SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

boletín n° 11

nov 86

B O L E T I N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Noviembre - 1986 nº 11 (1986 - 87)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:

  Ronda de Atocha,2 (INBAD)
  MADRID

- La correspondencia deberá dirigirse al:

  Apartado nº 9479
  28080 - MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:

  PASCUAL IBARRA, José Ramón
  FERNANDEZ BIARGE, Julio

- La portada, de J.F.B. , alude al espiritu olímpico de las competiciones matemáticas que patrocina o apoya nuestra Sociedad.

INDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: José Javier Etayo Miqueo

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardó (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretario: José Francisco Carballido Quesada

Vicesecretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

XXIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

PRIMERA FASE

Como en años anteriores, la Real Sociedad Matemática Española, en colaboración con la Subdirección de Becas y Ayudas de Estudio, ha organizado la " Olimpiada Matemática Española " , que este curso es la número XXIII.

Ya es sabido que estos certámenes constan de dos fases; la primera se celebra en las cabeceras de los antiguos distritos universitarios; los ganadores de cada distrito, hasta un máximo de tres, son premiados con una beca utilizable para seguir los estudios de la licenciatura de Matemáticas; además son convocados para competir en la Fase Final, que suele celebrarse simultáneamente en Madrid y en Canarias. De esta última fase salen los tres ganadores de la Olimpiada. Este curso se realizará en Febrero.

En la actualidad, la Primera Fase viene realizándose entre alumnos del Curso de Orientación Universitaria, en los primeros meses de este Curso, con objeto de que los alumnos destacados en la Fase Final tengan tiempo de hacer una cierta preparación que les permita competir en la Olimpiada Matemática Internacional, que se celebra en el mes de Julio de cada año. La participación española, que tuvo lugar por primera vez en París, en 1983, ha ido obteniendo resultados cada vez mejores, como puede verse en nuestras crónicas de los Boletines números 2, 7 y 10, a pesar de haber presentado equipos con menor número de participantes que otros paises con mayor tradición y experiencia en ese tipo de competiciones.

En la mayor parte de los distritos, la Primera Fase ha tenido lugar los dias 28 y 29 de Noviembre. En la sección de Problemas Propuestos ofrecemos a nuestros socios los enunciados de los problemas propuestos en ella; hemos esperado a conocer los primeros resultados para cerrar la edición de este número del Boletín.

En Madrid, esta Primera Fase se celebró en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales; se habían inscrito en ella 143 alumnos, de los que se presentaron 101. Tal como ocurrió el año anterior (ver nuestro Boletín número 8), el nivel medio de los participantes fué bajo, hasta el punto de que 16 de ellos no fueron capaces de obtener ni un solo punto, y otros 38 no pasaron de 4, de un total de 80 puntos que podían obtenerse teóricamente; la media aritmética de las puntuaciones se quedó en 5,8. El año anterior hacíamos algunas consideraciones sobre este hecho, cuya validez reiteramos hoy a la vista de estos resultados. Muchos alegarán que los problemas propuestos, aunque no son excesivamente difíciles, están muy alejados de lo habitual en los estudios del actual Bachillerato y C.O.U.; ello es cierto, pero en cambio se encuentran en la línea de los propuestos en las distintas Olimpiadas Internacionales, aunque son algo más sencillos que éstos últimos. Sobre este nivel medio,más bien mediocre,destacaron claramente los tres ganadores del Distrito de Madrid, que son:

1. D. Pablo Benítez Giménez, del Colegio de Huérfanos de la Armada, de Madrid.
2. D. Pablo Ariza Molina, del I. B. "Miguel Servet" de Madrid.
3. D. Rogelio Triviño González, del I. B. "Puig Adam" de Getafe (Madrid).

Señalaremos que el Sr. Ariza fué premiado por nuestra Sociedad en 1985 como alumno de 2° y en 1984 como alumno de 1° de B.U.P.. A todos ellos, nuestra cordial enhorabuena.

NOTICIAS

Sociedad Canaria "Isaac Newton"

De acuerdo con el programa previsto, esta Sociedad celebró en Lanzarote, en los primeros días del mes de mayo pasado, sus VII Jornadas. Al tiempo tuvo lugar la Asamblea General de la Sociedad renovándose en parte la Junta Directiva y resultando elegido para presidente el profesor Fernando Hernández Guarch. Se tomó el acuerdo de celebrar las VIII Jornadas en Gran Canaria, en lugar aún sin designar, pero en las mismas fechas, esto es, del 1 al 4 de mayo de 1987. Como tema general de estas jornadas se propuso el estudio de los problemas derivados en la enseñanza de las matemáticas en el futuro ciclo de los 11 a los 16 años.

Por otra parte, la Sociedad "Isaac Newton" continúa con entusiasmo y eficacia sus tareas fundacionales en orden a una mejor información y formación del profesorado de matemáticas, mediante la organización de diversos cursos sobre temas concretos de la didáctica matemática y con la publicación de la revista "Números", que recoge actividades y trabajos siempre interesantes.

Comité interamericano para la enseñanza de la matemática

Se anuncia, para los días 12 a 16 de julio de 1987, la celebración de la VII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, que tendrá lugar en Santo Domingo (República Dominicana), en los días 12 a 16 de julio de 1987.

II CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE INVESTIGACION EN LA DIDACTICA DE LAS CIENCIAS Y DE LAS MATEMATICAS

Organizado por la Revista "ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS", el Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona y por el Servei de Formació Permanent de la Universitat de València, tendrá lugar este Congreso, en Valencia, del 23 al 25 de Septiembre de 1987. La preinscripción habrá de realizarse antes del 30 de Enero de 1987. Puede obtenerse información dirigiéndose a

"Enseñanza de las Ciencias"
ICE. Universitat Autònoma de Barcelona
BELLATERRA (Barcelona)

O a través del teléfono (93) 692 02 00, extensión 1598.

CLUB MATEMATICO DEL I.E.P.S.

El Departamento de Didáctica de las Matemáticas del Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas (IEPS) ha creado un Club Matemático que ofrece a los alumnos de Bachillerato la oportunidad de descubrir y aprender las Matemáticas a través de situaciones problemáticas, del juego y de la discusión en grupo. Este Club celebra sus sesiones los miércoles de 5 a 7 de la tarde en los locales del IEPS (Velázquez 114, 4ª izq.) desde el pasado 8 de Octubre.

Puede obtenerse información sobre las actividades de este Club llamando al teléfono 4.11.12.63.

AKADEMIA NEOPLATONICA P.M.

Esta AKADEMIA continúa celebrando sus "Tertulias de Geometría" en el Salón de Actos del Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Almagro, 42, Madrid). Las Tertulias IV y V, tendrán lugar los dias 11 y 12 de Diciembre de 1986 a las 19 h.

• El día 15 de Diciembre, en el mismo lugar y a la misma hora, se honrará la memoria de José Torán, en su V aniversario, con un AULA LIBRE sobre "La Ingeniería de la Destrucción".

EL CUBO Y LA COSA IGUAL AL NUMERO

Por José Javier Etayo

- Nota de la Redacción -

El presente trabajo del profesor Etayo es sólo un resumen de uno de los capítulos de la conferencia "El Algebra del Cinquecento", que el autor desarrolló en el ciclo organizado por la Real Academia de Ciencias el curso pasado, sobre determinados aspectos de la Historia de la Matemática. Se lo teníamos solicitado a quien hoy es nuestro Presidente, al igual que al profesor Linés que también intervino en el mencionado curso y que nos honró con el trabajo publicado en el número anterior del Boletín.

***

El extraño título de este artículo es un lugar común en los textos de Algebra del siglo XVI. Tartaglia, por ejemplo, explica el contenido de uno de sus libros editado en Venecia en 1546, "*sopra la scientia arithmetica, geometrica, et in la pratica speculativa de algebra et almucabala, volgarmente detta Regola de la cosa, over Arte maggiore, et massime delle inventione de Capitulo de Cosa e Cubo equale a número,...*".

Aparece también ahí el "algebra y almucabala", las dos reglas que al-Khowarizmi introduce, ya en el siglo IX, y a la primera de las cuales debe el álgebra su nombre. Nombre que, dice también Tartaglia, equivale en el lenguaje vulgar a "arte mayor" y a "regla de la cosa". Efectivamente, un año antes ha publicado Cardano su Ars Magna, arte grande, y lo comienza con estas palabras: "*Tienes en este libro, lector estudioso, reglas alge* *braicas, que los italianos llaman de la cosa":* *Itali, de la Cossa vocant.*

¿Y qué es la "cosa"? Procede también de la nomenclatura árabe y es lo que hoy llamaríamos incógnita; las reglas de la cosa eran las que permitían calcular el valor de la cosa, es decir, las de resolución de ecuaciones; e, incluso, "cosistas" se llamaba a los algebristas. Un problema en el que no vamos a entrar es el de las notaciones, todavía en un estadio muy primario, las pocas que aquí adoptemos serán las actuales, para poder seguir los razonamientos expresados de un modo discursivo. Así, pues, nuestra "cosa" será $\underline{x}$, y el cubo (y lo mismo otras potencias) quiere decir el cubo de la cosa, nuestro $\underline{x^3}$. Cuando decimos "cubo y cosa igual a número" estamos expresando lo que hoy escribíamos $\underline{x^3} + \underline{ax} = \underline{b}$, esto es, el cubo y $\underline{a}$ cosas igual al número $\underline{b}$; el tercio de esas cosas, o tercio de la cosa, que luego aparecerá, será, pues, a/3. Y una observación: aquí $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son dos números concretos, no dos constantes arbitrarias; hasta Vieta, al final del siglo, no se llegará a esta generalización. Más aún: esos números han de ser siempre positivos, así como las soluciones de la ecuación; los números negativos no entraban todavía en consideración.

De este modo, el enunciado de nuestro título es justamente el exponente del avance principal, no el único, que el álgebra experimenta durante este siglo XVI. Todavía a sus comienzos se asegura que esta ecuación, la de tercer grado, no tiene solución o, al menos, no se conoce ningún método para obtenerla. Así lo afirma Luca Pacioli en su libro publicado en 1494 en el que se recogen, como en una enciclopedia, todos los conocimientos que su título indica: Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalitá. El álgebra llega, efectivamente, hasta la ecuación de segundo grado, siempre que no se trate del caso imposible que da lugar a las soluciones imaginarias. Y de ahí no pasa.

Las ecuaciones cúbicas susceptibles de ser estudiadas se clasificaban en trece tipos, teniendo en cuenta el carácter positivo de coeficientes y raíces. No sería, por ejemplo, una ecuación cúbica la $\underline{ax}^3 + \underline{bx}^2 + \underline{cx} + \underline{d} = 0$, ya que su solución es imposible con ese condicionamiento, pero lo son $\underline{ax}^3 + \underline{bx}^2 = \underline{cx} + \underline{d}$ ó $\underline{ax}^3 + \underline{cx} + \underline{d} = \underline{bx}^2$. Un problema, que se sabía resolver entonces lo mismo que ahora, era transformar mediante un cambio de variable una ecuación cúbica en otra que careciese de término cuadrado. En estas condiciones, resolver la ecuación cúbica era saber resolver estrictamente estos tres tipos de ecuaciones:

$$x^3 + ax = b, \qquad x^3 = ax + b, \qquad x^3 + b = ax$$

En palabras: el cubo y la cosa igual al número, el cubo igual a la cosa y al número y el cubo y el número igual a la cosa.

Pues bien, parece claro que el primero que consiguió esta resolución fue Scipione dal Ferro, allá por 1515, siendo profesor de Matemáticas en Bolonia, pero no le dió publicidad, aunque era conocida de su discípulo Antonio Maria Fior y de su yerno Annibale della Nave, en cuyo poder quedó el manuscrito a su muerte, en 1526.

Es Fior quien, en 1535 y en un debate público, muy del gusto de la época, propone a Tartaglia unos treinta problemas que conducen a la ecuación cúbica. En estos desafíos no sólo se acreditaba la valía de los contendientes sino la excelencia de su escuela; por eso, quien encontraba un método para resolver ciertos problemas lo guardaba en secreto hasta poder publicarlo, erigiéndose en su autor. Tartaglia lo encontró: el mismo narra los apuros que le costó pero justamente la noche anterior a la terminación del plazo, y en sólo un par de horas, resolvió todos los problemas. Con justicia le corresponde, pues, también, como a dal Ferro, el título de descubridor de la solución de la ecuación cúbica.

En su Ars Magna cuenta todo esto así Cardano: "*En sus días Scipione dal Ferro, de Bolonia, resolvió el caso del cubo y la cosa igual a número, ciertamente un logro bello y admirable. Como tal arte sobrepasa toda humana sutileza y toda la perspicacia del talento de los mortales, y es un regalo verdaderamente celestial y un testimonio muy claro de la capacidad de la mente humana; quienquiera que lo asimile puede pensar que nada hay ya que no pueda entender. La emulación llevó a mi amigo Niccolo Tartaglia, de Brescia, que no quer-ía verse sobrepujado, a resolver el mismo caso cuando entró en discusión con Antonio María Fior, discípulo de dal Ferro, y, movido por mis muchas súplicas, me lo confió*". Más adelante dice también: "*El (Tartaglia) me la dió en respuesta a mis súplicas, aunque reteniendo la demostración. Armado de esta ayuda hice yo la demostración de varias maneras*".

Cardano reconoce, pues, la prioridad en la autoría de dal Ferro y de Tartaglia, aunque parece reclamar también para sí la originalidad de su demostración, una vez conocido el resultado. Este resultado lo explica así, vertido a nuestro lenguaje, en la ecuación que hoy escribimos $x^3 + ax = b$, donde a y b son la cosa y el número: El cubo del tercio de la cosa $[(a/3)^3]$ súmalo al cuadrado de la mitad del número $[(b/2)^2]$ y toma la raiz cuadrada de todo ello $[\sqrt{(a/3)^3 + (b/2)^2}]$. Repite esto y a uno de los dos añade la mitad del número que has elevado al cuadrado $[\sqrt{(a/3)^3 + (b/2)^2} + (b/2)]$ y del otro resta la mitad del mismo número $[\sqrt{(a/3)^3 + (b/2)^2} - (b/2)]$. Resta entonces la raiz cúbica del segundo de la raiz cúbica del primero y la diferencia es el valor de la cosa

$$\left[x = \sqrt[3]{\sqrt{(a/3)^3 + (b/2)^2} + (b/2)} - \sqrt[3]{\sqrt{(a/3)^3 + (b/2)^2} - (b/2}\right]$$

Es la que hoy solemos llamar fórmula de Cardano o de Tartaglia, más inteligible para nosotros que la expresión retórica con que Cardano la enuncia.

Esta publicación desata las furias de Tartaglia que se siente traicionado. Parece que él se reservaba la solución para publicarla en un libro que estaba preparando, quizá el General Trattato, y sólo cede ante la reiterada insistencia de Cardano confiándosela bajo promesa de guardar el secreto. Ferrari, discípulo de Cardano y que acompañó a éste en la entrevista celebrada con Tartaglia, niega la promesa del secreto y es el encargado de enzarzarse con su oponente en una feroz diatriba de réplicas y contraréplicas que duran hasta 1548, en que se retan a un combate verbal en Milán, donde, aunque no hay constancia de ello, parece que puede darse por perdedor a Tartaglia.

Muy probablemente su tartamudez, a la que debía el apodo, no le hacía muy competente para un debate oral; por otra parte, su deficiente instrucción había sido siempre aprovechada por Ferrari para contestarle en los carteles en la lengua culta, el latín, que Tartaglia desconocía. El caso es que aquellos tres años de violenta polémica, plagada de insultos, acusaciones e injurias en que aquellas gentes arriscadas y turbulentas se enredaron, se saldan con importantes ofertas a Ferrari de distintas universidades y con la pérdida por Tartaglia de su puesto en la de Brescia.

Ferrari aporta además a la discusión un nuevo y curioso argumento: el de no haber podido servirse Cardano de la solución que Tartaglia le había dado en unos versos, por lo que hubo de trasladarse a Bolonia donde della Nave le enseñó el original de dal Ferro. De este modo, afirma que la cita que sobre Tartaglia hace en su libro es un exceso de cortesía, ya que no pudo entender la solución que aquel le había proporcionado y en realidad la publicada por él procedía de dal Ferro.

