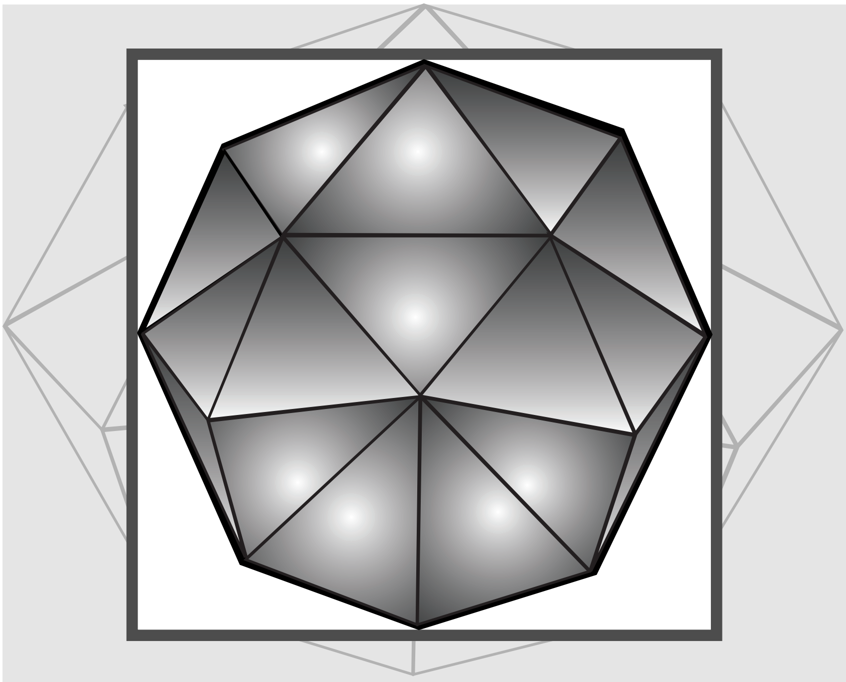
HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA (III)

HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA (III)



A.H.E.P.E.

COORDINACIÓN
Jesús Santos del Cerro
Universidad de Castilla-La Mancha

Marta García Secades
Universidad San Pablo CEU

DELTA
PUBLICACIONES

HISTORIA DE LA PROBABILIDAD
Y LA ESTADÍSTICA (III)
por A.H.E.P.E.

Editor gerente Fernando M. García Tomé
Diseño de cubierta Egüen Creativos
Preimpresión Mecaservi, Lucas de las Heras, S.L.L.
c/Serrano, 41 Pta. 6 Of. 6
28001 Madrid (España)
Impresión Grefol, S.A.
Pol. Ind. La Fuensanta. Móstoles. Madrid (España)

ISBN 84-96477-25-8
Depósito Legal

(0106-50)

Prólogo

En este volumen se recopilan todas las ponencias presentadas a las *III JORNADAS DE HISTORIA DE LA ESTADÍSTICA Y DE LA PROBABILIDAD*, de carácter internacional y organizadas por la Asociación de Historia de la Estadística y de la Probabilidad de España (AHEPE), junto con la Universidad San Pablo-CEU, la Universidad Rey Juan Carlos, y la Universidad de Castilla-La Mancha, y que se celebraron, los días 7 y 8 de Julio de 2005, en el Salón de Grado de la Universidad San Pablo-CEU en Madrid.

No obstante, lo que se destaca de este tercer Congreso es el gran nivel alcanzado, en general, en los trabajos presentados así como el más que aceptable grado de discusión de todos los trabajos expuestos, lo que supone un creciente nivel científico de dichas jornadas y hace albergar buenas expectativas acerca de las contribuciones que en materia de Historia de la Estadística y de la Probabilidad se realicen en el futuro.

Podemos clasificar los trabajos atendiendo a la siguiente estructura:

- Ponencias sobre los precedentes y los orígenes de la Historia de la Estadística y de la Probabilidad.
- Ponencias sobre tópicos de carácter general posteriores a la creación del moderno Cálculo de Probabilidades.
- Ponencias sobre tópicos específicos de carácter histórico de la Estadística y de la Probabilidad.

Dentro del primer grupo de trabajos debemos señalar las interesantes aportaciones del grupo de investigadores de la Universidad de Sevilla, encabezados por el profesor Jesús Basulto Santos, que ofrecen dos ponencias tituladas «*El juego que llaman azar del libro de los dados de Alfonso X el Sabio*» y «*El problema de los puntos para jugadores con desigual destreza: la solución de Montmort (1713)*». También hay que destacar el trabajo de la profesora Marta García Secades que pone de manifiesto la relación de las aportaciones de Caramuel y Pascal respecto de la probabilidad de carácter filosófica, titulado «*Caramuel, Pascal y la probabilidad filosófica*». Por último, dentro de este apartado, hay que resaltar el papel jugado por Jacques Bernouilli y la obra que consagró el moderno Cálculo de Probabilidades, *Ars Conjectandi*, y que son el objeto de los trabajos de los profesores Jesús Santos del Cerro («*El* Ars Conjectandi: *un nuevo cálculo junto a un viejo concepto*») y Miguel Córdoba Bueno («*De la Lógica de Port Royal a la probabilidad de Bernouilli: el* Ars Cogitandi *como antecedente del* Ars Conjectandi»).

Del segundo grupo de ponencias hay que señalar el trabajo del profesor Javier Martín-Pliego sobre la contribución original del español Josef Mariano Vallejo titulado «*Josef Vallejo y la estimación máximo-verosímil*». El trabajo de Marisol de Mora sobre Condorcet cuyo título es «*La democracia según Condorcet*». El profesor Knobloch aporta un brillante trabajo sobre el origen de la teoría de los errores («*On the origin of error theory*»). Sobre el origen del método de Montecarlo («*Las etapas en la gestación del método de Montecarlo*») versa el trabajo de Javier Otamendi. Gregoria Mateos-Aparicio dedica su ponencia a la concepción subjetiva de la probabilidad a través de la historia («*La interpretación subjetivista de la probabilidad. Principales aportaciones*»). Los profesores Arribas Macho y Almazán ofrecen los resultados de sus últimas investigaciones bajo el título «*La estadística española entre 1939 y 1953*». De gran interés bibliográfico es el trabajo del profesor Ruiz Garzón sobre «*Fuentes bibliográficas para el estudio de la historia de la estadística y la probabilidad en la biblioteca del Real Instituto y observatorio de la Armada de San Fernando*». Por su parte, las profesoras Busto Caballero y Escribano Ródenas centran un trabajo sobre el autor español Antonio Aguilar y Vela («*D. Antonio Aguilar y Vela: su visión del estudio del Cálculo de Probabilidades*»). Por último, dentro de este apartado, se debe destacar el interesante trabajo sobre las tablas de mortalidad en el siglo XIX en nuestro país («*El estudio de la mortalidad en España en el siglo XIX*») de los profesores López Zafra y De Paz Cobo.

Del último grupo, sobre tópicos específicos, se han realizado en general aportaciones de gran interés en ámbitos como la educación, series temporales, estudios de usuarios, redes neuronales, etc. En primer lugar, hay que señalar la ponencia del profesor Barbut que versó sobre la relación de Maurice Fréchet con España y Portugal en sus visitas a estos dos países durante la II Guerra Mundial («*Un épisode insolite des relations scientifiques franco-iberiques*»). Finalizamos con la relación del resto de trabajos y sus autores: Díaz de la Cebosa («*Pensamiento estadístico en mis vivencias como asesor de proyectos de la F.A.O. 1964-1987*»); García Rubio. Gámez Martínez y Alfaro Cortés («*Redes neuronales artificiales: un largo e irregular camino hasta la actualidad*»); Calvo Martín, Escribano Ródenas y Busto Caballero («*La estadística en las enseñanzas primaria y secundaria españolas, en la segunda mitad del siglo XX*»); Corbella Doménech («*Antecedentes de la enseñanza de estadística en las universidades de Cataluña*»); Alfaro Navarro y Mondéjar Jiménez («*Principales aportaciones al análisis estadístico de series temporales de G- Udny Yule*»); Serrano Rey («*El concepto de probabilidad en Kart Popper*»); Celestino Rey («*Estadística y Falangismo*») y, por último, Carrizo, Franco y Ordás («*La Estadística en los estudios de usuarios*»).

Agradecemos en este caso el patrocinio de la Universidad San Pablo-CEU pues sin su ayuda financiera hubiera sido imposible la organización de este evento internacional y esperamos que a los lectores les siga siendo de interés y sea un complemento de las ponencias publicadas de las dos anteriores Jornadas.

Madrid, Enero de 2006

Dr. Fco. Javier Martín-Pliego
Presidente de A.H.E.P.E.

Contenido

CAPÍTULO 1

El juego que llaman azar del libro de los dados de Alfonso X el Sabio

JESÚS BASULTO SANTOS
JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUIZ
FRANCISCO JAVIER ORTEGA IRIZO
Universidad de Sevilla

Introducción

Alfonso X el Sabio nació en Toledo, el 23 de noviembre de 1221. Fue rey de Castilla, de León y "del Andalucía", como él mismo gustaba de llamarse en ocasiones especialmente solemnes (González, 2004). El cuatro de abril de 1284, en el Alcázar de Sevilla, donde treinta y dos años antes falleciera su padre Fernando III, moría Alfonso X el Sabio (González, 2004).

Alfonso X aprovechó la tradición centenaria de la prestigiosa "Escuela de Traductores de Toledo", ahora bien, las traducciones realizadas por el rey Sabio fueron, sobre todo, al romance. En Sevilla creó en 1254 unos *Estudios e Escuelas Generales de latín e de arábigo*. La última de las grandes traducciones ordenadas por Alfonso X fue *El libro del acedrex, dados e tablas*, cuya lectura y práctica debieron contribuir a aliviar la melancolía de los últimos meses de su reinado. Este libro fue completado en 1283, en Sevilla.

El libro consta de tres partes, la primera que abarca desde el folio 1 al 64 contiene la introducción y el Libro del Ajedrez. La elección de 64 folios está relacionada con las 64 casillas de una tabla de ajedrez. La segunda parte, que abarca del folio 65 al 71, contiene el Libro de los Dados y, por último, se recoge el Libro de las Tablas entre los folios 72 a 80.

El libro de los Dados recoge los siguientes 11 juegos de dados: Tanto en uno como en dos; Triga; Otra manera de Triga; el Juego de Azar; el Juego de Marlota; el de Riffa; el juego de Par con As; el Juego de Panquist; el de Medio Azar; el Azar Pujado y el Juego de Guirguiesca. Todos estos juegos son acompañados por miniaturas, donde se muestran distintos personajes en situaciones muy variadas.

La importancia de los libros de juegos en el desarrollo del Cálculo de Probabilidades está siendo investigada especialmente por Bellhouse (1993, 2004).

En la presente comunicación nos hemos centrado en el Juego denominado Juego de Azar, que comienza en el folio 67r.

A partir de aquí el trabajo proporciona una interpretación del Juego de Azar en la sección 2; en la sección 3 relacionamos este juego con el juego denominado Hazard, que encontramos en las obras de Montmor (1723), De Moivre (1718), y otros, Hald (1990). En la sección 4 relacionamos el Juego de Azar con el Juego de Craps, que es muy jugado actualmente. Concluimos el trabajo en la sección 5. Recogemos en el apéndice I el Juego de Azar. En el apéndice II recogemos la miniatura que acompaña al juego y, por último, en el apéndice III aportamos una solución del Juego de Azar.

El Juego que llaman Azar

En este juego, llamado Azar (al zahr, en árabe; hasard, en francés; azzardo, en italiano y hazard, en inglés), intervienen dos jugadores y tres dados. Como ayuda a la exposición, vamos a denominar a los jugadores por G1 y G2. Antes de comenzar el juego, se ha de decidir quién es el jugador que lanza, en primer lugar, los tres dados. En otros juegos que recoge el Libro de los Dados, por ejemplo, en el Juego de Media Azar, se dice que: "Los que quisieren iogar an de lançar primeramientre batalla"; es decir se trataría de lanzar un dado, por cada uno de los jugadores, y el que sacase la puntuación más alta sería el que entonces lanzase los tres dados. Otras veces la "batalla" sería ganada por el jugador que sacase la mínima puntuación. En este juego de azar no se dice nada de quién debe lanzar los dados.

Si ahora suponemos que es el jugador G1 el que primero lanza los tres dados, el juego de Azar considera dos tipos de eventos:

1. Los eventos tales que la suma de las puntuaciones de los tres dados pertenecen al conjunto $A=\{15,16,17,18\}$, es decir, si al lanzar los tres dados sale el evento $\{4,6,5\}$, entonces diremos que ha ocurrido el evento A. Igualmente se consideran los eventos tales que la suma de las puntuaciones de los tres dados pertenecen al conjunto $B=\{6,5,4,3\}$. Las puntuaciones recogidas por el conjunto B son las "soçobra" de las puntuaciones del conjunto A. La palabra soçobra significa, por ejemplo, que la puntuación 15 del conjunto A tiene como soçobra la

puntuación 6 porque ambas puntuaciones suman los 21, que son los puntos que corresponden a la suma de las seis caras del dado. Ahora, cuando ocurre el evento $A \cup B$ se dice que ha ocurrido Azar.

2. El conjunto complementario de $A \cup B$ contiene los eventos que al sumar los puntos de los tres dados, dicha suma pertenece al conjunto $C = \{7,8,9,10,11,12,13,14\}$. A un elemento del conjunto *A* se le llama Reazar.

   Recordemos que, suponiendo que los dados son simétricos, las puntuaciones del conjunto $A \cup B$ tienen menores probabilidades que las puntuaciones del conjunto *C* y, también, que el conjunto *A* es simétrico con respecto del conjunto *B*, en el sentido, por ejemplo, que la puntuación 3 tiene igual probabilidad que la puntuación 18. En resumen: sacar un Azar es un evento con menor probabilidad que sacar un Reazar.

Veamos ahora las reglas de este juego de Azar.

En el primer lanzamiento del jugador G1, éste puede sacar un evento Azar o un evento Reazar. Si saca un evento Azar gana el juego. Pero si saca un evento Reazar, por ejemplo, saca 9 puntos, entonces este evento, "Reazar", será la suerte (la chance) que puede hacer ganar el juego al jugador G2, en condiciones que veremos a continuación.

Si el primer jugador ha sacado un evento Reazar en el primer lanzamiento, debe entonces lanzar de nuevo los tres dados, es decir, hacer un segundo lanzamiento.

En este segundo lanzamiento del jugador G1, éste puede sacar un evento Azar, lo que le hará perder el juego. Pero si saca un evento Reazar, por ejemplo, saca 11 puntos, entonces este evento, "Reazar", será la suerte que puede hacer ganar el juego al jugador G1, en condiciones que veremos a continuación.

Si el jugador G1 ha sacado en el segundo lanzamiento un evento de tipo Reazar, la regla del juego afirma que el jugador G1 debe lanzar sucesivamente los tres dados hasta que saque su suerte, por ejemplo el evento 11, que hace ganar el juego al jugador G1, o la suerte del jugador G2, por ejemplo el evento 9, que hace ganar el juego al jugador G2. Si en los sucesivos lanzamientos que hace el jugador G1 salen eventos distintos de las suertes, por ejemplo {9,11}, entonces los jugadores no ganan ni pierden.

En el caso de que las suertes, los eventos denominados "Reazar", de cada uno de los jugadores coincidieran, es decir, que ocurra "encuentro"; la regla del juego nos dice que "E conuerna que tornassen a alançar como de cabo", es decir, comenzar de nuevo el juego.

En el Apéndice III, hemos calculado la probabilidad de que gane el juego el primer jugador, es decir, G1, suponiendo que comienza dicho jugador, resultando un valor de 0,5187.Vemos que el jugador que lanza los dados tiene un ventaja de 0,0187 (1,87%) sobre el otro jugador. Si ambos jugadores tienen la misma probabilidad de lanzar los dados, es entonces claro que el juego de azar sería justo, es decir, ambos jugadores tendrían la misma esperanza sobre el total apostado por los dos jugadores.

En la edad media se jugaba en Italia un juego de tres dados, denominado Zara (gioco d'azardo, azzardum,zardum, zarrum, zara). Este nombre de Zara es citado en el primer verso del canto VI, del cántico II, Purgatorio, de La Divina Comedia de Dante Alighieri. También este juego de Zara es citado al final del escrito "Sopra le scorpete dei dadi" de Galileo.

El juego de Zara consistía en que el jugador de turno, elegía una puntuación del conjunto {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}, y si al lanzar los tres dados salía la puntuación anunciada por dicho jugador, entonces éste ganaba el juego. Se eliminaban las puntuaciones {3, 4, 17, 18}, que se denominaban "azari", por ser "muy poco probables", en nuestro lenguaje actual.

Relación con el Juego Hazard

Un juego que hemos encontrado próximo al juego de Azar es el llamado juego de Hazard.

El juego de Harzard es recogido en la segunda parte del libro de Montmort (1713), como "Problême sur le Jeu du Hazard" (página 177).

En este juego se lanzan dos dados y, para simplificar, se consideran dos jugadores, que Montmort llama Pierre y Paul. En este juego, suponiendo que lo comienza Pierre, éste lanza los dos dados hasta que saque puntos del conjunto {5, 6, 7, 8, 9}, por ejemplo, 6 puntos. Entonces el evento 6 será la chance del jugador Paul. A continuación Pierre lanza de nuevo los dos dados. Si Pierre en este segundo lanzamiento saca una puntuación del conjunto {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, por ejemplo, 5, entonces esta puntuación es la chance para Pierre. A continuación Montmort nos describe las reglas de este juego:

1. Si la chance (suerte) que Pierre da a Paul es {6, 8}, y si en la partida que busca sacar su chance saca {6, 8, 12}, entonces gana; pero si saca {2, 3, 11}, entonces pierde.
2. Si la chance que Pierre da a Paul es {5, 9}, y si en la partida que busca su chance saca {5, 9}, entonces gana; pero si saca {2, 3, 11, 12}, entonces pierde.
3. Si la chance que Pierre da a Paul es {7}, y si en la partida que busca sacar su chance saca {7, 11}, entonces gana; pero si saca {2, 3, 12}, entonces pierde.
4. Si la chance que Pierre se da es diferente que la que dio a Paul, entonces ganará si al lanzar sucesivamente los dos dados ocurre antes su chance que la de Paul, y perderá si ocurre antes la chance de Paul que la de Pierre.
5. En todos los demás eventos, donde no se gana ni se pierde, se comenzará de nuevo el juego.
6. Si frente a Pierre hay varios jugadores, estos tendrán la misma chance.

Comparando este juego de Hazard con el juego de Azar, vemos que el de dos dados ha complicado el juego, al considerar más eventos que hacen terminarlo. Los eventos “chances” son los eventos”Reazar”, viendo que en el juego de Hazard el evento chance de Pierre se puede obtener de un conjunto más amplio que el correspondiente evento de Paul, lo que ayuda a sacar chances distintas.

Vemos que en el juego de Hazard, el jugador que busca dar al otro su chance (suerte en el juego de Azar), no gana, como ocurre en el juego de Azar. También, vemos que el jugador que lanza los dados puede ganar o perder en el lanzamiento “segundo”, es decir, una vez ha dado al otro jugador su chance que, como sabemos, para el juego de Azar, el jugador que hemos llamado G1 puede perder o seguir lanzando. Una vez ambos jugadores tienen sus chances (sus suertes en el juego de Azar), ambos juegos siguen reglas semejantes. Vemos igualmente que en los casos de empate se debe comenzar de nuevo o, en el juego de Hazard, en los casos donde nadie gana ni pierde se debe empezar de nuevo el juego.

En la página 167, Montmort resuelve el juego de Hazard, dando como probabilidad de que gane el jugador Pierre igual a 0,4908, y la de Paul, 0,5091. La desventaja de Pierre es de 0,0091, que es de 0,91%. Las reglas de este juego de Hazard pueden verse en la Enciclopedia Británica (2003). Vemos que el juego de Hazard favorece al jugador Paul, mientras que el juego de Azar favorece al jugador que lanza los tres dados.

De Moivre (1756) recoge en su obra, como problema 46 un juego de Hazard para dos jugadores. De Moivre no aporta las reglas del juego. De la solución que De Moivre da al juego, proponemos un juego de hazard que tiene la misma solución que la calculada por De Moivre.

Uno de los jugadores, que llamaremos Setter, tiene como suerte la puntuación 7. El otro jugador, que llamaremos Caster, tiene como suertes las puntuaciones del conjunto $\{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$. El setter sería la banca y el caster el jugador.

El juego comienza lanzando los dos dados, y las reglas son:

(*a*) Si en este lanzamiento sale el evento $\{6, 8\}$, entonces diremos que ha salido la suerte $\{6, 8\}$ del jugador Caster; a continuación se lanzarán repetidamente los dos dados hasta que salga la puntuación 7, que hace ganar el juego al jugador Setter, o la puntuación del conjunto $\{6, 8\}$, que hace perder al jugador Setter.

(*b*) Si en este lanzamiento sale el evento $\{5, 9\}$, entonces diremos que ha salido la suerte $\{5,9\}$ del jugador Caster; a continuación se lanzarán repetidamente los dos dados hasta que salga la puntuación 7, que hace ganar el juego al jugador Setter, o la puntuación del conjunto $\{5,9\}$, que le hace perder.

(*c*) Si en este lanzamiento sale el evento $\{4, 10\}$, entonces diremos que ha salido la suerte $\{4,10\}$ del jugador Caster; a continuación se lanzará repetidamente los dos dados hasta que salga la puntuación 7, que hace ganar el juego al jugador Setter, o la puntuación del conjunto $\{4, 10\}$, que le hace perder.

(*d*) Si en este lanzamiento sale el evento {2, 3, 12}, entonces gana el juego Setter.

(*e*) Si en este lanzamiento sale el evento {7, 11}, entonces pierde el juego Setter.

Con estas reglas del juego, la probabilidad de que el jugador Setter gane este juego es igual a 0,5071. La solución De Moivre puede verse en las páginas 160-161 de la edición de 2000.

Comparando este juego con el juego de Azar, vemos que la suerte del jugador Setter es la puntuación 7, que no depende de lanzar los dados, frente a la suerte del jugador G1, del juego de Azar, que se determina al lanzar los dados de entre el conjunto llamado Reazar. Las suertes del Caster son {4, 5, 6, 8, 9, 10}. En el juego de Azar, la suerte del jugador G2 son {7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14}. También hemos visto que el jugador Setter puede ganar el juego cuando sale la puntuación {2, 3, 12}, que son las puntuaciones con mayor riesgo, suertes de azar, mientras que en el caso del juego de Azar, el jugador G1 gana el juego si en el primer lanzamiento saca un evento azar. Recordemos que las puntuaciones extremas son menos probables que las situadas en el centro. Así, en ambos juegos, los jugadores, G1 o Setter, pueden ganar el juego con puntuaciones poco probables.

Relación con el Juego de Craps

Un juego muy popular es el denominado juego de Craps. Holy, que revolucionó la literatura sobre los Libros de los Juegos, como nos dice Bellhouse (1993), afirma que el juego de Harzard es una variante del juego del Craps. Ahora bien, la situación es la contraria, ya que el juego de Craps es una simplificación del juego de Harzard.

La descripción de las reglas de un tipo de juego de Craps, con dos dados, puede verse en el libro de R. Isaac (1995). Siguiendo a Isaac, vamos a dar un resumen de las reglas de este tipo de Craps.

Comienza el jugador G1. Si en la primera partida saca los puntos {7, 11}, gana el juego, mientras si saca los puntos {2, 3, 12}, entonces pierde. Si G1 saca otro tipo de puntos, por ejemplo, 9, entonces lo toma como su "suerte". Si el jugador ha sacado su "suerte", entonces debe lanzar los dos dados hasta que ocurra los eventos siguientes: (1) si sale antes 7 puntos que su suerte, entonces G1 pierde; (2) si sale antes su "suerte", entonces G1 gana. Cualquier otro tipo de evento no hace ganar ni perder al jugador G1. Isaac (1995), prueba que la probabilidad de ganar, el jugador G1, en este tipo de juego de Craps es igual a 244/495 = 0,492929…, que está muy próximo a un juego justo.

Observando las reglas de este juego de Craps, vemos que al compararlo con el juego de hazard analizado por De Moivre, si al jugador G1 le llamamos Caster y al G2 Setter, ambos juegos son idénticos. En conclusión, De Moivre ha resuelto un caso particular de juego de Hazard denominado Craps.

Bellhouse (1993), cita en su artículo un libro, de un autor anónimo de 1726, donde, a partir de aplicar el cálculo de probabilidades, el autor calcula el valor esperado para un juego de tipo Harzard, cuando las apuestas son de 100 libras, concluyendo que el segundo jugador, que llama Setter, es favorecido en este juego frente al otro jugador, que llama Caster. De esta cita que recoge Bellhouse nos inclinamos a pensar que el autor anónimo resolvió probablemente el juego de craps de De Moivre.

Todhunter (1865), compara el juego de Hazard de Montmort con el juego de De Moivre, concluyendo que "los resultados son iguales". A la vista de nuestros resultados, sabemos que (a) los resultados son distintos y (b) se trata de juegos distintos.

Conclusiones

En este trabajo aportamos una interpretación del juego denominado Azar, que viene recogido en el Libro de los Dados, dentro de la obra de El Libro de Ajedrez, Dados y Tablas del Alfonso X el Sabio.

El contenido de los juegos que recoge el Libro de los Dados presenta la dificultad de tener que conjeturar las reglas de los juegos. Este hecho podría explicarse a partir de que el mismo Alfonso X el Sabio contribuyó con su obra sobre "Las Tafurerías" y sus Leyes a regular y prohibir los juegos. Un ejemplo es afirmar, en sus leyes, que los prelados "no deben jugar a los dados", y en una de las miniaturas del Libro de Ajedrez, se ve a una novicia que recibe de una monja profesa la enseñanza del más noble de los juegos, durante el asueto de su recoleto convento.

También, hemos relacionado el juego de Azar con otros juegos, como el de Hazard (que se juega con dos dados), el Craps, una versión del Hazard, y un juego medieval italiano llamado Zara.

Este trabajo ha pretendido indagar en una dirección que ha abierto Bellhouse (1993), su primera ruta, acerca de buscar en los juegos y los jugadores, que siempre han existido, relaciones con el cálculo de probabilidades, anterior a la obra de Pacal y Fermat. Recordemos aquí, que el Problema de los Puntos, clave en el trabajo de Pascal y Fermat, no respondía a un juego "real", ya que todos los juegos deben concluir con lo apostado para el ganador.

APÉNDICE I

Este texto está tomado inicialmente del libro de Vicent García (1987) y de un manuscrito del Libro de Ajedrez, dados y tablas, que se conserva en la Biblioteca General de la Universidad de Sevilla. Nos hemos ayudado del Diccionario de la Prosa Castellana del Rey Alfonso X, tres tomos, donde hemos encontrado, como ilustración, frases enteras de esta obra.

[fol. 67r]. El iuego que llaman azar

Otra manera ay de iuego de dados que llaman azar que se iuega en esta guisa.

El qui primero ouiere de lançar los dados. si lançare XV. puntos o dizeseys. o dizesiete, o dizeocho. o las **soçobras** destas suertes. que son seys o cinco o quatro o tres; ganan. E qual quiere destas suertes en qual quier manera que uenga **segundo** los otros juegos que desuso dixiemos es llamado azar.

E si por auentura no lança ninguno destos azares primeramientre. & da all otro por suerte una daquellas que son de seys puntos a arriba o de quinze **ayuso**; en qual quiere manera que pueda uenir. segundo en los otros iuegos dixiemos que uinien.

E despues destas lançare alguna de las suertes que aqui dixiemos que son azar; esta suerte sera llamada; reazar. & perdera aquel que primero lançare. E **otrossi** si por auentura no lançare esta suerte. que se torna en **reazar.** & tomare pora sí una delas otras suertes que son de seys puntos a arriba o de quinze ayuso en qual quiere manera que uenga. Conuerna que lance tantas uegadas fasta que uenga una destas suertes o la suya por que gana. o la dell otro por que pierde. saluo **ende** si tomare aquella misma suerte que dio all otro; que serie llamada **encuentro**. E conuernie que tornassen a alançar como **de cabo**. E como quier que uiniesse alguna delas suertes que son llamadas azar o reazar, & entre tanto que uinie una daquellas que **amos** auian tomado pora ssi; non ganarie ninguno dellos por ella nin perderie fasta que se **partiesse** por las suertes; assí como **desuso**; dize.

Diccionario de la Prosa Castellana del rey Alfonso X

Soçobra. Se trata, por ejemplo, de que la puntuación 15 y la 6 suman 21, que es el total de las puntuaciones de las seis caras del dado.

Segundo. Conforme. [las formas encontradas son: segond, segont, según, segund, segunde, segundo, segunt]

Ayuso. abajo

Otrossi. también.

Ende. De ello.

Encuentro. En el juego de dados y algunos de naipes, concurrencia de dos cartas o puntos iguales.

De cabo. Nuevamente.

Amos. ambos

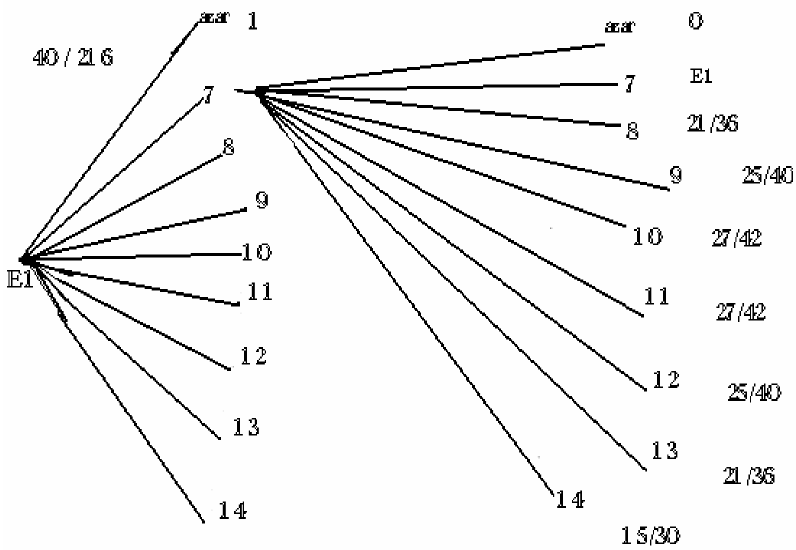
Partiesse. definición indeterminada. Aquí se refiere a que se debe desempatar.

Desuso. Antes

APÉNDICE II

APÉNDICE III

El árbol de decisión de los dos primeros lanzamientos es el que recogemos a continuación:



Suponiendo que el total apostado por ambos jugadores suma una unidad, al principio del árbol, el jugador G1, espera la cantidad que denominamos E1; a continuación vemos que la primera rama conduce a sacar un evento azar, con probabilidad (chances) de 40/216, o las puntuaciones 7,8,…,14 que son denominados reazar. Suponiendo que el jugador saca en el primer lanzamiento el evento 7, es decir, la suma de los puntos de los tres dados es 7; a continuación el jugador G1 lanza los tres dados, que pueden dar de nuevo el evento azar, que no retira nada, o los eventos 7,8,9,…,14. Para el evento 7, que coincide con el evento 7 del primer lanzamiento, debe volverse al comienzo, y por eso su valor esperado es E1; en cuanto a las demás ramas, por ejemplo, sacar un 8, el jugador G1 retirará todo lo apostado si en los sucesivos lanzamientos sale antes el evento 8, del jugador G1, que el evento 7, del jugador G2. La probabilidad de que el jugador G1 retire todo lo apostado, en este último caso, es $21/(21+15)=21/36$.

El valor del árbol que arranca del evento 7, del primer lanzamiento, es:

$$
\begin{aligned}
&0\frac{40}{216}+E1\frac{15}{216}+A(7),\\
&A(7)=\frac{21}{216}\left(\frac{21}{21+15}\right)+\frac{25}{216}\left(\frac{25}{25+15}\right)+\frac{27}{216}\left(\frac{27}{27+15}\right)+\\
&\quad+\frac{27}{216}\left(\frac{27}{27+15}\right)+\frac{25}{216}\left(\frac{25}{25+15}\right)+\frac{21}{216}\left(\frac{21}{21+15}\right)+\frac{15}{216}\left(\frac{15}{15+15}\right).
\end{aligned}
$$

Ahora, el valor esperado E1 del comienzo del árbol es la expresión siguiente:

$$E1=\frac{40}{216}+E1\cdot\sum_{i=7}^{14}P(i)^2+\sum_{i=7}^{14}A(i)\,P(i), \tag{1}$$

donde $P(i)$, probabilidad de salir la puntuación i, i = 7, 8, …, 14, se obtienen de dividir por 216 la segunda fila de la Tabla siguiente.

Puntuaciones	3	4	5	6	7	8	9	10
Casos Favorables (CF)	1	3	6	10	15	21	25	27
Puntuaciones	18	17	16	15	14	13	12	11

La expresión general de $A(i)$ es:

$$A(i)=\sum_{k=7}^{14}\left(\frac{CF(k)}{216}\right)\left(\frac{CF(k)}{CF(k)+CF(i)}\right).$$

Operando en la expresión (1), obtenemos que la probabilidad del primer jugador es 0,5187.

BIBLIOGRAFÍA

ALFONSO X, Rey de Castilla, 1221-1284. *Libro del Ajedrez, dados y tablas*. Patrimonio Nacional.

ALFONSO X, Rey de Castilla, 1221-1284. *Libro del Ajedrez, dados y tablas*. Vicent García (Editor). Valencia. 1987.

BELLHOUSE, D. R. (2004). “Decoding Cardano’s Liber de Ludo Alea”. *Historia Mathematica*, 1-23.

BELLHOUSE, D. R. (1993). “The role of roguery in the history of probability”. *Statist. Sci.*, 8,410-420.

GONZÁLEZ JIMÉNEZ, M. (2004). *Alfonso X el Sabio*. Ariel.

HALD, A. (1990). *A History of Probability & Statistics*. John. Wiley.

ISAAC, R. (1995). *The Pleasures of Probability*. Springer-Verlag.

LLOY, A. KARTEN y NITTI, John J. (2002) *Diccionario de la Prosa Castellana del Rey Alfonso X*. 3 tomos. The Hispanic Seminary of Medieval Studies, New York.

MONTMORT, A. DE (1723). *Essay d’Analyse sur les Jeux de Hazard*. Quillau. París.

DEMOIVRE, A. (1718) *The Doctrine of Chances or A Method of Calculating the Probability of Event in Play*. The Third Edition. Printed by A. Millar, in the Strand. MDCCLVI. Reprint by the American Mathematical Society, 2000.

TODHUNTER, I. (1865). *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. Macmillan, London. Reprint by Chelsea, New York, 1949.

CAPÍTULO 2

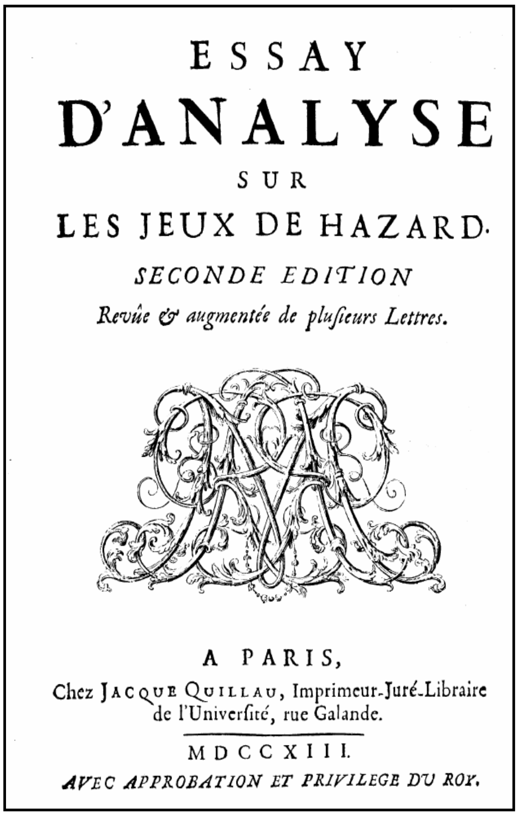
El problema de los puntos para jugadores con desigual destreza: la solución de Montmort (1713)

JESÚS BASULTO SANTOS
JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUIZ
FRANCISCO JAVIER ORTEGA IRIZO
Mª DOLORES PÉREZ HIDALGO
Universidad de Sevilla

Introducción

Pierre Rémond de Montmort nació en París en 1678 y falleció en esta misma ciudad, de viruela, en 1719. En su formación tuvo una fuerte influencia su guía y amigo Malebranche, con el que estudió religión, filosofía y matemáticas. Su aportación al campo del cálculo de probabilidades fue su libro *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, publicado en 1708. Se trata de un texto sobre juegos de azar propiamente dicho en el que se abordan diversos problemas, todos ellos inmersos en los juegos "reales" que se practicaban en su época. Así, nos encontramos con juegos como el Pharaon, la Bassete, el Lansquenet, el Treize, en los que, según él mismo escribe, "he determinado cuál es la ventaja o desventaja de los jugadores en todas las circunstancias posibles de estos juegos", o juegos como el Hombre, el Piquet, el Imperial, el Brelan, el Quinquenove, el Juego de los tres dados, el Juego del hazard (dice que éste, no practicado en Francia, era muy conocido en Inglaterra), el Her, la Tontine, el que él mismo llama el Juego de la Esperanza, el Trictrac, o el que juegan los “Salvajes” del Canadá. En todos estos introduce y resuelve diversos problemas, mostrando claramente que el texto es de una diversidad inusual hasta el momento. Sólo el precedente libro de Cardano se le parece un poco, pero el que nos ocupa es mucho más extenso y, desde luego, nada personal, en el sentido de que Montmort no incluye reflexiones particulares sobre la moral del juego o sobre sus propias experiencias como jugador, como sí lo hiciera Cardano.

La primera edición contiene 189 páginas además de un prefacio de 24 páginas. En 1713 aparece una segunda edición, revisada y aumentada, con 414 páginas y con un prefacio e introducción de 42 páginas. El incremento de páginas en ésta se debe, principalmente, a la introducción de un tratado sobre combinaciones y de una serie de cartas que intercambiaron el autor y Nicholas Bernoulli, además de una carta de Jean Bernoulli. Esta segunda edición destaca por su cuidada presentación, con grabados maravillosos en las cabeceras de los capítulos y, también, porque el nombre del autor no aparece en la página inicial que incluye el título, lugar, editor y fecha.


ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.
SECONDE EDITION
Revûe & augmentée de plusieurs Lettres.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande.
MDCCXIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Portada de la 2ª edición del libro de Montmort

Una de las secciones del texto está dedicada al ya clásico Problema de los Puntos. Lo hace en primer lugar para jugadores con igual destreza (la probabilidad de cada jugador de ganar cada partida es la misma) y luego (y esta es la importante novedad de Montmort) lo extiende al caso de jugadores con desigual probabilidad de ganar en cada partida (con desigual destreza). Nos proponemos como objetivo de este trabajo, analizar los párrafos que este autor dedica a este asunto en su completo libro sobre juegos de azar.

Solución para jugadores con igual destreza

En la edición de 1708, el autor aborda esta solución. En primer lugar, se dedica a comentar las soluciones de sus antecesores, Pascal y Fermat. Llama método analítico al empleado por Pascal, método que considera "el más natural y el más fácil", aunque "tiene el defecto de ser excesivamente largo", dado que para resolver un caso algo complejo hay que recorrer previamente todos los casos más simples. En cambio, el método de Fermat lo considera "más sabio" y "exige mayor destreza". Afirma que este método resuelve el problema de una forma muy general. Para entender las dificultades de compresión de este último método, Montmort incorpora la carta completa que Pascal envió a Fermat el 24 de agosto de 1654, carta que él encontró en las obras póstumas de Fermat publicadas en Toulouse. En esta carta, Pascal reconoce la valía del método de Fermat para dos jugadores y, tras varias consideraciones o dudas, acaba aplicando el método de forma correcta para el caso de tres jugadores.

Tras la carta, Montmort escribe: *El respeto que tenemos por la reputación y por la memoria del Sr. Pascal, no nos permite hacer notar aquí con detalle todos los fallos de razonamiento que hay en esta carta; nos bastará advertir que la causa de su error está en no tener en consideración las diversas ordenaciones de las letras.*

Estas palabras de Montmort parecen insinuar que la carta de Pascal contenía una larga lista de errores cuando, realmente, la única inexactitud que hemos encontrado es la que él mismo cita en el párrafo de arriba, inexactitud que después fue corregida por el mismo Pascal tras la carta respuesta de Fermat.

A continuación, Montmort comienza una sección bajo el epígrafe de Problemas, y en el punto 188 (como Nota I) resuelve a la manera de Fermat el Problema de los Puntos para tres jugadores en la situación (1, 2, 3), estableciendo la regla general del número máximo de partidas en las que el juego concluiría, $(1+2+3)-(3-1)=4$, e incorpora una tabla similar a la que proporciona Pascal, en la mencionada carta, de los posibles resultados en el caso de que se jugasen todas esas partidas. Esta tabla le sirve para contar los casos que son favorables a cada jugador y, así, resolver el problema. La misma nos recuerda una Distribución Multinomial en la que $n=4$ y hay tres categorías con igual probabilidad, aunque la identificación exacta con este modelo podría resultar un poco forzada. Es curioso el hecho de que Pascal, en la carta del 24 de agosto de 1654, hace uso de un hipotético dado de dos caras para justificar el método de Fermat para dos jugadores mientras que Montmort, en este texto, usa un dado de tres caras para justificar la solución de Fermat para tres jugadores.

Este punto termina con un intento satisfactorio de reducción del método. En lugar de analizar los resultados de las 4 partidas, propone hacer lo mismo, pero sólo con las 3 primeras de esas 4, dado que la cuarta, o sea, la última partida, ha de ser para el jugador que gane el juego. La idea de la distribución Binomial Negativa subyace en esta forma de resolución.

En una segunda Nota, Montmort comenta el problema para el caso de más de dos jugadores pero sin entrar en un análisis exhaustivo. De alguna forma, se contradice al criticar el método de Fermat en esta situación: *Cuando hay varios jugadores a los que les faltan varios puntos, el método que procede por las combinaciones y los cambios de orden es bastante largo, y cae también en tanto detalle como aquél que procede por el análisis, pues al poder ser favorable a diferentes jugadores un mismo lanzamiento de dados, parece que no se puede dejar de considerar lo que proporciona cada lanzamiento diferente de dados en particular, y este examen no puede ser nada más que muy largo y muy molesto;…*Ahora bien, esta nota termina reforzando su opinión inicial para el caso de dos jugadores: *Pero el método del Sr. Fermat, además de las diversas ventajas que tiene sobre el del Sr. Pascal, tiene la de resolver de una manera rápida y simple el problema en cuestión, cuando sólo se trata de dos jugadores.* Y, entonces, presenta una solución general del problema para jugadores con igual destreza: *Sea* p *el número de puntos que le faltan a Pedro,* q *el número de puntos que le faltan a Pablo. Se pide una fórmula que exprese la suerte de los jugadores.* **Solución:** *Sea* $p+q-1=m$, *la suerte de Pedro será expresada por una fracción donde el denominador será 2 elevado al exponente m, y cuyo numerador estará compuesto por tantos términos de esta serie*

$$1+m+\frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}+\frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{m\cdot m-1\cdot m-2\cdot m-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ \&\ \textit{así,}$$

como q exprese de unidades. La suerte de Pablo será el complemento de la unidad.

En el Tratado del Triángulo Aritmético de Pascal encontramos dos métodos equivalentes aportados por este último para la resolución del problema. Pues bien, el segundo de ellos, explicado bajo el epígrafe *Método para hacer el reparto entre dos jugadores que juegan a varias partidas por medio del Triangulo Aritmético,* ofrece la solución que a continuación exponemos usando un lenguaje más actualizado que el que Pascal presentó en su tratado:

Si el juego es (p,q), con $p>0$ y $q>0$, es decir, al primer jugador le faltan p partidas y al otro q partidas, la solución es:

1. Se toma la base $r=p+q-1$ del Triángulo Aritmético.
2. Se suman los valores de las q primeras celdas situadas en la base r.

   Es decir, calculamos $\sum_{i=0}^{q-1} f(i,r-i+1)$, siendo $f(\cdot,\cdot)$ el valor de la correspondiente celda del Triángulo Aritmético.

3. La probabilidad de que el juego lo gane el primer jugador es

$$\frac{\sum_{i=0}^{q-1} f(i, r-i+1)}{2^r},$$

donde el denominador, 2^r, es, como demuestra Pascal, el valor de la suma de todas las celdas situadas en esa base r.

Comparando ambas soluciones, la de Montmort y Pascal, teniendo en cuenta lo que representa el valor de cada celda en el Triángulo Aritmético, observamos que son idénticas, razón por la cual Todhunter (1865) escribe: *En la primera edición de Montmort, él se limita al caso de igual destreza y sólo da la primera fórmula*[1] *por lo que, realmente, no ha avanzado más que Pascal, aunque la fórmula sea más adecuada que el uso del Triángulo Aritmético.*

Añadimos nosotros y lo detallaremos en el siguiente apartado que, en el proceso de resolución está latente una modelización de la situación mediante la distribución Binomial con parámetros: $r =$"número de partidas que se jugarían como máximo" y con probabilidad de éxito en cada partida igual a $\frac{1}{2}\cdot$

Con esto termina lo que Montmort incluyó en la primera edición de su tratado, sobre el asunto del Problema de los Puntos.

Primera solución para jugadores con desigual destreza

Una copia de esta primera edición fue enviada a Jean Bernoulli quien, en marzo de 1710, le remite una extensa carta donde, además de alabar las "diversas cosas bellísimas" que contenía el tratado, le aporta reflexiones propias y juicios críticos. En particular, Bernoulli le envía, sin demostración, la solución del Problema de los Puntos para jugadores con **desigual destreza**. Lo enuncia y da la solución de la siguiente forma:

Pedro y Pablo juegan a varias partidas a un juego desigual donde el número de casos favorables a Pedro es al de casos favorables a Pablo::a.b; y después de haber jugado algún tiempo el número de partidas que aún le faltan a Pedro es p, y el número de partidas que le faltan a Pablo es q. Se pide la razón de sus suertes. Elevad el binomio $\overline{a+b}$ *a la potencia* $p+q-1=r$. *El número de términos será* $p+q$. *Yo digo que la suma de los primeros términos cuyo número sea q, es a la suma del resto de términos cuyo número será p, como la suerte de Pedro es a la de Pablo; ahora bien, estas dos sumas son como sigue:*

[1] Para la solución general del problema, Montmort aporta dos fórmulas equivalentes y aquí, Todhunter, hace referencia a la primera de ellas.

$a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} b^1 + \frac{p \cdot p-1}{1 \cdot 2} a^{p-2} b^2 + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{p-3} b^3 + \&$ *así, continuando hasta el número de términos expresado por q.*

Y $b^r + \frac{r}{1} b^{r-1} a^1 + \frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2} b^{r-2} a^2 + \frac{r \cdot r-1 \cdot r-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^{r-3} a^3 + \&$ *así, continuando hasta el número de términos expresado por p.*

Observamos que, si b fuese la probabilidad del segundo jugador de ganar una partida (en la notación de Bernoulli dicha probabilidad sería $\frac{b}{a+b}$), faltándole a dicho jugador q partidas para ganar el juego, y r es el número total de partidas que se jugarían, la variable aleatoria X: "número de partidas ganadas por ese jugador de un total de r", sigue una distribución Binomial de parámetros r y b, cuya función de cuantía es $\binom{r}{x} b^x a^{r-x}$. Este jugador ganará el juego si consigue ganar, como mínimo, las q partidas que le faltan. Por tanto, la probabilidad de conseguirlo será

$$P[X \geq q] = P[X = q] + P[X = q+1] + \cdots + P[X = r] =$$
$$= \binom{r}{q} b^q a^{r-q} + \binom{r}{q+1} b^{q+1} a^{r-q-1} + \cdots + \binom{r}{r} b^r,$$

resultado equivalente al expuesto por Bernoulli en la segunda igualdad. Por tanto, este autor identifica la situación con lo que hoy conocemos como la distribución Binomial de parámetro cualquiera y ofrece como solución la función de distribución de la misma. Respecto a la primera expresión que escribe Bernoulli, sobre la chance del primer jugador, pensamos que hay una errata en los sucesivos exponentes de a que se escriben a partir de p y sus valores decrecientes, cuando lo correcto es a partir de r como ocurre con la segunda expresión para la suerte del segundo jugador. Probablemente, fue una errata del mismo Jean Bernoulli al transcribir sus propias notas a la carta que envió a Montmort.

En la segunda edición del tratado, la de 1713, Montmort incorpora esta solución con una formulación similar y con su demostración. La demostración, con notación actualizada, sigue los siguientes pasos:

1. El juego ha de concluir necesariamente en $r = p + q - 1$ partidas.

2. Disponemos de r dados con dos caras cada uno: una cara blanca, que favorece al primer jugador y otra cara negra que favorece al segundo, y con probabilidades a y b de aparecer una y otra. En este punto, el autor nos remite a la primera parte del tratado donde, en el Art. 27, se demuestra que los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio coinciden con los números de la correspondiente columna del Triángulo Aritmético y con los que expresan "las diversas combinaciones de un número cualquiera de fichas o dados que tienen dos

caras diferentes". Esto le lleva a escribir que los sucesivos sumandos que intervienen en el cálculo de la probabilidad de que el primer jugador gane el juego son:

$$a^r = \binom{r}{r} a^r = \text{"que salgan } r \text{ caras blancas"},$$

$$r \cdot a^{r-1} b = \binom{r}{r-1} a^{r-1} b : \text{"que salgan r} - 1 \text{ caras blancas y 1 negra"},$$

$$\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} a^{r-2} b^2 = \binom{r}{r-2} a^{r-2} b^2 : \text{"que salgan } r-2 \text{ caras blancas y 2 negras"},$$

y así hasta reunir q sumandos, por lo que el último de ellos será $\binom{r}{p} a^p b^{r-p}$, dado que $r - q - 1 = p$.

3. Son equivalentes los sucesos "conseguir p éxitos en r pruebas" y "conseguir p caras blancas al lanzar r dados de las características anteriores". Por tanto, la probabilidad de que gane el juego el primer jugador (que le faltan p partidas) es: $\sum_{i=p}^{r} \binom{r}{i} a^i b^{r-i}$.

Podemos escribir:

$$P[\text{de que gane el primer jugador}] = \sum_{i=p}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{i} a^i b^{p+q-i-i} \tag{1}$$

Segunda solución para jugadores con desigual destreza

Bajo el título de *Otra Fórmula*, Montmort añade una segunda solución a este problema. La justificación de la misma es como sigue:

- En el Tratado del Triángulo Aritmético de Pascal hay un anexo titulado "Uso del Triángulo Aritmético para las combinaciones". En dicho anexo encontramos, bajo el epígrafe de Lema IV, la siguiente igualdad: $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}$, que Pascal demuestra considerando que los $k+1$ elementos son k elementos primeros más uno último y considerando que el número combinatorio del primer miembro es el resultado de sumar dos números: el número de combinaciones de k que no contienen al último y el número de aquellas que sí lo contienen. Montmort conocía perfectamente esta igualdad como lo demuestra la primera parte de su segunda edición del Tratado dedicada a las "combinaciones".

- Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por $a^i b^{k+1-i}$ y despejando el primer sumando del segundo miembro nos queda: $\binom{k+1}{i} a^i b^{k+1-i} - b\binom{k}{i} a^i b^{k-i} = \binom{k}{i-1} a^i b^{k+1-i}$, donde los dos términos del primer miembro se pueden interpretar como

$$\begin{aligned}&P\{de\ conseguir\ i\ éxitos\ en\, k+1\, pruebas\} -\\&P\{de\ conseguir\ i\ éxitos\, en\, k\ pruebas\} =\\&P\{de\ no\, conseguir\ \ éxito\ en\, la\ última\ prueba\}\end{aligned}$$

Por tanto, esa diferencia de probabilidades nos lleva a la probabilidad de que el i-ésimo éxito (el último éxito) se produzca en la $(k+1)$-ésima prueba (en la última prueba). Si hacemos $k+1-i=j$, la expresión del segundo miembro se transforma en $\binom{i-1+j}{i-1} a^i b^j$, que se interpreta como la "probabilidad de que el primer jugador consiga j fracasos antes de conseguir su i-ésimo éxito. Pues bien, esto es lo que usa Montmort para construir su segunda solución, pues la probabilidad de que el primer jugador gane el juego (al que le faltan p partidas), se puede escribir a partir de la variable aleatoria X: "número de fracasos del primer jugador antes de su p-ésimo éxito", variable que sigue una distribución Binomial Negativa de parámetros p y a, como:

$$\begin{aligned}P[\text{que gane el primer jugador}] &= P[X=0]+P[X=1]+\cdots+P[X=q-1]=\\&=\binom{p-1}{p-1}a^p+\binom{p}{p-1}a^p b+\cdots+\binom{p+q-2}{p-1}a^p b^{q-1}=\\&=a^p\sum_{i=0}^{q-1}\binom{p-1+i}{p-1}\cdot b^i.\end{aligned}$$

Esta suma, bajo, su propia formulación, es la que este autor propone como solución en su *Otra Fórmula*. Podemos escribir, pues, que la segunda solución de Montmort es:

$$P[\text{de que gane el primer jugador}] = a^p\sum_{i=0}^{q-1}\binom{p-1+i}{p-1} b^i \qquad (2)$$

Le falta por demostrar la igualdad entre ambas soluciones, la igualdad entre (1) y (2). Lo hace sólo para el caso particular donde $p=5$ y $q=3$ mediante una simple reducción a común denominador de las fracciones que aparecen en los sumandos de la expresión (2), fracciones producidas por las probabilidades que intervienen con sus respectivas potencias. Esa reducción a común denominador le lleva a la expresión (1).

Este fragmento termina con dos notas. En la primera de ellas Montmort nos advierte que, aunque pueda imaginarse que las "suertes" de los dos jugadores son las mismas en el caso en el que necesiten conseguir p y q partidas, respectivamente, y en el caso en que necesiten $n \cdot p$ y $n \cdot q$, esto no es cierto, ni incluso en el caso en que ambos jugadores tengan igual probabilidad de éxito en cada partida. Sabemos por el teorema de Bernoulli que si el número de pruebas independientes se hace suficientemente grande hay una alta probabilidad de que el número de éxitos conseguidos por uno y otro jugador esté en una razón similar a la de sus propias probabilidades. Por tanto, si la razón entre p y q fuese menor que la de sus correspondientes probabilidades, incrementando el valor de n podemos conseguir una probabilidad tan grande como queramos de que el primer jugador consiga ganar $n \cdot p$ partidas antes de que el segundo consiga las $n \cdot q$ que necesita. Esto es lo que parece insinuar Montmort cuando dice que *"la suerte de Pedro será siempre tanto mejor, en cuanto que c & d designen a los números más grandes, en comparación con p & q; de manera que si un jugador puede dar ocho puntos de dieciséis al villar a otro jugador: no se puede concluir que él pueda, sin desventaja, darle cuatro de ocho"*.

En la segunda nota final el autor manifiesta su deseo de encontrar fórmulas similares para la resolución del problema de los puntos en el caso en el que el número de jugadores fuese tres, cuatro,… pero *"hay razones para creer que esta investigación es extremadamente difícil, y hay la apariencia de que no se puede añadir nada a la que hemos dado antes"*.

Conclusión

Nos encontramos con un autor, Pierre Rémond de Montmort que, sin ser de los más renombrados en la Historia de la Probabilidad, aporta la solución definitiva al Problema de los Puntos para dos jugadores en cualquier circunstancia (con igual y desigual destreza) mediante dos fórmulas alternativas y equivalentes (demostrando la equivalencia entre ambas en un ejemplo concreto) que hoy identificamos perfectamente con las modelizaciones Binomial y Binomial Negativa.

BIBLIOGRAFÍA

DAVID, F.N. (1962). *Games, Gods and Gambling*. Charles Griffin & Co. Ltd., London.

EDWARDS, A.W.F. (1987). *Pascal's arithmetical triangle*. Griffin, London.

HALD, A. (1990). *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. John Wiley & Sons. New York.

MONTMORT, P.R. DE (1713). *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*. Seconde Edition. Revûe et augmentée de plusieurs Lettre. Quillau, París. Publicado de forma anónima.

MORA CHARLES, M.S. DE (1989). *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad: siglos XVI y XVII*. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Bilbao.

PASCAL, B. (1963). *Oeuvres Complètes*. Edición de Lafuma, París.

TODHUNTER, I. (1865). A History of the of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace. Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.

CAPÍTULO 3

Caramuel, Pascal y la probabilidad filosófica

MARTA GARCÍA SECADES
Universidad San Pablo-CEU

Algunos aspectos bibliográficos

Juan Caramuel Lobkowitz nace en Madrid en el año de 1660 y fallece en Vigevano (Lombardía). Estudió humanidades y filosofía en la Universidad de Alcalá, en donde estableció una profunda amistad con algunos cistercienses, entre otros, Fray Crisóstomo Cabero, lo llevaron a ingresar en la Orden. Fue profesor de teología, doctorándose en esta disciplina en la Universidad de Lovaina (1638); allí permaneció algunos años polemizando con los jansenistas, con tal celo que San Alfonso María de Ligorio llegó a calificarle como *Princeps Laxitarum* (Teología Regularis; n. 1602). Ocupó diversos e importantes cargos eclesiásticos: Abad en Escocia y Vicario General de la Orden en Inglaterra, Abad en Praga y Viena, Obispo Coadjuntor en Maguncia, Agente del Rey de España en Bohemia, Obispo en Campagna (Nápoles) y en Vigevano (cerca de Milán).

Espíritu de inquietud verdaderamente enciclopédica, escritor brillante y fecundísimo, se le atribuyen hasta doscientos sesenta y dos títulos acerca de las más dispares materias: teología, lógica, metafísica, matemáticas, astronomía, gramática, derecho, arquitectura...etc.

Caramuel

Pascal

Blaise Pascal, nace en Clermont (Francia) en el año de 1623 y muere en 1662.

Bajo el control de su padre rápidamente se mostró como un prodigio de las matemáticas. A los doce años redactó por intuición los principales postulados de la geometría euclidiana y a los dieciséis estableció uno de los teoremas básicos de la geometría proyectiva (Teorema de Pascal). En 1642 inventó la primera máquina de calcular mecánica. En 1648 demostró mediante un experimento la hipótesis del físico italiano Evangelista Torriceli, respecto al efecto de la presión atmosférica sobre el equilibrio de los líquidos.

Es considerado, junto con P. Fermat el padre de la probabilidad matemática. En efecto, en la segunda mitad del siglo XVII trató de resolver, ciertos problemas relativos a los juegos de azar planteados por el caballero de Meré, célebre jugador de la corte francesa de aquel entonces, a Pascal.

En el año de 1654 Pascal dio un giro radical a su vida, abrazó el jansenismo ingresando, después, en la comunidad jansenista de Port Royal, donde llevó una vida absolutamente ascética hasta su muerte, ocho años más tarde.

Eminente matemático y físico y uno de los más grandes escritores místicos de la literatura cristiana.

Contexto histórico y Teología Moral

El mundo de los siglos XVI y XVII planteaba numerosos y novedosos problemas en la política, en la economía, en el campo de la sexualidad... etc. Sólo los primeros y universales principios de la moral y el derecho son ciertos. Lo difícil para el hombre es aplicar esos principios universales a los variados casos de la actividad humana. La cuestión a tratar será la bondad o la malicia de las acciones humanas sólo en el caso en que no se pueda alcanzar el conocimiento de la ley. Por tanto, cuando no es posible resolver la duda práctica cuando esta se plantea, ¿qué se puede hacer para obrar correctamente? Se abre ante nuestros ojos un abanico de posibilidades: abstenerse de realizar la acción, seguir la parte más segura y, por último, aún permaneciendo en la duda especulativa llegar ayudado de principios reflejos a un juicio práctico; es decir, a una certeza moral sobre la licitud del acto. Cuando nos encontramos ante este último caso, inmediatamente surge una nueva pregunta, ¿qué clase de probabilidad se permite y sería suficiente para formar esa certeza moral? ¿Opinión sólidamente probable u opinión más probable o probabilísima?

Ante estas nuevas situaciones surgirán dos tipos de respuestas. Por un lado, los que se inclinarán por la defensa a ultranza de los principios tradicionales. (Probabilioristas y Jansenistas) Y, por el otro, aquellos que consideraban que las soluciones antiguas no daban respuesta a los nuevos problemas, aquellos que tratan de acomodar a los nuevos tiempos la teología moral (Probabilistas).

Probabilismo Moral

Según la doctrina moral del Probabilismo, establecida en el año de 1577 cuando Fray Bartolomé de Medina publicó su tomo sobre la *Primam Secundae* de Santo Tomás, con tal de que sea verdaderamente y sólidamente probable la opinión que favorece a la libertad, puede el hombre seguirla, aunque la opinión contraria a favor de la ley fuera igualmente probable o aún más probable. El probabilismo expuesto por Medina fue perfeccionado y precisado por grandes teólogos como Gabriel Vázquez y Francisco Suárez, quienes definieron claramente el carácter y límites del probabilismo.

Los primeros años fueron de consolidación y ordenación del nuevo sistema. Apenas salió, en el primer medio siglo de vida, del flamante nido en el que nació: España. Como todo nuevo movimiento, el probabilismo tuvo una aceptación muy rápida. Sería en la Compañía de Jesús donde, a partir de este momento, encontraría esta doctrina el mayor número de adeptos. Una de las razones que impulsarían tal hecho fueron los espectaculares logros alcanzados por sus Colegios y obras apostólicas desde 1545 hasta 1600, que motivaron a la Compañía a buscar un pensamiento teológico, una espiritualidad propia como elemento integrador en todos los sentidos. Si bien, es necesario aclarar que el probabilismo se hizo pronto doctrina común en todas las escuelas.

Parece que la doctrina probabilista había "calado hondo" y, lo cierto es, que no nos resulta extraño ante el cambio y las novedades que este atractivo y sugerente sistema llevaba consigo: el pensamiento español se mostraba profundamente humanista y preocupado por la conducta ética que esta concepción suscitaba, desgarrándose entre la infinitud y el vivir cotidiano.

Alrededor de 1620 salió el probabilismo de su patria nativa, España, llegando a ser en ella un adulto. Penetró en las más célebres universidades de orbe católico, tales como París, Salamanca, Lovaina, Alcalá y otras. Fue este el periodo áureo del probabilismo. Estos primeros años fueron de paz octaviana, donde los autores probabilistas brillaban como astros de primera magnitud. Todos los escritores de la época trataban al sistema probabilista desde un punto de vista puramente especulativo. Se trataba de ofrecer una regla que permitiera salir de dudas y obrar en todos aquellos casos en que existían soluciones muy contrastables; en tales casos se decía que era lícito seguir la opinión que apareciera verdaderamente probable, aunque la contraria fuera igual de probable o incluso más probable. En definitiva, se trataba de aplicar un principio más general e indiscutible *lex dubia non obligat*. Hasta aquí no había motivo para alarmarse y nadie se atrevió a contradecir el probabilismo.

A partir de una fecha, que habría que situar en torno a 1650 nace el probabilismo ancho o acomodado como consecuencia de una interpretación desmedida, de un alejamiento progresivo de los primeros principios probabilistas como consecuencia de la despreocupada casuística. La casuística era una técnica que tenía por objeto la resolución de los casos de conciencia aplicando reglas generales a casos particulares, en los que las circunstancias alteraban los referentes morales de cada acto humano.

El probabilismo ancho creció en el bosque espeso de la casuística, que asignaba un papel negativo a la ley, puesto que se creía que con ella se restringía la libertad humana y daba ocasión de pecado. El modo, a veces desequilibrado y metódicamente inepto de proponer el sistema probabilista arrastrará a actitudes demasiado acomodadas, descubriéndose ahora con facilidad abusos doctrinales, lógicos y prácticos del sistema original.

Lo cierto es que un sector, que podría encuadrarse dentro de la Compañía de Jesús, mostraba gran comprensión ante la "debilidad moral" de los hombres. Tal vez les guiara el deseo de facilitar la salvación del mayor número de almas pero se dejaban, al mismo tiempo llevar, por un exceso de comprensión que, en ocasiones, les llevó a los extremos del laxismo.

En España, el probabilismo ancho marcha unido a tres figuras importantes: Antonio Escobar y Mendoza, Mateo Moya y Juan Caramuel, uno de los protagonistas de nuestra historia.

Caramuel y el probabilismo versus Pascal y jansenismo

Encendida la guerra en España contra el probabilismo sale en su defensa Antonio Escobar y Mendoza lanzando al mundo su *Teología Moralis.* En su suma de teología, pueden verse muchos párrafos en los que defiende a ultranza "su sistema probabilista", uno de los más representativos pudiera ser el siguiente:

«*Es lícito a los fieles seguir, aún en el punto de su muerte, su secta, aunque menos probable; pues no está menos obligado el hombre a evitar el pecado en vida, que en muerte. Y si en el discurso de la vida la secta menos probable es regla justa de buenas costumbres, lo mismo en el punto de la muerte*»[1].

En su obra *Examen y Práctica de Confesores y Penitentes*, señala que aún en materia de sacramentos se puede seguir la opinión más probable en concurso de la más probable y segura:

«*Muérese un niño, no hay agua para bautizarle, pero hay caldo de carne, o nieve por derretir, o agua rosada, o zumos de yerbas, ¿qué debe hacerse? Hace de bautizar sub contione, siguiéndose opiniones probables que hay en esta materia; aunque sea más probable y seguro lo contrario*»[2].

La multitud de "opiniones dulces" que contenían sus trabajos encendieron contra él las plumas de todos los antiprobabilistas (probabilioristas y jansenistas) recibiendo numerosas críticas. Críticas como las que de forma dura y no poco apasionada le improperará Pascal, el segundo protagonista de nuestra historia, en sus *Cartas Provinciales*, en donde tratará con gran éxito de ridiculizar las sentencias de Escobar y con él a todos los probabilistas, pero tal vez nos estamos adelantando al curso de nuestra historia.

Entra en escena por aquel entonces Juan Caramuel, extraordinario personaje de cuya mano nos valdremos para conocer lo que en esta época estaba sucediendo con el tema de lo probable.

Caramuel conocía en profundidad la filosofía antigua, pero sus argumentos eran bien diferentes. Considera que el criterio de autoridad está obsoleto proponiendo en su lugar el método matemático y experimental.

Caramuel considera que muchas son las disciplinas cuyas materias quedan afectadas de probabilidad. En efecto considera que en las ciencias morales, jurídicas y teológicas la lógica de Aristóteles resulta inútil, puesto que la verdad, la cuantificación...etc. no son conceptos enterizos que funcionen en un sistema bivalente, sino más bien conceptos graduales dentro de unos límites. La probabilidad puede quedar sometida a reglas precisas y razonamientos corrientes y evidentes. La probabilidad de las conclusiones, puede entrar dentro de unos límites calculables y quedar en fundamentos que, dejan de ser probables, para convertirse en verdaderos.

[1] CONCINA, D: *Historia del Probabilismo y Rigorismo. Tomo I.* Oficina de la Viuda de Manuel Fernández. Madrid, 1772, p. 122.

[2] ESCOBAR Y MENDOZA, A: *Examen y Práctica de Confesores y Penitentes.* Imprenta de María Quiñónez. Madrid, 1650, p. 391.

Caramuel sostiene el probabilismo en Teología. J. Velarde nos resume las sentencias que sobre este punto, mantiene el ilustre doctor en su famosa *Apologema*:

> «*Sostiene que en materia de fe y de costumbres es suficiente, para la seguridad de conciencia, la opinión probable* (probabilismo). (...) *Por el contrario, la doctrina opuesta que niega a la opinión probable la capacidad de dar seguridad a la conciencia, se puede considerar, según el juicio de muchos ilustres doctores, como totalmente improbable y asentada sobre la herejía jansenista*»[3].

Fue Caramuel el primero, o al menos, de los primeros en atribuir en su *Apologema* la negra mancha de rigorismo a la sentencia más probable de los probabilioristas y jansenistas. Hecho que necesariamente nos lleva a analizar las relaciones nada cordiales, por cierto, mantenidas entre Caramuel y el bando jansenista.

El jansenismo hace una crítica radical de la casuística —obra de la razón— y del probabilismo. El punto de partida dogmático del jansenismo será la corrupción total de la naturaleza humana debida al pecado original. Según esta doctrina la razón no ofrece ayuda alguna para encontrar la verdad; la concupiscencia inclina al mal. Sólo la revelación de la voluntad de Dios presente en las Sagradas Escrituras e interpretada por los santos Padres —sobre todo por San Agustín— puede enseñarnos lo que hemos de hacer.

La guerra abierta entre Caramuel y los jansenistas no comienza hasta el año de 1641, cuando Caramuel denuncia en el Colegio de Lovaina las desviaciones contenidas en el *Augustinus*[4]. Fue Caramuel el encargado de rebatir, una por una, las sentencias jansenistas sometidas a examen público, saliendo vencedor en la disputa. Podemos imaginarnos la valoración positiva que de tal hecho hicieron los jesuitas, pues juntos habían salido airosos contra el común adversario. A partir de este momento no cesará nuestro ilustre Caramuel en sus ataques a los jansenistas. De ahí la ojeriza que le tenían los rigoristas de Port Royal. Y, es que a la doctrina jansenista se adhirieron ciertos devotos e intelectuales belgas y franceses, que hicieron de la abadía femenina de Port Royal el centro de sus reuniones y actividades.

Caramuel considera que son los jansenistas los responsables de la mala reputación que está tomando la doctrina probabilista que él profesa. Decide en consecuencia fijar el blanco de las discusiones teológicas en este grupo. El trece de mayo de 1653 el Papa Inocencio X promulga la Constitución *Cum Occasione* condenando las cinco proposiciones extraídas del *Augustinus* de Jansenio. Hecho que supuso un duro golpe para los jansenistas. La reacción de este grupo no se hizo esperar, acusaron a sus ad-

[3] VELARDE LOMBRAÑA, J: *Juan Caramuel: vida y obra.* Pentalfa. Oviedo, 1989. p. 330.

[4] Jansenio había muerto el seis de mayo de 1638, sin haber publicado su *Augustinus*. Pero el manuscrito quedó en manos amigas: E. Van Caden, el arceliano de Malinas y L. Froidmont, profesor de teología de la Universidad de Lovaina. Ellos fueron los encargados de dar el manuscrito a la imprenta saliendo finalmente a la luz a lo largo de 1640. La doctrina de Jansenio plasmada en el *Augustinus* fue interpretada y sintetizada en cinco proposiciones por el Síndico de la Facultad de Teología de la Universidad de París, en el año de 1649. Fue el Papa, Inocencio X, quien cuatro años más tarde las condenaría.

versarios de laxistas, a la cabeza de los cuales colocaron a Caramuel. Al fin y al cabo había sido este último el primero en denunciar las herejías que finalmente se condenaron en Roma.

Los doctores de París, capitaneados por Arnauld deciden no someterse a la Constitución romana alegando que la condena atañe a las proposiciones de cierta herejía imaginaria, pero nunca al genuino sentido de Jansenio. Los jansenistas centrarán todos sus empeños en acusar las doctrinas de Caramuel establecidas en su *Teología Moral* (la primera edición es del año 1645, Lovaina). Esta obra había sido ya criticada con anterioridad por teólogos de Lovaina partidarios del jansenismo. Pero, hasta ahora, esta obra no era más que un pequeño opúsculo de la obra monumental de Caramuel que saldría a la luz en Francfort en el año de 1652 con el título de *Teología Moralis Fundamentalis*. Ocurrió que algunas de sus doctrinas contenidas en los dos gruesos tomos de su nueva obra fueron tachadas de laxistas por los jansenistas. Llegaron hasta tal punto las acusaciones que recaen en el Tribunal de la Inquisición Romana.

Ante esta situación, nuestro perspicaz Caramuel, se vale de la amistad que tenía con Chigui, Secretario de Estado desde 1651. Acude a él y le pide protección y ruega al Papa Inocencio X (en una carta fechada en febrero de 1654), que le permita ser escuchado antes de ser condenado. Sucedió que en enero del año siguiente muere Inocencio X, saliendo elegido en abril de 1655 como nuevo Papa Chigui, tomando el nombre de Alejandro VIII. Este hecho significó que los ataques hacia la persona de Caramuel disminuirían, sólo por el hecho de la amistad que tenía con el nuevo Sumo Pontífice. De esta manera, los ataques a su *Teología Moralis Fundamentalis* quedaron neutralizados.

Resolvió sabiamente Caramuel quedarse en Roma bajo el amparo de Alejandro VIII. Pero el mismo Papa que no había encontrado objeción algunos años atrás en su *Theologia Moral* va cambiando poco a poco de parecer y le pide ahora, sobre su edición de 1652, que rectifique algunas opiniones “audaces”. Cosa que hace Caramuel en la edición de 1656. El mismo Papa que había calificado antes a los jansenistas de perturbadores de la paz pública y firme partidario del sistema probabilista cambia ahora de parecer. Es debido a su sugerencia, por lo cual, el Capítulo General de los Dominicos condenará en el año de 1656 el probabilismo. ¿Cómo se había podido pasar en tan pocos años de abrazar la doctrina probabilista a repudiarla ahora hasta sus últimas consecuencias? J. Velarde nos lo explica:

> «*En Roma, la jerarquía eclesiástica tras la corte de la exclusividad de derechos que para la Iglesia Católica supuso la Paz de Westfalia tendía a desplegarse y aislarse del mundo (político y científico) moderno, volviendo a su integrismo ya desfasado. Y esta tendencia era manifestada en Chigui, quien desde sus posiciones aperturistas cuando era Nuncio en Colonia —nada reprobable encontró entonces en la Teología Moralis de Caramuel— fue cuando, tras ser elegido Papa y presionado también por el grupo que le había votado, derivó hacia posiciones inte-*

gristas y de intransigencia moral; posiciones más afines al rigorismo jansenista que al probabilismo de Caramuel»[5].

Así estaban las cosas cuando salen a la luz clandestina y sucesivamente, a lo largo de más de un año, dieciocho cartas escritas por Pascal, que habrían de ser condenadas en Roma en el año de 1657. Estos escritos, *Cartas Provinciales,* contribuyeron a que se produjeran dos hechos relevantes: desfigurar la verdadera imagen del probabilismo y crear una leyenda negra de acusaciones contra los jesuitas.

El objetivo de las tres primeras Cartas es la defensa del patriarca de los jansenistas, Arnauld. Se trataba de evitar una condenación que la Sorbona estaba para hacer de sus doctrinas, aunque fue en vano, ya que la sentencia se dictó el treinta y uno de enero de 1656, perdiendo Arnauld su título de doctor el quince de febrero del mismo año. El motivo de la condenación sería una serie de apologías a favor de la doctrina de Jansenio escritas en el año de 1643.

De la cuarta a la décimo octava Carta, el asunto de la casi totalidad de los escritos fue atacar la supuesta moral ancha de los probabilistas, y en especial la de los jesuitas.

«*¡Bendito seáis padre por justificar a las gentes! Los demás enseñan a curar las almas por medio de penosas austeridades: pero vos mostráis que aquellas que hubiéramos creído las más desesperadamente enfermas se encuentran bien. ¡Oh, qué hermoso modo de ser feliz en este mundo y en el otro!*»[6].

El recurso literario del que se sirve de la cuarta a la décima Carta, consiste en presentar a un jesuita a quien él consulta sobre distintos puntos, haciéndole exponer la doctrina que defienden los de su religión de tal forma que resulte ridícula.

Pascal no era teólogo, había estudiado durante años Matemáticas y Física, siendo un verdadero profano en el campo de la teología. Parece ser, que lo único que había leído de los teólogos jesuitas fue la obra breve de Antonio Escobar y Mendoza. Tal vez fuera este el motivo por el cual, de entre todos los escritos contra los que arremete, sobresalen las críticas a este jesuita. Las obras del padre Escobar: *Examen y Práctica de Confesores y Penitentes* y, sobre todo, su *Teología Moral*, aún sin conocerlas plenamente sirvieron para que con una dura sátira y fina ironía, ridiculizara en la persona de Escobar a todos los probabilistas.

Así pues, queda probado como Pascal conocía la obra de al menos uno de los más conocidos probabilistas españoles de la época, lo que nos lleva a suponer que la influencia de estos debió ser aún mayor, los miembros de Port Royal tenían que haber leído a muchos autores españoles, los contactos con el probabilismo hispano debían ser persistentes.

---

[5] VELARDE LOMBRAÑA, J: *Op. Cit*., pp. 328, 329.

[6] PASCAL, B: *Obras: Pensamientos. Provinciales. Escritos Científicos. Opúsculos y Cartas*. Alfaguara. Madrid, 1981, p. 80.

Lo cierto es que desde entonces, la “moral relajada” vino a convertirse en una imputación continua de los jesuitas. Observemos, algún párrafo: Pascal ha hecho que el padre jesuita explique de forma absurda la doctrina probabilista y después de esto responde Pascal:

> «— *Preveo tres o cuatro grandes inconvenientes y fuertes vallas que se opondrán a su carrera.*
>
> — *¿Cuáles? –me preguntó el padre llenos de asombro.*
>
> — *Son –le respondí– la Sagrada Escritura, los Papas y los Concilios, a los que no podéis desmentir, y que todos ellos estarán en la senda única del Evangelio.*
>
> — *¿Eso es todo? –exclamó–. Me habías asustado*»[7].

Los argumentos se manejan con habilidad para que los mismos acusados pronuncien la acusación. El tono es punzante y, muchas veces, agresivo. Las ironías y las burlas de las que se sirve Pascal para desprestigiar y tratar de erradicar el sistema probabilista nos parecen, al menos, exageradas. Pues, si bien es cierto que algunos de los escritores moralistas de la época, carecían de la serenidad y capacidad intelectual de sus antecesores, que sus escritos estaban matizados de una excesiva pasión, no por ello debemos quitarles el gran mérito de realizar un esfuerzo importante de actualización y modernidad, al defender el hombre frente a la ley y, todo ello, con la ayuda de la probabilidad.

Lo cierto es que a pesar de que el estilo utilizado por Pascal no fuera ni sistemático ni profundo sus Cartas fueron acogidas con gran aplauso. Es probable que el motivo de tan amable agradecimiento fuera precisamente la prosa fácil y el tono picante con el que se escribieron que le hicieron correr de mano en mano, obteniendo una gran respuesta popular.

Hasta la segunda mitad del siglo XVII, la concepción de lo probable y los primeros intentos de solventar los problemas concernientes a los pasatiempos de azar habían ido por distintos derroteros. Si bien, estos últimos, supusieron el mayor y mejor estímulo para que la Teoría de la Probabilidad pudiera nacer primero y prosperar después. Es a nuestro juicio aquí donde se produce el engarce y conexión entre ambos tipos de probabilidad: probabilidad moral o probabilismo (tradición filosófica) y probabilidad matemática (juegos de azar-geometría al azar).

La noción y aplicabilidad de la idea de lo probable se había extendido y difundido a través del probabilismo nacido en España. La probabilidad matemática sería desarrollada a partir de la resolución del problema de la división de las apuestas por Pascal y Fermat. En estos desarrollos es destacable el hecho de que Pascal nunca utilizara el término de “probabilidad” en su lugar empleó el de azar, suerte...etc., en su geometría al azar. Muchos son los autores —entre los cuales destacamos a Baudin, Hacking y Thirounuin— que hablan de la contradicción de Pascal respecto a la probabilidad.

[7] PASCAL, B: Ibidem, p. 101.

No estamos de acuerdo con la visión que este grupo de investigadores hacen sobre el asunto, consideramos más bien, que Pascal acepta el principio de probabilidad que establecen los autores probabilistas españoles. Sus fervientes críticas materializadas en las *Cartas Provinciales* van dirigidas al abuso y corrupción que del sistema probabilista se había hecho, hacia las posturas relajadas y de conveniencias que sólo algunos tenían en cuestiones morales.

Arnauld y Nicole fueron jansenistas y tuvieron una estrecha relación con Pascal. Existe un acuerdo casi unánime al señalar a Arnauld y Nicole como principales autores de la *Lógica de* Port Royal. Si bien, parece que las contribuciones por parte de Arnauld fueron más importantes. La obra está dividida en cuatro libros, centraremos nuestra atención en el cuarto. Este libro está dividido en capítulos: centraremos nuestra atención en los cuatro últimos capítulos, dedicados a la probabilidad. ¿Están o no escritos por Arnauld? Veamos lo que sobre materia de probabilidad está escrito en la *Lógica*:

> «*para juzgar acerca de lo que se debe hacer para obtener un bien o un mal, no sólo es preciso considerar el bien o el mal en sí mismo; además, es necesario valorar la probabilidad de que suceda o no suceda y analizar geométricamente* (matemáticamente) *la proporción que todas estas cosas guardan*»[8].

Y, un poco más adelante aparece el término de probabilidad aplicado a los juegos de azar, con un sentido medible:

> «*Hay juegos en los que cada uno de los diez participantes invierten un escudo y sólo uno de los jugadores ha de ganar la suma total, perdiendo los restantes su escudo. Así, pues, cada uno de los jugadores sólo se juega un escudo, pudiendo ganar nueve escudos. Si sólo se considerara la posible ganancia y la posible pérdida, en sí mismas, parecería que todos tienen ventaja. Pero, además, es preciso considerar que si cada uno puede ganar nueve escudos y sólo somete a la suerte el perder uno, también es nueve veces más probable, respecto de cada uno, que ha de perder su escudo y no ganará los nueve. Así cada uno de los jugadores tiene una expectativa de ganar nueve escudos, perder uno, nueve grados de probabilidad de perder un escudo y sólo un grado de ganar los nueve escudos. Esto sitúa al asunto en una perfecta igualdad*»[9].

Si tenemos en cuenta la estrecha relación que tuvieron Pascal y los autores de la *Lógica* de Port Royal, nos parece razonable que existiera una notable influencia de las ideas de Pascal sobre los autores jansenistas en materia de probabilidad. Esta misma sospecha acerca de la autoría de los cuatro últimos capítulos del cuarto libro está contenida en Hacking. CC. Heyde y E. Seneta estos autores van más allá al señalar como autores de la *Lógica,* además de Arnauld y Nicole a Pascal[10].

---

[8] ARNAULD, A.; NICOLE, P: *La lógica o el Arte de Pensar.* Alfaguara. Madrid, 1987, p. 489.

[9] ARNAULD, A.; NICOLE, P.: Ibidem, p. 489.

[10] Si bien, no le atribuyen directamente los últimos capítulos del libro cuarto.

Consideramos que la mano de Pascal está presente en la parte dedicada a la probabilidad. Si bien, no nos parece descabellado argumentar que fue de su puño y letra. Tratemos ahora de justificar esta afirmación: Para ello, es necesario analizar el *Pensamiento* de Pascal titulado *Infinito Nada*, que comúnmente se conoce con el nombre de *La Apuesta de Pascal.* En él, Pascal, inicia un proceso de aplicación de los nuevos criterios a aspectos de la sociedad que nada tienen que ver con el problema de la división de las apuestas y los juegos de dados, temas que habría de desarrollar en colaboración con Fermat. Se trata de aplicar a la teoría de la probabilidad el problema de la existencia de Dios, en donde ni la autoridad ni la teología entran en juego, sólo las consideraciones humanas.

Es en este punto cuando nuestra sospecha acerca de la autoría de los cuatro últimos capítulos de la *Lógica* adquiere cuerpo. Analicemos las palabras de Pascal:

> «*Aquí hay una infinidad de vida infinitamente feliz que ganar; un azar*[11] *de ganar contra un número infinito de azares de perder, y lo que jugáis es finito. Esto suprime todo término medio: en todos los sitios en que está lo infinito y en los que no hay la mayor cantidad de azares de perder contra una sola de ganar no hay que vacilar, hay que arriesgarlo todo. Por consiguiente, cuando no tenemos más remedio que jugar, debemos renunciar a la razón para salvar la vida mejor que arriesgarla para obtener la máxima ganancia que está tan cerca de producirse como la pérdida de nada*»[12].

Encontramos cuantiosas similitudes entre la aplicación del término de probabilidad aquí expuesto y el establecido en la *Lógica* (Ver citas nº 8 y 9).

Pero, esto no es todo, pasemos a analizar ahora el siguiente fragmento del *Infinito Nada*:

> «*¿Quién reprochará por tanto a los cristianos el que no pueda justificar su creencia ya que profesan una religión que no pueden justificar? ¡Declaran al ofrecerla al mundo que es una tontería, stultitiam, y luego os quejáis de que no la demuestren!. Si la demostrasen no tendrían palabras. Careciendo de prueba es como no carecen de sentido.*
>
> *—Sí; pero aunque esto excuse a aquellos que la presentan así y que esto les libre del reproche de presentarla sin razón, esto no excusa a los que la aceptan.*
>
> *—Examinemos este punto. Y digamos: "Dios existe o no existe"; pero ¿de qué lado nos inclinaremos?*»[13].

Y ahora recordemos los ejemplos que algunos autores probabilistas españoles elegían para explicar el sistema probabilista. Recordemos en este punto a Escobar y Mendoza (Citas nº 1 y 2).

---

[11] El traductor de la obra española de Alfaguara insiste en traducir hasard por probabilidad, a nuestro parecer de forme incorrecta. Véase la edición francesa de París, 1963.

[12] PASCAL, B.: Op. Cit., p. 460.

[13] PASCAL, B.: Ibidem. p. 459.

Conclusiones

1. Pascal acepta el principio de probabilidad establecido por los probabilistas.
2. Pascal es el autor de parte de la *Lógica* de Port Royal.
3. La creación de criterios analíticos sistemáticos que permitieron medir con validez universal el concepto de probabilidad se construyeron sobre la base filosófica-teológica.
4. Caramuel y Pascal contribuyeron notablemente a que la teoría de la probabilidad pudiera florecer desde el punto de vista de la probabilidad matemática y de la probabilidad filosófica.

BIBLIOGRAFÍA

AHEPE. *Historia de la Probabilidad y de la Estadística. Volumen I.* AC. Madrid, 2002.

AHEPE. *Historia de la Probabilidad y de la Estadística. Volumen II.* Delta Universidad. Madrid, 2004.

ASTRAIN, A. *Historia de la Compañía de Jesús*. *Tomo IV*. Razón y Fe. Madrid, 1920.

BISHOP, M. *Pascal. La vida del genio*. Hermes. México D. F, s/a.

CAFFARA, C. Historia de Teología Moral. Contenido en Diccionario Enciclopédico de la Teología Moral. Ediciones Paulinas. Madrid, 1986.

CARAMUEL, J. *La Filosofía de las Matemáticas.* Alta Fulla. Barcelona, 1989.

CARAMUEL, J. *Mathesis Audax.* Lovaina, 1644.

CARAMUEL, J. *Theologiae Moralis Fundamentalis.* 3ª edición corregida y aumentada. Lyon, 1657.

CARAMUEL, J. *Metalogica Disputationes de logicae essentia, propietatibus et operationibus*. Joann Godofredi, 1659.

CARAMUEL, J. *Apologema pro antiquísima et universalissima Doctrina de Probabilitate*, 1663.

CARAMUEL, J. *Kybeia, quae Combinatoriae Genus est, de Alea et Ludis Fortunae serio Disputans en Mathesis biceps (vetus et nova)*. Campania, 1670.

CARAMUEL, J. *Cursus Mathematicus.* Campagniae, 1688.

CONCINA, D. *Instrucción de Confesores y Penitentes*. Traducida al castellano por D. Blàs Diaz Canèl y Lastra. Imprenta de Miguel Escrivano. Madrid, 1763.

CONCINA, D. *Historia del Probabilismo y Rigorismo*. *Tomo I y II*. Oficina de la Viuda de Manuel Fernández. Madrid, 1772.

GARCÍA SECADES, M. (2005). *Probabilidad filosófica y moral: las primeras contribuciones a la idea de lo probable*. En: Revista Estadística Española (INE) nº 160. Tercer cuatrimestre de 2005. Madrid.

GARCÍA SECADES, M. (2002): *Contribuciones del Probabilismo Hispano a la Conceptualización de la Probabilidad*. Tesis Doctoral. Madrid, 2002.

GARCÍA SECADES, M. *Antecedentes de la concepción subjetivista de la Probabilidad* Contenido en*:* AHEPE: "Historia de la Estadística y de la Probabilidad". AC. Madrid, 2002.

HACKING, I. *El surgimiento de la Probabilidad.* Gedisa. Barcelona, 1995.

HACKING, I. *La domesticación del azar.* Gedisa. Barcelona, 1995.

HALD, A. *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750.* Wiley. New York, 1990.

HATZFELD, A.D. *Pascal.* Félix Alcan. Pars, 1901.

HECKER, K. *Jansenismo*. *Enciclopedia de Teología Sacramentum Mundi*. Tomo IV. Herder. Barcelona, 1973.

HEYDE, C.C. & SENETA, E.I.J. *Bienaymé. Statistical Theory Anticipated.* Springer-Verlag. New York, 1977.

HEYDE, C.C. & SENETA, E. *Statisticians of the Century.* Springer. New York, 2001.

MORA CHARLES, M.S. *La apuesta de Pascal y la Teoría de la Decisión.* En VV.AA: *Estudios sobre la Historia de la Ciencia y de la Técnica*. Valladolid, Junta de Castilla y León. Tomo I, 1988.

PASCAL, B. *Pensamientos.* Textos y comentarios de Chevalier, J. Aguilar. Madrid.

PASCAL, B. *Oeuvres Completes.* Edición de Louis Lafuma. Éditions Du Seuil. Paris, 1963.

PASCAL, B. *Obras: Pensamientos. Provinciales. escritos Científicos. Opúsculos y Cartas*. Alfaguara. Madrid, 1981.

THIROUIN, L. *Le Hasard et les Règles. Le Modèle du Jeu dans la Pensée de Pascal.* Vrin. Paris, 1991.

TODHUNTER, I. A History of the Mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace. Chelsea. New York, 1965.

CAPÍTULO 4

El *Ars Conjectandi*: un nuevo cálculo junto a un viejo concepto

Jesús Santos del Cerro
Universidad de Castilla-La Mancha

Introducción

Este trabajo trata de alentar el estudio y discusión de una cuestión que tal vez haya estado relegada durante mucho tiempo a causa de una leyenda negra cuya incorporación a la discusión científica supondría un enriquecimiento y eficacia en la comprensión de la creación del moderno Cálculo de Probabilidades. Muestra de lo anterior es la siguiente frase escrita por Lorraine Daston: *«la doctrina jesuita del "probabilismo", empleada por los casuístas de los siglos XVI y XVII para absolver casi todas las transgresiones con la justificación de que un teólogo u otro las haya excusado».* No se debe negar que se cometieron abusos, como también se han cometido o se pueden cometer utilizando cualquier otra herramienta o teoría científica.

Trataremos de analizar, otorgando el mérito que merece a la doctrina moral del probabilismo, el origen mismo de la creación de la moderna teoría de la probabilidad que supone la fusión de un nuevo cálculo, la geometría del azar, y un viejo concepto, la probabilidad teológica y filosófica, que consagra la obra fundamental de Jacques Bernoulli del que se celebra este año 2005 el tercer centenario de su muerte.

