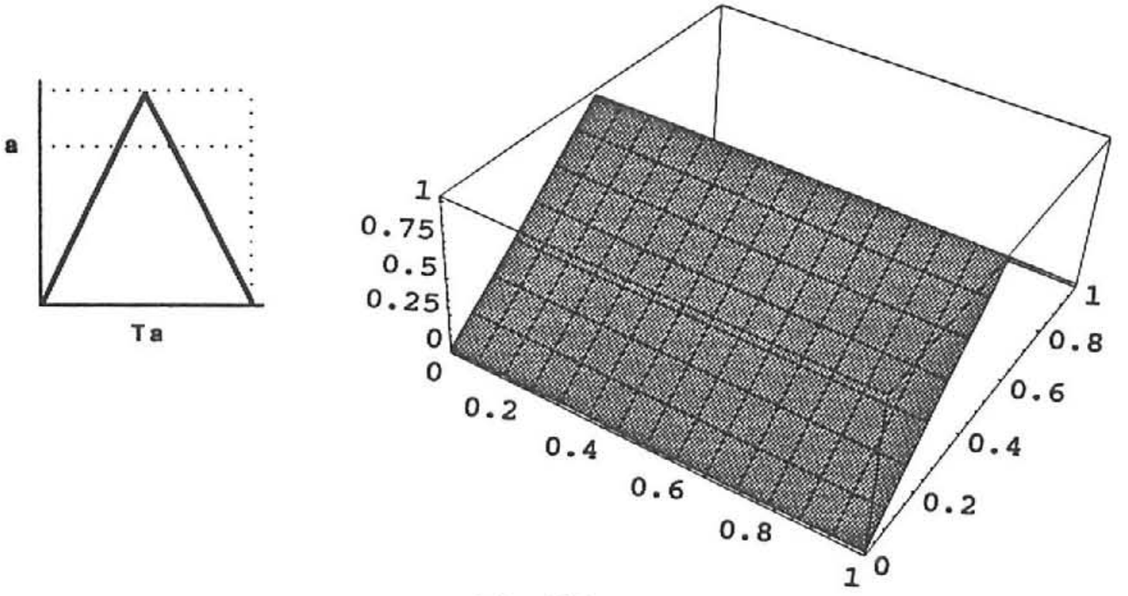

Fig. 1.7.

$$T(a,b) = 2(a+1)b^2 - 2(a+1)b + \frac{a+1}{2}$$

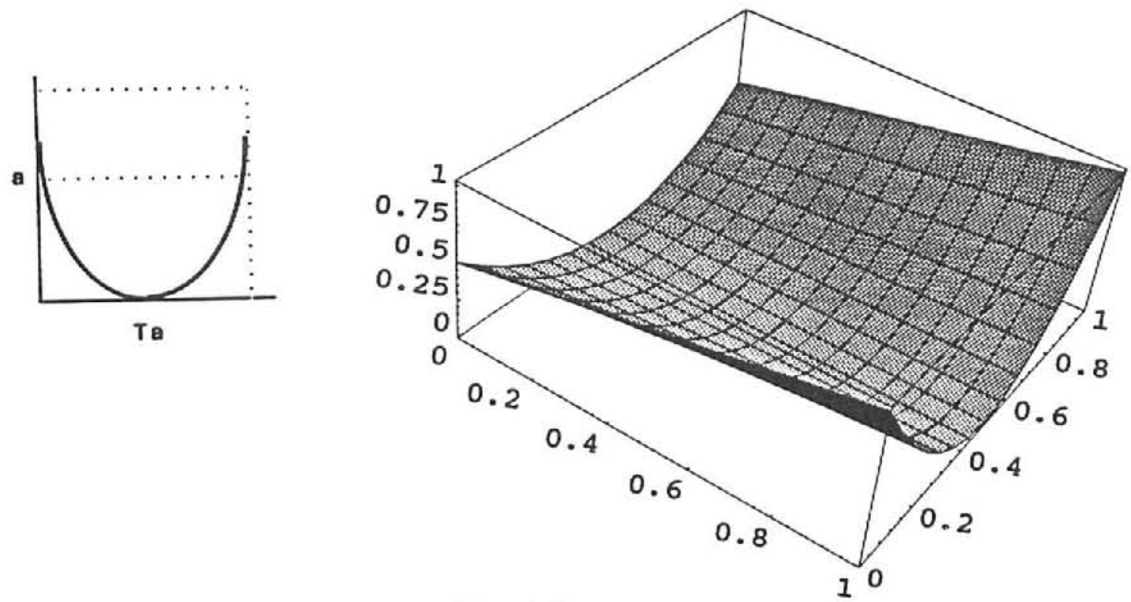

Fig. 1.8.

I.4. CONJUNCIONES LOCALES EN $([0,1], \leq)$

Existen operaciones que, aunque en general no pueden considerarse como conjunciones, para ciertos valores sí que es adecuado tomarlas como tales; este hecho nos lleva a definir las conjunciones locales, es decir, funciones que son conjunciones en alguna región de $[0,1]^2$.

DEFINICION 1.4.1. Dado $(a,b) \in [0,1]^2$, la función $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ se dice que es una conjunción en el punto (a,b) si

- $a \leq b$ y existe un $c \in [0,1]$ tal que $T(b,c) = a$, o
- $b \leq a$ y existe un $d \in [0,1]$ tal que $T(a,d) = b$.

TEOREMA 1.4.2. Una función $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una conjunción si y sólo si es una conjunción en todo punto $(a,b) \in [0,1]^2$.

Demostración.- Es inmediata. □

TEOREMA 1.4.3. Si T es una conjunción en $(a,b) \in [0,1]^2$ y T es estrictamente creciente en la segunda variable, o no decreciente y contínua en la segunda variable, entonces $a \leq b$ implica que $a \wedge b : a \vee b = a : b$ existe, y $T(b, a \wedge b : a \vee b) = T(b, a : b) = a$.

Demostración.- $a \wedge b : a \vee b = a : b = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ T(b,z) \leq a\}$.
Como $a \leq b$ y T es una conjunción en (a,b), existe un $c \in [0,1]$ tal que $T(b,c) = a$; por tanto, el conjunto $\{z \in [0,1]\ ;\ T(b,z) \leq a\}$ es no vacío y existe $a : b$.

Si T es estrictamente creciente, $c = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ T(b,z) \leq a\} = a : b$, y $T(b, a : b) = a$.

Si T es no decreciente y contínua en la segunda variable, es $a = T(b,c) \leq T(b, a : b) = T(b, sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ T(b,z) \leq a\}) \leq a$, llegando a $T(b, a : b) = a$. □

TEOREMA 1.4.4. Si $T(a,b) = f^{(-1)}(pf(a)+qf(b))$, con $p+q=1$, $pq>0$, es una media cuasilineal con generador $f:[0,1] \to [A,B]$, $B<\infty$, biyectivo y decreciente , entonces T es una conjunción en $(a,b) \in [0,1]^2$ si y sólo si $f(a \wedge b) - pf(a \vee b) \in [qA, qB]$.

Demostración.- Supongamos que T es conjunción en $(a,b) \in [0,1]^2$.
Si $a \le b$, exitirá un $c \in [0,1]$ verificando $T(b,c) = f^{-1}(pf(b) + qf(c)) = a$, o equivalentemente, $pf(b) + qf(c) = f(a)$.

En este caso, habrá de ser $f(c) = \frac{f(a)-pf(b)}{q} \in [A,B]$ y $f(a) - pf(b) \in [qA, qB]$. Por otra parte, si $f(a) - pf(b) \in [qA, qB]$, siguiendo los pasos inversos, se llega a que $c = f^{-1}(\frac{f(a)-pf(b)}{q}) \in [0,1]$, es tal que $T(b,c) = a$.

De la misma forma se obtiene que si $b \le a$, T es conjunción en (a,b) si y sólo si $f(b) - pf(a) \in [qA, qB]$.

En conclusión, T es una conjunción en (a,b), si y sólo si $f(a \wedge b) - pf(a \vee b) \in [qA, qB]$. □

COROLARIO 1.4.5. La media ponderada $T_\alpha(a,b) = \alpha a + \beta b$, con $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta > 0$, es una conjunción en $(a,b) \in [0,1]^2$ si y sólo si $a = b = 0$ o $\frac{a \wedge b}{a \vee b} \ge \alpha$.

Demostración.- La media $T_\alpha(a,b) = \alpha a + \beta b$, es una media cuasilineal de generador $f:[0,1] \to [0,1]$, con $f(x) = 1 - x$ biyectivo y decreciente, $p = \alpha$, $q = \beta$; por tanto, será conjunción en (a,b) si y sólo si $f(a \wedge b) - \alpha f(a \vee b) \in [\beta A, \beta B] = [0, \beta]$; es decir, si
$0 \le (1 - a \wedge b) - \alpha(1 - a \vee b) \le \beta$;

como la primera desigualdad siempre es cierta, será conjunción si y sólo si
$(1 - a \wedge b) - \alpha(1 - a \vee b) \le 1 - \alpha$, o simplificando,
$-a \wedge b + \alpha(a \vee b) \le 0$; lo que ocurre sólo si $a \wedge b = a \vee b = 0$,o $\frac{a \wedge b}{a \vee b} \ge \alpha$. □

Sea $A_\alpha = \{(a,b) \in [0,1]^2 \ ; \ T_\alpha$ es conjunción en $(a,b)\} = \{(a,b) \in [0,1]^2 \ ; \ \frac{a \wedge b}{a \vee b} \ge \alpha\} \cup \{(0,0)\} \subseteq [0,1]^2$ (vid. figura).

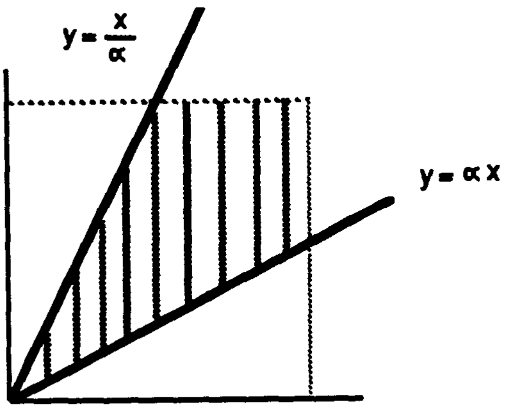

Fig. 1.9.

NOTA.- El Corolario 1.4.5. nos indica que, por ejemplo, la media aritmética puede utilizarse como conjunción para los pares (a,b) de $A_{1/2}$, es decir, para aquellos (a,b) tales que $\frac{a\wedge b}{a\vee b} \geq \frac{1}{2}$, o $(a,b) = (0,0)$.

TEOREMA 1.4.6. Dados α , $\gamma \in (0,1)$

$$\gamma \leq \alpha \Leftrightarrow A_\alpha \subseteq A_\gamma$$

Es decir, $\gamma \leq \alpha$ si y sólo si la región donde T_α se comporta como conjunción está contenida en la región donde lo hace T_γ.

Demostración.- Si $\gamma \leq \alpha$, sea $(a,b) \in A_\alpha$; se tiene $\frac{a\wedge b}{a\vee b} \geq \alpha \geq \gamma$ y $(a,b) \in A_\gamma$.

Supongamos ahora que $A_\alpha \subseteq A_\gamma$; si fuese $\gamma > \alpha$, existiría un $(a,b) \in [0,1]^2$ tal que $\alpha < \frac{a\wedge b}{a\vee b} < \gamma$, y así, $(a,b) \in A_\alpha$ y $(a,b) \notin A_\gamma$, obteniendo una contradicción. Por tanto, ha de ser $\gamma \leq \alpha$.□

Es de notar que

$$\bigcap_{\alpha\in(0,1)} A_\alpha = \{(a,a)\ ;\ a \in [0,1]\}$$

NOTA.- Podemos utilizar la media ponderada T_α con el objeto de definir una conjunción por:

$$T(a,b) = T_\alpha \cdot \varphi_{A_\alpha}(a,b) + T^* \cdot \varphi_{A'_\alpha}(a,b)$$

donde T^* es cualquier conjunción en A'_α, complemento de A_α en $[0,1]^2$, y φ_A es la función característica del subconjunto A.

Ya vimos que si T es una conjunción estricta creciente, entonces para todo a, b de $[0,1]$ existe $a : b$, y si T es conjunción creciente y contínua a la derecha en la segunda variable, también existe $a : b$, y además $a \leq b$ si y sólo si $T(b, a \wedge b : a \vee b) = a$.

Para la media ponderada T_α, que ya sabemos que no está en ninguno de los casos anteriores, se pretende hacer un estudio similar. Dada la media ponderada $T_\alpha(a,b) = \alpha a + \beta b$, con $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta > 0$, veremos cuáles son los pares $(a,b) \in [0,1]^2$, tales que $a \wedge b : a \vee b$ existe.

$a \wedge b : a \vee b = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ T_\alpha(a \vee b, z) \leq a \wedge b\} = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ \alpha(a \vee b) + \beta z \leq a \wedge b\} = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ z \leq \frac{a \wedge b - \alpha(a \vee b)}{\beta}\}$.

$a \wedge b : a \vee b$ existirá siempre que este último conjunto no sea vacío, lo que ocurre si y sólo si $a \wedge b - \alpha(a \vee b) \geq 0$; es decir, si y sólo si $\frac{a \wedge b}{a \vee b} \geq \alpha$ o $a \wedge b = a \vee b = 0$.

Tenemos así, que $a \wedge b : a \vee b$ existirá para los pares (a,b) donde T_α sea conjunción; además, en este caso
$a \wedge b : a \vee b = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ z \leq \frac{a \wedge b - \alpha(a \vee b)}{\beta}\} = Min(1, \frac{a \wedge b - \alpha(a \vee b)}{\beta})$.

Si $a \leq b$, $T_\alpha(b, a \wedge b : a \vee b) = \alpha b + \beta Min(1, \frac{a \wedge b - \alpha(a \vee b)}{\beta}) = \alpha b + Min(\beta, a - \alpha b) = \alpha b + a - \alpha b = a$, ya que si fuese $\beta < a - \alpha b \leq b - \alpha b = (1-\alpha)b = \beta b$, se llegaría a $1 < b$.

Si $a > b$, $T_\alpha(b, a \wedge b : a \vee b) = \alpha b + \beta Min(1, \frac{b - \alpha a}{\beta}) = \alpha b + Min(\beta, b - \alpha a) = \alpha b + b - \alpha a$, ya que si fuera $\beta < b - \alpha a < a - \alpha a = (1-\alpha)a = \beta a$, $1 < a$, se llegaría a una contradicción.
Además, $\alpha b + b - \alpha a \neq a$, pues en caso contrario, $\alpha b + b = \alpha a + a$ y $b = a$, en contra de $a > b$.
Así pues,

$$\forall\, (a,b) \in A_\alpha,\ \ a \leq b \ \Leftrightarrow\ T_\alpha(b, a \wedge b : a \vee b) = a.$$

Algunos resultados de esta sección, quedan reflejados en el siguiente diagrama, donde $R_A = \{$ conjunciones en la región $A \subseteq [0,1]^2\}$, y $B \subset A$.

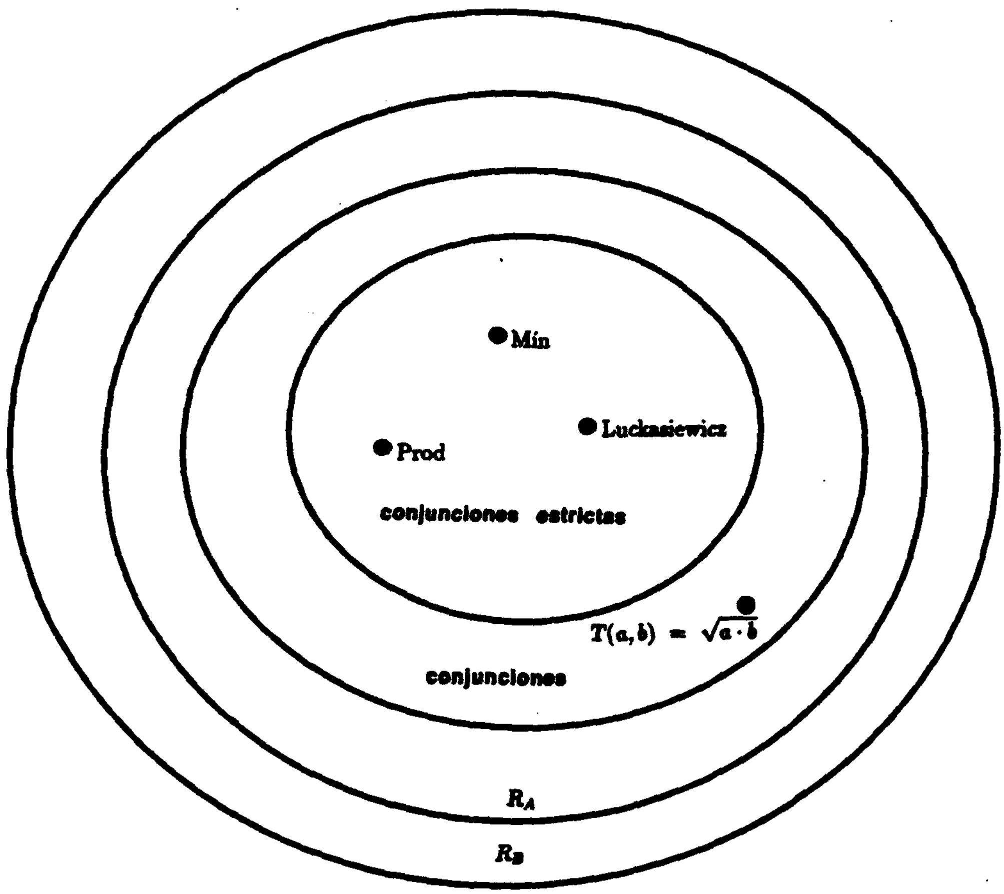

Fig. 1.10.

I.5. DISJUNCIONES EN $([0,1], \leq)$

La definición que proponemos para el concepto de disjunción es simétrica a la de conjunción; por ello, como es de esperar, el estudio es paralelo al de ésta última. Las demostraciones de los resultados obtenidos son similares a las de los apartados anteriores, por lo que en la mayor parte de los casos, las omitiremos.

DEFINICION 1.5.1. Una operación $T^* : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una disjunción estricta para el intervalo ordenado $([0,1], \leq)$, si para todo a, b de $[0,1]$:

$$[\ a \leq b\ ] \quad \Leftrightarrow \quad [\ \exists c \in [0,1] \text{ verificando } T^*(a,c) = b\ ]$$

En lo que sigue, T^* denotará una función de $[0,1]^2$ en $[0,1]$.

TEOREMA 1.5.2. T^* es una disjunción estricta si y sólo si $Im(T_a^*) = [a,1]$ para todo $a \in [0,1]$.

TEOREMA 1.5.3. No existe ninguna T que sea a la vez conjunción estricta y disjunción estricta.

Demostración.- Si existiese, para todo $a \in [0,1]$ sería a la vez $Im(T_a) = [0,a]$ e $Im(T_a) = [a,1]$, lo que es imposible. □

TEOREMA 1.5.4. Si T^*:
- es contínua en la segunda variable,
- es mayor o igual que el Máximo,
- tiene al 1 como elemento absorbente a la derecha, y
- tiene al 0 como elemento unidad a la derecha,

entonces T^* es una disjunción estricta.

COROLARIO 1.5.5. Las t-conormas contínuas son disjunciones estrictas.

Las t-normas contínuas no son disjunciones estrictas.

TEOREMA 1.5.6. Toda disjunción estricta conmutativa y creciente es una función de agregación.

TEOREMA 1.5.7. Si T es una función de agregación, T es disjunción estricta si y sólo si $T(x,1) = 1$ para todo $x \in [0,1]$.

TEOREMA 1.5.8. Si T es una función de agregación, T es disjunción estricta si y sólo si $T(x,0) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

TEOREMA 1.5.9. Dada la función de agregación

$$F = (1-k)T + kS,$$

donde T es una t-norma y S una t-conorma contínuas cualesquiera, F es una disjunción estricta si y sólo si $k = 1$.

DEFINICION 1.5.10. $T^* : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una disjunción si para todo $a, b \in [0,1]$ es:

$$[a \leq b\,] \quad \Rightarrow \quad [\,\exists c \in [0,1] \text{ verificando } T^*(a,c) = b\,]$$

TEOREMA 1.5.11. T^* es una disjunción si y sólo si existe un $r^* : [0,1]^2 \to [0,1]$, tal que para todo a, b de $[0,1]$,

$$a \leq b \quad \text{si y sólo si} \quad b = T^*(a, r(a,b))$$

TEOREMA 1.5.12. T^* es una disjunción si y sólo si $[a,1] \subseteq Im(T^*_a)$ para todo $a \in [0,1]$.

TEOREMA 1.5.13. T es conjunción y disjunción a la vez si y sólo si $Im(T_a) = [0,1]$ para todo $a \in [0,1]$.

Demostración.- T es conjunción y disjunción si y sólo si para todo $a \in [0,1]$, $[0,a] \subseteq Im(T_a)$ y $[a,1] \subseteq Im(T_a)$, lo que ocurre sólo si $Im(T_a) = [0,1]$. □

TEOREMA 1.5.14. Toda disjunción estricta es una disjunción, y por tanto, toda t-conorma contínua es una disjunción.

TEOREMA 1.5.15. Toda disjunción que sea a la vez función de agregación, es disjunción estricta.

TEOREMA 1.5.16. Si $T(a,b) = f^{-1}(pf(a) + qf(b))$ con $p+q=1$ y $pq > 0$ es una media cuasilineal con generador $f : [0,1] \to [-\infty, B]$ biyectivo y decreciente (vid. figura), entonces T es una disjunción, pero no es disjunción estricta.

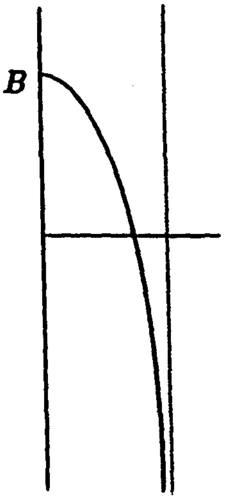

Fig. 1.11.

TEOREMA 1.5.17. Si $T(a,b) = f^{-1}(pf(a)+qf(b))$ con $p+q=1$ y $pq > 0$ es una media cuasilineal con generador $f : [0,1] \to [A,B]$, $A > -\infty$, biyectivo y decreciente (vid. figura), entonces T no es una disjunción.

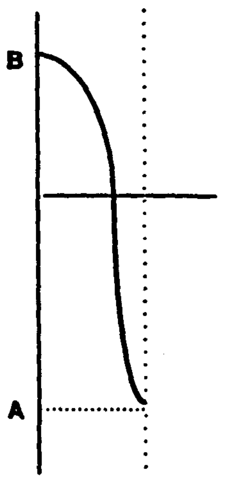

Fig. 1.12.

COROLARIO 1.5.18. La media aritmética no es una disjunción.

TEOREMA 1.5.19. Si T^* es una disjunción, estricta o no, entonces la relación $\leq$ no es T^*-monótona.

Las tres primeras gráficas siguientes corresponden a disjunciones estrictas, y las últimas a disjunciones no estrictas.

$$T(a,b) = 1 - b + a \cdot b$$

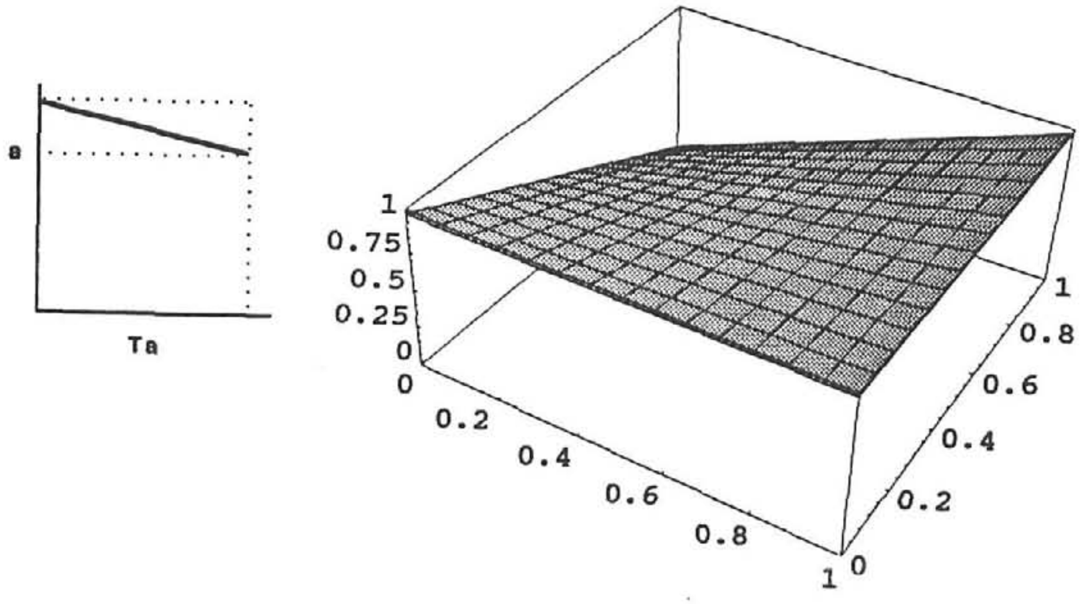

Fig. 1.13.

$$T(a,b) = \begin{cases} 2(1-a)b + a, & \text{si } b \leq 1/2 \\ 2(1-a)(1-b) + a, & \text{si } b > 1/2 \end{cases}$$

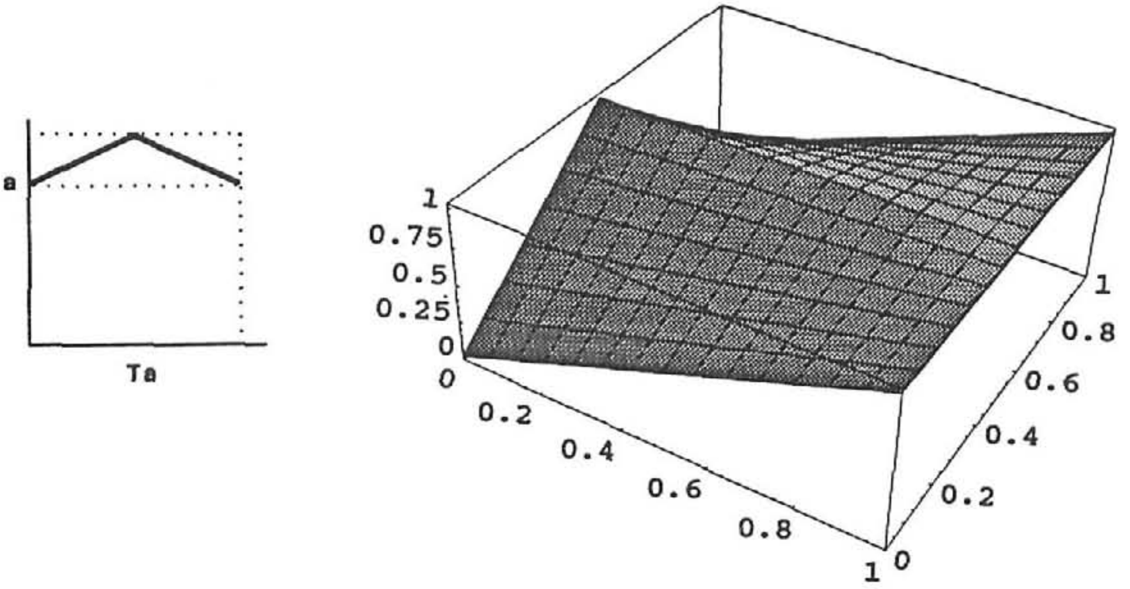

Fig.1.14.

$$T(a,b) = (4a-4)b^2 - (4a-4)b + a$$

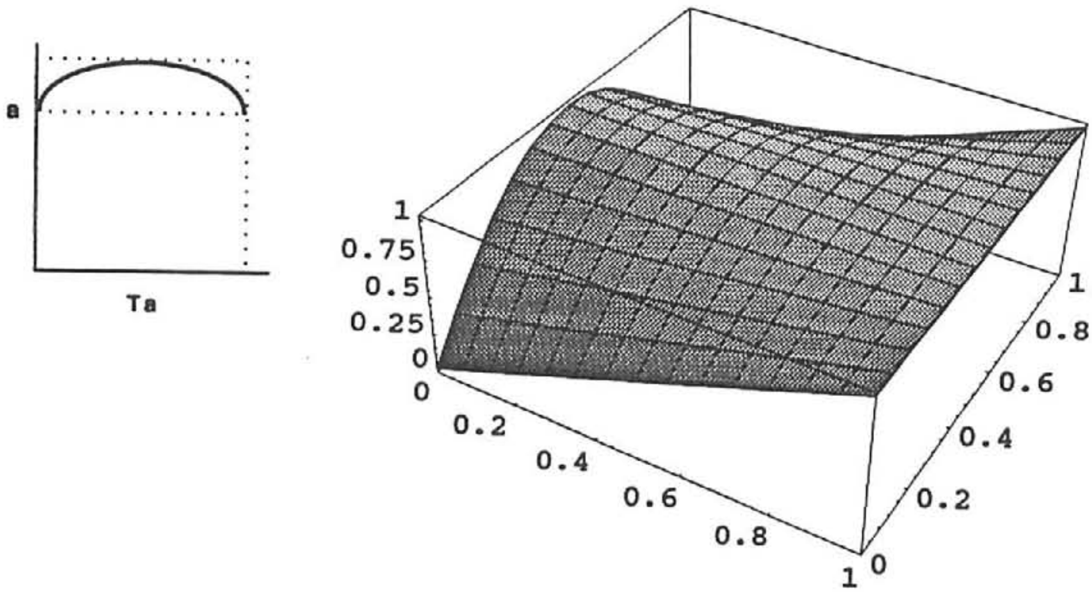

Fig. 1.15.

$$T(a,b) = b + \frac{a}{2}(1-b)$$

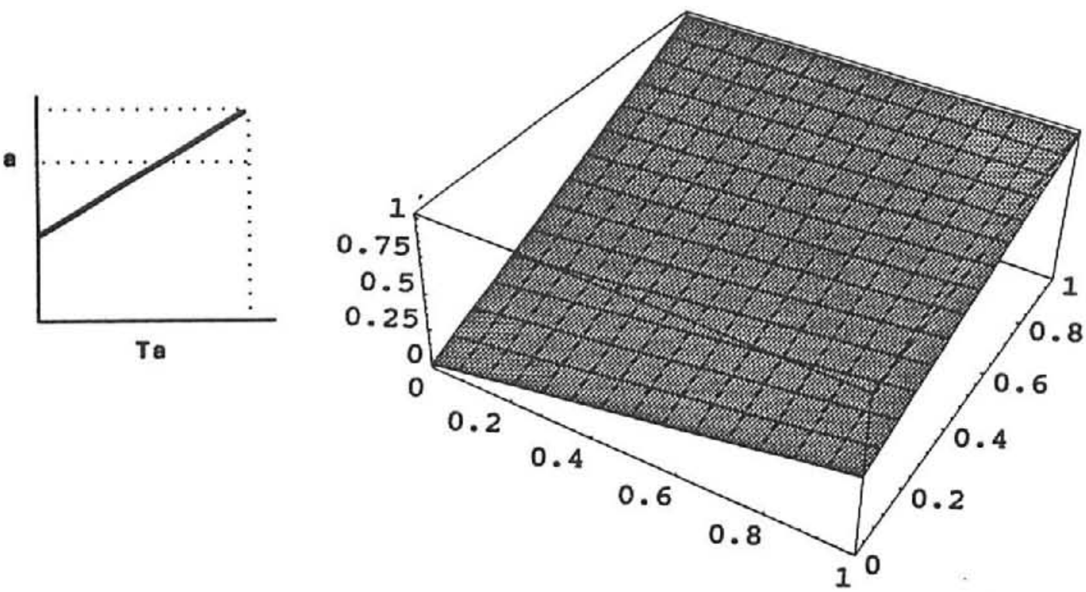

Fig. 1.16.

$$T(a,b) = 1 - b + \frac{ab}{2}$$

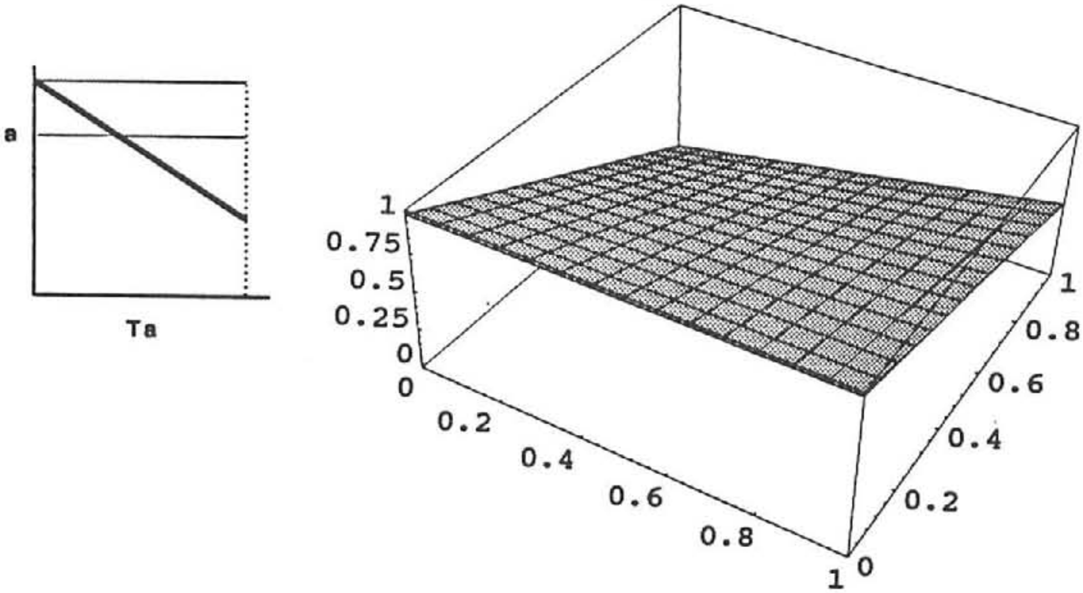

Fig. 1.17.

$$T(a,b) = (2a-4)b^2 - (2a-4)b + \frac{a}{2}$$

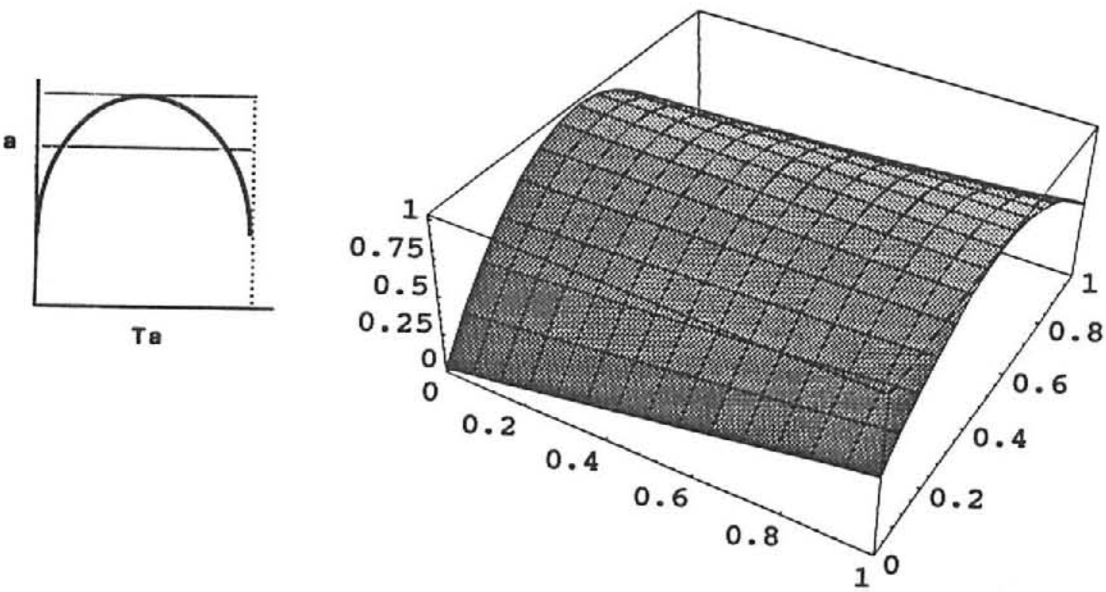

Fig.1.18.

DEFINICION 1.5.20. Dado $(a,b) \in [0,1]^2$, la función T^* es una disjunción en el punto (a,b) si:

- $a \leq b$ y existe un $c \in [0,1]$ verificando $T^*(a,c) = b$, o
- $b \leq a$ y existe un $d \in [0,1]$ tal que $T^*(b,d) = a$.

TEOREMA 1.5.21. Una función T^* es una disjunción si y sólo si es una disjunción en todo punto $(a,b) \in [0,1]^2$.