Y es curioso tanto que Ferrari diga esto como que Cardano hubiera dicho, según hemos escrito, que Tartaglia le dió la solución sin demostrarla, cosa que él hizo. Porque esta solución, por lo que sabemos, narrada por Tartaglia en vienticinco versos, contiene todo el problema. Los nueve primeros versos se refieren al caso del cubo y la cosa igual al número, otros nueve al cubo igual a la cosa más el número, y los tres siguientes al cubo más el número igual a la cosa, que lo reduce al caso anterior de una forma no muy clara. Los cuatro versos finales los dedica a ufanarse muy merecidamente de su descubrimiento.

Vamos a ensayar la interpretación del escrito de Tartaglia para justificar lo que acabamos de decir. Traducidos a nuestro modo, los nueve primeros versos vienen a establecer: "*Cuando el cubo junto con las cosas se iguala a un número, se buscan otros dos números diferentes tales que su producto sea igual al tercio de las cosas al cubo; la diferencia de sus raíces cúbicas será la cosa (es decir, la solución)*". Esto, que no parece muy claro, da resuelto el problema. En efecto, se trata de encontrar dos números, $\underline{u}$ y $\underline{v}$, tales que $\underline{uv} = (a/3)^3$ y $\underline{x} = \sqrt[3]{\underline{u}} - \sqrt[3]{\underline{v}}$. Sustituyendo este valor de x en la ecuación $\underline{x}^3 + \underline{ax} = b$ y haciendo $\sqrt[3]{\underline{uv}} = a/3$, se obtiene

$$\underline{u} = \underline{v} + \underline{b}$$

luego,

$$\underline{uv} = \underline{v}^2 + \underline{bv} = a(/3)^3$$

ecuación de segundo grado en $\underline{v}$ cuya raiz positiva, única a considerar, es

$$\underline{v} = (\underline{b}/2) + \sqrt{(\underline{b}/2)^2 + (\underline{a}/3)^3}$$

de donde,

$$\underline{u} = \underline{v} + \underline{b} = (\underline{b}/2) + \sqrt{(\underline{b}/2)^2 + (\underline{a}/3)^3}$$

Ya tenemos así para $\underline{x} = \sqrt[3]{\underline{u}} - \sqrt[3]{\underline{v}}$ la fórmula que nos describía Cardano en un párrafo anterior.

Lo mismo ocurre en el segundo caso, $\underline{x}^3 = \underline{ax} + \underline{b}$ para el que da estas reglas: "... *harás dos partes de modo que una multiplicada por la otra produzca el cubo del tercio de las cosas, y de ellas tomarás las raíces cúbicas y su suma será tu solución*". Es decir, $\underline{x} = \sqrt[3]{\underline{u}} + \sqrt[3]{\underline{v}}$, donde $\underline{uv} = (\underline{a}/3)^3$. Haciendo como antes, saldría

$$\underline{x} = \sqrt[3]{(\underline{b}/2) + (\underline{b}/2)^2 - (\underline{a}/3)^3} + \sqrt[3]{(\underline{b}/2) - (\underline{b}/2)^2 - (\underline{a}/3)^3}$$

Posiblemente se atribuya Cardano la demostración porque no está estrictamente contenida en esa explicación y hacerla a partir de ella sin el ágil mecanismo algebraico que hoy usamos, sino a través de consideraciones de tipo geométrico, es tarea bastante ardua. Se puede advertir que el procedimiento aquí expuesto es el mismo que hemos seguido todos después, el mismo, si se quiere, que estudiábamos en el viejo y recordado libro de Rey Pastor. Con la ventaja en éste de que el problema es general y no hay que ceñirse a que los números que aparezcan hayan de ser positivos, por lo cual se obtiene una sola fórmula válida para todos los casos y no una para cada caso.

Lo que sí parece, a la vista de estos hechos, es que esta fórmula que suele llamarse de Cardano, de Tartaglia o de ambos, debería llamarse exclusivamente fórmula de Tartaglia y nunca de Cardano, lo cual propunga también el mismo Rey Pastor. Todavía más: algunos autores proponen que se la denomine "fórmula de dal Ferro", ya que éste fue el primero que se encontró la solución, lo que parece atestiguado por Cardano en su defensa, aún cuando esta solución haya permanecido oculta.

Haciéndolo así, y quitándole a Cardano el protagonismo de que ha venido gozando, es como si reparásemos una injusticia histórica y dejáramos amortiguada la terrible disputa que mantuvieron las primeras figuras del álgebra italiana del siglo XVI. ¿Tan importante era aquel descubrimiento como para organizar semejante pelea? No sé lo que el común de los hombres, acostumbrados a espectaculares inventos, pensaría hoy si se les dijera que todo surgió con ocasión del hallazgo de solución para la ecuación de tercer grado. Y, sin embargo, Bourbaki lo califica de descubrimiento sensacional.

Ciertamente así fue, y mucho más si lo sentimos encuadrado en el espíritu de la época. En pleno Renacimiento, cuando el propósito dominante es no sólo entender y absorber la información y los trabajos de los clásicos sino crear ideas nuevas para traspasar los límites alcanzados por ellos, he aquí que la matemática, fiel a su tiempo, puede desarrollar una teoría que supera los logros de los antiguos y de los árabes. Esta trifulca que hemos narrado, entre la anécdota y la historia, representa, pues, el mismo tipo de pasión que entonces se daba en todas las ramas del saber o del arte e, independientemente de su repercusión en la posterior evolución del álgebra, supone la inserción, que no siempre se hace explícita, de las ideas matemáticas en la historia del pensamiento y de la cultura.

POEMA PROBLEMATICO (o PROBLEMA POEMATICO)

(Desde Zaragoza nos llega la siguiente composición debida al brillante ingenio del ilustre catedrático de la Facultad de Ciencias de aquella Universidad, Rafael Rodríguez Vidal. El ha captado a la perfección el estilo de algunos de nuestros matemáticos del siglo XVII, que ponían en verso conocidas cuestiones, y ha enunciado así el clásico problema de los conejos y perdices, a la manera como Caramuel redactó, por ejemplo, el de los grifos).

Aunque es breve la vida del conejo
y un lustro hace dos siglos en su historia,
habrá por lustros conejil memoria
de lo ocurrido en el Molino Viejo,
cuando, como dirá doña Coneja,
bajó Diana a cazar en Fuente Vieja.

En pámpanos se escriban, si no en bronces,
con plumas de perdiz, si no buriles,
los nombres de las muchas que entre miles
dieron su vida por la Diva entonces,
plumadas y pilosas bestezuelas
blanco a sus tiros, blandas a sus muelas.

Ciento y veinte cabezas daba el cupo
de las piezas al cabo recogidas,
y de patas por siempre quietecidas
contó trescientas quien contarlas supo:
pues que Mercurio, terminado el día,
en contar y contar se entretenía.

De cuántos picos acalló la muerte,
ni de cuántas orejas sordecieron,
números no diré, que ociosos fueran
tras los que dijo ya mi canto fuerte:
que Minerva en la escuela dió manera
de que los pueda calcular cualquiera.

R.R.V.

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *

TENDER A INFINITO

Por Julio Fernández Biarge

INTRODUCCION

El infinito ha sido centro de permanente atención por parte de los matemáticos. En el número 7 de este Boletín, nuestro compañero Carballido hacía "Un Breve Recorrido Histórico" en torno al infinito. Esta palabra se usaba allí como atributo aplicable a ciertos conjuntos, en oposición a otros, que eran "finitos". No obstante, la mayor parte de las veces que un profesor de Matemáticas emplea la palabra "infinito", o escribe ∞, no lo hace con esa acepción, sino para decir que "x tiende a ∞" o que el límite de una sucesión es infinito, etc. Es claro que esta otra acepción de la palabra apenas tiene algo que ver con la primera, y es precisamente de la que nos vamos a ocupar aquí.

En las Matemáticas de Bachillerato, C.O.U., e incluso de los primeros cursos de algunas carreras universitarias, suele quedar suficientemente claro el significado de expresiones simbólicas, tales como:

$$\lim a_n = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 7, \qquad \lim_{x\to 7} f(x) = \infty, \qquad \text{etc.}$$

Estos significados se suelen definir en forma un tanto casuística para las expresiones en su totalidad, pero el significado de los símbolos individuales $+\infty$, $-\infty$, ∞, y sobre todo los $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$, e incluso $x \to 7$, quedan como partes de la notación, con sugerencias intuitivas claras, pero sin significado matemático preciso. ¿Qué es, en definitiva $+\infty$, ó $x \to \infty$? Desde luego, $+\infty$, $-\infty$ ó ∞ no son números, ni tienen las propiedades de éstos. A nivel elemental, ni siquiera se da una palabra que exprese un concepto general del cual sea casos particulares.

Hay algunos profesores partidarios de utilizar una llamada "ampliación de R" o de la recta real, con la adición de uno o de dos elementos nuevos, para ∞ ó para $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente, definiendo adecuadamente sus sistemas de entornos. Este modo de proceder da una cierta unidad a las nociones de límites finitos e infinitos de las funciones reales de una variable real, pero presenta ciertos inconvenientes, como por ejemplo: al definir la aplicación f hay que pronunciarse por los espacios en que ésta se ha definido, y por tanto, el uso del punto ∞ debería excluir el de los puntos $-\infty$ y $+\infty$, que son elementos de otro espacio, y viceversa; además, la generalización a R^n o a los números complejos, presenta dificultades; y, sobre todo, ese modo de proceder enmascara la naturaleza profunda del concepto de límite de una aplicación entre dos conjuntos X e Y, en el cual no interviene (si no es indirectamente) la naturaleza de espacio topológico de X, y sólo para el caso de elemento límite $\in$ Y, la de Y.

Conviene englobar los conceptos de $+\infty$, $-\infty$, ∞ (junto con otros) en uno más general con el que poder dar una definición única de límite, que abarque todas las que comúnmente se manejan.

Ya Rey Pastor, en sus "Elementos de Teoría de Funciones", en 1947, introdujo, para los estudiantes en lengua española, una definición general de límite, a través del concepto de "variables ordenadas", que era aplicable no sólo a todos los casos que se manejan habitualmente en las sucesiones reales y en las funciones reales de variable real, sino también para los límites de las funciones de partición que utilizaba para la defi-

nición de integral de Riemann. Su terminología ya no resulta acorde con la habitual de hoy día, pero los conceptos usados —que llevaban en germen el concepto general de límite de Moore-Smith— no han perdido su interés, a pesar de lo cual es frecuente verlos ignorados en textos actuales, tanto de Bachillerato como universitarios.

Desarrollando la idea de valerse de las "variables ordenadas", puede irse, en realidad, mucho más lejos, y ese camino es el que pretendemos esbozar a continuación. Partiremos de las nociones más básicas, aunque muchas de ellas serán bien conocidas por nuestros lectores.

RELACIONES DE ORDEN

Comenzaremos estableciendo el concepto de orden. Como es bien sabido, diremos que una relación binaria definida en un conjunto A y que representaremos con un signo arbitrario $\succeq$ (que escribiremos entre los elementos relacionados), es de orden, si cumple las condiciones:

$$\text{I)}\quad \forall a, b \in A \qquad \{a \succeq b \wedge b \succeq a\} \iff a = b$$

$$\text{II)}\quad \forall a, b, c \in A \qquad \{a \succeq b \wedge b \succeq c\} \iff a \succeq c$$

La primera equivale a las llamadas propiedades reflexiva y antisimétrica y la segunda a la transitiva.

No todas las relaciones de orden interesan en la teoría de límites, sino tan solo las filtrantes. La relación de orden $\succeq$ en A es filtrante si y solo si se cumple la condición:

$$\text{III)}\quad \forall a, b \in A, \quad \exists c \in A, \quad \{c \succeq a \wedge c \succeq b\}$$

es decir, dados dos elementos de A, siempre existe uno relacionado con ambos. Las relaciones de orden totales (en las que $\forall a, b \in A$, $\{a \succeq b \vee b \succeq a\}$) son evidentemente filtrantes, siempre.

Si $B \subset A$, una relación binaria de orden en A induce otra en B que evidentemente es también de orden, pero si la de A es filtrante, puede ocurrir que la inducida en B no lo sea. Toda relación de orden define, en el mismo conjunto, otra inversa, que se representa con el signo $\preceq$ simétrico del de la otra, $\succeq$, poniendo $a \preceq b \iff b \succeq a$. La inversa de una filtrante no tiene por qué serlo.

Un elemento u de A se llama último en la ordenación $\succeq$, si está relacionado con todos los de A (o sea si $\forall a \in A$, $u \succeq a$). El último puede existir o no, pero si existe, es único.

Designaremos con $\hat{A}$ el mismo conjunto A, si no hay último elemento, o el que resulta de A al excluirlo, si lo hay ($\hat{A} = A - \{u\}$).

Las ordenaciones con último elemento, son siempre filtrantes, pues en la condición III) se puede hacer c = u, pero pueden serlo en esta forma trivial, por lo que pueden no resultar útiles en la teoría de límites. Conviene, por ello definir este nuevo concepto: la relación de orden $\succeq$ en A es esencialmente filtrante si es filtrante sin último elemento, o si, existiendo el último, la relación de orden inducida en $\hat{A}$ es filtrante sin último elemento.

A veces resulta útil definir la relación binaria de orden estricto, $\succ$, correspondiente a una de orden $\succeq$, poniendo $a \succ b \iff \{a \neq b \wedge a \succeq b\}$. De acuerdo con nuestras definiciones, el orden estricto no es un orden.

Dada una relación de orden $\succeq$ en A, se llama sección estricta del elemento $a \in A$, al conjunto $S_a^{\succeq} = \{x \mid x \succ a\}$; si u es un último elemento, $S_u^{\succeq}$ es vacía. Dada una ordenación $\succeq$ de A, es útil definir el conjunto $\mathfrak{S}^{\succeq}$ de todas las secciones estrictas no vacías de A.

Es fácil probar que para que la ordenación $\succeq$ de A sea esencialmente filtrante es necesario y suficiente que se cumpla que: la intersección de dos elementos de $\mathfrak{S}^{\succeq}$ incluye siempre a un elemento de $\mathfrak{S}^{\succeq}$.

Antes de aplicar estos conceptos a la teoría general de límites, pondremos algunos ejemplos de ordenaciones esencialmente filtrantes, (nótese que sólo las 1) y 2) son además totales; en todas se incluye la igualdad, aunque no se diga explícitamente en palabras):

1) En el conjunto N de los números naturales, la desigualdad $\geq$ (no lo es, en cambio, la $\leq$).

2) En los conjuntos de números Z, Q, R, las desigualdades $\geq$ y $\leq$.

3) En el conjunto N, la relación $n \rceil m$ de "ser múltiplo de" (no lo es, en cambio, la $\lceil$ de "ser divisor de").

4) En los conjuntos Q, R, C (de los complejos) ó R^n, para cada uno de sus elementos, p, las $a \xrightarrow{p} b$ ("a está más lejos de p que b"), definida por

$$a \xrightarrow{p} b \iff \{|a-p| > |b-p| \vee a = b\}$$

(siendo $|u-v|$ la distancia entre u y v o valor absoluto o norma de su diferencia).

5) En los conjuntos Q, R, C ó R^n, para cada uno de sus elementos, p, las $a \xleftarrow{p} b$ ("a se acerca más a p que b"), dada por:

$$a \underset{-}{\overset{p}{\llcorner\!\!-}} b \iff \{|a-p| < |b-p| \vee a = b\}$$

(en cada una de éstas, p es el último elemento).

6) En los conjuntos Q, R, C ó R^n, para cada uno de sus elementos, p, las $a \underset{-}{\overset{(p)}{\llcorner\!\!-}} b$ ("a se acerca más a p que b, sin alcanzarlo"), definida por:

$$a \underset{-}{\overset{(p)}{\llcorner\!\!-}} b \iff \{0 < |a-p| < |b-p| \vee b = p \vee a = b\}$$

(en éstas no hay último elemento; todos están relacionados con p, pero p sólo consigo mismo).

7) En el conjunto Π de las particiones de un intervalo dado, la $\pi_1 \succeq \pi_2$ definida porque los puntos de separación de los subintervalos de π_2 lo son también de π_1 (π_1 posterior a π_2).