Valoración en la literatura de lo que representa el *Ars Conjectandi* respecto del concepto de probabilidad

Es muy significativa la idea que defiende Schneider consistente en que sólo se pudo desarrollar la moderna teoría de la probabilidad cuando se pusieran en relación el concepto de probabilidad utilizado en filosofía y teología, principalmente por algunos doctores españoles de los siglos XVI y XVII, y el contenido de lo que Pascal denominó «geometría del azar». Esta conexión fue conseguida por el genio de Jacques Bernoulli en su famoso *Ars Conjectandi*.

> «*Sin embargo, la posibilidad de que este desarrollo surgiese fue solamente después de que se relacionase el concepto* probabilitas*, utilizado en filosofía y teología, y el cálculo de las proporciones del azar*»[1].

Desde la creación de la geometría del azar por Pascal y Fermat, principalmente, aparte de las contribuciones de Huygens y Caramuel, no se produce ninguna aportación relevante, hasta que, de modo póstumo, se publica en 1713 la obra de Jacques Bernoulli. Montucla manifiesta acerca de dicha obra lo siguiente:

> «*Sin embargo, Jacques Bernoulli emprendió en silencio una obra extensa, y profundizó considerablemente esta teoría* (...).
> *En la obra titulada: Ars Conjectandi, Bernoulli no se limitó a algunas cuestiones análogas a las de Fermat y Pascal; sino que creó una multitud de otras cuestiones cada vez más difíciles, que analizó y resolvió. Intentó en fin aplicar esta teoría a sucesos morales y políticos*»[2].

La última frase de la cita anterior de Montucla debe ser entendida como un intento original de aplicar la nueva geometría del azar a sucesos morales y políticos. Sin embargo, el concepto de probabilidad sí fue utilizado por los doctores casuístas y probabilistas españoles en cuestiones morales. El motivo del surgimiento de la doctrina moral probabilista entre los autores españoles es la necesidad de aplicar los principios generales de la conducta moral a los casos singulares, en tanto que estos últimos contenían características peculiares cuya principal consecuencia es la de que no poseemos certeza absoluta sobre la licitud de la aplicación de un determinado principio general.

> «*Los doctores españoles trataron de dar a este problema* [el de la relación que existe entre los conceptos y leyes universales y la realidad compleja singular] *una*

[1] SCHNEIDER, I.: "The Introduction of Probability into Mathematics", *Historia Mathematica*, **3**, 1976, pág. 138.

[2] MONTUCLA, J.F.: *Histoire des Mathématiques.* Tomo III. Henri Agasse. Paris, 1802. Reimpresión Albert Blanchard, Paris, 1968, pág. 391.

respuesta adecuada y sincera con la aplicación del probabilismo y la práctica de la casuística. Se trataba de establecer la relación correcta entre los principios generales de la conducta moral y los casos singulares»[3].

La probabilidad es considerada como un atributo de la opinión. Utilizando palabras de Bartolomé de Medina, autor que expuso por primera vez de un modo explícito la doctrina del probabilismo moral, una opinión es considerada probable cuando concurren simultáneamente en la misma dos tipos de fundamentos, es decir:

«*porque la hacen suya varones muy sabios y la confirman con muy buenos argumentos, de lo que se deduce que según tal opinión no tiene nada de improbable*»[4].

Gabriel Vázquez interpreta y desarrolla la doctrina formulada por Bartolomé de Medina al introducir dos conceptos, o más bien, definir y delimitar dos características más o menos claramente expuestas en aquélla.

«*Por tanto esta sentencia según hemos explicado en el capítulo precedente se ha de entender en el sentido de que aún manteniendo la propia opinión como más probable y queriéndola cumplir por principios intrínsecos, sin embargo, un docto varón, apoyándose en principios extrínsecos, puede seguir la opinión contraria, defendida por la mayoría, le sirva para formarse un juicio singular por el que considere ser lícito actuar así*»[5].

Además, Vázquez también establece que solamente por fundamentos extrínsecos no se debe juzgar una opinión probable sino que han de concurrir fundamentos intrínsecos o razones internas de peso.

«*por tanto hay que advertir obviamente por qué razón se puede juzgar una opinión como probable, para según la cual podamos obrar contra nuestra propia opinión; y en primer lugar que sea suficientemente probable, para seguirla en contra de la propia para lo cual debe ser no sólo la opinión de un Doctor, aunque sea de categoría singular, pues si tal opinión de uno solo, por sus propios fundamentos* [fundamentos intrínsecos] *para mí no me parece probable sino contraria y sólo la veo aprobada con la autoridad* [fundamentos extrínsecos] *de un solo Doctor no me parece que haya que tenerla por probable*»[6].

Jacques Bernoulli falleció en 1705 antes de que su obra principal sobre la teoría de la probabilidad viese la luz, hecho que tuvo lugar en 1713. No obstante, antes incluso de su publicación se habían suscitado grandes expectativas en torno al manuscrito de Jacques Bernoulli, circulando de modo más o menos vago lo que se intuía que podría

---

[3] GÓMEZ CAMACHO, F.: *Economía y Filosofía Moral: la Formación del Pensamiento Económico europeo en la Escolástica española.* Síntesis. Madrid, 1998. pág. 62.

[4] MEDINA, B. de: Expositio in Primam Secundae Angelici Doctoris D. Thomae Aquinatis. Mathiae Gastii. Salamanca, 1578, pág. 309.

[5] VÁZQUEZ, G.: Commentariourum ac Disputationum in Priman Secundae Sancti Thomae. Tomus Primus. Lyón, 1631. pág. 294.

[6] VAZQUEZ, G.: *Ibidem*, pág. 295.

representar el *Ars Conjectandi* en el avance de la nueva teoría. En el momento en el que Fontenelle escribió el elogio a Jacques Bernoulli no se había publicado el *Ars Conjectandi*, desconociéndose las principales contribuciones de este autor a la teoría de la probabilidad. La parte más importante del elogio de Fontenelle se circunscribe a otras materias de las matemáticas como la teoría de series, la teoría de curvas, el cálculo integral, etc., dejando poco más de una página a la teoría de la probabilidad, en la que destaca dos puntos principales: 1. La realización de una sistematización y profundización del problema de la división de las apuestas, ya analizado por Pascal, Huygens y Caramuel, aunque Fontenelle no menciona al cisterciense español; 2. Hace referencia de un modo muy poco preciso a una aplicación de la probabilidad a las cosas morales y políticas.

> «*Algunos grandes matemáticos, y principalmente los señores Pascal y Huygens, ya han propuesto y resuelto problemas sobre esta materia* [problema de la división de las apuestas], *pero no lo han hecho sino de modo superficial; y el señor Bernoulli le ha dado una mayor extensión, y ha profundizado mucho más. Lo ha aplicado incluso a cosas morales y políticas, y es en esto en lo que esta obra debe tener como más nuevo y más sorprendente*»[7].

La recepción de la obra *Ars Conjectandi* en el mundo científico tuvo una repercusión muy fuerte en el campo del Cálculo de Probabilidades por cuanto suponía de avance de nuevos resultados y perspectivas como por la sistematización y enriquecimiento de lo ya conocido. Así lo recoge Gouraud:

> «*El* Ars Conjectandi *que cambió el aspecto del Cálculo de Probabilidades y en el que la originalidad del genio, cautivó, desde su aparición, la atención universal* (…)
>
> *Un grito unánime se elevó en el mundo de la ciencia y anunció a la posteridad que el Análisis del azar iba a entrar en una nueva era y comenzaba así definitivamente su fortuna*»[8].

La noción de probabilidad epistemológica que propone Jacques Bernoulli está basada en el análisis de los argumentos que, según Shafer, representaba la elaboración de una teoría no aditiva de la probabilidad, fue absorbida por la concepción aleatoria de los juegos de azar cuya supremacía representó la preeminencia de la teoría aditiva de la probabilidad. Los sucesores de Bernoulli mantuvieron, consciente o inconscientemente, la identificación de los conceptos de probabilidad y suerte, hasta el punto en que el término probabilidad tuvo una fuerte adscripción a aspectos aleatorios, principalmente relativos a los juegos de azar. Además, el desarrollo del análisis matemático contribuyó a que la teoría aleatoria de la probabilidad desplazase hasta casi anular a la denominada probabilidad epistemológica.

---

[7] FONTENELLE: *Oeuvres Complètes*. Tomo VI: *Histoire de l´Académie des Sciences*. Fayard. Paris, 1994, pág. 120.

[8] GOURAUD, C.: Histoire du Calcul des Probabilités depuis ses Origines jusqu´à nos Jours. Librairie d´Auguste Durand. Paris, 1848, págs. 38-39.

«*Después de la muerte de Bernoulli, la palabra* probabilidad *continuó teniendo su amplio significado epistemológico en las lenguas europeas. Pero la relación con los juegos de azar rápidamente vinieron a dominar el pensamiento de aquéllos que trataban de entender la probabilidad epistemológica numéricamente*»[9].

Sin embargo, a la muerte de Bernoulli esta concepción amplia de la probabilidad, que incluía no sólo la teoría de los juegos de azar sino también la probabilidad epistemológica basada en los argumentos, desapareció prácticamente, reduciéndose a la probabilidad aleatoria. Esto pudo ser debido a que los sucesores inmediatos de Bernoulli, Montmort y De Moivre, centraron su atención especialmente en el limitado campo de la teoría de los juegos de azar.

«*Pero de hecho, Bernoulli fue sucedido por dos matemáticos, Montmort y De Moivre, quienes se interesaron estrechamente por la teoría de los juegos de azar y vieron en el análisis de la* probabilidad *de Bernoulli solamente una licencia para dar aquel nombre a su objeto de estudio*»[10].

Otro autor, Hailperin, destaca, por su parte, el poco interés que ha suscitado una de las partes más innovadoras del *Ars Conjectandi*. El siguiente pasaje se refiere concretamente al capítulo 3 de la IV Parte, en donde se habla de la idea de la probabilidad fundada sobre argumentos.

«*Sin embargo, a pesar de su carácter innovador, ha sido ampliamente descuidado. Por ejemplo, Todhunter (1865, 70-71) dedica tres breves párrafos; van der Waerden, en la introducción al Volumen 3 de las obras completas de Bernoulli, no lo menciona en su comentario del* Ars Conjectandi*, Maistrov en 1974 cita una frase del mismo. No tenemos hasta* Hacking 1974 *y* Shafer 1978 *un análisis apreciable*»[11].

Shafer, además, precisa la idea anterior afirmando que el retraso de la publicación del *Ars Conjectandi* y la difusión previa que tuvieron algunas de sus ideas, sacadas de contexto de aquella obra, en forma de elogios póstumos hacia Jacques Bernoulli, pudieron haber sido responsables de la reducción de la concepción amplia de la probabilidad numérica consagrada en el *Ars Conjectandi*. De Moivre, por ejemplo, en su obra *The Doctrine of Chances* publicada en 1718, desarrolla una terminología nueva en la que predominan términos como probabilidad y la definición clásica de probabilidad considerada como ratio o cociente de casos favorables y casos posibles, que no estaban presentes en la terminología utilizada en su *De Mensura Sortis* cuya aparición se produjo en 1711, dos años antes de la publicación del *Ars Conjectandi*.

«*Después de la aparición del* Ars Conjectandi*, De Moivre desarrolló una nueva terminología. Adoptó la idea de Bernoulli de que las* probabilidades *son núme-*

[9] SHAFER, G.: *"Non-Additive Probability in the Work of Bernoulli and Lambert"*. Archive for History of Exact Sciences. Vol. 19, pág. 341.

[10] SHAFER, G.: *Ibidem*, pág. 341.

[11] HAILPERIN, T.: *Sentential Probability Logic*. Associated University Presses. London, 1996, pág. 51.

ros comprendidos entre cero y uno, y tomó como axioma la regla que expresa que la probabilidad de un suceso es el cociente del número de casos favorables y el número total de casos»[12].

La primera parte del *Ars Conjectandi:* el nuevo cálculo

El libro de Bernoulli está dividido en cuatro partes. Los dos puntos que destaca Fontenelle representan, resumidamente, el objeto de dos de las cuatro partes del *Ars Conjectandi*, a saber: la primera y la cuarta, respectivamente. La segunda es un estudio sobre la teoría de combinaciones y permutaciones y la tercera constituye la aplicación de los resultados anteriores a un conjunto de juegos de azar.

La primera parte del *Ars Conjectandi* está compuesta por el pequeño libro de Huygens *De Ratiociniis in Ludo Aleae* y el comentario del mismo realizado por Jacques Bernoulli.

Es precisamente en las anotaciones de Jacques Bernoulli a dicho tratado la primera vez que aparece el término probabilidad (probabilitas) en el *Ars Conjectandi*.

«*Así para calcular las suertes no se debe tener en cuenta los juegos pasados sino solamente los juegos que faltan por jugar; dado que para ninguno de los próximos juegos hay una* ***probabilidad*** (probabilitas) *mayor hacia unos jugadores que hacia otros, es decir, a quienes favoreció la fortuna antaño más bien que aquellos otros que fueron desafortunados*»[13].

En el ánimo de Bernoulli hay un interés por sistematizar la teoría expuesta por Huygens en su breve tratado. En el mismo tratado está contenida una proposición que después conducirá a Bernoulli a un cociente que coincide con la definición clásica de probabilidad. La proposición de que hablamos es la III y dice así:

«*Si el número de casos bajo los cuales me corresponde* ***a*** *es p, por otra parte el número de casos bajo los cuales me corresponde* ***b*** *sea q, suponiendo que todos los casos tengan igual inclinación, mi esperanza valdrá* $\dfrac{pa+qb}{p+q}$ »[14].

De esta proposición Bernoulli obtiene un corolario que, aunque sencillo e inmediato, no es menos interesante. Efectivamente, el Corolario 1, que transcribimos, resulta de hacer $\mathbf{b} = 0$.

---

[12] SHAFER, G.: *op. cit.*, pág. 344.

[13] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi* en Meusnier, N.: *Christian Huygens et Jacques Bernoulli: la Première Partie de l´Ars Conjectandi (1657-1713).* Paris, 1992, pág. 24. Nota 1: Las citas a la primera parte del *Ars Conjectandi* vendrán referidas a esta traducción francesa. Nota 2: La negrita es nuestra.

[14] HUYGENS, C.: De Ratiociniis in Ludo Aleae en Meusnier, N.: Christian Huygens et Jacques Bernoulli: la Première Partie de l´Ars Conjectandi (1657-1713). *Ibidem*, pág. 14.

«*1. De aquí, resulta en primer lugar que si me corresponde* ***a*** *en p casos y nada en q casos, mi esperanza será* $\frac{pa}{p+q}$»[15].

En la búsqueda de una proposición general, de este corolario obtiene un valor de la esperanza coincidente con el valor de la probabilidad definida como cociente de casos favorables y casos posibles, si bien no lo asocia explícitamente al vocablo probabilidad.

«*Entonces, si alguien pretende lograr alguna cosa en el primer intento, es claro que tiene* ***b*** *o* ***a-c*** *casos para lograrlo, es decir para obtener lo depositado —que supongamos sea a partir de ahora 1— y* ***c*** *casos para obtener 0, así según el Corolario 1 de la Proposición III su suerte es* $\frac{a-c}{a}$»[16].

Habiendo considerado previamente **a** como todos los casos posibles divididos en dos grupos, que comprenden ambos **b** y **c** casos, de tal manera que $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, lo que define es el cociente que identificamos actualmente con el concepto clásico de probabilidad, aunque Bernoulli no lo llama probabilidad sino que en este primer momento lo denomina suerte.

«*Se sabe que la suerte de que lo alcance* [lo depositado] *en el primer intento es* $\frac{a-c}{a} = \frac{b}{a}$»[17].

Además, considerando **b** como los casos favorables y **c** como los casos desfavorables, utilizando lo que hoy llamamos la hipótesis de independencia, establece las probabilidades de ganar en el primer intento, segundo, tercero, etc.

«*Así, como la suerte de lograrlo en el primer intento es* $\frac{b}{a}$, *en el segundo* $\frac{bc}{a^2}$, *en el tercero* $\frac{bc^2}{a^3}$, *en el n-ésimo* $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$»[18].

Desde el momento en que Bernoulli define este cociente, como caso particular de la definición de esperanza de Huygens, la utiliza continuamente, denominándola suerte y esperanza, indistintamente.

Además esta nueva definición le va a permitir resolver los problemas planteados por Huygens de un modo más rápido y más general. Efectivamente, no sólo resuelve este autor todos los problemas planteados por Huygens, ayudándose de esta defini-

[15] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi*. Parte I en Meusnier, N.: *Ibidem*, pág. 18.

[16] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi*. Parte I en Meusnier, N.: *Ibidem*, pág. 60.

[17] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi*. Parte I en Meusnier, N.: *Ibidem*, pág. 62.

[18] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi*. Parte I en Meusnier, N.: *Ibidem*, pág. 62.

ción, de manera mucho más rápida y sencilla, sino también otros problemas que resultan insolubles o muy complicados por el método del matemático holandés.

La cuarta parte del *Ars Conjectandi:* un viejo concepto

En la cuarta parte del *Ars Conjectandi,* aparte del famoso teorema que lleva el nombre de su autor, contiene la conjunción sistemática definitiva de la probabilidad filosófica y teológica y la probabilidad aleatoria derivada de la «geometría del azar». Esta parte representa el marco de referencia fundamental de la conceptualización moderna de la probabilidad. En ella se funden magistralmente el nuevo cálculo creado por Pascal y Fermat y las elaboraciones del probabilismo moral y de la tradición filosófica clásica.

Bernoulli, con no poca influencia de la *Lógica de Port-Royal* y de sus precedentes, establece un marco conceptual y sistemático de la probabilidad. En primer lugar distingue dos tipos de certeza: objetiva y subjetiva. De la primera nos dice:

> «*Todo lo que se beneficia bajo el sol de ser o llegar a ser, pasado, presente o futuro, posee siempre en sí mismo y objetivamente una certeza total*»[19].

De la certeza subjetiva o considerada en relación a las personas escribe:

> «*aquello que por revelación, razón, sensación, experiencia, testimonio de nuestros ojos es de tal modo evidente que no podamos de ninguna manera dudar de su existencia presente o futura, disfruta de una certeza total y absoluta*»[20].

Para Bernoulli la probabilidad es un fenómeno subjetivo en el sentido de que todo aquello sobre lo que no alcanzamos una certeza subjetiva absoluta cae dentro del ámbito de lo probable. Según el propio Bernoulli:

> «*El resto* [o lo que es lo mismo, todo sobre lo que no alcancemos certeza subjetiva absoluta] *adquiere en nuestros espíritus una medida menos perfecta, mayor o menor, según que las probabilidades sean más o menos numerosas que nos persuaden que una cosa es, será o ha sido*»[21].

Si observamos con detenimiento los factores que permiten alcanzar la certeza subjetiva y en su defecto no poseer más que cierto grado de probabilidad, podemos apreciar deudas continuas con elaboraciones teóricas previas.

Analizaremos, en primer lugar, de modo sucinto, algunas ideas que ampliaremos un poco más adelante. A pesar de que la influencia del teorema de esta cuarta Parte haya supuesto que la concepción aleatoria de la probabilidad ensombrezca a la epis-

---

[19] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi.* Parte IV en Meusnier, N.: *Jacques Bernoulli et l´Ars Conjectandi*. Institut de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques. Université de Rouen Haute Normandie. Rouen, 1987. pág. 14. Nota: Las citas de la Parte IV del *Ars Conjectandi* vendrán referidas a esta traducción francesa.

[20] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi.* Parte IV en Meusnier, N.: *Ibidem*, pág. 16.

[21] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi.* Parte IV en Meusnier, N.: *Ibidem*, pág. 16.

temológica, es necesario insistir en que la concepción básica bernoulliana de la probabilidad es epistemológica y subjetiva que, además, recoge de la tradición filosófica y teológica probabilista anterior, como se puede comprobar, por ejemplo, en los fundamentos sobre los que apoya la probabilidad este autor. Precisamente, concibiendo la probabilidad como aquello sobre lo que no alcanzamos certeza subjetiva absoluta, para Bernoulli, medir la probabilidad consistirá en realizar una evaluación del número y peso de los argumentos, a favor o en contra, del fenómeno del que se quiere calcular su probabilidad. En efecto:

> «*Las probabilidades son estimadas a partir del* número *y también del* peso de los argumentos *que de alguna manera prueban o revelan que alguna cosa es, será o ha sido*»[22].

Shafer mantiene la idea de que la concepción de probabilidad utilizada en la nueva teoría matemática de la probabilidad tiene en común o, más precisamente, se sirve de algunos de los conceptos y análisis utilizados por las doctrinas filosóficas y teológicas que tratan sobre la probabilidad de las opiniones. Para Shafer, Jacques Bernoulli fue el primer autor que contribuyó sustancialmente a establecer la relación de la teoría de los juegos de azar y la probabilidad, concepto que hasta entonces había sido reservado a cuestiones de Teología moral y filosóficas.

> «*La idea de calcular probabilidades de argumentos es, a primera vista, completamente epistemológica y completamente distinta de la suerte o probabilidad aleatoria. Pero Bernoulli propone realizar tales cálculos utilizando el método de Huygens: analiza un argumento distinguiendo casos que «son igualmente posibles o que pueden ocurrir con igual facilidad», y entonces calcular las probabilidades proporcionadas por el argumento utilizando la misma fórmula que Huygens utiliza para calcular esperanzas. Introduce también su ley de los grandes números como una de las herramientas para determinar la facilidad con la que los diferentes casos ocurren*»[23].

En su artículo *"The Bernoulli"* de la Encyclopedia of Statistical Science, Shafer enfatiza la relación entre los términos probabilidad y suerte, insistiendo en la procedencia teológica y filosófica del término probabilidad, de la que Jacques Bernoulli había bebido.

> «*En la larga tradición del pensamiento filosófico y teológico del que James Bernoulli fue heredero, la idea de probabilidad no fue estrechamente unida a la idea de suerte* [chance]. *Pascal, Fermat y Huygens no utilizaron incluso la palabra* probabilidad *en sus escritos sobre suerte* [chance]; *probabilidad, como los escolásticos sabían, era un atributo de la opinión, un producto del argumento o de la autoridad. La teoría que James estableció en la IV Parte del* Ars Conjectandi *fue un intento de llenar este vacío. Fue un intento de aplicar a la nueva teoría de*

---

[22] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi.* Parte IV en Meusnier, N.: *Ibidem*, pág. 14.

[23] SHAFER, G.: *op. cit.,* págs. 325-326.

los juegos de azar la probabilidad manteniendo la idea de que la probabilidad está basada sobre argumentos»[24].

Parece ser que esta relación entre ambos conceptos tuvo éxito entre sus lectores. No es probable, sin embargo, que prendiera entre los lectores de la *Lógica* que la teoría relativa a los juegos de azar se aplicase a la probabilidad epistemológica. John Locke, por ejemplo, como seguidor de la *Lógica* propone en su *Ensayo sobre el Entendimiento Humano* una definición de probabilidad de carácter epistemológico.

«*John Locke puede ser considerado como un caso particular; cuando emprendió la tarea de escribir su tratado sobre el entendimiento humano en 1671, realizó la siguiente consideración sobre la probabilidad: «La probabilidad es lo semejante a la verdad. La denominación misma de la palabra significa y puede ser definido según ha trascendido como: 'Probabile est quod probari potest', es decir, una proposición para la que hay argumentos o pruebas que la hacen pasar o ser tomada como verdadera*»[25].

Shafer afirma, además, que Bernoulli no inventó el concepto de probabilidad basado en argumentos sino que esto mismo ya estaba contenido en el concepto filosófico de probabilidad. Los autores probabilistas, después de Bartolomé de Medina, destacan que una opinión es probable cuando se apoya sobre la autoridad o sobre argumentos o razones de peso tal y como ha quedado claro más arriba.

Como sucedió también con Locke, Bernoulli utiliza la misma distinción conceptual de los distintos tipos de argumentos que sirven para evaluar la probabilidad que aparece en la *Lógica de Port-Royal*:

«*Los* argumentos *pueden ser* intrínsecos*, es decir artificiales y elegidos entre los lugares tópicos de la causa, del efecto, del sujeto, del adjunto, del índice o de cualquier otra circunstancia que parece tener un lugar cualquiera con lo que es necesario probar, o bien* extrínsecos *y fuera de la ciencia, es decir derivados de la autoridad y del testimonio de los hombres*»[26].

Bernoulli tiene conciencia de que para evaluar la probabilidad de un suceso es preciso tener en cuenta tanto los argumentos a favor como los argumentos en contra, o de modo más preciso y adaptado a nuestro lenguaje actual diríamos casos favorables y casos desfavorables.

«*No sólo es preciso tener en cuenta aquéllos* [argumentos] *que vienen a apoyar el fenómeno en cuestión, sino también lo que pueda ser invocado en sentido opuesto, de manera que después de haber sido puesto en una balanza cada una de las dos alternativas los primeros superen manifiestamente a los segundos*»[27].

[24] SHAFER, G.: *"The Bernoulli".* Encyclopedia of Statistical Sciences. Vol. 1º, 1982, pág. 217.

[25] SHAFER, G.: "Non-Additive Probability in the Works of Bernuolli and Lambert", *op. cit.*, pág. 320.

[26] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi.* Parte IV en Meusnier, N.: *op. cit.*, pág. 22.

[27] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi.* Parte IV en Meusnier, N.: *op. cit.*, pág. 24.

Resulta significativo el hecho de que Bernoulli está influido por la *Lógica de Port-Royal* hasta el punto de que participa en la polémica del probabilismo moral, al menos eso nos parece ver en las siguientes palabras de Bernoulli, y toma partido del lado de Arnauld y Nicole, o si se quiere del probabiliorismo defendido por el español Tirso González:

> «*En asuntos inciertos y dudosos es preciso suspender nuestras acciones, en espera de que alumbre una luz mayor; pero si la ocasión merece que no haya ningún retraso, entre dos soluciones siempre será necesario elegir aquélla que parece más adecuada, más segura, mejor pensada y más probable, incluso si ninguna de ellas merezca de hecho estos adjetivos*»[28].

Observamos, pues, que llega hasta Bernoulli las repercusiones de la polémica mantenida acerca del probabilismo moral que se desarrolló entre jesuítas y jansenistas, y que inundó y dividió a toda la sociedad francesa, en particular, y europea, en general.

En la primera parte del *Ars Conjectandi* vimos cómo definía la probabilidad de un suceso relativo a un juego de azar como cociente entre los casos favorables al mismo y los casos totales. Ésta que, en principio, podría parecer una definición particular y específica contiene un carácter de generalidad como se puede apreciar en la siguiente cita. Esta generalidad de la definición de probabilidad desaparece bajo la influencia del denominado Teorema de Bernoulli, cuyo enunciado tiene un carácter eminentemente aleatorio del concepto de probabilidad que ensombrecerá, prácticamente, al aspecto epistemológico.

> «*De lo que ha sido dicho hasta ahora, está claro que la fuerza de lo que se prueba, que da eficacia al argumento, depende de una multitud de casos en los que puede existir o no existir, revelar o no revelar, o incluso revelar lo opuesto; y está claro ahora que el grado de certeza, o probabilidad, que engendra este argumento, puede ser deducido de estos casos gracias a la Doctrina de la primera Parte, de la misma manera como se busca habitualmente las suertes de los jugadores en los juegos de azar*»[29].

No obstante lo dicho anteriormente, a Bernoulli no se le escapa la naturaleza diferente que tienen cierto tipo de sucesos, más concretamente, la fundamental diferencia que existe entre sucesos relativos a juegos de azar y los relativos *"a la obra de la naturaleza"* o *"al arbitrio de los hombres"*. De los primeros se puede decir que, en general, se conocen los posibles resultados elementales del juego (piénsese en el lanzamiento de un dado) y es razonable suponer que cada uno de ellos tiene la misma inclinación o facilidad de ocurrencia. Bajo este esquema, está justificado definir *a priori* el valor de la probabilidad de cualquier suceso asociado a dicho juego. Mientras que en los fenómenos relativos *"a la obra de la naturaleza"* o *"al arbitrio de los hombres"* no sólo se desconocen la mayor parte de las situaciones o resultados que

[28] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi.* Parte IV en Meusnier, N.: *op. cit.*, pág. 26.

[29] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi.* Parte IV en Meusnier, N.: *op. cit.*, pág. 30.

pueden darse sino que también resulta difícil suponer que todos tengan igual inclinación a suceder, por lo que se escapa a nuestra inteligencia la posibilidad de realizar una analogía con el modelo de los juegos de azar. Esto da lugar a que se tengan que llevar a efecto otras soluciones, de tal modo que para estos casos se plantee la evaluación de sus probabilidades *a posteriori*, es decir, atendiendo a fenómenos similares del pasado. Esta clasificación explícita de la probabilidad *a priori* y *a posteriori* ha tenido desde entonces relevancia, vigencia e influencia muy notables.

> «*Llegado a este punto tal que para concebir cualquier cosa según las reglas de las conjeturas es requerido solamente, de una parte, que el número de casos sea cuidadosamente determinado y, de otra parte, que sea definido en qué medida unos pueden ocurrir más fácilmente que otros. Pero es aquí dónde surge una dificultad, nos parece: aquello se puede observar apenas en muy raros casos y no se produce prácticamente fuera de los juegos de azar* (...). *En efecto, cuando se trata del resto de los fenómenos, dependientes la mayoría bien de la obra de la naturaleza bien del arbitrio de los hombres, dicho esquema no tiene razón de ser.* (...)
>
> *Pero aquí la verdad nos ofrece otro camino para obtener lo que buscamos. Lo que no está dispuesto a conseguir* a priori *lo está al menos* a posteriori, *es decir que será posible extraerlo mediante el resultado de numerosos ejemplos similares, puesto que se debe suponer que, de modo sucesivo, cada hecho puede suceder o no suceder en el mismo número de casos que había sido observado previamente, dentro de un estado de cosas semejante, que sucediese o no sucediese*»[30].

Notemos como hecho significativo que, unos años después, Gravesande acepta ya la distinción anterior y, por supuesto, utiliza la justificación que proporciona el Teorema de Bernoulli. No siempre, nos dice este último autor, se puede conocer la probabilidad observando la naturaleza de las cosas, que denominamos probabilidad *a priori*, por lo que a veces se utiliza otro método para calcular la probabilidad, que no es otro que el de la observación de sucesos, que denominamos probabilidad *a posteriori* o basada en la experiencia pasada.

> «*Cuando, para descubrir estos valores, no se presta atención más que a las ideas sobre las cosas, se encuentran a menudo muchas dificultades. Se sirve, en estas ocasiones, de otro método, para determinar la Probabilidad, a saber, examinar los sucesos mismos*»[31].

Al admitir esta probabilidad *a posteriori* establece la condición, siempre polémica, de que muchas observaciones se han obtenido previamente (*"si muchas bolas se han extraído previamente"*). En este punto utiliza como justificación el citado Teorema de Bernoulli.

> «*Puesto que se ha demostrado matemáticamente, que aumentando el número de observaciones, el peligro de equivocarse se reduce, hasta el punto de alcanzar*

---

[30] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi.* Parte IV en Meusnier, N.: *op. cit.*, págs. 40-42.

[31] GRAVESANDE, W. J.'s: *Oeuvres Philosophiques et Mathématiques*. Marc Michel Rey. Amsterdam, 1774. 2ª parte, pág. 85.

casi el final [en el caso de la urna que pone como ejemplo, esto significa cuando no quedan casi bolas en la urna]»[32].

En la cuestión relativa a la apelación a la experiencia en el cálculo de ciertas probabilidades, el propio Bernoulli reconoce explícitamente la fuente de la que bebe.

> «*Esta manera empírica de determinar por experiencia el número de casos no es ni nueva ni insólita. No es más que lo que prescribe el Célebre Autor del Arte de pensar, Hombre de una gran delicadeza y de un gran talento, en los Capítulos 12 y siguientes de la última Parte y que es la misma que todos observan constantemente en la práctica cotidiana*»[33].

En este sentido, como señala Bernoulli, es algo evidente y hasta los seres más estúpidos admiten que cuanto mayor es el número de observaciones *"menor será el peligro de alejarse del objetivo"*. Sin embargo, Bernoulli establece un gran avance, que es precisamente lo que dará lugar al famoso teorema de su mismo nombre. En resumen, utilizando palabras del propio Bernoulli:

> «*Queda entonces por examinar algo que tal vez nadie hasta ahora ha encontrado e incluso pensado. Queda ciertamente investigar si, aumentando el número de observaciones, aumentamos continuamente la probabilidad de alcanzar la relación real entre el número de casos que hacen que un suceso pueda ocurrir y el número de aquéllos que hacen que no pueda ocurrir, de manera que esta probabilidad no excede un grado cualquiera dado de certeza*»[34].

Lo inmediato anterior y posterior al *Ars Conjectandi* respecto del concepto de probabilidad

Cinco años después de la muerte de Jacques Bernoulli, Arbuthnott publicó un pequeño ensayo del que destacamos el hecho de que aparecen relacionados los términos *chance* y *probable*, aunque con significados conscientemente diferenciados. Tres años después de la publicación de este conocido ensayo vio la luz el *Ars Conjectandi,* por lo que hasta entonces no se tuvo un conocimiento completo sobre el contenido del libro del más famoso de los Bernoulli, sino que se tenían informaciones parciales sobre algunas de las cuestiones de las que trataba y resolvía. Es, pues, conveniente analizar con algún detalle tanto las obras anteriores a la publicación del *Ars Conjectandi* como las posteriores para calibrar con precisión el alcance de la repercusión de los planteamientos y resultados de aquella obra. En particular, observaremos en el ensayo de Arbuthnott la distinción explícita que adopta entre probabilidad y suerte. Este autor trata de demostrar que el Poder Divino o la Divina Providencia es el responsable último del equilibrio que existe entre nacimientos de varones y mujeres.

---

[32] GRAVESANDE, W. J.´s: *Ibidem*. 2ª parte, pág. 86.

[33] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi.* Parte IV en Meusnier, N.: *op. cit.*, pág. 44.

[34] BERNOULLI, J.: *Ars Conjectandi.* Parte IV en Meusnier, N.: *op. cit.*, pág. 44.

Arbuthnott asimila el suceso de un nacimiento con el del lanzamiento de un dado equilibrado que tuviese dos caras. Razonando según lo que actualmente denominamos un modelo binomial, realiza la asignación de la probabilidad de la sucesión de nacimientos a partir de los datos de que disponía, a saber: los de bautizos en Londres del período comprendido entre 1629 y 1710. Utilizando el modelo binomial comentado, concluyó que el equilibrio de nacimientos entre los dos sexos obedecía a la intervención de un Poder Divino. Este ensayo logró llamar la atención hasta el punto de que se suscitó cierta polémica en la que importantes autores como Gravesande, Nicolás Bernoulli, etc., mantuvieran opiniones enfrentadas, escribieran artículos, etc.

Volviendo sobre la idea anterior, hemos de decir que Arbuthnott aplica el término *chance* a los sucesos relativos a juegos de azar.

> «*su azar* [lot] *es la suma de todas los suertes* [chances], *siendo éstas tantas como el coeficiente del término central o medio a la potencia de 2 elevado a un exponente igual al número de dados*»[35].

Sin embargo, al término probable le asigna un sentido de aprobabilidad, en este caso por la Naturaleza y, en definitiva, por el Poder Divino. A continuación vamos a recoger los fragmentos en donde este autor utiliza el término probable.

> «*Pero es muy improbable (si el mero azar gobernase) que nunca alcanzarían los extremos.*(...) *No parece más probable la causa que se atribuye a la Naturaleza en la igualdad de los nacimientos, que la que nuestros primeros padres constituyesen al comienzo el mismo número por sexo* (…) *ni es probable que veinte mujeres sean igualmente fecundadas por un hombre que por veinte*»[36].

Como se dijo anteriormente, en la fecha de publicación de este ensayo aún no había aparecido la obra de Jacques Bernoulli, a la vez que hacía cinco años que éste había fallecido, produciéndose desde esta última fecha (1705) grandes expectativas sobre la novedad del contenido del *Ars Conjectandi* así como algunas informaciones cruzadas entre algunos miembros de la familia Bernoulli y otros científicos relativas a algunas cuestiones tratadas en la citada obra. No es de extrañar que ambos términos (*chance y probable*) aparezcan en las obras anteriores a la de Bernoulli con significados perfectamente diferenciados, hecho que irá desapareciendo a medida que la influencia del *Ars Conjectandi* termine por aproximar los significados de las palabras *chance* y *probable* hasta considerarlos como sinónimos, como sucederá por ejemplo en el famoso artículo de Thomas Bayes de 1763.

> «*Por suerte* [chance] *quiero decir lo mismo que por probabilidad* [probability]»[37].

---

[35] ARBUTHNOTT, J.: "An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity observ´d in the Births of both Sexes." *Philosophical Transactions*, **27**, 1710, pág. 187.

[36] ARBUTHNOTT, J.: *Ibidem*, págs. 188-189.

[37] BAYES, T.: "An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances" Philosophical Transactions 53, 1763, pág. 376.

Vemos que cincuenta años después de la publicación del *Ars Conjectandi*, Bayes concibe como sinónimos los términos probabilidad y suerte. Sin embargo, este proceso de confluencia o acercamiento de los significados de los vocablos anteriores no fue ni espontáneo ni inmediato.

Unos años más tarde, según Hald en 1715, Gravesande escribió sobre el mismo tema que el autor inglés. Además, en 1712, como también recoge Hald en su libro *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, Nicolas Bernoulli, en su visita a La Haya estableció contacto con Gravesande. Este autor holandés marca ya la notable influencia de las conceptualizaciones expuestas por Jacques Bernoulli, aunque aún aparecen vestigios del carácter epistemológico del concepto de probabilidad que procede, a su vez, de la concepción recogida, en definitiva, de la *Lógica de Port-Royal* y de las obras de los probabilistas españoles. La primera noción de probabilidad que utiliza tiene un carácter epistemológico al considerar que la probabilidad depende del grado de conocimientos que tengamos sobre cierto fenómeno, en cuyo caso la probabilidad aumentará a medida que aumente el grado de conocimiento acerca del fenómeno en cuestión.

> «*Se puede ver, por lo que acabamos de decir, que la Probabilidad no se aplica sobre las cosas mismas, sino sobre el conocimiento que de ellas tenemos; además, se la puede considerar como una cantidad, que crece, desde el más pequeño grado de conocimiento, hasta el pleno convencimiento*»[38].

Distingue tres grandes categorías del conocimiento de estos fenómenos, según que se sobrepase la semi-certeza, posea la semi-certeza o no alcance la semi-certeza: probable o verosímil, duda e incertidumbre, respectivamente.

También expone que la probabilidad en ocasiones se fundamenta en las cosas mismas y otras veces en la argumentación sobre la que las afirmaciones se apoyan, manifestándose aquí una clara influencia de lo que los doctores españoles, primero, y los autores de la *Lógica de Port-Royal,* después, denominaron argumentos intrínsecos o internos y extrínsecos o externos.

Tanto en uno como en otro caso, la probabilidad va a estar determinada por la relación de casos posibles y casos favorables.

> «*La Probabilidad será a la Certeza, como el número de casos en cada uno de los que el suceso propuesto tiene lugar, al número de todos los casos posibles*»[39].

En esta definición de probabilidad se manifiesta claramente la acepción aleatoria que desde Jacques Bernoulli ha predominado sobre la epistemológica en la tradición posterior al *Ars Conjectandi*.

Destaca, además, Schneider una dinámica en la que el resultado fue la conexión entre el concepto de probabilidad filosófico-teológica con la «geometría del azar». El

[38] GRAVESANDE, W. J.´s: *op. cit.*, pág. 83.

[39] GRAVESANDE, W. J.´s: *op. cit.*, pág. 85.

núcleo principal de esta dinámica fue la disputa relativa al probabilismo que mantuvieron jansenistas y jesuítas. En este sentido, Schneider señala que:

> «*La necesidad de tal cuantificación resulta de la disputa acerca del probabilismo entre Jansenistas y Jesuítas. Este enfrentamiento fue notorio en las Cartas Provinciales de Pascal desde 1656/7 en adelante*»[40].

Sin embargo, según Gouraud, tanto los esfuerzos y logros de Pascal y Fermat como los de Huygens no tuvieron demasiada repercusión hasta tiempo después.

> «*Estas circunstancias* [Gouraud habla entre otras del silencio de sus fundadores, la poca atención de Pascal y Fermat por difundir su correspondencia, etc.] *hicieron que no se divulgara casi nada del nuevo cálculo, y que permaneciera en un principio más o menos desconocido.* (…) *La falta de éxito de Huyghens no fue excepcional. Publicaciones mucho más importantes aún que la suya y que hubieran debido aclarar en definitiva a los geómetras sobre la importancia del análisis que había dado a conocer, no fueron más afortunadas*»[41].

Después de un olvido de casi cincuenta años, Jacques Bernoulli contribuyó no sólo a un gran progreso de esta materia sino también a una sistematización de todo el conocimiento existente. Ésta es la opinión de Gouraud, aunque debamos señalar que ya 15 años antes de la muerte de Bernoulli, éste había escrito casi totalmente toda su obra sobre probabilidad, como apunta Meusnier:

> «*El* Ars Conjectandi *había podido ser publicado desde 1689; nada faltaba sino lo que él iba a investigar en vano durante 15 años hasta el fin de su vida: las aplicaciones, « he terminado ya la mayor parte de un libro –escribe a Leibniz el 3 de octubre de 1703—, pero me falta la parte esencial en la cual muestro cómo los fundamentos del arte de conjeturar pueden aplicarse a la vida civil, moral y política»* (Éste es el objetivo que persigue en la cuarta Parte»[42].

Esta obra, publicada en los primeros años del siglo XVIII no sólo va a condicionar notablemente el desarrollo del Cálculo de Probabilidades en dicho siglo, sino que su influencia alcanza hasta nuestros días. El mismo Gouraud opina que:

> «*El comienzo del siglo XVIII estaba destinado a ver cumplido al fin este gran avance. Incluso en algunos años y gracias a fecundas vigilias de uno de los más grandes genios del Análisis moderno, la organización que le faltaba iba a ser alcanzada*»[43].

El desarrollo posterior del Cálculo de Probabilidades no se entendería sin la clasificación de la probabilidad *a priori* y *a posteriori*, sin el Teorema de Ber-

---

40 SCHNEIDER, I.: *op. cit.*, pág. 138.

41 GOURAUD, C.: *op. cit.*, págs. 12-14.

42 MEUSNIER, N.: *Jacques Bernoulli et l´Ars Conjectandi*. Institut de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques. Université de Rouen. Haute Normandie. Rouen, 1987, pág. 3.

43 GOURAUD, C.: *op. cit.*, pág. 20.

noulli y, quizás lo más importante, sin la nueva conceptualización de la probabilidad en la que se funden inseparablemente la probabilidad aleatoria y la noción de probabilidad epistemológica propia de la filosofía y la teología. Por otra parte, algunas de las polémicas y confusiones a que ha dado lugar la noción de probabilidad se explican por su peculiar origen.

BIBLIOGRAFÍA

ARBUTHNOTT, J. (1710): "An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity Observations in the Births of both Sexes." *Philosophical Transactions* 27,

BAYES, T. (1763): "An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances" *Philosophical Transactions* 53.

BERNOULLI, J. (1713): "Ars Conjectandi" Parte I en Meusnier, N.: "Christian Huygens et Jacques Bernoulli: la Première Partie de l´Ars Conjectandi (1657-1713)". Paris, 1992

BERNOULLI, J. (1713): "Ars Conjectandi". Parte IV en Meusnier, N.: "Jacques Bernoulli et l´Ars Conjectandi". Institut de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques. Université de Rouen Haute Normandie. Rouen, 1987.

FONTENELLE (1994): "Oeuvres Complètes". Tomo VI: "Histoire de l´Académie des Sciences". Fayard. Paris.

FRANKLIN, J. (2001): "The Science of Conjecture. Evidence and Probability before Pascal".The Johns Hopkins University Press. London.

GÓMEZ CAMACHO, F. (1998): "Economía y Filosofía Moral: la Formación del Pensamiento Económico europeo en la Escolástica española". Síntesis. Madrid.

GOURAUD, C. (1848): "Histoire du Calcul des Probabilités depuis ses Origines jusqu´à nos Jours". Librairie d´Auguste Durand. Paris.

GRAVESANDE, W. J.´S (1748): "Introductio ad philosophiam, methaphisicam et logicam continens". Editio secunda. Baptistae Pasquali, Venecia.

GRAVESANDE, W. J.´S (1774): "Oeuvres Philosophiques et Mathématiques". Marc Michel Rey. Amsterdam. 2ª parte.

HAILPERIN, T. (1996): "Sentential Probability Logic". Associated University Presses. London.

HUYGENS, C. (1657): "De Ratiociniis in Ludo Aleae" en Meusnier, N.: "Christian Huygens et Jacques Bernoulli: la Première Partie de l´Ars Conjectandi (1657-1713)". Paris, 1992.

MARTÍN-PLIEGO, F. J. (1997): "Historia de la Probabilidad en España." *Revista de Historia Económica*. Año XV, nº 1, pp. 161-176.

MARTÍN-PLIEGO, F. J. (2002): "Los probabilistas españoles de los siglos XVII a XIX" en A.H.E.P.E. (2002): "Historia de la Probabilidad y de la Estadística", pp. 67-80.

MARTÍN-PLIEGO, F. J., SANTOS DEL CERRO, J. (2000): "Luca Pacioli: en el Origen del Cálculo de Probabilidades". *Revista de Historia Económica*. Año XVIII. Primavera-Verano 2000. Nº 2, pp.405-417.

MARTÍN-PLIEGO, F. J., SANTOS DEL CERRO, J. (2002): "Juan Caramuel y el Cálculo de Probabilidades". *Estadística Española*, Vol. 44, Núm. 150.

MEDINA, B. DE. (1578) : "Expositio in Primam Secundae Angelici Doctoris D. Thomae Aquinatis". Mathiae Gastii. Salamanca.

MEUSNIER, N. (1987): "Jacques Bernoulli et l´Ars Conjectandi". Institut de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques. Université de Rouen. Haute Normandie. Rouen.

MONTUCLA, J. F. (1802): "Histoire des Mathématiques". Tomo III. Henri Agasse. Paris. Reimpresión Albert Blanchard, Paris, 1968.

SANTOS DEL CERRO, J. (1999): "Historia de la Probabilidad: Aportaciones Españolas a su Proceso de Conceptualización". Tesis Doctoral leída en la Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales de Toledo.

SANTOS DEL CERRO, J. (2000): "Una teoría sobre la creación del concepto moderno de probabildad: aportaciones españolas" *Llull*. Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas. Vol. 23 nº 47, pp. 431-450.

SANTOS DEL CERRO, J. (2002): "Probabilismo moral y probabilidad" en A.H.E.P.E. (2002): "Historia de la Probabilidad y de la Estadística", pp. 103-118.

SCHNEIDER, I. (1976): "The Introduction of Probability into Mathematics". *Historia Mathematica*, 3.

SHAFER, G. (1982): "The Bernoulli". *Encyclopedia of Statistical Sciences*. Vol. 1º.

SHAFER, G.(1978): "Non-Additive Probability in the Work of Bernoulli and Lambert". *Archive for History of Exact Sciences*. Vol. 19.

VÁZQUEZ, G.(1631): "Commentariourum ac Disputationum in Priman Secundae Sancti Thomae. Tomus Primus". Lyón.

CAPÍTULO 6

Joseph Vallejo y la estimación máximo-verosímil

FRANCISCO JAVIER MARTÍN-PLIEGO
Universidad Rey Juan Carlos

Joseph Mariano Vallejo nació en 1779 en Albuñuelas (Granada) y murió en 1846 en Madrid. Estudió en la Universidad de Granada y debido a su afición a las matemáticas pronto, en 1801, fue propuesto como profesor sustituto de cátedra en la sección de matemáticas de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando, obteniendo por oposición en 1802 la Cátedra de Matemáticas del Real Seminario de Nobles de Madrid. Por vicisitudes de la política española de la época viajó por diferentes países de Europa, fundamentalmente por Francia donde en París trabaría contacto con los matemáticos más ilustres de aquel momento. Realizó numerosas publicaciones tanto de divulgación sobre "aritmética para niños" o "cartilla para enseñar y aprender a leer",.., como memorias para la realización de obras públicas, de temas económicos e industriales, pero su legado más relevante se centra en sus manuales de matemáticas, el *Tratado elemental de Matemáticas* de 1813 en cinco tomos, su *Compendio de Matemáticas puras y mistas* de 1819 de dos tomos que tuvo varias reimpresiones y su *Memoria sobre la curvatura de las líneas en sus diferentes puntos, sobre el radio de curvatura y sobre las evolutas* en 1807.

Precisamente en su Compendio de Matemáticas introduce el método de estimación máximo-verosímil como veremos más adelante. Pero antes estudiemos los antecedentes históricos de este procedimiento de estimación.

Destaquemos pues, las aportaciones más importantes que pueden considerarse precedentes relevantes de la formulación definitiva del método de estimación máximo-verosímil de R.A. Fisher. Mi intención no es tanto hacer una historia del citado método sino el señalar aquellas aportaciones que no son recogidas habitualmente en los textos específicos, y especialmente la de Joseph M. Vallejo cuya aportación constituye la primera exposición completa sobre el mismo aunque le faltare su traducción formal.

Suele mencionarse en primer lugar el artículo de Daniel Bernouilli de 1777, escrito originalmente en latín y traducido al inglés con el título *The most probable choice between several discrepant observations and the formation therefrom of the most likely induction*. Su objetivo es proporcionar un método que proporcione el valor más probable para el verdadero valor de una magnitud desconocida dado un conjunto de observaciones sujetas a error.

Otro precedente es J.H. Lambert (1760) que propone un método que es *"analíticamente idéntico al método de estimación máximo-verosímil"*[1], y que se encuentra en su completo trabajo sobre la luz[2] *Photométrie ou de la mesure et de la gradation de la lumière, des coulers et de l´ombre* del que ya dio cuenta Sheynin[3] (1971) en un trabajo publicado más de 200 años después. En este sentido Lambert propone para estimar el error medio maximizar la función[4]:

$$N \propto [PN]^n \, [QM]^m \, [RL]^l \, [SK]^k$$

donde N es la probabilidad total y n, m, l y k son el número de observaciones de cada categoría y PN, QM, RL y SK son las frecuencias verdaderas o probabilidades. Para ello procede a la obtención del máximo de la transformada logarítmica de esta expresión, en este sentido dice[5]:

«Tendríamos pues:

$$n \, Log \; PN + m \; Log \; QM + l \; Log \; RL + k \; Log \; SK = \text{maximun}$$

y diferenciando:

$$n\frac{d\,(PN)}{PN} + m\frac{d\,(QM)}{QM} + l\frac{d\,(RL)}{RL} + k\frac{d\,(SK)}{SK} = 0$$

---

1 EDWARDS, A.W.F. (1992): pág. 222.

2 LAMBERT, J.H. (1760): págs. 106-109.

3 SHEYNIN, O.B. (1971): págs. 244-256.

4 LAMBERT, O.B.: *op. cit.*, págs. 108-109.

5 Ibidem: pág. 109.

Consideremos las rectas tangentes a los puntos *N*, *M*, *L* y *K* y sus subtangentes ν, μ, λ, χ; la probabilidad será la más grande cuando hagamos:

$$\frac{n}{\nu}+\frac{m}{\mu}+\frac{l}{\lambda}+\frac{k}{\chi}=0$$

En esta fórmula las subtangentes son positivas o negativas del mismo modo que los errores a los que corresponden son negativos o positivos».

Vemos aquí el desarrollo formal completo del método de máxima verosimilitud.

La siguiente contribución importante es la debida a Condorcet. Comenzaremos con el planteamiento por parte de Condorcet del siguiente problema:

«*supongo que haya en una urna un número determinado de bolas blancas y negras, cuatro, por ejemplo; extraigo una de estas bolas que reemplazo enseguida; después extraigo una segunda que reemplazo de nuevo, y así sucesivamente, anotando cada vez el color de la bola que he extraído.*

Según esto, imaginemos que he extraído tres bolas blancas y una negra. *Se me puede preguntar la probabilidad de que haya en la urna cuatro bolas blancas, o tres blancas y una negra, o dos blancas y dos negras, o tres negras y una blanca, o cuatro negras*»[6].

A continuación procede a calcular la probabilidad del hecho ocurrido (A = haber extraído tres bolas blancas y una negra), suponiendo cada una de las composiciones posibles.

«*Si se tienen cuatro bolas blancas, la probabilidad de extraer tres blancas y una negra será 0*»[7].

es decir:

P (A/primera composición) = 0

y las del resto de composiciones:

P (A/segunda composición) = 108/256

P (A/tercera composición) = 64/256

P (A/cuarta composición) = 12/256

P (A/quinta composición) = 0

Concluye calculando las probabilidades de cada una de las hipótesis plausibles a partir de la información muestral.

[6] CONDORCET (1805): págs. 65-66.

[7] Ibidem, pág. 66.

«*La probabilidad de la primera hipótesis* [que la composición sea tres bolas blancas y una negra] *será de 108/184; la de la* segunda [dos bolas blancas y dos negras] *64/184; la de la tercera* [una blanca y tres negras] *12/184*»[8].

Estos resultados se obtienen aplicando el Teorema de Bayes. Utilizando terminología moderna el cociente 108/184, por ejemplo, no es otra cosa que:

$$P(1^{a}/A)=\frac{P(1^{a}\cap A)}{P(A)}=\frac{P(1^{a})\cdot P(A/1^{a})}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\frac{108}{256}}{\frac{1}{3}\frac{108}{256}+\frac{1}{3}\frac{64}{256}+\frac{1}{3}\frac{12}{256}}=\frac{108}{184}$$

Resulta definitiva e ilustrativa la referencia al pasado, a la experiencia, a la información muestral que hace Condorcet en la resolución de este problema.

«*el único dato que tengo para evaluar la probabilidad* [de las hipótesis] *que sea antes bien expresado por un número que por otro, depende de la observación de las extracciones sucesivas*»[9].

Sin embargo, a pesar de que Condorcet plantea el estudio del problema de la estimación máximo-verosímil no lo define explícitamente, ya que no se atreve a inferir en base a sus cálculos cual sería la composición de la urna.

La siguiente aportación corresponde a Joseph Mariano Vallejo. Respecto de este autor, hasta hace muy pocos años existían muy vagas noticias sobre sus aportaciones al cálculo de probabilidades. Recientemente se han publicado algunos trabajos que destacan aspectos biográficos e intelectuales que nos descubren un autor original como destaca Garma Pons.

Sabemos que después del trienio liberal, en 1823, Vallejo tuvo que exiliarse en distintos países de Europa, y en París mantuvo una relación de amistad con Laplace, entre otros, con el que, es lógico pensar, pusiese en común cuestiones sobre el cálculo de probabilidades.

Vallejo publicó en 1819, como ya señalábamos antes, su *Compendio de Matemáticas Puras y Mistas*, en cuyo tomo II redactó un capítulo relativo a la teoría de la probabilidad o *"arte de conjeturar"*, como él mismo lo llama, en el que aparece un avance original del método de estimación máximo-verosímil anticipándose en un siglo a su formulación formal definitiva.

«*Vallejo, a lo largo de las 12 páginas que dedica al tema, establece los conceptos y definiciones básicos de la probabilidad, siendo lo más destacable de este texto su anticipación del método de estimación máximo-verosímil. En este sentido dice:*

[8] Ibidem, pág. 67.

[9] Ibidem, pág. 68.

“*Si se sabe que en una urna hay cuatro bolas entre blancas y negras, y se han sacado sucesivamente tres bolas blancas y una negra, teniendo cuidado de volver a poner cada vez la bola sacada, podríamos conjeturar que se verificaba alguna de las tres hipótesis siguientes: o que había 3 bolas blancas y 1 negra, o 2 blancas y 2 negras o una blanca y 3 negras.*

La última hipótesis es mucho menos probable que las otras dos, porque si la urna contuviese sólo una bola blanca, sería necesario que esta bola hubiese salido tres veces de seguida; y se concibe con facilidad que habría menos dificultad si hubiese dos bolas blancas, y aún menos si hubiese tres”»[10].

Y remarca que[11]:

«*Así, como se observa una superioridad constante en el número de veces que un acontecimiento se manifiesta sobre el número de veces en que se manifiesta el contrario, nos vemos conducidos a creer que la producción del primero es de una facilidad mayor que la del segundo: o que hay una causa que determina mas bien la una que la otra; o, en fin, lo que es lo mismo, que la probabilidad simple del primer acontecimiento escede a 1/2*».

También establece su noción de verosimilitud[12]:

«*Si hemos esperimentado una sola vez que dos hechos A y B se siguen inmediatamente, se presentan a nosotros tres suposiciones: o que B tenga su fundamento en A, o que A y B tengan su fundamento comun en una tercera causa C, o que cada uno de los dos dependa de una causa aislada o independiente. En los dos primeros casos deberán volver a aparecer siempre el uno a continuación del otro; en el tercero su concurso será efecto de la casualidad. Donde se ve que admitiendo la influencia de la repetición del juicio de posibilidad sobre nuestro espíritu, somos conducidos a suponer una dependencia sea inmediata, sea mediata entre A y B. Luego si se reproducen de nuevo, y si al reproducirse parecen constantemente reunidos, viene a ser verosímil que esta reunión tiene su principio en una de las dos primeras hipótesis; y mientras más frecuente sea la repeticion del concurso de los dos hechos mas se aumentará esta verosimilitud e irá creciendo hasta el infinito*».

Aquí, como puede fácilmente observarse, se encuentra el esquema completo de un proceso de estimación máximo-verosímil, ya que está expreso la toma de decisiones respecto a la composición de la urna y por lo tanto la estimación del número de bolas blancas y negras. Falta sólo su formulación rigurosa y su generalización a otros esquemas distintos al binomial que propone en su urna de bolas blancas y negras. También nos enseña cómo la verosimilitud puede crecer cuando un hecho se repite un número considerable de veces. Ésta es, quizás, la aportación más importante al Cálculo de Probabilidades de un autor español del siglo XIX, que no deja de ser relevante, más si tenemos en cuenta el entorno científico español de su época.

[10] MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): pág. 168.

[11] VALLEJO, J.M. (1827): Tomo II, pág. 432.

[12] *Ibidem* : pág. 433.

Para concluir citaremos una aportación debida a John Venn en la segunda edición de su *Logic of Chance* (1876) en la que de una manera no excesivamente clara señala el fundamento del método de estimación máximo-verosímil, eso sí casi 50 años después de la exposición de Vallejo.

> «*En la mesa de juego hay cuatro dados con el as en la cara superior: ¿Esta situación corresponde a la última tirada o alguien los ha colocado a propósito así? Para resolver esta cuestión, lo que debemos hacer es comparar la frecuencia relativa con la que dos tipos de causas podrían producir tal resultado. La probabilidad de obtener este resultado bajo azar es fácil de asignar. El número de combinaciones posibles con cuatro dados es 6^4 o 1296; de estos podemos decir que seis son favorables para el caso de que no se pueda razonablemente presumir que se encuentran expuestos para su mera contemplación; cualquier otro resultado que encontrásemos en la cara superior del dado podría llevarnos al mismo razonamiento. Así pues, la probabilidad de encontrarse con todas las caras iguales es 6/1296 o 1/216. Por otra parte, ¿cuál es la probabilidad de encontrarse dicho resultado intencionadamente? Nadie puede aventurarse a decirlo porque hay dos factores que no se pueden estimar. En primer lugar, ¿podrían los jugadores manipular los dados de cualquier manera pero con el cubilete? La verosimilitud es decididamente menor si fuesen jugadores expertos que si fuesen niños. En segundo lugar, suponiendo que los hubiesen colocado manualmente a propósito, ¿los habrían puesto todos con la misma cara hacia arriba? Otra vez no podemos dar una respuesta, más allá de decir vagamente que no parece improbable que lo hubiesen hecho así.*»[13].

La evidencia de encontrarse un mayor número de dados con la misma cara superior nos llevaría a inclinarnos a pensar que esa situación no es debida al azar sino que han sido colocados así intencionadamente. Por tanto lo que en Venn encontramos es un esbozo de cálculo de verosimilitudes de las distintas alternativas poblacionales pero cuesta descubrir nítidamente el proceso decisional de la estimación.

Podemos concluir que antes que R.A. Fisher[14] sistematizara y formalizara el método de estimación de máxima-verosimilitud en los años 20 del pasado siglo tuvo, cuando menos dos importantes antecedentes, el de Lambert en 1760 que desarrolla formalmente el procedimiento aunque no lo enmarque en una teoría general de la estimación y el de Vallejo en 1812 que describe con precisión todo el esquema decisional que el método conlleva.

---

[13] VENN, J. (1876): págs. 249-250.

[14] FISHER, R.A.: págs. 700-725.

BIBLIOGRAFÍA

A.H.E.P.E. (2002): *Historia de la Probabilidad y de la Estadística I.* AC. Madrid.

A.H.E.P.E. (2004): *Historia de la Probabilidad y de la Estadística II*. Delta Publicaciones. Madrid.

CONDORCET (1805): *Élémens du Calcul des Probabilités, et son application aux juex de hasard, a la loterie, et aux jugements des hommes.* Royez. Paris.

EDWARDS, A.W.F. (1992): *Likelihood*. Edición ampliada. The Johns Hopkins University Press. London.

FISHER, R.A. (1925): *Theory of statistical estimation.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 22.

GARMA PONS, S. (1973): *Las matemáticas en España en los principios del siglo XIX. D. Josef Mariano Vallejo*. Revista de Occidente, nº 118.

GARMA PONS, S. (1995): *Adiciones a la Biografía de D. Josef Mariano Vallejo.* Arbor nº 594.

LAMBERT, J. H. (1760): *Photométrie ou de la mesure et de la gradation de la lumière, des coulers et de lómbre*. Edición traducida en 1997 por L´Harmattan. Paris.

MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): *Historia de la Probabilidad en España*. Revista de Historia Económica. Año XV, nº 1.

MARTÍN PLIEGO, F. J. (2002): *Los probabilistas españoles de los siglos XVII a XIX* en A.H.E.P.E. (2002): *Historia de la Probabilidad y de la Estadística*.

MARTÍN PLIEGO, F. J.; SANTOS DEL CERRO, J. (2002): *La Estimación máximo-verosimil en retrospectiva.* XVI Reunión ASEPELT. Madrid.

SHAFER, G. (1978): *Non-Additive Probability in the Works of Bernuolli and Lambert.* Archive for History of Exact Sciences. Vol. 19.

SHEYNIN, O.B. (1971): *J.H. Lambert´s work on probability*. Archive for History of Exact Sciences. Vol. 7.

VALLEJO, J. M. (1827): *Compendio de matemáticas puras y mistas*. 2ª ed. Imprenta García. Madrid.

VENN, J. (1876): *The Logic of Chance. An Essay on the Foundations and Province of the Theory of Probability with especial reference to its logical bearings and its application to moral and social science*. MacMillan. London.

CAPÍTULO 7

La democracia según Condorcet

Mary Sol de Mora Charles
UPV/EHU-ICREA/UPC

Condorcet fue criticado, incomprendido, despreciado y finalmente condenado a muerte por sus contemporáneos en una época de efervescencia política, y no podemos decir que su suerte haya mejorado drásticamente en la posteridad, pero quizá en nuestro siglo podamos comprenderle mejor, ahora que los grandes dogmatismos y prejuicios políticos han perdido fuerza entre una masa de ciudadanos escépticos y cada vez más descreídos políticamente. Ahora la visión que Karl Pearson tuvo de él debe prevalecer y seguramente ya ha sido el punto de partida de estudios más profundos. Decía Pearson en su amplio ensayo sobre Condorcet:

> «*Como en el caso de Richard Price uno le perdona su desesperado idealismo, su creencia en la perfectibilidad de la humanidad y su confianza en una utopía política, porque su entusiasmo es el de una mente generosa que, creyendo que el ideal puede hacerse realidad, toma un camino, aunque sea un camino muy pequeño, hacia él*»[1].

[1] Pearson, 1978, pág. 425.

Las grandes influencias intelectuales de Condorcet serán D'Alembert, Turgot y Voltaire que a la vez se contarán entre sus amigos más queridos. De ellos provienen muchas de sus ideas, por ejemplo, de Turgot, la teoría de que la raza humana es indefinidamente perfectible, la fe en el progreso. A la muerte de Turgot, Necker, el proteccionista, ocupó su puesto como ministro de finanzas y se opuso a las reformas proyectadas por Turgot que perjudicaban a la iglesia y la nobleza a favor de los pobres, lo que provocó la dimisión de Condorcet y fue seguido por la toma de la Bastilla. La Revolución Francesa estaba en marcha. Condorcet había luchado por conseguir pacíficamente lo que la revolución lograría de forma sangrienta, pero además luchaba por causas que aún tardarían un siglo en ser consideradas, como la abolición de la esclavitud o la liberación de las mujeres. También abogó por un trato tolerante para los protestantes en Francia, donde se encontraban oprimidos como ciudadanos marginales.

Sus textos sobre probabilidad son sobre todo importantes por sus ideas sobre la ciencia política, lo que Condorcet llamaba Matemática Social. Conocía la Aritmética Política de Witt y Petty aunque no menciona a Graunt y justificaba así su elección del nombre de la nueva ciencia:

> «*La aplicación del cálculo a las ciencias morales y políticas no ha podido nacer sino en la época en que las matemáticas han sido cultivadas con éxito en pueblos cuya libertad ha tenido la tranquilidad por compañera y las luces como apoyo. En Holanda, el célebre Jan de Witt, discípulo de Descartes; y en Inglaterra, el caballero Petty, dieron los primeros ensayos de esta ciencia en el siglo pasado, aproximadamente en la época en que Fermat y Pascal creaban el cálculo de probabilidades que es una de sus bases primeras y no se atrevían a aplicarlo más que a los juegos de azar; la idea de aplicarlo a usos más importantes y más útiles ni siquiera había surgido.*
>
> *Como todas estas aplicaciones son inmediatamente relativas a los intereses sociales, o al análisis de las operaciones del espíritu humano, y como en este último caso no tienen todavía por objeto más que el hombre perfeccionado por la sociedad, he creído que el nombre de **matemática social** era el que convenía mejor a esta ciencia.*
>
> *Prefiero la palabra **matemática**, aunque actualmente en desuso en singular, a las de aritmética, geometría, análisis, porque éstas indican una parte de las matemáticas, o uno de los métodos que ellas emplean, y aquí se trata tanto de la aplicación del álgebra, como de la geometría, como de la aritmética; se trata de aplicaciones en las que todos los métodos pueden ser empleados… Prefiero la palabra **social** a las de moral o política, porque el sentido de estas últimas palabras es menos extenso y menos preciso*»[2].

Los puntos fundamentales de su posición podemos encontrarlos en varios textos: por ejemplo su discurso de acceso a la Academia de Ciencias, el artículo sobre Proba-

---

[2] CONDORCET, ed. 1986, Élémens du calcul de probabilités, pág. 597.

bilidad para la Enciclopedia francesa y en el *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*.

Considera Condorcet el arte social como una verdadera ciencia, fundada, como todas las otras, sobre hechos, experimentos, razonamientos y cálculos; susceptible, como todas las otras, de indefinido progreso y desarrollo y resultando progresivamente más útil a medida que sus verdaderos principios son generalizados, y concluye que sería bueno para una sociedad de hombres libres en sus opiniones e independientes en su conducta, el ocuparse en acelerar el progreso de esta ciencia favoreciendo su desarrollo y diseminando sus verdades.

Una de las aplicaciones fundamentales de la matemática social de Condorcet es la referente a la administración de justicia, tema que ya había preocupado a Leibniz en su tesis doctoral y a Nicolás Bernoulli en la suya en 1712, entre otros. Pero aquí nos interesa otra de esas aplicaciones que constituye uno de los temas característicos de Condorcet: el estudio matemático del mecanismo de las votaciones. En él encontraremos ideas muy interesantes acerca de la democracia y su funcionamiento, pues Condorcet estudia muchos de los aspectos técnicos y morales de este complicado problema, como el de la mayoría que se puede considerar suficiente para obligar con sus decisiones a todos; los temas que son susceptibles de decisión por parte de una asamblea amplia y los que requieren "votantes" más especializados o informados y, por otra parte, quién puede votar en cualquier caso y qué razones puede haber para no aceptar el voto de algunos ciudadanos. Como vemos, es un área de conocimiento que se transforma ya con Condorcet en una ciencia de gran complejidad y extensión y más en una época en la que la democracia estaba, podríamos decir, "en rodaje". La idílica situación de los ciudadanos griegos que podían votar en asamblea y acceder a casi todos los cargos, con la excepción por supuesto de las mujeres, los esclavos y los extranjeros, aún se había complicado más en el siglo XVIII con la existencia del rey soberano, la enorme extensión y variedad de los ciudadanos y los terribles problemas económicos y de condiciones de vida que sufría una gran parte de la población francesa.

La aportación de Condorcet no es poca en el terreno del pensamiento, pero sobre todo la aplicación de la matemática a las ciencias sociales es lo más característico de ella. No es una idea original de Condorcet y ya hemos mencionado algunas de sus influencias más directas, pero sí es cierto que él le dio un alcance sin precedentes y que sus cualidades científicas y humanas extraordinarias le convierten en un sujeto de estudio apasionante.

La cuestión no era para Condorcet averiguar qué grupo, partido o facción tenía más fuerza, sino qué grado se requiere de probabilidad de que la decisión de la mayoría esté cerca de la verdad, de modo que justifique la obligación del resto de la sociedad de acatar esa decisión. Se trataba de encontrar un método para el descubrimiento colectivo de la verdad. En la antigüedad, como sabemos, el procedimiento era la asamblea general, o el poder establecido, pero ahora las decisiones las tomaban un grupo de representantes elegidos por la nación o por el príncipe. Es muy importante que este pequeño grupo decida bien, "conforme a razón", dirá Condorcet, y el razonamiento matemático puede descubrir los procedimientos necesarios y los modos de composición de los cuerpos representativos. En el *Essai* dice:

> «*Así nuestra principal tarea aquí es descubrir la probabilidad que asegura la validez de una ley aprobada por la mayoría más pequeña posible, de forma que uno pueda creer que no es injusto someter a otros a esta ley y que es útil para uno mismo someterse a ella… Así el ciudadano, al obedecer dicha ley, sienta que, puesto que es una condición necesaria del orden social que acepte no seguir únicamente su propia razón en una cierta categoría de acciones, tiene al menos la ventaja de seguir sólo aquellas opiniones que, haciendo abstracción de su juicio, tiene que considerar como poseedoras del grado de probabilidad suficiente para determinar su conducta*»[3].

Como ejemplo de las tremendas dificultades a las que se enfrenta Condorcet, consideremos la situación en que se encuentra una asamblea en la que la verdad probable de la opinión de cada votante es mayor que ½. En este caso, la asamblea decidirá correctamente por mayoría con una probabilidad que crecerá con el aumento del tamaño de la asamblea y por el contrario, si la probabilidad de verdad para cada votante es menor que ½, el mayor tamaño de la asamblea aumentará la probabilidad de error. Ahora bien, es muy difícil (poco probable) que una asamblea numerosa esté compuesta exclusivamente por personas ilustradas, de buen juicio. Este riesgo debe ser minimizado a toda costa y para ello propone Condorcet una serie de medidas complicadas, por ejemplo una mayoría de 3/5 en una asamblea numerosa producirá una probabilidad favorable al acierto si la probabilidad de la opinión correcta de los votantes es mayor que 1/5. Pero este camino puede conducirnos a asambleas en las que cada vez es más difícil llegar a una decisión. Y cuando se trata de un tema muy importante, por ejemplo una constitución, es evidente que sólo un grupo de personas ilustradas podrá llegar a confeccionarla, un grupo poco numeroso pero representativo, es decir, "los más sabios y mejor informados", elegidos por esa mayoría no tan ilustrada. Insiste Condorcet en que hay un gran número de cuestiones importantes, complicadas o sometidas al influjo de los prejuicios y de las pasiones, sobre las cuales es probable que un hombre poco instruido tome una decisión errónea. Hay pues un gran número de puntos sobre los cuales sucederá que cuanto más se multiplique el número de votantes, más habrá que temer obtener por mayoría una decisión contraria a la verdad, de modo que una constitución puramente democrática será la peor de todas para todos los temas sobre los que el pueblo no conoce en absoluto la verdad.

La ignorancia popular y los prejuicios se extienden a muchas cuestiones políticas, de ese modo, una asamblea popular no es nada fiable. El riesgo se podría minimizar exigiendo una complicada combinación de asambleas y de mayorías proporcionales al número de votantes, pero ello supondría como hemos dicho el riesgo de no llegar a ninguna decisión.

---

3 Prólogo del *Essai*, pág. CVI.

Uno de los conceptos clave de la teoría de la probabilidad de Condorcet es el *Motif de Croire*, que muestra por otra parte la gran influencia de las ideas de Bayes. Dice Condorcet:

> «*Se ve en primer lugar que si nos limitamos a entender por probabilidad de un suceso el número de las combinaciones* [4] *en que tiene lugar dividido por el número total de combinaciones posibles, el principio no es más que una verdad de definición y que así el cálculo, que es su base, se convierte en una verdad rigurosa. Pero no nos limitamos a este único sentido. Además, se entiende,*
>
> *1º. Que si se conoce el número de las combinaciones que dan lugar a un suceso y el número de las combinaciones que no lo producen, y que el primero sobrepasa al segundo, hay razones para creer que el suceso tendrá lugar más bien que para creer que no tendrá lugar.*
>
> *2º. Que el motivo de creer aumenta al mismo tiempo que la razón del número de las combinaciones favorables al número total.*
>
> *3º. Que crece proporcionalmente a esa razón*»[5].

Ahora la ciencia de lo probable es tratada como una ciencia de la decisión. Y las decisiones que los hombres han de tomar son las que mejoran su bienestar, las que producen progreso en todos los ámbitos. Condorcet hace suya la opinión de los filósofos clásicos: Los hombres no tienen otro motivo para sus acciones que evitar el sufrimiento y buscar la felicidad. Pero ahora se considera el problema a la luz de los nuevos filósofos. Para lograr esos objetivos, se someten al Contrato Social, mejorado por Locke con el añadido de la regla de la mayoría. Naturalmente la felicidad no se basa simplemente en lo que se desea sin reflexión y sin la búsqueda del bien mayor o del menor mal. Como primera limitación aparece por lo tanto que no se pide a los ciudadanos que expresen (voten) sus deseos, sino el interés general, que expresen un juicio. Dice Condorcet:

> «*Si el individuo delega en la comunidad, por el contrato, una parte de su autoridad sobre sí mismo, comprometiéndose a ceder contra sus propias opiniones a los deseos de la mayoría, no renuncia de ningún modo a intervenir en la dirección de los asuntos públicos. A cambio de su sacrificio recibe el derecho de emitir siempre y en todas partes su opinión, de participar en la confección de las leyes y en el gobierno del estado. Si reconoce una regla, es con la condición de que haya sido discutida por él mismo o por sus representantes; es lo que se llama* ***libertad política*** *y de ella deriva toda la teoría del gobierno*».

La verdad (es decir la corrección, el acierto) de la decisión no depende sólo de los votantes, sino de las condiciones en las que se efectúa el voto, la forma de la asamblea y su funcionamiento. Todos los factores deben ser estudiados a la luz de la Matemática Social. Para Condorcet hay una teoría abstracta de la decisión y luego una adaptación, la aplicación de la teoría a la práctica. La situación se complica en la rea-

[4] Casos.

[5] CONDORCET. *Essai. Discours préliminaire*. Ed. 1986, pág. 14.

lidad porque hay enormes diferencias entre cómo debería ser el votante: libre e igual a todos, que no recibe más de lo que da y cuya única manera de entrar en relación con los otros es el voto, según la situación o ley natural, y cómo es la práctica real, pero ya no natural, del sufragio.

En el modelo teórico, todos los votantes tendrían igual sagacidad, igual justeza de espíritu de la que harían uso por igual, estarían animados por un igual espíritu de justicia y en fin, cada uno de ellos votaría según él mismo, sin prejuicios, como si cada uno no hubiera tenido sobre la opinión del otro una influencia mayor que la que ha recibido a su vez. Ni camarillas ni partidos. Así, las probabilidades individuales de votar conformemente a la verdad, por ser independientes, serían aditivas y la resultante sería una probabilidad mayor.

Pero en la realidad, desgraciadamente las cosas no se ajustan al modelo, las variables son muchas. Condorcet estudia también la famosa paradoja del caballero de Borda, que plantea el caso en que se ha de elegir entre tres candidatos y se vota por los tres en el orden elegido por el votante lo cual puede producir un resultado no deseado. De ahí que la manera en que las decisiones se proponen al voto de una asamblea sea de la mayor importancia y se exijan diferentes grados de seguridad para diferentes tipos de decisiones más o menos graves.

En 1785 publica su *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Este texto ha tenido un extraño destino, porque al parecer nadie ha conseguido pasar del prólogo, aunque no encontraremos un estudioso de Condorcet que no recomiende encarecidamente a las generaciones posteriores que estudien a fondo el texto completo. Es demasiado denso, lleno de fórmulas ahora pasadas de moda y algunos, como Pearson, sospechan que contiene muchos errores por falta de definición de los casos que plantea, y que admiten interpretaciones alternativas. No obstante, el prólogo o discurso preliminar es suficientemente extenso y explícito para que casi todos se den por satisfechos.

La fecha clave en el destino de Condorcet será 1789, con los Estados Generales, el comienzo de la Revolución Francesa, que provocan en Condorcet una gran actividad panfletaria: “La uniformidad en todos los objetos de orden público es un lazo adicional entre los hombres: toda diferencia es una semilla de discordia”. Sólo la razón nos enseña la justicia y la verdad que son una y la misma en todas partes. La naturaleza sólo ha hecho hombres y ciudadanos. En ese año publica. *Sur la forme des élections* que ahora en 1789 es aún más importante si cabe. Además Condorcet cree que la verdadera barrera contra el abuso de poder en Francia está en la declaración de los derechos humanos que debe ser redactada por hombres ilustrados, ahí está la clave, por ello redacta también en este año la *Déclaration des Droits de l'Homme et du Citoyen*.

Condorcet intenta que la nobleza se una a los representantes de los otros grupos (o estados) en una asamblea única, votando por cabezas, pero por supuesto no lo conseguirá. Sucede entonces algo que Condorcet temía sobre todo: la intervención de las masas populares de París en nombre de la soberanía del pueblo: la toma de la Bastilla el 14 de julio de 1789. No obstante, esto también va en la dirección que Condorcet defendía: el sufragio universal, que por supuesto no va a aceptarse nunca a pesar de sus esfuerzos. Al mismo tiempo, su desconfianza de las masas ciudadanas, del populacho, continuaba y se oponía frontalmente a:

> «*La falsa opinión que el pueblo ha construido de sus derechos, imaginando que la voluntad tumultuosa de los habitantes de una ciudad, un pueblo, una aldea e incluso un barrio, es una especie de ley y que la voluntad popular, expresada de cualquier modo, tiene la misma autoridad que la voluntad que se expresa según una forma presentada por una ley reconocida*».

En 1791 Condorcet era un miembro del Consejo de la ciudad de París y luego de la Asamblea Legislativa. Pero la huida del rey va a provocar disensiones entre Condorcet y sus amigos. La Rochefoucauld abandona la presidencia del Directorio pero ya es demasiado tarde y será asesinado en presencia de su madre, la duquesa de Enville. Condorcet continuará en la brecha y llegará a presidente de la Asamblea; su intención es moderar o contrarrestar a los montañeses de Robespierre. Condorcet aboga por fin por destronar a Luis XVI, porque piensa que la inquietud popular provocaría la represión y ésta a su vez un mayor desorden. Sus antiguos amigos, como Lafayette no supieron resistir y el desorden les empujó por el contrario a la reacción como remedio. Y así la insurrección popular depuso por la fuerza la monarquía en 1792, dándole la razón a Condorcet que votará también contra la ejecución del rey.

¿Qué hacer ahora? Una Constitución. La redactará con la contribución de Tom Paine. La anarquía amenazaba por todos lados, la abolición de los derechos exclusivos de caza, por ejemplo, había conducido a la posesión generalizada de armas y eso, decía Condorcet, “no podía ser considerado como uno de los derechos naturales del hombre”, pero no conseguirá hacerse entender: era demasiado radical para los conservadores y demasiado conservador para los radicales jacobinos. La Asamblea estaba más interesada en parar una posible contrarrevolución que en el debate de la constitución, la instrucción pública o el bienestar económico.

En agosto, la Comuna de París, con Robespierre, comienza la acción contra los prisioneros contra-revolucionarios. La furia popular se desata ante el anuncio del avance prusiano y la caída de Verdun.

Luego, en una época de relativa calma, se discutirán los proyectos de Condorcet sobre la educación y la Constitución, que se presenta el 15 de febrero de 1793, como Plan de Constitution. Era un informe tan abstracto y sutil como largo y complicado y fue recibido por la Convención con una monumental ausencia de entusiasmo. Era el momento del enfrentamiento entre girondinos y jacobinos y tras interminables debates y tumulto triunfaron los segundos y Robespierre y sus partidarios produjeron otro texto de Constitución en junio, al que Condorcet se opuso públicamente y aconsejó al pueblo que no votase a favor debido a las irregularidades del procedimiento y a los defectos del contenido. Chabot denunció este escrito de Condorcet y en julio la Asamblea dictó el arresto de Condorcet, “que quería imponerle leyes a la República francesa”. Al no encontrarlo en su casa, es declarado fuera de la ley, acusado de conspiración contra la unidad de la República, condenado a muerte y sus bienes confiscados. Aquí debemos incluir algo que, aunque parezca un episodio banal en la vida de cualquier persona, no lo fue en el caso de Condorcet: su matrimonio. Su esposa, Mlle. Sophie de Grouchy, era de gran belleza, maneras elegantes y fino intelecto, según nos dicen, y en los siete años que estuvieron casados fue además su amiga y camarada. En los últimos meses de la vida de Condorcet fue ella quien le disuadió de escribir su apología, de intentar defenderse contra sus enemigos y en cambio le animó a escribir su obra más sentida. Los más decididos adversarios del matrimonio para los hombres de ciencia, que entonces sorprendentemente eran muchos, llegaron a apreciarla. Así la duquesa de Enville, madre del duque de La Rochefoucauld, le dijo solemnemente "os perdonamos", tras conocer a Madame de Condorcet. Al comenzar pues sus nueve meses de clandestinidad, Condorcet comenzó a escribir su *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*, que fue publicado póstumamente, hasta que finalmente fue detenido y se produjo su encarcelamiento y muerte el 8 de abril, al parecer ingiriendo un veneno que tanto él como varios de sus amigos llevaban escondido para una ocasión semejante. El comentario de Robespierre puede servir como ilustración de la crueldad de la política y también como un malintencionado epitafio: "Condorcet era un gran matemático a los ojos de los hombres de letras y un distinguido hombre de letras a los ojos de los matemáticos". Nosotros podríamos decir que era un Leibniz ingenuo, que no contaba como éste con el consuelo de la metafísica, pero que también como Leibniz fue un mediador, un conciliador de los hombres y como tal, maltratado por ellos.

En **Le Babillard** (28 julio 1791), se decía:

> Jadis mathématicien,
> Marquis, académicien,
> Sous d'Alembert, panégyriste,
> Sous Panckouke, encyclopédiste,
> Puis, sous Turgot, économiste,
> Puis, sous Brienne, royaliste,
> Puis, sous Brissot, républiciste;
> Puis du trésor public gardien,
> Puis citoyen-soldat…, puis RIEN.

BIBLIOGRAFÍA

BAKER, K. M.: *Condorcet. From Natural Philosophy to Social Mathematics*. Chicago U. Press, 1975.

BRU, B. y CRÉPEL, P.: *Condorcet. Arithmétique Politique. Textes rares ou inédits (1767-1789)*. Institut National d'Études Démographiques, París, 1994.

CONDORCET: *Sur les élections et autres textes*, choisis et revus par Olivier de Bernon. Fayard, París, 1986.

PEARSON, K.: *The History of Statistics in the 17th & 18th Centuries*. Lectures by Karl Pearson given at the University College London during the academic sessions 1921-1933. Edited by E.S. Pearson, Griffith, London, 1978.

CAPÍTULO 8

On the Origin of Error Theory

EBERHARD KNOBLOCH

Preliminary remarks

Thukydides (ca. 460-400 B.C.) relates the following episode that dates back to 428 B.C, the fourth year of the Archidamic war (Historiae III,20). The inhabitants of Plataia, a city allied with Athens, were exhausted by the long siege mounted by the Spartans and their allies. Half of the inhabitants of the city decided to try to save themselves by escaping at night over a city wall. The authors of this plan were Theainetos and Eupompidas. In order to be able to climb over the walls the inhabitants constructed ladders as high as the wall. They measured the height of the wall by counting the number of exposed layers of bricks. Many people counted these layers at the same time, but everybody did it for himself. Though some might err, one could expect that most would obtain a correct figure, because each counted several times.

Moreover, the wall could be clearly seen because they were close to it at the place where they counted.

We cannot say that this was an application of the calculus of probabilities (Bolzan 1972) — which did not exist at that time — or that the Greeks knew the law of large numbers (Invrea 1936). Not even the calculation of a mean is mentioned in the text. Yet the inhabitants intuitively maximized the probability of avoiding an error in the calculation of the height of the wall. They did this by repeating an observation, i.e., by intuitively choosing the statistical approach.

The underlying probabilistic characterization of the possible outcomes is not quantified, but is implicit in the expression "one could expect that." Thukydides explicitly explains the procedure, so that one can infer originality, rather than the use of trivial, generally known ideas.

Statistical thinking, probabilistic concepts, and practical problems of empirical measurements were necessary, although, as must be shown, not sufficient conditions for the emergence of a statistical treatment of errors, of a mathematical error theory. The level of theoretical reflection was crucial.

Such a theory did not come into being for a long time, even when methods, such as the suppressing of certain observations or the calculation of the arithmetical mean, were used because of qualitative, probabilistic considerations (Mason 1961, 355; Plackett 1958). Thus, one implicitly and explicitly finds in the Talmud a series of statements for different empirical problems of measuring and decisions which originated from the question of whether exactness is possible (Rabinovitch 1974):

1. Errors are unavoidable in real measurements.
2. Small errors are more probable than large errors.
3. Positive and negative errors are equally probable, so that the arithmetical mean may be taken as the true value.
4. The majority of the observations is grouped around the true value.
5. A minority of observations which considerably diverges from the majority of observations can be left aside.

We will encounter these propositions again in Christian writings, namely, in the writings of Galileo.

The numerous medieval treatises on the construction and use of astrolabes admonished people to avoid errors. But a theory based on the quantification of errors did not come into being in spite of the fact that the tradition of so-called practical geometry reaches back to antiquity. There was a long way to Einstein's (1879-1955) assertion that "All measurements of length in physics are, in this sense, practical geometry, and so, too, are the geodesic and astronomical measurements of length" (1921, 3).

"Physics without measuring" (Blumenberg 1966, 347-349) of the scholastic scientific system was based on a conception of science which would have considered calculations with approximate measures, approximate values, with error limits and neglectable quantities, as a severe offence against the dignity of science. Moreover, in many areas it was not even clear what should be measured (Breidert 1983, 152), as is shown by the examples of "velocitas totalis" (total velocity), or of the true measurement of forces. Thus, during the scholastic period, the statement that the world was measured and measurable was ineffectual. This being so, the scientific method and the emergence of error theory are inseparable.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) created the first theory of observational errors, largely conceived in the 18th century about fifty years before Gauss. He has thus played a very important role in the evolution of the subject. This determination is very recent. (Sheynin 1966; 1971b; Gray 1978). My discussion is divided into the following five sections:

1. Kepler and Galileo.
2. Science and error analysis in the 18th century.
3. Methodology and motivation.
4. The sources of Lambert's error theory.
5. Lambert's mathematical error theory.

Kepler and Galileo

If we leave aside the Talmud and rabbinical literature of the Middle Ages, an explicit description of the stochastic properties of usual random errors obviously did not occur before the beginning of the 17th century (Sheynin 1979). In 1572, Tycho Brahe (1546-1601) had discovered a supernova in the constellation of Cassiopeia, the position of which was bound to give rise to a controversy. For had it appeared in the supralunar region, it would have contradicted Aristotelean cosmology (Weichenhan 2004). Hence the peripatetic Scipio Chiaramonti (1565-1652) tried to demonstrate in his paper "De tribus novis stellis" (On the three new stars which appeared in 1572, 1600, 1604), published in 1628, that the distance of the new star of 1572 from the earth was smaller than that of the moon (Chiaramonti 1628; Bialas 1971; Maistrov 1974, 30-34).

On the third day of his dialogue on the two main world systems Galileo (1564-1642) made Salviati refute this opinion. To that end he used the same observational data of the thirteen astronomers used by Chiaramonti four years earlier. In view of the completely diverging information, the Aristotelian had first placed twelve times the heights of the culminations in pairs, as found by the observers. Then he stated: Observations which provide infinitely large distances by calculation must not be combined with each other. Galileo made Simplicio reject this arbitrary selection of items of observational material in order to confirm a previously accepted hypothesis.

Galileo wanted to estimate the observational errors and to show by means of probabilistic arguments that it is far more probable that the new star is more remote than the moon. Thus he did not deduce an analytical or quantitative solution of the problem. To support his argument he formulated a series of principles of classical error theory on an intuitive, qualitative level (Sheynin 1970/71; 1971a):

1. Errors are unavoidable in the case of direct observations (instrument based measurements) as well as indirect observations (combinations of observations) (Galilei 1891, 305, 405).
2. Small errors are more probable than large ones (Galilei 1891, 306, 323).
3. Errors with both signs are equally probable (Galilei 1891, 307).
4. The majority of the observational data lies close to the true value (Galilei 1891, 309).
5. Measurements, which differ considerably from most of the others must be eliminated (Galilei 1891, 323f).
6. The numerical values of the observational errors must not be based on a calculation involving the observational data but on the data themselves (Galilei 1891, 308f).
7. Observations which lead to plausible results after minimal corrections must be viewed as more correct, or less incorrect, that is, in Galileo's case, the placing of a star in a plausible position (Galilei 1891, 309).

As we saw, the first five principles occurred already in the Talmud, mostly in an implicit or modified form. Lambert used all of these principles without being aware of his predecessors.

In order to achieve his objective by his principles, Galileo divided the available measurements into two groups (Fischer 1983, 178). Both groups led to plausible results with different probabilities. According to his seventh principle, he calculated the sum of the required minimal changes in order to arrive at a sublunar or supralunar position of the supernova: it was a matter of 756 minutes compared to just 10 ¼ minutes (Galilei 1891, 322). To Galilei, this meant that the hypothesis of the sublunar position was false. He rejects not only observations which are subject to systematic distortions, due to the limitations of human sense organs, but also observations which contradict his theoretical assumptions, although illusions were not involved.

23 years earlier Kepler (1571-1630) had made extensive use of the seventh principle in his "New Astronomy." He wanted to change slightly the observationaldata in order to gain certain insights and had explicitly defended such procedures(Kepler 1929, 196). He was well aware of the possible random observational errors without explicitly mentioning — like Galileo — the stochastic properties of the supposed errors in the data.