TEOREMA 1.5.22. Sea $T(a,b) = f^{(-1)}(pf(a) + qf(b))$, con $p+q=1$, $pq > 0$, una media cuasilineal cuyo generador $f : [0,1] \rightarrow [A,B]$, $A > -\infty$, es biyectivo y decreciente. Entonces T es disjunción en (a,b) si y sólo si $f(a \vee b) - pf(a \wedge b) \in [qA, qB]$.

COROLARIO 1.5.23. La media ponderada $T_\alpha^* = \alpha a + \beta b$ siendo $\alpha + \beta = 1$ y $\alpha\beta > 0$, es disjunción en $(a,b) \in [0,1]^2$ si y sólo si $a = b = 1$ o $\frac{1-(a \vee b)}{1-(a \wedge b)} \geq \alpha$.

Llamamos $O_\alpha = \{(a,b) \in [0,1]^2 \; ; \; T_\alpha^* \text{ es una disjunción en } (a,b)\} = \{(a,b) \in [0,1]^2 \; ; \; \frac{1-(a \vee b)}{1-(a \wedge b)} \geq \alpha\} \cup \{(1,1)\}$ (vid. fig).

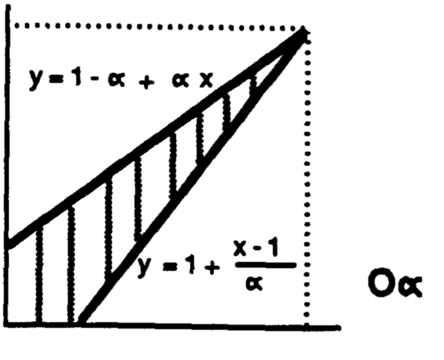

Fig. 1.19.

LEMA 1.5.24. Dados $\alpha, \gamma \in (0,1)$, se verifica que $\gamma \leq \alpha$ si y sólo si $O_\alpha \subseteq O_\gamma$.

Nos planteamos cómo obtener una disjunción a partir de una conjunción, y viceversa. Para ello recordemos lo que es una negación ([68]) .

DEFINICION 1.5.25. Una función $n : [0,1] \to [0,1]$ es una función de negación si verifica:

1) $n(0) = 1$, $n(1) = 0$

2) n es decreciente.

Si además es $n(n(a)) \geq a$, para todo $a \in [0,1]$, es una función de negación ordinaria.
Si es $n(n(a)) \leq a$, para todo $a \in [0,1]$, función de negación débil.
Y si es ordinaria y débil a la vez, es decir si siempre es $n(n(a)) = a$ se dice que n es una negación fuerte.

Sea T una t-norma contínua, y definamos, para cada $a \in [0,1]$

$$n(a) = 0 : a = sup\,\{z \in [0,1]\ ;\ T(a,z) \leq 0\} = sup\,\{z \in [0,1]\ ;\ T(a,z) = 0\}$$

Observemos que :
- Por ser T creciente, n es decreciente.
- $n(0) = 0 : 0 = sup\,\{z \in [0,1]\ ;\ T(0,z) = 0\} = 1$.
- $n(1) = 0 : 1 = sup\,\{z \in [0,1]\ ;\ T(1,z) = 0\} = 0$.

Por tanto, n es una negación. Además,

1) Si T es una t-norma positiva,

$$n(a) = 0 : a = sup\,\{z \in [0,1]\ ;\ T(a,z) = 0\} = \begin{cases} 1, & \text{si } a = 0 \\ 0, & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

que es la negación más pequeña.

Si $a = 0$, $n(n(a)) = n(1) = 0$
Si $a \neq 0$, $n(n(a)) = n(0) = 1$
Por tanto, $a \leq n(n(a))$ para todo $a \in [0,1]$, y n es una negación ordinaria, no fuerte.

2) Si T es una t-norma arquimediana no estricta, tendrá un generador $f : [0,1] \rightarrow [0, f(0)]$ contínuo y estrictamente decreciente, tal que $T(a,b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b))$. En este caso,

$n(a) = 0 : a = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ f^{(-1)}(f(a) + f(z)) = 0\} = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ f(z) \geq f(0) - f(a)\} = sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ z \leq f^{(-1)}(f(0) - f(a))\} = f^{(-1)}(f(0) - f(a))$.

Ahora, $n(n(a)) = f^{(-1)}(f(0) - f(n(a))) = f^{(-1)}(f(0) - f(f^{(-1)}(f(0) - f(a)))) = f^{(-1)}(f(0) - f(0) + f(a)) = f^{(-1)}(f(a)) = a$.
Por tanto, se trata de una negación fuerte.

En particular, si tomamos $f(x) = 1 - x$, tendremos $n(a) = 1-(1-1+a) = 1-a$, para todo $a \in [0,1]$.

Sea T^* una t-conorma contínua, y definamos para todo $a \in [0,1]$,

$$n(a) = inf\ \{z \in [0,1]\ ;\ T^*(a,z) \geq 1\} = inf\ \{z \in [0,1]\ ;\ T^*(a,z) = 1\}$$

Tenemos que:

- Por ser T creciente, n es decreciente,
- $n(0) = inf\ \{z \in [0,1]\ ;\ T^*(0,z) = 1\} = inf\ \{z \in [0,1]\ ;\ z = 1\} = 1$,
- $n(1) = inf\ \{z \in [0,1]\ ;\ T^*(1,z) = 1\} = inf\ \{z \in [0,1]\ ;\ 1 = 1\} = 0$,

y por tanto, n es una negación. Además,

1) Si T^* es una t-conorma estricta o es el Max:

$$n(a) = inf\ \{z \in [0,1]\ ;\ T^*(a,z) = 1\} = \begin{cases} 0, & \text{si } a = 1 \\ 1, & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$$

que es la mayor negación en $[0,1]$.

Si $a = 1 : n(n(a)) = n(0) = 1$.
Si $a \neq 1 : n(n(a)) = n(1) = 0$.
Por tanto, siempre $n(n(a)) \leq a$ y n es una negación débil.

2) Si T^* es arquimediana no estricta, tendrá una generador aditivo $g : [0,1] \rightarrow [0, g(1)]$ estrictamente creciente y contínuo, y en este caso:

$n(a) = inf\ \{z \in [0,1]\ ;\ g^{(-1)}(g(a) + g(z)) = 1\} = inf\ \{z \in [0,1]\ ;\ g(a) + g(z) \geq g(1)\} = inf\ \{z \in [0,1]\ ;\ z \geq g^{(-1)}(g(1) - g(a))\} = g^{(-1)}(g(1) - g(a))$.

$n(n(a)) = g^{(-1)}(g(1) - g(n(a))) = g^{(-1)}(g(1) - g(g^{(-1)}(g(1) - g(a)))) = g^{(-1)}(g(1) - g(1) + g(a)) = a$, y n es una negación fuerte.

Para simplificar, cuando no haya lugar a error, escribiremos na en lugar de $n(a)$.

TEOREMA 1.5.26. Si $n : [0,1] \to [0,1]$ es una negación fuerte , entonces T es una conjunción estricta si y sólo si la función $T^*(a,b) = nT(na, nb)$ es una disjunción estricta.

Demostración.- Si T es una conjunción estricta, $a \leq b$ si y sólo si $nb \leq na$, si y sólo si existe un $c \in [0,1]$ tal que $T(na, c) = nb$, o $nT(na, c) = b = T^*(a, nc)$, es decir, sólo si existe un $d = nc \in [0,1]$ tal que $T^*(a,d) = b$.
El recíproco es similar. □

El teorema siguiente tiene una demostración análoga.

TEOREMA 1.5.27. Si n es una negación fuerte, entonces T es una conjunción si y sólo si $T^*(a,b) = nT(na, nb)$ es una disjunción.

TEOREMA 1.5.28. Si n es una negación fuerte, entonces T es una conjunción en $(a,b) \in [0,1]^2$ si y sólo si $T^*(a,b) = nT(na,nb)$ es una disjunción en (na, nb).

Demostración. Sea T conjunción en (a,b).
Si $na \leq nb$, $b \leq a$ y existe un $c \in [0,1]$ tal que $T(a,c) = b$, con lo que $nT(a,c) = nb$ y $T^*(na, nc) = nb$;
por tanto, existe un $d = nc \in [0,1]$ tal que $T^*(na, d) = nb$.

De la misma forma, si $nb \leq na$, existe un d tal que $T^*(nb, d) = na$.

El recíproco es similar. □

EJEMPLOS 1.5.29.

1.- $T(a,b) = Min(a,b)$ es una conjunción estricta. Tomando cualquier función $f : [0,1] \to [0,m]$ contínua y estrictamente decreciente, $n(a) = f^{(-1)}(f(0) - f(a))$ es una negación fuerte ([68]). Por lo tanto,

$T^*(a,b) = nT(na,nb) = f^{(-1)}(f(0) - f(T(na,nb))) =$
$= f^{(-1)}(f(0) - f(Min(f^{(-1)}(f(0) - f(a)), f^{(-1)}(f(0) - f(b))))) =$
$= f^{(-1)}(f(0) - f(f^{(-1)}(f(0) - f(Max(a,b))))) = f^{(-1)}(f(0) - f(0) +$
$f(Max(a,b))) = Max(a,b).$

y $T^*(a,b) = Max(a,b)$ es, como ya sabemos, una disjunción estricta.

2.- $T(a,b) = \sqrt{a \cdot b}$ es una conjunción que no es estricta. Para la negación fuerte $n(a) = 1 - a$, se obtiene,

$T^*(a,b) = nT(na,nb) = 1 - \sqrt{na \cdot nb} = 1 - \sqrt{(1-a)\cdot(1-b)} = 1 - \sqrt{1 - a - b + a \cdot b}$, que, por el Teorema 1.5.26. y 1.5.27. , será una disjunción no estricta.

En efecto, observemos que para todo $a \in [0,1]$,
T_a^* es creciente,
$T_a^*(0) = 1 - \sqrt{1-a} \leq a$, y
$T_a^*(1) = 1 - \sqrt{1 - a - 1 + a} = 1;$

luego, para todo $a \in [0,1]$, es $[a,1] \subseteq Im(T_a^*)$, y por ejemplo, para cualquier $a < 1$, el contenido $[a,1] \subseteq Im(T_a^*)$ es estricto.

3.- $T(a,b) = a \cdot b$ es una conjunción estricta. Tomando la negación fuerte $n(a) = \sqrt{1 - a^2}$, tendremos:

$T^*(a,b) = nT(na,nb) = \sqrt{1 - (na \cdot nb)^2} = \sqrt{1 - (1-a^2)\cdot(1-b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2 - a^2 \cdot b^2}$, que por el Teorema 1.5.26. será una disjunción estricta.

En efecto, para todo $a \in [0,1]$,
T_a^* es creciente,
$T_a^*(0) = a$, y

$T_a^*(1) = 1$, y por tanto $[a, 1] = Im(T_a^*)$.

4.- Sabemos que la media ponderada $T_\alpha(a,b) = \alpha a + (1-\alpha)b$ es una conjunción en $\{(0,0)\} \cup \{(a,b)\ ;\ \frac{a\wedge b}{a\vee b} \geq \alpha\}$.

Por ser $n(a) = 1 - a$ una negación fuerte en $([0,1], \leq)$,
$T_\alpha^*(a,b) = nT_\alpha(na, nb) = 1 - [\alpha(1-a) + (1-\alpha)(1-b)] = \alpha a + (1-\alpha)b = T_\alpha(a,b)$, por el teorema 1.5.28. será disjunción en los $(na, nb) = (1-a, 1-b)$ tales que $(a,b) = (0,0)$ o $\frac{a\wedge b}{a\vee b} \geq \alpha$.

Al ser $a \wedge b = 1 - [(1-a) \vee (1-b)]$ y $a \vee b = 1 - [(1-a) \wedge (1-b)]$, llegamos a que $T_\alpha^* = T_\alpha$ será una disjunción en la región $\{(1,1)\} \cup \{(a,b)\ ;\ \frac{1-(a\vee b)}{1-(a\wedge b)} \geq \alpha\}$, como era de esperar por el corolario 1.5.23.

5.- No es cierto que si T es conjunción en un $(a,b) \in [0,1]^2$, y n es una negación fuerte, entoncès $T^*(a,b) = nT(na, nb)$ es disjunción en (a,b). Veamos un contraejemplo.

Sabemos que $T(a,b) = \frac{a+b}{2}$ es conjunción en todo $(a,b) \in [0,1]^2$ tal que $\frac{a\wedge b}{a\vee b} \geq \frac{1}{2}$; en particular, es conjunción en $(\frac{1}{2}, 1)$.

Tomando la negación fuerte $n(a) = 1 - a$, obtenemos:
$T^*(a,b) = nT(na, nb) = n(\frac{1-a+1-b}{2}) = 1 - (1 - \frac{a+b}{2}) = \frac{a+b}{2}$; pero esta operación, que vuelve a ser la media aritmética, no es disjunción en $(\frac{1}{2}, 1)$, por no ser en este punto $\frac{1-(a\vee b)}{1-(a\wedge b)} \geq \frac{1}{2}$.

6.- Para que se verifiquen los Teoremas 1.5.26. y 1.5.27., es necesario que la negación sea fuerte. Tomemos cualquier t-norma contínua T, que es conjunción, y conjunción estricta.

Ya sabemos que la función $n : [0,1] \to [0,1]$, definida por

$$n(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = 0 \\ 0, & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

es una negación ordinaria, no fuerte. Tomando esta negación:

$T^*(a,b) = nT(na, nb)$.

Si $a = b = 0$: $T^*(a,b) = nT(1,1) = n(1) = 0$.
Si $a = 0,\ b \neq 0$: $T^*(a,b) = nT(1,0) = 1$.
Si $a \neq 0,\ b = 0$: $T^*(a,b) = nT(0,1) = 1$.
Si $a \neq 0,\ b \neq 0$: $T^*(a,b) = nT(0,0) = 1$.

Por tanto,

$$T^*(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{si } a = b = 0 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y no se verifica que para todo $a \in [0,1]$, $[a,1] \subseteq Im(T^*_a)$, luego no es disjunción.

Del mismo modo, tomando la negación débil

$$n(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a = 1 \\ 1, & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$$

se obtiene:
Si $a = b = 1$: $T^*(a,b) = nT(na,nb) = nT(0,0) = 1$.
Si $a = 1,\ b \neq 1$: $T^*(a,b) = nT(0,1) = 1$.
Si $a \neq 1,\ b = 1$: $T^*(a,b) = nT(1,0) = 1$.
Si $a \neq 1,\ b \neq 1$: $T^*(a,b) = nT(1,1) = 0$.

Por tanto, no es para todo $a \in [0,1]$ $[a,1] \subseteq Im(T^*_a)$, y T^* no es disjunción.

El siguiente gráfico, muestra algunos resultados de este capítulo.

$R_A = \{$ conjunciones en la región A $\}$

$R_A^* = \{$ disjunciones en la región A $\}$

$B \subset A.$

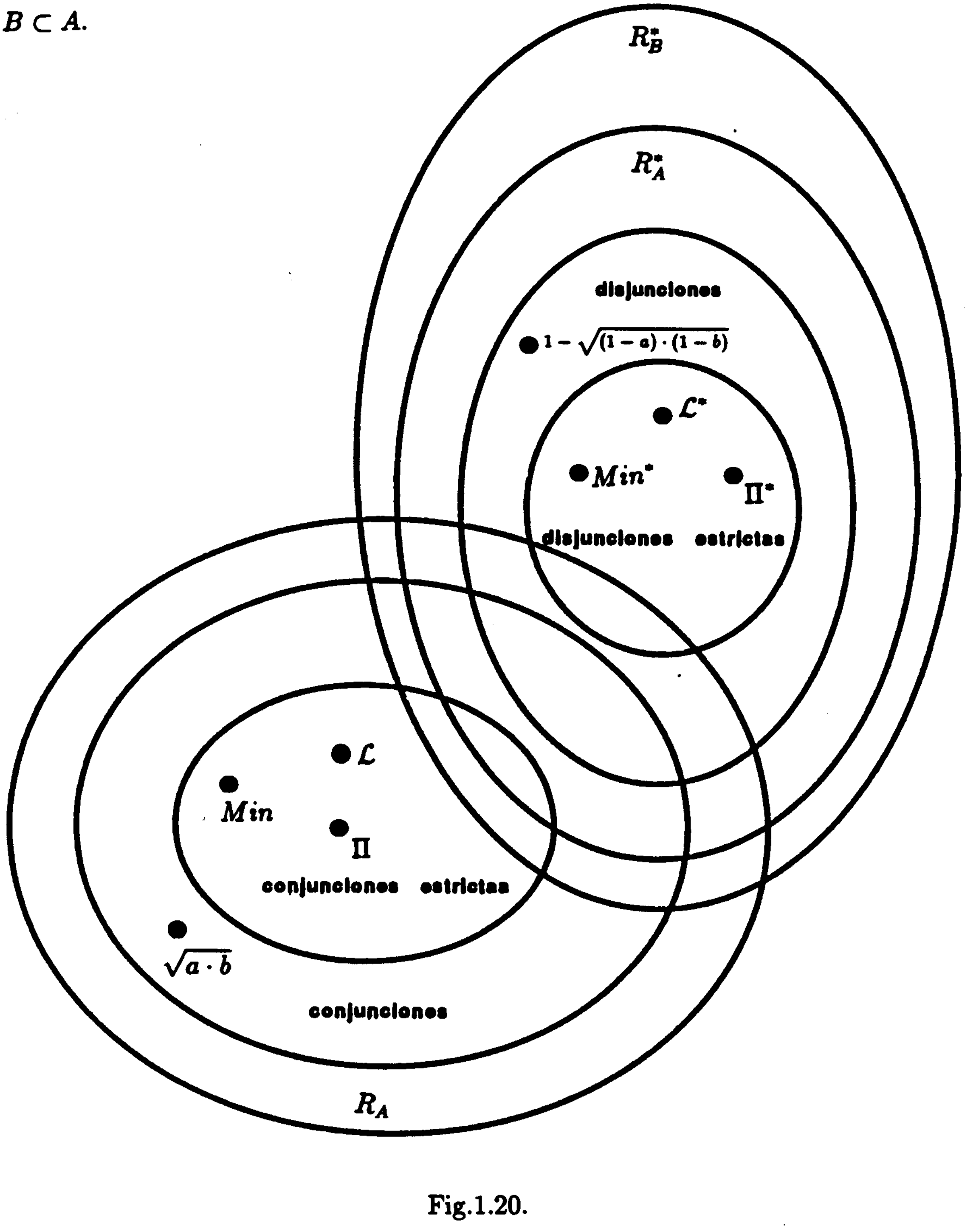

Fig.1.20.

CAPITULO 2

CONDICIONALES BORROSOS

1. T-CONDICIONALES.
2. CONSECUENCIAS FUZZY.
3. TRANSFORMADA LOGICA GENERALIZADA.
4. EL CONDICIONAL MATERIAL.

En cualquier lógica, no solamente es esencial el conjunto de elementos que pueden considerarse verdaderos, sino que no se puede entender una lógica que no proporcione un método para razonar, es decir, unas reglas que nos permitan, a partir de unas premisas, poder llegar a obtener unas conclusiones. Esto es equivalente a obtener una modelización de "Si ..., entonces...", modelización que se debe obtener mediante la determinación de una relación en el conjunto de partida.

En nuestro caso, el de la Lógica Fuzzy, estas relaciones serán inexactas: un elemento estará relacionado con otro en un cierto grado, y nos permitirán modelizar el esquema: Si a es P en un grado $\mu_P(a)$, entonces b es Q en un grado $\mu_Q(b)$.

Estas relaciones, sin embargo, deben cumplir ciertas condiciones necesarias para que realmente de un conjunto de hechos se puedan inferir otros, es decir para que exista una "propagación de la verdad". En Lógica Clásica esto se consigue mediante la Meta-Regla del Modus Ponens.

La consideración del Modus Ponens como Meta-Regla, es debida a la imposibilidad de obtenerla mediante una función booleana. Es decir, no existe en un álgebra de Boole ninguna función f, tal que para todo par de elementos a, b se verifique $f(a, a' + b) = b$. En efecto, si existiese, para todo b, tomando $a = \mathbf{0}$, se obtendría $f(\mathbf{0},\mathbf{1}) = b$, y eligiendo $a = b = \mathbf{0}$, $f(\mathbf{0},\mathbf{1}) = \mathbf{0}$. Por tanto, para todo b se llegaría a $b = \mathbf{0}$.

Por otra parte, se puede comprobar que sólo existe una función booleana verificando la desigualdad $f(a, a' + b) \leq b$ para todo par de elementos a, b, y que es la dada por $f(x, y) = x \cdot y$.

Sin embargo, si x e y son determinadas proposiciones relativas a un universo E, X e Y los subconjuntos de elementos que, respectivamente, las hacen verdaderas, y con funciones características φ_X y φ_Y, en este caso sí que es posible "capturar" el Modus Ponens mediante la igualdad

$$\sup_{t \in E} T(\varphi_X(t), \varphi_{\Rightarrow}(z/t)) = \varphi_Y(z)$$

Esta observación es la que ha motivado la línea de trabajo seguida en este capítulo.

La primera sección es una revisión del concepto de T-condicional y de algunos resultados de interés obtenidos por otros autores, principalmente E. Trillas, en los últimos años.

La Transformada Lógica de Zadeh, siempre que se trabaje con una t-norma contínua T y con una relación que sea un T-preorden, es un operador de consecuencias fuzzy, y por lo tanto será un modelo válido para el razonamiento cuando la información que se posee es una variante de la premisa correspondiente a la regla de inferencia de que se dispone. Sin embargo, sólo es válida cuando se trabaja en un único universo de discurso, caso en el que pocas veces nos encontramos en situaciones reales. Generalizamos este modelo para el caso de dos universos; la nueva Transformada Lógica, no cumplirá las condiciones de operador de consecuencias por estar trabajando en distinto campo, pero sí unas propiedades similares.

El mayor condicional en Lógica Clásica es el Condicional Material, ampliamente tratado en cualquier libro de Lógica elemental, a pesar de su poca utilización en la vida cotidiana, ya que permite deducir cualquier estamento de una premisa falsa, lo que no ocurre en el razonamiento de sentido común. Su generalización al caso inexacto se puede realizar por diferentes caminos, que se determinan en la tercera sección.

Por una parte, al ser el mayor condicional, se buscarán en nuestro caso, para una función de pertenencia correspondiente a un subconjunto fuzzy determinado, los mayores condicionales, obteniendo las conocidas relaciones I_μ^T; se demuestra que éstas, en cierto sentido, no son una generalización perfecta.

Por otra parte, se buscará una generalización recurriendo a la forma del Condicional Material mediante conectivos definidos en el conjunto en el que se trabaja; esta generalización será más exacta, pero tiene el inconveniente de que en muchos casos pierde el carácter de condicionalidad.

En lógica clásica para poder hacer inferencias mediante una relación $\Rightarrow$, parece adecuado exigir a la misma que al menos verifique la clásica Meta-Regla del Modus Ponens: "Si a es verdadero y es $a \Rightarrow b$, entonces b es verdadero", que se podría escribir simbólicamente:

$$\begin{array}{c} a \in V \\ a \Rightarrow b \\ \hline b \in V, \end{array}$$

siendo $V \subset E$, $V \neq \emptyset$, el subconjunto de elementos verdaderos de E. Usando funciones características, tal Meta-Regla se podría expresar por la desigualdad:

$$Min(\varphi_V(a), \varphi_{\Rightarrow}(b/a)) \leq \varphi_V(b),$$

para todo a, b, c en E. Cuando esto ocurre, se dice que $\Rightarrow$ es un V-condicional.

Es un ejercicio sencillo demostrar que una relación $\Rightarrow$ en E es un V-condicional si y sólo si está contenida en el Material Condicional $\rightarrow_V$, donde

$$\rightarrow_V = V \times V + (E - V) \times E$$

EJEMPLO 2.1.1. Sea el álgebra de Boole $(E, +, \cdot, ')$, y la relación $\leq$ dada por : $a \leq b$ si y sólo si $a \cdot b = a$.
Dado un subconjunto $V \subset E$, y definiendo una nueva relación $a \Rightarrow_V b$ si y sólo si $a' + b \in V$, se obtiene ([73]) que $\Rightarrow_V$ es un V-condicional si y sólo si para todo $a, b \in V$, con $a + b = 1$, es $V_{ab} = \{x \in E;\ a \cdot b \leq x \leq a \ \ o \ \ a \cdot b \leq x \leq b\} \subseteq V$.

En efecto, sea $\Rightarrow_V$ un V-condicional, y $a, b \in V$, con $a + b = 1$ (y por tanto, $b' \leq a$). Si $a \cdot b \leq x \leq a$, $a = a \cdot (b' + b) = a \cdot b' + a \cdot b \leq b' + x \leq a$; por tanto, $b' + x = a, b \Rightarrow_V x$ y $x \in V$. De la misma forma, si $a \cdot b \leq x \leq b$, también será $x \in V$.
Recíprocamente, sea para todo $a, b \in V$, con $a + b = 1$, $V_{ab} \subseteq V$; si $a \in V$ y $a \Rightarrow_V c$, será $a \in V$ y $a' + c \in V$; por otra parte, $a + (a' + c) = 1$ y $a \cdot (a' + c) \leq c \leq a' + c$, por tanto, $c \in V_{a,a'+c} \subseteq V$, y $c \in V$.

Cuando se consideran Conjuntos y Relaciones Inexactas, aparecerán, en vez de funciones características, funciones de pertenencia no nulas $\mu : E \rightarrow [0,1]$, y para modelizar el concepto de "y", haremos uso de una t-norma T, debido a que sus propiedades nos facilitarán los desarrollos.

Ahora exigiremos que el grado de pertenencia de a y el grado con el que "si a entonces b" indicado mediante una relación fuzzy R en E, nos proporcionen una cota inferior del grado con que b pertenece a E; es decir, impondremos que para cualesquiera a, b de E,

$$T(\mu(a), R(b/a)) \leq \mu(b)$$

Entonces se dice que R es un $\mu - T-$ conditional sobre E.

2.1.2. EJEMPLOS

1.- Dado un subconjunto $\mu : E \rightarrow [0,1]$, la relación inexacta , denominada Implicación de Kleene-Dienes , y dada por

$$R_{\mu}^{KD}(b/a) = Max(1 - \mu(a), \mu(b)),$$

para todo a, b en E, es un μ-$\mathcal{L}$-condicional, siendo $\mathcal{L}$ la t-norma de Lukasiewiz, pero no es ni μ-$Prod$-condicional, ni μ-Min-condicional.

2.- En las mismas condiciones del ejemplo anterior, tanto la Implicación de Willmot

$$R_{\mu}^{W}(b/a) = Max(1 - \mu(a), Min(\mu(a), \mu(b))),$$

como la Implicación de Reichenbach

$$R_{\mu}^{r}(b/a) = 1 - \mu(a) + \mu(a) \cdot \mu(b),$$

son μ-$\mathcal{L}$-condicionales, pero no son μ-T-condicionales para ninguna t-norma T mayor o igual que el Producto.

3.- Siendo μ como en los ejemplos anteriores, la Implicación de Mamdani

$$R_{\mu}^{m}(b/a) = Min(\mu(b), \mu(a)),$$

es un μ-T-condicional para cualquier t-norma T.

4.- Siendo T una t-norma, una relación R sobre un conjunto clásico E, se dice que es un operador de T-indistinguibilidad ([38]) si es reflexiva, simétrica y T-transitiva.

Dado un operador de T-indistinguibilidad R sobre un conjunto E, y un elemento a de E, el singletón inducido por a es el subconjunto fuzzy f_a definido por $f_a(x) = R(a, x)$.

Cuando estas condiciones se dan, por la T-transitividad, R es un f_a-T-estado lógico.

5.- Sea $(E, +, \cdot, p)$ un álgebra de Boole probabilizada, y la relación $I_p(b/a) = p(a' + b)$. Se tiene
$\mathcal{L}(p(a), I_p(b/a)) = Max(0, p(a)+p(a'+b)-1) = Max(0, p(a\cdot b)) = p(a\cdot b) \leq p(b)$.
Por tanto, I_p es un p-$\mathcal{L}$-condicional sobre E.

6.- En las mismas condiciones, dada la relación

$$R^*(b/a) = \begin{cases} 1, & \text{si } p(a) = 0 \\ p(b/a), & \text{si } p(a) > 0 \end{cases}$$

siempre es $p(a) \cdot R^*(b/a) \leq p(b)$, por lo que R^* es un p-$Prod$-condicional sobre E.

Cuando T es una t-norma contínua, R es un $\mu - T-$ condicional si y sólo si

$$R \leq I_\mu^T,$$

siendo $I_\mu^T(b/a) = Sup\ \{z \in [0,1]\ ;\ T(z, \mu(a)) \leq \mu(b)\}$ ([71],[79]).

Los Condicionales Inexactos o Fuzzy R más interesantes son reflexivos y T-transitivos. Es decir,

i) $R(a/a) = 1$, para todo a de E.
ii) $T(R(b/a), R(c/b)) \leq R(c/a)$, para cualesquiera a, b, c en E.

En este caso, la relación R es un T-Preorden Fuzzy. En ([79],[84]) se da una caracterización de los T-preórdenes: una Relación Fuzzy R sobre E es un T-Preorden si y sólo si existe una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos $\mu : E \longrightarrow [0,1]$ tales que

$$R(b/a) = \inf_{\mu \in \mathcal{F}} I_\mu^T(b/a),$$

para todo a, b en E.

Consecuentemente, pasando al caso clásico, y debido a que tomando $\mu = \varphi_V$ (función característica del subconjunto V), se obtiene $I_{\varphi_V}^T = \varphi_{\rightarrow_V}$ (función característica de la relación $\rightarrow_V$), dada una estructura relacional $(E, \Rightarrow)$, la relación $\Rightarrow$ es un preorden clásico si y sólo si existe una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de E, tal que

$$\Rightarrow \ = \bigcap_{V \in \mathcal{F}} \rightarrow_V .$$

Dado un subconjunto $V \subset E$ de elementos verdaderos, hemos considerado las relaciones que nos permiten hacer inferencias, pero se puede hacer el planteamiento recíproco; dada una estructura relacional $(E, \Rightarrow)$, se pueden buscar aquellos subconjuntos V de E que pueden ser considerados "subconjuntos de elementos verdaderos ", es decir, aquellos subconjuntos respecto a los cuales la relación $\Rightarrow$ verifica el Modus Ponens, y a los que llamaremos estados lógicos.

De la misma forma, dada una estructura relacional borrosa (E, R) y una t-norma T, nos interesa conocer aquellas funciones de pertenencia μ no nulas, tales que R es un μ-T-condicional. De estas funciones diremos que son T-estados lógicos para (E, R), y al conjunto de todas ellas lo denotaremos por $T(E, R)$:

$$T(E,R) = \{\mu \in [0,1]^E \ ; \ T(\mu(a), R(b/a)) \leq \mu(b), \ \forall (a,b) \in E \times E\}$$

Ahora tenemos que R es un T-preorden fuzzy si y sólo si

$$R(b/a) = \inf_{\mu \in T(E,R)} I_\mu^T(b/a)$$

para todo a, b en E.
Por otra parte, como $R \leq I_\mu^T$ implica $\mu \in T(E,R)$, $T(E,R)$ es precisamente la mayor familia $\mathcal{F}$ que verifica la igualdad anterior.

Igualmente, si dada una estructura clásica $(E, \Rightarrow)$, es $L(E, \Rightarrow) = \{V \subset E, V \neq \emptyset;\ \Rightarrow$ es un V-condicional $\}$, entonces

$$\Rightarrow\ = \bigcap_{V \in L(E,\Rightarrow)} \rightarrow_V$$

LEMA 2.1.3. Dadas las relaciones R y R' en E, y las t-normas T y T',

i) Si $T' \leq T$, entonces $T(E,R) \subseteq T'(E,R)$.

ii) Si $R' \leq R$, entonces $T(E,R) \subseteq T(E,R')$.

Demostración.- Inmediata. □

Si R es una relación T-transitiva pero no es reflexiva, es posible considerar el T-preorden:

$$R^*(b/a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = b \\ R(b/a), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

LEMA 2.1.4. Para cualquier t-norma T y cualquier relación R, es $T(E,R) = T(E,R^*)$.

Demostración.- Por ser $R \leq R^*$, obtenemos $T(E,R^*) \subseteq T(E,R)$.

Por otra parte, si $\mu \in T(E,R)$:
si $a = b$, $T(\mu(a), R^*(b/a)) = T(\mu(a), 1) = \mu(a) = \mu(b)$.
si $a \neq b$, $T(\mu(a), R^*(b/a)) = T(\mu(a), R(b/a)) \leq \mu(b)$. □

TEOREMA 2.1.5. Dada la estructura (E,R), y una t-norma contínua T, $T(E,R)$ es un subretículo del retículo $([0,1]^E, \vee, \wedge)$, donde $(\mu_1 \vee \mu_2)(x) = Max(\mu_1(x), \mu_2(x))$ y $(\mu_1 \wedge \mu_2)(x) = Min(\mu_1(x), \mu_2(x))$.

Demostración.- De hecho es $T(E,R) \neq \emptyset$ ya que $\varphi_E \in T(E,R)$.
Sean $\mu_1, \mu_2 \in T(E,R)$. Como es $R \leq I_\mu^T$ para cualquier $\mu \in T(E,R)$, $R \leq Min(I_{\mu_1}^T, I_{\mu_2}^T)$. Por lo tanto, tendremos

$T((\mu_1 \vee \mu_2)(a), R(b/a)) \leq T(Max(\mu_1(a), \mu_2(a)), Min(I_{\mu_1}^T(b/a), I_{\mu_2}^T(b/a))) = Max(T(\mu_1(a), Min(I_{\mu_1}^T(b/a), I_{\mu_2}^T(b/a)), T(\mu_2(a), Min(I_{\mu_1}^T(b/a), I_{\mu_2}^T(b/a)))) \leq$

$Max(T(\mu_1(a), I^T_{\mu_1}(b/a)), T(\mu_2(a), I^T_{\mu_2}(b/a))) \leq Max(\mu_1(b), \mu_2(b)) = (\mu_1 \vee \mu_2)(b)$, y $\mu_1 \vee \mu_2 \in T(E, R)$.

Análogamente, si $\mu_1, \mu_2 \in T(E, R)$, entonces $\mu_1 \wedge \mu_2 \in T(E, R)$. □

Llevando este resultado al caso clásico,

COROLARIO 2.1.6. Dada $\Rightarrow$ en E, $L(E, \Rightarrow)$ es un subretículo del Algebra de Boole $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$.

TEOREMA 2.1.7. El retículo $T(E, R)$ es completo, siendo T una t-norma contínua.

Demostración. Dado cualquier subconjunto no vacío $S \subseteq T(E, R)$, consideremos

$$\sigma = \sup_{\mu_i \in S} \mu_i \quad \text{and} \quad \iota = \inf_{\mu_i \in S} \mu_i,$$

respectivamente definidos por

$$\sigma(x) = \sup_{\mu_i \in S} \mu_i(x), \quad \text{y} \quad \iota(x) = \inf_{\mu_i \in S} \mu_i(x)$$

para cualquier $x \in E$. Es claro que $\sigma, \iota \in [0, 1]^E$. Como

$$T(\sigma(a), R(b/a)) = T(\sup_{\mu_i \in S} \mu_i(a), R(b/a)) = \sup_{\mu_i \in S} T(\mu_i(a), R(b/a)) \leq \sup_{\mu_i \in S} \mu_i(b) = \sigma(b),$$
$$T(\iota(a), R(b/a)) = T(\inf_{\mu_i \in S} \mu_i(a), R(b/a)) = \inf_{\mu_i \in S} T(\mu_i(a), R(b/a)) \leq \inf_{\mu_i \in S} \mu_i(b) = \iota(b),$$

son $\sigma \in T(E, R)$ y $\iota \in T(E, R)$. □

Por tanto, $\mu^* = \sup\ \{\mu\ ;\ \mu \in T(E, R)\} = \varphi_E$ es el mayor T-Estado Lógico para (E, R), y $\mu_* = \inf\{\mu\ ;\ \ \mu \in T(E, R)\}$ es el menor T-Estado Lógico para (E, R), siempre que μ_* sea no nulo.

De nuevo ahora,

COROLARIO 2.1.8. Dada la relación exacta $\Rightarrow$ en E, el retículo $L(E, \Rightarrow)$ es completo.

Así pues, $V^* = \bigcup \{V \; ; \; V \in L(E,\Rightarrow)\} = E$ es el mayor estado lógico para $(E,\Rightarrow)$ y si $V_* = \bigcap \{V \; ; \; V \in L(E,\Rightarrow)\}$ no es el conjunto vacío, es el menor.