8) En el conjunto T de todos los triángulos (no degenerados) de un plano, la relación de inclusión $\supseteq$ ("incluye a"). No lo es la de "estar incluido en". Llamando P(t) y S(t) a los valores del perímetro y del área de $t \in T$, también las relaciones $\overset{P}{\succeq}$ y $\overset{S}{\succeq}$ definidas por $t_1 \overset{P}{\succeq} t_2 \iff \{P(t_1) > P(t_2) \vee t_1 = t_2\}$, y $t_1 \overset{S}{\succeq} t_2 \iff \{S(t_1) > S(t_2) \vee t_1 = t_2\}$.

9) En Q o en R, para cada elemento p, la relación $a \underset{-}{\overset{(p^+)}{\llcorner\!\!-}} b$ ("a se acerca más a p, por su derecha, que b") dada por:

$$a \underset{-}{\overset{(p^+)}{\llcorner\!\!-}} b \iff \{0 < b-p < a-p \vee b \leq p \vee a = b\}$$

Conviene familiarizarse con la naturaleza de las secciones y de los conjuntos σ correspondientes, antes de seguir adelante.

DIRECCIONES

Con las nociones anteriores sobre relaciones de orden, ya es sencillo definir la direcciones, cuyos casos particulares serán $+\infty$, $-\infty$, ∞, (p^+), etc. La idea es asociar, por ejemplo, el símbolo $+\infty$ con la relación de orden $\geq$ de N, Z, Q o R, el (p^+) con la definida en el ejemplo 9) en Q o R, etc. Efectivamente, así se hace, pero no siempre dos relaciones de orden distintas dan lugar a "direcciones" distintas. Definiremos la equivalencia de ordenaciones, para después definir las direcciones como las clases de equivalencia formadas.

Dos relaciones de orden $\overset{1}{\succeq}$ y $\overset{2}{\succeq}$ definidas en un conjunto A son equivalentes si en todo elemento de $\sigma^{\overset{1}{\geq}}$ está incluido alguno de los de $\sigma^{\overset{2}{\geq}}$, y en todo elemento de $\sigma^{\overset{2}{\geq}}$ está incluido alguno de $\sigma^{\overset{1}{\geq}}$.

Así por ejemplo, las distintas relaciones $\underset{-}{\overset{p}{\blacktriangleright\!\!-}}$ definidas en 4), que se obtienen para los distintos p (en Q, R, C o R^n), son equivalentes entre sí, como es fácil de probar.

Una dirección de un conjunto A es una clase de ordenaciones esencialmente filtrantes equivalentes. Una dirección se da siempre mediante una ordenación esencialmente filtrante "representante" de la clase. Las direcciones se representan con símbolos aceptados universalmente, cuando tienen suficiente interés. Un conjunto, con una de sus direcciones, forma un conjunto dirigido. Si el conjunto es A y el símbolo de la dirección δ, el conjunto dirigido se representa con (A, δ). Si x es el símbolo para designar la variable de dominio A, el conjunto dirigido se puede representar como variable dirigida, con la notación $x \to \delta$.

La ordenación $\geq$ del ejemplo 1) define la dirección $+\infty$ de N.

Las ordenaciones $\geq$ del ejemplo 2) definen las direcciones $+\infty$ de Z, Q y R y las $\leq$, las direcciones $-\infty$ de los mismos conjuntos de números.

La ordenación $\rceil$ de N define una dirección en N que no tiene asignado símbolo especial (y que no es la misma $+\infty$).

Las ordenaciones definidas en 4) para distintos valores de p, son equivalentes, y definen una sola dirección en cada uno de los conjuntos considerados, que en todos ellos se designa con ∞ (sin signo).

Las ordenaciones definidas en el ejemplo 5) en cada uno de esos conjuntos (en realidad, en cualquier espacio métrico) dan direcciones que designaremos provisionalmente con la notación $[p]$ (después suprimiremos los corchetes, y escribiremos simplemente p). Así se habla de la de la dirección $[p]$ (o hacia p) y de la variable dirigida $x \to [p]$.

Las definidas en el ejemplo 6) dan direcciones que se designan con (p) y así se habla de la dirección (p) (o "hacia p, sin alcanzarlo"), escribiéndose la variable dirigida $x \to (p)$. La mayor parte de los libros omiten los paréntesis, dando lugar a ambiguedades en relación con la dirección antes definida.

La $\succeq$ definida en Π (ejemplo 7), da una dirección que también suele representarse con ∞, y escribir $\pi \to \infty$.

Las direcciones definidas por las ordenaciones del ejemplo 8) no tienen símbolos propios; pueden usarse ∞, $\infty(P)$, $\infty(S)$, pero calro está ni el conjunto ni la dirección tienen nada que ver con las otras direcciones representadas con el símbolo ∞.

Para cada p perteneciente a Q o a R, la ordenación de 9) da lugar a la dirección (p^+) y a $x \to (p^+)$ (x tiende a p por la derecha, sin alcanzarlo). En forma parecida se define (p^-).

En el plano euclídeo, además de la dirección ∞, y de las $[p]$ y (p) (para cada punto escogido, p), pueden definirse muchísimas direcciones interesantes, mediante ordenaciones esencialmente filtrantes de sus puntos; por supuesto que las "direcciones" de las rectas nada tienen que ver con éstas; es otra acepción de la palabra.

DIRECCIONES LIMITES

Sea $f:X \to Y$ una función del conjunto X en el conjunto Y. Tomaremos la palabra función en un sentido más amplio que el de aplicación, admitiendo que pueda haber elementos de X que no tengan imagen en Y (los restantes, tendrán elemento imagen único). Supongamos que en X se ha definido una dirección δ_X mediante la ordenación esencialmente filtrante $\overset{X}{\succeq}$. Diremos que la función f está definida en δ_X si está definida en todos los puntos de una cierta sección de la ordenación $\overset{X}{\succeq}$. (Es trivial la prueba de que esta definición para la dirección δ_X, no depende de la elección de la ordenación representante $\overset{X}{\succeq}$). Por ejemplo, la función $\sqrt{x}$ no está definida en la dirección (0) pero si lo está en la (0^+) y no lo está en la ∞, pero sí en la $+\infty$.

Supongamos que en X se ha definido la dirección δ_X mediante $\overset{X}{\succeq}$ y que $f:X \to Y$ es una función definida en δ_X. Supongamos también que en Y se ha definido otra dirección δ_Y mediante la ordenación $\overset{Y}{\succeq}$. Daremos la siguiente:

Definición: Diremos que δ_Y es una dirección límite de la aplicación f para la dirección δ_X de X, si en todo elemento de $\mathfrak{S}^{\overset{Y}{\succeq}}$ está incluida la imagen en f de algún elemento de $\mathfrak{S}^{\overset{X}{\succeq}}$.

En símbolos, si y solo si:

$$\forall b \in \hat{Y}, \quad \exists a \in \hat{X}, \quad f(S_a^{\overset{X}{\succeq}}) \subseteq S_b^{\overset{Y}{\succeq}}$$

Debe advertirse que el concepto definido exige que f esté definida en la dirección δ_x. También debe notarse que, puesto que ese concepto se refiere a direcciones, y en su definición se usan las ordenaciones que las definen, para que esa definición sea aceptable, se ha de probar que la conclusión es independiente de las ordenaciones representantes escogidas, pero ello es muy simple, y omitiremos la prueba.

La notación habitualmente adoptada para expresar esta relación entre las direcciónes δ_x y δ_y a través de la función f es como todos saben

$$\lim_{x \to \delta_x} f(x) = \delta_y$$

Pero debe cuidarse de no interpretarla como una igualdad, ya que lo que se tomaría por el primer miembro sería una expresión ambigua (ya que distintas direcciones pueden ser límites de f para δ_x, por lo que en la definición se dijo una y no la). En realidad se trata de una notación como la usual $12 = \dot{3}$, en la que es ambiguo $\dot{3}$, por lo que no debe ser considerada una igualdad, sino una relación binaria de símbolo $= \dot{}$, o sea $12 \boxed{= \dot{}}3$, (que es preferible escribir $12 \rceil 3$). Análogamente, para cada función f, la notación anterior establece una relación entre δ_x y δ_y mediante el símbolo $\boxed{\lim\limits_{x\to} f(x) =}$.

Por ejemplo, la expresión $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ es correcta, (siendo $x \to x^2$ aplicación de R en R), pues dada una sección de $\geq$ cualquiera, $S_b^{\geq}$, siempre hay una sección $S_a^{\leq}$ formada por números cuyos cuadrados pertenecen a $S_b^{\geq}$ (basta tomar $a < -\sqrt{|b|}$). Pero nótese que también es correcta $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \infty$ (sin signo), confirmando la ambigüedad del símbolo a la izquierda del signo = .

Con estas notaciones, puede escribirse, por ejemplo:

$$\lim_{x \to (0)} \frac{\text{sen } x}{x} = [1], \quad \lim_{x \to (0)} \frac{\text{sen } x}{x} = (1^-), \quad \lim_{x \to (0)} \frac{\text{sen } x}{x} = (1)$$

pero no sería lícito escribir esas expresiones poniendo $x \to 0$ en lugar de $x \to (0)$, ya que la expresión $\frac{\text{sen } x}{x}$ no está definida para $x = 0$. También puede escribirse,

$$\lim_{x \to (0)} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \to (0^+)} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = (0), \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = [0]$$

pero no poner $x \to 0$ en lugar de $x \to (0)$. Igualmente, en relación con el ejemplo 8) anterior, puede ponerse $\lim\limits_{t \to \infty(S)} P(t) = +\infty$, y en cambio, no es cierto que sea $\lim\limits_{t \to \infty(P)} S(t) = +\infty$.

Conviene resaltar que el anterior concepto de dirección límite es totalmente ajeno a la posible estructura topológica de los conjuntos X e Y, y está relacionado exclusivamente con estructuras de orden. Solo cuando se desea llegar a la definición de elemento límite, hay que recurrir a la topologoía y ésto tan sólo por lo que se refiere al conjunto Y (no al X).

ELEMENTOS LIMITE

En todo espacio métrico, E, definido mediante la distancia $d: E \times E \to R$, para cada elemento $p \in E$ se puede definir una dirección $[p]$, (al igual que se hizo en el ejemplo 5), mediante la ordenación $\underline{\llcorner p}$ dada por

$$\forall a,b \in E, \qquad a \underline{\llcorner p}\, b \iff \{d(a,p) < d(b,p) \vee a = b\}$$

Si f es una función $f: X \to E$, definida en una dirección δ, dada en X, podemos dar la siguiente:

Definición: Se dice que el elemento $p \in E$ es límite de la función $f:X \to E$ para la dirección δ de X (o sea cuando $x \to \delta$) si $[p]$ es una dirección límite de f en esa dirección. Se escribe entonces:

$$\lim_{x \to \delta} f(x) = p$$

Como esto equivale a poner tras el signo = la dirección $[p]$, no hay confusión si para representar esta dirección se escribe simplemente p, suprimiendo los corchetes, como ya se anunció.

Para los espacios métricos, el concepto de elemento límite queda así como un caso particular del concepto de dirección límite, habiéndose empleado la estructura del espacio métrico de E tan sólo para definir la dirección $[p]$. Es notable que en la mayor parte de los textos utilizados se pase por alto este hecho y se den algunas definiciones para las direcciones límites más usadas, tras haber estudiado directamente el concepto de elemento límite.

Las propiedades de los espacios métricos permiten demostrar fácilmente la unicidad del elemento límite, cuando éste existe. Esto elimina la ambigüedad del símbolo que precede al signo =, en la notación anterior, cuando se habla exclusivamente de elementos límite, y permite volver a considerar esa notación como una igualdad propiamente dicha.

Si E es un espacio topológico que no se ha definido a través de una distancia, la definición de elemento límite ha de modificarse ligeramente, al no ser fácil construir la dirección $[p]$. Esto se obvia, considerando una base cualquiera de la familia de entornos del elemento p, que designaremos con $\mathcal{F}_p$ (y que puede ser la propia familia de entornos), y estableciendo la

Definición: Se dice que el elemento p del espacio topológico E es límite de la función $f:X \to E$ para la dirección δ de X (en la que está definida) si en todo elemento de $\mathcal{F}_p$ está incluida la imagen en f de algún elemento de $\mathfrak{S}^{\succeq}$ (donde $\succeq$ es la ordenación con al que se definió δ).

La notación empleada es la misma que para los espacios métricos. Es inmediato que la definición dada para éstos es un caso particular de esta última definición, ya que el conjunto de las secciónes $\mathfrak{S}^{\underline{\iota p}}$ es justamente el conjunto de las bolas de centro en p, que se toma como base de la familia de entornos para definir la estructura topológica del espacio métrico.

En el caso de espacios topológicos en general, la unicidad del elemento límite solo puede probarse si se cumple el axioma de separación.

COMENTARIOS

No se comprende bien cómo tantos textos de introducción a las Matemáticas universitarias retocan y amplían a cada paso el concepto de límite, para dar cabida a los límites infinitos, o cuando la variable independiente tiende a infinito, o a los laterales, o a los de varias variables independientes, o a los de las funciones de partición, o a los complejos o a los vectoriales, etc., en lugar de establecer una definición general de límite que da cuenta de la unidad conceptual que hay en todo ello; ese modo de proceder, además, aunque resulta riguroso en cada momento, oculta el significado preciso de las locuciones tales como "cuando x tiende a $+\infty$", si no es formando parte de un enunciado completo acerca de un límite.

Algunos textos descuidan las consideraciones acerca del concepto que hemos tratado de funciones "definidas en una dirección", hablando, en la teoría, de aplicaciones, aunque en los ejemplos se utilicen después funciones que no lo son. También es frecuente omitir la distinción entre $x \to (p)$ y $x \to p$ (que inicialmente escribimos como $x \to [p]$), dando lugar a imprecisiones que sólo el buen sentido del lector puede subsanar.

Todo ello está motivado, entre otras causas, por no haber encontrado un término adecuado y ampliamente aceptado para el concepto que nosotros hemos llamado <u>dirección</u>, aunque son bastantes los autores que hablan de <u>conjuntos dirigidos</u> (y entonces parece natural que aquello que convierte a un conjunto en un conjunto dirigido, se llame una dirección).

Es muy frecuente también el insistir en utilizar las características topológicas del conjunto X para definir los límites de una función $f: X \to Y$, enmascarando así la verdadera naturaleza del concepto; en esto caen con frecuencia los partidarios de utilizar las ampliaciones de R con elementos del infinito (sin que por ello falten al rigor en sus deducciones).

Son muchos también los textos que, tras una sucinta exposición sobre relaciones de orden (cuya utilidad directa es indiscutible) introducen directamente la definición de límite de Moore-Smith. Una exposición más profunda y bella se consigue utilizando los <u>**filtros**</u>. Puede verse una introducción muy breve y clara en el librito de R. Faure, K. Kaufmann y M. Denis-Papin "Mathematiques Nouvelles I" (Dunod, París, 1964), aunque allí no se trata de direcciones.

En la Enseñanza a nivel de Bachillerato, no siempre es conveniente presentar los nuevos conceptos con la máxima generalidad; es preferible a veces comenzar con casos particulares o definiciones restringidas, que tengan gran apoyo intuitivo;

se presenta así el problema de decidir hasta qué punto la visión unificadora y clarificadora del concepto de límite que hemos presentado, debe tener repercusión en la metodología de la enseñanza de las Matemáticas Elementales. Sólo las experiencias didácticas pueden resolverlo. En cualquier caso, no cabe duda de que una mayor claridad y profundidad conceptual en los profesores debe contribuir favorablemente a su labor docente a cualquier nivel. En los primeros cursos universitarios, en cambio, parece inexcusable el que se suministre a los alumnos una base teórica potente y profunda, acerca de conceptos tan importantes como el de límite, sobre todo teniendo en cuenta que la preparación previa necesaria para establecerlos es muy breve, como hemos visto, y además resulta útil, a la vez, para otras aplicaciones.

SOBRE ORDENAMIENTOS DE RECTAS EN EL PLANO

Por Luis Villacorta Mas
Instituto de Bachillerato de Vicálvaro

Es difícil mostrar a los alumnos de bachillerato que la matemática es una ciencia viva. Pero, no por esta gran dificultad, tenemos que sucumbir ante la tarea de ayudarles a apreciar su vitalidad. Es bueno hablarles sobre cuestiones matemáticas, relativamente recientes, y de algunos problemas no resueltos todavía y que ocupen la atención de los investigadores.

De acuerdo con lo anterior, presento a continuación algunas cuestiones sobre ordenamiento de rectas en el plano, basadas en el trabajo "Arrangements and spreads", de B. Grünbaum.

