



Universitat Autònoma de Barcelona
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Doctorat en Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències

Tesis doctoral

**Estimación de medida: el conocimiento didáctico del
contenido de los maestros de primaria**

Autora: Ruth Noemí Pizarro Contreras

Director: Lluís Albarracín i Gordo

Septiembre de 2015

Universitat Autònoma de Barcelona
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Doctorat en Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències

Tesis doctoral

**Estimación de medida: el conocimiento didáctico del
contenido de los maestros de primaria**

Autora: Ruth Noemí Pizarro Contreras

Director: Lluís Albarracín i Gordo

Septiembre de 2015

Esta tesis doctoral se ha realizado gracias a una beca Conicyt, del programa de formación de capital humano avanzado, BECAS-CHILE, para doctorado en el extranjero.

Esta investigación es parte del proyecto EDU2013-4683-R. La autora y su director forman parte del Grupo de Investigación Educació Matemàtica i Context: Competència Matemàtica (EMiC:CoM), con referencia SGR2014-723 (Generalitat de Catalunya).

A mis papás

Agradecimientos

Este documento marca el final de un ciclo y no puedo más que agradecer a todos los que me han acompañado en este caminar.

Gracias mamá por brindarme tu apoyo incondicional, por considerar que primero debía cumplir mis sueños y aventuras antes de la dicha de tenerme a tu lado. Gracias, por enseñarme a estudiar y a ser autónoma. Gracias, por comprender que quise escuchar a mi corazón y cambiarme de ingeniería civil a pedagogía en matemática, cediendo tu voluntad de dejarme “un buen futuro” por mi “locura de ser profesora”, si no lo hubieras hecho hoy no me sentiría plena.

Gracias papá por enseñarme a disfrutar la vida y vivir el momento. Gracias, por enseñarme que una vida sin disfrutar de los placeres que nos regala el día a día, no vale la pena vivirla. Gracias, por enseñarme a ser felices donde estemos, con quien estemos... y en el estado de salud que estemos. Mañana quizás no estaremos aquí, por ello no hay que perder la oportunidad de un viaje, una rica comida, un “salud” y un amor.

Gracias papás por estar juntos. Junto a mi hermana, les agradecemos día a día por ser tan distintos, fueron el complemento perfecto para nosotras. En cada éxito profesional y personal, están ustedes, llevamos sus marcas en nuestra piel y en nuestra alma.

Gracias Isabel por ser mi maestra y amiga, por enseñarme que una de las más gratas rebeldías para cambiar el mundo es aprender didáctica.

Gracias Carola y Tatiana por el día a día, por el apoyo y por sentir las tan cerca.

Gracias Pablo por tomar mi mano y recorrer tantas calles de tantos mundos físicos y etéreos, en las que codo a codo, fuimos muchísimo más que dos.

Gracias Lluís, por tu compromiso con mi trabajo, por tu responsabilidad, tu disposición, tu sapiencia, tu paciencia y tu contención en los momentos difíciles.

Gracias amigos, especialmente a los de siempre que esperan mi regreso a Chile y a los nuevos, que me obligan prometer volver o bien recorrer el mundo para verlos.

Gracias Juan, Pao y Pola por hacer más fácil los últimos días de esta tesis.

... Ítaca me dio un bello viaje, sin ella no habría emprendido el camino. A pesar de que aún estoy lejos de saber qué significan las Ítacas, cada vez me asustan menos los Lestrigones y los Cíclopes, quizás sólo le temo un poco a la cólera de Poseidón. Comienza un nuevo ciclo, del que sólo tengo certeza que Ítaca estará siempre en memoria.

Índice

Capítulo 1. Introducción	1
1.1 La importancia de la medida	2
1.2 La enseñanza de la medida	2
1.3 Relevancia didáctica de la estimación de medida	3
1.4 La estimación de medida en el currículum escolar.....	3
1.4.1 Informe Cokcroft (1982).....	3
1.4.2 COPIRELEM: Comisión Permanente del IREM (1982).....	4
1.4.3 National Science Board (1983).....	4
1.4.4 NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (1991).....	5
1.4.5 NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (2000).....	5
1.4.6 Proyecto PISA 2003.....	6
1.4.7 Desarrollo en la investigación sobre estimación.....	6
1.5 El currículum chileno	6
1.6 Interés de la investigación	8
1.7 Problema de investigación.....	9
1.8 Estructura del documento	9
Capítulo 2. Referentes teóricos.....	11
2.1 Estimación de medida.....	12
2.1.1 Conceptualización de la medida	12
2.1.1.1 Magnitud	12
2.1.1.2 Medida.....	15
2.1.1.3 Investigación en la enseñanza de la medida.....	17
2.1.1.4 La importancia de la medida en la escuela.....	24
2.1.2. Investigación en la enseñanza y aprendizaje de la estimación de medida.....	25
2.1.2.1 Sobre la definición de estimación	25
2.1.2.2 Los diferentes tipos de estimación	27
2.1.2.3 La estimación es parte del conocimiento matemático.....	31
2.1.2.4 Diferencia entre estimación y aproximación.....	32
2.1.2.5 La investigación en estimación de medida.....	33
2.1.2.6 Estrategias de estimación de medida.....	38
2.1.2.7 La enseñanza y el aprendizaje de la estimación de medida	44
2.1.2.8 El conocimiento del maestro sobre estimación de medida	48
2.2 El conocimiento del profesor de matemática	49
2.2.1 El aporte de Shulman	49

2.2.2 <i>Mathematical Knowledge for Teaching</i> (MKT)	51
2.2.3 El Conocimiento Especializado para la Enseñanza de la Matemática, MTSK. 53	
2.2.3.1 El conocimiento de los temas (<i>Knowledge of Topics</i> , KoT)	55
2.2.3.2 El conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (<i>Knowledge of Features of Learning Mathematics</i> , KFLM)	56
2.2.3.3 Conocimiento de la enseñanza de la matemática (<i>Knowledge of Mathematics Teaching</i> , KMT)	57
Capítulo 3. Planteamiento del problema	59
Capítulo 4. Marco metodológico	63
4.1 Perspectiva metodológica	64
4.2 Fundamentación del instrumento de recogida de datos	65
4.3 Estudio piloto previo	65
4.4 Diseño el instrumento	68
4.4.1 Detalle de las preguntas iniciales del instrumento	69
4.4.1 Pregunta 1: Estimación longitudinal	69
4.4.2 Pregunta 2: Estimación de áreas de superficies	69
4.4.3 Pregunta 3: Elaboración de actividad	69
4.4.4 Pregunta 4: Formación escolar	70
4.4.5 Pregunta 5: Formación universitaria	70
4.4.6 Pregunta 6: Definición de estimación de medida	70
4.4.7 Pregunta 7: Estimación de medida de la superficie	70
4.4.8 Pregunta 8: Valoración de una actividad de estimación de medida discreta	71
4.4.9 Pregunta 9: Posible uso de la actividad de estimación discreta	71
4.4.10 Pregunta 10: Posible uso de la actividad de estimación discreta	72
4.4.11 Pregunta 11: Comentarios adicionales de los maestros	72
4.5 Validación del instrumento	72
4.5.1 Versión final del instrumento	77
4.5.1.1 Pregunta 1: Estimación longitudinal	77
4.5.1.2 Pregunta 2: Estimación de áreas de superficies	77
4.5.1.3 Pregunta 3: Elaboración de actividad	77
4.5.1.4 Pregunta 4: Formación escolar	77
4.5.1.5 Pregunta 5: Formación universitaria	77
4.5.1.6 Pregunta 6: Definición de estimación de medida	78
4.5.1.7 Pregunta 7: Estimación de medida de la superficie	78

4.5.1.8 Pregunta 8: Valoración de una actividad de estimación de medida discreta	78
4.5.1.9 Pregunta 9: Posible uso de la actividad de estimación discreta	78
4.5.1.10 Pregunta 10: Posible uso de la actividad de estimación discreta	78
4.5.1.11 Pregunta 11: Comentarios adicionales de los maestros	78
4.6 Población	78
4.7 Recogida de datos	80
Capítulo 5. Análisis de datos	85
5.1 Descripción del proceso de análisis	86
5.2 Consideraciones previas al análisis	87
5.2.1 Definición de estimación de medida	90
5.2.1.1 Referentes (R)	90
5.2.1.2 Percepción (P)	90
5.2.1.3 Valoración Numérica (V)	91
5.2.1.4 Nuestra definición de Estimación de Medida	91
5.2.2 Tipos de tareas para asignar la medida de una magnitud	92
5.3 Análisis de las respuestas de los profesores	95
5.3.1 Análisis del conocimiento del tema	96
5.3.2 Análisis del conocimiento didáctico del contenido (PCK)	96
Capítulo 6. Análisis del conocimiento de la estimación de medida	99
6.1 Pregunta 1: Estimación longitudinal	100
6.1.1 Estimación de medida	100
6.1.1.1 Estimación de medida con referentes propios	100
6.1.1.2 Estimación de medida con referentes auxiliares	101
6.1.1.3 Estrategias utilizadas	102
6.1.2 Medición con unidades no estandarizadas	102
6.1.2.1 Unidades utilizadas	103
6.1.3 Sin Clasificación	103
6.1.4 Resultados Pregunta 1	104
6.2. Pregunta 2: Estimación de áreas de superficies	105
6.2.1 Estimación de medida	105
6.2.1.1 Estimación de medida con referentes auxiliares	105
6.2.1.2 Estimación de medida indirecta	105
6.2.1.3 Estrategias utilizadas	106
6.2.2 Medición	106

6.2.2.1	Medición con unidades no estandarizadas	106
6.2.2.2	Medición indirecta.....	107
6.2.2.3	Unidades utilizadas	108
6.2.3	Fórmula del área de superficie.....	108
6.2.4	Uso de unidades no estandarizadas.....	108
6.2.5	Sin Clasificación	108
6.2.6	Resultados Pregunta 2.....	109
6.3	Pregunta 3: Elaboración de actividad	111
6.3.1	Estimación de medida	111
6.3.1.1	Estimación de medida con referente explícito	111
6.3.1.2	Estimación de medida sin referente explícito	112
6.3.1.3	Estimación de proporciones	112
6.3.2	Cálculo	113
6.3.2.1	Elaboración de actividad de cálculo operatorio	113
6.3.2.2	Elaboración de actividad de cálculo de áreas.....	114
6.3.3	No explícita estimación o medida.....	114
6.3.4	Sin Clasificación	114
6.3.5	Resultados Pregunta 3.....	115
6.4	Pregunta 4: Formación escolar	116
6.4.1	Sí.....	116
6.4.1.1	Estimación de medida	116
6.4.1.2	Medición con unidades no estandarizadas	117
6.4.1.3	Estimación computacional	117
6.4.1.4	Aproximación o redondeo de números	117
6.4.1.5	Situaciones de estimación de medida sin ejemplificación	117
6.4.2	No.....	118
6.4.3	Resultados Pregunta 4.....	118
6.5	Pregunta 5: Formación universitaria	119
6.5.1	Sí.....	119
6.5.1.1	Estimación de medida	119
6.5.1.2	Medición con unidades no estandarizadas	119
6.5.1.3	Estimación computacional	119
6.5.1.4	Aproximación o redondeo de números	120
6.5.1.5	Situaciones de estimación de medida.....	120

6.5.1.6 Sin fundamento	120
6.5.2 No.....	120
6.5.3 Resultados Pregunta 5	120
6.6 Pregunta 6: Definición de estimación de medida	122
6.6.1. Estimación de medida.....	122
6.6.2 Medición con unidades no estandarizadas	123
6.6.3 Valoración.....	123
6.6.3.1 Valoración y percepción.....	124
6.6.3.2 Valoración y referentes	124
6.6.3.3 Valoración sin percepción ni referencia.....	124
6.6.4 Aproximación	125
6.6.5 Resultados Pregunta 6.....	125
6.7 Pregunta 7: Estimación de medida de superficies	127
6.7.1 Estimación de medida	127
6.7.1.2 Estrategias utilizadas	128
6.7.2 Medición	128
6.7.2.1 Medición con unidades no estandarizadas	128
6.7.2.2 Medición indirecta.....	128
6.7.2.3 Medición con unidades no estandarizadas de los dos lados de la pizarra.	129
6.7.3 Fórmula del área de superficie	129
6.7.4 Uso de referentes	130
6.7.5 Uso de unidades no estandarizadas.....	130
6.7.6 Valoración.....	130
6.7.7 Sin Clasificación	131
6.7.8 Resultados Pregunta 7.....	131
Capítulo 7. Análisis del conocimiento didáctico del contenido (PCK).....	133
7.1 El conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM).....	134
7.1.1 Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático.....	134
7.1.1.1 Interacción de los estudiantes relacionadas con la medición	134
7.1.1.2 Interacción de los estudiantes relacionadas con la estimación de medida	136
7.1.1.3 Trabajo similar al trabajo del docente	137
7.1.1.4 Resultados Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático	138
7.1.2 Dificultades y fortalezas asociadas al aprendizaje.....	139

7.1.2.1 Dificultades asociadas al conocimiento de la medida.....	139
7.1.2.2 Dificultades asociadas al trabajo y la caracterización de la estimación de medida.....	140
7.1.2.3 Resultados dificultades asociadas al aprendizaje de la estimación de medida.....	142
7.2 El conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)	143
7.2.1 Teorías de enseñanza	143
7.2.1.1 Teorías vinculadas a la estimación de medida	143
7.2.1.2 Teorías vinculadas a la medida	146
7.2.1.3 Resultados de las Teorías de Enseñanza	147
7.2.2 Recursos materiales y virtuales.....	149
7.2.2.1 Material Manipulable	149
7.2.2.2 Material No Manipulable	149
7.2.2.3 Resultados recursos materiales y virtuales.....	150
Capítulo 8. Análisis relacional	151
8.1 Cruce Objetivo Específico 1.....	152
8.1.1 Cruce de datos en estimación de medida.	152
8.1.2 Cruce de datos en medición con unidades no estandarizadas.....	153
8.1.3 Consistencia profesor a profesor.....	155
Capítulo 9. Resumen de resultados.....	159
9.1 Hechos asociados al uso de la medición con unidades no estandarizadas como estimación de medida	160
9.2 Hechos asociados al uso de la estimación de medida.....	160
9.3 Hechos asociados a la estimación de medida como respuesta aleatoria.....	162
9.4 Hechos asociados a la formación académica de los profesores.....	162
9.5 Otros hechos relevantes	162
Capítulo 10. Conclusiones y reflexiones	163
10.1 Conclusiones y conclusiones respecto a los objetivos de investigación	164
10.1.1 Conclusiones OE1.....	164
10.1.1.1 Sobre la definición	164
10.1.1.2 Sobre la aplicación de la estimación de medida	165
10.1.1.3 Sobre la ejemplificación de la estimación de medida.....	167
10.1.2 Conclusiones OE2.....	168
10.1.2.1 Sobre el uso de las actividades para la enseñanza, teorías y recursos.....	169
10.1.2.2 Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático .	170
10.1.3 Conclusiones Objetivo General	171

10.2 Sugerencias para la formación del profesorado.....	171
10.3 Prospectivas para investigaciones	174
Referencias	177
Anexos.....	189
Anexo A1: Objetivos de estimación de medida en el currículum chileno.....	189
Anexo A2: Instrumento de toma de datos	195

Capítulo 1. Introducción



3 octubre '72



13 noviembre '72 - Quino había cometido un error en el primer cuadro de la tira de *Mafalda* que se publicó el 3 de octubre. Ante la avalancha de cartas de lectores, el 13 de noviembre trata de subsanar lo mejor posible el papelón.

Introducción

1.1 La importancia de la medida

Los sistemas de medida nos permiten comercializar, construir, movilizarnos, investigar, comprender y controlar procesos químicos, físicos y biológicos del mundo en que vivimos. Por estos motivos, la historia del mundo y el desarrollo de la civilización humana podrían contarse por medio de la historia de la medida. Basta una breve reflexión para darnos cuenta del punto hasta el que las diferentes medidas están presentes en nuestra vida cotidiana, mucho más de lo que somos conscientes. Sin el desarrollo de la medida, la vida moderna sería impensable.

No cabe duda que el conocimiento de la medida es una herramienta útil en la vida de los ciudadanos, por ello independientemente de la cultura, la religión y la política elegida o impuesta, en la mayoría de los países del mundo, el conocimiento de la medida se desarrolla en el currículo escolar. Por ello, en todo el mundo, independiente de las políticas educacionales implantadas o la corriente didáctica a seguir, los programas oficiales vigentes de matemática tienen un espacio dedicado a la medición. Chamorro (2003) destaca la utilidad de la medida no sólo en el contexto social, sino también en el matemático:

“la medida de magnitudes constituye un bloque de contenidos tradicionalmente tratado en la Enseñanza Primaria como Secundaria, ninguna reforma del currículum ha dejado fuera a este núcleo temático de gran utilidad en la vida práctica de cualquier ciudadano. Pero es que, además de esta utilidad, si se analiza desde un punto de vista matemático, qué conocimientos hay detrás de la medida de magnitudes, encontramos conceptos refinados y complejos que han sido incorporados a las matemáticas superiores de manera muy reciente. Nos referimos, evidentemente, a la teoría de la medida, de gran importancia en matemática” (p. 222)

1.2 La enseñanza de la medida

La medida, como parte de las matemáticas, es un conocimiento social, por ello, se generan algunas paradojas en su enseñanza. La escuela delega buena parte de la enseñanza de la medición a la sociedad, con la convicción de que los estudiantes terminarán aprendiendo ciertos temas en su entorno familiar o social, lo que lamentablemente no ocurre, a pesar de que los estudiantes posteriormente tendrán que utilizar ciertos contenidos en sus vidas personales y laborales (Chamorro, 2003).

En la práctica, la medida se presenta, mayoritariamente, de forma algorítmica, centrándose en la transformación de unidades, lo que se traduce en una pérdida del sentido de la unidad de medida, la magnitud y la medición.

1.3 Relevancia didáctica de la estimación de medida

Considerando los antecedentes expuestos, la estimación de medida es didácticamente interesante, porque incorpora una nueva forma de hacer matemáticas, relacionada con el uso de estrategias personales de interpretación y valoración de resultados que están presentes en la cotidianeidad o en situaciones realizadas para ello (Segovia y Rico, 1996). De este modo, el trabajo en las aulas de la estimación de medida permite que el conocimiento matemático relacionado con la medida adquiera sentido. Con ello, los estudiantes podrán comprender parte de la realidad que les rodea, comprenderla y criticarla.

El *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) explica que la estimación de medida es parte de la base para el aprendizaje de la medición física, por lo tanto, debe ser un tema incluido en la formación docente. Del mismo modo, Kinash (2002), complementa a la NCTM, indicando que la investigación sobre temas específicos como la estimación de medida y su conceptualización para la enseñanza aprendizaje de los futuros profesores, contribuye a la base del conocimiento sobre la construcción de la comprensión conceptual y procedimental de la medida, con el fin de desarrollar aprendizajes en el estudiante.

1.4 La estimación de medida en el currículum escolar

A raíz de lo anterior, sería lógico que la estimación de medida viniese por añadidura en la enseñanza de la medida. La NCTM desde 1937 publica artículos sobre el tema en sus anuarios (*Yearbook*), dedicando el del año 1986 a la estimación de medida de forma exclusiva. Sin embargo sólo a partir de principios de los años 80 el concepto de estimación comenzó a ser incluido en algunos currículos de países europeos y Estados Unidos, gracias a la pronunciación de distintas directrices internacionales.

Es necesario considerar, antes de presentar, a modo resumen, parte de las distintas directrices que se pronunciaron a favor de la enseñanza de la estimación, que en el transcurso de los años se han ido incluyendo diferentes tareas que responden a la calificación de estimación. Una muestra es la estimación de medidas, pero también se incluyen en la denominación genérica tareas como las de la estimación computacional. Por ello, cuando en esta tesis nos refiramos únicamente a “estimación” se entenderá como un concepto global, respetando a los referentes involucrados y cuando se mencione “estimación de medida”, es porque se refiere al concepto específico. En el Apartado 2.1.2.2 del Capítulo 2, se detallan estas diferencias.

1.4.1 Informe Cokcroft (1982)

El Informe Cokcroft (1982) es un informe oficial de Inglaterra y Gales que el Ministerio de Educación y Ciencia español publicó en Madrid en 1985. Entre diversos tópicos, plantea que es necesario dominar el mundo de las magnitudes de manera clara y

Introducción

efectiva, donde el número es fundamental en su dominio para realizar estimaciones y aproximaciones aceptables, que permiten llevar a cabo cálculos mentales sencillos. Se considera que la experiencia es fundamental en el desarrollo de la estimación, la aproximación y la conciencia de razonabilidad del resultado obtenido.

Con casos cotidianos del ambiente laboral, ejemplifican cómo las personas necesitan trabajar con el sentido de la medida, lo que se traduce en una capacidad compleja que involucra mucho más que utilizar instrumentos de medida, calcular, aproximar y estimar.

En el Informe Cokcroft (1982) se constata que las directrices y los planes de trabajo en las escuelas, habitualmente hacían referencia a la necesidad de estimar y, a veces, precisan más concretamente en que los alumnos deben ser alentados u obligados a escribir una respuesta aproximada antes de llevar a cabo un cálculo. Sin embargo, se explica que la realidad la práctica es otra y en las escuelas la estimación no se practica, considerando que la causa no está en el profesorado, sino en el tiempo que conlleva desarrollar la capacidad.

Se indica la necesidad de que la apropiación de la medida, dentro del sentido común, sea desarrollada en la escuela. La apropiación de medidas como el tamaño de una puerta y comparaciones con su medida, deberían ser habituales para tener un desarrollo consciente de la estimación. Además la medida y su estimación no deben tratarse sólo en matemática, sino también en otras áreas del saber.

1.4.2 COPIRELEM: Comisión Permanente del IREM (1982).

Desde Francia *Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire* indica los elementos prioritarios respecto a la formación que se debe otorgar a los maestros de Enseñanza Primaria, estas son algunas de sus directrices en medición relacionadas con la estimación de medida:

- La fases de iniciación del aprendizaje de la medida se deben dirigir en la necesidad de trabajar la magnitud sin recurrir a la medida
- Es necesario practicar la estimación y la aproximación con distintos niveles de precisión
- Se debe tomar conciencia de la razonabilidad y la probabilidad de los resultados
- Se deben realizar aproximaciones simplificadoras para determinar la orden magnitudinal que hay que utilizar.

1.4.3 National Science Board (1983)

La *National Science Board* de los Estados Unidos analiza y presenta las necesidades de formación del profesorado de Educación Primaria y Secundaria explicitando la necesidad de desarrollar el sentido numérico. En cuanto a la medida se indica que se debe potenciar el desarrollo de las destrezas de estimación y aproximación, como

también el desarrollo de la comprensión geométrica intuitiva y la capacidad para utilizar fórmulas y para medir figuras en dos y tres dimensiones.

Se explica que a los estudiantes no se les ofrece más que una direccionalidad muy básica, basada en aritmética y medida, por ello es necesario modificar las tendencias educacionales para que la matemática tenga fines utilitarios.

1.4.4 NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (1991).

El *National Council of Teachers of Mathematics* remarca la necesidad de darle énfasis a distintos puntos prioritarios para mejorar la capacidad matemática de la sociedad. Se considera que "las destrezas y estructuras conceptuales de la estimación potencian la capacidad que los niños tienen para enfrentarse a situaciones cuantitativas de la vida diaria" (p. 35). Entre algunos objetivos de aprendizaje y contenidos como la resolución de problemas y la geometría, se encuentran algunos que se vinculan la estimación:

- Aplicar las matemáticas a las situaciones cotidianas
- Comprobar el grado de razonabilidad de los resultados
- Estimar y aproximar
- Medida
- Leer, interpretar, y construir medidas, mapas y gráficos
- Emplear matemáticas para saber predecir

A partir de los estándares del profesorado, se indica que es necesario que los profesores tengan un sentido numérico desarrollado y que diferencien las unidades de medida del proceso de medición, lo que incluye capacidades de estimación.

1.4.5 NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (2000).

Uno de los objetivos específicos de los Estándares del año 2000 es aplicar técnicas apropiadas y herramientas para realizar mediciones, donde se explicita que se deben desarrollar estrategias de estimación de perímetros, áreas y volúmenes de formas irregulares. Se considera que la estimación de medida es uno de los tres procesos de estimación cuantitativa clave que se enseñan en las aulas de primaria y secundaria y constituye la base para el aprendizaje de la medición física (p. 47).

Los Estándares proponen desde la educación infantil hasta el duodécimo grado educacional (*High School*), la creación de referentes comunes de medida, tanto para estimar como para comparar. Se explica que las actividades de estimación de medida son una aplicación temprana del sentido de los números, dado que los estudiantes centran su atención en los atributos de los objetos, el proceso de medición, el tamaño de las unidades y el valor de los referentes. De este modo, la estimación de medida contribuye al desarrollo del sentido espacial y los conceptos numéricos.

Se indica que debido a que las mediciones precisas no siempre son necesarias para responder preguntas, los estudiantes deben comprender que a menudo la estimación es

Introducción

adecuada como información de una medida. Finalmente, se explicita que no se debe subestimar la dificultad de la estimación de medida, pero que es posible realizarla.

1.4.6 Proyecto PISA 2003.

El *Programme for International Student Assessment*, PISA, es el organismo encargado de medir cómo los futuros ciudadanos de los países pertenecientes a la OCDE están preparados para los desafíos del siglo 21. PISA mide la lectura comprensiva y la alfabetización matemática en miras a las destrezas necesarias para la vida adulta, donde los currículos escolares no necesariamente responden a ello. La alfabetización matemática es definida como la capacidad para identificar y comprender el rol de la matemática en las distintas necesidades del entorno social, natural y cultural de los ciudadanos con el fin de ser utilizada con fines constructivos, comprometidos y reflexivos.

Se consideran cuatro ejes principales para respetar el desarrollo histórico y cubrir y contribuir con el currículo matemático escolar:

- Cantidad
- Espacio y Forma
- Cambios y Relaciones
- Incertidumbre

En el primer eje, cantidad, se enfatiza en la importancia del razonamiento cuantitativo, incluyendo todos los conceptos relacionados con la medición de cantidades, patrones numéricos, uso de números para representar cantidades y la caracterización de objetos. Este eje se caracteriza por el sentido numérico, las diversas representaciones numéricas, la relatividad de los tamaños, la operatoria, el cálculo mental y la estimación.

1.4.7 Desarrollo en la investigación sobre estimación

A pesar que desde hace 30 años que las directrices internacionales han hecho énfasis en la estimación de medida, y con ello se ha elevado el número de investigaciones al respecto, la enseñanza de la estimación es bastante débil. Diferentes autores afirman que el tratamiento de la estimación es limitado (Hope, 1986; Johnson, 1979; Trafton, 1986; Sowder y Wheeler 1989) y es superficial (Reys 1984; Forrester y Piké 1998; Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam, 2005).

Para Frías, Gil y Moreno (2001) las posibles razones de esta situación es que los docentes no se sienten competentes en el tema, tampoco existen orientaciones precisas para su enseñanza, los docentes no disponen del tiempo necesario para trabajar la estimación y además, es difícil ponerla a prueba siguiendo los procesos habituales de evaluación.

1.5 El currículum chileno

Los aportes anteriormente mencionados han logrado que los currículos mundiales hayan

tenido cambios, logrando que las matemáticas se alejaran de las matemáticas modernas y se acercaran a la sociedad. Callís et al., (2006) expresa que “Actualmente nadie pone en duda la importancia de la estimación en el currículo” (p. 91).

En Chile, el año 2012, comenzó una reforma educacional respondiendo a las demandas internacionales de las directrices curriculares, concordadas por diversos actores y organizaciones. El 23 de diciembre del año 2011 se promulgó el decreto 439, que establece un cambio curricular para la educación Primaria. En primer lugar, la duración del ciclo sólo será de seis años, imitando al modelo español y en la asignatura de matemática se suma a los ejes curriculares de Números y Operaciones, Patrones Algebraicos, Geometría, Datos y Probabilidades un eje que no tiene continuación en la educación Secundaria: Medición.

El Ministerio de Educación (2012) indica en el currículum las principales líneas del eje curricular de Medición:

“Este eje pretende que los estudiantes sean capaces de identificar las características de los objetos y cuantificarlos, para poder compararlos y ordenarlos. Las características de los objetos –ancho, largo, alto, peso, volumen, etc. – permiten determinar medidas no estandarizadas. Una vez que los alumnos han desarrollado la habilidad de hacer estas mediciones, se espera que conozcan y dominen las unidades de medida estandarizadas. Se pretende que sean capaces de seleccionar y usar la unidad apropiada para medir tiempo, capacidad, distancia y peso, usando las herramientas específicas de acuerdo con lo que se está midiendo. (Ministerio de Educación, 2012, p. 5).

En este nuevo eje contempla cinco Objetivos de Aprendizaje y dos Objetivos de Evaluación que involucran directamente la estimación de medida. Por otro lado, el eje de Números, en los dos primeros años de primaria, involucra dos Objetivos de Aprendizaje y cuatro Objetivos de Evaluación que involucran la estimación de medida discreta, y por último, el eje de Geometría posee dos Objetivos de Aprendizaje y tres Objetivos de Evaluación. De este modo, en el nuevo currículo, hay nueve Objetivos de Aprendizaje y nueve Objetivos de Evaluación que involucran la estimación de medida. En el anexo A1, se pueden apreciar los distintos objetivos, en los respectivos niveles y ejes de enseñanza.

Estos nuevos objetivos y contenidos del currículo apuntan a una renovación del desarrollo de la enseñanza de la medición en Chile. Para complementar estas medidas el Ministerio de Educación por medio de los Programas de Estudio y los libros textos oficiales, ambos de entrega gratuita, ha explicado al profesorado algunos de los objetivos que involucran el trabajo de la estimación de medida, tanto en actividades de aula como en su evaluación.

1.6 Interés de la investigación

La enseñanza de la estimación de medida no es una tema con una gran cantidad de investigaciones en el área de la didáctica de la matemática (Benton, 1986; Sowder, 1992; Callís et al., 2006). De las pocas investigaciones existentes, sólo algunas indagan en su proceso de enseñanza-aprendizaje o han indicado la necesidad de indagar en el conocimiento didáctico del docente.

Jones, Forrester, Gardner, Grant, Taylor y Andre (2012) al investigar sobre cómo estiman los estudiantes, observaron, a modo de discusión, que no se sabe si los maestros están enseñando habilidades para estimar medida de manera implícita o explícita, tampoco si esto afecta al desarrollo de las habilidades que involucran la estimación de medida. Por consiguiente, no se sabe si los maestros enseñan a estimar medidas o bien sólo están llevando a cabo actividades en las que no se requiere ninguna atención particular.

Es necesaria la atención en la estimación de medida dado que es un técnica que se desarrolla a lo largo de los años de escuela (NCTM 2000, p. 46), por ello, tanto la formación inicial como la formación continua del profesorado requieren de la investigación en didáctica de la matemática para fortalecer las prácticas de los maestros. Lamentablemente es escaso el conocimiento sobre los procesos involucrados en la estimación de medida y su contribución eficaz al desarrollo de la misma (Joram et al., 1998) y la formación académica no potencia el desarrollo de las capacidades de estimación métrica (Callís et al., 2006).

Por otro lado, la investigación sobre temas específicos como la enseñanza-aprendizaje de la estimación de medida contribuye a la base del conocimiento del futuro docente para construir el aprendizaje de sus estudiantes (Kinach 2002; Tsamir 2005), del mismo modo, contribuye a renovar las formas tradicionales de enseñar matemática (Kinach, 2002, p. 52). Sin embargo, “no se dispone de orientaciones lo suficientemente precisas sobre cómo hacerlo” (Frías, Gil y Moreno, 2001, p. 497). Lamentablemente la escasez de investigaciones sobre la metodología de la enseñanza causa una debilidad en la práctica docente (Joram et al., 1998). Frente a ello nos parece relevante e interesante caracterizar el conocimiento didáctico del contenido del profesor que enfrentar este escenario.

Como anteriormente mencionamos, por la naturaleza de sus características, la estimación de medida es didácticamente interesante porque nos reta a desarrollar estrategias personales de realización, interpretación y valoración de los resultados de la medición (Segovia y Rico, 1996) en el entorno mediato e inmediato de los estudiantes (Adams y Harrell, 2003; Bright, 1976, 2003; Inskip, 1976; Coburn y Shulte, 1986; May, 1994; Joram et al., 1998; Reys et al., 2001, Whitin, 2004), fortaleciendo la

comprensión de la matemática, enlazando el mundo real con el mundo matemático (Hodgson et al., 2003).

Por consiguiente, consideramos que es indispensable que la estimación de medida tenga un espacio en la formación docente como un "dominio complejo, donde profesores y alumnos posean la capacidad de integrar los conceptos de medición y de estimación por medio de los procesos de razonamiento lógico" (Towers y Hunter 2010, p. 26). Para que los docentes puedan enfrentar este desafío, necesitan de una sólida formación didáctica, es decir, deben tener un óptimo conocimiento matemático especial para su enseñanza y, para nosotros, el primer paso para la construcción de este conocimiento es ¿qué características tiene este conocimiento?

1.7 Problema de investigación

Como anteriormente hemos mencionado, en Chile el año 2012 se presenta un nuevo currículo que incluye un nuevo eje: Medición, que a su vez, incluye objetivos que involucran la estimación de medida.

Considerando que la estimación de medida es un concepto cuyas definiciones poseen diferencias y ambigüedades y que, gracias a nuestra experiencia, sabemos que es un contenido que no se trata en la formación docente, nos resulta interesante comprender qué conocimiento poseen los profesores de primaria para dictar las clases correspondientes a este nuevo contenido que irrumpe en las aulas sin previa preparación. De este modo podremos comprender cómo los maestros podrían tratar el nuevo contenido. Posteriormente, a partir de los resultados y a modo de conclusión, nos interesa proponer ideas para hacer más sólida la práctica docente en el ámbito de la estimación de medida.

1.8 Estructura del documento

Esta memoria de tesis la hemos estructurado en diez capítulos. El primer capítulo, como se puede apreciar en los apartados anteriores, se introduce al lector en la investigación presentada a partir de una síntesis sobre la relevancia de la estimación de medida en la educación matemática y su necesidad de investigación en plano didáctico.

En el segundo capítulo, Referentes Teóricos, describimos las distintas investigaciones que sostienen nuestro trabajo tanto en su problemática como en su análisis. A partir de los dos primeros capítulos, nace el Capítulo 3, en el cual describimos nuestros objetivos de investigación que se llevarán a cabo gracias a un Marco Metodológico descrito en el Capítulo 4. En el Marco Metodológico se explicita, principalmente, nuestro paradigma investigativo, el proceso de la construcción del instrumento de investigación y recogida de datos.

En el capítulo cinco damos cuenta del proceso de análisis del instrumento, gracias a las

Introducción

herramientas de análisis que emergen de los datos y de los referentes teóricos presentados en el Capítulo 2. Los Capítulos 6, 7 y 8 dan cuenta de los resultados obtenidos en el proceso de análisis. En el Capítulo 9, con el fin de facilitar la lectura de este documento, hacemos una recapitulación de los resultados con el fin de presentar las conclusiones vertidas en el Capítulo 10.

Capítulo 2. Referentes teóricos



Referentes teóricos

A continuación se presentan los referentes que sustentan nuestra investigación que tiene como eje central la caracterización del conocimiento didáctico de los profesores de primaria sobre estimación de la medida. Para ello, hemos analizado la literatura pertinente, y a partir de ello hemos construido un marco teórico que se nutre de dos componentes: conocimiento de la enseñanza de la estimación de medida y del conocimiento del profesorado, componentes que titulan los dos apartados de este capítulo que dan cuenta de parte de la investigación que se ha realizado sobre ambos temas.

2.1 Estimación de medida

El siguiente apartado es una síntesis sobre diferentes investigaciones realizadas en educación matemática sobre estimación de medida. Sin embargo, referirnos a estimación de medida nos obliga también a referirnos a la medida, dado que la estimación de medida es parte de ella. Los apartados que continúan, comienzan conceptualizando la medida y la magnitud, para dar paso al contenido central de nuestro interés: la estimación de medida.

2.1.1 Conceptualización de la medida

La estimación de medida descansa en el dominio de los conceptos asociados a la magnitud y su medida (Joram et al., 1998), porque se apoya tanto en los procesos de razonamiento descritos por Piaget (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960) como en los conceptos de medición fundamentales para estimación de medida (Hiebert, 1981, 1984).

Recalde (2009) explica que la medida está estrechamente relacionada con dos conceptos claves: magnitud y cantidad., cita a Aristóteles para señalar que una magnitud es una cantidad que puede ser medida, dado que “la medida es, en efecto, aquello por medio de lo cual se conoce la cantidad” (p. 104).

Para encontrar la cantidad de magnitud de una medida, ya sea por medio de una medición o una estimación, es indispensable percibir las características y propiedades de dicha cantidad de magnitud y, a la vez, las características y propiedades de la práctica de la estimación de medida, contribuyen con el conocimiento de la magnitud y su medición. En los siguientes apartados, se realizará una síntesis de los distintos conceptos partícipes en el uso de la estimación de medida.

2.1.1.1 Magnitud

La Real Academia de la Lengua Española distingue cuatro acepciones para la palabra *magnitud*, la cuarta de ellas es la que se aplica en el contexto de este estudio y corresponde a “*propiedad física que puede ser medida, por ejemplo, la temperatura, el peso*”. El diccionario del Centro Español de Metrología (1994), define magnitud, sin utilizar explícitamente el concepto de medida, como “*atributo de un fenómeno, cuerpo*

o substancia que es susceptible de ser diferenciado cualitativamente y determinado cuantitativamente”. En otros contextos, como en una sala de primaria, es probable que magnitud que sea definida como “*cualquier propiedad que se puede medir numéricamente*”.

Chamorro y Belmonte (1988) explican detalladamente la construcción de la estructura algebraica asociada al concepto de magnitud. De manera preliminar, clasifica los elementos de un conjunto de objetos definiendo una relación de equivalencia con respecto a un atributo observable. Cada elemento de la partición generada por esta relación, que corresponde a un subconjunto de objetos que comparten el mismo atributo, es llamado cantidad de magnitud. De esta manera, el conjunto de todas las cantidades de magnitud constituye lo que definirá una magnitud.

En particular, si una magnitud proviene de un atributo medible, es decir, en los que es posible definir una ley de composición interna tal como la suma, la estructura algebraica del conjunto que define la magnitud con dicha ley de composición interna y una relación de orden, tiene la estructura de un semigrupo conmutativo con elemento neutro, absoluto y totalmente ordenado.

En el mismo sentido, en el libro “Proporcionalidad directa: la forma y el número”, Fiol y Fortuny (1990, p. 29) definen magnitud como: “Un conjunto no vacío M , con relaciones de orden ($<$) y una operación interna ($+$) tal que si $a, b, c \in M$ se verifican las siguientes propiedades:

1. Ordenación: $a < b$, ó $a = b$, ó $b < a$
2. Transitiva: Si $a < b$ y $b < c$, entonces $b < c$
3. Propiedad Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. Simplificación: Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$
5. Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$
6. Diferencia: $a < b$, si y sólo si existe c tal que $a + c = b$
7. Divisibilidad: Para cada a en M y n un número natural existe b en M , tal que $a = n \cdot b$, donde $n \cdot b = b + \dots + b$ con n -sumandos.
8. Postulado de Arquímedes: para cada c y d en M existe un número natural n tal que $d < n \cdot c$.

A los elementos de M los llamaremos cantidades. Elegimos en M un elemento e al que llamaremos unidad.”

Los enfoques de ambos autores son equivalentes, siendo consecuentes con la teoría de cantidades desarrollada por el matemático alemán Otto Hölder en 1910, quien utiliza como sinónimos los términos cantidad y magnitud. “Para Hölder, las cantidades son entidades que se pueden operar y sobre las cuales se define una relación de orden” (Recalde, 2009, p. 105).

2.1.1.1.1 Tipos de Magnitudes

Existen distintos tipos de magnitudes. En particular, Godino et al., (2002) muestran su distinción de acuerdo a las propiedades que cumplen. Una de las principales distinciones está entre las magnitudes medibles o intensivas y las magnitudes no medibles o extensivas:

- Magnitudes no medibles o intensivas: Son aquellas en las que no es posible, físicamente, definir la suma de las cantidades, dado que no son proporcionalmente aditivas y se caracterizan por un orden, como por ejemplo la temperatura, la presión o la densidad. Por ejemplo, si hay 12°C en alguna situación, no quiere decir que si aumenta a 24°C exista “el doble” de calor. Por ejemplo, la intensidad de los terremotos se mide en la escala Richter, que corresponde a una escala logarítmica.
- Magnitudes medibles o extensivas: Es el caso contrario a la anterior, en las magnitudes medibles o extensivas es posible realizar una suma de cantidades, son proporcionalmente agregables y se miden en una escala de razón. Por ejemplo, la longitud, el peso, el volumen, etc.
- Por otro lado, las magnitudes también se pueden diferenciar por las características de las unidades utilizadas, siendo estas cualitativas o cuantitativas. Las primeras distinguen cualidades como el género, el color de ojos o la ocupación de una persona, en las segundas existe una unidad, que siempre tiene un mismo valor, por lo que cualquier cantidad de magnitud puede ser expresada como un producto de un número por dicha magnitud. Considerando sólo las magnitudes cuantitativas podemos realizar nuevas distinciones.
- Magnitudes discretas: son aquellas en las que la cantidad se puede expresar como múltiplo de una unidad de referencia, es decir, las cantidades son representadas por medio de los números enteros.
- Magnitudes continuas: son aquellas en que la cantidad es arquimediana con respecto a la ordenación total. Por ello en el intervalo $[n, n + 1]$ hay infinitos términos, de esta forma siempre es posible realizar una división de la cantidad de magnitud en partes iguales.
- Consideramos que es necesario además distinguir entre magnitudes absolutas y relativas.
- Magnitudes absolutas: en ellas no existe para cada cantidad su opuesta para la suma, por lo tanto es un semigrupo conmutativo y ordenado, dado que no tiene elemento asimétrico.
- Magnitudes relativas: al contrario de las anteriores, las diferentes cantidades si poseen sus respectivas opuestas en la suma, es decir, poseen un módulo y tienen una dirección, de ese modo, al poseer el elemento simétrico, es un grupo abeliano

ordenado Los segmentos orientados (vectores libres), la temperatura, la altura al el nivel del mar, son ejemplos de esta magnitud.

- Magnitudes vectoriales: como su nombre lo indica, estas magnitudes se representan mediante vectores, es decir que además de un módulo (o valor absoluto) tienen una dirección y un sentido. Ejemplos de magnitudes vectoriales son la velocidad y la fuerza.

2.1.1.1.2 Magnitudes en el currículo escolar

Tanto en la Educación Primaria como en la Educación Secundaria la magnitud más tratada es la longitud. Le siguen el tiempo, la capacidad, la masa y en menor frecuencia la superficie y el volumen (Chamorro, 2003). Todas estas magnitudes tienen en común que poseen la misma clasificación en el apartado anterior:

- Son medibles o extensivas, es decir, se miden a escala de razón. Por ejemplo, un área de una superficie de 2m^2 es físicamente el doble que un área de superficie de 1m^2
- Son cuantitativas, porque podemos expresarlas como el producto entre un número y una unidad de medida, por ejemplo 5 m^3
- Son continuas porque es posible realizar una partición de la cantidad de magnitud en partes iguales, por ejemplo $2,5\text{ l}$
- Son absolutas dado que no tienen opuesto asimétrico. Sin embargo, según el contexto, socialmente estas magnitudes se pueden tratar con sentido negativo, por ejemplo al indicar la longitud “cuatro metros bajo el nivel del mar”, se puede interpretar como -4m .

Las magnitudes discretas también son parte del currículum escolar, desde los primeros años el conteo está presente en los programas de estudio tanto de Primaria como de Infantil. Las magnitudes que son parte de esta tesis son las magnitudes que son tratadas en la escuela, es decir, la magnitud numérica, la longitud, la superficie, el tiempo, el peso, el volumen y la capacidad.

2.1.1.2 Medida

El diccionario de la lengua española de la RAE considera nueve acepciones de la palabra medida, tres de ellas se vinculan con nuestro estudio:

- Acción y efecto de medir
- Expresión del resultado de una medición
- Cada una de las unidades que se emplean para medir longitudes, áreas o volúmenes de líquidos o áridos.

Vemos entonces que para la RAE la medida puede ser usada en el acto de medir, en el resultado de la medición y en las unidades utilizadas para medir.

Referentes teóricos

Fiol y Fortuny (1990, p. 30), además de definir cantidad como los elementos de un conjunto magnitud M , avanza hacia la definición de medida señalando que:

“Cada $a \in M$ permite dividir a Q^+ , de acuerdo a su orden, en dos partes:

$$C_1 = \{q \in Q^+ / q \cdot e \leq a\}$$

$$C_2 = \{q \in Q^+ / q \cdot e > a\}$$

Estos dos conjuntos determinan lo que se llama una cortadura en Q^+ . Esta cortadura determina un número real $r \in R$, de la siguiente manera:

$$r = \text{Sup} \{q \in Q^+ / q \cdot e \leq a\} = \text{Sup } A$$

Es decir, r es la cota superior mínima de A .

Por definición r representa la *medida* de a con respecto a e . Es decir, el número r puede tomarse como una representación de la cantidad a .

Como nomenclaturas formales indicaremos:

$$\text{med}_e(a) = r; \quad m_e(a) = r; \quad a = r \cdot e; \quad r = \frac{a}{e} \text{ (razón entre cantidades)}$$

Si r es un número racional se dice que las cantidades a y e son conmensurables (esto es, con medida común).

Sea $r = \frac{m}{n}$, se tiene entonces que a contiene m partes alícuotas o divisiones n -ésimas de e . Recíprocamente, a todo número racional $\frac{m}{n}$ corresponde una cantidad, cuya medida es este número (basta considerar la cantidad $\frac{m \cdot e}{n}$). Así entre las cantidades conmensurables con la unidad y los números racionales positivos existe un isomorfismo.

En caso contrario, si r es un número irracional se dice que a y e son inconmensurables. La correspondencia entre las cantidades inconmensurables y los números irracionales no tiene por qué ser biunívoca. Para que se tenga un isomorfismo hay que exigir otro axioma, el axioma de continuidad.

Si las cantidades conmensurables con la unidad e de una magnitud se clasifican en dos clases no vacías de modo que toda cantidad de la primera sea menor que toda cantidad de la segunda, hay una cantidad que separa a ambas, es decir, mayor o igual que cualesquiera de aquellas y menor o igual que todas éstas, según pertenezcan a una y otra clase.

Diremos en este caso, que la magnitud M es continua y entonces $M = R^+ \cdot e$.

En el caso de las magnitudes continuas, la medida establece un isomorfismo entre M y R^+ : tal que para cada $a \in M$ y es fijado en una unidad e , $m_e(a) = \text{med}_e(a) = r$ ”.

En el mismo sentido, para Chamorro y Belmonte (1988) “medir supone asignar un número a una cantidad de magnitud”, es decir, la medida está definida como una aplicación que asocia a cada cantidad un número real (Castillo, 2012).

En síntesis, dadas una magnitud M y una cantidad de magnitud u , donde $u \in M$, se define la aplicación entre M y R_0^+ como sigue:

$$\begin{aligned} med_u : M &\rightarrow R_0^+ \\ med_u(m) = q &\leftrightarrow m = q \cdot u \end{aligned}$$

De la definición se deduce que la elección de e como unidad de medida condiciona los valores que toma la función para los diferentes elementos de M . Esta definición es válida para las magnitudes continuas y absolutas, quienes se expresan por medio de un número no negativo. En el caso particular de las cantidades discretas, el recorrido sería el conjunto de los números naturales, subconjunto de los reales positivos indicado en la relación anterior.

Por lo tanto, entendemos que al medir una magnitud se establece una correspondencia biunívoca entre una cantidad de magnitud y un número, ya sean los reales no negativos o los naturales y el cero.

2.1.1.3 Investigación en la enseñanza de la medida

Distintos investigadores ha realizado aportaciones relacionadas con la investigación de la medida, la magnitud y las unidades de medida en el contexto de la Educación Matemática. A continuación haremos un breve resumen de estas aportaciones.

2.1.1.3.1 Piaget (1970)

Las bases Teóricas que Establece Piaget son referentes para muchos didactas y educadores. La enseñanza de la medida es un ejemplo de ello, a continuación se explican los cuatro estadios para el desarrollo del proceso de apropiación de la medida.