NOTA.- Si $\mu \in T(E,R)$, en general no es $\mu' = 1-\mu \in T(E,R)$. Por ejemplo, es bien conocido ([71]), que $p \in \Pi(E^+, p^*)$, siendo $E^+ = \{x \in E \; ; \; p(x) > 0\}$ para un Algebra de Boole probabilizada (E,p) y p^* la probabilidad condicional. Sin embargo, si fuese $\mu = 1 - p \in \Pi(E^+, p^*)$ obtendríamos $(1-p(a)) \cdot p^*(b/a) = (1-p(a))\frac{p(ab)}{p(a)} \leq 1 - p(b)$, para cualquier a, b en E^+. En particular, si $b = 1$, $1 - p(a) \leq 0$; $1 = p(a)$ para todo $a \in E$, lo que es absurdo.

En el caso clásico esta observación se traslada al hecho de que si V es un estado lógico, de "$a \notin V$ y $a \Rightarrow b$", en general no es posible concluir nada sobre si $b \notin V$ o si $b \in V$.

A menudo, nos encontramos con el esquema: " *Si x es P, entonces y es Q*" y "*x es P^**", ¿qué podremos decir entonces de "y es Q^* "?, donde P, P^*, Q y Q^* son predicados vagos sobre un universo E. La llamada Transformada de Zadeh da una posible solución a este problema; tanto para su generalización al caso de dos universos E_1 y E_2, como para comprobar que realmente se puede hablar de consecuencias, conviene recordar la definición de Operador de Consecuencias Fuzzy.

El intento de obtener una formalización de las consecuencias fuzzy, ha seguido esencialmente dos caminos . Por una parte , están las relaciones de α-consecuencias, definidas en conjuntos clásicos, pero con valores entre 0 y 1, y por otra, los operadores de consecuencias fuzzy, en subconjuntos borrosos, y estrechamente ligados a las relaciones de consecuencia fuzzy.

DEFINICION 2.2.1. Dado un conjunto clásico E, una relación fuzzy $\prec$: $\mathbb{P}(E) \times E \rightarrow [0,1]$ es una relación de α-consecuencias en el sentido de Chakraborty ([19]) si verifica las siguientes propiedades:

Ch1) α-Reflexividad: Si $b \in A$, entonces $\prec (A, b) \geq \alpha$,
Ch2) Monotonía graduada: Si $A' \subseteq A$, entonces $\prec (A', b) \leq \prec (A, b)$,
Ch3) CUT graduado: $\prec (A, b) \geq \prec (A \cup B, b) \wedge \inf_{x \in B} \prec (A, x)$,

para todo $A, A', B \subseteq E$, y todo $b \in E$.

Dicha relación se dice además que es compacta si verifica:
Ch4) Compacidad graduada:

$$\prec (A, b) \leq \sup_{A' \subseteq A,\ A' finito} \prec (A', b)$$

El valor $\prec (A, b)$ podría entenderse como el grado en que b es una consecuencia del conjunto clásico A.

Que esta noción es una generalización de las relaciones de consecuencia (vid. apéndice), nos viene dado por el siguiente

TEOREMA 2.2.2. Si $\prec$ es una relación de α-consecuencias, i) la relación exacta $\vdash \subseteq \mathbb{P}(E) \times E$, definida por

$$A \vdash b \text{ si y sólo si } \prec(A,b) \geq \alpha$$

es una relación de consecuencias clásica, y ii) el operador $C : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$:

$$C(A) = \{x \in E \; ; \; \prec(A,x) \geq \alpha\},$$

es un operador de consecuencias clásico.

Demostración.
i) Si $b \in A$, $\prec(A,b) \geq \alpha$ y $A \vdash b$.
Si $A \subseteq B$ y $A \vdash a$, al ser $\prec(B,a) \geq \prec(A,a) \geq \alpha$, se obtiene $B \vdash a$.
Por último, si $A \vdash b_i$ para todo $i \in I$, y $A \cup \{b_i\}_{i\in I} \vdash b$, se tiene que $\prec(A,b_i) \geq \alpha$ y $\prec(A \cup \{b_i\}_{i\in I}, b) \geq \alpha$.
Por tanto, $\prec(A,b) \geq \prec(A \cup \{b_i\}_{i\in I}, b) \wedge \inf_{b_i} \prec(A,b_i) \geq \alpha$ y $A \vdash b$.

ii) La inclusión y la monotonía de C son directas a partir de la α-reflexividad y de la monotonía graduada.
Por otra parte, si $b \in C(C(A))$, tendremos
$\prec(A,b) \geq \prec(A \cup C(A), b) \wedge \inf_{x\in C(A)} \prec(A,x) \geq \prec(C(A),b) \wedge \alpha \geq \alpha$. Luego, $b \in C(A)$. $\square$

DEFINICION 2.2.3. Una relación clásica R en E es ϵ-reflexiva si para todo $a \in E$ es $R(a/a) \geq \epsilon$.

Dada una relación fuzzy R en E, podemos asociarle una familia de operadores C^ϵ definidos por:

$$C^\epsilon(A) = \{b \in E \; ; \; R(b/a) \geq \epsilon \text{ para algún } a \in A\}$$

En ([16]) se demuestra el siguiente:

TEOREMA 2.2.4. Dada una relación R, los operadores asociados C^ϵ, y una t-norma contínua T,

i) R es ϵ-reflexiva si y sólo si $A \subseteq C^\epsilon(A)$, para todo $A \subseteq E$.

ii) R es T-transitiva si y sólo si $C^{\epsilon}(C^{\delta}(A)) \subseteq C^{T(\epsilon,\delta)}(A)$, para todo $A \subseteq E$ y todo $\epsilon, \delta > 0$.

iii) Si R es T-transitiva, C^1 es un operador de consecuencias clásico si y sólo si R es 1-reflexiva.

iv) Para cada $\epsilon \in [0,1)$, si R es T-transitiva y ϵ-reflexiva, entonces C^{ϵ} es un operador de consecuencias clásico si y sólo si $T(x,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

A partir de una relación fuzzy R en E, podemos construir la relación $\prec: \mathbb{P}(E) \times E \rightarrow [0,1]$

$$\prec (A,b) = \sup_{a \in A} R(b/a)$$

Las propiedades de esta relación nos vienen dadas por el

TEOREMA 2.2.5.
i) R es ϵ-reflexiva si y sólo si $\prec$ es ϵ-reflexiva.
ii) R es Min-transitiva si y sólo si $\prec$ verifica la propiedad de CUT.
iii) R es α-reflexiva y Min-transitiva si y sólo si $\prec$ es una relación de α-consecuencias.

Demostración.
i) Inmediata.

ii) Si R es Min-transitiva, $R(c/b) \wedge R(b/a) \leq R(c/a)$ para todo $b \in B$, todo $a \in A$ y todo $c \in E$.
Tomando el supremo en A, $R(c/b) \wedge \prec (A,b) \leq \prec (A,c)$ y

$$R(c/b) \wedge \inf_{x \in B} \prec (A,x) \leq R(c/b) \wedge \prec (A,b) \leq \prec (A,c)$$

para todo $b \in B$. Por tanto,

$$\prec (A,c) \geq \sup_{x \in B} R(c/x) \wedge \inf_{x \in B} \prec (A,x)$$

y por otra parte,

$$\prec (A,c) = \sup_{a \in A} R(c/a) \geq \sup_{a \in A} R(c/a) \wedge \inf_{x \in B} \prec (A,x)$$

y de las dos últimas desigualdades se llega a :

$$\prec (A,c) \geq \prec (A \cup B, c) \wedge \inf_{x \in B} \prec (A,x),$$

con lo que se verifica la propiedad de CUT.

Recíprocamente, si $\prec$ verifica la propiedad de CUT, entonces para todo a, b, c,

$$\prec (\{a\}, c) \geq \prec (\{a\} \cup \{b\}, c) \wedge \inf_{x \in \{b\}} \prec (\{a\}, x)$$

por lo que $\prec (\{a\}, c) \geq \prec (\{b\}, c) \wedge \prec (\{a\}, b)$, llegando a $R(c/a) \geq R(c/b) \wedge R(b/a)$.
Por tanto, R es Min-transitiva.

iii) Inmediata a partir de las dos anteriores. □

EJEMPLOS 2.2.6.
1.- Sea (E, p) un álgebra de Boole probabilizada. La relación $I_p(b/a) = p(a' + b)$ utilizada en la Lógica Probabilística de Nilsson, es un $\mathcal{L}$-preorden, pero no es un $Prod$-preorden ni un Min-preorden ([71]). Por lo tanto, C^1 es el único operador de consecuencias de la familia C^ϵ, y $\prec$ no es una relación de α-consecuencias para ningún α de $[0, 1]$.

2.- En las condiciones anteriores, la probabilidad condicionada $p^*(b/a) = \frac{p(a \cdot b)}{p(a)}$ definida en $E^+ = \{x \in E \; ; \; p(x) > 0\}$ no es T-transitiva para ninguna t-norma contínua T ([71]). Por tanto, $\prec$ no es una relación de α-consecuencias para ningún $\alpha \in [0, 1]$. Además, aunque del teorema 2.2.4. no se puede deducir nada sobre los C^ϵ, se puede comprobar que C^1 es un operador de consecuencias clásico.

3.- Si T es una t-norma contínua y $\mu : E \to [0, 1]$, la relación

$$I_\mu^T(b/a) = sup\{z \in [0, 1] \; ; \; T(\mu(a), z) \leq \mu(b)\}$$

es un T-preorden.
Por tanto, C^1 es un operador de consecuencias para todo T; si $\epsilon \in [0, 1)$, C^ϵ es un operador de consecuencias si y sólo si $T = Min$; y por último, $\prec$ es una relación de α-consecuencias si y sólo si $T = Min$.

Una alternativa noción de consecuencias fuzzy fue introducida por Pavelka ([48]); ahora no se dispone de un conjunto clásico de premisas del que se obtienen consecuencias clásicas en un cierto grado, sino que se pretende obtener consecuencias aproximadas a partir de premisas aproximadas.

DEFINICION 2.2.7. Dado un conjunto E y la clase $\mathcal{F}(E)$ de subconjuntos fuzzy de E, una operación $\mathcal{C} : \mathcal{F}(E) \longrightarrow \mathcal{F}(E)$ es un operador de consecuencias sobre $\mathcal{F}(E)$ si:

CF1) Inclusión fuzzy: $A \subseteq \mathcal{C}(A)$,
CF2) Monotonía fuzzy: Si $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(B)$,
CF3) Idempotencia fuzzy: $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = \mathcal{C}(A)$,

para todo $A, B \in \mathcal{F}(E)$.

Además, se dirá que es compacto si verifica la propiedad:

CF4) Compacidad fuzzy:

$$\mathcal{C}(A)(x) \leq \sup_{G \subseteq E, G \text{ } finito} \mathcal{C}(A \mid G)(x)$$

donde

$$A \mid G(x) = \begin{cases} A(x), & \text{si } x \in G \\ 0, & \text{si } x \notin G \end{cases}$$

Es fácil probar el

TEOREMA 2.2.8. Si $\mathcal{C}$ es un operador de consecuencias fuzzy sobre E, la restricción C de $\mathcal{C}$ a $\mathbb{P}(E)$:

$$C(A) = \{x \in E \; ; \; \mathcal{C}(A)(x) = 1\}$$

para cualquier $A \subseteq E$, es un operador de consecuencias clásico.

Al igual que en el caso clásico, tenemos paralelamente las relaciones de consecuencias fuzzy.

DEFINICION 2.2.9. Una relación $\propto$: $\mathcal{F}(E) \times E \rightarrow [0,1]$ es una relación de consecuencias fuzzy si para todo $A \in \mathcal{F}(E), B \subset E$, y todo $x \in E$ se verifica:

RF1) Reflexividad fuzzy: $\propto (A, x) \geq A(x)$,
RF2) Monotonía fuzzy: Si $A' \subseteq A$, entonces $\propto (A', x) \leq \propto (A, x)$,
RF3) CUT fuzzy: $\propto (A, x) \geq \propto (A \cup [A \propto B], x)$, donde

$$[A \propto B](x) = \begin{cases} \propto (A, x), & \text{si } x \in B \\ 0, & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

Si además,
RF4) Compacidad fuzzy:

$$\propto (A, x) \leq \sup_{G \subseteq E, G finito} \propto ((A \mid G), x)$$

se dice que es una relación de consecuencias compacta.

El valor de $\propto (A, x)$ se puede interpretar como el grado en que x es una consecuencia del conjunto fuzzy de premisas A.

Los siguientes teoremas proporcionan la relación existente entre los operadores de consecuencia y las relaciones de consecuencia fuzzy.

TEOREMA 2.2.10. Si $\mathcal{C}$ es un operador de consecuencias fuzzy, la relación:

$$\propto (A, x) = \mathcal{C}(A)(x)$$

es una relación de consecuencias fuzzy. Además, si $\mathcal{C}$ es compacto, también lo es la relación $\propto$.

TEOREMA 2.2.11. Si $\propto$ es una relación de consecuencias fuzzy, el operador definido en $\mathcal{F}(E)$ por

$$\mathcal{C}(A)(x) = \propto (A, x)$$

es un operador de consecuencias fuzzy. Si $\propto$ es compacta, también lo es $\mathcal{C}$.

A partir de una relación fuzzy R sobre E, y fijando una t-norma contínua T, construyamos la relación $\propto$: $\mathcal{F}(E) \times E \to [0, 1]$ de la forma:

$$\propto (A, b) = \sup_{a \in E} T(A(a), R(b/a))$$

¿es ésta una relación de consecuencias fuzzy?

TEOREMA 2.2.12. Dada una relación $R : E \times E \to [0, 1]$ y la correspondiente $\propto$: $\mathcal{F}(E) \times E \to [0, 1]$ se verifica:

i) R es 1-reflexiva si y sólo si $\propto$ es reflexiva.
ii) R es T-transitiva si y sólo si $\propto$ verifica la propiedad de CUT.

Demostración.
i) Si R es 1-reflexiva, $R(a/a) = 1$ para todo a y

$$\propto (A,b) = \sup_{a \in E} T(A(a), R(b/a)) \geq T(A(b), R(b/b)) = T(A(b), 1) = A(b)$$

Por otra parte, si $\propto$ es reflexiva,

$$R(a/a) = T(1, R(a/a)) = \sup_{b \in E} T(\{a\}(b), R(a/b)) = \propto (\{a\}, a) \geq \{a\}(a) = 1$$

ii) Si R es T-transitiva, para todo a de E y todo b de B,

$$T(T(A(a), R(c/b)), R(b/a)) \leq T(A(a), R(c/a))$$

Tomando el supremo en E, $T(R(c/b), \propto (A,b)) \leq \propto (A,c)$,
y tomando el supremo en B,
$\propto (A \cup [A \propto B], c) \leq \propto (A,c)$,
y $\propto$ verifica la propiedad de CUT.

Recíprocamente, si $\propto$ verifica dicha propiedad:

$$\propto (\{a\}, c) \geq \propto (\{a\} \cup [\{a\} \propto \{b\}], c)$$

y se dan las siguientes desigualdades:

$$\propto (\{a\}, c) \geq \propto (\{a\} \cup \{b/ \propto (\{a\}, b)\}, c)$$

$$\propto (\{a\}, c) \geq \sup\{T(1, R(c/a)), T(\propto (\{a\}, b), R(c/b))\}$$

$$\propto (\{a\}, c) \geq T(\propto (\{a\}, b), R(c/b))$$

es decir, $R(c/a) \geq T(R(b/a), R(c/b))$. □

COROLARIO 2.2.13. En las condiciones del teorema anterior, R es un T-preorden si y sólo si $\propto$ es una relación de consecuencias fuzzy.

Demostración. Inmediata. □

EJEMPLOS 2.2.14.

1.- Si (E, p) es un álgebra de Boole probabilizada, al ser $I_p(b/a) = p(a' + b)$ un $\mathcal{L}$-preorden, se obtiene que

$$\propto (A, b) = \sup_{a \in E} \mathcal{L}(A(a), p(a' + b))$$

es una relación de consecuencias fuzzy.

2.- En las mismas condiciones del ejemplo anterior, sabemos que la relación $p^*(b/a) = \frac{p(a \cdot b)}{p(a)}$ definida en E^+ no es un T-preorden para ninguna t-norma contínua T; por tanto la relación

$$\propto (A, b) = \sup_{a \in E} T(A(a), \frac{p(a \cdot b)}{p(a)})$$

no es una relación de consecuencias.

3.- $I_\mu^T(b/a) = \sup\{z \in [0, 1] \; ; \; T(\mu(a), z) \leq \mu(b)\}$ es un T-preorden. Por tanto,

$$\propto (A, b) = \sup_{a \in E} T(A(a), I_\mu^T(b/a))$$

es una relación de consecuencias fuzzy.

Siendo $\mu : E \rightarrow [0,1]$ y T una t-norma contínua, la desigualdad del Modus Ponens $T(\mu(a), R(b/a)) \leq \mu(b)$ para todo a, b en E, es equivalente a $sup_{a \in E} T(\mu(a), R(b/a)) \leq \mu(b)$ para todo $b \in E$. Además,

TEOREMA 2.3.1. Si R es reflexiva, las dos últimas desigualdades son equivalentes a la igualdad $sup_{a \in E} T(\mu(a), R(b/a)) = \mu(b)$.

Demostración.- Tomando $a = b$, $T(\mu(b), R(b/b)) = T(\mu(b), 1) = \mu(b) \leq sup_{a \in E} T(\mu(a), R(b/a)) \leq \mu(b)$. □

COROLARIO 2.3.2. $\mu \in T(E, R)$ si y sólo si $sup_{a \in E} T(\mu(a), R^*(b/a)) = \mu(b)$, para todo $b \in E$.

Demostración.- Teniendo en cuenta que $T(E, R) = T(E, R^*)$, $\mu \in T(E, R)$ si y sólo si $\mu \in T(E, R^*)$, y por ser R^* reflexiva, si y sólo si $sup_{a \in E} T(\mu(a), R^*(b/a)) = \mu(b)$. □

DEFINICION 2.3.3. Dada la estructura relacional (E, R) y una t-norma T, la T-transformada lógica sobre (E, R) es la función $\mathcal{L}_R^T : [0,1]^E \longrightarrow [0,1]^E$, dada por:

$$\mathcal{L}_R^T[\mu](x) = \sup_{a \in E} T(\mu(a), R^*(x/a))$$

para cada $x \in E$.

Cuando no sea posible ninguna confusión, escribiremos $\mathcal{L}$, en vez de $\mathcal{L}_R^T$.

Algunas propiedades sencillas de la transformada lógica, nos vienen dadas en el siguiente Teorema, cuya demostración es un ejercicio elemental.

TEOREMA 2.3.4.

i) $\mu \leq \mathcal{L}[\mu]$, para todo $\mu \in [0,1]^E$.

ii) Si $\mu_1 \leq \mu_2$, entonces $\mathcal{L}[\mu_1] \leq \mathcal{L}[\mu_2]$, para cualesquiera $\mu_1, \mu_2 \in [0,1]^E$.
iii) $\mu \in T(E,R)$ si y sólo si $\mathcal{L}[\mu] = \mu$.

TEOREMA 2.3.5. Si R es un T-preorden y T es contínua, es $\mathcal{L}[\mathcal{L}[\mu]] = \mathcal{L}[\mu]$, para todo $\mu \in [0,1]^E$.

Demostración.- Como $R = R^*$, $\mathcal{L}[\mathcal{L}[\mu]](x) = sup_{b\in E}T(\mathcal{L}[\mu](b), R^*(x/b)) =$
$= sup_{b\in E}T(sup_{c\in E}T(\mu(c), R^*(b/c)), R^*(x/b)) =$
$= sup_{b,c\in E}T(T(\mu(c), R^*(b/c)), R^*(x/b)) =$
$= sup_{b,c\in E}T(\mu(c), T(R^*(b/c), R^*(x/b))) \leq sup_{c\in E}T(\mu(c), R^*(x/c)) = \mathcal{L}[\mu](x)$.

Finalmente, por i) en el Teorema anterior, $\mathcal{L}[\mu] \leq \mathcal{L}[\mathcal{L}[\mu]]$, y así, $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$. □

Por tanto, cuando T es una t-norma contínua y R es un T-preorden, la T-Transformada Lógica es un operador de consecuencias fuzzy; es decir, dado una conjunto fuzzy de premisas μ, podemos considerar $\mathcal{L}[\mu]$ como un conjunto fuzzy de consecuencias. Además, si μ es un T- estado lógico puede ser considerado como una "teoría", en el sentido de que al ser $\mathcal{L}[\mu] = \mu$, todo lo que se puede deducir de las premisas μ, es el mismo conjunto μ.

Hasta aquí hemos trabajado con un único universo E; pero, si por ejemplo tenemos la regla *"Si x es P entonces y es Q"*, donde P y Q son predicados vagos sobre los universos E_1 y E_2 respectivamente, el Teorema 2.3.1. no puede ser aplicado. L. A. Zadeh ([91]) intenta resolver este problema por medio de la "extensión cilíndrica", pero esta solución no es totalmente satisfactoria si se quieren obtener "consecuencias".

Ahora tenemos la relación $R: E_1 \times E_2 \longrightarrow [0,1]$ y para definir las propiedades reflexiva y transitiva , es necesario que E_1 y E_2 tengan el mismo cardinal ([74]).

DEFINICION 2.3.6. Dados E_1, E_2, con $\#E_1 = \#E_2$, $\varphi: E_1 \to E_2$ función biyectiva, $\mu_i \in [0,1]^{E_i}$, $i = 1,2$, $R: E_1 \times E_2 \longrightarrow [0,1]$, y T una t-norma contínua, se dice que:

i) R es φ-reflexiva si $R(\varphi(a)/a) = 1$, para todo $a \in E_1$.

ii) R es φ-transitiva si $T(R(\varphi(b)/a), R(\varphi(c)/b)) \leq R(\varphi(c)/a)$, para cualesquiera a, b, c de E_1.

En el caso finito, si $E_1 = \{a_1, ..., a_n\}$, $E_2 = \{b_1, ...b_n\}$, y $\varphi(a_i) = b_i$, R será φ-reflexiva, o simplemente reflexiva si $R(b_i/a_i) = 1$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, y será φ-transitiva o transitiva, si para cualesquiera i, j, k de $\{1, ..., n\}$ se verifica $T(R(b_j/a_i), R(b_k/a_j)) \leq R(b_k/a_i)$.

Escribiendo $R(b_j/a_i) = \alpha_{ij}$, la última desigualdad será $T(\alpha_{ij}, \alpha_{jk}) \leq \alpha_{ik}$.

DEFINICION 2.3.7. El par (μ_1, μ_2) es un T-estado Lógico para $(E_1 \times E_2, R)$ si se verifica:

$$T(\mu_1(a), R(b/a)) \leq \mu_2(b),$$

para cada par $(a, b) \in E_1 \times E_2$. También se dice que R es un (μ_1, μ_2)-T-condicional para $E_1 \times E_2$.

EJEMPLOS 2.3.8.

1.- La relación de Kleen-Dienes

$$R^{KD}_{\mu_1,\mu_2}(b/a) = Max(1 - \mu_1(a), \mu_2(b))$$

tiene al par (μ_1, μ_2) como $\mathcal{L}$-estado lógico:

$\mathcal{L}(\mu_1(a), Max(1-\mu_1(a), \mu_2(b))) = Max(0, \mu_1(a)+\mu_2(b)-1) = \mathcal{L}(\mu_1(a), \mu_2(b)) \leq \mu_2(b)$.

2.- La relación de Reichenbach

$$R^{r}_{\mu_1,\mu_2}(b/a) = 1 - \mu_1(a) + \mu_1(a) \cdot \mu_2(b)$$

y la relación de Willmot

$$R^{W}_{\mu_1,\mu_2}(b/a) = Max(1 - \mu_1(a), Min(\mu_1(a), \mu_2(b)))$$

también tienen al par (μ_1, μ_2) como $\mathcal{L}$-estado lógico.

3.- La relación

$$R^{T}_{\mu_1,\mu_2}(b/a) = sup\ \{z \in [0, 1]\ ;\ T(\mu_1(a), z) \leq \mu_2(b)\}$$

4.- La relación de Mamdani

$$R^m_{\mu_1,\mu_2}(b/a) = Min(\mu_1(a), \mu_2(b))$$

tiene a (μ_1, μ_2) como T-estado, para cualquier t-norma T.

Como anteriormente, la desigualdad $T(\mu_1(a), R(b/a)) \leq \mu_2(b)$ para cada $(a, b) \in E_1 \times E_2$ es equivalente a

$$\sup_{a \in E_1} T(\mu_1(a), R(b/a)) \leq \mu_2(b)$$

para cada b en E_2.

Ahora, si R es φ-reflexiva, no se sigue la igualdad, sino solamente, si $b = \varphi(c)$:

$$T(\mu_1(c), R(b/c)) = \mu_1(c) \leq \sup_{a \in E_1} T(\mu_1(a), R(b/a)) \leq \mu_2(b) = \mu_2(\varphi(c))$$

es decir, se obtiene una cota inferior de μ_2, pero no su valor exacto.

Sin embargo, exigiendo que sea $\mu_1(a) = \mu_2(\varphi(a))$ para todo a de E_1, es decir, que $\mu_1 = \mu_2 \circ \varphi$, sí que se llega a :

$$\sup_{a \in E_1} T(\mu_1(a), R(b/a)) = \mu_2(b),$$

para cada b en E_2, siempre que R sea φ-reflexiva.

En cualquier caso, podríamos redefinir el concepto de T-estado lógico de la forma: El par $(\mu_1, \mu_2) \in [0,1]^{E_1} \times [0,1]^{E_2}$ es un T-estado* para $(E_1 \times E_2, R)$ siempre que para todo $b \in E_2$

$$\sup_{a \in E_1} T(\mu_1(a), R(b/a)) = \mu_2(b).$$

Está claro que todo T-estado* es también un T-estado en el sentido primitivo.

EJEMPLOS 2.3.9.

1.- Si $R = R^{KD}_{\mu_1,\mu_2}$, el par (μ_1, μ_2) es un $\mathcal{L}$-estado* si y sólo si $sup_{a\in E_1}\mu_1(a) = 1$.

En efecto, $sup_{a\in E_1}\mathcal{L}(\mu_1(a), Max(1-\mu_1(a), \mu_2(b))) = sup_{a\in E_1}\mathcal{L}(\mu_1(a), \mu_2(b)) = \mathcal{L}(sup_{a\in E_1}\mu_1(a), \mu_2(b)) = \mu_2(b)$,

si y sólo si

$Max(0, sup_{a\in E_1}\mu_1(a) + \mu_2(b) - 1) = \mu_2(b)$ para cada $b \in E_2$, o $sup_{a\in E_1}(a) = 1$, siempre que μ_2 sea no nulo .

En particular, si $[\mu_1] = \{a \in E_1 \; ; \; \mu_1(a) = 1\} \neq \emptyset$, entonces (μ_1, μ_2) es un $\mathcal{L}$-estado* lógico.

2.- Si $R = R^{r}_{\mu_1,\mu_2}$, el par (μ_1, μ_2) es un $\mathcal{L}$-estado* si y sólo si $sup_{a\in E_1}\mu_1(a) = 1$.

$sup_{a\in E_1}\mathcal{L}(\mu_1(a), 1-\mu_1(a)+\mu_1(a)\cdot\mu_2(b)) = sup_{a\in E_1}(\mu_1(a)\cdot\mu_2(b)) = (sup_{a\in E_1}\mu_1(a))\cdot\mu_2(b) = \mu_2(b)$,
si y sólo si
$sup_{a\in E_1}\mu_1(a) = 1$, siempre que μ_2 sea un conjunto fuzzy no nulo.

Por tanto, si $[\mu_1] \neq \emptyset$, entonces (μ_1, μ_2) es un $\mathcal{L}$-estado*.

3.- Si $R = R^{W}_{\mu_1,\mu_2}$, y $sup_{a\in E_1}\mu_1(a) = 1$, el par (μ_1, μ_2) es un $\mathcal{L}$-estado*.

En efecto, $sup_{a\in E_1}\mathcal{L}(\mu_1(a), R^{W}_{\mu_1,\mu_2}(b/a)) = sup_{a\in E_1}Max(0, \mu_1(a) + Max(1-\mu_1(a), Min(\mu_1(a), \mu_2(b))) - 1) = sup_{a\in E_1}\mathcal{L}(\mu_1(a), Min(\mu_1(a), \mu_2(b))) = \mathcal{L}(1, Min(1, \mu_2(b))) = \mu_2(b)$.

De nuevo, este resultado se da si $[\mu_1] \neq \emptyset$.

4.- Si $R = R^{m}_{\mu_1,\mu_2}$ y $sup_{a\in E_1}\mu_1(a) = 1$, entonces (μ_1, μ_2) es un T-estado*, para cualquier t-norma T.

$sup_{a\in E_1}T(\mu_1(a), Min(\mu_1(a), \mu_2(b))) = T(1, Min(1, \mu_2(b))) = \mu_2(b)$.

Cuando $[\mu_1] \neq \emptyset$, se sigue el mismo resultado.

5.- Si $R = I^T_{\mu_1,\mu_2}$ y $sup_{a\in E_1}\mu_1(a) = 1$, es también fácil comprobar que (μ_1, μ_2) es un T-estado*.

Consideremos ahora en el caso de dos universos la Transformada Lógica $\mathcal{L}^T_R : [0,1]^{E_1} \longrightarrow [0,1]^{E_2}$, definida por:

$$\mathcal{L}^T_R[\mu_1](x) = \sup_{a\in E_1} T(\mu_1(a), R(x/a)),$$

para cada x de E_2. Obviamente, el par $(\mu_1, \mathcal{L}^T_R[\mu_1])$ es un T-estado* lógico para $(E_1 \times E_2, R)$.

TEOREMA 2.3.10.
i) Para todo $\mu_1, \mu_1^* \in E_1^{[0,1]}$, $\mu_1 \leq \mu_1^*$ implica $\mathcal{L}[\mu_1] \leq \mathcal{L}[\mu_1^*]$.

ii) Si R es φ-reflexiva, con $\varphi : E_1 \to E_2$ biyectiva, para todo $\mu_1 \in [0,1]^{E_1}$, es $\mu_1 \leq \mathcal{L}[\mu_1] \circ \varphi$.

Demostración.- i) Trivial.
ii) Para todo $a \in E_1$, $\mu_1(a) = T(\mu_1(a), 1) = T(\mu_1(a), R(\varphi(a)/a)) \leq \sup_{x\in E_1} T(\mu_1(x), R(\varphi(a)/x)) = \mathcal{L}[\mu_1](\varphi(a))$.
Así, $\mu_1 \leq \mathcal{L}[\mu_1] \circ \varphi$. □

Sea R^d la relación dual de R: $R^d(b/a) = R(a/b)$.

DEFINICION 2.3.11. R es φ-simétrica si $R(\varphi(b)/a) = R(\varphi(a)/b)$, para cualesquiera a, b de E_1.

TEOREMA 2.3.12. Si R es φ-simétrica y φ-transitiva, con $\varphi : E_1 \to E_2$ biyectiva, y T es contínua, entonces $\mathcal{L}^2[\mu_1] = \mathcal{L}[\mu_1] \circ \varphi$, siendo $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^T_{R^d} \circ \mathcal{L}$.

Demostración.- $\mathcal{L}^2[\mu_1](a) = \mathcal{L}^T_{R^d}(\mathcal{L}[\mu_1](a)) = \sup_{b\in E_2} T(\mathcal{L}[\mu_1](b), R^d(a/b)) =$
$= \sup_{b\in E_2} T(\sup_{c\in E_1} T(\mu_1(c), R(b/c)), R(b/a)) =$

$= \sup_{b\in E_2} \sup_{c\in E_1} T(T(\mu_1(c), R(b/c)), R(b/a)) =$
$= \sup_{b\in E_2} \sup_{c\in E_1} T(\mu_1(c), T(R(b/c), R(b/a)))$

y por la φ-simetría y la φ-transitividad,

$= \sup_{b\in E_2, b=\varphi(z)} \sup_{c\in E_1} T(\mu_1(c), T(R(\varphi(z)/c), R(\varphi(a)/z))$
$= sup_{c\in E_1} T(\mu_1(c), sup_{z\in E_1} T(R(\varphi(z)/c), R(\varphi(a)/z))$
$= sup_{c\in E_1} T(\mu_1(c), R(\varphi(a)/c)) = \mathcal{L}[\mu_1](\varphi(a)) = (\mathcal{L}[\mu_1] \circ \varphi)(a)$. □

Resumiento todos estos resultados, tenemos que, dados:

- E_1 , E_2, con $\# E_1 = \# E_2$,
- una t-norma contínua T,
- $R: E_1 \times E_2 \longrightarrow [0,1]$, y
- $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ biyectiva,

verificando

- R es φ-reflexiva,
- R es φ-simétrica, y
- R es φ-transitiva,

se obtiene que para todo μ_1, $\mu_1^* \in [0,1]^{E_1}$

- Si $\mu_1 \leq \mu_1^*$, entonces $\mathcal{L}[\mu_1] \leq \mathcal{L}[\mu_1^*]$,
- $\mu_1 \leq \mathcal{L}[\mu_1] \circ \varphi$,
- $\mathcal{L}^2[\mu_1] = \mathcal{L}^T_{R^d}[\mathcal{L}[\mu_1]] = \mathcal{L}[\mu_1] \circ \varphi$.

En estos casos, por la similitud con las propiedades mencionadas en la sección 2.2., $\mathcal{L}[\mu]$ podría ser considerado como un conjunto fuzzy de consecuencias de μ.

Observemos que en el caso de que R no sea φ-simétrica, la demostración del Teorema 2.3.12. se interrumpe en el paso:

$\mathcal{L}^2[\mu_1](a) = sup_{z,c\in E_1} T(\mu_1(c), T(R(\varphi(z)/c), R(\varphi(z)/a))$

Al tomar $z = a$, es $T(R(\varphi(a)/c), R(\varphi(a)/a)) = T(R(\varphi(a)/c), 1) = R(\varphi(a)/c)$, y :

$$R(\varphi(a)/c) \leq \sup_{z\in E_1} T(R(\varphi(z)/c), R(\varphi(z)/a)),$$

Por tanto,

$$\sup_{c\in E_1} T(\mu_1(c), R(\varphi(a)/c)) \leq \sup_{c\in E_1} T(\mu_1(c), \sup_{z\in E_1} T(R(\varphi(z)/c), R(\varphi(z)/a))),$$

llegando sólo a la desigualdad

$$\mathcal{L}[\mu_1] \circ \varphi \leq \mathcal{L}^2[\mu_1],$$

para cualquier $\mu_1 \in [0,1]^{E_1}$. Por ello, en este caso no podemos considerar a $\mathcal{L}[\mu_1]$ como un conjunto de consecuencias lógicas de μ_1.

Supongamos ahora que, dada una regla " Si x es P, entonces y es Q ", es posible modelizarla mediante una relación inexacta

$$R(b/a) = F(\mu_P(a), \mu_Q(b)), \quad (a,b) \in E_1 \times E_2,$$

verificando las condiciones de los teoremas 2.3.10. ii) y 2.3.12.

Si (μ_P, μ_Q) es un T-estado para $(E_1 \times E_2, R)$ entonces, es claro que para todo $b \in E_2$

$$\mathcal{L}_R^T[\mu_P](b) = \sup_{a\in E_1} T(\mu_P(a), F(\mu_P(a), \mu_Q(b)) \leq \mu_Q(b),$$

En el caso de que además (μ_P, μ_Q) sea un T-estado* para $(E_1 \times E_2, R)$, (lo que ocurre por ejemplo si $\mu_1 = \mu_2 \circ \varphi$), entonces

$$\mathcal{L}_R^T[\mu_P](b) = \sup_{a\in E_1} T(\mu_P(a), F(\mu_P(a), \mu_Q(b)) = \mu_Q(b),$$

para todo $b \in E_2$, y podemos decir que μ_Q es el conjunto de consecuencias de μ_P.

Sin embargo, la información que se posee comúnmente en lógica borrosa, no es el hecho "x es P ", sino una modificación de la forma "x es P^* ". En el caso particular en que

$$\mu_{P^*}(x) \leq \mu_P(x),$$

para todo $x \in E_1$, se obtiene

$$\mathcal{L}[\mu_{P^*}](b) \leq \mathcal{L}[\mu_P](b) \leq \mu_Q(b), \quad b \in E_2.$$

Es decir, el conjunto fuzzy $\mathcal{L}[\mu_{P^*}] \in [0,1]^{E_2}$ es una cota inferior de las consecuencias fuzzy de μ_{P^*}, dada la regla R. En esta situación, si es posible identificar un predicado vago Q^* sobre E_2 tal que

$$\mathcal{L}[\mu_{P^*}](b) \leq \mu_{Q^*}(b) \leq \mu_Q(b), \quad b \in E_2,$$

entonces es posible concluir la regla composicional de inferencia de Zadeh:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Si "x es } P\text{" entonces "y es } Q\text{"} \\ \text{"x es } P^*\text{"}\end{array}}{\text{"y es } Q^*\text{"}}$$

Se observa que esta regla es aproximada, y que cuanto más cercano sea μ_{P^*} a μ_P, y un μ_{Q^*} identificado a $\mathcal{L}[\mu_{P^*}]$, mejor será la conclusión.