He made no use of an error theory in order to find a way through the superfluous material of observations (Gingerich 1973, 307). Nevertheless, he showed in this way that the eccentricity of the orbit of the earth calculated by Tycho had to be reduced by a half. He concluded that "One might doubt this freedom which I use to change somewhat the given quantities. One might believe that by this freedom of changing unsatisfying observations one might, finally, obtain even Tycho's total eccentricity. Well, one should try it. By comparing these changes with ours one should judge which of the two observations lies within the limits of observational error. Yes, one should take care that one should not make more of a fool of oneself if one finds the apogee of the sun in the remotest position because one was seduced by the success of a single step of that kind."

Kepler's remark about the limits of observational errors is important. It does not explicitly occur in Galileo. Thus Kepler presupposed a finite range of error values in much the same way as Thomas Simpson (1710-1761) — who speaks about speculative mathematics in this context — and Daniel Bernoulli (1700-1782) did in the 18th century (Simpson 1755; 1757; Bernoulli 1777). Kepler was told by Tycho's assistant Longomontanus (1562-1647) that a deviation of three minutes between two calculated right ascensions of a star was not unusual in Tycho's observations (Kepler 1929, 114).

Moreover, Kepler, like Galileo assumed a falsification by refraction, that is, by atmospheric refraction of the rays, of plus three minutes. As Galileo put it, refraction was one of the threads of a cobweb to which Chiaramonti clung (Galilei 1891, 329). Galileo spoke, it is true, of a quantity recently introduced by the astronomers. It was, however, already well known in antiquity, especially to Ptolemy (ca. 100-160).

To reject doubtful observations was not a new idea. Already Ptolemy had explicitly selected the best observations. Copernicus selected among the observational data available to him those which were most appropriate to mathematical treatment (Gingerich 1973, 318). Seemingly, Tycho was the first to use the method of combinations in pairs and suppressed some of his observations.

John Flamsteed's (1646-1719) biographer Baily reports that Flamsteed did not take the arithmetical mean of several observations but the most satisfying result (Sheynin 1973, 109f.). Finally Tobias Mayer (1723-1762) avowed in his treatise on the motion and spots of the moon (Mayer 1750, 122):

> «Yet, I have selected only those observations to that end which were more correct and more useful than the others for an inquiry into the position of the lunar axis because of the circumstances to which the moon was subject at that time.»

On the other hand, Kepler kept extra observations and treated them like abandoned hypotheses. His own and Galileo's method of least possible corrections may be said to have relied on a kind of minimax principle, that is, on the strategy of minimizing the maximal risk, a strategy explicity formulated for the first time by Lambert.

About 1760, Lambert recommended the suppression of observations. Gauss (1777-1855) practiced this method later in the case of large errors (Sheynin 1967). Lambert's recommendation touched a delicate problem which led in the 18th century to a controversial discussion similar to the one involving the calculation of the arithmetic mean. This is clear from articles published by Simpson in 1757 and by Daniel Bernoulli in 1777. In particular, Bernoulli objected to Simpson's view that the arithmetical mean always coincides with the most probable value, and emphasized that every observation must be admitted as long as the observer was aware of the need for maximal diligence.

Science and error analysis in the 18th century

In order to be able to understand the background of the history of the origin of error theory in the 18th century, in particular Lambert's relevant achievements, it is not enough to explain the pertinent mathematical achievements of the authors involved. Apart from Lambert, this century did not yet draw a firm dividing line between direct and indirect measurements. We must try to proceed like Laura Tilling, i.e., take into consideration the characteristic features of 18th-century science, namely, the methods, methodology, and philosophy of the relevant scientists (Tilling 1973).

There is no doubt that the following three aspects are among such characteristic features, and that they provide possible motives for the development of an error theory:

1. The enthusiasm of the experimentally-minded philosophers for the mathematization of nature; the mind that gave priority to empirically obtained results, in other words, Newtonianism.
2. The increasing requirement of precision by astronomers and geodesists.
3. The rapid development of probability theory as a branch of mathematics.

Lambert connected these three tracks but failed to influence the contemporary scientists (Tilling 1973, 12). Only Laplace (1749-1827) and Gauss developed a probabilistic error theory at the beginning of the 19th century. It was generally accepted because it was useful. This fact calls for clarification.

At first sight, there is a strange discrepancy between the absence of a formalized, quantitative error theory in the first half of the 18th century and the emphasis on the verification of theories by reference to empirical data (Tilling 1973, 9).

It is true that, before Laplace and Gauss, Roger Cotes (1682-1716), Roger Josef Boscovich (1711-1787), Tobias Mayer, and Leonhard Euler (1797-1783) developed methods of error analysis. These methods were analysed by Stigler (1986, 16-50). But those were special methods for special problems in astronomy and geodesy.

Thus there are attempts to carry out an analysis of errors in the reports about the Peru and Lapland expeditions by Pierre Bouguer (1698-1758) and Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) (Bouguer 1749; Lacombe 1988). Maupertuis, however, did not invent adequate methods. He himself characterized his method as follows (Maupertuis 1738, 64): "Every angle was measured so often by so many different observers that the mean of all these observations necessarily approached the truth very well."

When Maupertuis found in Lapland an unexpected value for the degree, he calculated his triangulations in twelve different ways, selected the two best ones, and took their average. It is well known that Kepler repeated his calculation of the orbit of Mars seventy times. For the sake of certainty Maupertuis calculated the largest possible error which could have been produced by accumulation under unfavorable conditions. The number he obtained was just 54 ½ toises (1 toise = 1, 949 m). This ruled out questioning the flatness of the earth at its poles.

Though authors usually emphasized the general applicability of their methods, the contemporary scientists hardly used them (Tilling 1973, 68). An error theory which could be applied to all areas of quantitative sciences failed to develop.

This is obvious when we look at the attempts to solve the four most important problems in two areas of science, problems that called for a very high degree of exactness of observations. They were:

1. The determination of the ellipsoidal shape of the earth.
2. The determination of interplanetary distances.
3. The determination of stellar parallaxes needed for the determination of the distances of the fixed stars.
4. Practical problems, such as the determination of longitude at sea.

In the first of these problems, there were certain inconsistencies between theory and data. Newton's (1643-1727) law of gravitation predicted flatness of the earth at the poles. Measurements of Giovanni-Dominico (1625-1712) and Jacques Cassini (1677-1756) seemed to contradict this prediction. The most important methods of error analysis were developed in connection with the study of this problem by the two famous expeditions to Lapland and Peru. After their successful termination, further control measurements were carried out (Bialas 1982; Lacombe 1988).

Already Alexander von Humboldt (1769-1859) emphasized in his "Kosmos" the contrast between the relative unimportance of the problem and the tremendous efforts made to solve it. In the "Earthly part of the Kosmos" (1845-1862 vol. 1,119) he said: "Apart from the parallax of the fixed stars, which leads to aberration and nutation, the history of science does not provide any problem where the result obtained — knowledge of the mean flatness and the certainty that the figure of the earth is not regular — is of a comparable lack of importance in terms of the general progress and perfection of the mathematical and astronomical knowledge gained by the long and laborious effort to reach this aim."

The three other problems did not require an error analysis and, what is more, remained unsolvable for a long time. James Bradley (1693-1762) erroneously hoped to be able to show that the parallax of neighboring stars is of the order of arc seconds (Hamel 1984, 61). To that end he chose the arithmetic mean of the observation which came nearest to it (Maistrov 1974, 86). He seems to have been the first to recommend the use of regular series of observations (Sheynin 1973, 110). It is true that the search for the parallax provided the impetus for the improvement of the exactness of observations. However, Bradley did not succeed in this effort.

While Bradley failed to determine the parallax, he discovered, in 1728, the aberration of light. This is caused by the finite velocity of light and by the motion of the earth. In 1748 he discovered the nutation of the axis of the earth (Mason 1961, 355).

The contributions of Simpson, Daniel Bernoulli, and Joseph Louis Lagrange (1736-1813) (Lagrange 1770-1773) were due to a theoretical, mathematical, interest in the flourishing calculus of probabilities and not to the needs of observers and experimenters to improve the usual methods of error analysis. What is true of the practical application of the methods, is also true of the discussion within the contemporary methodology.

Scientific workers in the 17th century were well aware of observational errors but were not interested in discussing them methodologically. Random, inevitable errors were compensated for by calculating arithmetic means. One tried to avoid systematic errors by diligent handling of instruments. When Robert Boyle (1627-1691), an adherent of Bacon's, deduced his famous gas law, he made a characteristic observation: He said that he did not deny that some details of his table did not correspond to his hypothesis, but that the deviations were not so large that they could not be ascribed with great likelihood to the lack of exactness, which was hardly avoidable in such experiments (Hall 1966, 341).

It is true that Cartesians and Newtonians quarrelled, but for the Cartesians the notion of small observational errors was irrelevant in view of their conception of science independent from experience (Tilling 1973, 8). Newtonians such as Willem Jacob's Gravesande (1688-1742), Hermann Boerhaave (1668-1738), and Pieter van Musschenbroek (1692-1761) had no need of an error theory in order to discuss deviations of data from assumed laws (Tilling 1973, 56). The belief in the Newtonian ideal of the simplicity of natural laws, which is present in the works of, say, Lambert and Coulomb (1736-1806), made it unnecessary to examine the validity of laws from this point of view.

Methodology and motivation

Lambert's philosophico-methodological program was based on the conviction that, in principle, the world is knowable, that all sciences we can think of can be mathematized in the sense of "universal mathematics." He developed photometry, hygrometry, and pyrometry, that is the science of measuring light, moisture, and high temperatures (Schreiber 1978, 1). His inaugural speech at the Berlin Academy delivered in the year 1765 clarifies his Newtonianism: "Calculation provides precision and universality. Experience verifies both and reveals every overlooked or erroneously admitted circumstance. If one neglects calculation and its underlying theory, then one performs indiscriminate and pointless experiments. If one neglects experiments, then one risks being deceived by a chimera, and one may produce calculations which are applicable to a world other than the world we are living in" (Lambert 1765a, 509).

Unlike orthodox Newtonians, he did not wish to diminish the applicability and value of hypotheses (Lambert 1892 vol. 1, 4). But these hypotheses must be diligently examined. Unlike his contemporaries, he was well aware of the role errors played in testing a theory (Tilling 1973, 66). He discussed this role in the context of the scientific method and of induction. He did this in the long passage of his "Photometry" dealing with the compensation of observational errors. Until recently this passage could be read only in the Latin original, for the translator and editor of the first incomplete German edition had omitted it because of a curious historical misjudgment: He said that part of the content was known to everybody and part was out of date (Lambert 1892 vol. 3, 94). Now a German translation of the relevant explanations, contained in paragraphs 281-305, is available in (Schneider 1988, 228-233).

Lambert begins the account of his error-theoretical considerations with the following four principles (Lambert 1760, §272-275):

1. If experiments are made in order to corroborate a law deduced according to principles or other experiments … then, as in most cases, it will suffice to show that the discrepancy between the experiments and the law does not exceed the uncertainty caused by the judgement of the eyes but remains within the limits determined by these judgements (sententia oculi).

   In other words, the lack of contradiction suffices for testing a theory. There is no need of a positive, very precise confirmation (Tilling 1973, 207f.).

2. If the same experiment is repeated several times under changed conditions and the error increases or decreases according to the conditions, then one must either doubt the correctness and general validity of the law or assume the existence of a special law which depends on the conditions.

   In other words, if there are systematic errors, then one must not assume the existence of a random cause.

3. The experiment may be repeated. If the deviations from the law which is to be corroborated are sometimes positive and sometimes negative and remain within predetermined limits, then one must no longer doubt the truth of the law and its general validity.

4. If the positive deviations are significantly larger or smaller than the negative ones, then we must conclude that either the law to be corroborated deviates from the truth for small values or the anomaly must be attributed to a defect of the instruments.

Lambert's philosophy and methodology made an error theory desirable. He was the only philosophers who developed such a theory. There are good reasons to assume that his philosophy was not the immediate reason for the development of his error theory.

1. Lambert was led to error considerations by a special photometric problem, namely, by the difficulty of verifying the cosine law named after him: The radiation intensity of light varies according to the variation of the cosine of the angle ϑ_1 under which light meets the seen object:

$$I_e(\vartheta_1) = Le_1 s_1 \cos \vartheta_1$$

Here Le_1 is the constant of proportionality and s_1 is the size of the radiating surface. (This law must not be confused with Lambert's and Baer's absorption law.)

2. He did not apply his methods generally but to the examples which such problems had given rise to (Tilling 1973, 37, 43, 240). When in 1766 he tried in vain to understand the law of magnetic attraction, he was led to false conclusions by the Newtonian belief in the mathematical simplicity of natural laws. By looking for mathematical rather than physical simplicity, he failed to realize that the error analysis he had already developed could be applied to this problem. His statements regarding the expected errors are vague and not quantitative.
3. In his "New Organon," which appeared four years after his "Photometry," Lambert did not refer in any way to the latter work. In particular, he did not refer to the error theory developed in it (Lambert 1764). However, in a part of the "New Organon" titled "Dianoiology or the doctrine of the laws of thinking," he discusses at length experience and scientific realization. He states that "Real measurements cannot be made with geometric rigor. Hence such laws can be viewed as true only to the extent to which the measurement is precise. If the law is not demonstrated by general reasons, small anomalies may occur in this respect."

We restate this by quoting Popper (1976, 87):

> "If the differences between calculated, observable events are smaller than the limits of exactness of the measurements in this area, no empirical decision is possible between them without an improvement of the measuring technology. By the respective measuring technology a certain scope is determined. Within this scope observations deviating from each other are allowed by the theory."

A famous example is the deviation of eight minutes from Tycho's observational data in Kepler's calculations of the orbit of Mars : "They alone pave the way for the renewal of the whole of astronomy" (Kepler 1929, 166).

The fifth main section of the "Phenomenology, or science of what seems to be," that is, the fourth, or last, part of the "New Organon," deals with the "Probable." Error theory is excluded, in spite of the fact that in his "Photometry" Lambert had explicitly developed and founded the theory of the mean value by using probabilistic arguments. It should be noted that at the turn to the 19th century Laplace said that one of the most interesting applications of probability theory was its use in the selection of mean values from observational data (Laplace 1820, CXLIX).

These reasons lead to the conclusion that Lambert created his error theory for practical rather than philosophical reasons. The same is true of the corresponding attempts by Bouguer, Boscovich, Euler, and Mayer (Tilling 1973, 213). The quality of the measuring instruments played an essential role in both respects. Tycho had still worked with a mural quadrant. In the meantime the telescope and microscope had been invented. In the framework of probabilistic argumentation the problem of error estimation was bound to become crucial. The reason for this is that while improved instruments offer greater exactness they may also increase the risk of making small statistical errors whose probability is significantly higher than that of large errors (Parratt 1961, 68). Increasing exactness can also be the reason for the opinion of famous people, cited by Simpson without revealing their names, that a single good observation is more reliable than the average of many measurements.

Lambert's correspondence of many years with the famous Augsburg instrument maker Georg Friedrich Brander (1713-1783), whose acquaintance he had made in Augsburg in 1759, proves that he was greatly interested in the improvement of instruments. Brander's pupil J. C. Späth (1759-1842) was the first to try to take systematically into account instrument errors (Brachner 1983, 31). Many of the scientists of the 18th century who liked experiments and measurements and were known to Lambert developed new or improved measuring instruments. Two such scientists were Giovanni Jacopo de Marinoni (1676-1755), who invented a planimetric measuring balance in 1714, and Bouguer, who invented a heliometer in 1748 (Fauque 1983).

An analysis of Lambert's error theory makes clear the dual nature of his interests.

His mathematical interest derived from his probabilistic interpretation of experimental errors. In his "Phenomenology" he mentioned that the "theory of calculating the degree of probability in games of chance" had already been founded by "Huygens, Moivre, Bernoulli, and others" (Lambert 1764 vol. 2, 322), and he justified the elaboration of his "Theory of reliability of observations and trials" by noting that he "had not found that it had been established up to that time, for all that was available were just examples of the simplest and easiest cases" (Lambert 1765c, 425).

The sources of Lambert's error theory

First we must discuss in more detail the three authors whose work — as Lambert explicitly acknowledged — he found useful. This is all the more necessary because one can point to important similarities between some of their work and models in his error-theoretic considerations related to optics and geodesy. But one should note from the outset that a comparison shows that Lambert surpassed these authors to a very considerable extent.

The first author to be mentioned is the French geodesist and astronomer Pierre Bouguer, cited earlier several times. Bouguer was one of the participants of the Peru expedition, an expedition that lasted from 1735 to 1744, whose task was to measure accurately a degree of latitude at the equator. In his "Theory of reliability" Lambert cites several times data taken from the report "The figure of the earth" (Lambert 1765c, 455, 458). This report referred to measurements carried out by Bouguer and Charles Marie de la Condamine (1701-1774). In the present context, Bouguer's two inquiries into the intensity of light are of greater significance. They made him — in addition to Lambert — a founder of photometry. For Bouguer and for Lambert experiments played a crucial role. In his "Photometry" Lambert praised the "Optical essay on the gradation of light" which had appeared in 1729 (Lambert 1760: §315, 865; Bouguer 1729). Thus Bouguer's writings on photometry were known to Lambert.

There is a surprising similarity between the error-theoretic considerations found in Bouguer's enlarged "Treatise," published posthumously in 1760, and those in Lambert's "Photometry" of the same year (Bouguer 1961; Tilling 1973: 204). Lambert could not know this edition when he elaborated his work.This shows that the two scholars arrived independently at similar conclusions.

The problem of exactness was especially urgent whenever an observatory dealt with photometric measurements. Bouguer tried to give limits of exactness. He mentioned the problem of error propagation and the importance of errors related to the instrumental setup. However, he hardly ever used error assessments and did not deduce generalizations of the kind obtained by Lambert.

The second author who must be considered here is Johann Jakob Marinoni.

Marinoni came from Italy, worked mainly in Vienna, and surveyed the land of the duke of Milan. In 1751 he published his work "On ichnography whose contemporary practice is explained and illustrated in more detail by numerous examples. The defective deviations which occur here are examined by means of calculation."

Two aspects are worth mentioning. First, for Marinoni his error considerations are so important that he points them out in the title. Second, he explicitly adds that he explores them analytically, by calculation, not only qualitatively, in general. Indeed, the whole long fifth chapter of his work deals with various "aberrations" of the ichnographic, that is, of geodetic practice. The chapter begins with a comparison between arithmetic and geodesy. The arithmetical operations are mere calculations. They need no practice, just signs that express mental calculations. True, the calculator might err, but the operations themselves are not subject to error. Geodesy, however, needs frequent practice. Unlike arithmetic, it has no given quantities. It must first produce them in a table. Not all errors can be avoided, but only small ones may be admitted (Marinoni 1751, 129f.).

Using numerous examples, Marinoni shows by trigonometric calculations how certain errors of measurement of angles or lengths influence the other quantities in a triangle. He is very proud of the following remark, of which, to his knowledge, he is the original author: When surveying areas there is a position of minimal error, a "statio minimi erroris," when the positive and negative errors, the "excessus et defectus," are smaller than at any other standpoint given with geometric rigor among all innumerable points of a direction. Apart from these considerations of error propagation, made within the context of trigonometry, Marinoni's work contains no other general error-theoretic explanations.

Marinoni provided for the distribution of his work. In particular, as can be learned from the "Registres" of the Berlin Academy, he sent a copy to the Academy in 1751, the year of the book's publication (Winter 1957, 166). Lambert studied the book one year later in Chur, where he was still the private tutor of the count Peter of Salis, and was highly critical of it.

In his “Annotations and Supplements to Practical Geometry” — I shall call them briefly “Practical Geometry” in the sequel — Lambert rightly states that Marinoni had used the largest part of his work to “complete the theory of the propagation of errors according to the example thereof given by Wolff” . Lambert says that he is not sure that Marinoni realized “what the main point is here.” Marinoni says little about the ways in which one can determine the amount of every single error (Lambert 1765b, 228f.). His calculations presuppose the knowledge of every error. In that case, the correction is made prior to the calculation, so that the calculation of the consequences of the errors becomes superfluous. In other words, Marinoni dealt with deterministic error calculation, and not with a theory of stochastic errors.

The third author referred to by Lambert is Christian Wolff (1679-1754). Wolff's rationalistic philosophy and methodology of science had the greatest influence on Lambert's own theoretical elaboration of the idea of a “universal mathematics” in his “New Organon” (Arndt 1965 vol. 1, X). Marinoni, who cites the famous 17th and 18th century degree measurements of Jean Picard (1620-1682), the Cassinis, and Maupertuis, mentions also Wolff's “Elements of universal mathematics.” While discussing error propagation, he remarks that one has to follow in the footsteps of the famous Wolff (Marinoni 1751, 10, 39, 132; Vogler 1902, 16), thus hinting at Wolff's “Elements of universal mathematics.”

On the last seven pages of the “Elements of trigonometry” (Wolff 1742, 285-291), where also the term “ichnographia” occurs, we find the explanations which matter here. They were not transferred to the German “Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften” (Elements of all mathematical sciences), because of its lower level of scientific rigour (Hofmann 1968, VI).

One could, says Wolff, measure the two sides of a triangulation triangle in the field “sufficiently” exactly to measure the distance between two points. But when we measure the angle, small positive or negative reading errors are quite common. When an incorrect angle measure is used in the calculations as if it were a true one, then it is impossible to obtain the true distance: “Hence we have to determine here the size of the admissible error.” Wolff demonstrates by calculation that the error of the measurement of the distance increases with the magnitude of the angle. Hence the need to choose the position and sides of a triangle so as to obtain the most exact practical results, that is, the least errors. Wolff explicitly mentions the possibility of error compensation. In this respect, there is one mathematically interesting aspect which Lambert emphasizes in his “Practical geometry” (Lambert 1765b, 235):

> “Inasmuch as the higher powers of the errors can be left out, the calculation becomes perfectly similar to the differential calculus.” In order to determine the error propagation one has only to differentiate an equation. “To that end Wolff and Marinoni used figures by and large in the way in they are used in the context of real

differential quantities. They consider the errors in the angles as infinitely small and the true line as parallel to the false one."

It is interesting that Wolff, whom Kant (1724-1808) called the most influential representative of rationalistic dogmatism, occupied himself with these considerations. The same is true of the way he did it and of the reason for his doing it. The reason is that these considerations demonstrate the superiority of reason over experience, of theory over practice:

> "Here we have given an example of what deserves to be examined with regard to an exact practice of geometry. Thus we wanted to show that an exact theory produces an exact practice, and we wanted to encourage those who will trouble themselves with the practice in the future to learn the theory perfectly. Because those who believe that no certain circumstances of exact practices can be learned by means of a theory, that such must be taken into account only once the practice has begun are mistaken. This is so because, for the most part, practical observations are carried out in a confused way, whereas they are determined more exactly through theory" (Wolff 1742, 286f.).

Wolff's arguments point to the low degree to which observational practice of scientists was guided by theory in the middle of the 18^{th} century.

Lambert said that when it came to his error-theoretical considerations, which were based on probability theory, he could not learn very much from Wolff's or Marinoni's explanations (1765f, 310). Moreover, he noted that their method was easy to use only in simple cases. But it is possible that their methodical aim may have influenced him when he formulated his minimax principle. Incidentally, an analytical solution of the minimax principle was obtained by Laplace in 1786 (Tilling 1973, 127).

In Lambert's related problem four quantities had to be found in order to determine a stand line, subject to the condition that the maximum error due to the angle magnitudes was to be minimized.

> "I did not find that this problem, certainly one of the most useful in practical geometry, can be generally solved without much effort" (Lambert 1765b, 292).

If one reads Lambert's preface to the "Contributions to the use of mathematics and its applications" — briefly to be referred to in the sequel as "Contributions" — or the witty introductory paragraphs of his "Practical geometry," then one is again reminded of Marinoni's comparison between arithmetic and geodesy. He underlines the difference between observational data and mathematical laws in these words:

> "In this respect, one could call geometry, and consequently also all the other mathematical sciences, a science of laziness or — if this jocular remark is thought to be too harsh — a science of convenience. And indeed, what pains did Newton take to determine the true figure of the earth? He quietly remained in his study and the measuring art provided him with the reasons from which he drew his conclusions and by means of which he achieved his calculation. Years, however, were

needed in order to determine just this figure of the earth by real measurements" (Lambert 1765b, 3).

Lambert's mathematical error theory

In his "Photometry" Lambert began to deduce his error theory according to rigorous mathematical principles. Five years later he continued these considerations in his "Contributions" explicitly referring to his earlier results. Here I can only deal with some particularly important points.

His starting point is a discussion of the usual methods of taking the arithmetic mean of observational data. Unlike Galileo, Kepler, Cotes, and Boscovich he did not accept the arithmetic mean for intuitive reasons, but tried — in a way other than Simpson a few years later — to justify it by means of quantitative probabilities.

It is worth mentioning his remark that there might be cases where the geometric mean is preferable to the arithmetic mean. The relevant cases are those cases in which one tries to find among defective ratios the ratio which best approaches the truth (Lambert 1760, §277). It was only in 1863, that is, more than a hundred years later, that Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896), using photometric measurements of 208 fixed stars, brought this insight to the attention of the scientific public.

Seidel stated that it would simply be absurd to assume that the differences between the brightness of light are governed by Gauss's error law. Gauss had consciously chosen this law in his first version of the method of least squares in such a way that the arithmetical mean results from it as the most probable value if just one quantity is being measured (Schneider 1988, 218). Many authors in the first half of the 19th century tried to prove Gauss's postulate that the arithmetical mean is the most probable value, but no one took the trouble to restrict this statement (see Knobloch 1985).

Lambert added that both means, the arithmetic mean and the geometric mean, nearly coincide if the relevant quantities or ratios differ little from each other. This insight reminds us of a remark made by Kepler in his "New astronomy" (Kepler 1929, 219; Sheynin 1975, 2).

The following six results and assumptions belong to the most important statements in Lambert's "Photometry." We came to know them in part already in the case of Galileo:

1. The calculation of the mean of repeated observations is based on the degree of greatest probability. In the case of infinitely many repetitions the true value coincides with the mean value (§279-281). He says that the proof of this claim is reduced to probability. He explicitly refers to the weak law of large numbers proved by James Bernoulli (1654-1705). But it is important to note that the notions of random error and random variable remained distinct for a long time. Of course, the latter notion was introduced for the first time in the second half of the 19th century (Sheynin 1968, 236).

2. If we leave out international falsifications, then we can say that errors occur within certain limits (§283). Thus Lambert assumed a finite range of errors just as did Simpson, Lagrange, and Daniel Bernoulli.
3. Quantities which occur mostly in repeated experiments approach best the mean or true quantity (§286).
4. Errors occur the more often the larger their distance is from the maximal error (§285).
5. In order to calculate the maximal error Lambert defined the following measure of exactness (Vogler 1902, 16):

   "The measure of exactness is the difference between the mean of all n values and the mean of those n-1 values that are left when the observational value which differs most from the total mean has been left out."

   Lambert says that it is highly probable that the total mean value does not deviate from the true value by more than this "maximal error." True, this is a probabilistic rather than a precise quantitative idea. Hence, Lambert's postulate reads:

   "The problem must be reduced to that of maximal probability" (§291, 294).

   Gauss was born in the same year of Lambert's death. He read Lambert's "Contributions" in 1795 and his "Photometry" in 1797. We need not go so far as Galle or Bialas, who explain Gauss's invention of the method of least squares by this reading of Lambert's writings (Galle 1924-1929, 57; Bialas 1982, 201). Gauss regarded this method as so obvious that — in a letter to the Bremen amateur astronomer Wilhelm Olbers (1758-1840) — he expressed his surprise at the fact that neither Euler, nor Lambert, nor Halley (1656-1742), nor Mayer had used it. "Yet, it easily could be," he added, "that for example the latter had used something like that without proclaiming it" (Gauss 1900, 494). Gauss based his method on the assumption that the arithmetic mean is the most probable value if a single unknown magnitude is directly observed and the exactness of the observation is always with the same.

   Thus Joseph Bertrand (1822-1900) erred when he named this postulate after Gauss at the end of the 19th century (Bertrand 1888, 17). Nevertheless, the subtle objections of this "Zeno of error theory" against the application of probability theory to the study of observational errors are still worth reading. According to him, this application is based on a fiction which must not be turned into a reality (Bertrand 1888, 215). He especially admonished people to distinguish between the most probable value of a quantity and the value which should be taken on the basis of a conscious decision.
6. Lambert used the maximum likelihood principle that was explained a few years later by Daniel Bernoulli. To that end he maximized a product which is equivalent to the product of the probabilities attached to the occurrence of four obser-

vations. In 1809 Gauss used this principle, together with the principle of the arithmetical mean, as the basis of his first version of the method of least squares. Later he abandoned it in favor of the principle of least variance.

The four chapters of Lambert's "Practical geometry," namely, "Errors in observing," "Theory of propagation of errors," "Propagation of errors in composed circumstances," and "Means between the errors," continue the earlier explanations. Lambert enumerates five kinds of errors. He is explicitly interested only in inevitable, that is, random, errors (Lambert 1765 b, 225). He stresses the overwhelming importance of determining the maximal error. He distinguishes between at least three problems of "error theory." He seems to have been the first to use this term. It was not used by either Laplace or Gauss.

Three things must be determined: the relations between the errors, the relations between the quantities which have been derived from them, and the relations between the conditions of measurement and the quality of the instrument (Sheynin 1966, 1003; 1971b, 225). New among the explanations that follow is the minimax principle and a demonstration of the theorem that errors occur the more often the smaller they are. As a "curve for the frequency of errors" he uses the "area of a circle," because, as he puts it, there is no reason why one should imagine a point which can no longer be distinguished by the eye as an angular object (Lambert 1765b, 297f.). Thus Lambert's reasoning is based on the principle of the lack of sufficient reason. Later Laplace reasoned in the same way.

The "Theory of reliability" returns to the issue for a third time. Lambert 's main subject is to demonstrate the so-called "method of averages" in the linear, two-parametric, and the non-linear three-parametric case, that is, he wants to show how the straight line of regression, or the curve of regression, can be found. He considered the method to be an extension of the procedure of taking the arithmetic mean (Tilling 1973, 125; Lambert 1765c, 437).

First, one had to divide the observations into groups and to calculate the centers of gravity of the values involved. He would, he said, explain this method by using examples in which this method would have been applied much earlier had it been known.

True, he cited "Professor Mayer in Göttingen" in his "Practical geometry." But it is clear that he did not know that Tobias Mayer had developed an identical method for equations of conditions depending on several parameters (Lambert 1765b, 234; Tilling 1973, 146; Mayer 1750). Lambert did not explicitly use such equations of conditions at that time.

His examples include, among others, the determination

(1) of the true length of the tropical year,
(2) of the dependence of the length of a pendulum upon the geographical latitude,

(3) of the velocity with which a thermometer cools down,

(4) the changing deviation of the magnetic needle.

In the last case he must discuss the question of how one finds a curve that fits best a set of points without knowing the underlying law which connects them. This passage clearly reveals his belief in the simplicity of natural laws and in the necessity of such a belief (Tilling 1973, 211).

He defines the measure of exactness introduced earlier, namely the difference between the two means, as the "degree of reliability" of all trials (Lambert 1765b, 427). He says that one wants to find the true measure really used by nature. This cannot be done with geometric rigor. Hence one must try to approach it as well as possible. He could not have formulated the difference between his notion of science and the scholastic science in a more effective way. The self-interpretation of this science ruled out the possibility of being satisfied with "an inexactness which was as exact as possible" (Blumenberg 1966, 348).

Acknowledgement

I would like to thank my friend Abe Shenitzer for critically reading this paper.

BIBLIOGRAPHY

ARNDT, Hans-Werner (1965): „Vorwort zum Nachdruck". Lambert (1764,1).

BERNOULLI, Daniel (1777): „Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda". Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, 1778: 3-23 (Engl. Transl. In Biometrika. 48 (1961), 3-18 (= Pearson (1970: 157-167)).

BERTRAND, Joseph (1888): Calcul des probabilités. Paris: Gauthier-Villars.

BIALAS, Volker (1971): "Gesetz und Zufall im astronomischen Weltbild von Johannes Kepler". Johannes Kepler zur 400. Wiederkehr seines Geburtstages. Hrsg. v. Volker Bialas, Walther Gerlach, Martha List, Wilhelm Treue. München: Deutsches Museum, 41-51 (Abhandlungen und Berichte. 39,1).

BIALAS, Volker (1982): Erdgestalt, Kosmologie und Weltanschauung. Stuttgart: Wittwer.

BLUMENBERG, Hans (1966): Die Legitimität der Neuzeit. Frankfurt/M.: Suhrkamp.

BOAS HALL, Mary (1966): Robert Boyle in Natural Philosophy. An Essay with Selections from his Writings. Ed. by Mary Boas Hall. 2nd ed. London: Bloomington.

BOLZAN, J.E. (1972): "Un antiguo antecedente del calculo de probabilidades". Scientia, 107: 873-878 (Engl. Transl. 876-878).

BOUGUER, Pierre (1729): Essay d'optique sur la gradation de la lumière. Paris: Jombert.

BOUGUER, Pierre (1749): La figure de la terre, déterminée par les observations de Messieurs Bouguer, et de la Condamine, de l'Académie Royale des Sciences, envoyés par ordre du Roy au Pérou, pour observer aux environs de l'Equateur. Avec une Relation abrégée de ce Voyage, qui contient la description du Pays dans lequel les Opérations ont été faites. Paris: Jombert.

BOUGUER, Pierre (1961): Optical Treatise on the Gradation of Light. Transl. With introduction and notes by William Edgar Knowles Middleton. Toronto: University Press.

BRACHNER, Alto (1983): G.F. Brandner 1713-1783. Wissenschaftliche Instrumente aus seiner Werkstatt. München: Deutsches Museum.

BREIDERT, Wolfgang (1983): „Zum maßtheoretischen Zusammenhang zwischen Indivisible und Kontinuum". Miscellanea Mediaevalia, 16: 145-152.

CHIARAMONTI, Scipione (1628): De tribus novis stellis quae Annis 1572, 1600, 1604 comparuere libri tres. Cesena: Josephus Nerius.

EINSTEIN, Albert (1921): „Geometrie und Erfahrung". Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, 123-140 (Cited according to Einstein, Akademie-Vorträge. Berlin: Akademie-Vlg. 1979).

FAUQUE, Danièle (1983): „Les origines de l'héliomètre". Revue d'histoire des sciences, 26: 153-171.

FISCHER, Klaus (1983): Galileo Galilei. München: Beck (Beck'sche Schwarze Reihe, 504).

GALILEI, Galileo (1891): Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische. Übers. u. erläutert v. Emil Strauß. Leipzig (Neuausg. m. e. Beitrag v. Albert Einstein sowie e. Vorwort u. weit. Erläuterungen v. Stillman Drake, hrsg. v. Roman Sexl, Karl von Meyenn. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft 1982).

GALLE, Andreas (1924/29): „Über die geodätischen Arbeiten von Gauß”. Carl Friedrich Gauß. Werke. XI, 2. Abh. 1. Berlin: Julius Springer (Reprint Hildesheim: Olms 1973).

GAUß, Carl Friedrich (1900): Werke. Ergänzungsreihe IV. Briefwechsel C. F. Gauß — H.W.M. Olbers. Band 1. Berlin: Julius Springer. (Reprint Hildesheim, New York: Olms 1976).

GINGERICH, Owen (1973): “Kepler's Treatment of redundant Observations or, the Computer versus Kepler Revisited”. Internationales Kepler-Symposium, Weil der Stadt 1971. Referate und Diskussionen. Hrsg. v. Fritz Krafft, Karl Meyer, Bernhard Sticker. Hildesheim: Gerstenberg, 307-314.

GOLDSCHMIDT, Lazarus (1980/81): Der Babylonische Talmud. Neu übertr. durch L. G. Hrsg. v. Lazarus Goldschmidt. 12 Bde. 3. Aufl. Königstein: Jüdischer Vlg.

GRAY, Jeremy J./TILLING, Laura (1978): “Johann Heinrich Lambert, Mathematician and Scientist, 1728-1777”. Historia Mathematica, 5: 13-41.

HAMEL, Jürgen (1984): Friedrich Wilhelm Bessel. Leipzig: Teubner.

HOFMANN, Joseph Ehrenfried (1968): „Vorwort zum Nachdruck”. Wolff (1742 (1968)).

HUMBOLDT, Alexander von (1845/62): Kosmos. Entwurf einer physischen Weltbeschreibung. 5 Bde. Nebst Atlas. Stuttgart, Augsburg: Cotta u. Krais & Hoffmann.

INVREA, R. (1936): „La legge dei grandi numeri era nota a Tucidide?” Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, 7: 229-230.

KEPLER, Johannes (1929): Neue Astronomie. Übers. u. eingel. v. Max Caspar. München, Berlin: Oldenbourg.

KNOBLOCH, Eberhard (1985): „Zur Grundlagenproblematik der Fehlertheorie”. Themata. Festschrift für Helmuth Gericke. Hrsg. v. Menso Folkerts, Uta Lindgreen. Wiesbaden: Steiner, 561-590.

LACOMBE, Henri/COSTABEL, Pierre (1988): La figure de la terre du XVIIIe siècle à lère spatiale. Ed. par H. Lacombe, P. Costabel. Paris: Gauthier-Villars.

LAGRANGE, Joseph Louis (1770/73): „Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, et où l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière”. Miscellanea Taurinensia. 5 (1774): 167-232 (= Œuvres. 2 : 173-234).

LAMBERT, Johann Heinrich (1760): Photometria, sive de mensura et gradibus luminis colorum et umbrae. Augsburg: Klett.

LAMBERT, Johann Heinrich (1764): Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrthum und Schein. 2 Bde. Leipzig (Cited according to Lambert, Philosophische Schriften. Hrsg. v. Hans-Werner Arndt. Bd. 1-2. Hildesheim: Olms 1965).

LAMBERT, Johann Heinrich (1765a): „Discours”. Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, 21: 506-514.

LAMBERT, Johann Heinrich (1765b): „Anmerkungen und Zusätze zur practischen Geometrie”. Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Bd. 1 Berlin: Verlag des Buchladens der Realschule, 1-313.

LAMBERT, Johann Heinrich (1765c): „Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche”. Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung. Bd. 1. Berlin: Verlag des Buchladens der Realschule, 424-488.

LAMBERT, Johann Heinrich (1892): Photometrie. Deutsche Übersetzung in Auswahl v. E. Anding. Leipzig: Teubner (Ostwald's Klassiker, 31-33).

LAPLACE, Pierre Simon Marquis de (1820): Traité analytique des probabilités. 3. Aufl. Paris: Courcier (Œuvres, 7).

MAISTROV, Leonid Efimovich (1974): Probability Theory. A Historical Sketch. Transl. and ed. by Samuel Kotz. New York, London: Academic Press.

MARINONI, Johann Jakob (1751): De re ichnographica, cujus hodierna praxis exponitur, et propius exemplis pluribus illustratur inque varias, quae contingere possunt, ejusdem aberrationes, posito quoque calculo, inquiritur. Wien: Leopold Kaliwoda.

MASON, Stephen F. (1961): Geschichte der Naturwissenschaft in der Entwicklung ihrer Denkweisen. Stuttgart: Kröner.

MAUPERTUIS, Pierre Louis Moreau de (1738): La figure de la terre déterminée par les observations de Messieurs de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier, de l'Académie Royale des Sciences, et de M. l'Abbé Outhier, Correspondant de la même Académie, Accompagnés de M. Celsius, Professeur d'Astronomie à Upsal, faites par ordre du roy au cercle polaire. Paris: Imp. Royale.

MAYER, Tobias (1750): «Abhandlung über die Umwälzung des Monds um seine Axe und die scheinbare Bewegung der Mondsflecken; worinnen der Grund einer verbesserten Mondsbeschreibung aus neuen Beobachtungen geleget wird. Erster Teil". Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr 1748. Zum Wachsthume der Weltbeschreibungswissenschaft von den Mitgliedern der kosmographischen Gesellschaft zusammengetragen. Wien: Kraus, 52-183.

PARRATT, Lyman G. (1961): Probability and Experimental Errors in Science. An Elementary Survey. New York, London: Wiley.

PLACKETT, R.L. (1958): "The Principle of the Arithmetic Mean". Biometrika. 45: 130-135 (printed in: Studies in the History of Statistics and Probability. Ed. by Egon Sharpe Pearson, Maurice G. Kendall. London: Griffin 1970, 121-126).

POPPER, Karl R. (1976): Logik der Forschung, 6. Aufl. Tübingen: Mohr.

RABINOVITCH, Nachum L. (1974): „Early Antecedents of Error Theory". Archive for History of Exact Sciences, 13: 348-358.

SCHNEIDER, Ivo (1988): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933. Einführungen und Texte. Hrsg.v. Ivo Schneider. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft.

SCHREIBER, Peter (1978): „Johann Heinrich Lambert zum Gedenken anlässlich seines 200. Todestages am 26 (?) 8. 1978". Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin (NTM), 15: 1-7.

SEIDEL, Philipp Ludwig von (1863): „Resultate photometrischer Messungen an 208 der vorzüglichsten Fixsterne". Abhandlungen der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Math.-phys. Klasse, 9, 3. Abt.: 419-609.

SHEYNIN, Oskar Boris (1967): „Some Questions on the History of the Theory of Errors. Abstract of the Dissertation Presented for Competition for the Academic Degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences". Academy of Science of the USSR. Institute of the History of Exact Sciences and Technology. Moscow.

SHEYNIN, Oskar Boris (1970/71): "Newton and the Classical Theory of Probability". Archive for History of Exact Sciences, 7: 217-243.

SHEYNIN, Oskar Boris (1971a): "Theory of Measurement Errors Prior to Laplace and Gauß". USSR Academy of Sciences. Institute for History of Natural Science and Technology. Transactions of the 14th Scientific Conference of Aspirants and Young Scientific Staff Members. Section on History of Mathematics and Mechanics. No 3406-71. Dep. Moscow, 115-130 (English translation).

SHEYNIN, Oskar Boris (1971b): "J.H. Lambert's Work on Probability". Archive for History of Exact Sciences, 7: 244-256.

SHEYNIN, Oskar Boris (1973): "Mathematical Treatment of Astronomical Observations (A Historical Essay)". Archive for History of Exact Sciences, 11: 97-126.

SHEYNIN, Oskar Boris (1975): "J. Kepler as a Statistician". ISI, 1-9 IX 1975. Warszawa (Invited paper 88).

SHEYNIN, Oskar Boris: "C.F. Gauss and the Theory of Errors". Archive for History of Exact Sciences, 20: 21-72.

SIMPSON, Thomas (1755): "A Letter to the Right Honourable George Earl of Macclesfield, President of the Royal Society, on the Advantage of Taking the Mean of a Number of Observations, in Practical Astronomy". Philosophical Transactions, 49 (1756): 82-93.

SIMPOSON, Thomas (1757): "An Attempt to Shew the Advantage Arising by Taking the Mean of a Number of Observations, in Practical Astronomy". Simpson, Miscellaneous Tracts on some Curious, and very Interesting Subjects in Mechanics (…). London: J. Nourse, 64-75.

STIGLER, Stephen M. (1986): The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900. Cambridge/Mass., London: Harvard University Press.

TILLING, Laura (1973): The Interpretation of Observational Errors in the Eighteenth and early Nineteenth Centuries. Thesis presented for the Degree of Doctor of Philosophy in the Field of the History of Sciences. University of London, 420 p. (unpublished).

VOGLER, Ch. August (1902): Johann Heinrich Lambert und die praktische Geometrie. Festrede zur Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers gehalten am 15. Januar 1902. Berlin: Paul Parey.

WEICHENHAN, Michael (2004): "Ergo perit coelum ...", Die Supernova des Jahres 1572 und die Überwindung der aristotelischen Kosmologie. Stuttgart: Steiner.

WINTER, Eduard (1957): Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746-1766. Dokumente für das Wirken Leonhard Eulers in Berlin. Hrsg. v. E. Winter. Berlin: Akademie Verlag.

WOLFF, Christian (1742): Elementa matheseos universae. Bd. 1. 2. Aufl. Halle, Magdeburg. (cited according to the reprint Wolff, Gesammelte Werke, Hrsg. u. bearb. v. Jean Ecole, Joseph Ehrenfried Hofmann, Marcel Thomann, Hans-Werner Arndt. II. Abteilung. Lateinische Schriften. Bd. 29. Hildesheim: Olms 1968).

CAPÍTULO 9

Las etapas en la gestación del Método de Montecarlo

JAVIER OTAMENDI
Universidad Rey Juan Carlos

La Estadística Matemática tiene entre sus herramientas el denominado Método de Montecarlo, que se utiliza para la generación de muestras aleatorias de una distribución conocida. Si bien su inicio está comúnmente aceptado como 1949 cuando aparece por primera vez como título de un artículo firmado por METROPOLIS y ULAM (1), su definición, sus antecedentes y las etapas en su desarrollo no han sido consensuadas.

Existen diferentes libros sobre el Método de Montecarlo que incluyen definiciones y referencias históricas previas a 1949 en las que se resuelven problemas estadísticos y matemáticos experimentando con una base de datos generada aleatoriamente.

En este artículo se analizan estas definiciones y referencias con un cuádruple objetivo. El primero es desarrollar una definición común que sirva para delimitar el campo de actuación del método. El segundo objetivo es recopilar el mayor número de las referencias históricas que cumplan con los requisitos de la definición planteada. En tercer lugar, se resalta la aportación de ciertos autores que se consideran cruciales en el desarrollo del método. Por último, se delimitan las etapas históricas en las que se ha hecho uso del método incluso cuando no se mencionara con ese nombre.

Definición

En primer lugar, y para enmarcar el ámbito de aplicación del Método de Montecarlo, se procede a la recopilación de las definiciones que aparecen en los principales manuales que versan sobre el tema. Se propone entonces una definición que sirva para decidir qué referencias históricas de las encontradas han de ser incluidas en la lista de antecedentes del método.

Definiciones Principales

- "Los Métodos de Montecarlo incluyen la rama de la Matemática concerniente con experimentos con números aleatorios realizados por matemáticos experimentales" (2).
- "La simulación es una técnica que realiza experimentos por muestreo del modelo de un sistema...El Método de Montecarlo se consideraba una técnica que utiliza números aleatorios o pseudoaleatorios para resolver un modelo" (3).
- "El método de Pruebas Estadísticas es un sistema de técnicas que nos permiten modelizar procesos y estudiarlos mediante la experimentación con ordenadores" (4).
- "Es la simulación de experimentos estadísticos utilizando técnicas de computación" (4).
- "Es un método numérico para resolver problemas matemáticos mediante el muestreo aleatorio de variables aleatorias" (5).
- "Producción de valores aleatorios con su distribución de frecuencias igual a la que gobierna el proceso" (1).
- "El método es un enfoque estadístico para el estudio de ecuaciones diferenciales, o más general, de ecuaciones integro-diferenciales que ocurren en varias ramas de las ciencias naturales" (1).
- "La representación de la solución de un problema como un parámetro de una población hipotética, y usar una secuencia aleatoria de números para construir una muestra de la población, de la que se pueden obtener estimaciones estadísticas de dicho parámetro" (6).

Definición Propuesta

La definición que parece más general y acorde con las aplicaciones realizadas del método es la de SOBOL (5), aunque se han de matizar cada uno de los temas que engloba:

- Método numérico para resolver.
- Problemas matemáticos mediante el
- Muestreo aleatorio de variables aleatorias.

Por método numérico se entiende un método no analítico. No se encuentra una solución exacta al problema sino una aproximada mediante iteraciones. La precisión de la solución es función del número de iteraciones o aproximaciones efectuadas. Se puede incluir en este caso el concepto de experimentación y simulación.

Dentro de problemas matemáticos se pueden englobar tanto la estimación de constantes o parámetros, como la derivación de funciones de densidad de variables aleatorias que son función de otras variables aleatorias. Los primeros problemas son puramente matemáticos, mencionando como ejemplo la estimación del número π. Los segundos entran dentro de la estadística matemática, como la derivación de distribuciones en el muestreo, o incluso de la matemática-lógica, si se habla de la resolución de problemas más complejos mediante la modelización de un sistema complejo (por ejemplo, los sistemas con líneas de espera).

El muestreo de variables aleatorias implica la generación de valores independientes de las variables de forma que cada iteración sea diferente. Para ello, se ha de disponer de un elemento físico del que se conozca la variabilidad de sus resultados. La evolución de estos elementos ha sido decisiva en las etapas de evolución del método de Montecarlo. Así, los primeros elementos son monedas (que producen 0 ó 1 con igual probabilidad), dados (la misma probabilidad según el número de caras), la ruleta (con 37 o 38 posibilidades) hasta llegar a los ordenadores. Es la utilización de estas máquinas de cálculo para generar muestras el momento de explosión del método dada su rapidez y posibilidad de repetición, representada por la generación de cadenas de números pseudoaleatorios.

Luego aunque la definición parece general, incluye los aspectos necesarios para tomarla como consenso y utilizarla como base para la determinación de etapas en la evolución del método.

Etapas

En función de los medios físicos y mecánicos que se utilizan para generar muestras, se pueden establecer las distintas etapas, cuyos fines aparecen por un incremento de rapidez y fiabilidad en los métodos de muestreo.

Se presentan en este capítulo las referencias encontradas en orden cronológico, haciendo hincapié en el método mecánico de generación utilizado, así como el número y tamaño de las muestras realizadas y la precisión de la generación.

Antecedentes (antes de 1875)

La primera etapa abarca desde las primeras observaciones visuales hasta que empiezan a surgir los primeros estudios académicos. Los casos presentados son:

Prehistoria

El primer ejemplo que se encuentra en la literatura como utilización de la simulación y del método de Montecarlo es el intento de calcular el número π de forma experimental. Ya en el Antiguo testamento (Reyes 1 vii. 23 y Crónicas 2 iv. 2) hay una referencia en la que se menciona que la relación entre el diámetro y el perímetro de las columnas del templo del rey Salomón era de aproximadamente tres (2,6).

Y en el Talmud (7), se puede mencionar una primera generación de una cadena de números con período completo (esto es, no se repite ningún número) para la asignación de tierras a distintas personas. Cada implicado aportaba un signo propio (llavero, moneda...), que una persona independiente iba eligiendo al azar y asignando a cada tierra.

Los Juegos de Azar

Aunque no parecen existir referencias explícitas de simulaciones de juegos de azar para calcular las probabilidades de éxito, parece razonable pensar que se jugarían partidas (de cartas, dados, tabas...) con el único fin de recolectar información para realizar cálculos que permitieran apostar de forma más precisa cuando el juego fuera real.

F.N. DAVID, en su artículo “Dicing and gaming” (8), explicita que CARDANO “llega a sus conclusiones de forma empírica”. Se refiere a su “Liber de Ludo Aleae”, publicado en 1663, pero escrito antes de la muerte de su autor en 1576.

M.G. KENDALL (9) piensa también que las probabilidades de los juegos de cartas de la época de CARDANO (mitad del siglo XVI) se calculaban de forma empírica y la importancia relativa de las jugadas se determinaba por métodos de prueba y error.

Estimación de Constantes (1733-1875)

La primera aparición escrita de un problema matemático complejo resuelto mediante la experimentación se debe a GEORGES-LOUIS LECLERC, CONDE DE BUFFON, quien presentó en 1733 el trabajo “Solution de problémes sur le jeu de franc-carreau” (10) o “Solución de problemas basados en el juego del ladrillejo”, en el que se menciona el que se conoce como “el problema de la aguja de Buffon” para calcular experimentalmente el número π. BUFFON preparó un problema trigonométrico cuya solución viniera dada en términos de π, pero que también se pudiera llegar al resultado numérico vía experimentación. Comparando ambas soluciones, el valor de π se habría calculado mediante simulación.

El problema es el representado en la Figura 1. Se dispone de una serie de líneas paralelas infinitas situadas entre sí a una distancia constante igual a d:

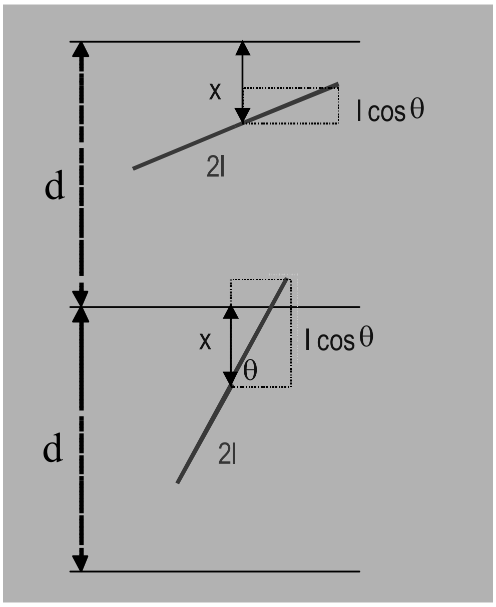


FIGURA 1. El juego del ladrillejo

Se lanza al azar una aguja de longitud $2l$, tal que dicha longitud sea menor que la distancia entre líneas, o sea, $2l < d$. Se desea calcular la probabilidad de que la aguja corte a alguna de las rectas.

Obviamente, por experimentación se puede poner unas líneas en el suelo y pasarse horas tirando la aguja. La probabilidad, siguiendo la concepción frecuentista de la probabilidad, es el límite de las frecuencias relativas, por lo que bastaría con calcular la frecuencia relativa obtenida en el experimento. Denominemos este número como f.

Teóricamente, el problema se plantea y se resuelve de la siguiente manera:

1. Se denomina x a la distancia perpendicular que existe entre el centro de la aguja y la paralela más próxima.
2. Se denomina θ al ángulo que forma la aguja con dicha perpendicular con lo que el cateto paralelo a x será $l \cos \theta$.
3. El evento "Aguja sí corta" se producirá cuando el valor de $l \cos \theta$ es mayor que la distancia x. Es necesario entonces calcular una función de probabilidad bivariante en función de x y θ, que son independientes.
4. La distancia x es una variable aleatoria uniforme que puede variar entre 0, si el centro de la aguja está sobre una paralela, o $d/2$ si el centro está equidistante con dos paralelas. Por tanto:

$$0 \leq x \leq d/2; \quad U(0, d/2)$$

Como la función de densidad de una variable $U(a, b)$ es $f(\varepsilon) = \dfrac{1}{b-a}$, la función de densidad de x es $f(x) = \dfrac{1}{d/2 - 0} = \dfrac{1}{d/2}$.

5. El ángulo θ puede variar uniformemente entre –90º y 90º, o en términos de π, entre –π/2 y π/2. Por tanto, el modelo de probabilidad es $U(-\pi/2, \pi/2)$, y la función de densidad de θ es:

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi/2 - \left(-\pi/2\right)} = \frac{1}{\pi}$$

6. La función de densidad conjunta, al ser independientes es el producto de las funciones individuales, o sea, $f(x;\theta) = \dfrac{1}{d/2}\dfrac{1}{\pi} = \dfrac{2}{\pi d}$.

7. Como se sabe que la condición de corte es $x < l \cos \theta$, entonces, la probabilidad de corte es, aplicando cálculo:

$$P\,(\text{aguja sí corta}) = P(x < l \cos \theta) = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{l\cos\theta} \frac{2}{\pi d}\, d\theta dx = \frac{2}{\pi d} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [x]_0^{l\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi d} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [l \cos\theta]\, d\theta = \frac{2}{\pi d} [l \text{ sen } \theta]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4l}{\pi d}$$

Ahora se dispone de la solución tanto analítica como por experimentación. Igualando ambas:

$$\frac{4l}{\pi d} = f$$

se puede despejar π:

$$\pi = \frac{4l}{fd}$$

Como d y l son conocidas, el único valor necesario para calcular π es f o el valor obtenido por experimentación, que será tanto más preciso cuantas más veces se tire la aguja.

Por tanto, con la simulación, BUFFON demuestra la utilidad de la experimentación para resolver ciertos problemas matemáticos. La aleatoriedad venía dada en su problema por el bote de la aguja, pero ahora se pueden simular movimientos aleatorios mediante el método de Montecarlo y un ordenador.

Muestreo Aleatorio Basado en Grupos (1876-1933)

La experimentación por muestreo aleatorio es la denominación que utiliza E.S. PEARSON (11) para referirse al estudio estadístico utilizando muestras finitas de distribuciones conocidas, que al fin y al cabo es la principal aplicación del método de Montecarlo en el campo de la Estadística Matemática.

En esta época, se utilizan dados, tiras de papel, bolas, ... con el fin de elegir un valor de una variable aleatoria ε cuya función de densidad $f(x)$ y de distribución $F(x)$ son conocidas. El objetivo perseguido es obtener un valor de una de las clases o grupos i $(i = 1, \ldots, I)$, en los que se divide el dominio de la variable aleatoria. Dicha variable, continua o no, se discretiza en una variable en la que se asigna una probabilidad a la marca de clase x' representativa de cada grupo $(x_i' = (x_{Li} - x_{li})/2)$:

$$f(x) \to F(x) \to P(x_{li} \le \varepsilon < x_{Li}) = F(x_{Li}) - F(x_{li}) = P(\varepsilon = x_i') \to n_i = nP(\varepsilon = x_i')$$

En la Figura 2, se muestra como ejemplo la formación de 1000 tarjetas de la distribución N(0,1), de la que se desea obtener muestras aleatorias. Se aprecia que se han definido 31 intervalos dentro del dominio $x \in (-3.875, 3.875)$, con marcas de clase $x' \in \{-3,75, -3.50, \ldots, 3.50, 3.75\}$. La probabilidad $P(\varepsilon = x_i')$ de cada tarjeta (marca de clase) se obtiene de la función de distribución $(F(x_{Li} - F(x_{li}))$. El número de cada clase de tarjetas se obtiene multiplicando la probabilidad por el número total de tarjetas a muestrear.

				Media	0.0000	
n=	1000			Varianza	1.0000	
x'	**xl**	**xL**	**n*P(e=x')**	**n*F(x)**	**P(e=x')**	**F(x)**
-3.75	-3.875	-3.625	0	0	0.0001	0.0001
-3.50	-3.625	-3.375	0	0	0.0002	0.0004
-3.25	-3.375	-3.125	1	1	0.0005	0.0009
-3.00	-3.125	-2.875	1	2	0.0011	0.0020
-2.75	-2.875	-2.625	2	4	0.0023	0.0043
-2.50	-2.625	-2.375	4	9	0.0044	0.0088
-2.25	-2.375	-2.125	8	17	0.0080	0.0168
-2.00	-2.125	-1.875	14	30	0.0136	0.0304
-1.75	-1.875	-1.625	22	52	0.0217	0.0521
-1.50	-1.625	-1.375	32	85	0.0325	0.0846
-1.25	-1.375	-1.125	46	130	0.0457	0.1303
-1.00	-1.125	-0.875	60	191	0.0605	0.1908
-0.75	-0.875	-0.625	75	266	0.0752	0.2660
-0.50	-0.625	-0.375	88	354	0.0878	0.3538
-0.25	-0.375	-0.125	96	450	0.0964	0.4503
0.00	-0.125	0.125	99	550	0.0995	0.5497
0.25	0.125	0.375	96	646	0.0964	0.6462
0.50	0.375	0.625	88	734	0.0878	0.7340
0.75	0.625	0.875	75	809	0.0752	0.8092
1.00	0.875	1.125	60	870	0.0605	0.8697
1.25	1.125	1.375	46	915	0.0457	0.9154
1.50	1.375	1.625	32	948	0.0325	0.9479
1.75	1.625	1.875	22	970	0.0217	0.9696
2.00	1.875	2.125	14	983	0.0136	0.9832
2.25	2.125	2.375	8	991	0.0080	0.9912
2.50	2.375	2.625	4	996	0.0044	0.9957
2.75	2.625	2.875	2	998	0.0023	0.9980
3.00	2.875	3.125	1	999	0.0011	0.9991
3.25	3.125	3.375	1	1000	0.0005	0.9996
3.50	3.375	3.625	0	1000	0.0002	0.9999
3.75	3.625	3.875	0	1000	0.0001	0.9999

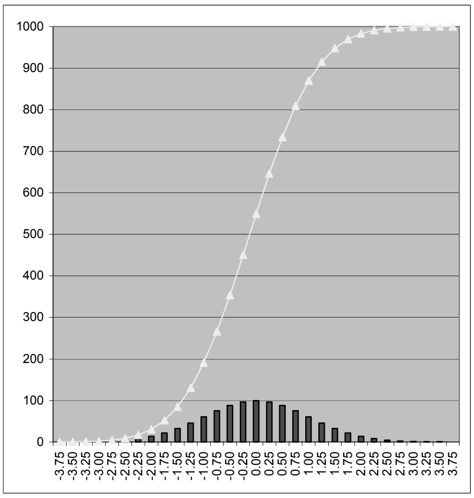


FIGURA 2. Tarjetas de *N*(0,1)

Así, si se crean 1000 tarjetas, habrá 1 con el valor mínimo de −3.25, otro con el 3.00, ..., 99 con la moda de 0,..., y una con el máximo de 3.25.

Una vez con las *n* tarjetas en un saco, un muestreo con reposición permite obtener muestras independientes de la distribución deseada.

Si la distribución conocida de la que se obtienen muestras es binomial, es posible utilizar monedas (distribución Binomial(1,1/2)) o dados (distribución Binomial(1,1/6)). Conviene mencionar aquí que el modelo Binomial es utilizado para la derivación de leyes límite, en particular, de distribuciones en el muestreo.

Por eso, las aplicaciones en esta época se pueden agrupar según el fin de los estudios para los que se generan datos. En primer lugar, se busca la derivación de las leyes o funciones de densidad de las variables aleatorias que resultan de operar con distribuciones de variables aleatorias conocidas, en el caso de que su desarrollo matemático no fuera sencillo. En segundo lugar, se busca contrastar empíricamente las distribuciones obtenidas teóricamente.

Dados, Monedas y Tarjetas

El primer artículo es de ERASTUS LYMAN DE FOREST, 1876 (12), que realizó "una prueba de la precisión de la fórmula (de la desviación típica asintótica) mediante pruebas hechas a una escala lo suficientemente grande". Utilizó una caja en la que introdujo 100 tarjetas que, convenientemente muestreadas, asemejaban una distribución normal.

En 1877, GEORGE HOWARD DARWIN (13), estudió la forma de suavizar series utilizando una simulación. Construyó una peonza a la que adjuntó una tarjeta circular en la que se representaba la mitad de una función de distribución normal. El signo se conseguía lanzando con posterioridad una moneda. La peonza se paraba aleatoriamente de forma que existiera un menor sesgo que el de la posición de caída.

En 1890, FRANCIS GALTON (14) publicó un artículo en el que explicaba un nuevo método para obtener muestras de una distribución normal. De hecho, buscaba una serie de muestras de dicha distribución. Utiliza dados, porque "éstos son mejores que la ruleta, y ésta mejor que las tarjetas o cartas". Los dados son de tres tipos, cada uno con 24 posibilidades (6 números, cada uno con cuatro aristas).

Se ha de mencionar también una carta de W.F.R. WELDON a F. GALTON en 1894 (11) en la que se habla de una experimentación con los resultados de 26306 lanzamientos de 12 dados, contando el número de 5 y 6 que aparecen. El objetivo es utilizarlo en el desarrollo de tests de bondad de ajuste, empezando por la comparación de la distribución binomial empírica con la teórica de 1/3, para distintos tamaños muestrales.

Dos comentarios adicionales incluidos en la carta marcan el comienzo de este importante periodo. El primero habla de que los datos recogidos los iba a enviar a la Royal Institution para que pudieran ser utilizados en futuras investigaciones, demostrando la importancia de la nueva técnica de investigación. El segundo es que el análisis del ajuste le era enviado a su vez a F.Y. EDGEWORTH.

F.Y. EDGEWORTH ya sabía lo que era investigar mediante el método del muestreo aleatorio. En su "Methods of Statistics" de 1885 (15), utiliza 280 muestras de la suma de 10 números aleatorios (de una distribución uniforme) para demostrar que la distribución resultante se asemeja a una distribución normal. Este estudio "puede haber sido uno de los primeros experimentos de muestreo aleatorio encontrados en la literatura estadística" (16).

Uno de los artículos que marca otro hito importante en la experimentación estadística es el de W.S. GOSSET o STUDENT de 1908 (17), "The probable error of a mean". Para desarrollar su ya famosa distribución *t*, muy útil para inferir a partir de muestras pequeñas, utiliza la información obtenida de 750 muestras de tamaño 4. La diferencia entre este estudio y, por ejemplo, el de EDGEWORTH es que la distribución de la que se obtiene la muestra es empírica y no teórica, utilizando 3000 datos obtenidos al estudiar los rasgos físicos de 3000 criminales.

También utiliza los datos en su siguiente trabajo, de 1908, "Probable error of a correlation coefficient"(18), y en 1921 para estudiar la distribución en el muestreo de los coeficientes de correlación de Spearman en el test de rangos (19).

En 1925, L.H.C. TIPPETT (20) estudió el problema de estimación de los extremos y el rango de una muestra. A pesar de realizar un riguroso estudio teórico, se planteó la necesidad de realizar una verificación experimental. Para ello, utiliza primero 1000 tarjetas pequeñas en las que escribe el valor de 27 categorías. Las tarjetas se obtienen por muestreo con reemplazamiento de una bolsa. Realiza 5000 muestras, que agrupa en 10 o 20 muestras. Con posterioridad, y para ser más preciso, crea 10000 tarjetas con 69 valores distintos de las que obtiene 10000 muestras. Acaba por generalizar el método, obteniendo 40000 dígitos de censos, que combinados de 4 en cuatro producen 10000 números. Éstos son convertidos en un número entre 0000 y 9999 mediante una clave, lo que provoca la primera lista de números aleatorios con período 10000.

La Tabla de Números Aleatorios de Tippett

La lista anterior se publicó en 1927 (21), lo que produjo un período de publicaciones. En un período de 5 años, aparecen otros tantos artículos que representa la aplicación del método de Montecarlo a la Estadística Matemática, en su vertiente de la derivación o estudio de las distribuciones en el muestreo. En particular, se pueden realizar estudios de robustez de los métodos de estadística matemática si la distribución de la población no es normal.

A.E.R. CHURCH, en 1926 (22), utiliza el método de Montecarlo, denominado como muestreo de una población infinita, para estudiar la distribución en el muestreo de la media y la varianza cuando se toman muestras pequeñas de distribuciones no normales. Utiliza la tabla de 10000 números aleatorios de TIPPETT o bolsas con tickets o tazones con judías de distintos colores para generar 1000 muestras de 10 valores.

In 1928, K.J. HOLZINGER y A.E.CHURCH (23), utilizan la tabla de TIPPETT para generar muestras de una distribución con forma de U, para estudiar la distribución de la media. En primer lugar, se obtiene la secuencia de los 10000 valores posibles, para luego ir agrupando: 1000 muestras de tamaño 2, 1333 de tamaño 3, 1000 de 4, 1000 de 5, 1000 de 10, 500 de 20 y 400 de 25. Posteriormente, se fija el número de muestras en 800 y se varía el tamaño: 3, 4, 5, 10, 25 y 50. Como resultado, se presenta la necesidad de disponer de más de 10000 números aleatorios y que las muestras sean nuevas cada vez.

Ese mismo año, SOPHISTER (24), discípulo de GOSSET, estudia también la distribución de la variable aleatoria normal estándar cuando la distribución de la población es asimétrica y la muestra es pequeña. Utiliza el mismo procedimiento de CHURCH, utilizando 1000 muestras de 5 y otras 1000 de 20.

También en 1928, E.S. PEARSON y N.K. ADYANTHAYA (25), en “The Distribution of Frequency Constants in Small Samples from Symmetrical Populations”, realizan un estudio en el que generan muestras de diversas distribuciones simétricas utilizando como generador la tabla de números aleatorios de TIPPETT. Se toman 8000 valores con los que se estiman las distribuciones en el muestreo del rango, el centro y la mediana. Se comparan los resultados experimentales con los valores teóricos, demostrando que es posible utilizar métodos numéricos cuando la solución analítica no es sencilla.

En 1929, los mismos E.S. PEARSON y N.K. ADYANTHAYA (26), siguen probando cómo son de sensibles los tests de medias basados en normalidad ante cambios tanto en asimetría como en curtosis. Se utilizan 1000 muestras de tamaño 2, y 500 de tamaños, 5, 10 y 20, con 5 distribuciones distintas, todas obtenidas de las tablas de TIPPETT.

Ya en 1933 aparece un nuevo estudio en el que se realiza un muestreo para investigar la robustez del test χ^2 de R.A. FISHER. En ese año, SELBY ROBINSON publicó “An experiment regarding the χ^2 test” (27), aunque, en este caso, se vuelven a lanzar monedas (70 estudiantes lanzaron 7 monedas 128 veces).

La importancia que tiene este artículo es que se pone como ejemplo por el Institute of Mathematical Statistics como el tipo de artículo que se pensaba potenciar cuando se fundó en 1930 la revista “Annals of Mathematical Statistics”, señal de que era una técnica potencialmente importante.

Aparatos Sofisticados

Pero llega un momento en que se necesitan más números aleatorios, más exactitud en la generación de variables continuas, una generación más rápida, secuencias repetibles... KENDALL (28) asegura “que los métodos mecánicos de producción de series aleatorias de enteros no producen resultados satisfactorios”, haciendo referencia a dados y la ruleta, en particular de la del casino de Monte Carlo.

Pero aún así diseña un aparato mecánico sofisticado para generar los necesarios números aleatorios. Un disco dividido en 10 secciones rota en un cuarto oscuro, y una llama eléctrica genera aleatoriamente una luz que ilumina uno de los números. El disco además es movido por el experimentador de vez en cuando.

Se busca entonces la forma en que se pudieran resolver problemas más complicados u otros con los que no se puede experimentar de forma fiable. Es el momento en el que se desarrolla la bomba atómica, tanto en su sentido estricto como en el desarrollo del Método de Montecarlo.

Gestación y Nacimiento (1930-1949)

La fecha consensuada como nacimiento oficial del método es 1949, cuando aparece por primera vez ese nombre en el artículo "The Monte Carlo Method" de NICHOLAS METROPOLIS y S. ULAM (1), al ser la primera vez que aparece en una publicación científica.

Sin embargo, hay que dar crédito a todo el grupo de científicos del Laboratorio Científico de los Álamos, Nuevo Méjico, en el desarrollo del método. Así, E. FERMI es mencionado como el creador del método en diversas fuentes (29). FERMI, junto con R.D. RICHTMYER, escribe el documento "Note on Census —taking in Monte-Carlo Calculations" (30), con fecha de 11 de julio de 1948, que es desclasificado en 1954.

El problema que se intenta resolver de forma experimental es el sistema de las ecuaciones con las que se representa la difusión de energía en las reacciones nucleares. El sistema contiene "ecuaciones integro-diferenciales" (1) que han de ser evaluadas para su resolución, problema de no sencilla resolución analítica. El método conlleva la evaluación sucesiva del sistema basándose en la generación de muestras aleatorias que representaran el valor de la integral, con el posterior cálculo probabilístico, a imagen y semejanza del estudio de un solitario. Así, y en palabras de ULAM, "la característica esencial del proceso es que se evita tratar con integraciones múltiples o con multiplicaciones de matrices de probabilidad, buscando cadenas simples de eventos". "No es necesario almacenar la colección de números en la máquina, sino, paradójicamente, la máquina puede ser programada para producir números que simulen (un proceso) mediante la iteración de una operación matemática bien definida".

M.N. ROSENBLUTH y A.W. ROSENBLUTH (31) también deben ser mencionados como miembros del equipo. Acaban por publicar en 1953 resultados adicionales obtenidos en los experimentos con la bomba atómica.

Simulación Automática de Muestras de Variables Aleatorias (1949-???)

Lo que sigue a partir de los primeros artículos es la fase de desarrollo. No más tablas de números aleatorios, ni de experimentaciones pedestres, sino el intento de crear una estructura de experimentación estadística rápida y fiable. Si parecía claro que la velocidad implicaba computadores, se busca a partir de 1950 métodos fiables particularizados para estas máquinas de cálculo.

Quizá el desarrollo de las máquinas de cálculo electrónicas, y su utilización en la resolución de problemas matemáticos complejos sea el punto crítico por el que se desarrolla y expande el método de Montecarlo. No es necesario realizar simulaciones tediosas, ni aproximaciones a distribuciones continuas con grupos de tarjetas.

Basta con disponer de un buen generador de número pseudoaleatorios, que sea rápido y reproducible, y luego unos buenos procesos de conversión de la distribución Uniforme(0,1) a la variable aleatoria discreta o continua requerida.

En cuanto a los generadores de números aleatorios, se puede distinguir entre los métodos mecánicos y los analíticos. Los primeros se basan en la generación de ruidos eléctricos dentro de tubos de Neón e incluye máquinas desarrolladas en la década de los 50 como el Post Office Artificial Traffic Machine o ERNIE (Electronic Random Number Indicator Equipment) (32). En los analíticos, los números son generados por funciones deterministas que producen una secuencia periódica de números (33).

En cuanto a los generadores de variables aleatorias, se considera a VON NEUMANN como su creador. A partir de muestras de distribuciones rectangulares, propone un método que publica en 1951 con el nombre de Aceptación-Rechazo (34). Empiezan ya en esta época a proliferar generadores específicos para distribuciones de forma que se acelere la generación de muestras. (35).

Conclusiones

El Método de Montecarlo es tan antiguo como los juegos de azar y la necesidad de resolver problemas matemáticos de forma experimental si la solución analítica no es sencilla. Por ello, la mente humana ha diseñado pruebas utilizando dados, monedas, agujas, tabas, ... o cualquier otro método sofisticado para producir números aleatorios en un ámbito controlado.

La aparición de los potentes medios de cálculo junto con la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales complejas permitió a los investigadores de El Álamo desarrollar y potenciar un método que hasta entonces era conocido pero no había sido ni bautizado ni generalizado.

En este artículo se propone una clasificación en función de estos métodos mecánicos de muestreo así como una definición, que conjuntamente permiten tener una idea clara de su utilidad tanto en el ámbito docente como de investigación:

> "Cualquier estadístico quiere de vez en cuando probar el valor práctico de algún proceso teórico, ya sea de suavizado, o de interpolación, o de obtención de variabilidad, o para hacer alguna deducción o inferencia" GALTON en (36).

BIBLIOGRAFÍA

CHURCH, A.E.R.: *On the Means and Squared Standard-Deviations of Small Samples from Any Population*. Biometrika, Vol. 18, No. 3/4, November 1926.

DARWIN, G.H.: *On Fallible Measures of Variable Quantities, and On a Treatment Of Meteorological Observations*. Philosophical Magazine, Vol. 4, 1877.

DAVID, F.N.: *Dicing and Gaming*, Biometrika, Vol. 42, 1955.

DEFOREST, E.L.: *Interpolation and Adjustment of Series*. Tuttle. New Haven, 1876.

EDGEWORTH, F.Y.: *Methods of Statistics.* Journal of the Royal Statistical Society, Jubilee Volume, 1885.

FERMI, E.; RICHTMER, R.D.: *Note on Census-Taking in Monte-Carlo Calculations.* U.S. Government, July, 1948.

GALTON, F.: *Dice for Statistical Experiments*. Nature, Vol. 42, 1890.

HALTON, J.H.: *A Retrospective and Prospective Survey of the Monte Carlo Method.* SIAM Review, Vol. 12, No. 1, January 1970.

HAMMERSLY, J.M.; HANDSCOMB, D.C.: *Monte Carlo Methods*. John Wiley and Sons. New York, 1964.

HASOFER, A.M.: *Studies in the History of Probability and Statistics. XVI. Random Mechanisms in Talmudic Literature.* Biometrika, Vol. 54, No. 1/2, June 1967.

HOLZINGER, K.J.; CHURCH, A.E.R.: *On the Means of Samples from a U-Shaped Population. Biometrika*, Vol. 20A, No. 3/4, December 1928.

KALOS, M.H.; WHITLOCK, P.A.: *Monte Carlo Methods* (Vol. I). John Wiley and Sons. New York, 1986.

KENDALL, M.G.: *The Beginnings of a Probability Calculus*, Biometrika, 44, 1956.

KENDALL, M.G.; BABINGTON SMITH, B.: *Randomness and Random Sampling Numbers,* Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 101, No. 1, 1938.

L'ECUYER, P.: *Random Numbers for Simulation.* Communication of the ACM. Vol. 33, No. 10, October 1990.

LECLERC, G.L.: *Essai d'Arithmetique Morale*. Suplemento a la Historia Natural, Vol. IV, 1777.

METROPOLIS, N.; ULAM, S.: *The Monte Carlo Method.* Journal of the American Statistical Association, Vol. 44, No. 247, September 1949.

PEARSON, E.S.: *Some Incidents In The Early History of Biometry and Statistics 1890-94*, Biometrika 52, 1965.

PEARSON, E.S.: *Some Reflexions on Continuity in the Development of Mathematical Statistics, 1885-1920*, Biometrika 54, 1967.

PEARSON, E.S.; ADYANTHAYA, N.K.: *The Distribution of Frequency Constants in Small Samples from Symmetrical Populations.* Biometrika, Vol. 20A, No. 3/4, December 1928.

PEARSON, E.S.; ADYANTHAYA, N.K.: *The Distribution of Frequency Constants in Small Samples from Non-Normal Symmetrical and Skew Populations.* Biometrika, Vol. 21, No.1/4 , December 1929.

ROBINSON, S.: *An Experiment Regarding the χ^2 Test.* The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 4, No. 4, November 1933.

ROSENBLUTH, M.N.; ROSENBLUTH, A.W.: *Further Results on Monte Carlo Equations of State.* The Journal of Chemical Physics, Vol. 22, No. 5, May 1954.

RUBINSTEIN, R.Y.: *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley and Sons. New York, 1981.

SCHRIEDER, Y.: *The Monte Carlo Method*. Pergamon. Oxford, 1966.

SOBOL, I.M.: *A Primer for the Monte Carlo Method*. CRC Press. Boca Raton, 1994.

SOPHISTER: *Discussion of Small Samples Drawn from an Infinite Skew Population.* Biometrika, Vol. 20A, No.3/4, December 1928.

STIGLER, S.M.: *Stochastic Simulation in the Nineteenth Century*. Statistical Science, Vol. 6, No. 1, February, 1991.

STUDENT (GOSSET, W.S.): *The Probable Error of a Mean*. Biometrika, Vol. 6, 1908.

STUDENT (GOSSET, W.S.): *Probable Error of a Correlation Coefficient*, Biometrika, Vol. 6, 1908.

STUDENT (GOSSET, W.S.): *An Experimental Determination of the Probable Error of Dr Spearman's Correlation Coefficients*, Biometrika, Vol. 13, No. 2/3, 1921.

THOMSON, W.E.: *ERNIE-A Mathematical and Statistical Analysis*. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, Vol. 122, No.3, 1959.

TIPPETT, L.H.C.: *On the Extreme Individuals and the Range of Samples Taken from a Normal Population.* Biometrika, Vol. 17, No. 3/4, December 1925.

TIPPETT, L.H.C.: *Random sampling numbers*, Tracts for Computers, No. XV. London, 1927.

TOCHER, K.D.: *The Application of Automatic Computers to Sampling Experiments*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 16, No. 1, 1954.

VON NEUMANN, J.: *Various Techniques Used In Connections With Random Digits.* Applied Mathematical Series/National Bureau of Standards, Vol. 12, 1951.

CAPÍTULO 10

La interpretación subjetivista de la Probabilidad. Principales aportaciones

GREGORIA MATEOS-APARICIO MORALES
Universidad Complutense de Madrid

Introducción

El concepto de probabilidad subjetiva, llamada también personal por algunos autores, abandona el criterio del grado de confirmación como grado de creencia objetivo y racional, expresando el grado de confirmación como grado de creencia real de una persona tal y como lo manifestaría en una apuesta de juego.

Suele usarse también para interpretar la probabilidad, en un sentido subjetivista, la expresión grado de confianza que se tendría en una hipótesis *H* a partir de una evidencia *E*. Otros autores prefieren, sin embargo, utilizar simplemente la expresión grado de creencia.

El grado de creencia, que mide la probabilidad, se podrá establecer indirectamente por la apuesta sobre la ocurrencia del suceso. Esta probabilidad procede directamente de la intuición y, según Koopman[1], "es la experiencia la que se interpreta en términos de probabilidad, y no la probabilidad la que se interpreta en términos de experiencia".

[1] KOOPMAN, B.O. "The axioms and algebra of intuitive probability" en Annals of Mathematics 1940, vol. 41, nº 2, pág. 269.

Una de las notaciones más interesante para representar la probabilidad subjetiva es $C_S(H/E)$, que se leería grado de creencia de la hipótesis *H* dada la evidencia *E*, siendo C_S el grado de creencia o grado de confianza subjetivista, donde *S* es el sujeto que reflexiona acerca de *H*. Algunos autores no estaban de acuerdo con que se identificara la probabilidad con C_S.

La propuesta de Leonard J. Savage y Bruno De Finetti, dos de los más representativos subjetivistas de los que hablaremos después, consistía en proponer al sujeto S que asigne grados de creencia $C_S(H/E)$ para distintos valores de *H* y de *E*, y si algunas de estas asignaciones fueran incoherentes, que tratara de rectificar sus grados de creencia hasta eliminar las incoherencias. A estas nuevas asignaciones se les llama grados de creencia rectificados. Savage y De Finetti, conscientes de que el mayor problema de la probabilidad subjetiva está en el sesgo personal y en la inestabilidad con que algunas de estas probabilidades están en la mente de una persona, recomiendan que el concepto de probabilidad subjetiva no sea tanto una guía directa para funcionar sino fundamentalmente una inspección sobre la consistencia de las asignaciones. Savage cree que existe una función de probabilidad personal para cada individuo.

La coherencia significa que el mismo sujeto S ante dos hipótesis lógicamente equivalentes dadas las experiencias, lógicamente equivalentes también, asignará grados de creencia iguales.

Autores que aportan un desarrollo sistemático para los fundamentos de esta teoría

Los fundamentos de esta teoría con un desarrollo sistemático fueron establecidos por Frank P. Ramsey y más tarde ampliados por Bruno de Finetti. Los fundamentos de la teoría los encontramos en las obras de Ramsey: *The foundation of mathematics,* publicada póstumamente en 1931 y *Truth and Probability*, trabajo esencial para la teoría subjetivista, que se encuentra en ***The foundation of mathematics and other logical essays***, publicada en 1931, donde el autor desarrolla en profundidad su criterio personalista de probabilidad y utilidad.

Pero fundamentalmente, cuando el concepto tuvo más amplia aceptación y aplicación fue después de la publicación del trabajo de L.J. Savage *The foundations of Statistics* en abril de 1954. Savage[2] mantiene en esta obra que:

> "Para los personalistas la probabilidad mide la confianza que un individuo particular tiene en la verdad de una proposición particular (...) y no niegan la posibilidad de que dos personas razonables ante la misma evidencia tengan grados de confianza distintos en la verdad de la misma proposición".

[2] SAVAGE, L.J. The Foundations of Statistics. Ed. Dover, 1971, pág. 3.

Savage sigue a Ramsey y su punto de vista personalista tiene origen en Bruno De Finetti, fundamentalmente en el trabajo de De Finetti, *La prévision*: *ses lois logiques, ses sources subjectives,* publicado por el Instituto Henri Poincaré en 1937. La idea sugerida por Ramsey, en su obra póstuma referida anteriormente, de que el grado de confianza se asigne a partir de la ventaja que una persona da a la ocurrencia de un suceso frente a la no ocurrencia, es recogida también por el autor italiano. Este último, De Finetti, llega a la teoría subjetivista por su temprana afición a la filosofía empirista de los pensadores del liberalismo anglosajón. Pero las teorías subjetivistas de De Finetti tienen influencias también de las ideas Keynesianas a través de la obra *A treatise on probability*, publicada por Keynes en 1921.

Otros autores con ideas similares son Harold Jefreys, con su obra *Theory of Probability* (1948), B.O. Koopman, con sus trabajos *Intuitive probabilities and sequences* y *The Axioms and algebra of intuitive probability*, e Irving John Good, con su trabajo *Probability and the weighing of Evidence,* publicada en 1950. Otros autores ligados a esta teoría y que tenemos que mencionar son: Rudolf Carnap, autor al que De Finetti le supone una interpretación subjetivista, pero que a nuestro entender en él se solapa también el esquema logicista; y especialmente Dennis V. Lindley, que, aunque en principio se decanta por la teoría objetivista , pronto descubre las inconsistencias de esta teoría optando por la teoría subjetivista, a la que encuentra "más clara, tanto práctica como teóricamente". Las obras de Lindley en este campo son: *Introduction to probability and statistics,* publicada en 1965 en dos volúmenes, en la que el autor adopta un punto de vista bayesiano; y *Statistical Inference*, anterior a aquélla y publicada por primera vez en 1953.

Lindley y De Finetti mantuvieron importantes contactos, pero sin lugar a dudas una de las relaciones más fructíferas entre dos subjetivistas es la mantenida entre De Finetti y Savage, relación tan útil como intensa. Ambos autores realizan varios trabajos al alimón, entre ellos *On the Manner of Choising Inicial Probabilities*, publicado en 1962. El importante libro de Bruno De Finetti *Probability, Induction and Statistics*, publicado en Roma está dedicado a Leonard J. Savage que había muerto repentinamente en Yale meses antes.

La nómina de autores partidarios de las teorías subjetivistas de la probabilidad es muy amplia. A continuación hacemos un recorrido por los autores y sus propuestas fundamentales.

Formulaciones generales de la teoría. Axiomáticas fundamentales

La teoría subjetivista comienza a desarrollarse de forma explícita y general con el trabajo de Leonard J.Savage, ya mencionado, *The Foundations of Statistics*, publicado en 1954. Sin embargo, aunque este trabajo trate de forma más completa dicha teoría, el primer intento claro de axiomatización lo encontramos en los trabajos de Bruno De Finetti: *Sul significato soggetivo della probabilitá* publicado en 1931 y *La prévision*: *ses lois logiques, ses sources subjectives* publicado en 1937. En estos dos trabajos, De Finetti propone las leyes que ha de seguir la probabilidad tal y como él la concibe, es decir, no como una noción abstracta, sino que la supone una idea elemental entroncada en la vida diaria. Según esta elemental apreciación, es posible suponer un suceso bien definido pero que nos plantea duda acerca de su ocurrencia o no ocurrencia. Esta incertidumbre acerca de su ocurrencia lleva al autor a definir dos términos, la comparación, que la establece con la relación "más probable que" y la graduación que consiste en una valoración cuantitativa y directa del grado de probabilidad atribuido por un individuo al suceso. De Finetti establece cuatro postulados para la relación comparativa "más probable que". En cuanto a la definición cuantitativa y directa del grado de probabilidad, De Finetti considera que es asignada por un individuo a un suceso dado, de tal manera que con ello expresa las condiciones en las que estaría dispuesto a apostar por la ocurrencia del suceso.

La evaluación de las probabilidades por parte del individuo requiere que no existan contradicciones intrínsecas entre ellas, es decir, requiere la coherencia del individuo. Esta condición de coherencia sirve para deducir el cálculo de la probabilidad mediante un conjunto de reglas a las que debe ajustarse la evaluación subjetiva de la probabilidad de varios sucesos por un mismo individuo, si no quiere que exista una contradicción fundamental entre ellas.

Las ideas de Savage proceden, como ya hemos referido de F.P. Ramsey, de Von Neumann-Morgenstern y de la Escuela de Econometría de Chicago. Savage piensa, como sus predecesores, que la única interpretación consistente de la probabilidad es un grado de confianza subjetivo que una persona tiene en la verdad de una proposición. Esto hace que carezca de sentido distinguir entre evaluaciones correctas y erróneas, excepto que se violen los axiomas de la teoría de la probabilidad. Uno de los puntos fundamentales del trabajo de Savage es el punto de vista "normativo" por el que una persona real se comportaría como ideal si asignase probabilidades subjetivas que obedecieran exactamente a las leyes fundamentales de la probabilidad. En este caso hablaríamos de autoconsistencia, que estaría garantizada si cualquier trasgresión que se haga de los axiomas se castiga económicamente. En este sentido, Savage tuvo una idea ingeniosa, siguiendo a Von Neumann y Morgenstern, al comparar cualquier premio con un número de tickets de una lotería, de tal manera que el individuo será consistente con sus preferencias si toma las decisiones a las que corresponda la máxima utilidad esperada.

En los argumentos de Savage encontramos que una persona consistente establecerá probabilidades que obedecerán las mismas leyes que las probabilidades frecuenciales y las valoraciones de ambas serán iguales cuando estas últimas sean conocidas. Si suponemos que las probabilidades subjetivas son medibles y obedecen las mismas leyes que las frecuencias, los métodos personales, aunque estrictamente hablando sean subjetivos, tienen la ventaja de que indican cuando la respuesta es virtualmente objetiva. Si uno desea optimizar dicho análisis de acuerdo con algún criterio como cometer el mínimo número de errores posible o maximizar el beneficio, entonces, si formulamos cualquiera de estos criterios de forma numérica, se verifica la consistencia si no se afirma simultáneamente que A es mejor que B y que B es mejor que A.

Bruno De Finetti y L.J. Savage proponen una noción de probabilidad personal que puso en duda las técnicas estadísticas aceptadas hasta ese momento. Estos autores propusieron métodos de obtención de probabilidades personales aproximadas a través de las ideas de la teoría de la decisión estadística, y en los que el método teórico de la toma de decisiones proporciona una nueva base para definir la probabilidad personal.

Las valoraciones de la persona pueden ser inferidas a partir de sus preferencias entre decisiones posibles. Este método indirecto, del que Savage era más partidario, elimina la desventaja a que da lugar la discrepancia entre los juicios en las probabilidades valoradas directamente. Un procedimiento para aplicar este método consiste en usar una técnica de juego o lotería para obtener la probabilidad subjetiva de la ocurrencia de sucesos únicos. En este caso, las probabilidades vienen inducidas a partir de las probabilidades de las apuestas de dicho juego.

En el caso de que el decisor sea un grupo de individuos, el análisis bayesiano permite la valoración de una función de probabilidad subjetiva individual. Si esa función tiene que ser asignada por el grupo de individuos, las valoraciones individuales, si inicialmente no coinciden, pueden combinarse para dar una sola valoración de todo el grupo, o bien los miembros del grupo pueden ser persuadidos para que modifiquen sus juicios de acuerdo con un solo juicio individual.

Si cada uno de los individuos del grupo proporciona una distribución de probabilidad individual que representa su juicio, Winkler[3] sugiere un número de esquemas basados en la combinación lineal de las distribuciones individuales para obtener una única distribución del grupo. Las ponderaciones usadas en la combinación lineal reflejan la racionalidad, habilidad y experiencia de cada uno de los individuos. Winkler concibe una autoridad que es responsable del grupo y que realizará el esquema de las ponderaciones.

Winkler considera dos aproximaciones además de la combinación lineal de las distribuciones individuales: la realimentación y revaloración del grupo. La realimentación consiste en presentar a un miembro del grupo las valoraciones anónimas del resto del grupo para obtener una nueva valoración de este individuo. El método se repite para todos los miembros del grupo hasta lograr una convergencia de todas las valoraciones. La revaloración del grupo consiste en presentar a los individuos como un grupo y que éstos discutan el asunto hasta llegar a un consenso individual.

