

RESOLUCIÓN ANALÍTICA DE  
PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE  
CALOR EN PROCESOS INDUSTRIALES

**Directores:** J. L. González-Santander,  
P. Fernández de Córdoba y J. M. Isidro.  
**Alumno:** P. Castañeda.

Memoria para la obtención del grado de Doctor.



# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>VII</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
0.1. El proceso de rectificado . . . . .	XI
0.2. Estructura y contenido . . . . .	XII
<b>1. La ecuación del calor</b>	<b>1</b>
1.1. La energía calorífica . . . . .	1
1.2. El flujo . . . . .	2
1.3. Ecuación del calor con fuente móvil . . . . .	3
1.4. Condiciones de contorno . . . . .	4
1.4.1. Condición inicial . . . . .	4
1.4.2. Condiciones en la frontera . . . . .	4
1.5. Aplicación al rectificado plano . . . . .	5
1.5.1. Ecuación del calor . . . . .	5
1.5.2. Condiciones iniciales y de contorno . . . . .	6
<b>2. El modelo SV</b>	<b>9</b>
2.1. Planteamiento . . . . .	9
2.2. Ecuación integral . . . . .	10
2.2.1. Transformación de la variable $y$ . . . . .	10
2.2.2. Transformación de la variable $t$ . . . . .	11
2.2.3. Transformación de la variable $x$ . . . . .	11
2.2.4. Antitransformación a la variable $x$ . . . . .	12
2.2.5. Antitransformación a la variable $t$ . . . . .	12
2.2.6. Antitransformación a la variable $y$ . . . . .	13
2.2.7. Resolución final . . . . .	16
<b>3. Solución exacta del rectificado seco</b>	<b>17</b>
3.1. Introducción . . . . .	17
3.2. Teorema $T^{(0)}$ para el rectificado seco . . . . .	18
3.2.1. Rectificado seco . . . . .	18
3.2.2. Operador $\aleph_s$ . . . . .	18

3.2.3.	Operador $\square_y$ . . . . .	20
3.2.4.	Resolución por aproximaciones sucesivas . . . . .	21
3.2.5.	Unicidad de la solución . . . . .	23
3.3.	Integrales del teorema $T^{(0)}$ . . . . .	26
3.3.1.	Primera integral . . . . .	27
3.3.2.	Segunda integral . . . . .	29
<b>4.</b>	<b>Rectificado seco intermitente</b> . . . . .	<b>31</b>
4.1.	Introducción . . . . .	31
4.2.	Función de intermitencia . . . . .	31
4.2.1.	Campo de temperaturas . . . . .	35
4.3.	Régimen transitorio en el rectificado continuo . . . . .	36
4.3.1.	El estado cuasi-estacionario . . . . .	36
4.3.2.	Estado estacionario en el rectificado continuo . . . . .	36
4.3.3.	Temperatura máxima . . . . .	37
4.3.4.	Tiempo de relajación . . . . .	40
4.4.	Resultados numéricos . . . . .	41
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>A.</b>	<b>Integrales del rectificado seco</b> . . . . .	<b>51</b>
A.1.	Introducción . . . . .	51
A.2.	Primera integral . . . . .	52
A.2.1.	Primer cálculo . . . . .	52
A.2.2.	Segundo cálculo . . . . .	53
A.2.3.	Comparación . . . . .	54
A.3.	Segunda Integral . . . . .	54
A.4.	La función de $Jg(x)$ . . . . .	57
A.4.1.	$Jg(x)$ para $x > 0$ . . . . .	57
A.4.2.	$Jg(x)$ para $x < 0$ . . . . .	57
A.4.3.	$Jg(x)$ para $x = 0$ . . . . .	58
<b>B.</b>	<b>Integral Auxiliar</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>C.</b>	<b>Programas en MATHEMATICA</b> . . . . .	<b>61</b>
C.1.	Funciones a representar . . . . .	61
C.1.1.	Parámetros . . . . .	61
C.1.2.	Funciones auxiliares . . . . .	62
C.1.3.	Funciones de la temperatura . . . . .	63
C.1.4.	Temperatura máxima y tiempo de relajación . . . . .	64
C.2.	Representaciones gráficas . . . . .	65
C.2.1.	Evolución de la temperatura en superficie del rectificado continuo . . . . .	65
C.2.2.	Evolución de la temperatura en superficie del rectificado intermitente . . . . .	66

C.2.3. Evolución de la temperatura en superficie de estado cuasi-estacionario . . . . .	67
C.2.4. Campo de temperaturas en el rectificado continuo . . . . .	68
C.2.5. Campo de temperaturas en el rectificado intermitente . . . . .	69



# Prefacio

Esta tesis doctoral constituye el primer trabajo de investigación desarrollado por un profesor de la Universidad de Pinar del Río (Cuba) en la Universidad Católica de Valencia, dentro del marco de colaboración que el Grupo de Modelización Interdisciplinar, InterTech ([www.intertech.upv.es](http://www.intertech.upv.es)) mantiene desde hace más de quince años con la institución cubana.

Este trabajo constituye una continuación de la tesis doctoral *Modelización Matemática de la Trasmisión de Calor en el Proceso de Rectificado Industrial Plano* defendida por el Dr. Juan Luis González-Santander Martínez en la Universidad Politécnica de Valencia en mayo de 2009.

Las contribuciones originales del presente trabajo de investigación se recogen en los siguientes trabajos:

- P. Castañeda, J.L.G. Santander, “Cálculo de algunas integrales en el proceso de transferencia de calor en el rectificado de piezas”. *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación* 7 (2009) 51.
- J. L. G. Santander, P. Castañeda, Yu. L. Ratis, J.M. Isidro, P. Fernández de Córdoba, “Calculation of some integrals arising in heat transfer in grinding”, *Math. Problems in Engineering*, doi: 10.1155/2010/535801.
- J. L. G. Santander, P. Castañeda Porras, J. M. Isidro, and P. Fernández de Córdoba, “Calculation of some integrals arising in heat transfer in geothermics”, *Math. Problems in Engineering*, doi: 10.1155/2010/784794.



# Agradecimientos

Quiero agradecer a mis directores de tesis: Pedro Fernández de Córdoba, José María Isidro y Juan Luis González-Santander, que con sus esfuerzos, tesón, dedicación y trabajo han logrado que llegue al final de mi doctorado.

Sin la colaboración desinteresada entre la UPV, UPR y ahora la UCV, hubiera sido imposible la culminación de esta etapa; una relación iniciada por Pedro Fernández de Córdoba en el año 1996 y que no sólo se ha mantenido, sino que en los últimos años se ha venido fortaleciendo. A Juan Luis González-Santander quisiera agradecerle la oportunidad que me ha brindado mostrándome todo un campo de investigación como el que aquí se presenta.

También quiero reconocer los esfuerzos de mis colegas del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Pinar del Río; sin ellos hubiera sido imposible culminar esta investigación. Gracias por el apoyo que me habéis dado cubriendo mi espacio docente y gracias también por el ánimo que me habéis sabido ofrecer.

Quiero agradecer también la ayuda recibida por parte de la Generalitat Valenciana, debido a que esta tesis doctoral ha sido parcialmente financiada por el proyecto “Acciones educativas, deportivas sociales y sanitarias en la Universidad de Pinar del Río, Cuba”, concedido por la Consellería de Inmigración y Ciudadanía. Además, deseo destacar la ayuda de la asociación InterTech Cooperación. Ambas entidades, desde su ámbito de actuación, han contribuido a que esta memoria de tesis sea una realidad.

Por último, quiero dedicar este esfuerzo a mi madre Matilde, a mis hijos Majel, Yinel y Pedro Alejandro, y a mi esposa Arelys, que siempre está atenta a nuestros resultados... en fin, sin su aliento y apoyo este trabajo no hubiera nunca llegado a término.



# Introducción

## 0.1. El proceso de rectificado

El proceso de rectificado industrial es un tipo de mecanizado de piezas que consiste en la eliminación del material superficial de la misma por un método abrasivo. Esta abrasión se produce por medio de una muela, a la que se adhiere en su superficie una arenilla abrasiva, que gira a gran velocidad sobre la superficie de la pieza. Los granos abrasivos actúan como elementos de corte individuales, quitando pequeñas limaduras de la pieza. Estos elementos abrasivos suelen consistir en granos de diamante, óxido de aluminio o carburo de silicio, que permanecen sujetos a la muela con algún aglutinante resinoso o vítreo [1].

Los procesos de rectificado se usan fundamentalmente cuando se precisan tolerancias muy pequeñas en el acabado de las piezas y/o un buen pulido superficial de las mismas. Estos procesos de rectificado están ampliamente extendidos en la industria, como por ejemplo la del automóvil o la aviación, y cualquier pequeña mejora en los mismos puede contribuir a un ahorro económico bastante significativo.

Durante el proceso de rectificado, la mayor parte de la energía se convierte en calor, el cual se acumula en la zona de contacto entre la pieza y la muela. Las altas temperaturas alcanzadas pueden aumentar la tolerancia del acabado y reducir la calidad de la pieza, esto último debido a las tensiones residuales generadas en la misma. El daño térmico de la pieza ocurre cuando las temperaturas generadas en el rectificado superan la temperatura de cambio de fase en la estructura metálica de la pieza [2], [3], [4]. Para reducir estos efectos adversos, se suele inyectar un líquido refrigerante sobre la zona de contacto entre la pieza y la muela. De este modo, se disminuye la generación de energía por fricción y al mismo tiempo se refrigera la zona por convección. Además, el líquido refrigerante ayuda a quitar de la zona de contacto el material extraído de la pieza. La gran desventaja de estos líquidos refrigerantes es que son altamente contaminantes, por lo que la optimización en su uso tiene un gran valor medioambiental. En la figura 1 se pueden observar los diferentes componentes de un dispositivo real de rectificado plano.

Aunque se han llevado a cabo estudios del campo de temperaturas por métodos computacionales directos [5], [6], es de un gran interés abordar el problema del daño térmico con métodos analíticos [7] por dos motivos. En primer lu-

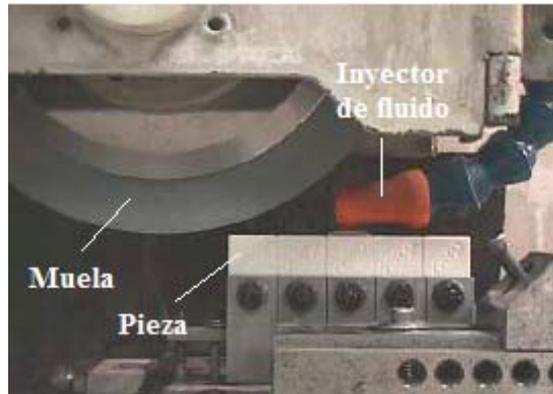


Figura 1: Dispositivo de rectificado plano.

gar, se pueden obtener expresiones explícitas de la dependencia de la solución con respecto a los parámetros del rectificado; y en segundo lugar, la rapidez de la presentación de resultados permite monitorizar de una manera práctica el proceso de fabricación industrial.

Resumiendo, podemos afirmar que tiene un gran interés industrial y medioambiental la elaboración y resolución de modelos matemáticos analíticos de generación y conducción del calor en el proceso de rectificado, tanto en el caso en que apliquemos refrigerante como en el seco. De este modo se podrán minimizar, por un lado, los efectos térmicos adversos sobre la pieza y el consumo de refrigerante; y por otro lado, se podrán implementar estos modelos para monitorizar en tiempo real la calidad de las piezas fabricadas.

## 0.2. Estructura y contenido

La presente memoria para optar al grado de doctor se encuadra en la línea de investigación de modelos matemáticos térmicos del grupo de modelización interdisciplinar InterTech [8], [9] ([www.intertech.upv.es](http://www.intertech.upv.es)). En concreto, este trabajo presenta un modelo matemático para la transmisión de calor en el rectificado industrial plano [10], [11], haciendo un extenso uso de ciertas funciones especiales de la Física-Matemática [12].

Se comenzará con un capítulo dedicado a deducir desde primeros principios la ecuación del calor con convección y su equivalencia con la ecuación del calor clásica bajo una traslación de coordenadas [13]. Se verá también cómo se aplica esta ecuación del calor con convección a la modelización de la transmisión de calor en el rectificado plano. En el segundo capítulo se presentará el modelo SV (Samara-Valencia) [18], que aborda el problema de la transmisión de calor en el rectificado industrial de piezas metálicas. Este modelo ha sido obtenido en el grupo de investigación InterTech, en colaboración con la Universidad Aeroespa-

cial de Samara (Rusia). El modelo SV es bidimensional y consiste en la resolución de la ecuación del calor con convección con unas condiciones de contorno variables en el tiempo y en el espacio. Esta flexibilidad en las condiciones de contorno hará que el modelo SV sea más general que el modelo clásico de Jaeger [14], [15] y que se pueda modelizar el rectificado con aplicación de fluido refrigerante y muelas que produzcan en la pieza una fricción intermitente. Además, permite obtener el campo de temperaturas no sólo en el estado estacionario, sino también en el transitorio. En el capítulo siguiente se resolverá la ecuación integral que plantea el modelo SV para el caso de rectificado seco; resultado que hemos denominado *teorema  $T^{(0)}$* . De este modo, se ofrecerá una solución analítica explícita del campo de temperaturas en la pieza rectificada para cualquier perfil de fricción entre la pieza y la muela. Como consecuencia del *teorema  $T^{(0)}$*  se obtienen una serie de nuevas relaciones matemáticas que resuelven integrales de funciones especiales [29], [30]. En el último capítulo, se aplicará el *teorema  $T^{(0)}$*  a un caso de interés industrial: el rectificado seco intermitente [31]. Para la visualización de los resultados que ilustran la tesis se utilizarán unos programas elaborados en MATHEMATICA que se detallarán al final a modo de apéndice, junto a otro apéndice dedicado al cálculo de algunas integrales útiles en el modelado del proceso de transferencia de calor en el rectificado de piezas.



# Capítulo 1

## La ecuación del calor

En este capítulo vamos a deducir la ecuación del calor con convección, a partir del principio de conservación de la energía, y su equivalencia con la ecuación del calor clásica para una fuente móvil [13]. Por un lado, comprobaremos que la ecuación del calor con convección es lineal. Por otro, deduciremos las condiciones de frontera que tenemos para el caso del rectificado plano. La ecuación del calor convectiva y las condiciones de contorno del rectificado plano constituirán el punto de partida del modelo SV, el cual veremos en el capítulo 2.

### 1.1. La energía calorífica

La energía calorífica de un cuerpo extenso en una región del espacio  $R$  viene dada por la expresión,

$$E = \iiint_R c\rho T \, dV, \quad (1.1)$$

donde  $c$  representa el calor específico del cuerpo, (es decir, la energía térmica necesaria para elevar un grado de temperatura la unidad de masa), siendo sus unidades en el SI,  $[c] = J/kg \, K$ . La densidad del cuerpo viene dada por  $\rho$  y sus unidades en el SI son  $[\rho] = kg/m^3$ . La variación de la energía calorífica será entonces,

$$\frac{d}{dt} \iiint_R c\rho T \, dV = - \iint_{\partial R} \vec{\phi} \cdot d\vec{s} + \iiint_R Q \, dV, \quad (1.2)$$

Variación energía                      Flujo saliente                      Calor generado en  $R$

donde  $\vec{\phi}$  es el vector flujo de energía calorífica por unidad de área y de tiempo, cuyas unidades en el SI son,  $[\phi] = J/m^2s$ . La energía calorífica generada dentro de la región  $R$  por unidad de tiempo es  $Q$ , y sus unidades en el SI son,  $[Q] = J/m^3s$ . Por el teorema de Gauss de la divergencia sabemos que,

$$\iint_{\partial R} \vec{\phi} \cdot d\vec{s} = \iiint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} \, dV. \quad (1.3)$$

Sustituyendo esta expresión en (1.2) y suponiendo que  $c$  y  $\rho$  no varían en el tiempo, llegamos a,

$$\iiint_R \left( c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} - Q \right) dV = 0.$$

Como esta expresión se ha de cumplir para toda región  $R$ , el integrando deberá ser nulo,

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} - Q = 0. \quad (1.4)$$

## 1.2. El flujo

Un cuerpo puede emitir calor por radiación, convección y difusión. Si la energía calorífica radiada es despreciable frente a la energía transmitida por convección y difusión, tendremos dos términos en el flujo. Según la *ley de Fourier* [15], el término difusivo es proporcional al gradiente de la temperatura, donde la constante de proporcionalidad debe ser negativa, pues el calor tiende a difundirse hacia donde la temperatura es mínima. El término convectivo es debido al transporte de materia con energía calorífica, moviéndose a una velocidad  $\vec{v}_d$ . Como  $c\rho T$  es la energía calorífica por unidad de volumen,  $c\rho T \vec{v}_d$  tendrá dimensiones de flujo, por tanto el flujo es,

$$\vec{\phi} = -k_0 \vec{\nabla} T + c\rho T \vec{v}_d, \quad (1.5)$$

donde  $k_0$  es la conductividad térmica y sus unidades en el SI son,  $[k_0] = J/m K s$ . Sustituyendo la expresión para el flujo dada en (1.5) en la expresión (1.4), obtenemos,

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left( -k_0 \vec{\nabla} T + c\rho T \vec{v}_d \right) = Q.$$

Suponiendo que  $k_0$  es constante,

$$c\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}_d \cdot \vec{\nabla} T + T \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_d \right) - k_0 \nabla^2 T = Q.$$

Normalmente, el campo de velocidades es un campo vectorial sin fuentes, por lo que su divergencia es nula,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_d = 0. \quad (1.6)$$

Definiendo la difusividad térmica como,

$$k := \frac{k_0}{c\rho}, \quad (1.7)$$

tenemos la siguiente expresión para la ecuación del calor,

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k \nabla^2 T + \vec{v}_d \cdot \vec{\nabla} T = \frac{Q}{c\rho}.$$

Considerando que no se genera calor dentro del cuerpo,  $Q = 0$ , tenemos finalmente la expresión de la ecuación del calor con convección,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T - \vec{v}_d \cdot \overrightarrow{\nabla T}. \quad (1.8)$$

Cuando no hay transporte de materia,  $\vec{v}_d = \vec{0}$ , el término convectivo desaparece, obteniéndose la expresión clásica de la ecuación del calor,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T. \quad (1.9)$$

Cuando la solución buscada  $T$  no depende del tiempo,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (1.10)$$

estamos en el **estado estacionario**, y la ecuación que se ha de satisfacer es la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 T = 0. \quad (1.11)$$

### 1.3. Ecuación del calor con fuente móvil

En esta sección vamos a estudiar la equivalencia de la ecuación del calor convectiva (1.8) con la ecuación del calor clásica (1.9) para una fuente móvil. Según la figura 1.1 tenemos dos sistemas de referencia: uno fijo  $(x, y, z)$  y uno móvil  $(x', y', z')$  que se desplaza paralelamente al fijo a una velocidad  $\vec{v}_f = v_f (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ . La relación entre ambos sistemas de coordenadas es,

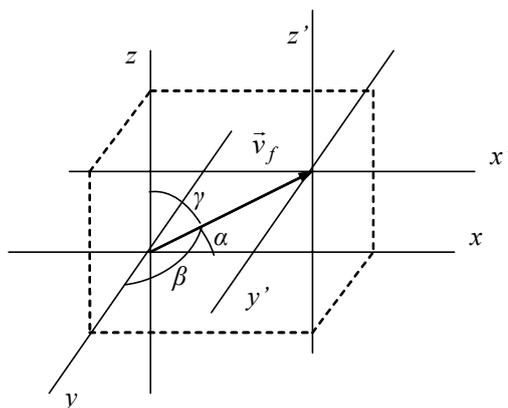


Figura 1.1: Sistemas de referencia fijo y móvil.

$$\begin{aligned}
x' &= x - v_f t \cos \alpha \\
y' &= y - v_f t \cos \beta \\
z' &= z - v_f t \cos \gamma \\
t' &= t.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Supongamos que tenemos una solución  $T(x, y, z, t)$  de la ecuación del calor (1.9) en el sistema fijo para una fuente que se está moviendo solidariamente con el sistema móvil. Podemos saber cuál será la ecuación diferencial que debe satisfacer la solución en el sistema móvil, aplicando la regla de la cadena al cambio de coordenadas dado en (1.12),

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla' T} \cdot \vec{v}_f + \frac{\partial T}{\partial t'}. \tag{1.13}$$

Es fácil ver que en ambos sistemas de coordenadas el laplaciano es el mismo,

$$\nabla^2 T = \nabla'^2 T. \tag{1.14}$$

Por tanto, sustituyendo (1.13) y (1.14) en (1.9), comprobamos que en el nuevo sistema de coordenadas  $(x', y', z')$ , se satisface la ecuación del calor convectiva (1.8),

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = k \nabla'^2 T + \vec{v}_f \cdot \overrightarrow{\nabla' T},$$

donde,

$$\vec{v}_d = -\vec{v}_f. \tag{1.15}$$

Este resultado es lógico, pues considerar que la fuente se mueve en una determinada dirección y sentido (sistema de referencia  $(x, y, z)$ ) es equivalente a considerar que la fuente está parada y existe un transporte de materia en sentido contrario al movimiento de la fuente (sistema de referencia  $(x', y', z')$ ).