Sin embargo, como no siempre es $\mu_{P^*} \leq \mu_P$, en cada caso habrá que analizar cuándo realmente la regla es modelizada.

EJEMPLOS 2.3.13.

1.- En el caso de la regla de Mamdani, se obtiene:

$\mathcal{L}_{R^m}^{Min}(b) = sup_{a \in E_1} Min(\mu_{P^*}(a), Min(\mu_P(a), \mu_Q(b))) =$
$sup_{a \in E_1} Min(\mu_{P^*}(a), \mu_P(a), \mu_Q(b)) = sup_{a \in E_1} Min(\mu_{P^* \cap P}(a), \mu_Q(b)) =$
$Min(sup_{a \in E_1}[\mu_{P^* \cap P}(a)], \mu_Q(b)) \leq \mu_Q(b).$

Entonces, si $sup_{a \in E_1} \mu_{P^* \cap P}(a) = 1$ (para lo que es suficiente que $[P^* \cap P] \neq \emptyset$), se obtiene μ_Q como conclusión. De otra forma, siendo $\alpha = sup_{a \in E_1} \mu_{P^* \cap P}(a) \in [0,1]$, la conclusión a la que se llega es $Min(\alpha, \mu_Q(b)) = \mu_{Q^*}(b)$.

2.- En el caso de Klenne-Dienes:

$\mathcal{L}_{R^{KD}}^{\mathcal{L}}(b) = sup\ \mathcal{L}(\mu_{P^*}(a), Max(1 - \mu_P(a), \mu_Q(b))) =$
$sup\ Max(0, Max(\mu_{P^*}(a) - \mu_P(a), \mu_{P^*}(a) + \mu_Q(b) - 1)) =$
$Max(0, Max(sup\ [\mu_{P^*}(a) - \mu_P(a)], \mu_Q(b) - 1 + sup\ \mu_{P^*}(a))) =$
$Max(\beta, \mu_Q(b)) \leq \mu_Q(b),$

si $\beta = sup\ [\mu_{P^*}(a) - \mu_P(a)]$ y $sup\ \mu_{P^*}(a) = 1$. Luego siempre se llegará a la conclusión μ_Q si $sup\ \mu_{P^*}(a) = 1$ y $\beta \leq \mu_Q(b)$ para cualquier $b \in E_2$.

Debe notarse que en los ejemplos anteriores, la conclusión μ_{Q^*} depende del grando de "conexión" entre μ_P y μ_{P^*}, expresado por los números $\alpha = sup_{a \in E_1} \mu_{P \cap P^*}(a)$, $\beta = sup_{a \in E_1} [\mu_{P^*}(a) - \mu_P(a)]$.

5.- Uno de los mayores éxitos de la lógica borrosa ha consistido en la modelización y control de sistemas físicos descritos lingüísticamente. Es el caso, por ejemplo, de un sistema mecánico accionado por un cierto gas, sometido a una presión que debemos mantener constante regulando la temperatura. La presión, en atmósferas, varía entre 0 y 100 ($E_1 = [0, 100]$), y la temperatura entre 0 y 1000 grados centígrados ($E_2 = [0, 1000]$). Se proporciona la regla: "si la presión es Alta, la temperatura ha de ser Baja".

Tomamos como respectivas funciones de pertenencia de los predicados borrosos Alto y Bajo, las siguientes:
$\mu_A : [0, 100] \rightarrow [0, 1], \ \ \mu_A(x) = \frac{x}{100}$
$\mu_B : [0, 1000] \rightarrow [0, 1], \ \ \mu_B(y) = 1 - \frac{y}{1000}$

y como biyección: $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$, con $\varphi(x) = 1000 - 10x$, para todo $x \in E_1$.

Eligiendo la implicación de Mamdani
$R(y/x) = R_{A,B}(y/x) = Min(\mu_A(x), \mu_B(y))$, es fácil comprobar que:
- R es φ-simétrica,
- R es φ-transitiva,
y, aunque no es φ-reflexiva, se puede redefinir como

$$R^*(\varphi(b)/a) = \begin{cases} R(\varphi(b)/a), & si \ a \neq b \\ 1, & si \ a = b \end{cases}$$

que cumplirá las tres propiedades.

Si nos dan la información "la presión es Muy Alta" (predicado vago MA, con $\mu_{MA}(x) = (\mu_A(x))^2$), aplicando la transformada generalizada,

$\mathcal{L}_R^{Min}[\mu_{MA}](y) =$
$sup_{x \in E_1} Min(\mu_{MA}(x), R(y/x)) = sup_{x \in E_1} Min((\frac{x}{100})^2, Min(\frac{x}{100}, 1 - \frac{y}{1000})) = sup_{x \in E_1} Min((\frac{x}{100})^2, 1 - \frac{y}{1000}) = 1 - \frac{y}{1000} = \mu_B(y)$, si $\sup_{x \in E_1} \mu_{MA}(x) = 1$.

Es decir, en este caso se concluirá que la temperatura ha de ser, al menos, Baja.

Conviene subrayar que para poder obtener realmente "consecuencias", es necesario, como se hace en el ejemplo, buscar para cada relación, una biyección φ respecto a la cual dicha relación verifique las propiedades de simetría y transitividad.

2.4. EL CONDICIONAL MATERIAL

Entre las relaciones clásicas V-condicionales, la más empleada es el Condicional Material; su expresión

$$\rightarrow_V = V \times V \cup (E - V) \times E$$

es equivalente a

$$\varphi_{\rightarrow_V}(b/a) = \begin{cases} 0, & \text{si } (a,b) \in V \times (E - V) \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

o también

$$\varphi_{\rightarrow_V}(b/a) = Max(1 - \varphi_V(a), \varphi_V(b)), \quad \forall\, (a,b) \in E \times E.$$

Es claro que para cada $V \subseteq E$, $\rightarrow_V$ es un Preorden (verifica las propiedades reflexiva y transitiva) en E.

En esta sección, nuestro estudio se dirige a buscar una generalización para el caso Fuzzy del Condicional Material. Ya vimos que el Condicional Material $\rightarrow_V$ el es mayor V-condicional; este hecho sugiere la idea de buscar , para cada subconjunto fuzzy μ y para cada t-norma T, el mayor $\mu - T$-condicional, que será el Preorden

$$I_\mu^T(b/a) = Sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(\mu(a), z) \leq \mu(b)\}$$

Como es bien conocido, en el caso de que T sea la t-norma contínua de Lukasiewicz, Producto o Mínimo, se obtendrán los resíduos

$$I_\mu^{\mathcal{L}}(b/a) = Min(1, 1 - \mu(a) + \mu(b))$$

$$I_\mu^{\Pi}(b/a) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mu(a) = 0 \\ Min(1, \frac{\mu(b)}{\mu(a)}), & \text{si } \mu(a) > 0 \end{cases}$$

$$I_\mu^{Min}(b/a) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mu(a) \leq \mu(b) \\ \mu(b), & \text{si } \mu(a) > \mu(b) \end{cases}$$

llamadas, respectivamente, la Implicación de Lukasiewicz, de Menger-Goguen y de Gödel-Brouwer.

El siguiente Teorema nos asegura la bondad de la generalización, comprobando que al sustituir μ por la función característica de un subconjunto V en los preórdenes obtenidos, se obtiene la función característica del Material Condicional $\rightarrow_V$.

TEOREMA 2.4.1. Para cualquier $V \subseteq E$, y cualquier t-norma contínua T, $I^T_{\varphi_V} = \varphi_{\rightarrow_V}$.

Demostración.- Como $I^T_{\varphi_V}(b/a) = Sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(\varphi_V(a), z) \leq \varphi_V(b)\}$,

i) $I^T_{\varphi_V}(b/a) = 1$ si y sólo si $\varphi_V(a) \leq \varphi_V(b)$, si y sólo si, o bien $a \notin V$ o bien $a \in V$ y $b \in V$
ii) $I^T_{\varphi_V}(b/a) = 0$ si y sólo si $\varphi_V(a) > \varphi_V(b)$, si y sólo si $a \in V$ y $b \notin V$.

Por tanto, $I^T_{\varphi_V}(b/a) = Max(1 - \varphi_V(a), \varphi_V(b)) = \varphi_{\rightarrow_V}(b/a)$. $\square$.

Hemos visto que si μ es la función característica de un subconjunto clásico V, entonces $I^T_\mu = \varphi_{\rightarrow_V}$; ¿Es cierto el recíproco?

TEOREMA 2.4.2. Si T es una t-norma contínua, y $I^T_\mu = \varphi_{\rightarrow_V}$, entonces

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin V \\ \alpha > 0, & \text{si } x \in V \end{cases}$$

Demostración. Tenemos que
$I^T_\mu(b/a) = Sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(z, \mu(a)) \leq \mu(b)\} = Max(1 - \varphi_V(a), \varphi_V(b))$. Por tanto,

i) Si $a \in V$, $b \in V$, será $I^T_\mu(b/a) = 1$ y $T(1, \mu(a)) = \mu(a) \leq \mu(b)$. De la misma forma, $I^T_\mu(a/b) = 1$ y $T(1, \mu(b)) = \mu(b) \leq \mu(a)$. En consecuencia, $\mu(a) = \mu(b)$, y $\mu(x) = \alpha$ para todo $x \in V$.

ii) Si $a \notin V$ y $b \notin V$, $I^T_\mu(b/a) = 1$ y $I^T_\mu(a/b) = 1$, con lo que $\mu(a) = \mu(b)$ y $\mu(x) = \beta$ para todo $x \notin V$.

iii) Si $a \notin V$, $b \in V$, $I_\mu^T(b/a) = 1$ y $\mu(a) \leq \mu(b)$, con lo que $\beta \leq \alpha$; si fuese $\beta = \alpha$, $\mu(x) = \alpha$ para todo $x \in E$, y sería $I_\mu^T(b/a) = Sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(z,\alpha) \leq \alpha\} = 1$ para todo a, b, c en E, llegando a una contradicción con el caso en que $a \in V$ y $b \notin V$ en el que $\varphi_{\to V}(b/a) = Max(0,0) = 0$.
Por tanto, $0 \leq \beta < \alpha$.

iv) Como $T \leq Min$, $\{z \in [0,1]\ ;\ Min(z,\mu(a)) \leq \mu(b)\} \subseteq \{z \in [0,1]\ ;\ T(z,\mu(a)) \leq \mu(b)\}$, y $Sup\{z \in [0,1]\ ;\ Min(z,\mu(a)) \leq \mu(b)\} \leq Sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(z,\mu(a)) \leq \mu(b)\}$ para todo a, b en E.

Si $a \in V$, $b \notin V$, $Sup\{z \in [0,1]\ ;\ Min(z,\alpha) \leq \beta\} \leq Sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(z,\alpha) \leq \beta\}$. Por tanto, $\beta \leq Sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(z,\alpha) \leq \beta\} = I_\mu^T(b/a) = \varphi_{\to V}(b/a) = 0$, y $\beta = 0$.

En consecuencia, todas las soluciones de la ecuación $I_\mu^T = \varphi_{\to V}$ son de la forma

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin V \\ \alpha > 0, & \text{si } x \in V \end{cases}$$

□

Sin embargo, no todas las funciones μ de esta forma son siempre solución para cualquier t-norma T. Es un ejercicio sencillo comprobar que para cualquier valor positivo que demos a α, si $a, b \in V$, $a, b \notin V$, o $a \notin V$ y $b \in V$, se verifica $I_\mu^T(b/a) = \varphi_{\to V}(b/a)$, pero no ocurre lo mismo si $a \in V$ y $b \notin V$, por lo tanto, éste será el único caso que tendremos que examinar en el siguiente corolario.

COROLARIO 2.4.3.
1) Si T es una t-norma contínua positiva, la función

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin V \\ \alpha, & \text{si } x \in V \end{cases}$$

es una solución de la ecuación $I_\mu^T = \varphi_{\to V}$ para cualquier $\alpha \in (0,1]$, y por tanto, dicha ecuación tiene soluciones distintas de φ_V.

2) Si T es una t-norma contínua con generador t tal que $t(0) < \infty$, la única solución de $I_\mu^T = \varphi_{\to V}$ es $\mu = \varphi_V$.

Demostración.-
1) Como $\alpha > 0$, $T(z,\alpha) = 0$ si y sólo si $z = 0$. Por tanto, si $a \in V$, $b \notin V$, será $I_\mu^T(b/a) = Sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(z,\alpha) \leq 0\} = Sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(z,\alpha) = 0\} = 0 = \varphi_{\to_V}(b/a)$ para cualquier $\alpha > 0$.

2) Si $a \in V$ y $b \notin V$, será $I_\mu^T(b/a) = sup\{z \in [0,1]\ ;\ T(z,\alpha) \leq 0\} = 0$, y $T(0,\alpha) = 0$. De $T(0,\alpha) = t^{(-1)}(t(0) + t(\alpha)) = 0$, se obtiene $t(0) + t(\alpha) = t(0)$, y $t(\alpha) = 0$. Entonces $\alpha = 1$. $\Box$.

EJEMPLOS 2.4.4.

1.- Si $T = \Pi$ es la t-norma Producto, que es positiva y

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 < \alpha < 1, & \text{si } x \in V \\ 0, & \text{si } x \notin V \end{cases}$$

para $a \in V$ y $b \notin V$, $I_\mu^\Pi(b/a) = Min(1, \frac{\mu(b)}{\mu(a)}) = Min(1,0) = 0 = \varphi_{\to_V}(b/a)$, y I_μ^Π coincide totalmente con $\varphi_{\to_V}$, lo que está de acuerdo con el Corolario anterior.

2.- Si $T = Min$, que es una t-norma positiva y

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 < \alpha < 1, & \text{si } x \in V \\ 0, & \text{si } x \notin V \end{cases}$$

para $a \in V$ y $b \notin V$, $I_\mu^{Min}(b/a) = \mu(b) = 0$, y por tanto $I_\mu^{Min} = \varphi_{\to_V}$.

3.- Si T es la t-norma de Lukasiewicz, cuyo generador es $t = 1 - j$, y

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 < \alpha < 1, & \text{si } x \in V \\ 0, & \text{si } x \notin V \end{cases}$$

para cada $a \in V$ y $b \notin V$, será $I_\mu^{\mathcal{L}}(b/a) = Min(1, 1 - \mu(a) + \mu(b)) = Min(1, 1 - \alpha) = 1 - \alpha > 0$, que no coincide con $\varphi_{\to_V}(b/a) = Max(1 - \varphi_V(a), \varphi_V(b)) = 0$. Así, de acuerdo con el Corolario anterior, μ no es solución de $I_\mu^T = \varphi_{\to_V}$.

Dado un subconjunto $V \subsetneq E$, donde se han definido los conectivos lógicos $\cdot$(conjunción), $+$ (disjunción), y $'$ (negación), tales que

1) $a \cdot b$ si y sólo si $a \in V$ y $b \in V$

2) $a' \in V$ si y sólo si $a \in E - V$

3) $a + b \in V$ si y sólo si $a \in V$ o $b \in V$

entonces se demuestra fácilmente que

$$a \rightarrow_V b \quad \text{si y sólo si} \quad a \rightarrow b \in V,$$

donde $a \rightarrow b = a' \cdot b \, + \, a' \cdot b' + a \cdot b$.

Cuando en $(E, \cdot, +, ')$ se da la Ley Distributiva $x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$, y la Ley del Tercero Excluído $x \cdot (y + y') = x$, para cualesquiera x, y, z de E, será

$$a \rightarrow b = a' \cdot (b + b') + a \cdot b = a' + a \cdot b$$

Si además se verifica la Ley Distributiva $x \cdot y + z = (x + z) \cdot (y + z)$, se obtendrá

$$a \rightarrow b = (a' + a) \cdot (a' + b) = a' + b$$

Por tanto, en Algebras de Boole $a \rightarrow_V b$ si y sólo si $a' + b \in V$, y en retículos más débiles podría ser $a \rightarrow_V b$ si y sólo si $a' + a \cdot b \in V$, como es el caso de los retículos de la Mecánica Cuántica.

A la hora de buscar una generalización del Condicional Material, esto nos sugiere definir, dada una t-norma T ,una t-conorma S y $\mu \in [0,1]^E$ fijos, las siguientes relaciones borrosas:

$R^g_\mu(b/a) = S(S(T(1-\mu(a), \mu(b)), T(1-\mu(a), 1-\mu(b))), T(\mu(a), \mu(b)) = S(T(1-\mu(a), \mu(b)), T(1-\mu(a), 1-\mu(b)), T(\mu(a), \mu(b)))$

$R^W_\mu(b/a) = S(1 - \mu(a), T(\mu(a), \mu(b)))$

$R^{KD}_\mu(b/a) = S(1 - \mu(a), \mu(b))$

Se observa que $R^g_\mu \leq R^W_\mu \leq R^{KD}_\mu$.

EJEMPLOS 2.4.5.

1.- Si $T = Min$, $S = Min^* = Max$:

- $R^W_\mu(b/a) = Max(1 - \mu(a), Min(\mu(a), \mu(b))$, llamada implicación de Willmot.

- $R^{KD}_\mu(b/a) = Max(1 - \mu(a), \mu(b))$, implicación de Kleen-Dienes.

2.- Si $T = \Pi$, $S = \Pi^* = Sum - Prod$:

$\bullet R_\mu^W(b/a) = S(1-\mu(a), \mu(a)\cdot\mu(b)) = 1-\mu(a)+\mu(a)\cdot\mu(b)-(1-\mu(a))\cdot\mu(a)\cdot\mu(b) = 1-\mu(a)+(\mu(a))^2\cdot\mu(b)$,

$\bullet R_\mu^{KD}(b/a) = S(1-\mu(a),\mu(b)) = 1-\mu(a)+\mu(b)-(1-\mu(a))\cdot\mu(b) = 1-\mu(a)+\mu(a)\cdot\mu(b)$,
implicación de Reichenbach.

3.- Si $T = \mathcal{L}$, $S = \mathcal{L}^* = Min(1, Sum)$:

$\bullet R_\mu^W(b/a) = Max(1-\mu(a),\mu(b))$,
implicación de Kleene-Dienes.

$\bullet R_\mu^{KD}(b/a) = Min(1, 1-\mu(a)+\mu(b))$,
implicación de Lukasiewicz.

4.- Si $T = Min$, $S = \Pi^* = Sum - Prod$:

$\bullet R_\mu^W(b/a) = 1-\mu(a)+Min(\mu(a),\mu(b))-(1-\mu(a))\cdot Min(\mu(a),\mu(b)) = Min(1, 1-\mu(a)+\mu(b))-(1-\mu(a))Min(\mu(a),\mu(b)) = 1-\mu(a)+\mu(a)Min(\mu(a),\mu(b))$.

$\bullet R_\mu^{KD}$ será igual que en el caso 2, ya que es independiente de la t-norma elegida.

5.- Si $T = Min$, $S = \mathcal{L}^* = Min(1, Sum)$:

$\bullet R_\mu^W(b/a) = Min(1, 1-\mu(a)+Min(\mu(a),\mu(b)) = Min(1, Min(1, 1-\mu(a)+\mu(b))) = Min(1, 1-\mu(a)+\mu(b))$,
implicación de Lukasiewicz de nuevo.

$\bullet R_\mu^{KD}$ será igual que en el caso 3.

6.- Si $T = \Pi$, $S = Min^* = Max$:

$\bullet R_\mu^W(b/a) = Max(1-\mu(a),\mu(a)\cdot\mu(b))$.

$\bullet R_\mu^{KD}(b/a)$ igual que en el caso 1.

7.- Si $T = \Pi$, $S = \mathcal{L}^* = Min(1, Sum)$:

$\bullet R^g_\mu(b/a) = \mathcal{L}^*((1-\mu(a))\cdot\mu(b), (1-\mu(a))\cdot(1-\mu(b)), \mu(a)\cdot\mu(b)) = \mathcal{L}^*(Min(1, 1-\mu(a)), \mu(a)\cdot\mu(b)) = Min(1, 1-\mu(a)+\mu(a)\cdot\mu(b)) = 1-\mu(a)+\mu(a)\cdot\mu(b)$.

que es otra vez la implicación de Reichenbach.

Por la misma definición, es fácil ver que para cualquier t-norma T y cualquier $\mu : E \to [0,1]$, la relación I^T_μ es un μ-T-condicional. ¿Qué ocurre en el caso de R^g_μ , R^W_μ y R^{KD}_μ ?. En general, estas relaciones no son μ-T-condicionales cuando $S = T^*$.

Por ejemplo, si $E = [0,1]$, $\mu = j$ y $T = Min$, con a=0.5, b=0.3, tenemos:

• $Min(a, Max(Min(1-a, b), Min(1-a, 1-b), Min(a, b))) = Min(0.5, Max(Min(0.5, 0.3), Min(0.5, 0.7), Min(0.5, 0.3))) = 0.5 > b$.

• $Min(a, Max(1-a, Min(a, b))) = Min(0.5, Max(0.5, Min(0.5, 0.3))) = 0.5 > b$.

• $Min(a, Max(1-a, b)) = Min(0.5, Max(0.5, 0.3)) = 0.5 > b$.

TEOREMA 2.4.6. Si $T = \mathcal{L}$ y $S = \mathcal{L}^* = Min(1, Sum)$, tanto R^W_μ como R^{KD}_μ son μ -$\mathcal{L}$-condicionales.

Demostración.-En este caso, $\mathcal{L}(\mu(a), R^W_\mu(b/a)) \leq \mathcal{L}(\mu(a), R^{KD}_\mu(b/a)) = Max(0, \mu(a) + Min(1, 1-\mu(a)+\mu(b)) - 1) = Max(0, Min(\mu(a), \mu(b))) = Min(\mu(a), \mu(b)) \leq \mu(b)$.

Por tanto, $R^W_\mu(b/a) = Max(1-\mu(a), \mu(b))$ y $R^{KD}_\mu(b/a) = Min(1, 1-\mu(a)+\mu(b))$ son μ-$\mathcal{L}$-condicionales. □

La falta de condicionalidad general para las relaciones R^g_μ, R^W_μ y R^{KD}_μ, motiva el estudio de su posible carácter de preórdenes fuzzy. Esto es debido a que si R es T-transitiva basta tomar, para cada a en E, $\mu_a = R(x/a)$ y obtenemos:

$$T(\mu_a(b), R(c/b)) = T(R(b/a), R(c/b)) \leq R(c/a) = \mu_a(c)$$

para cualquier b, c en E; por tanto, R es un μ_a-T-condicional para cada a en E, y μ_a es un T-estado lógico para (E, R).

LEMA 2.4.7. Si T es una t-norma tal que, para cada x, y, z en $[0,1]$ se verifica $T(x, 1-z) \leq T(x, 1-y) + T(y, 1-z)$, entonces $\mathcal{L} \leq T$.

Demostración.- Con $z = 0$ obtenemos $x \leq T(x, 1-y) + y$, o $x - y \leq T(x, 1-y)$. Entonces,

$$Max(0, x-y) = Max(0, x+1-y-1) = \mathcal{L}(x, 1-y) \leq T(x, 1-y),$$

para todo x, y en $[0,1]$. Luego $\mathcal{L} \leq T$. $\Box$

LEMA 2.4.8. Si T es una t-norma y una cópula (vid. apéndice), entonces $T(x, 1-z) \leq T(x, 1-y) + T(y, 1-z)$, para cualesquiera x, y, z en $[0,1]$.

Demostración.- Si $y \leq z$, como $1 - z \leq 1 - y$, será $T(x, 1-z) \leq T(x, 1-y) \leq T(x, 1-y) + T(y, 1-z)$, para todo x en $[0,1]$.

Sea $z \leq y$, tomando $t = 1 - z$ y $r = 1 - y$, será $r \leq t$ y ([58]) $T(x,t) - T(x,r) \leq t - r$. Como $\mathcal{L} \leq T$, obtendremos $t - r = Max(0, t-r) = Max(0, 1-r+t-1) = \mathcal{L}(1-r, t) \leq T(1-r, t)$.

Así llegamos a $T(x,t) - T(x,r) \leq t - r \leq T(1-r, t)$ y $T(x, 1-z) \leq T(x, 1-y) + T(y, 1-z)$. $\Box$

TEOREMA 2.4.9. Si T es una t-norma y una cópula, $R_\mu^{KD}(b/a) = T^*(1 - \mu(a), \mu(b))$ es $\mathcal{L}$-transitiva.

Demostración.- $\mathcal{L}(R_\mu^{KD}(b/a), R_\mu^{KD}(c/b)) = Max(0, T^*(1-\mu(a), \mu(b)) + T^*(1-\mu(b), \mu(c)) - 1) = Max(0, 1 - T(\mu(a), 1-\mu(b)) - T(\mu(b), 1-\mu(c))) \leq$ (por el lema anterior) $Max(0, 1 - T(\mu(a), 1-\mu(c))) = Max(0, T^*(1-\mu(a), \mu(c))) = T^*(1-\mu(a), \mu(c)) = R_\mu^{KD}(c/a)$. $\Box$

En consecuencia, la relación

$${}^{r}R_\mu^{KD}(b/a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = b \\ R_\mu^{KD}(b/a), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es un $\mathcal{L}$-Preorden, y para cualquier a

$$\mu_a(x) = {}^{r}R_\mu^{KD}(x/a) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = a \\ T^*(1-\mu(a), \mu(x)), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es un μ_a-$\mathcal{L}$-Condicional, siempre que T sea una t-norma y una cópula.
Si existe a en E tal que $\mu(a) = 1$, $\mu_a(x) = \mu(x)$ y ${}^{r}R_{\mu}^{KD}$ es un μ-$\mathcal{L}$-Condicional.

¿En qué grado las relaciones R_{μ}^{g} , R_{μ}^{W} , R_{μ}^{KD} son realmente una generalización del Condicional Material?

TEOREMA 2.4.10. Para cualquier t-norma T, cualquier t-conorma S, μ no nula y $V \neq \emptyset$, $R_{\mu}^{g} = \varphi_{\rightarrow V}$ si y sólo si $\mu = \varphi_V$.

Demostración.- Si $\mu = \varphi_V$:
1) Si $a \in V, b \in V$, $R_{\mu}^{g}(b/a) = S(T(0,1), T(0,0), T(1,1)) = S(0,0,1) = 1$.
2) Si $a \notin V, b \notin V$, $R_{\mu}^{g}(b/a) = S(T(1,0), T(1,1), T(0,0)) = S(0,1,0) = 1$.
3) Si $a \notin V, b \in V$, $R_{\mu}^{g}(b/a) = S(T(1,1), T(1,0), T(0,1)) = S(1,0,0) = 1$.
4) Si $a \in V, b \notin V$, $R_{\mu}^{g}(b/a) = S(T(0,0), T(0,1), T(1,0)) = S(0,0,0) = 0$.

Por tanto $R_{\mu}^{g} = \varphi_{\rightarrow V}$.

Recíprocamente, si $R_{\mu}^{g} = \varphi_{\rightarrow V}$, será:

$$S(T(1-\mu(a), \mu(b)), T(1-\mu(a), 1-\mu(b)), T(\mu(a), \mu(b))) = Max(1-\varphi_V(a), \varphi_V(b))$$

Si $a \in V$ y $b \notin V$,
$R_{\mu}^{g}(b/a) = S(T(1-\mu(a), \mu(b)), T(1-\mu(a), 1-\mu(b)), T(\mu(a), \mu(b))) = 0$
y será $T(1-\mu(a), \mu(b)) = T(1-\mu(a), 1-\mu(b)) = T(\mu(a), \mu(b) = 0$.

Por otra parte,
$R_{\mu}^{g}(a/b) = S(T(1-\mu(b), \mu(a)), T(1-\mu(b), 1-\mu(a)), T(\mu(b), \mu(a))) = Max(1-\varphi_V(b), \varphi_V(a)) = 1$.
$S(T(1-\mu(b), \mu(a)), 0, 0) = 1$, con lo que $T(1-\mu(b), \mu(a)) = 1$.
Y así, $1-\mu(b) = \mu(a) = 1$, siendo por tanto $\mu(b) = 0$ y $\mu(a) = 1$. Esto es, $\mu = \varphi_V$.

Por último, si fuese $V = E$, entonces $R_{\mu}^{g}(b/a) = \varphi_{\rightarrow V}(b/a) = 1$ para todo a, b de E. Como μ es no nula, existirá al menos un b de E con $\mu(b) > 0$.

Sea ahora un a cualquiera de E.
$R_{\mu}^{g}(a/b) = S(T(1-\mu(b), \mu(a)), T(1-\mu(b), 1-\mu(a)), T(\mu(b), \mu(a))) = 1$. Por ser $1-\mu(b) < 1$, no puede ser $T(1-\mu(b), \mu(a)) = 1$, ni $T(1-\mu(b), 1-\mu(a)) = 1$, y

por tanto necesariamente $T(\mu(b), \mu(a)) = 1$, y $\mu(b) = \mu(a) = 1$. Así pues, para todo a de E, $\mu(a) = 1$, y también en este caso, $\mu = \varphi_V$. □

TEOREMA 2.4.11. Para cualquier t-norma T, cualquier t-conorma S, μ no nula y $V \neq \emptyset$, $R_\mu^W = \varphi_{\rightarrow_V}$ si y sólo si $\mu = \varphi_V$

Demostración.- Si $\mu = \varphi_V$ es fácil ver, como en el Teorema anterior, que $R_\mu^W = \varphi_{\rightarrow_V}$.
Si $R_\mu^W = \varphi_{\rightarrow_V}$, será $S(1 - \mu(a), T(\mu(a), \mu(b)) = Max(1 - \varphi_V(a), \varphi_V(b))$, para todo a, b en E.
Tomando $a \in V, b \notin V$, será $S(1 - \mu(a), T(\mu(a), \mu(b)) = 0$, y $1 - \mu(a) = T(\mu(a), \mu(b)) = 0$; es decir, $\mu(a) = 1$ y $\mu(b) = 0$.
Al igual que el anterior Teorema, si $V = E$, también se da la igualdad. □

TEOREMA 2.4.12. Para cualquier t-norma T, cualquier t-conorma S, μ no nula y $V \neq \emptyset$, $R_\mu^{KD} = \varphi_{\rightarrow_V}$ si y sólo si $\mu = \varphi_V$.

Demostración.- Es similar a la de los Teoremas anteriores. □

En conclusión, tanto en los preórdenes I_μ^T, como en las relaciones R_μ^g, R_μ^W, R_μ^{KD}, sustituyendo μ por φ_V para algún subconjunto clásico V, se obtiene $\varphi_{\rightarrow_V}$.
Sin embargo, mientras que las ecuaciones $R_\mu^g = \varphi_{\rightarrow_V}$, $R_\mu^W = \varphi_{\rightarrow_V}$, $R_\mu^{KD} = \varphi_{\rightarrow_V}$ y $I_\mu^T = \varphi_{\rightarrow_V}$ con T t-norma arquimediana no estricta, admiten como única solución $\mu = \varphi_V$, es decir, generalizan perfectamente el Material Condicional Clásico, la ecuación $I_\mu^T = \varphi_{\rightarrow_V}$, siendo T una t-norma contínua positiva, admite como solución cualquier subconjunto fuzzy de la forma

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin V \\ \alpha \in (0,1], & \text{si } x \in V \end{cases}$$

Obsérvese que en este caso, no solamente podemos obtener la función característica del Material Condicional $\rightarrow_V$ con funciones de pertenencia μ distintas de la función característica de V, sino que además μ puede tomar en V valores tan pequeños como deseemos.

CAPITULO 3

MONOTONIA

1. MONOTONIA DEBIL.
2. MONOTONIA RESTRINGIDA.

Pocas de las generalizaciones que empleamos para plantear y resolver los problemas de cada día, son sin excepciones. Si fuesen expresables como condicionales del tipo $\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$, serían casi siempre falsas. Como ya señaló Hans Reichenbach hay dos tipos de relaciones de implicación, las "$a \Rightarrow b$ siempre", como las de la lógica formal, y las "$a \Rightarrow b$ con cierta frecuencia"; es decir, hay reglas universales y reglas con excepciones, llamadas también reglas por defecto. Estas últimas dan lugar a la pérdida de una propiedad tan natural de la lógica clásica que, hasta hace poco, casi no se hablaba de ella en los textos: la monotonía.

En cualquier lógica monótona, el aumento de premisas no provoca en ningún caso la invalidez de las conclusiones. Sin embargo, éste no es el caso del razonamiento común, en el que en pocas ocasiones se poseen todos los elementos de juicio necesarios para obtener conclusiones totalmente válidas; normalmente, se hacen inferencias con la información disponible, obteniendo resultados admisibles, hasta la obtención de nuevos datos, que pueden obligar a una anulación de los mismos. Así, mientras que en la inferencia clásica el concepto básico es el de verdad, en la inferencia de sentido común es el de "admisibilidad hasta nueva orden".

El abandono de la monotonía obliga a la consideración de propiedades más débiles que la generalizan, con la consiguiente aparición de diversos tipos de lógicas no-monótonas en función de las propiedades deseables en las diversas situaciones.

El presente capítulo es un estudio de la monotonía, obteniendo caracterizaciones que permitan, por un lado, acotarla, y por otro el estudio matemático de la No-monotonía, con la posibilidad de construir ejemplos de relaciones, y por tanto de lógicas, no-monótonas.

En el capítulo anterior se estudian los condicionales, y como consecuencia, los estados lógicos de una relación, funciones de pertenencia respecto a las cuales la relación es un condicional. Este estudio previo nos lleva a buscar una caracterización de monotonía basada en los estados lógicos.

Ya en ([75]) se da una caracterización de este tipo para aquellas relaciones que son T-preórdenes. Para el resto de las relaciones reflexivas se conseguía una condición necesaria pero no suficiente. En este capítulo se llega a la misma caracterización siguiendo un camino distinto.

El primer paso es definir la Monotonía Débil y la n-Monotonía Débil , que alcanzan todo su significado en las relaciones no T-transitivas, ya que en los T-preórdenes son conceptos equivalentes al de Monotonía. Esto nos permitirá aplicar los Teoremas que se obtienen, a los casos en que se verifique la transitividad.

La propiedad (H_T) proporciona una cota superior del valor de pertenencia de la conjunción de dos elementos, para los estados lógicos. Se obtienen teoremas que relacionan las monotonías mencionadas con esta propiedad. Los ejemplos que se ofrecen, tanto clásicos como difusos, ilustran los resultados de los mismos.

Es conocido el concepto de monotonía restringida, frecuentemente utilizado en Inteligencia Artificial. Se puede plantear si está de algún modo ligado con los conceptos y propiedades estudiados; en la segunda sección del capítulo, los ejemplos que se presentan parecen apoyar la tesis de su independencia.

Como es bien conocido, una relación clásica $\Rightarrow$ en un conjunto E, es decir, un subconjunto $\Rightarrow$ del producto cartesiano $E \times E$, se dice que es $\cdot$-monótona cuando para cualesquiera a, b, c en E

$$Si \;\; a \Rightarrow b \,, \;\; entonces \;\; a \cdot c \Rightarrow b,$$

siendo "$\cdot$" una operación conmutativa en E representando una conjunción entre los elementos de E.

Así por ejemplo, ya vimos en el capítulo 1, que dada la estructura relacional $([0,1], \leq)$, $\leq$ es Min-monótono, y en general, para toda operación $\cdot$, con $\cdot \leq Min$, también $\leq$ es $\cdot$-monótono.

Sin embargo, dada la operación $a * b = \sqrt{a \cdot b}$ que es mayor que el Min, se obtiene que $\leq$ no es $*$-monótona.

Si $\Rightarrow \subseteq E \times E$ es representado por su función característica $\varphi_{\Rightarrow} : E \times E \rightarrow [0,1]$, definida por:

$$\varphi_{\Rightarrow}(b/a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \Rightarrow b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces $\Rightarrow$ es monótona si y sólo si

$$\varphi_{\Rightarrow}(b/a) \leq \varphi_{\Rightarrow}(b/a \cdot c),$$

para cualesquiera a, b, c en E.

Cuando $R : E \times E \rightarrow [0,1]$ es un Relación Inexacta o Fuzzy sobre E, es decir, cuando $R(b/a) \in [0,1]$ indica el grado de la relación entre a y b, parece adecuado dar la siguiente

DEFINICION 3.1.1. R se dice que es $\cdot$ -monónota si y sólo si

$$R(b/a) \leq R(b/a \cdot c),$$

para cualesquiera a, b, c en E.

DEFINICION 3.1.2. R es débilmente $\cdot$-monótona respecto a una t-norma contínua T si para todo a, b, c de E, o bien se verifica $R(b/a) \leq R(b/a \cdot c)$, o bien

$$R(b/a) \leq \sup_{a_1 \ldots a_n \in E} T(R(b/a_n), T(R(a_n/a_{n-1}), \ldots, T(R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c))\ldots))$$

LEMA 3.1.3. Si T y T' son t-normas contínuas tales que $T \leq T'$, y R es débilmente $\cdot$-monótona respecto a T, entonces también lo es respecto a T'.