Estos métodos son criticados por Dalkey[4] porque cree que las valoraciones son dominadas por los líderes de grupo, la poca comunicación entre los miembros del grupo, y la distorsión de los juicios individuales debido a las influencias del grupo sobre los individuos. Dalkey propone un método que consiste en que los miembros del grupo sean expertos en el tema que se considera y valoren sus probabilidades con

---

[3] WINKLER, R.L. *The consensus of subjective probability distributions* .Management Science, vol. 15, nº 2, 1968, pp. 61-75.

[4] DALKEY, N. *An experimental study of group opinion*. Futures 1969, vol. 1, nº 3, pp. 408-426.

sus fuentes de información, y cualquier otra información adicional que las mejore, sin recurrir a la valoración ponderada del grupo.

En la cuantificación o grado de creencia interviene la figura del asesor o experto, por lo que De Finetti propone el desarrollo de métodos que obligan al asesor a hacer que las valoraciones se correspondan con sus juicios. Las probabilidades personales valoradas de acuerdo con ciertos postulados de coherencia sobre el comportamiento deben de estar de acuerdo con una medida de probabilidad matemática. Winkler propone un método, con el que en cada caso presentado el experto debe decidir entre dos apuestas y no puede dejar de apostar, una con probabilidades p y q de ganar y perder, y otra que depende de si ocurre o no ocurre un suceso E. En estos casos el factor experiencia juega un papel importante, pues gracias a ella los asesores cometerán menos inconsistencias y les dará la capacidad de entender la correspondencia entre juicios y probabilidades.

Después de analizar algunos aspectos en la evolución sobre la cuantificación del juicio pasamos a referir, de manera breve y por orden cronológico, algunas axiomáticas que constituyen la base formal que garantice el comportamiento racional y coherente al que nos venimos refiriendo.

Axiomática de Bruno De Finetti (1931)

En las obras citadas anteriormente publicadas en 1931 y 1937, De Finetti propone las leyes que ha de seguir la probabilidad tal y como él la concibe. Comienza estableciendo cuatro postulados para la relación comparativa "más probable que". Estos postulados, los mostramos, en este caso, para que nos sirvan de referencia sobre como establecían su sentido de la probabilidad cualitativa estos autores:

1. Un suceso incierto puede ser igualmente probable, más probable o menos probable que otro.
2. Un suceso incierto siempre será más probable que un suceso imposible y menos probable que un suceso seguro.
3. Si un suceso E' es más probable que otro E y este último es más probable que otro suceso E'', entonces E' será más probable que E'' (propiedad transitiva).
4. Si E_1 es más probable que E_2 y E_1' es más probable que E_2' entonces:

   $$E_1 \vee E_1' \quad \text{es más probable que} \quad \mathrm{E}_2 \vee E_2'$$

   Es decir, que la relación "más probable que" se conserva con la suma lógica o disjunción $\vee$, con tal que los sucesos E_1 y E_1' sean incompatibles, y E_2 y E_2' sean también incompatibles.

En cuanto a la definición cuantitativa y directa del grado de probabilidad, De Finetti considera que es asignada por un individuo a un suceso de tal manera que exprese las condiciones por las que estaría dispuesto a apostar por la ocurrencia del suceso, siempre que no existan contradicciones intrínsecas entre las valoraciones, es decir, requiere la coherencia del individuo. Para ello desarrolla un conjunto de reglas a las que debe ajustarse la evaluación subjetiva de la probabilidad de varios sucesos por un mismo individuo. Una de estas reglas lo constituye el teorema de la probabilidad de la suma lógica de sucesos, que De Finetti enuncia así:

> "Sean $E_1,\dots,E_n$ una clase completa de sucesos incompatibles, de los cuales uno y sólo uno puede ocurrir. Y sean $p_1,\dots,p_n$ las probabilidades de esos sucesos valoradas por un individuo dado. Si $S_1,\dots,S_n$ son los premios, positivos o negativos, que corresponden a la ocurrencia de cada uno de los sucesos, las ganancias en los n casos posibles (hay tantos casos posibles como sucesos pueden ocurrir) serán las diferencias entre el premio de la apuesta ganada si ocurre el suceso correspondiente y la suma de los n desembolsos pagados".

Con estas condiciones De Finetti demuestra que:

> "La suma de las probabilidades de dichos sucesos debe ser igual a 1 y, de forma más general, que la probabilidad de la suma lógica de los n sucesos es igual a la suma de sus probabilidades".

Axiomática de Bernard Osgood Koopman (1940)

Koopman[5] utiliza el término probabilidad intuitiva en lugar de probabilidad subjetiva ya que la probabilidad se deduce directamente de la intuición y existe antes que la experiencia objetiva. Intenta la formulación axiomática de la probabilidad intuitiva tomando como punto de partida un número comprendido entre 0 y 1, correspondiente al grado de creencia racional. Para ello, se basa en las comparaciones de probabilidades intuitivas, que obedecen leyes fijas análogas a las leyes de la lógica intuitiva, basándose en el conocimiento que el hombre tiene de su propio proceso racional.

Koopman propone unos axiomas que constituyen las leyes de consistencia que gobiernan todas las comparaciones de la probabilidad. Estos axiomas son los postulados formales que satisface la relación "igual o menos probable que" representada por el signo $\prec$. Estos axiomas constituyen la base teórica para configurar la teoría de la probabilidad intuitiva.

Axiomática de L. J. Savage (1954)

Esta axiomática es considerada fundamental por la mayoría de los partidarios de la teoría subjetivista o personalista de la probabilidad. Dicha axiomática fue expuesta, como ya hemos comentado, por Savage en su obra *The foundations of Statistics,* publicada en 1954. Savage también afirma que "la teoría mostrada tiene implicaciones (…) con la teoría de la utilidad debida, en su forma moderna, a Von Neumann y Mor-

[5] KOOPMAN, B.O. "The axioms and algebra of intuitive probability" en Annals of Mathematics 1940, vol. 41, nº 2, págs. 269-292.

genstern"[6]. Esta implicación con la teoría de la utilidad la recoge Savage de la obra de esos autores ***Theory of Games and Economic Behavior***[7].

Para exponer su teoría, Savage parte de la idea del comportamiento de una persona racional en la toma de decisiones, referida al comportamiento de coherencia y consistencia. Empieza definiendo términos[8] de la toma de decisiones como: naturaleza, estado de la naturaleza, estado verdadero (descripción verdadera de la naturaleza), consecuencias, acciones y decisiones, que, como las define Savage, pueden referirse a dinero, salud, o algo en lo que la persona esté interesada.

Savage establece la relación "no es preferido a" entre acciones, que representa con $\leq$, que es orden débil entre las acciones. Savage establece los axiomas con preferencias entre las decisiones, y las decisiones son funciones del conjunto de los estados de la naturaleza en el conjunto de las consecuencias. Los axiomas se establecen de tal manera que cualquiera que los satisfaga maximizará su utilidad esperada. Esto significa que la forma en que se satisfacen los axiomas generará una distribución de probabilidad subjetiva acerca de sus creencias respecto al estado verdadero de la naturaleza, y una función de utilidad sobre el conjunto de consecuencias, tal que la expectativa de una decisión dada se define con respecto a la distribución de probabilidad subjetiva sobre los estados de la naturaleza. En resumen, Savage establece la relación "no es preferido a" entre acciones y a continuación la misma relación supuesto que ocurre un suceso determinado. Dicha relación se establece de la misma forma entre las consecuencias, supuesto que ocurre ese suceso. Con esta relación de preferencia entre las decisiones y las consecuencias induce la relación de orden débil "no más probable que" entre los sucesos y esta última es una probabilidad cualitativa sobre los sucesos.

Axiomática de F. J. Anscombe y R. J. Aumann (1963)

Estos autores consideran el concepto de probabilidad subjetiva de Ramsey y Savage y de acuerdo con él definen las probabilidades subjetivas y las utilidades en términos de las preferencias de una persona, siempre que satisfagan ciertos supuestos de consistencia. Las utilidades las definen, al igual que Savage, a partir de la teoría de Von Neumann y Morgenstern.

Anscombe y Aumann comienzan estableciendo un conjunto $\mathcal{A}$ de premios y una lotería sobre dicho conjunto. La lotería es un recurso para decidir qué premio de $\mathcal{A}$ se recibe si ocurre una observación de un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos. Dichos sucesos pueden tener probabilidades asociadas, no tener probabilidades asociadas o que sean desconocidas. El primer caso es comparado en esta

---

[6] SAVAGE, L.J. *The Foundations of Statistics.* Ed. Wiley, New York, 1954, p. 5.

[7] VON NEUMANN, J. y MORGENSTERN, O. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1947 (2ª edición).

[8] SAVAGE, L.J., op. cit., p. 9.

axiomática con los sucesos que pueden observarse haciendo girar una sola vez una ruleta. El segundo caso es comparado con las observaciones que se pueden obtener en una sola carrera de caballos. Distinguimos entonces, "lotería de ruleta" y "lotería de caballos". El objetivo de Anscombe y Aumann es definir las probabilidades subjetivas asociadas a los resultados posibles de esta carrera de caballos.

Además de estas loterías simples, consideran también loterías compuestas, es decir, loterías cuyos premios son loterías. Las utilidades de Von Neumann-Morgenstern para los premios básicos se construyen a partir de las comparaciones de preferencias entre loterías de ruleta compuestas. Las probabilidades subjetivas de los resultados de la carrera de caballos se construyen a partir de las comparaciones de preferencias entre loterías compuestas de caballos cuyos premios son loterías de ruleta y loterías de ruleta cuyos premios son las loterías de caballos compuestas que acabamos de referir. El recurso de la teoría de Anscombe y Aumann[9] para asignar probabilidades subjetivas a los resultados de la lotería de caballos consiste en aplicar la teoría de la utilidad dos veces, y relacionar los dos sistemas de preferencias y utilidades.

Sin entrar en detalles formales, que no son objeto de esta exposición histórica, pero para aclarar el hilo conductor de la exposición de estos autores, la teoría de Anscombe y Aumann se basa en la doble aplicación de la teoría de Von Neumann-Morgenstern, ya que deducían las probabilidades de los estados para S finito a partir de las funciones de utilidad sobre $\mathfrak{R}$, conjunto de las loterías de ruleta con premios en el conjunto de premios básicos $\mathcal{A}$, y $\mathfrak{R}^*$ el conjunto de todas las loterías de ruleta cuyos premios son loterías de caballos compuestas H, y los premios de estas loterías de caballos compuestas son loterías de ruleta con premios en $\mathcal{A}$. Por cada premio de la lotería de caballos se ofrece una lotería de ruleta con premios en $\mathcal{A}$, lo que permite relacionar los dos sistemas de utilidades sobre $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}^*$ y obtener las probabilidades subjetivas $p_1,\dots,p_s$ de los resultados de la carrera de caballos $h_1,\dots,h_s$.

Si comparamos la terminología utilizada en esta axiomática con la utilizada por Savage, las "loterías de caballos" se corresponderían con las "acciones de Savage"; los resultados de la "carrera de caballos" con los "estados de la naturaleza" y los "premios" con las "consecuencias" de Savage.

Axiomática de C. Villegas (1964)

Hasta 1964 con Villegas no se había usado la propiedad de "numerablemente aditiva" en la teoría de la probabilidad cualitativa. Sin embargo, este autor considera que esta propiedad es fundamental en la teoría de la medida y que tendría interés una propiedad equivalente en la teoría de la probabilidad cualitativa y, en particular, facilita la prueba de la existencia de medidas de probabilidad compatibles con la probabilidad cualitativa. La condición de numerablemente aditiva para la probabilidad requiere

[9] ANSCOMBE, F.J. y AUMANN, R.J. "A definition of subjective probability". Annals of Mathematical Statistics, 1963, vol. 34, pp. 199-205.

establecer la probabilidad cualitativa entre sucesos, que la define con la relación ≤ "no más probable que", sobre un σ-álgebra, y que esta probabilidad cualitativa sea monótona continua.

Villegas[10] proporciona una condición necesaria y suficiente para la existencia de una medida de probabilidad numérica p compatible con la probabilidad cualitativa para que p sea numerablemente aditiva.

Axiomática de Scott (1964)

Generalmente, las teorías desarrolladas por De Finetti, Koopman, Savage, etc, han tendido a producir resultados que garanticen una distribución de probabilidad única sobre los estados de la naturaleza o cualquier u otro conjunto de entes para los que se desee determinar sus grados de creencia a priori, considerando que las idealizaciones expresadas en los axiomas pueden observarse como teorías de pura racionalidad. Una de las versiones más simples de esos axiomas es probablemente la dada por Scott en 1964 para el esquema de probabilidad subjetiva cualitativa de De Finetti, en el que las decisiones y las consecuencias no están explícitamente consideradas. Scott formula los axiomas que le permitan definir una estructura finita de grado de creencia cualitativo[11].

Axiomática de Fishburn (1967)

Hasta ahora hemos usado dos aproximaciones fundamentales para definir la probabilidad subjetiva. Por una parte, la aproximación intuitiva, usada por De Finetti, Koopman, Scott, Villegas, etc., que formulan los axiomas aplicando la relación de probabilidad comparativa "no es más probable que" o "más probable que" a un conjunto de sucesos. Por otra parte, la aproximación que basa los axiomas sobre la relación de preferencia-indiferencia comparativa "no es preferido a"; esta última aproximación es usada por Ramsey, Savage, Anscombe y Aumann. Cada una de las axiomatizaciones realizadas con esta segunda aproximación permite la deducción de una medida de probabilidad y una función de utilidad que combinada con las probabilidades producen un modelo de utilidad esperada consistente con la relación "no es preferido a". Esta axiomatización tiene características propias y especiales, y una vez determinada la función de utilidad establecen las probabilidades de los estados.

La axiomatización debida a Fishburn conduce a una distribución de probabilidad única sobre un conjunto de n estados en el contexto de un modelo de utilidad esperada. Esta axiomatización usa la teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern aplicándola a n-uplas de distribuciones de probabilidad. Para ello Fishburn parte de

[10] VILLEGAS, C. "On cualitative probability σ-algebras". Annals of Mathematical Statistics, 1964, vol. 35, p. 1787.

[11] SCOTT, D. "Measurement structures and linear inequilities". Journal Mathematical Psychology, 1964, vol. 1, pp. 233-247.

un conjunto $S=\{S_1,....,S_n\}$ que es el conjunto de los *n* estados, y donde *X* es el conjunto de consecuencias. En este caso, el conjunto de consecuencias usado por Fishburn se corresponde con el conjunto de las loterías de ruleta $\Re$, con premios en el conjunto de premios básicos $\mathcal{A}$, de Anscombe y Aumann y el conjunto de las loterías de caballos *H* de la axiomática de Anscombe y Aumann es en esta axiomática el conjunto de n-uplas de distribuciones de probabilidad. La novedad en la teoría de Anscombe y Aumann radicaba en la doble aplicación de la teoría de la utilidad de Von Neumann-Morgenstern, como hemos referido anteriormente. Asimismo, la novedad en la teoría de Fishburn es la aplicación de la teoría de Von Neumann-Morgenstern a *n*-uplas de distribuciones de probabilidad[12].

Axiomática de Suppes (1974)

Suppes proporciona una de las axiomáticas más simples que conducen a un modelo sencillo sobre cómo simplificar las comparaciones y cómo obtener resultados si los axiomas se satisfacen. Suppes considera cinco clases de sucesos: sucesos que son ciertos (*C*); sucesos que son más probables que su contrario (*N*); sucesos que son menos probables que su contrario (*L*), sucesos que son tan probables como su contrario (*E*); y sucesos que son imposibles (*I*). De estas cinco clases de sucesos, dos se pueden tomar como básicas: la clase (*C*) y la clase (*N*); las otras tres se pueden definir a partir de las dos primeras. Con estas consideraciones, Suppes[13] establece los axiomas de lo que él llama "estructura de probabilidad cualitativa débil". Pero este no es lugar para exponer estos axiomas, ya que sólo pretendemos describir los elementos fundamentales que sirvan de hilo conductor en la evolución histórica de esta teoría. Los axiomas sirven para conocer el tipo de resultados que podemos conseguir mediante algunos supuestos estructurales aparentemente sencillos. Aunque puede ser que no seamos capaces de probar la existencia de una ordenación entre los sucesos en términos de más probable o menos probable. Estos axiomas no son los más generales posibles, pero proporcionan una sencilla y útil base cualitativa.

Desde el punto de vista formal Suppes[14] proporciona otra estructura de medida aproximada finita para los grados de creencia. En este caso las estructuras básicas a las que se aplican los axiomas son las cuádruplas (X, F, S, $\geq$), donde *X* es un conjunto no vacío, *F* es un álgebra de subconjuntos de *X*, es decir *F* es una familia de subconjuntos de *X* no vacía y cerrada respecto de la unión y la complementación; *S* es un álgebra de conjuntos similar, contenida en la primera, constituida por los sucesos que se usan para las medidas estándar, es decir, para las medidas de referencia, y a los

[12] FISHBURN, P.C. "Subjective expected utility with mixture sets and Boolean algebras". Annals Mathematical Stastistics, 1972, vol. 43, nº 3, pp. 917-927.

[13] SUPPES, P. "The role of subjective probability and utility in decisión-making". Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1955, vol. 5, University of California Press, pp. 61-73.

[14] SUPPES, P. "The Measurement of Belief". Journal of the Royal Statistical Society, 1974, serie B, vol. 36, nº 2, p. 168.

sucesos de *S* se les llama sucesos estándar. La relación ≥ es la relación de orden "no menos probable que" definida sobre *F*. Con estos elementos se define una estructura de medida aproximada finita, donde ≥ es un orden débil en *F*.

De los siete axiomas que formula Suppes, los cuatro primeros coinciden con los axiomas de De Finetti sin ningún cambio. La particularidad de esta axiomática radica en que plantea la existencia de unos sucesos arbitrarios (los elementos de *F*) con probabilidades no determinadas exactamente, y unos sucesos de referencia (los elementos de *S*) con la medida de probabilidad estándar. Entonces establece una medida de probabilidad aproximada para los sucesos arbitrarios en función de las probabilidades de los sucesos estándar.

Axiomática de French (1982)

French realiza dos observaciones que son adecuadas para muchas de las axiomatizaciones de la probabilidad subjetiva. La primera se refiere al uso del experimento auxiliar para cuantificar los sentimientos cualitativos de verosimilitud, distinto al campo de sucesos de interés real, manteniendo el autor esta distinción en la axiomatización que propone. En la segunda observación, French comenta que todas las teorías de la probabilidad subjetiva coinciden en que los grados de creencia cualitativos están condicionados por el estado del conocimiento de la situación presentada y por la actitud del individuo que está implicado en esta situación. Como el tiempo cambia la situación y el conocimiento que el individuo tiene de ella, los condicionantes cambian también, y el individuo actualizaría sus grados de creencia a la luz de la nueva situación.

French propone que el espacio de sucesos sea un subcampo cuyas probabilidades el sujeto acepta como dadas. Este subcampo ha sido denominado como "experimento auxiliar", "experimento canónico" o "experimento de referencia". French utiliza el primer término. Las axiomatizaciones que describen el experimento auxiliar al margen de los sucesos de interés real, utilizan una medida simbólica, de tal manera que el análisis de decisión real introduce recursos aleatorios artificiales para capacitar al decidor a sopesar las incertidumbres de su problema. Con estas ideas French[15] presenta una axiomatización de probabilidad subjetiva manteniendo el experimento auxiliar por separado del campo de sucesos de interés real. Comentamos los términos que emplea para establecer las condiciones del experimento debido a sus características especiales. Estos términos son:

- *S* es el conjunto de todos los resultados posibles, y cualquier subconjunto de S es un suceso de interés para él.
- *F* es un espacio de sucesos, conjunto de todos los subconjuntos de *S*, cerrado respecto de la aditividad finita y la complementación.

[15] FRENCH, S. "Updating of belief in the light of someone else's opinion". Journal of the Royal Statistical Society, 1980, vol. 143, parte 1, pp. 43-48.

- $\geq$ es la relación "al menos tan probable como" que expresa el sentimiento de verosimilitud del sujeto entre los sucesos del espacio F, que luego se extiende para incluir al experimento auxiliar. El término "suceso" se refiere a los sucesos de interés y el individuo puede imaginar un experimento auxiliar tal que el resultado debe pertenecer al intervalo [0, 1], puesto que es un experimento canónico y de esta forma tipificamos los resultados. Los axiomas suponen que la relación $\geq$ puede extenderse para comparaciones de sucesos generados por este experimento auxiliar, aunque no es necesario formar intersecciones de sucesos del experimento auxiliar con sucesos de F.

Con estos términos French formula un sistema de axiomas partiendo del campo de Borel B de todas las uniones e intersecciones finitas de intervalos abiertos y cerrados en [0, 1]. Entonces el individuo imagina un experimento auxiliar con sucesos de B tal que la relación $\geq$ se extiende a $B \cup F$, cumpliéndose entonces seis axiomas[16] que garantizan la existencia de una medida de probabilidad numerablemente aditiva.

Caracterización conjunta de la utilidad y la probabilidad subjetiva y otras aportaciones

Aunque ya hemos mencionado, el tratar la axiomática de Fishburn, la importancia de la relación conjunta preferencia-utilidad-probabilidad subjetiva, resaltaremos aquí de nuevo este tema para dar una imagen completa de él.

Consideramos la dirección más importante en la que la aproximación de Von Neumann-Morgenstern ha sido generalizada, es decir, la deducción de una función de probabilidad subjetiva numérica así como de una función de utilidad, a partir de los postulados cualitativos sobre preferencias entre elecciones.

En muchas ocasiones en las que un individuo debe decidir entre varias alternativas, no existe una medida de probabilidad cuantitativa disponible para evaluar la utilidad esperada. Por ello, vamos a proponer un sistema de postulados sobre decisiones que produzcan medidas de utilidad y probabilidad, extendiendo, por tanto, el campo de aplicación del principio de utilidad esperada.

Las condiciones estructurales de axiomatización conjunta que son suficientes para producir medidas de utilidad y probabilidad subjetiva sugieren dos formas de proceder: la primera consiste en intentar formular axiomas de tal forma que obtengamos primero una medida de utilidad que después será usada para obtener una medida de probabilidad subjetiva. La otra aproximación procede en orden inverso, esto es, formula los axiomas que permiten obtener en primer lugar una medida de probabilidad subjetiva la cual se usará después para medir la utilidad. En la aproximación de Ram-

[16] FRENCH, S. "On the axiomatization of subjective probabilities". Theory and Decision, 1982, vol. 14, nº 1, pp. 19-33.

sey se mide la utilidad en primer lugar[17]. La idea esencial de este autor era encontrar un suceso aleatorio con probabilidad ½, entonces usar este suceso para determinar las utilidades de los resultados, y finalmente aplicar la función de utilidad construida para medir las probabilidades subjetivas de los estados de la naturaleza.

Para adentrarnos en el análisis formal[18] de esta aproximación de Ramsey, nos situamos en los axiomas de De Finetti para la probabilidad cualitativa formulados mediante la relación "más probable que", para garantizar la existencia de una medida de probabilidad que refleje la estructura de orden de la relación. Para establecer formalmente los axiomas es conveniente suponer que la relación $\geq$ "más probable que" se establece entre sucesos que son subconjuntos de un espacio total X. Con el conjunto X y la relación $\geq$ definimos la estructura de probabilidad cualitativa. Algunos teoremas permiten reconocer las propiedades que tiene la estructura de probabilidad cualitativa. Con estas propiedades reflejadas en los teoremas[19], nos preguntamos si se garantiza la existencia de una medida de probabilidad numérica P tal que para dos sucesos cualesquiera A y B de X se verifica que:

$$P(A) \geq P(B) \Leftrightarrow A \geq B \tag{1}$$

Si X es un conjunto infinito, los axiomas no son suficientemente fuertes para garantizar la existencia de tal medida de probabilidad. Sin embargo, si se añaden supuestos estructurales especiales a los axiomas se puede garantizar la existencia de tal medida de probabilidad que satisfaga la condición (1). Una solución para el caso finito ha sido encontrada por Scott, del que ya hemos hablado, que formula una propuesta clara y sencilla. La idea central de su formulación era imponer una condición algebraica sobre las funciones características de los sucesos. Scott comienza estableciendo la relación $\geq$ sobre el conjunto de todos los subconjuntos de X, siendo X un conjunto finito y no vacío, entonces la estructura $(X, \geq)$ cumple una serie de axiomas y Scott establece que la condición necesaria y suficiente para que exista una medida de probabilidad p que satisfaga (1) es que se cumplan los axiomas.

Si X es infinito se han demostrado algunas condiciones estructurales fuertes que son condiciones suficientes pero no necesarias. Por ejemplo, De Finetti[20] y Koopman[21] usaron un axioma para que exista una partición de X, que junto a los axiomas de probabilidad cualitativa, es suficiente para probar la existencia de una medida de

[17] RAMSEY, F.P. "Truth and probability" en *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, Routledge and Kegan Paul, London, 1931, pp. 156-198.

[18] SUPPES, P. "The role of subjective probability and utility in decisión-making". Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1955, vol. 5, University of California Press, pp. 61-73.

[19] DAVIDSON, D. y SUPPES, P. "A finitistic axiomatization of subjective probability and utility". Econometrica 1956, vol. 24, nº 3, pp. 264-275.

[20] DE FINETTI, B. "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives". Annales de l'Institute Henri Poincaré, 1937, vol. 7, pp. 1-68.

[21] KOOPMAN, B.O. "The bases of probability". Bulletin of the American Mathematical Society, 1940, vol. 46, pp. 763-774.

probabilidad numérica. Scott mejoró los resultados anteriores para el caso infinito, y encontró propiedades que son necesarias y suficientes.

La intención de este apartado es considerar conjuntos de axiomas que caractericen a la utilidad y la probabilidad subjetiva de manera conjunta. Hemos hecho referencia, en el limitado espacio que tenemos, a las aproximaciones de Ramsey, De Finetti y Scott, pero el más conocido conjunto de axiomas para este estudio conjunto es la axiomática de Savage.

Savage parte de una relación de preferencia débil $\leq$ ("no es preferido a") sobre las decisiones o acciones, siendo las decisiones funciones del conjunto S de estados de la naturaleza en el conjunto F de las consecuencias. En términos de la relación $\leq$, es completamente sencillo definir una relación correspondiente de preferencia sobre las consecuencias, y una probabilidad comparativa sobre los estados de la naturaleza. Suponiendo estas dos relaciones adicionales, los siete postulados de Savage[22] sirven como base para establecer un teorema que garantiza la existencia conjunta de una función de probabilidad subjetiva sobre los estados y una función de utilidad sobre las consecuencias.

Volviendo a la línea general de este epígrafe, en que las medidas de utilidad y probabilidad subjetiva se establecen en un solo estudio, e incluso a veces en la misma sesión experimental, y las predicciones se hacen a partir de ambas medidas, podemos decir que en general la medida de utilidad precede a la medida de probabilidad subjetiva.

El primer intento de medir la probabilidad subjetiva experimentalmente fue realizado por Preston y Baratta[23]. Masanao Toda[24] propuso un método de juego bipersonal para medir la probabilidad subjetiva, que es muy similar al procedimiento de juego de Preston y Baratta.

Es importante también recordar la axiomática de Fishburn, la cual proporciona una distribución de probabilidad única sobre los estados de la naturaleza, en el contexto de un modelo de utilidad esperada, y este modelo es consistente con la relación $\leq$ (notación de Fishburn) "no es preferido a". Fishburn establece así el modelo: si S es el conjunto de estados de la naturaleza, X el conjunto de las consecuencias, F el conjunto de las acciones de S en X. Entonces, bajo los axiomas de Fishburn existe una función de valores reales u sobre X y una medida de probabilidad finitamente aditiva π sobre el conjunto de todos los subconjuntos de S.

---

22 SAVAGE, L.J. *The Foundations of Statistics*. Ed. Wiley, New York, 1954.

23 PRESTON, M.G. y BARATTA, P. "An experimental study of the auction-value of an uncertain outcome". American journal of psychology, 1948, vol. 61, pp. 183-193.

24 TODA, M. "Measurement of intuitive probability by a method of game". Japanese Journal of Psychology, 1951, vol. 22, pp. 29-40.

Fishburn en un estudio posterior[25] generaliza la aproximación anterior y en particular introduce un axioma de preferencia que implica que π es numerablemente aditiva.

Merece la pena también citar el estudio realizado a este respecto por Pedro E. Ferreira[26] donde sobre la base de un método axiomático caracterizado por un doble uso de la teoría de Von Neumann-Morgenstern y una condición de continuidad monótona sobre $\leq$, similar a la usada por Villegas[27], da una definición de probabilidad subjetiva semejante a la de Anscombe y Aumann. La continuidad monótona capacita para probar la σ-aditividad de la probabilidad π, cuestión resuelta por Villegas.

Por último señalar los **autores españoles más relevantes en el subjetivismo**, como Ángel Vegas Pérez, Ubaldo Nieto de Alba, y especialmente, para no extendernos más, las aportaciones de F. Javier Girón, entre las que destacamos: *Una caracterización conjunta de la probabilidad subjetiva y de la utilidad* (1985), *Caracterización axiomática de la regla de Bayes y la probabilidad subjetiva* (1977) que es su tesis doctoral presentada en 1973, *Probabilidad y utilidad: conceptos duales de la Teoría de la Decisión* (1979). Las aportaciones de Girón en el ámbito de la teoría subjetivista de la probabilidad son numerosas, y entre ellas no podemos pasar por alto la conferencia impartida sobre *El control de la incertidumbre. El cálculo de probabilidades y la teoría de la utilidad* en la que Girón manifiesta su implicación con el subjetivismo cuando afirma “De las diversas teorías normativas que se han desarrollado, sobre todo a lo largo de la segunda mitad del siglo XX, destaca la basada en la maximización de la esperanza de la utilidad, teoría personalista que combina la incertidumbre de los sucesos inciertos y las consecuencias de los actos mediante el cálculo de la esperanza matemática de la función de utilidad personal respecto de la medida de probabilidad subjetiva del decisor”. También interesa destacar la denominación que Girón hace del subjetivismo cuando afirma “La interpretación “subjetivista” es también denominada “personal”, “personalista” o “bayesiana” (según la concepción de Bayes)” donde explicita el importante papel que juega en esta teoría el término bayesiano.

---

[25] FISHBURN, P.C. “Subjective expected utility with mixture sets and Boolean algebras”. Annals Mathematical Stastitics, 1972, vol. 43, nº 3, pp. 917-927.

[26] FERREIRA, P. E. “On subjective probability and expected utilities”. Annals of Mathematical Statistics, 1972, vol. 43, pp. 928-933.

[27] VILLEGAS, C. “On cualitative probability σ-algebras”. Annals of Mathematical Statistics, 1964, vol. 35, p. 1787.

BIBLIOGRAFÍA

ANSCOMBE, F.J. "Bayesian Statistics". *American Statistician*, 1961, vol. 15, nº 1, pp. 21-24.

ANSCOMBE, F.J. y AUMANN, R.J. "A definition of subjective probability". *Annals of Mathematical Statistics*, 1963, vol. 34, pp. 199-205.

BOLKER, Ethan. "A simultaneous axiomatization of utility and subjective probability". *Philosophy of Science*, 1967, vol. 34, pp. 333-340.

DALKEY, N. "An experimental study of group opinion". *Futures*, 1969, vol. 1, nº 3, pp. 408-426.

DAVIDSON, D. y SUPPES, P. "A finitistic axiomatization of subjective probability and utility". *Econometrica*, 1956, vol. 24, pp. 264-275.

DIACONIS, P. y ZABEL, S.L. "Updating subjective probability". *Journal of the American Statistical Association*, 1982, vol. 77, nº 380, pp. 822-830.

DREZE, J.H. "Fondements logiques de la probabilité subjective et de l'utilité". *La Decision*, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1961, pp. 73-87.

FERREIRA, P.E. "On subjective probability and expected utilities". *The Annals of Mathematical Statistics*, 1972, vol. 43, nº 3, pp. 928-933.

FINETTI, Bruno de. "Sul significato soggetivo della probabilitá". *Fundamenta Mathematicae*, 1931, vol. 17, pp. 298-329.

FINETTI, Bruno de. "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives". *Annales de l'Institute Henry Poincaré*, 1937, vol. 7, pp. 1-68 (traducido en Kyburg and Smokler 1964, pp. 93-158).

FINETTI, B. de y SAVAGE, L.J. "Sul modo di scegliere le probabilitá iniziali". *Sui fondamenti della statistica*, Biblioteca del Metron, series C, 1962, vol. 1, pp. 81-154.

FISHBURN, P.C. "Preference.based definitions of subjective probability". *Annals of Mathematical Statistics*, 1967, vol. 38, pp. 1605-1617.

FISHBURN, P.C. "A general theory of subjective probabilities and expected utilities". *Annals of Mathematical Statistics*, 1969, vol. 40, pp. 1419-1429.

FRENCH, S. "On the axiomatization of subjective probabilities". *Theory and Decision*, 1982, vol. 14, nº 1, pp. 19-33.

GALANTER, E. "The direct measurement of utility and subjective probability". *American Journal of Psychology*, 1962, vol. 75, pp. 208-220.

GIRÓN, F.J. "Una caracterización conjunta de la probabilidad subjetiva y de la utilidad". *Trabajos de estadística e investigación operativa*. Inst. de Inv. Op. y Est., CSIC, 1975, vol. 26, pp. 229-247.

GIRÓN, F.J. "Caracterización axiomática de la regla de Bayes y la probabilidad subjetiva". *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 1977, vol. 71, pp. 19-101.

KOOPMAN, B. O. "The axioms and algebra of intuitive probability". *Annals of Mathematics*, 1940 (b), vol. 41, nº 2, pp. 269-292.

KYBURG, H.E. y SMOKLER, H.E. *Studies in subjective probability*. Krieger, New York, 1980 (1ª ed. Wiley, New York, 1964).

LUCE, R.D. y SUPPES, P. "Preference, utility and subjective probability". En *Handbook of Mathematical Psychology* (3 vols.), vol. 3, Wiley, New York, 1965, pp. 249-410.

NEUMANN, John von y MORGENSTERN, Oskar. *Theory of games and economic behaviour*. Princeton University Press, Princeton, 1947.

PRESTON, M.G. y BARATTA, P. "An experimental study of the auction-value of an uncertain outcome". *American Journal of Psychology*, 1948, vol. 61, pp. 183-193.

RAMSEY, F.P. "Truth and probability". En *The foundations of Mathematics and other logical essays.* Kegan Paul, London y Harcourt, Brace and Co. New York, 1931, pp. 156-198.

SAVAGE, Leonard J. *The foundations of statistics*. Wiley, New York, 1964.

SAVAGE, Leonard J. "Difficulties in the theory of personal probability". *Philosophy of Science*, 1967, vol. 34, pp. 305-310.

SAVAGE, Leonard J. "Elicitation of personal probabilities and expectations". *Journal of the American Statistical Association*, 1971, vol. 66, pp. 783-801.

SCOTT, D. "Measurement structures and linear inequalities". *Journal Mathematical Psychology*, 1964, vol. 1, pp. 233-247.

SUPPES, P. "The role of subjective probability and utility in decision making". *Proceedings of the third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (1954-1955).* University of California Press, 1956, vol. 5, pp. 61-73.

SUPPES, P. "The measurement of belief". *Journal of the Royal Statistical Society*, serie B, 1974, vol. 36, nº 2, pp. 160-191.

TODA, Masanao. "Measurement of intuitive probability by a method of game". *Japanese Journal of Psychology*, 1961, vol. 22, pp. 29-40.

VEGAS PÉREZ, A. "Estimación bayesiana de la probabilidad de muerte". *Trabajos de Estadística*, vol. XIX, cuaderno I y II, pp. 7-26. Iberica, Madrid, 1968.

VILLEGAS, C. "On qualitative probability σ-algebras". *Annals of Mathematical Statistics*, 1964, vol. 35, pp. 1787-1796.

WINKLER, R.L. "The assessment of prior distributions in Bayesian analysis". *Journal of the American Statistical Association*, 1967a, vol. 62, pp. 776-800.

WINKLER, R.L. "The quantification of judgment: some methodological suggestion". *Journal of the American Statistical Association*, 1967b, vol. 62, nº 320, pp. 1105-1120.

WINKLER, R.L. "The consensus of subjective probability distributions". *Management Science*, serie B, 1968, vol. 15, nº 2, pp. 61-75.

CAPÍTULO 11

La estadística española de posguerra (1939-1958)

JOSÉ M. ARRIBAS
ALEJANDRO ALMAZÁN
Universidad Nacional de Educación a Distancia

Introducción

¿Por qué la estadística española de posguerra? Alguien podría pensar que por interés hacia el régimen político que se construye en España tras la Guerra Civil, pero nada más lejos de la realidad, nuestro interés radica en la corriente estadística que se inicia en los años veinte, en medio de la transformación de las matemáticas que se produce durante el período 1920-1930, y que se prolonga hasta más allá de los años cincuenta. Es cierto que en algunos ámbitos se ha generalizado la idea de que en España no existió una Estadística matemática rigurosa hasta fechas recientes, por ejemplo, hasta la creación de la Escuela de Estadística de Madrid en el año 1952, o con posterioridad al regreso de EE.UU. de los profesores que viajaron a los Estados Unidos con becas Fulbraight durante los años sesenta, pero la realidad es bien distinta. Mucho antes de esas fechas se configura una importante escuela estadística que, si bien languidece en algunos ámbitos de las ciencias sociales, en lo esencial va a continuar en el seno de la administración del Estado y en algunos sectores industriales avanzados. Sirvan estas apresuradas notas para estimular el interés por la estadística española, en nuestra opinión tan paradójica y compleja como en el resto de los países europeos, y bastante menos atrasada de lo que algunos creían[1].

La estadística anterior a la Guerra

El despertar de la estadística española, así como un cierto nivel de relaciones internacionales se puso ya de manifiesto con la llegada de la II República, en el coloquio que celebró en Madrid el Instituto Internacional de Estadística[2]. Los antecedentes hay que buscarlos en la renovación general de las matemáticas impulsada por Rey Pastor y en la creación de la Sociedad Matemática Española[3], en cuya primera publicación aparecieron artículos del propio Rey Pastor y de Esteban Terradas, pionero este último de la estadística matemática española. En 1919, a su regreso de Argentina, Rey Pastor lanzó un nuevo proyecto científico internacional con la *Revista de Matemática Hispano-Americana* donde publicará una generación de matemáticos más joven compuesta por estadísticos como Fernández Baños, Santaló, Orts Aracil o extranjeros como Hadamar, Hilbert, Klein, Levi-Civita, etc. Durante la II República, apareció una segunda publicación, *Matemática Elemental,* destinada a los círculos matemáticos de estudiantes de Argentina y España que va a prolongar este impulso.

Existe consenso en considerar a Esteban Terradas el pionero de los cursos sobre Teoría de muestras, pues ya en 1931 imparte un curso en la Facultad de Derecho de la Universidad Central de Madrid, y en 1932, otro de Estadística Matemática en la de Ciencias[4]. Terradas, catalán cosmopolita y de formación: físico e ingeniero, fue el

[1] Sixto Ríos ha sido uno de los principales responsables de esa idea del "atraso español" que, a nuestro entender, es exagerada y está poco documentada. Todavía en 1991 escribía en la revista *Estadística Española* (nº 128) "Aún en 1944 la Estadística Matemática permanecía en España con un nivel similar al que tenía la Matemática pura en los años anteriores a Rey Pastor, es decir con un retraso de más de 50 años..." (p. 373). Según Ríos, la estadística matemática española estaba al nivel de finales del siglo XIX en Inglaterra, pero en Europa habrá que esperar hasta los años veinte para que la Estadística adquiera un corpus matemático sólido. A.L. Bowley, en el informe a la Asociación británica para el Avance de la Ciencia, describe en 1906 un panorama bastante poco edificante, y sin embargo, Inglaterra será la cuna de la Estadística matemática. BOWLEY, A.L. (1906) *Presidential Address to the Economic Section of the British Association for the Advanced Sciences*, Journal of the Royal Statistical Society, 1906. Cansado, por otra parte, dice en el discurso inaugural de la 44 Sesión del ISI, celebrado en Madrid, en 1984, que la creación en 1931 de la Cátedra de Estadística matemática de la Universidad de Madrid tuvo un gran significado "*si se considera que Harald Cramer fue, solo a partir de 1933, el primer profesor de la cátedra de Matemática Actuarial y Estadística Matemática de la Universidad de Estocolmo; y que por aquellos años se iniciaba en Inglaterra el desarrollo de la Estadística, a cargo de R.A. Fisher y Jerzy Neyman, precedidos por Karl Pearson y G.U. Yule*". Estadística Española (1984), número extraordinario, p. 18.

[2] La reunión estaba prevista desde 1929 y se celebró en Septiembre de 1931. Véase ARRIBAS, J.M., 2004.

[3] Creada en 1911. Sobre la situación de las matemáticas véase HORMIGÓN, M. *Las matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX,* en SÁNCHEZ RON, J.M., Ciencia y Sociedad en España, Ediciones El Arquero, CSIC, 1998.

[4] En 1937 imparte igualmente el primer curso de Estadística Matemática y Probabilidades en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

principal introductor de la física nuclear en España. Hombre de biografía extraordinaria[5], codirector con Rey Pastor del Laboratorio Matemático de la Junta para la Ampliación de Estudios, profesor de la Escuela Superior Aerotécnica, director general de la Compañía Telefónica, director de los trabajos de soterramiento del ferrocarril de Barcelona, profesor de la Facultad de Ciencias, miembro de la Asamblea Nacional,… sólo son algunas de las actividades desarrolladas por esta personalidad sorprendente cuyo alcance ha sido ampliamente recogido por los historiadores de la matemática[6].

La economía fue el otro dominio en el que va a desarrollarse la estadística matemática, y especialmente en los estudios sobre las fluctuaciones del cambio de la peseta realizados por la Comisión del patrón-oro. Mientras Terradas aparece ligado a la física matemática, el discípulo de Rey Pastor, Olegario Fernández Baños fue la figura más emblemática, aunque no la única[7], de este nuevo campo. Después de estudiar con Rey Pastor en el laboratorio matemática y de una serie de estancias en el extranjero (Instituto politécnica de Zurich y Bolonia junto al profesor Enríquez) comienza a publicar sobre temas económicos a partir de 1924-1925, y en 1927 se aproxima a la literatura anglosajona[8]. En 1930 se incorpora como subdirector al recién creado Servicio de Estudios del Banco de España[9], y en 1934, obtiene la cátedra de Estadística Matemática en la facultad de Ciencias, inicialmente destinada a Esteban Terradas.

Guerra Civil e inmediata posguerra

La guerra civil española constituyó el primer episodio de la II Guerra Mundial, las mismas fuerzas sociales y políticas que entraron en conflicto en España van a enfrentarse en Europa y en el resto del mundo. El régimen de Franco pasará así de la germanofilia inicial, a la postura de «no intervención» exigida por los aliados y que los acontecimientos bélicos aconsejaban[10]. Finalizada la guerra sin la temida invasión

---

[5] En 1984 el Institut d'Estudis Catalans le dedicó unas jornadas monográficas tituladas *Cinquanta anys de ciència i tècnica a Catalunya. Entorn l'activitat cintífica d'Esteve Terradas (1883-1950)*, Barcelona, 1987. Es interesante la intervención de su alumno Leonardo Villena: *Los últimos años de Esteban Terradas.*

[6] "Primera figura importante de la estadística matemática española, uno de los más importantes científicos españoles de la primera mitad del siglo, etc.". HORMIGÓN, M. *Op. cit*., p. 274.

[7] Con Antonio de Miguel y José Antonio Vandellós, podemos hablar de la triada que conforma el nacimiento de la econometría española. Cansado se refiere a ellos en el discurso inaugural de la 44 Sesión del Instituto Internacional de Estadística celebrada en Madrid en 1984. Estadística Española (1984) número extraordinario. Para conocer la biografía de Fernández Baños, véase MARTÍNEZ LOPEZ, Victoria, (1995) *Olegario Fernández Baños (apuntes para una biografía)*. Gráficas Ochoa, Logroño.

[8] ALMENAR, S. (2002): *Olegario Fernández Baños: de la geometría a la* econometría. En FUENTES QUINTANA, E. *Economía y economistas españoles,* Vol. 6, Fundación de las Cajas de Ahorros, Círculo de Lectores, p. 603.

[9] Véase MARTIN ACEÑA, P.(2003) *Le service des Estudes de la Banque d'Espagne*. Journés d'études, 5-6 juin 2003. Banque de France, Galerie Dorée, Paris.

[10] Según Florentino Portero y Javier Tusell, Franco no entró en la guerra porque Hitler no accedió a sus peticiones. PORTERO, F. , 1989. *Franco aislado. La cuestión española (1945-1950)* Aguilar.

aliada, la Asamblea General de Naciones Unidas declaró en 1946 que Franco había contado con el apoyo de las fuerzas del Eje, por lo que España quedó aislada y en medio de una marea de presiones internacionales dirigidas a provocar la caída del régimen, o al menos, su sustitución por una monarquía regida por Don Juan. Una situación de crisis que se hizo especialmente evidente cuando Estados Unidos, la Unión Soviética y el Reino Unido preparaban un nuevo orden en el que se reserva a la Organización de Naciones Unidas la capacidad de intervenir en la resolución de conflictos internacionales. La Asamblea General, el 12 de diciembre de 1946 aprobaba la siguiente resolución:

> "*En San Francisco, Postdam y Londres, los pueblos de las Naciones Unidas condenaron el régimen de Franco y decidieron que, mientras continuara el régimen, España no había de ser admitida en el seno de las Naciones Unidas* (...)
>
> *a) En origen, naturaleza, estructura y conducta general, el régimen de Franco es un régimen de carácter fascista, establecido en gran parte gracias a la ayuda recibida de la Alemania nazi de Hitler y de la Italia fascista de Mussolini.*
>
> *b) Durante la prolongada lucha de las Naciones Unidas contra Hitler y Mussolini, Franco, a pesar de las continuas protestas de los aliados, prestó una ayuda considerable a las potencias enemigas* (...)
>
> *La Asamblea general,*
>
> ***Convencida** de que el gobierno fascista de Franco en España fue impuesto al pueblo español por la fuerza, con la ayuda de las potencias del Eje, a las que prestó ayuda material durante la guerra, no representa al pueblo español, y porque su continuo dominio de España está haciendo imposible la participación en asuntos internacionales del pueblo español con los pueblos de las Naciones Unidas;*
>
> ***Recomienda** que se excluya al Gobierno español de Franco como miembro de los organismo internacionales establecidos por las Naciones Unidas o que tengan nexos con ellas, y de la participación en conferencias u otras actividades que puedan ser emprendidas por Naciones Unidas o por estos organismos hasta que se instaure en España un gobierno nuevo y aceptable.* (...)
>
> ***Recomienda** que todos los miembros de las Naciones Unidas retiren inmediatamente a sus embajadores y ministros plenipotenciarios acreditados en Madrid*" (Portero, 214).

Una situación que no hacía fácil el mantenimiento de los contactos internacionales de la estadística española.

Aunque las vicisitudes de la guerra no fueron fáciles para nadie, la mayor parte de los estadísticos salvó la vida y un buen número de ellos pasó esos años en el extranjero[11], caso de Rey Pastor y Esteban Terradas, quienes permanecieron en Argentina, de

[11] De la lista que facilita Enrique Cansado extraemos aquellos que llegaron a América en 1937 y que suponemos, por causas relacionadas con la Guerra Civil: Francisco de Abrisqueta (Bogotá, Washington), José Antonio Vandellós (Caracas), Luis A. Santaló (Buenos Aires), Juan Moroder (Santiago de

José Antonio Vandellós que se traslada a Venezuela en los primeros momentos de la guerra, o de José Antonio de Artigas quien permanece en Francia[12]. En cualquier caso, los contactos internacionales no se perdieron, y ya en 1942, en plena guerra mundial y con Francia ocupada por el nazismo alemán, Maurice Fréchet se desplaza desde Paris para dar una serie de conferencias en la universidad de Madrid[13], y Esteban Terradas viaja entre octubre de 1944 y julio de 1945 a lo largo y ancho de los Estados Unidos para recabar apoyos de empresarios, científicos y autoridades norteamericanas[14]. No obstante, no nos detendremos en estas interesantes visitas, sino en otras dos de mayor transcendencia institucional y política como son la de Corrado Gini a España en 1946, y la de Enrique Cansado a la Oficina del Censo de Estados Unidos en 1949.

Corrado Gini ya había visitado España en 1921 como director de la Encuesta de Naciones Unidas sobre materias primas, para recoger información del Instituto Geográfico y Estadístico. En 1931, ya como Presidente del Instituto de Estadística Italiano, participó en el coloquio organizado por el Instituto Internacional de Estadística en Madrid y fue invitado por José Vandellós[15] a visitar Barcelona; en 1940, a su regreso de Portugal, volvió a pasar de nuevo por Madrid y Barcelona. Su interés por la Sociología así como sus trabajos demográficos debieron de ponerle en contacto con Severi-

Chile), Restituto Ferrer (Maracaibo), José Calzada (Lima), Agustín Cano (Santiago de Chile), CANSADO, 1993, p. 55. Quizás el caso más complejo sea Olegario Fernández Baños quien reside en zona republicana una parte de la guerra, y más tarde pasa a la zona sublevada donde comienza a trabajar en la organización los servicios estadísticos del nuevo régimen en Santander. En relación a la II Guerra mundial, Corrado Gini cuenta en una carta a Ronald Fisher (4 de julio de 1945) que en Italia no hay que lamentar pérdidas humanas entre los estadísticos. Fisher, por el contrario, le pone al corriente de la muerte de su hijo mayor en las fuerzas aereas británicas (3 de agosto de 1945).

[12] Otro aspecto que merecería ser estudiado son las conexiones de Artigas con Darmois y la estadística francesa. En 1939, F. Rosenfeld da cuenta en el Journal de la Societé de Statistique de Paris de sus trabajos con Artigas sobre las aplicaciones de la estadística a la ingeniería, así como de las conferencias que éste ha dado en el Instituto Henri Poincaré. *L'application industrielle du controle statistique. Les diagrammes de controle*, vol. 81, pp. 283-304.

[13] La visita se produjo al regreso de un viaje a Lisboa y la invitación procedía de Tomas Rodríguez Bachiller con quien mantenía antiguas relaciones de amistad. Las conferencias se desarrollarán en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid y en el Instituto Jorge Juan del Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Véase al respecto BARBUT, M. *Un épisode insolite des relations scientifiques franco-iberiques* en el capítulo 15 de la presente obra.

[14] En este viaje el centro de atención de Terradas no es la Estadística sino la Aeronáutica, además de algunos contactos empresariales destinados a comprar maquinaria para una central eléctrica que iba a instalarse en Ponferrada. Terradas intenta enviar becarios españoles a los centros de investigación sobre aeronáutica pero no lo consigue, con lo que cambiará esta estrategia por la de invitar profesores extranjeros a España. GLICK T.F. "*La missio d'Esteve Terradas als Estats Units 1944-45*" en Cinquanta anys de ciencia I técnica a Catalunya, Barcelona, 1987, pp. 35-42.

[15] José Antonio Vandellós (Figueres 1899-Ithaca, Nueva York 1950) es otra figura clave de la estadística económica española. Profesor de estadística de la Escuela Superior de Comercio y director del Instituto de coyuntura económica, creó en 1916 el Laboratorio de Estadística Económica y Financiera en la Facultad de Derecho de la Universidad de Barcelona. El Instituto de Investigaciones Económicas creado por Vandellós antes de la guerra estaba concebido como un servicio de estudios o un observatorio similar al Institut für Konjunkturforschung alemán o el americano de Harvard.

no Aznar con el que mantendría una excelente relación de amistad[16], así que finalizada la Guerra Mundial, el sociólogo le invita a trasladarse a España para recuperar su salud y la de su familia, aunque Gini no se desplazará hasta el verano de 1946. Otros contactos personales procedían de las estancias realizadas en Italia por Fernández Baños y José Antonio Vandellós, que se materializan en la traducción de su *Curso de Estadística*[17], realizada por Vandellós para la editorial Labor en 1935.

La acogida académica se produjo en el seno del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, institución que describe como «una ciudad de imponentes laboratorios», y según cuenta[18], fue una estancia «breve» que compartirá con otros investigadores extranjeros (al parecer, americanos, argentinos, alemanes, yugoslavos, portugueses, mejicanos, daneses, suizos y del Vaticano). Corrado Gini dió entonces, una serie de conferencias que ponían de manifiesto «la oportunidad de un curso de metodología estadística sobre los métodos y resultados de la escuela italiana», que serviría para preparar la segunda edición de su manual (de hecho traducido por Vandellós y editado en España en 1935) aunque éste no verá la luz hasta 1953 en traducción y adaptación de Jorge Stecher Navarra. Hay que decir no obstante, que el texto de Gini no era un texto moderno en la línea de los manuales anglosajones de estadística matemática que incorporaba la teoría muestral como núcleo central de la disciplina[19]. La prevención de Gini respecto a los temas de muestreo ya había sido expuesta en los debates del Coloquio de Roma del Instituto Internacional de Estadística de 1925, y en su artículo de 1939 *I pericoli della Statistica,* en el que atacaba las posiciones de Fisher y los métodos propuestos por Neyman, tal vez porque Gini apostaba por el Estado fuerte y la economía corporativa, circunstancias que hacían posible la elaboración de Estadísticas censales precisas, así como innecesarias las estadísticas obtenidas por el método de muestreo propuesto por los Gobiernos liberales[20].

---

[16] Corrado Gini participa en la creación de la Revista Internacional de Sociología junto a Severino Aznar. Formará parte de su consejo de redacción y publica con relativa frecuencia sobre demografía.

[17] Resulta curioso que dicho texto aún no hubiese sido editado en Italia. Respecto a la continuación de los contactos Italia-España, el doctor Francisco Torras Huguet de Madrid y al doctor Antonio Prevosti de Barcelona eran esperados en 1947 para perfeccionar sus conocimientos en el Instituto Italiano de Estadística.

[18] Conferencia pronunciada el 21 de mayo de 1947 en Roma con motivo de la Exposición del Libro Español: GINI C., *Relaciones culturales entre Italia y España, particularmente respecto a la estadística y a la Sociología,* Revista Internacional de Sociología, nº 29, enero-marzo de 1950.

[19] Consta de cinco parte más un apéndice matemático: PREMISAS GENERALES (concepto de estadística y nociones de historia), PRIMERA PARTE (Recopilación y recuento de datos), SEGUNDA PARTE (Representaciones gráficas) TERCERA PARTE (Medición de fenómenos colectivos, distribución y relaciones estadísticas), CUARTA PARTE (Imperfecciones cuantitativas y cualitativas de los datos, interpolación de series estadísticas), QUINTA PARTE (Comparación de datos, formas de inducción, leyes estadísticas), APÉNDICE (nociones elementales de matemáticas).

[20] Terminada la guerra, la reconstrucción de las estadísticas italianas, aunque dirigida por el ISTAT, se basó en la introducción de encuestas por muestreo en asuntos económicos, industriales y laborales, siguiendo muy de cerca las instrucciones de los organismos internacionales, así como el modelo estadístico americano. Véase al respecto FAVERO, G. *Corrrado Gini and Italian Statistics under Fascism*. XIII Congress of International Economic History Association, Buenos Aires, July 23, 2002. Respecto

Entre las visitas de estadísticos extranjeros durante los años cuarenta, Enrique Cansado[21] considera «hitos de la Estadística Matemática española» la del británico John Wishart, quien imparte en 1947 un curso sobre *Análisis de varianza* en el Instituto de Investigaciones Agrarias, la del estadístico sueco Herman Wold, quien da un curso en 1949 sobre *Procesos Estocásticos y Econometría* en el CSIC*,* y la de Harald Cramer, que sirve para organizar una serie de conferencias sobre *Estadística matemática* en 1950, también en el Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

La introducción del muestreo durante los años cincuenta

Los esfuerzos del régimen de Franco por granjearse la amistad de los Estados Unidos no tendrán resultados hasta los años cincuenta coincidiendo con la Guerra de Corea. Aunque los norteamericanos ya se habían planteado la situación española en la inmediata posguerra, cuando aprobaron ayudas económicas para Grecia y Turquía, no es hasta 1947 cuando aparecen los primeros documentos del Departamento de Estado recomendando la concesión a España de ayudas «para elevar el nivel de vida —el mejor antídoto contra el comunismo—, y renovar el arsenal de guerra»[22]. Por razones políticas estas propuestas fueron inicialmente rechazadas, aunque enseguida los jefes del Estado Mayor norteamericano hicieron patente su deseo de contar con bases militares en España, circunstancia que pudo facilitar el hecho más trascendental de la estadística española de posguerra: la visita oficial del Jefe de Metodología del Servicio de Estudios del INE, Enrique Cansado a los Estados Unidos en 1949[23], cuatro años antes de la firma de los tratados de amistad España-USA.

En la primavera de 1949 Enrique Cansado[24], profesor adjunto de la Universidad Central, y a la sazón Jefe de la sección de metodología del Servicio de Estudios, realiza un viaje a los Estados Unidos, según dice en el prologo a las Conferencias sobre

a sus planteamientos políticos es interesante GINI, C. *The scientific basis of fascism,* Political Science Quarterly, 42, 1927.

[21] Conferencia inaugural del Primer Congreso Iberoamericano de Estadística organizado en Cáceres en septiembre de 1993, CANSADO, E., pp. 19-20.

[22] PORTERO, F. *Op. Cit,* pp. 264.

[23] En relación a la "teoría del atraso," es interesante destacar que esta visita se produce sólo dos años después de la visita que Levy-Brul hace a la Oficina del Censo Americano por encargo del INSEE. Véase ARMATTE, M. *La introducción en Francia de los Métodos de sondeo aleatorio*, EMPIRIA nº 8, 2004.

[24] La única biografía de Enrique Cansado que hemos localizado está colgada en la red por el Instituto Vasco de Estadística (www.eustad.es) con motivo de las Jornadas internacionales organizadas en 1983. En ellas participó Cansado con una ponencia sobre *Muestreo y Aplicaciones.* La reseña biográfica le presenta del siguiente modo: *Doctor en Ciencias matemáticas, Profesor adjunto de la Universidad Central de Madrid hasta 1950, y Jefe de la sección de Metodología del INE. Profesor en UCLA y la Universidad de Santiago de Chile, ha sido director del Centro Interamericano para la enseñanza de la Estadística entre 1962 y 1982, así como presidente del Instituto Internacional de Estadística entre 1982 y 1983.*

muestras, «por encargo»[25] del Instituto Nacional de Estadística, y con objeto de conocer el *Bureau of the Census*. Allí entra en contacto con los profesores CL Dedrick y WE Deming[26] del *Bureau of the Budget,* quienes le proporcionan todas las «facilidades» que hacen posible las conferencias de 1949 y el texto sobre muestreo estadístico de 1950[27].

A su regreso, el INE organiza una serie de conferencias que servirán de base para los trabajos de explotación del Censo de 1950. El curso se tituló: ***Curso Inicial sobre Muestras y sus Fundamentos,*** y se desarrolló entre el 24 de octubre y el 17 de diciembre de 1949. En él intervinieron los profesores Sixto Ríos, discípulo de Rey Pastor y a la sazón, catedrático de Estadística matemática de la Universidad de Madrid, Angel Anós[28], Ingeniero del Instituto de Investigaciones Agronómicas, Francisco Azorín, miembro de la sección de Metodología del INE y profesor ayudante en la universidad, y el propio Cansado, Jefe de la sección de Metodología del Servicio de Estudios y profesor adjunto. El curso tuvo dos partes una de preparación general a la matemática y la estadística y otra específica dedicada a los procedimientos de muestreo. Esta segunda parte fue la asignada a Cansado y constó de los siguientes apartados: 1) Clases de muestras, errores de muestreo y sesgos. 2) Aplicaciones del muestreo. 3) Muestreo irrestrictamente aleatorio. 4) Fiabilidad y seguridad. 5) Muestreo estratificado. 6) Afijación. 7) Muestreo de poblaciones finitas. 8) Muestreo por conglomerados y muestreo sistemático. 9) Muestreo polietápico y muestreo polifásico. La bibliografía incorporaba cerca de 90 referencias dedicadas a muestreo, entre los que destacaban los trabajos de W Edwars Deming y los de Morris H Hansen. Aparecía también un texto de Kendall 1943: *The advanced Theory of Statistics,* pero no el manual de Yule.

El Censo de población de 1950 será el banco de pruebas del Instituto Nacional de Estadística en los asuntos relativos al muestreo. El INE, creado en 1945 para organizar y centralizar toda la producción estadística española[29], después de la visita de

---

[25] Para el viaje obtiene una beca de la Fundación Del Amo (*Del Amo Foundation*) destinada a estudiar e investigar en instituciones científicas de los Estados Unidos durante seis meses que le será prorrogada por otros seis. En 1948 había conocido a Harald Cramer, profesor de estadística matemática en la universidad de Estocolmo, en una visita que éste realiza a Madrid.

[26] Nacido en 1900, se doctora en matemáticas en 1928. Publica numerosos trabajos sobre muestreo, explotación muestral de censos, criterios de calidad de las encuestas etc. , y en 1950 aparece su libro *Some Theory of Sampling,* texto que traduce el Instituto Interamericano de Estadística en 1952. En 1953 viaja a Japón como consultor para el Censo de Población japonés donde comenzará un brillante carrera como experto en asuntos de calidad dictando cursos para ingenieros y altos directivos de empresas. Muere en 1993.

[27] CANSADO, E. *Conferencias sobre muestreo estadístico*, Presidencia del Gobierno, Instituto Nacional de Estadística, Madrid, 1950.

[28] En 1944 publica un excelente artículo sobre los Test de Hipótesis, resumiendo las ideas de Neymann y Egon Pearson: ANÓS, A. *Estado actual de la teoría de la comprobación de hipótesis estadísticas*, Instituto Nacional de Investigaciones Agronómicas, Sección de Estudios Económicos, estadísticos y de matemática aplicada, Cuaderno nº 40.

[29] Según cuenta Manuel García Alvarez en la única Historia oficial existente, Ros Jimeno fue el principal promotor de la Ley Estadística de 31 de diciembre 1945 que dará lugar al Instituto Nacional de Esta-

Cansado decide realizar una explotación del 10% de las fichas censales que dan lugar una publicación sobre el censo de edificios y viviendas, primero de esa naturaleza que se realizaba en España. La base total resultó ser de 15.000.000 de unidades entre edificios, viviendas y locales. La tabulación y tratamiento de esa masa de información «habida cuenta del equipo de máquinas estadísticas disponibles a la sazón en el Instituto» requería de tanto tiempo que se fijó la fracción de muestreo de 1/10, es decir del 10% del total. Para la selección de las unidades confeccionaron tablas de números aleatorios. La tabulación se organizó en dos fases: 1º selección y copia de las unidades muestreadas a cargo de las Delegaciones, 2º clasificación y análisis de los resultados en los servicios centrales. El periodo de trabajo fue del 25 de noviembre al 15 de diciembre de 1951 y se utilizó el municipio de Burgos como experiencia piloto.

La Facultad de Ciencias Políticas, Económicas y Comerciales será otro excelente medio para el desarrollo de la estadística matemática. La creación de una Facultad de estas características había sido una reivindicación expresa de jóvenes estadísticos como Fernández Baños, Vandellós o De Miguel, mucho antes de la Guerra Civil, pero su creación no se producirá hasta el año 1943. Allí impartirá clases el profesor Fernández Baños y algunos profesores comenzarán a realizar estudios por muestreo, por ejemplo, la encuesta sociológica sobre la población estudiantil se Madrid del catedrático Manuel Fraga y del profesor Joaquín Tena Artigas, delegado del INE en el Ministerio de Educación que se realiza durante el curso 1947-48[30]. El trabajo se publicó como una «sobrevisión por muestreo de la Universidad de Madrid» para el curso 1950-51 y utilizaba una muestra aleatoria estratificada. En 1954, Tena Artigas y Azorín Poch publicarán otro estudio sobre todas las universidades españolas[31]. En general, estos años van a estar marcados por un gran dinamismo reflejado en otras iniciativas universitarias como la creación de la revista del CSIC: *Trabajos de Estadística* en 1950, o la creación de la Sociedad Española de Estadística en 1953. En 1955, el sociólogo Salustiano del Campo, a su regreso de una estancia en la Universidad de Chicago introducirá la sociología empírica americana en la Facultad, realizando una encuesta con los alumnos.

Tres años más tarde, el mismo año en que el INE realiza la primera Encuesta de Cuentas familiares mediante muestreo aleatorio a 4200 familias, aparece el primer volumen de la *Contabilidad Nacional de España* realizado por la Facultad de Ciencias Políticas, Económicas y Comerciales de Madrid en colaboración con el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, bajo la dirección de Valentín Andrés Álva-

dística. Concebido como «centro dedicado a la observación y estudio de los fenómenos colectivos de la vida española y, (…) como Dirección General dependiente de la Presidencia de Gobierno será el organismo que centralice y coordine toda la producción estadística española. La Ley regulaba también los trabajos estadísticos de Ministerios, Ayuntamientos, organización sindical y demás organismos públicos, además de establecer un Consejo Superior de Estadística compuesto por representantes de los organismos científicos, Ministerio, Organización Sindical e INE.

30 FRAGA, M. y TENA ARTIGAS, J. (1949). Revista Internacional de Psicología, nº 28, oct-diciembre.

31 TENA ARTIGAS, J. y AZORÍN POCH, F. (1954). *Sobrevisión por muestreo en las universidades españolas.* Trabajos de Estadística, vol. IV, cuaderno III.

rez, Angel Alcaide, Fuentes Quintana, Fernández Castañeda, Santos Blanco y Sampedro. El Instituto de Estudios Políticos publica también las tablas input-output de la economía española, realizadas por Angel Alcaide, Gloria Begué, Fernández Castañeda, Santos Roa, miembros de la sección de política económica del Instituto de Estudios Políticos, en colaboración con la Facultad de Ciencias Políticas y Económicas. La presentación de los trabajos estuvo acompañada de la visita del Profesor de la Universidad de Harvard, Wassily Leontief en marzo de 1958 y de una rueda de prensa en el propio instituto donde calificó a las tablas de «pieza maestra de exactitud»[32].

Los manuales de Estadística

Otro de los aspectos que refleja un panorama nada atrasado, es la producción y traducción de manuales. Hasta el manual de De Miguel[33], existían tratados de estadística que abordan la disciplina en la línea de la estadística administrativa y, en todo caso, planteaban la forma en la que el Estado debía organizar la información estadística. También existían tratados sobre cálculo de probabilidades donde se aborda su relación con la astronomía, los problemas de tiro en artillería, o la construcción de tablas de mortalidad[34]. Todos estos manuales utilizaban autores clásicos, sobre todo de lengua francesa y alemana hasta la aparición del manual de Antonio de Miguel que utilizaba ya como referencia textos de A.L. Bowley y G.U. Yule[35].

Ya hemos señalado que el manual de Corrado Gini traducido por José Antonio Vandellós no nos parecía un tratado moderno porque no incluía teoría muestral. El

---

32 ESTADÍSTICA ESPAÑOLA (1958) nº 3, p. 79.

33 Se trata del primer manual de estilo anglosajón . Antonio de Miguel, licenciado en ciencias exactas de la Universidad de Madrid, y estadístico facultativo, jugará un papel determinante en el establecimiento de la econometría española junto a Fernández Baños. Velarde le dedica grandes elogios en VELARDE FUERTES, J. Aportaciones de los estadísticos españoles al análisis de la economía del siglo XX. AHEPE, Historia de la Probabilidad y de la Estadística, I[as] Jornadas de Historia de la Estadística, Madrid, 2001, p. 300.

34 Merino Melchor, director del observatorio astronómico de Madrid y secretario de la Academia de Ciencias, había publicado en 1866 *Reflexiones y conjeturas sobre la ley de mortalidad en España*, y en 1868 hace su discurso de entrada en la academia *Sobre la aplicación del cálculo de probabilidades a los sucesos humanos*. Entre los manuales que tuvieron mayor repercusión estaba el *Tratado de Cálculo de Probabilidades* de Ollero, publicado en 1879, o el del catedrático de la Escuela Superior de Magisterio y doctor en ciencias físico-matemáticas, Gabriel Galán Ruiz (1869-1938): *Cálculo de las probabilidades (1923)* que obtuvo en 1909 el premio de Academia de Ciencias.

35 El tratado de Antonio de Miguel estaba dirigido a profesionales de la economía o de las ciencias sociales sin formación matemática y aunque no tiene un capítulo de teoría muestral, es un texto de influencia anglosajona. Su estructura es la siguiente: comienza con los criterios de clasificación en estadística, sigue con un capítulo dedicado a las frecuencias donde concede una gran importancia a las variables de tipo nominal, y ya el segundo capítulo lo dedica a la asociación. En el capítulo III aborda la probabilidad para variables nominales siguiendo los planteamientos de Karl Pearson, pasa después a las series temporales y las medias, para continuar con los números índices, la variabilidad y las medidas de dispersión, la interpolación y la correlación. Hay una última parte en la que vuelven a abordarse los mismos temas para datos ponderados.

manual parecía imbuido del espíritu positivista del Siglo XIX, a la busca de leyes capaces de hacer previsibles los acontecimientos sociales, mientras que la nueva estadística administrativa que se desarrolla en Inglaterra se plantea objetivos científicos diferentes y tiene aspiraciones administrativas más modestas, por ejemplo, el conocimiento de magnitudes sociales como el número de parados. La primera tiene en el «modelo lineal» su marco teórico, en tanto que la segunda utiliza la teoría de muestras. En una primera fase, lo que aparece en los manuales de estadística matemática, es sobre todo, la regresión y la correlación junto a sus respectivas aplicaciones (biometría de K. Pearson y los barómetros económicos de Harvard), en tanto que en una segunda fase se focalizan hacia la teoría de muestras siguiendo las aportaciones de la escuela inglesa (Edgeworth, Bowley, Yule, Fisher, etc.).

El primer manual que adopta esta nueva configuración de la disciplina lo publica G. Udny Yule en 1911 (*An Introduction to the Theory of Statistics*) pues aunque el manual de Bowley (*An elementary manual of statistics*) contenía ya un capítulo titulado *Sampling*, no pasaba de ocho páginas en las que se presentan algunos ejemplos teóricos. Por el contrario, el de Yule dedicaba la tercera parte del libro a la teoría de muestras[36], todo un acierto que va hacer del manual un texto de referencia hasta 1937, cuando realiza para la undécima edición una revisión completa del texto con Kendall. Pero vamos a detenernos en algunos manuales españoles, para pasar más adelante a comentar la traducción española que hace Ros Jimeno en 1946.

Olegario Fernández Baños, después de una serie de vicisitudes que le apartan del Servicio de Estudios del Banco de España, termina de redactar su manual en 1943. Pasará más de una año sin que la universidad se decida a publicar un texto ya aceptado, por lo que finalmente se edita en el Consejo Superior de Investigaciones científicas coincidiendo con la creación de la sección de Estadística del Instituto Jorge Juan en 1944. El texto constaba de cinco partes: una titulada *Preliminares* dedicada al objeto de la estadística, fenómenos colectivos, valores medios y números índices y en la página 40 comenzaba con el *Cálculo de Probabilidades;* la tercera parte estaba dedicada a la *Estadística Descriptiva*, y en la cuarta comenzaba la *Teoría y Técnica de Muestras* a la que dedicaba 78 páginas. La quinta y última estaba dedicada a la *Correlación Estocástica*. En total, 510 páginas de un buen manual, moderno, en el sentido de incorporar la teoría muestral al estilo anglosajón, no en vano dedicaba el libro a Ronald Fisher con quien estaba en contacto, al menos, desde los años de su oposición a la cátedra de Estadística matemática de la Universidad Central de Madrid[37].

[36] El índice consta de una INTRODUCCIÓN dedicada a la definición de *Estadística*, una PRIMERA PARTE a la teoría de los atributos en la que trata de terminología, consistencia, asociación de variables y tablas de clasificación. Una SEGUNDA PARTE dedicada a las distribuciones de frecuencias, medias, medidas de dispersión y correlación, una TERCERA PARTE dedicada a teoría muestral , y unos ANEXOS con tablas. En total, la teoría muestral ocupa prácticamente la tercera parte del texto. Algo insólito para la época que llevó a Neymman a considerarlo como el mejor libro de estadística que se había escrito nunca.

[37] Fernández Baños mantuvo correspondencia con Fisher y Gini a propósito del temario de su oposición. Véase ARRIBAS, J.M., 2004.

El manual de García Álvarez y Ayuso Orejana, se edita un año más tarde que el de Fernández Baños y está prologado por José Mª Orts Aracil, a la sazón, catedrático de Estadística Matemática y Teoría de Funciones en la Universidad de Barcelona y director del Instituto «Jorge Juan» del Consejo Superior de Investigaciones Científicas[38], pero al contrario que el de Fernández Baños, no aborda en profundidad la teoría muestral. El temario, bien organizado y muy didáctico, estaba organizado en dos libros, uno de *Nociones Fundamentales* y otro de *Estadística Analítica*. Las nociones fundamentales abarcaban tres partes, una primera de *Nociones fundamentales* donde se aborda la definición de Estadística, los sistemas de organización administrativa y profesional de la estadística, sistemas de clasificación, tabulación, representación gráfica, etc. Una segunda parte dedicada al *Cálculo de Probabilidades* en la que se explica la Curva Normal y la teoría de errores ; y un tercera parte de *Metodología estadística* en la que se trata la asociación entre variable así como las constantes en la distribución de fenómenos colectivos (promedios, mediana, dispersión, rangos, momentos, interpolación, números índice, series temporales y correlación. En esta parte tercera, aparece un capítulo (¡sobre 32 de los que consta!) que se titula *Teoría de las muestras. Errores de las principales constantes características* y a la que dedica tan solo13 páginas[39].

No era el caso del manual de Yule que dedicaba más de 120 páginas. José Ros Jimeno, entonces Jefe del Servicio de Estudios del INE y Profesor auxiliar de Estadística Matemática en la Escuela Superior de Comercio de Madrid, traduce el texto de Yule y Kendall en 1946 (el prólogo a la primera edición está fechado el 2 de febrero de 1947) para la editorial Aguilar. En el prologo, los autores, además de sentirse muy honrados por la traducción española, afirman que su difusión en el mundo de habla hispana, contribuirá «al intercambio de conocimientos e ideas entre Inglaterra y España y, con ello a una mejor comprensión y a una unión más estrecha entre ambos pueblos».

En la introducción Ros Jimeno comenzaba reconociendo que «*cualesquiera que sean las causas de que la Estadística no haya alcanzado en España el grado de desarrollo que han alcanzado otras ciencias, lo cierto es, que en estos últimos años ha crecido considerablemente el interés por esta disciplina*» y hace una mención expresa a la aparición de manuales y traducciones, en concreto al del «malogrado profesor Fernández Baños», que considera de un elevado nivel matemático. «*Hacía falta, por*

[38] Otro matemático que como Fernández Baños y Santaló había comenzado a destacar en la *Revista de Matemática Hispano-Americana* de Rey Pastor mucho antes de la guerra.

[39] La mentalidad positivista de buscar "leyes" o en el caso de la estadística "constantes" debió de nublar la visión de los estadísticos a la hora de incorporar el método de las muestras. En el Capítulo LIII, después de hacer una buena introducción literaria al asunto del muestreo añaden: *Para que la generalización al fenómeno completo de los resultados obtenidos por un grupo parcial pueda realizarse con la mayor garantía de verosimilitud, hay que admitir implícitamente el postulado de la* ***uniformidad de la Naturaleza****; consiste, como también indicamos en los comienzos de este libro, en aceptar como verdad evidente confirmada en la práctica, la existencia de un orden y regularidad en la producción de los hechos o fenómenos, orden que sólo se pone de manifiesto cuando se observan colectivos muy numerosos...*" (GARCÍA ÁLVAREZ, 1946, 485).

tanto, un libro de nivel medio que facilitara el conocimiento esencial de los principales métodos estadísticos y sirviera, además, de sólida preparación para estudiar la Estadística matemática con mayor amplitud». Parte de la definición de Estadística como *ciencia* que debe de contemplarse en sus *principios teóricos* y en sus *aplicaciones prácticas,* y advierte que la estadística teórica no es exclusivamente matemática. Reconoce la importancia que tiene en el tratado la *teoría de las muestras o de la selección estadística (sampling)* y recoge la controversia que se se produjo al respecto en la comunidad estadística haciendo referencia expresa al artículo de Corrado Gini *I Pericoli della Statistica*. Después de una consideración sobre *las leyes estadísticas,* termina refiriéndose al interés de la ciencia estadística por el estudio cuantitativo de los hechos económico-sociales: *Pensando un día en la ayuda que la Estadística puede prestar a la Economía en la medición de los fenómenos relacionados con la distribución de la riqueza, dije que con la técnica se afina la balanza de la justicia; idea verdaderamente sencilla, pero realmente fecunda cuando existe un ambiente de comprensión para la Estadística como base de la política económico-social.* Termina agradeciendo a Azorín Poch, la ayuda recibida en la traducción, corrección y formación de índices.

Los estudios de opinión

En septiembre de 1942 comienza su andadura el Servicio Español de Auscultación de la Opinión Pública (SEAOP) con el objetivo de medir de forma regular y sistemática el estado de la opinión, el grado de información de la población y la penetración de la *propaganda subversiva* extranjera. Tanto el contenido de las encuestas como la propia supervivencia del servicio de auscultación estarán condicionados por la cambiante situación internacional y las diferentes posturas adoptadas en política exterior para la pervivencia del régimen.

Las primeras encuestas están directamente relacionadas con la guerra mundial, así por ejemplo, las de 1942-43 tratan sobre la lectura de la prensa y la audiencia de la radio, haciendo especial hincapié en las características del público y su grado de información a través de emisoras extranjeras. Las encuestas pretendían introducir los nuevos métodos americanos de metodología estadística en los estudios de opinión, aunque las circunstancias españolas eran muy diferentes. La creación del SEAOP coincide en el tiempo con la del Research Branch en los EEUU y que dirige Samuel A. Stouffer, así como la finalización de sus actividades al concluir la Guerra Mundial. Ambas instituciones se ubicaban en aparatos vinculados a la información, la educación y la propaganda[40], y en ambos casos utilizaban los medios de comunicación y el cine. En el caso español el NODO, y en al americano, la serie de películas «Why we fight» que se utilizaron para influir en la opinión pública.

[40] Llama la atención la similitud de los objetivos de la Vicesecretaría de Educación Popular española con la Information and Education División americana, que formaban parte de proyectos de control de la propaganda, la opinión y los medios de comunicación de masas. Ver: Gaceta de la Prensa Española, n.º 34, 1945 y The American Soldier: adjustment during army life, Princeton University Press, 1949.

En la Gaceta de la Prensa Española de 1945 aparecieron breves artículos en la sección de «Labor de la Dirección General de Prensa» que daban cuenta de las encuestas realizadas por el SEAOP «aptas» para la publicación. También se publican notas explicativas acerca del propio Instituto que introducían la nueva técnica de medición de la opinión con el relato de las predicciones electorales de Gallup del año 1936, o relataban la creación de los Institutos de Opinión en Inglaterra y Francia, para terminar comparándolos con el organismo español: «la traducción española de estas instituciones es el Instituto de la opinión creado en 1942 como organismo dependiente de la Delegación Nacional de Prensa de la Vicesecretaría de Educación Popular». En 1945, el SEAOP había realizado más de 100 exploraciones, aunque sólo algunas se publicaron de forma parcial. En ellas se presentaban los cálculos matemáticos del tamaño de la muestra, la proporcionalidad entre la muestra y la población, así como el funcionamiento del Instituto. Empleaban el método de cuotas y utilizaban el cálculo de probabilidades para la determinación del tamaño muestral, sin embargo, el propio organismo reconocía la precariedad de sus medios y la falta de preparación técnica del personal.

Los comienzos consistieron en enviar una serie de instrucciones detalladas a los delegados provinciales para la primera encuesta de seis preguntas, cuyo recuento y clasificación duraron un mes, ya que se hizo manualmente. Posteriormente realizaron encuestas mensuales sobre muestras de 5.000 individuos, sirviéndose de máquinas electrocontables de alquiler. En 1944, compraron máquinas de recuento y clasificación y se creó un Gabinete matemático en el que se impartía un cursillo de tres meses a los delegados provinciales encargados de la recogida de la información. Se inició así la realización de encuestas semanales de cuarenta preguntas. Los servicios estadísticos del SEAOP estaban centralizados, así que al final de la elaboración de los datos que duraba una semana, se enviaban a Madrid, se agregaban, se comprobaban y se remitían al laboratorio de psicología social donde se elaboraba el informe que finalmente iban a parar a los organismos del Estado. Las encuestas realizadas por este servicio no se publicaban, sino que se utilizaban únicamente para la «dirección científica» de la opinión. Un cariz poco democrático de las investigaciones que quedaba muy claro en las notas publicadas en la Gaceta de la Prensa Española: «*Los resultados son enviados inmediatamente a los altos organismos del Estado que, naturalmente los utilizan en beneficio de sus propias funciones, ya que el carácter de los cuestionarios propuestos tienen un matiz eminentemente político social o económico, que no es óbice para que periódicamente sea consultada la opinión sobre problemas algo más triviales, y cuyos resultados aparecen en la prensa diaria*»[41]. La situación de aislamiento internacional del final de los años cuarenta llevaría al cese de las actividades del SEAOP en 1946[42] dejando paso a una nueva situación en la política exterior que condicionará la renovación de los anteriores servicios de propaganda.

[41] LÓPEZ ROLDÁN, M., "Qué es y cómo funciona el Instituto de la Opinión Pública", *Gaceta de la Prensa Española*, n.º 42, Madrid, 1945.

[42] GINER, J.A., *Political Opinion Polling in Spain*, en Political Opinion Polling: An International Review, dir. Por R.M. Worcester, McMillan, 1983, pp. 178-197.

Poco después del levantamiento de las sanciones de Naciones Unidas, se crea en 1951, bajo la dirección de Fernández Chillón, el Instituto de la Opinión Pública IOP, aunque también vinculado al sistema global de control de la prensa. En medio de la *guerra fría* y ante la perspectiva de una mejora de la imagen del régimen por su actitud anticomunista[43], el IOP establece contacto con ESOMAR y algunos institutos europeos y americanos. Al mismo tiempo se dota de una nueva estructura administrativa y una red de 524 colaboradores-entrevistadores distribuidos por todo el territorio nacional. Edita el boletín «Opinión»[44] donde hace reseña de sus actividades y de los contactos con institutos extranjeros. Las encuestas iniciales versaron sobre la reforma del bachillerato, el problema de la vivienda, los espectáculos y lugares de esparcimiento, el consumo, etc. Una vez al mes hacía un *encuesta social* sobre temas variados, y en 1953 inicia una amplia encuesta sobre las aspiraciones profesionales de los estudiantes universitarios y la función pública. Las muestras se siguieron haciendo por cuotas[45] como en el resto de los institutos de opinión extranjeros. La breve historia de este período del IOP concluye en 1957 con el cese de su director Rafael Aparicio y la paralización efectiva del Instituto.

No obstante desde 1953, y fuera del ámbito del IOP, se estudian los métodos de encuesta en el Instituto de Estudios Políticos, y en concreto, en el seminario organizado por José Bujeda se trabajaba con las escalas sociométricas empleadas en los Estados Unidos o se probaban adaptaciones de la escala Warner para la medición del *estatus social* en las familias españolas. En 1963 se refundaría el IOP[46], dependiendo ahora del Ministerio de Información y Turismo, dentro de un contexto económico y político muy diferente que llevará la impronta de la escuela norteamericana y de las más avanzadas técnicas de muestreo.

Conclusiones

La Estadística Matemática española tiene su origen en la renovación general de matemática impulsada por Rey Pastor en el período de entreguerras. Se desarrolla a través de dos vías, de un lado, la física matemática, cuyo principal exponente es Esteban Terradas, y de otro, la econometría, cuya figura más conocida es Olegario Fernández

[43] La censura de la prensa española y su relación con la opinión pública pueden entenderse en el contexto internacional y norteamericano, coincidiendo con las actividades entre 1950 y 1954 del Comité de Actividades Anti-Americanas impulsado por McCarthy.

[44] La revista Opinión, estaba destinada exclusivamente a los auscultadores del IOP, que contaba con apenas veinte páginas de tamaño cuartilla en las que abundaban las referencias anecdóticas o pintorescas de encuestas realizadas por institutos extranjeros, así como las de contenido más “trivial” elaboradas por el IOP.

[45] El empleo de las cuotas en la muestra se justifica, “para hacer una reducción a escala del cuerpo social”. La determinación de las muestras se realizaba sobre la base de los datos facilitados por el INE, considerando la edad, el sexo, la ocupación, la concentración ecológica, el nivel económico y el nivel cultural.

[46] En esta nueva etapa del IOP, el ministro Fraga Iribarne sitúa al frente de la institución a dos sociólogos, González Seara como director y Díez Nicolás como responsable del Departamento Técnico.

Baños. Después de la Guerra Civil aparece una nueva generación[47] que podemos llamar *la generación de posguerra*[48], cuyos principales representantes son Angel Anós, José Ros Jimeno, Sixto Ríos, Enrique Cansado y Francisco Azorín[49]. Es una generación brillante, bien preparada desde el punto de vista matemático que va a jugar un papel determinante no solo en la configuración de la Estadística española, sino también en la organización de los Institutos de Estadística latinoamericanos y de algunos organismos internacionales. La Guerra Civil separó a los estadísticos españoles, pero los contactos entre los que se exiliaron, o los que emigran por razones profesionales, continuaron siendo fecundos. Los estadísticos que permanecen en España, mantienen dos vías de comunicación exterior: la continental, sobre todo francesa (visitas de Frechet a Madrid, de Sixto Ríos y Artigas a Paris, etc.) e italiana (contactos con Gini), y la anglosajona y, sobre todo, americana, abierta con la visita de Cansado a la Oficina del Censo Americano y a la Universidad de California. Durante años, los viajes que realizan los estadísticos españoles a Institutos y universidades latinoamericanas invitados por sus colegas emigrados, servirán para mantener y consolidar esa corriente de la estadística española que había nacido muchos años atrás.

[47] Puede hablarse de tres generaciones, la del 14 (Esteban Terradas, Álvarez Ude) la del 27 (Sixto Cámara, José Mª Orts, Olegario Fernández Baños, Antonio de Miguel, José Mª Artigas) y la de posguerra, objeto de este trabajo.

[48] Aunque Sixto Ríos habla de *la Escuela de Madrid*, nos ha parecido más prudente utilizar el término *generación.*

[49] Cansado añade los nombres de Miguel Jerez Juan, Enrique Blanco Loizelier, Gonzalo Arnáiz, José Luis Sanchez Crespo y Eduardo García España. CANSADO, E., 1993, op. cit., p. 21. Sixto Ríos incluye más nombre en su artículo (1991) *El progreso de la Ciencia Estadística española en el siglo XX.* Cansado establece dos grupos de estadísticos españoles, el de los precursores, que sitúa entre la Primera Guerra Mundial y la Guerra Civil y el grupo que llama *los Iniciadores* y que sitúa temporalmente entre 1939-1950.

BIBLIOGRAFÍA

ALMAZÁN, A. (2004): *El uso de la encuesta estadística en la dictadura franquista (1942-1975): las encuestas de opinión.* A.H.E.P.E., Historia de la Probabilidad y la Estadística II, Madrid, pp. 449-463.

ARRIBAS, J.M. (2004): *Los comienzos de la Estadística Matemática (1914-1936)* en A.H.E.P.E., Historia de la Probabilidad y la Estadística II, Madrid, pp. 331-360.

ANÓS, A. (1944): *Estado actual de la teoría de la comprobación de hipótesis estadísticas.* Instituto Nacional de Investigaciones Agronómicas, Sección de Estudios Económicos, estadísticos y de matemática aplicada, Cuaderno nº 40.

ARMATTE, M. (2004): *La introducción en Francia de los Métodos de sondeo aleatorio*. EMPIRIA, nº 8.

BARBUT, M. (2005): *Un épisode insolite des relations scientifiques franco-iberiques*, III Congreso Internacional de Historia de la Estadística y de la Probabilidad, Madrid, 7 y 8 de julio de 2005.

CANSADO, E. (1950): *Conferencias sobre muestreo estadístico*, Presidencia del Gobierno, Instituto Nacional de Estadística, Madrid.

CANSADO, E. (1993): Sobre el desarrollo estadístico en España y América Latina, SEIO, CIENES, SAE, UCA.

FAVERO, G. (2002): *Corrrado Gini and Italian Statistics under Fascism*. XIII Congress of International Economic History Association, Buenos Aires, July 23, 2002.

FERNÁNDEZ BAÑOS, O. (1945): *Tratado de Estadística*, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid.

GARCÍA ÁLVAREZ, M. y AYUSO OREJANA, J. (1946): *Estadística*, Editorial S.A.E.T.A., Madrid.

GARCÍA ÁLVAREZ, M. (1981): *Historia del Instituto Nacional de Estadística*. INE.

GINI, C. (1950): *Relaciones culturales entre Italia y Españza, particularmente respecto a la estadística y a la Sociología*, Revista Internacional de Sociología, nº 29, enero-marzo de 1950.

GINI, C. (1953): *Curso de Estadística*, Segunda Edición (1ªed., 1935) Editorial Labor, Bilbao.

GLICK, T.F. (1987): “La missio d’Esteve Terradas als Estats Units 1944-45” en *Cinquanta anys de ciencia I técnica a Catalunya*, Barcelona.

INE (1952): *Instrucciones para el fichado de una muestra aleatoria del 10 por 100 de la población inscrita en Censo de Población de 1950.* Presidencia de Gobierno.

INE (1953): *Censo de Edificios y viviendas de 1950,* Tomo I, Cifras generales obtenidas mediante una muestra del 10 por 111. Hijos de E. Minuesa, Madrid.

MARTÍNEZ LÓPEZ, V. (1995): *Olegario Fernández Baños (apuntes para una biografía)*. Gráficas Ochoa.

PORTERO, F. (1989): *Franco aislado. La cuestión española (1945-1950)*. Aguilar.

RÍOS, S. (1991): *El progreso de la Ciencia Estadística española en el siglo XX,* Estadística Española, vol. 33, nº 128.

YULE, G. U. y KENDALL, M. G. (1947): (Traducción de José Ros Jimeno) Aguilar, Madrid.

CAPÍTULO 12

Fuentes bibliográficas para el estudio de la historia de la estadística y la probabilidad en la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando

G. RUIZ GARZÓN
Universidad de Cádiz

"De ratiociniis in ludo alae" de Christian Huygens (1629-1695)

En la Biblioteca del Real Observatorio de la Armada (ROA), nos encontramos con una recopilación de toda la obra de Huygens, entre ellas con una monografía en latín titulada "*De ratiociniis in ludo alae*". En el siglo XVII, la mayoría de los científicos pensaban que el latín era el lenguaje más adecuado para exponer los resultados de la Matemática. Las lenguas de cada país no se consideraban lo suficientemente ricas para las Matemáticas. Pero la Probabilidad surge de prácticas vulgares, como los juegos de azar. Huygens podía expresarse en holandés pero tenía dificultad para encontrar términos latinos adecuados. Él usa la palabra *expectatio* y que después se tradujo por la palabra *esperanza*. Es aquí donde por primera vez aparece ese concepto.