## 1.4. Condiciones de contorno

### 1.4.1. Condición inicial

La temperatura inicial vendrá dada por una función escalar,

$$T(\vec{r}, 0) = f(\vec{r}).$$

En muchas ocasiones, inicialmente la temperatura es la temperatura ambiente  $T_0$ ,

$$T(\vec{r}, 0) = T_0.$$

### 1.4.2. Condiciones en la frontera

Para imponer las condiciones de frontera podemos utilizar la *ley de enfriamiento de Newton*, validada experimentalmente para una gran variedad de

casos [21]. Según esta ley, la energía calorífica que fluye hacia el exterior del cuerpo considerado, por unidad de tiempo y de superficie, es proporcional a la diferencia de temperatura entre la superficie y la temperatura ambiente exterior  $T_0$ .

$$\vec{\phi}_{out} \cdot \vec{n} = h [T(t, \vec{r}_s) - T_0], \quad (1.16)$$

donde  $\vec{n}$  es un vector unitario normal sobre la superficie  $S = \partial R$  hacia el exterior del cuerpo (véase figura 1.2),  $\vec{r}_s$  es el vector de posición de un punto de la superficie  $S$  y  $h$  es el coeficiente de transmisión de calor, que tiene como unidades en el SI,  $[h] = J/m^2 s K$ . Si en la frontera también se genera calor, tenemos un flujo debido al calentamiento,

$$\vec{\phi}_{in} \cdot \vec{n} = Q(t, \vec{r}_s). \quad (1.17)$$

El flujo total será la suma de (1.17) y (1.16),

$$\vec{\phi} \cdot \vec{n} = (\vec{\phi}_{in} + \vec{\phi}_{out}) \cdot \vec{n} = h [T(t, \vec{r}_s) - T_0] + Q(t, \vec{r}_s). \quad (1.18)$$

Sustituyendo en (1.18) la expresión que teníamos para el flujo (1.5), tenemos finalmente,

$$\left[ -k_0 \overrightarrow{\nabla T}(t, \vec{r}_s) + c\rho T(t, \vec{r}_s) \vec{v}_d \right] \cdot \vec{n} = h [T(t, \vec{r}_s) - T_0] + Q(t, \vec{r}_s). \quad (1.19)$$

## 1.5. Aplicación al rectificado plano

### 1.5.1. Ecuación del calor

En la figura 1.2 podemos observar el sistema de rectificado plano en el que tenemos una muela giratoria que va puliendo la superficie  $S$  de una pieza  $R$ . Dentro de la pieza no hay ninguna fuente de calor, por lo que  $Q = 0$ . La velocidad a la que se mueve la pieza con respecto a la muela es  $\vec{v}_d = v_d \vec{i}$ , con  $v_d$  constante, por tanto se cumple la condición dada en (1.6),  $\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{v}_d = 0$ . Suponiendo que la conductividad térmica  $k_0$ , el calor específico  $c$ , y la densidad  $\rho$  de la pieza son constantes, podemos aplicar la ecuación del calor deducida anteriormente en (1.8). Pongamos el operador laplaciano en coordenadas cartesianas bidimensionales,

$$\nabla^2 T = \partial_{xx} T(t, x, y) + \partial_{yy} T(t, x, y), \quad (1.20)$$

y evaluemos el término convectivo  $\vec{v}_d \cdot \overrightarrow{\nabla T}$ ,

$$\vec{v}_d \cdot \overrightarrow{\nabla T} = v_d \vec{i} \left[ \partial_x T(t, x, y) \vec{i} + \partial_y T(t, x, y) \vec{j} \right] = v_d \partial_x T(t, x, y). \quad (1.21)$$

Sustituyamos ahora (1.20) y (1.21) en (1.8) para obtener la ecuación del calor para el rectificado,

$$\partial_t T(t, x, y) = k [\partial_{xx} T(t, x, y) + \partial_{yy} T(t, x, y)] - v_d \partial_x T(t, x, y). \quad (1.22)$$

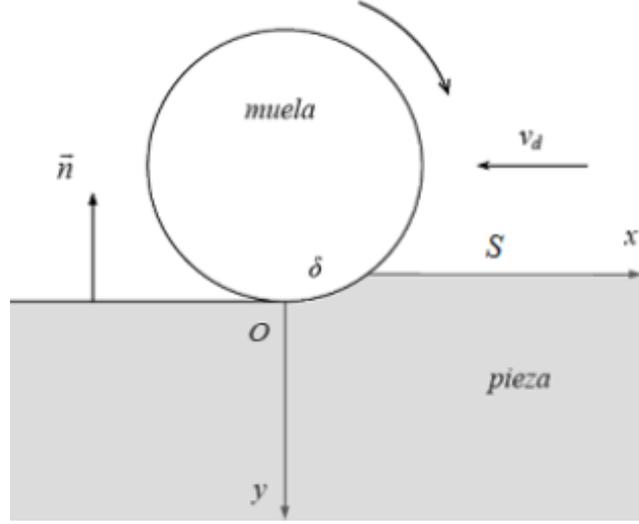


Figura 1.2: Sistema de rectificado plano.

### 1.5.2. Condiciones iniciales y de contorno

Inicialmente, todo el sistema está a la temperatura ambiente, por lo que podemos imponer la siguiente condición inicial,

$$T(0, x, y) = T_0. \quad (1.23)$$

Según el sistema de referencia que hemos escogido (véase figura 1.2), el vector de posición de la superficie  $S$  viene dado por  $\vec{r}_s = (x, 0)$ . Por tanto, la condición sobre la frontera, expresada en (1.19), queda de la siguiente manera,

$$\left[ -k_0 \vec{\nabla} T(t, x, 0) + c\rho T(t, x, 0) \vec{v}_d \right] \cdot \vec{n} = h [T(t, x, 0) - T_0] + Q(t, x, 0). \quad (1.24)$$

Según la figura 1.2,  $\vec{v}_d = v_d \vec{i}$  y  $\vec{n} = -\vec{j}$ , por tanto,  $\vec{v}_d \cdot \vec{n} = 0$ . De este modo, la condición de contorno (1.24) se convierte en,

$$k_0 \partial_y T(t, x, 0) = h [T(t, x, 0) - T_0] + Q(t, x, 0). \quad (1.25)$$

En nuestro caso, vamos a considerar que el coeficiente de transmisión de calor  $h$  depende del espacio y del tiempo,

$$h = b(t, x). \quad (1.26)$$

Al calor generado por fricción sobre la superficie lo llamaremos,

$$d(t, x) = Q(t, x, 0). \quad (1.27)$$

Por tanto, según (1.26) y (1.27), (1.25) nos queda,

$$k_0 \partial_y T(t, x, 0) = b(t, x) [T(t, x, 0) - T_0] + d(t, x). \quad (1.28)$$

En la modelización del rectificado plano,  $b(t, x)$  y  $d(t, x)$  van a representar respectivamente la actuación del refrigerante y la fricción de la muela sobre la superficie de la pieza.



## Capítulo 2

# El modelo SV

En este capítulo vamos a describir un modelo de rectificado plano que admite fricción intermitente y aplicación de fluido refrigerante [18]. Partiremos de la ecuación del calor bidimensional con convección con las condiciones de contorno deducidas en la sección 1.5. Utilizaremos ampliamente las propiedades de la transformada de Laplace y Fourier, para llegar a una ecuación integral para la evolución del campo de temperaturas en la pieza. El modelo SV, por tanto, conlleva una notable mejora del modelo clásico de Jaeger [14], pues en este último sólo se obtiene el campo de temperaturas en el estado estacionario para el rectificado seco con fricción continua.

### 2.1. Planteamiento

En la figura 1.2 podemos observar cuál es el sistema de rectificado que adopta este modelo. Según la ecuación del calor que dedujimos para el rectificado (1.22), la ecuación que hemos de resolver es,

$$\partial_t \tilde{T}(t, x, y) = k \left[ \partial_{xx} \tilde{T}(t, x, y) + \partial_{yy} \tilde{T}(t, x, y) \right] - v_d \partial_x \tilde{T}(t, x, y), \quad (2.1)$$

con la condición inicial (1.23),

$$\tilde{T}(0, x, y) = T_0, \quad (2.2)$$

y la condición de contorno (1.28),

$$k_0 \partial_y \tilde{T}(t, x, 0) = b(t, x) \left[ \tilde{T}(t, x, 0) - T_0 \right] + d(t, x). \quad (2.3)$$

Haciendo el cambio,

$$T = \tilde{T} - T_0, \quad (2.4)$$

el problema (2.1)-(2.3) se convierte en,

$$\partial_t T(t, x, y) = k \left[ \partial_{xx} T(t, x, y) + \partial_{yy} T(t, x, y) \right] - v_d \partial_x T(t, x, y), \quad (2.5)$$

con la condición inicial,

$$T(0, x, y) = 0, \quad (2.6)$$

y la condición de contorno,

$$k_0 \partial_y T(t, x, 0) = b(t, x) T(t, x, 0) + d(t, x), \quad (2.7)$$

donde,  $-\infty < x < \infty$  y  $t, y \geq 0$ .

## 2.2. Ecuación integral

Para obtener la solución de (2.5)-(2.7), en forma de ecuación integral, el procedimiento que vamos a seguir va a consistir en realizar una serie de transformaciones integrales sobre las variables  $y$ ,  $t$  y  $x$  para convertir la ecuación diferencial en derivadas parciales dada en (2.5) en una ecuación algebraica. Despejaremos la solución de esta ecuación algebraica y procederemos a realizar las antitransformadas correspondientes para obtener la solución buscada. Como  $t, y \geq 0$ , la transformación natural para estas variables será la transformada de Laplace, mientras que utilizaremos la transformada de Fourier para la variable  $x$ , pues  $-\infty < x < \infty$ .

### 2.2.1. Transformación de la variable $y$

Sea  $T_\mu(t, x)$  la transformada de Laplace de  $T(t, x, y)$  con respecto a la variable  $y$ ,

$$T_\mu(t, x) := \mathcal{L}[T(t, x, y)](\mu) := \int_0^\infty T(t, x, y) e^{-\mu y} dy. \quad (2.8)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (2.5), teniendo en cuenta la condición inicial (2.6) y la propiedad de la transformada de Laplace de la derivada de una función, se obtiene el siguiente problema,

$$\begin{aligned} \partial_t T_\mu(t, x) + v_d \partial_x T_\mu(t, x) &= k [\partial_{xx} T_\mu(t, x) + \mu^2 T_\mu(t, x) \\ &\quad - \mu T(t, x, 0) - \partial_y T(t, x, 0)], \end{aligned} \quad (2.9)$$

y

$$T_\mu(0, x) = 0. \quad (2.10)$$

La ecuación (2.9) se puede reescribir de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \partial_t T_\mu(t, x) - k [\partial_{xx} T_\mu(t, x) + \mu^2 T_\mu(t, x)] + v_d \partial_x T_\mu(t, x) \\ = -k [\mu T(t, x, 0) + \partial_y T(t, x, 0)] \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') F_\mu(t, x') dx', \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde,

$$F_\mu(t, x) := -k [\mu T(t, x, 0) + \partial_y T(t, x, 0)]. \quad (2.12)$$

Sustituyendo en (2.12) la condición de contorno (2.7), llegamos a,

$$F_\mu(t, x) = -k \left\{ \left[ \mu + \frac{b(t, x)}{k_0} \right] T(t, x, 0) + \frac{d(t, x)}{k_0} \right\}. \quad (2.13)$$

### 2.2.2. Transformación de la variable $t$

Sea  $T_{\mu, \tau}(x)$  la transformada de Laplace de la función  $T_\mu(t, x)$  con respecto a la variable  $t$ ,

$$T_{\mu, \tau}(x) := \mathcal{L}[T_\mu(t, x)](\tau) := \int_0^\infty T_\mu(t, x) e^{-\tau t} dt. \quad (2.14)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (2.11) y teniendo en cuenta la condición inicial (2.10), se llega a la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$\begin{aligned} \tau T_{\mu, \tau}(x) - k \left[ \partial_{xx} T_{\mu, \tau}(x) + \mu^2 T_{\mu, \tau}(x) \right] + v_d \partial_x T_{\mu, \tau}(x) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') F_{\mu, \tau}(x') dx', \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde,

$$\begin{aligned} F_{\mu, \tau}(x) &= \mathcal{L}[F_\mu(t, x)](\tau) \\ &= \int_0^\infty F_\mu(t, x) e^{-\tau t} dt. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para resolver (2.15), podemos plantear la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$\begin{aligned} \tau G_{\mu, \tau}(x, x') - k \left[ \partial_{xx} G_{\mu, \tau}(x, x') + \mu^2 G_{\mu, \tau}(x, x') \right] + v_d \partial_x G_{\mu, \tau}(x, x') \\ = \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde  $G_{\mu, \tau}(x, x')$  es la llamada solución fundamental de la ecuación (2.15). Si conocemos la solución de (2.17), también conocemos la solución de (2.15), de tal modo que,

$$T_{\mu, \tau}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mu, \tau}(x, x') F_{\mu, \tau}(x') dx'. \quad (2.18)$$

### 2.2.3. Transformación de la variable $x$

Para hallar  $G_{\mu, \tau}(x, x')$ , hemos de aplicar la transformada de Fourier a la ecuación diferencial ordinaria dada en (2.17), y así obtener una ecuación algebraica. Sea  $G_{\mu, \tau, \chi}(x')$  la transformada de Fourier de la función  $G_{\mu, \tau}(x, x')$  con respecto a la variable  $x$ ,

$$G_{\mu, \tau, \chi}(x') := \mathcal{F}[G_{\mu, \tau}(x, x')](\chi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mu, \tau}(x, x') e^{i\chi x} dx.$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación (2.17), y teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Fourier de la derivada de una función, tenemos que,

$$\begin{aligned} & \tau G_{\mu,\tau,\chi}(x') + k [\chi^2 G_{\mu,\tau,\chi}(x') - \mu^2 G_{\mu,\tau,\chi}(x')] - i\chi v_d G_{\mu,\tau,\chi}(x') \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{i\chi x'}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

Resolviendo la ecuación (2.19) se llega a,

$$G_{\mu,\tau,\chi}(x') = \frac{e^{i\chi x'}}{2\pi (\tau + k(\chi^2 - \mu^2) - i\chi v_d)}. \quad (2.20)$$

#### 2.2.4. Antitransformación a la variable $x$

Aplicando el teorema de inversión de la transformada de Fourier a (2.20) se obtiene la solución de la ecuación (2.17),

$$\begin{aligned} G_{\mu,\tau}(x, x') &= \mathcal{F}^{-1}[G_{\mu,\tau,\chi}(x')](x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\chi(x'-x)}}{\tau + k(\chi^2 - \mu^2) - i\chi v_d} d\chi. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sustituyendo (2.21) en (2.18), tenemos que la solución de la ecuación (2.15) es,

$$\begin{aligned} T_{\mu,\tau}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\mu,\tau}(x') dx' \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\chi(x'-x)}}{\tau + k(\chi^2 - \mu^2) - i\chi v_d} d\chi. \end{aligned} \quad (2.22)$$

#### 2.2.5. Antitransformación a la variable $t$

Aplicando ahora el teorema de inversión de la transformada de Laplace a (2.22), la solución de la ecuación (2.11) resulta ser,

$$\begin{aligned} T_{\mu}(t, x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{\mu,\tau}(x) e^{\tau t} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\tau t} d\tau \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\mu,\tau}(x') dx' \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\chi(x'-x)} d\chi}{\tau + k(\chi^2 - \mu^2) - i\chi v_d}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

El teorema de Fubini permite reescribir (2.23) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} T_\mu(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\chi x} d\chi \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi x'} dx' \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F_{\mu,\tau}(x') e^{\tau t} d\tau}{\tau + k(\chi^2 - \mu^2) - i\chi v_d}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Definamos la función auxiliar  $\Omega(t)$  de la siguiente manera,

$$\Omega(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F_{\mu,\tau}(x') e^{\tau t} d\tau}{\tau + k(\chi^2 - \mu^2) - i\chi v_d}. \quad (2.25)$$

Teniendo de nuevo en cuenta el teorema de inversión de la transformada de Laplace, podemos reescribir (2.25) de la siguiente forma,

$$\Omega(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{F_{\mu,\tau}(x')}{\tau + k(\chi^2 - \mu^2) - i\chi v_d} \right). \quad (2.26)$$

Recordando la definición de  $F_{\mu,\tau}$  dada en (2.16) y la propiedad de la transformada de Laplace de una exponencial, podemos expresar (2.26) en los siguientes términos,

$$\Omega(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L}[F_\mu(t, x')] \mathcal{L} \left[ e^{-(k(\chi^2 - \mu^2) - i\chi v_d)s} \right] \right\}. \quad (2.27)$$

Aplicando ahora el teorema de convolución de la transformada de Laplace a la ecuación (2.27), llegamos a,

$$\Omega(t) = \int_0^t F_\mu(t-s, x') e^{-(k(\chi^2 - \mu^2) - i\chi v_d)s} ds. \quad (2.28)$$

Por tanto, (2.24) se transforma en,

$$\begin{aligned} T_\mu(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\chi x} d\chi \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi x'} dx' \\ &\times \int_0^t F_\mu(t-s, x') e^{-\{k(\chi^2 - \mu^2) - i\chi v_d\}s} ds. \end{aligned} \quad (2.29)$$

### 2.2.6. Antitransformación a la variable $y$

Teniendo en cuenta (2.8) y aplicando el teorema de inversión de la transformada de Laplace, tenemos que,

$$\begin{aligned} T(t, x, y) &= \mathcal{L}^{-1}[T_\mu(t, x)](y) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} T_\mu(t, x) e^{\mu y} d\mu. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sustituyendo (2.29) en (2.30) y aplicando el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} T(t, x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x'-x-v_d s)i\chi - k\chi^2 s} d\chi \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_\mu(t-s, x') e^{k\mu^2 s} e^{\mu y} d\mu \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para simplificar el resultado dado en (2.31), en primer lugar calcularemos,

$$I_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x'-x-v_d s)i\chi - k\chi^2 s} d\chi, \quad (2.32)$$

y a continuación,

$$I_2 := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_\mu(t-s, x') e^{k\mu^2 s} e^{\mu y} d\mu. \quad (2.33)$$

### Cálculo de $I_1$

Para calcular  $I_1$ , podemos observar que según la definición de transformada de Fourier tenemos que,

$$\mathcal{F}[e^{-ks\chi^2}](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\chi - k\chi^2 s} d\chi, \quad (2.34)$$

pero al mismo tiempo, la transformada de una gaussiana es [20, § 17.23.13],

$$\mathcal{F}\left[e^{-ks\chi^2}\right](\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ks}} e^{-\omega^2/4ks}. \quad (2.35)$$

Tomando  $\omega = x' - x - v_d s$  en (2.34) y (2.35), e igualando ambos resultados, llegamos a,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x'-x-v_d s)i\chi - k\chi^2 s} d\chi \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{ks}} \exp\left[-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

### Cálculo de $I_2$

Para calcular  $I_2$ , observemos que según (2.13),

$$\begin{aligned} F_\mu(t-s, x') &= -k \left\{ \left[ \mu + \frac{b(t-s, x')}{k_0} \right] T(t-s, x', 0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d(t-s, x')}{k_0} \right\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sustituyendo (2.37) en (2.33), obtenemos,

$$I_2 = \frac{-k}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\mu e^{ks\mu^2} e^{\mu y} \quad (2.38)$$

$$\times \left\{ \mu T(t-s, x', 0) + \frac{b(t-s, x')T(t-s, x', 0) + d(t-s, x')}{k_0} \right\}.$$

Podemos descomponer la integral  $I_2$  en dos sumandos,

$$I_2 = -k \left\{ T(t-s, x', 0) I_{2A}(y) \right. \quad (2.39)$$

$$\left. + \left[ \frac{b(t-s, x')T(t-s, x', 0) + d(t-s, x')}{k_0} \right] I_{2B}(y) \right\},$$

donde,

$$I_{2A}(y) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mu e^{ks\mu^2} e^{\mu y} d\mu \quad (2.40)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ks\mu^2} (\partial_y e^{\mu y}) d\mu,$$

e

$$I_{2B}(y) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ks\mu^2} e^{\mu y} d\mu. \quad (2.41)$$

Claramente, la ecuación (2.40), se puede expresar como,

$$I_{2A}(y) = \partial_y \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ks\mu^2} e^{\mu y} d\mu \right) \quad (2.42)$$

$$= \partial_y I_{2B}(y),$$

mientras que el cambio  $\mu = i\xi$  en (2.42) y la definición de la transformada de Fourier, da como resultado,

$$I_{2B}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ks\xi^2} e^{i\xi y} d\xi \quad (2.43)$$

$$= \mathcal{F} \left[ e^{-ks\xi^2} \right] (y).$$

Recordando la transformada de Fourier de una gaussiana (2.35), llegamos a que (2.43) se puede expresar como,

$$I_{2B}(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ks}} e^{-y^2/4ks}, \quad (2.44)$$

de tal modo que (2.42) es,

$$I_{2A}(y) = \partial_y I_{2B}(y) \quad (2.45)$$

$$= -\frac{y}{2ks} \left( \frac{e^{-y^2/4ks}}{2\sqrt{\pi ks}} \right).$$

Sustituyendo ahora los resultados obtenidos en (2.44) y (2.45) en (2.39), tenemos que,

$$I_2 = k \frac{e^{-y^2/4ks}}{2\sqrt{\pi ks}} \left\{ \left( \frac{y}{2ks} - \frac{b(t-s, x')}{k_0} \right) T(t-s, x', 0) - \frac{d(t-s, x')}{k_0} \right\}. \quad (2.46)$$

### 2.2.7. Resolución final

Sustituyendo finalmente los resultados obtenidos en (2.36) y (2.46) en (2.31), llegamos a la siguiente ecuación integral para  $T(t, x, y)$ ,

$$\begin{aligned} T(t, x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{ds}{s} \exp\left(-\frac{y^2}{4ks}\right) \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) \\ &\times \left[ \left( \frac{y}{2ks} - \frac{b(t-s, x')}{k_0} \right) T(t-s, x', 0) - \frac{d(t-s, x')}{k_0} \right]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Recordando el cambio inicial (2.4), el campo de temperaturas es,

$$\tilde{T}(t, x, y) = T_0 + T(t, x, y), \quad (2.48)$$

donde  $T_0$  es la temperatura inicial de la pieza antes de que empiece el proceso de rectificado, la cual se corresponde de modo natural con la temperatura ambiente.