Demostración.- Inmediata. $\square$

Si denotamos por D_T el conjunto de todas las relaciones que son débilmente $\cdot$-monótonas respecto a T, el resultado obtenido dice que si $T \leq T'$, entonces $D_T \subseteq D_{T'}$.

DEFINICION 3.1.4. R es n-$\cdot$-monótona respecto a una t-norma contínua T si para todo c en E, o bien $R(b/a) \leq R(b/a \cdot c)$, o bien

$$R(b/a) \leq \sup_{a_1 \ldots a_k \in E, k \leq n} T(R(b/a_k), T(R(a_k/a_{k-1}), \ldots, T(R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c))\ldots))$$

Observemos que en el caso en que R sea reflexiva, la última desigualdad es equivalente a:

$$R(b/a) \leq \sup_{a_1, \ldots a_n \in E} T(R(b/a_n), T(R(a_n/a_{n-1}), \ldots T(R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c))\ldots))$$

LEMA 3.1.5. Si T y T' son t-normas contínuas tales que $T \leq T'$, y R es n-$\cdot$-monótona respecto a T, también lo es respecto a T'.

Demostración.- Inmediata. $\square$

Si denotamos por n_T el conjunto de las relaciones que son n-$\cdot$-monótonas respecto a T, tenemos que si $T \leq T'$, para todo $n \in I\!N$ es $n_T \subseteq n_{T'}$.

En adelante, por ser T asociativa, para simplificar escribiremos $T(R(a_1/a_2), R(a_2/a_3), ...R(a_{n-2}/a_{n-1}), R(a_{n-1}/a_n))$, en vez de $T(R(a_1/a_2), T(R(a_2/a_3), ..., T(R(a_{n-2}/a_{n-1}), R(a_{n-1}/a_n))...))$

Además, observemos que siempre
$T(R(a_1/a_2), ..., R(a_i/b), R(b/a_j), ..., R(a_k/b), R(b/a_m), ...) \leq$
$\leq T(R(a_1/a_2), ..., R(a_i/b), R(b/a_m), ...)$

por lo tanto, al tomar $sup_{a_1,...,a_n \in E} T(R(b/a_n), ..., R(a_1/a \cdot c))$, podemos suponer siempre que $a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$; es decir, en la cadena $\{a_1, ..., a_n\}$ no hay ningún elemento repetido.

LEMA 3.1.6. Si R es $\cdot$-monótona, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, R es n-$\cdot$-monótona respecto a cualquier t-norma T contínua, y por tanto, R es débilmente $\cdot$-monótona respecto a T.

Demostración.- Trivial. □

El siguiente Lema pone de manifiesto la equivalencia de los conceptos definidos, en el caso de las relaciones T-transitivas, y por lo tanto, en el de los T-preórdenes.

LEMA 3.1.7. Si R es T-transitiva, R es $\cdot$-monótona si y sólo si es débilmente $\cdot$-monótona respecto a T.

Demostración.- La condición necesaria viene dada por el lema anterior.

Si R es débilmente $\cdot$-monótona respecto a T, para todo a, b, c de E, o bien $R(b/a) \leq R(b/a \cdot c)$, o bien
$R(b/a) \leq \sup_{a_1,...a_n \in E} T(R(b/a_n), R(a_n/a_{n-1}), ..., R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c)) \leq$
$sup_{a_2,...a_n \in E} T(R(b/a_n), ..., R(a_3/a_2), R(a_2/a \cdot c)) \leq ...$
$\leq \sup_{a_n \in E} T(R(b/a_n), R(a_n/a \cdot c)) \leq R(b/a \cdot c)$. □

A partir de ahora, llamaremos (H_T) a la propiedad: para todo μ siendo un T-estado lógico para (E, R), se verifica $\mu(a \cdot b) \leq Min(\mu(a), \mu(b))$.

LEMA 3.1.8. Si T y T' son t-normas contínuas tales que $T \leq T'$, y R verifica la propiedad (H_T), entonces también verifica $(H_{T'})$.

Demostración.- Sea μ un T'-estado lógico para (E, R). Para todo a, b de E, será $T(\mu(a), R(b/a)) \leq T'(\mu(a), R(b/a)) \leq \mu(b)$, y por tanto, μ es también un T-estado lógico que verificará $\mu(a \cdot b) \leq Min(\mu(a), \mu(b))$ para cualesquiera a, b perteneciendo a E. □

Si H_T es el conjunto de las relaciones que verifican la propiedad (H_T), y $T \leq T'$, será $H_T \subseteq H_{T'}$.

Como entre las t-normas más utilizadas figuran las que a la vez son cópulas (vid. apéndice), trabajaremos con estas últimas.

TEOREMA 3.1.9. Sea R una relación reflexiva. Si R es n-·-monótona respecto a la t-norma T, entonces se verifica la propiedad (H_T).

Demostración. Sea μ un T-estado lógico. Por ser R n-·-monótona, para a y c cualesquiera,

$$1 = R(a/a) \leq \sup_{a_1,...a_n \in E} T(R(a/a_n), R(a_n/a_{n-1}), ..., R(a_1/a \cdot c))$$

$$1 = \sup_{a_1,...a_n \in E} T(R(a/a_n), R(a_n/a_{n-1}), ..., R(a_1/a \cdot c))$$

Por tanto, para cada $\epsilon > 0$, existirán $a_1, ...a_n \in E$ tales que

$T(R(a/a_n), R(a_n/a_{n-1}), ...R(a_1/a \cdot c)) > 1 - \frac{\epsilon}{n+1}$ y
$R(a/a_n), R(a_n/a_{n-1}), ..., R(a_1/a \cdot c) > 1 - \frac{\epsilon}{n+1}$

Por ser $R \leq I_\mu^T$, tendremos $I_\mu^T(a/a_n), ..., I_\mu^T(a_1/a \cdot c) > 1 - \frac{\epsilon}{n+1}$

La última desigualdad lleva a $sup \; \{z \in [0,1] \; ; \; T(\mu(a \cdot c), z) \leq \mu(a_1)\} > 1 - \frac{\epsilon}{n+1}$ y $T(\mu(a \cdot c), 1 - \frac{\epsilon}{n+1}) \leq \mu(a_1)$

Teniendo en cuenta que la t-norma de Lukasiewicz es la menor t-norma que es cópula,

$\mathcal{L}(\mu(a \cdot c), 1 - \frac{\epsilon}{n+1}) = Max(0, \mu(a \cdot c) - \frac{\epsilon}{n+1}) \leq \mu(a_1)$; luego $\mu(a \cdot c) - \frac{\epsilon}{n+1} \leq \mu(a_1)$

De forma similar, obtendríamos:

$\mu(a_1) - \frac{\epsilon}{n+1} \leq \mu(a_2)$

....

$\mu(a_n) - \frac{\epsilon}{n+1} \leq \mu(a)$

y sumando, $\mu(a \cdot c) + \mu(a_1) + ... + \mu(a_n) - \epsilon \leq \mu(a_1) + \mu(a_2) + ... + \mu(a)$, que una vez simplificado da $\mu(a \cdot c) - \epsilon \leq \mu(a)$. Como esta desigualdad es cierta para cualquier $\epsilon > 0$, será $\mu(a \cdot c) \leq \mu(a)$.

De la misma forma, se obtiene que $\mu(a \cdot c) \leq \mu(c)$, y consiguientemente, $\mu(a \cdot c) \leq Min(\mu(a), \mu(c))$ para cualesquiera a, c de E. □

NOTA.- La necesidad de que la relación sea reflexiva se comprueba con el siguiente ejemplo.

Sea la relación $R^{\mu}_{m}(b/a) = Min(\mu(a), \mu(b))$ en un retículo E, con $\mu : E \longrightarrow [0,1]$ no creciente; esta relación es $\cdot$-monótona, donde $\cdot$ es la operación ínfimo del retículo. En efecto, como $a \cdot c \leq a$ será $\mu(a) \leq \mu(a \cdot c)$ y $Min(\mu(a), \mu(b)) \leq Min(\mu(a \cdot c), \mu(b))$.

Tomando en particular $E = [0,1]$, $\mu(x) = 1 - x$ y $\cdot = \wedge$ la operación mínimo, se obtiene $R^{\mu}_{m}(b/a) = Min(1-a, 1-b) = 1 - Max(a,b)$, que será $\wedge$-monótono.

Para cualquier T, μ es un T-estado lógico para (E, R^{μ}_{m}) :
$T(\mu(a), R^{\mu}_{m}(b/a)) = T(1-a, 1-Max(a,b)) \leq 1 - Max(a,b) \leq 1 - b = \mu(b)$.
Sin embargo, dados a, b de $[0,1]$ tales que $a < b$, será $\mu(a \wedge b) = 1 - a > 1 - b = \mu(b)$, y no se verifica la propiedad (H_T).

Es decir, no podemos aplicar el Teorema anterior, y la razón es que la relación dada, claramente no es reflexiva.

NOTA.- Si R no es reflexiva pero sí $\cdot$-monótona, no podemos concluir que la relación

$$^{r}R(b/a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = b \\ R(b/a), & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

es $\cdot$-monótona.

En efecto, tomando la relación del ejemplo anterior,

${}^{r}R^{\mu}_{m}(\frac{1}{2}/\frac{1}{2}\wedge\frac{1}{3}) = {}^{r}R^{\mu}_{m}(\frac{1}{2}/\frac{1}{3}) = R^{\mu}_{m}(\frac{1}{2}/\frac{1}{3}) = Min(1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$ y ${}^{r}R^{\mu}_{m}(\frac{1}{2}/\frac{1}{2}) = 1$.
Por tanto, ${}^{r}R^{\mu}_{m}(\frac{1}{2}/\frac{1}{2}\wedge\frac{1}{3}) <{}^{r} R^{\mu}_{m}(\frac{1}{2}/\frac{1}{2})$, y ${}^{r}R^{\mu}_{m}$ no es $\cdot$-monótona.

TEOREMA 3.1.10 Sea R una relación reflexiva. Si R verifica la propiedad (H_T), entonces R es débilmente $\cdot$-monótona respecto a T.

Demostración.- Para cada $a \in E$, definimos μ_a:

$$\mu_a(b) = \sup_{a_1,\ldots a_n \in E} T(R(b/a_n), R(a_n/a_{n-1}), \ldots, R(a_1/a))$$

Comprobemos que es un T-estado lógico para (E, R).

$$T(R(c/b), \sup_{a_1,\ldots a_n \in E} T(R(b/a_n), \ldots, R(a_2/a_1), R(a_1/a))) \leq$$
$$\leq \sup_{b,a_1,\ldots a_n \in E} T(R(c/b), R(b/a_n) \ldots R(a_1/a))$$

luego $T(R(c/b), \mu_a(b)) = T(\mu_a(b), R(c/b)) \leq \mu_a(c)$.

Por ser $\mu_{a\cdot c}$ un T-estado lógico, $\mu_{a\cdot c}(a\cdot c) \leq Min(\mu_{a\cdot c}(a), \mu_{a\cdot c}(c)) \leq \mu_{a\cdot c}(a)$

$$1 = \sup_{a_1,\ldots a_n \in E} T(R(a\cdot c/a_n), \ldots, R(a_2/a_1), R(a_1/a\cdot c)) = \mu_{a\cdot c}(a\cdot c) \leq \mu_{a\cdot c}(a) =$$
$$= \sup_{a_1,\ldots,a_n \in E} T(R(a/a_n), \ldots R(a_1/a\cdot c))$$

Así,

$$R(b/a) = T(R(b/a), \sup_{a_1,,,a_n \in E} T(R(a/a_n), \ldots R(a_2/a_1), R(a_1/a\cdot c)) \leq$$
$$\leq \sup_{a,a_1,\ldots a_n \in E} T(R(b/a), R(a_1/a_n), \ldots R(a_1/a\cdot c)). \quad \square$$

COROLARIO 3.1.11. Si R es un T-preorden, entonces R es $\cdot$-monótona si y sólo si R verifica la propiedad (H_T).

Demostración.- Si R es $\cdot$-monótona, verifica (H_T) para todo T. Recíprocamente, si verifica (H_T), es débilmente $\cdot$-monótona respecto a T, y por el lema 3.1.7., es $\cdot$-monótona. $\square$

Nos quedarán los esquemas:

T fija. R reflexiva

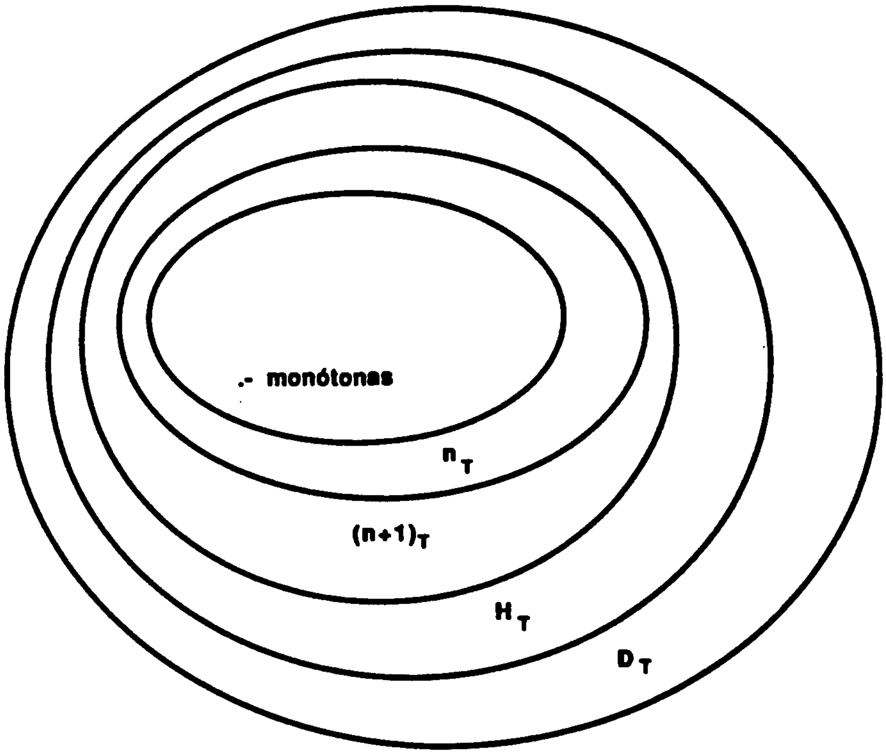

Fig. 3.1.

T fija. R es T-preorden

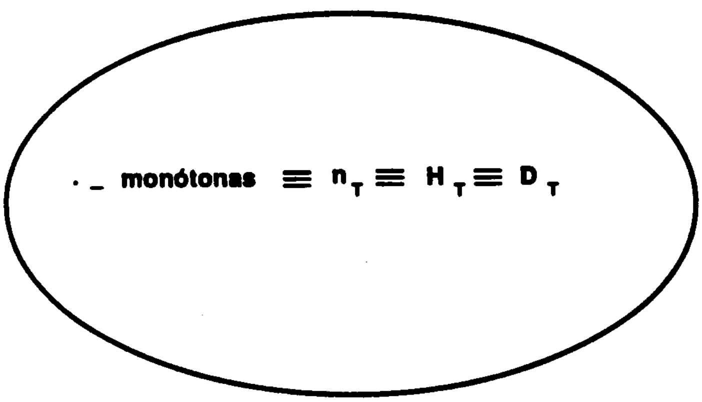

Fig. 3.2.

EJEMPLOS 3.1.12.

1.- Sea (E,p) un Algebra de Boole probabilizada, donde se da la relación $R(b/a) = 1 - p(a) + p(ab)$.

• R es $\cdot$-monótona. Veamos que en efecto, para todo a, b, c de E, se verifica $R(b/a) \leq R(b/a \cdot c)$, lo que es equivalente a las siguientes desigualdades:
$1 - p(a) + p(ab) \leq 1 - p(ac) + p(abc)$
$p(ab) + p(ac) \leq p(a) + p(abc)$
$p(abc) + p(abc') + p(ac) \leq p(ac) + p(ac') + p(abc)$
$p(abc') \leq p(ac')$, y ésta última siempre es cierta.

2.- Sea (E,p) un Algebra de Boole probabilizada, tal que para todo $\alpha \in [0,1]$ existe $a \in E$ con $p(a) = \alpha$, y sea la relación R:

$$R(b/a) = \begin{cases} 1, & \text{si } p(a) = 0 \\ \frac{p(a \cdot b)}{p(a)} & \text{si } p(a) > 0 \end{cases}$$

• R no es $\cdot$-monótona. En efecto, tomando a, b, c con $p(a \cdot b) > 0$, $p(a \cdot c) > 0$ y $p(a \cdot c \cdot b) = 0$, obtenemos que $R(b/a) = \frac{p(a \cdot b)}{p(a)} > 0$, y sin embargo, $R(b/a \cdot c) = \frac{p(a \cdot c \cdot b)}{p(a \cdot c)} = 0$.

• R es 1-$\cdot$-monótona, para cualquier t-norma T que sea cópula. En efecto, para todo a, b, c:
-Si $p(a \cdot c) = 0$, $R(b/a) \leq R(b/a \cdot c) = 1$
-Si $p(a \cdot c) \neq 0$, $p(a) \neq 0$

$R(b/a) = \frac{p(a \cdot b)}{p(a)} = \frac{p(a \cdot b)}{p(a)} + \frac{p(a \cdot a \cdot c)}{p(a \cdot c)} - 1 = Max(0, \frac{p(a \cdot b)}{p(a)} + \frac{p(a \cdot a \cdot c)}{p(a \cdot c)} - 1) = \mathcal{L}(R(b/a), R(a/a \cdot c)) \leq T(R(b/a), R(a/a \cdot c))$, por ser $\mathcal{L}$ la menor t-norma cópula.
Luego el a_1 elegido es a.

Además, por ser R 1-$\cdot$-monótona,

• R verifica la propiedad (H_T) para cualquier t-norma T que sea cópula. Comprobémoslo directamente.

Sea μ un T-estado lógico para (E, R). Para cualesquiera a, b de E, $T(\mu(a \cdot b), R(a/a \cdot b)) \leq \mu(a)$; luego, $T(\mu(a \cdot b), 1) = \mu(a \cdot b) \leq \mu(a)$, y del mismo modo, $\mu(a \cdot b) \leq \mu(b)$, llegando a $\mu(a \cdot b) \leq Min(\mu(a), \mu(b))$.

3.- Sea (E, p) un Algebra de Boole probabilizada, tal que para todo $\alpha \in [0,1]$, existe $a \in E$ con $p(a) = \alpha$.
Se considera la relación $R(b/a) = Min(1, 1 + p(a) - p(b))$, que es reflexiva.

• R verifica la propiedad (H_{Min}); es decir, para todo Min-estado lógico μ de (E, R), es cierta la desigualdad: $\mu(a \cdot b) \leq Min(\mu(a), \mu(b))$ para todo a, b de E.

Veamos primeramente cómo son los Min-estados lógicos. Sea μ uno de ellos. Debe verificarse:

$Min(\mu(a), Min(1, 1 + p(a) - p(b)) \leq \mu(b)$, para todo a, b; es decir
$Min(\mu(a), 1 + p(a) - p(b)) \leq \mu(b)$

a) Si $p(a) = p(b)$, ha de ser :
$Min(\mu(a), 1 + p(a) - p(b)) \leq \mu(b)$; luego $\mu(a) \leq \mu(b)$
$Min(\mu(b), 1 + p(b) - p(a)) \leq \mu(a)$; luego $\mu(b) \leq \mu(a)$
y por consiguiente, $\mu(a) = \mu(b)$

b) Si $p(a) < p(b)$, entonces $\mu(b) \leq \mu(a)$.
Si fuese $\mu(b) > \mu(a)$, $Min(\mu(b), 1 + p(b) - p(a)) = \mu(b) \not\leq \mu(a)$. Contradicción.

Por tanto, será $\mu(\mathbf{1}) \leq \mu(a) \leq \mu(\mathbf{0})$, para todo $a \in E$, donde $\mathbf{1}$ es el elemento máximo, y $\mathbf{0}$ es el mínimo del Algebra.

c) Si $\mu(\mathbf{0}) = \mu(\mathbf{1})$, entonces para todo $a \in E$, es $\mu(a) = \alpha \in [0,1]$.

Si $\mu(\mathbf{0}) > \mu(\mathbf{1})$ (y por tanto, $\mu(\mathbf{1}) < 1$), se obtiene que para todo a con $p(a) > \mu(\mathbf{1})$, $\mu(a) = \mu(\mathbf{1})$.
En efecto, como ha de ser $Min(\mu(a), 1 + p(a) - p(\mathbf{1})) \leq \mu(\mathbf{1})$, $Min(\mu(a), p(a)) \leq \mu(\mathbf{1})$; $\mu(a) \leq \mu(\mathbf{1})$; $\mu(a) = \mu(\mathbf{1})$.

Sea c tal que $p(c) = inf\ \{p(a)\ ;\ a \in E,\ \mu(a) = \mu(\mathbf{1})\} < 1$; por b), si $p(d) > p(c)$, será $\mu(d) = \mu(\mathbf{1})$.

Por una parte, si $\mu(c) > \mu(\mathbf{1})$, para todo ϵ tal que $0 < \epsilon < 1 - p(c)$, existe un d verificando $p(d) = p(c) + \epsilon$, con lo que $\mu(d) = \mu(\mathbf{1})$.
Por ser $Min(\mu(c), 1 + p(c) - p(d)) \leq \mu(d)$, y $\mu(c) > \mu(d)$, debe de cumplirse

$1+p(c)-p(d) \leq \mu(d)$; $1+p(d)-\epsilon-p(d) \leq \mu(d)$; $1-\epsilon \leq \mu(d)$, y por ser esta desigualdad cierta para todo $\epsilon \leq 1-p(c)$, llegamos a $\mu(d)=1=\mu(\mathbf{1})$, que es una contradicción.

En otro caso, si $\mu(c)=\mu(\mathbf{1})$, ha de ser $p(c)>0$, ya que de otra forma, se obtendría $p(c)=0=p(\mathbf{0})$, y $\mu(\mathbf{0})=\mu(c)=\mu(\mathbf{1})$, que no puede ser.
Tomemos para cada ϵ con $0<\epsilon<p(c)$ un $d \in E$ tal que $p(d)=p(c)-\epsilon$. Así, $\mu(d)>\mu(\mathbf{1})=\mu(c)$.
Por ser $Min(\mu(d), 1+p(d)-p(c)) \leq \mu(c)$, y por tanto $1+p(d)-p(c) \leq \mu(c)$ y $1-\epsilon \leq \mu(c)$ para cualquier $\epsilon<p(c)$, se llega a $1=\mu(c)=\mu(\mathbf{1})$; de nuevo contradicción.

Por tanto, al no poder ser $\mu(\mathbf{0})>\mu(\mathbf{1})$, ha de ser $\mu(a)=\alpha \in [0,1]$, para todo a de E.

d) Por otra parte, $\mu(a)=\alpha$ para todo a, es claramente un T-estado lógico para cualquier t-norma T, y en particular para $T=Min$.

e) En conclusión, los Min-estados lógicos para (E,R) son los $\mu: \ \mu(a)=\alpha \in [0,1]$, que claramente verifican la propiedad $\mu(a \cdot b) \leq Min(\mu(a), \mu(b))$.

Por verificar la propiedad (H_{Min}),

- R es débilmente $\cdot$-monótona respecto a $T=Min$.

- R no es n-$\cdot$-monótona respecto a la t-norma Min, para ningún $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Tomemos a,b,c de E, tales que $0<p(b)<p(a)$ y $p(a \cdot c)=0$.
$Min(1, 1+p(a)-p(b))=1 \not\leq Min(1, 1+p(a \cdot c)-p(b))=1-p(b)$, es decir, $R(b/a) \not\leq R(b/a \cdot c)$. Veamos que tampoco

$$R(b/a) \leq \sup_{a_1,\ldots a_n \in E} T(R(b/a_n), R(a_n/a_{n-1}), \ldots, R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c))$$

$T(R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c)) = Min(Min(1, 1+p(a_1)-p(a_2)), Min(1, 1+p(a \cdot c)-p(a_1))) = Min(1, 1+p(a_1)-p(a_2), 1+p(a \cdot c)-p(a_1)) = 1+Min(0, p(a_1)-p(a_2), p(a \cdot c)-p(a_1))$

$T(R(a_3/a_2), R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c)) = Min(Min(1, 1+p(a_2)-p(a_3)), 1+Min(0, p(a_1)-p(a_2), p(a \cdot c)-p(a_1))) = 1+Min(0, p(a_2)-p(a_3), p(a_1)-p(a_2), p(a \cdot c)-p(a_1))$

Si se verificase la desigualdad,

$$Min(1, 1 + p(a) - p(b)) \leq \sup_{a_1,...a_n \in E} [\, 1 + Min(0,\ p(a_n) - p(b)\ ,\ p(a_{n-1}) - p(a_n), ...$$

$$..., p(a \cdot c) - p(a_1))] \quad \text{y simplificando,}$$

$$0 \leq \sup_{a_1,...a_n \in E} Min(0,\ p(a_n) - p(b),\ p(a_{n-1}) - p(a_n), ...,\ p(a \cdot c) - p(a_1))$$

Si fuese $p(a_n) - p(b) > -\frac{p(b)}{n+1}$; $p(a_{n-1}) - p(a_n) > -\frac{p(b)}{n+1}$; ..., $p(a \cdot c) - p(a_1) > -\frac{p(b)}{n+1}$, obtendríamos
$p(b) < p(a_n) + \frac{p(b)}{n+1} < p(a_{n-1}) + \frac{2p(b)}{n+1} < ... < p(a_1) + \frac{np(b)}{n+1} < p(a \cdot c) + p(b) = p(b)$, llegado a una contradicción.

Por tanto, para cualesquiera $a_1, ...a_n \in E$,
$Min(0, p(a_n) - p(b), p(a_{n-1}) - p(a_n), ..., p(a \cdot c) - p(a_1)) \leq -\frac{p(b)}{n+1}$, y

$$\sup_{a_1,...a_n \in E} Min(0, p(a_n) - p(b), p(a_{n-1}) - p(a_n), ..., p(a \cdot c) - p(a_1)) \leq -\frac{p(b)}{n+1} < 0.$$

Contradicción. Por tanto, R no es n−·-monótona, y claro está, tampoco es ·-monótona.

Observemos que, como es de esperar por el Corolario 3.1.11.,

• R no es Min-preorden. En efecto, tomando a, b, c tales que $p(a) = 0$, $p(b) = 0.5$ y $p(c) = 1$, se obtiene $Min(R(b/a), R(c/b)) = Min(0.5, 0.5) = 0.5 \not\leq 0 = R(c/a)$.

4.- Sea (E, p) como en el ejemplo anterior, y la misma relación $R(b/a) = Min(1, 1 + p(a) - p(b))$.

• R no es débilmente ·-monótona respecto a la t-norma de Lukasiewicz.

Tomamos a, b, c tales que $0 < p(b) < p(a)$ y $p(a \cdot c) = 0$.
$R(b/a) = Min(1, 1 + p(a) - p(b)) = 1 \not< R(b/a \cdot c) = Min(1, 1 + p(a \cdot c) - p(b)) = 1 - p(b)$.

Si fuese

$$R(b/a) \leq \sup_{a_1,...a_n \in E} \mathcal{L}(R(b/a_n), R(a_n/a_{n-1}), ..., R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c))$$

$$1 = \sup_{a_1,...a_n \in E} \mathcal{L}(R(b/a_n), R(a_n/a_{n-1}), ..., R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c))$$

Tomando $\epsilon < p(b)$, $\epsilon \neq 0$, deberán existir $a_1, ...a_n \in E$ tales que

$$\mathcal{L}(R(b/a_n), R(a_n/a_{n-1}), ..., R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c)) > 1 - \epsilon$$

Por tanto, $Max(0, 1 + Min(0, p(a_n) - p(b)) + \mathcal{L}(R(a_n/a_{n-1}), ...$
$...R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c)) - 1) > 1 - \epsilon$

Como $0 < 1-\epsilon$, $Min(0, p(a_n)-p(b))+\mathcal{L}(R(a_n/a_{n-1}), ..., R(a_2/a_1), R(a_1/a\cdot c)) > 1 - \epsilon$, y
$p(a_n) - p(b) + \mathcal{L}(R(a_n/a_{n-1}), ..., R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c)) > 1 - \epsilon$
$p(a_n) - p(b) + Max(0, 1 + Min(0, p(a_{n-1}) - p(a_n)) + \mathcal{L}(R(a_{n-1}/a_{n-2}), ...) - 1) > 1 - \epsilon$.

Si fuese $p(a_n) - p(b) + 0 > 1 - \epsilon$, $p(a_n) - 1 > p(b) - \epsilon > 0$. Contradicción. Luego ha de ser
$p(a_n) - p(b) + Min(0, p(a_{n-1}) - p(a_n)) + \mathcal{L}(R(a_{n-1}/a_{n-2}), ...) > 1 - \epsilon$
y por tanto, $p(a_n) - p(b) + p(a_{n-1}) - p(a_n) + \mathcal{L}(R(a_{n-1}/a_{n-2}), ..., R(a_1/a \cdot c)) > 1 - \epsilon$ y $-p(b) + p(a_{n-1}) + \mathcal{L}(R(a_{n-1}/a_{n-2}), ..., R(a_1/a \cdot c)) > 1 - \epsilon$

Procediendo de la misma forma en pasos sucesivos, llegamos a:
$-p(b) + p(a_2) + \mathcal{L}(R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c)) > 1 - \epsilon$
$-p(b)+p(a_2)+Max(0, 1+Min(0, p(a_1)-p(a_2))+1+Min(0, p(a\cdot c)-p(a_1))-1) > 1 - \epsilon$

Si fuese $-p(b) + p(a_2) + 0 > 1 - \epsilon$, $p(a_2) - 1 > p(b) - \epsilon > 0$, llegando a contradicción, por lo que ha de ser
$-p(b) + p(a_2) + Min(0, p(a_1) - p(a_2)) + 1 + Min(0, p(a \cdot c) - p(a_1)) > 1 - \epsilon$
$-p(b) + p(a_2) + p(a_1) - p(a_2) + 1 + p(a \cdot c) - p(a_1) > 1 - \epsilon$ y $-p(b) + p(a \cdot c) > -\epsilon$; $-p(b) > -\epsilon$; $p(b) < \epsilon$, también obtenemos una contradicción. Por tanto, no puede ser

$$R(b/a) \leq \sup_{a_1,...a_n} \mathcal{L}(R(b/a_n), R(a_n/a_{n-1}), ..., R(a_2/a_1), R(a_1/a \cdot c))$$

y R no es débilmente ·-monótona respecto a $\mathcal{L}$.

NOTA.- Observemos de los dos últimos ejemplos, que la relación $R(b/a) = Min(1, 1 + p(a) - p(b))$ es débilmente ·-monótona respecto a Min, pero no respecto a $\mathcal{L}$, lo que muestra que el contenido $D_{\mathcal{L}} \subset D_{Min}$, es estricto.

TEOREMA 3.1.13. Dada R relación reflexiva en un conjunto finito E, si R es débilmente $\cdot$-monótona respecto a la t-norma T, entonces existe un $n \in I\!N$, tal que R es n-$\cdot$-monótona.

Demostración. Sea $\#E = k$.

$$R(b/a) \leq sup_{a_1,...a_n \in E} T(R(a/a_n), ..., R(a_1/a \cdot c)),$$

y al poder tomar sólo elementos distintos,

$$sup_{a_1,...,a_n \in E, a_i \neq a_j} T(R(a/a_n), ..., R(a_1/a \cdot c)),$$

donde, por ser $\#E = k$, $n \leq k-2$.
Por tanto, R es $(k-2)$-$\cdot$-monótona. □

COROLARIO 3.1.14. Dada R relación reflexiva en un conjunto finito E, si R es débilmente $\cdot$-monótona respecto a la t-norma T, entonces R verifica la propiedad (H_T).

El siguiente gráfico muestra la situación obtenida para el caso T fija, E conjunto con $\#E = k$, y R relación reflexiva.

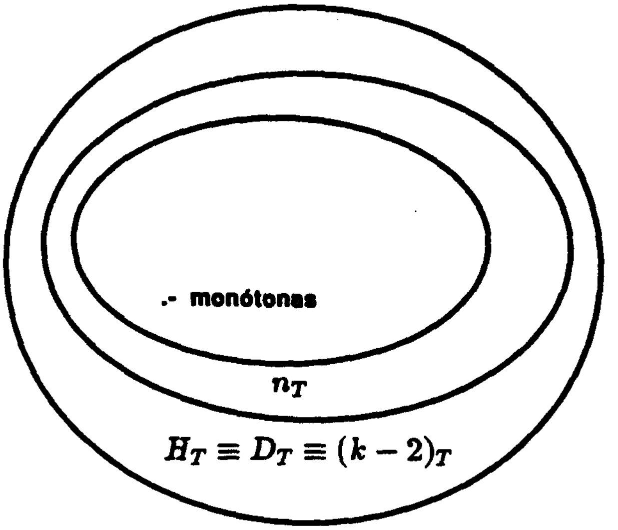

Fig. 3.3.

EJEMPLOS 3.1.15.

1.- Sea el conjunto $E = \{a, b, c\}$, donde se ha definido la operación " $\cdot$ " conmutativa e idempotente: $a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c = c$; y consideremos la relación R con

$$R(a/a) = R(b/b) = R(c/c) = R(a/c) = R(b/c) = 1,$$

y los demás valores, arbitrarios. R es reflexiva, y además,

• R es $\cdot$-monótona. En efecto, es

$$R(a_i/a_j \cdot a_k) = \begin{cases} R(a_i/a_j), & \text{si } j = k \\ R(a_i/c) = 1, & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

y en cualquier caso, $R(a_i/a_j) \leq R(a_i/a_j \cdot a_k)$.

2.- Sean E y la operación " $\cdot$ " como en el ejemplo anterior.
Definimos R:

$$R(a/a) = R(b/b) = R(c/c) = R(a/b) = R(b/a) = R(b/c) = R(c/b) = 1,$$

$$\text{y} \quad R(a/c) = R(c/a) = \alpha \in (0, 1)$$

Por una parte, $1 = R(a/a) \not\leq R(a/a \cdot c) = R(a/c)$, luego

• R no es $\cdot$-monótona.

Pero siempre, si $a_j \neq a_k$, $R(a_i/a_j) \leq T(R(a_i/b), R(b/a_j \cdot a_k)) = T(R(a_i/b), R(b/c)) = T(1, 1) = 1$; y si $a_j = a_k$, $R(a_i/a_j) = R(a_i/a_j \cdot a_k)$. Por tanto,

• R es 1-$\cdot$-monótona.

3.- E y " $\cdot$ " como en los anteriores ejemplos. Sea R tal que

$$R(a/a) = R(b/b) = R(c/c) = 1 \ , \ R(a/c) = R(b/c) = \alpha \in (0, 1),$$

y el resto arbitrario.

• R no es débilmente $\cdot$-monótona, respecto a ninguna t-norma T. En efecto,

$1 = R(a/a) \not\leq R(a/a \cdot c) = \alpha$, y
$1 = R(a/a) \not\leq sup_{a_1,\ldots a_n \in E} T(R(a/a_1), \ldots, R(a_n/a \cdot c)) \leq T(R(a/b), R(b/a \cdot c)) =$

$T(R(a/b), \alpha) \leq \alpha < 1.$

Particularizando la definición de monotonía débil al caso clásico, es decir, cuando la relación sólo toma los valores 0 y 1, podríamos decir que la relación $\Rightarrow$ es débilmente ·-monótona, si para cualesquiera a, b, c de E, o bien $\varphi_{\Rightarrow}(b/a) \leq \varphi_{\Rightarrow}(b/a \cdot c)$, o bien

$$\varphi_{\Rightarrow}(b/a) \leq$$

$$\sup_{a_1,\ldots a_n \in E} Min(\varphi_{\Rightarrow}(b/a_n), Min(\varphi_{\Rightarrow}(a_n/a_{n-1}), \ldots, Min(\varphi_{\Rightarrow}(a_2/a_1), \varphi_{\Rightarrow}(a_1/a \cdot c))\ldots).$$

Teniendo en cuenta que $Min(\varphi_{\Rightarrow}(b/a_n), Min(\varphi_{\Rightarrow}(a_n/a_{n-1}), \ldots))$ sólo puede tomar los valores 0 y 1, llegamos a la

DEFINICION 3.1.16. La relación $\Rightarrow$ es débilmente ·-monótona si $a \Rightarrow b$ implica que para todo c de E, o bien $a \cdot c \Rightarrow b$, o bien, existen $a_1, a_2, \ldots a_n$ de E, tales que $a \cdot c \Rightarrow a_1$, $a_1 \Rightarrow a_2, \ldots, a_{n-1} \Rightarrow a_n$, $a_n \Rightarrow b$.

De forma similar, podemos dar la

DEFINICION 3.1.17. $\Rightarrow$ es n-·-monótona, con $n \in \mathbb{N}$, si $a \Rightarrow b$ implica que para todo c de E, o bien $a \cdot c \Rightarrow b$, o bien existen $a_1, a_2, \ldots a_k$ en E, con $k \leq n$, tales que $a \cdot c \Rightarrow a_1$, $a_1 \Rightarrow a_2$, ..., $a_k \Rightarrow b$.