Huygens necesitaba saber la expectatio, o sea, el valor de cualquier juego. Pensaba que en una lotería justa está claro que cada apostante paga el mismo precio por cualquier billete. Más aún, si el premio es z entonces cada uno de los n billetes debería costar z/n. Si los billetes cuestan más, el dueño de la lotería obtendría ganancias sin riesgo. Si los billetes cuestan menos, los apostadores podrían formar una asociación que obtendría ganancias sin riesgo.

Luego tanto si el juego es justo o no, si se nos invita a jugar con un esquema dado de premios que dependen de los diversos resultados, exigimos un precio justo para aceptar la apuesta. La esperanza matemática de esa ganancia es lo que vale la apuesta. Si se paga más de la esperanza se tenderá a perder y si se paga menos se tenderá a ganar. Un juego o experimento aleatorio se dice justo o equilibrado si su esperanza global es cero, si un juego no es equilibrado se dice que es un juego con ventajas.

"Essai d'analyse sur les jeux de hazard" de Pierre Rémond de Montmort (1678-1719)

También en la Biblioteca del ROA nos encontramos con este volumen donde Montmort incluye la correspondencia que mantuvo con Nicolás Bernoulli (1687-1759), y en ella aparecen algunos problemas importantes para el Cálculo de Probabilidades, entre ellos el Problema de S. Petersburgo.

Se trata del problema quinto, propuesto por Nicolás a Montmort, en una carta con fecha 9 de septiembre de 1713. El primo de Nicolás, Daniel, lo estudió en los *Comentarios de la Academia de Ciencias de San Petersburgo*, por cuyo motivo se conoce el problema con el nombre de esa ciudad rusa.

El *Problema de S. Petersburgo* podría ser enunciado como:

> "*Pedro tira al aire una moneda tantas veces como sea necesario para sacar cara. Si esto ocurre a la primera tirada, tiene que dar a Pablo un ducado; si es en la segunda 2; si es en la tercera, 4; si es en la cuarta, 8, y así sucesivamente, duplicando el número de ducados a cada jugada que es necesario efectuar. ¿Cuál es la esperanza de ganar correspondiente a Pablo? En otras palabras, ¿cuál es el precio justo que Pablo debe pagar por este juego?*".

Pablo debería pagar por este juego una cantidad infinita:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

De ahí la paradoja y su posterior estudio por diferentes matemáticos de la época.

Montmort pensaba que el cálculo de probabilidades podría servir "*para regular los juicios y la conducta de los hombres en la práctica de las cosas de la vida*".

Aunque en su libro sólo describió distintos juegos de azar, dejó la posible extensión de la Probabilidad a otras facetas "*a alguna otra persona más hábil que yo, en* *lugar de decir cosas o muy conocidas o poco exactas*". El éxito del "*Essai*" de Montmort fue inmenso, incluso superior al que tuvo el "*Ars Conjectandi*", obra póstuma de Jacques Bernoulli (quizás la única gran obra de los inicios del Cálculo de Probabilidades que falta en la Biblioteca del ROA), y que apareció simultáneamente con la segunda edición del texto de Montmort.

"De Mensura Sortis" de Daniel Bernoulli (1700-1782)

En la Biblioteca del ROA nos encontramos con los *Comentarios de la Academia de San Petersburgo* del año 1728 hasta el año 1751. En los del año de 1731, vol. 5, 175-192, Daniel Bernoulli escribe un artículo titulado "*De Mensura Sortis*", donde propone una posible solución a la paradoja de esa ciudad rusa basada en el concepto de esperanza moral o utilidad.

"An Estimate of the Degrees of the Mortality…" de Edmund Halley (1656-1742)

Se trata de un artículo de la *Philosophical Transactions* del año 1693, vol. 17, 596-610 donde aparece la primera tabla de mortalidad.

"An Argument for Divine Providence…" de John Arbuthnott (1667-1735)

En este artículo de la *Philosophical Transactions* del año 1710, 186-190, Arbuthnott representa el nacimiento de una persona mediante el lanzamiento de una moneda. El exceso de nacimientos de niños frente al de niñas es explicado por Arbuthnott mediante la intervención de la Divina Providencia y no por el azar.

"The Doctrine of Chances" de Abraham De Moivre (1667-1754)

Es quizás el primer gran libro relacionado con las probabilidades. Es una extensión de una memoria escrita en latín y publicada en la *Philosophical Transactions* en 1711, 213-264. En esta obra se fija la teoría de la combinatoria y expone varios problemas sobre probabilidades de extraer bolas de una urna. También se prueba el Teorema Central del Límite, concretamente probó que: *Dados dos números a y b,*

$$p\left(a \le \frac{X - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \le b\right) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2} dt \quad \text{cuando} \quad N \to \infty$$

Estaba interesado en construir para la Teoría de las Probabilidades, métodos y notaciones generales, en la forma en la que él imaginaba como un álgebra nuevo.

"Essai sur les probabilités de la vie humaine" de Antoine Deparcieux (1703-1768)

Deparcieux es famoso por un solo libro "*Essai sur les probabilités de la vie humaine*". En él confecciona unas tablas de mortalidad para las establecer cálculos actuariales. A instancias del gobierno se ocupó de rectificar las tablas de mortalidad de Halley. Sus tablas junto con las de Duvillard, han sido empleadas durante mucho tiempo por las compañías de seguros.

En este libro estudia las tontinas. Las *tontinas* (llamadas así por el médico italiano Lorenzo Tonti, el primero que introdujo esta forma de seguro sobre la vida a mediados del siglo XVII), son una derivación de una renta vitalicia y consiste en que varios individuos pactan que las rentas vitalicias de los que mueran acrezcan las de los supervivientes. La naturaleza de esta clase de seguro consiste en que cierto número de personas de edad, se asocian y se instituyen por así decirlo, herederos unos a otros.

"Essai d'Arithmétique Moral" de Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707-1788)

El noble francés Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon nació el 7 de Septiembre de 1707 en Montbard y murió el 16 de Abril de 1788 en París. Fue un estrecho colaborador en la "Enciclopedia" y tradujo entre otros a Newton. Desde su puesto de supervisor del Jardín del Rey, emprendió la redacción de su obra capital, su "*Historia Natural*". Es un tratado moderno que intenta abordar la Naturaleza de una manera íntegra. Contiene un tratado sobre la Tierra (pensó que el origen de nuestro planeta era una enorme colisión), una parte dedicada al estudio anatómico del hombre y otra dedicada a todo lo referente al cruce de especies, su reproducción, etc. Buffon puede ser considerado como precursor de la Biología y es junto a Linneo el más importante naturalista del siglo XVIII.

La "*Historia Natural*" de Buffon, depositada en la Biblioteca del ROA, consta de 31 volúmenes y en uno de los últimos nos encontramos con un suplemento titulado "*Essai d'Arhitmétique Morale*", donde amén de exponer el conocido Problema de la Aguja que ahora definiremos, intenta resolver la paradoja de San Petersburgo. También publica unas tablas de duración de la vida, más exactas que las de Deparcieux, hechas para todos los hombres y no sólo para rentistas.

Para resolver el Problema de S. Petersburgo propone despreciar las probabilidades pequeñas, concretamente menores que 1/10000, ya que, según sus tablas de mortalidad, la probabilidad de que un hombre de 56 años muera en el transcurso del día era de 1/10189 y si, para un hombre de esa edad, dicha probabilidad no le causa temor y le parece pequeña, con igual motivo lo será 1/10000 en nuestro problema. De esta manera obtiene que el valor del juego es de 6.5 ducados.

Buffon propone en su "*Essai*" el posteriormente llamado *Problema de la Aguja*:

"*Supongamos que en una habitación, el suelo se haya dividido en líneas paralelas, se tira un palo y uno de los jugadores apuesta a que el palo no ha cortado ninguna de las paralelas del suelo, el otro por el contrario apuesta porque el palo cortará alguna de esas líneas, se pregunta por las probabilidades de ambos jugadores. Es posible jugar este juego con una aguja de coser o un alfiler sin cabeza*".

Se demuestra que la solución tiene que ver con el número π.

"Solutio Problematis ad Geometriam Situs" de Leonard Euler (1707-1783)

Se trata de un artículo de los *Comentarios de la Academia de San Petersburgo* del año 1736, vol. 8, 128-140, donde resuelve el llamado *Problema de los 7 puentes de Königsberg.* Esta ciudad prusiana estaba atravesada por el río Pregel que formaba dos islas. Para unir las cuatro partes de la ciudad había siete puentes. Euler demostró que es imposible cruzar por los siete puentes sin volver a cruzar por lo menos uno, siempre que haya tres o más vértices en los que confluye un número impar de caminos. Este problema se considera el inicio de la Teoría de Grafos.

"Mémoire sur les élections au scrutin" de Jean Charles Borda (1733-1799)

Borda estudió el procedimiento del voto como una fuente generadora de obstáculos que impedían que la consulta electoral alcanzase la meta a la que se destinaba, conocer la opinión de la asamblea. Lo hizo en la "*Mémoire sur les élections au scrutin*" publicada en las *Memorias de la Academia* de 1781, 657-665, que se pueden consultar en la Biblioteca del ROA. La citada institución gaditana tiene una importante colección de las citadas memorias que abarcan casi todo el siglo XVIII.

Borda muestra, en la "*Mémoire sur les élections au scrutin*", un ejemplo de un candidato en el que pierda en todos los enfrentamientos dos a dos pero puede ser el más preferido. Mientras que un candidato puede ganar a todos los candidatos en los enfrentamientos dos a dos pero puede ser el menos preferido, en cuanto a votación por mayoría simple.

Borda nos muestra un método para elegir al candidato "correcto". Su método fue adoptado por la Academia Francesa hasta que en 1800 Napoleón lo cambió.

El método de Borda consistía en graduar el mérito por el número de votos que tiene cada candidato, dando cierto valor a los votos respecto a los lugares en que se dan.

"Memoria matemática sobre el cálculo de la opinión en las elecciones" de Joseph Isidoro Morales de 1797

El español Joseph Isidoro Morales, en su "*Memoria matemática sobre el cálculo de la opinión en las elecciones*", estudió el procedimiento dado por Borda y le encontró algunos inconvenientes que explicaremos con un ejemplo:

Supongamos tres candidatos A, B y C a los que les asignamos 3, 2 ó 1 puntos según preferencias de cada elector y 6 electores, con este reparto de preferencias,

	Lugar 1º	Lugar 2º	Lugar 3º	Suma de Borda
Votos para A	3	3	0	$(3\times3)+(3\times2)+(0\times1)=15$
Votos para B	1	2	3	$(1\times3)+(2\times2)+(3\times1)=10$
Votos para C	2	1	3	$(2\times3)+(1\times2)+(3\times1)=11$

Se tiene que habiendo reunido A una suma de 15 unidades contra 10 y 11, lo lógico sería proclamarlo "ganador Borda". Sin embargo, no lo hubiera sido por los métodos tradicionales al uso, ya que las tres calificaciones superiores que obtuvo, y que correspondería a los únicos votos absolutos que sería posible emitir, no alcanzan los 2/3 ni la mitad más uno de los votos totales. Estas mayorías de 2/3 o de la mitad más uno, eran consideradas "*justas*" y por estar de acuerdo al Derecho de la época, eran también llamadas *canónicas*. La elección por mayoría simple era considerada un procedimiento "*injusto*" ya que podría dar a paradojas como demostró Borda.

"An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances" de Thomas Bayes (1701-1761)

Con el dinero que le dejó Thomas Bayes a su albacea, Richard Price, se publica en 1763 en la *Philosophical Transactions* vol. 53, 370-418, este artículo basado en un modelo binomial y con argumentos geométricos se demuestra el Teorema de Bayes en el caso continuo.

"Théorie Analytique des Probabilités" y "Essai philosophique sur les probabilités" de Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Un ejemplar de "*Théorie Analytique des Probabilités*" se encuentra en la Biblioteca del ROA. Este ejemplar no se encuentra dedicado a Napoleón, como sí lo fueron los primeros ejemplares. Laplace fue ministro con Napoleón y marqués con Luis XVIII. Con la vuelta del rey se encargó personalmente de borrar todas las dedicatorias a Napoleón de los libros que no se hubieran vendido todavía.

Laplace, en esta obra expone la teoría de los juegos de azar, la Ley de los Grandes Números de Bernoulli, la teoría de las funciones generatrices y su propia transformada. También usa la distribución Beta. En la página 353, Laplace admite objetivamente que Gauss fue el primero en utilizar el método de mínimos cuadrados mientras que Legendre fue el primero en publicarlo, tema que trataremos posteriormente. También contiene el Teorema de Laplace que viene a decir que la suma de un número grande de errores tiene una distribución asintóticamente gaussiana.

Independientemente, del reverendo Bayes, Laplace encuentra el llamado Teorema de Bayes. Expresado en palabras fue fijado por Laplace en su "*Essai philosophique sur les probabilités*", que también lo podemos hallar en el ROA, y la atribución de la fórmula a Bayes fue hecha por Cournot en la página 158 de su "*Exposition de la théorie des chances et des probabilités*".

También define la probabilidad de un suceso como el cociente entre el número de casos favorables y el total de casos igualmente posibles. Laplace decía que: "*La probabilidad era en parte el resultado de nuestro conocimiento y en parte de nuestra ignorancia*" o "*Sentido común expresado con números*".

"Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des召 cométes" de Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

El papel de la Astronomía ha sido muy importante en el origen y desarrollo del método de mínimos cuadrados. Legendre publica el método en 1805, en un apéndice del libro sobre la órbita de los cometas: "*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des cométes*". Es una técnica para resolver sistemas de ecuaciones donde el número de ecuaciones supera al de incógnitas y las ecuaciones provienen de observaciones afectadas de errores.

"Méthode des moindres carrés. Memoire sur la combinassion des observations" de Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

En el método de mínimos cuadrados de Legendre no hay probabilidad. Sólo cuatro años más tarde, cuando Gauss publica sus resultados, se encuentran conceptos de Estadística como la distribución normal o también llamada "*ley de los errores*". Gauss supone que la ley de ocurrencia de los errores era una normal. En la Biblioteca del ROA contamos con un ejemplar traducido por Bertrand del "*Méthode des moindres carrés. Memoire sur la combinassion des observations*", de Gauss.

"Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile" de Simeón-Denis Poisson (1781-1840)

En 1829 Poisson lee en la Academia una memoria sobre la proporción de nacimientos de niños y niñas. Encuentra que la proporción de nacimientos femeninos respecto al de masculinos es de 15/16. Demuestra que la aproximación normal no se cumple cuando la probabilidad de éxito del suceso es muy pequeña y obtiene la distribución que llevará su nombre. Esta lección fue publicada en las *Memorias de la Real Academia de las Ciencias* del año 1830 vol. 9, 239-308.

En la Biblioteca del ROA tenemos un ejemplar de "*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*" de Poisson. En esta obra aplica la Probabilidad a la jurisprudencia. Estudia la corrección en las sentencias y en los veredictos de los jurados. Se ocupó de responder a la pregunta de si el jurado era más benevolente que el juez único, comparando porcentajes de condenados por ambos métodos. También distingue entre probabilidad objetiva y subjetiva. Ofrece su propia demostración del Teorema Central del Límite. Suyo es el término "*Ley de los Grandes Números*", para indicar la estabilidad de las frecuencias relativas y la media aritmética de un número grande de observaciones.

"Sur l'homme et le développment de ses facultés, ou Essai de physique social" y "Sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques. Lettres à S.A.R. le duc régnant de Saxe-Cobourg et Gotha" de Adolphe Quetelet (1796-1874)

La obra cumbre de Quetelet depositada en la Biblioteca del ROA es "*Sur l'homme et le développment de ses facultés, ou Essai de physique social*", y apareció en París en 1835.

Está consagrada a desarrollar las cualidades físicas y morales del hombre. Desarrolla la teoría del "*hombre medio*" que no es sólo una teoría matemática sino también social. La media era para Quetelet la expresión del equilibrio. El hombre medio era la representación de una población diversa y el hombre ideal que se situaba en el punto medio.

Según sus palabras:

> "*El hombre que considero es dentro de la sociedad análogo al centro de gravedad dentro del cuerpo; es la media alrededor de la cual oscilan los elementos sociales*".

Quetelet, para defender la existencia de su hombre medio, echaba mano de la ley de los Grandes Números que formuló Poisson, que venía a decir que las pequeñas anomalías en la construcción de las monedas desaparecían si la experiencia se repetía un número suficientemente grande de veces. De igual manera, las diferencias entre una persona y otra desaparecían, y aparecía el hombre medio.

Ya en 1836, Quetelet fue invitado por el rey Leopoldo I para dar unas lecciones a sus sobrinos, los príncipes Ernesto y Alberto de Saxe-Cobourg (éste último futuro esposo de la reina Victoria de Inglaterra), durante su estancia en Bruselas. Les inicia en los estudios de los fenómenos sociales y de gobierno, basado sobre el Cálculo de Probabilidades y la Estadística. Después de la partida de los príncipes, la enseñanza se hace epistolar. Esto origina, "*Sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques. Lettres à S.A.R. le duc régnant de Saxe-Cobourg et Gotha*", depositada en la Biblioteca del ROA, y obra que coloca a Quetelet entre los fundadores de la Estadística Social. Es una obra para acercar la Estadística a cualquier persona.

Quetelet quiere elevar la Estadística a rango de una verdadera Ciencia y aborda la aplicación de la Estadística a la sociología criminal. Reparó en:

> "*La terrible exactitud con que se producen los crímenes. Sabemos de antemano cuántos individuos se mancharán las manos con sangre de otras personas, cuántos falsificadores, etc.*".

Llega a enunciar una fórmula empírica

$$y = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1{,}1 + 0{,}5^{(x-18)}}$$

donde y representa la tendencia a delinquir y x la edad de la persona.

También da un ejemplo de una correlación espuria:

> "*El número de crímenes está en relación inversa al número de niños enviados a las escuelas*".

"Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités" de Antoine Augustin Cournot (1801-1877)

En la Biblioteca del ROA nos encontramos con un ejemplar de la "*Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités*". En él, Cournot formula claramente la definición frecuencialista de probabilidad y propone trabajar con intervalos de confianza como un método de estimación.

Al igual que Condorcet, Laplace o Poisson, Cournot estaba también interesado en la aplicación de la probabilidad a los procesos judiciales y en este libro le dedica un par de capítulos a dicho tema. Concretamente, estaba interesado en calcular la probabilidad de dar un veredicto correcto y en la influencia que sobre el mismo tenía el número de personas que forma un tribunal. También hay un capítulo donde confecciona tablas de mortalidad, con objeto de puedan servir para calcular primas de seguros. En la página 331 aplica la distribución de Poisson en los seguros de vida.

En resumen, estamos ante una obra maestra, que sitúa a su autor al nivel de los citados Poisson, Condorcet, etc.

Como economista, Cournot fue fundador de la Economía Matemática. En 1838, Cournot publicó una obra titulada "*Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*".

En él aparece la definición de la elasticidad de la demanda. La fórmula de la *elasticidad de la demanda* se define como la relación entre porcentajes infinitesimales de la cantidad demandada y el precio dq/dp, por una parte, y, por otra, como relación entre la cantidad demandada media y el precio mismo q/p, o sea, que es:

$$E = -\frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$$

El primer factor $\frac{dq}{dp} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p}$, no deja de ser otra cosa que una derivada, y mide la pendiente de la *curva de demanda*, curva que relaciona precios y cantidades. Lo que expresado económicamente nos da una información muy valiosa pues, nos indica la sensibilidad de la demanda ante una variación en los precios. Existen productos como los farmacéuticos o las gasolinas cuya demanda es *inelástica* ($E < 1$), es decir, un aumento en el precio no conlleva un descenso del consumo, o por lo menos no muy acusado. Al revés ocurrirá, si al vendedor de naranjas de un mercado, en donde hay muchos competidores, se le ocurre subir el precio de las naranjas. El Sr. García, diligente amo de casa, puede optar por no comprarle, es decir, estaríamos ante una curva de demanda *elástica* ($E > 1$).

También se estudia el duopolio y el equilibrio del mercado. Dentro del oligopolio, el *duopolio* es una estructura de mercado caracterizada por la existencia de dos únicas empresas vendedoras. La característica esencial de la teoría del duopolio reside en que "*ninguno de los vendedores puede ignorar las reacciones del otro*", un cambio en el precio o en el nivel de producción de uno afectará el del otro y las reacciones del segundo, a su vez, influirán en el primero. La suerte de las dos empresas no es independiente; ninguno de los dos puede considerar como dada la política que seguirá el otro, ya que en parte está determinada por su propia política. Cournot propone su modelo que explique la determinación del precio y la producción de equilibrio en el duopolio.

"Calcul des Probabilités" de Joseph Louis François Bertrand (1822-1900)

La famosa paradoja de Bertrand aparece en la segunda página del libro "*Calcul des Probabilités*", depositado en la Biblioteca del ROA.

La famosa paradoja de Bertrand dice así:

> "*Se traza al azar una cuerda en un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que esa cuerda tenga una longitud mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito?*".

La paradoja proviene que no se trata de un problema si no de tres diferentes, de ahí las diferentes soluciones, según se tomen al azar puntos o segmentos.

BIBLIOGRAFÍA

FERNÁNDEZ, F. R. y FERNÁNDEZ, E. (1999): "La teoría de la votación y la memoria matemática sobre el cálculo de la opinión en las elecciones" del Dr. D. Joseph Isidoro Morales", Revista *EPSILON*, número 45, vol. 15 (3), 295-310.

GONZÁLEZ, F. J. y QUEVEDO, M. C. (2000): "Catálogo de las obras antiguas de la Biblioteca del Real Observatorio de la Armada (siglos XV al XVIII)", Boletín *ROA* Número 6/2000, Edita el Ministerio de Defensa, Cádiz.

RUIZ, G. (1999): "Ciertos aspectos didáctico-estadísticos de la Ley del Jurado", Revista *EPSILON*, número 43-44, vol. 15 (1-2), 63-72.

RUIZ, G. (1999): "La paradoja de San Petersburgo: Una reivindicación didáctica", Revista *SUMA*, número 32, 5-9.

RUIZ, G. (2001): "Sobre la utilidad de la Geometría en la enseñanza de la Probabilidad", Revista *SUMA*, número 37, 67-74.

RUIZ, G. (2001): "2001: El año Cournot", Revista *SUMA*, número 38, 15-22.

RUIZ, G. (2003): "Los orígenes del método de mínimos cuadrados", Revista *SUMA*, número 43, 31-37.

RUIZ, G. (2003): "Recorrido por la Historia de la Estadística en la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando", Boletín *ROA,* Número 4/2003, Edita el Ministerio de Defensa, Cádiz.

STIGLER, S. M. (1986): *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*, The Belknap Press of Harvard University Press, Massachusetts, USA.

CAPÍTULO 13

D. Antonio Aguilar y Vela: su visión del estudio del Cálculo de Probabilidades

ANA ISABEL BUSTO CABALLERO
Universidad Complutense de Madrid

MARÍA DEL CARMEN ESCRIBANO RÓDENAS
Universidad San Pablo CEU

Introducción

La enseñanza universitaria en España durante el siglo XIX comienza con el plan Caballero de 1807 que de alguna manera culmina con las propuestas ilustradas del siglo XVIII. A partir de este momento, y con las continuas idas y venidas de la multitud de cambios políticos y sociales, se establecen y publican otros proyectos de planes de estudio más o menos duraderos, de los que cabe resaltar los de 1814, 1820, 1821, 1824, 1836 y 1845.

Para los estudios de doctorado habrá que detenerse en el Real Decreto de 8 de Julio de 1847, siendo ministro D. Nicomedes Pastor Díaz, donde por primera vez se establece que el doctorando debe escribir una tesis. Es a partir de este momento que, además de los ejercicios para obtener el grado académico de doctor, el doctorando estará obligado a realizar un discurso, previamente escrito e impreso bajo la autorización del rector, y a defenderlo ante el conjunto de catedráticos de la Universidad Central de Madrid, puesto que es la única universidad del reino que otorga esta categoría académica. La Ley Moyano recogerá todas las iniciativas liberales moderadas que serán el fundamento de la universidad contemporánea.

Por otra parte, es importante reconocer el estado de desconocimiento generalizado en España del cálculo de probabilidades y de la estadística, materias que no se impartían en ningún plan de estudios universitario durante la primera mitad del siglo XIX. En este contexto llama la atención que en 1854 se lea la primera tesis doctoral sobre cálculo de probabilidades, debida a D. Ambrosio Moya de la Torre y Ojeda[1], sea titulada "Sobre la importancia filosófica del cálculo de probabilidades", y la segunda, debida a D. Antonio Aguilar y Vela, sea "De la importancia del estudio del cálculo de las probabilidades".

Los estudios de doctorado en la primera mitad del siglo XIX

Ya en el siglo XVIII, las Facultades mayores de las Universidades, impartían los grados académicos de bachiller, licenciado y doctor.

Para obtener los dos primeros grados era necesario realizar varios años de estudios y sufrir rigurosos exámenes, siendo de especial dureza y dificultad el examen para acceder a la licenciatura. Sin embargo, la obtención del grado de doctor no implicaba estudios específicos, sino que, más bien, era un acto "académico", caro y pomposo, al que sólo tenían acceso los licenciados que económicamente se lo podían permitir. Estos actos multitudinarios que incluían largos discursos de tono elevado que enardecían los ánimos de los asistentes, costosas procesiones, invitaciones por doquier y hasta corridas de toros, siguieron celebrándose hasta el primer cuarto del siglo XIX.

Es el Plan Calomarde, de 1824, el que intenta poner un poco de moderación y orden, a la vez que restablecer el carácter académico, de estas largas celebraciones en las que se otorgaba el grado de doctor[2].

En este sentido, el real decreto de 14 de octubre de 1824, que contiene *el plan literario de estudios, el arreglo general de las Universidades del Reino,* dice en sus artículos 165 y 166:

> "*A los Licenciados que lo solicitaren se conferirá el grado de Doctor, con la solemnidad y formalidades prescritas en los respectivos estatutos, y supresión de gastos inútiles*".

[1] Véase "La primera Tesis Doctoral sobre Cálculo de Probabilidades leída en la Universidad Central de Madrid", de Mª Carmen Escribano y Ana I. Busto Caballero, ponencia presentada en el II Congreso Internacional de Historia de la Probabilidad y la Estadística, realizado en la Escuela de Traductores de Toledo y auspiciado por la Universidad de Castilla-La Mancha en el año 2003, y publicada en 2005 por A.H.E.P.E.

[2] Véase "Los estudios de doctorado y el inicio de la tesis doctoral en España 1847-1900", de Aurora Miguel Alonso de 2003, en *Archivos universitarios e historia de las universidades*, de la Editorial Dykinson en colaboración con la Universidad Carlos III de Madrid, pp. 199.

"*Los ejercicios y arengas de estilo versarán sobre materias útiles y correspondientes a la dignidad del acto que presidirá el Cancelario, a quien compete conferir el grado, teniendo a su diestra al Rector y a la izquierda al Decano de la Facultad: se dará fin con un elogio en latín, que pronunciará el nuevo Doctor, en alabanza del Monarca que con tanto celo promueve los estudios generales de las ciencias útiles a la Religión y al Estado*".

Unos años más tarde, en 1836, el Plan general de Instrucción pública, conocido como Plan Duque de Rivas, menciona por primera vez en la historia de las Universidades, la importancia de que el grado de doctor implique estudios superiores al grado de licenciado. Así, en su artículo 99 dice:

"*... los estudios y exámenes necesarios para el grado de licenciado han de ser superiores a los que se exijan para el de bachiller, y los de doctor, superiores a los de licenciado*".

Los cambios de gobierno, tan frecuentes en esta época, hacen que no sean efectivas las intenciones del Plan Duque de Rivas hasta 1843, año en el que bajo el gobierno del general Espartero se reorganizan los estudios universitarios y por primera vez aparecen en la universidad española "*dos cursos superiores y voluntarios que median desde el grado de licenciado al grado de doctor*".

El 17 de septiembre de 1845, siendo Ministro de Gobernación Pedro José Pidal, se emite un real decreto mediante el que se aprueba un nuevo plan de estudios. En este nuevo plan se denominan *estudios superiores* a los que sirven para obtener el grado de doctor en las diferentes Facultades.

Así, en la Facultad de Filosofía existen tres tipos de doctorados: en Letras, en Ciencias y en Filosofía.

Para doctorarse en Letras, el alumno tiene que aprobar, en dos años como mínimo los estudios de:

- Lengua hebrea o árabe, dos cursos.
- Literatura antigua.
- Literatura moderna extranjera.
- Literatura española.
- Ampliación de filosofía.
- Historia de la filosofía.

Para doctorarse en Ciencias, en dos años por lo menos, se tienen que realizar los estudios de:

- Segundo curso de lengua griega.
- Cálculos sublimes.
- Mecánica.
- Geología.
- Astronomía.
- Historia de las ciencias.

El que haga los estudios necesarios para ser doctor en Ciencias y doctor en Letras, podrá optar al título de doctor en Filosofía.

Para obtener el título de doctor en las Facultades de Teología, Jurisprudencia y Farmacia será necesario sólo un año más de estudios, mientras que el doctorado en Medicina exige dos años más de estudios después de la licenciatura.

Este real decreto también menciona que para obtener el grado de Doctor, los aspirantes tenían que realizar dos ejercicios que se efectuaban públicamente ante una comisión de cuatro catedráticos.

Para el primer ejercicio, la Facultad tenía dispuestas 100 preguntas sobre los estudios propios del doctorado. El candidato sacaba tres al azar, y de ellas elegía una para componer sobre ella un discurso o memoria, cuya lectura durase entre tres cuartos de hora y una hora. El doctorando tenía cuatro días para componer el discurso. Después de su lectura, durante un cuarto de hora, cada uno de los cuatro examinadores podía hacer las consideraciones oportunas sobre el tema tratado.

El segundo ejercicio consistía en una lección oral sobre otro de los puntos, sorteado del mismo modo y para cuya preparación el candidato disponía de una hora.

El 8 de julio de 1847, siendo Ministro de Comercio, Instrucción y Obras públicas, Nicomedes Pastor Díaz, se emite un real decreto en el que se modifica Plan Pidal.

Para obtener el grado de doctor ahora sólo es necesario realizar un ejercicio consistente en una lección oral, pronunciada ante una comisión compuesta por el decano y cuatro catedráticos. Los puntos a sortear ahora son cincuenta en vez de cien.

El grado de doctor se conferirá siempre individualmente y el acto de investidura se llevará a cabo de la siguiente manera:

> "*El candidato escribirá una tesis sobre un punto cualquiera de la facultad o ciencia, y la imprimirá entregando al Rector, con la anticipación de ocho días, el suficiente número de ejemplares para repartir al claustro. Llegado el día de la ceremonia, después de ser introducido en la sala por el padrino, como en el caso de la licenciatura, leerá el impreso que se distribuirá entre los circunstantes, teniendo obligación el graduante de sostener su tesis, durante media hora, contra los argumentos que le hagan los catedráticos. Transcurrido que sea dicho tiempo, el presidente le recibirá el juramento y conferirá el grado con las insignias, hecho lo cual se retirará acompañado del padrino y de los bedeles, después de abrazar a los doctores y de dar las gracias al claustro*".

A este acto asistirán los doctores de todas las Facultades que quieran hacerlo.

Esta es **la primera vez que se menciona la palabra tesis en relación con el doctorado**, siendo la tesis un discurso que había de leerse en el acto de investidura como doctor, y no el resultado de un trabajo de investigación necesario para ser aprobado, como lo es en nuestros días.

El 28 de agosto de 1850, siendo Ministro de Comercio, Instrucción y Obras públicas, **Manuel de Seijas Lozano**, se emite un Real Decreto **reformando el plan de estudios** vigente. En cuanto a los grados académicos nos dice:

> "*Para optar a los grados de Bachiller y Licenciado, será preciso haber obtenido, al menos, dos notas de bueno en los cursos correspondientes a cada uno de ellos: exceptuase el de Licenciado en Farmacia, que sólo exigirá dicha nota en el curso oral que se le asigna además de los dos años de práctica privada.*
>
> *No se optará tampoco al grado de doctor sin haber obtenido una nota de sobresaliente en el curso o cursos que para él se exigen.*
>
> *El que no reuniere las notas arriba expresadas estudiará, antes de recibir el grado correspondiente, otro año más para repetir las materias en que hubiere sacado nota inferior a la de bueno o sobresaliente, según los casos*".
>
> "*El grado de doctor en todas las facultades se conferirá únicamente en Madrid.*
>
> *La investidura del grado de bachiller se hará por el decano, expidiéndose en título por el Rector de la Universidad.*
>
> *La investidura del grado de licenciado se hará por los Rectores de las Universidades, y el título se expedirá por la Dirección general de Instrucción pública.*
>
> *La investidura del grado de doctor se hará por el Ministro, que podrá delegar este cargo en un alto funcionario del ramo. El acto será solemne y a claustro pleno.*
>
> *El título de este grado se expedirá por el Ministro*".

El 10 de septiembre de 1851, siendo Fermín Arteta Ministro de Comercio, Instrucción y Obras públicas, se emite una Real Orden con el reglamento para la ejecución del plan de estudios del 28 de agosto de 1850.

En cuanto a la investidura del grado de Doctor, los artículos 476 a 479 de dicho Reglamento nos dicen:

> "*El grado de doctor se conferirá siempre individualmente de la manera que sigue: el candidato escribirá una **tesis** sobre un punto cualquiera de la facultad o ciencia, y la imprimirá, entregando al Rector, con la anticipación de ocho días, el suficiente número de ejemplares para repartir al claustro. Llegado el día de la ceremonia, después de ser introducido en la sala por el padrino como en el caso de la licenciatura, leerá el impreso, que se distribuirá entre los circunstantes. Acto continuo le contestará uno de los catedráticos con un discurso relativo al objeto de la tesis y el modo con que la ha desempeñado, y en seguida el presidente le recibirá el juramento y le conferirá el grado con las insignias: hecho lo cual, se retirará acompañado del padrino y los bedeles después de abrazar a los doctores y de dar gracias al claustro.*

A este grado concurrirán los doctores de todas las facultades que quieran hacerlo, previo aviso por la secretaría de la Universidad, pero la asistencia será obligatoria para los catedráticos.

En estos actos se podrá dar a la ceremonia toda la pompa que los graduados quieran, pero no se exigirá de ninguno que contribuya forzosamente para ello: no se permitirán, sin embargo, refrescos ni obsequio alguno de esta clase.

Rector Los discursos y la tesis de que hablan los artículos anteriores se presentarán al antes de leerse los primeros y de imprimirse la segunda, para que los revise y les ponga su visto bueno, sin cuyo requisito no se verificarán los actos".

Estando esta ley en vigor, el 2 de julio de 1854, D. Ambrosio Moya de la Torre lee en la Facultad de Filosofía, sección de Ciencias Físico-Matemáticas, de la Universidad Central de Madrid la tesis doctoral: "*Sobre la importancia filosófica del Cálculo de Probabilidades",* ésta es **la primera tesis doctoral sobre Cálculo de Probabilidades leída en España**[3].

Un año más tarde, el 15 de noviembre de 1855, D. Antonio Aguilar y Vela, con motivo de su investidura como doctor, lee, en esa misma Facultad, **la segunda tesis doctoral española sobre Cálculo de Probabilidades**, titulada: "*De la importancia del estudio del Cálculo de Probabilidades*".

D. Antonio Aguilar y Vela

D. Antonio Aguilar y Vela nace en Madrid en la madrugada del 20 de noviembre de 1820. Es hijo de D. Francisco Javier Aguilar y Austria, guardia del Real Cuerpo de Guardias del Rey, natural de Madrid, y de Dña. Lorenza Vela, natural de Grajanejos, diócesis de Sigüenza. Es de pelo castaño, ojos negros y rostro afable.

A los 14 años empieza a estudiar en la Facultad mayor de Filosofía de Alcalá de Henares.

En agosto de 1843 obtiene dos premios del Collége Royal D'Angouléme, uno de Matemáticas Especiales y otro de Física.

En el curso académico de 1845 a 1846 obtiene la calificación de sobresaliente en la asignatura de Matemáticas sublimes en la Universidad de Madrid.

Ese mismo año, el 24 de agosto de 1846, a los 25 años de edad, se presenta a los exámenes para obtener el título de Regente de segunda clase, en la asignatura de Matemáticas, en la Facultad de Filosofía de la Universidad de Madrid. Obtiene el apro-

[3] Véase la "Primera Tesis Doctoral sobre Cálculo de Probabilidades leída en la Universidad Central de Madrid", Escribano Ródenas y Busto Caballero (2004), págs. 287-300 en "Historia de la Probabilidad y la Estadística II. A.H.E.P.E.

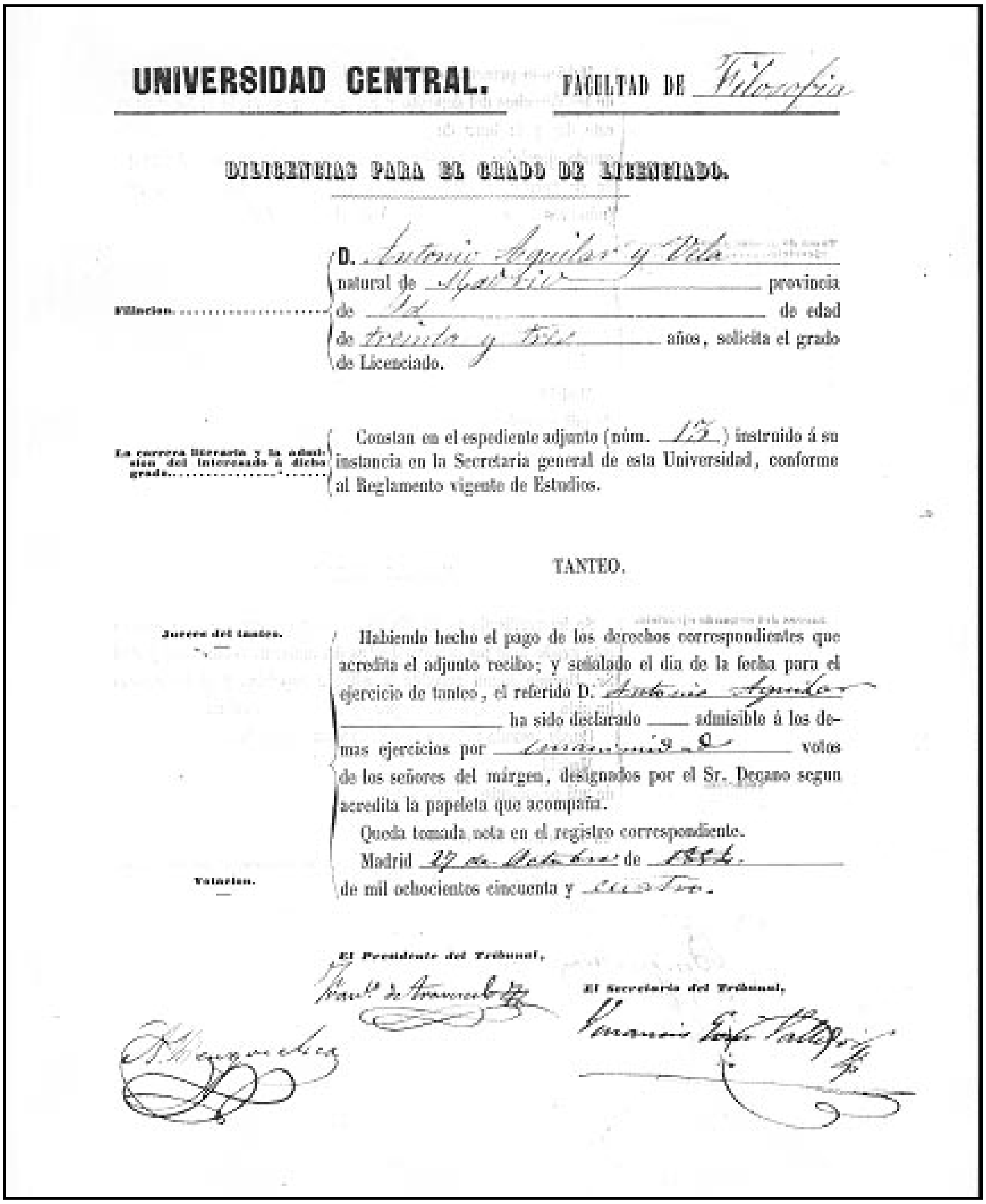
bado por unanimidad del tribunal, siendo los jueces los Sres. Valledosa, Cortazar y Bocherini.

Según el capítulo 1º del título I de la sección cuarta del Reglamento de 22 de octubre de 1845, los ejercicios y requisitos para obtener el título de Regente de segunda clase, nivel más bajo del profesorado, eran los siguientes:

> "*Los ejercicios para obtener la regencia de segunda clase serán dos.*
>
> *El primero consistirá en un programa, que dirigirá el aspirante al rector de la universidad donde quiera examinarse, y que habrá de comprender el objeto e importancia de la asignatura a cuya enseñanza intenta dedicarse; tratados que la misma abraza; orden y extensión con que deben estudiarse; método que ha de seguirse en las explicaciones; sistema que más convenga adoptar, y número de lecciones en que puede darse la enseñanza; libros útiles para servir de texto, y autores que deberá consultar el profesor. A este programa acompañará el aspirante una relación documentada de su carrera y méritos literarios, acreditando además ser español en el goce de sus derechos, y mayor de veinte y un años.*
>
> *El catedrático de la asignatura de que se trate y otros dos profesores o regentes, elegidos por el rector y presididos por el decano de la facultad de filosofía, compondrán la comisión de censura, la cual examinará u calificará el programa, procediendo, después de haber conferenciado sus individuos entre sí, a la votación secreta para aprobarlo o desecharlo.*
>
> *El rector comunicará al aspirante el resultado favorable o adverso a la votación; señalándole, en el primer caso, el día y hora en que será admitido a examen, o devolviéndole, en el segundo, el programa y documentos que hubiere presentado.*
>
> *El segundo ejercicio será público, y consistirá en las preguntas y objeciones que por espacio de dos horas harán al aspirante los individuos de la comisión de censura acerca de los diversos puntos contenidos en su programa; y si versare el examen sobre asignatura de ciencias físicas y naturales apoyará aquél con experimentos o demostraciones en los mismos objetos las teorías que hubiere impuesto, siempre que la comisión lo juzgue oportuno.*
>
> *Concluido el acto saldrá de la sala el aspirante y los individuos de la comisión, después de conferenciar acerca de aquél y con presencia de los méritos literarios del interesado, procederán a su aprobación o reprobación por medio de votación secreta. Si resultare aprobado se remitirá al Gobierno el acta de examen con arreglo al modelo nº 13, para que se expida el título correspondiente*".

Más tarde, con el título de Regente de segunda clase oposita a la Cátedra de Astronomía de la Universidad Central de Madrid.

El 20 de junio de 1854 se le concede el título de Bachiller en Filosofía presentando el título de Regente de segunda clase, necesario ahora para obtener el título de Licenciado.



UNIVERSIDAD CENTRAL. FACULTAD DE Filosofía

DILIGENCIAS PARA EL GRADO DE LICENCIADO.

Filiacion. D. Antonio Aguilar y Vela natural de Madrid provincia de íd de edad de treinta y tres años, solicita el grado de Licenciado.

La carrera literaria y la admision del interesado á dicho grado. Constan en el espediente adjunto (núm. 13) instruido á su instancia en la Secretaría general de esta Universidad, conforme al Reglamento vigente de Estudios.

TANTEO.

Jueces del tanteo. Habiendo hecho el pago de los derechos correspondientes que acredita el adjunto recibo; y señalado el dia de la fecha para el ejercicio de tanteo, el referido D. Antonio Aguilar ha sido declarado admisible á los demas ejercicios por unanimidad votos de los señores del márgen, designados por el Sr. Decano segun acredita la papeleta que acompaña.

Queda tomada nota en el registro correspondiente.

Madrid 27 de Octubre de 18.. de mil ochocientos cincuenta y cuatro.

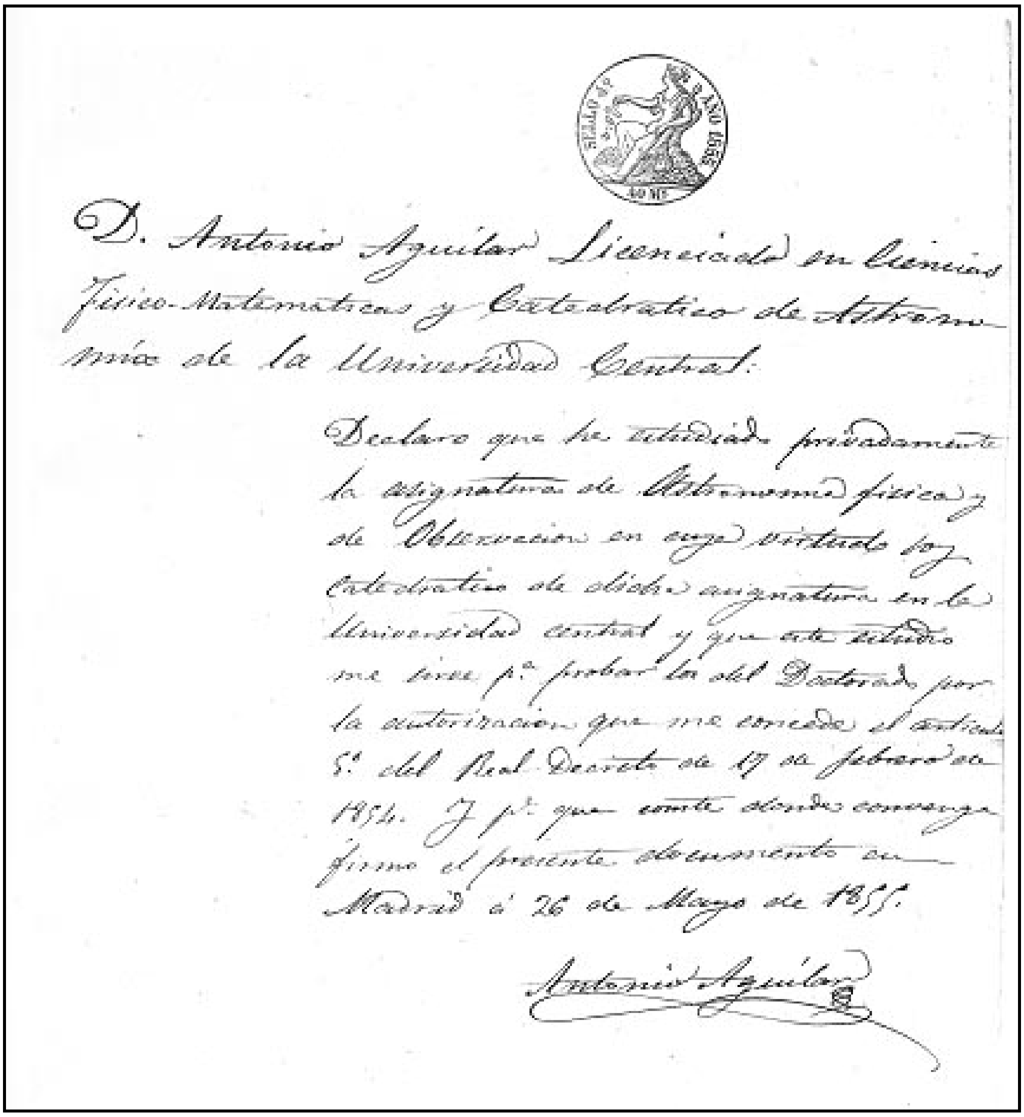
Votacion.

El Presidente del Tribunal,

El Secretario del Tribunal,

Diligencias para el Grado de Licenciado de D. Antonio Aguilar y Vela

El 27 de octubre del mismo año, a los 34 años de edad, se presenta al primer ejercicio, de tanteo, para el grado de licenciado en la Facultad de Filosofía de la Universidad Central, y es declarado admisible, por unanimidad de los tres jueces designados por el decano, para realizar los demás ejercicios de dicho grado.



D. Antonio Aguilar Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas y Catedrático de Astronomía de la Universidad Central.

Declaro que he estudiado privadamente la asignatura de Astronomía física y de Observación en cuya virtud soy Catedrático de dicha asignatura en la Universidad central y que este estudio me sirve p.a probar la del Doctorado por la autorización que me concede el artículo 5.º del Real Decreto de 17 de febrero de 1854. Y p.a que conste donde convenga firmo el presente documento en Madrid á 26 de Mayo de 1855.

Antonio Aguilar

Solicitud para probar la asignatura de Astronomía física y observación de doctorado

Previo pago de los derechos de examen se le cita al segundo ejercicio a las 11 de la mañana del 21 de marzo de 1855. En el sorteo de los temas saca los números 3, 44 y 92, eligiendo el 92, titulado: “Noticia de las varias tentativas que se han hecho para determinar la verdadera posición y magnitud de la tierra, resultados que se han obtenido e indicación de si en estas tentativas se ha omitido alguna circunstancia que hubiera convenido tener presente”. Aprueba por unanimidad de los tres jueces designados por el decano.

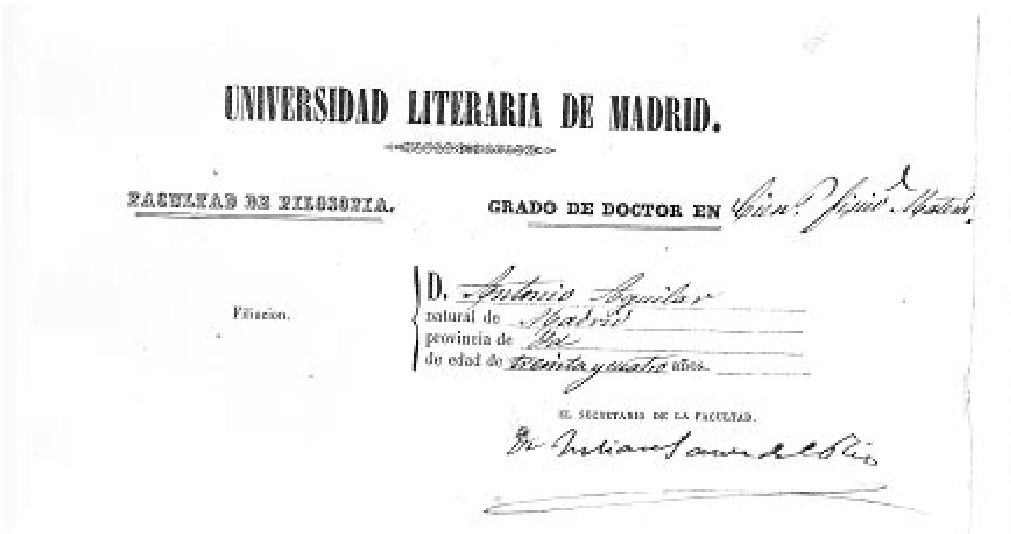
El tercer ejercicio lo realiza al día siguiente, a las 12 de la mañana. En este caso saca a sorteo los puntos 6, 4 y 71, eligiendo el 71, que llevaba por título: “Conductividad de los cuerpos para el calor estudiado matemáticamente y explicación de esta propiedad". Aprueba también por unanimidad.

El día 4 de abril de 1855 recibe la investidura del grado de licenciado en la Facultad de Filosofía de la Universidad Central. Previo pago de los derechos para la expedición del título de licenciado, el 16 del mismo mes la secretaría de dicha Facultad, remite al Ministerio el acta y las cartas de pago correspondientes, para la expedición de dicho título.

Siete meses más tarde, el 9 de noviembre de 1855, realiza el ejercicio para obtener el grado de doctor en la Facultad de Filosofía de la Universidad de Madrid, sección de Ciencias Físico-Matemáticas. A las 10 de la mañana se verifica el sorteo de los puntos, eligiendo el número 8 de entre los tres que sacó al azar: el 3, el 8 y el 49. El doctorando tiene que componer una memoria *exponiendo la parte histórica de las cuestiones que han dado origen al método o cálculo de las variaciones e indicar algún ejemplo de aplicación* y luego leerla en los términos que indicaba el Reglamento. Los cinco jueces le aprueban por unanimidad.

Unos días más tarde, el 15 de noviembre, recibe la investidura del grado de doctor. En este acto lee la tesis: "*De la importancia del estudio del Cálculo de Probabilidades*", siendo ésta, como ya se ha mencionado anteriormente, la segunda tesis doctoral leída en España sobre Cálculo de Probabilidades.

El acta del grado de doctor es remitida a la Dirección de instrucción pública el 8 de febrero de 1856, para la expedición del título correspondiente, título que D. Antonio Aguilar recoge en la Secretaría general el 22 de agosto de 1856.


UNIVERSIDAD LITERARIA DE MADRID.

FACULTAD DE FILOSOFIA.

GRADO DE DOCTOR EN [illegible]

Filiacion.

D. Antonio Aguilar
natural de Madrid
provincia de [illegible]
de edad de treinta y cuatro años.

EL SECRETARIO DE LA FACULTAD.

[illegible]

Diligencias para el grado de doctor de D. Antonio Aguilar y Vela

D. Antonio Aguilar y Vela llega a ser catedrático de Matemáticas y Astronomía en la Universidad Central y secretario perpetuo de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid[4], donde lee su discurso de entrada "Breve reseña de la historia y progresos de la Astronomía" el día 6 de mayo de 1855. Además en el curso académico 1958-59, realiza el discurso de inauguración de la Universidad Central de Madrid. Dentro de la Real Academia de Ciencias, contesta al discurso de recepción de los académicos D. Carlos Ibáñez de Ibero, en 1963 (que se titula "Origen y progresos de los principales instrumentos de Astronomía y Geodesia"), y D. Francisco de P. Márquez y Roco, en 1875 (que se titula "Breve reseña de la historia de las ciencias náuticas en nuestra península").

La segunda tesis doctoral sobre Cálculo de Probabilidades leída en España

En el momento en que D. Antonio Aguilar y Vela se doctora, está en vigor el Reglamento del 19 de agosto de 1847 que indica, que en el acto de investidura del grado de doctor, el doctorando debía leer una tesis sobre un punto cualquiera de su Facultad. Esta tesis no era un trabajo de investigación, sino únicamente un discurso para leer en el solemne acto de la investidura como doctor. Este discurso, debía imprimirse con anterioridad a su lectura y entregarse previamente al Rector, quien más tarde lo distribuiría entre el claustro.

La tesis de D. Antonio Aguilar titulada: "*De la importancia del estudio del Cálculo de Probabilidades*", es un buen indicador del estado en que se encontraba en aquella época el Cálculo de Probabilidades en nuestro país.

La tesis comienza haciendo una breve alusión a la historia del Cálculo de Probabilidades, citando a grandes matemáticos como Pascal, Leibnitz, Laplace y Fourier como precursores de esta rama del conocimiento, que es, como señala D. Antonio, "*en gran manera filosófico por su objeto, y apreciabilísimo por su directa e inmediata utilidad*".

Utilidad de la que se aprovechan, ya en aquella época, no sólo las ciencias puras y las ciencias naturales, sino también las humanidades y las ciencias sociales, como nos lo indica el párrafo 2º de la página 4 de la citada tesis:

[4] MARTÍN PLIEGO, F.J. (1997): "Notas sobre la historia de la probabilidad en España" en Zubía nº 15, p. 161. Logroño.

DE LA IMPORTANCIA DEL ESTUDIO

DEL

CALCULO DE LAS PROBABILIDADES.

DISCURSO

LEIDO

EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL

POR

Don Antonio Aguilar y Vela,

AL RECIBIR EL GRADO DE DOCTOR

EN LA FACULTAD DE FILOSOFIA,

Seccion de ciencias físico-matemáticas.

MADRID:

Imprenta de Ancos, calle de Cuchilleros, número 3.

1858.

Portada de la tesis doctoral de D. Antonio Aguilar y Vela

"*Por esta razón la teoría de las probabilidades, que es hoy una de las aplicaciones importantes del análisis, no solo interesa al hombre dedicado a las ciencias de observación, por ser el instrumento con que mide en las que practica la exactitud que tienen o la confianza de que son dignas, sino que con más altas y debidas aspiraciones lleva la luz y la exactitud matemática a todas las ciencias que se refieren al hombre y a su estado social, suministrando datos seguros al jurisconsulto y al hombre de estado para leer con facilidad el grado de prosperidad o de penuria en que se encuentra su país*".

Como buen conocedor de la Astronomía, D. Antonio Aguilar habla de esta ciencia como la primera que comprendió la gran importancia del Cálculo de Probabilidades, estudiando minuciosamente cómo los posibles errores cometidos en cada observación, debidos a la mala precisión del aparato con el que se observa, la habilidad del observador, etc., siguen una misma ley, representada por una curva. Así, se puede considerar como aceptable una observación si sigue la ley común y como falsa si no la sigue.

Como ejemplo del uso del Cálculo de Probabilidades para verificar teorías, nos cita al caballero d'Angos:

"*... que inventando en Malta observaciones de un cometa jamás observado, describió una órbita ficticia, por adquirir la gloria que realmente acompaña al que tiene la fortuna de descubrir un nuevo cuerpo celeste. Los señores Encke y Burckhardt, teniendo en cuenta la probabilidad de los errores de observación, probaron hasta la evidencia la superchería de semejantes investigaciones*"[5].

A continuación el discurso menciona cómo la Estadística, empleada desde hace tiempo en las ciencias políticas, debe valerse también del Cálculo de Probabilidades.

En este sentido, en las páginas 12 y 13 nos dice:

"*La estadística no se limita solamente a hacer una enumeración concienzuda de los elementos de un estado, presentando su esqueleto, por decirlo así, sino que compara un mismo pueblo en dos épocas diferentes de su existencia, para deducir cuanto ha ganado ó perdido en este período, y los elementos que han sentido con mas fuerza el progreso ó la decadencia. No puede, sin embargo, multiplicarse la exigencia de estos datos estadísticos, porque debiendo presidir la idea de que el error probable sea un mínimo, la ciencia enseña que este error probable aumenta cuando se importuna a los pueblos continuamente con la necesidad de suministrar aquellos elementos estadísticos.*

Por esta razón el censo de población de España, que debiera estar determinado con un error probable de veinte mil almas, apenas podría hoy llegar a conocerse, sin la probabilidad de que ascendiera aquel error a medio millón de habitantes.

En esta ciencia, pues, el cálculo de las probabilidades debe servir para regularizar los trabajos de investigación, distribuyendo con ventaja la serie de nuestras observaciones, estimando el valor de los documentos de que hacemos uso, distinguiendo los que ejercen mas influencia, combinándose de modo que no separen de la verdad, calculando el grado de confianza que merecen los resultados obtenidos, y sustituyendo por fin en los fenómenos que nos ocupamos, la ciencia en lugar de lo que suele llamarse la práctica, y que tan poco acostumbra a diferenciarse de la rutina".

La tesis también hace referencia a la necesidad de utilizar el Cálculo de Probabilidades en la formación de las cajas de ahorros y demás asuntos económicos, así como en las decisiones de los tribunales de justicia.

[5] Discurso leído en la Universidad Central (1855), págs. 10 y 11.

Aunque tantas y tan importantes eran ya, en aquella época, las aplicaciones del Cálculo de Probabilidades, el estudio de este área del conocimiento brillaba por su ausencia en la Universidad española. Por eso, para concluir, D. Antonio Aguilar y Vela hace una severa crítica al estado en que se encontraba el estudio del Cálculo de Probabilidades en la Universidad Central y por extensión en todas las Universidades de nuestro país, diciendo:

> "*Sensible es, Excmo. Señor, que en la Universidad Central, donde tan grande impulso ha recibido el cultivo de todas las ciencias, no se haya dado cabida al estudio del cálculo de las probabilidades, si no con la extensión que hoy abraza este importante ramo del análisis, al menos en sus teorías más elementales, en sus aplicaciones prácticas más comunes. Muchas son las ventajas que reportaría el país de la agregación de esta ciencia a alguna de las asignaturas de la sección de ciencias físico-matemáticas, y ya que de algunos años a esta parte se da tan justa importancia al estudio de las últimas, hágase lo mismo con sus principales aplicaciones, y entonces podrá mejor comprenderse la utilidad que en sí encierra el estudio de las ciencias exactas*"[6].

La petición de D. Antonio Aguilar y Vela, al igual que la de otros matemáticos de la época, de que se estudie Cálculo de Probabilidades en alguna de las asignatura de la sección de ciencias físico-matemáticas es desestimada. La nueva Ley Moyano, primera Ley de Instrucción pública española, que se establece en 1857 y que crea las Facultades de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, no incluye ninguna materia de Estadística ni de Cálculo de Probabilidades entre las asignaturas de estas Facultades, sin embargo, sí se incluye a la Estadística como una de las asignaturas de la Facultad de Derecho en la sección de Administración.

Hay que esperar al 14 de marzo de 1933, día en el que Fernando de los Ríos, ministro de Instrucción pública y Bellas Artes, presenta un Proyecto de Ley sobre las Bases de la Reforma Universitaria, para que en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central se cree la asignatura *Cálculo de probabilidades y Estadística matemática*, primera cátedra de Estadística en una Facultad de Ciencias española.

Conclusiones

El grado de doctor se confiere a principios del siglo XIX con grandes pompas y faustos a partir de unos ejercicios que realiza el doctorando. Es a raíz del Real Decreto de 8 de Julio de 1848, siendo ministro Nicomedes Pastor Díaz, cuando se menciona por primera vez la palabra "tesis", en relación con un escrito sobre un punto cualquiera de la facultad, que debe realizar el doctorando, quien además debe defenderla durante media hora ante los argumentos que le hagan los catedráticos.

A pesar de que el cálculo de probabilidades y la estadística en general no se contempla en ningún lugar de ningún plan de estudios, durante la primera mitad del siglo XIX,

[6] Discurso leído en la Universidad Central (1855), págs. 14 y 15.

se leen dos tesis doctorales con este tema, justo a comienzos de la segunda mitad de este siglo. La primera tesis doctoral sobre el cálculo de probabilidades es leída en la Universidad Central de Madrid, en 1.854, por D. Ambrosio Moya de la Torre y Ojeda en la única universidad del reino donde se puede acceder al grado de doctor. La segunda tesis doctoral se realiza en 1855, y es leída por D. Antonio Aguilar y Vela.

Aunque la primera de estas tesis coincide con la segunda en la multitud de aplicaciones del cálculo de probabilidades y la estadística a las diferentes ramas del saber como instrumento de progreso en ellas, la primera tiene una concepción completamente filosófica sobre el cálculo de probabilidades, mientras que la segunda contiene ya los conceptos matemáticos de equiprobabilidad, curvas geométricas para representar las expresiones de las que se obtiene la probabilidad, y límites de funciones.

Además en esta segunda tesis doctoral se llama la atención por la no inclusión de esta ciencia en alguna de las asignaturas de la sección de ciencias físico-matemáticas de la Facultad de Filosofía de la recientemente creada Universidad Central de Madrid, donde el impulso al cultivo de todas las ciencias ha sido muy grande.

Es en el año 1933 cuando por primera vez se crea una cátedra de *Estadística* en una Facultad de Ciencias española, la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Madrid, donde se impartió la asignatura de “Cálculo de Probabilidades y Estadística Matemática”.

BIBLIOGRAFÍA

AGUILAR Y VELA, A. (1855): "De la importancia del estudio del Cálculo de las Probabilidades". Discurso leído en la Universidad Central. Imprenta de ANCOS. Madrid.

BUSTO CABALLERO, A. I.; ESCRIBANO RÓDENAS, Mª C. (2002): "Primeros intentos para la organización de la enseñanza de la Estadística en España: cursos de estadística y sus aplicaciones 1.950-1952" en *Historia de la Probabilidad y de la Estadística*. A.H.E.P.E. Madrid, pp. 193-204.

BUSQUETA, J. J.; PEMÁN, J. (2002): "Les universitats de la Corona d´Aragó, ahjir i avui". Estudis històrics. Pòrtic. Biblioteca Universitaria. Universitat de Lleida.

COLECCIÓN LEGISLATIVA DE ESPAÑA. Imprenta Nacional. Madrid.

CRUZ MUNDET, J. R. (ed.) (2003): "Archivos universitarios e historia de las universidades". Universidad Carlos III. Editorial Dykinson. Madrid.

ESCRIBANO RÓDENAS, M. C.; BUSTO CABALLERO, A. I. (2002): "La creación en España de la primera Escuela de Estadística" en *Historia de la Probabilidad y de la Estadística*. A.H.E.P.E. Madrid, pp. 205-220.

ESCRIBANO RÓDENAS, M. C.; BUSTO CABALLERO, A. I. (2004): "La Primera Tesis Doctoral sobre Cálculo de Probabilidades leída en la Universidad Central de Madrid", en *Historia de la Probabilidad y la Estadística II*. A.H.E.P.E. Madrid, pp. 287-300.

GARMA, S. (1990): "Las Matemáticas en España en la primera mitad del siglo XX" en *Actas de las XV Jornadas Luso-Espanholas*. Vol. VI. Didáctica e Historia da Matemática, pp. 3-65. Universidad de Evora.

GARMA, S.; SÁNCHEZ RON, J. M. (1989): "La Universidad de Madrid y el Consejo Superior de Investigaciones Científicas" en *Revista Alfoz*, pp. 59-77.

GIL DE ZÁRATE, A. (1855). "De la instrucción pública en España". Madrid. Impresión del Colegio de Sordomudos, 3. Varios Tomos.

MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): "Notas sobre la historia de la probabilidad en España" en *Revista Zubía*, nº 15. Logroño, pp. 155-167.

MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): "Historia de la probabilidad en España" en *Revista de Historia Económica.* Año XV nº 1. Universidad Autónoma de Madrid, pp. 161-184.

MOYA DE LA TORRE, A. (1854): "Sobre la importancia filosófica del cálculo de las probabilidades". Discurso leído en la Universidad Central. Imprenta de José María Ducazcal. Madrid.

MIGUEL ALONSO, A. (2003): "Los estudios de doctorado y el inicio de la tesis doctoral en España 1847-1900", en *Archivos universitarios e historia de las universidades.* Universidad Carlos III. Editorial Dykinson. Madrid, pp. 197-217.

VEA MINUESA, F. (1995): *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*. Cuadernos de Historia de la Ciencia. Universidad de Zaragoza.

VIÑAO FRAGO, A. (1982): Política y educación en los orígenes de la España contemporánea. Examen especial de sus relaciones en la enseñanza secundaria. Editorial Siglo XXI.

CAPÍTULO 14

El estudio de la mortalidad en España en el siglo XIX

Sonia de Paz Cobo
Juan Manuel López Zafra
Universidad Complutense de Madrid

Introducción. El estudio de la mortalidad y la supervivencia en la actualidad

El análisis de la mortalidad y supervivencia de una población es hoy en día muy distinta de como lo era hace menos de 100 años. Básicamente, una tabla de mortalidad es el instrumento estadístico que describe el proceso de extinción de una población hasta la desaparición del último de sus componentes, bajo la experiencia de mortalidad de un período dado. Puede presentarse bajo dos formas, la tabla de cohorte y la actuarial.

La primera supone la observación longitudinal de una población a partir de un suceso determinante hasta o bien su completa extinción o bien la finalización del proceso de observación. Las principales dificultades que se suponen la construcción de este tipo de tablas son por ejemplo el tamaño de las poblaciones en las que se calculan, el tiempo de seguimiento requerido y las pérdidas debidas a migraciones u otras causas, por lo que la tabla de cohorte se usa habitualmente en el análisis de supervivencia de los ensayos clínicos, que se realizan sobre muestras de población más pequeñas y durante un tiempo más corto.

La tabla actuarial, por su parte, presenta una descripción transversal de todas las edades de la población objeto de estudio a partir de las experiencias de mortalidad y supervivencia durante un breve espacio de tiempo, generalmente un año. Depende directamente de las tasas de mortalidad por edad del año en que se construye. Generalmente se construye sobre una cohorte artificial de 10.000 o 100.000 individuos que recoge la experiencia de mortalidad real de la población, por lo que suele ser una herramienta de muy alta eficacia en la comparación de poblaciones en el espacio y en el tiempo. Puede presentarse completa, con todos los grupos de edad representados, o reducida, con intervalos de edad agrupados en quinquenios (salvo para el primer año de vida, que siempre resulta de especial interés). Sus limitaciones son las propias derivadas de la dependencia de registros oficiales.

Los elementos básicos de una tabla de mortalidad, tal y como se recoge por ejemplo en Ortega Osona (2001) o en Vázquez y otros (2003) son los que señalamos en la siguiente Tabla 1.

Es evidente que la actividad de seguros sobre la vida sería completamente inviable sin el conocimiento profundo y pormenorizado de la probabilidad de muerte de cada uno de los asegurados, bajo unas condiciones determinadas. Sin embargo, siendo la tabla de mortalidad un instrumento básico en el análisis socio-demográfico de cualquier país, y fundamental para asegurar la vida de las personas, su evolución hasta la situación presente ha pasado por muy diversas etapas. Lo que trataremos de mostrar en los próximos epígrafes es precisamente la lenta evolución de las mismas en los albores de la demografía española, desde la segunda mitad del siglo XIX y hasta comienzos del siglo XX, con una parada previa, para nosotros imprescindible, en el año 1693, cuando el astrónomo inglés Edmund Halley elaboró la primera tabla de mortalidad de la que queda constancia histórica.

Símbolo	Interpretación
x	Edad específica
d_x	Número de fallecimientos a la edad x, $d_x = {}_nl_x * {}_nq_x$
l_x	Supervivientes a la edad x
P_x	Número de individuos a la edad x
${}_nM_x$	Tasa de mortalidad a la edad x
${}_nq_x$	Factor de muerte entre las edades x y $x+n$
${}_np_x$	Probabilidad de supervivencia entre las edades x y $x+n$, ${}_np_x = 1 - {}_nq_x$
${}_nl_x$	Supervivientes a la edad x
${}_nL_x$	Número de años vividos por el total de la cohorte
T_x	Total de años vividos a partir de la edad exacta x
${}_ne_x$	Esperanza de vida a la edad x
Nota: el subíndice posterior representa el momento inicial del intervalo, el anterior a la amplitud.	

TABLA 1. Elementos básicos de una tabla de mortalidad

Las tablas de Halley (1693)

Como acabamos de señalar, no puede entenderse el seguro sobre la vida de las personas sin una correcta estimación de la probabilidad de supervivencia de las mismas a una edad determinada. La fijación de la prima, básica a todos los efectos, supone un conocimiento lo más importante posible acerca de estas y otras cuestiones. Ya en 1693, el matemático, filósofo y astrónomo E. Halley, consciente de la importancia que la actividad aseguradora iba adquiriendo, estudió el problema de la supervivencia de las personas y publicó sus conclusiones en *Philosophical Transactions*. Como el mismo autor señala (pág. 596) no es la primera vez que la ciencia estudiaba la cuestión, pues previamente a él Petty, basándose en las observaciones del Capitán J. Graunt, había ya abordado el tema. Tras señalar los defectos que según el autor desmerecían los trabajos anteriores, hace alusión al registro de fallecimientos de la ciudad de Breslau, durante el período 1687 a 1691, alabando su precisión ("*seeming to be done with all the Exactness and Sincerity possible*", p. 597); efectivamente, en la citada ciudad se recogían ya entonces las edades y el sexo de los fallecidos.

A partir de la observación del número total de nacimientos y muertes del período considerado, el insigne astrónomo dedujo el promedio anual de nacimientos (1238) y de fallecimientos (1174), observando un incremento (obviamente promedio) vegetativo de 64 individuos, "*of about a 20th part*". Planteando como hipótesis, pues, un número de nacimientos de 1238 anuales, el autor señala que, a partir del registro de fallecimientos, se puede deducir que 348 no alcanzan el año de vida, y que el resto, 890, alcanzan ese primer año. Y así, sucesivamente, va determinado para cada edad el número de muertes correspondientes de acuerdo con la cifra inicial de nacimientos, para finalmente plantear una tabla de supervivencia para 1000 nacidos (pág. 600). Uno de los usos que el autor considera como relevantes de la tabla construida es la de formar una pirámide de población, que recogemos en la siguiente Figura 1[1].

Asimismo, considera que las tablas deberían permitir evaluar la tasa de mortalidad (o de vitalidad, como él prefiere denominarla) para cada una de las edades. Resultan también de utilidad para calcular la esperanza de vida, en los términos que el propio autor señala (traducción de los autores):

> *Así, por ejemplo, cojamos un individuo de 30 años de edad, de los que tenemos 531, cuya mitad es 265; tal es la cifra que resulta estar entre los 57 y 58 años; por lo que un hombre de 30 años debería razonablemente esperar vivir entre 27 y 28 años.*

[1] Halley no recoge la diferencia de mortalidad entre hombres y mujeres, por lo que a efecto de construcción de la pirámide se ha planteado al 50%.

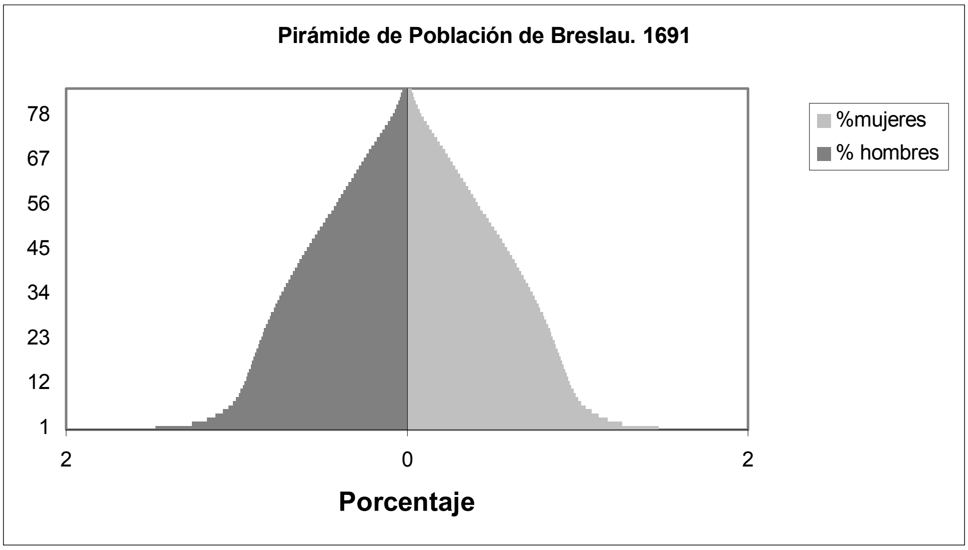


FIGURA 1. Elaboración propia a partir de Halley (1693)

Y debido a esta característica, señala que el precio del seguro sobre la vida debería estar regulado, pues si bien un individuo de 20 años tiene una posibilidad entre cien de morir en un año, en el caso de uno de 50 tal posibilidad se reduce a una entre treinta y ocho.

El resto de consideraciones, altamente interesantes, están todas relacionadas con el importe de la prima de distintos tipos de seguros de vida sobre una, dos o tres cabezas, considerando los años que a cada una le queden por vivir.

Los inicios. La *tabla de seguros sobre la vida* de la Compañía General Española de Seguros de 1841, y las *Tarifas y Tablas de premios e imposiciones en los seguros contra incendio y sobre la vida humana* de 1842

Uno de los primeros intentos de asegurar la vida en España se debe a la Compañía General Española de Seguros, conocida como GES. En 1841 publica un folleto bajo el nombre de *Tablas de Seguros sobre la Vida* en el que ya en el primer capítulo advierte claramente acerca de sus sanas intenciones, señalando que

> *Nadie sabe cuánto tiempo durará la vida, y pocos son los hombres que en su juventud puedan considerar con tranquilidad la suerte que cabrá a sus familias cuando a ellos les acometa la muerte.*

Sin expresar a lo largo de la publicación en ningún momento tabla alguna de mortalidad con experiencia española, como en la página 4 señala ("no poseemos en España tablas de mortalidad bastante exactas"[2]), plantea sin embargo una aproximación mediante un término medio de las publicadas en "12 puntos distintos de Inglaterra, Francia, Austria, Prusia, Holanda, Suiza, Suecia y Sileria", para señalar que de cada 1000 nacidos mueren 500 antes de los 15 años, sólo 359 llegan a los 40, 293 a los 50, 216 a los 60, 128 a los 70, 44 a los 80, 5 a los 90 y 1 a los 93. Para inmediatamente añadir que "un conjunto de circunstancias que a ningún observador se ocultan, hace que en España sea mayor comparativamente la mortalidad; á lo menos es una presunción muy fundada". Debemos considerar que el objetivo de la publicación de GES es completamente mercantilista a la par que didáctico, en el sentido de tratar de, al mismo tiempo, vender un producto novedoso en España (el seguro sobre la vida) y concienciar a los potenciales tomadores de las virtudes del producto. Y, desde esa perspectiva, cabe entender entonces afirmaciones como la realizada en la página 5, glosando las maravillas de la institución aseguradora:

> *Si además se examina que los hábitos de economía son poco usuales entre nosotros los españoles, y que de los gastos superfluos o de los viciosos puede sacarse generalmente el premio anual destinado a asegurar el provenir de las familias, se reconocerá el principio de alta moralización inherente al establecimiento de los seguros sobre la vida humana.*

Finalmente, plantea un conjunto de siete tablas (págs. 17 a 27) con la primas pagaderas por los tomadores para distintas de operaciones de seguro. Eso sí, en ningún momento plantea tabla de mortalidad alguna con experiencia española o distinta, lo que nos recuerda la afirmación de Merino (1866, p. 4), en la que afirmaba la imposibilidad de que una compañía aseguradora "se digne regalarnos una tabla de mortalidad".

Un año después la propia GES publica un nuevo folleto (GES 1842) en donde amplia el del año anterior con el seguro contra incendios; sólo a partir de la p. 11 se ocupa de los seguros sobre la vida humana, pero en condiciones análogas a las del año anterior; esto es, planteando un conjunto de tablas (págs. 14 a 21) con las primas para distintos tipos de seguro (algunos ciertamente interesantes, como el de dos cabezas con reversión al cónyuge, denotando una aptitud actuarial importante) y sin mostrar en momento alguno referencia a tabla de mortalidad alguna con experiencia española.

Las primeras tablas de mortalidad españolas

Casi doscientos años serían necesarios para que en España se abordase definitiva y públicamente la cuestión de la supervivencia. Tras la publicación en 1863 de la *Memoria sobre el movimiento de la población de España en los años de 1858, 1859, 1860 y 1861* por la Junta de Estadística, D. Miguel Merino ("sabio astrónomo", en palabras de Ramón y Cajal, a quien como el gran científico mismo señala debe "el

[2] Que nosotros sepamos, ni bastante exactas ni siquiera aproximadas; sin embargo, nos cabe la duda tras la afirmación.

singular privilegio de ser académico de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid[3]") publica, dos años después, su informe sobre *Reflexiones y conjeturas sobre la ley de mortalidad en España*. Es éste el primer análisis riguroso, científico, que se efectúa en España sobre la cuestión, junto con otro debido a Coll, citado por Sorribas (1882, epígrafe 14, p. 23), del que ya entonces no quedaba constancia en biblioteca alguna. El propio Merino, humildemente, considera que el trabajo por él llevado a término puede ser mejorado, y por eso lleva a plantear la aspiración (pág. 4) "(...) de que alguien, o dotado de más talento, o poseedor más abundante y mejores datos, corrija cuanto en estos apuntes considere digno de enmienda, y borre cuanto, procediendo sin pasión, juzgue erróneo, arbitrario o ilusorio".

A la vista de su Discurso de Ingreso en la Real Academia de Ciencias (ocurrido dos años más tarde) (Merino, 1868), y sin ser ambas obras más que un botón de muestra de la obra del autor, podemos afirmar casi sin temor a equivocarnos que nos encontramos ante un gran científico, lector empedernido, curioso, conocedor de las más actuales tendencias científicas del momento en Europa. Reflejo de ello es su aproximación metodológica al estudio de la mortalidad en España, donde comienza a desgranar las aportaciones de Quetelet a la cuestión en Bélgica. Señala los dos procedimientos empleados por aquél en el estudio de la mortalidad en Bélgica, así como el que siguen las compañías de seguros sobre la vida. Siendo los dos primeros (pág. 4) "el examen y discusión de las *listas* o *registros mortuorios*" (cursiva del autor), y "la comparación de los habitantes, clasificados por edades, de los fallecimientos que anualmente ocurren, distribuidos de la propia manera"; y el tercero, "muy exacto y sencillo en teoría, que consiste en anotar por de pronto las fechas de nacimiento de un grandísimo número de personas, para compararlas más adelante con aquellas otras en que los antes recién nacidos van sucesivamente falleciendo", procedimiento que el propio autor entiende ser "punto menos que irrealizable", y que hoy conocemos tablas de mortalidad de cohorte, tal y como hemos señalado previamente. Pero él mismo observa la gran ventaja de este método, al reflejar la tabla la mortalidad de los asegurados, "una clase especial de la sociedad, que no es la alta, ni la baja, ni la corrompida, ni la imprevisora; sino la media y morigerada; aquella que, no pocas veces, de puro virtuoso raya en incauta y demasiado crédula, o de avariciosa en desatentada y loca[4]" (pág. 4). Eso sí, es absolutamente consciente de la imposibilidad de que una compañía aseguradora "se digne regalarnos una tabla de mortalidad".

Entra entonces el autor (pág. 5) a señalar las características de la Memoria en la que centra su análisis, lamentándose de la agrupación de los fallecidos en bloques de edad de cinco en cinco años. Observa que el promedio de las cinco listas mortuorias (correspondientes a los años de 1858 a 1862) es relativamente homogéneo, y plantea la afirmación que guiará su estudio hasta el final, que no es otra más que "la mortalidad de la especie humana obedece a una ley bien definida, y que, por lo tanto, no es

[3] Ramón y Cajal, S. (1984). Recuerdos de mi vida: Historia de mi labor científica. Alianza Editorial. 4ª Edición. Madrid.

[4] Recordemos el título del trabajo, "Reflexiones y conjeturas ...", para no sorprendernos por este tipo de comentarios, bastante habituales por otro lado en la literatura científica de la época.

vana quimera el empeño de encontrar la fórmula o representación matemática de semejante ley (...)" (pág. 5).

Señala entonces su método de trabajo, consistente en repartir uniformemente la diferencia de supervivientes en cinco años consecutivos a lo largo de los cinco años, idéntico procedimiento al empleado por Halley casi doscientos años antes (de lo que el autor es plenamente consciente) así como en todos los países que habían atendido la cuestión hasta al menos 1843, cuando Quetelet modifica el procedimiento para Bélgica. Merino es sabedor de los problemas que tal proceder supone, y lo plantea claramente al señalar "los defectos (...) de haber supuesto no sólo estacionaria la población (...) sino estacionaria o constante también la distribución relativa por edades del número total de habitantes (...)" (pág. 6). Nuevamente, en la página 7 de su disertación, arremete contra la estacionariedad, "principio equivocado, cuyo inmediato efecto es el de exagerar (sic) sensiblemente la mortalidad en el primer tercio o mitad de la vida, cuando, como sucede en España, y en otras naciones es mayor la diferencia, guarda el número de nacidos con el de fallecidos la relación de 4 a 3." Pese a ello, y a efectos de comparación de los resultados con los obtenidos por Quetelet para Bélgica años antes, el autor mantiene la hipótesis de estacionariedad al creer "que inconveniente no es tan grave, como a primera vista parece", así como por su "sencillez" y por haber sido "con tanta frecuencia empleado por estadistas respetables" (pág. 8). Acomete entonces la labor de modificar "la última columna de la tabla inserta en la página 78 de la *Memoria sobre el Movimiento de la Población de España*, en tabla de mortalidad", y compararla con la ya citada de Bélgica debida a Quetelet. Sus conclusiones (pág. 11) son muy interesantes, pues observa que la esperanza de vida al nacer en España es menos de la mitad, que a partir de los 11 años de edad y hasta los 51 ó 56 la mortalidad en ambos países "aunque algo mayor siempre en España, tiende, no obstante, a confundirse o igualarse", que en los 20 años siguientes vuelve a ser superior la mortalidad española que la belga, mientras que a partir de los 76 años y hasta el final de la vida vuelve a diferir escasamente.

Procede el autor (págs. a 25) a realizar un conjunto de ajustes para tratar de resolver el problema de la supuesta no estacionariedad de la serie de defunciones. Sin embargo, un análisis detallado refleja inconsistencias que se nos escapan. Así, claramente plantea el autor que su objetivo es obtener la relación por cociente entre los fallecidos a una edad determinada respecto de los nacidos (tasa de mortalidad a una edad dada), con la gran dificultad de deducirla desde el momento en que las cifras están agregadas en intervalos de 5 en 5 años. Plantea entonces un conjunto de fracciones compuestas en las que respectivamente (pág. 16) se recogen las relaciones por cociente de la agregación del número de muertos entre dos edades respecto de la agregación de los vivos en el mismo rango de edades; así, define el siguiente conjunto de identidades:

$$\text{(a)}\ \frac{M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5}{V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5} = 0{,}090$$

$$\text{(b)}\ \frac{\sum_{i=0}^{10} M_i}{\sum_{i=0}^{10} V_i} = 0{,}057 \qquad \text{(d)}\ \frac{\sum_{i=1}^{10} M_i}{\sum_{i=1}^{10} V_i} = 0{,}037$$

$$\text{(c)}\ \frac{\sum_{i=1}^{5} M_i}{\sum_{i=1}^{5} V_i} = 0{,}059 \qquad \text{(e)}\ \frac{\sum_{i=6}^{10} M_i}{\sum_{i=6}^{10} V_i} = 0{,}012$$

(*Nota:* las notaciones simbólicas de las ecuaciones (b) a (e) son nuestras, para simplificar).

Sin embargo, y tal y como hemos comprobado, mientras que las ecuaciones (a) y (b) utilizan tanto en la serie de fallecidos como en las de vivos valores que suponen un ajuste en progresión aritmética de las cifras (esto es, si 0 a 1 años de edad viven 367799 individuos, y mueren 80124, y en el siguiente grupo de 1 a 6 años de edad viven 1653308 y mueren 94258, para ajustar las cifras de vivos y muertos anuales en cada uno de los grupos de edades intermedias se ha supuesto un incremento acumulativo en progresión aritmética de razón (1653308-367799)/5 en cuanto a los vivos anuales, y de (94258-80124)/5 en cuanto a los muertos; procediéndose de forma análoga para ajustar los valores entre los 6 y 10 años de edad), para las ecuaciones (c) a (e), sin embargo, se emplea como cifra de vivos y muertos anual la que resulta de aplicar el promedio de vivos y de fallecidos en un año del quinquenio 1858 a 1862, tal y como señala el autor en la página 14. La razón de tal diferencia en la aproximación, de tal incoherencia, se nos escapa completamente, tal y como hemos señalado previamente.

De cualquier manera, el autor prosigue empleando tal método para proceder al ajuste de los distintos tramos de edad y así poder construir la que él mismo denomina “verdadera tabla de mortalidad”, en la que se recogen las distintas tasas de mortalidad por edades hasta los 100 años (Cuadro C, apéndice de cuadros numéricos). A partir de ella, y mediante sencillos ajustes de interpolación, plantea en su forma habitual la tabla de mortalidad (realmente, como él mismo señala, de supervivencia) en el denominado Cuadro D.

Tras proceder a mostrar en el Cuadro E a una comparación con las tablas belgas de Quetelet, en el F a recoger un vastísimo conjunto de datos procedentes de las más diversas tablas de mortalidad publicadas hasta entonces en muy distintos países y por muy diferentes autores (y metodologías), finalmente culmina su enorme trabajo construyendo la tabla de vida probable de acuerdo con la concepción actuarial del término, esto es, número de años que a una persona de edad determinada vivirá. Para ello, de acuerdo con la doctrina, estudia el número de vivos a cada edad y observa la edad en la que sólo la mitad de los efectivos permanecen; en sus propias palabras, siempre más bellas e interesantes, “los años que deben transcurrir para que 1000 personas, o acabadas de nacer, o de 5, 10, 20, 40 y 75 años cumplidos, queden reducidas por la muerte justamente a la mitad", y efectúa nuevamente la comparación con las tablas empleadas en el Cuadro anterior.

Tras solicitar benevolencia "no por mal disfrazado orgullo, sino porque creemos necesitarla, y hasta merecerla, en gracia siquiera de la intención que nos ha guiado" (pág. 29), finaliza Merino su trabajo señalando futuras vías de investigación, consciente de las posibilidades que este tipo de estudios sugieren. Así, pide que se amplíe su investigación

> *separando del conjunto de la población los habitantes de los grandes centros de los que cultivan los campos, de los que casi baña el Océano los que ocupan el litoral Mediterráneo, de los moradores de una región o cuenca de un río caudaloso los correspondientes a otra u otras distintas, del sexo masculino el femenino, y daremos por bien empleados los ratos, y no de ocio, que al estudio de esta materia nos ha sido forzoso hasta cierto punto consagrar.*

Encontramos pues en la obra de Merino el primer análisis serio de la mortalidad en España, que, siendo ciertamente escaso en cuanto a lo que hoy en día solicitan y emplean las entidades de seguros, no desmerece en absoluto, sino más bien todo lo contrario. Tiene la virtud el autor de ser consciente de las limitaciones de su estudio, y plantea lo que toda entidad aseguradora querría conocer, esto es, unas tablas de mortalidad con experiencia distinta según la zona, el sexo y el medio de vida del asegurado. Esta cuestión la señalará posteriormente en su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias, del que inmediatamente nos ocuparemos, al afirmar entonces (pág. 51) que la ley de mortalidad varía "de un país y de un tiempo a otros, y de uno a otro sexo, y de una profesión a otra distinta, y en las distintas edades de la vida".

Es en 1868, dos años después de este magnífico trabajo, cuando D. Miguel Merino ingresa en la Real Academia de Ciencias. Su discurso de ingreso supone una constante defensa de la importancia de la teoría de la probabilidad (que él denomina "cálculo de probabilidades") en la ciencia; así, dedica las primeras cuarenta y cinco páginas a glosar su trascendencia mediante un muy interesante análisis de las acepciones y aplicaciones de los clásicos Pascal, Fermat, Huygens, Newton, Laplace, Bernouilli (todos ellos), etc., demostrando un conocimiento profundo rayano la erudición. Se detiene en varios momentos en la figura de De Moivre, y es en la segunda ocasión en la que a él se refiere cuando por vez primera hace referencia no ya a su clásica y trascendental obra (*De mensura sortis*, de 1711, ampliada en 1716 y publicada entonces bajo el definitivo título *The doctrine of chances*), sino en otra menos conocida, "complemento indispensable y glorioso del anterior" (pág. 45), fundamental para el desarrollo de la moderna ciencia actuarial, como es *Annuities on lives*, de 1724. El interés de Merino en la cuestión queda pues demostrado, no siendo pues su anterior obra de 1866 un mero divertimento científico. Así, señala (pág. 46) que "lo que De Moivre se propuso fue fundar la doctrina matemática de las rentas y los seguros sobre la vida humana", para posteriormente volver al tema señalando que "sin la previa posesión de una *tabla de mortalidad* o de *supervivencia*, no hay medio de plantear y resolver problema alguno, con la materia de las rentas y seguros sobre la vida humana de cualquier modo relacionada" (cursiva del propio autor).