Con distinto énfasis, los ordenamientos de rectas han sido estudiados desde Steiner (1826), von Staud (1847), Schläfi (1852), Wiener (1984) y Sylvester (1867).

El estudio de los ordenamientos de rectas se puede realizar en el plano Euclídeo E^2, pero, por motivos de simplicidad, es conveniente hacerlo en el plano proyectivo, es decir, el plano Euclídeo ampliado con la recta en el infinito. La introducción de esta noción, en geometría es debida a Johan Kepler (1571-1630), pero fue Gerard Desargues (1593-1662) quien, en el tratado de las secciones cónicas, usó sistemáticamente esta idea.

Sea una esfera de centro O y un plano π (figura 1). A cada punto P de π le corresponde una recta OP que corta a la esfera en dos puntos P' y P" diametralmente opuestos (antípodas).

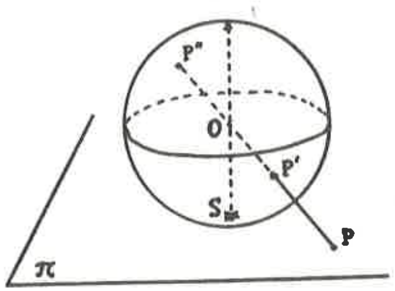


FIGURA 1

A cada recta r de π corresponde un plano Or que pasa por ella y el punto O. Este plano corta a la esfera en un círculo máximo. Y, al revés, a cada círculo máximo de la esfera le corresponde una recta del plano π, a excepción del ecuador (círculo máximo cuyo plano es paralelo a π). Esta excepción se elimina añadiendo al plano euclídeo una recta en el infinito (que representa al ecuador), con todos los puntos en el infinito que representan parejas de puntos antípodas en el ecuador. Así, todas las rectas paralelas en el plano a una recta dada contienen el mismo punto en el infinito, pero las rectas que tienen direcciones distintas contienen puntos en el infinito diferentes, todos sobre la misma recta en el infinito.

Al plano ampliado con la recta en el infinito y tratada ésta como cualquier otra recta se le llama plano proyectivo.

En consecuencia, dos rectas cualesquiera del plano proyectivo se cortan en un punto. Los puntos del plano proyectivo están en correspondencia de uno a dos con los puntos de la esfera. El plano proyectivo se descompone. por medio de tres rectas AB, BC, CA, en cuatro regiones triángulares. Una de ellas es el triángulo ABC, las otras tres son las señaladas en la figura 2 por α, β, γ (en la esfera no tenemos cuatro regiones, tenemos ocho).

El propósito de estudiar los ordenamientos de rectas en el plano proyectivo es, entre otros, eliminar casos enojosos surgidos de la posibilidad de que las rectas sean paralelas o secantes.

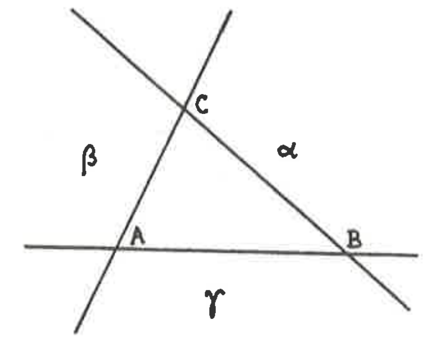


FIGURA 2

Designaremos en lo sucesivo con P el plano proyectivo. Entenderemos por un ordenamiento O de rectas a una familia finita de $n = n(O)$ rectas R_1, R_2, $R_3, \ldots, R_n$ en el plano P. Consideraremos siempre $n \geq 3$ y también salvo que se exprese lo contrario, prescindiremos de los ordenamientos, que llamaremos triviales, en que hay un punto común a todas ellas. Llamaremos ordenamiento simple a aquel en que no existe ningún punto que pertenezca a más de dos rectas. La figura 3 muestra dos ordenamientos de cuatro rectas, el O es simple y O' no.

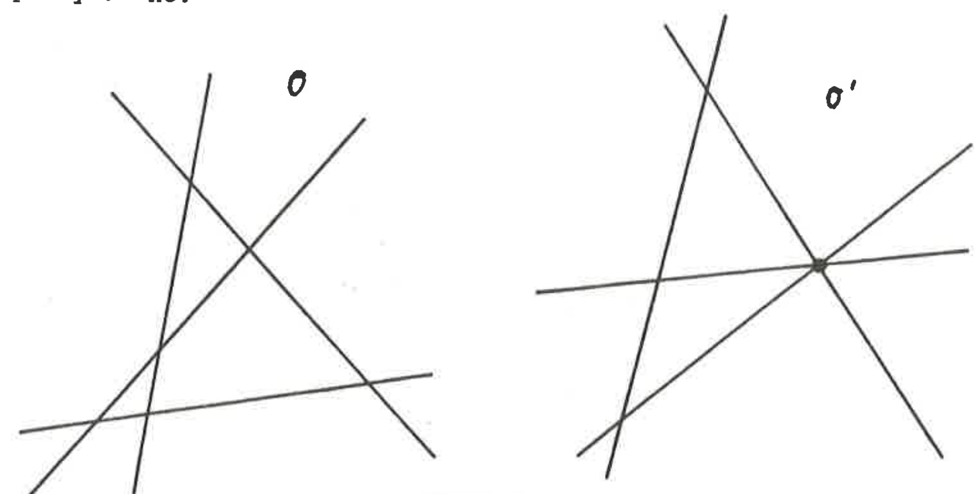


FIGURA 3

Con un ordenamiento O hay asociado un complejo de regiones en que las rectas de O descomponen al plano P. Los vértices, lados y regiones (o polígonos) de este complejo diremos también que pertenecen al ordenamiento, y su número los designaremos por $n_0(O)$, $n_1(O)$, $n_2(O)$ respectivamente. Así, por ejemplo, en la figura 3, es:

$n_0(O) = 6; \quad n_1(O) = 12; \quad n_2(O) = 7$

$n_0(O') = 4; \quad n_1(O') = 9; \quad n_3(O') = 6$

Diremos que los ordenamientos son isomorfos sí y solo sí existe una correspondencia uno a uno entre los vértices, lados y regiones de un ordenamiento y los vértices, lados y regiones del otro que preserve la incidencia. Así, por ejemplo, los ordenamientos de la figura 4 son isomorfos. Cada ordenamiento y los infinitos ordenamientos isomorfos a él forman lo que llamaremos un tipo isomorfo de ordenamiento. Si todos los polígonos de un ordenamiento son triángulos le llamaremos a él y a todos los de su tipo, simplicial.

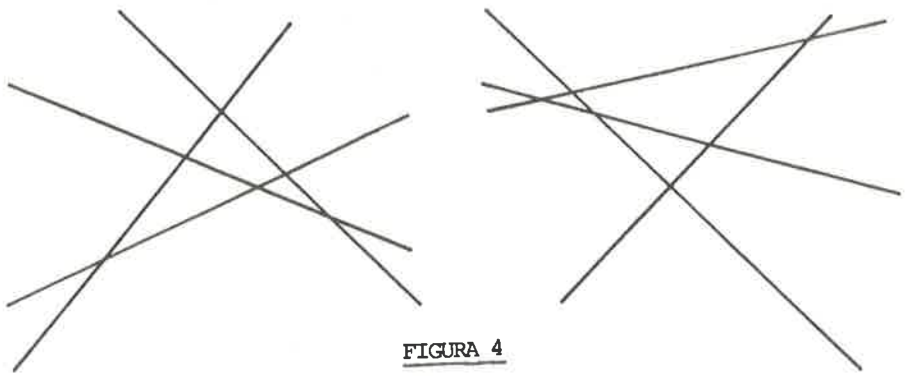
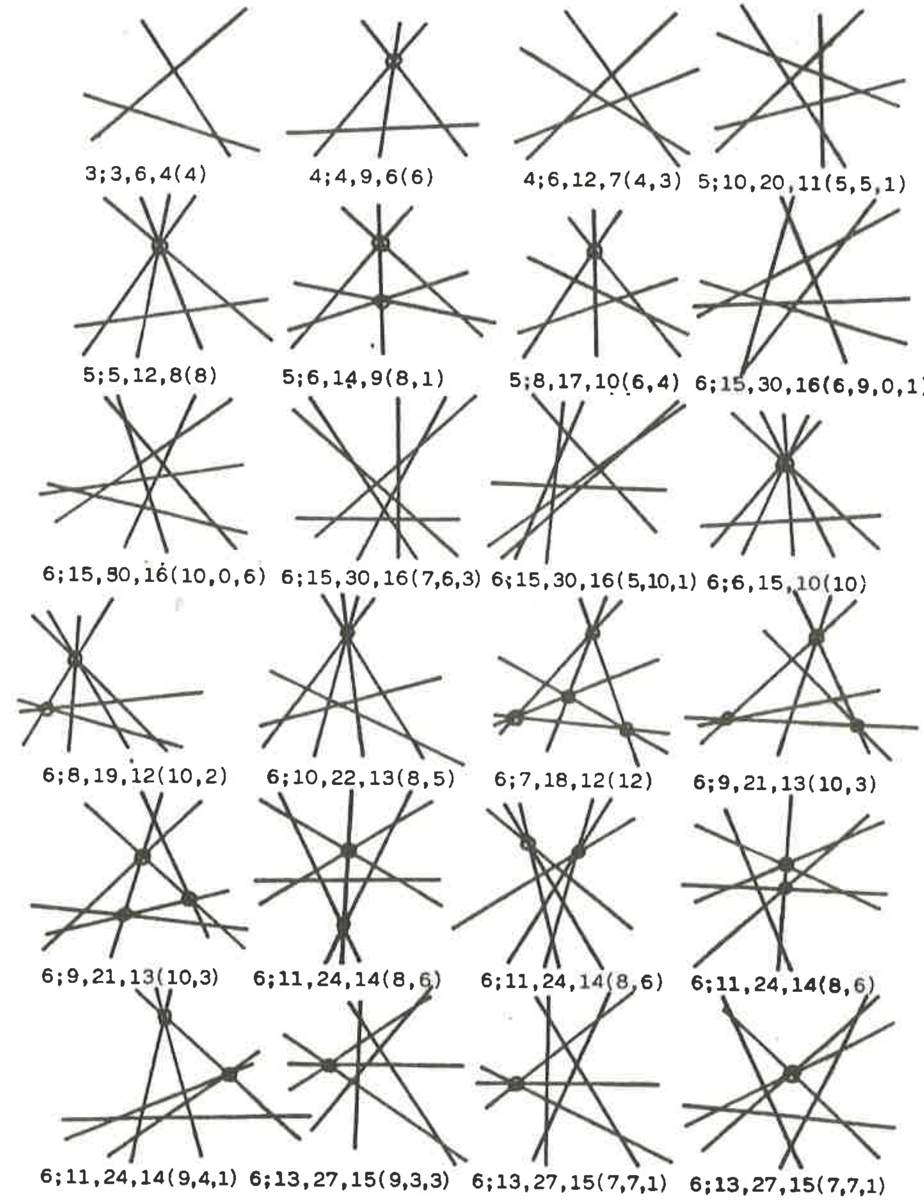


FIGURA 4

Uno de los primeros problemas relacionados con los ordenamientos es determinar el número de tipos de ordenamientos, ordenamientos simples, o simpliciales de n rectas, que designaremos respectivamente por $c(n)$, $c^S(n)$ y $c^\Delta(n)$. Se conocen unos pocos resultados de estos números, son:

1) $c(3) = 1; \quad c(4) = 2; \quad c(5) = 4; \quad c(6) = 17.$

En la figura 5 están representados todos los tipos con $n \leq 6$ que son conocidos.



Notas: - Para cada figura se da: n ; $n_o, n_1, n_2(p_3, p_4, p_5, \ldots)$

- Los vértices que pertenecen a 3 o mas rectas están indicados por pequeños círculos.

FIGURA 5

2) $c^s(3) = c^s(4) = c^s(5) = 1$; $c^s(6) = 4$;

$c^s(7) = 11$

CONJETURA $1^{\underline{a}}$

$c^s(8) = 135$

3) $c^\Delta(3) = c^\Delta(4) = c^\Delta(5) = 1$

$c^\Delta(6) = c^\Delta(7) = c^\Delta(8) = c^\Delta(9) = c^\Delta(11) = 2$

$c^\Delta(10) = c^\Delta(12) = 4$

$c^\Delta(13) = c^\Delta(14) = 5$

$c^\Delta(15) = 6$

En la figura 6 están representados los ordenamientos simpliciales con 9 rectas a lo más.

CONJETURA $2^{\underline{a}}$

Para $n \geq 38$ se tiene:

$$c^\Delta(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 0,\ 1,\ 2 \mod (4) \\ 1 & \text{si } n \equiv 3 \mod (4) \end{cases}$$

Son conocidas tres familias infinitas de ordenamientos simpliciales, que son:

a) $N(n)$, $n \geq 3$, consistente en $n-1$ rectas con un punto común y otra recta que no pasa por ese punto.

b) El ordenamiento regular $R(2k)$, $k \geq 3$, consistente en k rectas determinando los lados de un k-gono regular en el plano euclídeo y los k ejes de simetría del k-gono.

c) El ordenamiento regular $R(4m+1)$, $m \geq 2$, consistente en $4m$ rectas del $R(4m)$ junto con la recta del infinito.

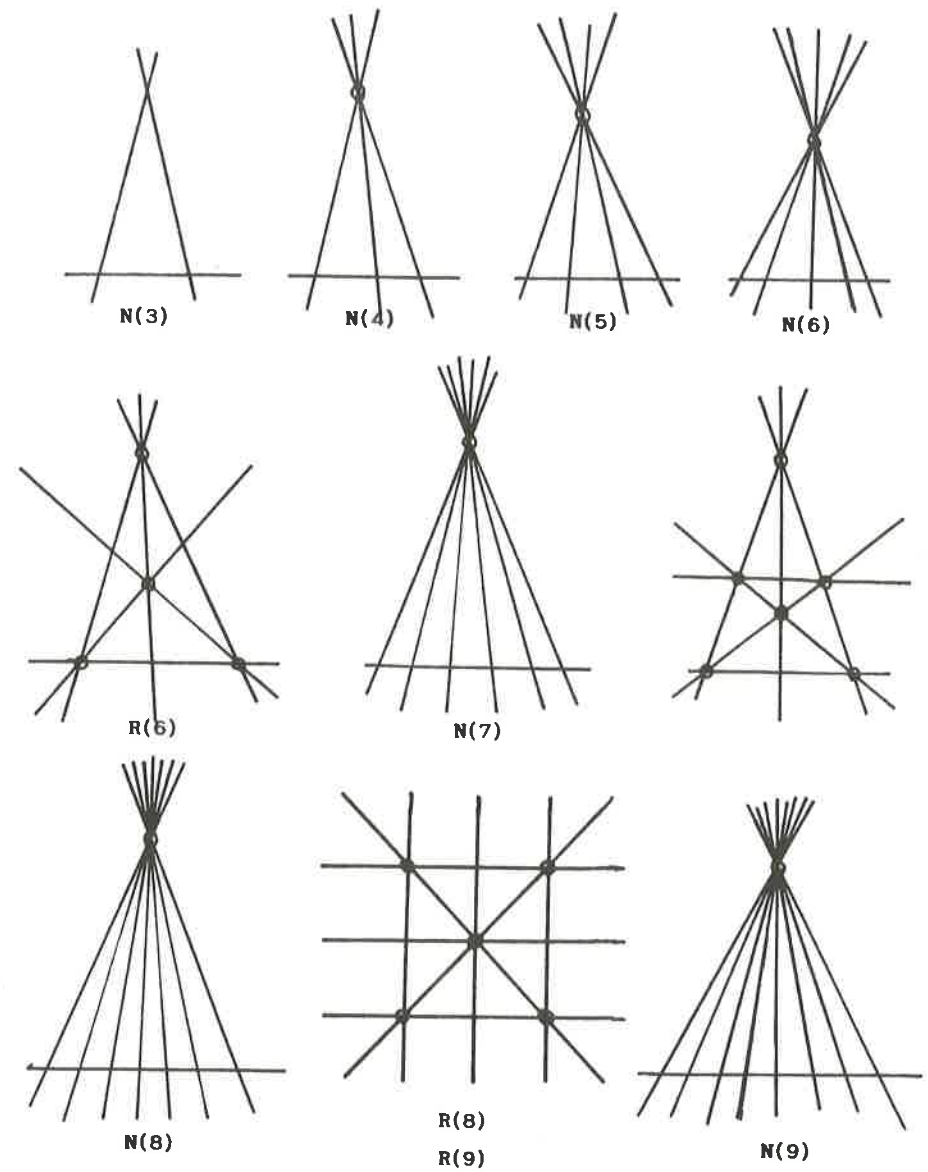


FIGURA 6

4) $n_0(\mathcal{O}) - n_1(\mathcal{O}) + n_2(\mathcal{O}) = 1$ (1)

Veámoslo por inducción. Es fácil observar que la relación (1) es cierta cuando $n(\mathcal{O}) = 3$ y $n(\mathcal{O}) = 4$. Supongamos que es cierta para $n(\mathcal{O}) = h$. Añadamos una recta R_{h+1} al ordenamiento convirtiéndose en el ordenamiento $\mathcal{O}'$. Supongamos que en la recta R_{h+1} se encuentran k vértices $2 \leq k \leq h$, de los cuales son nuevos vértices k'.