1. Estadio en el que comienzan a emerger la conservación y la cantidad: en esta fase en el estudiante comienza a desarrollar el tanteo, comienzan sus primeras conservaciones y el uso de su cuerpo como unidad de medida. El estudiante no coordina medidas en distintas direcciones ni se convence de que todas las unidades de medida son del mismo tamaño.
2. Estadio caracterizado por el inicio de la conservación operacional y la transitividad: Si a un estudiante se le pide hacer un torre de un tamaño igual a otra, puede por ejemplo, tomar una vara más alta que la torre y hacer marcas en ella para tenerla de referente al momento de hacer otra torre. Si la vara es más pequeña no sabrá qué hacer con ella.
3. Estadio en que se capta la idea de unidad de medida más pequeña que el objeto que hay que medir: La idea de recubrimiento es difícil de captar para los estudiantes, dado que sólo han trabajado con tanteo en base a ensayo y error. Entre los ocho y

Referentes teóricos

diez años ya podría haber una madurez adecuada, aunque en la enseñanza del volumen, el proceso es más lento.

4. Etapa final en el desarrollo de las nociones de medida: Comienzo de la etapa de las operaciones formales. Entre los 10 y los 12 años el estudiante es capaz de apropiarse de la medida, midiendo áreas y volúmenes basados en dimensiones lineales. Piaget explica que las nociones de medida no serán plenamente operativas en tanto no se hayan desarrollado los conceptos de infinitud y continuidad.

2.1.1.3.2 Inskip (1976)

Inskip explica que la medición involucra una serie de destrezas sensoriales y perceptivas con elementos de geometría y aritmética. La medición también permite al estudiante apreciar el sistema de medición, la idea es secuenciar desde la percepción a la comparación para posteriormente aplicar un estándar de medida o referente. A continuación hacemos un resumen de sus componentes:

- La medición como percepción: La percepción es la primera acción de la medición, dado que primero se percibe lo que debe ser medido. Por ejemplo, cuando el niño hace marcas de su altura en una cinta de medir dibujada, cuando observa la temperatura de su cuerpo en el termómetro, está leyendo escalas y midiendo.
- La medición como comparación: Después de la percepción sigue la comparación, dado que luego de haber percibido una magnitud en algún objeto, podemos compararlo con otro que tenga la misma propiedad.
- La medición como búsqueda de referente: si hacemos comparaciones es para comprobar equivalencias o no equivalencias. Cuando esta comparación no es del todo fidedigna, necesitamos algún estándar de medida que sea eficiente, eficaz y usado por todo el mundo. Los estándares de medida tienen como mínimo dos funciones importantes: Permiten comunicar medidas en formas directas y abreviadas. Permiten medidas consistentes y precisas en diferentes áreas.
- La medición como sistema: El sistema internacional brinda un sistema de medidas estándares que han sustituido ampliamente a los estándares locales arbitrarios.
- La medición como actividad afectiva: Los estudiantes necesitan ser capaces de medir por sí mismos y apreciar el papel de la medición a nivel personal y social.
- La medición como una actividad: la medición debe tener acción, no ser una rutina de memoria e intelecto. Los estudiantes deben tener experiencias en todas las áreas básicas de la medición, dado que éstas exigen precisión y consistencia.

2.1.1.3.3 Chamorro y Belmonte (1988)

Los autores indican que la medida de una magnitud no es una acción fácil y espontánea. “Esta dificultad se debe a que la realización del acto de medir requiere de una gran

experiencia en la práctica de estimaciones, clasificaciones y seriaciones, una vez establecido el atributo o la magnitud con la cual se va a medir” (p. 15).

Además explican que los estudiantes deben estar desde muy pequeños en contacto con situaciones que les obliguen a descubrir magnitudes físicas. Indicaron los siguientes cuatro estadios para apropiarse de la magnitud:

1. Considerar y percibir una magnitud como una propiedad de una colección de objetos, dejando las otras propiedades de la colección de lado con el fin de centrarse sólo en ella. Por ejemplo cuando tiene una plastilina en sus manos, una idea sería que sólo considera su peso, no su color, ni su textura ni su tamaño.
2. Considerar que aunque el objeto cambie de forma, posición, tamaño u otra propiedad, la cantidad de magnitud permanece constante. A esto le llamamos conservación de una magnitud. Por ejemplo, sabe que si su plastilina se deforma seguirá pesando lo mismo.
3. Ordenar una colección de objetos respecto de una magnitud. Por ejemplo, ordena distintas plastilinas según un peso, sin que importe la forma, el color, el olor, etc.
4. Establecer una relación entre una magnitud y un número. Por ejemplo, establece que la plastilina pesa 100 gramos.

Al finalizar este proceso, el estudiante debería ser capaz de medir, dentro de desarrollo psicológico acorde y donde él sea el principal protagonista de su aprendizaje.

En cuanto a la medida, se refirieron a sus etapas principales, utilizando los estadios piagetianos del desarrollo evolutivo de idea de medida.

1. Comparación perceptiva directa: se produce cuando se realiza una comparación utilizando sólo la percepción, sin recurrir a una medida común o al desplazamiento de los objetos comparables. En este estadio se pueden distinguir dos fases.
2. Primera: La estimación es directa y el estudiante realiza un trabajo conciso y sincrético gracias a su percepción visual.
3. Segunda: Utiliza la percepción visual, corporal y manual en forma mucho más analítica que la anterior, trabajando de un modo más cercano a lo que es realmente medir.

Desplazamiento de Objetos: En este estadio se traslada uno de los objetos de la etapa anterior o interviene un término medio que el alumno tiene apropiado en su conocimiento empírico. La transitividad aún no juega un rol. Al igual que en el estadio anterior, hay dos etapas:

1. Primera: Los objetos se transportan, los objetos se pegan para ser comparados.
2. Segunda: el estudiante utiliza un término medio que aún no es una medida común, puede ser su cuerpo, sus manos, sus pies, etc. Comienza así su primer avance para construir una unidad de medida.

Referentes teóricos

3. Al finalizar este estadio el cuerpo queda de lado y se comienza a utilizar un término medio, simbólico, que pasa de un objeto a otro para ser comparado.
4. Operación de la propiedad transitiva: Gracias un nuevo término operatorio B, se puede deducir que si $A=B$ y $B=C$ entonces $A=C$.
5. Es indispensable señalar que este estadio sólo se apropiará si hay una conservación e la magnitud. Por otro lado, el estudiante debe comprender que entre menor sea el término B más exacta será más exacta la medida. Esta comprensión debe sostenerse en experiencia empírica.

Se observa que en el tercer estadio, el término B desarrolla la idea de unidad de medida, pero para constituir la se necesita de cinco pasos.

1. Ausencia de unidad: La primera medida es visual y comparativa, sin utilizar un tercer objeto.
2. Unidad objetual: Unidad ligada a un sólo a un objeto y claramente relacionada con una la magnitud, por ejemplo el largo de lápiz mide el largo del escritorio. Objeto y unidad están estrechamente ligados, lo que no impide que la unidad de medida se utilice para medir otros objetos, sin embargo, esto no indica que el estudiante haya llegado a la idea de unidad.
3. Unidad situacional: Hay una relación estrecha entre la unidad y el objeto, pero cambia o puede cambiar de un objeto a otro, siempre que se realice una medición en cada uno y guarde una relación con el anterior.
4. Unidad figural: La relación unidad-objeto comienza a perderse, incluso en el orden de magnitud. Se tiende a medir objetos pequeños con unidades pequeñas y objetos grandes con unidades grandes. La adecuación de la unidad a la magnitud de lo medible (condición no indispensable) hace que el avance hacia la consecución de la unidad sea importante. Pueden conseguirse una serie de unidades para medir cualquier objeto.
5. Unidad propiamente dicha: La unidad es libre del objeto en forma y en tamaño, dado que es interfigural.

Llegando a este punto, se tiene como resultado de una medida un número con una unidad. Esta situación se enriquece al medir con la misma unidad otros objetos.

Se puede observar que la construcción de la unidad se perfecciona a medida que las fases avanzan. Comenzó ligada totalmente al objeto medible (intraobjeto) para lograr ser una unidad que no depende del objeto a medir (interobjeto), sin perder las características primitivas para las que sirve la medida dentro de una magnitud, sino que desarrollándolas más.

Chamorro y Belmonte indican que para Piaget la adquisición de las magnitudes de longitud, masa y capacidad pueden ser comprendidas entre los 6 y los 8 años. La superficie y el tiempo entre los 7 y los 8, mientras que el volumen y la amplitud angular

entre los 10 y los 12. Por supuesto, pueden ser planteadas desde antes. La superficie, el volumen y el tiempo pueden y deben plantearse desde la etapa preescolar.

2.1.1.3.4 Callís (2002)

Considera que capacidad de medida descansa en la adquisición del espacio y el número. La capacidad de medir tiene su propia evolución que se desarrolla gracias a la adquisición conjunta de la magnitud, la medida y la unidad. Consideró que la magnitud necesita cuatro etapas para poder interiorizarse, al igual que Chamorro y Belmonte (1988). Estas etapas son las siguientes:

1. Identificación y discriminación magnitudinal: Es necesario diferenciar cada propiedad como algo diferente de las otras.
2. Conservación de la magnitud: Aunque se modifiquen las apariencias, la magnitud sigue siendo la misma.
3. Ordenación de la magnitud: la capacidad de ordenar objetos en base a una misma magnitud.
4. Relación magnitud-número: asignación de un valor numérico a una magnitud a partir de un proceso de comparación con una cantidad de magnitud.

En cuanto a la adquisición de la unidad, se apoya en Chamorro y Belmonte (1988), pero integra las fases intermedias, objetal, situacional y figural, con el nombre de Unidad Dependiente, sin embargo la fase objetal es reemplazada por figural, dado que Callís considera que el nombre es equívoco porque en todos los casos las unidades son objetos o bien recursos antropométricos. La última fase toma el nombre de Unidad Independiente. Al llegar a esta última fase, se puede considerar que las personas tenemos la capacidad para adquirir el dominio de la medida.

Para Callís desde el punto de vista lógico-matemático el dominio de la magnitud evoluciona globalmente desde la identificación y discriminación magnitudinal, la conservación de la magnitud, la ordenación de la magnitud y la numeración métrica, que se pueden resumir en dos fases: pre métrica y métrica.

Considerando lo anterior, la capacidad de medir se desarrolla en base a una serie de adquisiciones de pensamiento lógico, que permiten ir madurando etapas para llegar hasta ella. Las etapas son las siguientes.

- Identificación y reconocimiento de la magnitud
- Identificación y reconocimiento de unidades
- Selección de la unidad más adecuada
- Control y aplicación tecnológica de la medición
- Operatividad y cuantificación.

Si estas cinco etapas están adquiridas producen interconexiones mutas que desarrollan la capacidad de discriminación magnitudinal, la integración de la unidad, la adquisición

Referentes teóricos

del sistema magnitudinal y la capacidad de precisión y estimación. De este modo estas cuatro frases se pueden concretar en tres niveles de maduración de la medida.

- Identificación-reconocimiento
- Relación-ordenación-comparación
- Operación-composición-descomposición

Callís resume su reflexión del génesis de la medida en este esquema sobre medida longitudinal, sin embargo, consideramos que es aplicable a todas las unidades de medida.

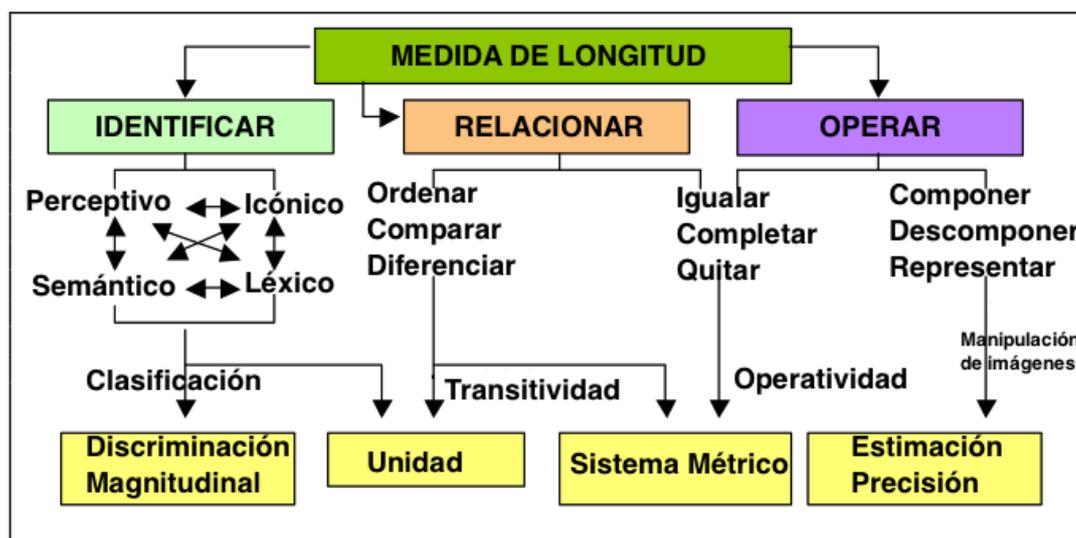


Imagen 2.1.1.3.4: estructura lógica y adquisición de la medida

De este modo la acción de los estadios sensorio-motrices potencian por medio de la observación y el lenguaje la capacidad de identificación y reconocimiento, una capacidad básica del pensamiento lógico-matemático base para la clasificación e imprescindible para el razonamiento lógico. La integración observación y lenguaje también se relacionan con la conservación de la magnitud, identificándola como una propiedad intrínseca de la materia. La ordenación en estas fases pre-métricas utilizando el menor qué, igual qué o mayor qué son las primeras formas de medida, pero por supuesto no la capacidad métrica.

Hay que esperar que estas relaciones de orden evolucionen por medio de procedimientos comparativos aplicados respecto a una determinada cantidad de magnitud representada por un objeto unitario. En ese momento se consigue el dominio unitario y numeralizar la ordenación, produciéndose el paso de la medida pre-métrica a la métrica, es decir a la adquisición del concepto de unidad como criterio de comparación.

Para Callís el estadio previo a esta adquisición relaciona al número y la magnitud según la apropiación numérica del sujeto. Posterior a ello, considerando procesos de

igualación, complemento, composición y descomposición, se evoluciona a niveles operativos métricos para dar paso a los algorítmicos e intuitivos.

Callís resumió por medio de este esquema el origen de la adquisición de la capacidad de medida.

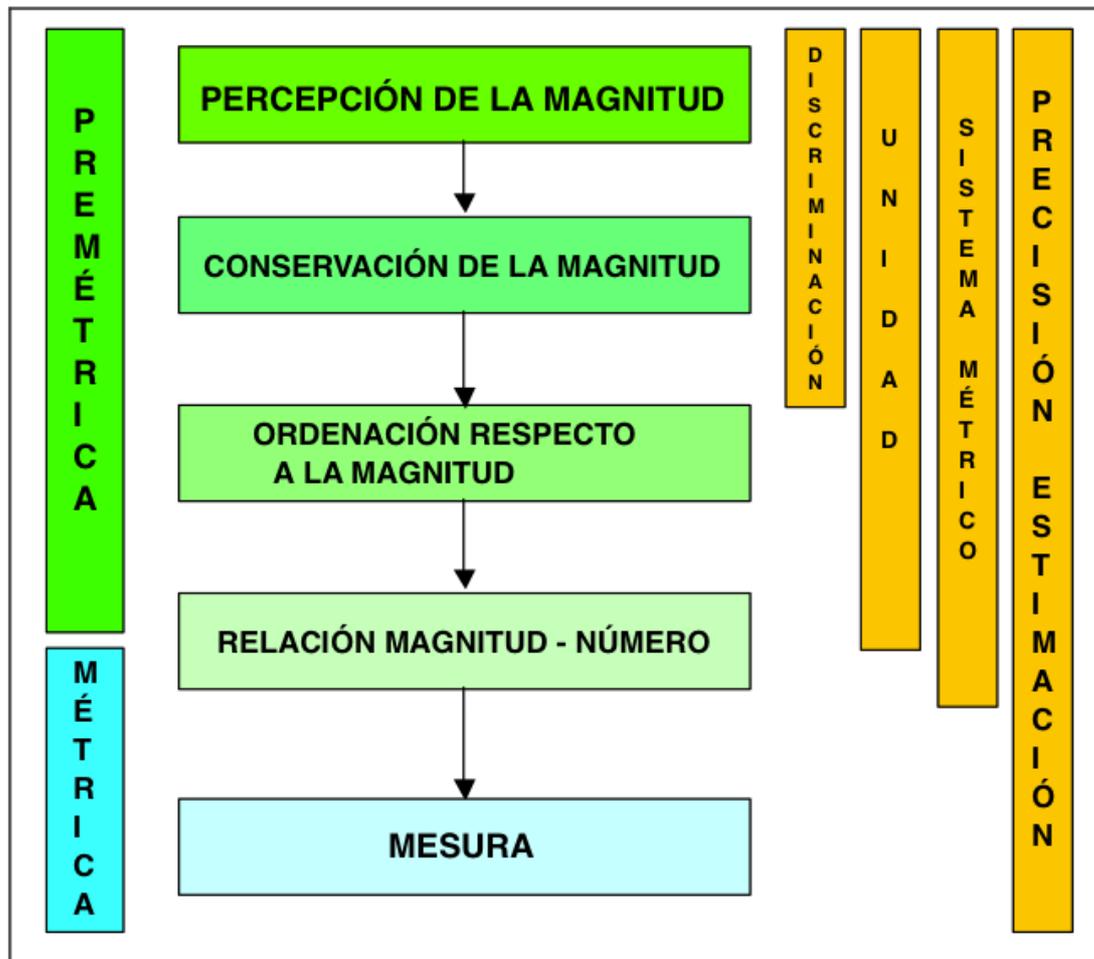


Imagen 2.1.1.3.4b Génesis de la medida

2.1.1.3.5 Outhred, Mitchelmore, McPhail y Gould (2003)

Los autores en su trabajo “*Count Me Into Measurement: A program for the early elementary school*”, establecen tres estadios o etapas para la enseñanza de las unidades formales:

- La primera etapa es aquella en que los estudiantes identifican el atributo espacial
- En la segunda etapa los estudiantes aprenden a medir de manera informal
- En la tercera etapa y final los estudiantes aprenden las estructuras de las unidades formales

2.1.1.3.6 Lehrer (2003)

En su investigación sobre el desarrollo del entendimiento de la medida, considerada para los Principios y Estándares de la Matemática Escolar de la *National Council of*

Referentes teóricos

Teachers of Mathematics, explica que son ocho componentes las que marcan la apropiación de la capacidad de medida en los estudiantes, las que se resumen a continuación.

1. Relación unidad-atributo: Se refiere a la correspondencia entre los atributos medidos con unidades de magnitud. La selección de una unidad de medida conlleva un razonamiento lógico que involucra el espacio medido y las herramientas disponibles para medir. Consideramos que este punto es interesante, puesto que en la cotidianidad, en algunas ocasiones, utilizamos referentes de unidades que no se corresponden con la magnitud. Por ejemplo, hay países donde la distancia se mide en minutos.
2. Iteración (repetición): Se refiere a la repetición de las unidades a partir de una acumulación con el fin de obtener una cantidad. Esto sucede porque se entiende una medida como una magnitud que puede ser subdividida, donde una unidad de medida puede acumularse y acomodarse.
3. Embaldosado (relleno de espacio con figuras): Para medir las unidades deben ordenarse sucesivamente. Rellenar espacios es un proceso complejo, sobre todo si hablamos de volúmenes, dado que “se pueden dejar espacios”. Este “relleno” está implícito por la subdivisión de magnitudes, sin embargo, no es una tarea fácil para los niños.
4. Unidades idénticas: Cuando las unidades son idénticas, su conteo es la medida.
5. Estandarización: Estandarizar las unidades de medida favorecen la comunicación, un ejemplo de ello son los sistemas de medida como el Sistema Internacional de Medidas.
6. Proporcionales: Diferentes unidades de medida implican diferentes cantidades de magnitud que pueden representar una misma medida. Las cantidades de magnitud son inversamente proporcionales al tamaño de las unidades.
7. Aditividad: En el espacio las unidades se pueden componer y descomponer. Lo importante es la distancia total entre dos puntos, porque que la distancia es la suma de las distancias de cualquier conjunto arbitrario de segmentos que subdividan al segmento lineal.
8. Origen (punto cero): Algunas mediciones pueden involucrar el desarrollo de una escala. En el espacio euclidiano las medidas son razones, por consiguiente, cualquier localización puede servir como origen.

2.1.1.4 La importancia de la medida en la escuela

A modo de síntesis, citamos a Stephan y Clements (2003) y Clements y Sarama (2014) que explican que cuando trabajamos la medida, desarrollamos también el razonamiento y lógica. La medida es una habilidad difícil, porque envuelve muchos conceptos fundamentales que incluyen la comprensión de distintos elementos, tales como: el

atributo, la conservación, la transitividad, las particiones iguales, la iteración de la unidad estandarizada, la distancia, el origen y la relación con el número. Estos elementos se ponen en juego al aprender y aplicar otras ramas de la matemáticas, por ejemplo, la operatoria numérica, las ideas geométricas, los conceptos estadísticos y las nociones de función (NCTM, 2000).

Sin embargo, en la escuela, la medida ha sido una excusa para trabajar actividades de dominio aritmético (Chamorro, 2003). De este modo, las magnitudes han sido reemplazadas por números, es usual que el concepto de área preceda al concepto de superficie y que interese el producto de un ancho por alto antes de la interiorización de un metro o un centímetro cuadrado. Del mismo modo, el conteo de unidades y el uso de instrumentos de medida se han convertido en un aprendizaje memorístico carente de significado (Clements y Batista, 1992). En el año 1996, el *National Center for Education Statistics* observó que menos del 50% de los estudiantes del séptimo año de educación estadounidense podían determinar la longitud de un segmento de recta cuando el origen de la recta no se alinea con el principio del segmento.

Chamorro (2003) da cuenta de que en el escenario educativo hay una idealización de los objetos, donde las mediciones se realizan siempre en entornos artificiales y sus resultados son mayoritariamente números enteros, alejándose de las actividades realizadas en entornos profesionales o personales. Esta idea es reforzada por Roth y Roychoudhury (1993) cuando indican que la estimación de medida a menudo se pierde en el aula de ciencias y las matemáticas, porque estudiantes y maestros se enfocan estrechamente en la búsqueda de la solución correcta a un problema particular.

2.1.2. Investigación en la enseñanza y aprendizaje de la estimación de medida

Diferentes autores, como Callís (2000), Hogan y Brezinski (2003) y Callís, Fiol, De Luca y Callís (2006), afirman en sus investigaciones que la estimación de la medida no ha recibido la atención necesaria dentro de la investigación en didáctica de las matemáticas. Estos autores proporcionan dos posibles motivos para explicar esta circunstancia. Por un lado, los estudios realizados sobre estimación de medida no poseen la fiabilidad necesaria para ofrecer resultados consistentes y por otro, es la escasa presencia de materiales para trabajar la estimación de medida, hecho que incide en una presencia testimonial en la formación del profesorado.

2.1.2.1 Sobre la definición de estimación

El diccionario de la lengua española de la RAE define el sustantivo estimación como “*aprecio y valor que se da y en que se tasa y considera algo*”, es una definición del concepto escrita desde la perspectiva de la ciencia económica en la que se valoran bienes y servicios. Este enfoque es lejano a perspectiva tomada en las diversas investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática en las últimas

Referentes teóricos

décadas, donde se han desarrollado diferentes definiciones del concepto de estimación que responden a diferentes tipos de tarea matemática. A continuación se presentan distintas definiciones del concepto de estimación en orden cronológico de autores relevantes en el tema.

1. Bright (1976) define estimar como “un proceso de llegar a una medición o a una medida sin la ayuda de herramientas de medida. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos” (p. 89). En esta definición observamos la valoración de la medida debe ser sin instrumentos de medida y en base a aspectos perceptivos.
2. Informe Cockcroft (1982) considera a la estimación como una “habilidad para evaluar si es razonable el resultado de un cálculo o de una medida; la capacidad de hacer juicios subjetivos acerca de una variedad de medidas” (pp. 22-23). Esta definición rescata el uso evaluativo de la estimación de la medida, como también la subjetividad del proceso y/o resultado, por otro lado engloba el término de estimación tanto en aritmética como en medida.
3. Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) definen estimación como “juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias individuales de quien lo emite” (p. 18). Los autores no la llaman ni proceso o habilidad, como fue definida anteriormente, sino “juicio” y un juicio subjetivo, con lo que la validación del resultado obtenido depende de las posibilidades y necesidades del estimador. Al igual que la definición dada en el Informe Cockcroft (1982), se considera una misma definición general para las estimaciones de cálculos numéricos y para la estimación de medida, aunque consideren que son procesos que tienen sus propias particularidades.
4. Clayton (1996) se refiere a la estimación como “la habilidad para conjeturar sobre el valor de una distancia, costos, tamaños, etc. o cálculos” (p. 87). El autor indica que es una “habilidad para conjeturar”, es decir, el estimador debe tener algún indicio de alguna medida o cálculo para poder realizar una estimación que puede ser parte de cualquier área matemática.
5. Van de Walle, Karp y Bay-Williams (2010) indican que la estimación “se refiere a un número que es una aproximación adecuada para un número exacto dado el contexto particular, que se sustenta en algún tipo de razonamiento” (p. 241). En este caso, la estimación es una aproximación adecuada que engloba diferentes procesos en distintas áreas de la matemática y se soporta en razonamientos matemáticos con lo que no supone un proceso por el que se obtengan números de forma azarosa.
6. Clements y Sarama (2014) consideran que una estimación no es sólo una adivinanza, sino es a lo menos una adivinanza “matemáticamente educada”, es un

proceso para resolver problemas que exige una evaluación aproximada o provisional de una cantidad (p. 52).

En general, podemos observar que las definiciones anteriores describen diferentes tipos de tareas matemáticas, sin embargo, estimar el resultado de un cálculo es totalmente distinto a estimar la superficie del piso de una sala de clases. En el primer caso aproximamos y calculamos, en el segundo necesitamos percibir el piso de la sala para poder comparar con alguna idea de unidad cuadrada que tengamos interiorizada, a partir de este razonamiento lógico, se podría emitir el juicio de valor.

A modo de resumen, mencionamos las características generales de la estimación, presentadas por Reys (1984) y completadas por Segovia, Castro y Rico (1989).

1. Consiste en realizar un juicio de valor de una cantidad o el resultado de una operación
2. Hay que tener una información, referencia o experiencia sobre la situación a enjuiciar
3. Se realiza en forma mental
4. Es rápida y se usan números sencillos
5. El valor asignado no tiene exactitud, pero es apto para la toma de decisiones
6. El valor asignado admite distintas aproximaciones, dependiendo de quien realice la aproximación.

2.1.2.2 Los diferentes tipos de estimación

En general, podemos observar que las definiciones anteriores describen diferentes tipos de tareas matemáticas. Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), con el propósito de distinguir en el aula las tareas de estimación, explican que la estimación de medida se distingue de la estimación computacional por razones metodológicas. Por otro lado, autores como Sowder (1992) y Hogan y Brezinski (2003) indican que los tipos más comunes de estimación son la estimación computacional, la estimación de numerosidades y la estimación de medida. A partir del aporte de los autores, a continuación explicaremos cada una de ellas.

2.1.2.2.1 Estimación computacional

Sowder (1988, p 82) definió la estimación computacional como “el proceso de transformar números exactos en aproximaciones y calcular mentalmente con estos números para obtener una respuesta razonablemente próxima al resultado exacto de un cálculo”. De Castro, Castro y Segovia (2014) consideran que la estimación computacional debería incorporarse al quehacer educacional como proceso matemático transversal, en todas las áreas de las matemáticas. Rico (1996) explica que la incorporación de la estimación computacional a los currículos de la escuela tradicional se deriva en parte al uso generalizado de nuevas tecnologías, como la calculadora.

Referentes teóricos

Dar respuestas a cálculos estimados, como por ejemplo, $99+102$, $349\div 51$ ó $2,99\times 1,0934$ son ejemplos de este tipo de estimación. Estas tareas comúnmente se acompañan de palabras sencillas, pero con límites de tiempo con el fin de que quienes estiman, no realicen los algoritmos tradicionales de cálculo, sino utilicen la estimación para llegar al resultado.

Podemos observar que las seis características completadas por Segovia, Castro y Rico (1989), mencionadas en el apartado 2.1, son idóneas para este tipo de estimación. Por ejemplo, si tenemos que realizar la división de $355 \div 49$, el trabajo a realizar tendrá las siguientes características:

1. Se realiza un juicio de valor sobre el resultado de la operación, es aproximadamente 7
2. Hay que tener un dominio sobre las tablas de multiplicar
3. Se realiza mentalmente
4. Los números 351 y 49 se reemplazan por 350 y 50 respectivamente, para realizar un trabajo más simple
5. Sabemos que el valor asignado no tiene exactitud, pero es idóneo para tomar alguna decisión dentro de un contexto
6. En este caso, el valor asignado admite de quien realice la aproximación, otra persona pudo pensar en 36 dividido en 5 e indicaría “un poco más de 7”

La estimación computacional se relaciona con el sentido numérico, concepto que ha sido definido por variados autores (Edwards, 1984; Greeno 1991; Howden, 1989; Sowder, 1988) y que en todas sus definiciones, la estimación computacional es parte del concepto o bien está estrechamente relacionado.

Las siguientes características del sentido numérico son algunas de las que se la relacionan o son parte de la estimación computacional.

- Descomposición de números en forma natural, Ministerio de Educación y Ciencia, MEC (2006, p. 293).
- Uso de las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar mentalmente cálculos (Ministerio de Educación y Ciencia, MEC (2006, p. 293), NCTM, 1989, Sowder, 1988)
- Comprensión adecuada del significado de los números, (NCTM, 1989, Sowder, 1988)
- Flexibilidad de cálculo mental, estimación numérica y juicio cuantitativo. (Greeno, 1991, 170)
- Desarrollo gradual del resultado de explorar números, visualizarlos en contextos variados y relacionarlos con procedimientos que no se limiten a los algoritmos tradicionales. (Howden, 1989, p. 11)

Es necesario que se diferencie la estimación computacional del cálculo mental. A pesar de que ambos emplean procedimientos mentales para su realización sin la ayuda de herramientas como lápiz y papel, el cálculo mental produce respuestas exactas, mientras que la estimación computacional selecciona números sencillos para encontrar una la respuesta es aproximada de la respuesta exacta, Reys (1984, p. 548).

2.1.2.2.2 Estimación de numerosidades (*numerosity*)

La *numerosity* refiere a la habilidad de estimar visualmente un número de objetos dispuestos en un plano durante un tiempo limitado. Cuando este número es pequeño y puede ser evaluado con rapidez y precisión, la tarea recibe el nombre de subitizing.

Para Hannula, Räsänen y Lehtinen (2007), las tres habilidades fundamentales para desarrollar el pensamiento numérico en la infancia son subitizing, contar y numerosity. Los autores consideran que subitizing promueve el significado cardinal de las primeras palabras de conteo. Clements y Samara (2014) complementan la idea, explicando que es importante que los estudiantes posean imágenes mentales de algunos números, al menos, de los números pequeños. Indican que es fundamental que los estudiantes desarrollen puntos de referencia, por ejemplo tener imágenes mentales del número 10, y que es indispensable que los estudiantes asocien cantidades con números, tanto en aritmética como en medición.

Hannula, Räsänen, Lehtinen (2007) y Clements y Sarama (2014) coinciden en que los estudiantes necesitan aprender a construir imágenes de números y de colecciones para realizar estimaciones precisas, por ello, es necesario promover numerosity en el currículo escolar porque puede mejorar la enseñanza. El trabajo perceptual y conceptual de subitizing y de numerosity contribuye más tarde a la enseñanza de la aritmética (Obersteiner, Reiss y Ufer, 2013).

2.1.2.2.3 Estimación de medida

La estimación de medida se basa en la habilidad perceptiva de estimar diferentes magnitudes (longitud, área, volumen, tiempo, peso, etc.) en objetos comunes (Hogan y Brezinski, 2003). Segovia y Castro (2009) distinguen la estimación de medida de acuerdo al tipo de medida involucrada, ya sea continua o discreta. Estimar medidas es una acción compleja que involucra distintas habilidades, como la comprensión del concepto de unidad, la imagen mental de la unidad, la comparación de objetos, la iteración de la unidad, la selección y el uso de estrategias para hacer estimaciones (Hildret, 1983). A pesar de la importancia de la estimación, se sabe mucho menos sobre ella que cualquier otra habilidad cuantitativa básica (Dowker, 1996). Callís (2002) comparó la capacidad entre la estimación métrica la estimación numérica, encontrando que la capacidad de estimación métrica está menos desarrollada y es menos precisa que la numérica.

Referentes teóricos

Hogan y Brezinski (2003) indagan sobre las habilidades que estos tres tipos de estimaciones desarrollan y concluyen que la estimación computacional es una habilidad que se desarrolla en conjunto con el resto de habilidades aritméticas o las habilidades desarrolladas habitualmente en la escuela. Sin embargo, la estimación de numerosidades y la estimación de medida, requieren en conjunto del mismo tipo de habilidades, que se relacionan con aspectos perceptivos. Estos dos tipos de estimaciones deberían separarse conceptualmente de la estimación computacional ya que promueven procesos y habilidades distintos. Al mismo tiempo, conjeturan sobre el énfasis que deberían tener las imágenes y referentes mentales en el trabajo cognitivo de la medición y la orientación espacial. Clayton (1996) se refirió a que debe quedar claro que el conjunto de habilidades de aritmética mental y aproximación se relacionan con las tareas de estimación de medida, por ejemplo, si queremos estimar el área de una superficie cuyas estimaciones de sus lados son 1,5 metros de largo y 4 metros de ancho, las habilidades de cálculo mental o estimación computacional se ponen en juego.

Por otro lado, Callís (2002) considera que los recursos, procedimientos y estrategias juegan un rol fundamental al estimar medidas. De este modo, las características presentadas por Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) son idóneas para la estimación computacional o discreta, por ello amplía la caracterización para la estimación métrica. A continuación se presentan las diez características.

1. “Habilidad mental: Es una capacidad que utiliza procedimientos y estrategias exclusivamente mentales. Toda la acción se realiza sin la aplicación física de ninguna comparación directa ni por mecánicas algorítmicas sobre papel.
2. Individual: La acción estimativa se efectúa a nivel personal.
3. Representativa: Toda estimación necesita imprescindiblemente de la aportación de imágenes y representaciones mentales, por lo tanto, de la experiencia y referencia de aquellos contextos estimativos.
4. Adquirida: La capacidad estimativa no se posee de entrada sino que se adquiere a posteriori de la posesión e interiorización de ciertas capacidades previas.
5. Evolutiva: El dominio de la estimación es producido a través de un proceso madurativo, cambiante y educable.
6. Específica: Los procedimientos, recursos y estrategias que se necesiten y se pongan en juego son diferentes de los que se aplican en contextos no estimativos, siendo diferenciados también en distintos contextos matemáticos.
7. Aproximativa: la valoración estimativa no pretenden la exactitud de la respuesta sino la aproximación. En consecuencia, tiene muchas respuestas válidas.
8. Rentable: La valoración realizada se ha de efectuar con rapidez y con una clara reducción temporal respecto a otros procedimientos.

9. Numérica: Toda estimación trata de valorar matemáticamente una determinada situación problemática, dando un resultado numérico, sea operación o métrica.
10. Significativa: La valoración realizada ha de permitir tomar decisiones” (pp 79-80).

2.1.2.2.4 El tipo de estimación considerado en este estudio

Callís, Fiol, de Luca y Callís (2006) indican que el aprendizaje de la medida ha avanzado junto al de la estimación, pero que el aprendizaje de la estimación se ha centrado principalmente en la estimación de cálculo, con el fin de potenciar el cálculo mental y no se le ha dado espacio dentro del aprendizaje de la medición. Los diversos autores nombrados en el apartado 1.2.2.1 Estimación computacional, respaldan a Callís, Fiol, de Luca y Callís (2006).

Esta investigación sólo considera la estimación de medida, es decir, la estimación descrita en el apartado 1.2.2.3.

2.1.2.3 La estimación es parte del conocimiento matemático

Socialmente existe la idea de que la matemática es una ciencia exacta, quizás por ello la estimación es una tarea ajena, informal o poco adecuada para trabajar las matemáticas. Sin embargo, la matemática más que ciencia exacta, es una ciencia rigurosa, bajo esta consideración, con la estimación de medida podemos hacer matemática, dado que su uso contiene claridad de pensamiento y discurso, facilidad en relación con los problemas y consistencia en la aplicación de procedimientos” (Usiskin, 1986, p. 2).

Para Segovia y Rico (2009, p. 506) las razones porque la estimación se hace necesaria puede clasificarse en cinco grupos

1. “Imposibilidad de conocimiento de un valor exacto, como es el caso del empleo en algún cálculo de un valor desconocido de manera exacta; por ejemplo, el número de automóviles que salen de viaje un fin de semana.
2. Imposibilidad de tratamiento numérico exacto; por ejemplo, cuando empleamos en un cálculo un número decimal periódico.
3. Claridad numérica: los medios de comunicación, por ejemplo, para mayor claridad y comprensión de la información emplean estimaciones en lugar de cantidades exactas como “150 millones para una población escolar de 63 mil alumnos en lugar de 148739426 pesetas para una población escolar de 62879 alumnos”.
4. Facilidad en el cálculo; son numerosas las situaciones en que la exactitud no es necesaria y es suficiente y útil un resultado aproximado; un redondeo apropiado y unos algoritmos mentales apropiados, proporcionan de manera sencilla un resultado bastante aproximado al exacto y útil para tomar decisiones.”.

Referentes teóricos

Distintos autores han investigado la estimación de cálculo desde principios de los años 80 del siglo pasado. Se puede encontrar en Segovia y Castro (2009) una revisión y recopilación de las investigaciones sobre estimación computacional.

2.1.2.4 Diferencia entre estimación y aproximación

Al hablar de estimación no podemos dejar de lado la aproximación, incluso coloquialmente pueden ser sinónimos (Hall, 1984; Sowder1988). Para Segovia y Castro (2009) aproximar consiste en encontrar un resultado suficientemente precisa para un determinado propósito, es tan cercana al valor exacto como se precise y necesite; es controlable; se sustenta con teoremas del cálculo aproximado o con la teoría de errores, algoritmos de papel y lápiz o calculadora. La estimación en cambio, tiene en cuenta el error pero de manera menos precisa y no tiene el control asegurado.

Segovia y De Castro (2007), apoyándose en las seis caracterizaciones de la estimación mencionadas en el apartado 2.1, diferencian la aproximación de la medida.

“Aproximar es encontrar un resultado suficientemente preciso para un determinado propósito. La aproximación enfatiza la cercanía al valor exacto y es totalmente controlable; se aproxima tanto como la situación lo precise, tiene como herramientas los teoremas de cálculo (aproximado) o teoría de errores los algoritmos de lápiz y papel o con calculadora. La estimación tiene en cuenta el error pero de manera menos precisa. A veces, este no tiene un control asegurado, las características 3 y 6 anteriormente citadas, no las tiene la aproximación” (pp. 1-2)

En otras palabras, la estimación debe ser realizada en forma mental y no es controlable, pues depende de quién realice la acción. En cambio, la aproximación no cumple con estas características, al no considerar estas distinciones, muchos podrían considerar que estimar es un sinónimo de aproximar, siendo que en este contexto para estimar se necesita aproximar, y no viceversa.

Para ilustrar la diferencia entre los conceptos de aproximación y estimación, plantearemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: *Un individuo coge un lápiz y mide con él la mesa, indicando que “tres lápices y medio hacen el largo de la mesa”.*

En este caso el individuo está midiendo en unidades de medida no formales, la cantidad de magnitud contempla tres unidades, y una parte de una cuarta unidad. Para saber “qué parte” de esta cuarta unidad está incluida en la cantidad de magnitud, se realiza una estimación. Sin embargo, en el proceso general se realizó una iteración directa de la unidad de medida en el objeto, para llegar a la respuesta no utilizó referentes personales. Consideremos ahora la siguiente situación:

Ejemplo 2: *Estamos en la estación de Plaça Catalunya y debemos llegar a la estación Universidad Autònoma, porque tenemos una reuni3n a las 9:30. Si son las 8:55 ¿Alcanzamos a llegar puntualmente?*

En este segundo caso podemos obtener distintas respuestas dependiendo de la experiencia que tengan los sujetos con el tiempo de viaje a nivel general, el tiempo de viaje en ese horario, las distancias entre la estaci3n y la oficina de reuniones, etc. Lo importante es dar respuesta y eso dependerá de quien haga el juicio de valor.

Considerando estas referencias académicas, inferimos que una tarea de estimaci3n depende del desarrollo sensorial de los individuos y del grado de pensamiento lógico o matemático. La estimaci3n es necesaria para dar respuesta en ciertos contextos, por ejemplo si tenemos 20 vasos y una cantidad de bebida para repartir en ellos ¿Cómo repartimos el líquido en forma equitativa en cada vaso? La aritmética nos provee de una medida, pero su ejecuci3n depende de la estimaci3n, si no tenemos un recipiente para medir, por ejemplo “0,250 litros exactos”.

La estimaci3n de medida logra desarrollar la capacidad de dar respuesta en el contexto, evidenciando así, que la matemática es una herramienta para solucionar problemas, donde la relatividad propia de los sujetos caracteriza a los objetos. Podemos extrapolar esta situaci3n a otro sin fin de situaciones, porque “la medida de las cosas” tiene un significado según el sujeto que las mide.

2.1.2.5 La investigaci3n en estimaci3n de medida

En Joram, Subrahmanyam y Gelman (1998) se distinguen tres generaciones de investigaciones sobre la estimaci3n de medida. En los primeros estudios en investigaci3n de la estimaci3n de la medida (Crawford y Zylstra, 1952; Wilson y Cassell, 1953), el interés investigativo se centraba en poner en manifiesto la capacidad estimativa y la precisi3n de niños y adultos. Las preguntas se centraban en estimar medidas de magnitudes conocidas en objetos del entorno de los individuos, por ello las magnitudes podían variar. Las respuestas se clasificaban según la precisi3n con la medida exacta y las respuestas se catalogaban como "razonables", "incorrectas" y "correctas". Se observó que los resultados mejoraban con la edad, a pesar de que con el tiempo las estimaciones se acercaban más a la medida exacta, sólo entre un 30% y 50% de poblaci3n lograba estimaciones aceptables.

La segunda generaci3n de autores (Corle, 1960, 1963; Swan y Jones, 1971, 1980) se centraron en la investigaci3n de las diferencias de la capacidad estimativa de acuerdo a las distintas magnitudes. La investigaci3n evolucionó, las magnitudes de los objetos ya no variaban, sino que distintos individuos estimaban magnitudes del mismo objeto. Sin embargo, la precisi3n de la estimaci3n seguía siendo la importancia de la tarea, de hecho, se introdujo el porcentaje de error para medir la precisi3n. La capacidad

Referentes teóricos

estimativa continuaba siendo débil dado que el porcentaje de error era bastante amplio.

En los años siguientes hasta nuestros días, la investigación en estimación de medida sigue siendo bastante escasa (Benton, 1986; Swoder, 1992; Callís 2000; Hogan y Brezinski, 2003, Siegler y Booth, 2005 y Callís, Fiol, De Luca y Callís, 2006). Sin embargo, el interés se centra en los procesos cognitivos involucrados y su contribución al desarrollo de la capacidad de estimar de medida.

Por otro lado, Clayton (1996) explica que pocos estudios han tomado una amplia muestra en sus investigaciones, por ello es complejo realizar comparaciones entre los individuos que participan de ellas.

Una de las primeras investigaciones que se interesa por los procesos cognitivos es la de Bright (1976), que explica la necesidad de enseñar la estimación de la medida, porque ayuda a los estudiantes a desarrollar un marco de referencia mental para el tamaño de las unidades de medida relativas para las distintas magnitudes, y también proporcionar a los estudiantes con actividades que concretamente ilustrarán propiedades básicas de medición.

Para Rico y Segovia (1996) la estimación es una herramienta imprescindible en todos los niveles de enseñanza y didácticamente interesante, porque incorpora una nueva forma de hacer matemáticas, relacionada con el uso de estrategias personales de interpretación y valoración de resultados que están presentes en la cotidianeidad o en situaciones realizadas para ello, por esto, se deben proporcionar actividades que involucren trabajos intuitivos para el uso de las unidades de la medida.

Fiol (1997) complementa lo anterior indicando que cada unidad didáctica debería partir de lo perceptivo, trabajando de este modo la imaginación y la geometría intuitiva, haciendo énfasis en las variables y en las relaciones entre ellas. El desarrollo de las habilidades perceptivas por medio de la estimación de media son reforzadas por Inskip (1976), el Informe Cockcroft (1982) y Hogan y Brezinski, (2003). Sin embargo, Pick (1987) indica que el rol de la habilidad de visualización espacial en el desarrollo de la habilidad de estimación ha sido propuesto, pero no ha sido bien entendido.

Callís et al., (2006), en la misma línea de los autores anteriores, considera que la estimación de medida es fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático, explicando que la capacidad de estimar métricamente es amplia y compleja, porque depende una multitud de factores, como las diferencias individuales propias de las capacidades sensoriales, especialmente la capacidad visual, que depende de la incidencia y dominancia de los hemisferios cerebrales, de la percepción y el grado de pensamiento lógico para comparar, igualar y ordenar estructuras de pensamiento operativo, que podrían de esta forma, apropiarse al estudiante del concepto de unidad. Por otro lado, Del Olmo, Moreno y Gil (1989) explican que también hay factores externos

al individuo como el objeto a medir, las unidades a utilizar, etc.

Las propias diferencias individuales de las personas intervienen en las múltiples respuestas de un quehacer estimativo, de esta manera la estimación es un contenido matemático que en su praxis, está estrechamente ligado con quien lo realiza, es por esto que en la práctica centrada en su entorno y su cultura, es donde los hombres y mujeres pueden hacerla significativa a partir de sus propios referentes.

Las ideas de Callís et al., (2006) se complementan con las de Chamorro y Belmonte (1988), quienes explican que en el tratamiento de la medida no podremos realizar estimaciones si no se realizan prácticas de medidas de objetos reales y cotidianos con el alumnado; considerando que hay dos momentos apropiados para trabajar la estimación, que serían antes y después de haber trabajado la medida. Antes de estimar, se necesita trabajar la estimación cualitativa, para hacer comparaciones directas entre los objetos, posteriormente, hay que estimar medidas aproximadas sin utilizar instrumentos de medida.

De esta forma la estimación de medida está fuertemente ligada a las experiencias previas de la medición y parece tener una importante influencia del contexto en la que se realiza (Harel y Sowder, 2005), desarrollando así la interiorización de distintas unidades de medida, es decir, referentes.

Para Joram (2003) hay tres niveles para caracterizar la forma en que los estudiantes interactúan con los puntos de referencia.

1. primer nivel: los puntos de referencia son las unidades que los estudiantes manipulan. Sería apropiado tratarlos en los primeros años escolares cuando la capacidad de los estudiantes para construir y mantener imágenes mentales apropiadas, no está altamente desarrollada. Aunque es adecuado para la enseñanza en los primeros años, es importante que los profesores intenten llevar a los estudiantes más allá de este nivel.
2. segundo nivel: los puntos de referencia son representados como imágenes visuales, que pueden servir como puntos de referencia cuando estiman. Es necesario que los estudiantes realicen estimaciones y posean sus propios puntos de referencia. Sin embargo, en este nivel los estudiantes pueden ver los puntos de referencia sólo como un objeto individual de una magnitud y no como un encaje en un sistema de medición.
3. tercer nivel: los estudiantes reconocen el lugar de los referentes individuales dentro del sistema, lo que les permite relacionar las unidades dentro de un sistema de medición. Es necesario que los estudiantes puedan distinguir en que situaciones es posible medir y estimar.

Referentes teóricos

Además explica que en el segundo y en el tercer nivel las decisiones del docente son fundamentales, dado que los puntos de referencia son objetos significativos y conocidos que proporcionan representaciones simbólicas de las unidades estandarizadas. Del mismo modo, los puntos de referencia para la estimación de medida nos muestran que la transformación de una unidad no estándar en una unidad estándar, por medio de las representaciones simbólicas, implica que el maestro debe introducir puntos de referencia como unidades no estándares para que los estudiantes realicen mediciones de objetos familiares.