De la importancia de la obra de Merino es consciente el Académico de número Aguilar, quien en su respuesta al discurso del primero se refiere a las tablas de mortalidad de 1866 como "la primera tabla de mortalidad apropiada a nuestro país", comparándola en importancia histórica a las de Halley, Wargentin (suecas) y Quetelet, astrónomos todos ellos como Merino.

La aportación de Sorribas

Con el lema "No asegurarse es desconocer un deber y jugar con la muerte sin esperanza de ganancia positiva, una partida que tiene por apuesta el porvenir de la esposa e hijos", presenta y gana el jurista Juan Antonio Sorribas y Zaidín (Calasanz, 1835) su "Memoria dilucidando un tema de seguros sobre la vida" al Premio de la Academia de Jurisprudencia y Legislación de Barcelona de 1882. La obra, sumamente interesante, consta de cinco capítulos, respectivamente *De la Estadística* (págs. 1 a 26), *De los Seguros sobre la Vida* (págs. 27 a 40), *Reseña Histórica de los seguros sobre la vida* (págs. 41 a 72), *Examen crítico de las disposiciones contenidas en el Proyecto de Código de Comercio, referente a los Seguros de vida* (págs. 73 a 93) y *Bases que deberían regular la constitución de las compañías aseguradoras españolas y sus relaciones con los asegurados* (págs.. 93 a 101 y última).

Hombre de gran cultura y espíritu abierto, define a la estadística (pág.13) como "esa ciencia virgen entre nosotros que resuelve con matemática precisión algunos de los problemas sociales más difíciles". Respecto de la cuestión que directamente nos ocupa en el presente artículo, en el epígrafe 12 de la página 20 cita las tablas de Dinamarca, Noruega, Inglaterra, Suecia, Francia, Bélgica, Baviera, Suiza y Prusia, señalando que la mortalidad difiere muy poco en las edades medias pero mucho en cambio en la infancia y la vejez. Así, "de cada 100 varones nacidos mueren 14 en Dinamarca, 11 en Noruega, 16 en Suecia, 16 en Inglaterra, 20 en Francia, 16 en Bélgica, 32 en Baviera, 23 en Suiza y 21 en Prusia; alcanzando sólo por cada 500 hombres la edad de 99 años un noruego, la de 92 un sueco, la de 96 un inglés, la de 95 un francés, la de 96 un belga, la de 97 un bávaro y la de 92 un suizo".

Perfecto conocedor de las estadísticas nacionales, y siempre en el primer capítulo, en la página 21 se refiere a la Memoria sobre el Movimiento de la Población en España publicada en 1863 por parte de la Junta de Estadística del Reino, "tan nutrida de datos como buena doctrina demográfica (...) Posteriormente publicó el Movimiento de la Población durante los años 1862, 63, 64, 65, 66 y 67 con datos y resúmenes sumamente interesantes". Asimismo, lamenta (pág. 22) "la poca importancia que da el Boletín[5] a la clasificación de las defunciones por edades. Las engloba en siete grupos, o sea de 0 1 años, de 1 a 5 años, de 5 a 10, de 10 a 20, de 20 a 40, de 40 a 60 y de más de 60, cuando para estudiar las leyes de mortalidad es necesario conocerla en todas las edades". Más adelante, en la página 24, señala algo parecido cuando indica

[5] Se refiere el autor al Boletín de Estadística Demográfico-Sanitaria de la Península e Islas Adyacentes, publicado por la Dirección General de Beneficencia y Sanidad del Ministerio de la Gobernación.

que "si se hubiera dado a la estadística la importancia que merece, habríamos estudiado la vida del hombre en tres de sus principales períodos, de 1 a 5 años, de 15 a 20 y de 90 en adelante, deduciendo las reglas convenientes para dirigir su desarrollo en el primero, preservarse en el segundo y conservarle en el último".

En cuanto a la aproximación metodológica, hace referencia tanto a las tablas de Coll (de las que, como hemos señalado, y como el propio Sorribas reconoce, no queda ejemplar alguno) como a las de Merino, y parece que recoge el guante de aquél cuando señala ciertas deficiencias en ellas, pues según Sorribas (pág. 23) "mueren más niños de los que supone el Sr. Merino y viven más tiempo algunas de las pocas personas que alcanzan la edad nonagenaria". Para elaborar sus tablas, Sorribas sigue las recomendaciones de múltiples congresos internacionales, como los de Bruselas (1853), París (1855) o Budapest (1876), entre otros; de éste último, lo destaca pues en él "se tomaron diversos acuerdos para la formación de tablas de mortalidad". Como datos, emplea los publicados por la Junta General de Estadística del Reino, además de "los que nos hemos proporcionado en tres poblaciones de 38.000, 19.000 y 3.000 habitantes. (…) puerto de mar y agrícola comercial la primera; de llanura seca y fértil con industria agrícola y fabril la segunda; y cuenca y cañada con ocupación agrícola la tercera". De las tres maneja las defunciones de todas las edades.

El principal problema al que el autor se enfrenta, como pone de manifiesto en las págs. 24 y 25, es el de la deducción de la mortalidad de cada edad, al venir agrupados por quinquenios los datos oficiales; como solución, plantea el empleo de los procedimientos de Bertillou, Quetelet, Beaumhauer y Herman, ajustándolos mediante cálculo a los datos ciertos de las tres poblaciones de las que obtiene los datos primarios.

Partiendo de las defunciones en un quinquenio, define como M la mortalidad en el período, como D la diferencia de mortalidad "según las mejores tablas de supervivencia y datos recogidos en nuestra patria", como S la suma de tales diferencias (que suponen la unidad del total), como T el tipo (10.000 empleado en la tabla), como M' la mortalidad total, como P la mortalidad de un año o parcial, y como X la correlación numérica de cero a 100 años. Así, deduce la mortalidad anual, P, según la relación

$$P = \frac{MD}{S}$$

y la mortalidad de cada 10.000 habitantes como

$$X = \frac{PT}{M'}$$

para finalizar planteando, en la última página del primer capítulo, y lo que a efecto de nuestro trabajo supone la mayor aportación del trabajo, la "Tabla de mortalidad y vitalidad española, formada en vista de los datos estadísticos oficiales de los años 1860, 61, 62, 63, 64, 65, 66 y 67, y de otros particulares".

Conclusiones

A lo largo de las páginas anteriores hemos tratado de señalar cómo el estudio de la demografía comenzó de forma científica en España en la segunda mitad del s. XIX; son altamente destacables, por su rigor y su riesgo, los estudio de Merino y Sorribas. Pueden encontrarse errores en ambos, pero de lo que no cabe duda es que su metodología fue, en todo caso, acertada y acorde con los paradigmas científicos vigentes en aquellos momentos. Los errores, que efectivamente existen, sólo pueden atribuirse a las dificultades inherentes a la explotación de unos datos estadísticos francamente mejorables. El trabajo por ellos realizado supuso la semilla para obras de mayor profundidad, como fueron las de Puyol (1911) o Fuentes (1927), pero ya en el s. XX.

BIBLIOGRAFÍA

COMPAÑÍA GENERAL ESPAÑOLA DE SEGUROS CONTRA INCENDIO (1841): *Tablas de seguros sobre la vida*. Imp. de don Eusebio Aguado, Madrid.

COMPAÑÍA GENERAL ESPAÑOLA DE SEGUROS CONTRA INCENDIO (1842): *Tarifas y tablas de premios e imposiciones en los seguros contra incendio y sobre la vida humana*. Imp. Carrera de San Jerónimo, Madrid.

FUENTES MARTIÁÑEZ, M. (1927): *Tablas de mortalidad, supervivencia, vida media y vida probable*. Madrid.

HALLEY, E. (1693): *An Estimate of the Degrees of the* Mortality *of Mankind, drawn from curious* Tables *of the* Births *and* Funerals *at the City of* Breslaw; *with an Attempt to ascertain the Price of* Annuities *upon* Lives. Philosophical Transactions, nº 196, enero.

MERINO, M. (1866): *Reflexiones y conjeturas sobre la ley de mortalidad en España*. Eduardo Cuesta, Madrid.

MERINO, M. (1868): *Discursos leídos ante la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en la recepción pública del Señor D. Miguel Merino* [contestación de Antonio Aguilar]. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

ORTEGA OSONA, J. A. (2001): "Revisión de conceptos demográficos" en *Contribuciones a la economía de La Economía de Mercado, virtudes e inconvenientes*; http://www.eumed.net/cursecon/colaboraciones/index.htm. Consultado el 4 de mayo de 2005.

PUYOL LALAGUNA, M. (1911): *Tabla de mortalidad española ajustada analíticamente*. Ricardo F. de Rojas, Madrid.

SORRIBAS Y ZAIDÍN, J. A. (1883): *Memoria dilucidando un tema de seguros sobre la vida*. Jaime Jepús, Barcelona.

VÁZQUEZ, E.; CAMAÑO, F.; SILVI, J.; ROCA, A. (2003): *La tabla de vida: una técnica para resumir la mortalidad y la sobrevivencia* en Boletín Epidemiológico/OPS, Vol. 24, nº 4, págs. 6 a 10.

CAPÍTULO 15

Un episode insolite des relations scientifiques franco-iberiques: le sejour au Portugal et en Espagne de Maurice Frechet, en janvier et fevrier 1942[1]

MARC BARBUT[2]
Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales (CAMS)

Maurice Frechet (1878-1973)

Biographie sommaire

- 10 septembre 1878 : naissance à Maligny (dans la province française de Normandie) dans une famille de religion réformée.
- 1890-1900 : études secondaires au lycée Buffon, à Paris. Parmi ses professeurs, le grand mathématicien Jacques Hadamard (1865-1963).

[1] Je remercie les professeurs José M. Arribas (département de sociologie, UNED, Madrid), Gabriela Bordalo-Hauser et Luis Saraiva (département de mathématiques, Université de Lisbonne) pour les précieux renseignements complémentaires qu'ils m'ont fournis, ainsi que mes collègues parisiens B. Locker et L. Mazliak qui m'ont signalé l'existence d'archives sur cet épisode.

[2] Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales (CAMS), E.H.E.S.S., 54 boulevard Raspail 75270 Paris cedex 06.

- 1900 : reçu à l'Ecole Normale Supérieure.
- 1906 : soutenance de sa thèse de doctorat, sur les espaces métriques abstraits. Ce travail, totalement original pour l'époque, marque les débuts de la topologie générale.
- 1907-1914 : professeur à Besançon, à Rennes et (1910) à Poitiers, où il occupe la chaire laissée vacante par Henri Lebesgue.
- 1914-1918 : mobilisé en qualité d'interprète entre l'armée anglaise et l'armée française.
- 1919 : professeur à la faculté des sciences de Strasbourg. Premiers contacts avec la statistique (Lexis et Bortkewitsch y ont été professeurs lorsque Strasbourg était allemande) et avec les sciences sociales : rencontre et collaboration avec le sociologue Maurice Halbwachs.
- 1928 : professeur à la faculté des sciences de Paris où il occupera successivement les chaires de mathématiques générales, de calcul différentiel et intégral (1935) et de probabilités et physique mathématique (1941).
- 1949 : mise à la retraite.
- 1956 : élu à l'Académie des sciences de Paris.
- 4 juin 1973 : décès à Paris.

Maurice Fréchet a entretenu une abondante correspondance scientifique avec des mathématiciens du monde entier, notamment aux USA et en URSS.

Sans opinion politique tranchée, il était pacifiste par conviction. Il fut également un partisan très actif de l'adoption de l'Espéranto comme langue internationale.

Aperçu sur l'œuvre scientifique et pédagogique

Les intérêts scientifiques de Maurice Fréchet ont toujours été dans trois domaines principaux : la topologie générale, le calcul des probabilités et la statistique.

En outre, il n'a jamais négligé ni les applications des mathématiques, ni la vulgarisation.

De tout cela témoigne la liste des livres qu'il a publiés (il fut d'ailleurs l'auteur de plus de 300 articles et notes dans des revues scientifiques).

- 1924 (avec M. Halbwachs), *Le calcul des probabilités à la portée de tous*, Paris, Dunod.
- 1928, *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Paris, Gauthier-Villars.
- 1928 (avec H. Roullet), *Nomographie. Pratique et construction des abaques*, Paris, Armand Colin.

- 1930 (avec R. Romann), *Représentation des lois empiriques par des lois approchées, à l'usage des chimistes, physiciens, ingénieurs et statisticiens*, Paris, Eyrolles.

Dans le *Traité de calcul des probabilités et de ses applications*, sous la direction d'Emile Borel, Paris, Gauthier-Villars :

- 1936, *Généralités sur les probabilités. Eléments aléatoires*, tome 1, fascicule 3, livre 1 du *Traité*.
- 1938, *La méthode des fonctions arbitraires. Les événements en chaine dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*, tome 1, fascicule 3, livre 2.

Viennent ensuite :

- 1940, *Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants*, 1er fascicule, Paris, Hermann.
- 1943, *Idem*, 2e fascicule.
- 1955, *Les mathématiques et le concret* Paris, Presses Universitaires de France.

Ce dernier livre est un recueil d'articles et de conférences de vulgarisation de M. Fréchet, de 1925 à la date de publication.

Maurice Fréchet et la statistique

Dès le début des années 1920 et jusqu'à sa mort, Maurice Fréchet a toujours travaillé dans divers domaines de la statistique, tant du point de vue de la théorie que de celui des applications : il a traité lui-même de nombreuses données empiriques.

Ses principaux travaux ont porté :

- Sur la « loi de l'écart maximum », dont il a donné la première formulation (1927),
- Sur la répartition des revenus et la statistique des inégalités économiques et sociales
- Sur la médiane, et la première loi de Laplace,
- Sur le coefficient de corrélation, qu'il appelait, de façon plus précise, « coefficient de linéarité »,
- Sur les tableaux croisés dont les marges sont fixées.

Membre, à partir de 1931, de l'*Institut international de statistique* (I.I.S.), il en présida les congrès internationaux de Genève (1937), Lyon (1948), Paris (1949) et Amsterdam (1954).

Maurice Fréchet et les mathématiciens ibériques

Toute sa vie, Maurice Fréchet entretint des liens, de collaboration parfois, ou seulement épistolaires souvent, avec des mathématiciens espagnols et portugais, dont plusieurs furent ses élèves lors de séjours à Paris.

Les archives laissées par M. Fréchet à l'Académie des sciences de Paris contiennent de nombreuses lettres, toujours écrites en français, de ses correspondants ibériques.

Parmi les portugais, Manuel Z. Nunes, João Remy Texeira Freire, A. Pereira Gomes, et surtout Jose Ribeiro de Albuquerque et Antonio Aniceto Monteiro, sur lequel nous aurons à revenir.

En Espagne, Rey Pastor (inévitablement), Esteban Terradas, Juan Bejar, Manuel Balanzat, R. San Juan et principalement Sixto Ríos, J. Gallego Díaz et Tomás Rodríguez Bachiller, dont il sera question dans la suite.

Ajoutons que Maurice Fréchet, a toujours encouragé, la *Revista Matematica Hispano-Americana*, la revue *Trabajos de Estadistica* de Madrid, et aidé à la parution de *Portugaliae Mathematica* à la fin des années 1930. Il a d'ailleurs publié des articles dans ces trois revues.

Sa contribution à la création, en 1950, du premier cycle d'études de statistique à l'université de Madrid est bien connue. Nous renverrons, sur ce sujet, à ses propres articles et à celui de Sixto Ríos dans *Trabajos de Estadistica* (Cuaderno II, 1950, p. 157-219) et aux articles de Carmen Escribano Ródenas et Ana Isabel Busto Caballero sur les « Cursos de Estadistica y sus applicaciones (1950-1952) » dans les actes du premier congrès de l'A.H.E.P.E. (Madrid, 2002, p. 193-219).

Invitations et demarches

Un voyage insolite

Les archives de l'Académie des sciences de Paris comportent un dossier consacré à un séjour que Maurice Fréchet fit au Portugal fin janvier et début février 1942, puis à Madrid au milieu du mois de février de la même année.

Que ce voyage ait pu avoir lieu, à cette époque, est à première vue tout à fait surprenant : en 1942, la France, vaincue après l'invasion allemande du printemps 1940, était de fait, à Paris en particulier, dans la dépendance des autorités militaires allemandes qui occupaient la plus grande partie du pays.

Très rares furent les français auxquels ces autorités permirent d'aller dans un pays étranger. Que M. Fréchet ait été l'un d'eux est d'autant plus étonnant que nul ne peut mettre en doute son patriotisme et ses convictions républicaines. Et nous étions également à l'époque où, en Espagne, la dictature instaurée par Francisco Franco était la plus dure ! Or, si les allemands seuls pouvaient autoriser la sortie de la France occupée, les espagnols seuls pouvaient autoriser l'entrée dans leur territoire ; et il en était de même du Portugal, sous la dictature d'Antonio de Oliveira Salazar.

Pour comprendre, il faut examiner la chronologie et bien voir le contexte.

L'invitation portugaise

En mai, juin et juillet 1940, en pleine débâcle puis défaite de l'armée française, pendant le bouleversement dramatique que connut alors notre pays, le mathématicien portugais Aniceto Antonio Monteiro écrit plusieurs lettres adressées à M. Fréchet (lettres du 12 mai, 10 juin, 28 juin, 31 juillet 1940, plus une lettre seulement datée « mai 1940 »[3]). Ces lettres sont toutes à en-tête de la revue *Portugaliae Mathematica*, dont A. Monteiro a été l'un des créateurs ; elles sont manuscrites et en français.

Leur objet : d'une part, essayer d'avoir des nouvelles d'un autre mathématicien portugais, qui, en 1940, résidait à Paris où il préparait une thèse sous la direction de M. Fréchet, José Rebeiro de Albuquerque ; d'autre part, demander à M. Fréchet de venir un mois au Portugal, en février 1941, pour y donner des cours et prononcer des conférences sur invitation officielle de l'*Instituto para la alta cultura* de Lisbonne, qui finançait la bourse de thèse à Paris de J.R. de Albuquerque.

Antonio Monteiro, l'un des principaux mathématiciens portugais du 20^{e} siècle, avait longtemps séjourné à Paris (depuis 1931, au minimum, d'après ce qu'il écrit) où il prépara, sous la direction de M. Fréchet, une thèse de topologie générale soutenue en 1936. De retour à Lisbonne en 1937, il sollicite un poste à l'*Ecole française de Lisbonne*, auquel un portugais ne pouvait être nommé qu'avec l'accord de son gouvernement ; Maurice Fréchet soutint chaleureusement cette démarche ; malgré cela, ce fut un refus. Refus motivé (lettre de l'Ecole française de Lisbonne à M. Fréchet en date du 6 avril 1937) par une « circonstance spéciale dont on ne peut faire état par écrit ».

Cette « circonstance spéciale », il faut très probablement la voir dans les opinions politiques de Monteiro, à la formation desquelles (selon ce que lui-même écrit dans une des lettres mentionnées ci-dessus) son séjour à Paris avait joué un rôle important : Monteiro était un opposant au régime dictatorial d'Antonio Salazar. A telle enseigne qu'il fut, en 1945, expulsé du pays et dû s'exiler à Rio de Janeiro d'abord, puis à Bahia Blanca (Argentine) où il occupa une chaire de professeur à l'*Universidad del Sur*. Rentré au Portugal en 1974, après la « révolution des œillets », il y mourut au début des années 1980.

Ajoutons que la correspondance entre Monteiro et Fréchet, sur des questions de technique mathématique essentiellement, continua pendant les années d'après-guerre.

---

[3] Avec l'effondrement de la France et l'exode de la majeure partie de sa population, qu'une lettre parvienne à son destinataire était très aléatoire. D'où la multiplication de ses missives par A. Monteiro. À signaler : la lettre du 31 juillet parle aussi … de Topologie !

L'invitation espagnole

C'est A.A. Monteiro, probablement, qui informa son ami le mathématicien madrilène Tomás Rogriguez Bachiller, de l'éventualité d'un voyage à Lisbonne de M. Fréchet. Quoi qu'il en soit, Bachiller entreprend des démarches pour obtenir que Fréchet puisse séjourner à Madrid sur son chemin de retour du Portugal. Ceci est attesté, dans les « archives Fréchet » à l'Académie des Sciences de Paris, par une lettre du 3 janvier 1941 de Joseph Fayet, de l'Institut français de Madrid, au délégué à Paris du *Consejo Superior de Investigaciones Científicas* (C.S.I.C.) d'Espagne, Estelrich, pour qu'il facilite ces démarches. Une lettre du 25 janvier 1941 adressée directement à Fréchet par T.R. Bachiller le confirme.

L'invitation émanera officiellement de l'*Instituto Jorge Juan*, qui est le département de mathématiques du C.S.I.C., et de la faculté des sciences de l'*Universidad central* de Madrid.

T.R. Bachiller (1899-1980) est une vieille connaissance de Fréchet : leurs relations datent du début des années 1920, au sujet notamment d'articles dans la *Revista matematica hispano-americana* dont Rey Pastor est le directeur en titre, mais peu présent (il séjourne autant en Argentine qu'en Espagne) et Bachiller la vraie « cheville ouvrière ».

Bachiller, qui voyagea beaucoup à l'étranger au cours de sa carrière, avait séjourné à Paris dès 1923-24 ; en 1925, il traduit en espagnol un mémoire de Fréchet ; la même année, il sollicite une bourse de la fondation Rockefeller pour passer six mois à Rome auprès de Vito Volterra, puis un semestre à Strasbourg auprès de M. Fréchet.

Spécialiste de la théorie de la relativité, Bachiller devint professeur de mathématiques à la faculté des sciences de l'université de Madrid (au *Laboratorio de Matematica*, C. Santa Teresa, 8, où enseigne également, jusqu'à sa mort en 1934, son maître José Maria Plans).

Comme son ami Monteiro, il est idéologiquement républicain et — ce qui n'est pas anodin dans l'Espagne d'alors — partisan de la laïcité[4].

De longues demarches

La personnalité de chacun des deux « invitants » de Fréchet à Lisbonne et à Madrid, les relations personnelles qu'ils avaient de longue date avec lui, font comprendre qu'il ait accepté — d'emblée et sans hésitation apparemment — ces invitations.

Restaient à obtenir les visas et autorisations nécessaires. La chose n'était pas simple, car avaient à intervenir de multiples autorités.

[4] Sur T. R. Bachiller, on peut lire l'article « In memoriam », de Thomas F. Glick in *Dynamis*, Université de Granada, vol. 2, 1982, p. 403-409.

- Françaises, d'abord. Il fallait :
  1) Une autorisation d'absence émanant, en cascade, de la faculté des sciences de Paris, du Recteur de l'université (le grand linguiste Jacques Vendryès) et du Ministre de l'éducation nationale (le grand latiniste Jérôme Carcopino). Ceci pour les autorités académiques.
  2) Du Ministère des affaires étrangères à Vichy, pour le passeport, le visa de sortie du territoire et la prise en charge d'une partie des frais de mission.
  3) De la *Délégation générale en territoire occupé* (Fernand de Brinon, de triste mémoire), à Paris.
- Espagnoles et Portugaises, ensuite, dont les consulats à Paris étaient habilités à accorder les visas d'entrée dans leurs territoires respectifs.
- Allemandes, enfin. Ce sont celles-ci qui décidaient en dernier ressort. A cette époque, leur autorisation était nécessaire même pour passer de la zone occupée à la zone sud de la France (les « ausweiss » délivrés par les « Kommandantur » locales).

Dans le cas du voyage de Fréchet, il semble bien qu'une intervention (dont une lettre écrite à cet effet subsiste dans les archives) du délégué à Paris du C.S.I.C., le Señor Estelrich[5] auprès du « Propagandastaffel » (dépendant d'Otto Abetz, représentant de Hitler à Paris) eut un rôle décisif.

Estelrich fut d'ailleurs, avec Bachiller et le doyen C. Maurain de la faculté des sciences de Paris, l'un des trois « garants » qui auraient eu à répondre des éventuels écarts de conduite de M. Fréchet en Espagne ; dans l'Espagne de 1941-1942, apporter une telle garantie engageait lourdement leur responsabilité et il y fallait un certain courage.

Le nombre et la complexité de ces démarches explique que ce voyage, initialement prévu pour le début de 1941, n'ait pu finalement avoir lieu qu'un an plus tard.

Sejour au Portugal (fin janvier – début février 1942)

Lorsque Antonio Monteiro invita, en mai-juin 1940, Maurice Fréchet à séjourner au Portugal (les frais étant entièrement pris en charge par l'*Instituto Para la alta Cultura*), il prévoyait des conférences à Porto, Coïmbra et, bien entendu, Lisbonne.

Il n'y a aucune trace, dans les « archives Fréchet », d'un éventuel passage à Porto. En ce qui concerne Coïmbra, le seul document est le carton du menu d'un banquet donné en l'honneur du visiteur le 28 janvier 1942.

Sur ce que fit M. Fréchet à Lisbonne, nous avons plus de témoignages écrits dans les archives.

[5] Il serait intéressant d'en savoir plus sur Estelrich, dont je ne connais même pas le prénom. Son nom est à consonance catalane, et il fit un séjour à Barcelone pendant qu'il était en poste à Paris. Peut-être y a-t-il là une piste ?

D'une part, le programme et les horaires des conférences qu'il a données à la faculté des sciences et à l'institut français de Lisbonne. L'affichette annonçant ces conférences est recopiée ci-après. Elle permet de préciser les dates du séjour : arrivée le 20 janvier au plus tard, et départ le 7 février au plus tôt.

Programa das conferências a realizar em Lisboa
por M. Fréchet, professor na Sorbonne

Janeiro, 22

Conferência às 17,30 na Faculdade de Ciências

Les fonctions périodiques, les fonctions presque périodiques et les fonctions assymptotiquement[6] presque périodiques.

Público com cultura matemática.

Janeiro, 23

Conferência às 17,30 na Faculdade de Ciências

Application des fonctions assymptotiquement[6] presque périodiques au théorème ergodique de Birkhoff.

Interressa a matemáticos, fisicos e engenheiros.

Janeiro, 26

Conferência às 21,30 no Instituto Francês

Les origines des notions mathématiques.

Para o grande pûblico : interessante sob o ponto de vista da filosofia das ciéncias.

Fevereiro, 2

Conferência às 17,30 na Faculdade de Ciências

Les débuts de la Topologie combinatoire. Le théorème de Euler-Cauchy.

Destinada a professores dos Liceus e alunos dos dois últimos anos.

Fevereiro, 4

Conferência às 17,30 na Faculdade de Ciências

La théorie des courbes dans les espaces très généraux.

Fevereiro, 6

Conferência às 17,30 na Faculdade de Ciências

Types homogènes de dimensions.

Estas duas últimas conferências destinam-se à um auditório de matemáticos especializados

De gualguer alteraçao a êste programa será data oportunamente notícia nos jornais e em cartazes afixados nas Escolas superiores.

[6] Sic.

D'autre part, subsiste le début du manuscrit de la conférence prononcée le 26 janvier 1942 à l'Institut français. Ce manuscrit atteste que M. Fréchet fit précéder son sujet, « les origines des notions mathématiques », d'un long préambule où il évoqua les malheurs de la France, et affirma sa foi en l'avenir : « … La France renaît à l'espoir… », écrit-il notamment.

Dernière pièce du dossier qui mérite mention : sur un bout de papier, une adresse ainsi libellée « Kai Lai Chung, South Western Associated University, Yunnan Fou, China ».

Kai Lai Chung est un probabiliste renommé, maintenant très âgé, et qui a fait l'essentiel de sa carrière après la guerre, à l'université de Stanford, Californie (USA). Comme, en 1942 il était exclu qu'une lettre puisse être expédiée de Paris en Chine, il est vraisemblable que Fréchet avait l'intention d'écrire de Lisbonne à Chung, sur des questions de calcul des probabilités sans doute, car Chung commençait déjà à être connu dans le milieu des probabilistes. Si une telle lettre a été expédiée, elle ne semble pas être parvenue : le professeur Kai Lai Chung, que j'ai interrogé là-dessus, n'en a aucun souvenir.

Le sejour a Madrid (deuxième décade de février 1942)

Les frais du voyage à Madrid de M. Fréchet, contrairement à ce qui avait été le cas au Portugal, furent pris en charge par les autorités françaises (service des œuvres françaises à l'étranger du Ministère des Affaires Etrangères, à Vichy).

Nous savons par ailleurs, par la correspondance d'Estelrich, qu'un séjour à Barcelone avait également été envisagé. Eut-il lieu ? Il n'y en a aucune trace dans les archives de l'Académie des Sciences.

Le document principal que contiennent ces archives est — manuscrit d'une part, dactylographié d'autre part — un projet de programme de M. Fréchet pour son séjour à Madrid (11-19 février 1942).

Ce projet, dont la version dactylographiée est reproduite ci-après, était probablement destiné à Bachiller, pour que celui-ci choisisse, parmi les options offertes, celles qui lui sembleraient les plus adéquates.

Programme de Conferences de Mathematiques pour les etudiants.
Quatre cycles (A, B, C, D) au choix

(Toutes les démonstrations un peu longues seraient supprimées ou réduites à leur principe. Mais des références bibliographiques permettraient de les retrouver. D'autre part, un assistant loyal pourrait donner des démonstrations dans des séances séparées, si cela était jugé utile).

A. **Promenade mathématique** : quelques questions de mathématiques pures soulevées par diverses applications.

I. Le wronskien et le théorème des aires en mécanique.
II. Une définition totalement géométrique de l'aire d'une surface par les polyèdres inscrits.
III. Propriétés arithmétiques de l'équation séculaire dite « en s ».
IV. Résolution d'un système d'équations linéaires aux différences du premier ordre à coefficients constants. Comportement asymptotique des solutions dans le cas de Frobenius.

B. Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants

I. Loi de probabilité de la répétition. Probabilité d'une fonction de ces événements. Inégalités.
II. Applications diverses de cette théorie aux événements échangeables, à l'itération d'un événement ; aux généralisations du jeu de rencontre, etc.

C. Notions de topologie

I. Revue de quelques questions de géométrie élémentaire relevant de la topologie.
II. Définition de l'homéomorphie.
III. Indications sur la notion du nombre de dimensions.

D. Quelques contributions récentes à l'analyse générale

I. La différentielle au sens de M. Hadamard généralisé.
II. Le développement d'une transformation continue en série de transformations d'ordres entiers dans des espaces très généraux.
III. Les types homogènes de dimensions.

Programme de Conferences de Statistique

(Pour les statisticiens ou le grand public, plutôt que pour les étudiants)

I. Loi de Pareto (une conférence).
II. Le coefficient de linéarité dit de corrélation (une conférence).

Programme de Conferences pour le grand public

I. Les fondements de la mathématique.
II. Les diverses définitions de la probabilité.

(Chacun de ces deux sujets pourrait être développé sommairement en 2 conférences ou condensé en une seule).

Programme de causeries a la radio

(Chacune vingt minutes)

I. Les principes du Calcul des Probabilités.

II. Applications du Calcul des Probabilités.

III. La vérification des hypothèses en Calcul des Probabilités.

(Seulement la première ; ou seulement les deux premières ; ou enfin les trois dans le même ordre).

Lesquelles de ces options ont-elles été retenues ? Les causeries à la radio ont-elles eu lieu ? Nous n'en savons rien. La seule chose qui est attestée, c'est, dans les quotidiens *Arriba* et *A.B.C.* datés du 13 février 1942, la relation d'une conférence faite la veille (le 12 février, donc) par « El professor Fréchet en la Facultad de Ciencias ». Il s'agit non d'un simple cours, mais d'une conférence solennelle, sous la présidence du vice-recteur de l'Université, Julio Palacios, et du doyen de la Faculté des Sciences, Francisco Navarro Borrás et en présence de nombreux professeurs de la Faculté, et, parmi ceux-ci, pas seulement des mathématiciens. Le sujet en était pourtant très technique : « Les développements des fonctions continues et des fonctions discontinues en séries de polynômes ». Plutôt que pour un « grand public », ce qui semble avoir été le cas, ce sujet aurait pu avoir sa place dans le projet de programme de conférences pour les étudiants en mathématiques.

C'est tout ce dont nous disposons, et c'est fort peu. Nous ne retrouverons M. Fréchet à Madrid que le 3 février 1950, où il fait, comme je l'ai rappelé plus haut, la leçon inaugurale du cycle de cours de statistique organisé par Sixto Ríos à la Faculté des Sciences.

D'ailleurs, et je terminerai par cette remarque, dans ses curriculum vitæ rédigés après la guerre, Fréchet ne mentionne pas son voyage de 1942 en Espagne et au Portugal dans la liste des très nombreuses missions qu'il a accomplies à l'étranger. Je ne crois pas que ce soit parce qu'il en ait eu honte ; comme nous venons de le voir, ce voyage ne peut en rien être interprété comme une manifestation de collaboration avec l'occupant allemand, ni non plus avec des régimes fascistes. Je pense plutôt que M. Fréchet craignait d'éventuelles réactions malveillantes de certains des destinataires (académiciens, notamment) de ces curriculum vitæ.

Quoi qu'il en soit, ce petit fait est surtout très révélateur de ce qu'était l'état d'esprit dans la France de l'après-guerre. C'est à ce titre qu'il peut intéresser l'historien.

CAPÍTULO 16

Pensamiento estadístico en mis vivencias como asesor de proyectos de la F.A.O. (Organización de Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura) (1964-1987)

ÁNGEL DÍAZ DE LA CEBOSA

Mi perfil matemático-estadístico ha estado presente en las distintas facetas de mis actividades intelectuales como puede observarse en las siguientes reflexiones y actividades interrelacionadas:

A modo de introducción:

- He realizado asesoría de una manera continuada en los siguientes países: Gabón, Honduras, Colombia, Níger, Haití, Islas Comores, Guinea Bissau, Mauritania.
- He tratado de darle a esta exposición un carácter descriptivo, pero no me ha sido posible desligarme de mi impronta personal, por lo tanto aunque el contenido de fondo obedece a lo enunciado, estará matizado con algunas de mis inquietudes actuales.
- Me ha llamado la atención lo enunciado por H.G.Wells, Profesor, que expresa que en el mundo moderno las actitudes de las personas estarán caracterizadas por saber leer, escribir y "estadística".

- En mayo del 2002 dicté una conferencia "La Estadística, ciencia de las ciencias: una manera de pensar", en la que colaboró Antonio Solanas, Profesor de la Universidad de Barcelona.

- Con Antonio Solanas y otras personas hemos elaborado un documento de 23 páginas titulado "La enseñanza de la estadística en las ciencias del comportamiento a inicios del siglo XXI.

- Tengo que indicar que al no haber formado parte de estructuras administrativas mi análisis puede estar sesgado por la independencia con la que acostumbro a trabajar.

Una teleología (doctrina de las causas finales) o intencionalidad está contenida en "lo abstracto como expresión e impulsor de la realidad" concepto que quiero desarrollar dentro de diferentes escenarios.

La estadística y la probabilidad en su desarrollo matemático ayudan a definir los escenarios posibles. Las matemáticas son una expresión abstracta del pensamiento científico y por tanto de la compleja sociedad tecnológica, multidisciplinar, en que estamos inmersos, cada vez más regida por la ciencia. Un ingeniero técnico al leer esta proposición se sintió en cierta forma ofendido, ya que le resultaba difícil comprender que la técnica sea una aplicación de la ciencia, aunque nadie le hubiera impedido buscar la fuente primaria de su técnica, dándole un sentido más amplio a su actividad, decide queda encorsetado en su propia práctica, lo que no deja de ser interesante.

El pensamiento abstracto tiene la ventaja de que puede concretarse en diversos aspectos concretos como ya se dijo y que aquí voy a desarrollar siguiendo las conclusiones alcanzadas en uno de los países en los que estuve trabajando.

Lo que sigue es una descripción vivida teniendo en cuenta estos aspectos.

La asesoría técnica obedece a una solicitud formulada por el país receptor. Esta solicitud se prepara con algún funcionario de la Organización, en general, con el Representante Regional. La petición es considerada por la Organización correspondiente, llegándose a acuerdos entre otros, de tipo administrativo para su realización.

Naturalmente tanto dentro del gobierno como de algunos organismos bilaterales esta asesoría encuentra de entrada dificultades y apoyos. El Experto a quien le confían el proyecto tiene que convivir dentro de estos parámetros, lo que le obliga a adoptar una cierta actitud diplomática, por lo que a algunos les llaman para-diplomáticos. La duración de los proyectos es variable y siempre suponen la posibilidad de ser prolongados o suspendidos antes de lo previsto.

Mi experiencia me muestra que una cosa es la concepción del proyecto y otra son las diferentes facetas con que el experto se encuentra y respetando la línea directriz aceptada por las partes, es necesario introducir modificaciones al analizar más de cerca aspectos coyunturales. Revisiones sucesivas permiten adoptar en el tiempo y en el espacio actitudes más adecuadas, creándose capacidad para gestionar la temática y los intereses críticos definidores de las acciones sociales con mayor futuro.

El hecho de que el gobierno realice la petición de asesoría obedece al principio de que algo hay que cambiar y naturalmente esto conlleva un nivel de incertidumbre en un sentido no explícito que seguramente está a la base de la solicitud presentada, es iniciar una guía a lo desconocido expresada en un sentido pluridisciplinar; en esta etapa hay que ser muy cuidadoso en las decisiones que se adopten, los riesgos a que puedan conducirnos y dejar abierto cambios posibles en tiempo útil.

En el primer país al que fui asignado, independizado pocos años antes de mi llegada, el colonialismo francés estaba presente; el colonialismo no tiene buena prensa, los excesos cometidos no se olvidan fácilmente pero se diluyen, sin embargo, es necesario recuperar la memoria histórica. El País colonizador, se vio obligado a mantener una presencia que sólo tenía vigencia si conectaba con los nativos, lo que conducía a un sistema educativo integrador, durante años de carácter impositivo, para enseñar la lengua; recordemos que el lenguaje supone una manera de pensar; durante este periodo el sistema educativo fue catalizador como una identificación, consolidación e integración del país alrededor del francés. Recuerdo en un área alejada de la capital, el "viejo" de la región me decía el bien que habían hecho los franceses: antes, todos estos pueblos peleaban y no se entendían entre ellos; tampoco con otros países, cuya relación era de carácter intelectual.

Es conveniente tener en cuenta que la historia se construye sobre documentos escritos, la tradición oral se seca en sí misma. Estos aspectos no son suficientemente considerados por lo que transcribo de Alfred Weber: "Las llamadas grandes culturas ofrecen de particular el haber registrado en documentos distintos la visión que la humanidad tenía de sí misma y su destino y al mismo tiempo constituyen aquellas agrupaciones que adquirieron resonancia histórico universal al convertirse en vehículos de la marcha del progreso humano y constructoras de sus fundamentos. La historia de las grandes culturas egipcia, sumero-acadia-babilónica, china e indostánica, los cuatro pilares de la historia, se conciertan exteriormente en dicha historia universal durante largo tiempo gracias a la influencia homogénea que sobre todas ellas ejercen las grandes llanuras del gigantesco bloque euro asiático, influencia que en el oeste es de dirección concéntrica…

Ahora bien, lo nuevo que crea la acción humana partiendo de las condiciones dadas, de los materiales, de las fuerzas y de las posibilidades existentes en determinado instante no puede ser objeto de un pronóstico exacto. No cabe aquí ese pronóstico, como tampoco cabe en la naturaleza viva. Lo que el obrar humano produce, partiendo de ese nivel de circunstancias dadas, no es previsible; ni en cuanto a su esencia, ni en cuanto a su forma; pues toda acción creadora rebasa los límites de la previsión y tiene que superar las resistencias al cambio".

Retomando el hilo de la exposición, el Ministro de Agricultura era un antiguo inspector de educación en una determinada área rural; no había cuadros suficientemente formados, y así aunque su formación era baja su expresión cultural superaba esta deficiencia[1].

Es conveniente diferenciar entre asesoría técnica y asesoría a los gobiernos. La primera responde a técnicas específicas por ejemplo cómo hacer determinados cultivos, etc.; la segunda a principios casi de carácter filosófico difíciles de entender a priori y por ello la asesoría se enfrenta a una situación incierta , en que identidad y planificación que no tienen relación causa efecto sino un sentido sinérgico e interrelacionado, constituyen dos pilares básicos.

Es indudable que para colaborar con los gobiernos se necesita una cierta ductilidad basada en el respeto de las decisiones tomadas por ellos, una persona con una formación genérica facilita enormemente esta tarea al comprender mejor sus decisiones, caso contrario tiene que adquirirla.

El Consejo Superior de Investigaciones Científicas en 1950 estaba integrado por: El Instituto Jorge Juan de Matemáticas y el Instituto de Investigaciones Estadísticas del que formé parte, y una serie de institutos de carácter específico.

Las concepciones abstractas encuentran su justificación en el hecho de que permiten diferentes interpretaciones con las que aseguran una economía de pensamiento. Un razonamiento no necesita efectuarse sino una sola vez en forma abstracta para proporcionar, interpretando diversos modos, multitud de enunciados que a veces resultan muy difíciles de probar.

Don Pedro Abellanas, Director del extinto Instituto Jorge Juan de Matemáticas, del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, respecto a la nueva fundamentación de la matemática, se expresa: “la nueva fundamentación de la matemática se apoya en un principio bien simple que se puede enunciar así: para poder demostrar con rigor las proposiciones es necesario vaciar de contenido a los conceptos primitivos, invitándonos a establecer el mecanismo lógico y las relaciones fundamentales entre dichos conceptos”.

Don Sixto Ríos García, Director del Instituto de Investigaciones Estadísticas del Consejo Superior de Investigaciones Científica, nos dice: “resolver un problema de decisión es tomar la mejor decisión posible en su doble aspecto normativo y descriptivo de la teoría de la decisión. En todo proceso cognitivo se presentan las tres fases de: a) observación y descripción; b) abstracción; c) utilización de los resultados de la teoría para dar prescripciones o normas de situaciones prácticas. No se trata de dar normas de decisión en un sentido absoluto, sino condicionadas a ciertos fines, supuestos a priori en forma de **axiomas**”.

Poincaré dice: “los axiomas no son ni juicios sintéticos a priori ni hechos experimentales, son convenios. Nuestra elección entre todos los convenios posibles se hace

[1] Citaré la clásica anécdota de Unamuno. Visitando Ávila con un profesor norteamericano se encuentran con un campesino, el profesor comenzó a hacerle preguntas y se volvió a Unamuno extrañado por las respuestas: pero es analfabeto le dijo, y Unamuno de contestó, sí, pero muy culto.

en base a hechos experimentales; pero es libre y está limitada solamente por la necesidad de evitar contradicciones. De este modo los postulados pueden resultar rigurosamente ciertos aunque las leyes experimentales que hayan sugerido su adopción sólo sean aproximadas. La cuestión de la veracidad no tiene sentido".

El Vizconde de Güel expresa: "Un espacio íntegramente ideal, espacio pensado, espacio inventado, espacio construido por el entendimiento abstracto y cuyas propiedades no atañen en nada las exigencias que puedan derivarse de la realidad. Nadie puede negarle al intelecto humano el perfecto derecho a construir esa noción, a precisarla y a determinarla idealmente según las leyes rigurosas del pensamiento lógico".

En mis clases de Estadística Matemática a los alumnos de 3º de Económicas, estos me preguntaban por qué precisaba tanto las demostraciones. La estadística es una manera de pensar que pretendo inculcarles; señalaré que todo pensamiento nos lleva a una lógica para poder ser comunicada.

Esta lógica nos conduce a la modelización; la modelización matemática es un proceso mental que conduce a convertir un problema opaco de la realidad en un problema clarificado matemáticamente, de modo que resolviendo éste se consiga una solución, o al menos, un buen conocimiento del primero que nos puede conducir a dar sentido a modelos específicos.

Es destacable la figura del Profesor Blanco Loizelier, del Instituto, que introdujo en España en la General Electric, la Calidad Total, donde trabajé un tiempo y que condicionó como luego explicaré gran parte de mis actividades.

Un aspecto poco tomado en cuenta es el de la identidad, por un lado los países se identifican a sí mismos por los gobiernos pero la incorporación, conciencia, de las bases no es considerada sino relegada lo que les impide un desarrollo con perspectiva de futuro. Por coherencia con este documento, en anexo presento un breve resumen sobre los antecedentes de las Misiones Pedagógicas, que constituyó un revivir cultural, tema que presentó Natalia Jiménez Cossío, en el Ateneo de Madrid.

Es obligado hacer, aunque no sea más que una mención al proceso regeneracionista impulsado por Francisco Giner de los Ríos (1840-1915) y la incorporación del pensamiento krausista, manteniendo con Kraus una importante correspondencia.

Roder y Ruiz de Quevedo, dicen en octubre de 1878 "naturalmente deseamos igual que ustedes que todos los españoles de espíritu libre y de buenas intenciones **vean en la educación del pueblo el fin primero** y más importante que es necesario realizar y que trabajen utilizando las fuerzas para ese fin con independencia de los distintos puntos de vista políticos".

Hay que señalar el papel que han tenido en España las Misiones Pedagógicas y la creación de bibliotecas públicas, así como la promoción de las mismas, durante la Segunda República.

Es necesario aumentar nuestros esfuerzos en educación, si tomamos en cuenta la tasa de analfabetismo en países en vía de desarrollo, podemos asegurar que si no se da un impulso grande a la educación, es decir incorporar a las personas en el proceso de desarrollo, dejaremos a los países sin esperanza de futuro. No se suele tomar en cuenta el llamado "analfabetismo funcional", personas pueden deletrear e incluso leer de corrido, pero no entender lo que leen. Esta situación enmascara el analfabetismo; en algún país desarrollado, en un momento dado se detectó que la población de 18 a 25 años este valor puede llegar al 21%.

"Un Mundo Feliz" da buena idea de lo que se pretende con actitudes negativas; en un periodo involutivo en España se llegó a fusilar a los bibliotecarios, sin embargo organizaciones obreras y diversas asociaciones culturales fundaron por todo el país un gran número de bibliotecas y centros culturales. En Asturias desde hace años se habían desarrollado los Ateneos (Asociación científica, cultural, artística y literaria), dotados con biblioteca, sala de conferencias en las que hablaron los más célebres representantes de la inteligencia y la cultura de aquella época. Tras los sucesos de la revolución de Asturias, en 1934, la fuerza pública ordenó quemar los libros. Los Ateneos fueron acusados de ser la voz revolucionaria y muchos de ellos clausurados. Una de las bibliotecas más populares por su valor, la biblioteca popular circundante de Castropol fue expulsada de su local, convertida en sede del partido derechista, Acción Popular. Estas actitudes están presentes, aunque a veces de forma velada, todo cambio siempre conlleva frenos que en sí son garantes del cambio mismo.

En España numerosos sindicatos y organizaciones obreras abrieron bibliotecas. La de la casa del pueblo destacaba por su organización y actividad. Esto dicho de paso, no me extiendo en ello por cohesión en el contenido de esta comunicación.

Tres facetas históricamente importantes a considerar en los países son:

1. Su organización social.
2. El papel de la mujer.
3. Las nuevas exigencias.

1. Como es natural la organización social es debitaria de un pasado y obedece a una adaptación vital de los recursos; el hombre tradicionalmente ha hecho las labores más duras, la guerra, la caza y talar los bosques, construir el hábitat, etc.
2. La mujer representa un valor marginal, la procreación, la recolección de las cosechas, cocinar, traer el agua, ocuparse de los niños, etc. eran sus quehaceres.
3. Una sociedad en estas condiciones está anclada y no le permite asumir las nuevas exigencias con perspectivas de futuro: la planificación y la conciencia están ausentes.

Estos aspectos constituyen el nudo gordiano de la cuestión, desatarlo es fundamental para incorporar el quehacer de las actividades con perspectivas de futuro.

Las aglomeraciones urbanas irrumpen dando un nuevo sentido al mundo rural.

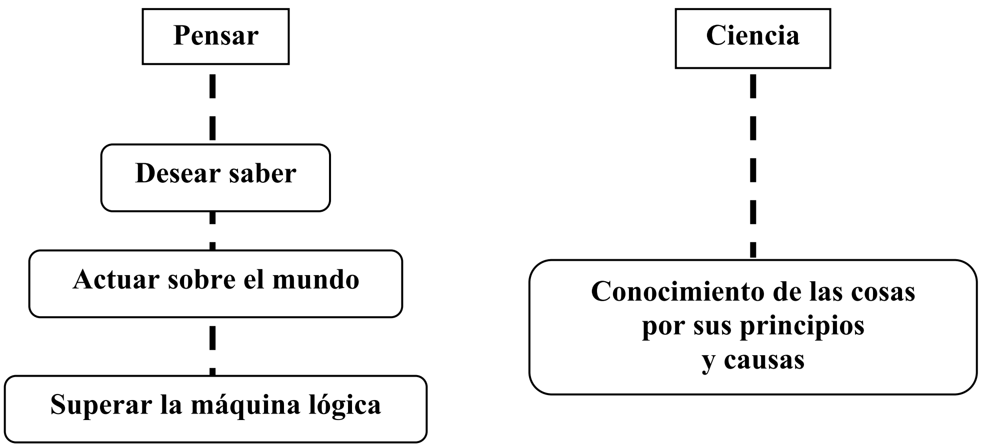
En un acto que organicé "La ciudad un asunto de todos" se presentó un esbozo del proceso histórico de las ciudades y su influencia en la organización social de los pueblos y de la humanidad, tema al que no se le presta la atención suficiente para comprender mejor nuestro compromiso dentro de un sistema eco-evolutivo. El arquitecto, Dr. Lamela en su libro “Cosmoísmo y Geoísmo” trata estos temas ampliamente.

Las ciudades aparecen como una necesidad dentro de un proceso diferenciador, vital y cultural. Surgen con un sentimiento de aislamiento, amuralladas, pretendiendo crear dentro de un sistema cerrado, niveles culturales del saber y auto conciencia, creándose una verdadera revolución, cambio brusco, que cambia los esquemas de los tres puntos señalados anteriormente.

La ciudad, en un momento determinado rompe sus murallas y adquiere una responsabilidad expansiva y un sentido emblemático de unidad cultural nacional, como complementariedad a relaciones de tipo económico-mercantil y de luchas, guerras, tanto internas como frente a otras estructuras no siempre bien definidas que han tenido un carácter defensivo de identidad y expansivas como promotores de valores. En todo momento es adalid en la **construcción de la ciclópea empresa humana**.

Ahora voy a presentar el pensamiento de Montaigne de forma esquemática por hablar por sí solo.

Para Montaigne
Más vale una mente bien formada que bien llena



El estadístico pacíficamente ha cambiado nuestro mundo, no tanto descubriendo nuevos hechos o desarrollos técnicos, sino cambiando los modos de razonar, de experimentar y de formar nuestras opiniones acerca de él **(I. Hacking, U. Cambridge, 1965)**

Subrayaremos y nos sumamos a aquellos que sostienen que a la Estadística no se le otorga, en nuestro medio, un carácter relevante y que se le aprecia como una colección de cifras representativas de una realidad o, a lo sumo, como un mero conjunto de técnicas con mayor o menor utilidad práctica.

Pocas veces se considera la Estadística como una ciencia transversal inherente a la realidad y, por tanto, formando parte de todas las posibles actividades científicas y técnicas.

En este sentido, cualquier actividad encontrará la existencia de variabilidad; o sea, de forma inevitable enfrentará diversos niveles o grados de incertidumbre que incidirán sobre las decisiones.

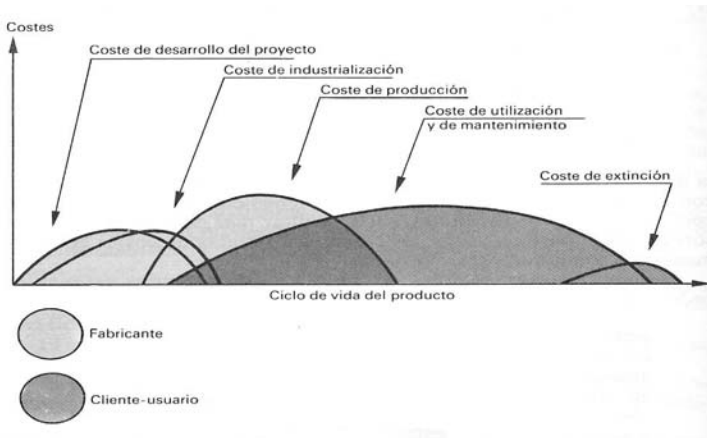
Volviendo al tema de la Calidad introducido anteriormente, en que la estadística no es adecuadamente considerada, especificaremos:

La Calidad de un producto o servicio se define como su aptitud para satisfacer las necesidades de los usuarios y representa todo lo que no es coste. Comprende principalmente:

- Las funciones: de uso o de servicio.
- Las características: forma, dimensiones, volumen, etc.
- Las prestaciones: radio de acción, velocidad, consumo, etc.
- La seguridad: estabilidad, sistemas de protección, etc.
- La disponibilidad: aptitud para el uso, incluso después de almacenaje.
- La fiabilidad: probabilidad de funcionar durante un periodo dado en las condiciones previstas.
- La facilidad de mantenimiento.
- La durabilidad: ciclo de vida en el uso del producto.
- La comodidad y el atractivo: silencio, estética, facilidad de empleo, etc.

El nivel de calidad está expresado por la satisfacción ofrecida respecto a la satisfacción deseada y donde el valor 1 es el óptimo.

Los costes respecto al ciclo de vida del producto se muestran en el gráfico siguiente:



Comprende el coste de adquisición (precio de venta), el coste de utilización (uso), el coste mantenimiento (conservación).

La relación calidad-precio implica el valor.

Todo el esfuerzo japonés en estas últimas décadas se ha dirigido a mejorar la calidad de sus productos, buscando al mismo tiempo no aumentar los costes. La relación calidad-precio es el factor principal de decisión de compra.

En el idioma japonés la palabra valor se escribe así:

Y se pronuncia: k-chi.

Voy a hacer una breve síntesis de mi experiencia en este tema. La Universidad de Colombia solicitó al Instituto de Investigaciones Estadísticas estructurar la enseñanza de la estadística y su implantación, fui designado para hacerlo, lo que desarrollé en tres cursos: conceptos básicos de la Estadística; Estadística matemática y Control Estadístico de la Calidad, que fueron muy apreciados; me solicitaron un seminario de alto nivel para impartir los sábados y que hice en seis sesiones.

Es interesante señalar que fábricas que se enteraron de la existencia del curso de Calidad y me ofrecieron aplicarla a sus empresas, lo que incidió no sólo en la calidad de los resultados de producción (en una factoría bajó la defectuosidad del 13% al 0,1%), sino en una mejor comprensión inter-departamental como resultado de una mayor transparencia de las respectivas responsabilidades.

Reseñaré algunos aspectos:

1. El censo agropecuario es un referente fundamental para el conocimiento del sector, sin él toda información parcial queda diluida lo que puede conducir a importantes distorsiones y ser base de graves conflictos sociales.

   El censo puede hacerse por enumeración completa o por muestreo, lo importante es su marco de referencia.

2. Los datos censales, de utilidad pública tienen que ser publicados y procesados de tal forma que permitan obtener fácilmente informaciones de las que son objeto la publicación.

3. El plan de estadísticas continuas será elaborado en consulta con las entidades tanto públicas como privadas.

4. La realización del programa de estadísticas continuas debe efectuarse con la participación de las entidades cuya organización de campo permita una adecuada coordinación. Así se obtienen resultados mejores en calidad y oportunidad con costos más reducidos.
5. La aplicación del párrafo anterior implica que la entidad técnica responsable prevea los aportes necesarios tanto en personal como en medios.
6. El sistema de estadísticas continuas debe contener los elementos mínimos necesarios que el sector requiere, lo que constituirá un sistema integrado de información.
7. El sistema debe configurarse en forma tal que suponga una base de datos.

Voy a hacer un esquema de la organización requerida: a) Las estadísticas agropecuarias no pueden estar disociadas de los planes de inversión del sector considerándolas desde un punto de vista amplio. b) La planificación necesita información adecuada, la evaluación de los programas igualmente, así como la opción política que se adopte, por distinguir este aspecto de los anteriores. c) Parece razonable suponer que en los presupuestos de los distintos programas se considere la parte correspondiente a la obtención de la información requerida. d) ello implicará el fortalecimiento institucional. e) Incidirá no sólo en unos mejores datos sino también en la organización general de las instituciones, que dicho reiterativamente supone por una mayor transparencia, mejoras en las relaciones y contribución al progreso de las mismas.

Presupuesto: Este es uno de los elementos esenciales para el desarrollo de las estadísticas agropecuarias.

El presupuesto para la realización de los programas de estadística debe considerarse dentro de tres puntos de vista:

- Las estadísticas que producen las distintas instituciones.
- Las estadísticas que requieren la realización de programas específicos y que necesitan de la coordinación interinstitucional.
- Las estadísticas de carácter general a diferentes programas.

En cualquiera de estos casos en la presentación de los presupuestos la actividad estadística no debe figurar como un gasto disociado de las inversiones y por lo tanto susceptibles de un recorte indiscriminado por considerársele como una actividad en cierta forma accesoria o simplemente perfeccionista.

Los presupuestos deben figurar dentro de los de la institución que realiza el gasto, sin embargo, la elaboración de los presupuestos será tarea de los agentes implicados lo que permitirá dar apoyo, si ello se requiere, a las unidades estadísticas de las instituciones.

En el siguiente punto se necesita de la coordinación institucional: En este tipo de estadísticas tales como la encuesta de pronóstico de cosechas, de productos específicos, etc. el presupuesto figurará como parte del programa de las instituciones.

El presupuesto debe ser elaborado por los principales agentes involucrados que prestarán especial atención para asegurar la obtención de los fondos necesarios ya que los programas obedecen a la necesidad interinstitucional y no a un enunciado de principios.

Nota 1. Cuando los programas requieren el fortalecimiento institucional de una manera permanente, hay que asegurarse que estas partidas sean incluidas dentro del presupuesto ordinario para una continuidad de los mismos.

Nota 2. El manejo de los fondos tiene que acomodarse a las exigencias de los programas, lo que supone tener flexibilidad en ciertos gastos, por ejemplo los que originan los trabajos de campo tales como los censos, encuestas, etc.

La organización formal: Un aspecto esencial es que la estadísticas, en particular la agropecuaria no son sólo función de una persona, el "Estadístico", son función del personal de las instituciones que intervienen en la problemática.

No me extiendo más en estas consideraciones que están reflejadas en un documento de 112 páginas y que termina así: En estadística, el arte consiste en utilizar adecuadamente todos los elementos que puedan conducir a una optimización de los resultados.

CAPÍTULO 17

Redes neuronales artificiales: un largo e irregular camino hasta la actualidad

NOELIA GARCÍA RUBIO
MATÍAS GÁMEZ MARTÍNEZ
ESTEBAN ALFARO CORTÉS
Universidad de Castilla-La Mancha

Introducción

El conjunto de técnicas englobadas en las RNA constituye uno de los temas actuales de mayor potencial investigador en el campo de la Estadística. Desde su nacimiento, han sido continuas las aplicaciones posibles de estos modelos, si bien en la mayor parte de los casos en campos alejados del entorno socio-económico. Anderson y Rosenfeld (2000) describen las redes neuronales artificiales como "un área de ciencia importante, controvertida, glamurosa y de alto riesgo".

Las redes neuronales artificiales son, en esencia, modelos matemáticos diseñados a imitación del sistema nervioso biológico, centrándose fundamentalmente en los aspectos de la actividad cerebral relacionados con la formación del conocimiento humano. Si bien algunos de los modelos de redes neuronales artificiales no tienen en absoluto nada que ver con las redes neuronales biológicas, en todos ellos podemos encontrar una característica común. Esta característica es la intención de construir un sistema inteligente de procesamiento de información; entendiendo por inteligencia aquella facultad, aptitud o factor psíquico que permite un comportamiento inteligente, es decir, un comportamiento intencional, adaptador, que resuelve problemas mediante el razonamiento, basándose en una experiencia adquirida y conservada en la memoria, capaz de prever futuros modos de conducta.

Se trata, por tanto, de construir un sistema adaptativo que aprenda a partir de la experiencia, tal y como aprenden los niños a reconocer un perro tras haber visto algunos ejemplos, incluso aunque éstos hayan correspondido a razas distintas. Esta es la idea de generalización; propiedad fundamental en todos estos sistemas.

Debido a la gran complejidad del sistema nervioso biológico, no es posible construir un modelo artificial que lo duplique exactamente. En este sentido, en la medida en que se asimilen las características del modelo artificial a las del biológico se conseguirá en mayor o menor grado el objetivo antes citado.

El sistema nervioso biológico, así como los artificiales, tiene capacidad de aprendizaje. Es importante destacar que el aprendizaje tiene lugar añadiendo información a la ya existente en el cerebro y no sustituyendo la misma. Esta propiedad le confiere las propiedades de flexibilidad y adaptación a un nuevo entorno, así como una gran capacidad de generalización. Estas propiedades son deseables, aunque en ocasiones pueden ser "peligrosas" ya que implican cambios en el comportamiento, en el sistema interno y una posible inestabilidad.

Otras características del cerebro humano deseables en las redes neuronales artificiales son:

- La capacidad de procesar información en paralelo, gracias a la cual el cerebro puede reaccionar rápidamente ante situaciones en las que intervienen un número elevado de variables. Este hecho puede explicar la aparente paradoja que se nos presenta al comparar el cerebro humano con un ordenador, ya que aunque este último es mucho más veloz, el primero se muestra superior. La razón estriba en que aunque el ordenador es más rápido realizando operaciones, trabaja en serie y, por tanto, las realiza una a una mientras que el cerebro humano ejecuta varias simultáneamente.

- Robustez y tolerancia a fallos. Esta propiedad hace referencia al hecho de que ante una destrucción de partes aisladas del sistema, la capacidad de actuación global de la red no resulta gravemente afectada. Es sabido que el cerebro humano sufre un proceso continuo de pérdida de células nerviosas sin que su capacidad se vea mermada significativamente. La razón es que la información se representa distribuida en un número muy elevado de elementos de proceso.

- Capacidad para procesar información inconsistente o con alta proporción de ruido. Esta propiedad, junto con la habilidad del cerebro para tomar gran cantidad de información de entrada simultánea y generar salidas clasificadas, es fundamental para la tarea de reconocimiento de patrones.

Aunque es difícil definir una red neuronal artificial y, de hecho en la mayor parte de la literatura sobre este tema se evita hacerlo explícitamente, en [Sarle, W.S., ed 2002] se recopilan algunas de las definiciones más significativas, que exponemos a continuación:

De acuerdo con DARPA Neural Network Study (1998, AFCEA International Press, pág.60):

"*... una red neuronal es un sistema compuesto por muchos elementos simples de proceso actuando en paralelo, cuya función es determinada por la estructura de la red, la fuerza de las conexiones y el procesamiento realizado en los elementos de computación o nodos*".

Haykin (1994) proporciona una de las definiciones más citadas en los estudios sobre Redes Neuronales Artificiales:

"*Una red neuronal es un procesador distribuido altamente en paralelo que tiene una propensión natural para almacenar conocimiento experimental y hacerlo disponible para el uso. Este procesador recuerda al cerebro en dos aspectos:*

1. El conocimiento se adquiere por la red mediante un proceso de aprendizaje.

2. La fuerza de las conexiones entre neuronas, conocidas como pesos sinápticos, se utilizan para almacenar el conocimiento".

De acuerdo con Nigrin (1993) (p. 11):

"*Una red neuronal es un circuito compuesto por un gran número de elementos de procesamiento simples basados en neuronas. Cada elemento actúa sobre información local. Además, cada elemento opera asíncronamente; por lo que no hay un sistema de reloj global*".

Consideramos, sin embargo, más completa y rigurosa la definición proporcionada por Hecht-Nielsen (1988):

"*Una red neuronal es una estructura de procesamiento de información distribuida, compuesta por elementos de proceso (que pueden poseer memoria local y llevar a cabo operaciones de procesamiento de información localizadas) interconectados entre sí con canales de señal unidireccionales llamados conexiones. Cada elemento de proceso tiene una conexión de salida sencilla con ramas ("fans out") en tantas conexiones colaterales como se desee (cada una llevando la misma señal —la señal de salida del elemento de proceso—). La señal de salida del elemento de proceso puede ser de cualquier tipo matemático deseado. Todo el procesamiento que se realiza dentro de cada elemento de proceso debe ser completamente local, es decir, debe depender sólo de los valores actuales de señal de entrada que llegan al elemento de proceso vía conexiones y los valores almacenados en la memoria local del elemento de proceso*".

Si tomamos un punto de vista estadístico, las redes neuronales artificiales pueden ser consideradas como una técnica multivariante de inferencia no lineal y no paramétrica. Precisamente la característica de no linealidad del modelo permite la aplicación de RNA a problemas de mayor complejidad que otras técnicas. Por otro lado, el carácter no paramétrico o ausencia de hipótesis sobre la relación existente entre las variables de entrada dota a las RNA de un grado de flexibilidad no presente en las técnicas tradicionales.

Analizando la relación entre los métodos estadísticos más habituales y las redes neuronales artificiales, se observa cierto solapamiento, no tanto con aquella parte de la Estadística concerniente al análisis exploratorio de datos sino más bien con aquélla dedicada a la inferencia estadística, es decir, a la tarea de aprender a generalizar a partir de datos ruidosos. El cuadro siguiente muestra las relaciones que se pueden establecer entre modelos de redes neuronales y técnicas más tradicionales del análisis estadístico de datos:

MODELOS RNA	MODELOS ANÁLISIS DE DATOS
Redes *feedforward* sin capas ocultas	Modelos lineales generalizados
Redes *feedforward* con una capa oculta	*Projection pursuit regression*
Redes neuronales probabilísticas	Análisis discriminante kernel
Redes de Kohonen para cuantificación de vectores adaptativos	Análisis *cluster* *k*-medias
Aprendizaje hebbiano	Análisis de componentes principales

A continuación señalamos algunas de las tareas más importantes para las que las redes neuronales artificiales se consideran útiles:

1. ***Clasificación.*** Nos encontramos en este caso ante la tarea de decidir a qué categoría pertenece cada patrón de entrada. La red proporciona como salida, bien la probabilidad condicionada de pertenencia a cada una de las clases o bien la clase a la que el patrón de entrada es asignado.
2. ***Asociación de patrones.*** La red debe proporcionar el patrón de salida correspondiente a cada patrón de entrada presentado.
3. ***Completado de patrones.*** Hace referencia a la utilización de la capacidad de memoria para proporcionar una salida cuando se ha dado parte de ella como entrada. Frecuentemente nos encontramos con conjuntos de datos incompletos. El objetivo de la red en este caso es rellenar los campos perdidos de los vectores de entrada.
4. ***Eliminación de ruido.*** Como en el caso anterior, también es frecuente encontrar datos distorsionados por ruido. La salida de la red sería entonces el patrón de entrada limpio, en parte o totalmente, de ruido.
5. ***Codificación.*** Se trata de codificar una entrada obteniendo como salida un dato de menor dimensión con la mínima pérdida de información posible.
6. ***Simulación.*** Creación de una salida para una entrada que actúa como estímulo.
7. ***Optimización.*** La entrada de la red estaría constituida por los datos iniciales de un problema de optimización y la salida sería la solución del mismo.
8. ***Control.*** En este caso se tendría como entrada la situación actual de un controlador, así como la salida deseada para el mismo, proporcionando la red como salida la secuencia de acciones que se deben llevar a cabo para conseguirla.

Antecedentes

La cuestión relativa al origen de la investigación en RNA es complicada, Si bien hay una opinión generalizada que sitúa el comienzo en los años 40, cuando, a raíz de la Segunda Guerra Mundial, un grupo de científicos intentan entender el funcionamiento del cerebro humano con objeto de crear sistemas artificiales que actúen como los biológicos, autores como Strachey (1966) señalan como pionero a Sigmund Freud en los comienzos del s. XX.

La primera implementación de una red neuronal artificial fue realizada por Rusell en 1913. Sin embargo, el primer estudio relevante en el campo de las RNA se desarrolla en 1943 con el trabajo de Warren S. McCulloch y Walter Pitts, que aporta el primer modelo matemático básico de una neurona artificial. Por entonces, un joven Walter Pitts, sin hogar y de apenas dieciocho años, acogido por Warren S. McCulloch quiso profundizar y sacar a la luz una idea que había extraído de sus lecturas sobre Leibniz y que no era otra cosa que el concepto de programación:

> "*Cualquier tarea que pueda ser descrita completamente y sin ambigüedad por un número finito de palabras puede ser realizada por una máquina lógica*".

El mecanismo fundamental de este modelo se basa en la *ley del todo o nada*[1] que opera en el funcionamiento de las neuronas biológicas. Sin embargo, este modelo presentaba una limitación muy importante, su incapacidad para aprender.

Seis años después, en 1949, el psicólogo Donald O. Hebb escribe "The Organization of Behavior" cuya aportación más importante es un procedimiento matemático para el aprendizaje que lleva su nombre "*regla de Hebb*" o aprendizaje hebbiano. La idea fundamental[2] es que el incremento en la eficacia de la conexión entre dos neuronas es proporcional a la correlación entre los potenciales pre y post-sinápticos, es decir, si dos neuronas se activan simultáneamente, se refuerza la conexión entre ellas.

La euforia inicial

Gracias a estos trabajos, la investigación en RNA entra en una década dorada, los años 50. Al final de esta década, Frank Rosenblatt (1958) desarrolló, en el campo de la psicología, una clase de redes neuronales artificiales denominada Perceptrón[3]. Este

[1] Esta ley, denominada de todo o nada, se encuentra presente en gran parte de los modelos actuales. La idea de fondo es la existencia de un umbral de manera que si la entrada neta de una neurona supera su valor, entonces la actividad de la célula se dispara, no activándose en otro caso.

[2] Esta idea no era completamente novedosa, sino que ya había sido puesta de manifiesto por Alexander Bain en 1873 en un trabajo denominado "Mind and Body. The Theories of Their Relation" y por William James en 1890, aparentemente de forma independiente.

[3] En el diseño del Perceptrón se encuentra presente la idea de que la aleatoriedad de las conexiones de la redes neuronales biológicas es un supuesto que sólo se puede mantener en el momento del nacimiento

Perceptrón es un sistema de clasificación de patrones que combina el modelo de McCulloch y Pitts con un procedimiento de aprendizaje que ajusta los pesos de la red mediante la aplicación iterativa de una regla de entrenamiento basada en la ocurrencia de diferencias entre la clase señalada en la salida deseada y la proporcionada por la red. En estos momentos había una gran simpatía entre los investigadores por las RNA dado que pensaban que un modelo de red neuronal artificial podía ser utilizado para obtener la solución a cualquier problema. Posteriormente publica *Principles of Neurodynamics* (1962), trabajo en el cual describe diferentes tipos de Perceptrón.

Tres años antes, en 1959, un investigador de ingeniería eléctrica llamado Bernard Widrow y su primer estudiante de doctorado en Stanford, Ted Hoff, habían desarrollado una regla de aprendizaje estrechamente relacionada con la regla de aprendizaje del Perceptrón. Esta regla se denomina regla Delta o regla de mínimos cuadrados. Widrow y Hoff crearon la Adalina[4], un modelo similar al perceptrón, cuyo entrenamiento tiene como objetivo reducir las diferencias entre los valores de salida deseada y proporcionada por la red. Estos autores probaron matemáticamente que la consideración del error entre ambas salidas llevaba a la red a encontrar un mínimo global bajo determinadas condiciones, por otra parte demasiado restrictivas. La más importante es que las distintas clases de los patrones de entrada deben ser separables linealmente. Las aplicaciones más destacadas de la Adalina estaban relacionadas con el procesamiento adaptativo de señales, sistemas de control, etc.

En estos momentos la investigación en RNA gozaba de gran apoyo institucional, debido fundamentalmente a la confianza que se tenía en la capacidad de estas nuevas técnicas para la resolución de cualquier problema.

La travesía por el desierto

Sin embargo, a final de la década de los años 60 comienza a desvanecerse el entusiasmo de los investigadores en este campo, como consecuencia principalmente de la publicación del libro *Perceptrons* [Minsky y Papert, 1969], en el cual se establecen limitaciones a la capacidad de aprendizaje de los modelos desarrollados hasta el momento.

Marvin Minsky, pionero en robótica mecánica inteligente, contribuyó enormemente a los avances tanto teóricos como prácticos de la inteligencia artificial, la psicología del conocimiento, las redes neuronales artificiales, etc. Este investigador comenzó, junto a Seymour Papert y hacia mitad de los años 60, a estudiar las limitaciones del Perceptrón. El resultado de este trabajo fue la publicación del libro, mencionado anteriormente, de influencia incalculable que, consiguió convencer a un número im-

de las mismas, tratando de responder a cuestiones sobre cómo éstas detectan, procesan y almacenan la información proveniente del mundo exterior.

[4] El nombre de este modelo en inglés es Adaline (**Ada**ptive **Lin**ear **E**lement).

portante de estudiosos de las RNA para que se desplazaran a otros campos de la Inteligencia Artificial.

La conclusión fundamental de esta publicación es la prueba de que si bien el perceptrón era capaz de separar un espacio de entradas en dos regiones separables linealmente, no lo era de realizar tareas sencillas si no se cumplía tal condición. La solución podía estar en una combinación de perceptrones, es decir, un Perceptrón Multicapa con funciones de activación, en la capa oculta, no lineales. Sin embargo, en aquellos momentos se desconocía cómo hacer aprender a una red de este tipo, no desarrollándose un algoritmo de entrenamiento adecuado hasta casi dos décadas después.

A pesar de la comentada influencia del trabajo de Minsky y Papert y el consiguiente declive en el estudio de las RNA, algunos investigadores continuaron en los años 70 trabajando en este campo. Entre ellos debemos citar a J. Anderson, T. Kohonen, S. Grossberg, G. Carpenter y S-I. Amari.

J. Anderson comenzó su labor de investigación en RNA con redes de memoria asociativa lineal, aplicándolas al terreno del diagnóstico médico. En 1968 crea el asociador lineal, modelo de memoria basado en las asociaciones de las activaciones de las sinapsis de una neurona utilizando una función umbral sobre el producto de los vectores de entrada y salida. A finales de los 70 creó el modelo *Brain-state-in-a-box* (BSB), añadiendo a la memoria asociativa lineal retroalimentación lateral positiva, aprendizaje por corrección de error y reemplazando la función umbral lineal por la función umbral rampa. Este modelo se ha utilizado para explicar la formación del concepto, categorización y procesamiento del conocimiento.

Teuvo Kohonen, físico finlandés, fue pionero en el estudio de redes neuronales auto-organizadas. Es uno de los autores más prolíficos, con más de doscientos artículos de investigación. Su trabajo comenzó, como el de Anderson, con redes de memoria asociativa basadas en componentes de inspiración biológica y en la idea del aprendizaje hebbiano.

Sin embargo, el trabajo más conocido de Kohonen fue el realizado en los años 80 sobre el aprendizaje competitivo que da lugar al modelo SOFM (Self-Organizing Feature Maps) o mapas auto-organizados de Kohonen. En palabras propias de Kohonen, los mapas auto-organizados son los modelos más realistas en cuanto a plausibilidad biológica de las redes neuronales, dado que su resultado es una representación con orden espacial, circunstancia que se da en el cerebro y que no es tenida en cuenta por otros modelos de RNA. El campo de aplicación de estos modelos es amplísimo, desde el reconocimiento de voz, la bioquímica (donde él y su equipo prevén un futuro prometedor) al análisis financiero.

Stephen Grossberg se puede considerar también uno de los investigadores más prolíficos e influyentes en RNA. Su trabajo combina el mayor rigor de un análisis matemático estricto con fenómenos de procesamiento de la información en los humanos tanto desde el punto de vista psicológico, centrándose en la mente, como desde el punto de vista biológico, considerando el funcionamiento del cerebro.

Grossberg desarrolló, ya en los años 80 junto a Carpenter, una teoría de aprendizaje competitivo-cooperativo denominada *Teoría de la resonancia adaptativa* (ART)[5] para entradas binarias y posteriormente lo extendieron a entradas continuas (ART2)[6]. Es importante señalar que Grossberg es el fundador de un grupo de trabajo "Center for Adaptive Systems" en la Universidad de Boston cuya investigación cubre todas las áreas de las RNA.

En cuanto a Shun-Ichi Amari, hay que señalar que comenzó su trabajo en RNA a finales de los 60, combinando las ideas que poseía sobre biología con un tratamiento matemático riguroso. En los años 70 Amari trató la dinámica de las redes conectadas aleatoriamente, así como el aprendizaje competitivo, análisis matemático de memoria asociativa, etc.

Vuelta al optimismo

Ya más entrados en los años 80, parece que se recupera el entusiasmo de los años 60, fundamentalmente con los trabajos de autores como Hopfield, Rumelhart y McClelland.

John Hopfield, físico del California Institute of Technology, creó junto a David Tank un conjunto de modelos de redes neuronales basados en pesos fijos y activaciones adaptativas. El elemento fundamental en estos modelos es una función de energía, también llamada función de Lyapunov, de forma que cuando se disipa, el sistema converge a un estado estable (mínimo local) y permanece en él indefinidamente. El modelo discreto [Hopfield, 1982] es útil como memoria asociativa. Extensiones posteriores [Hopfield y Tank, 1985] adaptadas para activaciones continuas, se aplican generalmente a problemas de optimización con restricciones como el conocido problema del viajante.

Por otra parte, McClelland y Rumelhart, psicólogos interesados en la investigación de las funciones de la mente humana a través de las redes neuronales artificiales, formaron junto a otros investigadores el grupo PDP (Parallel Distributed Processing). La aportación más importante de este grupo fue la solución del problema que habían puesto de manifiesto Minsky y Papert en 1960, el algoritmo de retropropagación del error[7] (*Backpropagation*) capaz de entrenar un Perceptrón Multicapa.

Sin embargo, es necesario señalar que la labor de Rumelhart y su grupo en este punto fue tan solo publicitaria dado que el algoritmo ya había sido desarrollado anteriormente por varios autores de manera independiente. El primero de ellos fue Paul

[5] CARPENTER, G. y GROSSBERG, S. (1986).

[6] CARPENTER, G. y GROSSBERG, S. (1987).

[7] RUMELHART, D., HINTON, G. y WILLIAMS, R. (1986).

Werbos en su tesis doctoral [Werbos, 1974]. Posteriormente se encuentra el trabajo de [Parker, 1985] y también de forma independiente Le Cun (1986) redescubrió el algoritmo Backpropagation.

El algoritmo Backpropagation utiliza la Regla Delta Generalizada que, como su propio nombre indica, es una generalización de la regla propuesta por Widrow y Hoff. Se trata, por tanto, de un algoritmo de entrenamiento supervisado (la fuente de las modificaciones de las conexiones entre neuronas es el error o diferencia entre la salida proporcionada por la red y la salida deseada) de acuerdo con el *principio de mínima distorsión*, es decir, los pesos se adaptan en cada iteración para reducir el error cometido con el ejemplo actual tratando de olvidar en la menor medida posible lo aprendido de ejemplos pasados anteriormente.

A finales de los años 80 y durante la década de los 90, gran parte de la investigación concerniente a las Redes Neuronales Artificiales ha proporcionado variaciones del algoritmo Backpropagation básico con objeto de mejorar fundamentalmente los aspectos relacionados con el tiempo de entrenamiento de los modelos y la capacidad de generalización de los mismos.

Además, hasta estos años, los modelos se caracterizaban por ser estáticos, cuestión que trata de superarse mediante el desarrollo de las Redes Recurrentes. En ellas, las salidas de la red revierten a la misma en forma de entrada, dotando así al modelo de dinamismo.

Actualidad y futuro de las Redes Neuronales Artificiales

En la actualidad se trabaja en la búsqueda de nuevos algoritmos de entrenamiento más potentes (algoritmos evolutivos, metaheurísticos, etc.). Otra línea de investigación es la relacionada con sistemas híbridos, por ejemplo los sistemas que incorporan la lógica difusa a las Redes Neuronales Artificiales. Esta integración se ve con gran futuro en las aplicaciones del mundo real, donde las cosas no se pueden caracterizar exactamente, por ejemplo, mediante los valores verdadero o falso, sino que frecuentemente nos encontramos con una gran imprecisión. Una referencia obligada en este campo es [Kosko, 1992].

Por último, hacemos referencia a las instituciones más relevantes en cuanto a la investigación en Redes Neuronales mediante la organización de conferencias y la publicación de revistas:

- *IEEE Computacional Intelligence Society*, anteriormente denominada IEEE Neural Networks Society. Con este cambio de nombre han pretendido recoger de manera más apropiada los diferentes aspectos de la labor investigadora de sus participantes: redes neuronales, sistemas difusos, computación evolutiva y otros paradigmas computacionales motivados biológica y lingüísticamente. Las tres publicaciones más importantes de la IEEE CIS son: IEEE Transactions on

Neural Networks, IEEE Transactions on Fuzzy Systems y IEEE Transactions on Evolutionary Computation.

- *Neural Information Processing Systems Foundation,* fundada con el propósito de intercambio de resultados de investigación en los sistemas de procesamiento neuronal de información en sus aspectos biológico, tecnológico, matemático y teórico, mediante la organización de conferencias anuales y la publicación de las actas correspondientes.

Otras publicaciones de interés son *Neural Computation* y *Neural Networks*. Ambas con carácter interdisciplinario que incluyen campos como la psicología, neurobiología, matemáticas, física, ciencias de la computación e ingeniería.

BIBLIOGRAFÍA

ANDERSON, J. y ROSENFELD, E. (eds.) (2000): *Talking Nets: An Oral History of Neural Networks*, Cambridge. MIT Press.

BAIN, A. (1873): *Mind and Body. The Theories of Their Relation*. Londres. Henry King.

CARPENTER, G. y GROSSBERG, S. (1986): Adaptive Resonance Theory: Stable self-organization of neural recognition codes in response to arbitrary lists of inputs patterns. *Eight Annual Conference of the Cognitive Science Society* (págs. 45-62). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

CARPENTER, G. y GROSSBERG, S. (1987): ART2: Self-organization of stable category recognition codes for analog input patterns. *Applied Optics*, 26, 4919-4930.

GARCÍA RUBIO, N. (2004): *Diseño de Redes Neuronales Artificiales para el Mercado Inmobiliario. Aplicación a la ciudad de Albacete*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Castilla-La Mancha.

HAYKIN, S. (1994): *Neural Networks. A Comprehensive Foundation*. Ed. Prentice Hall.

HOPFIELD, J. (1982): Neural networks and phsysical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79, 2554-2558.

HECHT-NIELSEN (1998): "Applications of counterpropagation networks". *Neural Networks*, 1, págs. 131-140.

HOPFIELD, J. y TANK, D. (1985): Neural computation of decisions in optimization problems. *Biological Cybernetics*, 52, 141-152.

JAMES, W. (1890): *Principles of Psychology*. Henry Holt. Nueva York.

KOHONEN, T. (1982): "Self-organized formation of topologically correct feature maps". *Biological Cybernetics*, 43, pp. 59-69.

KOHONEN, T. (1997): *Self-Organizing Maps* (2ª ed.) Ed. Springer. Berlín.

KOSKO, B. (1992): *Neural Networks and Fuzzy Systems* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

LE CUN, Y. (1986): Learning Processes in an Asymmetric Threshold Network En E. Bienenstock, F. Fogelman-Souli y G. Weisbuch, eds. *Disordered Systems and Biological Organization*. NATO ASI Series, F20, Berlín: Springer-Verlag.

MARTÍN DEL BRÍO, B. y SANZ MOLINA, A. (1997): *Redes Neuronales y Sistemas Borrosos*. Ed. RA-MA.

MCCULLOCH, W.S. y PITTS, W. (1943): "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity". *Bulletin of Mathematical Biophysics* 5: 115-133.

MINSKY, M.L. y PAPERT, S.A. (1969): *Perceptrons*. Cambridge, MA: MIT Press. Edición ampliada 1990.

NIGRIN, A. (1993): *Neural Networks for Pattern Recognition*. Cambridge, MA: The MIT Press.

PARKER, D. (1985): Learning Logic. TECHNICAL Report TR-87. Cambridge, MA: Center for Computational Research in Economics and Management Science, MIT.

ROSENBALTT, F. (1958): The Perceptron; A probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review* 65, 386-408.

ROSENBALTT, F. (1962): *Principles of Neurodynamics: Perceptrons and the Theory of Brain Mechanisms*. Washinhgton DC: Spartan.

RUMELHART, D., HINTON, G. y WILLIAMS, R. (1986): Learning representations by backpropagating errors. *Nature*, 323, 533-536.

RUSSELL, S. (1913): A practical device to simulate the working of nervous discharges. *Journal of Animal Behaviour*, 3, 15 f.

SARLE, W.S. (ed.) (2002): *Neural Network FAQ*. Newsgroup:comp.ai.neural-nets. URL:ftp://ftp.sas.com/pub/neural/FAQ.html.

STRACHEY, J. (1966): *The Standard Edition of th Complete Psychological Works of Sigmund Freud: Vol I. Pre-Psyco- Analytic Publications and Unpublished Drafts*. Londres. The Hogarth Press. in

WERBOS, P. (1974): *Beyond regression: New tools for prediction and analysis the behavioral sciences*, Ph. D. Disertation, Harvard University.

CAPÍTULO 18

La estadística en las Enseñanzas Primaria y Secundaria españolas, en la segunda mitad del siglo XX

MERI EMILIA CALVO MARTÍN
ANA ISABEL BUSTO CABALLERO
Universidad Complutense de Madrid

MARÍA DEL CARMEN ESCRIBANO RÓDENAS
Universidad San Pablo CEU

Introducción

La Estadística irrumpe en el sistema educativo español en el primer cuarto del siglo XIX, cuando el Reglamento General de Instrucción Pública de 29 de junio de 1821 establece en todas las universidades de provincia, en las que se imparte la segunda enseñanza, una cátedra de Economía política y estadística.

Sin embargo, los vaivenes políticos del siglo XIX hacen que muchos de los planes de estudio que se promulgan no se lleguen a implantar o que si lo hacen, perduren sólo un corto período de tiempo.

Así sucede con el primer Plan General de Instrucción Pública, que hace referencia a los niveles de Educación Primaria y Secundaria, y se debe al Duque de Rivas, que el

4-8-1.836 lo promulga mediante un Real Decreto de Gobernación. La Enseñanza Primaria se divide en esta época en dos niveles, Elemental y Superior, siendo gratuito sólo el primero. La asignatura de Matemáticas aparece ya en todos los niveles de la Primaria, pero sólo se enseñan las cuatro operaciones en la Primaria Elemental, y nociones de Aritmética y Geometría con aplicaciones en la Primaria Superior. Se establecen criterios generales para los estudios de Enseñanza Secundaria, en Matemáticas se estudiaba Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría, aunque no se establecían con rigor los contenidos a impartir.

Pasando por el Plan Pidal de 1845, el Plan de Pastor Díez de 1847, y las continuas idas y venidas políticas, sociales y educativas de esta época, hay que esperar hasta el 28 de agosto de 1850, siendo Ministro de Comercio, Instrucción y Obras Públicas D. Manuel de Sejias Lozano, en que se publica un Real Decreto reformando el vigente plan de estudios de Segunda Enseñanza, en el que se especifica que ésta se empezará a cursar con diez años y tendrá una duración de cinco años. La segunda enseñanza se cursaba en la Facultad de Filosofía, que a su vez estaba dividida en las secciones de Literatura, Administración, Ciencias físico-matemáticas y Ciencias naturales. Entre las materias que se estudian se encuentran "Elementos de Matemáticas", pero además, en la sección de Administración se imparte la asignatura de "Estadística". Esta es la primera vez que en un plan de estudios se implanta la Estadística como asignatura independiente[1]. En la sección de Ciencias físico-matemáticas, sin embargo, no se estudia nada de Estadística.

Este Real Decreto en su artículo 83 crea las Escuelas especiales, entre ellas las de Comercio, incorporadas en los Institutos de Segunda Enseñanza, en las que se empieza a impartir Estadística industrial y comercial unida a la Geografía y a la Economía política.

Desde este momento hasta 1953, se promulgan más de veinte leyes, órdenes y decretos que modifican y derogan los anteriores, sucesivamente, pero en ninguno de ellos se establecen los cuestionarios oficiales de las diferentes materias tal y como hoy día lo entendemos. Entre ellos cabe la famosa Ley Moyano de 1857 (y es la primera vez que se habla de la obligatoriedad de la Enseñanza Primaria), el Plan Romanones de 1901, el Plan Callejo de 1926, el Plan de 1934 de Niceto Alcalá-Zamora y Torres, y el Plan de Saínz Rodríguez de 1938 en la zona nacional.

El año 1953 y la enseñanza de la Estadística

Siendo ministro Ibáñez Martín se promulga la Ley sobre Enseñanza Primaria de 1945 (B.O.E. 18-7-1945). Hay que esperar a que aparezcan los cuestionarios oficiales de esta Ley, hasta el año 1953, bajo el ministerio de Joaquín Ruiz-Giménez y Cortés (O.M. de 6-2-1953), donde se publican detalladamente los cuestionarios de la nueva

[1] Véase "La Enseñanza de la Estadística en el Marco Educativo Español", Trabajo de investigación para el Diploma de Estudios Avanzado, de Ana Isabel Busto Caballero, en la Universidad San Pablo-CEU, de Madrid, 2004, pág. 44.

Educación Primaria, que ahora se divide en Elemental, con cuatro cursos de duración, de los 6 a los 10 años, Período de Perfeccionamiento, de dos cursos de duración, y Período de Iniciación Profesional, con tres cursos de duración. En el último curso del Período de Iniciación Profesional es donde aparecen por primera vez contenidos de Estadística en la Enseñanza Primaria, que son en el primer trimestre: la gráfica estadística y la interpretación de curvas, ejercicios; y en el tercer trimestre del curso: escalas numéricas y gráficas, construcción de las mismas, la representación gráfica de los fenómenos estadísticos mediante gráficos proporcionales, ejercicios de reconocimiento y de construcción.

El 2-7-1953, se publica en el B.O.E. el Decreto del 12-6-1953, por el que se aprueba el nuevo plan de estudios del Bachillerato, de acuerdo con la Ley promulgada en el B.O.E. del 27-2-1953 (Ley sobre Ordenación de la Enseñanza Media, del día 26-2-1953). En este plan se hace una descripción bastante detallada de los contenidos a impartir en cada uno de los seis cursos en que se dividía el Bachillerato (Elemental cuatro años y Superior, dos años, que se comenzaba a la edad de 10 años). Por primera vez en la historia de la Enseñanza Secundaria en España, aparecen algunos conceptos estadísticos en la asignatura de Matemáticas, como son: diagramas, histogramas y cartogramas en cuarto curso; promedios: medias aritméticas simple y ponderada, y media geométrica en quinto curso; ideas de dispersión y correlación lineal, junto con el estudio de la curva normal en sexto curso.