En la recta R_{h+1} aparecen k lados nuevos, y por cada vértice nuevo en las otras rectas aparece un lado nuevo, luego:

$$n_1(\mathcal{O}') = k + k' + n_1(\mathcal{O})$$

Por otra parte, la recta R_{h+1} añade tantas caras como lados aparecen en ella, luego:

$$n_2(\mathcal{O}') = k + n_2(\mathcal{O})$$

Y se tiene

$$n_0(\mathcal{O}') = k' + n_0(\mathcal{O})$$

Por tanto,

$$n_0(\mathcal{O}') - n_1(\mathcal{O}') + n_2(\mathcal{O}') = n_0(\mathcal{O}) + k' - n_1(\mathcal{O}) - k - k' + n_2(\mathcal{O}) + k = 1$$

En cuanto al número de vértices que puede aparecer en un ordenamiento se tiene:

5) Para cada ordenamiento $\mathcal{O}$ con $n(\mathcal{O}) = n$ se verifica:

$$n \leq n_0(\mathcal{O}) \leq \binom{n}{2}$$

La igualdad derecha se verifica sí y solo sí el ordenamiento es simple, y la igualdad de la izquierda se verifica sí y solo sí el ordenamiento es N(n).

La afirmación que corresponde a la cota superior es trivial, la concerniente a la cota inferior ya no es tan inmediata. La siguiente prueba es debida a Basterfield-Kelly (1968).

Sean $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$, rectas y supongamos que determinan $V_1, V_2, \ldots, V_{n_0}$ vértices $n_0 < n$. Para cada vértice V_j sea $r(V_j)$ el número de rectas que pasan por V_j, y para cada recta R_k sea $v(R_k)$ el número de vértices que están en R_k. Observamos que si $V_j \notin R_k$ entonces $r(V_j) \leq v(R_k)$ ya que cada recta que pasa por V_j corta a R_k. Se tiene:

$$n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n_0 - v(R_k)}{n_0 - v(R_k)} = \sum_{\substack{j,k \\ V_j \cap R_k = \emptyset}} \frac{1}{n_0 - v(R_k)} \geq \sum_{\substack{j,k \\ V_j \cap R_k = \emptyset}} \frac{1}{n_0 - r(V_j)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_0} \frac{n - r(V_j)}{n_0 - r(V_j)} > \sum_{j=1}^{n_0} \frac{n}{n_0} = n$$

Por tanto, la contradicción nos muestra que $n \leq n_0(\mathcal{O})$.

El conjunto $(n(\mathcal{O}), n_0(\mathcal{O}))$ no ha sido determinado completamente, algunos resultados son conocidos como, por ejemplo, que los valores $n_0 = \binom{n}{2} - 1$ y $n_0 = \binom{n}{2} - 3$ son imposibles para todo n.

En relación al número de lados que pueden aparecer en un ordenamiento $\mathcal{O}$ se tiene:

6) Cada ordenamiento $\mathcal{O}$ verifica:

$$2n(\mathcal{O}) - 2 \leq n_2(\mathcal{O}) \leq \binom{n(\mathcal{O})}{2} + 1$$

La igualdad izquierda se verifica sí y solo sí $\mathcal{O}$ es $N(n)$; la igualdad derecha se verifica sí y solo sí $\mathcal{O}$ es simple.

Se sigue la cota superior de observar el hecho de que el número de regiones no decrece si las rectas del ordenamiento se someten a pequeñas perturbaciones, hasta transformar el ordenamiento en un ordenamiento simple. En un ordenamiento simple y solo en él se tiene que $n_2 = \binom{n}{2} + 1$ (fácilmente se ve por inducción).

La cota inferior $2n - 2 \leq n_2$ se ve también por inducción. Se comprueba que es cierto para $n = 3,4$. Supongamos que es cierto para $n = h$. Sea un ordenamiento $\mathcal{O}$ tal que $n(\mathcal{O}) = h + 1$. Sea R_j una recta de $\mathcal{O}$ tal que las h rectas restantes del ordenamiento forman un ordenamiento no trivial $\mathcal{O}'$, entonces $n_2(\mathcal{O}') \geq 2h - 2$.

La recta R_j divide, por lo menos, dos regiones de $\mathcal{O}'$, entonces

$$n_2(\mathcal{O}) \geq 2 + n_2(\mathcal{O}') \geq 2(h+1) - 2$$

La caracterización de los casos de igualdad se comprueba también por inducción.

Parecería deseable que análogos resultados al anterior se verificasen en relación con los números $n(\mathcal{O})$ y $n_1(\mathcal{O})$, sin embargo, esta cuestión no parece que haya sido tratada en la literatura. Teniendo en cuenta las desigualdades anteriores y la relación de Euler podemos deducir:

7) Cada ordenamiento $\mathcal{O}$ verifica:

$$3n(\mathcal{O}) - 3 \leq n_1(\mathcal{O}) \leq 2\binom{n(\mathcal{O})}{2}$$

La igualdad izquierda se verifica sí y solo sí $\mathcal{O}$ es $N(n)$; la igualdad derecha se verifica sí y solo sí $\mathcal{O}$ es un ordenamiento simple.

Llamemos $p_j(\mathcal{O})$ el número de j-gonos que determina el ordenamiento $\mathcal{O}$. Es claro que

$$n_2(\mathcal{O}) = \sum_{j \geq 3} p_j(\mathcal{O})$$

Existe alguna relación entre los números $n(\mathcal{O})$ y $p_3(\mathcal{O})$, pero se está muy lejos de comprender con detalle esta situación. Levi, en 1926, dio el siguiente resultado:

8) Cada ordenamiento no trivial $\mathcal{O}$ verifica:

$$n(\mathcal{O}) \leq p_3(\mathcal{O})$$

Demostración.- Si $\mathcal{O}$ es $N(n)$ entonces $p_3(\mathcal{O}) = n_2(\mathcal{O}) = 2n(\mathcal{O}) - 2 > n(\mathcal{O})$; por tanto supongamos que $\mathcal{O}$ no es $N(n)$ y que $n(\mathcal{O}) = n > 3$. Sea R cualquier recta de $\mathcal{O}$; consideremos R como la recta del infinito y designemos por V al conjunto de todos los vértices de $\mathcal{O}$ los cuales pertenecen al plano afín resultante. Entonces la envolvente convexa de V es un polígono con al menos tres vértices v_1, v_2, v_3,... que son del ordenamiento $\mathcal{O}$. Las rectas de $\mathcal{O}$ que pasan por v_j determinan al menos un ángulo cuyos lados no contienen otros vértices del conjunto V. En el ordenamiento $\mathcal{O}$, estos ángulos corresponden a regiones triangulares; por tanto R (y cada recta de $\mathcal{O}$) contiene lados de al menos 3 regiones triangulares de $\mathcal{O}$. Por tanto, el número de incidencias de rectas de $\mathcal{O}$ y triángulos de $\mathcal{O}$ es por lo menos 3n, luego $p_3 \geq n$.

El resultado anterior ya había sido probado para ordenamientos simples por Eberhard en 1890, que también observó que la igualdad puede producirse para cada $n \geq 4$, y que para cada $n \geq 6$ existen varios ordenamientos no isomorfos con $p_3 = n$.

CONJETURA 3ª

Si $n(\mathcal{O}) = p_3(\mathcal{O})$ entonces $\mathcal{O}$ es un ordenamiento simple.

CONJETURA 4ª

Si O no es N(n), entonces para cada recta R de O hay por lo menos n-3 triángulos de O los cuales no tienen lados en R.

La validez de esta última conjetura fue realizada por Roberts en 1889 para ordenamientos simples, pero con una demostración poco convincente.

Todo lo anterior pretende ser una pequeña muestra de cuestiones de matemática elemental abiertas hasta tiempos recientes o que aún permanecen abiertas.

REFERENCIAS

B. Grünbaum.- "Arrangements and spreads", American Mathematical Society. Providence. 1972.

J.G. Basterfield and L.M. Kelly.- "A Characterization of Sets of n Points which Determine n Hyperplanes". Proc. Cambridge Phil.Soc. 64. 1968.

MEDITACION SOBRE EL PARAMETRO

Recomendable parece la lectura del periódico. Si con ella no llega uno a ilustrarse, al menos esa deficiencia puede movernos a realizar hondas y provechosas reflexiones. Y así observamos que desde hace algún tiempo se habla mucho de "parámetros": unas veces nos los endilgan a placer periodistas y políticos; otras, son algunos comentaristas que se quejan de ver tan repetidamente mal empleada esa palabra. Para variar, también se encuentra uno con "variables" y con "coordenadas". Está muy matematizada la pobre prensa.

Por poner un ejemplo, véase lo que dice un lector, en reciente carta sobre el problema del paro, al diario Ya (25.3.1986): *"... Por lo visto, tal como ellos enfocan el problema, estamos ante una función con asíntota horizontal, luego o se cambia radicalmente un montón de eso que ellos llaman parámetros -desde luego sin saber lo que dicen- o el problema no tiene solución ni siquiera en el infinito".*

¿Será verdad que no saben lo que dicen? Poco después (9.7.1986) escribe Pedro Altares en Diario de Navarra: *"Continuidad y silencio son, pues, los parámetros complementarios de un Partido Socialista que sabe que tiene por delante mucho tiempo para consolidar la reforma".* Pues no, efectivamente, no me suenan esos parámetros que, por si fuera poco, encima son complementarios. ¿Por qué se habrá agarrado a esa palabra, parámetros, si tiene para elegir tantas otras, mucho más sencillas, familiares y correctas? Seguramente la habrá encontrado más elegante y "moderna": o sea que no es más que una cursilada.

Por algo escribe en ABC (29.6.1985) uno de sus colaboradores, que firma "Tamarón", un pequeño artículo titulado Cada loco con su tema, en el que arremete contra el uso sin sentido de determinadas palabras:

"Parámetros.- Es la tema preferida, el fetiche más milagrero de los formadores de opinión. No quiere decir nada en absoluto. Nada. O todo, según el tono de voz o la intención íntima del que la usa. Intención que no hay por qué manifestar. Es un simple ruído, o garabato escrito. Se comprende que a los que viven de la-ambigüedad les guste más que a un tonto un látigo. El Diccionario (de la Academia de la Lengua) dice que parámetro es la "línea constante e invariable que entra en la ecuación de algunas curvas, y muy señaladamente en la de la parábola". Como eso sólo lo entienden los doctores en Ciencias Exactas, a los demás se nos puede hablar con impunidad de parámetros atribuyéndoles al azar el significado de marco conceptual de una cuestión; líneas generales de un problema, condicionamientos, solución, imposiblidad de toda solución. Cualquier cosa".

Algunas precisiones habríamos de hacer al simpático Tamarón. La primera es que devalúa mucho nuestro doctorado: al menos en mis tiempos sabíamos muy bien en aquel cuarto curso de Bachillerato lo que era el parámetro de una parábola. Cuando escribíamos su ecuación $y^2 = 2px$, decíamos que el parámetro p medía la longitud de la mitad de la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola: así que el parámetro es efectivamente -mejor o peor expresado por el Diccionario- una línea fija de la parábola cuya longitud entra en la ecuación de la misma. O también la distancia del foco a la directriz, punto y recta de las que solíamos partir para construir la parábola o para hallar su ecuación. En fin, que a nuestros 14 añitos estábamos en condiciones no de ser doctores pero sí de entender esa definición.

Paladeémosla un poco más. Dice que esa línea es "*constante e invariable*", es decir, que el valor de p es constante. Sin necesidad de fijarnos ya en su anterior interpretación geométrica como una longitud, resultará que dando a p un valor numérico cualquiera, se tendrá la ecuación de una parábola concreta cuyo eje es el de abscisas y que es tangente al de ordenadas; si, en vez de ese valor, le damos otro, tendremos otra parábola distinta con las mismas condiciones. Y así, para cada valor que se dé a la constante p se tendrá una de esas parábolas. De modo que esa p es constante para cada parábola pero puedo elegir una constante cualquiera, lo que equivale a elegir cada una de esas parábolas. Eso suele expresarse diciendo que es un constante arbitraria, es decir, podemos elegirla a nuestro arbitrio pero, una vez elegida, queda ya fijada.

Pero entonces, si p es un símbolo al que podemos dar no un valor único sino cualquier valor, ¿en qué se diferencia de una variable? Pues pensémoslo como una variable: ahora $y^2 = 2px$, dejando p variable representará no una parábola sino toda la familia de parábolas tangentes al eje y y cuyos ejes coincidan con el eje x. Para cada valor de la variable p se tendrá una de las parábolas de la familia. Y esta sí que nos parece una buena idea de lo que es el parámetro: una variable para cada uno de cuyos valores se tiene un elemento de una cierta familia.

Por eso, cuando llamamos a $x = f(t)$, $y = g(t)$ las ecuaciones paramétricas de una curva plana queremos decir que para cada valor del parámetro t se obtiene un punto de la curva, el que tiene por coordenadas los valores de las funciones f y g para ese valor de la variable t. Y si decimos que $F(x) + c$ es la integral indefinida de una función, con c constante de integración, lo que estamos dando es la familia de las funciones primitivas de la dada y c es el parámetro o constante arbitraria. No hace falta, pues, que el parámetro represente una línea.

Entonces, ¿es que era incorrecta la definición del Diccionario? ¡Ah, Tamarón, Tamarón! Si hubiera consultado la última edición de ese Diccionario, en vez de contentarse con una anterior, habría visto con qué maestría mejora la Real Academia aquella definición parcial y bastante mala, si bien inteligible, que hemos comentado. La definición que ahora da, en efecto, es la siguiente: "*Parámetro.- Variable que, en una familia de elementos, sirve para identificar cada uno de ellos mediante un valor numérico*". ¡Impecable! ¡Ahí queda eso!

Ahondemos un poco más. Frecuentemente en las aplicaciones el parámetro no es una variable con un dominio de definición dado de antemano -el cuerpo real en los ejemplos elementales de antes-, sino que toma únicamente ciertos valores correspondientes a distintos estados del problema o a ciertas determinaciones experimentales. Pongamos un ejemplo: un amigo médico, me envía un trabajo en el que estudia la eliminación urinaria, con perdón, de rojo fenol como estimador de la función tubular renal. Si c_0 es la cantidad inyectada y c_t la cantidad remanente en la sangre en el tiempo t, la ley es la exponencial

$$c_t = c_0 \ e^{-kt}$$

donde dice que k es una constante de eliminación, variable según los individuos, "y verdadero parámetro de esta prueba". Si nos atenemos a lo anteriormente dicho, nosotros pensaríamos que el parámetro es t y a cada uno de sus valores correspondenría un valor de c_t, ya que c_0 y k son constantes. Aquí, sin embargo, se elige un parámetro, el k, que daría una familia finita de funciones exponenciales, una para cada individuo al que se hace la prueba.

Este concepto de parámetro cabe perfectamente en la definición de la Academia, pero quizá conviniera distinguirlo del anterior. Así lo hacen casi todos los diccionarios científicos,

separando las dos acepciones, la puramente matemática en la que la expresión es válida "para todo valor del parámetro" en un cierto campo, y la de las otras ciencias que entienden, en general, el parámetro como una constante a determinar en cada caso, generalmente por una experiencia. Las dos parten de una idea común pero la primera se fija más en el parámetro como una variable independiente y, la segunda, como una constante que puede ser cambiada por otra si aplicamos la fórmula a otro caso. He aquí algunos ejemplos de ambas acepciones en distintos diccionarios:

Webster.- "*Una constante arbitraria que caracteriza para cada uno de sus valores particulares algún miembro particular de un sistema. // Una cantidad que puede tener varios valores, fijado cada uno por los límites de un estado o discusión*".