## Capítulo 3

# Solución exacta del rectificado seco

### 3.1. Introducción

La ecuación integral que plantea el modelo SV (2.47) se puede abordar numéricamente para un rectificado intermitente con aplicación de líquido refrigerante [19]. Sin embargo, cuando estamos en el caso del rectificado seco, la ecuación integral (2.47) se puede resolver analíticamente para cualquier perfil de fricción  $d(t, x)$ . Para verlo, comencemos desglosando el campo de temperaturas en dos componentes,

$$T(t, x, y) := T^{(0)}(t, x, y) + T^{(1)}(t, x, y), \quad (3.1)$$

donde,

$$\begin{aligned} T^{(0)}(t, x, y) := & -\frac{1}{4\pi k_0} \int_0^t \frac{ds}{s} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dx' d(t-s, x') \exp\left(-\frac{(x'-x-v_d s)^2}{4ks}\right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

y

$$\begin{aligned} T^{(1)}(t, x, y) := & \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{ds}{s} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(\frac{y}{2ks} - \frac{b(t-s, x')}{k_0}\right) \\ & \times T(t-s, x', 0) \exp\left(-\frac{(x'-x-v_d s)^2}{4ks}\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nótese que  $T^{(0)}$  contiene la parte correspondiente a la fricción en la condición de contorno (2.7), y  $T^{(1)}$  la parte correspondiente a la aplicación de refrigerante en la superficie de la pieza de la condición de contorno.

## 3.2. Teorema $T^{(0)}$ para el rectificado seco

### 3.2.1. Rectificado seco

Cuando no tenemos refrigerante actuando sobre la pieza al ir rectificándose, podemos considerar que la pieza está aislada del medio ambiente. Esto quiere decir que el flujo de calor de la pieza al medio es nulo porque el coeficiente de transmisión de calor  $h$  vale cero,

$$h = b(t, x) = 0. \quad (3.4)$$

En este caso de rectificado seco, la expresión para  $T^{(1)}$  dada en (3.3) se convierte en,

$$\begin{aligned} T^{(1)}(t, x, y) &= \frac{y}{8\pi k} \int_0^t \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \frac{ds}{s^2} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dx' T(t-s, x', 0) \exp\left(-\frac{(x'-x-v_d s)^2}{4ks}\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por conveniencia en las expresiones que siguen, vamos a definir los siguientes operadores integrales,

$$T^{(1)}(t, x, y) = \mathfrak{J}_y [T(t, x, 0)]. \quad (3.6)$$

donde,

$$\mathfrak{J}_y [T(t, x, 0)] := \frac{y}{8\pi k} \int_0^t \frac{ds}{s^2} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \mathfrak{N}_s [T(t, x, 0)], \quad (3.7)$$

y

$$\mathfrak{N}_s [T(t, x, 0)] := \int_{-\infty}^{\infty} dx' T(t-s, x', 0) \exp\left[-\frac{(x'-x-v_d s)^2}{4ks}\right]. \quad (3.8)$$

Observemos que teniendo en cuenta (3.6) podemos reescribir (3.1) como,

$$T(t, x, y) = T^{(0)}(t, x, y) + \mathfrak{J}_y [T(t, x, 0)]. \quad (3.9)$$

### 3.2.2. Operador $\mathfrak{N}_s$

Vamos a evaluar el operador  $\mathfrak{N}_s$  sobre la componente del campo de temperaturas debida a la fricción en la superficie de la pieza  $T^{(0)}$ , que de acuerdo con (3.2), se puede expresar como,

$$\begin{aligned} T^{(0)}(t-s, x', 0) &= \frac{-1}{4\pi k_0} \int_0^{t-s} \frac{d\sigma}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \\ &\times d(t-s-\sigma, \xi) \exp\left(-\frac{(\xi-x'-v_d \sigma)^2}{4k\sigma}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por tanto, introduciendo (3.10) en (3.8), y reordenando las integrales,

$$\begin{aligned} \aleph_s \left[ T^{(0)}(t, x, 0) \right] &= \frac{-1}{4\pi k_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{t-s} \frac{d\sigma}{\sigma} d(t-s-\sigma, \xi) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp \left( -\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks} - \frac{(\xi - x' - v_d \sigma)^2}{4k\sigma} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Desarrollando el exponente del integrando dado en (3.11), llegamos a,

$$\begin{aligned} \aleph_s \left[ T^{(0)}(t, x, 0) \right] &= \frac{-1}{4\pi k_0} \exp \left( -\frac{(x + v_d s)^2}{4ks} \right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left( \frac{v_d \xi}{2k} \right) \\ &\times \int_0^{t-s} \frac{d\sigma}{\sigma} d(t-s-\sigma, \xi) \exp \left( -\frac{\xi^2}{4k\sigma} - \frac{v_d^2 \sigma}{4k} \right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp \left[ -\frac{x'^2}{4k} \left( \frac{s+\sigma}{s\sigma} \right) + \frac{x'}{2k} \left( \frac{x\sigma + \xi s}{s\sigma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La última integral dada en (3.12) se puede resolver aplicando [16, § 7.4.2], de tal forma que (3.12) se convierte en,

$$\begin{aligned} \aleph_s \left[ T^{(0)}(t, x, 0) \right] &= \frac{-\sqrt{ks}}{2\sqrt{\pi}k_0} \exp \left( -\frac{(x + v_d s)^2}{4ks} \right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left( \frac{v_d \xi}{2k} \right) \\ &\times \int_0^{t-s} d\sigma \frac{d(t-s-\sigma, \xi)}{\sqrt{\sigma}\sqrt{s+\sigma}} \exp \left( \frac{(x\sigma + \xi s)^2}{4ks\sigma(s+\sigma)} - \frac{\xi^2}{4k\sigma} - \frac{v_d^2 \sigma}{4k} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Desarrollando de nuevo el exponente dado en el integrando sobre la variable  $\sigma$  en (3.13) y simplificando, llegamos a,

$$\begin{aligned} \aleph_s \left[ T^{(0)}(t, x, 0) \right] &= \frac{-\sqrt{ks}}{2\sqrt{\pi}k_0} \exp \left( -\frac{xv_d}{2k} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left( \frac{v_d \xi}{2k} \right) \\ &\times \int_0^{t-s} d\sigma \frac{d(t-s-\sigma, \xi)}{\sqrt{\sigma}\sqrt{s+\sigma}} \exp \left( -\frac{(x-\xi)^2}{4k(s+\sigma)} - \frac{v_d^2}{4k}(\sigma+s) \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Definiendo ahora,

$$I_\sigma := \int_0^{t-s} d\sigma \frac{d(t-s-\sigma, \xi)}{\sqrt{\sigma}\sqrt{s+\sigma}} \exp \left( -\frac{(x-\xi)^2}{4k(s+\sigma)} - \frac{v_d^2}{4k}(\sigma+s) \right), \quad (3.15)$$

podemos realizar en (3.15) el cambio  $\mu = \sigma + s$ , e introducir la función de Heaviside, llegando a,

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \int_s^t d\mu \frac{d(t-\mu, \xi)}{\sqrt{\mu-s}\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4k\mu} - \frac{v_d^2}{4k}\mu\right) \\ &= \int_0^t d\mu \frac{d(t-\mu, \xi)}{\sqrt{\mu-s}\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4k\mu} - \frac{v_d^2}{4k}\mu\right) H(\mu-s). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Introduciendo (3.16) en (3.14), tenemos que,

$$\begin{aligned} \aleph_s [T^{(0)}(t, x, 0)] &= \frac{-\sqrt{ks}}{2\sqrt{\pi}k_0} \exp\left(-\frac{xv_d}{2k}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(\frac{v_d\xi}{2k}\right) \\ &\quad \times \int_0^t d\mu \frac{d(t-\mu, \xi)}{\sqrt{\mu-s}\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4k\mu} - \frac{v_d^2}{4k}\mu\right) H(\mu-s) \end{aligned}$$

o más simplícadamente,

$$\begin{aligned} \aleph_s [T^{(0)}(t, x, 0)] &= \frac{-\sqrt{ks}}{2\sqrt{\pi}k_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^t d\mu \frac{d(t-\mu, \xi)}{\sqrt{\mu-s}\sqrt{\mu}} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{(\xi-x-v_d\mu)^2}{4k\mu}\right) H(\mu-s). \end{aligned} \quad (3.17)$$

### 3.2.3. Operador $\beth_y$

Sustituyendo la expresión obtenida en (3.17) en la definición dada para  $\beth_y$  (3.7) resulta,

$$\begin{aligned} \beth_y [T^{(0)}(t, x, 0)] &= \frac{-y}{16\pi^{3/2}k_0\sqrt{k}} \int_0^t \frac{ds}{s^{3/2}} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \times \\ &\quad \int_0^t d\mu \frac{d(t-\mu, \xi)}{\sqrt{\mu-s}\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{(\xi-x-v_d\mu)^2}{4k\mu}\right) H(\mu-s). \end{aligned}$$

Cambiando el orden de integración obtenemos,

$$\begin{aligned} \beth_y [T^{(0)}(t, x, 0)] &= \frac{-y}{16\pi^{3/2}k_0\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \\ &\quad \times \int_0^t d\mu \frac{d(t-\mu, \xi)}{\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{(\xi-x-v_d\mu)^2}{4k\mu}\right) \\ &\quad \times \int_0^t ds \frac{H(\mu-s)}{s^{3/2}\sqrt{\mu-s}} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Llamemos a la integral sobre la variable  $s$  en (3.18) como,

$$I_s := \int_0^t ds \frac{H(\mu-s)}{s^{3/2}\sqrt{\mu-s}} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right). \quad (3.19)$$

Observemos que, dado que  $\mu \in [0, t]$ , (3.19) se puede expresar de la siguiente manera,

$$I_s = \int_0^\mu \frac{ds}{s^{3/2}\sqrt{\mu-s}} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right). \quad (3.20)$$

Para resolver (3.20), podemos hacer las siguientes transformaciones:  $s = \mu/t$ ,  $v = t - 1$ ,  $w^2 = v$  y  $r = yw/2\sqrt{k\mu}$ , obteniendo,

$$I_s = \frac{2\sqrt{\pi k}}{y\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{y^2}{4k\mu}\right). \quad (3.21)$$

Por tanto, sustituyendo (3.21), en la expresión dada en (3.18) para el funcional  $\mathfrak{J}_y$ , resulta,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_y [T^{(0)}(t, x, 0)] &= \frac{-1}{8\pi k_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^t \frac{d\mu}{\mu} \exp\left(-\frac{y^2}{4k\mu}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{(\xi - x - v_d\mu)^2}{4k\mu}\right) d(t - \mu, \xi) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Cambiando el orden de integración en (3.22),

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_y [T^{(0)}(t, x, 0)] &= \frac{-1}{8\pi k_0} \int_0^t \frac{d\mu}{\mu} \exp\left(-\frac{y^2}{4k\mu}\right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d(t - \mu, \xi) \exp\left(-\frac{(x - \xi - v_d\mu)^2}{4k\mu}\right). \end{aligned}$$

Recordando la expresión para  $T^{(0)}$  dada en (3.2), concluimos que,

$$\mathfrak{J}_y [T^{(0)}(t, x, 0)] = \frac{1}{2} T^{(0)}(t, x, y). \quad (3.23)$$

### 3.2.4. Resolución por aproximaciones sucesivas

Según (3.5), para hallar  $T^{(1)}$  debemos conocer el campo de temperaturas en la superficie,  $T(t, x, 0)$ . A orden cero de aproximación,  $T_0$ , podemos considerar que el campo de temperaturas vendrá dado sólo por el término que conlleva la fricción, es decir, según (3.2),  $T^{(0)}$ . Denotemos este orden cero de aproximación como,

$$T_0(t, x, y) = T^{(0)}(t, x, y). \quad (3.24)$$

Para obtener el primer orden de aproximación, basta sustituir el orden cero de aproximación (3.24), en la expresión dada en (3.6) para  $T^{(1)}$ ,

$$\begin{aligned} T_1^{(1)}(t, x, y) &= \mathfrak{J}_y [T_0(t, x, 0)] \\ &= \mathfrak{J}_y [T^{(0)}(t, x, 0)]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por tanto, el campo de temperaturas a primer orden será,

$$T_1(t, x, y) = T^{(0)}(t, x, y) + T_1^{(1)}(t, x, y).$$

Es decir, según (3.25),

$$T_1(t, x, y) = T^{(0)}(t, x, y) + \mathfrak{J}_y [T_0(t, x, 0)].$$

En general, la aproximación de orden  $n \in \mathbb{N}$  será,

$$T_n(t, x, y) := T^{(0)}(t, x, y) + \mathfrak{J}_y [T_{n-1}(t, x, 0)], \quad (3.26)$$

donde la iteración inicial viene dada por (3.24). Aplicando (3.23), podemos expresar el primer orden de aproximación del campo de temperaturas como,

$$T_1(t, x, y) = \frac{3}{2}T^{(0)}(t, x, y). \quad (3.27)$$

Para calcular el segundo orden, podemos introducir (3.27) en la ecuación iterativa (3.26) para  $n = 2$ . Teniendo en cuenta que el funcional  $\mathfrak{J}_y$  es lineal, obtenemos,

$$\begin{aligned} T_2(t, x, y) &= T^{(0)}(t, x, y) + \mathfrak{J}_y [T_1(t, x, 0)] \\ &= T^{(0)}(t, x, y) + \frac{3}{2}\mathfrak{J}_y [T^{(0)}(t, x, 0)] \\ &= \frac{7}{4}T^{(0)}(t, x, y), \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde hemos vuelto a aplicar (3.23). Repitiendo los mismos pasos a tercer orden, llegamos a,

$$T_3(t, x, y) = \frac{15}{8}T^{(0)}(t, x, y). \quad (3.29)$$

Observemos que los coeficientes que aparecen en cada orden de aproximación (3.27), (3.28) y (3.29), coinciden con los términos de la sucesión,

$$\frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto, podemos conjeturar que el orden  $n$ ésimo será,

$$T_n(t, x, y) = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}T^{(0)}(t, x, y). \quad (3.30)$$

Podemos demostrar (3.30) por inducción. Efectivamente, según la ecuación recurrente (3.26), sustituyendo la conjetura dada en (3.30), obtenemos el siguiente resultado,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(t, x, y) &= T^{(0)}(t, x, y) + \mathfrak{J}_y [T_n(t, x, 0)] \\ &= T^{(0)}(t, x, y) + \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\mathfrak{J}_y [T^{(0)}(t, x, 0)] \\ &= \frac{2^{n+2} - 1}{2^{n+1}}T^{(0)}(t, x, y), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. El campo de temperaturas se podrá encontrar tomando el orden de aproximación infinito en (3.30), resultando,

$$T(t, x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t, x, y) = 2T^{(0)}(t, x, y). \quad (3.31)$$

Podemos comprobar que (3.31) es efectivamente la solución de la ecuación integral (2.47) para el rectificado seco, pues según (3.1) y (3.6) y teniendo en cuenta (3.23), llegamos a,

$$\begin{aligned} T(t, x, y) &= T^{(0)}(t, x, y) + \mathfrak{I}_y [T(t, x, 0)] \\ &= T^{(0)}(t, x, y) + 2\mathfrak{I}_y [T^{(0)}(t, x, 0)] \\ &= 2T^{(0)}(t, x, y). \end{aligned}$$

Es decir, el campo de temperaturas total es el doble de la componente del campo debido sólo a la fricción,  $T^{(0)}$ . Por esta razón se ha denominado a este resultado *teorema  $T^{(0)}$* . Finalmente, teniendo en cuenta (3.2), llegamos a la siguiente expresión para el campo de temperaturas,

$$\begin{aligned} T(t, x, y) &= -\frac{1}{2\pi k_0} \int_0^t \frac{ds}{s} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx' d(t-s, x') \exp\left(-\frac{(x'-x-v_d s)^2}{4ks}\right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por tanto, (3.32) resuelve la ecuación integral planteada en (2.47) para  $b(t, x) = 0$ .