Posteriormente, los referentes se deberían utilizar como puntos de referencia visuales de objetos familiares para representar unidades no tradicionales que proporcionan a los estudiantes referencias al estimar medidas. Finalmente, el profesor debe ayudar a los alumnos a comprender cómo los referentes, como un objeto individual de cierta magnitud, pueden encajar en un sistema de medición. De este modo, esta perspectiva sobre puntos de referencia para la medición de estimación es parte de la coacción y la interactividad, como las condiciones epistemológicas específicas de conocimientos pedagógicos, que son eficaces en los procesos de aprendizaje de instrucción, y que conducen a un contenido social desarrollado (Steinbring, 1998, 2008; Davis y Simmt, 2006). Clements y McMillen (1996) coinciden con los autores anteriores al indicar que la apropiación de una cantidad es una referencia que se debe activar en el momento de estimar. Consideran además que los individuos poseen herramientas de medición interna, que operan como participación mental o como la segmentación de una longitud que no es verbal y que representa una magnitud.

Castillo (2012) comprobó que tanto a nivel individual como a nivel grupal, los estudiantes con mayores capacidades estimativas no tienen dificultades conceptuales asociadas a la magnitud y a su medida, y además, han interiorizado referentes y/o unidades de medida. El trabajo de unidades no tradicionales es parte del trabajo con unidades estandarizadas con el fin de desarrollar referentes. Joram (2005) proponen como ejemplo recorrer cuatro veces una pista de la escuela, de esta forma, la unidad no estándar, la pista de la escuela, se utiliza para representar simbólicamente el largo estimado de una unidad estándar, el kilómetro, mediante escalamientos para poder referenciarse sobre él.

Diversos autores demandan que los puntos de referencia deben ser representaciones simbólicas y específicas de unidades de medida, con el fin de aumentar la comprensión de la medición. Al comparar una cantidad de magnitud con una imagen mental de un objeto, los estudiantes podrán mejorar su capacidad para estimar medidas (Castle y Needham, 2007; Joram 2003; Joram et al., 1998, 2005; Legutko y Urbanska, 2002, Montague y Van Garderen, 2003). Sin embargo, Chamorro (1996, 1998) expresa que los estudiantes rechazan la estimaciones de medida porque, generalmente en sus tareas,

prima la exactitud, incluso en situaciones donde no tiene sentido plantear un problema de precisión.

Es necesario que esta referencia de una medida no se separe del sentido numérico correspondiente (Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam, 2005). En esta línea, Jones, Taylor y Broadwell (2009) afirman que el uso de referentes propios, en especial los elaborados a partir del propio cuerpo, supone un primer paso para crear un sentido de escala propio, que entienden como una ampliación al campo de la medida del concepto de sentido numérico. Por su parte, La NCTM (1989) indica que desarrollar referentes para las medidas es parte del desarrollo del sentido numérico.

Las ideas del párrafo anterior convergen con la postura de Bright (1976) y Boulton-Lewis, Wils y Mutch (1996) sobre que la estimación de medida contribuye al desarrollo del concepto de número, enumeración, cantidad conteo y pensamiento tridimensional. Además favorece pensamiento de orden superior y las habilidades de resolución de problemas (Ainley 1991; Dowker 1992).

Por otro lado, en la resolución de problemas, la estimación contribuye a la flexibilidad mental en la manipulación de datos, la selección de estrategias y la razonabilidad del resultado alcanzado (Cajaraville, 2007). Castillo, Segovia, Castro y Molina (2011) a partir de los estudios de Hildreth (1983), Chamorro (1988), Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) y Castillo (2006), identificaron un conjunto de ítems que intervienen en la creación del conocimiento relativo a la estimación de medida, a los cuales llamaron “componentes de la estimación de medida” y detallamos a continuación.

- C1. Comprender la cualidad que se va a estimar o medir
- C2. Percibir lo que va a ser medido o estimado
- C3. Comprender el concepto de unidad de medida
- C4. Tener una imagen mental de la unidad de medida que se va a usar en la tarea de estimación
- C5. Tener imagen mental de referentes que se van a usar en las tareas de estimación
- C6. Adecuar la unidad de medida a utilizar con lo que se va a medir o estimar
- C7. Conocer y utilizar términos apropiados de la estimación en medida
- C8. Seleccionar y usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones
- C9. Verificar la adecuación de la estimación.

Castillo (2012, p. 68) realiza una revisión y clasificación de las investigaciones en estimación de medida, contando 54 investigaciones desde 1952 a 2011, donde la investigación de la estimación de las magnitudes continuas son mayoría ante la estimación de las magnitudes discretas y la investigación en ambos tipos de magnitud.

Referentes teóricos

Sobre el conocimiento del profesorado o su formación en estimación de medida, las investigaciones son aún más escasas. Este punto se desarrolla en el apartado 2.8 de este capítulo.

2.1.2.6 Estrategias de estimación de medida

A continuación se muestran las diferentes estrategias de estimación de medida, tanto de magnitudes continuas como discretas, que se han detectado en diferentes investigaciones.

2.1.2.6.1 Estrategias de estimación de medida continua

Existen pocos estudios sobre las estrategias de estimación de medida, que se han centrado esencialmente en magnitudes como longitudes o superficies.

Hildreth (1983) propone distintas estrategias de estimación, estas son algunas de ellas:

1. iteración de la unidad: consiste en iterar mentalmente una unidad de medida.
2. subdivisión del objeto a estimar: consiste en subdividir la magnitud de acuerdo a algún punto de localización, y se estima una de las subdivisiones para posteriormente obtener las demás.
3. uso del conocimiento previo: a partir del conocimiento del estimador sobre el objeto o sobre una unidad, por ejemplo, la altura de los ladrillos para estimar el alto de la pared.
4. comparación del objeto con otro del que se posee información: A partir de la referencia previa, se realiza la estimación, por ejemplo “ayer hubo 12°C de temperatura, hoy hace un poco más de frío, deben haber 8°C ó 9 °C”.
5. descomponer en partes: consiste en descomponer mentalmente la cantidad de magnitud en partes iguales para realizar la estimación.
6. Acotación de medidas: consiste en encontrar un intervalo para el valor de la medida, por ejemplo “un poco menos de 30 m²”, “entre 30 y 35 años”.
7. Longitud por anchura, para estimar el área de una superficie.
8. Descomposición y reestructuración: La idea es descomponer el área a estimar con el fin de encontrar un área conocida para realizar el punto 7, por ejemplo.

Hildreth (1983, pp. 51-52) también se refiere a los posibles errores en las estrategias de estimación de medida, que en su mayoría, derivan de errores en medida o aritmética. La primera estrategia propuesta por Hildreth, de acuerdo a las investigaciones de Hildreth (1983) y Forrester al. (1990), es la más común.

Chamorro y Belmonte (1988) citaron cuatro estrategias de estimación de la longitud.

1. “Visualizar la unidad que se va a usar en la estimación y repetirla mentalmente sobre el objeto a medir.
2. Comparar la longitud a medir con la longitud de un objeto conocido.

3. Servirse de objetos iguales regularmente distribuidos a lo largo de una longitud.
4. Hallar mitades” (pp. 74-75)

Como ejemplos de visualización indican que se pueden utilizar ruedas que en cada revolución recorran un metro, cuerdas para visualizar 10 metros, largos de piscinas, alturas de árboles o fachadas de la escuela. Para el kilómetro recomiendan utilizar la distancia entre ciudades o utilizar un podómetro, o en nuestros días, teléfonos inteligentes con aplicaciones para medir distancias.

A modo de síntesis, Chamorro (1988) indica que cada estrategia debería adecuarse a situaciones concretas y que la estimación se basa en encontrar una unidad apropiada y contar el número de estas.

Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) consideran que hay destrezas previas a la estimación de medida que facilitan su ejecución. De este modo, al igual que Clayton (1996) señalan que las componentes de la estimación computacional se entrelazan con las de estimación de medida y son necesarias para las estrategias de estimación descritas por Hildreth (1983). Para estos autores, las destrezas fundamentales para estimar medidas corresponden a interiorizar las unidades medidas, la apropiación de referentes y las técnicas indirectas.

Por la interiorización de las unidades medidas enteremos las referencias perceptivas que posee cada sujeto respecto a las principales unidades de medida. La apropiación de referentes consiste en conocer la medida de cantidades familiares como partes del cuerpo (palma, pasos, etc.) o de objetos cotidianos (altura de la casa)¹.

Por las técnicas indirectas entenderemos el uso de fórmulas para medir el área, el volumen o bien algunas relaciones entre cantidades, como por ejemplo el teorema de Pitágoras.

Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) consideraron que las estrategias de estimación se pueden clasificar de acuerdo a la relación entre la cantidad de magnitud con alguna unidad o referente, o bien de acuerdo a la necesidad de descomponer la magnitud en diferentes cantidades que pueden ser estimadas independientemente. A continuación se explica cada una de las estrategias presentadas por los autores.

1. Comparación: las estrategias de comparación se basan en el uso de unidades de referencia, ya se traten de unidades estándar o de referencias propias del sujeto. Hay tres tipos de estrategias de comparación y se diferencian por la relación que existe entre la cantidad de magnitud a estimar y la unidad de referencia.
 - cuando la cantidad es igual a la unidad

¹ En nuestra investigación, tanto la interiorización como la apropiación de referentes, son llamados referentes.

Referentes teóricos

- cuando la cantidad es un múltiplo de la unidad
- cuando la cantidad es un divisor de la unidad.

2. Estrategias de descomposición/recomposición

Cuando es necesario estimar una medida constituida por diferentes partes o elementos, es necesario recurrir a alguna de estas estrategias. Para realizar esta estrategia, en primer lugar se debe realizar una descomposición mental de acuerdo a las particularidades de la cantidad de magnitud, posteriormente se deben realizar las estimaciones de cada una de las partes en que se descompuso la cantidad inicial, para finalmente realizar una valoración total. Al igual que en la estrategia anterior, pueden considerarse tres casos:

- la cantidad se descompone en partes iguales, o bien, en partes que guardan una relación simple.
- la cantidad se descompone en una cantidad conocida y otra a estimar. Por ejemplo, la altura de una pared se puede estimar dividiendo la altura en dos partes: la altura de una puerta (valor conocido) y el resto de pared que queda entre la puerta y el techo.
- la cantidad se descompone en partes diferentes.

Segovia, Castro, Castro y Rico (1989, p. 153) realizan un organigrama para esquematizar las estrategias anteriores. Los autores enfatizan en que este organigrama no pretende ser un procedimiento algorítmico para realizar estimación de medida, porque a raíz de la naturaleza de las características de la estimación de medida, esta no puede descansar en un algoritmo.

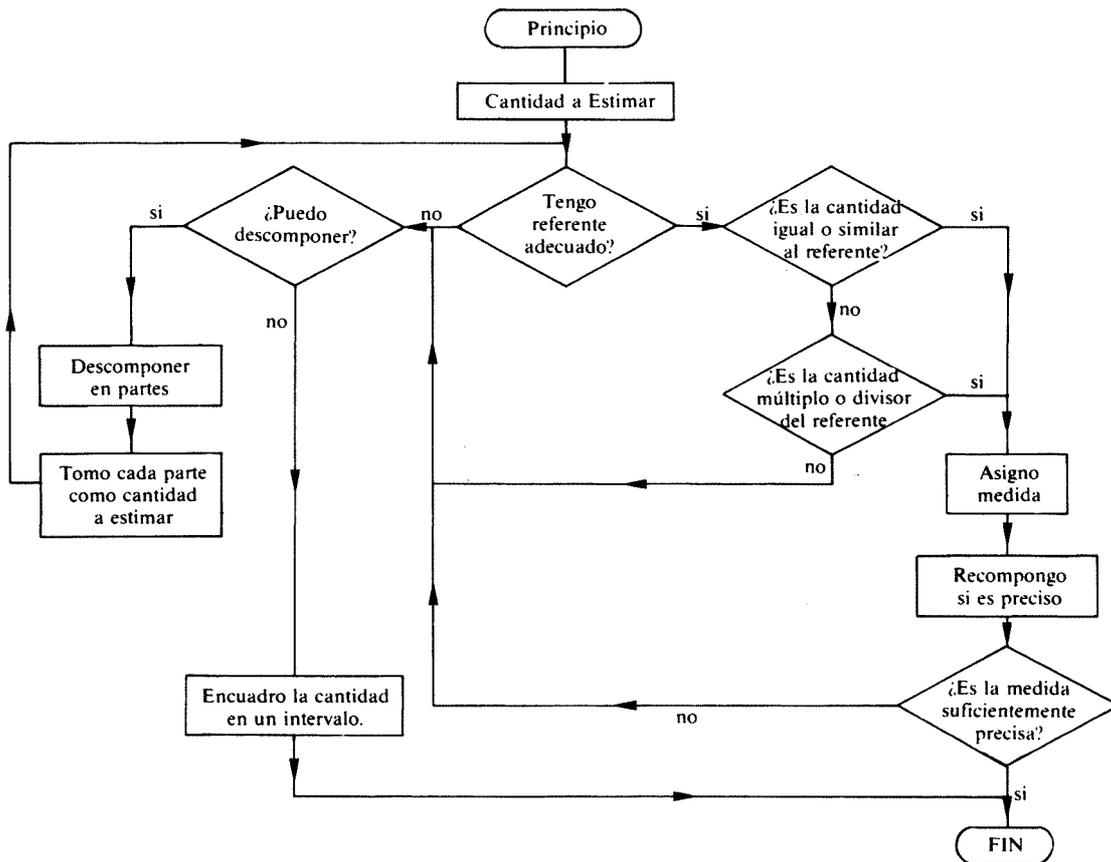


Imagen 2.1.2.6.1: Organigrama para estimar medida (p. 153)

Las estrategias de estimación explicadas por Hildreth (1983) y Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) también ha sido mencionadas por Crites (1992, 1993), Joram (2003), Joram et al., (1998, 2005), Lang (2001).

Bright (1976) planteó las estrategias de prácticas de adivinanza y comprobación (*guess-and-check*) que mejoran rápidamente la precisión (Hildreth, 1980), sin embargo, desarrolla habilidades frágiles que se limitan a contextos idénticos a los utilizados en la práctica de enseñanza del docente. Por ello, es indispensable retroalimentar la tarea de los estudiantes (Buchanan 1978, Coburn y Shulte, 1986, Thorndike, 1981).

Una estrategia, a veces, simultánea con la estrategia de adivinar y comprobar es la de entrenar estrategias (Hildreth, 1980, 1983). Si a la estrategia de adivinar y comprobar se le suma un referente personal del estimador, la estimación es bastante más precisa (Attivo y Trueblood, 1979; Joram et al., 1998).

Destacamos el trabajo de Castillo, Segovia, Castro y Molina (2011), que sigue el iniciado por Segovia et al., (1989) y se apoya en Castillo (2006), en el que explicitan estrategias de estimación de medidas de longitud y superficie. A continuación presentamos un resumen de ellas.

1. Iterando un referente presente/ausente
2. Acotando

Referentes teóricos

3. Comparando la cantidad a estimar con un referente aproximadamente igual.
Referente presente/ausente
4. Comparando la cantidad a estimar con un múltiplo de un referente. Referente presente/ausente
5. Comparando la cantidad a estimar con un divisor o fracción de un referente.
Referente presente/ausente
6. Descomponiendo/Recomponiendo en partes iguales
7. Descomponiendo/Recomponiendo en una parte más su complementario
8. Descomponiendo/Recomponiendo en partes diferentes
9. Técnicas indirectas: empleo de fórmulas
10. Reajuste.

Básicamente, todas estas estrategias de estimación de medida envuelven al estimador en un proceso de medida física, sin uso de herramientas y sin un referente físico, pero con el conocimiento de los principios de medida. (Joram 2003; Joram et al., 1998, 2005). Por ejemplo, Los estimadores que utilizan la estrategia de estimación de referencia, poseen imágenes mentales o conceptuales que se ponen en juego al momento de proyectar la imagen en objetos presentes o imaginarios (Clements y Sarama 2009, p. 292).

Desde la evaluación del conocimiento de los estudiantes, Jones, Forrester, Gardner, Grant, Taylor y Andre (2012) después de investigar sobre la precisión de las estimaciones de medida de estudiantes americanos, concluyen que se necesitan más trabajos que incidan en el conocimiento de las habilidades cognitivas relacionadas con la estimación de medida, comentan además que las habilidades relacionadas con la estimación de medida han demostrado ser valiosas en diferentes ámbitos laborales (Jones y Taylor, 2010) aunque haya sido probado que son difíciles de adquirir para los alumnos (Joram, Subrahmanyam y Gelman, 1998; Sowder, 1992). Por otro lado, Joram et al., (1998) manifiestan que es necesario investigar sobre la interacción de las estrategias de los estimadores de acuerdo al tamaño de la cantidad a estimar.

Para sintetizar, al igual que Castillo (2006) consideramos que un proceso de estimación de medida se refiere a cada una de las partes de la acción para obtener una estimación de la medida. La estrategia de estimación es un plan de acción para encaminar un conjunto de procesos que permiten encontrar la estimación de una medida.

2.1.2.6.2 Estimación de medida discreta

Segovia (1997) analiza los procesos mentales que utilizan estudiantes entre 6 y 14 años cuando resuelven tareas de estimación de cantidades discretas, así como los resultados, la evaluación del proceso y los resultados. En su estudio, recoge los datos a partir del procedimiento empleado, la respuesta y el tiempo empleado en la estimación de

cantidades discretas que aparecían en la pantalla de un computador, dispuestas de forma que el conteo es imposible, en un tiempo limitado. Se identificaron 12 estrategias de estimación de medida discreta, agrupadas en cuatro categorías y asociadas a distintas edades.

1. “No justificadas.
 - Estrategia 1: es aquella estrategia en la que estudiante no es capaz de explicitar el argumento o dice “no lo sé.
2. Valoración global sin referente: En estas estrategias el estudiante ve la cantidad como un todo, sin considerar un parte de la cantidad para posteriormente encontrar el valor total por medio de la multiplicación. Se considera además que el estudiante realice una valoración empleando la secuencia numérica o no, contando y que considere el tamaño como criterio de valoración.
 - Estrategia 2: Recitar la secuencia numérica sin considerar la cantidad: Es aquella estrategia en que el procedimiento consiste en enunciar la secuencia numérica, sin asociar los números a los elementos de la cantidad, parándose en un número sin criterio relacionado con la cantidad.
 - Estrategia 3: Recitar la secuencia numérica según el tamaño. Consiste en enunciar la secuencia numérica parándose en un número que él relaciona con el tamaño numérico o espacial.
 - Estrategia 4: Asignar un número sin considerar la cantidad. El estudiante explicita un criterio que no implica una acción de cardinación razonada: “me lo he inventado”, “se me ha venido a la cabeza”, “lo he pensado”, etc.
 - Estrategia 5: Asignar un número según el tamaño. El estudiante asigna un número grande o pequeño según el tamaño numérico o espacial de la cantidad: “porque era muy grande”, “porque es pequeña”, “porque hay muchos”, etc.
 - Estrategia 6: Contar la cantidad real o mental. El niño cuenta la cantidad de elementos mientras permanece la imagen de la figura en la pantalla del ordenador y si no tiene tiempo de contarlos íntegramente durante ese tiempo, sigue contando sobre una imagen mental.
3. Estrategias que implican una valoración global de la cantidad mediante comparación con un referente
 - Estrategia 7: Asignar un número por comparación. En este caso el estudiante asigna un número a la cantidad por comparación con otra que ha visto en alguna de las tareas propuestas previamente.
4. Estrategias que implican una valoración parcial de la cantidad. Estas estrategias se pueden clasificar en dos subgrupos:
 - A. Sin descomposición previa de la cantidad:

Referentes teóricos

- Estrategia 8: Contar una parte y estimar según el tamaño. El niño cuenta mientras permanece la imagen en pantalla y deduce el total sin dar una justificación o con criterios simples como “porque es muy grande”, “porque es pequeño”, etc.
- Estrategia 9: Contar una parte, estimar el resto y sumar. El niño cuenta mientras la imagen de la cantidad permanece en pantalla, estima el resto por comparación con la parte contada y suma. Por ejemplo, el niño dice “he dicho 23 pues he contado 13 y 10 que creo que hay también”.
- Estrategia 10: Iterar una parte sobre el total. El niño cuenta, subitiza o estima una cantidad de elementos, por ejemplo 5, itera la longitud de los mismos sobre el total y mediante sumas parciales y obtiene el resultado.

B. Con descomposición previa de la cantidad: En este caso los procesos son más complejos, y en general, constan de tres componentes: definición de una parte y su relación con el total, determinación del número de elementos de esa parte y recomposición del total.

- Estrategia 11: Determinar la mitad y duplicar. El niño cuenta hasta la mitad o intenta contarla mientras permanece la imagen en la pantalla, determina la parte restante mediante comparaciones de tipo “igual más o menos”, “unos pocos más”, etc. y obtiene el total sumando o multiplicando por dos.
- Estrategia 12: Contar una parte y multiplicar o sumar. El niño descompone la cantidad en tres o más partes iguales y reconstruye el total sumando o mediante multiplicación del número obtenido en la determinación de la parte por el número de partes.

2.1.2.7 La enseñanza y el aprendizaje de la estimación de medida

Para Chamorro (2003) la principal consideración del tratamiento de la medida es el conocimiento social, explicando que al final de cuentas todos los adultos saben o creen saber medir. De este modo, la escuela permite, en gran parte, que la medida sea un conocimiento adquirido fuera de ella. El problema es que la medida no se termina adquiriendo y el resultado son adultos con ideas erróneas sobre la medición o simplemente sin ideas sobre ella.

Por otro lado, explica que la medida es un tema difícil de tratar y de aprender, por ello los profesores se limitan a trabajar sólo contenidos del tipo “cambio de unidades del Sistema Métrico Decimal”. Comúnmente el tema se trivializa y se convierte en un trabajo algorítmico poco práctico. Estas prácticas contribuyen a que se pierda el sentido de la medida. De este modo, la mayoría de las situaciones problemáticas planteadas a los estudiantes tratan sobre medidas ya efectuadas, por consiguiente, sus tareas se reducen a convertir unidades y/o aplicar fórmulas, sobre todo si trabajan superficie y volumen.

Chamorro (2003) considera que hay cuatro obstáculos que dificultan la enseñanza de la medida, todos descansan en la falta de manipulación, que anula la percepción y resume el trabajo a la aritmetización. Los siguientes son los cuatro obstáculos presentados por la autora, a modo de resumen.

1. El exclusivo uso de objetos del microespacio idealizados, decantados, dibujados (la mayoría de las veces) y matematizados.
2. El constante ejercicio de convertir unidades imposibilita fijar el orden de magnitud y eso trae por consecuencia no estimar la medida.
3. La costumbre habitual de dar superficies dibujadas y no recortadas desfavorece la diferenciación del perímetro y de la superficie como también la comparación de la superficie.
4. El tratamiento estándar del cambio de unidades por medio de estrategias lejanas a la medida y su adquisición, como por ejemplo “la escalera”. Dado que el desarrollo del cambio de unidades debe trabajarse con sus distintas representaciones, por lo tanto debe tener soporte verbal, manipulativo, geométrico y aritmético.

Como vimos en el primer apartado de este capítulo, la magnitud y la unidad son fundamentales para enseñarla. Chamorro indica que el concepto de magnitud está ausente de los currículos, con ausencia de problemas de decantación y apreciación de las magnitudes. No hay un trabajo sistemático de la comparación, haciendo demasiado compleja la enseñanza de magnitudes de superficie y volumen, por ejemplo. De este modo, la medición es siempre ficticia y de carácter ostensivo, lo que sustituye la medición de objetos concretos, por ejemplo, la utilización de objetos reales es complicada en la magnitud de superficie. No es fácil encontrar objetos con superficies poco regulares. Por otro lado las medidas de un campo de fútbol, de una parcela, etc. Nunca se llevarán a efecto, nunca se irá a un estadio para comprender a qué se refieren con los metros cuadrados de una cancha de fútbol, que se dimensionará de un modo muy distinto desde una galería o televisión.

De la misma forma, frecuentemente se realizan comparaciones de objetos por medio de la longitud tanto en la escuela como fuera de ella. Sin embargo las comparaciones de superficie escasean en ambos escenarios. Para Chamorro la componente principal de la superficie es la forma, es mediante la forma como los estudiantes identifican una superficie, si esta cambia, para ellos la superficie también cambia. Si esto sucede, se pierde la conservación de la superficie que es clave en las ideas de Piaget, mencionadas en el apartado 3.1.

El avance tecnológico también ha mermado el trabajo de la medida. Por ejemplo los metros láser han desplazado a la cinta métrica, las balanzas digitales a las analógicas, etc. Con ello se priva de conocimiento empírico para conceptualizar las nociones de

Referentes teóricos

medida. Chamorro declara “La escuela debe replantearse de forma urgente retomar a su cargo esos aprendizajes” (p. 229).

Diversos autores corroboran las ideas de Chamorro (2003), por ejemplo, Clements y Sarama (2014) consideran que en Estados Unidos este fenómeno no es distinto al planteado por ella, dado que comúnmente la instrucción de la medida no logra algunos objetivos. Muchos estudiantes aprenden a medir de manera memorística y sus conocimientos en medida son bastante bajos. Consideran de este modo, que la sociedad necesita mejorar la instrucción, pero no promete mucho conocimiento fuera de las aulas.

Para Chamorro (2003) las cuestiones más complejas en torno a la enseñanza de las magnitudes siguen sin resolverse. El uso de instrumentos de medida y el material concreto es mínimo. Los profesores a lo más cuentan con cintas de medir, reglas y una pesa lo que conduce a pocas actividades de tipo práctico. Las pocas que se logran realizar tienen una serie de obstáculos.

A modo de resumen, estas son las dificultades de alumnos y profesores con la medida según Chamorro (2003).

1. Las prácticas escolares se centran en actividades de tipo formal, dedicando la mayoría del tiempo al uso correcto de la escritura de la medida y las conversiones de unidades. La estimación y aproximación de medidas, necesarias para la vida cotidiana, son poco frecuentes. Frías, Gil y Moreno (2001) reafirman esta postura, explicando que la estimación es una de las habilidades que resultan más útiles desde el punto de vista práctico.
2. El manejo de instrumentos se limita a la cinta métrica y a la balanza. Se sobreentiende la comprensión y lectura su graduación, dado que forma parte del aprendizaje social.
3. La ignorancia por parte del alumnado sobre el uso y manejo de instrumentos de medida implica defectuosas elecciones el momento de tener que utilizarlos.
4. Los alumnos son incapaces de distinguir magnitudes diferentes como superficie y perímetro, masa y volumen. Chamorro entrega un ejemplo general que parece lógico para muchos: “Una finca A que tiene una valla de mayor longitud que otra B, tiene también una mayor superficie”. Es común que las grandes masas se asocien a cuerpos voluminosos. Los alumnos carecen de referencias que los hayan puesto es conflictos de su lógica.

Chamorro explica que la magnitud más tratada es la longitud seguida del tiempo, la capacidad y la masa. A mucha distancia le siguen la superficie y el volumen. Ella destaca que los ángulos, la superficie y el volumen gozan de propiedades que sólo pueden ser captadas a partir de deducciones lógicas, dado que la deducción geométrica debe sobrepasar las imágenes intuitivas. Esta es la razón de que sean más difíciles de enseñar y aprender que otras magnitudes.

En otro aspecto del tratamiento de la medida, hay un rechazo generalizado al uso de encuadramientos en que es imposible dar una medida entera. Para los estudiantes y los adultos la imprecisión genera confusión e inseguridad. Por ello, si se desea hacer cotidianos y cercanos los encuadramientos en la escuela, hay que realizar trabajo científico experimental. Es necesario hacerlo con tareas que exijan estimación de medida en vez de medida, dado que es en la estimación donde nace el sentido de refinar los intervalos de medida hasta encontrar la medida deseada. “La justa medida sólo puede ser proporcionada por la anticipación de un cálculo, mientras que en la práctica sólo puede aspirarse a aproximaciones cada vez mejores, es decir, refinando el intervalo de estimación” (Chamorro, 2003, p. 237).

Como podemos observar, la mayoría de las ideas planteadas en los apartados anteriores de este capítulo, descansan en la enseñanza de la medida. Sin embargo, si la medida es tratada carente de manipulación, experimentación y con abundante aritmetización y precisión, la estimación de medida tendrá un escaso desarrollo.

Como se ha señalado en los párrafos anteriores, la estimación de medida es parte del proceso del aprendizaje de la medida discreta y continua, tanto en tareas relacionadas con el concepto como en su valoración y conservación. Sin embargo, desde el punto de vista de la enseñanza de la estimación de medida, las escasas investigaciones indican que su desarrollo en las aulas no ha sido idóneo, a pesar que desde Bright (1976) se indica que es importante desarrollarla en la escuela, como se puede observar en la siguiente cita:

“la estimación puede convertirse en un parte significativa del currículo de matemáticas en la escuela pública. Todo lo que se requiere a los profesores es que reconozcan su utilidad y aprovechen la variedad de actividades que abarca. Los estudiantes disfrutan con la estimación, por tanto, los maestros no tienen por qué temerle y usarlo como una de sus herramientas de enseñanza.” (p. 104).

Frías, Gil y Moreno (2001) explican que generalmente las actividades de estimación de medida se han trabajado muy poco en las aulas, posiblemente por las siguientes razones:

1. “Los profesores no se sienten competentes para enseñar estimación, puesto que los adultos en general, y los maestros en particular, no solemos tener desarrollada esta habilidad.
2. No se dispone de orientaciones lo suficientemente precisas sobre cómo hacerlo, posiblemente debido al tipo de habilidades y aptitudes que han potenciado la enseñanza tradicional.
3. No se tiene en cuenta el tiempo necesario para desarrollarlas
4. Es difícil poner a prueba estas habilidades” (p. 497).

Referentes teóricos

Estas razones podrían reflejar las observaciones de Forrester y Piqué (1998), quienes explican que la estimación de medida se trata en las aulas como una hipótesis predictiva, en forma vaga y superflua, sin trabajar con respuestas satisfactorias para resolver situaciones a las que sólo podía dar respuesta un instrumento de medida, por medio de una respuesta exacta. Estos autores observaron que la estimación se trataba por medio del “pensamiento sensato”, por ello estimarse convertía en adivinar. Lang (2001) complementa esta situación desde el punto de vista de los maestros, afirmando que los docentes tienen dificultades al tratar la estimación de medida, porque no están seguros de cómo construir un tratamiento de la estimación de medida para que los estudiantes entreguen respuestas razonables.

Igualmente, Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam (2005) explican que cuando se solicita a un maestro que proponga actividades de estimación de medida a sus alumnos, las tareas solicitadas son adivinanzas en vez de estimaciones de medida, ya que los docentes no proporcionan el contexto o la información necesaria para crear el ambiente de trabajo que se requiere.

2.1.2.8 El conocimiento del maestro sobre estimación de medida

Como se puede observar en los apartados anteriores, la mayoría de los estudios relacionados con la estimación de medida se refieren a habilidades involucradas en los procesos de estimación de medida, a las estrategias para estimar medidas y, en un menor número, a cómo la estimación de medida se trata en el aula. Los estudios sobre el conocimiento didáctico de los maestros y profesores son escasos. De hecho, en nuestra revisión, hemos encontrado un único estudio sobre el tema llamado “*Prospective secondary mathematics teachers’ pedagogical knowledge for teaching the estimation of length measurements*” (El conocimiento pedagógico de los futuros profesores de matemáticas de secundaria en estimación de medidas longitudinales) de Subramaniam (2014). La investigación fue realizada durante un curso de certificación para docencia de matemáticas en secundaria en USA. Seis futuros maestros, con experiencia docente de cero a tres años, participaron en el estudio.

En sus conclusiones se explica que los futuros maestros encuestados tienen un conocimiento propio del uso de referentes para realizar estimaciones de medida, pero que este conocimiento no se traduce directamente en un conocimiento idóneo para poder trabajar la estimación de medida en el aula con garantías de éxito. Por ejemplo, A pesar de que los participantes en este estudio estaban usando puntos de referencia que les permitieron realizar estimaciones durante la actividad de estimación de medida, fueron incapaces de conectar este conocimiento en la creación de una forma significativa para enseñar a la estimación de las mediciones de longitud.

Claramente, los participantes desconocían cómo utilizar representaciones simbólicas

como elemento del conocimiento pedagógico durante la coacción y la interactividad requerida por el maestro (Steinbring, 2008), cuando se enseña a los estudiantes a construir el conocimiento para la estimación de la medida longitudinal. Por otro lado, los participantes en el estudio consideran que una elección idónea para la enseñanza de la estimación de medida son actividades prácticas basadas en las experiencias personales. Sin embargo, los docentes no supieron fundamentar por qué esta decisión favorece la construcción del conocimiento.

2.2 El conocimiento del profesor de matemática

En la última década, la línea de investigación con mayor notoriedad en la didáctica de la matemática es el conocimiento del profesorado, tanto en el desarrollo profesional como en la práctica en el aula. Una de las causas del desarrollo de esta línea investigativa es la alta demanda por la enseñanza de la matemática, dado que la escuela se ha masificado, por lo tanto el conocimiento para la calidad de la enseñanza se ha vuelto imprescindible (Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna, 2005).

Diversos trabajos se destacan en esta línea de investigación, como por ejemplo, en orden cronológico, Shulman 1986, 1987; Llinares y Sánchez, 1990; Pajares, 1992; Bromme 1994; Llinares 1998; Tirosh, 2000; David y Simmt, 2006; Ball, Thames y Phelps, 2008; Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009; Schoenfeld, 2010; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013.

A continuación presentamos los referentes consultados en nuestra investigación.

2.2.1 El aporte de Shulman

Shulman (1986) planteó la importancia sobre el quehacer y el conocimiento técnico involucrado al momento de enseñar una disciplina, lo llamó “El Paradigma Perdido”. A partir de la idea de *Pedagogical Content Knowledge*, es decir, del cómo se representan y formulan los contenidos con el fin que sean comprensibles para los estudiantes, de este modo, comenzó una nueva mirada sobre el conocimiento que debía poseer un profesor.

Antes de Shulman, la investigación se centraba en cómo los profesores se desenvolvían en el aula, cómo organizaban las actividades los tiempos, los turnos; cómo formulaban las preguntas, cómo planeaban las clases, etc. Shulman (1986) replanteó el conocimiento de los profesores centrándose en el rol del contenido en la enseñanza. Shulman sugirió distinguir tres tipos de conocimiento del contenido de los maestros:

- Conocimiento del Contenido Específico (*Subject Matter Content Knowledge*, SMK): El profesor no sólo debe definir los conceptos de la materia que enseña, sino también justificarlos, relacionarlos, secuenciarlos y enfatizarlos, tanto en la teoría como en la práctica.

Referentes teóricos

- Conocimiento Pedagógico del Contenido (*Pedagogical Content knowledge*, PCK): el profesor debe tratar las distintas materias con las formas de representación más útiles, con los ejemplos, representaciones, analogías, explicaciones y demostraciones más eficaces, con el fin hacer el conocimiento comprensible para otros.
- Conocimiento Curricular (*Curricular Knowledge*): Se espera que el profesor esté no sólo familiarizado con los temas y los materiales para enseñar del nivel que imparte, sino que también debe estarlo con lo que Shulman llamó “Conocimiento Vertical”– el conocimiento de la diacronía de las diversas materias– y el “Conocimiento Horizontal” –el conocimiento de los contenidos paralelos tratados en otras asignaturas, distintas a las que el docente imparte. Ambos conocimientos deben relacionarse con la materia tratada.

Gracias a Shulman, la investigación del profesorado comenzó a centrarse sobre aspectos específicos de la enseñanza y además, por medio de ideas concretas sobre un conocimiento especial para enseñar, que distingue la labor del docente.

De estudios con profesores de diferentes asignaturas, Shulman (1987) desarrolló tipologías para caracterizar el conocimiento profesional propio de la enseñanza. Estas categorías han permitido resaltar la importancia de los conocimientos como una herramienta profesional de los profesores y que pueden agruparse de la siguiente manera:

1. Conocimiento del contenido
2. Conocimiento didáctico general
3. Conocimiento del currículo
4. Conocimiento didáctico del contenido
5. El Conocimiento de los alumnos y sus características
6. El Conocimiento de los contextos educativos.

Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos y sus fundamentos filosóficos e históricos (Shulman, 1987, p. 8).

De estas categorías la que tiene mayor relevancia para la labor específica del profesorado de matemáticas es la última, el Conocimiento Didáctico del Contenido, que Shulman (1986) define como:

“Las formas más útiles de la representación de esas ideas, las analogías más poderosas, las ilustraciones, los ejemplos, las explicaciones y las demostraciones, en una palabra, las formas más útiles de representación y la formulación de la materia que lo hacen comprensible a los demás...el Conocimiento Didáctico del Contenido también incluye una comprensión de lo que hace que el aprendizaje de temas específicos sea fácil o difícil: las

concepciones e ideas preconcebidas que los estudiantes de diferentes edades y procedencias traen con ellos para el aprendizaje de los temas que más se enseñan y lecciones” (p. 9).

Posteriormente, Shulman agrega que el Conocimiento Didáctico del Contenido “es la categoría que, con mayor probabilidad, permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo” (pág. 11).

En el área matemática, diferentes investigadores han aportado enriqueciendo, ampliando y redefiniendo la conceptualización del Conocimiento Didáctico del Contenido para su desarrollo. En particular, a nuestro trabajo le interesa la última de las categorías enunciadas por Shulman, el Conocimiento Didáctico del Contenido de la enseñanza de la estimación de medida.

2.2.2 *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT)

En una primera instancia de nuestro trabajo, indagamos en las investigaciones de la Universidad de Michigan, donde comienzan los primeros estudios interesados en el conocimiento del profesor de matemática. Deborah Ball y su equipo se plantean qué conocimiento debe tener o utilizar el profesor de matemática para enseñar. Ball, Thames y Phelps (2008) explican que el PCK no fue desarrollado en forma idónea posteriormente a Shulman, sino que sólo hubo “un subdesarrollo del concepto”. Por otro lado, agregan que como el PCK es común a distintas áreas del saber, no todos comprendemos lo mismo cuando hablamos de PCK. De esta forma, el equipo decide profundizar en el estudio por medio de la idea un conocimiento especial del profesor de matemática.

Gracias a variadas investigaciones, que incluyen la tesis doctoral de Ball, se construye un marco del conocimiento del profesor, el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008). Este nuevo marco, a partir de las ideas del Conocimiento del Contenido Específico y el Conocimiento Pedagógico del Contenido, responde a las siguientes preguntas: ¿Qué tienen que saber los profesores y qué tienen que ser capaces de hacer para enseñar con eficacia? ¿Qué enseñanza se requiere en términos de comprensión del contenido?

Ball y su equipo consideraron que el énfasis está en el uso del conocimiento en y para la enseñanza y no en los propios docentes. Su análisis se centró en el conocimiento para la enseñanza mediante la observación del trabajo docente tanto en el aula como fuera de ella. El MKT se ha dividido en seis categorías, que aún se están desarrollando. Las primeras tres relacionadas con el Conocimiento del Contenido Específico y las tres siguientes relacionadas con el Conocimiento Pedagógico del Contenido.

- Conocimiento Común del Contenido (*Common Content Knowledge*, CCK): es el conocimiento y la habilidad matemática utilizada en entornos distintos de la

Referentes teóricos

enseñanza, por ejemplo, el conocimiento que el profesor posee para dar solución a un problema, calcular un ejercicio, reconocer una definición o respuesta incorrecta. Indica que el maestro debe saber qué enseña, en nuestro caso, como se podrá observar desde en los siguiente apartados, el maestro requiere comprender el concepto de estimación de medida y aplicarlo en situaciones concretas.

- Conocimiento del Horizonte (*Horizon Content Knowledge, HCK*): es el conocimiento de la diacronía de los temas curriculares. Por ejemplo el profesor de cuarto grado debe conocer qué se enseña en cuarto grado, qué debió aprender el estudiante en tercer grado y que deberá aprender de quinto grado en adelante.
- Conocimiento Especializado del Contenido (*Specialized Content Knowledge, SCK*): es el conocimiento y la habilidad exclusiva de la enseñanza de la matemática. Al poseer este contenido los profesores presentan ideas matemáticas y encuentran ejemplos para realizar representaciones de ellas, evalúa la plausibilidad de las respuestas, evalúa y selecciona definiciones utilizables, etc. En nuestro caso el profesor podría ejemplificar con una pregunta la idea de estimación de medida, considerando la plausibilidad de las respuestas a partir de la definición.
- Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (*Knowledge of Content and Student, KCS*): es el conocimiento que combina el conocimiento sobre los estudiantes y la matemática. Los maestros deben anticiparse al pensamiento de los estudiantes, al elegir un ejemplo el maestro debe predecir si a los estudiantes les motivará, les traerá problemas, si podrán realizarlo o no, etc.
- Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (*Knowledge of Content and Teaching, KCT*): Este conocimiento combina el conocimiento sobre la enseñanza y el conocimiento sobre las matemáticas. La secuencia de contenidos, ejemplos de inicio, profundización y cierre, ventajas y desventajas de las representaciones utilizadas para enseñar una idea específica.
- Conocimiento del Contenido y el Currículo (*Knowledge of Content and curriculum, KCC*): Los autores lo refieren a él desde el Conocimiento Curricular de Shulman (1986).

Como anteriormente mencionamos, en una primera instancia nos apoyamos en el MKT para desarrollar nuestra investigación. Este marco del conocimiento docente nos entregó los primeros lineamientos para enfocarnos en nuestro estudio, sin embargo, como explicaremos en el apartado siguiente, al momento de interpretar los datos, necesitamos buscar otros referentes para enriquecer nuestro análisis, dado que observamos que nuestro instrumento de toma de datos y su análisis respectivo, no lograban indagar en la caracterización del conocimiento docente sobre estimación de medida.

Para nosotros, es difícil diferenciar si un docente al definir o aplicar estimación de medida se posiciona dentro del SCK o del CCK. La diferencia de ambos componentes

radica en que el SCK pone en se enfoca en las matemáticas que conoce un profesor, y el CCK en aquellas matemáticas que conoce cualquier profesional. Sin embargo, la naturaleza de las respuestas de los informantes corresponde a su quehacer profesional, anulando de este modo al CCK.

Esta situación nos hizo mucho sentido al leer a Flores, Escudero y Carrillo (2013), quienes cuestionan los beneficios de separar el CCK del SCK, preguntándose si el SCK es un conocimiento más profundo o tal vez más amplio que el CCK. De esta forma, plantear que el SCK es un conocimiento común de conocimientos especializados es complejo, dado que existen diversos matices en los distintos contextos, como por ejemplo el nivel educativo donde se desarrolla el conocimiento, la intención de docente, etc.

2.2.3 El Conocimiento Especializado para la Enseñanza de la Matemática, MTSK.

A partir de la reflexión anteriormente mencionada, indagamos en el modelo (en construcción) del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, por las siglas en inglés de *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*) construido por el grupo SIDM (Seminario en Investigación en Matemática) de la Universidad de Huelva. El MTSK se basa en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor deriva de su profesión. Esta especialización radica en la necesidad de desarrollar su especialización como maestro.

El MTSK comprende el contenido del conocimiento de profesor desde la contribución de Shulman (1986, 1987), y distingue dos componentes, una referida al conocimiento del contenido disciplinario a enseñar, llamada MK (*Mathematical Knowledge*), que es un renombre del SMK y otra relativa al conocimiento didáctico del contenido a enseñar, el PCK.

Desde una mirada socioconstructivista y considerando como referente al maestro reflexivo, que analiza su práctica sistemáticamente tanto en forma individual como colectiva, apoyándose en Schön (1983, 1987) y Keiny (1994) respectivamente; y dentro de una vasta tradición de investigaciones, centradas principalmente en el MKT, ha construido su propio marco sobre el conocimiento del profesor (Carrillo et al., 2014).

El MTSK no es sólo una propuesta teórica para modelar el conocimiento del profesor de matemática, también es una herramienta metodológica, con la cual es posible analizar la práctica, en la amplitud de su palabra, del maestro de matemática por medio de sus categorías (Flores, Escudero y Aguilar, 2013). Desde la mirada del MTSK el conocimiento profesional sustenta el desarrollo del maestro y además, es el producto de este desarrollo y la reflexión sobre su práctica, que no sólo transcurre en el aula, se nutre del conocimiento del profesor (Climent et al., 2014, p. 42).

Referentes teóricos

De este modo, el docente es un resolutor de problemas profesionales, es decir, problemas que se relacionan con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Climent, 2005). Por lo tanto, es el docente quien formula y refina los problemas profesionales, y mediante la investigación- acción, busca posibles respuestas.

El MTSK consta de seis subdominios (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2012), tres referentes al MK: el Conocimiento de los Temas (*Knowledge of Topics*, KoT²), el Conocimiento de la Estructura Matemática (*Knowledge of the Structure of Mathematics*, KSM) y el Conocimiento de la Práctica de la Matemática (*Knowledge Practical of mathematics*, KPM). Los otros subdominios, referentes al PCK son: el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (*Knowledge of Features of Learning Mathematics*, KFLM), el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (*Knowledge of Mathematics Teaching*, KMT) y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de Matemáticas (*Knowledge of Mathematics Learning Standards*, KMLS). En la Figura 3.2 se muestra la representación gráfica del modelo. Su primera propuesta fue en la en la CERME8 por Carrillo, Climent, Contreras, Muñoz-Catalán (2013), representando al grupo de SIDM. En aquella propuesta estaba la dimensión KAM (*Knowledge about of Mathematics*), que hacía referencia a las distintas formas de proceder en matemática, que incluía las formas de conocimiento y creación o producción en matemática. En el documento de Carrillo et al., (2014) el KAM es reemplazado por el KPM

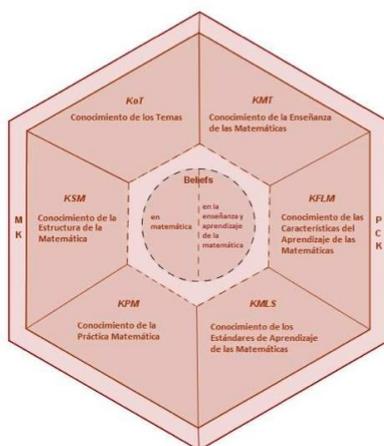


Figura 3.3 Representación gráfica de los subdominios del MTSK

Dado que fue nuestro instrumento el que se tuvo que adaptar al MKTS, por las razones explicadas anteriormente, nuestra investigación cubre sólo el 50% de las subcategorías mencionadas. El Conocimiento de los Temas (KoT), el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT) y el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de la estimación de medida (KFLM). A continuación explicaremos cada una de las tres

²Todos los acrónimos responden a las siglas anglófonas.

subcategorías involucradas en nuestro estudio y su relación con la estimación de medida.

2.2.3.1 El Conocimiento de los Temas (*Knowledge of Topics, KoT*)

No hay dudas en que el profesor debe conocer la disciplina que enseña. En la literatura de la enseñanza de la matemática, podemos observar que se ha cuestionado qué y cómo los docentes deben conocer. El MKT de Ball et al., (2008) se refieren a este conocimiento disciplinario tanto en el *Common Content Knowledge* (CCK) como en el *Specialised Content Knowledge* (SCK). En el primero, el CCK, expresan que el profesor debe ser capaz de hacer lo que le solicita a sus estudiantes (p. 339) y en el segundo, el SCK, establecen el conocimiento requerido para la enseñanza, más allá del CCK (Markworth, Goodwin y Glisson, 2009).

Desde otra mirada, centrada en la especialización del conocimiento para enseñar, el MTSK considera el *Knowledge of Topic* (KoT), componente que analiza o modela qué y cómo el profesor de matemáticas conoce los temas que va a enseñar, supone conocer los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada. Por lo tanto el KoT no es sólo el conocimiento de la matemática como disciplina, es el conocimiento matemático que el profesor de matemática debe poseer para realizar clases. En esta subdimensión, la matemática escolar está incluida, comprendiendo por temas de estudio los bloques tradicionalmente presentes en los currículos escolares de diversos países, como números y operaciones, álgebra, medida, análisis de datos y probabilidad y sus relaciones entre sí.

Considerando los referentes de los apartados 2.1 y 2.2 del Capítulo 2, el KoT de la estimación de medida corresponde a los conceptos y procedimientos de la estimación de medida, como por ejemplo, la interiorización, uso y significado de las unidades de medida, la comprensión de los objetos y sus características; el conocimiento de las magnitudes y sus respectivos usos y el trabajo perceptivo que la tarea implica. Como se puede observar, el KoT de la estimación de medida deriva del KoT de la medida en sí. Dentro del KoT se consideran conceptos y procedimientos matemáticos, sus fundamentos teóricos y sus diversas formas de representación. Se proponen cinco categorías para caracterizar el contenido del KoT, que pueden ser empleados indistintamente del tema que se aborde.