Mc Graw-Hill.- "*Una constante arbitraria o variable que aparece en una expresión matemática y que al variar da distintos casos del fenómeno representado. // Una cantidad que es constante bajo un conjunto dado de condiciones pero puede ser diferente bajo otras condiciones*".

James & James.- "*Cualquier letra, variable o constante, distinta de las variables coordenadas. // Una constante arbitraria o una variable en una expresión matemática que distingue varios casos específicos*".

Intern. Dict. App. Math.- "*Una constante arbitraria, como distinguida de una constante fija o absoluta. // Cualquier valor numérico dado, sujeto en algunos casos a ciertas restricciones*".

No queda muy aclarada en todas las primeras acepciones, aunque se entiende, la diferencia entre constante fija y constante arbitraria, ni tampoco entre constante arbitraria y variable; pero ésta la suponemos ya dilucidada por cuanto antes dijimos. Si $f(x,y,t) = 0$ es, por ejemplo, la ecuación de un haz de curvas planas, el parámetro t es tan variable como x e y: f es una función de las tres variables. Ahora bien, lo que t describe es cada una de las curvas: cada uno de sus valores nos da una ecuación en x e y que es la de una curva del haz.

En cuanto a las segundas acepciones, más frecuentes en las ciencias experimentales, parece que no cabe ninguna dificultad de interpretación. La Real Academia de Ciencias ha publicado un Vocabulario científico y técnico en el que da una versión, muy atinada, de esta segunda acepción: *"Símbolo que representa una constante en un problema típico, pero cuyo valor puede variar de unos casos a otros del mismo problema".* Basta ciertamente con esta definición pero, al igual que en los otros diccionarios, pienso que no estorbaría la otra acepción, aquélla que acentúa el papel de variable que el parámetro juega y que puede ser decisivo en algunos problemas; por ejemplo, en el cálculo de la envolvente de una familia.

Aun a riesgo de ser muy pelma se podría proponer algo que dijera más o menos así: *"Variable que interviene en las ecuaciones de algunos lugares geométricos o de familias de funciones, figuras, etc. Para cada conjunto de valores numéricos que se de a los parámetros se obtiene, en cada caso, las coordenadas de un punto del lugar, una función de la familia o las ecuaciones de una de las figuras".*

Este podría ser el resultado práctico de nuestra meditación. Otro resultado, si todo esto nos ha parecido, lógicamente, un tostón auténtico, sería la decisión de leer el periodico sin hacer meditaciones -"acríticamente", que se dice también ahora-; o, más drásticamente aún, la de no leer más el periodico. O, quizás, la mejor de todas: no leer nunca más a éste su s.s.

Hixem.

ESTRUCTURA DE MAGNITUD ESCALAR

Por Eugenio Roanes Macías
Dpto. de Algebra. Univ. Complutense
E.U. "Pablo Montesino"

Una de las actividades usuales en Matemática Elemental es la de "medir". Medir una magnitud escalar, M, es establecer un isomorfismo (aditivo y de orden) entre M y un subconjunto de números reales, que permita sustituir las cantidades de M por los números que resultan de medirlas. Ello tiene varias ventajas:

i) comodidad de sumar números, en vez de cantidades de M
ii) posibilidad de multiplicar medidas de cantidades de M
iii) posibilidad de operar medidas de cantidades pertenecientes a magnitudes distintas (tan frecuente en Física)

El isomorfismo antes mencionado presupone que las cantidades de M puedan sumarse y compararse, lo que induce a preguntarse cuál ha de ser la estructura de M de modo que pueda establecerse una medida de sus elementos. Este es el problema de lo que se ha dado en llamar "teoría de magnitudes".

La primera teoría de magnitudes escalares, atribuida a Eudoxo, aparece en el libro V de Euclides. Ya los griegos, utilizando el método que llamaban *antiphairesis* (ver [2]), descubrieron la existencia de segmentos inconmensurables, lo que implicaba que los números racionales (únicos conocidos entonces) no bastaran para medir segmentos. Por ello los griegos trabajaban directamente con cantidades de M. Y es que el concepto de número real es tan difícil que su primera definición correcta no es elaborada hasta el siglo pasado (en [5]).

El problema de las magnitudes escalares ha preocupado a ilustres matemáticos españoles de la primera mitad de nuestro siglo, como puede comprobarse en [6], [7] y [9]. La primera traducción a lenguaje actual de la teoría de Eudoxo fué elaborada por Krull en el artículo [5], cuyo título podría traducirse por *Automorfismos y Simetrías de los Semigrupos de Eudoxo*. Posteriormente el prof. P. Abellanas ha desarrollado magistralmente la teoría en [1], donde partiendo de un grupo conmutativo ordenado y arquimediano, se llega a construir un cuerpo ordenado (apropiado para medir la magnitud), isomorfo a un subcuerpo de los reales.

Finalmente, en la memoria [8] se ha extendido la teoría a magnitudes más generales, no necesariamente escalares, ni siquiera arquimedianas. Las técnicas de trabajo en ella utilizadas se basan fundamentalmente en la teoría de Eudoxo y la teoría de cortaduras de Dedekind (por ser esta, entre todas las construcciones habituales de $\mathbb{R}$, la que mejor se adapta al concepto de magnitud).

En el presente artículo se aprovechan las técnicas y resultados de [8] para efectuar un estudio muy elemental, pero completo, restringido a magnitudes escalares, en el que se consigue:

a) desarrollar un *método constructivo* de determinación del subconjunto de números reales que permiten medir cada magnitud escalar

b) caracterizar el concepto de magnitud escalar, esto es, *determinar la estructura* más simple sobre la cual se puede establecer una medida

Por razones de simplicidad, se ha trabajado con magnitudes absolutas (semigrupos), a partir de las cuales es fácil pasar, por simetrización, a las correspondientes magnitudes relativas (grupos).

§0. CONSIDERACIONES PREVIAS

Comencemos por acercarnos al problema a la luz de unos ejemplos geométricos, que explotaremos a lo largo de este estudio.

Ejemplo A.- Al medir segmentos, asociamos a cada segmento un número real no negativo (su medida con cierta unidad), de modo que a dos segmentos distintos correspondan distintos números y que al segmento suma de otros dos le corresponda la suma de sus medidas. Notemos también que dos segmentos tendrán igual medida syss (si y solo si) se puede pasar de uno a otro mediante transporte con regla de un solo borde, esto es, si existe una isometría que transforme uno en el otro. Por ello, para que la medida sea aplicación, es preciso identificar segmentos congruentes, es decir, es preciso admitir que al hablar de un segmento (para medirlo) nos referimos a la clase de segmentos que pueden obtenerse de aquel mediante isometrías.

Ejemplo B.- Si nos limitamos a considerar el subconjunto de los segmentos múltiplos enteros de un segmento dado $\bar{u}$ (regletas de Cuisenaire-Gateño, por ejemplo), entonces al medirlos (con la unidad $\bar{u}$) *se obtienen* los números naturales.

Ejemplo C.- Si consideramos ahora el subconjunto de aquellos segmentos que pueden obtenerse como múltiplo entero de alguno de los segmentos resultantes de dividir un segmento dado fijo, $\bar{u}$, en un número entero de partes iguales (segmentos racionales), entonces al medirlos (con la unidad $\bar{u}$) *se obtienen* los números racionales no negativos.

Ejemplo D.- Si se considera el conjunto de los múltiplos naturales de regiones angulares cualesquiera, o ángulos de Zassenhaus (ver [10]), entonces sus medidas (con el grado como unidad, por ejemplo) resultan ser los números reales no negativos.

Ejemplo E.- Si consideramos el subconjunto de los ángulos que son múltiplos naturales de los ángulos que resultan al bisecar el ángulo recto un número finito de veces, entonces sus medidas (con el ángulo recto como unidad) son los números del tipo $n/2^m$ (donde $n,m\in\mathbb{N}$).

Ejemplo F.- Si se considera, finalmente, el subconjunto de aquellos segmentos que pueden obtenerse como múltiplo natural de alguno de los segmentos resultantes de dividir un segmento fijo dado, $\bar{u}$, en un número de partes iguales, que no sea múltiplo de tres, entonces sus medidas (con $\bar{u}$), resultan ser los números del tipo n/m, donde $n,m\in\mathbb{N}$ y $m\notin 3\mathbb{N}$ (esto es, m no es múltiplo de tres).

En los ejemplos precedentes (y en otros similares) puede observarse que el proceso de "medir" consiste en establecer una biyección entre los elementos de un semigrupo (de segmentos, angulos, etc) y un subconjunto de números reales (al cual pertenezca el 1 y que sea aditiva y multiplicativamente cerrado), debiendo además conservar la suma dicha aplicación. Es claro que dicho subconjunto de reales es $\mathbb{R}^+$ en el ejemplo A, $\mathbb{N}$ en el B, $\mathbb{Q}^+$ en el C, etc.

Más formalmente, dado un grupoide $(M,+)$, establecer una medida de sus elementos es definir una aplicación

$$f : M \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^+$$

que verifique las cuatro condiciones siguientes:

i) que f sea biyectiva

ii) $f(v+w) = f(v) + f(w)$; $\forall v,w\in M$

iii) $1\in S$

iv) que S sea cerrado respecto del producto

luego, razonando por isomorfía (transporte de estructura), se concluye fácilmente que, si existe tal aplicación f, entonces $(M,+)$ ha de ser un semigrupo conmutativo cancelativo absoluto y arquimediano, y que $(S,+,\cdot)$ ha de ser un subsemianillo unitario del cuerpo real, que permite considerar a M como S-semimódulo. Ello sugiere el modo de organizar el estudio propuesto.

§1. SEMIGRUPO ABSOLUTO ORDENADO CANCELATIVO Y ARQUIMEDIANO (SAOCA)

Designaremos por $(M,+)$ a un semigrupo conmutativo con elemento cero, que denotaremos $\underset{\sim}{0}$. Al producto de un natural n por un elemento v, de M, lo denotaremos nv, definiendolo, como es habitual, por inducción sobre n:

$$nv = \underset{\sim}{0} \ , \text{ si } n = 0$$
$$nv = (n-1)v+v \ , \text{ si } n>0$$

Recordemos que el semigrupo $(M,+)$ se dice *cancelativo*, si para cualesquiera $v,w,u\in M$, se verifica

$$v+u = w+u \implies v = w$$

1.1 Definición.- Si para cualesquiera $v,w\in M$, $v\neq w$, existe una y sólo una de las dos diferencias w-v ó v-w, entonces se dice que el semigrupo $(M,+)$ es "absoluto".

El semigrupo aditivo de los naturales, $(\mathbb{N},+)$, es cancelativo y absoluto, como también lo son los de los ejemplos del §0, pero conviene notar que las propiedades cancelativa y absoluta son independientes, como muestran los ejemplos siguientes:

Ejemplo G.- El semigrupo aditivo

$$2\mathbb{N}+3\mathbb{N} = \{2n+3m : n,m\in\mathbb{N}\}$$

es cancelativo, pero no absoluto (por no existir 3-2, ni 2-3).

Ejemplo H.- Si para cada $k\in\mathbb{N}$, designamos $m_k = \{x\in\mathbb{N}:x\leq k\}$, entonces $M = \{m_k:k\in\mathbb{N}\}$ es subsemigrupo de la unión de partes de $\mathbb{N}$, siendo fácil comprobar que $(M,\cup)$ es absoluto, pero no cancelativo.

1.2 Definición.- Dado un semigrupo conmutativo $(M,+)$, se llama "relación asociada" al semigrupo, a la relación (que denotaremos $\prec$) entre elementos de M, definida así:

$$\boxed{v\prec w \ \ syss \ \ w-v\in M}$$

Observemos que la relación asociada no es necesariamente "de orden" (basta considerar el grupo aditivo de los enteros).

1.3 Proposición.- Si el semigrupo es absoluto, entonces su relación asociada $\prec$ es de orden total (o lineal) y verifica:

$$v\prec w \Longrightarrow v+u \prec w+u \quad (\forall u\in M)$$

Demostración.- Trivial.

Corolario.- Si $v\prec w$ y $v'\prec w'$, entonces $v+v'\prec w+w'$.

En el semigrupo aditivo $\mathbb{R}^+$ la relación asociada es la desigualdad (no estricta) usual, es decir la relación $\leq$.

1.4 Definición.- Se dice que $(M,+,\prec)$ es un "semigrupo absoluto ordenado", syss se verifican:

i) $(M,+)$ es un semigrupo conmutativo absoluto

ii) $\prec$ es su relación de orden asociada

Un semigrupo absoluto ordenado puede no ser cancelativo, como ocurre para $(\mathcal{P}(E),\cup,\subseteq)$.

1.5 Definición.- Un semigrupo absoluto ordenado, $(M,+,\prec)$, se dice "arquimediano", syss se verifica la siguiente propiedad (de Arquimedes): para cualesquiera $v,w\in M$, $v\neq 0$, existe $k\in\mathbb{N}$, tal que $w\prec kv$.

El semigrupo aditivo $\mathbb{R}^+$ y los semigrupos de los ejemplos del §0 son arquimedianos, pero no todo semigrupo absoluto ordenado (e incluso cancelativo) es arquimediano, como muestra el siguiente:

Ejemplo I.- Si en el conjunto

$$M=\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \;:\; b=0 \Rightarrow a\geq 0\}$$

se considera la suma habitual de pares ordenados, se tiene un semigrupo conmutativo cancelativo absoluto (según es fácil verificar), cuya relación asociada resulta ser el llamado "orden lexicográfico hebreo", pero no es arquimediano, ya que no existe $k\in\mathbb{N}$, tal que $(0,1)\prec k(1,0)$.

En adelante, la condición de ser semigrupo absoluto ordenado cancelativo y arquimediano la expresaremos abreviadamente por SAOCA. Así, $(\mathbb{N},+,\leq)$ y $(\mathbb{R}^+,+,\leq)$ son ejemplos de SAOCA. También lo son los ejemplos del §0, respecto de la suma y desigualdad (no estricta) habituales.

§2. SEMIANILLO Y SEMIMODULO ASOCIADOS

Supondremos en adelante que $(M,+,\prec)$ es un SAOCA.

2.1 Definición (de Eudoxo).- El número n/m $(n,m\in\mathbb{N}; m\neq 0)$ se dice multiplicable por $v\in M$ syss existe $v^*\in M$, tal que $nv=mv^*$. En caso afirmativo, se dice que v^* es el producto de n/m por v, y se escribe $(n/m)v=v^*$, es decir

$$\boxed{(n/m)v=v^* \underset{def}{\Longleftrightarrow} nv=mv^*}$$

Es fácil probar que si n/m es multiplicable por v y n'/m' $(n',m'\in\mathbb{N}, m'\neq 0)$ es fracción equivalente a n/m, entonces n'/m' también es multiplicable por v, siendo $(n'/m')v = (n/m)v$. Ello permite hablar de producto de números racionales (no negativos) por elementos de M.

Por ejemplo, en el SAOCA del ejemplo B del §0, tanto $3/4$, como $5/3$, son multiplicables por $12u$, pero no lo es $7/5$. En cambio, en el SAOCA del ejemplo A cualquier racional no negativo es multiplicable por cualquier segmento.

2.2 Definición.- Un elemento $v\in M$ se dice "divisible" syss para cada $n\in\mathbb{N}, n\neq 0$, existe $w\in M$, tal que $nw = v$. Se dice que el semigrupo M es divisible syss lo son todos sus elementos.

En consecuencia, v es divisible syss todo racional no negativo es multiplicable por v. Es claro que el SAOCA del ejemplo A es divisible y también lo son C y D, pero no B, E ó F.