Si $\Rightarrow$ es reflexiva, la última condición equivale a la existencia de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en E, tales que $a \cdot c \Rightarrow a_1$, $a_1 \Rightarrow a_2, \ldots a_n \Rightarrow b$.

LEMA 3.1.18. Si $\Rightarrow$ es ·-monótona, entonces $\Rightarrow$ es débilmente ·-monótona.

Demostración.- Trivial. □

LEMA 3.1.19. Sea $\Rightarrow$ transitiva. $\Rightarrow$ es ·-monótona si y sólo si $\Rightarrow$ es débilmente ·-monótona.

Demostración.- Inmediata. □

¿Como se traduce la propiedad (H_T) al caso clásico?.

Si V es un estado lógico para $(E, \Rightarrow)$, tomando la función característica φ_V, podríamos escribir $\varphi_V(a \cdot b) \leq Min(\varphi_V(a), \varphi_V(b))$, es decir, si $a \cdot b \in V$, entonces $a \in V$ y $b \in V$. A esta propiedad la denotaremos por (H).

Ahora tenemos el

TEOREMA 3.1.20. Sea $\Rightarrow$ una relación reflexiva. $\Rightarrow$ es débilmente $\cdot$-monótona si y sólo si $\Rightarrow$ verifica la propiedad (H).

Demostración.- Sea $\Rightarrow$ débilmente $\cdot$-monótona, V un estado lógico para la estructura relacional $(E, \Rightarrow)$ y $a \cdot b \in V$. Como $a \Rightarrow a$, o bien $a \cdot b \Rightarrow a$ y $a \in V$, o bien existen $a_1, a_2, ...a_n$ en E , verificando $a \cdot b \Rightarrow a_1$, $a_1 \Rightarrow a_2$,..., $a_n \Rightarrow a$, y por ser V un estado lógico, $a_1 \in V$, $a_2 \in V$,..., $a_n \in V$,$a \in V$.
De la misma forma, $b \in V$.

Por otra parte, si para todo V estado lógico $a \cdot b \in V$ implica $a \in V$ y $b \in V$, sea $a \Rightarrow b$.
Para todo $h \in E$

$$V_h = \{m \; ; \; h \Rightarrow m, \text{ o existen } a_1, ..., a_n \text{ con } h \Rightarrow a_1, a_1 \Rightarrow a_2, ...a_n \Rightarrow m\}$$

es un estado lógico para $(E, \Rightarrow)$.
En particular, para todo $c \in E$ $V_{a \cdot c}$ es un estado lógico, y por la propiedad reflexiva, $a \cdot c \in V_{a \cdot c}$, por lo que $a \in V_{a \cdot c}$ y $a \cdot c \Rightarrow a$, o existen $a_1, ...a_n \in E$ con $a \cdot c \Rightarrow a_1$, $a_1 \Rightarrow a_2$,..., $a_n \Rightarrow a$. En cualquier caso, siempre existen $a_1, a_2, ...a_k$ tales que $a \cdot c \Rightarrow a_1, a_1 \Rightarrow a_2, ..., a_k \Rightarrow a, a \Rightarrow b$. □

COROLARIO 3.1.21. Si $\Rightarrow$ es una relación en E reflexiva y transitiva, esto es, si es un preorden , entonces $\Rightarrow$ es $\cdot$-monótona si y sólo si $\Rightarrow$ verifica la propiedad (H).

Demostración.- Directa a partir del Lema y del Teorema.

EJEMPLOS 3.1.22.

1.- Sea (E,p) un álgebra de Boole probabilizada, y $\cdot$ la operación ínfimo de la misma. Definimos la relación:
$a \Rightarrow b$ si $p(a)=0$ o $p(b)>0$

• $\Rightarrow$ es un preorden. La reflexiva es trivial. Por otra parte, sea $a \Rightarrow b$ y $b \Rightarrow c$. Si $p(a)=0$, $a \Rightarrow c$; si $p(a)>0$, por ser $a \Rightarrow b$, $p(b)>0$, y de la misma forma, por ser $b \Rightarrow c$, $p(c)>0$, con lo que $a \Rightarrow c$.

• $\Rightarrow$ verifica la propiedad (H). Para todo a,b en E, es fácil ver que $a \cdot b \Rightarrow a$ y $a \cdot b \Rightarrow b$. Sea V un estado lógico para $(E,\Rightarrow)$ y $a \cdot b \in V$; necesariamente ha de ser $a \in V$ y $b \in V$.

De esta última propiedad junto con el Corolario, obtenemos que

• $\Rightarrow$ es $\cdot$-monótona. Comprobémoslo directamente.
Si $a \Rightarrow b$ para cualquier c de E, si $p(a \cdot c)=0$, por definición $a \cdot c \Rightarrow b$; Si $p(a \cdot c)>0$ será $p(a)>0$ y $p(b)>0$. Por tanto, $a \cdot c \Rightarrow b$.

2.- Sea (E,p) un álgebra probabilizada. Consideremos la relación
$a \Rightarrow b$ si $p(a)=0$ *o* $p(a \cdot b)>0$

• R no es un preorden. Tomando a,b,c de E, de forma que $p(a \cdot b)>0$, $p(b \cdot c)>0$ y $p(a \cdot c)=0$, está claro que $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow c$, y sin embargo, $a \not\Rightarrow c$; es decir, R no es transitiva.

• R no es $\cdot$-monótona. Tomando a,b,c de E, tales que $p(a \cdot b)>0$, $p(a \cdot c)>0$, $p(a \cdot c \cdot b)=0$, se ve que $a \Rightarrow b$, pero $a \cdot c \not\Rightarrow b$.

• R es 1-$\cdot$-monótona. Sea $a \Rightarrow b$, y c cualquiera.
Si $p(a \cdot c)=0$, $a \cdot c \Rightarrow b$.
Si $p(a \cdot c \cdot b)>0$, $a \cdot c \Rightarrow b$.
Por último, si $p(a \cdot c)>0$ y $p(a \cdot b \cdot c)=0$, será $a \cdot c \not\Rightarrow b$, pero $a \cdot c \Rightarrow a$ y $a \Rightarrow b$, luego es 1-$\cdot$-monótona.

3.- Sea (E,p) un álgebra probabilizada , tal que para todo $\alpha \in [0,1]$, existe al menos un $a \in E$, con $p(a)=\alpha$. Definimos la relación

$a \Rightarrow b$ si $p(a) = 0$ o $p(a) \leq p(b) \leq 2p(a)$.

• R no es un preorden. En efecto, sean a, b, c de E tales que $p(a) > 0$, $p(b) = 2p(a)$ y $p(c) = 2p(b)$, obtenemos que $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow c$, pero $a \not\Rightarrow c$, luego no es transitiva.

• R no es n-·-monótona para ningún $n \in I\!N$. Fijemos un n cualquiera, y sea $a \Rightarrow b$, con $p(a) > 0$. Sea c verificando $0 < p(a \cdot c) < \frac{p(a)}{2^{n+2}}$. Si existiesen $a_1, ...a_n$, tales que $a \cdot c \Rightarrow a_1$, $a_1 \Rightarrow a_2$, ..., $a_n \Rightarrow b$, sería
$p(b) \leq 2p(a_n) \leq 2^2 p(a_{n-1}) \leq ... \leq 2^n p(a_1) \leq 2^{n+1} p(a \cdot c) < 2^{n+1} \frac{p(a)}{2^{n+2}} = \frac{p(a)}{2} < p(a)$, llegando a una contradicción.

• R es débilmente ·-monótona. Sea $a \Rightarrow b$ y c cualquiera; si $p(a \cdot c) = 0$, $a \cdot c \Rightarrow b$. Si $p(a \cdot c) > 0$, entonces $p(a) > 0$ y $p(a) \leq p(b) \leq 2p(a)$. Sea n tal que $2^n \leq \frac{p(a)}{p(a \cdot c)} < 2^{n+1}$.

Elegimos:
a_1 tal que $p(a_1) = 2p(a \cdot c)$, y así $a \cdot c \Rightarrow a_1$
a_2 tal que $p(a_2) = 2p(a_1)$, y $a_1 \Rightarrow a_2$.
....
a_n tal que $p(a_n) = 2p(a_{n-1})$, y $a_{n-1} \Rightarrow a_n$.

Veamos que $a_n \Rightarrow a$.
$p(a_n) = 2p(a_{n-1}) = 2^2 p(a_{n-2}) = ... = 2^{n-1} p(a_1) = 2^n p(a \cdot c)$
$\frac{p(a_n)}{p(a \cdot c)} = 2^n \leq \frac{p(a)}{p(a \cdot c)}$, y por tanto, $p(a_n) \leq p(a)$.
$p(a) < 2^{n+1} p(a \cdot c) = 2^n p(a_1) = 2^{n-1} p(a_2) = ... = 2p(a_n)$; así ,
$p(a_n) \leq p(a) < 2p(a_n)$, $a_n \Rightarrow a$, y $a \cdot c \Rightarrow a_1$, $a_1 \Rightarrow a_2$, ..., $a_n \Rightarrow a$, $a \Rightarrow b$.

Por otra parte, por ser débilmente ·-monótona,

• R verifica la propiedad (H).

4.- Sea E con una conjunción ·, tal que al menos existan dos elementos a, b de E verificando $a \cdot b \neq a$. Consideremos la relación en E: $\Rightarrow = \{(c, c) \; ; \; c \in E\}$.

• $\Rightarrow$ no es ·-monótona. En efecto, $a \Rightarrow a$, pero $a \cdot b \not\Rightarrow a$.

Por tanto, como $\Rightarrow$ es un preorden,
• $\Rightarrow$ no verifica la propiedad (H) y $\Rightarrow$ no es débilmente ·-monótona.

3.2. MONOTONIA RESTRINGIDA

Dentro del marco de la Inteligencia Artificial, es frecuentemente utilizado otro tipo de monotonía, conocido con el nombre de Monotonía Restringida. Nuestra pregunta es si podríamos caracterizar esta Monotonía con ayuda de la propiedad (H_T) definida anteriormente, o qué relación existe entre esta Monotonía y la Débil. En este apartado, con ayuda de algunos ejemplos, se pondrá de manifiesto la ausencia de la caracterización buscada.

Es conocida la siguiente

DEFINICION 3.2.1. La relación clásica $\Rightarrow\subset E\times E$ se dice que es $\cdot$-monótona restringida si para cualesquiera a, b, c de E,

$$Si\ \ a\Rightarrow b\ \ y\ \ a\Rightarrow c,\ entonces\ \ a\cdot c\Rightarrow b$$

Es trivial el siguiente

LEMA 3.2.2. Si $\Rightarrow$ es $\cdot$-monótona , entonces también es $\cdot$-monótona restringida.

Utilizando la función característica de la relación $\Rightarrow$, la monotonía restringida viene dada por:

$$Si\ \ \varphi_{\Rightarrow}(a,b)=1\ \ y\ \ \varphi_{\Rightarrow}(a,c)=1,\ entonces\ \varphi_{\Rightarrow}(a\cdot c,b)=1$$

o lo que es lo mismo,

$$Min(\varphi_{\Rightarrow}(a,b),\varphi_{\Rightarrow}(a,c))\leq\varphi_{\Rightarrow}(a\cdot c,b)$$

De aquí, parece lógico dar la siguiente

DEFINICION 3.2.3. La relación $R:E\times E\longrightarrow[0,1]$ es $\cdot$-monótona restringida respecto a la t-norma T, si para cualesquiera a, b, c de E se verifica la condición:

$$T(R(b/a),R(c/a))\leq R(b/a\cdot c)$$

LEMA 3.2.4. Si la relación R es $\cdot$-monótona, también es $\cdot$-monótona restringida respecto a cualquier t-norma T.

Demostración.-
$T(R(b/a), R(c/a)) \leq Min(R(b/a), R(c/a)) \leq R(b/a) \leq R(b/a \cdot c)$. □

LEMA 3.2.5. Si T y T' son t-normas tales que $T \leq T'$, y R es $\cdot$-monótona restringida respecto a T', entonces también lo es respecto a T.

Demostración.- Inmediata. □

Denotando por R_T al conjunto de las relaciones que son $\cdot$-monótonas restringidas respecto a T, hemos obtenido que si $T \leq T'$ es $R_{T'} \subseteq R_T$.

EJEMPLOS 3.2.6.

1.- En un Algebra probabilizada (E, p), consideremos la relación ya conocida

$$R(b/a) = \begin{cases} 1, & \text{si } p(a) = 0 \\ \frac{p(a \cdot b)}{p(a)} & \text{si } p(a) > 0 \end{cases}$$

Ya sabemos que esta relación es reflexiva, no es $\cdot$-monótona, y es 1-$\cdot$-monótona respecto a cualquier t-norma T que sea cópula; por tanto

- R verifica la propiedad (H_T) para cualquier T t-norma y cópula.

Sin embargo,

- R no es $\cdot$-monótona restringida respecto a ninguna t-norma T positiva.

Tomando a, b, c de E, tales que $p(a \cdot b) > 0$, $p(a \cdot c) > 0$ y $p(a \cdot b \cdot c) = 0$, obtenemos

$0 < T(\frac{p(a \cdot b)}{p(a)}, \frac{p(a \cdot c)}{p(a)}) \not\leq 0 = \frac{p(a \cdot c \cdot b)}{p(a \cdot c)}$, con lo que

$$T(R(b/a), R(c/a)) \not\leq R(b/a \cdot c)$$

2.- En la misma Algebra probabilizada (E, p), definimos la relación

$$R(b/a) = 1 + p(a \cdot b) - \frac{p(a) + p(b)}{2}$$

Primero comprobemos que está bien definida.

Teniendo en cuenta que $\frac{p(a)+p(b)}{2} \leq 1$, será
$1 + p(a \cdot b) - \frac{p(a)+p(b)}{2} \geq 1 + p(a \cdot b) - 1 = p(a \cdot b) \geq 0$.

Por otra parte, $2p(a \cdot b) \leq p(a) + p(b)$; $p(a \cdot b) - \frac{p(a)+p(b)}{2} \leq 0$; y por tanto, $1 + p(a \cdot b) - \frac{p(a)+p(b)}{2} \leq 1$.
Luego, en efecto, para todo a, b de E, $R(b/a) \in [0, 1]$, y la relación está bien definida.

Además, es claramente reflexiva.

- R no es $\cdot$-monótona. Elijamos a, b, c tales que $a = b$, $p(a) > 0$, $p(a \cdot c) = 0$
$R(b/a) = 1 + p(a) - p(a) = 1$.
$R(b/a \cdot c) = 1 + p(a \cdot c \cdot b) - \frac{p(a \cdot c)+p(b)}{2} = 1 - \frac{p(b)}{2} < 1$.
Luego $R(b/a) \not\leq R(b/a \cdot c)$.

- R es $\mathcal{L}$-transitiva. Veamos que para todo a, b, c de E, se verifica
$\mathcal{L}(R(b/a), R(c/b)) \leq R(c/a)$, es decir, $Max(0, R(b/a) + R(c/b) - 1) \leq R(c/a)$.

Como siempre $0 \leq R(c/a)$, esta desigualdad es equivalente a

$$1 + p(a \cdot b) - \frac{p(a)+p(b)}{2} + p(b \cdot c) - \frac{p(b)+p(c)}{2} \leq 1 + p(a \cdot c) - \frac{p(a)+p(c)}{2}$$

que, simplificando, será equivalente a las siguientes:

$p(a \cdot b) + p(b \cdot c) - p(b) \leq p(a \cdot c)$.
$p(a \cdot b) + p(b \cdot c) \leq p(a \cdot c) + p(b)$.
$p(a \cdot b) \leq p(a \cdot c) + p(b \cdot c')$.
$p(a \cdot b \cdot c) + p(a \cdot b \cdot c') \leq p(a \cdot b \cdot c) + p(a \cdot b' \cdot c) + p(b \cdot c')$.
$p(a \cdot b \cdot c') \leq p(a \cdot b' \cdot c) + p(b \cdot c' \cdot a) + p(b \cdot c' \cdot a')$.
$0 \leq p(a \cdot b' \cdot c) + p(b \cdot c' \cdot a')$, lo que es siempre cierto.

Por tanto R es un $\mathcal{L}$-preorden, y por la caracterización dada en anteriores teoremas, por no ser $\cdot$-monótona,

- R no es débilmente $\cdot$-monótona respecto a $\mathcal{L}$.

- R no verifica la propiedad $(H_{\mathcal{L}})$.

Sin embargo,

• R es $\cdot$-monótona restringida respecto a $\mathcal{L}$. Veamos que para todo a, b, c se cumple

$$\mathcal{L}(R(b/a), R(c/a)) \leq R(b/a \cdot c)$$

Esta desigualdad es equivalente a las siguientes:

$Max(0, 1+p(a \cdot b) - \frac{p(a)+p(b)}{2} + 1 + p(a \cdot c) - \frac{p(a)+p(c)}{2} - 1) \leq 1 + p(a \cdot c \cdot b) - \frac{p(a \cdot c)+p(b)}{2}$.
$Max(0, 1 + p(a \cdot b) + p(a \cdot c) - p(a) - \frac{p(b)+p(c)}{2}) \leq 1 + p(a \cdot c \cdot b) - \frac{p(a \cdot c)+p(b)}{2}$.

Al ser siempre $0 \leq R(b/a \cdot c)$,
$p(a \cdot b) + p(a \cdot c) - p(a) - \frac{p(c)}{2} \leq p(a \cdot c \cdot b) - \frac{p(a \cdot c)}{2}$
$2p(a \cdot b) + 2p(a \cdot c) - 2p(a) - p(c) \leq 2p(a \cdot c \cdot b) - p(a \cdot c)$
$2p(a \cdot b) + 3p(a \cdot c) \leq 2p(a \cdot c \cdot b) + 2p(a) + p(c)$
$2p(a \cdot b \cdot c') + 3p(a \cdot c) \leq 2p(a \cdot c) + 2p(a \cdot c') + p(a \cdot c) + p(a' \cdot c)$
$2p(a \cdot b \cdot c') \leq 2p(a \cdot c') + p(a' \cdot c)$, lo que es cierto siempre, por ser $p(a \cdot b \cdot c') \leq p(a \cdot c')$.

NOTA.- Estos dos ejemplos muestran que no es cierto que para cualquier T (t-norma cópula) , es $H_T \subseteq R_T$, ni tampoco que para cualquier T es $R_T \subseteq H_T$.

En el caso clásico nos encontramos en la misma situación; la propiedad (H) no va a caracterizar de ninguna forma la Monotonía restringida.

EJEMPLOS 3.2.7.

1.- (E, p) Algebra probabilizada, en la que se considera la relación ya estudiada anteriormente:
$a \Rightarrow b$ si $p(a) = 0$ o $p(a \cdot b) > 0$

Ya sabemos que esta relación no es $\cdot$-monótona, es reflexiva, no es transitiva, y verifica la propiedad (H).

Sin embargo,

• R no es $\cdot$-monótona restringida. Si a, b, c son tales que $p(a \cdot b) > 0$, $p(a \cdot c) > 0$ y $p(a \cdot c \cdot b) = 0$, tendremos que $a \Rightarrow b$, $a \Rightarrow c$, y sin embargo, $a \cdot c \not\Rightarrow b$.

2.- Sea $E = \{a, b, c\}$, con la operación conmutativa $\cdot$ dada por: $a \cdot a = a$, $b \cdot b = b$, $c \cdot c = c$, $a \cdot b = a$, $a \cdot c = c$, $b \cdot c = b$. Sea la relación en E:

$$\Rightarrow = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c)\}$$

• $\Rightarrow$ no es $\cdot$-monótona. $a \Rightarrow a$, y sin embargo, $a \cdot c = c \not\Rightarrow a$.

Estudiando los casos posibles, es fácil comprobar que

• $\Rightarrow$ es $\cdot$-monótona restringida.

Por último,

• $\Rightarrow$ no verifica la propiedad (H). El subconjunto $V = \{b, c\}$ es un estado lógico para (E, R), $a \cdot c = c \in V$, y $a \notin V$.

CAPITULO 4

RELACIONES RACIONALES EN ALGEBRAS PROBABILIZADAS

1. ALGUNAS LOGICAS PROBABILISTICAS TIPO "NILSSON".
2. ALGUNAS LOGICAS PROBABILISTICAS TIPO "LUKASIEWICZ".
3. ALGUNAS LOGICAS PROBABILISTICAS TIPO "POLYA".
4. OTRAS LOGICAS PROBABILISTICAS.

Dada un álgebra de Boole probabilizada (E,p), existen muchas formas de definir una relación inexacta. Así, tenemos por ejemplo $I_p(b/a) = p(a' + b) = 1 - p(a) + p(ab)$, básica en la lógica probabilística de Nilsson([44]); sabemos que esta relación es un $\mathcal{L}$-preorden y que no es ni Π-preorden ni Min-preorden.

En Razonamiento plausible, tanto G. Pólya ([52]), como J. Pearl ([49]), trabajan con la relación $p^*(b/a) = \frac{p(ab)}{p(a)}$, probabilidad condicionada, que no es un T-preorden para ninguna t-norma contínua T.

Otras relaciones utilizadas en Lógica Multivaluada y en Razonamiento Aproximado, son los T-preórdenes I_p^T, con los que ya hemos trabajado anteriormente:

$$I_p^T(b/a) = \sup\{z \in [0,1] \ ; \ T(z, p(a)) \leq p(b)\},$$

donde T es una t-norma contínua.

Estas relaciones se pueden utilizar en diversas situaciones, según las condiciones en las que debamos trabajar (condiciones de monotonía o no monotonía, propiedad del "Modus Ponens", etc). Pero ¿son éstas las únicas relaciones que verifican dichas condiciones? Por ejemplo, dada $I_p(b/a) = 1 - p(a) + p(ab)$, que es un $\mathcal{L}$-preorden monótono que verifica el "Modus Ponens", ¿no podríamos encontrar otra relación cumpliendo las mismas propiedades?

Este capítulo, en parte inspirado en el trabajo de M.S. Tomas ([60]), pretende hacer un estudio de las propiedades de algunas relaciones inexactas definidas en un Algebra de Boole probabilizada. Nos limitaremos al caso en que el Algebra probabilizada (E,p) es tal que para todo $\alpha \in [0,1]$, existen algún $a \in E$ verificando $p(a) = \alpha$, y en que $R(b/a) = \varphi(p(a), p(b), p(ab))$, donde φ es racional, con numerador y denominador lineales y con coeficientes reales. Es decir,

$$R(b/a) = \frac{a_0 + a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab)}{b_0 + b_1 p(a) + b_2 p(b) + b_3 p(ab)}$$

La primera propiedad que parece lógico exigir a una relación es que el grado con que "a implique a" sea 1; es decir, la propiedad reflexiva.

TEOREMA 4.1.1 Dada el Algebra (E, p), la relación

$$R(b/a) = \frac{a_0 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)}{b_0 + b_1p(a) + b_2p(b) + b_3p(ab)}$$

es reflexiva si y sólo si $a_0 = b_0$ y $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$

Demostración.- R es reflexiva si $\frac{a_0+a_1p(a)+a_2p(a)+a_3p(a)}{b_0+b_1p(a)+b_2p(a)+b_3p(a)} = 1$ para todo a,
si y sólo si $a_0 + (a_1 + a_2 + a_3)p(a) = b_0 + (b_1 + b_2 + b_3)p(a)$ para todo a,
lo que ocurre sólo si $a_0 = b_0$ y $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. □

A partir de ahora, consideraremos solamente relaciones reflexivas.

NOTA.- Siempre podemos considerar $a_0 = 1$ o $a_0 = 0$, dividiendo adecuadamente.

Nos limitaremos en esta sección, al caso en que $a_0 = b_0 = 1$, y $b_1 = b_2 = b_3 = 0$; y por ser reflexiva, $a_1 + a_2 + a_3 = 0$; es decir,

$$R(b/a) = 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)$$

TEOREMA 4.1.2. $R(b/a) \leq 1$ si y sólo si $a_1, a_2 \leq 0$

Demostración.- Si $R(b/a) \leq 1$, $1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab) \leq 1$ para todo a,b, y
$a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab) \leq 0$.

Si tomamos a tal que $p(a) = 0$, $a_2p(b) \leq 0$ para todo b; luego $a_2 \leq 0$
Si tomamos b tal que $p(b) = 0$, $a_1p(a) \leq 0$ para todo a; así, $a_1 \leq 0$

Por otra parte, si $a_1, a_2 \leq 0$, tenemos que, por ser $a_3 = -a_1 - a_2$,
$a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab) = a_1(p(a) - p(ab)) + a_2(p(b) - p(ab)) \leq 0$
y por tanto, $R(b/a) = 1 + a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab) \leq 1$. □

TEOREMA 4.1.3. $R(b/a) \geq 0$ si y sólo si $a_1, a_2 \geq -1$

Demostración.- Si $R(b/a) \geq 0$, $1 + a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab) \geq 0$, para todo $a, b \in E$.
Si tomamos a, b tales que $p(a) = 0$ *y* $p(b) = 1$, $1 + a_2 \geq 0$; $a_2 \geq -1$
Si tomamos a, b con $p(b) = 0$ *y* $p(a) = 1$, $1 + a_1 \geq 0$; $a_1 \geq -1$

Por otra parte, si $a_1, a_2 \geq -1$,
$a_1(p(a) - p(ab)) + a_2(p(b) - p(ab)) \geq -(p(a) - p(ab)) - (p(b) - p(ab)) = p(ab) - p(a) + p(ab) - p(b) = p(ab) - p(a + b) \geq -1$ siempre,
luego $1 + a_1(p(a) - p(ab)) + a_2(p(b) - p(ab)) = R(b/a) \geq 0$.

Por tanto, a partir de ahora, para trabajar con relaciones R bien definidas, impondremos que $-1 \leq a_1, a_2 \leq 0$.

TEOREMA 4.1.4. Si $R(b/a) = 1+a_1 p(a)+a_2 p(b)+a_3 p(ab)$ es un Π-preorden, entonces $R(b/a) \equiv 1$ (es decir, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$).

Demostración.- Para todo a, b, c $\Pi(R(b/a), R(c/b)) \leq R(c/a)$.
$(1 + a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab))(1 + a_1 p(b) + a_2 p(c) + a_3 p(bc)) \leq 1 + a_1 p(a) + a_2 p(c) + a_3 p(ac)$

En particular, elegimos a, b *y* c de forma que $p(a) = 0$, $b \leq c$, $0 < p(b) < p(c)$.
En este caso, $(1 + a_2 p(b))(1 + a_1 p(b) + a_2 p(c) + a_3 p(b)) \leq 1 + a_2 p(c)$.
Así, $1 + a_1 p(b) + a_2 p(c) + a_3 p(b) + a_2 p(b) + a_1 a_2 p(b)^2 + a_2^2 p(b) p(c) + a_2 a_3 p(b)^2 \leq 1 + a_2 p(c)$.

Teniendo en cuenta que $a_3 = -a_1 - a_2$, y simplificando, obtenemos
$a_2^2 p(b)(p(c) - p(b)) \leq 0$.
Como $p(b) > 0$ y $p(c) - p(b) > 0$, $a_2^2 \leq 0$ con lo que $a_2 = 0$.

Elegimos ahora a, b y c, tales que $p(c) = 0$, $b \leq a$ y $0 < p(b) < p(a)$.
$(1 + a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(b))(1 + a_1 p(b)) \leq 1 + a_1 p(a)$.
Al ser $a_2 = 0$, $a_3 = -a_1$, $(1 + a_1 p(a) - a_1 p(b))(1 + a_1 p(b)) \leq 1 + a_1 p(a)$.

Simplificando, $a_1^2 p(b)(p(a)-p(b)) \leq 0$.
Como $p(b) > 0$, $p(a)-p(b) > 0$, ha de ser $a_1^2 \leq 0$, con lo que $a_1 = 0$ y $a_3 = 0$.
□

COROLARIO 4.1.5. Si $R(b/a) = 1 + a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab)$ es un Mín-preorden, ha de ser $R(b/a) \equiv 1$.

Demostración.- Si R es un Mín-preorden, ha de ser un Π-preorden, y por el Teorema anterior, $R(b/a) \equiv 1$. □

COROLARIO 4.1.6. $I_p(b/a) = 1 - p(a) + p(ab)$ no es un Π-preorden ni Mín-preorden.

TEOREMA 4.1.7. Si $R(b/a) = 1 + a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab)$, R es un $\mathcal{L}$-preorden.

Demostración.-
Veamos que para todo a, b y c, $\mathcal{L}(R(b/a), R(c/b)) \leq R(c/a)$
$Max(0, 1 + a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab) + 1 + a_1 p(b) + a_2 p(c) + a_3 p(bc) - 1) \leq 1 + a_1 p(a) + a_2 p(c) + a_3 p(ac)$.

Como el segundo miembro , $R(c/a)$, siempre es mayor o igual que cero, bastará ver que
$a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab) + 1 + a_1 p(b) + a_2 p(c) + a_3 p(bc) \leq 1 + a_1 p(a) + a_2 p(c) + a_3 p(ac)$

Teniendo en cuenta que $a_3 = -a_1 - a_2$, y ordenando, $(a_1 + a_2)(p(b) - p(ab) - p(bc) + p(ac)) \leq 0$.

Pero $a_1 + a_2 \leq 0$ y $p(b) - p(ab) - p(bc) + p(ac) = p(b) - p(abc) - p(abc') - p(bc) + p(ac) \geq 0$, (por ser $p(abc') + p(bc) \leq p(b)$ y $p(abc) \leq p(ac)$).

Por tanto, obtenemos que, en efecto, $(a_1 + a_2)(p(b) - p(ab) - p(bc) + p(ac)) \leq 0$

COROLARIO 4.1.8. $I_p(b/a) = 1 - p(a) + p(ab)$ es un $\mathcal{L}$-preorden.

TEOREMA 4.1.9. Dada una relación inexacta reflexiva $R(b/a) = 1+a_1p(a)+a_2p(b) + a_3p(ab)$, es monótona si y sólo si $a_2 = 0$.

Demostración.- Supongamos primeramente que R es monótona; es decir, para todo a,b y c se verificará $R(b/a) \leq R(b/ac)$; tenemos:
$1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab) \leq 1 + a_1p(ac) + a_2p(b) + a_3p(abc)$
$a_1p(a) - a_1p(ab) - a_2p(ab) \leq a_1p(ac) - a_1p(abc) - a_2p(abc)$
$a_1(p(a) - p(ab) - p(ac) + p(abc)) + a_2(p(acb) - p(ab)) \leq 0$

Si tomamos a, b y c tales que $a = b$, $p(a) \neq 0$ y $p(c) = 0$, obtendremos:
$a_1(p(a)-p(a))+a_2(0-p(a)) \leq 0$, con lo que $-a_2p(a) \leq 0$, y por tanto, $a_2 \geq 0$, llegando a $a_2 = 0$

Por otra parte, si $a_2 = 0$, tendremos que comprobar que:
$1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab) \leq 1 + a_1p(ac) + a_2p(b) + a_3p(acb)$;
o, lo que es lo mismo, $a_1(p(a) - p(ab) - p(ac) + p(acb)) \leq 0$.

Pero $p(a) - p(ab) - p(ac) + p(abc) = p(a) - p(abc) - p(abc') - p(ac) + p(abc) = p(a) - p(abc') - p(ac) \geq 0$.
Como $a_1 \leq 0$, siempre $a_1(p(a) - p(ab) - p(ac) + p(abc)) \leq 0$. □

Es decir, en cualquier relación inexacta $R(b/a) = 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)$, con $a_2 \neq 0$ se rompe la monotonía.

COROLARIO 4.1.10. $I_p(b/a) = 1 - p(a) + p(ab)$ es monótona.

NOTA.- Las relaciones inexactas reflexivas de la forma $R(b/a) = 1 + a_1p(a) + a_2p(b)+a_3p(ab)$ monótonas, son exactamente las que tienen la forma: $R(b/a) = 1 - mp(a) + mp(ab)$, donde $0 \leq m \leq 1$.

Si $R(b/a) = 1+a_1p(a)+a_2p(b)+a_3p(ab) = 1+a_1(p(a)-p(ab))+a_2(p(b)-p(ab))$, bien definida y reflexiva, es monótona, entonces es monótona restringida. En el caso de que no lo sea, ¿cuándo es monótona restringida?

TEOREMA 4.1.11. Sea $R(b/a) = 1 + a_1(p(a) - p(ab)) + a_2(p(b) - p(ab))$, con $-1 \leq a_1, a_2 \leq 0$, y $a_2 \neq 0$. R es $\mathcal{L}$-monótona restringida, si y sólo si $a_1 \leq a_2$.

Demostración.- R será de la forma $R(b/a) = 1 + a_1 p(ab') + a_2 p(ba')$.
Si R es $\mathcal{L}$-monótona restringida, para cualesquiera a, b, c de E $\mathcal{L}(R(b/a), R(c/a)) \leq R(b/ac)$.
Si a, b, c son tales que $p(c) = 0$, $a = b$, $p(a) = 1$, obtenemos:

$Max(0, R(b/a) + R(c/a) - 1) = Max(0, 1 + a_1 p(ab') + a_2 p(ba') + 1 + a_1 p(ac') + a_2 p(ca') - 1) = Max(0, 1 + a_1 p(a)) = 1 + a_1$.
$R(b/ac) = 1 + a_1 p(acb') + a_2(p(b) - p(acb)) = 1 + a_2$.

Así, $1 + a_1 \leq 1 + a_2$ y $a_1 \leq a_2$.

Sea ahora $a_1 \leq a_2$.
Veamos que para todo a, b, c de E se verifica $\mathcal{L}(R(b/a), R(c/a)) \leq R(b/ac)$, lo que es equivalente a las siguientes desigualdades.

$Max(0, 1 + a_1 p(ab') + a_2 p(ba') + 1 + a_1 p(ac') + a_2 p(ca') - 1) \leq 1 + a_1 p(acb') + a_2 p(b) - a_2 p(acb)$;
$a_1 p(ab') + a_2 p(ba') + a_1 p(ac') + a_2 p(ca') \leq a_1 p(acb') + a_2 p(b) - a_2 p(acb)$;
$a_1 p(ab') + a_1 p(ac') + a_2 p(ca') \leq a_1 p(acb') + a_2 p(ba) - a_2 p(acb)$;
$a_1 p(ac'b') + a_1 p(ac') + a_2 p(ca') + a_2 p(acb) \leq a_2 p(ba)$;

Ahora bien, por ser $a_1 \leq a_2$:
$a_1(p(ac'b') + p(ac')) + a_2(p(ca') + p(acb)) \leq a_2(p(ac'b') + p(ac') + p(ca') + p(acb))$,

y bastará ver que
$a_2(p(ac'b') + p(ac') + p(ca') + p(acb)) \leq a_2(p(bac) + p(bac'))$.
o
$a_2(p(ac'b') + p(ac') + p(ca')) \leq a_2 p(bac')$.

Por ser $p(bac') \leq p(ac') \leq p(ac'b') + p(ac') + p(ca')$, y $a_2 < 0$, la última desigualdad, y por lo tanto todas las anteriores, se verificará siempre.□

TEOREMA 4.1.12. En las condiciones del Teorema anterior, R no es Min-monótona restringida.

Demostración.- Si fuese Min-monótona restringida, para todo a, b, c de E, se verificaría $Min(R(b/a), R(c/a)) \leq R(b/ac)$.

Tomando a, b, c tales que $p(a) = 0.4$, $p(b) = p(c) = 0.5$, $p(bc) = 0$, $p(ab) = p(ac) = 0.2$:

$Min(R(b/a), R(c/a)) = Min(1 + a_1p(ab') + a_2p(ba'), 1 + a_1p(ac') + a_2p(ca')) = Min(1 + a_10.2 + a_20.3,\ 1 + a_10.2 + a_20.3) = 1 + a_10.2 + a_20.3$.
$R(b/ac) = 1 + a_1p(acb') + a_2(p(b) - p(abc)) = 1 + a_10.2 + a_2(0.5 - 0) = 1 + a_10.2 + a_20.5$.

Al ser $a_2 < 0$, $a_20.3 > a_20.5$, $Min(R(b/a), R(c/a)) > R(b/ac)$, y no es Min-monótona restringida. □

TEOREMA 4.1.13. $R(b/a) = 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)$ es un p-$\mathcal{L}$-condicional si y sólo si $a_1 = -1$

Demostración.- Supongamos primeramente que R es un p-$\mathcal{L}$-condicional; es decir, para todo a y b $\mathcal{L}(p(a), R(b/a)) \leq p(b)$, con lo que:
$Max(0, p(a) + 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab) - 1) \leq p(b)$, y
$p(a) + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab) \leq p(b)$, para todo a y b.
Si tomamos a y b tales que $p(a) = 1$ y $p(b) < 1$
$1 + a_1 + a_2p(b) + a_3p(b) \leq p(b)$.
Operando: $a_1(1 - p(b)) \leq p(b) - 1$; $a_1(1 - p(b)) \leq -(1 - p(b))$; $a_1 \leq -1$, llegando a que $a_1 = -1$.