Teóricamente, del KoT derivan las siguientes categorías: fenomenología, propiedades y sus fundamentos, registros de representación (con base en los registros semióticos de Duval 1999, 2006), definiciones y procedimientos. En nuestro caso, por las características de tema, no todas las categorías están cubiertas, en una primera instancia. De este modo, nos centraremos en analizar cómo el profesor explica, es decir, define estimación de medida; en qué estrategias (procedimientos) utiliza para llevar a cabo la

Referentes teóricos

tarea y finalmente cómo ejemplifica ese concepto, por medio del conocimiento de las propiedades y fundamentos de la estimación de medida.

2.3.3.2 El Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (*Knowledge of Features of Learning Mathematics, KFLM*)

Este subdominio del MTSK se enfoca en el contenido matemático como objeto de aprendizaje, por ello se evita mirar al estudiante en sí, dado que la idea es observar las características del proceso de comprensión del estudiante sobre el contenido, que derivan de su interacción con el mismo.

De esta forma, el docente podrá prever cómo los estudiantes se comportarán al momento de interactuar con el conocimiento, como por ejemplo las posibles fortalezas o dificultades que puedan emerger en el proceso de aprendizaje, o las ideas generales que los estudiantes puedan tener frente al contenido matemático, dado que pueden influir sobre el desarrollo de un conocimiento específico.

Es necesario insistir en que este subdominio se refiere a conocimientos matemáticos intrínsecamente relacionados, a raíz de la naturaleza del MTSK. El MFLM incluye sólo a los conocimientos donde el contenido matemático condiciona la enseñanza, por ello, toda característica que emerja del conocimiento matemático y no desde una visión pedagógica, como por ejemplo, el comportamiento en el aula.

Dentro de este subdominio se encuentran tres categorías: formas de aprendizaje, fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje y formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático, a continuación detallamos cada una de ellas de acuerdo a la estimación de medida.

2.3.3.2.1 Formas de aprendizaje

Esta categoría se enfoca en el conocimiento que tiene el docente sobre las posibles formas de aprendizaje de los contenidos. Por ejemplo, el docente puede considerar que la aprehensión de la unidad de medida es posible gracias a los distintos pasos, anteriormente mencionados, que Chamorro y Belmonte (1988) explican para poder constituirlos.

2.3.3.2.2 Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje

Esta categoría se enfoca en los errores, obstáculos o dificultades asociados a la matemática general y conocimientos específicos. Por ejemplo, para Chamorro (1996, 1998) una dificultad del trabajo de la estimación de medida se deriva de la importancia de la exactitud del trabajo matemático. Un obstáculo podría ser que los alumnos no sean flexibles mentalmente para trabajar la estimación de medida al resolver problemas, seleccionar estrategias o bien, razonar el resultado alcanzado (Cajaraville, 2007).

2.3.3.2.3 Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático

En esta categoría se analiza el conocimiento docente sobre los posibles procesos y estrategias de los estudiantes. Estos conocimientos puede ser típicos de cualquier grupo o bien, no habituales. Esta categoría también se refiere al posible lenguaje o vocabulario usado por los estudiantes al enfrentar una tarea (Sosa, Aguayo y Huitrado, 2013). Por ejemplo, el docente saber que si propone a sus estudiantes cierto tipo de estimación de medida, ellos utilizan la estrategia de iteración de la unidad, propuesta por Hildreth (1983).

2.3.3.2.4 Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas

Esta categoría se enfoca en el conocimiento que tiene el docente sobre las expectativas e intereses que tienen los estudiantes frente a la matemática. Un ejemplo de ello puede ser que el docente considere que para los estudiantes es difícil realizar una tarea que involucre una unidad de volumen, dado que tienen poca experiencia trabajando con ellas.

2.3.3.3 Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (*Knowledge of Mathematics Teaching, KMT*)

Al igual que el KFLM, este conocimiento está ligado sólo con los conocimientos matemáticamente dependientes en sí, y no con conocimientos pedagógicos. Así como KFLM tiene como foco el conocimiento del aprendizaje, el KMT tiene como foco la enseñanza.

En este subdominio del MTSK se incluye el conocimiento de los recursos, materiales, formas de presentar el contenido, el uso de ejemplos adecuados tanto en el contenido, como en el contexto y la intención. A continuación, presentamos algunas de las categorías.

2.3.3.3.1 Teorías personales o institucionalizadas de la enseñanza.

El maestro puede conocer algunas teorías de enseñanza específicas de la educación matemática, por ejemplo puede modelar una unidad didáctica de geometría según los niveles de Van-Hiele (Jaramillo y Duarte, 2009). En esta categoría es posible analizar la potencialidad de las actividades, las estrategias o bien las didácticas utilizadas por los docentes. Por otro lado, en esta categoría también se incluyen las analogías, los ejemplos típicos, las metáforas, etc. Que, para los maestros son ideales y potentes al momento de poner en juego el contenido matemático.

2.3.3.3.2 Recursos materiales y virtuales

En esta categoría se consideran los conocimientos del docente sobre los recursos materiales y virtuales como medios para favorecer la enseñanza de la matemática, son ejemplos de ello las calculadoras, los libros de texto, las pizarras interactivas, etc. En

Referentes teóricos

esta categoría no sólo se considera el conocimiento de estos recursos, sino que también sus beneficios y dificultades que conllevan. Como ya hemos mencionado, estos recursos deben estar intrínsecamente ligados al contenido matemático, por lo tanto, cualquier fundamento pedagógico sobre el uso del recurso, por ejemplo, la motivación del alumnado, no es considerado en esta categoría.

Un ejemplo de esta categoría, podría ser la construcción de un metro cuadrado con papel de periódico con el fin que el estudiante pueda dimensionar, visualizar y manipular en diversos contextos el área de la superficie equivalente.

2.3.3.3 Actividades, tareas, ejemplos, ayudas

Las actividades, tareas, ejemplos o ayudas de esta categoría corresponden a elementos que tienen una intencionalidad de enseñanza en un tema determinado. Por ejemplo, hay maestros que tienen un ejemplo ideal para el tratamiento de cierto contenido, por ejemplo, el conocimiento de alguna situación fundamental de Guy Brousseau³.

³Para conocer algunas de estas situaciones fundamentales, se recomienda el documento Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las matemáticas 12. *Educación matemática*, 2(1), 5-38.

Capítulo 3. Planteamiento del problema



Planteamiento del problema

Como explicamos en el apartado 1.5, la estimación de medida se ha incorporado al currículum de la Educación Primaria chilena, dentro del nuevo eje de Medida, como también en los ejes de Números y de Geometría. Sin embargo, es altamente probable que la estimación de medida no haya tenido espacio en los programas de formación inicial y continua del profesorado chileno.

Por otro lado, ni el currículum ni sus interpretaciones oficiales, como los programas de estudio y los textos de estudio, tanto privados como públicos, no definen qué es estimación de medida y poseen algunas contradicciones con los referentes citados en el Capítulo 2 de este estudio.

Por ejemplo, se insiste en corroborar la estimación de la medida con la medida, sin considerar que la estimación de medida es una tarea en sí misma. Por otro lado, se considera como estimación de medida, encontrar la unidad de medida idónea para medir cierta magnitud, como se puede observar en las actividades elegidas para nuestro instrumento de toma de datos a desarrollar en el Capítulo 3 de esta tesis.

Por consiguiente, es altamente probable que nos encontremos en el caso de un concepto disciplinario que irrumpe en las aulas sin proveer a los docentes de una formación concreta al respecto, a raíz de esto, nos preguntamos *¿Qué conocimiento para enseñar la estimación de medida poseen los maestros de primaria?*. Para responder a esta pregunta, indagamos en la literatura de Educación Matemática sobre aquellas investigaciones realizadas en relación a la estimación de medida, y en un comienzo, en el marco conceptual del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT) propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008).

Para darle respuesta a esta pregunta, se planteó el objetivo general de este estudio:

“Caracterizar el Conocimiento Didáctico del Contenido que tienen los profesores de primaria sobre estimación de medida discreta y continua”

Este objetivo descansa sobre dos objetivos específicos:

OE1: Caracterizar el conocimiento de la estimación de medida discreta y continua que poseen los profesores de primaria: definición, estrategias y representación de la estimación de medida.

Con este objetivo pretendemos indagar en qué entienden por estimación de medida tanto en su definición como en la aplicación del concepto. Para concretarlo, en el instrumento de toma de datos se incluirán preguntas que soliciten a los docentes explicar el proceso de estimación de medida de longitudes y superficies y crear una pregunta a partir de una imagen. Posterior a ello, se solicitará una definición de estimación.

OE2: Caracterizar cómo los docentes usarían las actividades de estimación de medida propuestas en los programas gubernamentales.

El Ministerio de Educación 2012, presentó diversas actividades de estimación en los programas de estudio con el fin que los profesores interpreten el currículo y puedan desarrollarlo en las aulas. Con este objetivo, pretendemos indagar en la comprensión de las estas actividades por parte del profesorado.

Capítulo 4. Marco metodológico



El presente capítulo se centra en el diseño metodológico de este estudio. La estructura de la presentación se compone de la perspectiva metodológica, la población, el diseño del instrumento y la recogida de datos.

4.1 Perspectiva metodológica

Para Shulman (1986) la tradición investigadora nos ha concientizado que la práctica educativa posee una lógica distinta a la racional y científica postulada por el positivismo. La alternativa al positivismo es la investigación cualitativa, que estudia la calidad de actividades, relaciones, asuntos, medios, materiales e instrumentos en determinadas situaciones o problemas (Rodríguez, Gil y García, 1999).

De este modo, en este estudio nos insertamos en la investigación cualitativa porque no buscamos la explicación o la causalidad, sino la comprensión del fenómeno estudiado (Pérez Serrano, 1990), que en este caso es el conocimiento didáctico de los docentes sobre la estimación de medida. La investigación cualitativa centra la atención sobre la experiencia subjetiva de los sujetos, en la creación del mundo social, ya que tiene como inquietud el entendimiento del modo en que el informante crea, modifica e interpreta el mundo (Cohen y Manion, 2002). Bajo el paradigma interpretativo, intentaremos comprender e interpretar el conocimiento docente, dado que el modelo sugiere que los informadores (los maestros) deben ser observados como documentos que reflejan su propia cultura (Pérez Serrano, 2014, p. 27).

A continuación presentamos algunas características del paradigma interpretativo que se reflejan en nuestro estudio.

- Describe el hecho en que se desarrolla el acontecimiento. La elección es una metodología que se basa en una rigurosa descripción de un hecho o situación que garantiza la máxima intersubjetividad para comprender la realidad y hacer posible un análisis interpretativo (Pérez Serrano, 1990, p. 20). A grandes rasgos, el paradigma interpretativo se refiere a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas o su conducta observable (Pérez Serrano, 2014, p. 29).
- Se interesa por la comprensión de un escenario social concreto, no necesariamente en hacer predicciones sobre el mismo (Janesick, 1994, p. 212).
- Penetra en el mundo personal de los sujetos, cómo interpretan las situaciones, qué significan para ellos, qué intenciones tienen (Latorre, del Rincón y Arnal, 2005, p. 42).
- Busca la objetividad en el ámbito de los significados utilizados como criterio de evidencia el acuerdo intersubjetivo en el contexto educativo (Latorre, del Rincón y Arnal, 2005, p. 42).
- Se centra en la descripción y comprensión de lo que es único y particular del sujeto

más que lo generalizable (Latorre, del Rincón y Arnal, 2005, p. 42).

- Requiere el análisis conjunto de los datos (Janesick, 1994, p. 212).

4.2 Fundamentación del instrumento de recogida de datos

Para recoger la información necesaria para el desarrollo de los objetivos desarrollamos un cuestionario abierto. A pesar de que de que los cuestionarios no sean una de las técnicas más representativas de la investigación cualitativa, sino de la cuantitativa. No obstante, puede prestar un importante servicio a la investigación cualitativa, siempre y cuando se responden las siguientes normas (Rodríguez, Gil y García, 1999):

- es un procedimiento de exploración de ideas y creencias generales sobre algún aspecto de la realidad.
- en su elaboración se parte de los esquemas de referencia teóricos y experiencias determinados por un colectivo determinado y en relación con el contexto del que son parte.
- su análisis permite que la información se comparta por participantes en la investigación.
- su administración no produce rechazo entre los miembros de un terminado colectivo, sino que es mayoritariamente aceptado.

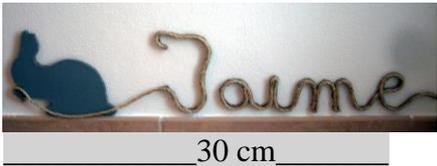
Rodríguez, Gil y García (1999) explican además que se debe tener claro que este procedimiento permite abordar los problemas desde un punto de vista exploratorio, no en profundidad, y por otro lado, consigue minimizar los efectos del entrevistador, preguntando las mismas preguntas y de la misma forma a distintas personas. Estas características facilitan la toma de datos, dado el quehacer docente pocas veces permite una óptima interacción entre los docentes y los investigadores.

4.3 Estudio piloto previo

Durante el Máster Universitario en Investigación en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias, realizado en la Universidad Autónoma de Barcelona, realizamos un cuestionario abierto para recoger información sobre algunos de sus conocimientos sobre estimación de medida así las concepciones y creencias que tenían los maestros sobre su enseñanza. Parte de esas preguntas, también son idóneas miradas desde el punto el marco referencial del conocimiento docente que utilizamos en este estudio. Colaboraron con aquella investigación 31 maestros de primaria en formación continua en educación matemática, todos en ejercicio docente, con características similares a la población que teníamos en mente para realizar la investigación del conocimiento docente.

Considerando la experiencia del máster, diseñamos un nuevo cuestionario de forma similar al de aquel entonces, de este modo, era altamente probable que la población a encuestar podía responder diez preguntas abiertas que involucran creación de actividades, definiciones y valoraciones didácticas. Cuatro preguntas de aquel

cuestionario fueron consideradas para el cuestionario de este estudio, las preguntas 2, 3, 4 y 8, que se detallan a continuación.

Pregunta	Intención de la pregunta
<p>Observe las siguientes preguntas. <u>NO LAS RESUELVA</u></p> <p>A) En la realidad. ¿Cuál de estas superficies podría medir un metro cuadrado?</p>  <p>a) La cancha de tenis b) las tapas del libro</p> <p>c) la mesa del comedor d) el cartel.</p> <p>B) ¿Cuántos centímetros de lana necesitaremos para hacer este trabajo en artes?</p>  <p>¿Cómo podríamos aproximarnos a la medida de la lana?</p> <p>Este tipo de preguntas se asocian al concepto de estimación de medidas.</p> <p>2. ¿Le realizaron de este tipo de preguntas en su etapa escolar?</p> <p>Sí _____ No _____</p> <p>Si su respuesta es Sí. ¿Recuerda alguna? ¿Podría explicar brevemente cómo era?</p>	<p>La intención de las preguntas 2 y 3 fue indagar en la formación de los docentes a nivel escolar y universitario. Frente al posible desconocimiento de qué era estimar una medida, les mostramos posibles tipos de preguntas para acercarlos al concepto. Además, les solicitamos que ejemplificaran cómo habían visto preguntas de estimación de medida, con el fin de comprender si realmente estaban respondiendo sobre la tarea en cuestión.</p> <p>En estas pregunta nuestra intención es indagar en los estudios que el maestro ha tenido tanto en su formación escolar como profesional</p>

3. ¿Le realizaron de este tipo de preguntas durante su formación docente?

Sí _____ No _____

Si su respuesta es Sí. ¿Recuerda alguna? ¿Podría explicar brevemente cómo era?

4. ¿Qué entiende usted por estimación de medidas?

Esta pregunta busca indagar en el concepto de estimación de medida que tienen los profesores de primaria.

8. Considerando esta imagen ¿Podría hacer una pregunta o una actividad de estimación asociada a esta imagen?

En la pregunta 8, se busca indagar en cómo los docentes podrían trabajar el concepto de estimación de medida por medio de una imagen.



Tabla 4.3b. Preguntas de experiencia piloto

En este pequeño estudio, en la pregunta dos observamos que 19 de los 31 profesores, indican que no vieron estimación de medida en su etapa escolar. La mitad de los maestros que dicen haberla tratado en su etapa escolar, mostraron ejemplos erróneos sobre el concepto.

Por otro lado, en la pregunta tres, 13 de los 31 profesores, indican no haber tratado la estimación de medida en sus estudios universitarios. Once de los 18 que dicen haberla visto, ejemplifican con un concepto erróneo

En la pregunta cuatro, seis de 31 profesores definen estimación de media como un juicio de valor de una medida sin uso de instrumentos. Quince de los restantes la confunden

Marco metodológico

con aproximación, otros cinco con medición a partir de unidades de medida no convencionales⁴.

En la última pregunta, la pregunta ocho, cinco de los 31 profesores logran realizar una pregunta de estimación de medidas. Sin embargo, 17 de los 25 lo intenta, pero la pregunta no puede ser respondida, por falta de referentes.

Estas cuatro preguntas nos sirvieron para construir un nuevo instrumento que midiera el conocimiento que poseen los profesores para enseñar estimación de medida, dado que los profesores elaboran preguntas, explican si vieron o no estimación de medida en sus formaciones y definen, utilizando sus palabras y las componentes para ellos esenciales, estimación de medida.

En el siguiente apartado, se describe el instrumento de toma de datos de este estudio.

4.4 Diseño el instrumento

Considerando los lineamientos anteriores, diseñamos un cuestionario de 11 preguntas, distribuidas en respuesta a conocer información sobre la formación en estimación de medida de los docentes y al desarrollo de los tres objetivos específicos en los que descansa la investigación, y que hemos detallado en el segundo apartado del Capítulo 3.

OE1: Caracterizar el conocimiento de la estimación de medida discreta y continua que poseen los profesores de primaria: definición, estrategias y representación de la estimación de medida.

OE2: Caracterizar cómo los docentes usarían las actividades de estimación de medida propuestas en los programas gubernamentales.

En la siguiente tabla se aprecia la relación entre los objetivos específicos y cada una de las preguntas del cuestionario definitivo.

	Pregunta	OE 1	OE 2	Información
Cuestionario	P1	x		
	P2	x		
	P3	x		
	P4			x
	P5			x

⁴ El análisis utilizado en este estudio piloto es distinto al utilizado en este trabajo, por ello, se pueden apreciar resultados diferentes en el estudio posterior.

P6	x	
P7.a	x	
P7.b		x
P7.c		x
P8	x	x
P9	x	x
P10		x
P11		x

Tabla 4.4. Clasificación de preguntas según objetivos específicos

4.4.1 Detalle de las preguntas iniciales del instrumento

A continuación detallamos cada una de las preguntas del instrumento. El cuestionario completo, como lo recibió cada docente, se puede encontrar en el anexo A2.

4.4.1 Pregunta 1: Estimación longitudinal

Con la primera pregunta del instrumento se busca conocer cómo los docentes estiman la medida de una magnitud longitudinal. Para ello, se les solicita a los docentes que describan cómo estimarían la altura de una pared, por medio de la siguiente pregunta:

1. ¿Cómo se podría saber la altura de esta sala sin tener ningún instrumento de medida? Describa en forma explícita el proceso que seguiría. No es necesario dar un resultado.

4.4.2 Pregunta 2: Estimación de áreas de superficies

Con la segunda pregunta del instrumento se busca conocer cómo los docentes estiman la medida del área de superficie. Para ello, se les solicita a los docentes que describan cómo estimarían la altura de una pared, por medio de la siguiente pregunta:

2. ¿Cómo se podría saber el área de la pizarra sin tener ningún instrumento de medida? Describa en forma explícita el proceso que seguiría. No es necesario dar un resultado.

4.4.3 Pregunta 3: Elaboración de actividad

La tercera pregunta del instrumento busca indagar en qué información los docentes consideran relevante al elaborar una actividad de estimación de medida para sus estudiantes. Para ello a los docentes se les proporciona una imagen idónea para la

Marco metodológico

situación, dado que se pueden estimar medidas longitudinales y continuas, entre otras. Esta pregunta fue parte del cuestionario piloto.

3. Si el coordinador de su centro educativo le propone utilizar esta imagen para hacer una actividad de estimación. ¿Qué enunciado escribiría?



Imagen 4.4.3. Imagen Pregunta 3 cuestionario

4.4.4 Pregunta 4: Formación escolar

Esta pregunta busca recoger información sobre la formación escolar de los docentes en estimación de medida. Al igual que la pregunta anterior, es parte del cuestionario piloto.

4. En su etapa escolar (como alumno) ¿Trabajó alguna actividad de estimación de medida? Ejemplifique.

4.4.5 Pregunta 5: Formación universitaria

Esta pregunta busca recoger información sobre la formación escolar de los docentes en estimación de medida. Es parte del cuestionario piloto.

5. En su etapa universitaria (como alumno) ¿Trabajó alguna actividad de estimación de medida? Ejemplifique.

4.4.6 Pregunta 6: Definición de estimación de medida

La pregunta seis busca indagar en la comprensión del concepto de estimación que tienen los profesores. Es parte del cuestionario piloto.

6. ¿Qué entiende usted por “estimación de medida”?

4.4.7 Pregunta 7: Estimación de medida de la superficie

Con esta pregunta buscamos indagar en cómo los profesores estimarían una superficie que no está en su entorno, como la pizarra de la pregunta 2.

7. Si usted propusiera esta actividad de estimación de medida a sus estudiantes: ¿Qué área ocupa, aproximadamente, la superficie de la alfombra?



Imagen 4.4.7. Imagen Pregunta 7 cuestionario

7.a ¿Qué estrategia ocuparía usted para resolverla?

7.b ¿Qué estrategias cree que usarían sus estudiantes para resolverla?

7.c ¿Qué dificultades cree que tendrían sus estudiantes para realizarla?

4.4.8 Pregunta 8: Valoración de una actividad de estimación de medida discreta

Con la siguiente pregunta buscamos recoger la valoración de una actividad de estimación de medida para el primer curso de primaria. Esta actividad es una de las actividades propuestas por los Planes y Programas (2012) de la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación.

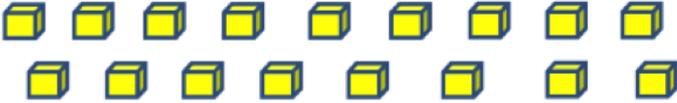
Observe estas actividades presentadas por el Ministerio de Educación en los Programas de Estudio para las Bases Curriculares:

8. ¿Considera que es una actividad de estimación? ¿Por qué?

Objetivo de aprendizaje

Estimar cantidades hasta 20 en situaciones concretas, usando un referente.

Estiman visualmente la cantidad de cubos que se muestra en el dibujo y luego cuentan, primero, agrupando de a 2, y después agrupando de a 5, para comprobar la estimación dada



Argumentar y comunicar

Comunicar el resultado de relaciones usando un referente

Observaciones al docente

Es fundamental, en primero básico, que los alumnos estimen sin contar. Se sugiere que el docente busque formas de presentar actividades de estimación para que sus alumnos eviten el conteo. El conteo solo sirve para comprobar la estimación.

Imagen 4.4.8. Imagen Pregunta 8

Esta actividad nos resultada interesante porque, tal como lo dice la propuesta, es fundamental que los estudiantes no cuenten. Posiblemente, una tarea más idónea para el trabajo para la estimación de medida es una actividad donde la colección de objetos no esté totalmente disponible para la enumeración.

Por otro lado, consideramos que la estimación es una actividad en sí misma, y por ende, no necesita la comprobación del conteo.

4.4.9 Pregunta 9: Posible uso de la actividad de estimación discreta

Quisimos conocer cómo los docentes podrían utilizar la actividad anterior, con el fin de indagar en los elementos relevantes que considerarían en el tratamiento de la tarea.

9. *¿Cómo trataría la actividad anterior con alumnos de primer año?*

4.4.10 Pregunta 10: Posible uso de la actividad de estimación discreta

Los Planes y Programas de estudio, proponen actividades para el segundo año de primaria que se basan en conocer cuántas figuras caben en otra. Consideramos una de estas actividades para que los docentes nos indicaran cómo la usarían con los estudiantes.

10. *¿Cómo plantearía esta actividad en el aula?*

Objetivo de aprendizaje
Estimar cantidades hasta el 100 en situaciones concretas, usando un referente.

Estiman la cantidad de cuadrados  que caben en el rectángulo. 

Argumentar y comunicar
Comunicar el resultado de descubrimientos de relaciones
Explicar las soluciones propias y los procedimientos utilizados

Representar
Utilizar representaciones concretas

Verifican la estimación hecha, cubriendo el rectángulo con cuadrados de papel, y los cuentan.

Imagen 4.4.10. Imagen Pregunta 10

Al igual que en la actividad anterior, consideramos que la verificación no debería tener lugar en la tarea.

4.4.11 Pregunta 11: Comentarios adicionales de los maestros

Quisimos dejar un espacio en el cuestionario para que los docentes manifestaran sus opiniones frente al contenido, su experiencia con él o bien con el cuestionario, con el fin de rescatar alguna información relevante sobre la relación de los profesores con el contenido.

11. *¿Le gustaría añadir algún comentario o inquietud sobre la estimación de medida?*

4.5 Validación del instrumento

El instrumento fue validado por un equipo de cinco profesionales vinculados al área de didáctica de la matemática. Dos doctores en didáctica de la matemática y tres másteres en investigación en didáctica de la matemática analizaron el instrumento de acuerdo a su relación con los referentes teóricos. En esta validación se sugirieron las siguientes modificaciones

- Modificaciones en la forma: dejar más espacio entre las preguntas.

- Modificaciones en el fondo: agregar una última pregunta donde los maestros quisieran entregar información adicional sobre el concepto de estimación de medida, gracias a ello se agregó la pregunta 11 (apartado 4.4.1.11). Además se discutió sobre agregar una posible actividad pero se descartó para no extender aún más el documento.

Consecutivamente, contactamos a seis docentes chilenos, cuatro profesores de primaria y dos profesores de secundaria para que colaboraran con un pequeño pilotaje del instrumento. El grupo cuenta con más de tres años de experiencia en el aula de primaria y estudios de postgrado en área e diversas áreas de la educación en la Universidad de Barcelona o en la Universidad Autónoma de Barcelona. En la siguiente tabla se pueden observar algunas respuestas de los colaboradores a cada una de las preguntas.

Preguntas	Respuestas
1. ¿Cómo se podría saber la altura de esta sala sin tener ningún instrumento de medida? Describa en forma explícita el proceso que seguiría. No es necesario dar un resultado	<p>Profesor A: <i>1. Dividir en 3 partes la muralla. 2. Tomar la medida de uno de los lados con una cuerda. 3. Si tengo claro cuánto mide mi mano extendida, cuento cuántas veces cabe mi mano en la cuerda. 4. Finalmente multiplico la cantidad de manos en el trozo y ese valor lo multiplico por tres.</i></p> <p>Profesor B: <i>Recordando y teniendo en cuenta la medida del metro, lo multiplicaría por la cantidad de metros que debe tener la altura de la sala.</i></p>
2. ¿Cómo se podría saber el área de la pizarra sin tener ningún instrumento de medida? Describa en forma explícita el proceso que seguiría. No es necesario dar un resultado.	<p>Profesor E: <i>1. Determinaría el ancho de la pizarra con la mano. 2. Determinaría el alto de lo que puedo con la mano. 3. Mido mi mano y reemplazo en los pasos anteriores. 4. Utilizo la fórmula del área</i></p> <p>Profesor B: <i>Calculando los cm. Aproximando y multiplicando.</i></p>

3. Si el coordinador de su centro educativo le propone utilizar esta imagen para hacer una actividad de estimación. ¿Qué enunciado escribiría?



Profesor C: *Si en la figura se está pintando una pared de 2,5 metros de alto y 5 metros de largo. La superficie pintada abarca 1/3 de la pared. ¿Cuál es el área pintada?*

Profesor D: *Lucía pinta una muralla de color verde. Considerando que un tarro de pintura cubre 4 m^2 , y su muralla mide 18 m^2 . ¿Cuántos tarros necesitará para cubrir toda la superficie aproximadamente?*

4. En su etapa escolar (como alumno) ¿trabajó alguna actividad de estimación de medida? Ejemplifique.

Profesor D: *No me acuerdo*

Profesor E: *sólo a modo de hipótesis*

Profesor C: *Sí, por medio del cálculo de pasos que uno tiene en 100 metros, para luego estimar medidas, calcular áreas y perímetros, entre otros.*

5. En su etapa universitaria ¿trabajó alguna actividad de estimación de medida? Ejemplifique.

Profesor C: *Sí, tanto en matemática como en educación física.*

Profesor E: *No*

Profesor A: *No*

6. ¿Qué entiende por “estimación de medida”?

Profesor B: *La medida de diversas cosas a través del cálculo aproximado sin utilizar elementos para ello*

Profesor C: *Cálculo aproximado de la medida de un objeto*

7. Si usted propusiera esta actividad de estimación de medida a sus estudiantes: ¿Qué área ocupa, aproximadamente, la superficie de

Profesor C: *Se podría estimar la medida del niño y ahí tratar de hacerlo. Aun así considero que no hay datos mínimos para resolver la*

la alfombra?



7. a ¿Qué estrategia ocuparía usted para resolverla?

situación

Profesor D: *Tomar la altura del bebé, sentado en la mitad del cuadrado.*

Profesor E: *No podría hacerlo, necesito alguna referencia de la unidad de medida, es demasiado abstracto.*

7. b ¿Qué estrategias cree que usarían sus estudiantes para resolverla?

Profesor C: *Sería utilizando algún artículo que sepan sus medidas, por ejemplo, teléfonos móviles.*

Profesor D: *No sé, estimar la altura del bebé y en base a ello estimar la superficie de la alfombra.*

7. c ¿Qué dificultades cree que tendrían sus estudiantes para realizarla?

Profesor A: *Quizás no tendrían una referencia para hacerlo.*

Profesor B: *No sabrían que operación utilizar (procedimiento)*

Observe estas actividades presentadas por el Ministerio de Educación en los Programas de Estudio para las Bases Curriculares:

8. ¿Considera que es una actividad de estimación? ¿Por qué?

Objetivo de aprendizaje

Estimar cantidades hasta 20 en situaciones concretas, usando un referente.

Estiman visualmente la cantidad de cubos que se muestra en el dibujo y luego cuentan, primero, agrupando de a 2, y después agrupando de a 5, para comprobar la estimación dada

Argumentar y comunicar

Comunicar el resultado de relaciones usando un referente.

Observaciones al docente

Es fundamental, en primero básico, que los alumnos estimen sin contar. Se sugiere que el docente busque formas de presentar actividades de estimación para que sus alumnos eviten el conteo. El conteo solo sirve para comprobar la estimación.

Profesor C: *Es una actividad que permite la estimación, pero presenta como falencia que propone, inconscientemente, el conteo más que la estimación.*

Profesor A: *Creo que no, porque existe un patrón de orden, lo que hace que el estudiante cuente antes de estimar el resultado.*

Profesor D: *No, porque el alumno puede ver todos los cubos y contarlos perfectamente, sin la necesidad de estimar.*

9. ¿Cómo trataría la actividad anterior con alumnos de primer año?

Profesor A: *No lo sé.*

Profesor C: *Presentaría la actividad a través de objetos*

concretos, la explicaría enfatizando en la estimación: una sola mirada. Les pediría a los estudiantes que expusieran sus resultados para luego comprobar.

10. ¿Cómo plantearía esta actividad en el aula?

Objetivo de aprendizaje
Estimar cantidades hasta el 100 en situaciones concretas, usando un referente.

Estiman la cantidad de cuadrados que caben en el rectángulo.

Argumentar y comunicar
comunicar el resultado de descubrimientos de relaciones
Explicar las situaciones propias y los procedimientos utilizados

Representar
Utilizar representaciones concretas

Verifican la estimación hecha, cubriendo el rectángulo con cuadrados de papel, y los cuentan.

Profesor B: *¿Cuántos cuadrados caben en el largo? ¿Cuántos en el alto? Lo demás me parece bien.*

Profesor D: *Utilizando los medios que consideres necesarios, estima ¿Cuántas veces cabe el cuadrado rojo en el rectángulo azul?*

Profesor E: *No lo sé.*

11. ¿Le gustaría añadir algún comentario o inquietud sobre la estimación de medida?

Profesor B: *Como profesor primario en la formación inicial no se pone énfasis en esta contenido, por lo que no conozco mucho del tema.*

Tabla 4.5 Respuestas del grupo piloto

Posterior a esta toma de datos, observamos que, en algunas preguntas, es necesario realizar cambios con el fin de que los maestros comprendan claramente qué preguntamos y que a la vez, escriban claras respuestas para un óptimo análisis.

En las pregunta 1 y 2, indicábamos que al estimar medida no se utilizaban instrumentos de medida, por lo tanto, le entregábamos información al docente para generar la respuesta, si no sabía o dudaba sobre el uso instrumentos de medida, el cuestionario le proporcionaba información. Por ello, volvimos a redactar la pregunta. Por otro lado, podemos observar que tanto el profesor A como el profesor E, describen su tarea paso a paso, lo que entrega más información que el profesor B, por ello decidimos solicitar cómo harían la tarea paso a paso.

Las preguntas 3, 4, 5 y 6 estaban piloteadas en el cuestionario piloto utilizado en el trabajo de máster, al ser respondidas por los nuevos seis maestros, siguieron entregando la información que buscamos.

En la pregunta 7, se puede observar que los profesores explican que la imagen carece de referentes. Para nosotros, el tamaño del niño era un referente adecuado, pero frente a las

respuestas de los docentes, decidimos poner otra imagen, con más referentes y, al igual que la imagen original, cercana al metro cuadrado.

Las preguntas 8, 9, 10 y 11 se comportaron de acuerdo a lo esperado en la construcción del instrumento.

Considerando las observaciones anteriores, realizamos cambios en el cuestionario para elaborar la versión final del instrumento.

4.5.1 Versión final del instrumento

En el siguiente apartado se describe la versión final de cada una de las preguntas del instrumento de toma de datos.

4.5.1.1 Pregunta 1: Estimación longitudinal

En esta pregunta se cambió el enunciado. Retiramos la instrucción que explicitaba que no se podían tener instrumentos de medida, dado que esa información es parte de lo que queremos recoger del conocimiento de los docentes. Por otra parte, solicitamos explícitamente que los docentes nos indicaran el paso a paso del proceso.

1. **Estime la altura de la sala. Describa paso a paso el proceso . No es necesario dar un resultado.**

Imagen 4.5.1.1 Imagen Pregunta 1 cuestionario final

En la primera versión, la pregunta 1 contó con un tercio de página para ser respondida, en la versión final, el espacio para ser respondida aumentó a casi media página.

4.5.1.2 Pregunta 2: Estimación de áreas de superficies

Se realizaron los mismos cambios que en la pregunta anterior, se quitó la instrucción del uso de herramientas de medida y se explicitó el paso a paso del procedimiento, de igual forma, se aumentó el espacio de respuesta.

2. **Estime el área de la pizarra. Describa paso a paso el proceso. No es necesario dar un resultado.**

Imagen 4.5.1.2 Imagen Pregunta 2 cuestionario final

4.5.1.3 Pregunta 3: Elaboración de actividad

Se mantuvo la pregunta original.

4.5.1.4 Pregunta 4: Formación escolar

Se mantuvo la pregunta original.

4.5.1.5 Pregunta 5: Formación universitaria

Se mantuvo la pregunta original.

Marco metodológico

4.5.1.6 Pregunta 6: Definición de estimación de medida

Se mantuvo la pregunta original.

4.5.1.7 Pregunta 7: Estimación de medida de la superficie

En esta pregunta se cambió la imagen a estimar. La nueva imagen poseía un referente más que el tamaño de una persona, las baldosas del piso. Las preguntas mantuvieron su formato original.

7. Si propusiera esta actividad de estimación de medida a sus estudiantes:



Imagen 4.5.1.7 Imagen pregunta 7 cuestionario final

4.5.1.8 Pregunta 8: Valoración de una actividad de estimación de medida discreta

Se mantuvo la pregunta original.

4.5.1.9 Pregunta 9: Posible uso de la actividad de estimación discreta

Se mantuvo la pregunta original.

4.5.1.10 Pregunta 10: Posible uso de la actividad de estimación discreta

Se mantuvo la pregunta original.

4.5.1.11 Pregunta 11: Comentarios adicionales de los maestros

Se mantuvo la pregunta original.

4.6 Población

Con el instrumento editado y en su forma final, gracias a las validaciones de los docentes y del grupo de expertos, viajamos a Santiago de Chile a realizar la toma de datos. La población de ese estudio corresponde a 112 profesores que realizan clases en la enseñanza primaria, es decir, tratan o deben tratar alguno de los objetivos de estimación de medida discreta o continua que contempla el currículum.

El 90% de los docentes participantes en el estudio, durante el año 2012, año de la recogida de los datos, realizaban formación continua en Educación Matemática, con el fin de obtener un postítulo que los acredite para trabajar con niños entre 10 y 13 años, los dos últimos años de primaria y los dos primeros de secundaria según la nueva ley chilena. El 10% de los docentes restantes colaboraron con la información desde sus propios recintos de trabajo. La siguiente tabla indica distintas características de la población como el rango de edades de los encuestados, su formación y los años de experiencia docente.

Información de la población					
Edad	f	Estudios	f	Experiencia	f
20-30	53	Lic. Educ. Gral. Básica	92	Primer año	17
30-40	22	Lic. Educ. Matemática	7	1-5	40
40-50	22	Lic. en Mat.	1	10-15	6
50-60	13	Magíster	7	Más de 15	22
Sin inf.	2	Otros	2	Sin Información	
		Sin información	3		

Tabla 4.6 Información de las características de la Población

Podemos observar que de los 112 maestros, 92 son Licenciados en Educación Básica, que es el equivalente al magisterio, es decir, tienen estudios que contemplan un programa que posee entre 4 y 5 años de duración y que concentra tanto asignaturas de las diversas disciplinas que trata la escuela primaria (matemática, ciencias, historia, lengua, etc.) junto a sus respectivas metodologías y/o didácticas y a otros cursos de diferentes ciencias de la educación. Los 7 profesores que son Licenciados en Educación Matemática estudiaron tanto las diferentes ramas de las matemáticas como las ciencias de la educación durante 5 años. Hay 7 maestros indicaron que tener grado de Magíster, ya sea en currículo, gestión educacional o didáctica de la matemática. Entre los 112 encuestados también hay un matemático, un ingeniero y una psicopedagoga. Otros tres maestros no dieron información de su profesión.

Como podemos observar hay docentes de diversas edades y experiencias, pero en su mayoría tienen en común que han cursado asignaturas de matemática, su metodología y/o didáctica y asignaturas de ciencias de la educación, además de estar en formación continua en el área de educación matemática.

4.7 Recogida de datos

Para recoger los datos nos dirigimos a diversas universidades de Santiago de Chile que imparten formación continua a profesores de primaria. Cuatro universidades respondieron a nuestra petición: Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Universidad de los Andes, Universidad Católica Raúl Silva Henríquez y la Universidad Diego Portales. Nos interesó que los centros impartieran formación continua con el fin de que la población estuviese compuestas por profesores en ejercicio docente. Por otro lado, dirigimos correos electrónicos, cartas y visitas a distintos centros educacionales, sólo dos de ellos respondieron, el Instituto Alonso de Ercilla y el Colegio María Teresa Cancino Aguilar.

Los profesores que estaban en formación continua, colaboraron mientras tomaban clases en sus respectivas universidades. Estaban sentados frente a una pizarra, por ende, las preguntas 1 y 2 fueron respondidas según las alturas de las salas y el área de la superficie de las aulas universitarias. Los profesores que trabajaban en los dos colegios que aceptaron colaborar en nuestra recogida de datos, se dirigieron a una sala de clases para responder el cuestionario.

En ambas situaciones la tesista estuvo presente, sin embargo, no hubo dudas o confusiones por parte de los docentes para responder las preguntas. A continuación, presentamos algunos ejemplos de las respuestas de algunos docentes.

Preguntas	Respuestas
1. Estime la altura de la sala. Describa el paso a paso del proceso. No es necesario dar un resultado.	<p><i>“Altura aproximada de 3 m. se puede considerar la estatura promedio de una persona, por ejemplo si la persona mida 1,55 como referencia”</i></p> <p><i>“Se podría tomar como unidad de medida la distancia de mi brazo desde el hombro hasta la punta de los dedos y estimar la cantidad de veces que debo usar esta medida desde el suelo hasta el techo de la sala de clases. La cantidad de brazos sería la medida de la altura de la sala”</i></p>

2. Estime el área de la pizarra. Describa el paso a paso del proceso. No es necesario dar un resultado.

“1. Utilizaría hojas cuadradas 2. Pegaríamos todos los cuadrados uno al lado del otro. 3. Contaríamos los cuadrados. 4. Sinterizaríamos: hay 36 cuadrados”

“Base x altura. Por ejemplo $4 \times 2 = 8$ metros”

3. Si el coordinador de su centro educativo le propone utilizar esta imagen para hacer una actividad de estimación. ¿Qué enunciado escribiría?

“María quiere decorar su comedor pintando con un color alegre; si ella desea una pared de amarillo ¿cuánto crees tú que va a pintar? Estima su área”



“Para medir el alto de la pared aprox. Si el joven que está pintando mide 1,6 m. ¿Cuál será la altura aproximada de la pared?”

4. En su etapa escolar (como alumno) ¿trabajó alguna actividad de estimación de medida?

“Si, con naranjas y canasto de la mesa. 1. Adivinar ¿Cuántas canastas caben en el canasto?”

“Confirmar hipótesis metiendo las naranjas”

“Estimar el costo del pan o de productos del supermercado para saber si tenía dinero suficiente”.

5. En su etapa universitaria ¿trabajó alguna actividad de estimación de medida? Ejemplifique

“Trabajamos las medidas estudiadas y las medidas no estándar. Ej: Medí con un lápiz una mesa, un libro con palitos de helado o cerillas”

“No”

6. ¿Qué entiende por “estimación de medida”?

“La estimación de una medida es una aproximación del valor exacto”

esperado en una unidad estandarizada”

“Tratar de cuantificar “algo” sin cálculos, sino que a través de la observación y el uso de materiales o instrumentos no formales”

7. Si propusiera esta actividad de estimación de medida a sus estudiantes:

¿Cuál es el área aproximada de esta pintura?



“Yo usaría una regla. Si voy a trabajar con niños permitiría usar carpetas, hojas, etc.”

“Indicaría la altura que contempla la persona sentada junto a la pintura”

a. ¿Qué estrategia usaría usted para resolverla?

7. b ¿Qué estrategias cree que usarían sus estudiantes para resolverla?

“Usarían sus manos estiradas o un lápiz para medir el ancho y el largo de la pintura”

“Midiendo con regla o con sus mismos dedos”

7. c ¿Qué dificultades cree que tendrían sus estudiantes para realizarla?

“La capacidad de abstracción”

“No poder expresarla en medidas conocidas como metros y centímetros si es que no tienen referencia de estas medidas”

Observe estas actividades presentadas por el Ministerio de Educación en los Programas de Estudio para las Bases Curriculares:

8. ¿Considera que es una actividad de estimación? ¿Por qué?

“Es imposible que un niño de 1 básico esta actividad despegándose del conteo. No se puede subtizar más de 5”.

“Considero que sí es una actividad de estimación. Las estudiantes al contar en grupos, se les facilita el conteo”.

<p>Objetivo de aprendizaje</p> <p>Estimar cantidades hasta 20 en situaciones concretas, usando un referente.</p> <p>Estiman visualmente la cantidad de cubos que se muestra en el dibujo y luego cuentan, primero, agrupando de a 2, y después agrupando de a 5, para comprobar la estimación dada</p>  <p>Observaciones al docente</p> <p>Es fundamental, en primero básico, que los alumnos estimen sin contar. Se sugiere que el docente busque formas de presentar actividades de estimación para que sus alumnos eviten el conteo. El conteo solo sirve para comprobar la estimación.</p>	<p>Argumentar y comunicar</p> <p>Comunicar el resultado de relaciones usando un referente</p>
---	--

9. ¿Cómo trataría la actividad anterior con alumnos de primer año?

“Trataría de mostrar la imagen a los alumnos por medio de alguna proyección de breves segundos, para así evitar el conteo entre ellos y luego sugerir los mismos pasos”

“Lo trataría como adivinar y no como estimar”

10. ¿Cómo plantearía esta actividad en el aula?

“Considero buena actividad de estimación. Si todo rectángulo es cuadrado ¿Cuántos me caben en este cuadrado?”

<p>Objetivo de aprendizaje</p> <p>Estimar cantidades hasta el 100 en situaciones concretas, usando un referente.</p> <p>Estiman la cantidad de cuadrados que caben en el rectángulo.</p>  <p>Verifican la estimación hecha, cubriendo el rectángulo con cuadrados de papel, y los cuentan.</p>	<p>Argumentar y comunicar</p> <p>Comunicar el resultado de descubrimientos de relaciones. Explicar las soluciones propias y los procedimientos utilizados</p> <p>Representar</p> <p>Utilizar representaciones concretas</p>
--	---

“Haría que mis estudiantes empezaran doblando el rectángulo. - Primero en un dobles, luego en dos y así sucesivamente hasta llegar al cuadrado chico y luego los contarán para saber cuántos cuadrados chicos caben en el grande”

11. ¿Le gustaría añadir algún comentario o inquietud sobre la estimación de medida?

“Me fue muy interesante haber contestado la encuesta ya que te dan cuenta que hay contenidos y habilidades en nuestros alumnos que se les pasa según el texto que trabajan en el colegio pero hay muchas preguntas que ni siquiera no te las habías cuestionado”

“Siento que los niños de hoy no aprenden de memoria, es fundamental crear la necesidad y

*utilidad de adquirir el aprendizaje,
luego modelar paso a paso lo que se
quiere lograr y finalmente ejercitar
lo adquirido”*

Tabla 4.6. Muestra de respuestas de la población encuestada a la versión final del instrumento.

Capítulo 5. Análisis de datos



Análisis de datos

En el siguiente se describe el proceso de análisis realizado a las 11 preguntas del instrumento de toma de datos. En los siguientes apartados se describen las herramientas utilizadas para analizar las preguntas. Dichas herramientas emergen tanto de los datos como de los referentes teóricos presentados en el Capítulo 2.

5.1 Descripción del proceso de análisis

La investigación presentada en este documento es un estudio exploratorio a partir de las respuestas al cuestionario, anteriormente detallado en el apartado 4.4.2, de los maestros de primaria. El foco de nuestro análisis es caracterizar el conocimiento de los docentes sobre la enseñanza de la medida de acuerdo a los referentes teóricos expuestos.

Para conseguir resultados interpretables a partir de las respuestas de los docentes, realizamos un análisis cualitativo basado en categorías descriptivas. Por categorías descriptivas se entiende el conjunto de los diferentes pasajes de textos a analizar que definen un mismo concepto teórico (Gibbs, 2007). Este modo de codificación de las respuestas de los docentes nos permitirá establecer un marco de referencia para interpretar los datos. Para cada pregunta, esperamos clasificar las respuestas en distintas categorías disjuntas. Las categorías emergen desde las propias respuestas de los docentes en coherencia con los referentes teóricos anteriormente mencionados. Para una óptima, ágil y fácil codificación, utilizamos un software de análisis de datos cualitativos. Existen variadas alternativas de software, por ejemplo ATLAS.ti, AQUAD, MAXQDA o NVivo. Para nuestro estudio hemos decidido usar el NVivo 10⁵. Los 112 cuestionarios se transcribieron en un procesador de texto e importaron a NVivo 10 en 112 documentos distintos, un documento por cada profesor colaborador.

En una primera instancia, creamos un proyecto-prueba para familiarizarnos con el software y para comprobar su funcionamiento, con el fin de indagar en el trabajo de las categorías y observar si podrá responder al tipo de consultas que necesitamos para realizar nuestro análisis.

Nuestro proyecto-prueba no necesitó análisis, dado que las categorías emergían de la edad de los maestros, sus formaciones profesionales y sus años de experiencia. Observamos cómo se manejaba el software y cómo podíamos relacionar las preguntas por medio de una matriz de ceros y unos.

A continuación se presentan algunas imágenes del proyecto-prueba.