2.3 *Lema.- Para cualesquiera* $q,p\in\mathbb{Q}^+$ *y cualesquiera* $v,w\in M$, *se verifican:*

e_1) si q es multiplicable por v y por w, entonces también es multiplicable por $v+w$, siendo $q(v+w) = qv+qw$

e_2) si q y p son multiplicables por v, entonces también $q+p$ es multiplicable por v, siendo $(q+p)v = qv+pv$

e_3) si p es multiplicable por v y q es multiplicable por pv, entonces qp es multiplicable por v, siendo $(qp)v = q(pv)$

Demostración.-

e_1) Si q es el racional no negativo determinado por la fracción n/m, designando $qv = v^*$ y $qw = w^*$, de acuerdo con 2.1, habrá de ser

$$nv = mv^* \quad , \quad nw = mw^*$$

luego

$$nv+nw = mv^*+mw^*$$

y esto, por ser conmutativo el semigrupo, puede escribirse

$$n(v+w) = m(v^*+w^*)$$

lo que, según 2.1, equivale a

$$q(v+w) = v^*+w^*$$

e_2) Si n/m y h/k son fracciones de términos no negativos de los respectivos racionales q y p, entonces $(nk+hm)/mk$ es una fracción de su suma, $q+p$. Por tanto, designando $qv = v^*$ y $pv = v'$, de acuerdo con 2.1, habrá de ser

$$nv = mv^* \quad , \quad hv = kv'$$

luego

$$knv = kmv^* \quad , \quad mhv = mkv'$$

y en consecuencia (por ser conmutativo el semigrupo)

$$(kn+mh)v = knv+mhv = mk(v^*+v')$$

lo que, según 2.1, equivale a

$$(q+p)v = v^*+v'$$

e_3) Si q y p están respectivamente definidos por n/m y h/k, entonces pq estará definido por hn/km. Por tanto, designando $qv = v^*$ y $pv^* = v''$, habrá de ser

$$nv = mv^* \quad , \quad hv^* = kv''$$

luego

$$hnv = hmv^* \quad , \quad mhv^* = mkv''$$

y por tanto

$$hnv = mkv''$$

lo que, según 2.1, equivale a

$$pqv = v''$$

2.4 *Proposición.- Siendo* $q,p\in\mathbb{Q}^+$ *y* $v,w\in M$, *se verifican:*

a) si $qv = \underset{\sim}{0}$, entonces $q = 0$ ó $v = \underset{\sim}{0}$

b) si $q<p$ y $v\neq\underset{\sim}{0}$, entonces $qv\lneqq pv$

c) si $q\neq 0$ y $v\lneqq w$, entonces $qv\lneqq qw$

Demostración.-

a) Sea $q=[n/m]\neq 0$. Si $qv = \underset{\sim}{0}$, entonces $nv = \underset{\sim}{0}$, lo que, teniendo en cuenta que $(M,+)$ es semigrupo absoluto y cancelativo, implica $n = 0$ ó $v = \underset{\sim}{0}$, y por tanto $q = 0$ ó $v = \underset{\sim}{0}$.

b) si $q<p$, entonces existe $r\in\mathbb{Q}^+, r\neq 0$, tal que $r+q = p$, luego

$$rv+qv = (r+q)v = pv$$

pero si $v\neq\underset{\sim}{0}$, de acuerdo con a), habrá de ser $rv\neq\underset{\sim}{0}$, y por tanto $qv\lneqq pv$.

c) Si $v\lneqq w$, entonces existe $u\in M, u\neq 0$, tal que $u+v = w$, luego

$$qu+qv = q(u+v) = qw$$

pero si $q \neq 0$, de acuerdo con a), habrá de ser $qu \neq 0$, y por tanto $qv \lneq qw$.

2.5 <u>*Definición (de Dedekind)*</u>.- *Se llama "cortadura" de números racionales no negativos a todo par ordenado (X',X'') de partes de $\mathbb{Q}^+$, que verifique:*

c_1) $X' \cup X'' = \mathbb{Q}^+$

c_2) $X' \cap X'' = \emptyset$

c_3) $X' \neq \emptyset \neq X''$

c_4) *si* $q' \in X'$ *y* $q'' \in X''$, *entonces* $q' < q''$

c_5) X'' *no posee mínimo*

2.6 <u>*Teorema (de Dedekind)*</u>.- *Si (X',X'') es una cortadura de racionales no negativos, entonces existe un número real no negativo y solo uno, x, tal que $q' \leq x$ para todo $q' \in X'$, y $x < q''$ para todo $q'' \in X''$.*

Este teorema permite identificar cada real no negativo, x, con la cortadura (X',X'') que lo define, por lo que escribiremos $x = (X',X'')$. La condición c_5 (que se ha añadido en 2.5 a la definición original de Dedekind) permite asegurar que si, en particular, x es racional, entonces x es elemento máximo de X'.

2.7 <u>*Teorema (de Dedekind)*</u>.- *Dados dos reales no negativos, $x = (X',X'')$ e $y = (Y',Y'')$, para su suma y su producto se verifica:*

$$x+y = (X'+Y', X''+Y'') \quad , \quad xy = (X'Y', X''Y'')$$

donde

$$X'+Y' = \{q+p \mid q \in X', p \in Y'\} \quad , \quad X'Y' = \{qp \mid q \in X', p \in Y'\}$$

2.8 <u>*Definición*</u>.- *Llamaremos "subcortadura" de M a todo par ordenado (M',M'') de partes de M, que verifique:*

s_1) $M' \cap M'' = \emptyset$

s_2) $M' \neq \emptyset \neq M''$

s_3) *si* $v' \in M'$ *y* $v'' \in M''$, *entonces* $v' \prec v''$

<u>Notación</u>.- Dados un subconjunto $X \subseteq \mathbb{Q}^+$ y un elemento divisible $v \in M$, designaremos:

$$Xv = \{qv : q \in X\}$$

2.9 <u>*Proposición*</u>.- *Dados una cortadura de racionales no negativos (X',X'') y un elemento divisible no nulo $v \in M$, el par ordenado $(X'v, X''v)$ de partes de M es una subcortadura de M.*

<u>Demostración</u>.- Sigue fácilmente de 2.4 b).

<u>Notación</u>.- Siendo (M',M'') una subcortadura de M, designaremos por $\langle M',M''\rangle$ al subconjunto de M siguiente:

$$\langle M',M''\rangle = \{w \in M : v' \prec w \precneqq v'' \quad ; \quad \forall v' \in M' \ , \ \forall v'' \in M''\}$$

2.10 <u>*Definición*</u>.- *Diremos que una subcortadura (M',M'') es vana (respect. unitaria) syss $\langle M',M''\rangle$ es el conjunto vacío (respect. es un subconjunto unitario de M).*

2.11 <u>*Lema*</u>.- *Cualesquiera que sean el real no negativo $x = (X',X'')$ y el elemento divisible $v \in M$, la subcortadura $(X'v, X''v)$ es vana o unitaria.*

<u>Demostración</u>.- Supongamos que $\langle X'v, X''v\rangle$ es no vacío. Vamos a probar que entonces es unitario. En efecto, si $u,w \in \langle X'v, X''v\rangle$, entonces, suponiendo $u \prec w$, habrá de ser

$$q'v \prec u \prec w \precneqq q''v \quad ; \quad \forall q' \in X' \ , \ \forall q'' \in X''$$

y por tanto

$$w-u \prec q''v - q'v = (q''-q')v \ ; \ \forall q' \in X', \forall q'' \in X'' \qquad (*)$$

donde la igualdad última sigue de 2.3.e_2, sin más que tener en cuenta que $(q''-q')+q' = q''$. Ahora bien, es claro que para cada natural no nulo n, existen $q' \in X'$ y $q'' \in X''$, tales que $q''-q'<1/n$, y por tanto existe $p\in Q^+$ tal que $p+(q''-q') = 1/n$, luego $pv+(q''-q')v = (1/n)v$ y en consecuencia $(q''-q')v \prec (1/n)v$. Por tanto, de (*) resulta

$$w-u \prec (1/n)v \quad ; \quad \forall n\in N \text{ , } n\neq 0$$

luego

$$n(w-u) \prec v \quad ; \quad \forall n\in N$$

lo que, teniendo en cuenta que M es arquimediano, implica $w-u = \underset{\sim}{0}$, y por tanto $w = u$.

2.12 __Definición__.- El número real no negativo $x = (X',X'')$ se dirá "multiplicable" por el elemento divisible $v\in M$, $v\neq\underset{\sim}{0}$, si $(X'v,X''v)$ no es vana. En tal caso, si $\langle X'v,X''v\rangle = \{v^*\}$, diremos que v^* es el producto de x por v y escribiremos: $xv = v^*$. Para $v = \underset{\sim}{0}$, definimos $xv = \underset{\sim}{0}$, para cualquier $x\in R^+$.

Si, en particular, x es racional, entonces x es elemento maximo de X', luego, supuesto $v\neq\underset{\sim}{0}$, xv (en el sentido de 2.1) es el elemento máximo de X'v (según resulta fácilmente de 2.4.b) y por tanto $\langle X'v,X''v\rangle = \{xv\}$. En consecuencia, si x es racional y $v\neq\underset{\sim}{0}$, entonces xv en el sentido de la definición 2.12 es igual que en el sentido de 2.1. Ello asegura la compatibilidad de la siguiente definición:

2.13 __Definición__.- Diremos que el número real no negativo x es multiplicable por $v\in M$, sss se verifica alguna de las dos condiciones:

i) x es racional y multiplicable por v en el sentido de 2.1

ii) v es divisible y x es multiplicable por v en el sentido de 2.12

En caso afirmativo, el producto xv se define como en 2.1 ó 2.12, respectivamente.

En consecuencia, para que un irracional sea multiplicable por $v\in M$, es preciso que v sea divisible.

2.14 __Lema__.- Para cualesquiera $x,y\in R^+$ y cualesquiera $v,w\in M$, se verifican:

e_1) si x es multiplicable por v y por w, entonces también es multiplicable por v+w, siendo $x(v+w) = xv+xw$

e_2) si x e y son multiplicables por v, entonces también x+y es multiplicable por v, siendo $(x+y)v = xv+yv$

e_3) si x es multiplicable por v e y es multiplicable por xv, entonces yx es multiplicable por v, siendo $(yx)v = y(xv)$

__Demostración.__- El caso de ser racionales x e y ya ha sido tratado en 2.3. El caso en que $v = \underset{\sim}{0}$ ó $w = \underset{\sim}{0}$ es trivial. Supondremos pues que es irracional uno, al menos, de los números considerados en cada apartado y que $v\neq\underset{\sim}{0}\neq w$. Designemos $x = (X',X'')$ e $y = (Y',Y'')$.

e_1) Por ser x irracional, han de ser v y w divisibles. Por tanto, si $xv = v^*$, entonces $\langle X'v,X''v\rangle = \{v^*\}$, luego

$$q'v \prec v^* \preccurlyeq q''v \quad ; \quad \forall q'\in X' \quad , \quad \forall q''\in X'' \qquad (*)$$

y si $xw = w^*$, entonces $\langle X'w,X''w\rangle = \{w^*\}$, luego

$$q'w \prec w^* \preccurlyeq q''w \quad ; \quad \forall q'\in X' \quad , \quad \forall q''\in X''$$

lo que junto con (*) y de acuerdo con el corolario de 1.3, implica

$$q'v+q'w \prec v^*+w^* \preccurlyeq q''v+q''w \quad ; \quad \forall q'\in X' \quad , \quad \forall q''\in X''$$

esto es (según 2.3.e_1)

$q'(v+w) \prec v^*+w^* \precneqq q''(v+w) \ ; \ \forall q'\in X' \ , \ \forall q''\in X''$

lo cual implica

$\langle X'(v+w) \ , \ X''(v+w)\rangle = \{v^*+w^*\}$

y en consecuencia $x(v+w) = v^*+w^*$

e_2) Al suponer irracional x ó y, ha de ser divisible v. Por tanto, si $xv = v^*$ e $yv = v'$,entonces

$\langle X'v,X''v\rangle = \{v^*\} \ , \ \langle Y'v,Y''v\rangle = \{v'\}$

luego

$q'v \prec v^* \precneqq q''v \ : \ \forall q'\in X' \ , \ \forall q''\in X''$

$p'v \prec v' \precneqq p''v \ : \ \forall p'\in Y' \ , \ \forall p''\in Y''$

lo que, de acuerdo con el corolario de 1.3, implica

$q'v+p'v \prec v^*+v' \precneqq q''v+p''v : \forall q'\in X', \forall p'\in Y', \forall q''\in X'', \forall p''\in Y''$

esto es (según 2.3.e_2)

$(q'+p')v \prec v^*+v' \precneqq (q''+p'')v : \forall q'\in X', \forall p'\in Y', \forall q''\in X'', \forall p''\in Y''$

lo cual implica

$\langle (X'+Y')v \ , \ (X''+Y'')v\rangle = \{v^*+v'\}$

y por tanto $(x+y)v = v^*+v'$

e_3) Para $x = 0$ es trivial. Supondremos pues $x\neq 0$. Si x es irracional, entonces v ha de ser divisible. Si, por el contrario, x es racional, entonces, según lo indicado al comienzo de la demostración, y sería irracional luego xv habría de ser divisible, v en consecuencia también v sería divisible, ya que para cualquier racional $r\geq 0$, bastaría considerar el racional rx^{-1}, que habría de ser multiplicable por xv, verificándose:

$$rx^{-1}(xv) = r(x^{-1}x)v = rv$$

En consecuencia, en uno u otro caso, v ha de ser divisible. Por tanto, si $xv = v^*$ e $y(xv)=v''$, entonces

$\langle X'v,X''v\rangle = \{v^*\} \ , \ \langle Y'(xv),Y''(xv)\rangle = \{v''\}$

luego

$q'v \prec v^* \precneqq q''v \ : \ \forall q'\in X' \ , \ \forall q''\in X''$ (1)

$p'xv \prec v'' \precneqq p''xv \ ; \ \forall p'\in Y' \ , \ \forall p''\in Y''$ (2)

Ahora bien, de (1) resulta

$p'q'v \prec p'v^* = p'xv \ : \ \forall q'\in X' \ , \ \forall p'\in Y'$

$p''xv = p''v^* \precneqq p''q''v \ ; \ \forall p''\in Y'' \ , \ \forall q''\in X''$

luego, teniendo en cuenta (2), puede afirmarse:

$p'q'v \prec v'' \precneqq p''q''v \ ; \ \forall p'\in Y', \forall q'\in X', \forall p''\in Y'', \forall q''\in X''$

y en consecuencia

$\langle Y'X'v \ , \ Y''X''v\rangle = \{v''\}$

luego $(yx)v = v''$

2.15 Teorema (o definición).- Sea M un SAOCA. El subconjunto de los reales no negativos multiplicables por todos los elementos de M es un semianillo unitario (que designaremos S(M) y llamaremos "semianillo asociado" a M).

Demostración.- Bastará probar las tres condiciones siguientes:

1) si $x,y\in S(M)$, entonces $x+y\in S(M)$
2) si $x,y\in S(M)$, entonces $yx\in S(M)$
3) $1\in S(M)$

y en efecto:

1) Sean $x,y\in S(M)$. Para cada $v\in M$, existen $v^*,v'\in M$, tales que $xv = v^*$ e $yv = v'$, luego $xv+yv = v^*+v'$, lo que teniendo en cuenta 2.14.e_2, se escribe: $(x+y)v = v^*+v'$. Por tanto $x+y\in S(M)$.
2) Sean $x,y\in S(M)$. Para cada $v\in M$, existen $v^*,v''\in M$, tales que $xv = v^*$ e $yv^* = v''$, luego $y(xv) = v''$, lo que teniendo en cuenta 2.14.e_3, se escribe: $(yx)v = v''$. Por tanto $yx\in S(M)$.
3) Sigue de la definición 2.1

Corolario (y definición).- Sea M un SAOCA. Entonces M es un S(M)-semimódulo (que llamaremos semimódulo asociado a M).

Demostración.- Sigue inmediatamente de 2.14 y 2.15.

En consecuencia, para cada SAOCA se tiene un semianillo asociado y un semimódulo asociado. En particular, para los ejemplos del §0, se tiene:

SAOCA	Semianillo asociado
Ejemplo A	$\mathbb{R}^+$
Ejemplo B	$\mathbb{N}$
Ejemplo C	$\mathbb{Q}^+$
Ejemplo D	$\mathbb{R}^+$
Ejemplo E	$\{n/2^m : n,m\in\mathbb{N}\}$
Ejemplo F	$\{n/m : n,m\in\mathbb{N},\ m\notin 3\mathbb{N}\}$

§3. MAGNITUDES ESCALARES ABSOLUTAS.UNIDADES.MEDIDA

Supondremos en adelante que M es un SAOCA no nulo (esto es, tal que $M\neq\{0\}$) y que S(M) es su semianillo asociado.