### 3.2.5. Unicidad de la solución

#### Acotación del operador $\mathfrak{I}_y$

Para demostrar la unicidad de la solución de la ecuación integral (3.9), vamos a calcular en primer lugar el valor del operador  $\mathfrak{I}_y$  sobre una constante. De acuerdo con (3.8), tenemos que,

$$\mathfrak{N}_s [1] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x'-x-v_d s)^2}{4ks}\right] dx'.$$

Haciendo el cambio de variable,  $u = \frac{x'-x-v_d s}{2\sqrt{ks}}$ , resulta que,

$$\mathfrak{N}_s [1] = 2\sqrt{ks} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 2\sqrt{\pi ks}. \quad (3.33)$$

Aplicando (3.33) a (3.7), tenemos que,

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_y [1] &= \frac{y}{8\pi k} \int_0^t \frac{ds}{s^2} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \mathfrak{N}_s [1] \\ &= \frac{y}{4\sqrt{\pi k}} \int_0^t \frac{ds}{s^{3/2}} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right). \end{aligned}$$

Realizando el cambio,  $u = \frac{y}{2\sqrt{ks}}$ , resulta que,

$$\mathfrak{J}_y [1] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{y/2\sqrt{kt}}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{kt}} \right). \quad (3.34)$$

Por tanto,

$$\mathfrak{J}_0 [1] = \frac{1}{2}. \quad (3.35)$$

Consideremos ahora una función  $f(t, x, y)$  cuyo valor máximo en  $y = 0$  es  $f_{\max}$ . De este modo,

$$f(t, x, 0) \leq f_{\max}. \quad (3.36)$$

Aplicando  $\mathfrak{J}_0$  a ambos miembros de (3.36) y teniendo en cuenta la linealidad del operador  $\mathfrak{J}_0$ ,

$$\mathfrak{J}_0 [f(t, x, 0)] \leq \mathfrak{J}_0 [f_{\max}] = f_{\max} \mathfrak{J}_0 [1],$$

por tanto, según (3.35),

$$\mathfrak{J}_0 [f(t, x, 0)] \leq \frac{f_{\max}}{2}. \quad (3.37)$$

Obsérvese que si aplicamos el operador  $\mathfrak{J}_0$  en (3.37) y tenemos en cuenta de nuevo (3.35), tenemos que,

$$\mathfrak{J}_0^{(2)} [f(t, x, 0)] \leq \mathfrak{J}_0 \left[ \frac{f_{\max}}{2} \right] = \frac{f_{\max}}{2^2}.$$

Por tanto,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathfrak{J}_0^{(n)} [f(t, x, 0)] \leq \frac{f_{\max}}{2^n}. \quad (3.38)$$

### Resolución de la unicidad

Si  $T_A(t, x, y)$  y  $T_B(t, x, y)$  son soluciones de la ecuación integral (3.9), tenemos que,

$$T_A(t, x, y) = T^{(0)}(t, x, y) + \mathfrak{J}_y [T_A(t, x, 0)], \quad (3.39)$$

$$T_B(t, x, y) = T^{(0)}(t, x, y) + \mathfrak{J}_y [T_B(t, x, 0)]. \quad (3.40)$$

Restando (3.40) de (3.39) y teniendo en cuenta la linealidad del operador  $\mathfrak{J}_y$ ,

$$T_A(t, x, y) - T_B(t, x, y) = \mathfrak{J}_y [T_A(t, x, 0) - T_B(t, x, 0)]. \quad (3.41)$$

Tomando  $y = 0$  en (3.41),

$$T_A(t, x, 0) - T_B(t, x, 0) = \mathfrak{J}_0 [T_A(t, x, 0) - T_B(t, x, 0)]. \quad (3.42)$$

Por sustitución recursiva, podemos expresar (3.42) como,

$$T_A(t, x, 0) - T_B(t, x, 0) = \mathfrak{J}_0^{(n)} [T_A(t, x, 0) - T_B(t, x, 0)]. \quad (3.43)$$

Si tomamos en (3.38) como función  $f$ ,

$$f_1(t, x, 0) = T_A(t, x, 0) - T_B(t, x, 0),$$

según (3.43), tenemos que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$T_A(t, x, 0) - T_B(t, x, 0) \leq \frac{f_{1,\max}}{2^n}, \quad (3.44)$$

donde  $f_{1,\max}$  es el valor máximo de la función  $f_1(t, x, 0)$ . Tomando límites en (3.44),

$$T_A(t, x, 0) - T_B(t, x, 0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{1,\max}}{2^n} = 0,$$

es decir,

$$T_A(t, x, 0) \leq T_B(t, x, 0). \quad (3.45)$$

Obsérvese ahora que en (3.43) se pueden intercambiar las etiquetas  $A$  y  $B$ ,

$$T_B(t, x, 0) - T_A(t, x, 0) = \mathfrak{I}_0^{(n)} [T_B(t, x, 0) - T_A(t, x, 0)].$$

por tanto, tomando ahora la función,

$$f_2(t, x, 0) = T_B(t, x, 0) - T_A(t, x, 0),$$

podemos concluir que,

$$T_B(t, x, 0) - T_A(t, x, 0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{2,\max}}{2^n} = 0,$$

es decir,

$$T_B(t, x, 0) \leq T_A(t, x, 0). \quad (3.46)$$

A partir de (3.45) y (3.46), se concluye que ambas soluciones son iguales en la superficie,

$$T_A(t, x, 0) = T_B(t, x, 0). \quad (3.47)$$

Aplicando  $\mathfrak{I}_y$  en (3.47),

$$\mathfrak{I}_y [T_A(t, x, 0)] = \mathfrak{I}_y [T_B(t, x, 0)]. \quad (3.48)$$

y sustituyendo (3.48) en (3.39), tenemos que

$$T_A(t, x, y) = T^{(0)}(t, x, y) + \mathfrak{I}_y [T_B(t, x, 0)]. \quad (3.49)$$

Comparando (3.40) con (3.49), obtenemos finalmente,

$$T_A(t, x, y) = T_B(t, x, y),$$

es decir, la única solución de (3.9) es (3.32).

### 3.3. Integrales del teorema $T^{(0)}$

A partir del *teorema*  $T^{(0)}$  se pueden calcular algunas nuevas integrales impropias que contienen funciones de Bessel. Para verlo, observemos en primer lugar que de acuerdo con (3.1) y (3.31) se cumple que,

$$T^{(0)}(t, x, y) = T^{(1)}(t, x, y). \quad (3.50)$$

Definiendo la función,

$$m(t, x, y) := \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{(x + v_d t)^2 + y^2}{4kt}\right), \quad (3.51)$$

según las expresiones dadas en (3.2) y (3.5) para  $T^{(0)}$  y  $T^{(1)}$ , podemos reescribir (3.50) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} T^{(0)}(t, x, y) &= -\frac{1}{4\pi k_0} \int_0^t ds \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx' d(t-s, x') m(s, x-x', y) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^t ds \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx' T(t-s, x', 0) \frac{\partial}{\partial y} m(s, x-x', y). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Teniendo en cuenta (3.31) e intercambiando el orden de integración,

$$\begin{aligned} T^{(0)}(t, x, y) &= -\frac{1}{4\pi k_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \\ &\quad \times \int_0^t ds d(t-s, x') m(s, x-x', y) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \\ &\quad \times \int_0^t ds T^{(0)}(t-s, x', 0) \frac{\partial}{\partial y} m(s, x-x', y). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Aplicando la transformada de Laplace en (3.53),

$$\tilde{f}(\tau) := \mathcal{L}[f(t)](\tau) := \int_0^{\infty} e^{-\tau t} f(t) dt$$

y teniendo en cuenta las propiedades del producto de convolución de esta transformada integral,

$$\mathcal{L}[f(t)](\tau) \mathcal{L}[g(t)](\tau) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-s)g(s)ds\right],$$

tenemos que (3.53) se convierte en,

$$\begin{aligned}\tilde{T}^{(0)}(\tau, x, y) &= \frac{-1}{4\pi k_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \tilde{d}(\tau, x') \tilde{m}(\tau, x - x', y) \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \tilde{T}^{(0)}(\tau, x', 0) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{m}(\tau, x - x', y)\end{aligned}\quad (3.54)$$

Realizando la transformada de Fourier en (3.54),

$$\hat{f}(w) := \mathcal{F}[f(x)](w) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} f(x) dx$$

y teniendo en cuenta las propiedades del producto de convolución de esta transformada integral,

$$\mathcal{F}[f(x)](w) \mathcal{F}[g(x)](w) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x - x') dx'\right],$$

tenemos que (3.54) se convierte en,

$$\hat{T}^{(0)}(\tau, w, y) = \frac{-1}{2k_0} \hat{d}(\tau, w) \hat{m}(\tau, w, y) \quad (3.55)$$

$$= -\hat{T}^{(0)}(\tau, w, 0) \frac{\partial}{\partial y} \hat{m}(\tau, w, y). \quad (3.56)$$

Particularizando (3.55) en  $y = 0$  y sustituyendo el resultado en (3.56), llegamos a,

$$\hat{m}(\tau, w, y) = -\hat{m}(\tau, w, 0) \frac{\partial}{\partial y} \hat{m}(\tau, w, y). \quad (3.57)$$

Podemos despejar en (3.57), obteniendo,

$$\hat{m}(\tau, w, y) = \hat{m}(\tau, w, 0) \exp\left[-\frac{y}{\hat{m}(\tau, w, 0)}\right]. \quad (3.58)$$

### 3.3.1. Primera integral

Efectuemos en primer lugar la transformada de Laplace de la función  $m(t, x, y)$  en la variable  $t$  a partir de (3.51),

$$\begin{aligned}\tilde{m}(\tau, x, y) &= \int_0^{\infty} e^{-\tau t} m(t, x, y) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau t}}{t} \exp\left(-\frac{(x + v_d t)^2 + y^2}{4kt}\right) ds.\end{aligned}\quad (3.59)$$

Desarrollando el exponente en (3.59) tenemos que,

$$\begin{aligned}\tilde{m}(\tau, x, y) &= \exp\left(-\frac{xv_d}{2k}\right) \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{4kt} - \left(\frac{v_d^2}{4t} + \tau\right)t\right].\end{aligned}\quad (3.60)$$

Efectuando el cambio  $4ks = (v_d^2 + 4k\tau)t$ , resulta,

$$\begin{aligned} \tilde{m}(\tau, x, y) &= \exp\left(-\frac{xv_d}{2k}\right) \\ &\times \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)(v_d^2 + 4k\tau)}{16k^2s} - s\right]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Sabiendo que la representación integral de la función de Macdonald de orden cero es [12, § 5.10.25],

$$K_0(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{z^2}{4\sigma} - \sigma\right] \frac{d\sigma}{\sigma},$$

podemos expresar (3.61) como,

$$\tilde{m}(\tau, x, y) = 2 \exp\left(-\frac{xv_d}{2k}\right) K_0\left(\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)(v_d^2 + 4k\tau)}}{2k}\right). \quad (3.62)$$

Particularizando (3.62) en  $y = 0$ , tenemos,

$$\tilde{m}(\tau, x, 0) = 2 \exp\left(-\frac{xv_d}{2k}\right) K_0\left(|x| \frac{\sqrt{v_d^2 + 4k\tau}}{2k}\right). \quad (3.63)$$

Aplicando la transformada de Fourier en (3.63), tenemos que,

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{m}}(\tau, w, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{m}(\tau, x, 0) e^{iw x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp[-\alpha x] K_0(\beta |x|) dx, \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde hemos definido,

$$\begin{aligned} \alpha &:= \frac{v_d}{2k} - iw, \\ \beta &:= \frac{\sqrt{v_d^2 + 4k\tau}}{2k}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Podemos desglosar (3.64) en dos sumandos,

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{m}}(\tau, w, 0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \exp[-\alpha x] K_0(-\beta x) dx \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp[-\alpha x] K_0(\beta x) dx. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Haciendo el cambio  $x$  por  $-x$  en la primera integral de (3.66), podemos expresar (3.64) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{m}}(\tau, w, 0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cosh(\alpha x) K_0(\beta x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \quad \beta > |\alpha|, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el resultado obtenido en el Apéndice B (B.10). Por otro lado, si aplicamos la transformada de Fourier en (3.62), tenemos que,

$$\begin{aligned}\widehat{\tilde{m}}(\tau, w, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau, x, y) e^{iwx} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x) K_0\left(\beta\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cosh(\alpha x) K_0\left(\beta\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx.\end{aligned}\quad (3.67)$$

Ahora bien, según (3.58) y teniendo en cuenta (3.67), llegamos a la resolución de la siguiente integral no tabulada,

$$\int_0^{\infty} \cosh(\alpha x) K_0\left(\beta\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx = \frac{\pi \exp\left[-y\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\right]}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \quad (3.68)$$

$\beta > |\alpha|, \quad y \in \mathbb{R}.$

Se puede considerar que (3.68) extiende la integral dada en [20, § 6.677.5] para valores de  $\alpha$  imaginarios puros,

$$\int_0^{\infty} \cos(\alpha x) K_0\left(\beta\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx = \frac{\pi \exp\left[-y\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}\right]}{2\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}$$

$\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} y > 0, \alpha > 0.$

Observemos que tomando  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$  en (3.68), tenemos,

$$\int_0^{\infty} K_0\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx = \frac{\pi}{2} e^{-y}. \quad (3.69)$$

### 3.3.2. Segunda integral

Realizando la antittransformada de Fourier a ambos lados de (3.57) y teniendo en cuenta de nuevo el producto de convolución de esta transformada integral, obtenemos,

$$\tilde{m}(\tau, x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{m}(\tau, x', 0) \frac{\partial}{\partial y} \tilde{m}(\tau, x - x', y) dx'. \quad (3.70)$$

En (3.62) habíamos calculado  $\tilde{m}(\tau, x, y)$ , que según (3.65), se puede expresar como,

$$\tilde{m}(\tau, x, y) = 2 \exp\left(-\frac{xv_d}{2k}\right) K_0\left(\beta\sqrt{x^2 + y^2}\right). \quad (3.71)$$

Por tanto,

$$\tilde{m}(\tau, x, 0) = 2 \exp\left(-\frac{xv_d}{2k}\right) K_0(\beta|x|) \quad (3.72)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{m}(\tau, x, y) = -2y\beta \exp\left(-\frac{xv_d}{2k}\right) \frac{K_1\left(\beta\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (3.73)$$

Teniendo en cuenta (3.71)-(3.73), podemos expresar (3.70) del siguiente modo,

$$K_0\left(\beta\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{y\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\beta|x'|) \frac{K_1\left(\beta\sqrt{(x-x')^2+y^2}\right)}{\sqrt{(x-x')^2+y^2}} dx'.$$

Tomando  $X = \beta x$  e  $Y = \beta y$ , y haciendo el cambio de variable  $X' = \beta x'$ , llegamos a la integral ,

$$K_0\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right) = \frac{Y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(|X'|) \times \frac{K_1\left(\sqrt{(X-X')^2+Y^2}\right)}{\sqrt{(X-X')^2+Y^2}} dX'. \quad (3.74)$$

En el Apéndice A se ofrece un método alternativo para calcular (3.74) usando técnicas habituales de cálculo integral y variable compleja. Integrando con respecto a  $y$  entre 0 e  $\infty$ , teniendo en cuenta (3.69), resulta,

$$\frac{\pi}{2} e^{-X} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(|X'|) \left[ K_0\left(\sqrt{(X-X')^2+Y^2}\right) \right]_0^{\infty} dX'.$$

Es decir, obtenemos la siguiente integral no tabulada [16] y [20],

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_0(|u|) K_0(|x-u|) du = \frac{\pi^2}{2} e^{-x}. \quad (3.75)$$

Obsérvese que si  $x = 0$ , se recupera el resultado dado en [20, § 6.511.13],

$$\int_0^{\infty} K_0^2(u) du = \frac{\pi^2}{4}.$$

## Capítulo 4

# Rectificado seco intermitente

### 4.1. Introducción

Dado que con el *teorema*  $T^{(0)}$  podemos determinar la evolución del campo de temperaturas en el interior de la pieza rectificada en el caso seco para cualquier perfil de fricción  $d(t, x)$  entre la pieza y la muela, vamos a aplicar este resultado a muelas que tienen un perfil dentado (figura 4.1), por lo que producen una fricción intermitente sobre la muela.

### 4.2. Función de intermitencia

Vamos a modelizar la fricción de una muela dentada que puede tener contacto con la pieza en  $x \in (0, \delta)$ . A esta zona la llamaremos, por tanto, *zona de contacto*. En las figuras 4.2 y 4.3 se representa la *zona de fricción* señalada en rojo entre los límites  $a$  y  $b$  para dos instantes de tiempo diferentes  $t_1$  y  $t_2 > t_1$ . La muela tiene un periodo espacial  $\chi = \chi_0 + \chi_1$ , siendo  $\chi_0$  la zona que no produce fricción y  $\chi_1$  la que la produce. Los dientes de la muela se desplazan a una velocidad  $v_m = \omega R$  siendo  $\omega$  la velocidad angular de giro y  $R$  el radio de la muela. Cuando varios dientes de la muela entran en la zona de contacto  $[0, \delta]$  la zona de fricción queda fraccionada, véase figura 4.4. El flujo de calor entrante en la pieza  $d(t, x)$  se da, en un determinado instante  $t$ , en la zona de fricción entre la pieza y un diente  $j$  de la muela,  $x \in (a_j, b_j)$ ,  $j = 0, \dots, n + 1$ , donde puede haber hasta  $n + 2$  dientes en la zona de contacto, siendo,

$$n := \left\lfloor \frac{\delta}{\chi} \right\rfloor. \quad (4.1)$$

Obsérvese que los límites de la zona de fricción son variables en el tiempo:  $a_j = a_j(t)$  y  $b_j = b_j(t)$ . Si el flujo de calor  $q$  (unidades en el SI  $[J/m^2s]$ ) es



Figura 4.1: Perfil de una muela dentada.

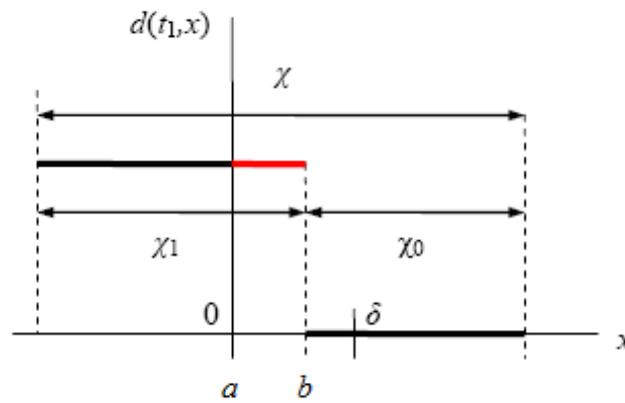


Figura 4.2: Función fricción  $d(t, x)$  para un determinado instante  $t_1$  señalada en rojo.

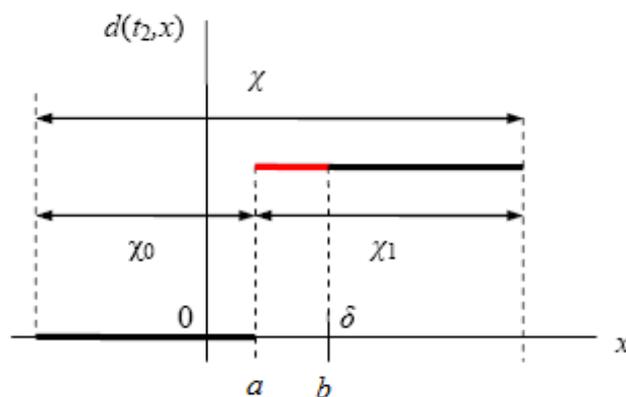


Figura 4.3: Función fricción  $d(t, x)$  para un instante  $t_2 > t_1$  señalada en rojo.

constante para todos los puntos donde hay fricción, podemos expresar la función fricción como,

$$d(t, x) = -q \sum_{j=0}^{n+1} H(x - a_j(t)) H(b_j(t) - x), \quad (4.2)$$

donde  $H(x)$  es la función escalón o de Heaviside. Para ver cuáles son los límites de cada uno de los dientes ( $j = 0, \dots, n+1$ ) que entran en la zona de contacto,  $a_j$  y  $b_j$ , vamos a definir el periodo espacial,

$$\bar{\chi} := (n+2)\chi. \quad (4.3)$$

Según la figura 4.4, los puntos  $g_j(t)$ ,  $j = 0, \dots, n+1$ , están inicialmente sobre el periodo  $\bar{\chi}$ ,

$$g_j(t) := (-1)^\phi v_m t + \bar{\chi} - j\chi. \quad (4.4)$$

donde hemos definido la siguiente variable booleana  $\phi$ , para definir el sentido del movimiento de los puntos, ( $\phi = 1$ , rectificado en fase;  $\phi = 0$ , rectificado en contraposición), véase figura 4.5. Si queremos que estos puntos, al moverse con  $t$ , se repitan sobre el periodo  $\bar{\chi}$ , podemos definir la función,

$$f_j(t) = g_j(t) - \left\lfloor \frac{g_j(t)}{\bar{\chi}} \right\rfloor \bar{\chi} \quad (4.5)$$

Como queremos que  $b_j \in [0, \delta]$ , entonces,

$$b_j(t) = \min[\max(f_j(t), 0), \delta] = \begin{cases} b_j(t) & 0 < b_j(t) < \delta \\ 0 & b_j(t) \leq 0 \\ \delta & b_j(t) \geq \delta \end{cases}. \quad (4.6)$$

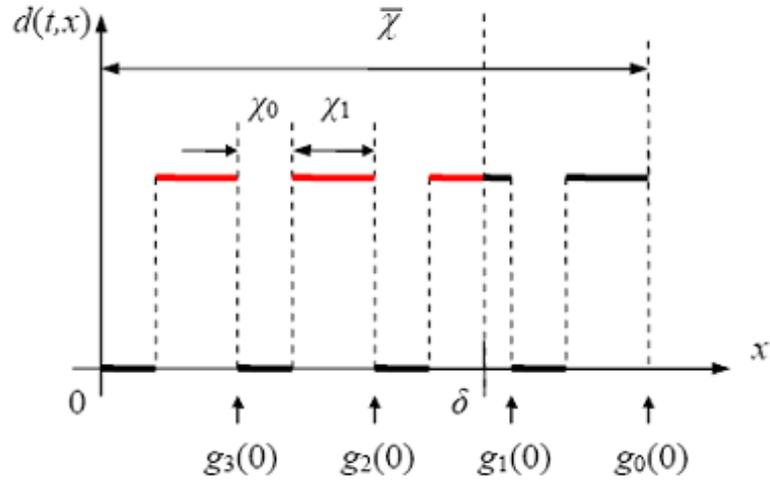


Figura 4.4: Localización de los puntos  $g_j(t)$  en  $t = 0$ , para el caso de  $n = 2$ , dentro de la función fricción  $d(t,x)$ .