⁵ http://www.qsrinternational.com/products_nvivo-mac.aspx

▼ ● Edad	112	112
● 20-30	53	53
● 31-40	22	22
● 41-50	22	22
● 51-60	13	13
● Sin información	2	2
▼ ● Estudios	112	112
▼ ● Lic. Educ. Básica	92	92
● Pedagogo	16	16
● Lic. Educ. Matemática	7	7
● Lic. en Mat.	1	1
● Máster	7	7
● Otros	2	2
● Sin información	3	3

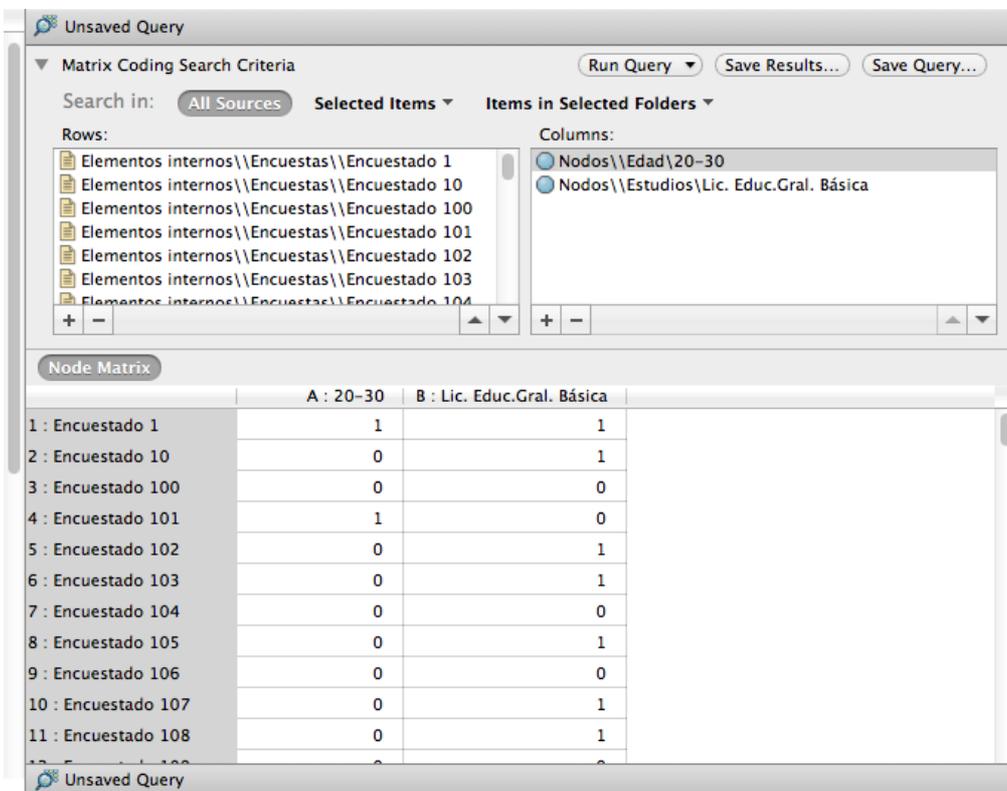


Imagen 5.1 proyecto-prueba de NVivo 10.

5.2 Consideraciones previas al análisis

Nuestra primera aproximación al análisis de los datos fue una lectura de las respuestas, y a partir de ello algunas codificaciones intuitivas, según las similitudes de las distintas respuestas. Por consiguiente, constatamos la necesidad de establecer elementos que nos permitieran diferenciar la tarea de estimar medida de otras tareas mencionadas por los maestros.

Análisis de datos

En primer lugar nos preguntamos ¿Qué es estimar una medida? En los referentes teóricos, como mencionamos en el Capítulo 2, hay variadas definiciones de estimación, que involucran diversas tareas en las distintas ramas de la matemática y por consiguiente hacen énfasis en diversas habilidades. A continuación, presentamos algunos ejemplos de aplicaciones, definiciones y tareas propuestas por los docentes sobre estimación de medida.

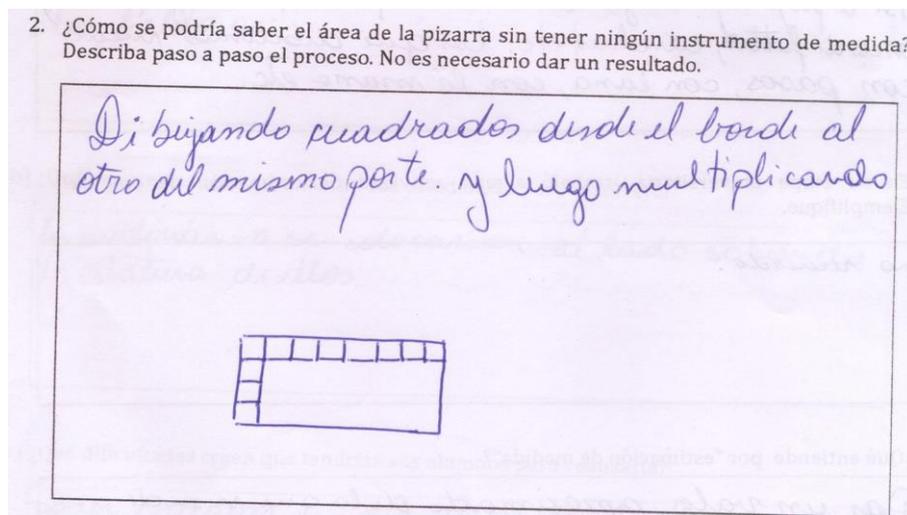


Imagen 5.2 a

En esta respuesta, el docente itera cuadrados, es decir, unidades no estandarizadas, tanto en el largo como en el ancho de la pizarra, para luego aplicar la fórmula del cálculo de área de superficies.

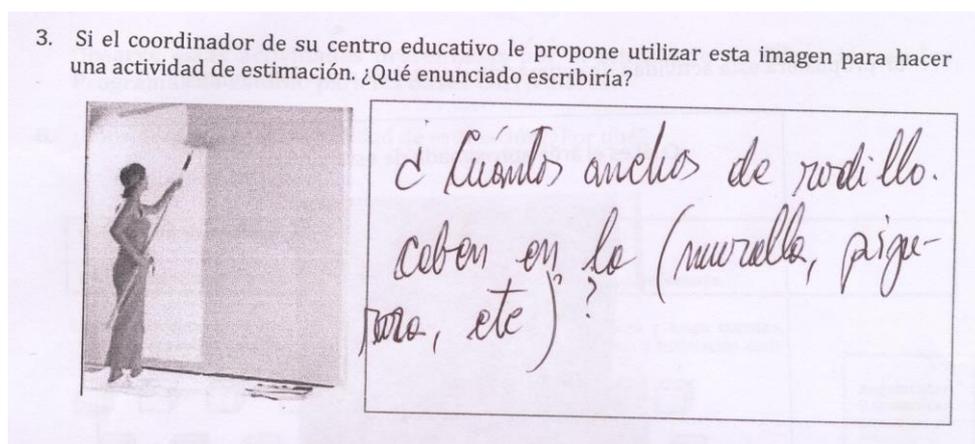


Imagen 5.2 b

En esta respuesta, podemos observar que de la imagen el estudiante puede iterar el ancho del rodillo en la pared, y a partir de ello, cuantificar las veces que cabe el rodillo en la pared. Sin embargo, también es posible realizar la actividad sin realizar una iteración directa del rodillo.

6. ¿Qué entiende por “estimación de medida”?

Tratarse de cuantificar “algo” sin cálculos, sino que a través de la observación y el uso de materiales o instrumentos no formales.

Imagen 5.2 c

En esta respuesta, el maestro indica que la estimación de medida se caracteriza por un trabajo perceptivo que utiliza materiales o instrumentos no formales.

6. ¿Qué entiende por “estimación de medida”?

Calcular la longitud de un objeto en forma no exacta a partir de un pto. de referencia. Usando otro objeto (clip - lápiz - cm) como referencia.

Imagen 5.2 d

En esta respuesta, podemos observar que el maestro considera que la estimación se sustenta en punto de referencia, posiblemente es lo que el maestro anterior llama “uso de materiales o instrumentos no formales”.

6. ¿Qué entiende por “estimación de medida”?

Acercesse, con solo mirar, lo ~~ax~~ más posible a la medida de un objeto.

Imagen 5.2 e

Este maestro explica que la percepción es una habilidad que debe estar presente al estimar medida, pero no considera una unidad de medida o un referente.

A partir de estas lecturas, consideramos indispensable reconstruir una definición de estimación de medida que sustente nuestro análisis para categorizar las respuestas de los maestros. Una vez que tuviésemos la definición del concepto, podríamos diferenciar la estimación de medida de otras tareas, gracias a las componentes de la posible definición, y a la vez, observar si hay o no, distintos tipos de estimación de medida.

5.2.1 Definición de estimación de medida

Para reconstruir la definición de estimación de medida, decidimos incluir en ella los elementos fundamentales que indica la literatura revisada. Consideramos tres aspectos a los que se refieren los autores mencionados en el los referentes del Capítulo 2, que detallamos y explicamos a continuación:

5.2.1.1 Referentes (R)

Entenderemos como referentes a los conocimientos previos, es decir, a la interiorización de unidades de medida (Hildret, 1983; Hogan y Brezinski, 2003; Clements y Sarama, 2011) o bien a objetos del auxiliares que pueden ser utilizados como unidades de medida.

Tener una unidad de medida interiorizada consiste en poseer una representación de una magnitud que no es verbal (Clements y McMillen, 1996), por ejemplo, la representación de metro cuadrado o de 12 metros cuadrado, que pueden ser la medida de la habitación del estimador. Un objeto auxiliar puede ser la medida de una cuarta, hay personas que saben la medida, exacta o aproximada, de la máxima distancia entre sus dedos meñique y pulgar, y a partir de ello, realizan estimaciones. Un objeto auxiliar también puede ser la longitud de un lápiz o la superficie de un cuaderno.

Los referentes deben ser representaciones simbólicas y específicas de unidades de medida, propias de cada sujeto e importantes al estimar medidas (Callís, 2002; Castillo, Segovia, Castro y Molina, 2011; Castle y Needham, 2007; Joram 2003; Joram et al., 1998, 2005; Legutko y Urbanska, 2002, Montague y van Garderen, 2003). Si un estimador no utiliza referentes, sus respuestas serían una adivinanza, carente de razonamiento lógico (Van de Walle, Karp y Bay-Williams, 2010).

Una idea divergente, podría ser que con la estrategia de adivinar y comprobar (Bright, 1976), no se utilizan referentes. Esta idea es refutable, dado que al realizar la adivinación y la comprobación, se crean referentes.

5.2.1.2 Percepción (P)

Para Hogan y Brezinski (2003), la estimación de medida se basa en la habilidad perceptiva de estimar diferentes magnitudes como la longitud, el área, el volumen, tiempo, peso, etc. en objetos comunes. Por otro lado, Bright (1976) y Chamorro y Belmonte (1988) explicitan la estimación de medida no utiliza instrumentos de medida. Por lo tanto, el uso de los sentidos debe ser parte de la estimación de medida. De este modo, la estimación de medida no da lugar a la iteración directa de una unidad (estandarizada o no) de medida con la cantidad de magnitud (Hildret, 1983; Callís, 2002), al conteo y al uso de un instrumento de medida.

A partir de lo anterior, el uso de un instrumento de medida, o al iterar una unidad directamente en la cantidad de magnitud, se está midiendo, no estimando, aunque se exprese el resultado de la medición de forma aproximada. De este modo, el referente descrito en el apartado anterior debe ser aplicado por medio de la percepción, de otro modo, se estaría trabajando la medición y no la estimación de medida. Por lo demás, si la percepción carece de un referente, se estaría realizando una respuesta aleatoria.

5.2.1.3 Valoración Numérica (V)

Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam (2005) explican que es necesario que una medida no se separe del sentido numérico correspondiente, por consiguiente, la estimación de medida tampoco puede separarse de él. En caso contrario, la tarea sólo puede ser sólo un trabajo perceptivo, por ejemplo, si al tocar el agua de una piscina afirmamos que es agradable para nadar, estamos realizando una tarea perceptiva, porque no hemos asignado un valor a la temperatura, de este modo, las unidades de medida no entran en juego.

Por lo demás, gracias a la valoración numérica (Bright, 1976 y Boulton-Lewis, Wils y Mutch, 1996), la estimación de medida contribuye en las habilidades aritméticas, el pensamiento tridimensional, al pensamiento de orden superior y a las habilidades de resolución de problemas (Ainley 1991; Dowker 1992).

5.2.1.4 Nuestra definición de Estimación de Medida

Como lo dijimos anteriormente, nuestra definición se sustenta en tres elementos fundamentales: Referentes, Percepción y Valorización.

“Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad correspondiente a una cantidad de magnitud discreta o continua por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa a algún objeto auxiliar”

A partir de era definición, una tarea que consiste en iterar directamente una unidad de medida en una magnitud, se considera una medición y no una estimación de medida, dado que la percepción no tiene lugar en ella. Por ejemplo, si iteramos un lapiz sobre el largo de una mesa, estamos realizando una medición. Cabe mencionar, que si en el largo no es posible iterar un cantidad natural de lápices y hay que recurrir a un número mixto, asignar la fracción de dicho número, puede ser una tarea de estimación de medida.

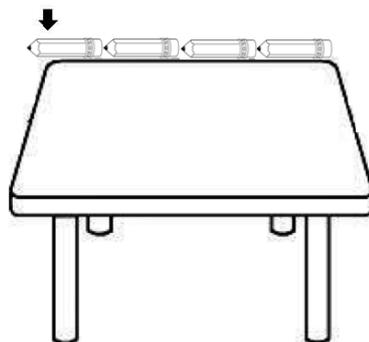


Imagen 5.2.1.4. Iteración directa de un lápiz sobre una mesa

En la imagen 5.2.1.4 se puede observar una iteración directa de un lápiz sobre una mesa. El cuarto lápiz no cabe por completo en el largo, ante ello, se realiza una estimación para asignarle una medida a la parte del lápiz que está contenida en la mesa, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ del lápiz. Por lo tanto la medida del largo de la mesa corresponde a $3\frac{3}{4}$ lápices.

Por lo tanto, para realizar el análisis de algunas preguntas nos centraremos en tres componentes: Valoración (V), Percepción (P) y Referentes (R).

Es necesario considerar que esta definición de medida no tiene contradicciones con la caracterización de la estimación de medida presentadas por Callís (2002) indicadas en el apartado 2.1.2.2.3.

5.2.2 Tipos de tareas para asignar la medida de una magnitud

La definición anterior de estimación de medida no bastó para realizar el análisis, dado que observamos que algunos de los maestros no basan sus respuestas en actividades de estimación de medida, sino que lo hacen en actividades de medida. Nuevamente, a partir de la información que nos proporcionaron los datos y los referentes teóricos, observamos que al asignar un valor a una magnitud podemos realizar dos tareas: estimar o medir.

Al estimar podemos tener dos tipos de referentes auxiliar o propio. El referente es propio cuando tenemos interlalizada una unidad de medida, es auxiliar cuando tenemos una imagen física de la unidad a utilizar para estimar la medida de la cantidad de magnitud. Por lo tanto, hay dos tipos de estimaciones distintas.

La percepción es la componente del concepto de estimación de medida que diferencia a la estimación de la medida. Si el estimador utiliza directamente la iteración de la unidad, está midiendo, si a usa en forma indirecta, está estimando. Esta idea es respalda por nuestra definición de estimación de medida y la definición de Clements y Sarama (2014, p. 187) sobre medición de longitudes, “*medir una longitud o distancia consiste en dos aspectos: identificar una unidad de medida y subdividir (mental y físicamente) el*

objeto por la unidad, localizando la unidad de principio a fin (iterándola) a lo largo del objeto". A pesar de que los autores indicaron que esta definición era para magnitudes longitudinales, consideramos que es idónea para las magnitudes tratadas en esta investigación.

En el caso de la medida discreta, las unidades corresponden a los elementos de la colección de objetos, y el equivalente a la iteración directa de la unidad, es la enumeración de los objetos de la colección, si se enumera y se cuenta, es medición, no es estimación. A partir de las respuestas de los docentes, los antecedentes teóricos y nuestro conocimiento empírico, construimos una tabla que resume las distintas tareas al momento de asignar una medida.

	Tarea	Definición	Ejemplo
Numerosity	Numerosity	Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una magnitud discreta observando una colección de objetos por una cantidad de tiempo determinado.	“En una presentación, Eduardo observó una cantidad de puntos durante cinco minutos. Dice que son 40”.
	Estimación con referentes propios (V-P-R)	Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una magnitud discreta o continua, por medio de referentes propios.	“Javier tiene la imagen mental de un metro cuadrado, a partir de ella, estima que el jardín tiene cinco metros cuadrados”. “Felipe trabaja en una oficina de fotocopadoras. Tomó unas cuantas hojas y supo que eran alrededor de 40 sin tener que contarlas”.
Estimación	Estimación con referentes auxiliares (V-P-R)	Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una magnitud discreta o continua, por medio de una comparación no directa con algún objeto auxiliar.	“Andrea tiene un sus manos un kilo de arroz. Después tomó una bolsa con harina, considera que tiene menos peso que la anterior, indica que debe ser un medio kilo”.
	Estimación	Asignar un valor por medio de	“En cada fila deben hacer

	indirecta (V-P-R)	una modelación en base a la estimación de una o más cantidades.	unos 10 estudiantes. Hay aproximadamente 20 filas, por lo tanto hay unos 200 estudiantes formados”.
	Medición con unidad no estandarizada	Asignar un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una magnitud continua, por medio de una comparación directa con algún objeto auxiliar o del conteo.	“Ana midió el volumen del balde repartiéndolo en vasos. El volumen del balde es equivalente a 5 vasos y un poco más”. “Juan puede dar cinco pasos a lo largo del muro. Sus pasos miden aproximadamente un metro, entonces el largo del muro es de 5 metros”
Medición	Medición con instrumentos de la medida de unidades estandarizadas	Asignar un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una magnitud continua o discreta por medio de instrumentos que miden unidades estandarizadas	“En el material didáctico hay reglas de 1 metro, 1 decímetro y 1 cm. Con esas unidades los estudiantes miden diferentes magnitudes de longitud, área y volumen en la sala de clases”
	Medición con instrumento de medida	Asignar un valor y una unidad de medida a una magnitud por medio de un instrumento de medida. El instrumento mide unidades estandarizadas.	“Debes hacer 20 abdominales en 30 segundos. Concéntrate en hacerlos, el tiempo lo medirá el cronómetro”. “No te preocupes, en el banco los billetes son contados con una máquina, así no hay errores de conteo”
	Medición indirecta	Asignar un valor y una unidad de medida a una magnitud por medio de una modelación o un	“Un árbol proyecta una sombra de 6 m. De longitud cuando el ángulo de

modelo matemático.	elevación de los rayos del sol mide 60° , con esa información podemos saber la altura del árbol”.
--------------------	--

Tabla 5.2.2 Fomas de asignar una medida a un objeto

Consideramos que las definiciones anteriores se pueden aplicar en diferentes ejemplos de las magnitudes presentes, comunmente, en los curriculums escolares, como la longitud, el área, el volumen, el tiempo, la masa, etc. A partir de la definición de estimación de medida y los distintos tipos de tareas para asignar una medida, analizamos las preguntas recogidas por el instrumento de investigación.

5.3 Análisis de las respuestas de los profesores

Como hemos mencionado en el Capítulo 3 de esta tesis, nuestro fin es caracterizar el conocimiento que posee el profesor, para poder darles respuesta, hemos dividido el análisis en dos partes, que corresponden a los dos siguientes capítulos de este documento.

Es necesario mencionar que nuestra idea no es analizar si los docentes comprenden o no el concepto teórico de estimación de medida, dado que incluso nosotros tuvimos que indagar y discutir a qué llamábamos estimación de medida. Por ello, citamos la definición de conocimiento Schoenfeld (2010), que es bastante operativa para caracterizar un conocimiento, que no tiene porqué ser correcto o idóneo para cierta actividad.

“Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo a esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!” (p. 25).

En esta definición, podemos observar que el conocimiento de un individuo, en nuestro caso los docentes, es aquello que tiene disponible para usar en diversas situaciones. Por lo tanto, en nuestra investigación, esta información podremos recogerla en el momento en que el docente ponga en juego su conocimiento sobre estimación de medida es decir, al definir, al ejemplificar, al aplicar, etc.

Lo interesante de la idea de Schoenfeld es que este conocimiento no ha de ser necesariamente correcto, por lo tanto, nos da libertad de caracterizarlo de acuerdo a la indagación en la información que los profesores nos entregan sobre la estimación de medida. Nos interesa saber qué conoce el maestro sobre estimación de medida, no si está en lo correcto o no, de acuerdo a los apartados anteriores a este capítulo. Sin

embargo, para poder comprender qué conoce, es indispensable para nosotros, buscar indicios de los referentes, la percepción y la valoración.

A partir de lo anterior, el siguiente análisis busca direccionarse en la reflexión de Montes et al., (2014), sobre la anteriormente mencionada definición de Schoenfeld (2010):

“Esta aclaración es una llamada de atención sobre la posición del investigador que busca comprender el conocimiento del profesor, siendo la diferencia entre conocimiento correcto o incorrecto irrelevante en algunos casos, especialmente si la intención del investigador es saber qué conoce el profesor, ya que, coincida con el referente de corrección o no, el profesor posee dicha información, aunque puede resultar interesante, dependiendo del tipo de investigación en curso, para comprender el conocimiento del profesor o su actuación. Además, creemos necesario hacer una llamada de atención sobre la consideración negativa del término incorrecto, definiéndolo no cómo algo negativo, sino como no coincidente con el referente de verdad” (p. 8)

5.3.1 Análisis del Conocimiento del tema

En el Capítulo 6, presentamos el análisis preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7a de nuestro instrumento de toma de datos. Analizamos cada una de las preguntas individualmente, dado que apuntan directamente al KoT (Conocimiento de los temas) de la caracterización de la estimación de medida. En ellas, como lo dijimos en el Capítulo 4, indagamos en la definición, la aplicación y la definición del concepto de estimación de medida. Dicho análisis es realizado en base a las tres componentes de la estimación de medida que emergen del marco teórico y de una revisión: Referentes (R), Percepción (P) y Valoración (V) descritas en el apartado 5.2.1 y a la clasificación de las distintas tareas a realizar para asignar una cantidad de medida a una magnitud descritas en el apartado 5.2.2. A partir de ello, se describen las categorías emergentes que han aparecido durante el proceso de análisis y se presentan ejemplos concretos que ilustran la naturaleza de las respuestas obtenidas.

Cada uno de estos análisis, pregunta a pregunta, finalizan con una tabla que recoge las categorías definidas y sus frecuencias respectivas. De esta forma, se recogen los resultados de primer orden que surgen del análisis de datos y se deducen los primeros hechos comprobables.

5.3.2 Análisis del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

En la segunda parte del análisis de los datos se realizó de acuerdo al sector izquierdo del hexágono del MTSK (Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática), dominado por el PCK (*Pedagogical Content Knowledge*). Indagaremos en las subcategorías del MTSK mencionadas en el apartado 2.3 de esta tesis: KFLM

(Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas) y KMT (Conocimiento de la Características del Aprendizaje de las Matemáticas). Sin embargo, si algún profesor se evidencia alguna categoría del KoT en sus respuestas, también el KoT es analizado.

Las preguntas correspondientes a estos subdominios son las preguntas 7b, 7c, 8, 9, 10 y 11, que para su análisis, fueron tomadas en conjunto con el fin de indagar en posibles evidencias de las categorías de las subdimensiones anteriormente mencionadas. A partir de ello, describimos cada una de las categorías emergentes, con sus ejemplos respectivos que dan cuenta de los distintos subdominios. Finalmente, al igual que en la primera parte del análisis, presentamos una tabla que recoge las categorías encontradas y sus frecuencias respectivas.

Capítulo 6. Análisis del conocimiento de la estimación de medida de medida



Análisis del conocimiento de la estimación de medida

En este capítulo, se presenta el análisis de las respuestas de las primeras 7 preguntas de nuestro instrumento de investigación. Cada uno de los siete apartados que lo componen, corresponden al análisis de las respuestas de cada una de las preguntas. En cada una de ellas, buscamos indicios, o no, de los referentes (R), la percepción (P) y la valoración, descritos en el apartado 5.2.1 a modo de tener una referencia para comprender qué componentes de la estimación de medida considera (o no) el docente. Por otro lado, también indagamos en comprender cuál de las posibles tareas descritas en el apartado 5.2.2 refiere el docente como estimación de medida. A continuación presentamos el análisis pregunta a pregunta.

6.1 Pregunta 1: Estimación longitudinal

Como mencionamos en el apartado 4.4.1.1 la primera pregunta del cuestionario indaga en cómo los maestros estiman longitudes. La pregunta solicita estimar la altura de la pared de la sala en la que se encuentra el maestro contestando el cuestionario. Por ello, las tareas detectadas se enmarcan dentro de las categorías de estimación o medición mencionadas en el apartado 5.2.2

De las respuestas emergen dos categorías principales, que se pueden dividir en dos grupos:

1. Estimación de medida
2. Medición con unidades no estandarizadas

A continuación, se presentan las categorías y las subcategorías con sus ejemplos respectivos y el fundamento de cada uno de ellos.

6.1.1 Estimación de medida

Esta categoría sostiene dos categorías que responden a dos de los tres tipos de estimación de medida que distinguimos en el apartado 5.2.2

6.1.1.1 Estimación de medida con referentes propios

Diecinueve docentes estimaron la altura de la pared con referentes propios. La unidad de medida indicada en todos los casos fue el metro, la unidad elegida como idónea para medir la altura de la pared. A continuación presentamos algunos ejemplos de las estrategias presentadas por los docentes.

M042P01: *“Primeramente realizaría un cálculo visual de un metro (100cm) para luego calcular la cantidad de metros que tendría aproximadamente la altura de la sala”*

En la respuesta de este docente, podemos observar que se encuentran los tres componentes fundamentales de la estimación de medida. Cuando el docente escribe *“realizaría un cálculo visual del metro”* está describiendo un trabajo perceptivo (P), en

este caso el metro actúa como referente propio, dado que no utilizó ningún otro elemento auxiliar para identificarlo en la pared (R) y finalmente, considera que es necesario encontrar una cantidad, por lo que hay un trabajo de valoración (V) de la medida solicitada. Dentro del contexto, se entiende que el docente se refiere a iterar la unidad mental de metro en la altura de la pared, al indicar “*calcular*”.

En algunas respuestas, se puede observar que los docentes utilizan en sus respuestas el verbo calcular como sinónimo de medir. El siguiente es un ejemplo de este uso.

M092P01: “*3.60 cm.. Calculé la altura de un mueble de 1,80. Llegaba a la mitad. El doble 3,60 cm*”

Como mencionamos en el Marco Metodológico, al responder el cuestionario los docentes estaban sentados dentro de un aula y rellenaron el cuestionario sin la posibilidad de acercarse a la pared mencionada en la actividad propuesta. Por ello, consideramos que el docente al indicar “*Calculé la altura de un mueble de 1,80*” se refiere a que hizo una estimación, ya que no había otra opción viable de hacerlo. De esta forma, utilizó la percepción (P) y su referente propio de metro (R) para establecer la medida del mueble y la proporción respecto de la altura de la pared que representaba el mueble. Por otro lado, la valoración (V) de la altura de la pared la entregó en forma explícita.

Los docentes utilizaron dos tipos de referentes: el centímetro y el metro. El primero de ellos para asignar medida a una unidad iterada indirectamente y el segundo para ser iterado en forma mental, por ejemplo un docente indicó que la madera que cubría horizontalmente la pared tenía cierta cantidad de centímetros, a partir de ello multiplicaba por una posible cantidad de tablas de madera y estimaba la medida. El metro fue el referente más utilizado, dado que sólo dos docentes utilizaron el centímetro.

6.1.1.2 Estimación de medida con referentes auxiliares

Diecinueve docentes estimaron la altura de la pared utilizando referentes auxiliares. Los referentes auxiliares fueron objetos del entorno escolar. Dieciséis docentes de los 19 utilizaron su estatura o la de otra persona, como referente auxiliar. A continuación se presentan algunos ejemplos de esta categoría.

M046P01: “*A partir de una referencia. Ejemplo: Una persona mide su altura, podríamos multiplicarla y estimar la posible medida de la altura de la sala de clases*”

Podemos observar en este docente que utilizó la altura de una persona como referencia (R), necesitó medirla, por ello, es un referente auxiliar y no interiorizado. Al indicar que “*se podría*” multiplicar, indica que no hay una iteración directa, por ello consideramos

Análisis del conocimiento de la estimación de medida

que se indica una tarea perceptiva (P) con el objetivo de encontrar la posible medida de la altura (V).

La siguiente respuesta nos ofrece un detalle relevante sobre la naturaleza de los referentes propuestos:

M007P01: *“Se podría medir o estimar por medio de la altura de un alumno conocida, cuántas veces cabría en el muro aproximadamente”*

Esta pregunta es interesante, dado que el profesor indica explícitamente que *“la altura es conocida”*, por lo tanto, es posible que el docente no tenga apropiada la altura, sino que es un dato (R) que utilizará para realizar la estimación. Al escribir en modo condicional, se considera que el maestro tiene la intención de iterar el referente por medio de la visualización (P) para encontrar la cantidad (V).

El referente más utilizado por los docentes de esta categoría fue la estatura con magnitud conocida o medida. Sólo dos ellos utilizaron un referente distinto, las cuartas y las unidades de medida.

6.1.1.3 Estrategias utilizadas

Categorizando según las estrategias de Castillo, Segovia, Castro y Molina (2011) que hemos nombrado en el apartado 2.1.2.6.1 de los referentes teóricos, los docentes utilizaron las siguientes estrategias

1. Comparación con referente presente y ausente: 16 docentes compararían la altura de la sala con alguna altura conocida, por lo tanto esta comparación es del tipo en el que la magnitud es un múltiplo del referente.
2. Iterando un referente presente y ausente: 18 docentes iterarían unos referentes. Los referentes ausentes utilizados son el metro (12 maestros) y el centímetro (2 maestros) y los referentes presentes son las alturas de los profesores (4 maestros)
3. Descomponiendo con referente presente: Dos maestros realizarían una descomposición a partir de referentes presentes, como la puerta de la sala de clases.

6.1.2 Medición con unidades no estandarizadas

Sesenta y seis docentes propusieron encontrar la altura de la pared por medio de una medición con unidades no estandarizadas. Las unidades más comunes son las partes del cuerpo (27 docentes), objetos del entorno (19 docentes), útiles escolares (8 docentes), muebles (7 docentes), útiles escolares y partes del cuerpo (5 docentes). A continuación presentamos algunas de las respuestas de los docentes.

M01P01: *“Se podría a través de medidas no estandarizadas como son las del cuerpo (cuarta -con la mano-, pie, hombro -brazo extendido-). Con la cuarta se iría marcando desde abajo girando la mano para ir avanzando en la medida hasta llegar al techo”*

En esta respuesta, el docente indica que la tarea se realizaría con unidades de medida no estandarizadas, como las partes del cuerpo (R). Por otro lado, se indica explícitamente que “*se iría marcando desde abajo (...) hasta el techo*”, por lo tanto hay ausencia de la percepción y el proceso es explícitamente un proceso de medida ya que pretende aplicar el referente propuesto como unidad sobre el objeto del que quiere obtener su longitud. La valoración está implícita en la tarea del docente (V).

M013P01: “*Con un trozo de lana que se extendiera desde el suelo hasta el techo. Posteriormente medir la longitud de esta con una cinta métrica*”

Observamos en esta respuesta que el docente utiliza un trozo de lana como unidad de medida, lo que habitualmente puede ser un objeto del entorno de la sala de clases de primaria (R) y la extiende “*desde el suelo hasta el techo*”, por lo tanto no se utiliza la percepción, sino un proceso que explícitamente de medida, dado que el docente realiza una iteración directa del trozo de lana sobre la altura de la sala. La valoración (V) se encuentra al medir la longitud con la cinta métrica.

M047P01: “*Podemos pegar pliegos de cartulina que por lo general mide entre 90 y 100 cm y ver cuántos pliegos se necesitan y así calcular la altura*”

En esta respuesta se observa que el docente utiliza pliegos de cartulina (R), útiles escolares que habitualmente están en el aula. El referente es utilizado en un proceso de medición, dado que el docente indica explícitamente que pegaría los pliegos de cartulina, por lo tanto, hay una iteración directa del referente con la magnitud solicitada, para calcular la altura (V).

6.1.2.1 Unidades utilizadas

Los referentes utilizados por los docentes se pueden agrupar en tres categorías: Partes del cuerpo, como por ejemplo los brazos y las cuartas 27 docentes; objetos del entorno, es decir palos de escobillones, sillas montadas, etc., 26 docentes y útiles escolares, como reglas y lápices, 13 docentes.

6.1.3 Sin Clasificación

Encontramos seis respuestas de los maestros sin completar y dos respuestas a esta pregunta que no detallan el proceso ofreciendo suficiente información para poder clasificar con claridad sus respuestas en alguna de las categorías anteriores. A continuación presentamos un ejemplo de respuesta.

M62P01: “*La altura se podría sacar a través de aproximaciones, para esto nuestra aproximación debe ser de lo más asertiva*”

Este docente indica que realizaría aproximaciones, pero no indica cómo las podría obtener, sólo explica que debe ser asertiva, lo que no podemos interpretar dado que no hay indicios de Percepción, Referentes o Valoración. Por ello no la clasificamos como

tarea matemática de ningún tipo porque no encontramos indicios concretos de las acciones que pretende el maestro.

6.1.4 Resultados Pregunta 1

A continuación presentamos la cantidad de respuestas de los docentes presentes en cada una de las categorías anteriormente mencionadas. En la tabla 6.1 se resumen las frecuencias de las distintas categorías.

Categorías	Sub categorías	f
Estimación de medida	Estimación con referente propio(V-P-R)	24 (21,4%)
	Estimación con referente auxiliar (V-P-R)	14 (12,5%)
Medición	Medición con unidades no estandarizadas	66 (58,9%)
Sin clasificación		2 (1,8%)
No responde		6 (5,4%)

Tabla 6.1 Categorías, subcategorías y frecuencias de las respuestas de la Pregunta 1

En la tabla 6.1 a modo de resumen se puede observar que la mayoría de los docentes realizó una medición con unidades no estandarizadas cuando se les solicitó estimar una medida.

Hechos relativos a la pregunta 1

Hecho 1: Cuando se pide que los docentes realicen una estimación de medida, un 60% de los docentes confunden estimación de medida con los procesos de medición utilizando unidades no estandarizadas.

Hecho 2: Un 34% del total de los docentes realizaron la tarea por medio estimación de medida, de los que un 63% utiliza referentes propios para ello.

6.2. Pregunta 2: Estimación de áreas de superficies

La Pregunta 2 trata contenidos referentes a la estimación de forma similar a la Pregunta 1, pero en este caso se solicita a los maestros que detallen el proceso de estimación del área de una superficie. Al igual que en la pregunta anterior, las respuestas se analizaron según las componentes fundamentales de nuestra definición de estimación de medida: Valoración (V), Percepción (P) y Referencia (R), para posteriormente clasificar las tareas según los tipos de estimación o medida, como mencionamos en el apartado 5.2.1

En esta pregunta emergieron 4 categorías relevantes, que pueden ser clasificadas en tres grupos.

- 1 Estimación de medida
- 2 Medición
- 3 Fórmula del área de superficie
- 4 Uso de unidades no estandarizadas

A continuación, se presentan las categorías y subcategorías con sus ejemplos respectivos y el fundamento de cada uno de ellos.

6.2.1 Estimación de medida

En esta categoría posee dos subcategorías, que corresponden a la estimación de medida con referentes propios y a la estimación indirecta. Observamos que no hay ningún maestro estimando mediante referentes auxiliares, y sólo un docente utilizó referentes propios. La estimación indirecta fue la más común entre los docentes, posiblemente por las características de la magnitud.

6.2.1.1 Estimación de medida con referentes auxiliares

Sólo un docente estimó el área de la superficie de la pizarra con estimación de medida con referentes propios. A continuación se presenta la respuesta de este maestro.

M112P02: *“El contorno derecho de la pizarra hay un franelógrafo de $1m^2$ y la pizarra es de 10 cm más menos mayor que el franelógrafo, el largo de ella es el doble del franelógrafo”.*

En esta respuesta se observa que el profesor identifica $1m^2$ en el franelógrafo (R) y visualmente (P), identifica que la pizarra tiene unos centímetros más de largo y el doble del ancho que el franelógrafo. Con esta información el docente podría encontrar el valor (V) aunque no lo explicita directamente en su respuesta.

6.2.1.2 Estimación de medida indirecta

Seis docentes estimaron el área de superficies en forma indirecta, es decir, realizaron estimaciones longitudinales de los lados para posteriormente multiplicarlos para

Análisis del conocimiento de la estimación de medida

encontrar el área de superficie. Cinco docentes realizaron una estimación de medida con referentes propios.

M051P02: “*La pizarra tiene aproximadamente 1m de alto y 3m de largo. $3 \times 1 = 3m^2$ aproximadamente*”

Observamos que este docente al decir “*Aproximadamente 1m de alto y 3m de largo*” está valorando la medida de los lados de la pizarra por medio de la percepción visual (P), gracias a que tiene una imagen mental de la longitud de un metro (R). Posteriormente por medio de una multiplicación, encuentra la posible medida (V) del área de la superficie.

El referente utilizado por todos los docentes en esta categoría es el metro.

6.2.1.3 Estrategias utilizadas

Categorizando según las estrategias de Castillo, Segovia, Castro y Molina (2011) que hemos nombrado en el apartado 2.1.2.6.1 de los referentes teóricos, los docentes utilizaron las siguientes estrategias

1. Comparación con referente presente y ausente: 1 docente, utilizando un referente relativamente igual a la magnitud a estimar, un franelógrafo.
2. Uso de fórmulas, técnicas indirectas: Cinco docentes estimaron medidas longitudinales (largo y ancho) para posteriormente multiplicarlas y encontrar el área de la superficie.

6.2.2 Medición

Entre los docentes que miden podemos observar distintas tareas de medición para conocer la medida del área de la superficie: quienes usan unidades bidimensionales, quienes usan unidades unidimensionales y posteriormente utilizan un arreglo bidimensional, y quienes sólo miden uno o ambos lados de la pizarra, sin llegar a un resultado que posea unidades bidimensionales. A continuación presentamos las distintas categorías que se desprenden de las distintas tareas de medición anteriormente mencionadas.

6.2.2.1 Medición con unidades no estandarizadas

Dieciséis de los docentes encuestados propusieron realizar la tarea utilizando una medición con unidades no estandarizadas, a continuación presentamos algunos ejemplos de esta categoría.

M019P02: “*Rayaría la pizarra en cuadros iguales (el encuestado dibuja una cuadrícula y la nombra como pizarrón). Contaría los cuadrados y mi área sería la cantidad de cuadrados. Ejemplo: 18 cuadrados*”

Observamos que este docente utiliza “cuadrados iguales” como unidad de medida (R), sin embargo no realiza ningún trabajo perceptivo, al cuadrricular la superficie, itera la unidad de medida sobre el objeto a valorar para encontrar la cantidad de superficie (V) que recubre la pizarra.

M061P02: “1. Dar como unidad de medida un cuaderno, que es lo que está al alcance de los niños. 2. Ver cuántas veces el cuaderno ocupa un espacio en la pizarra”.

Este maestro utiliza un cuaderno como unidad de medida (R), al indicar “ver cuántas veces el cuaderno ocupada un espacio en la pizarra”, el maestro no explicita si se realizará un trabajo indirecto o directo, pero dado que inicialmente manifiesta su intención de utilizar el cuaderno como unidad porque “está al alcance de los niños” interpretamos que no está proponiendo un trabajo puramente perceptivo, aunque su propuesta se dirige a encontrar la cantidad (V) de cuadernos que caben en la pizarra.

6.2.2.2 Medición indirecta.

Algunos docentes realizan una medición indirecta de la pizarra por medio de unidades no estandarizadas. A continuación se presentan unos ejemplos de respuesta de esta categoría.

M020P02: “Busco una unidad de medida cercana. Por ejemplo el estuche, mido el alto y luego el ancho de la pizarra. Multiplico ambos números obtenidos. Por ejemplo: 6 estuches • 10 estuches = 60 estuches²”

Este docente utiliza como unidad de medida un objeto común en todas las aulas, un estuche (R), como unidad de medida. El profesor indica explícitamente que mide, por ello consideramos que realiza una iteración directa en ambos lados de la pizarra. Posteriormente, para encontrar el valor de la medida (V) el profesor utiliza una multiplicación.

Algunos docentes sólo respondieron a la respuesta por medio de la medición de uno o dos lados de la pizarra. A continuación se presenta unos ejemplos de este tipo de respuesta.

M076P02: “1. Usando algún elemento u objeto como por ejemplo un libro y 2. Colocar el libro en la pizarra por los bordes para ir contando”

En esta respuesta el docente indica explícitamente que el borde de libro, usado como referente (R), se utiliza en forma directa en el objeto al medir, indicando “colocar el libro en la pizarra por los bordes para ir contando”, con el fin de llegar a una posible medida de los lados de la pizarra.

6.2.2.3 Unidades utilizadas

Los referentes utilizados por los docentes se pueden agrupar en tres grupos. En dos de estos grupos se encuentra la mayoría de los docentes: Partes del cuerpo, por ejemplo pasos, cuartas, brazos, etc., 42 docentes; útiles escolares, la mayoría de ellos con formas cuadradas o rectangulares, como un cuaderno, 36 docentes y un pequeño grupo de 3 docentes que indicó que utilizando las baldosas de la pared podrían medir el largo y el ancho de la pizarra.

6.2.3 Fórmula del área de superficie

Un grupo de docentes sólo indicó usar la fórmula para calcular el área de rectángulos, es decir, la multiplicación de la base por la altura.

M073P02: *“El área de la pizarra podría ser obtenida a través de la aplicación de las fórmulas. En este caso sería. $A = \text{base} \times \text{altura}$ ”*

Como podemos observar, en este tipo de respuestas no hay referentes, ni percepción, el procedimiento sólo busca la valoración (V) gracias a la fórmula del cálculo de áreas de superficie.

6.2.4 Uso de unidades no estandarizadas

Seis docentes indicaron únicamente qué tipo de unidad de medida utilizarían para realizar la tarea. A continuación se presenta un ejemplo de esta categoría:

M029P02: *“Se puede medir con cuartas”*

Como podemos observar, este docente no indica cómo realizar una medición o una estimación, sólo indica las unidades no estandarizadas para realizar la tarea.

M087P02: *“utilizando medidas arbitrarias como el largo de los cuadernos o los cuartos de las manos”.*

En la respuesta de este docente, podemos apreciar que se proponen medidas arbitrarias para realizar la posible estimación o medición, ya sean cuadernos o partes del cuerpo.

6.2.5 Sin Clasificación

Hubo un grupo de docentes cuyas respuestas no corresponden a ninguna de las categorías anteriores o bien no respondieron a la pregunta. A continuación presentamos un ejemplo de respuesta.

M962P02: *“A través de la estimación pero el resultado no siempre va a ser real ya que para sacar el área necesitamos herramientas. El niño visualiza y hace una estimación y el profesor saca el área de la pizarra y luego sabemos cómo anda la estimación”*

Podemos observar que este docente emite una opinión sobre estimación de medida e indica que la percepción es parte de la estrategia al afirmar que “*el niño visualiza*”. Aun así no hemos podido categorizar esta respuesta entre las diferentes tareas matemáticas porque no contiene ningún tipo de indicación o descripción del proceso propuesto para ejecutar la tarea.

6.2.6 Resultados Pregunta 2

En la siguiente tabla se resumen las frecuencias de las distintas categorías obtenidas para la pregunta 2.

Categorías	Sub categorías	f
Estimación	Estimación de medida con referente auxiliar (V-P-R)	1 (0,9%)
	Estimación de medida indirecta(V-P-R)	5 (4,5%)
Medición	Medición con unidades no estandarizadas	16 (14,3%)
	Medición indirecta	61 (54,5%)
Fórmula		12 (10,7%)
Uso de unidades		8 (7,2 %)
Sin Clasificación		4 (3,6%)
No responde		5 (4,5%)

Tabla 6.2 Categorías, subcategorías y frecuencias de las respuestas de la Pregunta 2

En la tabla 6.2, al igual que en la tabla 6.1, se puede observar que la mayoría de los docentes pretenden realizar mediciones en lugar de estimar medidas. Por otro lado, se puede observar que tanto en la estimación como en la medida, que las unidades unidimensionales son más utilizadas que las bidimensionales.

Resumen de hechos relativos a la Pregunta 2

Hecho 3: Un 68% de los docentes realizaría una medición con unidades no estandarizadas al estimar áreas de superficies. Sólo un 21% de ellos utilizó unidades bidimensionales para realizar la medición.

Hecho 4: De los 112 maestros, seis realizaron un trabajo de estimación de medida, de ellos sólo uno utilizó referentes bidimensionales, el resto utilizó estimación indirecta.

6.3 Pregunta 3: Elaboración de actividad

Como mencionamos en el apartado 4.4.1.3, esta pregunta solicita a los docentes elaborar una pregunta de estimación de medida utilizando una imagen dada. A continuación presentamos las distintas categorías y ejemplos que emergen de las respuestas de los maestros.

En esta pregunta hemos detectado tres categorías principales:

1. Estimación de medida
2. Cálculo
3. No explícita estimación o medida

A continuación, se presentan las categorías y las subcategorías con sus ejemplos respectivos y el fundamento de cada uno de ellos.

6.3.1 Estimación de medida

Esta categoría se divide en tres subcategorías: estimación de medida con referente explícito, estimación con referente implícito y estimación de proporciones. Realizamos una diferencia entre las dos primeras categorías a raíz de que la fotografía proporcionada a los docentes incluye referentes, sin embargo, para un grupo de docentes es necesario precisarlos.

A continuación se presentan las tres subcategorías, sus respectivos ejemplos y la justificación de su categorización.

6.3.1.1 Estimación de medida con referente explícito

Nueve docentes crearon actividades de estimación según el concepto de estimación que se re-elaboró a partir de los referentes solicitados. En esta categoría, el referente es explícito, es decir, los docentes indicaron medidas de algún elemento de la fotografía para que los estudiantes pudiesen resolver la situación. Los siguientes ejemplos corresponden a esta categoría:

M101P03: *“Estima la cantidad de m^2 que la mujer debe pintar conociendo que la mujer mide 1,8 m”.*

Podemos observar que en esta pregunta requiere percepción visual (P), dado que no puede manipular ni calcular; el referente (R) explícito, que es la altura de la mujer 1,8m y la valoración (V) se observa al solicitar la asignación de una cantidad de metros cuadrados.

M069P03: *“Este pintor se ha demorado 12 minutos en pintar lo que muestra la imagen. ¿En cuánto tiempo estimas que terminará de pintar?”*

En esta pregunta, al igual que en la anterior, podemos observar que es imposible realizar la tarea por medio de la manipulación o el cálculo, por ende, es indispensable el uso de

la percepción visual (P); el referente (R) está explícito al indicar que el tiempo que se ha tardado en pintar y la valoración (V) se observa al solicitar la cantidad de tiempo estimado.

6.3.1.2 Estimación de medida sin referente explícito

Una gran parte de los profesores consideraron que el referente no era necesario en el diseño de la actividad, dado que la fotografía contiene elementos que pueden ser utilizados como referentes, por ejemplo, sabemos que la altura de las paredes de un colegio están en el rango de los 2.4 ó 3 metros de altura; la altura de persona puede actuar como referente al variar entre 1.5m y 1.85m, etc. Los siguientes ejemplos corresponden a esta categoría:

M003P03: *“Observa atentamente la imagen y estima: El área del muro pintada. El área restante por pintar”*

En esta respuesta el docente comienza indicando explícitamente el uso de la percepción visual (P) al escribir *“Observa atentamente la imagen”*. Por otro lado, la imagen en sí es el referente para realizar la estimación solicitada (R). Podemos apreciar la valoración (V) cuando el docente solicita que se estime el área pintada y la restante por pintar.

M055P03: *“Si un tarro de pintura alcanza para cubrir $3m^2$ de un muro. ¿Cuántos tarros crees que necesita como mínimo para pintar este muro? Justifica”*

En esta pregunta se entrega información adicional para complementar la pregunta, el área de la superficie que alcanza a cubrir un tarro. Junto a la imagen, la información es parte de los referentes (R). Para responder esta pregunta, no se puede realizar una medición, sólo es posible por medio de una visualización (P). Al solicitar la justificación, el estudiante debe fundamentar el razonamiento que lo llevó a responder cuántos tarros (V) se necesitan como mínimo para pintar el muro.

6.3.1.3 Estimación de proporciones

Un grupo de 17 profesores elaboraron una tarea de estimación que involucra variaciones proporcionales que contemplan un trabajo de percepción, referencia y valoración. A continuación se presentan algunos ejemplos:

M017P03: *“La persona que está pintando ya ha utilizado un tarro de pintura. ¿Cuántos tarros de pintura estimas tú que usará para pintar la pared completa?”*

Al igual que la respuesta anterior, el docente entrega información adicional para complementar los referentes de la pregunta elaborada. De este modo, el estudiante debe observar por medio de la visualización (P) que un tarro de pintura cubrió el muro de la

imagen (R). A partir de este trabajo, el estudiante debe encontrar la cantidad necesaria de tarros (V) para pintar la pared completa.