Por otra parte, si $a_1 = -1$ tendremos que comprobar que:
$p(a) + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab) \leq p(b)$; y sustituyendo a_1 por su valor:
$a_2p(b) + p(ab) - a_2p(ab) \leq p(b)$; $(a_2 - 1)(p(b) - p(ab)) \leq 0$. Como $a_2 - 1 \leq 0$ y $p(b) - p(ab) \geq 0$, se verifica la desigualdad siempre.□

COROLARIO 4.1.14. $I_p(b/a) = 1 - p(a) + p(ab)$ es un p-$\mathcal{L}$-condicional.

NOTA.- La única relación reflexiva de la forma $R(b/a) = 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)$, monótona y que es p-$\mathcal{L}$-condicional es $I_p(b/a) = 1 - p(a) + p(ab)$.

TEOREMA 4.1.15. Si $R(b/a) = 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)$ es una relación reflexiva, entonces no es un p-Π-condicional.

Demostración.- Si lo fuese, para todo a y b, $\Pi(p(a), R(b/a)) \leq p(b)$

Tomando a y b tales que $p(a) \neq 1, 0$ y $p(b) = 0$:
$p(a)(1 + a_1p(a) + a_2p(b) - a_1p(ab) - a_2p(ab)) \leq p(b)$
$p(a)(1 + a_1p(a)) \leq 0$, con lo que $1 + a_1p(a) \leq 0$ y $a_1 \leq \frac{-1}{p(a)} < -1$
Por tanto, $a_1 < -1$, lo que es imposible por ser $-1 \leq a_1 \leq 0$. □

COROLARIO 4.1.16. Si $R(b/a) = 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)$ es una relación inexacta reflexiva, no es un p-Min-condicional.

NOTA.- Ya sabemos que si $R(b/a) = 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)$, con $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ y $-1 \leq a_1, a_2 \leq 0$, entonces R es un $\mathcal{L}$-preorden.
Vamos a obtener, según el Teorema de Representación ([84]), los generadores de dicho preorden.

$$R(b/a) = \inf_z \mathcal{L}(h_z(b) \mid h_z(a))$$

donde $h_z(x) = R(z/x)$ y $\mathcal{L}(x \mid y) = \sup\{\alpha \in [0,1]\ ;\ \mathcal{L}(\alpha, x) \leq y\}$.

Comprobemos que, en efecto, $R(b/a) = \inf_z \mathcal{L}(h_z(b) \mid h_z(a))$.

$inf_z\mathcal{L}(h_z(b) \mid h_z(a)) = \inf_z \mathcal{L}(R(z/b) \mid R(z/a)) =$
$= \inf_z \mathcal{L}(1 + a_1p(b) + a_2p(z) + a_3p(bz) \mid 1 + a_1p(a) + a_2p(z) + a_3p(az)) =$
$= \inf_z(\sup\{\alpha \in [0,1]\ ;\ Max(0, \alpha + 1 + a_1p(b) + a_2p(z) + a_3p(bz) - 1) \leq$
$\leq 1 + a_1p(a) + a_2p(z) + a_3p(az)\}) =$
$= \inf_z(Min(1, 1 + a_1p(a) + a_2p(z) + a_3p(az) - a_1p(b) - a_2p(z) - a_3p(bz)) =$
$= \inf_z(Min(1, 1 + a_1p(a) + a_3p(az) - a_1p(b) - a_3p(bz))$

Comprobemos primeramente que $R(b/a) \leq Min(1, 1 + a_1p(a) + a_3p(az) - a_1p(b) - a_3p(bz))$, para todo z.

Para ello, basta ver que
$1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab) \leq 1 + a_1p(a) + a_3p(az) - a_1p(b) - a_3p(bz)$;
$a_2p(b) + a_3p(ab) \leq a_3p(az) - a_1p(b) - a_3p(bz)$;
$a_2p(b) - a_2p(ab) - a_1p(ab) + a_1p(az) + a_2p(az) + a_1p(b) - a_1p(bz) - a_2p(bz) \leq 0$;
$a_1(p(az) + p(b) - p(bz) - p(ab)) + a_2(p(b) - p(ab) + p(az) - p(bz)) \leq 0$.

Al ser $p(az)+p(b)-p(bz)-p(ab)=p(azb)+p(azb')+p(bz)+p(bz')-p(bz)-p(abz)-p(abz')=p(azb')+p(bz')-p(abz')\geq 0$,
la última desigualdad es siempre cierta.

Por otra parte, $\mathcal{L}(h_b(b)\mid h_b(a))=\mathcal{L}(R(b/b)\mid R(b/a))=\mathcal{L}(1\mid R(b/a))=\sup\{\alpha\in[0,1]\ ;\ \mathcal{L}(\alpha,1)\leq R(b/a)\}=\sup\{\alpha\in[0,1]\ ;\ Max(0,\alpha+1-1)\leq R(b/a)\}=R(b/a)$

Por tanto, hemos obtenido que:
- $R(b/a)\leq\mathcal{L}(h_z(b)\mid h_z(a)),\ \forall z$
- $R(b/a)=\mathcal{L}(h_b(b)\mid h_b(a))$,

llegando a $R(b/a)=\inf_z\mathcal{L}(h_z(b)\mid h_z(a))$. $\square$

4.2. ALGUNAS LOGICAS PROBABILISTICAS TIPO "LUKASIEWICZ"

Sea una relación $R(b/a) = 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)$, donde
- $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, y por tanto es reflexiva,
- $a_1, a_2 \geq -1$, con lo que $R \geq 0$

pero no imponemos que sea $a_1, a_2 \leq 0$, luego no tiene que estar acotada por 1.

Para que realmente sea una relación inexacta, podemos acotarla de la forma:

$$R(b/a) = Min(1, 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab))$$

Vamos a estudiar las relaciones de este tipo.

Observemos primeramente, que si a_1 y a_2 son simultáneamente mayores o iguales que 0 ,
$1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab) = 1 + a_1(p(a) - p(ab)) + a_2(p(b) - p(ab)) \geq 1$, lo que nos lleva a $R(b/a) \equiv 1$.
Por tanto, prescindimos de este caso.
También prescindimos del caso en que $a_1, a_2 \leq 0$, y $R(b/a) = Min(1, 1 + a_1(p(a) - p(ab)) + a_2(p(b) - p(ab)) = 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)$, estudiado anteriormente.

TEOREMA 4.2.1. Si $R(b/a) = Min(1, 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab))$, entonces

$$R \text{ es monotona } \Leftrightarrow a_1 < 0 \; y \; a_2 > 0$$

Demostración.- Supongamos que R es monótona y que $a_1 > 0$ (por tanto, $a_2 < 0$).
Por ser monótona, para todo a, b y c $R(b/a) \leq R(b/ac)$.
$Min(1, 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)) \leq Min(1, 1 + a_1p(ac) + a_2p(b) + a_3p(abc))$.

Tomemos a, b y c, tales que $p(a), p(b) \neq 0, p(ab) = 0, p(c) = 0$;
Ha de verificarse: $Min(1, 1 + a_1p(a) + a_2p(b)) \leq Min(1, 1 + a_2p(b))$

Como $a_2 < 0$ y $p(b) > 0$, $Min(1, 1 + a_1p(a) + a_2p(b)) \leq 1 + a_2p(b) < 1$.
Deberá ser $1 + a_1p(a) + a_2p(b) \leq 1 + a_2p(b)$ y por tanto, $a_1p(a) \leq 0$.
Pero como $a_1 > 0$ y $p(a) > 0$, llegamos a contradicción. Por tanto, ha de ser $a_2 > 0$ y $a_1 < 0$.

Supongamos ahora que $a_2 > 0$ y $a_1 < 0$. Veamos que
$Min(1, 1+a_1p(a)+a_2p(b)+a_3p(ab)) \leq Min(1, 1+a_1p(ac)+a_2p(b)+a_3p(abc))$, para todo a, b y c.

Si el segundo miembro es igual a 1, ya está demostrado.
Supongamos que el segundo miembro es $1 + a_1p(ac) + a_2p(b) + a_3p(abc) < 1$, tendremos que comprobar que:
$1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab) \leq 1 + a_1p(ac) + a_2p(b) + a_3p(abc)$;
es decir, $a_1p(ac) + a_1p(ac') + a_3p(abc) + a_3p(abc') \leq a_1p(ac) + a_3p(abc)$;
$a_1(p(ac') - p(abc')) - a_2p(abc') \leq 0$.
Pero esto siempre es cierto, por ser $p(ac') - p(abc') \geq 0$.□

Por tanto, en toda relación $R(b/a) = Min(1, 1+a_1p(a)+a_2p(b)+a_3p(ab))$ con $a_1 > 0$ *y* $a_2 < 0$, se rompe la monotonía.

TEOREMA 4.2.2. Sea $R(b/a) = Min(1, 1+a_1p(a)+a_2p(b)+a_3p(ab))$ en las mismas condiciones que el Teorema anterior. Si R no es monótona, es decir, si $a_1 > 0$ y $a_2 < 0$, entonces tampoco es $\mathcal{L}$-monótona restringida.

Demostración.- Si fuese $\mathcal{L}$-monótona restringida, obtendríamos para todo a, b, c de E, $\mathcal{L}(R(b/a), R(c/a)) \leq R(b/ac)$.

Sean a, b, c tales que $p(a) = p(b) = 1$ y $p(c) = 0$. En este caso:
$\mathcal{L}(R(b/a), R(c/a)) = Max(0, Min(1, 1 + a_1p(ab') + a_2p(ba')) + Min(1, 1 + a_1p(ac') + a_2p(ca')) - 1) = Max(0, Min(1, 1) + Min(1, 1+a_1) - 1) = Max(0, 1) = 1$.
$R(b/ac) = Min(1, 1+a_1p(acb')+a_2(p(b)-p(abc)) = Min(1, 1+a_2) = 1+a_2 < 1$.
Por tanto, $\mathcal{L}(R(b/a), R(c/a)) > R(b/ac)$, rompiendo la monotonía restringida.
□

COROLARIO 4.2.3. La relación R con las condiciones de los Teoremas anteriores, no es Π-monótona restringida, ni Min-monótona restringida.

TEOREMA 4.2.4. Sea $R(b/a) = Min(1, 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab))$, con $-1 \leq a_1 < 0$ y $a_2 > 0$.
R es un p-$\mathcal{L}$-condicional $\Leftrightarrow$ $a_1 = -1$ y $0 < a_2 \leq 1$

Demostración.- Si R es un p-$\mathcal{L}$-condicional, $\mathcal{L}(p(a), R(b/a)) \leq p(b)$, para todo a y b.
$Max(0, p(a) + Min(1, 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)) - 1) \leq p(b)$.

Tomamos a y b tales que $p(a) = 1, p(b) = 0$;
$Max(0, 1 + Min(1, 1 + a_1) - 1) \leq p(b) = 0$, con lo que $1 + a_1 \leq 0$, $a_1 \leq -1$ y por tanto, $a_1 = -1$.

Si fuese $a_2 > 1$, podríamos tomar a y b tales que $p(ab) \neq p(b)$, $p(b) < p(a)$ y $a_2 > \frac{p(a)-p(ab)}{p(b)-p(ab)}$.
En este caso:
$a_2(p(b) - p(ab)) > p(a) - p(ab)$ y $p(ab) - p(a) + a_2(p(b) - p(ab)) > 0$.

Así, $\mathcal{L}(p(a), Min(1, 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)) =$
$= Max(0, p(a) + Min(1, 1 - p(a) + a_2p(b) + p(ab) - a_2p(ab)) - 1) =$
$= Max(0, p(a) + Min(0, p(ab) - p(a) + a_2(p(b) - p(ab)))) = Max(0, p(a) + 0) =$
$p(a) > p(b)$.

Por tanto, $\mathcal{L}(p(a), Min(1, 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab))) > p(b)$, que es una contradicción.
Luego, $a_2 \leq 1$.

Por otra parte, supongamos que $a_1 = -1$ y $0 < a_2 \leq 1$.
Veamos que $\mathcal{L}(p(a), R(b/a)) \leq p(b)$ para todo a y b.
Es decir, $Max(0, p(a) + Min(1, 1 - p(a) + a_2p(b) + p(ab) - a_2p(ab)) - 1) \leq p(b)$.
Basta comprobar que $p(a) + Min(0, -p(a) + a_2p(b) + p(ab) - a_2p(ab)) \leq p(b)$.

a) Si $p(a) \leq p(b)$, $p(a) + Min(0, -p(a) + a_2p(b) + p(ab) - a_2p(ab)) \leq p(a) + 0 \leq p(b)$.

b) Si $p(a) > p(b)$, al ser $-p(a) + a_2p(b) + p(ab) - a_2p(ab) < -p(a) + a_2p(a) + p(ab) - a_2p(ab) = (a_2 - 1)(p(a) - p(ab)) \leq 0$ necesitamos que $p(a) - p(a) + a_2p(b) + p(ab) - a_2p(ab) \leq p(b)$
es decir, $a_2(p(b) - p(ab)) \leq p(b) - p(ab)$, lo que es cierto, por ser $a_2 \leq 1$. □

TEOREMA 4.2.5. Toda relación inexacta de la forma: $R(b/a) = Min(1, 1 -$

$p(a)+mp(b)+(1-m)p(ab))$, con $0 \le m \le 1$, es un $\mathcal{L}$-preorden.

Demostración.- Tendremos que ver que para todo a, b y c $\mathcal{L}(R(b/a), R(c/b)) \le R(c/a)$. Es decir,
$Max(0, Min(1, 1-p(a)+mp(b)+(1-m)p(ab)) + Min(1, 1-p(b)+mp(c)+(1-m)p(bc)) - 1) \le Min(1, 1-p(a)+mp(c)+(1-m)p(ac))$.

Como el segundo miembro siempre es positivo, será equivalente a:
$Min(1, 1-p(a)+mp(b)+(1-m)p(ab)) + Min(1, 1-p(b)+mp(c)+(1-m)p(bc)) - 1 \le Min(1, 1-p(a)+mp(c)+(1-m)p(ac))$,

y restando 1 a los dos miembros y simplificando,
$Min(0, -p(a)+mp(b)+(1-m)p(ab)) + Min(0, -p(b)+mp(c)+(1-m)p(bc)) \le Min(0, -p(a)+mp(c)+(1-m)p(ac))$,
que también podemos escribir como:

$Min(0, mp(a'b)-p(ab')) + Min(0, mp(b'c)-p(bc')) \le Min(0, mp(a'c)-p(ac'))$
Si el segundo miembro es 0 , está demostrado; por ello, nos limitaremos al caso en que $mp(a'c)-p(ac') < 0$.
Dentro de esta posibilidad, tenemos otras cuatro que iremos examinando.

Caso 1.
$mp(a'b)-p(ab') \ge 0$
$mp(b'c)-p(bc') \ge 0$
$mp(a'c)-p(ac') < 0$

Desarrollando estas tres desigualdades, obtenemos:
i) $mp(a'bc)+mp(a'bc') \ge p(ab'c)+p(ab'c')$
ii) $mp(b'ca)+mp(b'ca') \ge p(bc'a)+p(bc'a')$
iii) $mp(a'cb)+mp(a'cb') < p(ac'b)+p(ac'b')$

Así, tenemos:
$p(bc'a)+p(bc'a') \le_{ii)} mp(b'ca)+mp(b'ca') <_{iii)} mp(b'ca)+p(ac'b)+p(ac'b') - mp(a'cb) \le_{i)} mp(b'ca)+p(ac'b)-p(ab'c)+mp(a'bc)+mp(a'bc')-mp(a'cb)$

Comparando el primer y el último término, y simplificando:
$p(bc'a')+p(ab'c) < m[p(a'bc')+p(b'ca)]$, con lo que $1 < m$. Contradicción.
Luego, este primer caso, nunca puede darse.

Caso 2.
$mp(a'b)-p(ab') < 0$

$mp(b'c) - p(bc') < 0$
$mp(a'c) - p(ac') < 0$

Tenemos que comprobar:
$mp(a'b) - p(ab') + mp(b'c) - p(bc') \leq mp(a'c) - p(ac')$.

Como $m \leq 1$
$mp(a'bc)+mp(a'bc')-p(ab'c)-p(ab'c')+mp(b'ca)+mp(b'ca')-p(bc'a)-p(bc'a') \leq$
$\leq mp(a'bc)+p(a'bc')-p(ab'c)-p(ab'c')+p(b'ca)+mp(b'ca')-p(bc'a)-p(bc'a') =$
$= mp(a'bc) - p(ab'c') + mp(b'ca') - p(bc'a) = mp(a'c) - p(ac')$, como queríamos demostrar.

Caso 3.
$mp(a'b) - p(ab') \geq 0$
$mp(b'c) - p(bc') < 0$
$mp(a'c) - p(ac') < 0$

Tenemos que comprobar que $mp(b'c) - p(bc') \leq mp(a'c) - p(ac')$, o lo que es lo mismo,
$mp(b'ca)+mp(b'ca')-p(bc'a)-p(bc'a') \leq mp(a'cb)+mp(a'cb')-p(ac'b)-p(ac'b')$;
$mp(b'ca) + p(ac'b') \leq mp(a'cb) + p(bc'a')$

Por la primera desigualdad sabemos que $mp(a'bc) + mp(a'bc') \geq p(ab'c) + p(ab'c')$.

Entonces, $mp(b'ca) + p(ac'b') \leq mp(b'ca) + mp(a'bc) + mp(a'bc') - p(ab'c) \leq p(b'ca) + mp(a'bc) + p(a'bc') - p(ab'c) = mp(a'bc) + p(a'bc')$, obteniendo el resultado deseado.

Caso 4.
$mp(a'b) - p(ab') < 0$
$mp(b'c) - p(bc') \geq 0$
$mp(a'c) - p(ac') < 0$

Tenemos que demostrar que : $mp(a'b) - p(ab') \leq mp(a'c) - p(ac')$; es decir,
$mp(a'bc)+mp(a'bc')-p(ab'c)-p(ab'c') \leq mp(a'cb)+mp(a'cb')-p(ac'b)-p(ac'b')$
$mp(a'bc') + p(ac'b) \leq mp(a'cb') + p(ab'c)$

Por la segunda desigualdad, sabemos que $mp(b'ca) + mp(b'ca') \geq p(bc'a) + p(bc'a')$

Entonces, $mp(a'bc') + p(ac'b) \leq mp(a'bc') + mp(b'ca) + mp(b'ca') - p(bc'a') \leq p(a'bc') + p(b'ca) + mp(b'ca') - p(bc'a') = mp(b'ca') + p(b'ca)$ □

COROLARIO 4.2.6. La implicación de Lukasiewicz

$$I_p^{\mathcal{L}} = Min(1, 1 - p(a) + p(b)),$$

es monótona, es un $\mathcal{L}$-preorden y un p-$\mathcal{L}$-condicional.

Demostración.- Se trata de una relación de la forma

$$R(b/a) = Min(1, 1 + a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab)),$$

con $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ y $a_3 = 0$. □

En esta sección, vamos a trabajar con relaciones en las que $a_0 = b_0 = b_2 = b_3 = 0$, $b_1 \neq 0$; es decir,

$$R(b/a) = \frac{a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab)}{p(a)}$$

ya que, dividiendo adecuadamente, siempre se puede conseguir que $b_1 = 1$.

Como el valor de R no está definido cuando $p(a) = 0$, esta relación sólo tendrá sentido en el conjunto $E^+ = \{a \in E \; ; \; p(a) > 0\}$, en el que trabajaremos .

Al ser $b_1 + b_2 + b_3 = 1$, sabemos por el Teorema 4.1.1. de este capítulo, que R es reflexiva si y sólo si $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, y en este caso, la relación queda de la forma:

$$R(b/a) = \frac{a_1(p(a) - p(ab)) + a_2(p(b) - p(ab)) + p(ab)}{p(a)}$$

TEOREMA 4.3.1. Si R es reflexiva, $R(b/a) \geq 0$ si y sólo si $a_1, a_2 \geq 0$

Demostración.- Supongamos primeramente que $R(b/a) \geq 0$ para todo a,b.

$R(b/a) = \frac{a_1(p(a)-p(ab))+a_2(p(b)-p(ab))+p(ab)}{p(a)} \geq 0$
Si tomamos a y b tales que $p(b) = 0$, $p(a) \neq 0$, obtenemos $a_1 \geq 0$.

Si elegimos a y b tales que $p(ab) = 0$, $R(b/a) = \frac{a_1 p(a) + a_2 p(b)}{p(a)} \geq 0$, obteniendo $a_1 p(a) + a_2 p(b) \geq 0$, $a_2 \geq -\frac{a_1 p(a)}{p(b)}$ para todo a y b, luego $a_2 \geq 0$.

Por otra parte, si $a_1, a_2 \geq 0$, como $a_1(p(a)-p(ab)) \geq 0$, $a_2(p(b)-p(ab)) \geq 0$, obtenemos que para todo a y b, $R(b/a) = \frac{a_1(p(a)-p(ab))+a_2(p(b)-p(ab))+p(ab)}{p(a)} \geq 0$ □

TEOREMA 4.3.2. Si R es reflexiva y ≥ 0, se verifica que:

$$R \leq 1 \;\Leftrightarrow\; a_2 = 0 \; y \; a_1 \leq 1$$

Demostración.- Si $R \leq 1$, para todo a, b

$R(b/a) = \frac{a_1(p(a)-p(ab))+a_2(p(b)-p(ab))+p(ab)}{p(a)} \leq 1$

$a_1(p(a) - p(ab)) + a_2(p(b) - p(ab)) + p(ab) \leq p(a)$
Para $p(b) = 0$, $a_1 p(a) \leq p(a)$, con lo que $a_1 \leq 1$
Para $p(b) \neq 0$ y $p(ab) = 0$, $a_1 p(a) + a_2 p(b) \leq p(a)$, $a_2 \leq \frac{(1-a_1)p(a)}{p(b)}$ para todo a. Tomando valores de $p(a)$ tendiendo a 0, llegamos a $a_2 = 0$

Por otra parte, si tenemos $a_2 = 0$ y $a_1 \leq 1$,
$R(b/a) = \frac{a_1(p(a)-p(ab))+p(ab)}{p(a)} \leq \frac{p(a)-p(ab)+p(ab)}{p(a)} = \frac{p(a)}{p(a)} = 1$. □

A partir de ahora, sólo trabajaremos con relaciones R que estén bien definidas y que sean reflexivas. Es decir, $0 \leq a_1 \leq 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1 - a_1$ y, por tanto,

$$R(b/a) = \frac{a_1(p(a) - p(ab)) + p(ab)}{p(a)} \quad \text{con } 0 \leq a_1 \leq 1$$

TEOREMA 4.3.3. Sea $R(b/a) = \frac{a_1 p(a)+a_2 p(b)+a_3 p(ab)}{p(a)}$; R es monótona, si y sólo si $R(b/a) \equiv 1$.

Demostración.- Si R es monótona, para todo a,b y c $R(b/a) \leq R(b/ac)$

$\frac{a_1(p(a)-p(ab))+p(ab)}{p(a)} \leq \frac{a_1(p(ac)-p(abc))+p(abc)}{p(ac)}$

Tomamos a, b y c, tales que $p(a) = 1$, $p(ab) = 0.5$, $p(ac) = 0.5$, $p(abc) = 0.1$.
En este caso,
$\frac{a_1 0.5+0.5}{1} \leq \frac{a_1(0.5-0.1)+0.1}{0.5}$
$0.5a_1 + 0.5 \leq \frac{0.4a_1+0.1}{0.5} = 0.8a_1 + 0.2$. Así, $0.3 \leq 0.3a_1$, $a_1 \geq 1$, y como $a_1 \leq 1$, obtenemos $a_1 = 1$. Por tanto,

$$R(b/a) = \frac{p(a) - p(ab) + p(ab)}{p(a)} = 1$$

Por otra parte, es claro que la relación $R(a/b) \equiv 1$ es mononota. □

Por tanto, en cualquier relación $R(b/a) = \frac{a_1(p(a)-p(ab))+p(ab)}{p(a)}$, con $0 \leq a_1 < 1$, se rompe la monotonía.

TEOREMA 4.3.4. Sea $R(b/a) = \frac{a_1(p(a)-p(ab))+p(ab)}{p(a)}$, con $0 \leq a_1 \leq 1$. Entonces, R es $\mathcal{L}$-monótona restringida.

Demostración.- Comprobemos que para cualesquiera a, b, c se verifica $\mathcal{L}(R(b/a), R(c/a)) \leq R(b/ac)$, lo que es equivalente a las siguientes desigualdades.

$Max(0, \frac{a_1 p(ab') + p(ab)}{p(a)} + \frac{a_1 p(ac') + p(ac)}{p(a)} - 1) \leq \frac{a_1 p(acb') + p(acb)}{p(ac)}$;

$[a_1 p(ab') + p(ab) + a_1 p(ac') + p(ac) - p(a)]p(ac) \leq p(a)[a_1 p(acb') + p(acb)]$;

$[a_1 p(ab') + p(ab) + a_1 p(ac') - p(ac')]p(acb) + [a_1 p(ab') + p(ab) + a_1 p(ac') - p(ac')]p(acb') \leq p(ab)[a_1 p(acb') + p(acb)] + p(ab')[a_1 p(acb') + p(acb)]$;

$[a_1 p(ab') + a_1 p(ac') - p(ac')]p(acb) + [p(ab) + a_1 p(ac') - p(ac')]p(acb') \leq p(ab) a_1 p(acb') + p(ab')p(acb)$;

$[a_1 p(ab'c) + a_1 p(ab'c') + a_1 p(ac') - p(ac')]p(acb) + [p(abc) + p(abc') + a_1 p(ac') - p(ac')]p(acb') \leq a_1 p(acb')p(acb) + a_1 p(acb')p(abc') + p(acb)p(ab'c) + p(acb)p(ab'c')$;

$[a_1 p(ab'c') + a_1 p(ac') - p(ac')]p(acb) + [p(abc') + a_1 p(ac') - p(ac')]p(acb') \leq a_1 p(acb')p(abc') + p(acb)p(ab'c')$;

$p(acb) a_1 [p(ab'c') + p(ac')] + p(acb')[p(abc') + a_1 p(ac')] \leq p(acb)p(ac') + p(acb')p(ac') + a_1 p(acb')p(abc') + p(acb)p(ab'c')$;

$p(acb) a_1 [p(ab'c') + p(ac')] + p(acb')[p(abc') + a_1 p(ac'b) + a_1 p(ac'b')] \leq p(acb)p(ac') + p(acb')p(ac') + a_1 p(acb')p(abc') + p(acb)p(ab'c')$;

$p(acb) a_1 [p(ab'c') + p(ac')] + p(acb')[p(abc') + a_1 p(ac'b')] \leq p(acb)p(ac') + p(acb')p(ac') + p(acb)p(ab'c')$;

$a_1 [p(acb)p(ab'c') + p(acb)p(ac') + p(acb')p(ac'b')] + p(acb')p(abc') \leq [p(acb)p(ac') + p(acb')p(ac'b') + p(acb)p(ab'c')] + p(acb')p(ac'b)$;

y esta desigualdad es siempre cierta, por ser $a_1 \leq 1$. □

TEOREMA 4.3.5. En las condiciones del Teorema anterior, si $a_1 \neq 1$, entonces R no es Min-monótona restringida.

Demostración.- Si lo fuese, para todo a, b, c, debería de verificarse:

$Min(R(b/a), R(c/a)) \leq R(b/ac)$, o equivalentemente,

$Min(\frac{a_1 p(ab')+p(ab)}{p(a)}, \frac{a_1 p(ac')+p(ac)}{p(a)}) \leq \frac{a_1 p(acb')+p(acb)}{p(ac)}$.

Tomemos a, b, c tales que $p(a) = p(b) = p(c) = 0.3$, $p(ab) = p(ac) = p(bc) = 0.1$, $p(abc) = 0$; en este caso,

$\frac{a_1 p(ab')+p(ab)}{p(a)} = \frac{a_1 0.2+0.1}{0.3}$
$\frac{a_1 p(ac')+p(ac)}{p(a)} = \frac{a_1 0.2+0.1}{0.3}$
$\frac{a_1 p(acb')+p(acb)}{p(ac)} = \frac{a_1 0.1}{0.1} = a_1$

Pero por ser $a_1 < 1$, $0.1a_1 < 0.1$, $0.3a_1 < 0.2a_1 + 0.1$ y $a_1 < \frac{a_1 0.2+0.1}{0.3}$. Por tanto, en este caso
$R(b/ac) < Min(R(b/a), R(c/a))$, y se rompe la monotonía restringida. □

TEOREMA 4.3.6. Sea $R(b/a) = \frac{a_1(p(a)-p(ab))+p(ab)}{p(a)}$; R es un $\mathcal{L}$-preorden si y sólo si $R(b/a) \equiv 1$

Demostración.- Si R es un $\mathcal{L}$-preorden, para todo a, b y c $\mathcal{L}(R(b/a), R(c/b)) \leq R(c/a)$, y
$Max(0, \frac{a_1(p(a)-p(ab))+p(ab)}{p(a)} + \frac{a_1(p(b)-p(bc))+p(bc)}{p(b)} - 1) \leq \frac{a_1(p(a)-p(ac))+p(ac)}{p(a)}$
Tomando a, b y c tales que: $p(a) = p(c) = 0.5$, $p(ac) = 0$, $p(b) = 1$:
$\frac{a_1 0+0.5}{0.5} + \frac{a_1 0.5+0.5}{1} - 1 \leq \frac{a_1 0.5}{0.5}$
$1 + 0.5a_1 + 0.5 - 1 \leq a_1$; $0.5 \leq 0.5a_1$; $1 \leq a_1$ y, por lo tanto, $a_1 = 1$

Por otra parte, es claro que si $R(b/a) \equiv 1$, R es un $\mathcal{L}$ -preorden. □

COROLARIO 4.3.7. Sea $R(b/a) = \frac{a_1(p(a)-p(ab))+p(ab)}{p(a)}$. Si R es un Π-preorden o un Min-preorden, entonces $R(b/a) \equiv 1$.

TEOREMA 4.3.8. Sea $R(b/a) = \frac{a_1(p(a)-p(ab))+p(ab)}{p(a)}$.
R es un p-$\mathcal{L}$-condicional si y sólo si $a_1 = 0$; es decir, si $R(b/a) = \frac{p(ab)}{p(a)}$.

Demostración.- Si R es un p-$\mathcal{L}$-condicional, para todo a y b, $\mathcal{L}(p(a), R(b/a)) \leq p(b)$, y por tanto,

$Max(0, p(a) + \frac{a_1(p(a)-p(ab))+p(ab)}{p(a)} - 1) \leq p(b)$

Tomando a,b de forma que $p(a) = 1$, $p(b) = 0$:
$p(a) + \frac{a_1 p(a)}{p(a)} - 1 \leq 0$; $1 + a_1 - 1 \leq 0$; con lo que $a_1 \leq 0$ y por tanto, $a_1 = 0$.

Por otra parte, si $R(b/a) = \frac{p(ab)}{p(a)}$, R es p-Π-condicional:
$\Pi(p(a), \frac{p(ab)}{p(a)}) = p(a)\frac{p(ab)}{p(a)} = p(ab) \leq p(b)$, para todo a, b, con $p(a) \neq 0$.
Y, por tanto, también es p-$\mathcal{L}$-condicional. □

NOTA.- La Probabilidad condicionada $P(b/a) = \frac{p(ab)}{p(a)}$ no es p-Min-condicional:
Si a y b son tales que $p(ab) = p(b) = 0.5$ y $p(a) = 0.9$, obtenemos:
$Min(p(a), \frac{p(ab)}{p(a)}) = Min(0.9, \frac{0.5}{0.9}) > 0.5 = p(b)$

Además, no es monótona ni es un $\mathcal{L}$-preorden (y, por tanto, tampoco es un Π-preorden ni un Min-preorden), y es la única, entre las que estudiamos en esta sección, que es p-$\mathcal{L}$-condicional.

Sea la relación $R(b/a) = \frac{a_1p(a)+a_2p(b)+a_3p(ab)}{p(a)}$, definida en E^+, y donde imponemos únicamente las condiciones: $a_1+a_2+a_3=1$, a_1, $a_2 \geq 0$. Por tanto, la relación será reflexiva y mayor o igual que 0, pero no tiene por qué ser menor o igual que 1. Para que realmente esté bien definida, podemos acotarla de la forma:

$$R(b/a) = Min(1, \frac{a_1p(a)+a_2p(b)+a_3p(ab)}{p(a)})$$

TEOREMA 4.4.1. Sea $R(b/a) = Min(1, \frac{a_1p(a)+a_2p(b)+a_3p(ab)}{p(a)})$, con $a_1+a_2+a_3=1$, a_1 , $a_2 \geq 0$.
R es un p-Π-condicional si y sólo si $a_1 = 0$ *y* $a_2 \leq 1$

Demostración.-
$R(b/a) = Min(1, \frac{a_1(p(a)-p(ab))+a_2(p(b)-p(ab))+p(ab)}{p(a)}) = Min(1, \frac{a_1p(ab')+a_2p(ba')+p(ab)}{p(a)})$

Recordemos que si R es un Π- condicional para p, entonces $R \leq I_p^\Pi = Min(1, \frac{p(b)}{p(a)})$.
Por tanto, si R es un p-Π-condicional, ha de verificarse para todo a y b $R(b/a) \leq I_p^\Pi(b/a)$;
es decir, $Min(1, \frac{a_1p(ab')+a_2p(ba')+p(ab)}{p(a)}) \leq Min(1, \frac{p(b)}{p(a)})$

Tomando b tal que $p(b) = 0$: $Min(1, \frac{a_1p(a)}{p(a)}) \leq Min(1, 0) = 0$; luego $a_1 = 0$

Eligiendo ahora a y b de forma que $0 < p(b) < p(a)$:
$Min(1, \frac{a_2p(ba')+p(ab)}{p(a)}) \leq Min(1, \frac{p(b)}{p(a)}) = \frac{p(b)}{p(a)} < 1$,
luego, $\frac{a_2p(ba')+p(ab)}{p(a)} \leq \frac{p(b)}{p(a)}$; $a_2p(ba') \leq p(ba')$ y por tanto, $a_2 \leq 1$.

Recíprocamente, si $a_1 = 0$ y $a_2 \leq 1$, comprobemos que para todo a y b se verifica $\Pi(p(a), R(b/a)) \leq p(b)$, es decir,
$p(a)Min(1, \frac{a_2p(ba')+p(ab)}{p(a)}) \leq p(b)$; $Min(p(a), a_2p(ba') + p(ab)) \leq p(b)$.

Pero $Min(p(a), a_2p(ba') + p(ab)) \leq a_2p(ba') + p(ab) \leq p(ba') + p(ab) = p(b)$ □

Resumiendo los resultados obtenidos en este capítulo:

• $R(b/a) = 1 + a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab)$ es una relación inexacta reflexiva si y sólo si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ y $-1 \leq a_1, a_2 \leq 0$

- es un Min-preorden ssi $R \equiv 1$.
- es un Π-preorden ssi $R \equiv 1$.
- es un $\mathcal{L}$-preorden siempre.
- es monótona ssi $a_2 = 0$.
- es Min-monótona restringida ssi $a_2 = 0$.
- es $\mathcal{L}$-monótona restringida ssi $a_2 = 0$ o $a_1 \leq a_2$.
- no es p-Min-condicional.
- no es p-Π-condicional.
- es p-$\mathcal{L}$-condicional ssi $a_1 = -1$.

I_p ES LA UNICA RELACION DE ESTE TIPO QUE ES $\mathcal{L}$-PREORDEN, MONOTONA Y p-$\mathcal{L}$-CONDICIONAL

• $R(b/a) = Min(1, 1 + a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab))$ es relación inexacta reflexiva si y sólo si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, y $a_1, a_2 \geq -1$.
Tomando $a_1, a_2 \neq 0$ y $sig\ a_1 \neq sig\ a_2$:

- es monótona ssi $a_1 < 0$ y $a_2 > 0$.
- si no es monótona, no es T-monótona restringida para $T = Min$, $T = \Pi$, $T = \mathcal{L}$.
- es monótona y p-$\mathcal{L}$-condicional ssi $a_1 = -1$ y $0 < a_2 \leq 1$.
- es monótona, p-$\mathcal{L}$-condicional y $\mathcal{L}$-preorden ssi $a_1 = -1$ y $0 < a_2 \leq 1$.

LA IMPLICACION DE LUKASIEWICZ $I_p^{\mathcal{L}} = Min(1, 1 - p(a) + p(b))$ ES MONOTONA, ES UN $\mathcal{L}$-PREORDEN Y UN p-$\mathcal{L}$-CONDICIONAL.

• $R(b/a) = \frac{a_1 p(a) + a_2 p(b) + a_3 p(ab)}{p(a)}$ definida en (E^+, p) es una relación inexacta reflexiva si y sólo si $a_2 = 0$, $0 \leq a_1 \leq 1$ y $a_1 + a_3 = 1$.