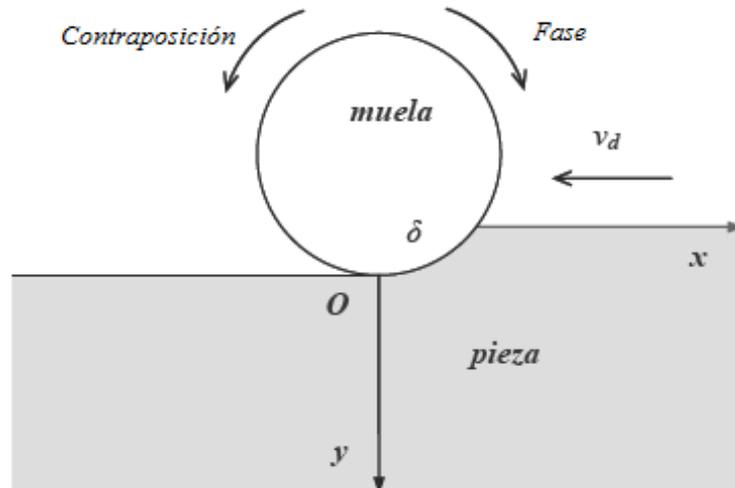


Figura 4.5: Sentidos de giro de la muela en fase y en contraposición.

Análogamente, como la anchura de un diente es  $\chi_1$

$$a_j(t) = \text{mín} [\text{máx} (f_j(t) - \chi_1, 0), \delta] \quad (4.7)$$

Las funciones mín y máx vienen dadas por las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \text{mín}(a, b) &= \frac{a + b - |a - b|}{2}, \\ \text{máx}(a, b) &= \frac{a + b + |a - b|}{2}. \end{aligned}$$

### 4.2.1. Campo de temperaturas

Sustituyendo (4.2) en (3.32), tenemos que,

$$\begin{aligned} T(t, x, y) &= \frac{q}{2\pi k_0} \int_0^t \frac{ds}{s} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \\ &\times \sum_{j=0}^n \int_{a_j(t-s)}^{b_j(t-s)} dx' \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Evaluemos la integral sobre la variable  $x'$  en (3.2),

$$I_{x'} := \sum_{j=0}^n \int_{a_j(t-s)}^{b_j(t-s)} \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx', \quad (4.9)$$

realizando el cambio,

$$u = \frac{x' - x - v_d s}{2\sqrt{ks}} \quad (4.10)$$

y teniendo en cuenta las propiedades de la función error, resulta que,

$$I_{x'} = \sqrt{\pi ks} \text{ERF}(t, x, s). \quad (4.11)$$

donde hemos definido la función,

$$\begin{aligned} \text{ERF}(t, x, s) &:= \sum_{j=0}^{n+1} \text{erf}\left(\frac{x + v_d s - a_j(t-s)}{2\sqrt{ks}}\right) \\ &- \text{erf}\left(\frac{v_d s + x - b_j(t-s)}{2\sqrt{ks}}\right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sustituyendo (4.11) en (4.8), obtenemos la siguiente expresión para  $T^{(0)}$ ,

$$T(t, x, y) = \frac{q\sqrt{k}}{2\sqrt{\pi}k_0} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \text{ERF}(t, x, s). \quad (4.13)$$

### 4.3. Régimen transitorio en el rectificado continuo

#### 4.3.1. El estado cuasi-estacionario

Obsérvese que el rectificado intermitente nunca puede alcanzar un estado estacionario, pues la fuente de calor producida por la fricción es pulsada. Este no es el caso de la fricción continua, en el que se alcanza asintóticamente el estado estacionario para  $t \rightarrow \infty$ . En el caso continuo, podemos entonces definir un tiempo de relajación  $t^*$  que dé cuenta de lo rápido que en la práctica se alcanza el estado estacionario. Este tiempo de relajación, definido para el rectificado continuo, también lo podemos utilizar como referencia para representar gráficamente el campo de temperaturas en el caso intermitente. De todas maneras, a pesar de que el rectificado intermitente no alcanza un estado estacionario, podemos definir un estado cuasi-estacionario en el que el campo de temperaturas se estabilice periódicamente. Efectivamente, obsérvese que, como las funciones  $a_j(t)$  y  $b_j(t)$  son periódicas (4.6)-(4.7), según (4.13) el estado cuasi-estacionario vendría dado por,

$$T_\infty(t, x, y) := \frac{q\sqrt{k}}{2\sqrt{\pi}k_0} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \text{ERF}(t, x, s). \quad (4.14)$$

Obsérvese que el periodo temporal de la función fricción  $d(t, x_0)$  en un punto concreto  $x = x_0$  es, véase figura 4.4,

$$\tau := \frac{\chi}{v_m}. \quad (4.15)$$

Sin embargo, considerando globalmente la gráfica de  $d(t, x)$ , el periodo temporal que hay que considerar es,

$$\bar{\tau} := \frac{\bar{\chi}}{v_m}. \quad (4.16)$$

A la vista de (3.32), podemos concluir que  $T_\infty(t, x, y)$  posee los mismos periodos puntual  $\tau$  y global  $\bar{\tau}$  que la función fricción  $d(t, x)$ .

#### 4.3.2. Estado estacionario en el rectificado continuo

Para hallar el campo de temperaturas en el caso de fricción continua, basta tomar en (4.7)-(4.6),

$$\begin{aligned} a_j(t) &= 0, \\ b_j(t) &= \delta, \end{aligned}$$

de tal modo que podemos redefinir (4.12) para el caso de fricción continua como,

$$\text{ERF}_{\text{cont}}(x, s) := \text{erf}\left(\frac{x + v_d s}{2\sqrt{ks}}\right) - \text{erf}\left(\frac{v_d s + x - \delta}{2\sqrt{ks}}\right),$$

obteniéndose, según (4.13), el siguiente campo de temperaturas,

$$T_{\text{cont}}(t, x, y) = \frac{q\sqrt{k}}{2\sqrt{\pi k_0}} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \text{ERF}_{\text{cont}}(x, s). \quad (4.17)$$

El estado estacionario se alcanza cuando el campo de temperaturas no varía con el tiempo, es decir,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (4.18)$$

En el caso de la fricción continua, derivando con respecto al tiempo en (4.17), llegamos a,

$$\frac{\partial T_{\text{cont}}(t, x, y)}{\partial t} = \frac{q\sqrt{k}}{2k_0} \frac{\text{ERF}_{\text{cont}}(x, t)}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-y^2}{4kt}\right). \quad (4.19)$$

Podemos comprobar que el estado estacionario se alcanza cuando  $t \rightarrow \infty$ . Efectivamente, teniendo en cuenta que  $\text{erf}(\pm\infty) = \pm 1$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{ERF}_{\text{cont}}(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{erf}\left(\frac{x + v_d t}{2\sqrt{kt}}\right) - \text{erf}\left(\frac{v_d t + x - \delta}{2\sqrt{kt}}\right) = 0, \quad (4.20)$$

por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial T_{\text{cont}}(t, x, y)}{\partial t} = 0. \quad (4.21)$$

### 4.3.3. Temperatura máxima

Debido a que la función error  $\text{erf}(z)$  es una función creciente  $\forall z$ , tenemos que,

$$\text{ERF}_{\text{cont}}(x, t) > 0 \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (4.22)$$

Por consiguiente, la temperatura en un determinado punto  $(x, y)$  de la pieza es una función monótona creciente,

$$\frac{\partial T_{\text{cont}}(t, x, y)}{\partial t} > 0 \quad y, t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

La ecuación (4.23) significa que la temperatura máxima se debe alcanzar en el estado estacionario,  $t \rightarrow \infty$ . Es más, de la misma manera que en (4.22), tenemos que,

$$\text{ERF}_{\text{cont}}(x, s) > 0 \quad s \in (0, t), x \in \mathbb{R},$$

por tanto, para  $y > 0$ ,

$$\frac{\partial T_{\text{cont}}(t, x, y)}{\partial y} = -\frac{qy}{4\sqrt{\pi k k_0}} \int_0^t \frac{ds}{s^{3/2}} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \text{ERF}_{\text{cont}}(x, s) < 0. \quad (4.24)$$

La ecuación (4.24) indica que la temperatura máxima debe localizarse en la superficie,  $y = 0$ . De (4.23) y (4.24), concluimos que el máximo de la temperatura se debe alcanzar en la superficie en el estado estacionario,

$$T_{\text{máx}} = \lim_{t \rightarrow \infty} T_{\text{cont}}(t, x_{\text{máx}}, 0). \quad (4.25)$$

Este resultado está de acuerdo con [10].

### Localización de la temperatura máxima

Denominando al estado estacionario con fricción continua de la siguiente manera,

$$T_{\text{cont}}(x, y) := \lim_{t \rightarrow \infty} T_{\text{cont}}(t, x, y),$$

según [14], resulta que,

$$T_{\text{cont}}(X, Y) = \mathcal{T} \int_{-X}^{\Delta-X} e^u K_0(\sqrt{u^2 + Y^2}) du, \quad (4.26)$$

donde  $K_0$  es la función modificada de Bessel de orden cero [16, Sect. 9.6.] y  $X$  e  $Y$  son coordenadas espaciales adimensionales,

$$\zeta := \frac{v_d}{2k}, \quad (4.27)$$

$$\mathcal{T} := \frac{q}{2\pi k_0 \zeta}, \quad (4.28)$$

$$Y := \zeta y, \quad (4.29)$$

$$X := \zeta x, \quad (4.30)$$

$$\Delta := \zeta \delta. \quad (4.31)$$

Según hemos visto en (4.25), la temperatura máxima se alcanza en la superficie en el estado estacionario, por tanto, hemos de analizar el máximo de la función (4.26) tomando  $Y = 0$ , es decir,

$$T_{\text{cont}}(X, 0) = \mathcal{T} \int_{-X}^{\Delta-X} e^u K_0(|u|) du, \quad (4.32)$$

Para determinar la ubicación dentro de la superficie donde se alcanza la temperatura máxima, hallemos los puntos  $X_m$  en donde la función  $T_{\text{cont}}(X, 0)$  tiene derivada nula (puntos extremos),

$$\left. \frac{dT_{\text{cont}}(X, 0)}{dX} \right|_{X=X_m} = \mathcal{T} [e^{-X_m} K_0(|X_m|) - e^{\Delta-X_m} K_0(|\Delta - X_m|)] = 0.$$

Por tanto,  $X_m$  satisface la ecuación,

$$g(X_m) = e^{\Delta}, \quad (4.33)$$

donde,

$$g(X) := \frac{K_0(|X|)}{K_0(|\Delta - X|)}. \quad (4.34)$$

El sentido de alimentación de la pieza cuando  $v_d > 0$  es el que indica la figura 1.2, por tanto, en todo lo que sigue consideraremos  $\Delta > 0$ . Además, como el flujo entrante en la pieza es una magnitud positiva,  $q > 0$ , resulta que,  $\mathcal{T} > 0$ ; y como la función  $K_0$  es positiva para argumentos positivos [16, Sect. 9.6.], el integrando de (4.32) es siempre positivo, de tal modo que,

$$T_{\text{cont}}(X, 0) > 0. \quad (4.35)$$

**Localización de los extremos** Supongamos en primer lugar que  $X_m > \Delta > 0$ , por tanto la ecuación (4.33) resulta,

$$\frac{K_0(X_m)}{K_0(X_m - \Delta)} = e^\Delta. \quad (4.36)$$

Podemos expresar (4.36) de la siguiente manera,  $h_1(\Delta) = h_1(0)$ , donde,  $h_1(\Delta) := e^\Delta K_0(X_m - \Delta)$ . Como la función  $K_0$  es positiva para argumentos positivos [16, Sect. 9.6.], resulta que  $\forall X_m > \Delta > 0$ ,

$$h_1'(\Delta) = e^\Delta [K_1(X_m - \Delta) + K_0(X_m - \Delta)] > 0,$$

es decir,  $h_1(\Delta) > h_1(0)$ , para  $X_m > \Delta > 0$ . Por tanto, concluimos que,

$$X_m \notin (\Delta, \infty). \quad (4.37)$$

Supongamos ahora que  $X_m < 0$ , de este modo la ecuación (4.33) se convierte en,

$$\frac{K_0(-X_m)}{K_0(\Delta - X_m)} = e^\Delta. \quad (4.38)$$

Haciendo el cambio  $Z = -X_m > 0$ , la ecuación (4.38) es equivalente a,  $h_2(\Delta) = h_2(0)$ , donde,  $h_2(\Delta) := e^\Delta K_0(\Delta + Z)$ . Debido a la representación integral [16, Eq. 9.6.24.],

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty \exp[-z \cosh \alpha] \cosh \nu \alpha \, d\alpha,$$

y a que  $\forall \alpha > 0$ ,  $\cosh \alpha > 1$ , resulta que  $\forall Z, \Delta > 0$ ,

$$h_2'(\Delta) = e^\Delta [K_0(\Delta + Z) - K_1(\Delta + Z)] < 0.$$

por tanto,  $h_2(\Delta) < h_2(0)$ , para  $Z, \Delta > 0$ . Es decir, la ecuación (4.38) no se cumple para  $X_m < 0$ ,

$$X_m \notin (-\infty, 0). \quad (4.39)$$

Supongamos por último que  $X \in (0, \Delta)$ , entonces  $|X| = X$  y  $|\Delta - X| = \Delta - X$ , y por tanto, de acuerdo a (4.34),

$$g(X) = \frac{K_0(X)}{K_0(\Delta - X)}, \quad X \in (0, \Delta). \quad (4.40)$$

Como  $g(X)$  es una función continua en  $X \in (0, \Delta)$  y,

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow 0^+} g(X) &= +\infty, \\ \lim_{X \rightarrow \Delta^-} g(X) &= 0, \end{aligned}$$

según el teorema de Bolzano,

$$\exists X_m \in (0, \Delta) \text{ tal que } g(X_m) = e^\Delta. \quad (4.41)$$

**Unicidad del extremo e identificación como máximo** Observemos que como  $K_0(x) > 0$  es una función positiva y decreciente  $K'_0(x) < 0$  en  $x > 0$ , [16, Sect. 9.6.] resulta que la función  $g(X)$  es monótona decreciente en  $X \in (0, \Delta)$ ,

$$g'(X) = \frac{K'_0(X) K_0(\Delta - X) + K_0(X) K'_0(\Delta - X)}{K_0^2(\Delta - X)} < 0.$$

por tanto, según (4.41),

$$\exists! X_m \in (0, \Delta) \text{ tal que } g(X_m) = e^\Delta. \quad (4.42)$$

Resumiendo, según (4.37), (4.39) y (4.42), la función  $T_{\text{cont}}(X, 0)$  presenta un único extremo en  $X_m$  y éste siempre ocurre en el intervalo  $X_m \in (0, \Delta)$ . Por otro lado, a partir de (4.32) podemos observar que,

$$\lim_{X \rightarrow \pm\infty} T_{\text{cont}}(X, 0) = \lim_{X \rightarrow \pm\infty} \mathcal{T} \int_{-X}^{\Delta-X} e^u K_0(|u|) du = 0. \quad (4.43)$$

Como  $T_{\text{cont}}(X, 0)$  es una función continua, derivable y positiva (4.35), que satisface (4.43), la única posibilidad es que el extremo  $X_m$  corresponda a un máximo, no sólo local, sino también global. Por tanto, basta computar una raíz  $X_m$  de la ecuación (4.33) en  $X \in (0, \Delta)$ , es decir tomando (4.40), para obtener,

$$x_{\text{máx}} = \frac{X_m}{\zeta}.$$

Una demostración equivalente a la presentada aquí, pero más elaborada, se puede encontrar en [28].

#### 4.3.4. Tiempo de relajación

Para dar cuenta de lo rápido que se alcanza el estado estacionario, de acuerdo con (4.18), se estará cerca del mismo, cuando para un cierto tiempo  $\bar{t}$  se cumpla que,

$$\frac{\partial T_{\text{cont}}(\bar{t}, x, y)}{\partial t} = \epsilon \approx 0. \quad (4.44)$$

Obsérvese que la ecuación (4.44) depende del punto  $(x, y)$  de la pieza elegido para evaluar  $\bar{t}$ . Podemos definir entonces el tiempo de relajación  $t^*$ , como el tiempo que satisface la ecuación (4.44) sobre el punto de máxima temperatura. Este punto estará precisamente en la zona de contacto entre pieza y muela en la superficie de la pieza,  $(x, y) = (x_{\text{máx}}, 0)$ . Por tanto, la ecuación que ha de satisfacer  $t^*$  es, según (4.19),

$$\frac{\partial T_{\text{cont}}(t^*, x_{\text{máx}}, 0)}{\partial t} = \frac{q\sqrt{k}}{2k_0} \frac{\text{ERF}(x_{\text{máx}}, t^*)}{\sqrt{\pi t^*}} = \epsilon. \quad (4.45)$$

Para resolver de manera aproximada la ecuación dada en (4.45), podemos hacer un desarrollo de Taylor a primer orden de la siguiente función,

$$g(t, \chi) := \text{erf}\left(\frac{v_d}{2\sqrt{k}}\sqrt{t} + \frac{\chi}{2\sqrt{kt}}\right) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \text{erf}\left(\frac{v_d}{2\sqrt{k}}\sqrt{t}\right) + \frac{\chi}{\sqrt{\pi kt}} \exp\left(-\frac{v_d^2 t}{4k}\right).$$

Por consiguiente,

$$\text{ERF}(x, t) = g(t, x) - g(t, x - \delta) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\delta}{\sqrt{\pi k t}} \exp\left(-\frac{v_d^2 t}{4k}\right). \quad (4.46)$$

Sustituyendo (4.46) en (4.45), tenemos la siguiente ecuación aproximada,

$$\frac{q\delta}{2\pi k_0 t^*} \exp\left(-\frac{v_d^2 t^*}{4k}\right) \approx \epsilon. \quad (4.47)$$

Para despejar (4.47), planteemos la siguiente ecuación,

$$\beta \frac{e^{-\lambda t}}{t} = 1.$$

Operando,

$$\lambda \beta = \lambda t e^{\lambda t}. \quad (4.48)$$

La función  $W$  de Lambert [27] se define como la función inversa de la función  $f(w) = we^w$ . Por tanto, podemos despejar de (4.48), obteniendo,

$$t = \frac{W(\lambda\beta)}{\lambda}. \quad (4.49)$$

Tomando en (4.47),

$$\beta = \frac{q\delta}{2\pi k_0 \epsilon}, \quad \lambda = \frac{v_d^2}{4k},$$

podemos despejar el tiempo de relajación, aplicando (4.49),

$$t^* \approx \frac{4k}{v_d^2} W\left(\frac{q\delta v_d^2}{8\pi k k_0 \epsilon}\right). \quad (4.50)$$

Podemos darnos cuenta que la aproximación obtenida en (4.50) es mucho más rápida de computar que (4.45), pues es una fórmula directa que no precisa calcular el punto de máxima temperatura  $x_{\text{máx}}$ . En el Apéndice C se detalla el código en MATHEMATICA para determinar el tiempo de relajación según (4.45).

## 4.4. Resultados numéricos

Se han tomado como parámetros de rectificado  $\delta = 2,663 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $v_d = 0,53 \text{ m/s}$  y  $q = 5,89 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2$ , siendo las propiedades térmicas de la pieza las de una aleación de titanio VT20 [24]-[25]:  $k_0 = 13 \text{ W/(mK)}$  y  $k = 4,23 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Tomando un parámetro  $\epsilon = 10^{-6} \text{ K/s}$ , obtenemos, tanto para la ecuación exacta (4.45), como para la aproximación obtenida (4.50), los siguientes resultados para el tiempo de relajación,

$$t^* = 8,3013 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \quad t^* \approx 1,6727 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Nótese que la aproximación obtenida para el tiempo de relajación coincide con la solución exacta en el orden de magnitud. La temperatura máxima alcanzada en el rectificado continuo y su localización sobre la superficie de la pieza son,

$$T_{\text{máx}} = 742,23 \text{ K}, \quad x_{\text{máx}} = 7,1568 \cdot 10^{-3} \delta.$$

Para la fricción intermitente se han tomado en las funciones dadas en (4.1), (4.3), (4.4) y (4.7), los siguientes parámetros de entrada en el perfil de la muela dentada:  $\chi = 0,7 \delta$  y  $\chi_1 = 0,5 \delta$ , y una velocidad de la muela sobre la superficie de la pieza  $v_m = \delta/t^*$ . Según estos datos, el periodo puntual del cuasi-estacionario es  $\tau = 0,7 t^*$ ; y el periodo global,  $\bar{\tau} = 2,1 t^*$ .