M101P03: *“Estima cuántas partes del total de la pared lleva pintado el señor”*

En esta pregunta se mide la fracción asociada a una parte de la cantidad, como estimación de medida relativa. El referente (R) es la pared, que corresponde a la medida unitaria. El estudiante puede observar la imagen o bien hacer una división, utilizando un registro pictórico sobre el dibujo, para visualizar (P) la fracción asociada. A partir de alguna de estas tareas, el estudiante puede encontrar la cantidad de pared pintada expresada como fracción del total (V) se han pintado.

6.3.2 Cálculo

Una parte de los profesores no elaboraron una pregunta que apuntara al desarrollo de las componentes de la estimación que hemos considerado en la definición, sino que elaboraron preguntas que se remiten a trabajos de cálculos de áreas o de diversas operaciones.

6.3.2.1 Elaboración de actividad de cálculo operatorio

El grupo de docentes que clasificamos en esta categoría, trabajó como actividades de estimación de medida preguntas que podrían medir o desarrollar el cálculo de operaciones o de variaciones proporcionales. Esta categoría se caracteriza porque los docentes no utilizan la imagen sugerida, sino que elaboran problemas o ejercicios con enunciado literal, similares a los problemas y ejercicios encontrados en libros de texto sobre cálculos de áreas o proporciones. A continuación observaremos algunos ejemplos:

M013P03: *“Si Pedro ha tardado 3 horas en pintar la mitad de la pared. ¿Cuánto demorará en pintar la mitad de la pared?”*

Podemos observar que la pregunta elaborada por el docente no necesita la imagen para poder ser respondida. La pregunta no se relaciona con la estimación porque no considera ni la percepción ni la referencia, sino que es un ejercicio de proporciones o bien de la parte entera de una fracción, que puede ser encontrado en libros de texto o recursos escolares comunes.

M091P03: *“Javiera debe pintar su habitación. Necesitamos determinar ¿Cuántos tarros de pintura debe comprar? Si su habitación tiene la forma de un paralelepípedo (rectangular) y en una de sus murallas ha ocupado 2 tarros y en la otra solo uno”*

En esta respuesta podemos observar que el docente está pidiendo la cantidad de tarros de pintura necesarios para pintar la habitación, sin embargo, para poder resolver la situación es necesario relacionar la forma de la habitación (paralelepípedo) con las cantidades de pintura necesarias para pintar cada una de las paredes. Como podemos

Análisis del conocimiento de la estimación de medida

observar, los datos proporcionados por el maestro provocan que la imagen proporcionada no sea necesaria y que no exista ningún trabajo de estimación o medida promovido. De esta forma, en esta respuesta hay ausencia de percepción de referencia, porque no hay trabajo de estimación de estimación de medida, sino de proporciones.

6.3.2.2 Elaboración de actividad de cálculo de áreas.

Un grupo de docentes elaboró actividades que involucran el cálculo de áreas, un tema fácil de relacionar con la imagen presentada. A continuación revisaremos algunas de las respuestas de los docentes.

M060P03: *“Si la pared mide 5 m de alto y 4 m de ancho y se tiene pintado 3/4 de pared. ¿Cuánto falta para poder pintar toda la pared?”*

M027P03: *“Si un litro de pintura abarca $6m^2$, y este muro mide 4m de largo y 3 m de alto. ¿Cuántos litros de pintura requiere para pintar el muro completo?”*

En ambas respuestas podemos observar que los docentes construyen preguntas que se relacionan con la imagen involucrada, sin embargo, las preguntas que construidas no requieren de dicha imagen para ser respondidas.

6.3.3 No explícita estimación o medida

La última categoría agrupa a catorce docentes que elaboran una actividad que puede ser desarrollada usando o no percepción visual, dado que dejan espacio para que el estudiante utilice la percepción utilizando referentes auxiliares o bien que realice una medición iterando una unidad no estandarizada, que en este caso sería el rodillo. A continuación se presentan algunos ejemplos de esta categoría.

M005P03: *“¿Cuántas veces estimas tú que se necesita pasar el rodillo para pintar la muralla entera?”*

M062P03: *“¿Cuántos anchos de rodillo caben la muralla, pizarra, etc.?”*

En ambos ejemplos el referente es el rodillo, sin embargo al solicitar esta tarea, el docente no puede saber si el estudiante hará una medición aproximada iterando unidades similares a la longitud del rodillo, o bien lo hará por medio de la percepción visual. Por ello, es posible que algunos estudiantes estimen medidas o midan.

6.3.4 Sin Clasificación

Hubo otro grupo de docentes que escribió información para crear una pregunta, pero no la solicitó, por ello se pudieron clasificar en las categorías anteriores. Algunos ejemplos de estas respuestas son los siguientes:

M109P03: *“Una persona decide pintar su pieza”*

M094P03: “Nicolás desea pintar azul una pared de su habitación que mide 4 m de largo y 3 metros de ancho”

En ambas respuestas podemos observar que no hay solicitud de pregunta, la segunda da información sobre la habitación puesta en juego, pero no hay una tarea.

6.3.5 Resultados Pregunta 3

En la siguiente tabla se resumen las frecuencias de las distintas categorías.

Categorías	Sub categorías	f
Estimación	Estimación de medida con referente explícito (V-P-R)	10(8,9%)
	Estimación de medida proporcional(V-P-R)	17 (22,3%)
	Estimación con referente implícito (V-P-R)	41 (36,6%)
Cálculo	Cálculo de área	5 (4,5%)
	Cálculo de proporciones	12 (10,7%)
	No explicita estimación o medida	14 (12,5%)
Información sin pregunta		7 (6,3%)
No responde		6

Tabla 6.3 Categorías, subcategorías y frecuencias de las respuestas de la Pregunta 3.

A partir del resumen de las frecuencias de las distintas categorías de esta pregunta, se observa que la mayoría de las respuestas corresponden a actividades de estimación de medida. Se observa además que dentro del grupo, las actividades con referente implícito son la mayoría, casi un tercio de los 112 profesores las propusieron.

Resumen de hechos relativos a la Pregunta 3

Hecho 5: Un 61% de los maestros elaboró una pregunta que involucra estimación de medida. El 60% de ellos, 41 maestros, utilizó referentes entregados por la imagen.

Hecho 6: Un 28% de los maestros elabora problemas aritméticos de enunciado verbal cuando se les solicita elaborar una pregunta de estimación de medida.

6.4 Pregunta 4: Formación escolar

La pregunta 4 tiene como objetivo recoger información sobre la formación escolar de los docentes sobre la estimación de medida. A grandes rasgos, indagaremos en si los docentes recuerdan haber trabajado en estimación de medida en su formación escolar. En caso de respuestas positivas, les solicitamos una ejemplificación. En estas respuestas, esperamos tener una amplia gama de respuestas, dada la diversidad de posibles formaciones escolares y los recuerdos significativos del tratamiento del concepto. A continuación presentamos las categorías que emergen de las respuestas de los docentes.

En esta pregunta hay dos categorías principales:

1. Sí
2. No

A continuación, se presentan las categorías y las subcategorías con sus ejemplos respectivos y el fundamento de cada uno de ellos.

6.4.1 Sí

Se han obtenido 48 de las 112 respuestas en la que se indica que en la formación escolar de los maestros trataron actividades de estimación de medida. A continuación se presentan las distintas subcategorías que emergen de las respuestas de los maestros.

6.4.1.1 Estimación de medida

Un grupo de los docentes que dijeron que sí habían tratado la estimación de medida, dando ejemplos de estimación de medida trabajados en su etapa escolar, la siguiente respuesta es un ejemplo de ello.

M080P04: *“Sí de volumen, con la medida de un vaso de agua estimar cuántos vasos voy a ocupar en llenar ciertos recipientes”*

Observamos que en este caso, el vaso es el referente (R) para estimar la cantidad. Al indicar *“estimar cuántos vasos voy a ocupar en llenar”*, observamos que el docente describe la situación en forma predictiva, por ello tiene que haber realizado un trabajo perceptivo (P) para encontrar cuántos (V) vasos llenaban los recipientes.

M098P04: *“Sí, cuando me hicieron estimar algunas cantidades aproximadas que se encontraban en un recipiente (bolitas)”*

Podemos observar que este docente presenta un ejemplo de cantidades discretas, al indicar que se le solicitó entregar la cantidad aproximada de objetos que se encontraban en un recipiente, podemos interpretar que la tarea impedía realizar un conteo de las bolitas, por ello se debía estimar la cantidad

6.4.1.2 Medición con unidades no estandarizadas

Parte de los docentes que dijeron que sí trataron estimación de medida en su formación escolar dieron ejemplos de medición en vez de estimación de medida. A continuación se muestran algunas de sus respuestas a modo de ejemplo.

M105P04: *“Sí, medir el largo y ancho del patio, mesa, pizarra, con medidas arbitrarias, pies, manos, pulgar, clips, cuadrados, etc.”*

Este maestro indica explícitamente que su experiencia escolar con la estimación de medida es la medición con unidades no estandarizadas.

M036P04: *“Midiendo con huincha de medir los bordes de la cancha”*

En este ejemplo podemos observar que el profesor indica que un ejemplo de tarea de estimación de medida realizada en su etapa escolar, fue medir con una cinta métrica (huincha de medir) una cancha de su colegio.

6.4.1.3 Estimación computacional

Dos maestros indicaron estimación de computacional al ejemplificar el tratamiento que hicieron de la estimación de medida en su etapa escolar. A continuación presentamos un ejemplo de respuesta.

M109P04: *“Redondeo de números, en cálculo mental”*

En esta respuesta podemos observar que el docente confunde la estimación de medida con el redondeo de números y el cálculo mental.

6.4.1.4 Aproximación o redondeo de números

Tres maestros respondieron con ejemplos de redondeo o aproximación al indicar la ejemplificación de la estimación de medida.

M108P04: *“En mi etapa escolar se usaba el redondeo”*

En esta respuesta, podemos observar que el docente considera que el redondeo es un ejemplo de estimación de medida

6.4.1.5 Situaciones de estimación de medida sin ejemplificación

Un grupo de docentes indicó qué actividades realizaban en su etapa escolar, pero no cómo las ejecutaban, por ello no podemos identificar las componentes presentes en la estimación de medida.

M051P04: *“Sí, estimando las longitudes y áreas del patio del colegio, volúmenes en envases, etc.”*

En esta respuesta observamos que el docente explica las actividades que realizó en su etapa escolar, pero no indica cómo las hizo.

6.4.2 No

Más de la mitad de los docentes indicó que no trató la estimación de medida durante su formación escolar, por lo tanto, como estudiantes, la mayoría de los docentes, no tiene experiencia de trabajo en clases con el concepto.

A continuación se presentan las frecuencias de las distintas categorías.

6.4.3 Resultados Pregunta 4

En la siguiente tabla se resumen las frecuencias de las distintas categorías.

Categorías	Sub categorías	f
Sí	Estimación de medida	7 (6,3%)
	Medición con unidades de medida no estandarizadas	22 (19,6%)
	Estimación computacional	2 (1,8%)
	Aproximación o redondeo de números	3 (2,7%)
	Situaciones de estimación de medida	13 (11,6%)
No		64 (57,1%)
No responde		1 (0,9%)

Tabla 6.4 Categorías, subcategorías y frecuencias de las respuestas de la Pregunta 4

Podemos observar que un 57% de los maestros encuestados indica que no trabajó la estimación de medida en su etapa escolar. Entre quienes dicen haberla tratado, un 15% ejemplificó con tareas de estimación de medida, la mayoría de los restantes ejemplificaron con tareas de medición con unidades no estandarizadas.

Resumen de hechos relativos a la Pregunta 4

Hecho 7: Un 57% de los maestros dicen que no trataron la estimación de medida en su etapa escolar.

Hecho 8: Entre los 47 docentes que dicen haber visto estimación de medida en su etapa escolar, sólo 7 de ellos ejemplifican sus tareas con estimación de medida.

6.5 Pregunta 5: Formación universitaria

La pregunta 5 es similar a la pregunta anterior ya que pretende conseguir información sobre la formación sobre estimación de medida recibida por los maestros. Se diferencia de ella porque solicita información en otro nivel de estudios, en este caso nos centramos en la formación universitaria. En esta pregunta hay dos categorías de análisis principales:

1. Sí
2. No

A continuación, se presentan las categorías y las subcategorías con sus ejemplos respectivos y el fundamento de cada uno de ellos.

6.5.1 Sí

Entre las respuestas a la pregunta 5 encontramos que 38 de los 112 maestros indican que en su formación universitaria trataron actividades de estimación de medida. A continuación se presentan las distintas subcategorías que emergen de los distintos ejemplos de los docentes:

6.5.1.1 Estimación de medida

Un grupo de los docentes que dijeron que sí habían tratado la estimación de medida explicitaron ejemplos de estimación de medida en su etapa universitaria, la siguiente respuesta es un ejemplo de ello.

M080P05: *“Sin contar, en cm^2 de cartón, estimar cuántas veces cabe en distintas superficies. Luego marco el cm^2 y compruebo la estimación”*

En estas respuestas podemos que el maestro al escribir “sin contar” está indicando que realizó un acto perceptivo (P), el centímetro cuadrado en cartón es su referente (R) y al indicar cuántas veces cabe, realiza la valoración (V)

6.5.1.2 Medición con unidades no estandarizadas

Esta categoría posee ejemplos similares a los de la categoría 1.2 del apartado anterior, a continuación presentamos uno de ellos.

M100P05: *“Trabajamos las medidas estudiadas y las medidas no estándar. Ej: medir con un lápiz una mesa, un libro con palitos de helado o fósforos”*

En esta respuesta podemos observar que el docente explica directamente que la tarea realizada al estimar una medición fue una medición con unidades como un lápiz.

6.5.1.3 Estimación computacional

Los ejemplos observados en esta categoría son similares a los de esta categoría en el apartado anterior

6.5.1.4 Aproximación o redondeo de números

Los ejemplos observados en esta categoría son similares a los de esta categoría en el apartado anterior

6.5.1.5 Situaciones de estimación de medida

Un grupo de maestros sólo indicó actividades de estimaciones de medida, pero no cómo las realizaban. A raíz de esto, no fue posible identificar si la actividad presentada por el docente se ajustaba a nuestro instrumento de análisis. A continuación, veremos un ejemplo de categoría.

M101P05: “*Sí, estimar cuántos fósforos hay en una caja, cuántos cc. trae el corrector líquido, etc.*”

En esta respuesta podemos observar que el docente indica situaciones de estimación de medida, como por ejemplo *cuántos fósforos hay caja*, sin embargo, no podemos interpretar cómo se realizaron estas actividades para poder indicar si hay o no un trabajo de estimación de medida coherente con nuestro instrumento de análisis.

6.5.1.6 Sin fundamento

Tres docentes indicaron que sí habían visto estimación de medida en su etapa universitaria, sin embargo, no dieron muestras de ello en su respuesta.

6.5.2 No

Más de la mitad de los docentes indicó que no trató la estimación de medida durante su formación escolar, por lo tanto, como estudiantes, la mayoría de los docentes, no tiene experiencia de trabajo en clases con el concepto.

A continuación se presentan las frecuencias de las distintas categorías.

6.5.3 Resultados Pregunta 5

En la siguiente tabla se resumen las frecuencias de las distintas categorías.

Categorías	Sub categorías	f
Sí	Estimación de medida	2 (1,8%)
	Medición con unidades de medida no estandarizadas	14 (12,5%)
	Estimación computacional	2 (1,8%)
	Aproximación o redondeo de números	3 (2,7%)

Situaciones de estimación de medida	13 (11,6%)
Sin fundamento	3 (2,7%)
No	67 (59,8%)
No responde	8 (7,14%)

Tabla 6.5 Categorías, subcategorías y frecuencias de las respuestas de la Pregunta 5

Podemos observar que un 67% de los maestros dicen que no han trabajado la estimación de medida en su etapa universitaria, porcentaje que aumenta en 10 puntos porcentuales respecto a quienes dicen que “no” en su etapa escolar. Un tercio de los docentes indica que sí trabajó la estimación de medida en su etapa universitaria, sin embargo sólo dos maestros entregan ejemplos de estimación de medida.

Resumen de hechos relativos a la Pregunta 5

Hecho 9: Un 67% de los docentes indica que no trabajaron la estimación de medida en su etapa universitaria.

Hecho 10: Sólo 2 maestros de los 37 que dijeron haber trabajado la estimación de medida en su formación profesional, ejemplificaron con tareas de estimación de medida.

6.6 Pregunta 6: Definición de estimación de medida

La pregunta 6 indaga en el concepto que tienen los docentes sobre estimación de medida. A continuación se presentan las distintas categorías que emergen de las categorías y de las herramientas de análisis.

En esta pregunta, las respuestas de los docentes se dividen entre quienes definen la estimación de medida en base a valoración, percepción y referencia, entre quienes definen una medición con instrumentos no estandarizados, entre quienes definen una aproximación y entre quienes explican que estimar consiste en valorar una medida, sin indicar que esta valoración posee características o algún razonamiento. Este el último grupo fue el mayoritario. Por lo tanto, estas son las categorías que emergen en esta pregunta.

1. Estimación de medida.
2. Medición con unidades no estandarizadas
3. Valoración
4. Aproximación

A continuación, se presentan las categorías de análisis con sus ejemplos respectivos y la fundamentación de cada uno de ellos.

6.6.1. Estimación de medida

En esta categoría se encuentran los docentes que definieron estimación de medida en base a las tres componentes fundamentales: Valoración, Percepción y Referencia. A continuación presentamos un ejemplo de esta categoría.

M087P06: *“Es al observar o al “ojímetro” decir cuánto mide un objeto, pero teniendo un patrón antes”*

En esta respuesta podemos observar las tres componentes de la definición de estimación de medida. Cuando el maestro responde “al ojímetro” está indicando que el trabajo debe ser perceptivo, en este caso, visual (P), al indicar “cuánto mide” realiza la valoración (V) y finalmente el docente explica que se debe tener “un patrón antes”, es decir, un referente (R).

M024P06: *“Estimación de medida es dar un valor aproximado de una medición sin haber ocupado instrumentos estandarizados para ellos en forma intuitiva y por la experiencia”.*

En esta respuesta podemos observar que el docente indica que estimar una medida es “dar un valor aproximado”, por ello, requiere una valoración (V). Considera además que este valor se obtiene sin el uso de instrumentos estandarizados. Si no hay instrumentos, debe haber percepción (P), dado que indica que el trabajo es intuitivo y gracias a la experiencia, es decir, algún referente (R).

M080P06: “1. Es decir sin contar cuántas veces cabe un patrón de medida de lo que quiero medir. 2. Es comparar si hay más o menos la misma cantidad en conjuntos de datos”

En esta respuesta el maestro indica que estimar medida se realiza “sin contar cuántas veces cabe un patrón de medida”, por lo tanto, explica que esta tarea se realiza sin realizar una comparación directa entre el patrón de medida (R) y la magnitud, para encontrar un valor (V). Por ello, es un trabajo de corte perceptivo (P).

6.6.2 Medición con unidades no estandarizadas

En esta categoría se encuentran los docentes que definieron estimación de medida en base a las tres componentes fundamentales: Valoración, Percepción y Referencia. A continuación presentamos un ejemplo de esta categoría.

M076P6: “Es calcular las longitudes de los objetos, pero aproximando utilizando instrumentos de medida no convencionales”

Podemos observar que el docente indica explícitamente que esta medida se logra utilizando instrumentos de medida no convencionales (R) para poder llevar a la medida (V) por medio del *cálculo* (que como ya explicamos, interpretamos que es usado como medición). No se indica el uso de la percepción, por lo tanto en esta respuesta se define una medida con instrumentos no convencionales.

M107P6: “Calcular la longitud de un objeto en forma no exacta a partir de un punto de referencia. Usando otro objeto (clip-lápiz-cm) como referencia”

En esta respuesta podemos observar que el docente define estimación como la medición inexacta gracias a un punto de referencia (R), que ejemplifica como un clip o un lápiz. En esta respuesta, el docente no indica en forma explícita o implícita cómo se utilizaría este referente y utiliza la palabra *calcular*, por lo tanto consideramos que en la respuesta hay una ausencia de trabajo perceptivo para llegar a la valoración (V). Por consiguiente consideramos esta respuesta del maestro como una definición de una medición.

M055P6: “Una aproximación de la medida exacta, entregada por instrumentos”

En esta respuesta podemos observar que el docente define estimación de medida como una aproximación de la medida (V) con ausencia de percepción, dado que la aproximación se entrega por instrumentos que aplican directamente un referente (R) en la magnitud.

6.6.3 Valoración

En esta categoría se encuentra el mayor número de respuestas. En ella, los docentes indican que se debe valorizar una medida. Algunos consideran la percepción o la

Análisis del conocimiento de la estimación de medida

referencia, pero la mayoría de ellos no considera ninguna de los dos. A continuación presentamos algunos objetos de esta categoría.

6.6.3.1 Valoración y percepción

Un grupo de docentes consideró que estimar de medida es valorar una medida por medio de los sentidos. A continuación presentamos una respuesta de esta categoría:

M033P06: *“Entiendo por estimación calcular al ojo, más o menos cuánto mide algo, logrando llegar al resultado más cercano del correcto”*

Observamos que este docente considera que se debe “calcular al ojo” (P) para llegar a un resultado (V), sin embargo, no se categoriza como estimación de medida porque el docente no explicita el uso de referentes.

6.6.3.2 Valoración y referentes

En esta categoría se encuentran los docentes que nombraron la referencia y la valoración, pero no la percepción.

M094P06: *“Estimar: Es comparar la medida dada con un patrón establecido, por ejemplo: yo estimo que mesa mide más de 2 metros”*

Observamos que este docente explica que la tarea se realiza por medio de un patrón establecido (R) e indica una cantidad para ejemplificar su definición (V), sin embargo, no explicita que esta tarea se debe realizar utilizando la percepción.

6.6.3.3 Valoración sin percepción ni referencia

Esta categoría es aquella con una mayor frecuencia de respuestas. En ella se concentran los maestros que no consideran ni la percepción ni la referencia al momento de realizar una estimación, para estos docentes, entregar un valor a una medida. A continuación se muestran algunos ejemplos de esta categoría.

M027P06: *“Dar una medida cercana a la real”*

Observamos que este docente define estimación como “dar una medida” (V), pero no explica cómo se debiese obtener esta medida, no dando espacio ni a la percepción ni a los referentes.

M013P06: *“Estimación: sería la medida que cree el alumno que tiene determinado objeto”*

En esta respuesta, el docente considera que una estimación de medida, es una medida que “el alumno cree”, por lo tanto el estudiante puede dar un valor (V) al azar, sin considerar percepción ni referencia.

6.6.4 Aproximación

Esta categoría se agrupan las respuestas que consideran que la estimación de medida corresponde a un redondeo de cifras decimales. A continuación se presentan algunos ejemplos de evidencia de esta categoría.

M079P06: “Aproximar alguna medida para que sea exacto $3,9\text{ cm} = 4\text{ cm}$ ”

En esta pregunta podemos observar que para el docente la estimación es una aproximación de números decimales. En este tipo de respuestas, la mayoría indicaba textualmente que se aproximaba una medida.

M063P06: “Aproximarnos a un número, en este caso a una medida, lo más próximo posible”

Observamos que este docente considera que estimar una medida es aproximarse a un número (V), que es a la vez la medida de cierta magnitud. Enfatiza en que la aproximación debe ser la máxima posible.

6.6.5 Resultados Pregunta 6

En la siguiente tabla se resumen las frecuencias de las distintas categorías.

Categorías	Subcategoría	f
Estimación de medida (V-P-R)		7 (6,3%)
Medición con unidades de medida no estandarizadas		9(8,0%)
Valoración	Con percepción	15 (13,4%)
	Con referentes	10 (8,9 %)
	Sólo Valoración	51 (45,6 %)
Aproximación		14 (12,5%)
Sin Clasificación		1 (0,9%)
No responde		5 (4,5%)

Tabla 6.6 Categorías, subcategorías y frecuencias de las respuestas de la Pregunta 6

Se observa que para la mayoría de los docentes, estimar es entregar un valor de una medida sin considerar la percepción y los referentes, esta afirmación no se sostiene en razonamiento lógico, sino que en adivinanzas o ideas vagas. Por otro lado, sólo 9

Análisis del conocimiento de la estimación de medida

docentes indicaron que estimar medida es sinónimo de medir con unidades no estandarizadas.

Resumen de hechos relativos a la Pregunta 6

Hecho 11: De los 112 docentes que respondieron el cuestionario, siete definen estimación de medida considerando la percepción, la referencia y la valoración, nueve confundiéndola con la medición con unidades no tradicionales.

Hecho 12: De los 112 docentes, 51 definen la estimación sin considerar ni el uso de referentes ni la percepción.

6.7 Pregunta 7: Estimación de medida de superficies

La pregunta 7 indaga en las estrategias de estimación de áreas de superficies de los docentes. Para ello a los maestros se les presenta una imagen de un óleo de aproximadamente un metro cuadrado con una mujer sentada al lado, para que realicen la estimación.

Las categorías encontradas son bastantes similares a las categorías de las Pregunta 2, dado la similitud de ambas preguntas. Los maestros se dividieron entre quienes estimaron, quienes midieron y quienes indicaron referentes o unidades de medida para estimar o medir. A pesar de que les preguntamos cómo ellos estimarían, la mayoría de los docentes redactó las respuesta de acuerdo a cómo lo trabajaría con los estudiantes. A continuación se presentan las distintas categorías que emergen de las categorías y de las herramientas de análisis.

1. Estimación de medida.
2. Medición
3. Fórmula del área de superficie
4. Referentes
5. Propuestas de unidades no estandarizadas
6. Valoración.

A continuación, se presentan las categorías con sus ejemplos respectivos y el fundamento de cada uno de ellos.

6.7.1 Estimación de medida

Los seis docentes que realizaron una estimación de medida indirecta para encontrar la medida del área de superficie del óleo presentado en la pregunta. A continuación presentamos un ejemplo de respuesta.

M025P07A: *“Veo la altura de la persona sentada, supongo que es alrededor de 1 m, comparo la persona con el cuadro que es un poco más alto 1,2 m. El ancho es parecido. Entonces calculo $1,2m \times 1,2 m = 1,44 m^2$ aprox $1,5 m^2$ ”*

Podemos observar que el profesor utiliza su idea de metro (R) para poder comparar visualmente (P) los referentes de la imagen, como la medida de una persona sentada, a partir de ello, multiplica ambos lados y aproxima para llegar al resultado (V). Esta respuesta reúne a las tres componentes de nuestra definición de estimación de medida, por lo tanto corresponde a una estimación de medida indirecta.

M049P07A: *“Se podría estimar la medida del cuadro en base a longitud promedio de una cerámica (33 cm de lado) y reconociendo que la figura es prácticamente un cuadrado”*

Análisis del conocimiento de la estimación de medida

Podemos observar que este maestro explica que realizaría la estimación en base al referente auxiliar (R) de una cerámica del piso. Consideramos que el referente es auxiliar dado que el docente indica *“longitud promedio de una cerámica”*, si el referente fuese propio, explicaría que reconoció que la cerámica era de unos 33 cm. Como las cerámicas no se pueden iterar en el óleo, y el docente reconoce que éste tiene forma cuadrangular, el trabajo a realizar es perceptivo (P).

6.7.1.2 Estrategias utilizadas

Categorizando las estrategias según la propuesta de Castillo, Segovia, Castro y Molina (2011) que hemos nombrado en el apartado 2.1.2.6.1 de los referentes teóricos, los docentes utilizaron las siguientes estrategia de comparación con referentes presentes y ausentes, donde la magnitud a estimar es relativamente igual o un múltiplo de ellos.

6.7.2 Medición

Entre los docentes que miden podemos observar las mismas tareas de medición que en la Pregunta 2: quienes usan unidades bidimensionales, quienes usan unidades unidimensionales y posteriormente utilizan un arreglo bidimensional, y quienes sólo miden uno o ambos lados de la pizarra, sin llegar a un resultado que posea unidades bidimensionales. A continuación presentamos las distintas categorías que se desprenden de las distintas tareas de medición anteriormente mencionadas.

6.7.2.1 Medición con unidades no estandarizadas

Algunos docentes realizaron la tarea utilizando una medición con unidades no estandarizadas, a continuación presentamos un ejemplo de esta categoría.

M011P07A: *“Cuadricular la pintura y luego con los cuadrados obtenidos calcular el área”*

Este docente cuadrícula la pintura, es decir usa como referente un cuadrado (R) y al cuadricular lo itera directamente, para calcular (V) el área. Observamos que hay ausencia de la percepción, por ello hay una medición con unidades bidimensionales.

6.7.2.2 Medición indirecta

Algunos docentes realizan una medición indirecta del óleo por medio de unidades no estandarizadas. A continuación se presentan algunos ejemplos de respuesta de esta categoría.

M026P07A: *“Tomaría el ancho y alto del cuadro (lo giraría para ver el alto) y lo mediría en cuánto a las baldosas del piso. Cómo las baldosas tienen una medida estándar a partir de eso, obtendría un resultado más o menos aproximado a partir de la multiplicación del largo por el alto”.*

Este docente utiliza como unidad de medida las baldosas del piso (R), como unidad de medida. Utiliza el piso para iterarlas en el óleo, por ello no hay un trabajo perceptivo. Posteriormente, para encontrar el valor de la medida (V) el profesor utiliza la fórmula del cálculo de áreas.

M070P07A: *“Utilizaría las cuartas para sacar un perímetro. Luego con el resultado estimado aplicaría la fórmula para sacar el área”*

En esta respuesta el docente indica que *las cuartas* son unidades de medida (R), dado que no explicita que no habrá una comparación indirecta con ellas. Por otro lado, el docente *aplicaría la fórmula* para encontrar el área (V) de la superficie. Este es un ejemplo de los tipos de respuesta en que los docentes realizaron una medición indirecta, porque midieron los lados y posteriormente utilizaron la fórmula del área de rectángulos.

6.7.2.3 Medición con unidades no estandarizadas de los dos lados de la pizarra.

Algunos docentes sólo respondieron a la respuesta por medio de la medición de uno o dos lados del óleo. A continuación se presenta un ejemplo de este tipo de respuesta.

M035P07A: *“Usaría cuartas para medir el ancho y el alto”*

En esta respuesta el docente indica explícitamente que mediría utilizando cuartas⁶ tanto el alto como el ancho del óleo, sin embargo, no indica que la multiplicación de ambas medidas para encontrar el área de superficie.

6.7.3 Fórmula del área de superficie

Un grupo de docentes sólo indicó usar la fórmula para calcular el área de rectángulos, es decir, la multiplicación de la base por la altura. A continuación presentamos un ejemplo de esta categoría.

M005P07A: *“Le haría ver a los alumnos que se trata de una figura con dos dimensiones: largo y ancho. Por lo tanto se deben obtener dos medidas para el cálculo de área”.*

Se observa que en esta figura se enfatiza en el cálculo del área (V) dado que es una figura de dos dimensiones, posiblemente para el docente, la congruencia y los ángulos rectos no necesitan ser nombrados por las características del óleo de la figura.

⁶ La cuarta es una unidad de longitud antropométrica y corresponde a la medida de la distancia entre el extremo del dedo pulgar y el extremo del dedo meñique con la mano extendida.

6.7.4 Uso de referentes

Un grupo de docentes mencionó con qué referente realizaría la tarea. Los referentes emergen de la imagen presentada, por ende, son referentes auxiliares. A continuación presentamos un ejemplo de esta categoría.

M017P07: *“Propondría que se calculara aproximadamente la estatura de la persona que está sentada al lado de la pintura. Con esta relación se podría estimar la medida del cuadro”*

En esta respuesta, el docente busca un referente (R) dentro del entorno en el que se realiza la medición. Sin embargo, no indica cómo sería el procedimiento, por lo tanto no podemos saber si el docente realizaría una medición o una estimación.

6.7.5 Uso de unidades no estandarizadas

Un grupo importante de docentes sólo indicó qué tipo de unidad de medida para realizar la tarea. A continuación se presentan unos ejemplos de esta categoría

M010P07A: *“Yo usaría una regla. Si voy a trabajar con niños permitiría usar carpetas, hojas, etc.”*

Podemos observar que el docente directamente indica que realizaría la tarea con unidades de medida comunes a la medición con instrumentos de medida, como una regla. Por otro lado, explica que si está con estudiantes, utilizaría medición con instrumentos de medida no estandarizados.

M101P07: *“Utilizaría mis brazos (el largo de mi hombro hasta la punta de mi mano)”*

En esta respuesta, podemos observar que el docente indica el referente con el que realizaría la estimación de medida, sus brazos. No se refiere a cómo haría uso de ese referente, por lo tanto no podemos saber si lo utilizaría en estimación o en medida.

6.7.6 Valoración

Un grupo de docentes indicó que por medio de una “estimación” encontraría la medida de uno o dos lados del óleo, pero no indicaron cómo realizarían esta estimación. A continuación presentamos algunos ejemplos.

M109P07A: *“Estimaría la longitud de medida de las cerámicas o la altura de la niña”*

M065P07A: *“Calcularía en primer lugar la medida de sus lados en forma aproximada, asignando un valor a cada uno de sus lados”*

Observamos que en ambos ejemplos los docentes no explican cómo asignarían el valor a los lados del óleo, por lo tanto podemos interpretar que los docentes no consideran ni la referencia ni la percepción para la realización de la tarea.

6.7.7 Sin Clasificación

Hubo un grupo de docentes cuyas respuestas no corresponden a ninguna de las categorías anteriores, algunos no respondieron y otros dijeron que no sabrían cómo hacerlo.

6.7.8 Resultados Pregunta 7

En la siguiente tabla se resumen las frecuencias de las distintas categorías.

Categorías	Sub categorías	f
Estimación de medida	de Estimación de medida indirecta (V-P-R)	6 (5,4%)
Medición	Medición con unidades no estandarizadas	10 (8,9%)
	Medición indirecta	26 (23,2%)
	Medición de uno o dos lados del óleo	11 (9,8%)
Fórmula		3 (2,7%)
Referentes		21 (18,8%)
Propuestas de unidades no estandarizadas		24(21,4%)
Valoración		3 (2,7%)
No sabe		2 (1,8%)
No responde		6 (5,4%)

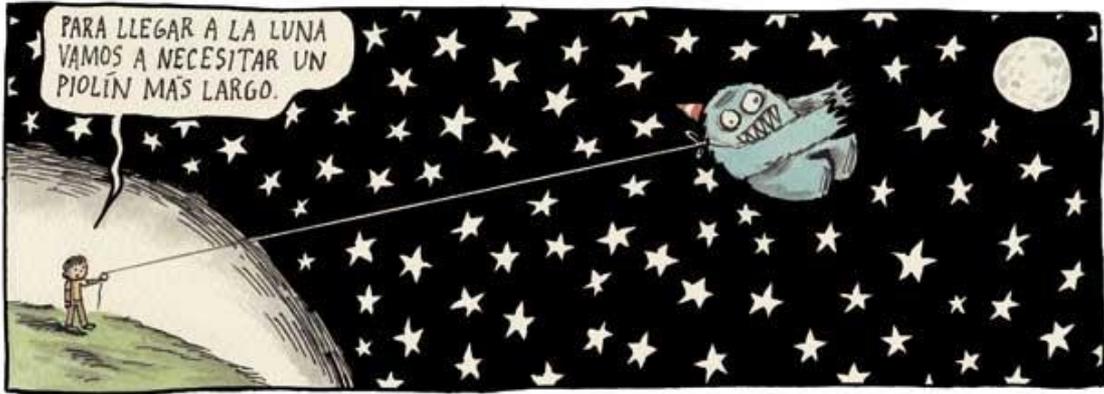
Tabla 6.7 Categorías, subcategorías y frecuencias de las respuestas de la Pregunta 7

En la tabla 6.7, se puede observar que los dos tipos de respuestas mayoritarias son los docentes que miden y aquellos que nombran los referentes o las unidades con los que podrían realizar una medida o una estimación.

Resumen de hechos relativos a la Pregunta 7

Hecho 13: Cuando se le solicita a los docentes estimar una medida, la mayoría de ellos realiza una medición con unidades no estandarizadas.

Capítulo 7. Análisis del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)



Análisis del conocimiento didáctico del contenido (PCK)

En este capítulo se presenta el análisis de los subdominios del MTSK (Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática) involucrados en nuestra investigación, el KFLM (Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas) y el KMT (Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática). Para ello, hemos buscado evidencias de las categorías de ambos subdominios en las distintas respuestas a las preguntas 7b, 7c, 8, 9, 10 y 11 que explicamos en el Capítulo 4. A continuación, presentamos dicho análisis.

7.1 El Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)

En las seis preguntas analizadas, indagamos en las cuatro categorías mencionadas en el apartado 2.3.3.2: formas de aprendizaje, fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, formas de interacción de los estudiantes con el aprendizaje matemático y concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas.

Las preguntas 7b y 7c, descritas en el Capítulo 4, se enfocan directamente en las formas de interacción de los estudiantes con el aprendizaje matemático y las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje respectivamente. Sin embargo, en las preguntas restantes también encontramos algunos indicios de las categorías mencionadas.

No encontramos evidencias de las otras categorías de este subdominio en las respuestas de los docentes. A continuación presentamos el análisis de las respuestas de acuerdo a las categorías el KFLM.

7.1.1 Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático

En esta categoría, gracias a la tabla 5.2.2 del Capítulo 5, hemos diferenciado las formas de interacción mencionadas por los docentes, de acuerdo a la tarea desempeñada: estimación y medición. Las preguntas 7B y 8 concentran las evidencias de esta categoría. A continuación presentamos las distintas formas de interacción con la estimación de medida.

7.1.1.1 Interacción de los estudiantes relacionadas con la medición

Para algunos maestros, la medición es una forma de interacción al enfrentar una tarea de estimación de medida. Entre los 112 maestros encontramos 97 evidencias que se agrupan en medición con unidades no estandarizadas, conteo y uso de las unidades de medida. A continuación detallamos cada una de estas evidencias

7.1.1.1.1 Medición con unidades no estandarizadas

Como detallamos en el apartado 5.2.2, medir con unidades no estandarizadas corresponde a iterar directamente una unidad de medida en una magnitud. A continuación presentamos algunos ejemplos de esta evidencia que en su totalidad se evidencian en la pregunta 7B.

M016P07B: *“Usarían sus manos estiradas o un lápiz para medir el ancho y el largo de la pintura”*

Este docente responde a la pregunta 7B, es decir, a cómo los estudiantes estimarían la medida de un óleo que está en una fotografía. Observamos que el docente no considera que el óleo está en una fotografía, sin embargo, si el óleo estuviese en el espacio de los estudiantes con escala 1:1, lo que ellos harían sería medir utilizando sus manos.

M021P07B: *“Dibujarían un cuadrado pequeño de 2 cm por lado y lo irían dibujando en la pintura, de tal modo de calcular cuántas veces el cubo pequeño estará contenido en el grande”*

Este docente también responde a la pregunta 7B, el considera que los estudiantes elaborarían una unidad de medida para enfrentar la tarea, el cuadrado pequeño de 2 cm de lado. Al indicar que *“lo irían dibujando en la pintura”*, interpretamos que el docente realizaría este dibujo como un modo de iteración del cuadrado sobre la pintura, por ello es una medición, siendo el cuadrado en cuestión la unidad de medida.

7.1.1.1.2 Uso de unidad de medida

Un grupo de docentes sólo indicó con qué unidad de medida los estudiantes realizarían la interacción. Los ejemplos que a continuación presentamos sólo se limitan a mencionar la unidad de medida y en su totalidad, corresponden a la pregunta 7B

M012P07B: *“Los niños creo que usarían sus útiles para medir, por ejemplo: Los lápices, cuadernos y de su propio cuerpo”.*

M031P07B: *“Yo creo que usarían las cuartas que es lo más común”*

M035P07B: *“Utilizarían algún objeto que tuvieran a mano”*

7.1.1.1.3 Conteo

En las pregunta 8 y 9, algunos los docentes se refieren a cómo los estudiantes interactúan con la actividad propuesta por los planes gubernamentales, indicando que al enfrentar la situación para estimar medidas, inevitablemente contarán. A continuación presentamos algunos ejemplos de esta evidencia.

M064P08: *“No, ya que el alumno instantáneamente cuenta, o sea realiza la actividad del conteo en primera instancia no estima por miedo a equivocarse”*

Podemos observar que este docente considera que el conteo está presente en la actividad porque lo primero que hace un estudiante es contar, dado que le teme al error. De este modo, la actividad presentada en la pregunta 8 no es una actividad de estimación para el docente.

M071P09: *“porque ellos intuitivamente tienden a contar y dar un resultado numérico”*

Análisis del conocimiento didáctico del contenido (PCK)

Esta respuesta es bastante similar a la anterior, sin embargo el docente indica que por instinto los estudiantes lo primero que harían es contar con el fin de encontrar un número. Es decir, para este docente el alumno va en la búsqueda de una respuesta antes de tener una pregunta.

M008P08: *“Un niño puede no seguir las instrucciones y contar la cantidad de cubos”*

En este caso, el docente considera que el estudiante puede contar porque no seguiría instrucciones. Es decir, para este docente, la tarea depende de cómo se sigan las instrucciones de ésta, aunque la colección de objetos pueda ser contada.

7.1.1.2 Interacción de los estudiantes relacionadas con la estimación de medida

En este grupo de respuestas, se encuentran aquellas respuestas en que los docentes se refirieron al uso de las componentes de la estimación de medida, como también aquellas respuestas que apuntan a las características de la estimación de medida nombradas en el apartado 5.2.2. A continuación presentamos las distintas categorías y sus respectivos ejemplos, a modo de evidencia.

7.1.1.2.1 Estimación de medida

En esta categoría encontramos a los maestros que indican que los estudiantes interactúan con el concepto de estimación de medida utilizando referencia (R), percepción (P) y valoración (V). A continuación presentamos algunos ejemplos de evidencia.

M106P07B: *“Comparar las dimensiones de las cerámicas con las del cuadrado e imaginarse cuántas cerámicas están contenidas en el cuadro”* [la entrevistada realiza un bosquejo de la pintura con una división de nueve cuadrados]

Este maestro indica que los estudiantes podrían realizar la tarea por medio de la percepción (P) al indicar *“e imaginarse cuántas cerámicas están contenidas en el cuadro”*. Al mismo tiempo, al indicar la cuantificación de las cerámicas, el referente (R), el docente se refiere a la valoración (V).

M085P07B: *“Estimarían a partir de la altura del torso de la mujer - Algunos simplemente dirían: "al ojo mide un metro y de alto 80 cm" y a partir de las medidas calcularían el área”*

Observamos que este maestro indica que el referente (R) a utilizar por los estudiantes es la mujer sentada al lado de la pintura. Por otra parte, explica que los estudiantes logaran la valoración (V) por medio de la percepción (P) al indicar que los estudiantes *“dirían: “al ojo (...)”*.

7.1.1.2.2 Uso de referentes

Un grupo de docentes, sólo se refirió al uso de referentes por parte de los estudiantes. Debemos indicar que, de acuerdo al contexto, esta categoría se diferencia de la categoría del uso de la medida, explicada en el apartado 7.1.1.1.2, dado que los referentes emergen de la situación planteada, en cambio, las unidades de medidas pueden ser utilizadas en cualquier situación. Entre las respuestas se distinguen sólo dos referentes, el cuerpo de la mujer sentada y las baldosas del suelo, referentes intencionados al crear las preguntas. A continuación se presentan algunos ejemplos de evidencia.

M030P07B: *“Pensarían en la altura de la mujer”*

M007P07B: *“Intentarían relacionar la cantidad de baldosas o la altura de la mujer, etc.”*

7.1.1.2.3 Uso de percepción

Algunos docentes expresaron que los estudiantes realizan estimaciones indicando sólo el uso de la percepción. A continuación presentamos algunos ejemplos de evidencia.

M079P08: *“Sí, debido a que el estudiante debe señalar al "ojo" cuántos elementos hay y luego comprobar aplicando el conteo”*

Este docente explica, en su respuesta a la pregunta 8, que los estudiantes deben interactuar por medio de la visualización al indicar *“al ojo”*

M098P08: *“Es una actividad de estimación, porque los alumnos comienzan diciendo una cantidad aproximada al observar visualmente”*

En esta respuesta observamos que el docente explica que al principio de la actividad, ellos observan visualmente la tarea para lograr realizar la estimación.

Las categorías que se presentan a continuación corresponden a aquellas interacciones que se relacionan con las características de la estimación de medida.

7.1.1.3 Trabajo similar al trabajo del docente

Como mencionamos en el Capítulo 4, la pregunta 7 está dividida en tres partes, le preguntamos a los docentes cómo realizarían la estimación de medida (7A), cómo la realizarían los estudiantes (7B) y qué dificultades podrían surgir, por parte de los estudiantes, al realizarla (7C). Un grupo de docentes, indicó en la pregunta 7B que los estudiantes la realizarían igual que ellos. A continuación presentamos algunas respuestas.

M059P7B: *“la misma estrategia que yo”*

M019P7B: *“quizás algo similar a mi propuesta”*

7.1.1.4 Resultados Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático

A continuación presentamos una tabla resumen de las distintas categorías de las formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático y la cantidad de veces referenciadas por los maestros.

Categorías	Sub categorías	f
Medición	Medición con unidades no estandarizadas	42
	Uso de unidad de medida	28
	Conteo	27
Estimación de medida	Estimación de medida	11
	Referentes	12
	Percepción	8
	Trabajo similar al docente	7

Tabla 7.1.1 Categorías, subcategorías y referencias de las formas de interacción de los estudiantes según los maestros.

En la tabla 7.1.1 podemos observar que las formas de interacción de los estudiantes más comunes para los docentes corresponden a la medición o al conteo, sólo unas pocas respuestas se enfocan en las componentes de estimación. Por otro lado, hay siete docentes que esperan que sus estudiantes realicen las mismas estrategias que realizan ellos.

Resumen de hechos relativos a las Formas de interacción por el contenido

Hecho 14: Para la mayoría de los maestros, los estudiantes interactúan con la estimación de medida por medio de la medición de unidades no estandarizadas o al conteo.

Hecho 15: De los 112 docentes, 31 de ellos consideran los referentes (R) o la percepción (P) en la interacción de los estudiantes con el contenido.

7.1.2 Dificultades y fortalezas asociadas al aprendizaje

Como se puede apreciar en nuestro instrumento de toma de datos, explicitado en el Capítulo 4, la pregunta 7C solicitaba directamente a los profesores qué dificultades podrían tener los estudiantes al realizar una tarea, específica, de estimación de medida. No se encontraron evidencias de fortalezas entre las respuestas de los participantes. En este apartado, mostraremos evidencias de dificultades asociadas al aprendizaje de la estimación de la medida según los 112 maestros encuestados.

Las dificultades se han dividido en tres grupos: dificultades de la medida, dificultades de la estimación de medida y dificultades matemáticas en general.

7.1.2.1 Dificultades asociadas al conocimiento de la medida

En esta categoría se agrupan tres dificultades mencionadas por los docentes: dificultades para medir la utilizando unidades no estandarizadas, dificultades en la comprensión de las unidades de medida y dificultades en la comprensión en el área de la superficie. A continuación explicamos cada una de ellas con sus respectivos ejemplos de evidencia.

7.1.2.1.1 Dificultades en la aplicación de la medición con unidades no estandarizadas

Un grupo de maestros consideró que los estudiantes se complican al realizar mediciones, ya sea al iterar o al cuantificar. A continuación presentamos algunas evidencias de esta categoría.

M087P7C: *“La dificultad sería que se moviera el material o se olvidaran cuántas veces ha sobrepuesto el cuaderno (memoria a corto plazo)”*

Podemos observar que en este caso el docente indica que una dificultad sería la iteración, dado que se puede mover la magnitud (el óleo cuya área debe estimarse) o bien tendrán problemas en la cuantificación, porque los estudiantes pueden olvidar la cantidad de veces que han sobrepuesto la unidad de medida no estandarizada, el cuaderno en este caso, sobre el cuaderno.

M099P7C: *“No saber medir y/o utilizar los instrumentos de medición”*

Este docente explica directamente que la dificultad está en el conocimiento de la medición y el uso de instrumentos.

7.1.2.1.2 Dificultades en la comprensión de las unidades de medida

Una de las dificultades más mencionadas fue el uso de las unidades de medida, tanto en la transformación de unidades, como en el concepto de unidad de medida y el Sistema Métrico Decimal. A continuación se muestran algunos ejemplos de evidencia de esta categoría.

M078P7C: *“No utilizar cuadrados de la misma medida”*

Análisis del conocimiento didáctico del contenido (PCK)

Observamos que en este caso, para el docente la dificultad en el aprendizaje de la estimación de la medida está en la comprensión del concepto de unidad de medida.