En 1959 en Royaumont bajo los auspicios de la Organización Europea de Cooperación Económica (OCDE), se realiza una reunión Internacional de matemáticos, y en el informe que se redacta en la reunión, se hace hincapié en la necesidad de introducir y/o ampliar los conceptos estadísticos en la Enseñanza Media, y aparecen relaciones de países donde ya se imparten estos temas como por ejemplo: Estados Unidos, Canadá, Suecia y Austria. A partir de este momento, los conceptos estadísticos van consolidándose y ampliándose en los cuestionarios oficiales de los sucesivos planes de estudio que van apareciendo, aunque a veces cambia la ubicación de los mismos en los diferentes cursos.

En el año 1965**,** la O.M. de 8-7-1965 (B.O.E. 24-9-1965), siendo ministro de Educación Lora Tamayo, se promulgan nuevos cuestionarios de la Educación Primaria, y la Estadística no aparece en ninguno de los citados cuestionarios.

Ley 1970

En la Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, de Villar Palasí (Ley 14/1970, de 4 de Agosto, B.O.E. 6-8-1970), el sistema educativo se reforma por completo, modificándose todas las etapas de la Educación, tanto la Primaria, que pasa a denominarse Educación General Básica (E.G.B.), con una duración de 8 años , como la Media, con el nuevo Bachillerato Unificado y Polivalente (B.U.P.), con una duración de tres años y la Formación Profesional (F.P.), con una duración de cinco años, y la Universitaria. Los alumnos comienzan a cursar la Educación General básica a los 6 años y la Enseñanza Media a los catorce años. Los contenidos matemáticos de esta nueva Ley, que se van desarrollando a lo largo del tiempo. En diferentes órdenes ministeriales y decretos se establecen unos contenidos para la EGB y para la Enseñanza Media, tanto para el B.U.P. como para la F.P. donde se incluyen los conceptos de probabilidad y estadística a niveles mucho más amplios que en las anteriores leyes.

Dentro de los cuestionarios y de las enseñanzas mínimas que se fijan con posterioridad a la publicación de la Ley, se establece que en el último ciclo de E.G.B., los cursos de 6º a 8º, los contenidos de Matemáticas aparecen divididos en ocho bloques, y el último de éstos, lleva por título "Estadística Descriptiva". Es la primera vez que los alumnos estudian conceptos estadísticos.

En los programas renovados del año 1982, correspondientes a esta misma Ley 70, para resaltar la utilidad de la Estadística Descriptiva, se elimina la probabilidad y el estudio de distribuciones estadísticas y se afianza el estudio, clasificación y agrupación de datos estadísticos para confeccionar tablas, y la interpretación de gráficos.

En los cursos de F.P., la distribución de los contenidos se realiza en base a las diferentes ramas y especialidades de primer y segundo grado, impartiéndose temas de probabilidad y estadística a los mismos niveles que en el B.U.P., incluso de mayor nivel, en algunas de sus especialidades, por ejemplo en la Rama Sanitaria, en la especialidad de Laboratorio de Análisis Clínicos se llegaban a explicar conceptos de probabilidad, de variable aleatoria, las distribuciones binomial y normal, y estadística inferencial con test de hipótesis e intervalos de confianza.

Por la cantidad de ramas existentes en F.P., así como la complejidad a la vez que diversidad de su estructura, en este trabajo sólo nos referiremos a los contenidos de B.U.P., que en primer curso introducen la probabilidad, la variable estadística, medidas de posición central y dispersión; y en tercer curso se introduce el concepto de variable aleatoria, y se introducen las distribuciones binomial y normal.

L.O.G.S.E.

La Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo, conocida como L.O.G.S.E. establece un cambio sustancial entre la Educación Primaria y la Educación Secundaria. La Educación Primaria, que de nuevo se llama Primaria, y ya no E.G.B., va a constar ahora de seis cursos divididos en tres ciclos, cada uno de dos años de duración, comenzando los alumnos la escolaridad obligatoria a los 6 años de edad y finalizando a los 12, mientras que la Educación Secundaria comienza a los 12 años, con un primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.), que antes pertenencia a la Educación General Básica por edad de los alumnos, de 12 a 14 años.

El último de los cuatro bloques en que se divide el currículo de cada uno de los ciclos, está dedicado a la Organización de la Información, y dentro de él aparecen como conceptos estadísticos: tablas de datos, tipos de gráficos estadísticos, la media y la moda, y carácter aleatorio de una experiencia.

En el primer ciclo, de 6 a 8 años, se hacen registros de sucesos (recuentos, agrupaciones), representación (tablas de entrada y gráficos sencillos), y lectura, comprensión y expresión de tablas y gráficos realizados por los propios alumnos.

En el segundo ciclo, de 8 a 10 años, se realizan registros de un suceso con mayor número de datos y mayor detalle (recuentos con la multiplicación), representación (tablas de dos criterios, diagramas más complejos, con más datos), lectura, comprensión y expresión de gráficos no elaborados por el alumno e interpretación y una iniciación a la media y a la moda.

En el tercer ciclo, de 10 a 12 años, se complementa lo incluido en los ciclos anteriores y se introduce por primero vez el carácter aleatorio de alguna de las experiencias.

Es preciso resaltar que los dos últimos cursos 7º y 8º, de la Educación General Básica (E.G.B.) de la Ley de 1.970, corresponden en la nueva L.O.G.S.E. al primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.), por la edad de los alumnos (12 y 13 años), y esto hace que los alumnos en estos cursos actualmente hagan Enseñanza Secundaria, y no Enseñanza Primaria. Por lo tanto la mayor parte de la Estadística estudiada en la anterior E.G.B. pasa en la L.O.G.S.E. a la Enseñanza Secundaria.

La nueva Educación Secundaria comienza ahora a los 12 años, y se divide en Obligatoria (E.S.O.), con un primer ciclo de 12 a 14 años, y un segundo ciclo de 14 a 16 años; y en Bachillerato, con dos años de duración, y cuatro modalidades. En esta ley, por primera vez se realiza con amplio detalle la descripción del currículo oficial, distribuido en objetivos, contenidos: conceptos, procedimientos y actitudes, criterios de evaluación, y contenidos mínimos.

En la E.S.O., dentro de los cinco bloques de contenidos, el cuarto “Interpretación, representación y tratamiento de la Información”, y el quinto “Tratamiento del Azar”, estudian la estadística y la probabilidad, concretamente del siguiente modo:

4. *Interpretación, representación y tratamiento de la información*

A. Información sobre fenómenos causales

1. Dependencia funcional:
    - Formas de expresar la dependencia entre variables.
    - Descripción verbal, tabla, gráfica y forma.
2. Características de las gráficas:
    - Aspectos globales: continuidad, crecimiento, valores extremo, periodicidad, tendencia.
    - Aspectos locales: tasa de variación media.
    - Gráficas lineales: significado en términos de proporcionalidad.

3. Funciones elementales:
   - Funciones y gráficas de proporcionalidad inversa, cuadráticos, exponenciales y periódicos.
   - Expresión algebraica asociada a una gráfica.

B. Información sobre fenómenos aleatorios

4. Obtención de información sobre fenómenos aleatorios:
   - Las muestras y su representatividad.
   - Frecuencias absolutas, relativas y porcentuales.
   - Gráficas estadísticas usuales.
5. Parámetros estadísticos:
   - Los parámetros centrales y de dispersión como resumen de un conjunto de datos estadísticos.
   - Algoritmos para calcular parámetros centrales y de dispersión sencillos.
6. Dependencia aleatoria entre dos variables.

5. *Tratamiento del azar*

1. Fenómenos Aleatorios y terminología para describirlos:
   - Imprevisibilidad y regularidad en fenómenos y experimento s aleatorios.
   - Posibilidad de realización de un suceso.
2. Asignación de probabilidad a sucesos:
   - Frecuencia y probabilidad de un suceso.
   - Ley de Laplace.
   - Experimentos dependientes e independientes.
3. Asignación de probabilidad en experimentos compuestos:
   - Probabilidad condicionada[2].

En las modalidades del Bachillerato de Tecnología y de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, sólo se estudian contenidos de probabilidad y estadística en el primer curso:

[2] Véase Real Decreto 1007/1991 del 14 de junio por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la ESO (B.O.E. del 26 de junio nº 152).

Bloque 4. Estadística y probabilidad

- Estadística descriptiva bidimensional. Interpretación de relaciones entre dos variables estadísticas. Representación gráfica: Nube de puntos.
- Parámetros estadísticos bidimensionales: Medias y desviaciones típicas marginales, covarianza. Coeficiente de correlación lineal. Regresión lineal.
- Distribución de frecuencias y distribución de probabilidad. Variable aleatoria.
- Variable aleatoria discreta. Función de probabilidad. Media y varianza de una función de probabilidad discreta. Distribución binomial.
- Variable aleatoria continua. Función de densidad. Función de distribución, media y varianza. La distribución normal.
- Utilización de distintos métodos e instrumentos en los cálculos estadísticos. Manejo de tablas[3].

En la modalidad del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, se imparte estadística tanto en primero como en segundo curso, en ambos cursos en el tercer bloque:

Bloque 3. Estadística y probabilidad

- Estadística descriptiva bidimensional. Relaciones entre dos variables estadísticas. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias de doble entrada. Representación gráfica: Nube de puntos.
- Parámetros estadísticos bidimensionales: Medias y desviaciones típicas marginales, covarianza. Coeficiente de correlación lineal.
- Regresión lineal. Rectas de regresión. Predicciones estadísticas.
- Distribución de frecuencias y distribución de probabilidad. Variable aleatoria. Variable aleatoria discreta. Función de probabilidad. Media y varianza de una función de probabilidad discreta. Distribución binomial.
- Variable aleatoria continua. Función de densidad. Función de distribución. Media y varianza. La distribución normal.
- La normal como aproximación de la binomial.
- Utilización de distintos métodos e instrumentos en los cálculos estadísticos. Manejo de tablas.

Bloque 3. Estadística y probabilidad

- Experimentos aleatorios. Sucesos. Operaciones con sucesos.
- Probabilidad. Asignación de probabilidades mediante frecuencias o por aplicación de la ley de Laplace.
- Probabilidad condicionada. Probabilidad total. Teorema de Bayes.

---

[3] Véase Real Decreto 1179/1992 del 2 de octubre, por el que se establece el currículo del Bachillerato.

- Muestreo. Técnicas de muestreo. Parámetros de una población y estadísticos muestrales. Distribución muestral de las medias. Teorema central del límite.
- Estimación por intervalos de confianza. Nivel de confianza. Error de estimación y tamaño de la muestra[4].

El 16-1-2001, se publica en el B.O.E. el Real Decreto 3473/2000, por el que se modifican las enseñanzas mínimas correspondientes a la E.S.O., y se proponen los contenidos mínimos para el primer ciclo y para cada uno de los cursos del segundo ciclo, quedando reducidos globalmente los conceptos estadísticos a: estadística unidimensional, distribuciones discretas; tablas de frecuencias y gráficos estadísticos; parámetros de centralización y dispersión; experimentos aleatorios; frecuencia y probabilidad de un suceso; cálculo de probabilidades mediante la Ley de Laplace; variables discretas y continuas; intervalos y marcas de clase; elaboración e interpretación de tablas de frecuencias, gráficos de barras y de sectores, histogramas y polígonos de frecuencia; cálculo e interpretación de los parámetros de centralización y dispersión; experimentos aleatorios de sucesos; probabilidad simple y compuesta; utilización de distintas técnicas combinatorias en la asignación de probabilidades simples y compuestas.

También se han modificado las enseñanzas mínimas correspondientes al bachillerato por el Real Decreto 3474/2000, de 29-12-2000 (B.O.E. 16-1-2001), quedando de nuevo reducidos los contenidos de probabilidad y estadística de la siguiente manera.

En las modalidades de Tecnología y de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud: Estadística descriptiva bidimensional; relaciones entre dos variables estadísticas; regresión lineal; distribuciones de probabilidad binomial y normal.

En la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, en primer curso: Estadística bidimensional; elaboración e interpretación de tablas de frecuencias de doble entrada y nubes de puntos; cálculo e interpretación de los parámetros estadísticos bidimensionales usuales; regresión lineal; rectas de regresión; predicciones estadísticas; distribuciones de probabilidad binomial y normal. Y en segundo curso: experimentos aleatorios, sucesos, operaciones con sucesos; probabilidad condicionada; probabilidad total; técnicas de muestreo; parámetros de una población; distribución de probabilidad de la media muestral; teorema central del límite; intervalo de confianza de la media de la población; nivel de confianza.

L.O.C.E.

La ley Orgánica de Calidad de la Educación 10/2002 de 23 de Diciembre, conocida como L.O.C.E., estructura el sistema educativo desde la educación preescolar, las enseñanzas escolares y la educación universitaria. En las enseñanzas escolares se diferencia entre las de régimen general y en régimen especial.

En régimen general se organiza en los siguientes niveles:

[4] Véase Real Decreto 1179/1992 del 2 de octubre, por el que se establece el currículo del Bachillerato.

- Educación Infantil.
- Educación Primaria.
- Educación Secundaria (que comprende las etapas de Educación Secundaria Obligatoria, el Bachillerato y la Formación Profesional de grado medio.
- Formación Profesional de grado superior.

La Educación Primaria comprende desde los seis años hasta los doce años y seis cursos académicos, divididos en tres ciclos de dos años académicos cada uno.

La Educación Secundaria Obligatoria comprende desde los doce años hasta los dieciséis años y cuatro cursos académicos.

El Bachillerato constara de dos cursos académicos, en tres modalidades diferentes: Artes, Ciencias y Tecnología y Humanidades y Ciencias Sociales.

Las condiciones de la Formación Profesional tanto de grado medio como superior quedan totalmente detalladas en la ley pero se sale del estudio emprendido en este trabajo.

El Real Decreto 115/2004 de 23 de Enero establece el currículo de la Educación Primaria en el último bloque del tercer ciclo denominado Representación de la información detalla:

> 1. Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos no agrupados. Construcción de tablas: frecuencias absolutas y relativas, mediante diversos medios y el uso del ordenador.
>
> 2. Iniciación intuitiva a las medidas de centralización. Realización e interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales, mediante diversos métodos y el uso del ordenador.
>
> 3. Concepto intuitivo de azar. Iniciación a la probabilidad[5].

El Real Decreto 835/2003 de 27 de junio establece las enseñanzas comunes de la Educación Secundaria Obligatoria, entre los objetivos de las Matemáticas en el punto 7 dice: Emplear los métodos y procedimientos estadísticos y probabilísticos para obtener conclusiones a partir de datos recogidos en el mundo de la información.

En cuanto a contenidos en los cuatro cursos, uno de los bloques es de Estadística:

> Primer curso: Tablas y gráficas. Construcción e interpretación de tablas de valores. Interpretación y lectura de graficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información.
>
> Segundo curso: Estadística. Estadística unidimensional. Distribuciones discretas. Tablas de frecuencias y diagramas de barras. Media aritmética y moda.

[5] Véase Real decreto 115/2004, de 23 de enero, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria.

Tercer curso Opción A: Estadística y probabilidad. Estadística unidimensional. Tablas de frecuencias y gráficos estadísticos. Parámetros de centralización y de dispersión. Experimentos aleatorios. Frecuencia y probabilidad de un suceso.

Tercer curso Opción B: Estadística y probabilidad. Estadística unidimensional. Tablas de frecuencias y gráficos estadísticos. Parámetros de centralización y de dispersión. Experimentos aleatorios. Frecuencia y probabilidad de un suceso. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.

Cuarto curso Opción A: Estadística y probabilidad. Variables discretas y continuas. Intervalos y marcas de clases. Elaboración y interpretación de tablas de frecuencias, y gráficos de barras y sectores, histogramas y polígonos de frecuencias. Cálculo e interpretación de los parámetros de centralización. Experimentos aleatorios y sucesos. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.

Cuarto curso Opción B: Estadística y probabilidad. Variables discretas y continuas. Intervalos y marcas de clases. Elaboración y interpretación de tablas de frecuencias, y gráficos de barras y sectores, histogramas y polígonos de frecuencias. Cálculo e interpretación de los parámetros de centralización. Experimentos aleatorios y sucesos. Probabilidad simple y compuesta. Utilización de distintas técnicas combinatorias en la asignación de probabilidades simples y compuestas[6].

Conclusiones

La primera vez que aparecen contenidos estadísticos en los cuestionarios oficiales de Enseñanza Primaria es en el Período de Iniciación Profesional, correspondiente a la Enseñanza Primaria, de la O.M. de 6-2-1953.

Sin embargo en la Enseñanza Secundaria se había introducido en 1850 una asignatura de Estadística en la sección de Administración que se impartía entonces en la Facultad de Filosofía y también se explicaba en las Escuelas de Comercio, unida a la Geografía y Economía política. Pero también hay que esperar hasta el 2-7-1953 para que se publique el Real Decreto, que desarrolla el plan de estudios correspondiente a la Ley sobre Ordenación de la Enseñanza Media del 26-2-1953, para que la Estadística forme parte de los contenidos de Matemáticas del denominado Bachillerato, tanto en el último curso del Bachillerato Elemental, cuarto curso, como en el último curso del Bachillerato Superior, sexto curso. A partir de este momento, cada vez que sale un plan con nuevos cuestionarios o contenidos matemáticos en la Enseñanza Media en España, los temas de estadística en la enseñanza secundaria se siguen afianzando y ampliando, conforme se va haciendo también en el resto del mundo.

Sin embargo, en la modificación sufrida en 1965, estos conceptos son totalmente eliminados de la enseñanza primaria, para volver a implantarse con la Ley del 70, en el último ciclo de la E.G.B., empezando primero con Estadística Descriptiva y Probabilidad, y eliminándose esta última en los programas renovados del año 1982.

[6] Real Decreto 831/2003, de 27 de junio (B.O.E. 3-07-03).

De nuevo en la L.O.G.S.E. (1990) vuelven a aparecer los conceptos estadísticos, incluso en el primer ciclo de la Educación Primaria, aunque debido al cambio de edades de los alumnos en la primaria, los mayores que antes cursaban Enseñanza General Básica y ahora son alumnos de E.S.O.

La Ley General de Educación de 1970 introduce en el B.U.P. el concepto de probabilidad y de variable estadística, y la L.O.G.S.E. como novedad hace aparecer la inferencia estadística con los test de hipótesis y los intervalos de confianza, teniendo en cuenta que esta parte de inferencia estadística ya estaba contemplada en la F.P. de la Ley de 1970.

BIBLIOGRAFÍA

ALVAREZ OSÉS, J.A. Y OTROS (2000): "La guerra que aprendieron los españoles. República y guerra civil en los textos de bachillerato (1938-1983)".

AUSEJO, E.; MILLÁN, A. (1989): "La organización de la Investigación Matemática en España en el primer tercio del s. XX. El laboratorio y la Junta para ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas", en *Llull 12*, págs. 261-308.

B.O.E., B.M., B.O.C.M. y "GACETA" (1834-2005).

BUSTO CABALLERO, A.I. (2004): "La Enseñanza de la Estadística en el Marco Educativo Español", Trabajo de investigación para el Diploma de Estudios Avanzado, de Ana Isabel Busto Caballero, en la Universidad San Pablo-CEU, de Madrid.

CALVO MARTÍN, M.E.; ESCRIBANO RÓDENAS, M.C.; FERNÁNDEZ BARBERIS, G.M. (1999): "Panorámica matemática en la época de Cánovas", en *Actas del Congreso "Cánovas y su Época", Colección Veintiuno*. Fundación Cánovas del Castillo. Madrid.

CALVO, M.E. Y OTROS (2002): "Evolución de los contenidos de Estadística en la Enseñanza Primaria", en *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas"*, Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, vol. II, págs. 499-502.

CALVO, M.E. Y OTROS (2002): "Matemáticas en la Facultad de Económicas. Casi medio siglo de contenidos", en *Actas de las X Jornadas de ASEPUMA 2002.* U.N.E.D., CD-ROM. Madrid.

COLECCIÓN LEGISLATIVA DE ESPAÑA. Tomos I-CLXIV. Imprenta Nacional. Madrid.

DIRECCIÓN GENERAL DE ENSEÑANZA PRIMARIA (1953): "Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria". Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación Nacional.

ESCRIBANO RÓDENAS, M.C. Y OTROS (1998): "Una experiencia en Matemáticas", en *Actas de las VI Jornadas de ASEPUMA.* Santiago de Compostela.

ESCRIBANO, M.C.; BUSTO, A.I. (2002): "Primeros intentos para la organización de la enseñanza de la Estadística en España: cursos de Estadística y sus aplicaciones", en *Historia de la Probabilidad y de la Estadística,* A.H.E.P.E., AC, Madrid, págs. 193-204.

ESCRIBANO, M.C.; BUSTO, A.I. (2002): "La creación en España de la primera Escuela de Estadística", en *Historia de la Probabilidad y de la Estadística,* A.H.E.P.E., AC, Madrid, págs. 205-219.

ESCRIBANO, M.C.; BUSTO, A.I. (2004): "La primera tesis doctoral sobre cálculo de probabilidades leída en la Universidad Central de Madrid" en *Historia de la Probabilidad y de la Estadística II,* A.H.E.P.E., AC, Madrid, págs. 287-299.

ESCRIBANO, M.C.; CALVO, M.E. (2001): "La importancia histórica de la Estadística en la Facultad de CC. Económicas y la escuela de Empresariales de la Universidad de Madrid", en *Actas de las IX Jornadas ASEPUMA,* CD-ROM. Tenerife.

ESCRIBANO, M.C. Y OTROS (2002): "La aparición de la Estadística en los planes de estudio de la Enseñanza Media-Secundaria", en *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas"*, Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza, vol II, págs. 503-506.

ETAYO MIQUEO, J.J. (1986): "75 años de vida matemática". Actas de las XI Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas. Badajoz. Universidad de Extremadura y R.S.M.E., vol. I págs. 23-42.

GABINETE COMPILACIÓN TEXTOS LEGALES (1977): "Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, y disposiciones complementarias". Colección Compilaciones. Servicio de Publicaciones del M.E.C. y B.O.E. Madrid.

HORMIGÓN, M. (1988): "Las Matemáticas en España en el primer tercio del s. XX", en *Ciencia y Sociedad en España*, J.M. Sánchez Ron (ed.) págs. 253-282. El Arquero C.S.I.C.

ORTIZ VALLEJO, M. (1991): "Evolución de los Contenidos de Matemáticas en la Enseñanza Primaria y Secundaria a lo largo de los últimos años (1945-1981)", en *Boletín nº 28 Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, mayo, 1991.

PROGRAMAS RENOVADOS DE LA EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA (1982): Editorial Escuela Española, S.A.

RÍOS, S. (1954): "Progresos recientes de la enseñanza de la Estadística en España", Sessione 28 dell´Instituto Internazionale di Statistica. Roma, septiembre 6-12.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID (1999): "Las Matemáticas en la vida cotidiana". Addison-Wesley. Madrid.

VV.AA. (1995): "Breve Historia de la Educación Matemática en España". Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo. Madrid.

CAPÍTULO 19

Antecedentes de la enseñanza de estadística en las universidades de Cataluña

TERESA CORBELLA DOMÈNECH
Universidad Rovira i Virgili

Introducción

La enseñanza de estadística matemática en el ámbito universitario catalán es relativamente reciente: puede considerarse que se introduce con los cambios acaecidos en la Universidad Española durante la Segunda República. Sin embargo, sus inicios se localizan más de un siglo antes, durante el Trienio Constitucional (1820-1823). En este trabajo se recogen antecedentes de la enseñanza de estadística en Cataluña. Se ponen de relieve cuatro períodos distintos del proceso de consolidación de la estadística como materia fundamental.

Este escrito se vehiculará a través de las cuatro etapas que se describen a continuación. 1) El antecedente más remoto encontrado en las universidades catalanas se sitúa durante el Trienio Constitucional, en aquel entonces se estableció una asignatura de "Economía Política y Estadística" que luego se eclipsa. 2) En la década de 1850, con los cambios organizativos introducidos a raíz de la Ley de Instrucción Pública de 9 de septiembre de 1857, conocida como Ley Moyano, reaparece la asignatura de "Economía Política y Estadística" en la Facultad de Derecho. En estos períodos iniciales por estadística debe entenderse básicamente recogida de datos y cuantificación de fenómenos y las materias de estadística se encuentran vinculadas a formaciones de vertiente económica o a cursos de geografía en los institutos, que dependen de la Universidad. 3) La estadística matemática no llega hasta la década de 1930 con la Segunda República y se incorpora no solamente a formaciones del ámbito de la economía sino también a carreras consideradas de ciencias puras o, con el tiempo, del ámbito sanitario. 4) Hoy en día las asignaturas de estadística están completamente consolidadas como materias para obtener el grado y también como enseñanzas de postgrado, esta incorporación es progresiva, y se podría situar con la gran expansión de la Universidad.

Primer período

A principios del siglo XIX la ciudad de Barcelona reivindica, sin mucho éxito, la devolución de su Universidad abolida desde 1717. Finalmente, los sucesos políticos de 1820 permiten la satisfacción de dicha petición, pero la restauración de la Universidad de Barcelona es transitoria y al acabar el período constitucional la Universidad retorna a Cervera, única ciudad catalana a la que Felipe V había concedido el privilegio de tener un “Estudio General”.

En este contexto, el 16 de febrero 1822 se realiza el acto de apertura de las cátedras que faltan para completar la segunda y la tercera enseñanza que se abren el 21 en el Colegio Episcopal donde figura una lista de las mismas en la que aparece la cátedra “Economía Política y Estadística” a cargo del profesor Jaumeandreu. Las clases, que son gratuitas, han empezado unos días antes en el mes de enero (Palomeque, 1970, p. 92-101). Cabe suponer que el término estadística hace referencia a datos estadísticos. El 2 de noviembre de 1822 llega la R.O. por la que se reconoce la Universidad en la ciudad condal, que ya está en funcionamiento, y se clausura la de Cervera.

La cátedra de “Economía Política y Estadística” está adscrita a la segunda enseñanza, en la que se integran alumnos adolescentes. Sin embargo, para evitar la duplicación de cátedras se acuerda que los alumnos de tercera enseñanza que deban cursar tales materias según el estado de sus carreras recurran a dichas cátedras (Palomeque, 1970, p. 94).

La cátedra es desempeñada, inicialmente en condición de interino, por Eudaldo Jaumeandreu Triter, un religioso agustino que para ello adquiere el compromiso de exclaustrarse (Palomeque, 1970, p. 83-84). El papel de los agustinos en el ambiente cultural de la época en Barcelona tiene un cierto relieve; de hecho, es en el colegio de San Agustín en donde se establece la Secretaría y la Sala de Juntas de los profesores (Palomeque, 1970, p. 94).

En ese mismo período, Olivé y Prats (1998, p. 61) referencian una cátedra de “Formación Política y Estadística” que entra en funcionamiento el 19 de marzo de 1822 y después desaparece en Tarragona. La ciudad de Tarragona también había visto frustradas sus aspiraciones universitarias con el Decreto de Nueva Planta, pero había conseguido, posteriormente, un Real Estudio que no podía expedir títulos.

La reivindicación barcelonesa de tener universidad no vuelve a satisfacerse hasta 1837 de forma provisional con la aprobación por las Cortes de un Plan de Instrucción Pública y hasta el 10 de agosto de 1842 con carácter definitivo por el Decreto en el que se aprueba el traslado de la Universidad de Cervera. En esta nueva etapa de funcionamiento se recoge parte de lo establecido durante el Trienio Constitucional. No en vano hay un proceso de restitución de los profesores que durante la "década ominosa" habían sido cesados por su adhesión al régimen liberal (Palomeque 1974, p. 92). Así reaparece una asignatura a cargo del profesor Jaumeandreu titulada "Economía Política", ha perdido pues su apéndice "y Estadística". El término estadística no reaparecerá hasta la segunda mitad del siglo XIX.

Antes de pasar al segundo período conviene comentar la figura de **Eudaldo Jaumeandreu Triter** a quien Ernest Lluch (1975) consideraba el economista más destacado de Cataluña de la primera mitad del siglo XIX. Nació en Barcelona en 1774 e ingresó en la orden de los agustinos en 1788. Viajó a Mallorca para ocupar una cátedra de "Economía Civil" y, posteriormente, volvió a Barcelona para ocupar una de "Economía Política" en la Casa Lonja, de la que tomó posesión en 1814. Publicó diversas obras entre las que cabe destacar "Rudimentos de economía política" (1816), redactado en forma de preguntas y respuestas, es el primer tratado de Economía escrito por un catalán (Lluch 1988, p. 5); ha sido reeditado y prologado por Ernest Lluch. En 1822 ocupó de forma interina y luego como titular la cátedra de "Economía Política y Estadística" (Palomeque 1974, p. 83 y 139-141), razón por la cual debió exclaustrarse pasando a ser presbítero secular. En 1834 es restituido como catedrático en la Casa Lonja y con la reapertura de la Universidad de Barcelona en 1837 toma la cátedra de "Economía Política" (Palomeque 1974, p. 141-142). Por aquellos años publicó "Curso elemental de economía política" (1836), "Curso elemental de derecho público" (1836) y "Catecismo de la constitución" (1839). Murió en 1840. El profesor Jaumeandreu contó entre sus alumnos a distintas personalidades del siglo XIX entre los que se puede destacar por ejemplo a Laureano Figuerola que años más tarde, en 1848, ocupó una cátedra de "Economía Política y Derecho Administrativo". Su tendencia política era liberal, como lo demuestra su elogio fúnebre al general Lacy, fusilado por la reacción fernandina, aunque supo adaptar su discurso económico, como explica Lluch (1988, p. 6), a los intereses de una época y un lugar. Así, ya en Barcelona su discurso en temas de política arancelaria era proteccionista y sobre la existencia de gremios conservadora[1].

Segundo período

La Universidad de Barcelona se reabre en tiempos de Isabel II: 1837 con carácter provisional y 1842 de forma definitiva. En aquel tiempo la enseñanza universitaria

[1] Para los datos biográficos se ha consultado además el escrito de Zaragoza (2000).

está en una época de cambios debido, como señalan Escribano y Busto (2004, p. 288), no solamente al liberalismo político en auge sino a necesidades presupuestarias. Así en 1836 se establece el plan del Duque de Rivas, en 1845 hay otra reforma universitaria (el Plan Pidal) que limita el número de universidades en España a 10, una en Cataluña (Barcelona). Para finalmente culminar con la normativa con rango de ley conocida como Ley Moyano en 1957 y que conllevará una cierta estabilidad al sistema universitario (Escribano y Busto, 2004, p. 289).

De ese período se han consultado folletos de los discursos inaugurales de curso que tienen información sobre el profesorado y las materias que imparten. Además, en la segunda mitad del siglo XIX, estos folletos contienen los llamados "datos estadísticos" referidos a cursos anteriores. A partir de estas fuentes se han buscado las materias en las que conste el término estadística.

La primera referencia que se ha encontrado aparece en el folleto del curso 1858-1859. En la Facultad de Derecho hay una cátedra de "Economía Política y Estadística" con profesor vacante. La materia es común a la enseñanza de las dos ramas de derecho de entonces. En cambio en el folleto del curso 1856-1857, en la antigua Facultad de Jurisprudencia no aparece referencia alguna. Se observa un cambio a partir de la Ley Moyano. Lógicamente este cambio es de ámbito estatal; así Martín Pliego (2002, p. 77) explica que en la segunda mitad del siglo XIX aparecen cátedras de "Economía Política y Estadística" en las Facultades de Derecho y de "Geografía y Estadística" en las Escuelas de Comercio.

En el folleto del curso 1864-1865 también aparece en la Facultad de Derecho la materia "Elementos de Economía Política y Estadística" en la que figura como catedrático el doctor Narciso Guillén, que desempeñará su puesto varios años. En el mismo folleto aparecen con bastante detalle en el apartado de "datos estadísticos" no solamente el número de inscritos sino también los resultados de los 106 alumnos matriculados en la asignatura de "Economía Política y Estadística" del curso 1862-1863. En total hay 66 alumnos que han ganado curso entre los exámenes ordinarios y extraordinarios, 17 que lo han perdido y 23 que "no han sufrido examen". Se trata de la asignatura de derecho en la que hay más matriculados y más repetidores.

La enseñanza en los Institutos: El término estadística consta también en el título de una materia que se imparte, como una de las "asignaturas de aplicación" en algunos institutos de Cataluña. Así, en el Instituto de Segunda Enseñanza de Barcelona aparece una "Geografía y Estadística Comercial" con 17 alumnos de los que solo 5 ganan curso y 3 no se examinan. En el Instituto de Tarragona hay una "Geografía y Estadística Mercantil" con 2 alumnos ambos con matricula en el curso 1862-1863 y 11 en el 1864-1865 (folleto 1866-1867) de los que 10 ganan curso. En cambio esta materia no aparece referenciada en los institutos de Figueras, Lérida o Reus.

Este tipo de datos, tanto los referidos a la Facultad de Derecho como los de los institutos, tienen una continuidad en los años siguientes. A finales de siglo, con datos del anuario de la Universidad de Barcelona 1897-1898 sigue existiendo la asignatura de "Economía Política y Estadística" en la Facultad de Derecho que imparte el profesor

José Domènech Coll, decano en aquel momento, y que también se ocupa de la materia "Elementos de Hacienda Pública". En el mismo anuario en el capítulo "Escuelas especiales. Escuela superior de comercio de Barcelona" aparece una materia "Complemento de la Geografía y Estadística Comparada" a cargo del profesor Miguel Pérez Aravena en calidad de interino.

En cambio, a finales de siglo, en la Facultad de Ciencias todavía no constan datos sobre materias de estadística. Esto no es de extrañar, tal como explica Martín Pliego (2002, p. 75) la Ley Moyano no contempló ninguna materia estadística en los planes de estudio de las facultades de ciencias.

Durante el primer tercio del s. XX es de suponer que se sigue en la misma tónica. Escribano y Busto (2002, p. 194) explican que en este período en España la estadística estuvo impartida desde las facultades de derecho y las escuelas de comercio cosa que la privó de rigor matemático. Desgraciadamente, no ha sido posible contrastar este hecho con el material disponible puesto que los anuarios de la Universidad para estos cursos contienen escasos datos sobre la docencia.

Tercer período

Durante la Segunda República se produce un gran cambio en la Universidad Española. El Decreto de 13 de mayo de 1931 deroga los planes vigentes de enseñanza universitaria, siendo aprobados unos planes de estudio provisionales (Decretos del 11 y 15 de septiembre de 1931 y Orden aclaratoria de 16 de septiembre de 1931). La Universidad de Barcelona pasa a denominarse en este breve período Universidad Autónoma de Barcelona[2]. Entonces aparece la enseñanza de estadística matemática en las facultades de ciencias.

En concreto, para el caso de la Universidad de Barcelona, consultando el "plan modelo" en el anuario del curso 1934-1935 se encuentra en la Facultad de Ciencias, sección Ciencias Exactas, la materia "Estadística Matemática" impartida por el profesor José M. Orts. La asignatura, cuyas clases se dan los lunes, miércoles y viernes a las 12 h., comprende 90 lecciones y tiene el programa siguiente: *Probabilidades; variables eventuales. Leyes de probabilidad. Primera demostración de las leyes de grandes números. Función característica. Ley de Gauss. El teorema de Bernouilli y sus extensiones. Series estadísticas. Clasificación de los datos experimentales. Representación gráfica. Reunión de las curvas de frecuencia. Método de los momentos. Curva de Pearson. Elección de magnitudes a priori. Esquemas de Poisson, Lexis y Borel. Teoría de la correlación. Dependencia estocástica. Covariación.* El mismo profesor también imparte un curso de "Matemática Actuarial".

Por otro lado, el profesor Esteban Terradas, a quien Arribas (2004, p. 345) considera el pionero de la estadística matemática en España, imparte el curso "Cálculo de

[2] La universidad que actualmente lleva el nombre de Universidad Autónoma de Barcelona fue creada en 1968.

Probabilidades" en los locales del "Institut d'Estudis Catalans" en cuyo programa figura, entre otras cosas, el tema "Formación estadística de mecánica cuántica"[3].

Por su lado, en la Facultad de Derecho, entre las 11 materias que el "Grupo de Ciencias Económicas" debe cursar en su segundo período figura "Estadística". La asignatura está a cargo del profesor José A. Vandellós y comprende 60 lecciones que se imparten los martes y los jueves de 4 a 5 de la tarde. El contenido resumido que aparece en el anuario es el siguiente: *Metodología estadística. Cálculo de probabilidades. Aplicación de la estadística a las Ciencias Económicas.* En la formación económica la estadística también se matematiza.

La actividad de esta Universidad Autónoma se acaba con el fin de la guerra. Tras la contienda muchos de los cambios que se habían producido en la Universidad quedan anulados, entre los que figura el plan de estudios. La Universidad vuelve a un troncalismo rígido. En relación con la enseñanza de estadística hay un cierto retroceso. Sin embargo, la Universidad no puede obviar las materias de estadística. En la Facultad de Ciencias a mitad de siglo se encuentran asignaturas relacionadas con la estadística, aunque no hay cátedras específicas. No se hallan en cambio en la Facultad de Derecho. Pero en la década de los 60 hay asignaturas de estadística tanto en la Facultad de Ciencias como en la de Ciencias Políticas, Económicas y Comerciales creada en 1954.

En el anuario de la Universidad de Barcelona de 1950 aparece en la Facultad de Ciencias sección de Matemáticas un curso de "Cálculo de Probabilidades" a cargo del profesor José M. Orts Aracil, catedrático de "Análisis Matemático", en tercer curso y un curso de "Estadística Matemática" a cargo del profesor Francisco Sales Vallés, profesor adjunto de la misma cátedra, en cuarto curso. En el mismo anuario se documenta el curso monográfico de doctorado "Métodos Estadísticos en el Estudio de Gases y Líquidos" a cargo del profesor José M. Vidal Llenas, catedrático de "Termología", de la sección de Física. En el resto de facultades no se encuentra referencia alguna. Tampoco se detecta ninguna cátedra específica.

El "Escalafón de catedráticos numerarios de universidad" de 1955 publicado por la Dirección General de Enseñanza Universitaria permite comprobar las cátedras dotadas (vacantes incluidas) existentes en las 12 universidades españolas a 1 de enero de 1955. En relación con la estadística en la Universidad de Barcelona cabe señalar que no aparece ninguna cátedra dotada en cuyo nombre aparezca el término estadística en ninguna de sus facultades (ni la de Ciencias, ni la correspondiente a Economía que al ser tan nueva solo tenia dos cátedras dotadas, ni la de Derecho...). De hecho, la única universidad en la que aparecen cátedras de estadística matemática es la de Madrid[4].

---

[3] Español (2004, p. 392) explica que Terradas ocupó de forma interina entre 1931 y 1933 la cátedra de "Estadística Matemática" en Madrid.

[4] En la Universidad de Madrid, según consta en el Escalafón de Catedráticos de 1955, hay una cátedra de "Estadística Matemática y Cálculo de Probabilidades" a cargo de Sixto Ríos García, en la Facultad de Ciencias, una de "Estadística y Métodos Estadísticos" vacante así como una de "Estadística Actuarial" a cargo de Angel Vegas Pérez en la Facultad de Ciencias Políticas, Económicas y Comerciales y, fi-

En la misma publicación aparece una ordenación de los catedráticos por asignaturas y de nuevo no se halla referencia alguna a materias de estadística en la Universidad de Barcelona, aunque hay que tener en cuenta que el listado de asignaturas parece incompleto.

La situación es distinta en la década de los 60. En el anuario de la Universidad de Barcelona de 1962 en la sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias aparece una asignatura de "Cálculo de Probabilidades y Estadística Matemática" a cargo del profesor Francisco Sales Vallés, catedrático de "Estadística Matemática y Cálculo de Probabilidades". El mismo profesor imparte la asignatura de tercer curso "Estadística Teórica" en la Facultad de Ciencias Políticas, Económicas y Comerciales. En esta facultad también hay cursos de "Econometría" en cuarto curso a cargo de Jaime Tintó Gotsens encargado de la cátedra de "Econometría y Métodos Estadísticos", "Estadística Actuarial" en quinto a cargo Rafael Velasco Lara, esta misma asignatura aparece dentro de la rama C y está a cargo de Francisco Busquets Roca. Además, figura el profesor Alfonso García Barbancho como catedrático de "Econometría y Métodos Estadísticos" y el profesor Enrique Querol Padrosa como profesor adjunto entre otras cosas de "Estadística Teórica" y "Econometría y Métodos Estadísticos". Por otro lado, ya en 1957 se impartían unos seminarios de estadística para alumnos de cuarto curso de medicina en la cátedra de "Farmacología".

Consultando el anuario de 1967 se advierte que la situación de la estadística sigue en la misma línea con algunos cambios en el profesorado. El cambio más destacable es un curso monográfico de doctorado a cargo del profesor Sales en la Facultad de Ciencias (Sección Matemáticas) sobre "Procesos Estocásticos". También sigue uno en la sección de Físicas sobre "Mecánica Estadística de Gases Reales" a cargo del profesor José M. Vidal Llenas.

A partir de 1968 los cambios en la Universidad Española se aceleran. Hay una nueva ley, en Cataluña se crea la Universidad Autónoma de Barcelona y, además, la sociedad, tanto dentro como fuera de las fronteras, está en movimiento.

El panorama ofrecido por el anuario de la Universidad de Barcelona de 1975-1976, que ya recoge estos cambios, es distinto. En la Facultad de Matemáticas (ya separada de la de Ciencias) sigue como catedrático el Dr. Sales que es el director del Departamento de "Estadística Matemática". Hay dos materias de estadística: una obligatoria y una optativa. En la Facultad de Física se ha implementado la asignatura "Mecánica Estadística" en cuarto curso para las opciones A y B. En Medicina en primer curso aparece una "Bioestadística", también hay otra de doctorado. En la Facultad de Ciencias Económicas la estadística aparece en el primer y en el segundo ciclo de los distintos planes de estudio.

---

nalmente, una de "Fitotecnia, Economía Rural y Estadística Pecuaria" en la Facultad de Veterinaria. Esta última cátedra también está dotada en la Facultad de Veterinaria de León, que depende de la Universidad de Oviedo.

Por lo que respecta a la Universidad Autónoma de Barcelona, consultando el anuario para el curso 1971-1972 se encuentra una situación parecida. En la Facultad de Ciencias, sección “Estudios de Matemáticas” hay una “Estadística” todavía sin concretar. En la de Medicina una “Bioestadística”. En la de Psicología hay dos estadísticas y en la de Ciencias Económicas y Empresariales una estadística troncal con 220 horas lectivas.

Cuarto período

El último período corresponde a la época en la que la estadística ya se ha expandido a múltiples formaciones y se ha profundizado en su enseñanza no solo siendo frecuente en muchos programas de doctorado sino incluso teniendo un doctorado propio. Esta consolidación, obviamente, es un proceso que empieza muchos años antes. Es difícil y quizá gratuito señalar una fecha de inicio de esta etapa, pero corresponde a las últimas décadas del siglo XX.

Sin querer hacer una recopilación exhaustiva de la multitud de materias relacionadas con la estadística que pueden observase en este período, y a modo de ejemplo, a partir de la publicación durante los cursos 1981-1982 y 1982- 1983 de un catálogo con los programas conjuntos de doctorado de las 3 universidades catalanas de entonces (la Universidad de Barcelona, la Autónoma de Barcelona y la Politécnica) se han buscado los cursos relacionados con esta materia.

En esta fuente “Probabilidad” tiene el código 1208 y “Estadística” el 1209 (el código 12 corresponde a matemáticas). En el primero se indexan 4 cursos y en el segundo 9. Este número se verá incrementado en años posteriores.

Veinticinco años más tarde, hoy en día, la presencia de la estadística se ha hecho mucho más notoria. Hay dos Diplomaturas en Estadística, una en la Universidad de Barcelona que se imparte en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales y otra en la Universidad Politécnica de Cataluña que se imparte en la Facultad de Matemáticas y Estadística. Además, también hay un programa de doctorado específico: “Estadística, Análisis de Datos y Bioestadística” que se ofrece desde la Universidad de Barcelona y otro afín: “Aplicaciones Técnicas Informáticas de la Estadística, la Investigación Operativa y la Optimización” que se ofrece desde la Universidad Politécnica de Cataluña.

Síntesis final

1. El término estadística consta en el nombre de una cátedra de la Universidad de Barcelona ya en los años veinte del s. XIX (durante el Trienio Constitucional). La cátedra es de “Economía Política y Estadística” y está a cargo de Eudaldo Jaumeandreu Triter.

2. En la segunda mitad del s. XIX reaparece la cátedra de “Economía Política y Estadística” en la Universidad de Barcelona (enseñanza de derecho).
3. En ese período el término estadística también consta en el título de “asignaturas de aplicación” que se imparten en algunos institutos dependientes de la Universidad como complemento de la geografía. Asimismo aparece en una materia de la Escuela Superior de Comercio de Barcelona.
4. Durante la Segunda República, se encuentran asignaturas de estadística con un enfoque matemático tanto en la Facultad de Ciencias (sección Ciencias Exactas) como en la de Derecho (grupo de Ciencias Económicas).
5. Tras la guerra hay un cierto retroceso de la enseñanza de estadística y una posterior recuperación lenta pero firme.
6. Hoy en día la estadística aparece en múltiples formaciones tanto para conseguir el grado como en postgrados. Además, existen formaciones específicas en estadística al nivel de diplomatura y de doctorado. Puede decirse pues que su enseñanza ha sido sujeta a una ampliación tanto en los campos a los que se ha extendido como a la profundidad con la que se estudia.

BIBLIOGRAFÍA

ARRIBAS MACHO, J.M. (2004): “Los comienzos de la estadística matemática”, en Santos del Cerro, J. y García Secades, M. (coords.) (2004): “Historia de la probabilidad y la estadística II”. Delta Publicaciones (Madrid), cap. 21, p. 331-359.

ESCRIBANO RÓDENAS, M.C. y BUSTO CABALLERO, A.I. (2002): “Primeros intentos para la organización de la enseñanza de la estadística en España: Cursos de estadística y sus aplicaciones (1950-1952)”, en A.H.E.P.E. (2002): “Historia de la probabilidad y de la estadística”. Editorial AC (Madrid), p. 193-204.

ESCRIBANO RÓDENAS, M.C. y BUSTO CABALLERO, A.I. (2004): “La primera tesis doctoral sobre cálculo de probabilidades leída en la Universidad Central de Madrid”, en Santos del Cerro, J. y García Secades, M. (coords.) (2004): “Historia de la probabilidad y la estadística II”. Delta Publicaciones (Madrid), cap. 19, p. 287-300.

ESPAÑOL GONZÁLEZ, L. (2004): “La primera oposición a cátedra de estadística matemática en la universidad española”, en SANTOS DEL CERRO, J. y García Secades, M. (coords.) (2004): “Historia de la probabilidad y la estadística II”. Delta Publicaciones (Madrid), cap. 24, p. 387-400.

MARTÍN PLIEGO, F.J. (2002): “Los probabilistas españoles de los s. XVII a XIX”, en A.H.E.P.E. (2002): “Historia de la probabilidad y de la estadística”. Editorial AC (Madrid), p. 67-80.

LLUCH, E. (1975): “Jaumeandreu i Triter, Eudald”, en Gran Enciclopèdia Catalana, vol. 8, p. 737.

LLUCH, E. (1988): “Pròleg”, en JAUMEANDREU, E. (reed. 1988): “Rudimentos de economía política”. ed. Alta Fulla (Barcelona), p. 5-17.

OLIVE SERRET, E. y PRATS BATET, J.M. (1998): “Història dels estudis universitaris a Tarragona: un trajecte de vuit-cents anys”. Universitat Rovira i Virgili (Tarragona).

PALOMEQUE TORRES, A. (1970): “El Trienio Constitucional en Barcelona y la instauración de la universidad de segunda y tercera enseñanza”. Pub. de la Universidad de Barcelona (Barcelona).

PALOMEQUE TORRES, A. (1974): “Los estudios universitarios en Cataluña bajo la reacción absolutista y el triunfo liberal hasta la reforma de Pidal (1824-1845)”. Pub. de la Universidad de Barcelona (Barcelona).

ZARAGOZA PASCUAL, E. (2000): “Jaumeandreu i Triter, Eudald”, en Corts, R., Galtes, J. y Manent, A. (dirs.) (2000): “Diccionari d'història eclesiàstica de Catalunya”. ed. Claret y Generalitat de Catalunya (Barcelona), vol. II, p. 419.

Publicaciones Institucionales

DIRECCIÓN GENERAL DE ENSEÑANZA UNIVERSITARIA

- Escalafón de catedráticos numerarios de universidad 1955.

UNIVERSITAT AUTÓNOMA DE BARCELONA

- Anuario 1934-1935 (corresponde a la actual Universidad de Barcelona).
- Anuario 1971-1972.

UNIVERSITAT AUTONOMA DE BARCELONA, UNIVERSITAT POLITECNICA DE BARCELONA Y UNIVERSITAT DE BARCELONA

- Catálogo de los cursos monográficos de doctorado 1981-1982 y 1982-1983.

UNIVERSITAT DE BARCELONA

- Discursos inaugurales 1856-1857, 1858-1859, 1862-1863, 1864-1865 y 1866-67.
- Anuario 1897-1898, 1950, 1962, 1967 y 1975-1976.

CAPÍTULO 20

Principales aportaciones al análisis estadístico de series temporales de G. Udny Yule

José Luis Alfaro Navarro
José Mondéjar Jiménez
Universidad de Castilla-La Mancha

Introducción

George Udny Yule nació en Beech Hill (1871), una casa en Morham cerca de Haddington en Escocia. Procedía de una familia prestigiosa y de gran reputación. Cuando tuvo cuatro años, la familia se movió de Morham a Tooting, Londres. Posteriormente se trasladaron a Bayswater donde Yule asistió a la escuela en Orme Square. Cuando tuvo diez años fue enviado al internado en Dunchurch cerca de Rugby, curso sus estudios superiores en la Universidad de Winchester (Hampshire). Fue en esta escuela donde conoció al profesor Croft, quien lo estimulo a destacar en sus estudios.

En 1886, mientras que Yule estaba en Winchester, su padre murió y su familia se movió de Bayswater. George se quedó en Winchester hasta que, con dieciséis años, entró en la universidad para obtener un título de ingeniería. En 1890 Yule se graduó en ingeniería y durante dos años más participó trabajando en talleres de ingeniería. Era una experiencia que le hizo decidir que la ingeniería no era tema que le apasionara, por lo que en 1892 decidió comenzar sus investigaciones en el campo de la física.

Yule trabajó durante un año en Bonn, con el profesor Heinrich Herz, durante su estancia en Alemania publicó cuatro trabajos sobre olas eléctricas, pero ésta tampoco parecía ser su verdadera vocación y renunció a la física experimental. De este modo regresó de Alemania a Londres en el verano de 1893 y centró su atención en las estadísticas teóricas e inferenciales, fue cuando comenzó a trabajar en la universidad como ayudante de Karl Pearson, a la postre su gran inspirador en el mundo de la estadística. Su primer trabajo sobre estadística apareció en 1895. En este trabajo presentó coeficientes de correlación en tablas de doble entrada sobre la vida y trabajo de las personas de Londres para el periodo 1889-1893, donde desarrolló los procedimientos para estudiar la correlación existente en las tablas de contingencia bidimensionales.

En 1895 Yule fue elegido miembro de la Royal Statistical Society y durante los siguientes años —y motivado por Pearson— realizó una serie de importantes artículos sobre regresión y correlación estadística. Los primeros trabajos de Yule sobre la teoría de la correlación fueron publicados en 1897. Desarrolló su enfoque para la correlación, vía regresión. En este sentido, durante los siguientes años planteó un nuevo desarrollo basado en mínimos cuadros y, antes de los años 20, sus enfoques prevalecían en aplicaciones en el ámbito de las ciencias sociales. Las contribuciones teóricas más importantes en Yule fueron realizadas en el campo de la correlación y la regresión (especialmente en tablas de contingencia 2*2), series de tiempo, genética y epidemiología. Existen varios términos estadísticos de investigación que llevan su nombre: *el proceso de Yule, la distribución de Yule, Correlograma de Yule, la serie autoregresiva de Yule, el coeficiente de Yule y la Q de Yule*.

Comenzó su carrera como Profesor Adjunto de Matemática Aplicada en 1896, pero dado que obtenía unos ingresos muy bajos, dejo la universidad y en 1899 ocupó el puesto de Secretario a la junta de examen de la ciudad y gremios del Instituto de Londres. Este cambio de trabajo no disminuyó el producto de investigación de Yule estadística, ni su vinculación con la universidad. En los años siguientes, dio las conferencias del seminario *Newmarch lectures in statistics*. Estas conferencias fueron la base para el famoso texto "*Introduction to the Theory of Statistics"* que fue publicado en 1911. El texto fue dirigido a aquellos que poseían solamente unos conocimientos limitados de matemática y pronto cosecho un gran éxito. Era un libro que aunque refleja el enfoque estadístico de Pearson, contiene muchas de las contribuciones hechas por Yule. El libro tuvo 14 ediciones, y fueron las últimas ediciones las que tuvieron un mayor nivel de aceptación. Neyman, al examinar el libro, escribió: *"En mi opinión, éste es el mejor libro de estadística que se ha escrito"*.

Desafortunadamente para Yule, su amigo Karl Pearson, discrepó en sus planteamientos de relaciones posibles entre variables, lo que provocó una profunda enemistad entre ambos. Análogamente Charles Sperman desarrolló el coeficiente de correlación de rango, Sperman también se vió atacado por K. Pearson que calificó el método empleado como inválido. En ese mismo año 1911 Yule obtuvo el premio más alto de la *Royal Statistical Society:* la medalla de oro. Entre tanto, ocupó el puesto de secretario de esta sociedad durante el periodo 1907-1919 y el de presidente en el periodo 1924-1926. Fue al final de este período de presidencia cuando Yule desarrollo la que es considerada primera especificación de procesos autorregresivos.

En 1912 aceptó el cargo de profesor de estadística en Cambridge, suponiéndole un descenso salarial. En 1913 se hizo miembro de la Universidad de St John y vivió en la universidad la mayor parte del resto de su vida. Durante la Primera Guerra Mundial Yule trabajó como estadístico en el ejército en el departamento de contratos de la oficina de guerra, posteriormente realizó estudios estadísticos para el Estado sobre temas relacionados con la vacunas de tifus y cólera junto con Major Greenwood.

Los años 20 y 30 fueron los más productivos para Yule. Escribió trabajos sobre tiempo y correlación en los que presentó el correlograma e hizo el trabajo fundamental sobre la teoría de la series de autorregresivas. En 1930 se jubiló, aunque todavía estaba activo en sus investigaciones. Como anécdota puntual destacar su gran calidad intelectual que le llevó a interesarse por la conducción en los años 20, y conducir a velocidades imprudentes. Ese afán por la velocidad y su insaciable curiosidad le llevó a aprender a pilotar aviones al jubilarse. Sin embargo, al ser demasiado viejo tuvo problemas con las compañías aseguradoras, ya que no encontraba ninguna que quisiera asegurarle, es entonces cuando compró su propio avión y reunió las condiciones necesarias para su licencia de piloto en 1931. Pudo evitar el escollo legal de las compañías aseguradoras pero no el de su propia salud; así, sufrió una afección cardiaca en ese mismo año que le impidió continuar volando y lo hizo un inválido parcial por el resto de sus días.

En 1937 Yule realizó una revisión minuciosa del texto "*Introduction to the Theory of Statistics*" para la undécima edición publicada en ese año. La decimocuarta y última edición de su libro fue escrita conjuntamente con Maurice Kendall, el libro fue traducido a checo, polaco, español y portugués y divulgado en 1950, poco antes de la muerte de Yule en 1951. La primera mitad del libro contiene estadísticas descriptivas: la teoría de los atributos, distribuciones de frecuencias y sus características, correlación y regresión. La segunda parte del libro está dedicada a teoría de muestras, análisis de varianza y los capítulos finales dedicados a interpolación y graduación, números índice y series de tiempo.

Con una edad cercana a los 60 años y muy próxima a su jubilación, se dedicó al estudio del latín. Este intereses etimológico comenzó a surgir, y se cambió a estudios estadísticos de literatura. En años posteriores aplicó las estadísticas al estilo literario y publicó *"The statistical study of literary vocabulary"* en 1944. También estudió los errores cometidos al copiar manuscritos, la distribución de las diferentes palabras, cuántas palabras son usados una, dos, tres veces, etcétera, en un determinado texto y cálculo de desviación típica de la cantidad de los sustantivos de un vocabulario limitado. Yule trató de responder a preguntas del tipo ¿Shakespeare escribió las obras dramáticas que le son atribuidas? ¿San Pablo escribió la epístola a los efesios? ¿Cual es el orden cronológico probable de las obras de Platón? Utilizando este tipo de análisis. En la década de los 40, su salud empezó a deteriorarse otra vez y pasó los últimos dos años de su vida en reposo en su casa. Murió en la *Evelyn Nursing Home* en Cambridge a los 83 años de edad.

Primeros enfoques en el análisis de series temporales: problema de correlación temporal

Los filósofos y matemáticos trabajan en distintas disciplinas aplicando un razonamiento estadístico basado en variaciones lógicas para entender fenómenos observados a lo largo del tiempo. A finales del siglo XIX y principios del XX, los estadísticos vuelven a las herramientas de primeras diferencias, medias móviles y tiempos relativos para hacer series temporales compatibles con las herramientas matemáticas de correlación y regresión utilizadas en información de corte transversal. Udny Yule (1920) encontró un problema que denominó problema de correlación temporal (time-correlation problem), resultado de las investigaciones empíricas de Rápale Weldon, Francis Galton y Karl Pearson en los procesos de selección natural y herencias donde fueron capaces de manejar la información como datos de corte transversal sin necesidad de utilizar análisis de series temporales. Sin embargo, cuando otros estadísticos aplican correlación y regresión a series temporales era obvio que existían problemas de interpretación o resultados disparatados en la correlación existente entre dos series de tiempo.

El problema de aplicar correlación y regresión a datos económicos y meteorológicos fue de una naturaleza distinta. Dos décadas separan la primera regresión de Galton sobre el diámetro de la semilla de guisante dulce y la primera aplicación de estas técnicas a política económica y series temporales. El problema de distribuciones de frecuencia sesgadas fue abordado por Isidro Edgeworth y Udny Yule. Yule (1897) usa la condición de mínimos cuadrados para estimar una línea de regresión y deducir la fórmula de correlación y sus propiedades sin referencia a la forma de la distribución de frecuencias de las variables. Con la aproximación sugerida por Yule de regresión con mínimos cuadrados ordinarios, más bien que con correlación a través de la aproximación de la superficie de frecuencias, la limitación de "correlación normal" en los datos puros empieza a mostrarse insignificante. Esta práctica propuesta por Yule llegó a ser considerada como una práctica estandar en la medida de relaciones en economía.

En una serie de artículos, Yule (1895; 1896 a, b; 1899) investigó la afirmación de Charles Booth sobre la ausencia de relación entre el porcentaje total de pobreza y la proporción de ayudas otorgadas. Yule utilizó 500 datos resultado de las uniones de la encuesta de 1871 y 1891. El propio Yule fue el primer sorprendido por la distribución de frecuencias sesgada trazada por las medidas del ratio de ayudas para pobres y el porcentaje de población considerada pobre. En su primer artículo, Yule obtuvo un coeficiente de correlación positivo.

En las primeras aplicaciones del análisis de regresión, la interpretación del coeficiente de regresión fue que daba el valor medio de y correspondiente para el valor de la variable x. En ninguna publicación de ese tiempo fue traducido un coeficiente de regresión como variaciones en y ante variaciones en x. Yule fue el primero en usar el lenguaje de fluctuaciones en la interpretación de este coeficiente de regresión, concretamente en su trabajo de 1896a elaboró una tabla con un ranking de distritos basado en ratios de pobreza. Para cada clase dio el correspondiente porcentaje medio de población que percibía ayuda. Utilizando el lenguaje de fluctuaciones desarrollo comparaciones estáticas entre niveles de pobreza altos y bajos recogidos en esa tabla, describió la tabla mostrando que el aumento de pobreza, cuando el ratio de ayudas fue aumentando, era marcado y uniforme.

Los estudios de Yule fueron las primeras aplicaciones de regresión múltiple, utiliza como variable explicativa de los cambios en la pobreza el cociente de ayudas, también utiliza la proporción de ancianos y la población. Yule concluyó que su método de correlaciones múltiples de cambios desde 1871 a 1881 y de 1881 a 1891 revela que los cambios en la pobreza eran debidos a cambios en la política administrativa y no tanto a causas externas tales como el crecimiento de la población o cambios económicos.

Aunque los datos de Yule consisten en una serie de observaciones ordenadas en el tiempo, su análisis fue de corte transversal. Problemas adicionales aparecieron cuando Yule y otros estadísticos usan correlación y regresión en series de tiempo. Los problemas eran obvios de forma inmediata para los investigadores; una correlación sesgada, retardos temporales entre la causa y el efecto o entre variables independientes y dependientes y la influencia de la tendencia en los resultados. Esta tendencia era percibida como un problema ya que los estadísticos económicos estaban interesados sólo en fenómenos cíclicos.

Durante las tres primeras décadas del siglo XX se abordó el problema de correlación temporal y el problema del uso de la estadística para analizar el tiempo en general siguiendo distintos enfoques. El primero de éstos, que fue planteado inicialmente en los trabajos de Hooker (1901, 1905) perseguía, al analizar series temporales, separar los distintos movimientos existentes en las series. En este sentido, se consideraba que la información de la serie temporal estaba compuesta por tendencia, ciclo, componente estacional y componente irregular. El objetivo fundamental que se perseguía era aislar la componente cíclica, analizando la correlación existente entre esa componente cíclica con la componente derivada de otras series. Ante esta situación, se recurría a la aplicación de un coeficiente de correlación entre componentes cíclicas para determinar la relación existente entre las series, las herramientas de descomposición más utilizadas en la transformación de las series eran las medias móviles, las líneas de tendencia, las primeras diferencias y la utilización de porcentajes de cambio.

Más tarde, fueron desarrolladas otras dos formas de abordar el problema de análisis de series temporales: considerando modelos dinámicos autodeterminados o modelos cíclicos como perturbaciones aleatorias acumuladas. La herramienta utilizada para llevar a cabo esta descomposición es el correlograma, llegando a una modelización de las series temporales como un proceso autorregresivo con una perturbación aleatoria. Los trabajos más destacados en este sentido fueron los trabajos de Yule (1926 y 1927) y Wold (1938).

Primeras especificaciones de procesos autorregresivos: la especificación de G. Udny Yule

La definición y denominación de procesos estocásticos estacionarios de Alexander Yakovlevich Khinchin y Herman Wold fue precedida por el trabajo de procesos autorregresivos de Udny Yule, los estudios de Yule y Eugen Slutsky de transformaciones lineales de perturbaciones aleatorias, la clasificación de series temporales de Yule y Oskar Anderson y la axiomática de probabilidad y procesos aleatorios de Andrei Nilolaevich Kolmogorov. Estos fueron los principales pasos en el desarrollo del análisis de series temporales en los años 1930.

La formulación de procesos autorregresivos, donde los valores de una variable dependen de los valores anteriores con un cierto error al azar, tiene una historia compleja. Generalmente se otorga la primera especificación de un proceso autorregresivo a Udny Yule en 1927; no obstante, las raíces de esta especificación caen con los trabajos del s. XIX de Francis Galton y Karl Pearson de herencias y de Pearson, Alice Lee y F. E. Cave-Browne-Cave en fenómenos meteorológicos. Si examinamos las semejanzas y diferencias entre las ideas del Galton, Pearson, Cave-Browne-Cave y Yule, aparecen cuestiones como: el papel que juegan los ciclos de vida en el cambio, la selección de una referencia temporal externa o interna en modelos dinámicos, el contraste entre considerar el cambio en función del tiempo o en función de los valores previos, la definición del intervalo $(t, t-1)$ y el papel de la autorregresión en el análisis de serie temporales.

En este trabajo nos vamos a centrar en las primeras especificaciones desarrolladas por Yule sin entrar en las diferencias existentes con otras propuestas de modelizaciones autorregresivas. La especificación de un proceso estocástico autorregresivo llevada a cabo por Yule era un conjunto de tentativas desarrolladas para explicar porque los estadísticos, y en particular aquellos que trabajan con datos económicos y sociales, habían obtenido a menudo correlaciones extrañas en el análisis de series temporales. Yule se mostró como uno de los pocos que filosóficamente lucharon con la mezcla de la ley del error y la ley de movimiento. El título de dos de sus documentos muestra esto: *"On the time-correlation problem..."* (1921) y *"Why do we sometimes get nonsense-correlations between time-series? A study in sampling and the nature of time-series"* (1926).

En su artículo de 1921, Yule revisó algunos de los mayores estudios que aplican correlación y regresión a series temporales. Mostró que los trabajos cuantitativos de la vuelta de siglo percibían la esencia del problema de correlación temporal como la dificultad de aislar, para estudiar diferentes componentes en el movimiento de cada variable: *"El lento movimiento secular, probablemente no periódico en carácter; las oscilaciones de unos diez años de duración, más o menos, correspondientes al ciclo comercial; los movimientos rápidos año tras año; los movimientos estacionales con el año, etc."* (Yule 1921).

Yule cuestionó que modelos adecuados de muchas series temporales económicas deban incluir términos armónicos, y la cuestionada suposición de Anderson de que la diferenciación debe tender a eliminar esos términos periódicos. Yule construyó una serie desde una función armónica simple y examinando el efecto de repetidas diferenciaciones de igual amplitud para diversos intervalos, concluyó que eso lejos de eliminar todos los términos periódicos, acentuaba el término periódico con intervalos de uno o dos períodos. En este sentido, supuso que las oscilaciones de dos años deben dominar los resultados de diferenciaciones repetidas si la serie estaba basada en una función armónica o no. Contrastó esta suposición mediante la repetición de diferenciaciones de una serie aleatoria y concluyó que: *"Las diferenciaciones tienden más y más a acentuar la alteración en contraste con las fluctuaciones del azar. El método de correlación de las diferencias tiende, podemos concluir, lentamente y subjetivamente más o menos a diluirse por grandes periodicidades y por los efectos de las fluctuaciones al azar dar correlaciones de dos años de oscilación"*[1] (Yule 1921).

El problema de la correlación temporal continúa desconcertando a Yule, y él no estaba satisfecho con la suposición, implícita en el método de diferencias y en el análisis armónico, de que las variables eran función del tiempo. La educación formal que había recibido Yule era de un físico matemático. De acuerdo con sus conocimientos de física, Yule abordó el problema de correlaciones sin sentido de series temporales mediante experimentaciones. Yule demostró primero que las correlaciones sin sentido (una correlación perfecta positiva o inversa en casos donde había correlación nula) pueden producirse por un periodo muestral demasiado corto para capturar el movimiento armónico de dos series experimentales.

Con estos experimentos, Yule mostró que los resultados ilógicos estaban relacionados con el hecho de que sus series eran "crecientes o decrecientes, sin presentar mayores o menores niveles". Esto sirvió a Yule para clasificar las series temporales por la naturaleza de su correlación serial. Series aleatorias con correlación serial nula no poseen problemas de correlación bivariante y series que presentaban correlación serial positiva, pero cuyas primeras diferencias no estaban serialmente correlacionadas, producen mayores errores estándar pero no tendencias definidas para llevarnos a conclusiones erróneas.

Yule había usado una oscilación con forma de seno en su generación experimental de series temporales. Estas series tienen la propiedad que la correlación serial para las primeras diferencias es la misma que para los valores de la variable. Este era un ejemplo de un tercer tipo de series, aquellas cuyos valores estaban correlacionados de forma positiva y cuyas diferencias también presentaban correlación positiva. Este tipo era el más peligroso para obtener una conclusión errónea en análisis bivariantes. La

[1] Las demostraciones de Yule en 1921 y 1926 relacionadas con el hecho de que diferenciaciones repetidas de una serie aleatoria generan patrones cíclicos fue la mitad del objetivo del denominado efecto Yule-Slutsky. Mientras Yule era explícito sobre la falsedad de los ciclos generados por las operaciones lineales en series aleatorias, la otra mitad del dúo, Eugen Slutsky, no tenía intención de demostrar el carácter errático de los ciclos. Slutsky fue buscando un modelo de ciclos verdaderos en el sistema capitalista.

correlación entre estas series (Yule denominó a estas series *"conjunct"* con primeras diferencias) tiende a producir correlación positiva o negativa alta entre las muestras, sin considerar el verdadero valor de la correlación. Yule había solucionado el desconcierto que le había generado perplejidad durante años. Él había sido capaz de identificar y describir matemáticamente lo que él denominó "clase de series peligrosas". Los gráficos de estas series con diferencias correlacionadas serialmente trazan una tendencia al alza o descenso consistente en periodos prolongados. Mientras esto daba a las series alguna continuidad con el tiempo, el tiempo no era un factor causal y la serie no estaba correlacionada con el tiempo. El movimiento manifestado por algunas series temporales, particularmente aquellas usadas en análisis económico, era parcialmente autodeterminado. Las variables no eran simplemente funciones de otras variables causales, como en la regresión de x sobre y; no eran simples funciones del tiempo, como en el periodograma de y. Estas series tienen un reloj y vida propia.

Yule demostró el uso de la correlación serial como un método para analizar el número índice de William Beveridge de precios del trigo en Europa Occidental desde 1545 a 1844 y el registro de precipitaciones de Greenwich desde 1815 a 1924. Su método, para cada uno de los dos ejemplos, fue calcular el coeficiente de correlación serial para intervalos de $(t - 20)$ y para un rango de diferencias serialmente correlacionadas. Tabuló y dibujó estos coeficientes de correlación buscando patrones para ayudarle en la descomposición de cada serie y permitirle obtener conclusiones de si la serie era periódica u oscilaba sin movimientos periódicos. En su trabajo de 1927, Yule aplicó técnicas de correlación serial y autorregresión para investigar periodicidades en la serie temporal de las manchas solares de Wolfer. Sus dos formulaciones de la actividad solar fueron:

$$u_x = (2 \cos \theta)\, u_{x-1} - u_{x-2} + e$$
$$u_x = b_1 u_{x-1} - b_2 u_{x-2}$$

Este trabajo se convirtió en el origen del análisis moderno de series temporales. Fue la primera formulación completa de lo que posteriormente se denominó proceso estocástico estacionario de tipo autorregresivo. Fue también el primer caso en el que el término de error fue utilizado como perturbación aleatoria en una relación, no como error de medida. Las variables que usó Yule no eran utilizadas como funciones del tiempo, eran funciones de términos previos en una secuencia. Estaba correlacionando varias generaciones (medidas del padre y descendientes) pero las observaciones no eran obtenidas a través de una población en un momento del tiempo. Los descendientes de una regresión eran el padre en el grupo sucesivo y el abuelo en el siguiente. En la aproximación de Yule, los subíndices t, $t - 1$, análogos a su subíndice s en U_s, eran los más próximos a su lugar en una secuencia de tiempo. De hecho, en este trabajo de correlación serial y autorregresión, Yule nunca utilizó como subíndice el tiempo.

Cuatro años después de que el estudio de Yule fuera publicado, Gilbert Walker (1931) generaliza el modelo autorregresivo a un sistema físico de variaciones naturales, todo conforme a moderadas pero golpeantes perturbaciones aleatorias, para tener en cuenta la dependencia de más de dos valores previos. A través de deducciones matemáticas, Walker mostró que si el número de observaciones era grande, la ecuación que relaciona el coeficiente de autocorrelación para diferentes pares de términos en una serie debe ser similar a la ecuación de autorregresión que relaciona los términos actuales de una serie. Concluyó que el gráfico de los coeficientes de autocorrelación dibujado frente a intervalos con valores correlados sería más liso que los diagramas de los términos reales y se podría utilizar para determinar los períodos naturales de la serie.

La noción de oscilaciones era central en el análisis de Yule y Walker. También, ambos usan autorregresión y correlación serial, no para predecir el siguiente valor en una secuencia o en algún momento del tiempo futuro, sino para; explicar la relación existente, determinar la presencia o ausencia de periodicidad o estimar el intervalo entre ciclos. Era otra herramienta utilizada en la descomposición de series temporales para separar diferentes causas y diferentes patrones de cambio. La especificación de Yule de procesos autorregresivos, sin embargo, fue una de las herramientas más comunes de predicción con modelos de series temporales univariantes. Este modelo autorregresivo aparece en la parte AR de un modelo ARMA y ARIMA *(autoregressive integrated moving average),* ampliamente utilizado en la aproximación de la modelización de series temporales de Box-Jenkins, y en el modelo VAR *(vector autoregression).*Además de esta especificación de procesos autorregresivos desarrollada por Yule había otros dos modelos de series temporales univariantes desarrollados al principio del s. XX, basados en la dependencia estadística de los valores previos, que se convirtieron en modelos populares de procesos estocásticos: La especificación de un paseo aleatorio de Karl Pearson y la noción de estados dependientes de una cadena de Andrei Andreevich Markov.

El efecto Yule-Slutsky

En un trabajo de 1934, Holbrook Working señaló que una serie de diferencias aleatorias puede ser creada mediante la acumulación de números aleatorios. Working y otros atribuyen a Eugen Slutsky el hecho de ser el primero en explorar sistemáticamente las propiedades de los modelos de acumulación de efectos de perturbaciones aleatorias. Slutsky estaba interesado en las propiedades de la componente aleatoria de series temporales; su trabajo, junto con el de Udny Yule y Ragnar Frich, cambia la perspectiva considerar la componente aleatoria como un error a considerarla como una perturbación que era una parte importante en el proceso generador de las observaciones. Slutsky mostró que “se produce un papel fundamental de la componente aleatoria en la naturaleza de los procesos de sumas móviles” (Slutsky, 1937). Estas medias móviles de causas aleatorias generan autocorrelación en las series obtenidas debido a que, a través de la suma, las series obtenidas poseen ahora causas en común. Slutsky construyó modelos más elaborados de medias móviles de series aleatorias y examinó sus propiedades. Demostró que una media móvil de series aleatorias puede no sólo generar movimientos ondulatorios, sino también regulares, oscilaciones periódicas con una gran tendencia a formas sinusoidales. Esta habilidad de la suma de causas aleatorias para oscilaciones armónicas regulares simuladas, se suaviza con abruptos cambios en el "régimen".

Su investigación de estas circunstancias llevó a una suspensión del régimen de cambios y de este modo tener una tendencia pura hacia una forma sinusoidal constante, Slutsky expresó la "Ley del límite sinusoidal" que dice así: la repetición indefinida de sumas móviles seguidas de una repetida diferenciación de una serie aleatoria produce un proceso sinusoidal (Slutsky 1937). Para Slutsky, el límite sinusoidal era un caso extremo, los modelos prácticos de sumas móviles de perturbaciones aleatorias deben incluir el régimen de cambio que era también típico en el mundo real. Este teorema del límite sinusoidal de Slutsky, sin embargo, permitió enlazar su nombre con el de Yule en la noción consistente en que operaciones lineales de series aleatorias produce oscilaciones que tienden hacia patrones regulares.

Aunque el efecto Yule-Slutsky se asocia ahora con la generación de ciclos erráticos, Slutsky se refería a ciclos resultado de una operación de medias móviles de variables aleatorias. Aunque Slutsky no especifica un mecanismo, tales como las esperanzas, por las que las sumas móviles de perturbaciones aleatorias tengan éxito en una economía, fue obvio que estaba investigando las verdaderas causas de los ciclos en sus modelos. Es importante tener en cuenta que Slutsky no mencionó la posibilidad de ciclos erráticos generados por la manipulación de los datos. Su posterior reputación para descubrir cualidades erráticas de funciones aleatorias es probablemente debida a su posterior necesidad de distanciarse de los formales modelos del capitalismo y la asociación de su trabajo con el de Yule que usaba transformaciones lineales de variables aleatorias para detectar ciclos erráticos. Debido a lo que Frish denominó efecto Slutsky, éste es ahora asociado con la generación de ciclos erráticos más bien que con la defensa de la suma de perturbaciones aleatorias como la fuente del ciclo verdadero. De algún modo, sin embargo, el legado de Slutsky —sin su nombre— ha sido reactivado a través de la parte MA de los modelos ARMA, ARIMA y VARMA. Este estudio de Slutsky queda como una de las justificaciones más elocuentes del uso de medias móviles de causas aleatorias en estos modelos.

BIBLIOGRAFÍA

HOOKER, R. (1901). Correlation of the marriage rate with trade. *Journal of the Royal Statistical Society*, 64, 485-703.

HOOKER, R. (1905). On the correlation of successive observations; illustrated by corn prices. *Journal of the Royal Statistical Society*, 68, 696-703.

JOHNSON, N.L. & KOTZ, S. (Eds.) (1997). *George Udny Yule.* In Leading personalities in the statistical sciences from the seventeenth century to the present, pp. 168-169, New York: Wiley.

KENDALL, M.G. (1945). On the analysis oscillatory times-series. *Journal of the Royal Statistical Society,* 108, 93-141.

KENDALL, M.G. (1952). Obituary. George Udny Yule. *Journal of the Royal Statistical Society,* 115, 156-161.

KLEIN, J.L. (1997). *A History of Time Series Analysis 1662-1938*. Cambridge University Press.

KOTZ, S. & JOHNSON, N.L. (Eds.) (1988). Yule, George Udny. *Encyclopedia of Statistical Sciences,* Vol. 9, pp. 664-666. New York: Wiley.

KUZNETS, S. (1929). Random events and cyclical oscillations. *Journal of the American Statistical Association,* 24, 258-274.

MARCH, L. (1905). Comparison numérique de courbes statistiques. *Journal of Société de Statistique de Paris,* 46, 255-311.

NORTON, J. (1902). *Statistical studies in the New York money market*. New York: Mac-Millan.

PEARSON, K. (1923). Historical note on the origin of the normal curve of errors. *Biometrika,* 16, 402-404.

STIGLER, S.M. (1986). *The history of statistics: The measurement of uncertainty before 1900* (chapter 10-Pearson and Yule-pp. 326-361). Cambridge, MA: Harvard University Press.

SLUTSKY, E.E. (1937). The summation of random causes as the source of cyclic processes. *Econometrica*, 5, 105-146.

STUART, A. & KENDALL, M.G. (Ed.). (1971). *Statistical papers of George Udny Yule.* New York: Hafner.

WALKER, G. (1931). On periodicity in series of related terms. *Proceeding of the Royal Society,* 131, 518-532.

WOLD, H. (1938). *A study in the analysis of stationary time series*. Stock-holm: Almqvist and Wiksell.

WORKING, H. (1934). A random-differences series for use in the analysis of time series. *Journal of the American Statistical Association,* 29, 11-24.

YATES, F. (1952). George Udny Yule. Obituary Notices of Fellows, *Royal Statistical Society of London,* 8, 309-323.

YULE, G.U. (1895). On the correlates of total pauperism with proportion of total out-relief. *Economic Journal,* 5, 477-489.

YULE, G.U. (1896a). On the correlation of total pauperism with proportion of out-relief.. *Economic Journal,* 6, 613-623.

YULE, G.U. (1896b). Notes on the history of pauperism in England and Wales from 1850. Treated by the method of frequency-curves: with an introduction on the methos. *Journal of the Royal Statistical Society,* 59, 318-357.

YULE, G.U. (1897). On the theory of correlation. *Journal of the Royal Statistical Society,* 60, 812-821.

YULE, G.U. (1899). An investigation into the causes of changes in pauperism in England Chiefly during the last two intercensal decades (Part. I). *Journal of the Royal Statistical Society,* 62, 249-295.

YULE, G.U. (1911). *An introduction of the theory of statistics*. Charles Griffin & Co.: Ltd., London.

YULE, G.U. (1921). On the time-correlation problem with especial reference to the variate-difference correlation method. *Journal of the Royal Statistical Society,* 84, 497-526.

YULE, G.U. (1926). Why do we sometimes get nonsense-correlations between Time-Series? A study in sampling and the nature of time-series. *Journal of the Royal Statistical Society,* 89, 1-65.

YULE, G.U. (1927). On a method of investigating periodicities in disturbed series with special reference to Wolfer's sunspot numbers. *Philosophical Transactions,* 226, 267-298.

YULE, G.U. (1944). *The statistical study of literary vocabulary.* Cambridge University Press.

YULE, G.U. (1946). Cumulative sampling: a speculation as to what happens in copying manuscripts. *Journal of the Royal Statistical Society,* 109, 44-50.

CAPÍTULO 21

El concepto de probabilidad en Karl Popper

ANTONIO SERRANO REY
Universidad Pontificia Comillas de Madrid

La probabilidad puede ser, tal vez, una guía para la vida pero, con certeza, su estudio es una ocupación para toda la vida. Esta idea general cobra una gran relevancia en el caso de uno de los metodólogos más importantes del siglo XX: Karl Popper. Si tenemos en cuenta la innegable influencia que la metodología popperiana ha tenido, y tiene, en todas las ciencias pero especialmente en economía esta comunicación trata de ofrecer de una manera sintética cuál es el concepto de probabilidad defendido por el metodólogo austríaco.

Dividiremos la comunicación en tres partes:

1. La posición de Popper frente a algunas concepciones de la probabilidad.
2. La interpretación de Popper de la probabilidad como propensión.
3. Conclusiones.

Se incluirá finalmente algunas referencias bibliográficas sobre el tema tratado.

La posición de Popper frente a algunas concepciones de la probabilidad

El concepto de probabilidad fue objeto de estudio por parte de Popper desde el mismo comienzo de su actividad intelectual, y continuó siéndolo en forma implícita o explícita a lo largo de toda su larga y fecunda vida.

Soslayando el tema de si podemos considerar al joven Popper como perteneciente al Círculo de Viena[1] no cabe ninguna duda de la influencia que estos pensadores neopositivistas agrupados en el Círculo tuvieron en su pensamiento temprano. Especialmente importante fueron las aportaciones de Carnap, quien desde sus primeras posiciones verificacionistas pasó en sucesivas etapas desde la aceptación de enunciados empíricos (1936) a desarrollar una teoría de la contrastación (1949) en forma de una teoría probabilística axiomatizada.

En las clases a las que como estudiante en la Universidad de Viena asistió Popper, las que más le interesaron fueron las del Departamento de Matemáticas impartidas por Hans Hann[2]. Precisamente en una de las clases de este Departamento dedicada a la Teoría de la Probabilidad oyó Popper por primera vez, hablar de Richard von Mises y de su concepto de probabilidad frecuencial u objetivista.

Podemos considerar a Popper como un renovador de la escuela frecuencial y siguiendo sus propias ideas, el autor distingue claramente entre dos formas distintas de utilizar el término probabilidad. 1. Probabilidad de sucesos que surgen asociados a problemas de juegos de azar y que él concreta con las leyes probabilitarias de la física. 2. Probabilidad de las hipótesis que le interesan especialmente como metodólogo.

Popper aborda dichas acepciones en su obra capital "La Lógica de la Investigación Científica". Una de las obras de filosofía de la ciencia más importante que se haya escrito nunca. En la primera de las acepciones es donde resulta más evidente la influencia de la escuela frecuencial. Resaltemos que los dos problemas, que él denomina tareas, en los que se ocupa y que son la fundamentación del cálculo de probabilidades y las relaciones existentes entre probabilidad y experiencia, tenían el objetivo expreso de ofrecer soluciones primariamente para los físicos y, por extensión, al resto de los científicos. También pudiera adscribirse dicho objetivo, aunque, explícitamente, no haga mención de ello, al conjunto de metodólogos que toman a la Física como paradigma de ciencia completa.

[1] "Yo nunca fui miembro del Círculo de Viena, pero es igualmente un error afirmar que no lo era porque estuviera en su contra. Yo hubiera sido muy gustoso miembro del Círculo de Viena. El hecho es sencillo. Schilk no me invitó a participar en su seminario. En efecto, esta era la forma en virtud de la cual se pasaba a formar parte del Círculo de Viena". POPPER, K.R. *El desarrollo del conocimiento científico, conjeturas y refutaciones*. Buenos Aires, 1950. Paidos.

[2] "Sus lecciones tenían un grado de perfección que yo nunca he vuelto a encontrar". POPPER, K.R. *Unended Quest*. Londres, 1992, Routlege.

Popper era muy consciente de la importancia que la probabilidad tiene dentro de su interpretación de la Mecánica Cuántica[3].

Popper era conocedor de la teoría laplaciana o clásica de la probabilidad, y como tantos otros la rechazó, aunque no necesariamente por los mismos motivos. En primer lugar, la concepción de Laplace está fuertemente imbuida de una concepción global del Universo que podemos denominar "determinismo científico". Esta nueva forma de determinismo suplantó a una cosmogonía basada en la religión. Desde esta concepción todo está fijado de antemano, de tal forma que pasado y futuro son simétricos. El Universo es un universo cerrado. Para Popper esta visión es inaceptable[4].

Frente a la idea laplaciana de que no sabemos explicar por no conocer lo suficiente, propone Popper que toda explicación debe asumir que nuestro conocimiento es siempre un conocimiento insuficiente, es siempre una búsqueda sin fin.

En este sentido, subrayemos que Popper critica las bases sobre las que se asienta el determinismo científico de Laplace, no sólo desde el punto de vista de la física cuántica, sino desde el punto de vista de la teoría del conocimiento.

Popper observa con agudeza, sobretodo en su obra "El Universo abierto y sus enemigos", cómo Laplace cree que el determinismo es universal y por lo tanto el azar cubre fenómenos que aún estando totalmente determinados escapan al análisis causa-efecto por cuanto derivan de numerosas y complejas causas, por lo que el azar es sólo un resultado de nuestra ignorancia.

Las escuelas de probabilidad frecuencial y clásica quedan adscritas por los estudiosos al término objetivo, mientras que la subjetivista lo hace y toma su nombre de el término subjetivo. La probabilidad subjetiva queda sistematizada por los trabajos de F.P. Ramsey, Bruno De Finetti y J.L. Savage.

Veamos cómo Popper interpreta la probabilidad entendida subjetivamente, así como las críticas extraordinariamente radicales que realiza a dicha concepción. Para Popper toda idea de la probabilidad está situada entre las que él denomina "Interpretación de carácter objetivo" o "Interpretación de carácter subjetivo". En el primer grupo engloba la interpretación frecuencial y la suya propia, su característica esencial es que la probabilidad de un suceso depende, sólo, de las condiciones físicas y no del estado de nuestro conocimiento. En el segundo grupo incluye las interpretaciones subjetiva y logicista, su principal característica es que la probabilidad de un suceso depende del estado de nuestro conocimiento y de nuestras creencias.

Para Popper, siguiendo en ello a Richard von Mises, el paso de premisas sobre grados de creencia a conocimiento de carácter estadístico es un disparate lógico muy

[3] "Todos los problemas de la interpretación de la mecánica cuántica pueden ser conducidos a problemas de interpretación del cálculo de probabilidades". POPPER, K.R. *Unended Quest*. Londres, 1992, Routlege.

[4] "Existen sucesos en el futuro, tales que ningún espíritu los conoce de antemano y no hay ningún sistema teórico que en conjunción con una descripción del estado presente del mundo, los entrañe". POPPER, K.R. *Unended Quest*. Londres, 1992, Routlege.

grave, que le lleva a negar consistencia lógica a la interpretación subjetiva, hasta el punto de negar la posibilidad de construir enunciados estadísticos válidos basados en dicha interpretación. Para Popper la deducción de las leyes estadísticas sólo es posible dentro del marco de la teoría frecuencial. Si partimos de una teoría estrictamente subjetivista no llegaremos jamás a enunciados estadísticos válidos.

Pasamos por alto las posiciones de Popper respecto a otras escuelas como la logicista o la de Carnap para resumir que las principales escuelas de probabilidad no resultaron cómodas a nuestro pensador aunque en diferente grado.

La interpretación de Popper de la probabilidad como propensión

El análisis de la forma en que Popper concibe el concepto de probabilidad y la evolución que tiene en su obra dicho concepto, hasta llegar a la concepción propensional no es desde luego una curiosidad histórica, puesto que sus aportaciones ofrecen soluciones a problemas que siempre han tenido los estudiosos de la probabilidad.

La Teoría de la Probabilidad ocupa un lugar central en la obra popperiana y constituye uno de sus ámbitos de desarrollo más válido y atrevido. En su "Lógica de la Investigación Científica" las partes dedicadas a la teoría de la probabilidad constituyen una proporción importante de capítulos.

Popper como la mayoría de los estudiosos de la aleatoriedad, estima que la cuestión esencial que debe explicar la probabilidad es la de la aparición de orden, a partir del desorden inicial y, en este sentido su adhesión inicial a la teoría frecuencial estuvo matizada por la eliminación del axioma de convergencia de Richard von Mises, lo que supone una adhesión condicional a la teoría frecuencial pero sin salirse de ella. A lo largo de sus contribuciones a la teoría de la probabilidad se apartará cada vez más de dicha concepción para proponer una teoría propensional de la probabilidad que aparecerá definida por primera vez en 1959[5], siendo la última contribución, de carácter divulgativo, del año 1990[6].

El origen de la teoría propensional está en la necesidad de superar la dificultad de aplicación del concepto frecuencial a los sucesos individualmente considerados.

Las características más importantes de dicha teoría son:

- La defensa de la necesidad de la interpretación de la probabilidad basada en el caso individual.
- Las probabilidades de dichos casos individuales no son frecuencias ni solamente propensiones, sino propensiones a producir frecuencias.

[5] "The Propensity Interpretation of Probability", *The British Journal for the Philosophy of Sciences*, vol. 10, págs 25-42.

[6] A World of Propensities, 1990.

- Al conceder prioridad a la probabilidad de los casos individuales, desde el punto de vista del realismo, se libera el concepto de la dependencia secuencial en lo concerniente a sucesos concretos.
- La emergencia del concepto propensional, aunque muy ligada a la concepción frecuencial en su origen, debe alejarse de dicha concepción.

Es conveniente, por lo tanto, enfrentarse a las propensiones como inherentes a algún objeto físico, estructura o disposición experimental aunque debe aclararse que "conveniente" no coincide con "convincente", en este sentido, la propensión no es una propiedad sólo de un objeto físico, sino del estado completo del Universo en dichas coordenadas espacio-temporales.

El propio Popper señala que su concepción es objetable desde el punto de vista exclusivamente estadístico, pero que se inclinó a utilizar este nuevo vocablo "propensión" debido a que le pareció el más adecuado como símbolo o metáfora asociado a tendencia, disposición, fuerza o energía, términos que están, inevitablemente, asociados a la física.

Para el pensador austriaco, las probabilidades deben ser algo "físicamente real" o, en sus palabras "propensiones físicas" y utilizando el símil de las fuerzas, el carácter real de las mismas hace que no sólo influyan en los resultados experimentales, sino que se interfieran e interaccionen unas con otras.

Hay que reconocer la indudable necesidad de superar el concepto de probabilidad como frecuencia relativa en el límite. Su sustitución por la idea de propensión desplaza el problema desde el Empirismo y el Neopositivismo a la postura falsacionista, pero no soluciona el problema de definir lo que es probabilidad.

El concepto de probabilidad como propensión satisface más desde el punto de vista ontológico que desde el lógico, pero no da cuenta de la preocupación de cómo dicha concepción permitiría la determinación de la misma.