En las figuras 4.6, 4.7 y 4.8 se muestra la evolución temporal de la temperatura en la superficie de la pieza para  $t \in (0, t^*)$ , en los casos continuo, intermitente en fase e intermitente en contraposición, respectivamente. Como se puede apreciar, la evolución temporal del rectificado en fase y contraposición es muy diferente a la una de la otra, pero en ambos casos, el perfil del continuo supone una frontera límite.

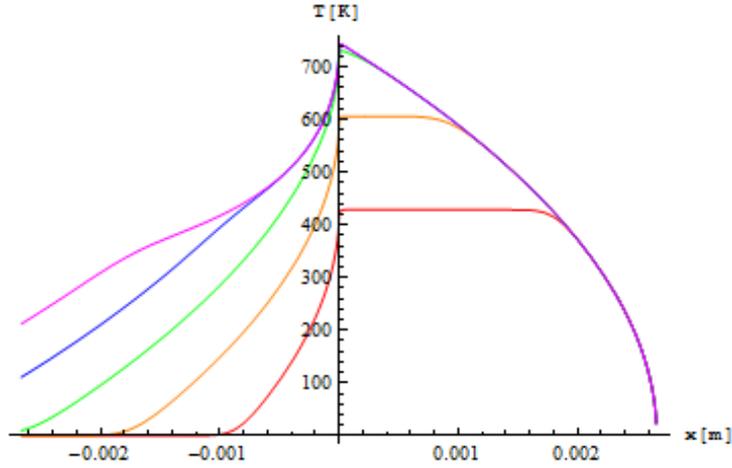


Figura 4.6: Evolución temporal de  $T_{\text{cont}}(t, x, 0)$  para  $x \in (-\delta, \delta)$  y  $t = t^*m/5$ , con  $m = 1, 2, 3, 4, 5$  (rojo, naranja, verde, azul y violeta respectivamente).

En la figura 4.9 se compara la evolución de la temperatura en  $x_{\text{máx}}$  tanto para el rectificado intermitente (en fase y en contraposición) como para el continuo. En primer lugar, destaquemos que el tiempo de relajación obtenido para el continuo es una buena medida del tiempo del transitorio en el rectificado intermitente. También se puede observar cómo en el rectificado en fase la temperatura casi se satura con respecto al continuo, lo cual no ocurre en el rectificado en contraposición. La temperatura máxima alcanzada en el rectificado

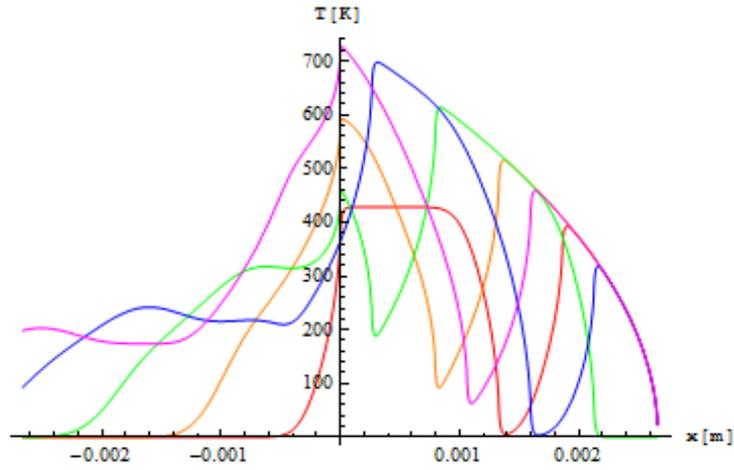


Figura 4.7: Evolución temporal de  $T(t, x, 0)$  para  $x \in (-\delta, \delta)$  y  $t = t^* m/5$ , con  $m = 1, 2, 3, 4, 5$ , (rojo, naranja, verde, azul y violeta, respectivamente) en el caso del rectificado en fase.

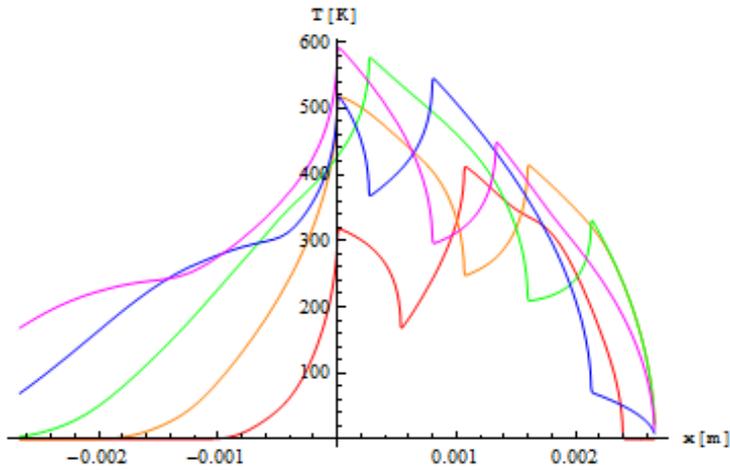


Figura 4.8: Evolución temporal de  $T(t, x, 0)$  para  $x \in (-\delta, \delta)$  y  $t = t^* m/5$ , con  $m = 1, 2, 3, 4, 5$ , (rojo, naranja, verde, azul y violeta, respectivamente) en el caso del rectificado en contraposición.

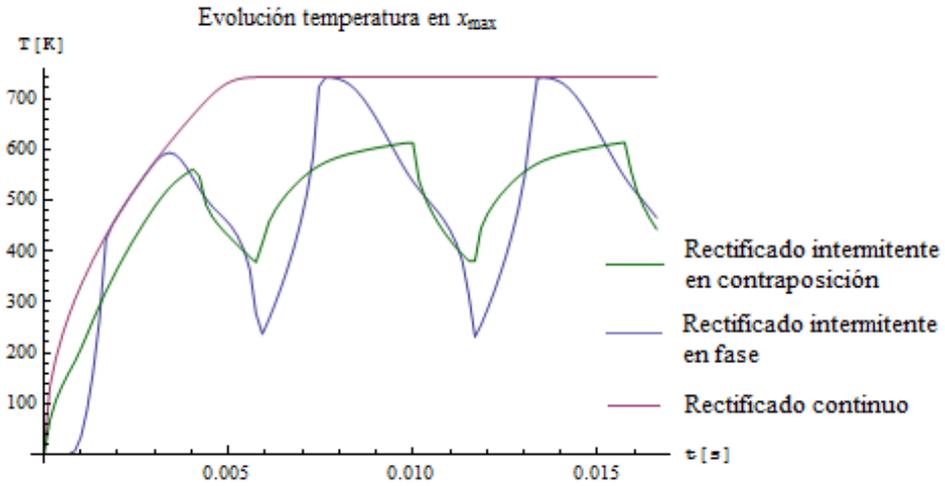


Figura 4.9: Evolución temporal de  $T_{\text{cont}}(t, x_{\text{máx}}, 0)$  y  $T(t, x_{\text{máx}}, 0)$ , para  $t \in (0, 2t^*)$ .

en fase y contraposición se puede evaluar numéricamente, obteniéndose,

$$T_{\text{máx}}^{\text{fase}} = 741,41 \text{ K} \quad T_{\text{máx}}^{\text{contra}} = 591,29 \text{ K}.$$

En la figura 4.10 se presenta la evolución temporal del estado cuasi-estacionario en superficie para un periodo de fricción  $\bar{\tau}$ . Obsérvese cómo para  $x < 0$ , la temperatura oscila de forma ondulatoria. Esto es debido a que los pulsos de flujo de calor que se producen en la zona de fricción se propagan por la superficie de la pieza a medida que ésta se va rectificando. En la figura 4.11 se presenta la evolución temporal de la temperatura en  $x_{\text{máx}}$  para  $t \in (0, 2\tau)$ . En primer lugar, se puede comprobar que el estado cuasiestacionario tiene periodo  $\tau$  tal y como se comentó en (4.15). Por otro lado, se puede apreciar cómo se alcanza el estado cuasi-estacionario cuando la temperatura en el continuo se ha saturado. Por tanto, una buena medida de cuándo se alcanza el cuasi-estacionario es el tiempo de relajación  $t^*$ . En las figuras 4.13 y 4.14 se han representado los campos de temperaturas en el instante  $t = t^*$ , cuando tenemos un rectificado intermitente en fase y en contraposición respectivamente. Se puede observar que el campo de temperaturas en fase y contraposición difieren entre sí bastante. A su vez, si comparamos el caso intermitente con el continuo, figura 4.12, podemos observar que la intermitencia en la fricción distorsiona el campo de temperaturas de tal modo que se producen ondas térmicas en el interior de la pieza rectificada. En el Apéndice C se detallan los códigos en MATHEMATICA de todas las gráficas que aparecen en esta sección.

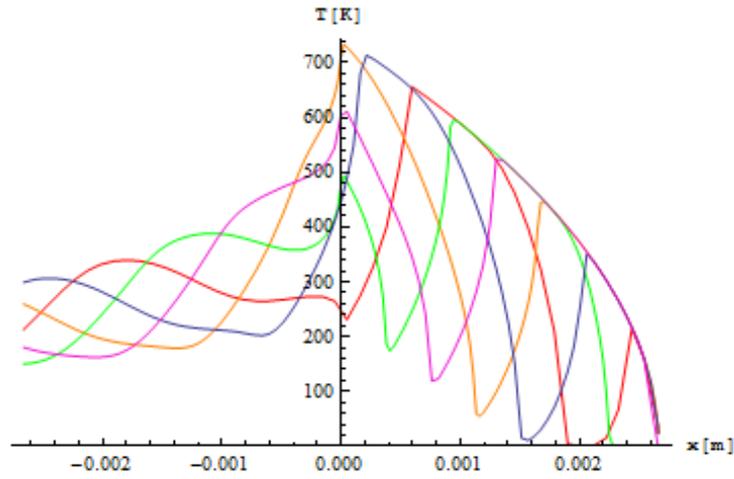


Figura 4.10: Evolución temporal de  $T_\infty(t, x, y)$  para  $x \in (-\delta, \delta)$  y  $t = m\bar{\tau}/5$ , con  $m = 1, 2, 3, 4, 5$ , (rojo, naranja, verde, azul y violeta, respectivamente).

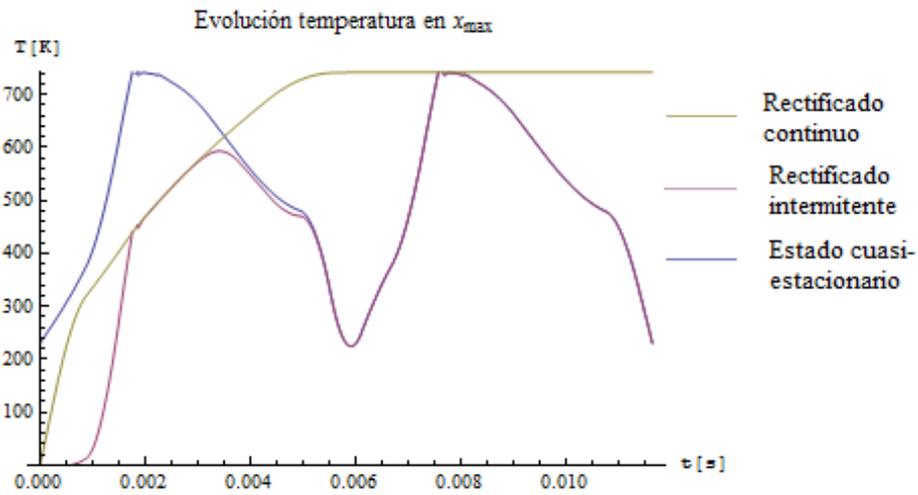


Figura 4.11: Comparación de la evolución temporal de la temperatura en  $x_{\text{máx}}$  para  $t \in (0, 2\tau)$ .

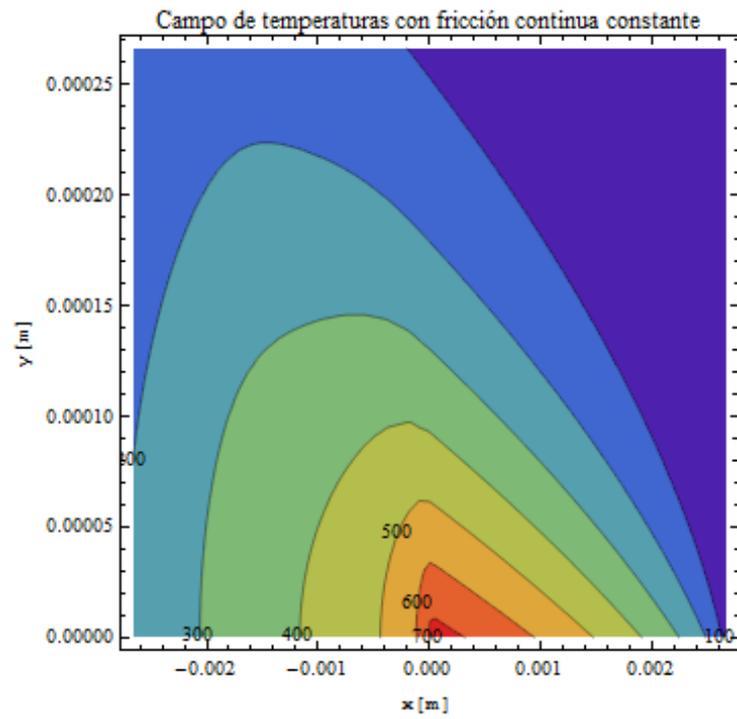


Figura 4.12: Campo de temperaturas  $T_{\text{cont}}(t^*, x, y)$  para  $(x, y) \in (-\delta, \delta) \times (0, \delta/10)$ . Las curvas de nivel ofrecen la temperatura en grados  $K$ .

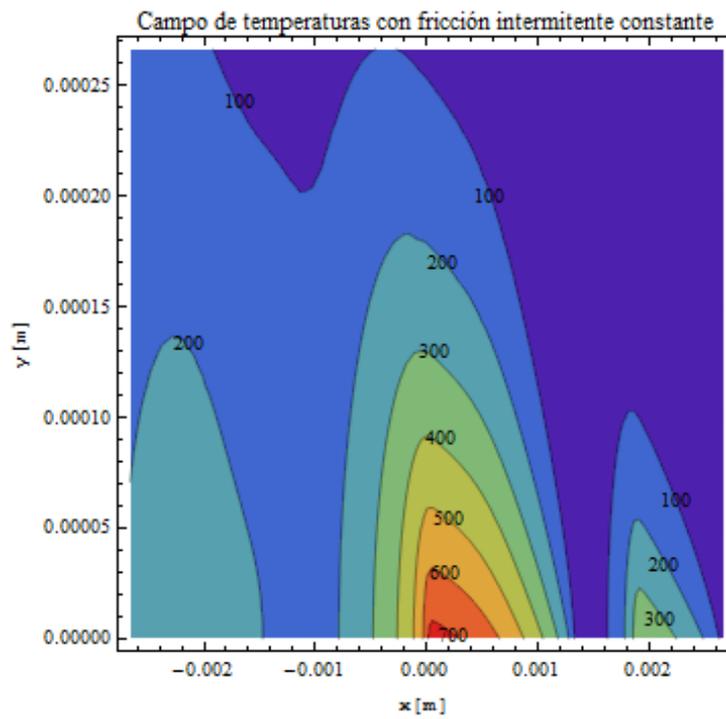


Figura 4.13: Campo de temperaturas  $T(t^*, x, y)$  para  $(x, y) \in (-\delta, \delta) \times (0, \delta/10)$ , en el caso de rectificadío en fase. Las curvas de nivel ofrecen la temperatura en grados  $K$ .

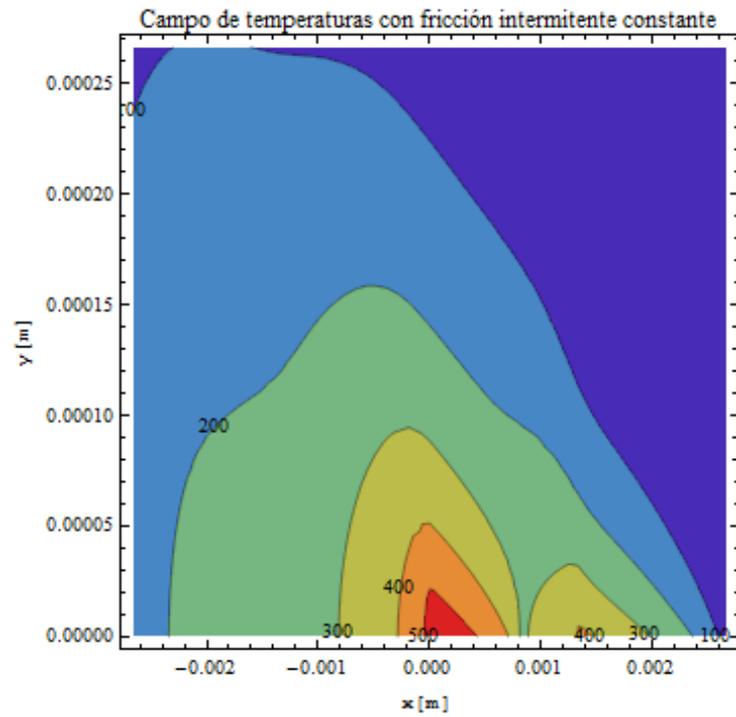


Figura 4.14: Campo de temperaturas  $T(t^*, x, y)$  para  $(x, y) \in (-\delta, \delta) \times (0, \delta/10)$  en el caso de rectificado en contraposición. Las curvas de nivel ofrecen la temperatura en grados  $K$ .

## Capítulo 5

# Conclusiones

En la presente memoria tratamos el modelo matemático de transmisión de calor en el rectificado plano industrial con el modelo SV (Samara-Valencia). Este modelo ofrece la evolución del campo de temperaturas en la pieza rectificada para cualquier perfil de fricción y de aplicación de fluido refrigerante, pudiendo ser ambos perfiles dependientes del tiempo.

Este modelo desarrolla un enfoque del problema fundamentalmente analítico, de tal manera que una razonable simplificación de las hipótesis en las que se basa este modelo permite reducir notablemente la complejidad de las ecuaciones diferenciales que rigen el proceso real. Esta simplificación hace posible abordar la ecuación diferencial que modeliza el proceso de transmisión de calor con técnicas matemáticas avanzadas. De este modo, el modelo SV obtiene una solución al problema en forma de ecuación integral. Dicha ecuación integral se puede abordar numéricamente de una manera mucho más sencilla que la resolución numérica directa de la ecuación diferencial. Es más, se ha computado con éxito para ciertos casos realistas de rectificado con fricción y aplicación de refrigerante intermitente [19]. La principal ventaja del modelo SV consiste en que otorga una solución analítica mucho más general que la ofrecida por el modelo clásico de Jaeger, pues este último sólo obtiene la solución para el rectificado seco y fricción continua en el estado estacionario. De hecho, se ha podido comprobar la compatibilidad entre ambos modelos particularizando el modelo SV al modelo clásico de Jaeger [10].

A continuación se presentan las principales conclusiones originales de este trabajo:

1. Se ha resuelto la ecuación integral que plantea el modelo SV para el caso de rectificado seco. Este resultado se ha denominado *teorema  $T^{(0)}$* . De este modo, se ha obtenido una solución analítica explícita de la evolución del campo de temperaturas en la pieza rectificada para cualquier perfil de fricción entre la pieza y la muela.
2. Se ha demostrado que la solución que ofrece el *teorema  $T^{(0)}$*  es única.

3. A partir del *teorema*  $T^{(0)}$ , se han encontrado dos nuevas relaciones integrales que involucran funciones especiales.
4. Se ha resuelto analíticamente un caso de interés tecnológico: el rectificado seco intermitente, tanto en fase como en contraposición, ofreciéndose una expresión del tiempo de relajación del estado cuasi-estacionario.
5. Se ha comprobado numéricamente que la evolución del campo de temperaturas para el rectificado intermitente en fase y en contraposición son muy diferentes.
6. Se ha comprobado numéricamente que el perfil de la temperatura sobre la superficie en el rectificado continuo es una frontera límite para el rectificado intermitente. También se ha comprobado numéricamente que el tiempo de relajación para el rectificado continuo es una también una buena medida para el rectificado intermitente.
7. Para la visualización de los resultados que ilustran la tesis se presentan una serie de códigos elaborados en MATHEMATICA que permiten evaluar el campo térmico en distintos casos.
8. Todas estas conclusiones han sido presentadas en los siguientes artículos de investigación:
  - P. Castañeda, J. L. G. Santander, “Cálculo de algunas integrales en el proceso de transferencia de calor en el rectificado de piezas”. *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación* **7** (2009) 51.
  - J. L. G. Santander, P. Castañeda, Yu. L. Ratis, J.M. Isidro, P. Fernández de Córdoba, “Calculation of some integrals arising in heat transfer in grinding”, *Mathematical Problems in Engineering*, doi: 10.1155/2010/535801.
  - J. L. G. Santander, P. Castañeda Porras, J. M. Isidro, and P. Fernández de Córdoba, “Calculation of some integrals arising in heat transfer in geothermics”, *Mathematical Problems in Engineering*, doi: 10.1155/2010/784794.