- es monótona ssi $R \equiv 1$.
- es Min-monótona restringida ssi $R \equiv 1$.
- es $\mathcal{L}$-monótona restringida siempre.

- es T-preorden para $T = Min, T = \Pi$, o $T = \mathcal{L}$ ssi $R \equiv 1$.
- es un p-$\mathcal{L}$-condicional ssi $R(b/a) = \frac{p(ab)}{p(a)}$.

LA PROBABILIDAD CONDICIONADA $p^*(b/a) = \frac{p(ab)}{p(a)}$ NO ES MONOTONA, NO ES Min-MONOTONA RESTRINGIDA, ES $\mathcal{L}$- MONOTONA RESTRINGIDA, Y NO ES UN T-PREORDEN PARA $T = Min$, Π, $\mathcal{L}$. ADEMAS, ES LA UNICA RELACION DE ESTE TIPO QUE ES UN p-$\mathcal{L}$-CONDICIONAL.

CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

CAPITULO 1

• Se parte de una nueva definición de conjunción y de conjunción lógica en una estructura relacional cualquiera. Si en una estructura relacional existe una T-conjunción lógica, la relación verificará el Modus Ponens.

• Se propone una definición de conjunción estricta para el intervalo ordenado $([0,1], \leq)$, y se da una caracterización de la misma mediante la imagen de su sección vertical. Dicha caracterización nos permite encontrar condiciones necesarias y condiciones suficientes para que una operación sea una conjunción estricta.

• Las t-normas contínuas son conjunciones estrictas, y no lo son ni las t-conormas, ni la media geométrica, ni las medias ponderadas.

• Se da una caracterización por medio de los resíduos.

• Se extiende el concepto dado al de conjunción en $([0,1], \leq)$. Se obtienen dos caracterizaciones; la primera nos permitirá comprobar que esta definición coincide con la dada para estructuras relacionales, en el caso particular de $([0,1], \leq)$; la segunda, será de nuevo mediante la imagen de la sección vertical.

• Toda conjunción estricta es conjunción, por lo que toda t-norma contínua también lo será. La media geométrica es conjunción; se determinan algunas clases de medias cuasilineales que entran dentro de este tipo de operadores.

• Se presenta una caracterización de conjunción mediante resíduos.

• Se define conjunción en un punto de $[0,1]^2$. Se determina la zona en que algunas medias cuasilineales son conjunciones.

• De forma simétrica, se presentan las disjunciones estrictas, disjunciones, y disjunciones locales, obteniendo resultados paralelos a los obtenidos en las conjunciones.

• Las negaciones fuertes, nos permiten obtener por dualidad, a partir de conjunciones estrictas y conjunciones, disjunciones estrictas y disjunciones, respectivamente.

Problemas abiertos.

• Obtener las propiedades que debe tener una operación $\varphi : [0,1] \rightarrow [0,1]$, para obtener disjunciones a partir de conjunciones.

• Estudio de algunas propiedades, como la asociativa, asociativa aproximada, distributiva, distributiva aproximada,...,de las conjunciones.

CAPITULO 2

• Se estudia la estructura de la familia de T-*estados lógicos respecto a una estructura* relacional (E, R).

• El estudio de los operadores de consecuencias y de las relaciones de consecuencias en el caso fuzzy, permitirá reconocer la llamada Transformada de Zadeh como un operador de consecuencias fuzzy . Para el caso en que se trabaje con predicados vagos sobre dos universos distintos, se propone una definición de Transformada generalizada, obteniendo sus propiedades, similares, aunque no idénticas, a las de inclusión, monotonía e idempotencia.

• Se generaliza el condicional material clásico al caso fuzzy, por una parte mediante los preórdenes I_μ^T, y por otra, mediante las relaciones I_μ^g, I_μ^W, I_μ^{KD}; todas ellas, al particularizar al caso clásico, en efecto, coinciden con el material condicional, sin embargo se demuestra que mientras que en las tres últimas y las relaciones I_μ^T con T t-norma arquimediana no estricta, se verifica el recíproco, no ocurre lo mismo en los restantes casos.

• Se demuestra que tanto R_μ^W como R_μ^{KD} tomando la t-norma $\mathcal{L}$ y su dual $\mathcal{L}^*$, son μ-$\mathcal{L}$-condicionales.

• Con T t-norma y cópula, la relación R_μ^{KD} es $\mathcal{L}$-transitiva.

Problemas abiertos.

- Estudiar en qué condiciones R^g_μ es un μ-T-condicional, o es un T-preorden.

CAPITULO 3

- Dada una operación conmutativa " $\cdot$ " y una relación R en un conjunto E, se define cuándo:

  - R es $\cdot$-monótona.
  - R es débilmente $\cdot$-monótona respecto a una t-norma contínua T.
  - R es n-$\cdot$-monótona respecto a una t-norma contínua T, siendo $n \in \mathbb{N}$.

- Se obtiene que toda relación $\cdot$-monótona es n-$\cdot$-monótona, para todo $n \in \mathbb{N}$, y toda relación n-$\cdot$-monótona para algún $n \in \mathbb{N}$, es débilmente $\cdot$-monótona. Se comprueba la equivalencia de estos tres conceptos en el caso de las relaciones T-transitivas.

- Se define la propiedad (H_T) mediante estados lógicos y se demuestran los siguientes resultados:

  - Si R es reflexiva, y n-$\cdot$-monótona respecto a la t-norma T, entonces R verifica la propiedad (H_T).

  - Si R es reflexiva y verifica la propiedad (H_T), entonces R es débilmente $\cdot$-monótona respecto a T.

  - Existen relaciones que para alguna t-norma T verifican la propiedad (H_T) y no son n-$\cdot$-monótonas para ningún $n \in \mathbb{N}$.

  - Existen relaciones que para alguna t-norma T no son débilmente $\cdot$-monótonas .

• Además, cuando E es finito se tiene:

- Si una relación R reflexiva es débilmente ·-monótona respecto a la t-norma T, entonces verifica (H_T)

• Se particularizan todas estas definiciones y situaciones para el caso clásico.

• Se comprueba la independencia de la propiedad (H_T) anteriormente establecida, con la noción de monotonía restringida, mediante algunos ejemplos.

Problemas abiertos.

• Queda abierto el problema de si existen relaciones en conjuntos infinitos tales que para alguna t-norma T son débilmente ·-monótonas, pero no verifican la propiedad (H_T).

• Encontrar una caracterización mediante estados lógicos de la monotonía restringida.

CAPITULO 4

• Dada un Algebra de Boole probabilizada (E, p), se estudian las propiedades de las relaciones:

1) $R(b/a) = 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab)$, con $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, obteniendo:

• $0 \leq R \leq 1$ si y sólo si $-1 \leq a_1, a_2 \leq 0$.
Por tanto, sólo será realmente una relación fuzzy en este caso.

I_p es la única relación de este tipo que es $\mathcal{L}$-preorden, monótona y p-$\mathcal{L}$-condicional.

2) $R(b/a) = Min(1, 1 + a_1p(a) + a_2p(b) + a_3p(ab))$, con $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, $a_1, a_2 \geq -1$, llegando a:

- R es monótona si y sólo si $a_1 < 0$ y $a_2 > 0$.

- Se obtienen condiciones para que R sea T-monótona restringida, para que sea p-$\mathcal{L}$-condicional, y para $\mathcal{L}$-preorden.

- La Implicación de Lukasiewicz $I_p^{\mathcal{L}}$ es monótona, es $\mathcal{L}$-preorden y p-$\mathcal{L}$-condicional.

3) $R(b/a) = \frac{a_1p(a)+a_2p(b)+a_3p(ab)}{p(a)}$, con $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, obteniendo:

- $0 \leq R \leq 1$ si y sólo si $a_2 = 0$ y $0 \leq a_1 \leq 1$

En estas condiciones,

- Se estudia la monotonía y monotonía restringida respecto a Min y a $\mathcal{L}$.

- Se obtienen condiciones para que sea un T-preorden, y para que sea un p-$\mathcal{L}$-condicional.

- La probabilidad condicionada p^* no es monótona, no es Min-monótona restringida, es $\mathcal{L}$-monótona restringida, y no es un T-preorden para $T = Min, T = \Pi, T = \mathcal{L}$. Además, es la única relación de este tipo que es un p-$\mathcal{L}$-condicional.

4) $R(b/a) = Min(1, \frac{a_1p(a)+a_2p(b)+a_3p(ab)}{p(a)})$, definida en E^+, y con $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ y $a_1, a_2 \geq 0$.

- R es un p-Π-condicional si y sólo si $a_1 = 0$ y $a_2 \leq 1$.

Problemas abiertos.

• En las relaciones de tipo 1), queda estudiar si R es Π-monótona restringida.

• En las de tipo 2), falta el resto de propiedades cuando R no es monótona.

• En 3), obtener condiciones para que R sea Π-monótona restringida, y para que sea p-T-condicional, con $T = Min$ y $T = \Pi$.

• El estudio de las relaciones de tipo 4) queda totalmente abierto.

APENDICE

1. NORMAS Y CONORMAS TRIANGULARES

Aunque en el primer capítulo se propone una generalización del concepto de conjunción fuzzy, no deja de ser una realidad que las funciones que generalmente se han utilizado a lo largo de toda la literatura para formalizar la sintetización de información son normas triangulares o, para abreviar, t-normas; cuando se habla de T-preórdenes, T-condicionales, etc., generalmente se está exigiendo que T sea una t-norma.

Por ello, creemos es necesario hacer una exposición de la definición y propiedades de estas operaciones.

DEFINICION. Una norma triangular T es una operación $T : [0,1]^2 \to [0,1]$, que verifica:

- es asociativa,
- es conmutativa,
- no decreciente en cada variable,
- $T(a,1) = a$ y $T(a,0) = 0$, para todo $a \in [0,1]$.

DEFINICION. Una t-norma T se dice que es arquimediana si para todo $a \in (0,1)$, se verifica que $T(a,a) < a$.

TEOREMA. Una t-norma T es contínua y arquimediana si y sólo si admite una representación de la forma:

$$T(a,b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b)),$$

donde
- $f : [0,1] \to I\!R^+$, es contínua, estrictamente decreciente y tal que $f(1) = 0$.
- $f^{(-1)} : I\!R^+ \to [0,1]$ es la pseudoinversa de f, dada por:

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \geq f(0) \\ f^{-1}(x) & \text{si } x \in [0, f(0)] \end{cases}$$

DEFINICION. Una t-norma T es estricta si es contínua en $[0,1]^2$ y estrictamente creciente en cada variable sobre $(0,1]^2$.

TEOREMA. Una t-norma T es estricta si y sólo si admite una representación de la forma

$$T(a,b) = f^{-1}(f(a) + f(b)),$$

donde $f : [0,1] \rightarrow I\!R^+$ es contínua y estrictamente decreciente, con $f(0) = \infty$ y $f(1) = 0$.

Tanto en este último caso, como en el del Teorema anterior, se dice que f es una generador aditivo de la t-norma.

TEOREMA. Una t-norma T es contínua y arquimediana si y sólo si admite una representación de la forma

$$T(a,b) = k^{(-1)}(k(a) \cdot k(b)),$$

donde
- $k : [0,1] \rightarrow [0,1]$ es una función contínua y estrictamente creciente, tal que $k(1) = 1$.
- $k^{(-1)} : [0,1] \rightarrow [0,1]$, es la pseudoinversa de k.

TEOREMA. Una t-norma T es estricta si y sólo si admite una representación de la forma

$$T(a,b) = k^{-1}(k(a) \cdot k(b)),$$

siendo $k : [0,1] \rightarrow [0,1]$ contínua y estrictamente creciente, verificando $k(0) = 0$ y $k(1) = 1$.

En estos dos últimos casos la función k se dice que es un generador multiplicativo de la t-norma.

DEFINICION. Una t-norma T es positiva si $T(a,b) > 0$ para todo $a,b \in (0,1]$.

PROPOSICION.- Las únicas t-normas positivas son el Mínimo y las estrictas.

Las t-normas más importantes son la Z, el Mínimo (Min), el Producto (Π), y la de Lukasiewicz ($\mathcal{L}$).

LA T-NORMA Z. Viene definida por

$$Z(a,b) = \begin{cases} a, & \text{si } b = 1 \\ b, & \text{si } a = 1 \\ 0, & \text{si } a \neq 1, b \neq 1 \end{cases}$$

Es la t-norma más pequeña y no es contínua, por lo que es la menos utilizada de las cuatro. No es positiva.

LA T-NORMA MINIMO. Es contínua y positiva, pero no es arquimediana, por lo que no admite ninguna representación por medio de generadores aditivos ni multiplicativos.

LA T-NORMA PRODUCTO. Viene dada por $\Pi(a,b) = a \cdot b$. Es contínua y arquimediana; está generada aditivamente por la función $f(x) = -lnx$, y multiplicativamente por $k(x) = x$. Es estricta, y por lo tanto positiva.

LA T-NORMA DE LUKASIEWICZ. Es $\mathcal{L}(a,b) = Max(0, a+b-1)$, y es contínua y arquimediana; su generador aditivo es $f(x) = 1 - x$, y el multiplicativo $k(x) = e^{x-1}$. No es positiva ni estricta.

LEMA.- Para todo $a, b \in [0,1]$, se verifica:

$$Z(a,b) \leq \mathcal{L}(a,b) \leq \Pi(a,b) \leq Min(a,b)$$

R.Yager en [86] proporciona una familia uniparamétrica de t-normas, definida por:

$$T(a,b) = 1 - Min[1, [(1-a)^p + (1-b)^p]^{1/p}],$$

para $p \geq 1$.

DEFINICION. Una t-conorma o conorma triangular T^* es una operación $T^* : [0,1]^2 \to [0,1]$, verificando:

- es conmutativa,
- es asociativa,
- es no decreciente en cada variable,
- $T^*(a,1) = 1$ y $T^*(a,0) = a$, para cada $a \in [0,1]$.

TEOREMA.
i) T es una t-norma si y sólo si T^*, definida por

$$T^*(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$$

es una t-conorma.

ii) T^* es una t-conorma si y sólo si T definida por

$$T(a,b) = 1 - T^*(1-a, 1-b)$$

es una t-norma.

Por tanto, para cada t-norma T tenemos una t-conorma asociada $T^*(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$.

Las respectivas t-conormas asociadas a las cuatro t-normas mencionadas anteriormente son:

$$Z^*(a,b) = \begin{cases} x, & \text{si } y = 0 \\ y, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x, y \in (0,1] \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^*(a,b) = Min(a+b, 1)$$
$$\Pi^*(a,b) = a + b - ab$$
$$Min^*(a,b) = Max(a,b)$$

Ahora tenemos el siguiente orden:

$$Z \leq \mathcal{L} \leq \Pi \leq Min \leq Min^* \leq \Pi^* \leq \mathcal{L}^* \leq Z^*$$

DEFINICION. Una t-conorma T^* es arquimediana, si su t-norma asociada lo es.
Una t-conorma T^* se dice que es estricta, si su t-norma asociada lo es.

TEOREMA. Una t-conorma T^* contínua es arquimediana si y sólo si admite una representación de la forma

$$T^*(a,b) = g^{(-1)}(g(a) + g(b)),$$

donde
- $g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ es un función contínua, estrictamente creciente, con $g(0) = 0$.
- $g^{(-1)}$ es la pseudoinversa de g.

TEOREMA. Una t-conorma T^* es estricta si y sólo si admite una representación de la forma

$$T^*(a,b) = g^{-1}(g(a) + g(b)),$$

siendo $g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ una función contínua, estrictamente creciente, con $g(0) = 0$ y $g(1) = \infty$.

En los dos casos, se dice que g es un generador aditivo de la t-conorma T^*.

LEMA.- Si f es el generador aditivo de una t-norma T, y g el de su t-conorma asociada T^*, entonces

$$g(x) = f(1-x),$$

para todo $x \in [0,1]$.

DEFINICION. Una operación $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una cópula si para todo $a, b, c, d \in [0,1]$ verifica:

i) $C(a,0) = C(0,a) = 0$.

ii) $C(a,1) = C(1,a) = a$.

iii) $C(a,b) + C(c,d) \geq C(a,d) + C(c,b)$ siempre que $a \leq c$ y $b \leq d$.

TEOREMA. Si C es una cópula, entonces, para cualesquiera $a, b, c, d \in [0,1]$, tales que $0 \leq a \leq c \leq 1$ y $0 \leq b \leq d \leq 1$, se verifica:

$$0 \leq C(c,d) - C(a,b) \leq (c-a) + (d-b)$$

TEOREMA. Una cópula es una t-norma si y sólo si es asociativa.

TEOREMA. Una t-norma T es una cópula si y sólo si para cualesquiera $a, b, c \in [0,1]$, tales que $c \leq a$, se verifica la desigualdad:

$$T(a,b) - T(c,b) \leq a - c.$$

TEOREMA. Si T es una t-norma y una cópula, entonces $\mathcal{L} \leq T \leq Min$.

2. FUNCIONES DE AGREGACION

En el año 1984 ([41]), Gaspar Mayor introdujo las funciones de agregación, en un intento de agrupar bajo una misma definición, tanto las t-normas y t-conormas, como otros tipos de conectivos ampliamente utilizados en algunas aplicaciones de la teoría de conjuntos borrosos, como por ejemplo las combinaciones lineales convexas de una t-norma y una t-conorma.

Posteriormente, Joan Torrens ([61]) propone una nueva definición de función de agregación; añadiendo a la misma, por una parte, la asociatividad, obtiene los que denomina T-operadores; por otra, imponiendo algunas condiciones de contorno, llega a las funciones de agregación lineales, que coinciden con el concepto inicial de función de agregación de G. Mayor. Las t-normas y las t-conormas están dentro, tanto de estas últimas, como de los T-operadores.

Daremos la definición y propiedades esenciales de las funciones de agregación, tal y como fueron propuestas inicialmente por G. Mayor.

DEFINICION. Una función $F : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es una función de agregación si para todo $x, y, x', y' \in [0,1]$ se verifica:

1) $F(x,0) = F(1,0) \cdot x$
   $F(x,1) = (1 - F(1,0)) \cdot x + F(1,0)$

2) Si $x \leq x', y \leq y'$, entonces $F(x,y) \leq F(x',y')$

3) F(x,y)=F(y,x)

LEMA.
- Toda t-norma T es una función de agregación.
- Toda t-conorma S es una función de agregación.
- Si T es una t-norma y S es una t-conorma, entonces la combinación lineal convexa $F = \alpha T + (1 - \alpha)S$, con $\alpha \in [0,1]$, es una función de agregación.

PROPOSICION. Las únicas funciones de agregación asociativas son las t-normas y las t-conormas.

PROPOSICION. La única función de agregación que verifica $F(1,0) = 0$ y $F(x,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$ es $F = Min$.

La única función de agregación que verifica $F(1,0) = 1$ y $F(x,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$ es $F = Max$.

PROPOSICION. Si F es una función de agregación, entonces $F(x,x) = x$ para todo x de $[0,1]$ si y sólo si $Min \leq F \leq Max$.

Las tres proposiciones siguientes, nos proporcionan nuevas funciones de agregación.

PROPOSICION. Si F es una función de agregación, también lo es la función F^* definida por $F^*(x,y) = 1 - F(1-x, 1-y)$.

PROPOSICION. Sean T una t-norma, S una t-conorma, y $f : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ verificando:

- f es creciente,
- $f(0,x) = k \cdot x$, y
- $f(x,1) = (1-k) \cdot x + k$

para todo $x \in [0,1]$.
Entonces, la función F definida por $F(x,y) = f(T(x,y), S(x,y))$, para todo x, y de $[0,1]$ es una función de agregación.

PROPOSICION. Si F y G son funciones de agregación, también lo es la función H definida por $H(x,y) = \alpha F(x,y) + (1-\alpha)G(x,y)$, con $\alpha \in [0,1]$.

PROPOSICION. La t-norma Z definida por

$$Z(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } y = 1 \\ y, & \text{si } x = 1 \\ 0, & \text{si } x \neq 1, y \neq 1 \end{cases}$$

es la mínima función de agregación.

De la misma forma, la t-conorma Z^*, dual de Z, es la máxima función de agregación.

3. OPERADORES DE CONSECUENCIA

DEFINICION. Dado un conjunto clásico E, un operador de consecuencias en el sentido de Tarski, es una operación $C : \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E)$, verificando:

C1) Inclusión: $A \subseteq C(A)$,
C2) Monotonía: Si $A \subseteq B$, entonces $C(A) \subseteq C(B)$,
C3) Idempotencia: $C(C(A)) = C(A)$,
para todo $A, B \in \mathbb{P}(E)$.

Si además tenemos que
C4) Compacidad: Si $b \in C(A)$, entonces $b \in C(A')$ para algún subconjunto finito $A' \subseteq A$,
entonces C es un operador de consecuencias compacto.

DEFINICION. Una relación $\vdash \subseteq \mathbb{P}(E) \times E$ se dice que es una relación de consecuencias si se verifican las propiedades:

R1) Reflexiva: Si $b \in A$, entonces $A \vdash b$,
R2) Monótona: Si $A \vdash b$, entonces $A \cup B \vdash b$,
R3) CUT (Cumulative Unit Transitivity): Si $A \vdash b_i$ para todo $i \in I$ y $A \cup \{b_i\}_{i \in I} \vdash b$, entonces $A \vdash b$,
para todo A, B de $\mathbb{P}(E)$ y todo b, b_i en E.

Además, si se tiene:
R4) Compacidad: Si $A \vdash b$, entonces existe una subconjunto finito $A' \subseteq A$ con $A' \vdash b$,
tenemos una relación de consecuencias compacta.

La conexión existente entre las nociones introducidas en estas dos definiciones, nos viene dada por los siguientes teoremas.

TEOREMA. Si C es un operador de consecuencias en E, la relación $\vdash \subseteq \mathbb{P}(E) \times E$, dada por:

$$A \vdash b \text{ si y sólo si } b \in C(A)$$

es una relación de consecuencias.

Si además, el operador C es compacto, la relación también lo es.

TEOREMA. Si $\vdash \subseteq \mathbb{P}(E) \times E$ es una relación de consecuencias, el operador $C : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ dado por

$$C(A) = \{b\ ;\ A \vdash b\}$$

es un operador de consecuencias.

De nuevo, si además $\vdash$ verifica la propiedad de compacidad, también la verifica el operador de consecuencias obtenido.

A veces, se trabaja sólo con condiciones de tipo finito, es decir, en el caso de los operadores de consecuencias:

C1') Inclusión: $A \subseteq C(A)$,
C2') Monotonía: $C(A) \subseteq C(A \cup \{b\})$,
C3') Idempotencia: Si $b \in C(A)$, entonces $C(A) = C(A \cup \{b\})$.

Y en el de relaciones:

R1') Reflexiva: Si $b \in A$, entonces $A \vdash b$,
R2') Monótona: Si $A \vdash b$, $A \cup \{c\} \vdash b$,
R3') CUT: Si $A \vdash c$ y $A \cup \{c\} \vdash b$, entonces $A \vdash b$.

Si un operador C verifica las condiciones C1, C2 y C3, verificará C1', C2' y C3', pero para que sea cierto el recíproco, es necesario que C sea compacto.

De forma similar, si una relación $\vdash$ verifica R1, R2 y R3, cumplirá también R1', R2' y R3', y para el recíproco necesita ser compacta.

REFERENCIAS

[1] ACZEL, J., *A short course on Functional Equations*, D. Reidel Publishing Company, (Holland, 1987).

[2] ACZEL, J., *Lectures on Functional Equations and their Applications* , Academic Press, (New York, 1966).

[3] AGUILAR-MARTIN, J., PIERA, N., SANCHEZ, M., *Mixed connectives between Min and Max* , Proceedings ISMVL-88 (IEEE), 244-247, (1988).

[4] ALSINA, C., GRANE, J., SALES, T., TRILLAS, E., *Algunes consideracions sobre el Modus Ponens*, Actes del III Congrés Català de Lògica Matemàtica, 55-77, (Barcelona, 1984).

[5] ALSINA, C., TRILLAS, E., *Synthesizing Implications* , International Journal of Intelligent Systems, Vol. 7, nº 8, 705-713, (1992).

[6] ALSINA, C., TRILLAS, E., VALVERDE., L., *On some logical connectives for fuzzy sets theory* , Journal Math. Anal. Appl., 93, 15-26, (1983).

[7] BALDWIN, J.F., *A New Approach to Approximate Reasoning using Fuzzy Logic*, Fuzzy Sets and Systems 2, 309-325, (1979).

[8] BALDWIN, J.F., PILSWORTH, B.W., *Axiomatic Approach to Implication for Approximate Reasoning with Fuzzy Logic*, Fuzzy Sets and Systems 3, 193-220, (1980).

[9] BELLMAN, R., GIERTZ, M., *On the analitic Formalism of Fuzzy Sets*, Information Sciencies 5, 149-156, (1973).

[10] BIRKHOFF, G., *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Pub. 25, Third Ed. (1979).

[11] BODIOU, G., *Théorie dialectique des probabilités* , Gauthier-Villars, (París, 1964).

[12] BUDESCU, D.V., ZWICK, R. et alt., *Integration of linguistic probabilities,* Int.J.Man-Machine Studies 33, 657-676 (1990).

[13] CASTRO, J.L., *Contribución al estudio de modelos matemáticos para la Inteligencia Artificial*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, (1991).

[14] CASTRO, J.L., TRILLAS, E., *Logic and Fuzzy Relations* , Approximate Reasoning Tools for Artificial Intelligence, Eds. J.L. Verdegay y M. Delgado, Verlag TUV Rheinland, 3-20, (1990).

[15] CASTRO, J.L., TRILLAS, E., *Sobre Preórdenes y Operadores de Consecuencia de Tarski* , Theoria 11, 419-425, (1989).

[16] CASTRO, J.L., TRILLAS, E., CUBILLO, S., *On Consequence in Approximate Reasoning*, enviado al Journal of Applied Non-Classical Logics, (1992).

[17] CLEAVE, J.P., *A Study of Logics*, Oxford Science Publications, (1991).

[18] CLEAVE, J.P., *The notion of logical Consequence in the logic of inexact predicates*, Zeischr. f. Math. Logick und Grundlagen d. Math, 20, 307-324, (1974).

[19] CHAKRABORTY, M.K., *Use of Fuzzy Set Theory in introducing graded consequence in Multiple Valued Logic* , Fuzzy Logic in Knowledge-Based Systems, Decision and Control, 247-257, North-Holland, (1988).

[20] DEAÑO, A., *El resto no es silencio*, Taurus, (Madrid, 1983).

[21] DEAÑO, A., *Introducción a la lógica formal*, Alianza Editorial, (Madrid, 1974).

[22] DEAÑO, A., *Las concepciones de la lógica* , Taurus, (Madrid 1980).

[23] DUBOIS D., PRADE, H., *An Introduction to Possibilistic and Fuzzy Logics*,Non-standard Logics for Automated Reasoning, 287-326, P. Smets et al. ,eds. Academic Press, (New York, 1988).

[24] DUBOIS D., PRADE, H., *Fuzzy logics and the generalized modus ponens revisited* , Cybernetics and Systems 15, 293-331, (1984).

[25] DUBOIS, D., PRADE, H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press (Nueva York, 1980).

[26] DUBOIS, D., PRADE, H., *Théorie des Possibilités*, Masson (París, 1988).

[27] ENDERTON, H.B., *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic PRESS, (San Diego, 1972).

[28] ESTEVA, F., *Negaciones en la teoría de conjuntos difusos* , Stochastica V, 1, 33-44 (1981).

[29] ESTEVA, F., *Negaciones en retículos completos*, Stochastica I, 49-66, (1975).

[30] ESTEVA, F., DOMINGO, X., *Sobre funciones de negación en [0,1]*, Stochastica, Vol. IV, 2, 141-166 (1980).

[31] GARRIDO, M., *Lógica Simbólica*, Tecnos, (Madrid, 1977).

[32] GENESERETH, M.R., NILSSON, N.J., *Logical Foundations of Artificial Intelligence*, Morgan Kauffmann, Los Altos, (California 1987).

[33] GINSBERG, M.L., *Multi-valued Logics* , Proc. del AAAI-86, 243-247, (Philadelfia, 1986).

[34] GINSBERG, M.L., *Readings in Nonmonotonic Reasoning* , Morgan Kaufmann (Los Altos, 1987).

[35] GODO, L., *Contribució a l'estudi de models d'inferència en els sistemes possibilístics*, Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, (1990).

[36] HARDY, G., LITTLEWOOD, J.E., POLYA, G., *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, (1988).

[37] HILBERT, D., ACKERMANN, W., *Elementos de lógica teórica*, Técnos, (Madrid 1962).

[38] JACAS, J., RECASENS, J., *Fuzzy Numbers and Equality Relations*, Proceedings Second Inter. Conference on Fuzzy Systems, 1298-1301, (S. Francisco, 1993).

[39] KAUFMANN, A., *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Vol.1: Fundamental Theoretical Elements*, Academic Press, (New York, 1975).

[40] LOPEZ DE MANTARAS, R., *Approximate Reasoning Models*, Ellis Horwood (Londres, 1990).

[41] MAYOR, G., *Contribució a l'estudi de models matemàtics per a la lògica*

de la vaguetat, Tesis Doctoral, Universitat de les Illes Balears, (1984).

[42] MAYOR, G., TORRENS, J., *Algebras filtrantes: algunos centros de interés* , Comunicaciones al Primer Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, 41-45 (1991).

[43] MENDELSON, E., *Introduction toMathematical Logic*,Van Nostrand, (New York, 1964).

[44] NILSSON, N.J., *Probabilistic Logic*, Artificial Intelligence 28, 71-88,(1986).

[45] OVCHINNIKOV, S., *Representatios of Transitive Fuzzy Relations*, Aspects of Vagueness 105-118, H.J. Skala, S. Termini, E. Trillas (eds.). Reidel Pubs., (1984).

[46] PAVELKA, J., *On Fuzzy Logic I*, Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd.25, 45-52, (1979).

[47] PAVELKA, J., *On Fuzzy Logic II*, Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd.25, 119-134, (1979).

[48] PAVELKA, J., *On Fuzzy Logic III*, Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd.25, 447-464, (1979).

[49] PEARL, J., *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems*, Morgan Kaufmann (California, 1988).

[50] PLA I CARRERA, J., *Contribució a l'estudi de les estructures algebraiques dels sistemes logics deductius*, Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona, (1976).

[51] PLA I CARRERA, J. *Lliçons de Lògica matemàtica* P.P.U., (Barcelona, 1991).

[52] POLYA, G., *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos (Madrid, 1966).

[53] QUINE, W.V., *Los Mètodos de la Lógica*, Tercera edición; Ariel, (Barcelona, 1981).

[54] RASIOWA, H., *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*, North Holland, (Amsterdamm 1974).

[55] REICHENBACH, H., *La Filosofía Científica*, Fondo de Cultura Económica, (Méjico 1953).

[56] REICHENBACH, H., *Elements of Symbolic Logic*, Dover Pubs. (New York 1947).

[57] SACRISTAN, M., *Introducción a la lógica y al análisis formal*, Ariel, (Barcelona, 1964).

[58] SCHWEIZER, B., SKLAR, A., *Probabilistic Metric Spaces*, Elsevier North-Holland, New York, (1983).

[59] TERRICABRAS J.M., TRILLAS, E., *Some Remarks on Vague Predicates*, Theoria, 10,1-12 (1989).

[60] TOMAS, M.S., *Sobre t-norms racionals i negaciones*, Actes IV Congrés Català de Lògica, 119-121, (1988).

[61] TORRENS, J., *Estudi de models matemàtics de connectius en lògica multivaluada*, Tesis Doctoral, Universidad de las Islas Baleares, (1990).

[62] TRILLAS, E., *Conjuntos borrosos*, Vicens-Vives, (Barcelona, 1980).

[63] TRILLAS, E., *On Exact Conditionals*, Stochastica, Vol. XIII, 1, 137-143, (1992).

[64] TRILLAS, E., *Introducción breve al Razonamiento No-Monótono* , Inteligencia Artificial (Fundamentos Teóricos y aplicaciones), Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 153-169, (1992).

[65] TRILLAS, E., *On exact and Inexact Conditionals*, Proceedings IPMU'92, 649-655, (1992).

[66] TRILLAS, E., *On fuzzy conditionals generalising the Material Conditional*, a publicar en el libro Uncertainty and Information Processing, Ed. B. Bouchon-Meunier, Springer-Verlag, (1993).

[67] TRILLAS, E., *Relational Probabilities on Intuitionistic Lattices*, Stochastica XII, 2-3. 85-102, (1988).

[68] TRILLAS, E., *Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difu-*

sos, Stochastica Vol. III, 1, 47-60 (1979).

[69] TRILLAS, E., *Some reflections on Logic and Fuzzy Logic*, conferencia inaugural del Joint Japanese-European Symposium on Fuzzy Systems. Manuscrito.(Berlín, 1992).

[70] TRILLAS, E. ALSINA, C., *Logic: going farther from Tarski?*, Fuzzy Sets and Systems 53, 1-13, (1993).

[71] TRILLAS, E., ALSINA, C., *Some Remarks on Approximate Entailment*, International Journal of Approximate Reasoning (6), 525-533, (1992).

[72] TRILLAS, E., ALSINA, C., CUBILLO, S., JACAS, J., *On "And" in [0,1]*, Proceedings IPMU'92, 324-332, (1992).

[73] TRILLAS, E., CUBILLO, S., *Condicionales Exactos* , Comunicaciones al Segundo Congreso Español de Tecnologías y Lógica Fuzzy, 1-15, (1992).

[74] TRILLAS, E., CUBILLO, S., *Fuzzy Conditionals on a Product Universe*, Proceedings Second Inter. Conference on Fuzzy Systems, 924-927, (S. Francisco, 1993).

[75] TRILLAS, E., CUBILLO, S., *On Monotonic Fuzzy Conditionals*, enviado al Journal of Applied Non-classical Logics, (1992).

[76] TRILLAS, E., CUBILLO., CASTRO, J.L., *Conjunction and Disjunction in [0,1]* , en curso de publicación en Fuzzy Sets and Systems, (1992).

[77] TRILLAS, E., GUTIERREZ, J., Eds. *Aplicaciones de la Lógica Borrosa*, C.S.I.C. (1992).

[78] TRILLAS, E., SOBRINO, A., *Primeros conceptos lógicos (expresados de una forma bastante general)*, Agora, 9. Universidad de Santiago de Compostela (1990).

[79] TRILLAS, E., VALVERDE, L., *An Inquiry into Indistinguishability Operators*, Aspects of Vagueness, Eds. Skala-Termini-Trillas, Reidel, 231-356, (1984).

[80] TRILLAS, E., VALVERDE, L., *On implication and indistinguishability in the setting of Fuzzy Logic*, Management decision support systems using fuzzy sets and possibility theory, ed. J. Kacprzyk-R.R. Yager, Verkag TUV, 198-212,

(1985).

[81] TRILLAS, E., VALVERDE, L., *On Mode and Implication in Approximate Reasoning*, Approximate Reasoning in Expert Systems 157-166, M.M. Gupta et al. (eds.), North-Holland, (Amsterdam, 1985).

[82] TRILLAS, E., VALVERDE, L., *On Inference in Fuzzy Logic*, Proc. Second IFSA Congress, (Tokyo, 1987).

[83] TRILLAS, E., VALVERDE, L., *On Modus Ponens in Fuzzy Logic*, Proc. XV Inter. Symp. Multiple-valued Logic, IEEE., 294-301, (1985).

[84] VALVERDE, L., *On the structure of F-indistinguishability operators* , Fuzzy Sets and Systems 17, 313-328 (1985).

[85] WEBER, S., *A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms*, Fuzzy Sets and Systems 11, 115-134 (1983).

[86] YAGER, R.R., *On a general class of fuzzy connectives* , Fuzzy Sets and Systems 4,235-242, (1980).

[87] YAGER, R.R., OVCHINNIKOV, S., TONG, R.M., NGUYEN, H.T.(Editores) *Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L.A. Zadeh*, John Wiley & Sons, (New York, 1987).

[88] ZADEH, L.A., *A theory of Approximate Reasoning*, Machine Intelligence 9, 149-194, (1979).

[89] ZADEH, L.A., *Fuzzy Logic and Approximate Reasoning*, Synthese 30, 407-428, (1975).

[90] ZADEH, L.A., *Fuzzy Sets* , Information and Control 8, 338-353 (1965)(también publicado en [87]).

[91] ZADEH, L.A., *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Parts I, II, and III*, Information Sciences 8, 199-249; 8, 301-357; 9, 43-80, (1975).

[92] ZADEH, L.A., *The Role of Fuzzy Logic in the management of uncertainty in Expert Systems*, Fuzzy Sets and Systems 11, 199-228, (1983) (también [87]).

[93] ZIMMERMANN, H.J., ZYSNO, P., *Latent Connectives in Human Decision Making* , Fuzzy Sets and Systems 4, 37-51, (1980).