M001P7C: *“El concepto de metros y centímetros”*

Esta respuesta es similar a la anterior, pero se diferencia de ella en el tipo de unidad a considerar. Este docente plantea que la dificultad está en el concepto de las unidades estandarizadas.

M080P7C: *“Sí les cuesta mucho las equivalencias entre unidades de medida de longitud, tiempo, volumen, masa, etc.”*

En este caso, el docente indica que para sus estudiantes es difícil trabajar con las equivalencias entre las distintas unidades de medida.

7.1.2.1.3 Dificultades en la comprensión del área de superficie

Esta categoría fue una de las más mencionadas por los maestros, todas las respuestas apuntan a lo mismo, la dificultad para comprender el concepto de área. A continuación mostramos algunas respuestas de esta categoría.

M100P7C: *“Tendrían que tener muy claro el concepto de área, lo cual es difícil de que se logre”.*

M008P7C: *“puede ser el no recordar cómo se calcula el área”*

7.1.2.2 Dificultades asociadas al trabajo y la caracterización de la estimación de medida

En esta categoría se agrupan las dificultades asociadas a trabajo de la estimación, como el uso o no uso de referentes y otras a su enseñanza, como por ejemplo la idea de que el valor exacto es una respuesta idónea y la complejidad de la tarea.

7.1.2.2.1 Uso de referencia

En esta categoría se agrupan los profesores que indicaron dificultades en encontrar la referencia para realizar la estimación de medida o bien en comprender que la estrategia utilizada, en este caso, consiste en identificar referentes. A continuación presentamos algunas evidencias de esta dificultad mencionada por los docentes.

M035P7C: *“Es poder coger una referencia por ejemplo la medida de la señora”*

En esta respuesta podemos observar que el docente explica que para los estudiantes es difícil encontrar una referencia en la situación, por ejemplo la altura de la mujer.

M038P7C: *“La dificultad sería que no entregan medidas concretas”*

Este docente explica que el problema está en que no hay medidas concretas, por lo tanto es difícil para los estudiantes realizar la tarea. Esta situación la interpretamos como una dificultad para trabajar con referentes.

7.1.2.2.2 Uso del valor exacto

La dificultad con mayor frecuencia entre los docentes fue el trabajo con el valor exacto. Para los docentes, la costumbre y la necesidad de trabajar con valores exactos es un obstáculo para que los estudiantes trabajen la estimación de la medida.

M012P7C: *“Les costaría pensar que pueden usar cualquier objeto pues para ellos la exactitud y el tener lo mismo que sus compañeros es muy importante”*

En esta respuesta podemos observar que el docente considera que para los estudiantes es importante encontrar un valor exacto que además coincida con el de sus compañeros, situación que no ocurre en la estimación de medida, dado que en sus características están el trabajo personal e individual y la multiplicidad de respuestas.

M031P7C: *“Que los alumnos al preguntarles la medida ellos quieren tener una medida a través de reglas no ven otra forma”*

En esta respuesta podemos observar que para el docente, los estudiantes requieren una medida obtenida por medio de instrumentos de medida y no consideran otras opciones de encontrarla. Podemos interpretar que otra forma no les entregaría el valor exacto al que están acostumbrados.

7.1.2.2.3 Complejidad de la tarea

Comprendemos que cualquier contenido matemático puede ser complejo, sin embargo, el trabajo con la estimación de medida es complejo porque necesita trabajar con elementos abstractos. A continuación mostramos algunas evidencias de esta categoría.

M046P7C: *“Pensar de manera más abstracta lo que deberían realizar, teniendo mayor dificultad en imaginar a llevar a lo concreto con mayores magnitudes”*

En esta respuesta podemos observar que el docente considera que el pensamiento abstracto necesario para realizar la estimación de medida es complejo, dado que es necesario *“imaginar”* el trabajo concreto.

M011P7C: *“Por el nivel de complejidad, no sabrían”*

Este docente explica que la estimación de medida es una tarea compleja, por ello los estudiantes no sabrían abordarla.

7.1.2.2.4 Falta de práctica

Los docentes consideran que la estimación de la medida ha tenido poco espacio en la cobertura curricular, por ende, los estudiantes no poseen estrategias para trabajar con ella. A continuación, presentamos algunos ejemplos de tareas.

M015P7C: *“la poca familiaridad que tienen con estimar medidas”*

M019P7C: “*Suena insólito, pero creo que la falta de cercanía con la estimación los entraparía*”

Observamos que para ambos docente la dificultad del trabajo de los estudiantes radica en la poca cercanía con las tareas de estimación de medida.

7.1.2.3 Resultados dificultades asociadas al aprendizaje de la estimación de medida

Categorías	Sub categorías	f
Medición	Aplicación de medición con unidades no estandarizadas	7
	Comprensión de las unidades de medida	17
	Comprensión del área de superficie	18
Estimación de medida	Uso de referentes	18
	Valor exacto	23
	Complejidad de la tarea	6
	Falta de práctica	14

Tabla 7.1.2.3 Categorías, subcategorías y referencias de las dificultades asociadas al aprendizaje de la estimación de medida

Observamos que a pesar de que las formas de interacción de la estimación de la medida corresponden a la interacción de la medida, las dificultades asociadas a esta interacción corresponden a la estimación de medida o sus características.

Resumen de hechos relativos a las dificultades asociadas al aprendizaje de la estimación de medida

Hecho 16: Las dificultades asociadas al aprendizaje de la estimación medida, corresponden a sus componentes, como los referentes o características el uso de referentes, el abuso del valor exacto y la falta de práctica, por otro lado, 31 de los 112 docentes consideran la búsqueda de referentes (R) o el trabajo perceptivo (P) dificultan la interacción de los estudiantes con el contenido.

Hecho 17: Para los docentes las dificultades del aprendizaje de la medición, como la comprensión de unidades de medida o el área de superficies, son dificultades asociadas a la estimación de medida

7.2 El Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT)

El KMT que, en esta tesis, tiene foco en la enseñanza de la estimación de medida se evidenció por medio de las categorías de Teorías de Enseñanza y Materiales y recursos en las respuestas de las preguntas 8, 9, 10 y 11. No encontramos evidencias para las categorías de materiales, tareas y ayudas. A continuación detallamos las distintas categorías que emergen de las respuestas de los docentes.

7.2.1 Teorías de enseñanza

Las teorías de enseñanza de los maestros pueden clasificarse en dos grupos: las vinculadas a la estimación de la medida y las vinculadas a la medición. A continuación detallaremos cada una de ellas.

7.2.1.1 Teorías vinculadas a la estimación de medida

En este grupo nos encontramos con maestros que desarrollan alguna componente o característica de la estimación de medida al tratar las actividades planteadas en el instrumento de toma de datos. A continuación detallamos cada una de ellas.

7.2.1.1.1 Estimación de medida

Un grupo de docentes consideró las tres componentes vinculadas a la estimación de medida para presentar las actividades de estimación de medida a sus estudiantes. A continuación presentamos algunos ejemplos de evidencia de esta categoría.

M085P10: *“Niños y niñas en la pizarra pueden observar un cuadrado rojo y un rectángulo azul. Sin ponerse de pie, como ustedes quieran, desde su puesto, estimen cuántas veces cabe el cuadrado rojo en el rectángulo azul, colocando los cuadrados uno al lado del otro”*

De esta forma observamos la intención del docente para conseguir una valoración (V) es sustentada por un trabajo perceptivo (P), ya que el maestro no permite interacción física entre los estudiantes y las representaciones de las figuras involucradas en la actividad, dado que están en la pizarra y ellos no pueden acceder a ella, los estudiantes están obligados a realizar un ejercicio perceptivo por medio de la visualización.

M036P09: *“Colocaría una cierta cantidad de bolitas dentro de una bolsa, que ellos supieran cuántas hay y posteriormente mostraría diferentes bolsitas de la misma forma pero con menos cantidades”*

En esta respuesta, el docente cambia la actividad. En primer lugar utiliza un referente táctil (R) para tener una noción de la cantidad, posteriormente utilizando la misma estrategia para el uso de la percepción (P), se solicita la valoración (V) de la cantidad por medio de la estimación.

7.2.1.1.3 Numerosity

En el Capítulo 2, apartado 2.1.2.2 explicamos que *numerosity* desarrolla, según Hogan y Brezinski (2003), las mismas habilidades que la estimación de medida. Algunos docentes, indicaron que la actividad se podía trabajar mediante este tipo de estimación. A continuación se presenta un ejemplo de respuesta.

M033P09: *“Juntaría los cubos y los taparía con un papel y les diría a los niños que rápidamente observen los cubos y estimen cuántos creen que hay”*

En esta pregunta podemos observar que cuando el docente indica que deben trabajar “rápidamente” es decir, por un tiempo determinado, los estudiantes estiman la cantidad trabajando *numerosity*.

7.2.1.1.4 Uso de referentes

Esta categoría agrupa a los maestros que consideran necesario trabajar la creación de referentes antes de trabajar la estimación de medida. A continuación observaremos algunos ejemplos.

M102P09: *“Les presentaría una cantidad pequeña y luego aumentaría; les diría que se compararan y finalmente que estimen cuántos hay”*

En este ejemplo podemos observar que el docente prepara la estimación por medio de la referencia: *“Les presentaría una cantidad pequeña y luego aumentaría”*. Frente a esto, el estudiante tiene un referente para poder desarrollar la actividad.

M015P09: *“Utilizaría algún referente, por ejemplo ver el espacio que utilizan 5 cubos con una hoja cortada y estimar cuántas veces cabe esa hoja en el dibujo”*

En esta respuesta, podemos observar que este docente también haría un trabajo previo a la estimación de medida, crearía un referente con una pequeña cantidad de cubos para visualizar el espacio ocupado.

7.2.1.1.4 Impedimento del conteo

En esta categoría se agrupan los docentes que consideran que la distribución de los cubos favorece el conteo, por ende, ellos realizarían cambios para evitarlo y de esa forma desarrollar la actividad con los estudiantes. A continuación presentamos algunos ejemplos

M076P09: *“Con alumnos de primero que llevaría a cabo esta actividad les pediría los cubos más desordenados para que no los cuenten”*

Observamos que este docente realizaría cambios en la actividad, dado que considera que los cubos favorecen el uso del conteo, él o ella los desordenaría.

7.2.1.1.5 Valoración

En esta categoría se agrupa un grupo considerable de maestros. Ellos presentarían las actividades de estimación de medida con el fin que los estudiantes entreguen un valor, soslayando la percepción o la referencia. A continuación presentamos algunas evidencias de esta categoría.

M033P10: *“Primero les mostraría este rectángulo y luego a cada niño le entregaría un papel lustre y les pediría que estimen cuántos cuadrados caben en el rectángulo”*

En esta respuesta podemos observar que el foco de atención del maestro se encuentra en la cantidad de cuadrados que caben en el rectángulo (V) pero no ofrece ninguna instrucción didáctica ni otro tipo de información que permita determinar la forma en la que piensa guiar a la actividad en el aula. De esta forma no podemos encontrar aspectos perceptivos (ausencia de P) que serían los que nos permitirían establecer esta respuesta como un uso de la actividad para trabajar la estimación de medida.

M008P09: *“Por ejemplo, preguntar cuántos de estos cubos completan una caja (se muestra la caja). Se puede preguntar si sobrarán cubos o si faltarán”*

En esta respuesta podemos observar que el docente espera que sus estudiantes estimen, pero no considera relevante que se trabaje la percepción y la referencia.

7.2.1.1.6 intervalos

Algunos docentes, presentarían la actividad como una comparación de cantidades, por ejemplo “hay más o menos que”. A continuación presentamos algunos ejemplos.

M038P09: *“¿Existen más de 10 elementos?”*

M083P09: *“Realizaría preguntas tales como ¿hay más de 10? ¿5? ¿7? ¿Cuántas creen que hay?”*

En ambos ejemplos podemos observar que los docentes fijan un número, 10, 5 ó 7 para que sus estudiantes indiquen si hay más o menos que esa cantidad.

7.2.1.1.7 Falta de preparación

En la pregunta 11 dimos la libertad a los docentes para manifestar lo que consideraran pertinente. La mayoría de los profesores que “agregó algo más” sobre su conocimiento sobre el tema, se refirió a la falta de preparación que poseen al trabajar la estimación de medida. A continuación se presentan algunos ejemplos que emergen de las respuestas a las pregunta 11.

M035P11: *“Por lo general en los centros universitarios se enseña el contenido, pero no se enseña cómo enseñarlo o cómo enseñarlo a un niño de 1 básico (6*

Análisis del conocimiento didáctico del contenido (PCK)

años) o de 7 básico (12 años). No hay buena preparación en didáctica de los contenidos”

M015P11: “Personalmente, creo que es algo de lo que no se nos prepara en nuestra formación y que tampoco se considera en la enseñanza escolar”

M111P11: “Creo que la estimación muchas veces se mal entiende de parte de los profesores y de los planes curriculares, la razón es que desde la base de formación docente se siente o hay un vacío de contenidos”

Podemos observar en todas las respuestas que los docentes consideran que no poseen estrategias de enseñanza para trabajar la estimación de medida con sus estudiantes, a raíz de su formación universitaria.

7.2.1.2 Teorías vinculadas a la medida

Este grupo de respuestas se caracteriza porque los docentes tratarían las actividades de estimación de medida como medida, o bien, comprobarían la estimación por medio de una medición. A continuación presentamos algunos ejemplos de respuesta

7.2.1.2.1 Medición o conteo

Las respuestas de esta categoría corresponden a maestros que tratarían las actividades como medición con unidades no estandarizadas, en este caso, el cuadrado que se incluye en la actividad de la pregunta 10 o como conteo, en la actividad de la pregunta 9. A continuación presentamos algunos ejemplos.

M022P10: “Necesitamos saber cuántos cuadrados necesitamos para cubrir el rectángulo. Construimos el rectángulo y con cuadrados iguales a este, cubrimos el rectángulo”

Podemos observar que el docente indica que la superficie se cubra con el cuadrado, es decir se realice un conteo directo con el cuadrado construido sobre el rectángulo, de esta forma el referente se transforma en una unidad de medida no estandarizada. En este caso los alumnos llegarán a una valoración (V) que no estará sustentada en un acto perceptivo (Ausencia de P) sino en una medición.

M037P09: “indicaría que los agruparán en grupos de 2 o de 6 y vieran cuántos grupos salen y calculan mentalmente el resultado”

Podemos observar que este docente pide a sus estudiantes que agrupen la cantidad de cubos de la pregunta seis y que posteriormente calculen mentalmente el resultado. Podemos interpretar, que este trabajo mental no es una percepción sino una multiplicación, por ende el docente está pidiendo una estrategia de conteo.

7.2.1.2.2 Comprobación

Algunos docentes mencionaron que en sus estrategias de enseñanza de la estimación de medida, cerrarían la actividad verificando, por medio de la medición el trabajo estimativo. A continuación presentamos algunos ejemplos de evidencia.

M077P09: *“Luego tacharía los cubos al ir contando para corroborar que lo que estimaron era lo correcto”*

M074P10: *“Luego recubren las imagen y de esa manera verifican si su estimación están correcta”*

En ambas respuestas podemos observar que los maestros comprueban las tareas de estimación con sus estudiantes. Frente a ello, la estimación deja de ser una actividad por sí sola.

7.2.1.3 Resultados de las Teorías de Enseñanza

Categorías	Sub categorías	f
Estimación de medida	Estimación de medida	23
	Numerosity	7
	Uso de referentes	33
	Impedimento del conteo	11
	Valoración	39
	Intervalos	9
	Falta de preparación	27
Medición	Medición o conteo	30
	Comprobación	30

Tabla 7.2.1 Categorías, subcategorías y referencias de las teorías de enseñanza

Podemos observar que hay maestros que tratarían las actividades planteadas en el cuestionario como estimación, como medición o como respuesta aleatoria. En cuando a la estimación, algunos docentes se posicionaron antes del trabajo requerido, ya sea buscando referentes o indicando que es necesario modificar la actividad. Por otro lado, un grupo considerable de docentes manifestó la necesidad de formación en el contenido.

Resumen de hechos relativos a las Teorías de Enseñanza de la estimación de medida

Hecho 18: Los docentes presentan las actividades de estimación de medida a sus estudiantes como estimación de medida, medición con unidades no estandarizadas o como respuestas aleatorias.

Hecho 19: Para algunos docentes la creación de referentes es indispensable antes de realizar una estimación de medida.

Hecho 20: La comprobación de la estimación de medida por medio de la medida es necesaria para algunos maestros.

Hecho 21: Algunos maestros consideran que requieren preparación para el tratar la estimación de medida.

7.2.2 Recursos materiales y virtuales

Encontramos evidencias de esta categoría del KMT en las respuestas de los docentes. Sus respuestas se pueden agrupar en material manipulable y en material no manipulable. A continuación presentamos algunos ejemplos de evidencia.

7.2.2.1 Material Manipulable

Algunos docentes consideran que es necesario que los estudiantes manipulen las cantidades con el fin de crear referencia y sentido numérico, o bien para utilizarlo como unidad de medida. A continuación presentamos algunos ejemplos de evidencia de esta categoría.

M031P10: *“Con una hoja de block y papeles lustres⁷ los pediría estimar la medida de la hoja”*

En esta respuesta observamos que el docente trabajará la actividad con material manipulable, simulando las figuras presentadas en la actividad. Es posible que con este material, se promueva la iteración del cuadro sobre el rectángulo.

M081P09: *“Trabajar con material concreto manipulando y haciendo agrupaciones de diferentes cantidades en diferentes formas (hileras, montones)”*

Este docente busca crear sentido numérico, y por ende referencia, al hacer agrupaciones de cantidades diferentes.

7.2.2.2 Material No Manipulable

Algunos docentes, con el fin que los estudiantes no cuenten, explicaron que utilizarían las imágenes de las actividades en forma impresa o como una presentación en *Power Point*. A continuación presentamos algunos ejemplos de respuesta.

M112P10: *“Les entregaría el material en forma individual, tal como se presenta, sin contar, impreso”.*

Observamos que este docente, en la pregunta 10, entregaría el material impreso, impidiendo de este modo que los estudiantes realicen una iteración del cuadrado pequeño sobre el rectángulo.

M056P09: *“Con imágenes mediante TIC, ya que no tendrían oportunidad de contarlos”*

Posiblemente, este docente al decir “imágenes mediante TIC” se refiere a la imagen de la pregunta 9 proyectada sobre la pizarra, de este modo, podría impedir el conteo por

⁷ Es el equivalente al papel charol de España. En Chile se vende en cuadrados de un decímetro de área de superficie, como material escolar.

Análisis del conocimiento didáctico del contenido (PCK)

medio de la manipulación, pero puede ser posible un conteo visual, dependiendo del tiempo de exposición de la imagen.

M067P10: *“Esta actividad la presentaría mostrando el cuadrado y pegarlo en la pizarra para que vean el espacio que ocupa y, luego pego el rectángulo bajo el cuadrado una vez que ellos ya estimaron la cantidad de cuadrados que caben en el rectángulo”*

Este docente utiliza las dos imágenes de la pregunta 10 recortadas, pero sin dar espacio a la manipulación, dado que deja las imágenes pegadas en la pizarra.

7.2.2.3 Resultados recursos materiales y virtuales

Categorías	f
Recursos manipulables	59
Recursos no manipulables	12

Tabla 7.2.2 Categorías, subcategorías y referencias de los recursos materiales y virtuales

Podemos observar que en 71 ocasiones se mencionó el uso de la referencia para trabajar la estimación de medida. El recurso manipulable se realiza con fines de referencia, sentido numérico o unidad de medida y el no manipulable con un fin estratégico: impedir el conteo.

Resumen de hechos relativos a los Recursos y Materiales virtuales utilizados en la enseñanza de la Educación de Medida

Hecho 22: Algunos docentes consideran que el material concreto es necesario para crear referentes o sentido numérico, aunque en algunos casos puede ser utilizado como unidad de medida.

Hecho 23: El uso de material no manipulable impide el uso del conteo

Nota: Sobre el KoT sólo encontrados dos evidencias, dos docentes que indicaron que estimar medidas no era una adivinanza.

Capítulo 8. Análisis relacional



Análisis relacional

En este capítulo presentaremos la tercera parte del análisis, aquel que involucra la relación entre las preguntas del instrumento vinculadas a los distintos Objetivos Específicos.

En una primera instancia quisimos hacer una síntesis de acuerdo a la coherencia de las respuestas de los maestros, tanto en la estimación de medida como en la medición con instrumentos no convencionales, dado que esta última categoría es la más frecuente en casi todas las respuestas del grupo de preguntas (de la 1 a la 7) vinculadas al primer objetivo específico “Caracterizar el conocimiento de la estimación de medida discreta y continua que poseen los profesores de primaria: definición, estrategias y representación de la estimación de medida”.

Posteriormente quisimos evaluar la coherencia de cada maestro según su tarea realizada en cada una de las preguntas, con el fin de indagar en qué medida utilizaban la estimación de medida o la medición con unidades no convencionales al momento de estimar una medida.

Este análisis consistió en asignar unos y ceros a las distintas categorías. Por ejemplo, en el primer análisis quisimos indagar en la coherencia de los maestros según las respuestas de estimación de medida, a cada respuesta categorizada como estimación de medida, se le asignó un “1”, a las restantes “0”. Posteriormente, sumamos las valoraciones de las respuestas analizadas para poder observar cuántos maestros tienen consistencia en su trabajo de estimación. A continuación se presentan cada uno de los cruces de respuestas.

8.1 Cruce Objetivo Específico 1.

Para buscar la coherencia sobre el conocimiento del tema, a todas las respuestas que involucraron los tres componentes de la estimación de medida citados en el apartado 5.2.1, la referencia (R), la percepción (P) y valoración (V), les asignamos un número uno y a las restantes les asignamos un cero. En una segunda instancia, buscamos la coherencia de las respuestas vinculadas a la medición con unidades no estandarizadas, realizando el mismo procesamiento.

8.1.1 Cruce de datos en estimación de medida.

Este cruce de datos busca indagar la coherencia de los docentes en sus respuestas sobre estimación de medida. En la pregunta 6, donde los maestros definen estimación de medida, hemos incluido no sólo aquellas respuestas que incluyen los tres componentes: referencia (R), percepción (P) y Valoración (V), sino también aquellas que involucran por lo menos dos de las tres componentes, considerando que los docentes que sólo mencionaron explícitamente dos de ellas, es posible que estén cercanos a la definición que hemos reconstruido.

La siguiente tabla presenta los resultados obtenidos.

	Cantidad de respuestas de estimación de medida					
	5	4	3	2	1	0
Cantidad de maestros	0 (0%)	4 (0,1%)	8 (4,5%)	24(17,6%)	63 (58,9%)	13(17,6%)

Tabla 8.1.1 Cruce de datos en estimación de medida.

Podemos observar que 99 de los 112 maestros, utilizaron la percepción (P), la referencia (R) y la valoración (V) en al menos una de las respuestas a las siete preguntas analizadas, debemos considerar que la mayoría de ellos lo hizo sólo en una ocasión y que ningún profesor se refirió a los tres componentes en las siete preguntas analizadas, como tampoco en seis o cinco de ellas.

De este cruce, quisimos observar cómo se comportaron las preguntas vinculadas a la aplicación de la estimación de medida. Como se puede observar en las preguntas 1, 2 y 7, no hay la misma cantidad de maestros aplicando el concepto de estimación en las tres tareas, para ello hicimos un cruce sólo de estas tres preguntas. La siguiente tabla resume la información obtenida.

	Cantidad de respuestas de aplicación de la estimación de medida			
	3	2	1	0
Cantidad de maestros	1 (0,08%)	4 (3,5%)	39 (34,5%)	68 (60,7%)

Observamos que sólo un docente estimó, de acuerdo al uso de componentes, en las tres preguntas vinculadas a la aplicación de medida. Es interesante observar la Pregunta 7, a nuestro juicio, la estimación de medida más compleja de las tres, sería lógico que quienes estimaron en ella, probablemente también realizaron un trabajo de estimación de medida en la Pregunta 1 ó en la Pregunta 2, sin embargo, hubo dos profesores que sólo aplicaron el concepto en la pregunta 7.

8.1.2 Cruce de datos en medición con unidades no estandarizadas.

Este cruce de datos tiene como finalidad de comprender la coherencia de los docentes que consideran que la estimación de medida es una medición con unidades no

Análisis relacional

estandarizadas. La pregunta 3 no posee variable “Medición”, por ello se consideró la variable “cálculo”.

	Cantidad de respuestas de medición con unidades no estandarizadas						
	6	5	4	3	2	1	0
Cantidad de maestros	1 (0%)	2 (1,8%)	13 (11,6%)	35 (31,3%)	28 (25%)	25 (22,3%)	8 (8,9%)

8.1.2 Cruce de datos en medición con unidades no estandarizadas.

En la tabla 1 observa que 104 de los 112 maestros, en a lo menos una de las siete preguntas recurrieron a la medición con unidades no estandarizadas para realizar una tarea de estimación de medidas, y al igual que en el cruce anterior, ninguno de ellos utilizó la medición con unidades no estandarizadas en las siete preguntas.

Resumen de hechos relativos al cruce de datos

Hecho 24: De los 112 maestros 99 utilizaron la percepción (P), la referencia (R) y la valoración (V) en al menos una de las respuestas a las siete preguntas analizadas. La mayor coherencia corresponde a un maestro que en cuatro de las siete preguntas respondió utilizando la percepción (P), la referencia (R) y la valoración (V).

Hecho 25: De los 112 maestros, 104 de ellos recurrieron a la medición con unidades no estandarizadas en a lo menos una de las siete respuestas a las preguntas para realizar una tarea de estimación de medidas. La mayor coherencia fue del uso de la medición con unidades no estandarizadas en seis respuestas, por un docente.

8.1.3 Consistencia profesor a profesor

Quisimos indagar en la consistencia que tenían consigo mismos los docentes. Para ello, filtramos a todos los docentes que en la pregunta 6 utilizaron dos o tres componentes de la estimación de medida, y observamos qué tarea utilizaban al aplicar la estimación de medida. En el siguiente filtro de Excel, construido gracias a las matrices de Nvivo relacionamos los datos.

B	C	D	E	F	G
	P1	P2	P3	P4	P7
21 : Encuestado 16	MUNE	MUNE	CO	VP	0
23 : Encuestado 18	MUNE	MUNE	0	VP	MUNE
28 : Encuestado 22	MUNE	MUNE	CO	EM	MUNE
29 : Encuestado 23	MUNE	MUNE	0	EM	0
30 : Encuestado 24	MUNE	MUNE	EMP	EM	0
35 : Encuestado 29	0	MUNE	EMSRE	VP	0
37 : Encuestado 30	EMRA	MUNE	CO	VP	0
39 : Encuestado 32	MUNE	MUNE	EMSRE	VP	0
44 : Encuestado 37	MUNE	MUNE	CO	EM	0
46 : Encuestado 39	MUNE	EMI	EMSRE	EM	0
48 : Encuestado 40	0	MUNE	EMP	VR	0
50 : Encuestado 42	EMRP	MUNE	0	VR	MUNE
54 : Encuestado 46	EMRA	0	EMSRE	VP	EMI
57 : Encuestado 49	EMRA	MUNE	EM	VP	EMI
58 : Encuestado 5	MUNE	MUNE	0	VP	0
67 : Encuestado 58	MUNE	MUNE	EMSRE	VP	MUNE
69 : Encuestado 6	MUNE	MUNE	0	VP	0
75 : Encuestado 65	MUNE	MUNE	EMP	VR	0
76 : Encuestado 66	MUNE	MUNE	EM	VR	0
77 : Encuestado 67	EMRA	0	EMSRE	VR	MUNE
78 : Encuestado 68	EMRA	MUNE	EMSRE	VR	0
79 : Encuestado 69	MUNE	0	EM	VP	0
80 : Encuestado 7	EMRA	MUNE	EMP	VP	0
86 : Encuestado 75	EMRA	MUNE	0	VR	0
90 : Encuestado 79	MUNE	0	CO	VP	MUNE
92 : Encuestado 80	MUNE	MUNE	0	EM	MUNE
96 : Encuestado 84	MUNE	MUNE	0	VP	MUNE
99 : Encuestado 87	EMRA	MUNE	0	EM	0
106 : Encuestado 93	EMRP	0	EMSRE	VR	0
108 : Encuestado 95	EMRP	0	0	VR	0
109 : Encuestado 96	EMRP	MUNE	0	VR	MUNE
111 : Encuestado 98	EMRP	0	EMSRE	VP	0

Imagen 8.1b A Filtro aplicado a la Pregunta 6

Las siglas de cada celda corresponden a las siguientes tareas: MUNE: medición con unidades no estandarizadas; EML estimación de medida, EMSRE: estimación de medica sin referente explícito; EMI: estimación de medida indirecta; EMRA: estimación de medida con referentes auxiliares; EMRP: estimación de medida con referentes propios; CA: cálculo de área; CO: cálculo de operaciones; VR: valorar con referentes; VP: valorar con percepción.

Análisis relacional

Podemos observar que los docentes que utilizan a lo menos dos componentes de la estimación de medida indicadas en el apartado 5.2.1, al aplicar el concepto, mayoritariamente, miden utilizando unidades no estandarizadas. Sin embargo, al momento de ejemplificar el concepto, en la pregunta 3, la mitad de los docentes elabora ítems que involucran la estimación de medida.

De igual forma, quisimos realizar el cruce de la Pregunta 6 con las respuestas de estimación en las teorías de enseñanza propuestas por los docentes. Realizamos el mismo procedimiento y los resultados son los siguientes.

A	B	C
	TE	
21 : Encuestado 16	VP	EM
23 : Encuestado 18	VP	EM
28 : Encuestado 22	EM	0
29 : Encuestado 23	EM	EM
30 : Encuestado 24	EM	0
35 : Encuestado 29	VP	0
37 : Encuestado 30	VP	0
39 : Encuestado 32	VP	0
44 : Encuestado 37	EM	0
46 : Encuestado 39	EM	EM
48 : Encuestado 40	VR	0
50 : Encuestado 42	VR	0
54 : Encuestado 46	VP	0
57 : Encuestado 49	VP	0
58 : Encuestado 5	VP	0
67 : Encuestado 58	VP	0
69 : Encuestado 6	VP	0
75 : Encuestado 65	VR	0
76 : Encuestado 66	VR	EM
77 : Encuestado 67	VR	EM
78 : Encuestado 68	VR	0
79 : Encuestado 69	VP	0
80 : Encuestado 7	VP	0
86 : Encuestado 75	VR	0
90 : Encuestado 79	VP	0
92 : Encuestado 80	EM	0
96 : Encuestado 84	VP	0
99 : Encuestado 87	EM	0
106 : Encuestado 93	VR	0
108 : Encuestado 95	VR	0
109 : Encuestado 96	VR	0
111 : Encuestado 98	VP	0

Imagen 8.1.4b Filtro aplicado a la Pregunta 6

Podemos observar que quienes definen estimación de medida utilizando a lo menos dos de los tres componentes descritos en el apartado 5.2.1, no los utilizan en sus teorías de enseñanza, salvo seis de ellos.

Por otro lado, considerando que la medición con unidades no estandarizadas fue la tarea más recurrente en la aplicación del concepto de estimación de medida, realizamos un

filtro en las respuestas que desarrollaron esta tarea en las preguntas 1, 3 y 7, aquellas vinculadas a la aplicación del concepto.

A	B	C	D	E	F
	P1	P2	P3	P6	P7
1 : Encuestado 1	MUNE	MUNE	0	0	MUNE
6 : Encuestado 103	MUNE	MUNE	EMSRE	0	MUNE
8 : Encuestado 105	MUNE	MUNE	EMSRE	0	MUNE
13 : Encuestado 11	MUNE	MUNE	0	0	MUNE
17 : Encuestado 12	MUNE	MUNE	EM	MUNE	MUNE
23 : Encuestado 18	MUNE	MUNE	0	VP	MUNE
24 : Encuestado 19	MUNE	MUNE	EMSRE	0	MUNE
25 : Encuestado 2	MUNE	MUNE	EMP	0	MUNE
28 : Encuestado 22	MUNE	MUNE	CO	EM	MUNE
36 : Encuestado 3	MUNE	MUNE	EMSRE	0	MUNE
38 : Encuestado 31	MUNE	MUNE	EMSRE	0	MUNE
47 : Encuestado 4	MUNE	MUNE	EMP	0	MUNE
53 : Encuestado 45	MUNE	MUNE	0	0	MUNE
55 : Encuestado 47	MUNE	MUNE	EMSRE	0	MUNE
67 : Encuestado 58	MUNE	MUNE	EMSRE	VP	MUNE
70 : Encuestado 60	MUNE	MUNE	CA	0	MUNE
81 : Encuestado 70	MUNE	MUNE	EM	0	MUNE
85 : Encuestado 74	MUNE	MUNE	EMSRE	0	MUNE
91 : Encuestado 8	MUNE	MUNE	EMSRE	0	MUNE
92 : Encuestado 80	MUNE	MUNE	0	EM	MUNE
95 : Encuestado 83	MUNE	MUNE	0	0	MUNE
96 : Encuestado 84	MUNE	MUNE	0	VP	MUNE
97 : Encuestado 85	MUNE	MUNE	EMSRE	0	MUNE
102 : Encuestado 9	MUNE	MUNE	EMP	0	MUNE

Imagen 8.1.4c Filtro aplicado a la Preguntas 1, 2 y 7

Podemos observar en el filtro anterior que sólo 24 docentes utilizaron la estimación de medida como medición con unidades no estandarizadas en las tres preguntas que involucraban un proceso de estimación de medida por parte de los maestros participantes.

Resumen de hechos relativos a la consistencia profesor a profesor

Hecho 26: Los profesores que definen medida utilizando los referencia (R), percepción (P) y Valoración (V) no son quienes la utilizan en su aplicación o en sus formas de enseñanza

Hecho 27: A pesar que la medición con unidades no estandarizadas fue una de las tareas más frecuentes entre los docentes en las Preguntas 1, 2 y 7, sólo 24 de ellos la realizaron en las tres preguntas.

Capítulo 9. Resumen de resultados



Resumen de resultados

En los Capítulos 6, 7 y 8 hemos presentado distintos hechos que emergen de los resultados de las distintas preguntas. Para facilitar la lectura de los distintos hechos y a la vez, estructurar nuestras conclusiones, a continuación presentamos los 26 hechos, en base a categorías que surgen de las naturalezas de cada uno de ellos. Cabe mencionar que algunos de los hechos mencionados, puede ser parte de una o más categorías.

9.1 Hechos asociados al uso de la medición con unidades no estandarizadas como estimación de medida

A continuación presentamos los hechos que evidencian que los profesores utilizan la medición con unidades no estandarizadas como estimación de medida. Como se puede observar en la tabla del apartado 5.2.2, este tipo de medición se diferencia de la estimación de medida porque en ella el referente se itera directamente, y no indirectamente, obligando al estimador a utilizar los sentidos.

Hecho 1: Cuando se pide que los docentes realicen una estimación de medida, un 60% de los docentes confunden estimación de medida con los procesos de medición utilizando unidades no estandarizadas.

Hecho 3: Un 68% de los docentes realizaría una medición con unidades no estandarizadas al estimar áreas de superficies. Sólo un 21% de ellos utilizó unidades bidimensionales para realizar la medición.

Hecho 13: Cuando se le solicita a los docentes estimar una medida, la mayoría de ellos realiza una medición con unidades no estandarizadas.

Hecho 14: Para la mayoría de los maestros, los estudiantes interactúan con la estimación de medida por medio de la medición de unidades no estandarizadas o al conteo.

Hecho 18: Los docentes presentan las actividades de estimación de medida a sus estudiantes como estimación de medida, medición con unidades no estandarizadas o como respuestas aleatorias.

Hecho 25: De los 112 maestros, 104 de ellos recurrieron a la medición con unidades no estandarizadas en a lo menos una de las siete respuestas a las preguntas para realizar una tarea de estimación de medidas. La mayor coherencia fue del uso de la medición con unidades no estandarizadas en seis respuestas, por un docente.

Hecho 27: A pesar que la medición con unidades no estandarizadas fue una de las tareas más frecuentes entre los docentes en las Preguntas 1, 2 y 7, sólo 24 de ellos la realizaron en las tres preguntas.

9.2 Hechos asociados al uso de la estimación de medida

Este grupo de hechos se relacionan entre sí porque todos involucran el uso de la estimación de medida de acuerdo a las componentes explicadas en el apartado 5.2.1

Hecho 2: (Pregunta 1) Un 34% del total de los docentes realizaron la tarea por medio estimación de medida, de los que un 63% utiliza referentes propios para ello.

Hecho 4: (Pregunta 2) De los 112 maestros, seis realizaron un trabajo de estimación de medida, de ellos sólo uno utilizó referentes bidimensionales, el resto utilizó estimación indirecta.

Hecho 11: (Pregunta 6) De los 112 docentes que respondieron el cuestionario, siete definen estimación de medida considerando la percepción, la referencia y la valoración, nueve confundiéndola con la medición con unidades no tradicionales.

Hecho 15: De los 112 docentes, 31 de ellos consideran partícipes a los referentes (R) o la percepción (P) en la interacción de los estudiantes con el contenido

Hecho 16: Las dificultades asociadas al aprendizaje de la estimación medida, corresponden a sus componentes, como los referentes o características el uso de referentes, el abuso del valor exacto y la falta de práctica, por otro lado, 31 de los 112 docentes consideran la búsqueda de referentes (R) o el trabajo perceptivo (P) dificultan la interacción de los estudiantes con el contenido.

Hecho 17: Para los docentes las dificultades del aprendizaje de la medición, como la comprensión de unidades de medida o el área de superficies, son dificultades asociadas a la estimación de medida

Hecho 18: Los docentes presentan las actividades de estimación de medida a sus estudiantes como estimación de medida, medición con unidades no estandarizadas o como respuestas aleatorias.

Hecho 19: Para algunos docentes la creación de referentes es indispensable antes de realizar una estimación de medida.

Hecho 22: Algunos docentes consideran que el material concreto es necesario para crear referentes o sentido numérico, aunque en algunos casos puede ser utilizado como unidad de medida.

Hecho 23: El uso de material no manipulable impide el uso del conteo.

Hecho 24: De los 112 maestros 99 utilizaron la percepción (P), la referencia (R) y la valoración (V) en al menos una de las respuestas a las siete preguntas analizadas. La mayor coherencia corresponde a un maestro que en cuatro de las siete preguntas respondió utilizando la percepción (P), la referencia (R) y la valoración (V).

Hecho 26: Los profesores que definen medida utilizando los referencia (R), percepción (P) y Valoración (V) no son quienes la utilizan en su aplicación o en sus formas de enseñanza.

9.3 Hechos asociados a la estimación de medida como respuesta aleatoria

Los dos hechos que pertenecen a este grupo dan cuenta que algunos docentes no requieren ni de la percepción ni de la referencia al utilizar la estimación de medida, es decir, no es una adivinanza matemática adecuada, como mencionan Clements y Sarama (2014).

Hecho 5: (Pregunta 3) Un 61% de los maestros elaboró una pregunta que involucra estimación de medida. El 60% de ellos, 41 maestros, utilizó referentes entregados por la imagen.

Hecho 12: (Pregunta 6) De los 112 docentes, 51 definen la estimación sin considerar ni el uso de referentes ni la percepción.

Hecho 18: Los docentes presentan las actividades de estimación de medida a sus estudiantes como estimación de medida, medición con unidades no estandarizadas o como respuestas aleatorias.

9.4 Hechos asociados a la formación académica de los profesores

En esta categoría se encuentran todos aquellos hechos vinculados a la formación docente, ellos dan cuenta de la formación de los docentes y de sus reflexiones al respecto de la estimación de medida.

Hecho 7: Un 57% de los maestros dicen que no trataron la estimación de medida en su etapa escolar.

Hecho 8: Entre los 47 docentes que dicen haber visto estimación de medida en su etapa escolar, sólo 7 de ellos ejemplifican sus tareas con estimación de medida.

Hecho 9: Un 67% de los docentes indica que no trabajaron la estimación de medida en su etapa universitaria.

Hecho 10: Sólo 2 maestros de los 37 que dijeron haber trabajado la estimación de medida en su formación profesional, ejemplificaron con tareas de estimación de medida.

Hecho 21: Algunos maestros consideran que requieren preparación para el tratar la estimación de medida.

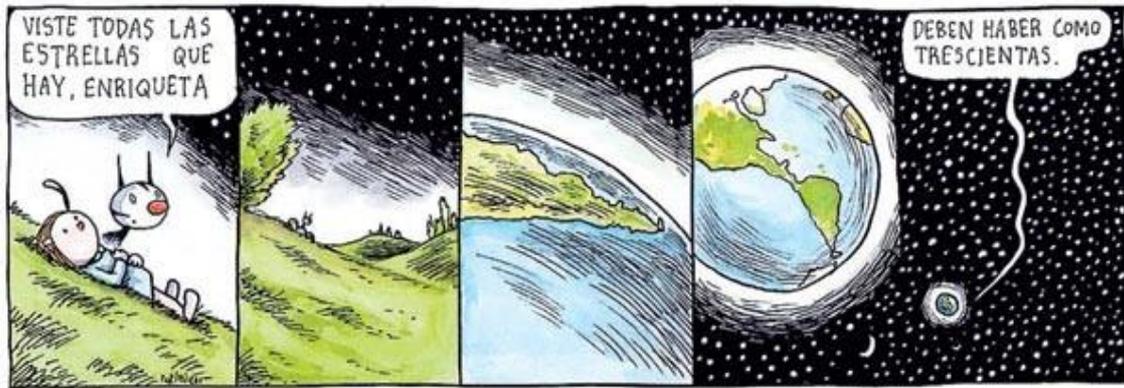
9.5 Otros hechos relevantes

Consideramos que los hechos 6 y 20, no corresponden a ninguna de las categorías anteriores; sin embargo, son pertinentes al momento de construir conclusiones.

Hecho 6: Un 28% de los maestros elabora problemas aritméticos de enunciado verbal cuando se les solicita elaborar una pregunta de estimación de medida.

Hecho 20: La comprobación de la estimación de medida por medio de la medida es necesaria para algunos maestros.

Capítulo 10. Conclusiones y reflexiones



Conclusiones y reflexiones

En el siguiente capítulo describiremos las conclusiones, sugerencias y perspectivas de nuestro estudio por medio de los siguientes apartados:

1. Conclusiones y reflexiones respecto a los objetivos de investigación
2. Sugerencias para la formación de profesorado
3. Perspectivas para investigaciones.

A continuación desarrollaremos cada uno de los puntos anteriores.

10.1 Conclusiones y conclusiones respecto a los objetivos de investigación

Para desarrollar este apartado, antes de todo, debemos recordar los objetivos planteados en el Capítulo 3 de este documento. Nuestro objetivo general de investigación es “Caracterizar el Conocimiento Didáctico del Contenido que tienen los profesores de primaria sobre estimación de medida discreta y continua”, y para su concreción se han establecido dos objetivos específicos:

1. OE1: Caracterizar el conocimiento de la estimación de medida discreta y continua que poseen los profesores de primaria: definición, estrategias y representación de la estimación de medida.
2. OE2: Caracterizar cómo los docentes usarían las actividades de estimación de medida propuestas en los programas gubernamentales.

A continuación, en base a los hechos mencionados en el Capítulo 9, presentamos las conclusiones a ambos Objetivos Específicos, y por consecuencia, al objetivo general.

10.1.1 Conclusiones OE1

Los resultados extraídos de los apartados 9.1 y 9.2 muestran diferentes aspectos sobre el conocimiento de estimación de medida de los maestros desde tres categorías diferentes, concretamente sobre cómo lo entiende, como lo usa y como lo representa. A continuación tratamos cada uno de estos puntos.

10.1.1.1 Sobre la definición

Un aspecto fundamental de nuestro estudio es el desarrollo de una definición del concepto de estimación de medida presentada en el apartado 5.2.1 e ideada para poder diferenciar procesos de medida de procesos estimativos. Esta definición incorpora tres componentes fundamentales, que emergen de los referentes teóricos descritos en el Capítulo 2 de este documento, para caracterizar la tarea en cuestión.

En concreto, el hecho 11 nos muestra que únicamente siete de los maestros indicaron explícitamente que estimar una medida requiere de las tres componentes mencionadas en el apartado 5.2.1: uso de referencia (R), trabajo perceptivo (P) y valoración (V). Estos docentes muestran un conocimiento formal adecuado del concepto, pero entendemos que al tratar de un proceso sobre el que existen pocos estudios o materiales

elaborados, los docentes no tienen por qué destacar los aspectos que hemos considerado esenciales.

En este sentido, hemos encontrado otros 25 docentes que solo mencionaron dos de las componentes planteadas, ya sea la valoración con la percepción o la valoración con la referencia. Consideramos que estos docentes pueden poseer una noción cercana del concepto de estimación de medida en línea con el conocimiento expresado en la literatura del campo de la Educación Matemática, como por ejemplo las definiciones de Bright (1976), Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), Clayton (1996), Van de Walle, Karp y Bay-Williams (2010), Clements y Sarama (2014) que se detallan en el apartado 2.1.2.1 de este documento.

Por otro lado, el hecho 12 nos indica que 51 profesores, el grupo con mayor frecuencia, definen estimación como una valoración que carece de referentes y trabajo perceptivo. Por lo tanto, podemos indicar que la componente valoración (V), es una característica común y única de la estimación de medida para muchos docentes al momento de definir el concepto.

Por consiguiente, las tareas de estimación de medida pueden ser entendida como tareas en las que se debe obtener un resultado de una medida sin un soporte concreto, con lo que las respuestas se asemejan a adivinanzas. Esta característica coincide con las conclusiones de Forrester y Pike (1988), quienes expresaron que los docentes trabajan la estimación de medida como una hipótesis predictiva, en forma vaga y superflua. Del mismo modo, Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam (2005) mencionan que cuando se invita a los maestros a proponer actividades de estimación de medida, proponen adivinanzas en vez de estimaciones de medida, ya que no consideran los procesos ni el uso de referentes que soporten las valoraciones.

Entendemos que si los docentes realizan prácticas de aula basadas en el conocimiento teórico informado, carentes del uso de las componentes de referencia (R) y percepción (P), entonces difícilmente se puede promover el desarrollo del sentido numérico por parte de los alumnos, tal y como afirman Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam (2005), así como la apropiación de las unidades de medida, como manifiestan Callís et al., (2006) durante el trabajo de estimación de medida.

10.1.1.2 Sobre la aplicación de la estimación de medida

En el apartado anterior, dimos cuenta que cuando los maestros definen una estimación de medida, prevalece la idea de valorar una magnitud, soslayando, el razonamiento matemático involucrado. En cambio, al solicitar a los maestros que expliciten los procesos a seguir para estimar medidas, podemos observar, como dan cuenta los hechos 1, 3 y 13, que los profesores consideran que realizan estimaciones de medida cuando

Conclusiones y reflexiones

realizan mediciones con unidades no estandarizadas, como por ejemplo, partes de su cuerpo o útiles escolares.

En la identificación de estas tareas ha resultado relevante el uso de la clasificación de tareas de medida descritas en el apartado 5.2.2 y que es una de las aportaciones de este trabajo. Bajo esta perspectiva entendemos que existe una gran variedad de tareas de medida que se diferencian en los procesos realizados, en la rigurosidad de la toma de datos y en el uso de referentes. Dado que la medida es una tarea indispensable en el trabajo matemático, conocer y saber distinguir estas diferentes tareas nos parece clave para poder entender los procesos de estimación y relacionarlos con otras tareas propias de la medida.

Al mismo tiempo es interesante observar que los docentes que estimaron medidas longitudinales no necesariamente estimaron áreas de superficie y viceversa, como da cuenta el hecho 27, por consiguiente podemos concluir que los conocimientos sobre los procesos de estimación de los maestros no provienen de un cuerpo de conocimientos sólido y coherente sino que se muestran parciales y relativos a cada magnitud a estimar. Si comparamos los hechos 1, 3 y 4 podemos notar que la estimación de medidas longitudinales tuvo una mayor frecuencia que la estimación de medidas bidimensionales. Esto supone que el conocimiento de los maestros sobre los procesos de estimación de medida proviene de necesidades generadas por su entorno o contexto y por ello poseen más conocimientos para aquellas más frecuentes, lo que explicaría la inconsistencia que describen los hechos 24, 25, 26, 27 y 28.

Los resultados expresados sobre el uso de los procesos de estimación de medida por parte de los maestros no han sido documentados previamente en los términos expresados en este trabajo. En concreto, Castillo (2012) y Joram (2005) consideran la medición con unidades no estandarizadas como un elemento relevante para el desarrollo de los referentes (R), pero en ningún caso se menciona como uso específico en lugar de la estimación de medida por parte del profesorado.