# Apéndice A

## Integrales del rectificado seco

En este Apéndice se recogen los resultados aparecidos en [29].

### A.1. Introducción

En la resolución de la ecuación que modela la transferencia de calor durante el proceso de rectificado [18], aparecen integrales [28] de la siguiente forma:

$$I_1(a, b, c) := \int_0^\infty \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{a}{\sigma} + b\sigma \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{a-c}{\sigma} + b\sigma \right) \right] d\sigma, \quad (\text{A.1})$$

e

$$I_2(x, y) := \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^\infty K_0(|x - \xi|) \frac{K_1(\sqrt{y^2 + \xi^2})}{\sqrt{y^2 + \xi^2}} d\xi, \quad (\text{A.2})$$

las cuales no han sido recogidas en la bibliografía [20]. Las integrales (A.1) y (A.2) se utilizan para la evaluación de la temperatura en la superficie y el interior de la pieza respectivamente. Aunque (A.1) y (A.2) pueden ser calculadas usando la unicidad de la solución de la ecuación de Laplace, como en [28], este método precisa de un enfoque del problema más amplio y complejo, por lo que su derivación resulta muy laboriosa. Por el contrario, el presente trabajo ofrece una forma directa de resolución basado en métodos elementales de cálculo integral y el uso de la variable compleja. Por otro lado, el cálculo de estas integrales impropias, las cuales muestran una dependencia de los parámetros  $a$ ,  $b$ , y  $c$  para  $I_1$  y en  $x$  e  $y$  para  $I_2$  es costoso desde el punto de vista de su evaluación numérica, con el objetivo de obtener el campo de temperaturas, tanto en superficie como en profundidad. Por tanto, el propósito principal de este trabajo es la resolución analítica de (A.1) y (A.2), de tal modo que la evaluación del campo de temperaturas pueden hacerse más rápidamente.

## A.2. Primera integral

Para calcular la integral (A.1) partiremos de la integral doble dada en (A.3) y procederemos a resolverla de dos maneras diferentes. Comparando los resultados obtenidos, obtendremos la resolución de (A.1). Definamos,

$$I := \int_0^\infty \left\{ \int_0^c \exp\left(-\frac{(x-a-4bs)^2}{4s}\right) dx \right\} \frac{ds}{s}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son parámetros de la integral.

### A.2.1. Primer cálculo

Aplicando el teorema de Fubini a (A.3), podemos cambiar el orden de la integral, obteniendo,

$$I = \int_0^c \left\{ \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-a-4bs)^2}{4s}\right) \frac{ds}{s} \right\} dx. \quad (\text{A.4})$$

Definiendo la integral interna de (A.4) como  $\hat{I}$

$$\hat{I} := \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-a-4bs)^2}{4s}\right) \frac{ds}{s} \quad (\text{A.5})$$

y desarrollando el exponente de la función exponencial dentro de (A.4) como,

$$-\frac{(x-a-4bs)^2}{4s} = -\frac{(x-a)^2}{4s} - 4b^2s + 2b(x-a). \quad (\text{A.6})$$

resulta que,

$$\hat{I} = e^{2b(x-a)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4s} - 4b^2s\right) \frac{ds}{s}. \quad (\text{A.7})$$

Realicemos ahora el cambio de variable  $\sigma = 4b^2s$  en (A.7) y definamos la variable  $z$  como,

$$z := |2b(x-a)|, \quad (\text{A.8})$$

de tal manera que (A.7) se convierte en,

$$\hat{I} = e^{2b(x-a)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{4\sigma} - \sigma\right) \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (\text{A.9})$$

Conociendo la representación integral de la función de Bessel modificada de orden cero [12, § 5.10.25],

$$K_0(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\sigma - \frac{z^2}{4\sigma}\right) \sigma^{-1} d\sigma. \quad (\text{A.10})$$

y sustituyendo (A.10) en (A.9), obtenemos,

$$\hat{I} = 2e^{2b(x-a)} K_0(z). \quad (\text{A.11})$$

Recordando la definición de  $z$  dada en (A.8) y sustituyendo (A.11) en (A.4), encontramos la siguiente expresión para  $I$ ,

$$I = 2 \int_0^c e^{2b(x-a)} K_0(|2b(x-a)|) dx. \quad (\text{A.12})$$

Ahora, llevando a cabo en (A.12) el cambio de variable  $u = 2b(x-a)$ , se obtiene,

$$I = \frac{1}{b} \int_{-2ba}^{2b(c-a)} e^u K_0(|u|) du. \quad (\text{A.13})$$

En la sección A.4 se muestra que la función definida como,

$$\text{Jg}(x) := \int_0^x e^u K_0(|u|) du \quad (\text{A.14})$$

da como resultado,

$$\text{Jg}(x) = \begin{cases} xe^x [K_0(|x|) + \text{sign}(x) K_1(|x|)] - 1 & \forall x \neq 0. \\ 0 & \forall x = 0. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Por tanto, según (A.15), la ecuación (A.13) puede escribirse como,

$$I = \frac{1}{b} \{ \text{Jg}(2b(c-a)) - \text{Jg}(-2ba) \}. \quad (\text{A.16})$$

### A.2.2. Segundo cálculo

Consideremos ahora la integral interna en (A.3),

$$\bar{I} := \int_0^c \exp\left(-\frac{(x-a-4bs)^2}{4s}\right) dx. \quad (\text{A.17})$$

Realizando el siguiente cambio de variable en (A.17)  $u = \frac{x-a-4bs}{2\sqrt{s}}$ , se obtiene,

$$\bar{I} = 2\sqrt{s} \int_{-\frac{a+4bs}{2\sqrt{s}}}^{\frac{c-a-4bs}{2\sqrt{s}}} e^{-u^2} du. \quad (\text{A.18})$$

Es posible reescribir (A.18) en términos de la función error como sigue,

$$\bar{I} = \sqrt{\pi s} \left[ \text{erf}\left(\frac{c-a-4bs}{2\sqrt{s}}\right) + \text{erf}\left(\frac{a+4bs}{2\sqrt{s}}\right) \right]. \quad (\text{A.19})$$

De este modo, sustituyendo (A.19) in (A.3), se obtiene,

$$I = \sqrt{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}} \left[ \text{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{s}} + 2b\sqrt{s}\right) - \text{erf}\left(\frac{a-c}{2\sqrt{s}} + 2b\sqrt{s}\right) \right] ds. \quad (\text{A.20})$$

Si ahora realizamos el cambio de variable  $\sigma = 2\sqrt{s}$  en (A.20), entonces la ecuación (A.20) se convierte en,

$$I = \sqrt{\pi} \int_0^\infty \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{a}{\sigma} + b\sigma \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{a-c}{\sigma} + b\sigma \right) \right] d\sigma. \quad (\text{A.21})$$

### A.2.3. Comparación

Comparando las ecuaciones (A.16) y (A.21) y recordando la definición dada en (A.1), finalmente se obtiene,

$$I_1(a, b, c) = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \{ \operatorname{Jg}(2b(c-a)) - \operatorname{Jg}(-2ba) \}, \quad (\text{A.22})$$

donde la función de  $\operatorname{Jg}(x)$  viene dada por (A.15).

## A.3. Segunda Integral

Para calcular la segunda integral definida en (A.2), hagamos la traslación de coordenadas,  $\xi' = x - \xi$ , de tal manera que,

$$I_2(x, y) = \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(|\xi'|) \frac{K_1\left(\sqrt{y^2 + (\xi' + x)^2}\right)}{\sqrt{y^2 + (\xi' + x)^2}} d\xi'. \quad (\text{A.23})$$

Definamos la integral compleja  $C$ , como se presenta en la figura A.1.

$$I_C(x, y) := \frac{|y|}{\pi} \int_C K_0(|\xi'|) \frac{K_1\left(\sqrt{y^2 + (\xi' + x)^2}\right)}{\sqrt{y^2 + (\xi' + x)^2}} d\xi'. \quad (\text{A.24})$$

Obsérvese que la integral compleja dada en (A.24) se puede desglosar de la siguiente manera,

$$I_C(x, y) = I_R^-(x, y) + I_R^+(x, y) + I_{C_R}(x, y) + I_{C_\epsilon}(x, y), \quad (\text{A.25})$$

donde hemos definido,

$$I_R^\pm(x, y) := \mp \frac{|y|}{\pi} \int_{\pm R}^{\pm\epsilon} K_0(|\xi'|) \frac{K_1\left(\sqrt{y^2 + (\xi' + x)^2}\right)}{\sqrt{y^2 + (\xi' + x)^2}} d\xi', \quad (\text{A.26})$$

y

$$I_{C_{R,\epsilon}}(x, y) := \frac{|y|}{\pi} \int_{C_{R,\epsilon}} K_0(|\xi'|) \frac{K_1\left(\sqrt{y^2 + (\xi' + x)^2}\right)}{\sqrt{y^2 + (\xi' + x)^2}} d\xi', \quad (\text{A.27})$$

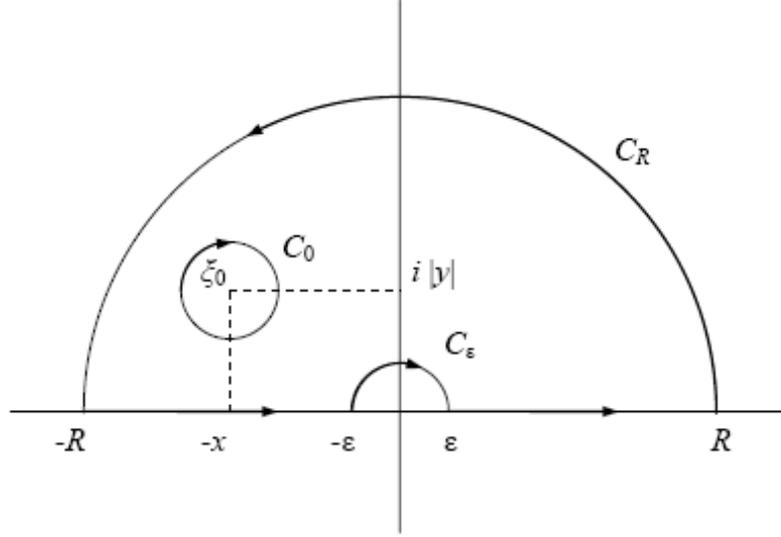


Figura A.1: Caminos de integración.

siendo  $C_R$  y  $C_\epsilon$  las semi-circunferencias que aparecen en la figura A.1. Tomando valores absolutos en (A.27) y realizando los cambios de variable  $\xi' = R e^{i\theta}$  y  $\xi' = \epsilon e^{i\theta}$  a lo largo de  $I_{C_R}$  y  $I_{C_\epsilon}$  respectivamente, se obtiene,

$$|I_{C_R}(x, y)| = \left| \frac{yR}{\pi} K_0(R) \int_0^\pi \frac{K_1\left(\sqrt{y^2 + (R e^{i\theta} + x)^2}\right)}{\sqrt{y^2 + (R e^{i\theta} + x)^2}} d\theta \right|, \quad (\text{A.28})$$

y

$$|I_{C_\epsilon}(x, y)| = \left| \frac{y\epsilon}{\pi} K_0(\epsilon) \int_0^\pi \frac{K_1\left(\sqrt{y^2 + (\epsilon e^{i\theta} + x)^2}\right)}{\sqrt{y^2 + (\epsilon e^{i\theta} + x)^2}} d\theta \right|. \quad (\text{A.29})$$

Efectuando el siguiente limite en (A.28),

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} |I_{C_R}(x, y)| &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{yR}{\pi} K_0(R) \int_0^\pi \frac{K_1(R)}{R} d\theta \right| \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} |y K_0(R) K_1(R)| = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Tomando en cuenta la fórmula asintótica [12, § 5.7.12],

$$K_0(z) \underset{z \rightarrow 0^+}{\sim} \log\left(\frac{2}{z}\right),$$

se pueden calcular los siguientes límites en (A.29),

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} |I_{C_\epsilon}(x, y)| &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left| \frac{y\epsilon}{\pi} K_0(\epsilon) \int_0^\pi \frac{K_1\left(\sqrt{y^2 + x^2}\right)}{\sqrt{y^2 + x^2}} d\theta \right| \\ &= \left| y \frac{K_1\left(\sqrt{y^2 + x^2}\right)}{\sqrt{y^2 + x^2}} \right| \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \log\left(\frac{2}{\epsilon}\right) \right| = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Obsérvese que según (A.26) y (A.31), el siguiente límite se satisface,

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0^+} I_R^-(x, y) + I_R^+(x, y) = I_2(x, y). \quad (\text{A.32})$$

Entonces tomando los límites en (A.25) y aplicando los resultados (A.32) y (A.30), se concluye que,

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0^+} I_C(x, y) = I_2(x, y). \quad (\text{A.33})$$

Debido a que el integrando en (A.24) contiene una única singularidad dentro del contorno  $C$  en el punto,

$$\xi_0 = -x + i|y|, \quad (\text{A.34})$$

podemos aplicar el teorema de los residuos [23], de tal modo que podemos reducir el contorno de  $C$  a un contorno  $C_0$  alrededor de la vecindad del punto  $\xi_0$ , como se muestra en la figura A.1. Entonces, según (A.33),

$$I_{C_0}(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0^+} I_C(x, y) = I_2(x, y), \quad (\text{A.35})$$

donde,

$$I_{C_0}(x, y) := \frac{|y|}{\pi} \int_{C_0} K_0(|\xi'|) \frac{K_1\left(\sqrt{y^2 + (\xi' + x)^2}\right)}{\sqrt{y^2 + (\xi' + x)^2}} d\xi'. \quad (\text{A.36})$$

Tomando el contorno circular  $C_0$  alrededor  $\xi_0$ , se puede realizar en (A.36) el cambio de variable  $\xi' = \xi_0 + \eta e^{i\theta}$ ,

$$\begin{aligned} I_{C_0}(x, y) &= i\eta \frac{|y|}{\pi} \int_0^{2\pi} K_0(|\xi_0 + \eta e^{i\theta}|) \\ &\quad \times \frac{K_1\left(\sqrt{y^2 + (\xi_0 + \eta e^{i\theta} + x)^2}\right)}{\sqrt{y^2 + (\xi_0 + \eta e^{i\theta} + x)^2}} e^{i\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Tomando ahora en cuenta la fórmula asintótica [12, § 5.7.12],

$$K_1(z) \underset{z \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{z}, \quad (\text{A.38})$$

se puede calcular el siguiente limite en (A.37),

$$\begin{aligned} I_{C_0}(x, y) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} I_{C_0}(x, y) \\ &= i \frac{|y|}{\pi} K_0(|\xi_0|) \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \eta \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} d\theta}{y^2 + (\xi_0 + \eta e^{i\theta} + x)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Sustituyendo el valor de  $\xi_0$  (A.34) en (A.39) y simplificando,

$$\begin{aligned} I_{C_0}(x, y) &= i \frac{|y|}{\pi} K_0(|\xi_0|) \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\eta e^{i\theta} + 2i|y|} \\ &= K_0(|\xi_0|) = K_0(\sqrt{x^2 + y^2}). \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Finalmente, de (A.35) y (A.40), se concluye que,

$$I_2(x, y) = K_0(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

## A.4. La función de Jg (x)

Para resolver la integral (A.13), nos podemos basar en el siguiente resultado, conocido como la integral de King [17],

$$\int_0^x e^{\pm u} K_0(u) du = xe^{\pm x} [K_0(x) \pm K_1(x)] \mp 1. \quad (\text{A.41})$$

Definamos la función Jg (x) como,

$$\text{Jg}(x) := \int_0^x e^u K_0(|u|) du. \quad (\text{A.42})$$

Para resolver (A.42), podemos distinguir tres casos diferentes,  $x > 0$ ,  $x < 0$  y  $x = 0$ .

### A.4.1. Jg (x) para $x > 0$ .

Haciendo uso de la integral de King (A.41) se obtiene,

$$\begin{aligned} \text{Jg}(x) &= \int_0^x e^u K_0(u) du \\ &= xe^x [K_0(x) + K_1(x)] - 1. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

### A.4.2. Jg (x) para $x < 0$

Si se realiza en (A.42) el cambio de variable  $u = -u'$ , se obtiene,

$$\begin{aligned} \text{Jg}(x) &= \int_0^x e^u K_0(-u) du \\ &= - \int_0^{-x} e^{-u'} K_0(u') du'. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Aplicando ahora en (A.44) el resultado dado por la integral de King (A.41),

$$\text{Jg}(x) = xe^x [K_0(-x) - K_1(-x)] - 1. \quad (\text{A.45})$$

### A.4.3. Jg(x) para $x = 0$

Se puede reescribir (A.43) y (A.45) como una expresión única para  $x \neq 0$

$$\text{Jg}(x) = xe^x [K_0(|x|) + \text{sign}(x) K_1(|x|)] - 1, \quad (\text{A.46})$$

donde,

$$\text{sign}(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0. \quad (\text{A.47})$$

Para evaluar Jg(x) en  $x = 0$ , podemos resolver el siguiente límite,

$$\text{Jg}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} xe^x [K_0(|x|) + \text{sign}(x) K_1(|x|)] - 1. \quad (\text{A.48})$$

Aplicando ahora la representación asintótica de  $K_0$  y  $K_1$ , [12, § 5.7.12],

$$K_0(z) \underset{z \rightarrow 0^+}{\sim} \log\left(\frac{2}{z}\right), \quad K_1(z) \underset{z \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{z}, \quad (\text{A.49})$$

y tomando en cuenta (A.47), podemos evaluar (A.48),

$$\begin{aligned} \text{Jg}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} xe^x \left[ \log\left(\frac{2}{|x|}\right) + \frac{|x|}{x} \frac{1}{|x|} \right] - 1 \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} x \log\left(\frac{|x|}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Finalmente, según (A.46) y (A.50), se puede expresar Jg(x) de la siguiente manera,

$$\text{Jg}(x) = \begin{cases} xe^x [K_0(|x|) + \text{sign}(x) K_1(|x|)] - 1 & \forall x \neq 0. \\ 0 & \forall x = 0. \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

## Apéndice B

# Integral Auxiliar

Queremos calcular,

$$I = \int_0^{\infty} \cosh(\alpha x) K_0(\beta x) dx. \quad (\text{B.1})$$

Para ello, desglosemos la integral (B.1) en dos partes,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{\alpha x} K_0(\beta x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} K_0(\beta x) dx. \quad (\text{B.2})$$

Evaluemos, por tanto,

$$I_{\pm\alpha} := \int_0^{\infty} e^{\pm\alpha x} K_0(\beta x) dx. \quad (\text{B.3})$$

Introduciendo la representación integral de la función de Macdonald de orden cero [12, § 5.10.23],

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} \exp(-x \cosh t) dt \quad (\text{B.4})$$

en (B.4), e intercambiando el orden de integración resulta,

$$\begin{aligned} I_{\pm\alpha} &:= \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dx \exp[-(\mp\alpha + \beta \cosh t)] x \\ &= - \int_0^{\infty} dt \left[ \frac{\exp[-(\mp\alpha + \beta \cosh t)] x}{\mp\alpha + \beta \cosh t} \right]_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Observemos que si  $\beta > |\alpha|$  tenemos que,

$$I_{\pm\alpha} := \int_0^{\infty} \frac{dt}{\mp\alpha + \beta \cosh t}. \quad (\text{B.5})$$

Para llevar a cabo (B.5), hagamos el cambio,  $z = \tanh t/2$ , de tal manera que,