Conclusiones

El concepto de probabilidad como propensión en la obra de Karl Popper, partiendo de la escuela frecuencial representada por von Mises, trata de superar los pretendidos defectos que en la concepción objetivista había según el propio Popper. La explicación se encuentra en el temprano interés del autor por los problemas derivados de la física y muy especialmente de la física cuántica. La idea de fuerza como presencia latente en los objetos físicos impregna la propia idea de probabilidad, propensión. Es en el mundo de la física por lo tanto, donde se encuentran las raíces de esta concepción de probabilidad y es precisamente por ello de donde se derivará la dificultad de la aplicación de dicho concepto a otro tipo de ciencias como por ejemplo las ciencias sociales y entre ellas la economía.

Tanto el inductivismo como el falsacionismo popperiano coinciden en disfrutar de enfoques tan simples que resultan atractivos, aunque luego terminen por ser incompletos. El inductivismo ingenuo recurre a la probabilidad afirmando cuidadosamente que las generalizaciones inductivas “no son verdaderas” sino “probablemente verdaderas”. Pero en el falsacionismo la teoría va guiando la observación y, por tanto, no podemos, ni siguiera probabilísticamente, establecer la verdad a partir de observaciones hechas con prejuicios.

La Teoría Propensional de la Probabilidad no encuentra aplicación práctica ni en el mundo de las ciencias de la naturaleza ni en el mundo de las ciencias sociales. Por todo ello podemos concluir que aunque las reflexiones popperianas sobre el concepto de probabilidad sean de una gran riqueza para los metodólogos y filósofos de la ciencia, se ha revelado como de un interés sólo relativo para los científicos y muy especialmente para los científicos sociales.

BIBLIOGRAFÍA

HARSANYI, J.C. *Popper's Improbability Criterion for the Choice of Scientific Hypotheses*, "Philisophy", nº 35, 1960.

MILLER, D. "La probabilitat desde la "Logik der Forschung" fins al Present", *Revista de Filosofía*, Enrahorar nº 11. "Popper". Departament de Filosofía. Universidad Autónoma de Barcelona. 1985.

POPPER, K.R. *Two autonomous Axiom Systems for the Calculus of Probabilities*, "The British Journal for the Philosophy of Science", nº 21, 1955.

POPPER, K.R. *Probability Magic, or Knowledge out of Ignorance*, "Dialectica" nº11, 1957.

POPPER, K.R. & PRYCE, M.H.L. *The Propensity Interpretation of the Calculus of Probability and the Quantum Theory*, Stephan Körner Ed., 1957.

POPPER, K.R. *The Propensity Interpretation of Probability*, "The British Journal for the Philosophy of Science 10" nº 37, 1959.

POPPER, K.R. *Probabilistic Independence and Corroboration by Empirical Test*. "The British Journal for the Philosophy of Science 10", nº 40, 1960.

POPPER, K.R. *La Lógica de la Investigación Científica*. 1ª edición española. Ed. Tecnos, 1962.

POPPER, K.R. *Theories, Experience and Probabilistic Intuition*. I. Lakatos E. 1968, "The problem of Inductive Logic".

POPPER, K.R. *A world of Propensities*. Thoemmes, Bristol, 1990.

CAPÍTULO 22

Estadística y falangismo

FERNANDO CELESTINO REY
Instituto Nacional de Estadística

José Antonio Artigas[1] en un discurso pronunciado durante las Jornadas de Estadísticas Sindicales celebradas en Madrid durante el año 1951[2] relata su asistencia a la conferencia que José Antonio Primo de Rivera dio en el Círculo de la Unión Mercantil de Madrid, el día 9 de abril de 1935:

> «*En el agasajo con que al terminar nos obsequió la Directiva, hubo vivísimos comentarios y el Fundador me hizo el honor de proponerme una entrevista que nos reunía pocos días después* (…) *Con su estilo poético y directo y su modestia innata se interesó por conocer mi opinión sobre la concepción económica y social del Movimiento (sic)* (…)».

y se añadía lo siguiente:

> «*Este Sindicato que con aguda metáfora llama Vd. vertical —le dije más o menos— no me parece posible sin que los tres componentes que lo constituyen en la*

[1] José Antonio Artigas, ingeniero civil y catedrático en la Universidad de Madrid desempeñó diversos cargos de responsabilidad en los ámbitos económico y social (Catedrático en una E.T.S. de Ingenieros, Escuela de Estadística, Subdirector del Banco de España en el período 1936-1947, etc.).

[2] La citada conferencia tuvo como título el de “Cimiento estadístico del Reino Sindical”.

producción se muestren entre sí con transparencia, toda la realidad de sus respectivos intereses. Esto reclama instrumentalmente un enorme esfuerzo de estadística económica y social. Hay un cuerpo benemérito, pero reducido de estadísticos y de nuestras aulas salen jóvenes ejemplares, pero sólo tenemos todavía, aparte las Cátedras de la Escuela de Comercio y la mía, otra en la Universidad —y en ella nos han hecho perder a Terradas[3]*— mientras que las nuevas instituciones requerirían inmediatamente una pléyade de especialistas. Y aunque para ver lograda esta ascensión estadística tendrá V. sin duda nuestro ferviente esfuerzo presiento que ello nos costará más años de los que V. necesita para llevar al triunfo político el Movimiento. Sonrió. Creo que ni él ni yo sospechamos que al despedirnos sería para siempre*».

Como sabemos José Antonio era hombre de formación jurídica (Licenciado en Derecho) pero no por ello había desdeñado otros campos del saber científico; tampoco olvidemos que por aquél entonces el plan de estudios de la carrera de Derecho tenía nociones de economía política y de estadística[4]. Que duda cabe que, aunque en el momento del discurso que nos ocupa, los *sindicatos verticales* no dejaban de ser una elucubración teórica, las intervenciones parlamentarias y sus discursos políticos -con especial referencia a la proyectada Reforma Agraria- denotan una profunda sensibilidad hacia la necesidad de establecer la información numérica precisa para abordar los proyectos políticos en el terreno social.

Por otra parte, José Antonio a diferencia de la mayoría de los políticos de su época cuya incultura económica era manifiesta, tenía presente la importancia de los estudios económicos con su sustrato numérico-estadístico para abordar con conocimiento de causa los problemas sociales. Que esta cultura económica le hubiese llegado a través de los colaboradores que en el campo de la economía había tenido su padre está fuera de toda duda. De hecho sus planteamientos económicos no eran muy diferentes de los defendidos por Calvo Sotelo —Ministro de Hacienda durante la Dictadura— aunque políticamente ambos tuviesen posturas ideológicas divergentes e incluso enfrentadas. Incluso uno de los más estrechos colaboradores de Calvo Sotelo el estadístico Antonio de Miguel pudo tener algún contacto profesional con José Antonio sin que poda-

[3] Esteban Terradas físico-ingeniero-matemático desempeñó relevantes cargos durante el Régimen de Primo de Rivera, entre ellos el de Director de Telefónica. Catedrático de Ecuaciones Diferenciales en la Universidad de Madrid, fue desposeído de la cátedra en septiembre de 1931 tras el advenimiento de la II República por considerarse que el procedimiento de libre designación empleado tuvo defectos de forma convocándose de nuevo la cátedra en julio de 1932. A la misma, solo se presentó Terradas pero el tribunal consideró que no era especialista en ecuaciones diferenciales y le suspendió por 3 votos contra 2, lo que causó un fuerte impacto en la comunidad científica. Los sectores de opinión contrarios al nuevo Régimen entendieron este hecho como una venganza política por su colaboración con la Dictadura primorriverista. A este suceso es al que se refiere Artigas en su discurso.

[4] Cuando se emplea el término “estadística” en este contexto, no debe entenderse como “estadística matemática” sino como la información estadística administrativa que el Estado necesitaba para su funcionamiento.

mos precisar su exacto contenido y alcance[5]. En cualquier caso, como veremos seguidamente, muy pronto el ideario falangista sintió la necesidad de encauzar la estadística hacia los nacientes sindicatos.

La guerra civil (1936-1939)

Los avatares de los servicios de estadística del Estado en zona nacional han sido relatados por primera vez en un estudio sobre el trabajo realizado por el profesor Olegario Fernández-Baños en la década de los años treinta[6].

La Ley de 30 de enero de 1938 reorganizó la Administración del Estado organizando de nuevo la división del trabajo por Departamentos Ministeriales[7]. A la Falange (FET y de las JONS) le correspondieron las carteras de carácter social y entre ellas la del Ministerio de Organización y Acción Sindical -no existía un Ministerio de Trabajo- que trataba de reflejar la preocupación social del Régimen.

Ahora bien, para dar un contenido social a la revolución nacional era necesaria una declaración de principios para uso propagandístico, lo suficientemente genérica como para que no introdujera motivos de conflicto en la coalición de fuerzas políticas que sustentaba la zona nacional. Como consecuencia de este estado de cosas, por Decreto de 9 de marzo de 1938 de la Jefatura del Estado se promulgó el denominado Fuero del Trabajo primera en el tiempo de las llamadas Leyes Fundamentales. Este texto legal fue redactado por una comisión en la que existía mayoría de falangistas influidos, por las doctrinas fascistas de la época sobre todo italianas.

Los nueve puntos del Título XIII del Fuero describen los principios en los cuales se basará la Organización Nacional Sindicalista. En su punto octavo, aparece el vocablo "*estadística*" al ordenar que «*corresponde a los Sindicatos suministrar al Estado los datos precisos para elaborar las estadísticas de producción*[8]».

Definida de este modo la competencia estadística de los Sindicatos, restaba establecer el adecuado engarce en esta materia entre el Órgano Estadístico del Estado[9] y los Sindicatos. Ahora bien, en el seno del Régimen convivían dos posturas en cuanto al alcance político y económico (y por ende estadístico) que debían tener los futuros

[5] Antonio de Miguel, funcionario del Cuerpo Facultativo de Estadística ocupó importantes cargos tanto en el Servicio de Estudios del Banco de España como en el Ministerio de Hacienda en donde fue nombrado Director General de la Deuda Pública. La relación entre él y José Antonio le fue comunicada hace tiempo al autor por un funcionario del INE.

[6] Ver bibliografía.

[7] Se suprimió así la estructura de *Comisiones* que habían conformado la estructura administrativa de la Junta Técnica del Estado primer órgano de gobierno formado en la zona nacional.

[8] "Las estadísticas de producción "eran lo que denominaríamos en términos estadísticos actuales "las estadísticas industriales" (de producción industrial).

[9] El Servicio Nacional de Estadística (dependiente del citado Ministerio de Organización y Acción Sindical) fue creado por Decreto de la Presidencia del Gobierno de 13 de mayo de 1938 que estructuró dicho Ministerio «*hasta tanto se establezca la nueva organización sindical*».

Sindicatos. La principal cuestión era si los Sindicatos iban a estar supeditados al Partido Unificado según la más pura doctrina nacional-sindicalista o si iban a formar parte del nuevo Estado a través de sus órganos ministeriales. Gran parte de estas disquisiciones conceptuales concluyeron sin embargo en una especie de logomaquía en la que cayeron los principales dirigentes falangistas. En el seno mismo del Partido Unificado, convivieron durante la guerra dos concepciones opuestas del papel del sindicalismo en el futuro: había quienes pretendían la absorción del sindicalismo por el Estado y quienes defendían lo que en términos puramente teóricos parecía lo contrario, es decir que los nuevos sindicatos asumieran la responsabilidad de la dirección de la política económica. En lo que ambas tendencias coincidían era en un mismo propósito, el encuadramiento de los trabajadores para realizar un programa que se declaraba revolucionario. Por eso se había creado un Ministerio de Organización y Acción Sindical y no uno de Trabajo.

Las declaraciones de intenciones a este respecto de los jerarcas falangistas fueron siempre vagas e imprecisas como cuando el mismo ministro Pedro González Bueno atribuyó «*las decisiones en el campo económico al Estado*» pero que «*su estudio se realizaría siempre por la Organización Sindical*». Tampoco el Secretario General del Partido Raimundo Fernández Cuesta, contribuía a aclarar las cosas cuando afirmaba que «*para disciplinar la Economía, el Estado Nacional Sindicalista utiliza el instrumento de los Sindicatos, pero ello no significa que el Estado se base exclusivamente en los Sindicatos ni que la soberanía vaya a residir en ellos*». En cualquier caso, las necesidades apremiantes de la guerra posponían y supeditaban la definitiva estructuración de los sindicatos a la terminación de aquélla. Así, aunque en abril de 1938, se aprobó la unificación sindical con la constitución de las centrales nacional-sindicalistas, no se avanzó más durante lo que restaba de guerra ni siquiera se llegó a vertebrar una disposición legal de carácter general sobre la organización sindical.

Período 1939-1948

Cuatro meses después de finalizada la guerra, se promulga la Ley de 8 de agosto de 1939 (BOE del 9) que estructura de nuevo la Administración del Estado. Su articulo sexto decía «*El Ministerio de Trabajo comprenderá las Direcciones Generales de Trabajo, de Jurisdicción del Trabajo y de Estadística. Pasarán a depender del Servicio de Sindicatos*[10] *de la Falange Española Tradicionalista y de las JONS todos los asuntos relacionados con las actividades sindicales*».

En fecha 9 de septiembre de 1939, fue nombrado al frente de la Delegación de Sindicatos el falangista Gerardo Salvador Merino hombre afín a Serrano Súñer. Su labor al frente de los Sindicatos verticales estuvo teñida de una gran radicalidad nacional-sindicalista y dirigida a crear una fuerza sindical autónoma con poder político propio. Por otra parte, Salvador y su equipo no eran partidarios de la sindicación obli-

[10] *Delegación Nacional de Sindicatos* acabaría denominándose.

gatoria de los trabajadores, sino de la adhesión voluntaria y sobre todo de la irradiación del sindicalismo en el mundo económico.

A finales de 1940, se produjo un nuevo paso adelante legislativo en la esfera sindical con la aprobación de la Ley de 6 de diciembre de Bases de la Organización Sindical. Su artículo dieciséis, apartado sexto estableció como una función a cargo de la Organización Sindical, el cooperar a la formación de estadísticas sobre las condiciones de trabajo y de la producción, situación del mercado y cuantas gestiones de carácter económico-social pudiesen ilustrar las decisiones de la Organización Sindical y del Gobierno.

Pero ya con anterioridad a dicha ley en octubre de 1940, se había creado en el seno de los Sindicatos el Servicio Nacional de Estadística y Colocación. Ello vino originado en gran medida por el traspaso en mayo de 1940 a Sindicatos de los Servicios de Colocación Obrera aunque tal traspaso solo conllevó la gestión de dicha competencia y no la potestad normativa que siguió recayendo en el Ministerio de Trabajo.

¿Que hubiese ocurrido si finalmente los Sindicatos hubiesen conseguido una cierta primacía en la dirección de la política económica? No es aventurado afirmar que la competencia sobre todas las estadísticas económicas habría recaído en ellos, quedando reservada al Estado (Dirección General de Estadística) solo la potestad de elaborar las estadísticas demográficas. Cabe señalar el enorme poder que hubiese supuesto por ejemplo que los Sindicatos hubiesen elaborado la estadística del índice de precios al consumo (IPC). Es preciso recordar que la política de incrementos salariales propugnada desde el Ministerio de Trabajo se basaba en los incrementos lineales y no en incrementos porcentuales[11]. Pero como veremos seguidamente, la política vino en dar un golpe de timón al definitivo encaje de los Sindicatos en la Administración del Estado y por ende al reparto de la potestad estadística entre el Estado y el Partido.

En efecto, como consecuencia de la crisis política de mayo de 1941 durante la cual la facción *legitimista* del Partido intentó sin éxito conseguir todo el poder para Falange pretendiendo relegar a Franco al puesto de Jefe del Estado, sin capacidad ejecutiva y creando un superministerio de Economía (sic), resultado de la fusión de los Ministerios de Agricultura y de Industria y Comercio, en el cual la influencia de los sindicatos sería preponderante. El colofón de la crisis se dio con la formación de un nuevo Gobierno el 19 de mayo de 1941 que incorporó al mismo a José Luis de Arrese como Ministro Secretario General del Partido y de José Antonio Girón de Velasco como Ministro de Trabajo[12]. Al frente de la Dirección General de Estadística Girón nombró el 11 de julio de ese mismo año, al Comandante de Ingenieros José Luis de Corral Sáiz al que le unía una buena amistad y quién también profesaba la doctrina falangista.

[11] De hecho, en la década de los cincuenta uno de los principales ataques de los tecnócratas a la política salarial de Girón al frente del Ministerio de Trabajo, era que estos incrementos lineales hacían imposible la planificación de la política económica, propugnando sustituir dichos aumentos lineales por incrementos porcentuales basados en la subida del IPC.

[12] Y con el nombramiento del capitán de corbeta Luis Carrero Blanco como Subsecretario de la Presidencia del Gobierno.

En cuanto a la Delegación Nacional de Sindicatos, la política de Salvador Merino tendente a crear unos sindicatos con poder político propio, no podía sino granjearle numerosos enemigos. Así, el 23 de julio de 1941 fue apartado de su cargo y más adelante procesado; seguidamente, durante el mes de septiembre todos los colaboradores más relevantes de Salvador Merino fueron cesados y entre ellos el Jefe del Servicio Nacional de Estadística y Colocación Antonio Segurado Guerra. Para sustituirlo fue nombrado, en octubre José Luis de Corral Sáiz, conjugándose pues en una sola persona la jefatura estadística en el Estado y en el Partido, cuestión no inusual en la vida del Régimen.

José Luis de Corral hombre emprendedor y entusiasta, impulsó la elaboración de una nueva Ley de Estadística y como primer paso se celebró en Madrid del 6 al 12 de julio de 1942 la primera Asamblea de los Cuerpos de Estadística en el salón de conferencias de la Delegación Provincial de Educación en Madrid de FET y de las JONS[13].

El 6 de julio de 1942, los Sres. Asambleístas fueron recibidos en audiencia por el Ministro de Trabajo Sr. Girón quién les dirigió las siguientes palabras:

> «*Queremos fijar la trascendencia de vuestro servicio porque pudiera parecer alguien que una labor adjetiva como la vuestra es misión de segunda fila en importancia y en interés. Dentro de la organización del Estado actual hay ramas de actividad que nos interesa incrementar para facilitar el avance de nuestra Revolución.*
>
> *La Estadística —no olvidar esto— es uno de nuestros objetivos cuya perfección guarda la posibilidad de las relaciones revolucionarias futuras. La Revolución no puede hacerse a ciegas, no puede ser consecuencia de impulsos irreflexivos, sino que tiene que arrancar de este triángulo: seguridad, conocimiento, organización. Para ella vale más la exactitud de un cuadro sinóptico, sobre cuyos datos concretos puede construirse con garantía que todos los proyectos, todas las iniciativas que una realidad mal conocida se encarga de hacer fracasar. Esto quiero haceros ver.*
>
> *El Estado Nacional-Sindicalista necesita una organización perfecta, un control seguro. Como el falangista no puede mirar nunca su servicio como personal y como aislado sino enlazado con los servicios de sus camaradas que luchan en todos los frentes por la Patria, Una, Grande y Libre; la orden de hoy es ésta: ofrecer toda vuestra fe y eficacia en vuestro trabajo. Pensad de que de vuestra exactitud puede depender el triunfo o el fracaso de cada avance*».

Es de señalar que el primer cuerpo técnico de funcionarios que se creó en el Movimiento fue en mayo de 1942, el *Cuerpo Técnico de Estadística y Colocación* fecha en que se convocan las primeras oposiciones para el ingreso en el mismo. En diciembre de 1944, el Servicio Nacional de Estadística y Colocación antes citado se dividió en dos: Servicio Nacional de Encuadramiento y Colocación y Servicio Nacional de Estadística (que poco después cambió su epíteto Nacional por el de Sindical). En este

---

[13] Anteriormente Sede del Ateneo c/ del Prado nº 21.

contexto, se creó en marzo de 1949, *el Cuerpo Técnico de Estadísticos Sindicales*[14] que aglutinó de entrada a los funcionarios del Cuerpo Técnico de Estadística y Colocación que desarrollaban labores estadísticas.

Finalmente tras algunos años que parecían interminables, la Ley de Estadística se aprobó en el Pleno de Las Cortes que se celebró el 29 de diciembre de 1945 siendo por el Jefe del Estado el 31 del mismo mes (BOE de 3 de enero de 1946). Dicha Ley creó el Instituto Nacional de Estadística (INE) adscribiéndolo a la Presidencia del Gobierno. El Decreto de dicha Presidencia de 2 de febrero de 1948 desarrolló reglamentariamente dicha Ley. Sus artículos del 127 al 132, trataron del Servicio Sindical de Estadística al establecer que «*la función de suministrar los datos precisos para la estadística de producción asignada a los Sindicatos en el punto 8 de la declaración XIII del Fuero del Trabajo, será ejercida por dicho Servicio* (…)».

José Luis de Corral cesó como Director General del INE en diciembre de 1946 y como Jefe del Servicio Sindical de Estadística en febrero de 1954, fecha en que fue nombrado Secretario General del Instituto Nacional de Industria (INI).

Período 1949-1957

Durante este periodo, la actividad estadística del Servicio Sindical de Estadística fue muy fructífera abordando prácticamente todos los campos de la producción industrial[15]. Esta masa de datos generada fue articulando un cierto discurso que preconizaba —dentro de los cauces del Movimiento Nacional— una búsqueda de nuevas soluciones a los problemas económicos de España.

En este contexto, no se debe dejar de citar la génesis en España de la primera tabla input-output. La iniciativa surgió del Instituto de Estudios Políticos —adscrito a la Junta Política de Falange— y su elaboración conllevó la colaboración de muchas instituciones como el INE, Consejo de Economía Nacional, Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Madrid y el propio Servicio Sindical de Estadística. De hecho, este último organismo fue principalmente el encargado de suministrar la información estadística.

La publicación de la tabla se llevó a cabo en 1958 en un momento en que estaba claro que el modelo económico autárquico había llegado a su final y se imponía un cierto grado de apertura económica al exterior.

Periodo 1958-1978

La creación de la Secretaría Técnica de la Presidencia del Gobierno el 14 de diciembre de 1956 y el nombramiento para dirigirla de Laureano López Rodó, coincide con

[14] A principios de la década de los años setenta, cambió su denominación por la de *Cuerpo especial de Estadísticos Sindicales*.

[15] Cabe señalar la creación en febrero de 1946 del *Boletín Sindical de Estadística* el cual a partir de 1949 se reconvierte en la *Revista Sindical de Estadística.*

el fin de la autarquía y el inicio de la apertura económica internacional del Régimen preconizada por *los tecnócratas* en especial los Ministros de Comercio y Hacienda respectivamente Alberto Ullastres y Mariano Navarro Rubio. Éstos se habían incorporado al nuevo gobierno formado el 25 de febrero de 1957 que supuso la salida de los ministros falangistas Arrese y Girón y con ellos el final de la influencia política falangista[16].

Paulatinamente, la Comisaría del Plan de Desarrollo que se creó en el ámbito de dicha Secretaría Técnica fue realizando sus propias estadísticas y estudios (en colaboración con los Ministerios competentes) marginando al Servicio Sindical de Estadística y en cierto modo al INE[17]. aunque la situación administrativa de López Rodó como Comisario del Plan de Desarrollo dentro de las comisiones delegadas del Gobierno fue ciertamente anómala hasta su ascenso a Ministro en el gabinete del 7 de julio de 1965[18].

Falange, desde su último reducto de Sindicatos, no quiso quedar marginada de la nueva era del desarrollismo, como quedó demostrado con una de las dos ponencias del Primer Congreso Sindical de 1961 encargadas a Velarde Fuertes y Fuentes Quintana sobre el desarrollo económico. Todavía en 1962, Solís intentó sin éxito que la Comisaría del Plan de Desarrollo dependiese de la Organización Sindical. El frente de batalla que plantearon posteriormente los órganos del Movimiento (Organización Sindical y Cadena de Prensa del Movimiento) sería mostrar estadísticamente mediante las cifras del paro y emigración las consecuencias sociales de la nueva política económica. Posteriormente, a partir de la creación en el gobierno de 20 de octubre de 1969 del Ministerio de Relaciones Sindicales, la actividad estadística de la Organización Sindical pasó a ser una actividad más de la Administración del Estado[19].

El proceso de transición política a un régimen parlamentario democrático iniciado en 1975, incidió significativamente en el devenir del Servicio Sindical de Estadística. En efecto, por el Real Decreto-Ley 19/1976 de 8 de octubre la Organización Sindical quedó suprimida y se convirtió en un organismo autónomo de derecho público denominado Administración Institucional de Servicios Socio-Profesionales (A.I.S.S), que fue adscrito al Ministerio de Presidencia del Gobierno.

Más adelante, el Real Decreto 906/1978 de 14 de abril (BOE del 4 de mayo) de la Presidencia del Gobierno, suprimió la A.I.S.S y dispuso en su artículo primero, apartado d), que dicho Servicio se transfiriese al Ministerio de Economía. Frustrada la adscripción el Cuerpo especial de Estadísticos Sindicales al INE como cuerpo a extinguir, así como la creación de una Entidad Autónoma dependiente de este Ministe-

[16] Arrese fue sustituido al frente de la Secretaría General del Movimiento por José Solís Ruiz quien también ocupó el cargo de Delegado Nacional del Sindicatos.

[17] La orden de la Presidencia del Gobierno de 3 de marzo de 1962 decía: «*La Dirección General del INE se relaciona con la Presidencia del Gobierno a través del Comisario del Plan de Desarrollo*».

[18] Ministro sin cartera: «*Comisario del Plan de Desarrollo*».

[19] Al crearse el Ministerio de Planificación y Desarrollo en el gobierno de 11 de junio de 1973 por Decreto 1384/1973 de 28 de junio, el INE pasó a depender de dicho Ministerio.

rio a través del INE en el cual prestasen estos funcionarios sus servicios, *los estadísticos sindicales* (como se les llamaba comúnmente) se repartieron mediante los oportunos concursos de méritos por diversos ámbitos de la Administración perdiendo así su unidad corporativa.

BIBLIOGRAFÍA

El final del franquismo 1959-1975. Historia 16. Temas de Hoy. Madrid, 1997.

CELESTINO REY, Fernando. *El Profesor Olegario Fernández-Baños y la Administración Estadística de España (1931-1939)*. Instituto de Estudios Riojanos. Logroño, 2003.

CELESTINO REY, Fernando. *José Luis de Corral Sáiz y la Administración Estadística de España (1939-1948)* (inédito).

CAPÍTULO 23

Historia de las técnicas estadísticas aplicadas a los estudios de usuarios

GLORIA CARRIZO SAINERO
Universidad Carlos III de Madrid

ANTONIO FRANCO RODRÍGUEZ-LÁZARO
PILAR ORDÁS DEL AMO
Universidad San Pablo-CEU de Madrid

En el ámbito de las unidades de información, entre otros factores, confluyen dos tipos de análisis: cualitativos y cuantitativos, encaminados a facilitar la adecuación de los instrumentos y medios de información para los usuarios así como la idónea utilización de los mismos.

Estos análisis son el resultado de la aplicación de técnicas estadísticas que se conocen como estudios bibliométricos o Bibliometría y Estudios de Usuarios.

Si se considera que la Bibliometría se ocupa de la aplicación de técnicas estadísticas para el estudio de las publicaciones científicas y los elementos bibliográficos que se contienen en ellas al objeto de obtener información sobre el comportamiento seguido por la Ciencia y los científicos, los Estudios de Usuarios permiten analizar de forma cualitativa y cuantitativa los hábitos de información de los usuarios de las distintas unidades de información utilizando para ello métodos estadísticos con el fin de ofrecer un mejor servicio.

En esta comunicación vamos a exponer la historia de los Estudios de Usuarios a través de una visión sumaria con los hitos más destacables; así como los métodos de análisis que se aplican para lograr que se satisfagan las necesidades de información de quienes demandan conocimiento para el desarrollo de sus actividades científicas, profesionales o divulgativas.

Aplicabilidad de los estudios de usuarios

La UNESCO en sus Directrices de 1981 para los estudios relativos a los usuarios de la información considera a los Estudios de Usuarios como un subgrupo de la investigación dedicado al "estudio de los individuos y sus actividades, actitudes, opiniones, valores e interacciones"[1].

Elías Sanz, en su *Manual de Estudios de Usuarios*, los define como: "el conjunto de estudios que tratan de analizar cualitativa y cuantitativamente los hábitos de información de los usuarios, para la aplicación de los distintos métodos, entre ellos los matemáticos, principalmente estadísticos, a su consumo de información"[2].

De estas definiciones se desprende que estos estudios centran sus investigaciones en los usuarios de la información, ya sean individuos o grupos que poseen características comunes, para conocer quiénes son los usuarios de cada centro de información concreto, así como el tipo de información que demandan y consultan en dicho centro.

En el caso concreto de los Estudios de Usuarios, se trata de averiguar aspectos como[3]:

- Los hábitos y necesidades de información de los usuarios reales de una unidad de información, así como detectar los cambios de interés que se produzcan.
- Evaluar los recursos de información de las diferentes unidades de información para comprobar si se adaptan a las necesidades de los usuarios reales y potenciales que deben atender.
- Analizar la eficacia de las unidades de información y del sistema nacional de información de cada país.
- Adecuar los espacios físicos a las necesidades de los lectores (fijos o transeúntes) para distribuir, con eficacia, la superficie destinada a su servicio.
- Conocer la estructura y dinámica de los grupos de usuarios de las unidades de información para poder satisfacer sus necesidades informativas o prever las que puedan manifestarse.

---

[1] Directrices para los estudios relativos a los usuarios de la información (versión experimental). París : UNESCO, 1981.

[2] SANZ CASADO, Elías. *Manual de Estudios de Usuarios*. Madrid: Fundación Germán Sánchez Ruipérez, 1994, p. 31.

[3] Estudios de usuarios. *Diccionario enciclopédico de Ciencias de la Documentación.* José López Yepes (dir). Madrid: Síntesis, 2004, pp. 523-533.

- Realizar cursos de formación de usuarios, actividad relevante de las unidades de información motivada por la necesidad de optimizar sus servicios, cada vez con mayor eficacia, debido a los cambios constantes que se producen en la sociedad tanto respecto a la información como en los métodos de acceso a la misma, sin olvidar el creciente número de individuos de colectivos homogéneos y heterogéneos que demandan información.

Métodos de análisis de los estudios de usuarios

Los procedimientos de análisis más frecuentes para realizar estudios de usuarios se basan en las encuestas, las entrevistas, los registros de peticiones de información y fotocopias, análisis de documentos producidos por usuarios, análisis de casos, estudios de expertos, etc.

Elegir el procedimiento adecuado para recoger la información a tratar es fundamental para lograr los objetivos propuestos. Así la elección del método a emplear va a depender de varios factores, como la experiencia que se tenga en el manejo del procedimiento elegido, las características de los usuarios que se vayan a estudiar y los recursos de que se disponga para efectuar el estudio.

La metodología que se aplica a estos análisis se considera directa e indirecta.

Por método directo se entiende cuando se logra que sea el propio usuario de la unidad de información el que defina sus hábitos, necesidades y uso que hace de la información.

El método indirecto facilita conocer los hábitos y necesidades de información de los usuarios sin que estos intervengan. La información necesaria se obtiene por medio del análisis de los documentos que solicitan los lectores o los que producen en el curso de sus estudios o investigaciones.

Métodos directos

Presentan una serie de ventajas para conocer en profundidad las necesidades de información de los usuarios partiendo del contacto directo con ellos.

Entre esta metodología de estudio y análisis están las entrevistas y las encuestas, aplicadas a procedimientos conocidos como *Método Delphi* o *Estudios de Consenso*, *Técnica del Incidente Crítico* y *Focus Group*, entre otros y para no ser exhaustivos.

El *Método Delphi* o *Estudio de Consenso* fue iniciado a final de la década de los años 60 y principios de los 70.

Su interés inicial se encaminaba a realizar estudios socio-económicos, políticos y de planificación de cursos de interés para alumnos de las universidades norteamericanas a fin de elaborar programas adecuados para sus necesidades. Posteriormente, se aplicó a la realización de estudios de usuarios para las unidades de información.

Este método trata de lograr niveles de acuerdo entre un grupo de individuos sobre una muestra determinada.

Para ello hay que lograr un mecanismo de comunicación y discusión entre los seleccionados cuyas opiniones sean de garantía por considerárseles expertos en la materia a discutir.

El procedimiento para realizar un estudio de estas características (según propuesta de Couper en 1984), se debe desarrollar en varias fases repetitivas hasta alcanzar el acuerdo. Así:

- Un moderador debe proponer un cuestionario para iniciar la discusión o debate.
- El cuestionario debe someterse a validación por un grupo de expertos.
- Se remite el cuestionario aceptado a los encuestados o participantes los cuales deben enviar las respuestas al moderador.

Analizada debidamente la información así obtenida por medios estadísticos, se plantea un nuevo cuestionario con el que ir logrando puntos de acuerdo, siguiendo el procedimiento ya expuesto. Este procedimiento se repetirá tantas veces como se considere necesario hasta lograr puntos de consenso o lo aconsejen cuestiones como el tiempo a emplear para obtener resultados o los recursos disponibles para realizar el estudio.

Este procedimiento de análisis es flexible en cuanto a que se puede aplicar a cualquier campo de interés científico, no tiene limitaciones geográficas, ya que pueden participar individuos de lugares distintos enviando sus respuestas por medios habituales o telemáticos, puede repetirse el procedimiento tantas veces como se considere necesario hasta lograr el acuerdo, aunque las repeticiones de cuestionarios hacen que poco a poco, los participantes abandonen y las conclusiones no sean tan eficaces como se pretendía.

Técnica del Incidente Crítico (TIC)

Fue desarrollado por John C. Flanagan durante la Segunda Guerra Mundial en la realización de unos estudios efectuados para la Aviation Psichology Program de la Army Air Force, cuyo objetivo era desarrollar procedimientos para la correcta selección y clasificación de la tripulación aérea.

Acabada la guerra, la técnica diseñada se empleó en la selección adecuada de puestos de trabajo y, posteriormente, se aplicó al estudio y análisis de diferentes áreas laborales o sociales para comprender y solucionar diferentes problemas, entre los que se encontraban la información en general y los estudios de usuarios, en particular, desde que en 1966 comenzó a utilizarse por Wood y Wright en el estudio de la documentación médica, hasta 1998, cuando Choo, Delhor y Turnbull lo aplicaron a la investigación sobre la búsqueda de información en las páginas web.

Este estudio se basa en la formulación a un conjunto de usuarios, de una serie de cuestiones o preguntas relativas a las unidades de información, necesarias para el desempeño de sus funciones. En sus objetivos antepone la información en sí a los usuarios de la misma.

Así se pretende recoger los incidentes críticos que se han presentado a lo largo del estudio mediante una serie de preguntas que debe elaborar el responsable de la unidad de información en las que se manifiesten: Las características del usuario, qué problema generó la necesidad de información, cuál fue la conducta seguida en la búsqueda de la información, fuentes de información utilizadas, grado del éxito obtenido, etc.

Focus Group

Es una entrevista cualitativa realizada simultáneamente a un pequeño grupo de personas, seleccionadas con meticulosidad, para estudiar cuestiones de interés en la investigación que se trata de desarrollar.

Originalmente se empleaba en los estudios de mercado para conocer el grado de aceptación que podría tener entre los consumidores un nuevo producto que se quisiera lanzar al mercado.

En Biblioteconomía y Documentación tiene varias aplicaciones desde el punto de vista de la gestión, como son evaluar los servicios de las unidades de información, introducir mejoras en ellos, plantear metas a conseguir y determinar las necesidades de información de los grupos de usuarios (estudios de usuarios).

El primer paso para realizar un estudio Focus Group es constituir un colectivo de usuarios homogéneo, con intereses similares a los que plantear la encuesta y un moderador formado en la dinámica de grupos y en las técnicas de la entrevista. Este moderador debe centrar el problema a debatir y ayudar a generar una discusión animada y productiva en el grupo —que no debe tener más de seis u ocho individuos y la discusión no debe sobrepasar de un tiempo estimado entre una hora u hora y media—.

Las preguntas que se formulen deben ser abiertas para que permitan obtener conocimiento sobre cuestiones[4], como:

- Contexto y percepciones de los sistemas de información.
- Necesidad de información.
- Consideraciones de los usuarios sobre los sistemas de información: flexibilidad, eficacia y efectividad.
- Barreras para el uso de la información.
- Expectativas de los usuarios sobre los sistemas de información.
- Comentarios de los usuarios sobre la infraestructura de acceso a la información.
- Otras cuestiones sobre calidad, control de datos, mantenimiento, seguridad, etc. de la información.

[4] CHASE, I.; ÁLVAREZ, J. “Internert research: the role of the focus group”. *Library and Information Science Research,* 2000, nº. 4, vol. 22, pp. 357-369.

Métodos indirectos

Los métodos indirectos aplicados a los estudios de usuarios están relacionadas con los estudios bibliométricos; se corresponden con los análisis de citas y de referencias bibliográficas, de peticiones de documentos y publicaciones en las unidades de información aplicando las leyes de Gros, Bradford, Lotka, etc., sin obviar la información como método clásico para obtener información siempre que sea fiable y objetiva.

Desarrollo histórico de los estudios de usuarios

Aunque el interés por los usuarios ha estado siempre presente en el campo de las bibliotecas no ha sido hasta el inicio de la Documentación como Ciencia que esta actividad se ha consolidado como línea de investigación sobre el comportamiento de los usuarios frente a la información. Es entonces cuando se han aplicado técnicas estadísticas que proporcionen base científica a estos estudios.

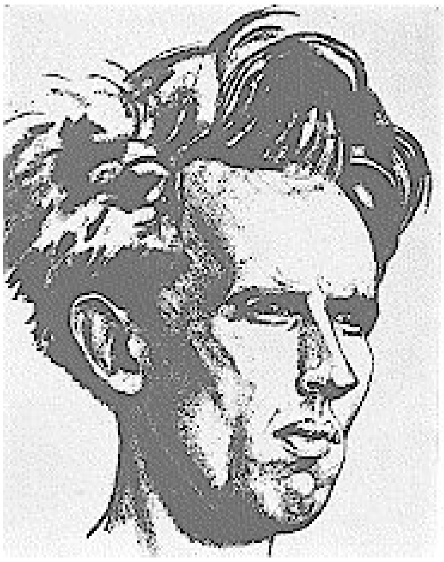
Los inicios de los Estudios de Usuarios deben remontarse a los años 40, aunque ya se conocen estudios en la década de los 20.

En la década de los 50 se empiezan a aplicar técnicas cuantitativas y cualitativas sobre las ciencias experimentales y las tecnológicas. Las investigaciones de los científicos durante la II Guerra Mundial se aplican posteriormente en el ámbito empresarial surgiendo la Investigación Operativa. Estas investigaciones generan un elevado número de documentos científicos con información relativa a descubrimientos tecnológicos. Ésta es la razón por la que los científicos y tecnólogos sean el primer colectivo sobre el que se realizan los primeros estudios de usuarios.

Una fecha generalmente aceptada por los especialistas de esta materia corresponde al año 1948, en el que Bernal y Urquhart participan en la Conferencia de la Royal Society Scientific Information Center[5], en Londres. A partir de este evento, las conferencias de Bernal Y Urquhart se establecen como clásicas para los análisis de estos estudios.

El británico John Desmond Bernal (1901-1971) es miembro de la Royal Society desde 1937, experto en Cristalografía y Bioquímica, comunista activo, recibió el premio Lenin de la Paz en 1953.

[5] Esta sociedad, fundada en 1660 para promover la excelencia académica y el avance en el conocimiento de la ciencia, con más de 1400 miembros, incluidos nombres tan importantes como Isaac Newton, Charles Darwin, Albert Einstein o Stephen Hawking.



John Desmond Bernal.

Bernal; John Desmond (1901 - 1971) Elected 1937

Certificate of a Candidate for Election.

EC/1937/01 ©The Royal Society

Ficha de ingreso de Bernal en la Royal.

En su conferencia de la Royal titulada "*Análisis preliminar de un cuestionario piloto sobre el uso de la literatura científica*" realiza un estudio sobre cómo buscan, obtienen y utilizan la información los usuarios de revistas científicas. Para ello se basa en las publicaciones que leen, el motivo por el que las seleccionan y el uso y aplicación que hacen de ellas.

Bernal pasó este cuestionario piloto a científicos que trabajaban en la universidad, en empresas y en organismos públicos. En él preguntaba las fuentes donde obtenían la información y el tiempo que dedicaban a su lectura, entre otras cuestiones.

Donald J. Urquhart se le considera uno de los padres de las ciencias de la información en Reino Unido.

En 1938 entró a trabajar en la Science Museum Library como encargado auxiliar, donde aprovechó para criticar el trabajo de indexación de Bradford. En 1948 le ofrecieron un puesto en el Departamento para la investigación científica e industrial, lo que le permitió fundar en 1962 la Biblioteca Nacional de Préstamos par la Ciencia y la Tecnología en el entorno rural de Boston Spa (Yorkshire), que se ha convertido en el Centro de Fuentes Documentales de la British Library.

En su conferencia de la Royal Society, presentó un estudio que había llevado a cabo en el Servicio de Préstamo de la Biblioteca del Museo de la Ciencia (Science Museum Library).

Con este estudio pretendía conocer la distribución y el uso de la información científica y técnica, logrando como resultados destacables clasificar los documentos prestados por tipologías; conocer los propósitos del usuario al realizar la consulta de la fuente y el grado de utilidad en relación con el año de publicación y soporte.

Saul Herner, en su artículo “Almacenamiento de la Información. Hábitos de los trabajadores en ciencias puras y aplicadas” publicado en la revista Química industrial y de la ingeniería de 1954, investiga las prácticas de información de los usuarios de las Ciencias Puras y Aplicadas de la Universidad de John Hopkins. Encuentra diferencias de hábitos de búsqueda entre los científicos de las ciencias puras y aquellos pertenecientes a las ciencias aplicadas.

Descubre que los científicos de ciencias puras, incluidos los químicos como él, prefieren utilizar métodos personales de búsqueda de información y evaluarlos ellos mismos. Los centros de documentación podían facilitarles la búsqueda y recuperación de esta información.

Sin embargo, los científicos de ciencias aplicadas prefieren que la información tuviera referencias, y estuviera evaluada y resumida.

Es uno de los primeros en incorporar las dimensiones relativas a los aspectos emocional y afectivo, pues examinó la confianza de los científicos en la información técnica y sus fuentes de origen. Su investigación la basó en entrevistas personales a un colectivo de 600 usuarios.

De Herner sabemos que nació en Estados Unidos en 1927, sigue vivo y posee una empresa química.

En definitiva, desde los primeros estudios hasta los realizados a mediados de los años 50, el objetivo principal de los Estudios de Usuarios era conocer cuáles eran los hábitos de lectura de los científicos y qué uso se hacía de la literatura científica.

En 1958 se celebra en Washington la International Conference of Scientific Information, en la que se incide en los hábitos de los usuarios de información experimental y tecnológica. Las temáticas de los trabajos eran variadas: objetivos, metodología y resultados. Las técnicas empleadas en sus investigaciones eran tanto métodos directos (sobre el usuario directamente): entrevistas y cuestionarios, como métodos indirectos: análisis de preguntas en la Sección de Referencia y análisis de los registros de demandas.

Una etapa posterior se inicia en la década de los 60. Aunque continúa el interés por conocer los hábitos de información de los usuarios de las Ciencias Puras y Aplicadas y de la Teconología, comienzan a plantearse estudios sobre las Ciencias Sociales. Algunos de estos estudios son financiados por organismos y empresas americanas interesadas en conocer los hábitos de información de sus asociados, y mejorar sus servicios. En este sentido destaca un proyecto patrocinado por la American Psichological Association (APA).

Este proyecto, de gran envergadura, dio origen a una serie de importantes estudios destinados a conocer las circunstancias que afectaban a cada una de las fases de comunicación, transmisión del conocimiento, almacenamiento y uso del mismo.

El método de estudio consistió en la recogida diaria de datos sobre las actividades de información de los miembros de la Asociación, entrevistas, cuestionarios y revisión de documentos y publicaciones.

Garvey y Griffit desarrollaron este estudio en tres fases:

- Intercambio de información científica, en general.
- Intercambio de información informal.
- Intercambio de información por medios formales y reuniones científicas.

Otros estudios de importancia en estos años los lleva a cabo el John Hopkins Center for Research in Scientific Communication. En ellos se comparan las pautas de comunicación de los usuarios en un conjunto de disciplinas científicas sobre ingeniería, aeronáutica, minería, metalurgia, petróleos, óptica, meteorología, geofísica, geografía, sociología y educación. El método de análisis fue la encuesta postal con cuestionarios diseñados según la técnica del Incidente Crítico.

El último de los considerados grandes estudios de esta época fue el liderado por Maurice Line, conocido como *Investigation into Information Requeriments of the Social Science (INFROSS).* En él se pretende estudiar todos los aspectos de las necesidades de información —formal e informal— de los científicos sociales, recoger los datos que puedan servir para mejorar o diseñar nuevos servicios de información y responder a cuestiones como loa variación de los hábitos de información de los usuarios, las barreras encontradas en el uso de la información y los sistemas que la propician y utilidad de las fuentes de información.

El estudio se efectuó entre una muestra de investigadores de antropología, ciencia política, economía, pedagogía, psicología y sociología pertenecientes a la docencia universitaria, miembros de los gabinetes del gobierno y profesionales, empleando tres técnicas: cuestionarios, entrevistas y observación.

A pesar de estos grandes proyectos sobre estudios de usuarios, Lipetz, en 1970, afirma que esta área de investigación es aún incipiente y que el "...valor predictivo de la teoría en este campo es todavía sumamente pobre...".

Los años 70 van evolucionando en los estudios de usuarios. Es importante la fundación del Centre for Research on User Studies (CRUSS) en la Universidad de Sheffield, por iniciativa de la British Library Research and Development Department.

La creación de este Centro se debió a la manifestación de la falta de destreza en el uso de las técnicas de investigación social de los investigadores, junto con la necesidad de fomentar cierta uniformidad en la aplicación de metodologías.

El CRUSS dedicó sus esfuerzos a fomentar métodos orientados a la acción para la realización de los estudios de usuarios, impartir cursos de formación y la edición de publicaciones especializadas en la materia. De todo ello destaca de manera especial el conocido como Estudio INISS —*Information Needs and Services in Social Services Departments*— que marca un hito en los estudios de usuarios por los métodos y estrategias que emplea.

El estudio se plantea analizar la conducta y los hábitos de información de los trabajadores sociales británicos para conocer sus necesidades y determinar los servicios de información que les fueran más apropiados.

El método de trabajo se desarrollaba en varias etapas: en la primera se efectuaron visitas a los departamentos administrativos para conocer, en profundidad su estructura y organización además de los servicios de información disponibles.

En la segunda se llevó a cabo un estudio mediante la observación de veintidós individuos de diferentes escalas laborales, sobre todo trabajadores sociales, gerentes y consejeros.

Posteriormente, se realizaron entrevistas a varias de estas personas para obtener información adicional y confirmar la información lograda en la etapa de observación.

Por último, analizados y estudiados los resultados, se ponían de manifiesto las mejoras que podrían incorporarse a los servicios de información estudiados.

Con el método aplicado a este estudio realizado por el CRUSS se pretendía dar solución a la crítica que se venía haciendo sobre la dificultad de aplicar los resultados de la investigación a la práctica profesional.

Las últimas décadas del siglo XX han desarrollado modelos como base para la investigación empírica que han servido para dar un paso importante en la consolidación de la investigación en esta línea.

También ha aumentado el interés sobre los aspectos conceptuales, teóricos y de método, evidente todo ello en el incremento de reuniones científicas monográficas sobre los estudios de usuarios en las que los investigadores más destacados del campo exponen sus avances y puntos de vista. Igual ocurre con la literatura especializada, fundamentalmente en las publicaciones periódicas específicas y las dedicadas a la Biblioteconomía y Documentación en las que los especialistas vierten sus trabajos y experiencias.

Es de destacar la influencia que en estos estudios está teniendo el auge de Internet como medio importante en la búsqueda de información, lo que conlleva a adoptar los modelos de investigación desarrollados hasta el momento en el campo de los estudios de usuarios al nuevo procedimiento de información virtual.

BIBLIOGRAFÍA

ALLEN, T. "Information reeds and uses". *Annual Review of Information Science and Technology,* 1969, vol. 4, pp. 3-30.

BORREGO HUERTA, A. "La investigación cualitativa y sus aplicaciones en Biblioteconomía y Documentación". *Revista Española de Documentación Científica,* 1999, nº. 2, vol. 22, pp. 139-157.

CHASE, I.; ÁLVAREZ, J. "Internet research: the role of the focus group". *Library and Information Science Research,* 2000, nº. 4, vol. 22, pp. 357-369.

DERWIN, B.; NILAN, M. "Information needs and uses". *Annual Review of Information Science and Technology,* 1986, vol. 21, pp. 3-33.

GÓMEZ HERNÁNDEZ, José A. *Estrategias y modelos para enseñar a usar información.* Murcia: Editorial H R, 2000.

GONZÁLEZ TERUEL, Aurora. *Estudios de necesidades de información y uso de la información: fundamentos y perspectivas actuales.* Gijón: TREA, 2005.

HEWINS, E.R. Information science and use studies. *Annual Review of Information Science and Technology,* 1990, vol. 25, pp. 145-172.

SANZ CASADO, Elías. *Manual de estudios de usuarios.* Madrid: Fundación Germán Sánchez Ruipérez, 1994.

SIATRI, R. The evolution for uses studies. *International journal of Libraries Information Services,* 1999, vol. 4, pp. 132-141.

CAPÍTULO 24

Desarrollo histórico del concepto de robustez en la teoría de la decisión: métodos de relaciones de superación *vs.* métodos bayesianos

GABRIELA MÓNICA FERNÁNDEZ BARBERIS
MARÍA DEL CARMEN ESCRIBANO RÓDENAS
Universidad San Pablo CEU

Introducción

Durante muchos años, el objetivo de la Ayuda a la Decisión Multicriterio, estudiada en el contexto de la Investigación Operativa, fue el de encontrar la solución adecuada a los problemas de decisión que afrontaban los decisores.

Actualmente, las expectativas que se generan en torno al binomio Investigación Operativa-Ayuda a la Decisión son, en general, más modestas, ya que se pretende la obtención de respuestas parciales a las cuestiones presentadas por los agentes durante el proceso de decisión.

En la modelación de tales cuestiones o problemas, la incertidumbre o imprecisión no puede obviarse, por el contrario, debe tenerse muy en cuenta y debe recibir un tratamiento adecuado.

Así pues, es a través de la introducción del estudio de la robustez como pueden elaborarse soluciones parciales pero teniendo en cuenta ese aspecto tan relevante de la realidad como es la incertidumbre, la ambigüedad o la imprecisión.

Fue hacia finales de la década de los 60, cuando Bernard Roy[1] incorporó en numerosos estudios de casos reales un análisis que denominó *análisis de robustez*. Su inquietud por afrontar el tratamiento de la incertidumbre existente en los problemas de decisión, se originó a raíz de la consulta que le fue realizada por René Loué, un ingeniero del Instituto Nacional Francés de Ingeniería Civil, referida al diseño y a la optimización de los sistemas de distribución urbana de agua potable.

Hacia finales de la década de los 70, Bernard Roy extendió su análisis con carácter experimental, a numerosos casos concretos, obteniendo resultados realmente satisfactorios (Roy; Hugonnard; 1982)[2]. Fue a partir de entonces, cuando el análisis de robustez comenzó a utilizarse cada vez más, constituyéndose prácticamente en una etapa indispensable a tener en cuenta en todo problema de decisión.

Después de una primera fase, en la que el interés por el análisis de robustez fue esencialmente de carácter práctico, comenzó a surgir entre los teóricos de la decisión la preocupación por disponer de un planteamiento más formal de dicho análisis.

Con las primeras formalizaciones de la llamada *robustez* se fueron perfilando sus diferencias con el tradicionalmente conocido análisis de sensibilidad, aunque aún hoy es posible encontrar contextos en los que se habla de análisis de robustez o de análisis de sensibilidad como si se tratara de lo mismo.

Asimismo, el término robustez ha sido utilizado con un significado completamente diferente, principalmente en el área de la Teoría Bayesiana de la Decisión (Insúa; Martín; 1994)[3].

Actualmente, se considera que el análisis de robustez constituye, pues, el eslabón perdido en el vínculo Investigación Operativa-Ayuda a la Decisión Multicriterio. Si bien se ha avanzado notablemente en el planteamiento tanto práctico como teórico del tema, quedan aún numerosas cuestiones pendientes por resolver, que constituyen, sin lugar a dudas, direcciones interesantes hacia donde deberían enfocarse las investigaciones futuras en esta área.

---

[1] ROY, Bernard (1998): "A missing link in OR-DA: Robustness Analysis". *Foundations of Computing on Decision Sciences*, vol. 23, n° 3. Es en éste artículo donde relata sus primeras experiencias acerca de la robustez.

[2] ROY, B.; HUGONNARD (1982): "Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by a multicriteria method". *Transportation Research*, 16A, pp. 301-312.

[3] RÍOS INSÚA, D.; MARTÍN, J. (1994): "On the foundations of robust decision making", pp. 103-111. En : Ríos, S. Eds: *Decision Theory and Decision Analysis: Trends and Challenges*.

El recorrido histórico del estudio de la robustez

Si bien no se presenta aquí una revisión exhaustiva de la literatura, se introducen históricamente, aquellos conceptos relacionados con la robustez que pueden ayudar al lector a comprender las nociones fundamentales que constituyen la base del campo de estudio, y ciertas ideas que permiten la comparación entre las estructuras de robustez y de criterios múltiples.

En la mayoría de los problemas del mundo real aparecen datos inciertos, los que generan la necesidad de adoptar decisiones en un ambiente de incertidumbre. Se han desarrollado numerosos enfoques y métodos para hacer frente a la incertidumbre, que puede manifestarse de diversas formas y en contextos muy diferentes entre sí. Sin embargo, la palabra *robustez* ha sido utilizada para calificar a soluciones o métodos que poseen determinadas características cuando se enfrentan a tales incertidumbres.

Estas características están fundamentadas, generalmente, en la calidad de la solución o en la variación de la solución para los diferentes conjuntos de datos factibles. En el primer caso, una solución robusta es una solución *buena* para *todos o la mayoría* de los conjuntos de datos; mientras que en el segundo caso, una solución robusta es una solución *estable* para *todos o la mayoría* de los conjuntos de datos.

Por tanto, la definición precisa de robustez depende de la formalización que se efectúe de los términos en cursiva. Sí debe quedar claro, que en el dominio de la Ayuda a la Decisión Multicriterio, a la robustez no se le atribuye ninguna distribución de probabilidad para reflejar la incertidumbre.

La robustez en Problemas de Planificación Secuencial

La primera noción de robustez aplicada a problemas de decisión fue introducida a finales de la década de 1960 por Gupta y Rosenhead (1968)[4] en el contexto de problemas de planificación secuencial. Las ideas presentadas en este trabajo fueron estudiadas y elaboradas con más profundidad en Rosenhead et alias (1972)[5].

En problemas de planificación secuencial, las decisiones deben tomarse a través del tiempo y deben afrontar incertidumbres. Todas las decisiones que se adopten afectarán el desarrollo de los planes futuros. Más precisamente, ellas limitarán o restringirán el número de planes alcanzables en el futuro. La robustez de una decisión determinada se fundamenta en la flexibilidad que pueda admitir. Una decisión se considera más flexible cuanto menos limite o restrinja "buenos" planes futuros.

---

[4] GUPTA, S.K.; ROSENHEAD, J. (1968): "Robustness in sequential investment decisions". *Management Science*, 15 (2), pp. 18-29.

[5] ROSENHEAD, J.; ELTON, M.; GUPTA, S. (1972): "Robustness and optimality as criteria for strategic decisions". *Operational Research Quaterly*, 23 (4), pp. 413-430.

Idealmente, desearíamos ser capaces de tomar decisiones hoy sin limitar las posibilidades en el futuro. Así pues, cuánto más flexible sea una solución, más robusta será.

Matemáticamente, Rosenhead et alias (1972) presentan una definición de la robustez, medida en función del subconjunto de planes "buenos". En esta definición de robustez sólo se tiene en cuenta el aspecto cualitativo de la solución. La idea que prima es la que considera solución robusta a aquella que apenas sufre variaciones al pasar de un escenario a otro.

La robustez en Estadística

El término robustez se utiliza a menudo en Estadística para hacer referencia a ciertas características deseables de los procesos estadísticos. Se dice que un proceso es robusto respecto de las desviaciones de los supuestos del modelo, cuando el proceso continúa trabajando bien aún cuando, en mayor o menor extensión, los supuestos no se mantienen.

Tales supuestos, a menudo adoptados computacionalmente, podrían ser por ejemplo, que una distribución subyacente sea Normal o que las observaciones posean una varianza constante. En el caso de contrastación de hipótesis estadísticas, un test robusto evita la dificultad de que una decisión (en este caso entre dos hipótesis) se mantenga como muy inestable a la manera de un supuesto particular.

Los bayesianos dan al término un significado más específico. Una aplicación bayesiana es robusta si la distribución posterior de un parámetro desconocido no es significativamente afectada por la elección de la distribución anterior o de la forma del modelo elegido para la generación de los datos. En cualquiera de las dos aproximaciones, la incertidumbre, si bien limitada al conocimiento de si los supuestos específicos, en efecto se mantienen, subyace claramente detrás de la necesidad de disponer y aclarar el concepto en sí mismo. Esto no significa, por supuesto, que debamos estudiar otros tipos de incertidumbre o la secuencialidad de las decisiones.

Una apreciación más reciente es la presentada por Hampel (2001)[6] quien considera que:

> "*Estadística robusta es la teoría de la estabilidad en los procesos estadísticos. Investiga sistemáticamente los efectos de desviaciones a partir de los supuestos de la modelación sobre los procesos conocidos y, si fuere necesario, desarrolla nuevos y mejores procesos*".

La afirmación anterior sitúa, claramente, la noción estadística de la robustez en la parte "estable" de la distinción que se hizo al comienzo de la sección 2. Tal como se señaló, el objetivo aquí consiste en estudiar cómo los métodos, los estimadores, las herramientas estadísticas. ..., están influenciados por los supuestos de la modelación.

---

[6] HAMPEL, F. (2001): "Robust Statistics: A brief introduction and overview". *Technical Report* 94, Seminar für Statistik, Eidgenössische Technische Hochschule.

La robustez en Problemas de Optimización

En la década de 1990, Kouvelis y Yu (1997)[7] presentaron una noción conservadora de robustez para problemas de optimización discreta. El término "conservadora" se refiere a que la idea que proponen supone que el decisor asume el mínimo riesgo posible. Además, estos autores representan la incertidumbre mediante escenarios, considerando como tal a una especificación concreta de todos los datos. En función de tales escenarios, introducen tres medidas de la robustez: robustez absoluta, robustez relativa y robustez-desviación.

La robustez absoluta, utiliza un criterio mínimax simple, pero dado su carácter conservador extremo, introducen otra medida fundamentada en el arrepentimiento, la robustez-desviación. La solución robusta-desviación es aquella que varía lo mínimo respecto de la solución óptima en el peor de los casos. También la robustez relativa se apoya en el arrepentimiento de los casos (coste de oportunidad).

La justificación de los autores hacia estas medidas de la robustez, es que en condiciones de incertidumbre deben considerarse todas las diferentes consecuencias posibles, incluyendo las peores, dado que no se conoce con certeza cuál de ellas podría ser realidad en algún momento futuro.

La robustez en la Ayuda a la Decisión Multicriterio

El uso de la expresión "análisis de robustez" fue introducido en la literatura sobre Ayuda a la Decisión Multicriterio hace aproximadamente catorce años, de la mano de los profesores de la Escuela Franco-Belga dedicada fervientemente a la Toma de Decisiones Multicriterio. De la misma forma que el tan conocido análisis de sensibilidad, el análisis de robustez pretende incorporar la experiencia del mundo real respecto de la incertidumbre dentro del entendimiento y la comprensión de los resultados derivados matemáticamente.

Podemos señalar dos diferencias importantes con relación al análisis de sensibilidad. La primera diferencia es que su objetivo consiste en utilizar, no solamente la optimización, sino también un rango más amplio y concreto de resultados informáticos, por ejemplo, que una cierta solución sea factible o que sea casi óptima. La segunda diferencia es que la perspectiva del análisis de robustez se considera virtualmente, como "la imagen reflejada en el espejo" del análisis de sensibilidad. Esto es, identificar cuál es el dominio de puntos en el espacio de soluciones para el cual un resultado particular continúa perpetuándose.

La incertidumbre, sin embargo, permanece asociada a los valores de los parámetros más que al conjunto de incertidumbres intangibles que podrían resistirse a una cuantificación que encierre en sí misma un alto grado de credibilidad. Y a diferencia

[7] KOUVELIS, P.; YU, G. (1997): *Robust Discrete Optimization and its applications.* Kluwer Academic Publishers.

del análisis de sensibilidad, la idea de una explotación secuencial para alcanzar mayor flexibilidad, está ausente.

En 1998 Bernard Roy propuso que el concepto de robustez se aplicara no sólo a las soluciones, sino más generalmente a las conclusiones (recomendaciones, afirmaciones). Se considera que una conclusión es la información que se deduce a partir del modelo y que se ofrece al decisor durante el proceso de decisión. Así pues, podrían tener el carácter de conclusión, una propuesta de solución del problema, una propiedad relevante para alcanzar la mejor solución de compromiso o cualquier hecho que pudiera resultar de utilidad para el decisor.

Una conclusión se dice que es robusta si es verdadera para todos (o casi todos) los escenarios, recordando que un escenario es un conjunto de valores posibles para los parámetros del modelo que se utilice para resolver el problema de decisión en cuestión.

En 1999, P. Vincke[8] propuso una estructura teórica para el concepto de robustez. Se fundamenta en definiciones formales de "problema", "caso de un problema", "procedimiento" y "método". Esto conduce a definiciones precisas de soluciones robustas y métodos robustos que generalmente se aplican en algunos problemas de optimización clásica y en problemas de agregación de preferencias. En la sección 3 se hará una exposición detallada del análisis de robustez desde el punto de vista de la Ayuda a la Decisión Multicriterio centrada principalmente en los Métodos de Relaciones de Superación.

Una noción nueva de la robustez en la Ayuda a la Decisión

En respuesta a las nociones previas de robustez, Hites[9] introduce en el año 2002 otra idea, considerando que una solución robusta es aquella que resulta, simultáneamente, buena y que no posee demasiado riesgo. En otras palabras, una solución robusta es aquella que resulta satisfactoria para el decisor en tantos escenarios como sea posible sin ser demasiado insatisfactoria para el decisor en algún escenario individual. Es importante señalar que esta idea se asemeja mucho a la de solución de compromiso "buena" que se introdujo en la sección 2.

La noción propuesta por Hites, introduce la connotación de calidad dentro del problema; aunque es de carácter muy general parece que esa es su pretensión.

Puede comprobarse que, algunas de las definiciones que se han estudiado hasta ahora son bastante restrictivas. No todos los decisores tendrán el mismo nivel de aversión al riesgo, por ejemplo, y además desearán soluciones que serán más o menos conservadoras en función de esa actitud adversa frente al riesgo.

---

[8] VINCKE, Ph. (1999): "Robust solutions and methods in decision aid". *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, 8, pp. 181-187.

[9] HITES, R. (2002): "The aggregation of preferences method for solving certain combinatorial problems with uncertainty". Preprint http://smg.ulb.ac.be.

Quizá, el concepto de robustez que presenta Hites sea muy subjetivo y podría permitir, al introducir las preferencias del decisor, que se encuentre una solución que sea satisfactoria para él. Esta idea de interacción para modelar las preferencias del decisor tiene mucha relación con aspectos concretos de la Ayuda a la Decisión y la Teoría de la Decisión Multicriterio.

La robustez: concepto, alcance, importancia

El término "robustez" se utiliza con mucha frecuencia en el campo de la Decisión Multicriterio (MCDM: Multiple Criteria Decision Making) y más recientemente hizo su incursión definitiva en lo que se conoce como Ayuda a la Decisión Multicriterio (MCDA: Multiple Criteria Decision Aid).

Es importante reconocer que, no siempre queda establecido con precisión "a qué se refiere dicha robustez", ya que puede hacer referencia a soluciones robustas, a métodos robustos, a procesos robustos, y a conclusiones robustas.

En la mayoría de los casos, se habla de soluciones robustas, es decir que el interés se centra en aquellas soluciones que constituyen el resultado de un proceso o de la aplicación de algún algoritmo, que conduzca a la adopción de una decisión o a ayudar al decisor a determinar cuál será la mejor solución de compromiso en el problema de decisión al que se enfrenta.

Por tanto, el término robustez se utiliza para caracterizar el funcionamiento de un proceso o el comportamiento de un algoritmo cuyo objetivo sea el de alcanzar un ordenamiento del conjunto de alternativas pero en presencia de incertidumbre. Esta última apreciación es esencial, pues no podemos prescindir de la incertidumbre existente en cualquier problema de decisión, sea cual fuere la forma en que pueda manifestarse.

A medida que se fue poniendo en práctica la búsqueda de soluciones robustas, tanto analistas como decisores, se dieron cuenta de que ello era insuficiente para abordar adecuadamente la incertidumbre. Por lo que su preocupación fue extendiéndose hacia otras decisiones, interesándose por el estudio de la robustez de métodos y la robustez de conclusiones para llegar a la caracterización de lo que hoy se conoce como métodos robustos y conclusiones robustas, además de las soluciones robustas.

Las nuevas direcciones de estudio generaron la necesidad de delimitar, a su vez, el alcance de las palabras método, conclusión y solución.

Según B. Roy (1996)[10] un método es una clase bien definida de procesos, siendo un proceso una secuencia de instrucciones que, aplicadas al conjunto de datos de un problema genera un resultado. El resultado obtenido, consiste generalmente en una solución admisible para el problema en cuestión y para un conjunto determinado de

[10] ROY, B (1996): *Multicriteria Methodology for decision aiding.* Kluwer Academic Publishers.

datos. Cada conjunto de datos es considerado como un *escenario* del problema de decisión.

De la misma forma debería aclararse qué constituye una conclusión robusta dado que, frente a la existencia de distintos escenarios del problema de decisión y de un conjunto de procesos aplicables a dicho problema el paso siguiente se centra en la búsqueda de conclusiones.

En general, se considera que una solución es toda afirmación o aserción (de cualquier naturaleza, verdadera o falsa) que pretende utilizar la información contenida en los resultados referidos a algunos o a todos los pares de elementos (proceso; conjunto de datos) examinados en el tratamiento del problema de decisión.

Sin embargo, las conclusiones que revisten tal carácter no conducen necesariamente a preferir una solución u otra, a elegir un método u otro, sino que simplemente limitan el campo de opciones que se ofrece al decisor. Por tal razón, es sumamente importante añadirles el adjetivo "robustas".

La dimensión subjetiva de la robustez

Una característica importante de la robustez, y que no puede pasar desapercibida dada su trascendental importancia, es su dimensión subjetiva. El hecho que una decisión (solución, conclusión, método) pueda considerarse robusta depende del mayor o menor margen de intensidad que el decisor esté dispuesto a conceder a la información que él desea recibir del analista. Por lo tanto, resulta imprescindible explicitar las razones y los factores que generan la contingencia, la arbitrariedad y la ignorancia de aquello cuya robustez está siendo objeto de investigación.

Es indudable que las fuentes de incertidumbre están estrechamente condicionadas por el contexto decisional considerado, no obstante lo cual se reconocen algunas consideradas fundamentales (Vincke, 1999)[11]:

1. El carácter impreciso, incierto y más generalmente, poco conocido y mal definido, de las especificaciones del problema de decisión en cuestión.
2. Las condiciones de puesta en ejecución de la decisión en cuestión pueden verse afectadas por el entorno o ambiente en el que se ejecutan, ya sea en un momento determinado si se trata de una decisión puntual o de estados sucesivos si se refiere a una decisión secuencial.
3. El carácter inestable e impreciso de los sistemas de valores y de las preferencias del decisor, que se consideran prioritarios para determinar la factibilidad y el interés relativo de las alternativas potenciales.

---

[11] VINCKE, Ph. (1999): "Robust and neutral methods for aggregating preferences into an outranking relation". *European Journal of Operational Research*, 112, 2, pp. 405-412.

Por su parte, Rosenhead (2002)[12] considera que en ese contexto, en el que la incertidumbre afecta e invade el ambiente de decisión en el que se está trabajando, el análisis de robustez es aplicable cuando:

1. La incertidumbre es un factor que obstaculiza la adopción de decisiones seguras y,
2. Las decisiones pueden o deben ser llevadas a cabo, es decir que, las consideraciones establecidas al comienzo del proceso de decisión no definen, necesariamente, en forma completa el estado futuro del sistema. Deberían existir una o más oportunidades futuras para modificarlo o definirlo con mayor precisión.

De esta forma, el primer ítem asegura que la incertidumbre es importante y no puede obviarse; mientras que el segundo asegura que puede hacerse algo al respecto para atenuar o eliminar su influencia negativa.

El análisis de la robustez desde el punto de vista de la teoría de la decisión bayesiana

Antecedentes

El problema de la robustez ha sido siempre un elemento importante del fundamento y las bases de la Estadística. Sin embargo, sólo en las últimas décadas se han efectuado numerosos intentos para formalizar el problema, con un mayor alcance que el de medidas ad-hoc y con el propósito de orientarse hacia una verdadera teoría de la robustez.

Huber (1964)[13] y Hampel (1971)[14] centraron sus estudios en algunos métodos que tratan de capturar los rasgos esenciales de los problemas de robustez en la vida real, dentro de un contexto matemático. Asimismo, los estudios de robustez han recibido un interés considerable entre los llamados "bayesianos".

James O. Berger (1984, 1985, 1994)[15] ha estudiado muy pormenorizadamente el tema de la robustez desde la óptica del análisis bayesiano.

Tradicionalmente, la robustez bayesiana se refiere al análisis de sensibilidad a que se somete la elección del escenario inicial. Esto suele llevarse a la práctica a través de distribuciones marginales, de pérdida esperada a posteriori y de riesgo bayesiano. Aunque, en los últimos años, se ha producido una verdadera explosión en la literatura referida a la variación de las características posteriores cuando las condiciones iniciales (escenario de partida) pertenecen a una clase determinada.

---

[12] ROSENHEAD, J. (2002): *Robustness Analysis*. London. England. EWG-MCDA Newsletter.

[13] HUBER, P.J. (1964): "Robust estimation of a local parameter". *Annals of Mathematical Statistics*, 35, pp. 73-101.

[14] HAMPEL, F.R. (1971): "A general qualitative definition of robustness". *Annals of Mathematical Statistics*, 42, pp. 1887-1896.

[15] BERGER, J.O. (1994): "An overview of robust Bayesian analysis". *Test*, 3, pp. 5-59.

La mayoría de los esfuerzos de investigación efectuados en el estudio de la robustez bayesiana, han evitado extender el estudio a la elección de la función de pérdida.

En verdad, hay muy pocos trabajos que hacen referencia al estudio de la robustez de la función de pérdida. Quizá, el retraso en su estudio se deba al hecho que los problemas de robustez en la distribución a priori (escenario inicial) son probablemente más importantes que los problemas de robustez de la función de pérdida.

Los estudios más importantes y de mayor relevancia en torno a la robustez de la función de pérdidas han sido efectuados por: L.D. Brown (1975); J.B. Kadane y D.T. Chuang (1978); J.O.Rancia y M.R. Novick (1980); U.E. Makov (1994); D. Dey, K. Lou y S. Bose (1998); J. Martín, D. Ríos Insúa y F. Ruggeri (1998).

El análisis de robustez Bayesiano: objetivos, importancia, expansión

El estudio de la robustez desde el punto de vista Bayesiano se preocupa por la sensibilidad de los resultados obtenidos al aplicar un análisis Bayesiano a los inputs utilizados en dicho análisis. A comienzo de la década de los noventa tuvo lugar la llamada "edad de oro del análisis de robustez Bayesiano", momento en el cual numerosos estadísticos investigaron activamente en el área, alcanzándose así, un rápido y sólido progreso. Fue considerado el tema central y más importante en numerosos encuentros de talla internacional y aún en otros encuentros no-Bayesianos por excelencia. Concretamente hubo tres encuentros dedicados explícitamente al tema: "The Workshop on Bayesian Robustness", celebrado en la Universidad de Purdue en 1989; y otros dos "International Workshops on Bayesian Robustness", que tuvieron lugar en Italia, el primero en Milano en 1992 y el segundo en Rimini en 1995.

Las actas de las dos últimas conferencias fueron publicadas, respectivamente, en el "Journal of Statistical Planning and Inference" (volumen 40, N° 2 y 3) y en Berger et al (1996)[16] como un volumen "ISM Lecture Notes".

Un ejemplar del "Journal Test" (vol. 3, 1994) fue dedicado, casi exclusivamente, al estudio que Berger realizó sobre el análisis Bayesiano robusto, seguido de las discusiones presentadas por numerosos estadísticos bayesianos. Muchas de estas discusiones fueron, en sí mismas, estudios extensivos de aspectos particulares de la robustez Bayesiana, de forma tal que el volumen sirve como recopilación muy efectiva y completa del estado de la robustez Bayesiana en 1994.

Los estudios y diferentes enfoques de la robustez Bayesiana presentados por Berger con anterioridad, incluyen una discusión considerablemente filosófica del enfoque junto con el debate respecto de su historia e incorporan referencias de sus orígenes en los trabajos de Good en la década de los 50 y, más tarde en los de Kadana y Chuang en 1978. Otra fuente de información buena y fiable sobre Robustez Bayesiana es la suministrada por Walley en 1991, aunque su libro titulado *Statistical Reasonning with*

[16] BERGER, J.O.; BETRÒ, B.; MORENO, E.; PERICCHI, L.R.; RUGGERI, F.; SALINETTI, G.; WASSERMAN, L. (1996): *Bayesian Robustness*. ISM Lectures Notes-Monograph Series, 29. Hayward:ISM.

Imprecise Probabilities (London, Chapman and Hall) presenta el problema desde un punto de vista diferente.

A comienzos de la década de los 90 se produjo una verdadera explosión de publicaciones centradas en el estudio de la sensibilidad de la distribución “a priori”, en parte debido a que los Bayesianos, a menudo, consideran esta sensibilidad como la principal desventaja e inconveniente del análisis Bayesiano clásico. Los trabajos que aparecieron se centraron en reemplazar la distribución a priori única por una clase de distribuciones a priori (escenarios iniciales) y en desarrollar métodos que permitieran calcular la gama de respuestas subsecuentes cuando la situación a priori variaba respecto de la clase. Este enfoque, denominado de *robustez global*, fue complementado, rápidamente, con técnicas de *robustez local* que se centran en el estudio de la sensibilidad local (en el sentido de derivados) de las distribuciones a priori.

Naturalmente, el interés se expandió hacia el estudio de la robustez respecto de la función de verosimilitud y de la función de pérdida, con el objetivo de disponer de un enfoque o análisis general de sensibilidad alrededor de todos los ingredientes del paradigma Bayesiano (modelo/distribución inicial/función de pérdida). La implementación práctica de las ideas de robustez Bayesiana tuvo lugar a partir de los trabajos presentados por Godsill y Rayner (1996), Greenhouse y Wasserman (1996), Sargent y Carlin (1996) y Ríos Insúa et al. (1999).

En la última mitad de la década de los 90, el análisis de robustez Bayesiano cambió, pasando de ser en sus comienzos un tema candente hasta ser actualmente un campo maduro en el análisis Bayesiano clásico, con un desarrollo continuo gradual, pero con menor sentido de urgencia. Este cambio se produjo por diversas razones. En primer lugar, la agitación inicial de los progresos teóricos fundamentales, naturalmente, luego se fue retrasando, tal como sucedería con cualquier campo de estudio nuevo. En segundo lugar, pocos Bayesianos continuaron cuestionándose la necesidad de ver a la robustez o a la sensibilidad como un tema o asunto serio, por ello el entusiasmo filosófico por la idea en cuestión fue decreciendo. En efecto, hubo consenso respecto de que no era el momento oportuno para el desarrollo de implementaciones amigables con el usuario de la metodología existente de robustez Bayesiana.

Sin embargo, esta decisión no fue muy acertada, ya que casualmente, este período también marcó la explosión del interés en métodos computacionales MCMC para la estadística Bayesiana. Esto dio lugar a dos efectos serios en el campo de la robustez Bayesiana. Primero, muchos de los investigadores en métodos Bayesianos robustos cambiaron la orientación de sus estudios hacia el área de MCMC. Segundo, la metodología MCMC no resultó ser directamente compatible con numerosas de las técnicas Bayesianas robustas que habían sido desarrolladas, por ello se clarificó cómo el análisis Bayesiano robusto formal podría ser incorporado en el futuro en el mundo Bayesiano a través de la metodología MCMC.

Paradójicamente, la metodología MCMC ha incrementado dramáticamente la necesidad por considerar la robustez Bayesiana, dado que la modelación que actualmente se utiliza de manera habitual en el análisis Bayesiano es de tal complejidad que los inputs (tales como condiciones a priori) puedan ser obtenidos solamente de una manera muy casual. Es ahora, el momento apropiado para orientar y centrar nuevamente la robustez Bayesiana e intentar introducir sus ideas dentro de la ideología Bayesiana dominante.

Es importante señalar que, la robustez Bayesiana juega un papel relevante en el Análisis de Sensibilidad del Modelo de Output (SAMO: *Sensitivity Analysis of Model Output*), cuyos adeptos están interesados por investigar la importancia relativa de los parámetros del Modelo de Input sobre las predicciones del modelo en diversas áreas aplicadas, desde Ingeniería Química hasta Econometría.

Principales resultados en el estudio de la robustez Bayesiana

El principal objetivo de la robustez Bayesiana es cuantificar e interpretar la incertidumbre inducida por un conocimiento parcial de uno (o más) de los tres elementos presentes en el análisis: distribución a priori, función de verosimilitud y función de pérdida. Asimismo, otras formas de reducir la incertidumbre se estudian y aplican hasta que, esperanzadoramente, se alcanza la robustez.

Diferentes enfoques

Hay tres enfoques principales para abordar y considerar la robustez Bayesiana. El primero es el *enfoque o estudio informal*, en el que se consideran unos pocos elementos a priori y se comparan las correspondientes medias posteriores. Este enfoque es muy aplicable debido a su simplicidad y puede ayudar, pero también puede “omitir” fácilmente elementos a priori que son comparables con el conocimiento obtenido a priori y que aún podría generar medias posteriores muy diferentes.

El segundo enfoque se denomina de *robustez global* cuyo estudio minucioso es abordado por Moreno (2000)[17]. Puede considerarse, al menos idealmente, la clase de todas las condiciones a priori compatible con la información obtenida a priori y puede computarse el rango de la media posterior cuando los elementos a priori varían respecto de la clase. Este rango está típicamente fundamentado en la determinación de los elementos a priori “extremos” en la clase que genera las medias máxima y mínima posteriores.

El tercer enfoque, denominado de *robustez local*, es descrito con gran detalle por Gustafson (2000)[18] y Sivaganesan (2000)[19]. Este estudio es interesante en relación con la tasa de cambio que se define en las inferencias, con respecto a los cambios en las condiciones iniciales, y utiliza técnicas diferenciales para una correcta evaluación de la tasa. Las medidas de sensibilidad local son habitualmente más fáciles de utilizar

[17] MORENO, E. (2000): “Global Bayesian robustness for some classes of prior distributions”. En: Ríos Insúa, D.; Ruggeri, F. (eds.), *Robust Bayesian Analysis*. New York. Springer Verlag.

[18] GUSTAFSON, P. (2000): “Local robustness in Bayesian Analysis”. En: Ríos Insúa, D.; Ruggeri, F. (eds.), *Robust Bayesian Analysis*. New York. Springer Verlag.

[19] SIVAGANESAS, S. (2000): “Global and Local Robustness approaches: uses and limitations”. En: Ríos Insúa, D.; Ruggeri, F. (eds.), *Robust Bayesian Analysis*. New York. Springer Verlag.

en situaciones complicadas, en lo que a cómputos se refiere, que las medidas globales, pero su interpretación y ajuste no siempre resultan claros.

Modelación de la incertidumbre

Las clases de funciones de distribuciones a priori, de verosimilitud y de pérdida son especificadas de acuerdo con el conocimiento disponible parcial. Ellas pueden ser clasificadas en clases "próximas" o "casi desconocidas" utilizando la clasificación propuesta por Pericchi y Walley (1991) en su trabajo titulado "Robust Bayesian credible intervals and prior ignorance" (International Statistical Review, 58, pp. 1-23).

En el primer caso, puede imaginarse que la elección Bayesiana estándar ha originado una función específica a priori (verosimilitud, pérdida) y considera las funciones "próximas" (vecinas) de ese elemento a priori (verosimilitud, pérdida) para estudiar la robustez. Es interesante notar, también, que el enfoque local de robustez, implícitamente, opera sobre pequeñas perturbaciones en las vecindades o proximidades.

La clase "casi desconocida" no tiene elementos de base y, en su lugar, está fundamentada en algunas características, tales como los cuantiles de la distribución a priori o los valores de la función de pérdida en algunos puntos.

Las propiedades deseables, pero suficientemente adecuadas, de una clase de condiciones iniciales incluyen los siguientes aspectos: el cómputo de medidas de robustez debería ser tan sencillo como fuere posible; todos los escenarios iniciales razonables deberían estar en una clase y los no razonables (por ejemplo, distribuciones discretas en numerosos problemas) no deberían estar presentes; y la clase debería ser fácilmente especificable a partir de la información a priori obtenida. Propiedades similares podrían definirse para clases de pérdidas y de modelos.

Orientaciones y trabajos futuros en materia de robustez Bayesiana

El desafío más importante en el campo de la robustez Bayesiana es incrementar su impacto sobre la práctica estadística; en efecto, hacerla un componente rutinario del trabajo aplicado. Una posibilidad de hacer esto es mostrando, simplemente, por ejemplo, el poder o potencialidad de los métodos. Además, se han citado numerosos trabajos que ilustran los usos de la robustez Bayesiana en cuestiones de carácter práctico.

Quizás, la forma más importante para persuadir a los practicantes de los métodos de robustez Bayesiana es que, estos métodos estén disponibles en un software estadístico estándar. Existen numerosos esfuerzos en curso para desarrollar un software estadístico Bayesiano general, y la incorporación de una metodología de robustez Bayesiana en tal software es claramente deseable. En realidad, la robustez Bayesiana puede quizá ser vista como un componente del software Bayesiano general. Idealmente, tal software debería operar de la manera siguiente:

- Obtener las preferencias y opiniones (juicios) del decisor.
- Dirigir un estudio de robustez con clases compatibles con la información obtenida, y ciertas cantidades representativas de interés.

- Si la robustez aparenta sostenerse, dirigir un análisis Bayesiano estándar con un escenario inicial, un modelo o una función de pérdida representativos, a partir de las clases, entonces, de esta forma se facilitaría la comunicación.
- Si la robustez no se mantiene, obtener información adicional para restringir aún más las clases (con el software, quizá sugiriendo qué información adicional sería la mejor para seleccionar), u obtener datos adicionales, y repetir el proceso.

El aspecto menos comprensible de este programa es la posibilidad de una elección iterativa y esto, es un tópico que requiere mucha más investigación.

Otra área de importancia duradera en el campo objeto de estudio es la de fundamentaciones. Existe aún, un gran interés por modelos axiomáticos que conducen al análisis Bayesiano robusto. Por ejemplo, una implicación directa de la mayoría de los sistemas axiomáticos es que las alternativas no dominadas o los estimadores deberían ser tenidos en cuenta. En realidad, un tópico de importancia considerable es el que se refiere a un desarrollo más profundo de métodos para aproximar el conjunto de estimadores o de alternativas no dominadas. Por otra parte, algunas axiomáticas como la propuesta por Nau (1995)[20] conducen a un tipo de modelos que requerirían nuevos desarrollos computacionales.

En resumen, existen numerosos problemas que representan un reto en el análisis Bayesiano robusto desde un punto de vista metodológico, fundamental y computacional. El campo de estudio posee, sin lugar a dudas, un futuro excitante.

Conclusiones

El estudio de la robustez en sentido amplio, requiere que se delimite qué es la robustez, por qué se busca la robustez y respecto de qué se estudia la robustez.

Una vez superada esa etapa inicial es necesario determinar cuál es el ámbito de aplicación.

Si bien los estudios más recientes en la Teoría de la Decisión apuntan a considerar la robustez como una herramienta sumamente importante en el ámbito de la Ayuda a la Decisión Multicriterio Discreta, dentro de ésta deben diferenciarse distintas perspectivas de estudio. Por un lado, debe destacarse el estudio de la robustez en los Métodos de Relaciones de Superación (*Outranking Relations Methods*) y por otro, su estudio dentro de "El Análisis Bayesiano de Decisión".

Evidentemente, los enfoques propuestos dentro de cada parcela de estudio son muy distintos entre sí y sus concepciones y puntos de partida no tienen ningún punto en común, por lo que deben tratarse con mucho cuidado para evitar así que se llegue a conclusiones erróneas, al adquirir el mismo término *robustez* significados diferentes en cada ámbito.

---

[20] NAU, R. (1995): *The shape of incomplete preferences.* Technical Report. Duke University.

Es imprescindible al utilizar la palabra *robustez* sumergirse en el ámbito particular de cada caso, y comenzar con los puntos de partida propios de cada campo científico específico, pues ni siguiera dentro del ámbito de la Teoría de la Decisión, en sentido amplio, tiene una misma definición.

El concepto de robustez es relativamente joven dentro de la Historia de la Estadística y de la Probabilidad. Hace tan sólo menos de cincuenta años que se habla de robustez en el campo de la Estadística en general y de la Teoría de la Decisión en particular.

Los nuevos conceptos de Estadística *robusta*, así como los nuevos ámbitos *robustos* en la Teoría de la Decisión, tienen una antigüedad de menos de una década.

La robustez estadística y la robustez de la Teoría de la Decisión, llevan caminos paralelos desde puntos de partida muy diferentes, tal como nos muestra la historia.

Por tal motivo, se han desarrollado a través del presente trabajo las principales ideas que deben manejarse en cada campo de estudio; se han expuesto los avances recientes y las técnicas propuestas para abordar el análisis de la robustez y se ha puesto énfasis en la evolución histórica del concepto de robustez dentro de distintos enfoques de la Decisión Multicriterio.

No obstante lo señalado, es necesario reconocer que nos encontramos en una parcela dentro de la Teoría de la Decisión, en sentido amplio, que requiere seguir investigando, ya sea mediante estudios más profundos en el sentido de los ya iniciados así como también, en otras direcciones que evidencian ser muy prometedoras.

Sea cual fuere la perspectiva desde la que se estudie la robustez, debe reconocerse sin lugar a dudas, que es una herramienta muy poderosa y útil para afrontar la incertidumbre que, en sus diversas manifestaciones, se encuentra presente en todo problema de decisión.

La Historia será testigo del desenlace convergente o divergente de los diferentes estudios de la robustez.

BIBLIOGRAFÍA

BELTON, V.; STEWART, T. (2002): *Multiple Criteria Decision Analysis: An Integrated Approach.* Kluwer Academic Publishers.

BERGER, J.O. (1994): "An overview of robust Bayesian analysis". *Test*, 3, pp. 5-59.

BERGER, J.O.; BETRÒ, B.; MORENO, E.; PERICCHI, L.R.; RUGGERI, F.; SALINETTI, G.; WASSERMAN, L. (1996): *Bayesian Robustness*. ISM Lectures Notes-Monograph Series, 29. Hayward:ISM.

BERGER, J.; RÍOS-INSÚA, D.; RUGGERI, F. (2000): "Bayesian Robustness", pp. 1-32. En Ríos-Insúa, D.; Ruggeri, F. Eds. (2000): *Robust Bayesian Analysis*. Springer Verlag, New York.

DEY, D.; MICHEAS, A. (2000) "Ranges of Posterior Expected Losses and e-Robust Actions", pp. 145-159. En Ríos-Insúa, D.; Ruggeri, F. Eds. (2000): *Robust Bayesian Analysis*. Springer Verlag, New York.

GUPTA, S.K.; ROSENHEAD, J. (1968): "Robustness in sequential investment decisions". *Management Science*, 15 (2), pp. 18-29.

GUSTAFSON, P. (2000): "Local robustness in Bayesian Analysis". En: Ríos Insúa, D.; Ruggeri, F. (eds.), *Robust Bayesian Analysis*. New York. Springer Verlag.

HAMPEL, F.R. (1971): "A general qualitative definition of robustness". *Annals of Mathematical Statistics*, 42, pp. 1887-1896.

HAMPEL, F. (2001): "Robust Statistics: A brief introduction and overview". *Technical Report* 94, Seminar für Statistik, Eidgenössische Technische Hochschule.

HITES, R. (2002): "The aggregation of preferences method for solving certain combinatorial problems with uncertainty". Preprint http://smg.ulb.ac.be.

HUBER, P.J. (1964): "Robust estimation of a local parameter". *Annals of Mathematical Statistics*, 35, pp. 73-101.

KOUVELIS, P.; YU, G. (1997): *Robust Discrete Optimization and its applications.* Kluwer Academic Publishers.

MARTÍN, J.; RÍOS-INSÚA, D. (1996): "Local Sensitivity Analysis in Bayesian Decision Theory". IMS Lecture Notes. Monograph Series, Volumen 29, pp. 119-135.

MORENO, E. (2000): "Global Bayesian robustness for some classes of prior distributions". En: Ríos Insúa, D.; Ruggeri, F. (eds.), *Robust Bayesian Analysis*. New York. Springer Verlag.

NAU, R. (1995): *The shape of incomplete preferences.* Technical Report. Duke University.

RÍOS INSÚA, D.; MARTÍN, J. (1994): "On the foundations of robust decision making", pp. 103-111. En: Ríos, S. Eds: *Decision Theory and Decision Analysis: Trends and Challenges*.

ROSENHEAD, J.; ELTON, M.; GUPTA, S. (1972): "Robustness and optimality as criteria for strategic decisions". *Operational Research Quaterly*, 23 (4), pp. 413-430.

ROSENHEAD, J. (2002): *Robustness Analysis*. London. England. EWG-MCDA Newsletter.

ROY, B.; HUGONNARD (1982): "Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by a multicriteria method". *Transportation Research*, 16A, pp. 301-312.

ROY, B (1996): *Multicriteria Methodology for decision aiding.* Kluwer Academic Publishers.

ROY, Bernard (1998): "A missing link in OR-DA: Robustness Analysis". *Foundations of Computing on Decision Sciences*, vol. 23, n° 3.

SIVAGANESAS, S. (2000): "Global and Local Robustness approaches: uses and limitations". En: Ríos Insúa, D.; Ruggeri, F. (eds.), *Robust Bayesian Analysis*. New York. Springer Verlag.

VINCKE, Ph. (1999): "Robust solutions and methods in decision aid". *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, 8, pp. 181-187.

VINCKE, Ph. (1999): "Robust and neutral methods for aggregating preferences into an outranking relation". *European Journal of Operational Research*, 112, 2, pp. 405-412.