En la tabla 5.2.2 podemos observar que la estimación con referentes auxiliares está en el límite de la estimación y la medición, al igual que la medición con unidades no estandarizadas. La diferencia entre ambas tareas radica en el uso de la percepción (P) como parte distintiva entre ambos procesos. Consideramos que la distinción entre estos dos conceptos puede ser clave para la formación del profesorado.

Nuestros resultados muestran que incidir en la importancia de la percepción en el proceso de estimar medida puede ser de ayuda para los maestros. En concreto, entendemos que si en un proceso de valoración de una medida, se realiza una iteración directa de la unidad o referente sobre la magnitud, esa actividad es de medición con unidades no estandarizadas, dado que la percepción (P) es nula. Por el contrario, si esa

iteración es indirecta, en ese proceso se introduce la presencia de la percepción (P). Por lo tanto, afirmamos que la diferencia entre ambas tareas está en el uso de la componente percepción (P).

10.1.1.3 Sobre la ejemplificación de la estimación de medida

El hecho 5 nos indica que un 61% de los maestros participantes elabora una pregunta para trabajar estimación de medida, en respuesta a la Pregunta 3. Sin embargo, el 60% de estos maestros no mencionaron explícitamente el uso de los referentes que se encontraban presentes en la imagen dada.

A raíz de este hecho, categorizamos como ejemplos de estimación de medida las propuestas en que los referentes eran considerados en forma implícita. A partir de un proceso de reflexión sobre el análisis realizado, consideramos que posiblemente alguna de las 41 respuestas que categorizamos como estimación de medida, que se apoyan en los referentes implícitos de la imagen involucrada en la pregunta del instrumento, no considera tales referentes

De esta forma, el ejemplo presentado por el maestro solo se podría considerar una pregunta elaborada para trabajar una respuesta aleatoria de valorización de una medida. Bajo esta consideración el porcentaje de respuestas categorizadas como estimación de medida, no es tan amplio como podría parecer inicialmente.

Esta última reflexión evidencia, a nuestro juicio, una debilidad de nuestro instrumento de investigación. En una nueva versión, se debería incluir una mayor diversidad de preguntas que involucren la ejemplificación de la estimación de medida. Por ejemplo, mediante imágenes como en la Pregunta 3, referencias a objetos conocidos y usos o hábitos concretos conocidos por parte de los docentes así como imágenes que describan situaciones problemáticas.

De esta forma, observamos que los maestros no consideran el trabajo con referentes en sus propuestas de preguntas para trabajar la estimación de medida, a pesar que la importancia del uso de referentes al estimar medidas se ha documentado extensamente por diversos autores (Callís, 2002; Castillo, Segovia, Castro y Molina, 2011; Castle y Needham, 2007; Joram et al., 1998, 2005; Joram 2003).

A razón de estos referentes y de las respuestas de los docentes, consideramos que el uso de referentes permite distinguir las actividades de estimación de medida de aquellas que solicitan la respuesta aleatoria de una medida. Si la propuesta de trabajo no incluye la necesidad de una imagen mental o una unidad auxiliar, independiente que la tarea utilice o no la percepción (P), la estimación de medida no se sustenta y se transforma en un acto semejante a una adivinanza. Por lo tanto, así como en el apartado anterior concluimos que es el uso de la percepción (P) lo que diferencia la estimación de medida de la medición con unidades no estandarizadas en el proceso de estimación de medida

Conclusiones y reflexiones

explicitado por los maestros, en el caso de la propuesta de actividades encontramos dificultades con el uso de los referentes (R).

Es necesario mencionar que en la Pregunta 3 los docentes crearon diversos tipos de preguntas que contemplaban diversos contenidos, como por ejemplo, la estimación de medida del área de una superficie, de porcentajes, de unidades de tiempo, de longitud, etc. Esta diversidad da cuenta que, para los maestros, la tarea de estimación de medida es aplicable a distintos contenidos curriculares. Gracias a ello podemos afirmar que las directrices dictadas por la NCTM y el Proyecto PISA (2003) que involucran la estimación de medida al contribuir con el desarrollo del sentido espacial y el sentido numéricos, pueden ser desarrolladas en un amplio abanico de contenidos curriculares.

Por otro lado, hubo docentes que directamente crearon preguntas de cálculo de áreas o proporciones, como retrata el hecho 6, que son las habituales en los libros de texto. Considerando este aspecto, creemos que es necesario desarrollar una cultura sobre la forma de preguntar tareas de estimación de medida. Para ello consideramos indispensable un amplio conjunto de ejemplos de actividades de estimación de medida justificadas y comentadas, así como las explicaciones pertinentes de las actuaciones que cambiarían la naturaleza de las actividades para transformarlas en actividades de medida.

10.1.2 Conclusiones OE2

Como mencionamos en el Marco Teórico el desarrollo de nuestra tesis no fue un proceso lineal. En un principio consideramos el MKT (*Mathematical Knowledge for Teaching*) como marco teórico sobre el conocimiento disciplinar del profesor para estructurar nuestro estudio.

Como se puede observar en nuestro análisis, la mitad de las preguntas que conforman el instrumento de recogida de datos están enfocadas en lo que en un comienzo para nosotros era el Conocimiento Común del Contenido y el Conocimiento Especializado del Contenido, dos dimensiones del MKT de Ball et al., (2008). Bajo esta perspectiva, el conocimiento matemático asociado a esta segunda categoría se diferencia del conocimiento contenido en la primera porque es exclusivo de quienes imparten clases de matemática. Desde esta mirada, consideramos que la interpretación de los datos durante el análisis de algunas preguntas, no se diferenciaba el contenido concreto que deben poseer los docentes del que podemos considerar para otros profesionales al referirse a las tareas de estimación. Al mismo tiempo, observábamos información en los datos que pasaba desapercibida al momento de definir las categorías de análisis que nos permitiesen expresar los resultados del trabajo.

A raíz de ello, decidimos utilizar otro marco referencial que recogiera estas necesidades para poder explicar de forma concreta el conocimiento del profesor. De este modo,

llegamos al MTSK, el Conocimiento Especializado para el Profesor de Matemática, que como su nombre indica, descansa específicamente en el Conocimiento Especializado del Contenido del MKT.

De esta forma, en el apartado anterior, damos respuesta al primer objetivo específico de nuestra investigación de la mano del KoT, el Conocimiento del Tema. El segundo objetivo de esta investigación, pudo ser concretado gracias a dos de las tres subdimensiones asociadas al *Pedagogical Content Knowledge*, dominio del MTSK que considera el conocimiento de los aspectos relacionados con el conocimiento como objeto de enseñanza-aprendizaje, al igual que Shulman (1986).

A continuación presentamos los posibles usos e ideas de los docentes sobre las actividades gubernamentales propuestas en los Planes y Programas del Ministerio de educación, para el desarrollo del currículum chileno, que son partícipes de nuestro estudio.

10.1.2.1 Sobre el uso de las actividades para la enseñanza, teorías y recursos

El hecho 18 da cuenta que los maestros, al utilizar las actividades de estimación a los estudiantes, desarrollan tres tipos de tareas: estimación de medida, medición con unidades no estandarizadas o valoraciones con respuestas aleatorias. Como observamos en el Capítulo 8, y como recuperan los hechos 24, 25, y 27, un mismo docente realiza diferentes tareas para dar respuesta a preguntas que involucran el contenido de estimación de medida. El hecho 26 nos muestra que aquellos maestros que definieron estimación de medida en base a las tres componentes explicadas en el apartado 5.2.1 no son, necesariamente, aquellos que consideran tales componentes en sus prácticas de enseñanza. De esta forma, encontramos que los docentes ofrecen respuestas incongruentes entre ellas, donde detectamos un amplio número de docentes que en una actividad miden y en la otra entregan o solicitan una respuesta aleatoria, o que en una actividad estiman una medida y en otras miden con unidades no estandarizadas, por ejemplo.

Por otro lado, el hecho 22 señala que un porcentaje importante de los maestros participantes considera fundamental el uso de material concreto como recurso de aprendizaje en el trabajo de la estimación de medida. Como podemos observar en el hecho 17, el material concreto puede ser utilizado como unidad de medida o bien como andamio para la creación de referentes, como lo plantean Castillo (2012) y Joram (2005).

Es importante mencionar que un grupo de docentes considera, como da cuenta el hecho 23, el uso de material no manipulable dentro de sus teorías de enseñanza, a raíz de ello, podemos observar que para algunos docentes una característica de la estimación de medida es el impedimento del conteo, y por ello, el material a utilizar debe impedir la

Conclusiones y reflexiones

iteración directa entre la unidad y la magnitud a estimar. Esta mirada de los docentes concuerda con las características de las actividades planteadas por Segovia (2007) en su estudio sobre los procesos mentales realizados por estudiantes al estimar la medida discreta.

Las actividades presentadas en nuestro instrumento, solicitaban a los docentes que la estimación de medida debía corroborarse con la medición, tal como lo señalan Forrester y Pike (1998), la estimación de medida, en estas actividades, posee sólo un rol de hipótesis predictiva. Es necesario, que desde los lineamientos ministeriales se entienda y explique que la estimación de medida es una tarea en sí misma.

10.1.2.2 Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático

En el apartado 9.1 podemos observar que los hechos 13 y 14 dan cuenta que, en su mayoría, los profesores consideran que los estudiantes interactúan con la estimación de medida como si fuese una medición con unidades no estandarizadas o el conteo. Posiblemente, porque en su mayoría, ellos estiman medidas como si fuesen mediciones con unidades no estandarizadas.

Por otro lado, 31 de los 112 docentes, como resume el hecho 15, indican que sus estudiantes pondrían en juego la referencia (R) o la percepción (P) al momento de estimar una medida. Ante ello, podemos concluir que los profesores mencionan indistintamente dos formas de interactuar con la estimación de medida: medición con unidades no estandarizadas y estimación de medida.

Por consiguiente, las dificultades asociadas al trabajo de la estimación de medida, resumidas en los hechos 16 y 17, descansan en las dificultades de las formas de interactuar con el concepto: dificultades vinculadas a la medida, que por supuesto, también se vinculan a la estimación y a las dificultades vinculadas directamente con la estimación de medida. De esta forma, los docentes han manifestado que el tema no es trivial y es que difícil de adquirir para los estudiantes. Situación que se ha declarado didácticamente por Joram, Subrahmanyam y Gelman (1998) y Sowder (1992).

Por otro lado, es necesario observar que para 23 docentes la exactitud con la que se relaciona el concepto matemática, es una dificultad para los estudiantes al momento de trabajar la estimación de medida, porque culturalmente es parte del quehacer encontrar la medida exacta. Por ello consideramos necesario que se considere a la matemática como una ciencia rigurosa, no precisamente exacta (Usiskin, 1986, p.2). Para ello consideramos relevante que las razones para estimar presentadas por Segovia y Rico (2009, p.506) se trasladen a las aulas, a las ejemplificaciones de los marcos teóricos que involucran la estimación de medida y a los libros de texto.

10.1.3 Conclusiones Objetivo General

A partir de los apartados 10.1.1 y 10.1.2 podemos concluir que el conocimiento didáctico del contenido de los tienen los profesores de primaria sobre estimación de medida discreta y continua, se caracteriza por utilizar, indistintamente, tres tareas como estimación de medida:

- Estimación de medida, tarea que se caracteriza por el uso de tres componentes: referencia (R), percepción (P) y valoración (V). Es la tarea con menor frecuencia en las respuestas.
- Medición con unidades no estandarizadas o conteo. En las magnitudes continuas es un tipo de medición que al utilizar unidades de medida no convencionales proporciona una medición aproximada. En esta tarea, la unidad de medida es la referencia (R) y el resultado de la medición la valoración (V). La componente percepción está ausente, dado que hay una iteración directa entre la unidad de medida y la magnitud. Esta tarea es la más frecuente tanto en las tareas individuales como en las prácticas de aula. En el caso de la medida discreta, la medición se traduce en conteo de los objetos de la colección, en la mayoría de los casos, gracias al agrupamiento.
- Valoración de una medida con respuestas aleatorias que carecen de referentes de unidades (R) y es una de las más frecuentes en las teorías de enseñanza de los maestros.

Estas tres tareas son utilizadas indistintamente por los docentes y no poseen consistencia al observar a los docentes individualmente. Posiblemente, esta situación se debe a la falta de apropiación de las componentes de referencia (R) y percepción (P).

10.2 Sugerencias para la formación del profesorado

En el apartado 9.4 recogemos los hechos vinculados a la formación de los docentes en estimación de medida. Los hechos 7 y 9 dan cuenta que los docentes indican, en su mayoría, que no recibieron formación escolar ni universitaria sobre temas relacionados con la estimación de medida. Por otro lado, aquellos docentes que manifiestan que sí trabajaron la estimación de medida en ambas etapas de su formación, presentan ejemplos concretos que no consideran las componentes de referencia (R) o percepción (P). Estos maestros ejemplifican la estimación de medida por medio de otras tareas para asignar una medida, como por ejemplo la medición con unidades no estandarizadas, el redondeo o aproximación, o bien por medio de la estimación de cálculo, tipo de estimación que sí ha tenido una mayor cobertura en la investigación en didáctica de la matemática (Callís et al., 2006). Estas confusiones posiblemente se derivan del significado común del término estimar, que es un término que se utiliza en otros ámbitos de la escolarización matemática.

Conclusiones y reflexiones

Por lo tanto, estamos frente a un concepto que irrumpe en el currículo pero que carece de preparación profesional adecuada entre quienes deben llevarlo a las aulas y promover su trabajo entre los alumnos. Por otra parte, a pesar de que en el nuevo currículo chileno encontramos 18 objetivos que involucran la estimación de medida, no se detecta una reacción por parte del profesorado chileno que exija capacitación para abordarlo en sus prácticas. Un ejemplo que permite contextualizar esta situación, es que en el año 2009 se incluyeron en el currículo de primaria los ejes de álgebra y de probabilidades y, ante esto, distintas universidades, editoriales y el MINEDUC impartieron cursos o libros para apoyar a los docentes, en respuesta a sus solicitudes de capacitaciones. Sin embargo, no ha ocurrido un fenómeno equivalente respecto al eje de medición.

Al contrario que con otros conceptos matemáticos que podrían ser una novedad en el currículo -como podría ser la inclusión de los fractales, por ejemplo- una gran cantidad de los docentes encuestados muestran tener una definición de estimación propia. Al tener una idea preconcebida externa a la educación matemática sobre este concepto, no se observa la necesidad de crear una definición rigurosa por parte de los maestros.

El tipo de confusiones e inconsistencias mostradas en el apartado 10.1, sobre el conocimiento acerca de estimación de medida de los maestros encuestados, nos hace valorar la necesidad de que se definan y ejemplifiquen de forma clara los nuevos conceptos introducidos en el currículo, en especial en situaciones como el contenido vinculado a nuestro estudio, donde el concepto disciplinario de estimación de medida puede confundirse con el concepto asociado al conocimiento sociocultural de los maestros. En caso contrario, los cambios en los currículos podrían no trasladarse a las aulas de forma efectiva. En particular, el currículo chileno utiliza la palabra estimar, pero sin definirla, sin ejemplificarla y sin distinguir los diferentes tipos de estimación posibles, con lo que podrían aparecer situaciones no deseadas en la práctica.

Por todo lo anterior, consideramos que la formación inicial y continua del profesor debe entregar herramientas adecuadas para la reflexión pedagógica y disciplinar de los futuros docentes teniendo en cuenta situaciones como las descritas en este documento. A continuación, a modo de ejemplo, proponemos distintas instancias para la formación del profesorado.

1. Tratar, en forma análoga a la conservación de la cantidad, la conservación de la magnitud descrita por Chamorro y Belmonte (1988) y que es parte de los referentes teóricos de este documento. De este modo, unidades tan complejas como el centímetro o el metro cúbico podrían ser apreciados en sus distintas representaciones.
2. Introducir una clasificación de tareas de medida para que los docentes trabajen las distintas formas posibles de encontrar una medida, como las ejemplificadas y

definidas en la tabla 5.2.2. A partir de ello, los estudiantes deberían ser capaces de construir otros ejemplos vinculados a contenidos de los distintos cursos de educación primaria.

- Las instancias de reflexión deberían ser habituales para los estudiantes tanto en forma individual como colectiva. Schön (1992) enfatiza que es fundamental que el profesorado desarrolle una práctica reflexiva, porque lo empodera sobre el qué y cómo enseñar. A modo de ejemplo, el formador de profesores podría presentar ejemplos como esta tarea presentada en un libro de primer año básico⁸ (6 años).

2 Estima y después cuenta para verificar tu respuesta. ¿Cuántas láminas hay? ¿Más de 10 o menos de 10?



Estimo que hay _____ de 10. Hay

Si el formador de profesores comenta junto a sus discípulos las dificultades y fortalezas de los estudiantes frente a este recurso, los estudiantes podrían reflexionar en forma individual y colectiva sobre el posible conteo de la colección de objetos, la pertinencia de la situación problemática, el modo de presentación (libro de texto) de la tarea, etc.

- Si consideramos que la enseñanza tiene como fin intervenir y cambiar el mundo (Freire, 1970; Giroux, 1990), la estimación de medida, como contenido matemático puede tener un rol importante en la comprensión del entorno. Albarracín y Gorgorió (2013) proponen como ejemplos de tarea de estimación de medida el cálculo de personas que hay en una manifestación o el cálculo de agua o metros cúbicos de basura generados por la población, de modo que “La discusión en el aula de los elementos de orden social que aparecen en estos problemas puede ayudar al conocimiento del entorno por parte del estudiante, así como representar un contexto cercano y conocido sobre el cual plantear un

8

Frías, M. (2008). Texto para el estudiante básico 1º Educación Matemática. Santiago de Chile : Editorial F y F, p. 28

Conclusiones y reflexiones

problema que pertenezca a su propia realidad y que sirva para desarrollar el pensamiento crítico” (p. 299).

5. Attivo y Trueblood (1979); Segovia, Castro, Castro y Rico (1989); Segovia y Rico (1996); Joram et al., (1998) Callís et al., (2006) y Chamorro (2003) enfatizan en la individualidad de la apropiación de la estimación de medida. Por ello, es indispensable que en la formación del profesorado se considere que el docente debe contribuir a la construcción del conocimiento del estudiante. Muchos de nosotros somos evidencia, que posiblemente mediante “la transmisión del conocimiento” es posible aprender, fundamento de muchos defensores de las didácticas tradicionales que aún están presentes en las aulas. Sin embargo, la estimación de medida es un contenido que se caracteriza por la necesidad de didácticas constructivistas para su éxito. En nuestra mirada socioconstructivista del conocimiento docente, en la línea del MTSK, consideramos que la enseñanza de la estimación de medida debería centrarse en el aprendizaje concreto y abstracto del estudiante, respetando de ese modo, su cultura y su entorno para construir el conocimiento.
6. En la construcción de nuestro marco curricular indagamos en la matemática formal que respalda a los referentes de la medición y que es conocido como Teoría de la medida (Fiol y Fortuny, 1990; Recalde, 2009). Estos contenidos no forman parte de los programas de magisterio, o en caso chileno, de los estudiantes de educación matemática. Por ello, consideramos que es necesario que la matemática para la enseñanza, es decir, la matemática que debe conocer el profesor requiere incluir las bases que motivan esta formalización, con el fin de que el profesor esté apoderado de la matemática que enseña para poder adaptar su enseñanza a los distintos niveles.
7. El hecho 20 rescata una tarea recomendada por los programas gubernamentales, la comprobación de la tarea. Es indispensable que se comprenda que la estimación de medida es una tarea por sí misma, por ello, no necesita a la medición para resolver los problemas que amerita.

10.3 Prospectivas para investigaciones

Como hemos mencionado en los primeros capítulos de este documento, la enseñanza de la estimación de medida no es un tema recurrente en la investigación de la didáctica de la matemática (Benton, 1986; Sowder, 1992; Callís et al., 2006). De las pocas investigaciones existentes, sólo algunas se enfocan en el proceso de enseñanza-aprendizaje o han indicado la necesidad de indagar en el conocimiento didáctico del docente, dado que en su mayoría, analizan en el conocimiento del estudiante.

El párrafo anterior explica por qué Frías, Gil y Moreno (2001) acusan, en un libro de didáctica de matemática para profesores de primaria, la falta de orientaciones para el tratamiento de la estimación de medida. Considerando este escenario y las conclusiones de los apartados anteriores de este capítulo, creemos que es necesario continuar la investigación en la enseñanza de la medida en miras a la formación del profesorado. Para ello, a continuación presentamos un conjunto de ideas, a modo de propuesta, para futuras investigaciones.

1. Investigar en la práctica docente el desarrollo del aprendizaje de la estimación de medida. Estudiar la práctica tiene como fortaleza analizar las situaciones no planificadas o de contingencia (Zamorano, 2015) y cómo se utilizan en ellas el uso de la referencia (R), de la percepción (P) y la valoración (V).
2. Implementar unidades didácticas formativas y analizarlas a priori y a posteriori, con el fin de validarlas a partir de la reflexión individual y colectiva.
3. Desarrollar un estudio exhaustivo sobre la estimación referente a diferentes magnitudes presentes en los currículos, como pueden el tiempo, el peso o el volumen. Estos contenidos están presentes en la mayoría de los currículos escolares, sin embargo, la mayoría de las investigaciones, incluida la nuestra, no indagan en su enseñanza a raíz de la dificultad de la naturaleza de las magnitudes (Hogan y Brezinski, 2003).
4. Discutir el conocimiento del dominio teórico presente en la matemática instrumental que sostiene la enseñanza de la medida.
5. Esta investigación está centrada en 112 docentes chilenos en activo, cuyas prácticas podrían no alejarse de aquellas observadas por Forrester y Pike (1998) en el Reino Unido, Joram et al., (1998) Estados Unidos y Callís et al., (2006) en Cataluña. Por lo tanto, consideramos relevante que se observen la caracterización del conocimiento del profesorado a nivel general.

Referencias

- Adams, T.L., y Harrell, G. (2003). *Estimation at work*. Reston, V.A.: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 229-244.
- Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L., y Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 359–381
- Ainley, J. (1991). Is there any mathematics in measurement? In D. Pimm y E. Love (Eds.), *Teaching and learning school mathematics* (pp. 69–76). London: Hodder y Stoughton
- Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(3), 289-315.
- A.P.M.E.P. (1982). *Mots, tome VI (Grandeur, mesure)*. Paris: APMEP.
- Attivo, B. J. (1979). *The Effects of Three Instructional Strategies on Prospective Teachers' Ability to Estimate Length and Area in the Metric System* (Doctoral dissertation, Pennsylvania State University.).
- Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
- Baturo, A., y Nason, R. (1996). Prospective teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 235–268.
- Benton, S. (1986). A Summary of Research on Teaching and Learning Estimation. In: *N.C.T.M. Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 239-248.
- Boulton-Lewis, G., Wils, L., y Mutch, S. (1996). An analysis of young children's strategies and use of devices for length measurement. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 329–347.
- Bright, G.W. (1976). Estimation as Part of Learning to Measure. *National Council of Teachers of Mathematics Yearbook*, 38, 87-104.
- Bright, G.W. (2003). Estimation: Teaching notes. Classroom activities for learning and teaching measurement. *Reston, V .A.: National Council of Teachers of Mathematics*, 27-31.
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' profesional knowledge. En R. Biehler, R. Sholz, R. Sträer, y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 73-88).

Referencias

- Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las matemáticas 12. *Educación matemática*, 2(1), 5-38.
- Buchanan, A. (1978) Estimation as an Essential Mathematical Skill. Professional Paper 39. *Educational Research and Development*. California (U.S.).
- Cajaraville, J. A. (2007). Estimación y aproximación. En J. M. Domínguez (Ed.). *Actividades para la Enseñanza en el Aula de Ciencias. Fundamentos y Planificación*. Santa Fe (Argentina): Ediciones Universidad Nacional del Litoral.
- Callís, J., Fiol, M. L., Luca, C., y Callís, C. (2006). Estimación métrica longitudinal en la educación primaria. factores implícitos en la capacidad estimativa métrica. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, 43, 91-110.
- Callis Franco, J. (2002). *Estimació de mesures longitudinals rectilínies y curvalínies. Procediments, recursos i estratègies*. Memoria para optar al Grado de Doctor, Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In *Proceedings of the CERME* (Vol. 8).
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., Montes, M. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, el MTSK . Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva
- Castillo, J. J. (2006). Estimación de Cantidades Continuas: Longitud, Superficie, Capacidad y Masa. Granada: Universidad de Granada.
- Castillo, J.J. (2012). *Estimación de cantidades continuas: longitud y superficie*. Tesis para optar al Grado de Doctor, Departamento de Didáctica de la Matemàtica. Universidad de Granada, Granada, España.
- Castillo, J. J., Segovia, I., Castro, E. y Molina, M. (2011). Estudio sobre la Estimación de Cantidades Continuas: Longitud y Superficie. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación*

- Matemática – 2011 (pp. 165-172). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Castle, K., y Needham, J. (2007). First graders' understanding of measurement. *Early Childhood Education Journal*, 35, 215–221.
- Centro Español de Metrología (1994). *Vocabulario internacional de términos fundamentales y generales de metrología*. Madrid, Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente.
- Chamorro, M. C., y Belmonte, J. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Síntesis. Madrid.
- Chamorro, M. C. (1995). Aproximación a la medida de las magnitudes en la enseñanza primaria. *Revista Uno*, 3, 31-53.
- Chamorro, M.C. (1996). El currículum de medida en educación primaria y ESO y las capacidades de los escolares. *Revista Uno*, 10, 43-62.
- Chamorro, M. C. (2003): *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson-Prentice
- Clayton, J. G. (1996). A criterion for estimation tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27(1), 87-102.
- Clements, D., y Sarama, J. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Clements, D., y Sarama, J. (2014). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Clements, D., y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. in D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company.
- Clements, D., y McMillen, S. (1996). Rethinking “concrete” manipulatives. *Teaching Children Mathematics*, 2, 270-279.
- Clements, D. y Stephan, M. (2003). Linear and Area Measurement in Prekindergarten to Grade 2. En: N.C.T.M. *Learning and Teaching Measurement, 2003 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 3-16.
- Clement Rodríguez, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso*. (Tesis doctoral Inédita). Universidad de Huelva, Huelva.
- Clement, N., Escudero-Ávila, D., Rojas, N., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M.C., Sosa, L. (2014). El conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática. En J.

Referencias

- Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, M. Montes (Eds), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, el MTSK (p. 42). Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva
- Coburn, T., y Shulte, A. (1986). Estimation in Measurement. In: *N.C.T.M. Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 195-203.
- Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: Her Majesty's Stationery Office.
- Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla
- Corle, C. G. (1960). A study of the quantitative values of fifth and sixth grade pupils. *Arithmetic Teacher*, 7, 333-340.
- Corle, C. G. (1963). Estimates of quantity by elementary teachers and college juniors. *Arithmetic Teacher*, 10 (2), 347-353.
- Crawford, B., y Zylstra, E. (1952). A study of high school seniors' ability to estimate quantitative measurements. *Journal of Educational Research*, 55, 241-248.
- Crites, T. W. (1992). "Skilled and less skilled estimators". Strategies for estimating discrete quantities. *Elementary School Journal*, 92, 601-619.
- Crites, T. W. (1993). Strategies for estimating discrete quantities. *Arithmetic Teacher*, 41(2), 106-108.
- Davis, B., y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 293-319.
- De Castro, C., Castro, E., y Segovia, I. (2014). Estimación en cálculo multiplicativo con números decimales. *Enseñanza de las Ciencias*, 32 (2), 171-190.
- Del Olmo, M., Moreno, M. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?*. Síntesis: Madrid.
- Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 45-55.
- Dowker, A. (1996). Young children's addition estimates. *Mathematical Cognition*, 3, 141-154.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. En M.L. Callejo (Ed.). *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9 (1), 143-168
- Edwards, A. (1984). Computational estimation for numeracy. *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 59-73.
- Fiol, M. L. (1997). Igual forma, diferente medida. *Perspectiva Escolar*, 211, 8.
- Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis
- Flores, E., Escudero, D.I., y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.). *Actas del CERME 8* (pp. 2055-3064). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.
- Forrester, M., Latham, J., y Shire, B. (1990). Exploring estimation in young primary school children. *Educational Psychology*, 10 (4), 283-300.
- Forrester, M., y Pike, C. (1998). Learning to estimate in the mathematics classroom: A conversation-analytic approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 334-356.
- Freire, P. (1970). *Pedagogía del oprimido*. Madrid: Siglo XXI.
- Frías, M. (2008). Texto para el estudiante básico 1º Educación Matemática. Santiago de Chile : Editorial F y F, p. 28.
- Frías, Gil y Moreno. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida . Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.
- Gibbs, G. R. (2008). *Analysing qualitative data*. London: Sage.
- Giroux, H. (1990). *Los profesores como intelectuales: Hacia una pedagogía crítica del aprendizaje*. Barcelona: Paidós.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Roa, R. (2002). Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Universidad de Granada. 615-616.
- Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(13), 170-218.
- Hall, L. (1984). Estimation and Approximation. Not Synonyms. *Mathematics Teacher*, 77 (7), 516-517.

Referencias

- Hannula, M. M., Räsänen, P., y Lehtinen, E. (2007). Development of counting skills: Role of spontaneous focusing on numerosity and subitizing-based enumeration. *Mathematical thinking and learning*, 9(1), 51-57.
- Harel, G., y Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical thinking and learning*, 7(1), 27-50.
- Hiebert, J. (1981). Units of measure: Results and implications from national assessment. *Arithmetic Teacher*, 28, 38-43.
- Hiebert, J. (1984). Why do some children have trouble learning measurement concepts? *Arithmetic Teacher*, 31, 19-24.
- Hildreth, D. J. (1980). *Estimation Strategy Use in Length and Area Measurement Tasks by Fifth and Seventh Grade Students*. PdD. Universidad del Estatal de Ohio. Columbia.
- Hildreth, D. J. (1983). The use of strategies in estimating measurements. *The Arithmetic Teacher*, 50-54.
- Hodgson, T.; Simonsen, L.; Luebeck, J.; y Andersen, L. (2003). Measuring Montana: An Episode in Estimation. In: *N.C.T.M. Learning and Teaching Measurement, 2003 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 220-228.
- Hogan, T. P., y Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259-280.
- Hope, J. (1989). Promoting number sense in school. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 12-18.
- Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 6-11.
- Inskip, J. E. (1976). "Teaching measurement to elementary school children". En: *N.C.T.M. Measurement in School Mathematics, 1976 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics [Enseñanza de la medición en la escuela elemental. Traducción de J. Díaz Godino y L. Ruíz Higuera]
- Jaramillo López, C. M., y Duarte, P. V. E. (2009). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. *Revista Educación y pedagogía*, 18(45).
- Jones, M. G., Forrester, J. H., Gardner, Grant. E., Taylor, A.R., y Andre, T. (2012). Students' Accuracy of Measurement Estimation: Context, Units, and Logical Thinking. *School Science and Mathematics*, 112 (3), 171-178.
- Jones, M. G., y Taylor, A. (2010). Developing a sense of scale: Looking backward. *Journal of Research in Science Teaching*, 46(4), 460-475.

- Jones, M. G., Taylor, A., y Broadwell, B. (2009). Estimating linear size and scale: Body rulers. *International Journal of Science Education*, 31(11), 1495-1509.
- Joram, E., Subrahmanyam, K., y Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research*, 68, 413-449.
- Joram, E. (2003). Benchmarks as tools for developing measurement sense. En: *N.C.T.M. Learning and Teaching Measurement, 2003 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 57-67.
- Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., y Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(1), 4-23
- Johnson, D. (1979). Teaching estimation and reasonableness of results. *Aritmetic Teacher*. 34-37.
- Kinach, B. M. (2002). A cognitive strategy for developing pedagogical content knowledge in the secondary mathematics methods course: Toward a model of effective practice. *Teaching and Teacher Education*, 18, 51-71.
- Lang, F. K. (2001). What is a “good guess” anyway?. *Teaching Children Mathematics*, 7, 462-466.
- Latorre, A., del Rincon. D y Arnal, J. (2005). *Bases Metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Experiencia.
- Legutko, M. y Urbanska, E. (2002). Forming estimation skills. *Mathematical literacy in the digital era*, 224-230.
- Lehrer, R. (2003). Developing Understanding of Measurement. In J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM. 179-192.
- Llinares, S., y Sánchez, M.V. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las Matemáticas. En S. Llinares, y M.V. Sánchez (Eds.). *Lecturas sobre la relación Teoría-Práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.
- Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *Revista UNO*, 17, 51-63.
- Markworth, K., Goodwin, T., y Glisson, K. (2009). The Development of Mathematical Knowledge for Teaching in the Student Teaching Practicum. *AMTE Monograph 6 Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers* (pp. 67- 83).

Referencias

- May, L. (1994) Benchmarks, Estimation Skills, and the “Real World”. *Teaching Math. Teaching Pre K-8*, 24 (8), 24-25.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). "Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria". Madrid: Autor.
- Ministerio de Educación (2012). *Bases curriculares de primero a sexto año básico*. Santiago de Chile: MINEDUC.
- Ministerio de Educación (2012). *Planes y programas de primero a sexto año básico*. Santiago de Chile: MINEDUC.
- Montague, M., y Van Garderen, D. (2003). A cross-sectional study of mathematics achievement, estimation skills, and academic self-perception in students of varying ability. *Journal of Learning Disabilities*, 36(5), 437–448.
- Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2012). MSTK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. Manuscript submitted for publication (CERME 8).
- Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., Huitrado, J., Flores., P. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, M. Montes (Eds), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, el MTSK (p. 8). Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva
- National Center for Education Statistics. (1996). Pursuing excellence (NCES Report No. 97–198, initial findings from the Third International Mathematics and Science Study; <http://www.ed.gov/NCES/timss>). Washington, DC: U.S. Government Printing Office.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, Virginia: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. S.A.E.M. Thales. Sevilla.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Research Council. (1996). *National science education standards*. Washington, DC: National Academy Press.

- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (SAEM THALES)*. Reston, VA.
- National Science Board. (1983). En Callís, J., Fiol, M. L., Luca, C., y Callís, C. (2006). Estimación métrica longitudinal en la educación primaria. factores implícitos en la capacidad estimativa métrica. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, 43, 91-110.
- Obersteiner, A., Reiss, K., y Ufer, S. (2013). How training on exact or approximate mental representations of number can enhance first-grade students' basic number processing and arithmetic skills. *Learning and Instruction*, 23, 125-135.
- OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OCDE.
- Outhred, L.; Mitchelmore, M.; McPhail, D. y Gould, P. (2003). Count Me into Measurement. In: N.C.T.M. *Learning and Teaching Measurement, 2003 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 81-99.
- Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*. 62 (39), 307-332.
- Pérez Serrano, G. (1990): *Investigación –Acción, Aplicaciones al campo social y educativo*. Madrid: Dyckinson
- Pérez Serrano, G. (2014). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. I Métodos*, Madrid, España: La Muralla.
- Piaget, J. (1970) *Structuralism*. New York: Basic Book
- Piaget, J.; Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *Las concepciones del niño sobre Geometría*. Londres: Routledge y Kegan Paul.
- Pick, H. L. (1987). Information and the effects of early perceptual experience. In N. Eisenberg (Ed.). *Contemporary topics in developmental psychology*. New York: Wiley. 59–76.
- Recalde, L. C. (2009). Los axiomas de la cantidad de Hölder y la fundamentación del continuo lineal. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, XVII(2) 101-121. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46812051009>
- Reys, R. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, 547-557.
- Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., Smith, N., y Sydam, M. (2001). *Helping Children Learn Mathematics*. New York: John Wiley y Sons, Inc.

Referencias

- Rico Romero, L., y Segovia Alex, I. (1996). La estimación en medida. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, 10, 29-42.
- Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.
- Roth, W., y Roychoudhury, A. (1993). The development of science process skills in authentic contexts. *Journal of Research in Science Teaching*, 30, 127–152.
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., y Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. London: Sage.
- Schoenfeld, A.H. (2010). *How we think*. Nueva York: Routledge.
- Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Basic Books: Nueva York
- Schön, D.A. (1987). *Educating the reflective practitioner*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers. [Versión en castellano: Schön, D.A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje de las profesiones*. Barcelona: M.E.C.-Paidós].
- Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Barcelona: Paidós.
- Segovia, I. (1997). Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos. Comares. Granada.
- Segovia, I., Castro, E., Castro, E., y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.
- Segovia, I. y De Castro, C. (2007). La investigación en estimación en cálculo. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cazares Solórzano* (pp. 213-236). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(1), 449-536.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

- Siegler, R. S., y Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition*. New York: Psychology Press. 197–212.
- Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. En J. Hiebert y M. Behr (eds.). *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 182–197.
- Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan Publishing Company. 371-387.
- Sowder, J. T., y Wheeler, M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 130-146.
- Steinbring, H. (1998). Stoff Didaktik to social interactions: An evolution of approaches to the study of language and communication in German mathematics education research. In H. Steinbring, M. Bartolini-Bussi, y A. Sierprinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 102–119.
- Steinbring, H. (2008). Changed views on mathematical knowledge in course of didactical theory of development-independent corpus of scientific knowledge or result of social constructions?. *ZDM*, 40, 303–316.
- Subramaniam, K. (2014). Prospective secondary mathematics teachers' pedagogical knowledge for teaching the estimation of length measurements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(2), 177-198.
- Swan, M; y Jones, O. (1971). Distance, weight, height, area and temperature percepts of university students. *Science Education*, 55, 353-360.
- Swan, M; y Jones, O. (1980). Comparison of students' percepts of distance, weight, height, area, and temperature. *Science Education*, 64, 297-307.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 125-147.
- Thorndyke, P. W. (1981). Distance estimation from cognitive maps. *Cognitive Psychology*, 13, 526-550.

Referencias

- Towers, J., y Hunter, K. (2010). An ecological reading of mathematical language in Grade 3 classroom: A case of learning and teaching measurement estimation. *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 25–40.
- Trafton, P. (1986). Teaching computational estimation: Establishing an estimation mindset. In: *N.C.T.M. Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 16-30.
- Tsamir, P. (2005). Enhancing prospective teachers' knowledge of learners' intuitive conceptions: The case of same A- same B. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 469–497.
- Usiskin, Z. (1986). Reason for estimating. In H. L. Schoen, M. J. Zweng (Eds.). *N.C.T.M. Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1-15.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., y Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. USA: Pearson.
- Whitin, D. (2004). Exploring estimation through children's literature. Articles and lessons for prekindergarten through grade 8. Reston, V.A.: National Council of Teacher of Mathematics, 21-28
- Wilson, G. M., y Cassell, M. (1953). A research on weights and measures. *Journal of Educational Research*, 46, pp. 75-85.
- Zamorano, A. (2015). *La práctica de la enseñanza de las matemáticas a través de las situaciones de contingencia*. Memoria para optar al Grado de Doctor, Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.

Anexos

Anexo A1: Objetivos de estimación de medida en el currículum chileno

Nivel Escolar de Enseñanza Básica (Primaria)	Medición		Números y Operaciones		Geometría	
	Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Evaluación	Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Evaluación	Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Evaluación
Primero			Estimar cantidades hasta 20 en situaciones concretas, usando un referente.	Estiman cantidades de objetos, con el uso del 10 como referente Seleccionan entre dos estimaciones posibles la que parece más adecuada y explican la elección.		
Segundo			Estimar cantidades hasta 100 en situaciones concretas, usando	Estiman cantidades de objetos, con el uso del 10 como referente.		

Anexos

			un referente.	Seleccionan entre dos estimaciones posibles la que parece más adecuada y explican la elección.		
Tercero	Demostrar que comprenden la medición del peso (g y kg): estimando el peso de objetos de uso cotidiano, usando referentes	Estiman el peso de frutas, útiles, mascotas, animales, usando un referente, y fundamentan su elección			Demostrar que comprenden el concepto de ángulo: identificando ejemplos de ángulos en el entorno estimando la medida de ángulos, usando como referente ángulos de 45° y de 90°	Estiman ángulos de 45° y de 90° y comprueban, midiéndolos
Cuarto	Estiman longitudes de objetos de la sala					Estiman ángulos y comprueban la estimación

	<p>de clase y comprueban la estimación con una regla o huincha</p> <p>Estiman áreas de su entorno en unidades de cm^2 y m^2.</p> <p>Estiman el volumen de objetos o de espacios de su entorno como cajas, maletas, salas de clases, piscinas, edificios, etc.</p> <p>Estiman y comprueban el volumen de objetos irregulares, sumergiéndolos en un vaso</p>					realizada.
--	--	--	--	--	--	------------

Anexos

	graduado.					
Quinto	<p>Calcular áreas de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares aplicando las estrategias</p> <p>conteo de cuadrículas</p> <p>comparación con el área de un rectángulo</p> <p>completando figuras por traslación.</p>	<p>estiman áreas pedidas en un problema y cotejan esta estimación con la solución obtenida del problema</p>				

Sexto					Estimar y medir ángulos, usando el transportador y expresando las mediciones en grados.	Describen el procedimiento usado para estimar ángulos con un transportador .
--------------	--	--	--	--	---	--

Anexo A2: Instrumento de toma de datos

Estimado Profesor:

En el marco del Doctorado en Didáctica de la Matemática y de las Ciencias de la Universidad Autònoma de Barcelona, estamos realizando un estudio para caracterizar el conocimiento didáctico del contenido que poseen los profesores de Educación Básica en cuanto a la estimación de medida.

Es para nosotros necesario e importante conocer el estado de este conocimiento, con el fin de poder proponer nuevas prácticas en la formación inicial y continua del profesorado de educación básica.

Su participación es importantísima para el éxito de este estudio, por ello solicitamos su cooperación respondiendo cada una de las preguntas de este cuestionario, las que serán confidenciales.

De antemano, muchísimas gracias.

Lluís Albarracín Gordo
Noemí Pizarro Contreras

Nombre o seudónimo _____

E-mail _____

Edad	
20-30	
31-40	
41-50	
51-60	
Más de 60	

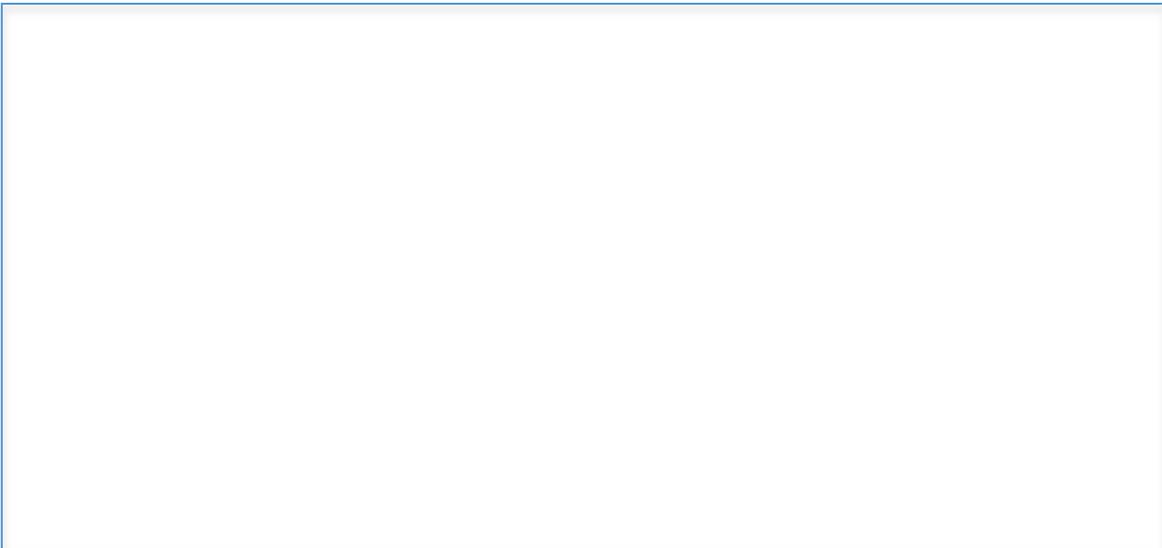
Años trabajando como profesor de Ed. Básica	
Sin experiencia	
1-5	
6-10	
11-15	
Más de 15	

Estudios	
Pedagogo	
Licenciado en educación básica	
Licenciado en educación matemática	
Licenciado en Matemática	
Postítulo	
Máster	
Doctor	
Otro: _____	

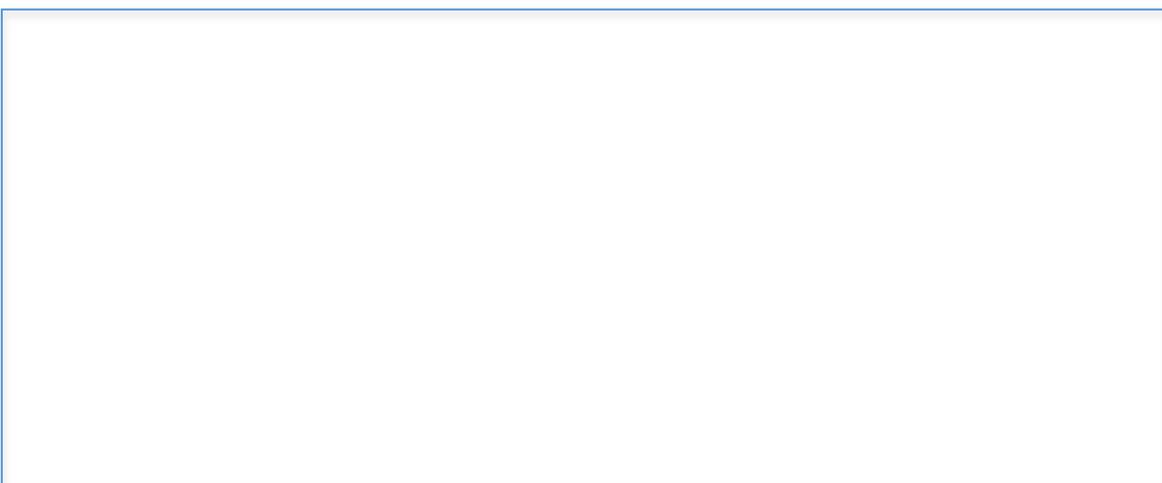
¿Estaría dispuesto(a) a darnos una entrevista personal, de unos 10-15 minutos de duración, para poder profundizar en su conocimiento y experiencia?

Sí _____ No _____

1. Estime la altura de la sala. Describa paso a paso el proceso . No es necesario dar un resultado.



2. Estime el área de la pizarra. Describa paso a paso el proceso. No es necesario dar un resultado.



Anexos

3. Si el coordinador de su centro educativo le propone utilizar esta imagen para hacer una actividad de estimación. ¿Qué enunciado escribiría?



4. En su etapa escolar (como alumno) ¿trabajó alguna actividad de estimación de medida? Ejemplifique.

5. En su etapa universitaria ¿trabajó alguna actividad de estimación de medida? Ejemplifique.

6. ¿Qué entiende por “estimación de medida”?

7. Si propusiera esta actividad de estimación de medida a sus estudiantes:

¿Cuál es el área aproximada de esta pintura ?



a) ¿Qué estrategia usaría usted para resolverla?

b) ¿Qué estrategias cree que usarían sus estudiantes para resolverla?

c) ¿Qué dificultades cree que tendrían sus alumnos para realizarla?

Observe estas actividades presentadas por el Ministerio de Educación en los Programas de Estudio para las Bases Curriculares.

8. ¿Considera que es una actividad de estimación? ¿Por qué?

Objetivo de aprendizaje
Estimar cantidades hasta 20 en situaciones concretas, usando un referente.

Estiman visualmente la cantidad de cubos que se muestra en el dibujo y luego cuentan, primero, agrupando de a 2, y después agrupando de a 5, para comprobar la estimación dada



Argumentar y comunicar
Comunicar el resultado de relaciones usando un referente

Observaciones al docente
Es fundamental, en primero básico, que los alumnos estimen sin contar. Se sugiere que el docente busque formas de presentar actividades de estimación para que sus alumnos eviten el conteo. El conteo solo sirve para comprobar la estimación.

9. ¿Cómo trataría la actividad anterior con alumnos de primer año?

10. ¿Cómo plantearía esta actividad en el aula?

Objetivo de aprendizaje

Estimar cantidades hasta el 100 en situaciones concretas, usando un referente.

Estiman la cantidad de cuadrados  que caben en el rectángulo.



Argumentar y comunicar

Comunicar el resultado de descubrimientos de relaciones
Explicar las soluciones propias y los procedimientos utilizados

Representar

Utilizar representaciones concretas

Verifican la estimación hecha, cubriendo el rectángulo con cuadrados de papel, y los cuentan.

11. ¿Le gustaría añadir algún comentario o inquietud sobre la estimación de medida?