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\alpha + \beta \cosh t} &= \frac{2}{\alpha + \beta} \int \frac{dz}{1 + \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} z^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}} z \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}} \tanh \frac{t}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Aplicando (B.6) a (B.5), tenemos que,

$$\begin{aligned} I_{\pm\alpha} &= \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\beta \pm \alpha}{\beta \mp \alpha}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \cos^{-1} \left( \mp \frac{\alpha}{\beta} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

debido a que se cumple la identidad,  $2 \tan^{-1} x = \cos^{-1} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ . Como también se cumple que  $\sin^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$ , podemos expresar (B.7) de la siguiente manera,

$$I_{\alpha} = \frac{\pi - \cos^{-1} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \quad (\text{B.8})$$

$$I_{-\alpha} = \frac{\cos^{-1} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}. \quad (\text{B.9})$$

Sustituyendo (B.8) y (B.9) en (B.2), resulta finalmente,

$$\int_0^{\infty} \cosh(\alpha x) K_0(\beta x) dx = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \quad \beta > |\alpha|. \quad (\text{B.10})$$

## Apéndice C

# Programas en MATHEMATICA

### C.1. Funciones a representar

#### C.1.1. Parámetros

```
(*Parámetros del rectificado*)  
k = 4.23 * 10^ (-6) ;  
vd = 0.53 ;  
δ = 2.663 * 10^ (-3) ;  
k0 = 13 ;  
q = 5.89 * 10^ 7 ;  
c =  $\frac{v_d}{2 k}$  ;  
Ti = 300 ;  
(*Parámetros de intermitencia*)  
t1 = 1.272 * 10^ (-3) ;  
τ = 2.022 * 10^ (-3) ;  
x1 = 3 δ ;  
vm =  $\frac{x_1}{t_1}$  ;  
χ = vm τ ;
```

## C.1.2. Funciones auxiliares

```

(*Funciones de intermitencia*)
f[t_] := v_m t - Floor[ $\frac{v_m t}{\chi}$ ]  $\chi$ ;
 $\Delta_2[t\_]$  := Min[f[t],  $\delta$ ];
 $\Delta_1[t\_]$  := Min[Max[f[t] -  $x_1$ , 0],  $\delta$ ];
ERF[t_, x_, s_] :=
  Erf[ $\frac{x + v_d s - \Delta_1[t - s]}{2 \sqrt{k s}}$ ] - Erf[ $\frac{v_d s + x - \Delta_2[t - s]}{2 \sqrt{k s}}$ ];

(*Funciones Auxiliares*)
ERF_cont[x_, s_] := Erf[ $\frac{x + v_d s}{2 \sqrt{k s}}$ ] - Erf[ $\frac{v_d s + x - \delta}{2 \sqrt{k s}}$ ];
Jg[x_] :=
  If[x  $\neq$  0,
    x Exp[x]
    (BesselK[0, Abs[x]] +
      Sign[x] BesselK[1, Abs[x]]) - 1, 0];

```

## C.1.3. Funciones de la temperatura

```
(*FUNCIONES DE TEMPERATURA*)
(*Temperatura fricción intermitente*)
Integrando[t_, x_, y_, s_] := Exp[-y^2 / (4 k s)] ERF[t, x, s] / Sqrt[s];

T[t_, x_, y_] :=
  (q Sqrt[k] / (2 Sqrt[pi] k0)) NIntegrate[Integrando[t, x, y, s], {s, 0, t}];

(*Temperatura pseudo-estacionario *)
Tps[t_, x_, y_] :=
  (q Sqrt[k] / (2 Sqrt[pi] k0)) NIntegrate[Integrando[t, x, y, Tan[s]] Sec[s]^2,
    {s, 0, pi/2}, MinRecursion -> 10, MaxRecursion -> 100];

(*Temperatura transitoria fricción continua*)
Tcont[t_, x_, y_] :=
  (q Sqrt[k] / (2 Sqrt[pi] k0)) NIntegrate[Exp[-y^2 / (4 k s)] ERFcont[x, s] / Sqrt[s], {s, 0, t}];

(*Temperatura estacionaria fricción continua*)
Ts[x_, y_] :=
  (2 q k / (pi k0 v_d)) If[y != 0, NIntegrate[Exp[-u] BesselK[0, Sqrt[(c y)^2 + u^2]],
    {u, c (x - delta), c x}], Jg[c (delta - x)] - Jg[-c x]]];
```

## C.1.4. Temperatura máxima y tiempo de relajación

```

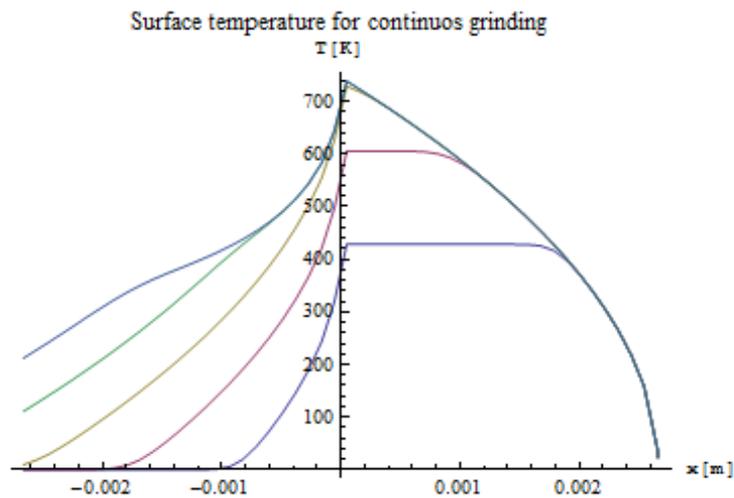
(*Temperatura máxima estacionaria rectificado continuo*)
R[x_] := Exp[-c x] BesselK[0, Abs[c x]];
M[x_] := R[x] - R[x - δ];
ε = 10-6;
x0 = If[vd ≥ 0, x0 = ε, x0 = δ - ε];
xmax = x /. FindRoot[M[x], {x, x0}]
Tmax = T∞[xmax, 0];
(*Tiempo de relajación continuo*)
DT[t_] :=  $\frac{q \sqrt{k}}{2 k_0} \frac{\text{ERF}_{\text{cont}}[x_{\text{max}}, t]}{\sqrt{\pi * t}}$ ;
t0 =  $\frac{4 k}{v_d^2} \text{ProductLog}\left[\frac{q \delta v_d^2}{8 \pi k k_0 \epsilon}\right]$ ;
t* := t /. FindRoot[DT[t] == ε, {t, t0}]

```

## C.2. Representaciones gráficas

### C.2.1. Evolución de la temperatura en superficie del rec- tificado continuo

```
ft = 5; (*Número de fotogramas*)
tb = t*;
Quiet[
Plot[Evaluate[Table[Tcont[tb n / ft, x, 0], {n, ft}]],
{x, -δ, δ}, MaxRecursion → 0,
AxesLabel → {StandardForm[x [m]],
StandardForm[T [K]]},
PlotLabel →
"Surface temperature for continuos grinding"]]
```

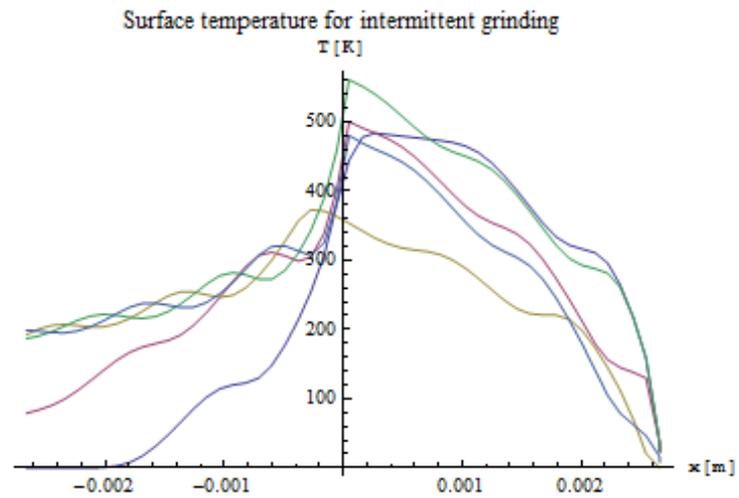


### C.2.2. Evolución de la temperatura en superficie del rectificado intermitente

```

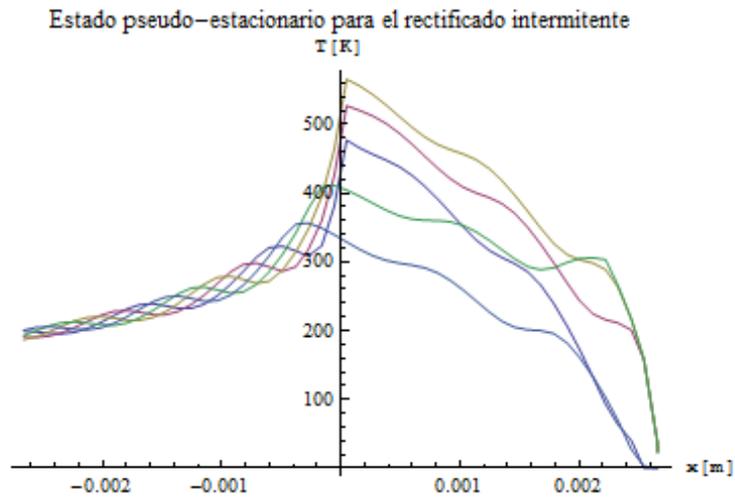
ft = 5; (*Número de fotogramas*)
tb = 2 t*;
Quiet[
Plot[Evaluate[Table[T[tbn/ft, x, 0], {n, ft}]],
{x, -δ, δ}, MaxRecursion → 0,
AxesLabel → {StandardForm[x [m]],
StandardForm[T [K]]},
PlotLabel →
"Surface temperature for intermittent
grinding"]]

```



### C.2.3. Evolución de la temperatura en superficie de estado cuasi-estacionario

```
ft = 5; (*Número de fotogramas*)
tb =  $\tau$ ;
Quiet[Plot[Evaluate[Table[Tps[tb n / ft, x, 0], {n, ft}]],
  {x, - $\delta$ ,  $\delta$ }, MaxRecursion  $\rightarrow$  0,
  AxesLabel  $\rightarrow$  {StandardForm[x [m]], StandardForm[T [K]]},
  PlotLabel  $\rightarrow$ 
  "Estado pseudo-estacionario para el rectificado
  intermitente"]]
```

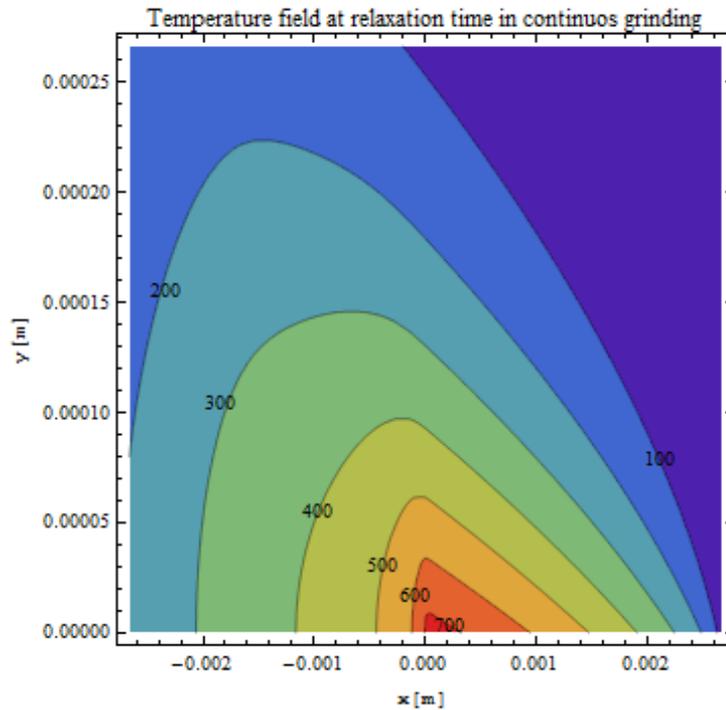


## C.2.4. Campo de temperaturas en el rectificado continuo

```

tb = t*;
Quiet[ContourPlot[Tcont[tb, x, y], {x, -δ, δ},
  {y, 0, δ/10}, MaxRecursion → 2,
  ColorFunction → "Rainbow", PlotPoints → 20,
  FrameLabel → {StandardForm[x [m]],
    StandardForm[y [m]]},
  PlotLabel →
    "Temperature field at relaxation time in
    continuous grinding",
  ContourLabels → Automatic]]

```

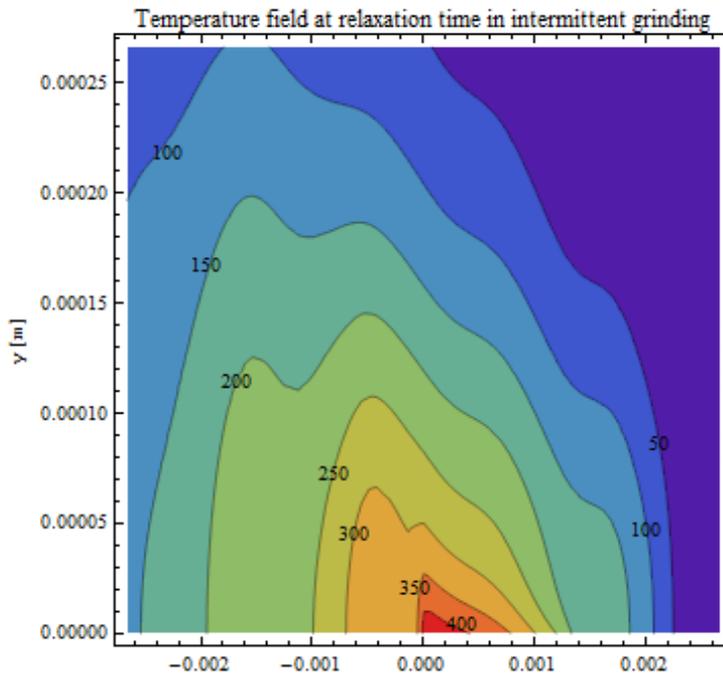


### C.2.5. Campo de temperaturas en el rectificado intermitente

```

tb = t*;
Quiet[ContourPlot[T[tb, x, y], {x, - $\delta$ ,  $\delta$ },
  {y, 0,  $\delta/10$ }, MaxRecursion  $\rightarrow$  2,
  ColorFunction  $\rightarrow$  "Rainbow", PlotPoints  $\rightarrow$  20,
  FrameLabel  $\rightarrow$  {StandardForm[x [m]],
    StandardForm[y [m]]},
  PlotLabel  $\rightarrow$ 
    "Temperature field at relaxation time in
    intermittent grinding",
  ContourLabels  $\rightarrow$  Automatic]]

```





# Bibliografía

- [1] S. Malkin, *Grinding technology: theory and application of machining with abrasives*, Ellis Horwood Ltd. and John Wiley and Sons (1989); C. Guo and S. Malkin, “Analysis of energy partition in grinding”, *Journal of Engineering for Industry* **117** (1995) 55; S. Malkin and R. Anderson, “Thermal aspects of grinding, part I: energy partition”, *Journal of Engineering for Industry* **06** (1974) 177.
- [2] A. S. Lavine, “Thermal aspects of grinding: the effects of heat generation at the shear planes”, *Annals of CIRP* **40** (1991) 343-345; “An exact solution for surface temperature in down grinding”, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **43** (2000) 4447-4456.
- [3] M. D. Demetriou and A.S. Lavine, 2000, “Thermal Aspects of Grinding: The Case of Upgrinding”, *Journal of Manufactured Science Engineering* **122**, (2000) 605-611.
- [4] A.S. Lavine and T. C. Jen, “Coupled Heat Transfer to Workpiece, Wheel, and Fluid in Grinding, and the Occurrence of Workpiece Burn”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **34** (1991) 983-992; “Thermal Aspects of Grinding: Heat Transfer to Workpiece, Wheel, and Fluid”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **113** (1991) 296-303.
- [5] M. Mahdi and Liangchi Zhang, “The finite element thermal analysis of grinding processes by ADINA”, *Computers & Structures*, **56**, Issues 2-3 (1995) 313-320. *Nonlinear Finite Element Analysis and ADINA Proceedings of the 10th ADINA Conference*.
- [6] A. G. Mamalis, D. E. Manolakos, A. Markopoulos, J. Kunádrk and K. Gyáni, “Thermal Modelling of Surface Grinding using implicit Finite Element Techniques”, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **21** (2003) 929-934.
- [7] K. T. Andrews, M. Shillor and S. Wright, “A model for heat transfer in grinding”, *Nonlinear Analysis* 35 (1999) 233-246.
- [8] J. Pérez, F. R. Villatoro, J. L. G. Santander, M. A. Borovsky, Yu. L. Ratis, E. A. Izzheurov, and P. Fernández de Córdoba, “Heat transfer between

- a gas and an ultralow thermal conductivity porous structure”, *Journal of Applied Mathematics and Computation*, **204**, Issue 2 (2008) 687-693.
- [9] T. V. Bandos , Á. Montero, E. Fernández, J. L. González, J. M. Isidro, J. Pérez, P. Fernández de Córdoba and J. F. Urchueguía, “Analytical studies of the vertical dependences in the solution to the finite line-source model for borehole heat exchangers”, *Geothermics* **38** (2009) 263–270.
- [10] J. L. González–Santander, J. Pérez, P. Fernández de Córdoba and J. M. Isidro, “An analysis of the temperature field of the workpiece in dry continuous grinding”, *Journal of Engineering Mathematics*, DOI 10.1007/s10665-009-9335-6.
- [11] J. L. G. Santander, J. Pérez, P. Fernández de Córdoba and J. M. Isidro, “Theoretical Analysis of the transient temperature field in wet and in dry grinding”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, (preprint).
- [12] N. N. Lebedev, *Special Functions and their applications*, Dover Publications, New York, 1972.
- [13] A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of mathematical physics*, Dover Publications, New York, 1990.
- [14] J. C. Jaeger, “Moving Sources of Heat and the Temperature at Sliding Contacts”, *Proceedings of Royal Society of New South Wales*, **76** (1942) 204-224.
- [15] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford, 1988.
- [16] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications Paperback, 1972.
- [17] J. Luke, “Some notes on integrals involving Bessel functions”, *Journal of Mathematical Physics*, **29** (1950), 27-30.
- [18] D. L. Skuratov, Yu. L. Ratis, I. A. Selezneva, J. Pérez, P. Fernández de Córdoba and J. F. Urchueguía, “Mathematical modelling and analytical solution for workpiece temperature in grinding”, *Applied Mathematical Modelling* **31** (2007) 1039-1047.
- [19] J. Pérez, S. Hoyas , D. L. Skuratov, Yu. L. Ratis, I. A. Selezneva, P. Fernández de Córdoba and J. F. Urchueguía, “Heat transfer analysis of intermittent grinding processes”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **51**, Issues 15-16 (2008) 4132-4138.
- [20] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products. Corrected and enlarged edition*, Academic Press Inc., New York, 1980.
- [21] C. T. O’Sullivan “Comment on “Newton’s law of cooling—A critical assessment,”” *American Journal of Physics*, **58** (1990) 956–960.

- [22] Y. T. Li and R. Wong, “Integral and Series Representations of the Dirac Delta Function”, *Communications on pure and applied analysis*, **7**. n. 2 (2008) 229-247.
- [23] John B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [24] S. G. Glasunov, V. N. Moiseev, *Constructional Titanium Alloys, Metallurgy*, Moscow, 1974.
- [25] V. I. Murav’ev, A. V. Yakimov and A. V. Chernysev, “Effect of deformation, welding, and electrocontact heating on the properties of titanium alloy VT20 in pressed and welded structures”, *Metal Science and Heat Treatment*. **45** (2003) 419–422.
- [26] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1-2, Wiley Classics Library, 1989.
- [27] R. M. Corless, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth, “A Sequence of Series for the Lambert Function”, in *Proceedings of the 1997 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Maui, Hawaii. New York: ACM Press, pp. 197-204, 1997.
- [28] J. L. González-Santander, *PhD Thesis*, Universidad Politécnica de Valencia (2009), <http://hdl.handle.net/10251/4769>.
- [29] P. Castañeda, J. L. G. Santander, “Cálculo de algunas integrales en el proceso de transferencia de calor en el rectificado de piezas”, *Boletín de la Sociedad Matemática y Computación*, Vol.7, No1, pp.51-57, 2009.
- [30] J. L. G. Santander, P. Castañeda, Yu. L. Ratis, J. M. Isidro, P. Fernández de Córdoba, “Calculation of some integrals arising in heat transfer in grinding”, *Mathematical Problems in Engineering*, doi:10.1155/2010/535801.
- [31] J. L. G. Santander, J. M. Valdés Placeres, J. M. Isidro, “Exact solution for the time-dependent temperature field in dry grinding. Application to segmental wheels”, *Mathematical Problems in Engineering* (preprint).