3.1 Definición.- Si el semimódulo asociado a M es monógeno, esto es, si existe $u\in M$, tal que

$$\boxed{\text{para cada } v\in M,\ \text{existe } x\in S(M),\ \text{tal que } xu=v}$$

entonces se dice que M es una "magnitud escalar absoluta" y que u es una "unidad" de M.

(Es fácil probar la unicidad de x para cada v)

Los elementos de una magnitud escalar absoluta, M, se suelen llamar "cantidades" de M. Fijada una unidad, u, de M, cada cantidad $v\in M$ queda determinada por el número $x\in S(M)$, tal que $xu = v$. En consecuencia, las magnitudes escalares absolutas pueden representarse sobre "escalas", lo que justifica su denominación.

3.2 Teorema.- Sea u una unidad de M y sea $x\in S(M)$. Entonces son equivalentes:

i) la cantidad xu es unidad de M

ii) x es elemento invertible de S(M)

Demostración.-

i) $\Longrightarrow$ ii)

Sea xu unidad de M y designemos $xu = v$. Por ser v unidad, existirá $y\in S(M)$, tal que $yv = u$. Por tanto $yxu = u$, lo que, teniendo en cuenta que u es unidad de $M\neq\{0\}$, implica: $yx = 1$. Luego x es elemento invertible de S(M).

ii) $\Longrightarrow$ i)

Sea x elemento invertible de S(M) y sea $v = xu$. Entonces $x^{-1}v = x^{-1}(xu) = (x^{-1}x)u = 1u = u$. Pero, por ser u unidad, para cada cantidad $w\in M$, existirá $y\in S(M)$, tal que $w = yu$. Luego $w = y(x^{-1}v) = (yx^{-1})v$, siendo $yx^{-1}\in S(M)$. Por tanto v es unidad de M.

Ejemplos.- Para los ejemplos del §0, designando por $S^*(M)$ el semigrupo de elementos invertibles de S(M), se tendrá:

Ejemplo	$S^*(M)$	Unidades de M
A	$\mathbb{R}^+-\{0\}$	segmentos no nulos
B	$\{1\}$	u únicamente
C	$\mathbb{Q}^+-\{0\}$	segmentos racionales no nulos
D	$\mathbb{R}^+-\{0\}$	ángulos no nulos
E	$\{2^n : n\in\mathbb{Z}\}$	ángulos del tipo $2^n\hat{R}$, donde $\hat{R}$ es el ángulo recto y $n\in\mathbb{N}$
F	$\{n/m : n,m\in\mathbb{N}-3\mathbb{N}\}$	segmentos del tipo xu, donde $x\in S^*(M)$

Nota.- No todo SAOCA no nulo es magnitud escalar absoluta, ya que su semimódulo asociado puede no ser unidimensional, como en el siguiente:

Ejemplo J.- Dados dos segmentos inconmensurables, $\bar{a}$ y $\bar{b}$, no es difícil comprobar que el subconjunto M de los segmentos que son combinación lineal de coeficientes racionales (negativos, inclusive) de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, esto es

$$M = \{q\bar{a}+p\bar{b} : q,p \in \mathbb{Q},\quad q\bar{a}+p\bar{b} \geq \bar{0}\}$$

es un SAOCA no nulo, cuyo semianillo asociado es $\mathbb{Q}^+$ y cuyo semimódulo asociado no es unidimensional, por lo que no es magnitud escalar absoluta.

En adelante, M será una magnitud escalar absoluta.

3.3 *Definición.- Sea u unidad de M. Dada una cantidad v∈M, si x es el número de S(M) tal que xu = v, entonces se dice que la medida de la cantidad v con la unidad u es el número x, el cual se designa abreviadamente por* $med_u v$, *esto es*

$$\boxed{med_u v = x \underset{def}{\Longleftrightarrow} v = xu}$$

En consecuencia, se tiene una aplicación

$$med_u \;:\; M \longrightarrow S(M)$$

que asocia a cada cantidad de M su medida con la unidad u, y cuyas propiedades se explicitan en la siguiente:

3.4 *Proposición.- La aplicación* med_u *es biyectiva y para cualesquiera v,w∈M, x∈S(M) se verifica:*

i) $med_u(v+w) = med_u v + med_u w$

ii) $med_u(xv) = x\cdot med_u v$

iii) $v<w$ *sss* $med_u v \leq med_u w$

Demostración.- Sigue fácilmente del lema 2.14

3.5 *Proposición (regla de cambio de unidad).- Sean u y g unidades de M. Si g = xu, entonces para cualquier cantidad v∈M, se verifica:*

$$med_u v = x\cdot med_g v$$

Demostración.- Resulta inmediatamente a partir de 3.3 y de 2.14.e_3

Ejemplo.- Como un metro es igual a 100 centímetros, para cualquier segmento $\bar{v}$, se tendrá

$$med_{cm}\bar{v} = 100\cdot med_m \bar{v}$$

En conclusión, las magnitudes escalares absolutas son los SAOCA no nulos, cuyos semimódulos asociados son monógenos.

En adelante, trataremos exclusivamente con magnitudes escalares absolutas, a las cuales nos referiremos abreviadamente como "magnitudes escalares". Dada una magnitud escalar, es claro que bastaría simetrizar el semigrupo cancelativo, para pasar de una magnitud absoluta a su correspondiente magnitud relativa, con lo cual simultáneamente se pasaría del semianillo al anillo asociado y del semimódulo al módulo asociado, por lo que, en aras de la simplicidad, nos limitamos a estudiar las absolutas.

§4. MAGNITUDES DISCRETAS, EUDOXIANAS Y CONTINUAS

4.1 *Definición.- Una magnitud escalar se dice "discreta" sss su semianillo asociado es* $\mathbb{N}$.

Las regletas (ejemplo B del §0) son ejemplo de magnitud discreta.

4.2 *Teorema.- Sea M un SAOCA no nulo. Si entre los elementos no nulos de M, existe uno mínimo, u, esto es, si existe u∈M, u≠0, tal que*

$$w \lneq u \Rightarrow w = \underset{\sim}{0}$$

entonces M es magnitud escalar discreta y u es su unidad única.

Demostración.- Bastará probar que, en las condiciones de la hipótesis ha de verificarse

$$M = \mathbb{N}u = \{nu : n \in \mathbb{N}\}$$

y tener en cuenta 3.2. En efecto, puesto que $u \in M$, obviamente $\mathbb{N}u \subseteq M$. Para probar la inclusión recíproca, consideremos una cantidad arbitraria $w \in M$ y tengamos en cuenta que, por ser arquimediano el semigrupo, el subconjunto de naturales

$$\{n \in \mathbb{N} : w < nu\}$$

será no vacío, luego si es k el mínimo natural de ese subconjunto, entonces

$$(k-1)u < w \preccurlyeq ku$$

de donde fácilmente resulta

$$w-(k-1)u \preccurlyeq ku-(k-1)u = u$$

lo que, por ser u el mínimo elemento no nulo de M, implica $w-(k-1)u = \underset{\sim}{0}$, y por tanto $w \in \mathbb{N}u$.

4.3 Definición.- Diremos que una magnitud escalar, M, es "eudoxiana" sues se verifica la siguiente condición (llamada de Eudoxo-Krull):

$$\forall x \in S(M),\ x \neq 0,\ \exists y \in S(M),\ tal\ que\ yx = 1$$

es decir, si su semianillo asociado es semicuerpo.

Las magnitudes escalares de los ejemplos A,C y D son eudoxianas, ya que en ellas es $S^*(M) = S(M)-\{0\}$. Es claro que no lo son las de los ejemplos B,E y F.

4.4 Definición.- Diremos que un SAOCA no nulo, $(M,+,<)$, es "continuo" sues se verifican las dos condiciones siguientes:

i) el semigrupo $(M,+)$ es divisible

ii) la estructura de orden $(M,<)$ es completa, es decir, no posee subcortaduras vanas.

Nota.- Las dos condiciones de la definición anterior son independientes, según se concluye considerando los ejemplos del §0, en que:

1) el del ejemplo C es divisible, pero no completo
2) el del ejemplo B es completo, pero no divisible
3) el del ejemplo A es continuo
4) el del ejemplo F no es divisible, ni completo, pues $\bar{u}$ no posee tercera parte y es vana la subcortadura (M',M''), tal que

$$M' = \{(n/m)\bar{u} \ :\ n,m \in \mathbb{N},\ m \notin 3\mathbb{N}\ ,\ n/m < 1/3\}$$
$$M'' = \{(n/m)\bar{u} \quad n,m \in \mathbb{N},\ m \notin 3\mathbb{N}\ ,\ n/m > 1/3\}$$

4.5 Teorema.- Si M es un SAOCA no nulo y continuo, entonces se verifican:

a) su semianillo asociado es $\mathbb{R}^+$

b) su semimódulo asociado es generado por cualquier elemento no nulo

Demostración.-

a) Para cualquier real no negativo $x = (X,X')$ y para cualquier $v \in M$, la subcortadura $(Xv,X'v)$ será no vana (por ser M contínuo) y por tanto unitaria (de acuerdo con el lema 2.11), luego x es multiplicable por v (según 2.13).

b) Sea u un elemento arbitrario no nulo de M. Se ha de probar que para cada $v \in M$, existe $x \in S(M)$, tal que $xu = v$. Consideremos, al efecto, los dos subconjuntos siguientes:

$$X' = \{q' \in \mathbb{Q}^+ \ :\ q'u < v\}\ ,\quad X'' = \{q'' \in \mathbb{Q}^+ \ :\ v \preccurlyeq q''u\} \qquad (*)$$

El par (X',X'') es una cortadura de $\mathbb{Q}^+$, según es inmediato verificar. Por tanto $(X'u,X''u)$ será una subcortadura de M (de acuerdo con 2.9). Ahora bien, de (*) resulta

$$q'u < v \preccurlyeq q''u \quad ; \quad \forall q' \in X'\ ,\ \forall q'' \in X''$$

luego $v \in \langle X'u, X''u \rangle$,pero como la subcortadura $(X'u, X''u)$ ha de ser unitaria (por ser M contínuo), será $\langle X'u, X''u \rangle = \{v\}$. En consecuencia, si x es el número real definido por la cortadura (X, X'), será $xu = v$, de acuerdo con 2.12.

Corolario (y definición).- Todo SAOCA no nulo y contínuo es magnitud escalar, siendo su semianillo asociado R^+ y sus unidades las cantidades no nulas (se llaman "magnitudes escalares continuas").

Ejemplos.- La magnitud "longitud" (del ejemplo A) es contínua. También lo son la magnitud "amplitud" (del ejemplo D) y la magnitud "extensión" (área).

§5. PROPORCIONALIDADES. MAGNITUDES PROPORCIONALES

Las proporcionalidades son los isomorfismos propios de las magnitudes escalares, es decir, son aplicaciones lineales (biyectivas) entre los semimódulos asociados y, al mismo tiempo, isomorfismos entre las estructuras de orden asociadas. No obstante todo ello puede reducirse a una sóla condición, según vamos a probar.

5.1 *Definición.- Sean $(M,+,<)$ y $(M^*,+,<)$ magnitudes escalares. Una aplicación $f: M \longrightarrow M^*$ se dice que es "proporcionalidad" syss es biyectiva y verifica:*

$$\boxed{f(v+w) = f(v) + f(w)}$$

para cualesquiera $v, w \in M$.

En consecuencia, la correspondencia inversa de una proporcionalidad, también es proporcionalidad.

Ejemplos.- Son proporcionalidades las aplicaciones siguientes:

1) la que asocia, a cada segmento, $\bar{a}$, su duplo, $2\bar{a}$
2) la que asocia, a cada ángulo central, el arco que abarca

3) la que asocia, a cada clase de polígonos equivalentes, la altura del rectangulo de base fija, $\bar{u}$, perteneciente a aquella clase
4) la medida definida en 3.3
5) el precio (sin descuento)
6) el interés simple

5.2 *Proposición.- Para la proporcionalidad de la definición 5.1 se verifica:*

$$\boxed{v<w \quad \text{syss} \quad f(v)<f(w)}$$

Demostración.- Si $v<w$, entonces, de acuerdo con 1.2, existe $t \in M$, tal que $t+v = w$, luego $f(t)+f(v) = f(t+v) = f(w)$, lo que, según 1.2, implica: $f(v) \prec f(w)$. El recíproco es inmediato por reducción al absurdo.

5.3 *Teorema.- Siendo $(M,+,<)$ y $(M^*,+,<)$ magnitudes escalares y $f: M \longrightarrow M^*$ una biyección, son equivalentes las dos condiciones siguientes:*

a) $f(v+w) = f(v) + f(w)$; $\forall v, w \in M$
b) $f(xv) = xf(v)$; $\forall v \in M$, $\forall x \in S(M)$

Demostración.- Para probar que a) $\Rightarrow$ b) denotemos $xv = w$. Comencemos considerando el caso en que x sea racional. Si $x = n/m$ (donde $n, m \in N$, $m \neq 0$),entonces (según 2.1) será $nv = mw$, y por tanto

$$nf(v) = f(nv) = f(mw) = mf(w)$$

luego, de acuerdo con 2.1, $xf(v) = f(w)$,es decir $xf(v) = f(xv)$. Si x es el irracional definido por la cortadura (X', X''), entonces

$$q'v \prec w \preccurlyeq q''v \;:\; \forall q' \in X' \;,\; \forall q'' \in X''$$

y por tanto, de acuerdo con 5.2,

$$f(q'v) \prec f(w) \preccurlyeq f(q''v) \;:\; \forall q' \in X' \;,\; \forall q'' \in X''$$

lo que, por ser q' y q" racionales, puede escribirse

$$q'f(v) < f(w) \leqslant q''f(v) \quad ; \quad \forall q' \in X' \quad , \quad \forall q'' \in X''$$

luego $f(w) \in \langle X'f(v) \, , \, X''f(v) \rangle$,y en consecuencia (por el lema 2.11) será $\langle X'f(v) \, , \, X''f(v) \rangle = \{ f(w) \}$,lo que (por 2.12) implica $xf(v) = f(w)$.

Recíprocamente, para probar que b) $\Rightarrow$ a), supongamos que u sea unidad de M. Si $v,w \in M$, entonces existen $x,y \in S(M)$, tales que $xu = v$ e $yu = w$, luego, haciendo uso de 2.14.e_2, se tiene:

$$f(v+w) = f(xu+yv) = f((x+y)u) = (x+y)f(u) =$$
$$= xf(u) + yf(u) = f(xu) + f(yu) = f(v) + f(w)$$

Nota.- Las condiciones a) y b) de 5.3, que para espacios vectoriales son independientes, para magnitudes escalares han resultado ser equivalentes, lo que sugiere otro modo alternativo de definir proporcionalidades (como biyecciones que verifican la condición b) de 5.3). En la práctica, para analizar si una aplicación es proporcionalidad, lo mas cómodo es comprobar la condición a), y una vez verificada, para calcular la imagen de cantidades, es mas cómodo hacer uso de b).

5.4 *Definición.- Dos magnitudes escalares, M y M^*, se dicen "proporcionales" syss existe una proporcionalidad, $f:M \longrightarrow M^*$, entre ellas, lo que expresaremos escribiendo: $M \approx M^*$.*

En consecuencia, la relación "ser proporcional" entre magnitudes es relación de equivalencia.

5.5 *Proposición.- Si dos magnitudes escalares son proporcionales, entonces sus semianillos asociados coinciden, esto es*

$$\boxed{M \approx M^* \Longrightarrow S(M) = S(M^*)}$$

Demostración.- Supongamos que $f:M \longrightarrow M^*$ es proporcionalidad y vamos a probar que $S(M) \subseteq S(M^*)$. En efecto, sea $v^* \in M^*$ y designemos $f^{-1}(v^*) = v$. Para cualquier $x \in S(M)$, se tiene

$$f(xv) = xf(v) = xv^*$$

luego x es multiplicable por v^*. Como ello es cierto para cualquier $v^* \in M^*$, será $x \in S(M^*)$.

La inclusión recíproca, $S(M^*) \subseteq S(M)$, sigue de ser proporcionalidad f^{-1}.

Corolario.- Si $M \approx M^*$, entonces:

i) M^* es discreta syss lo es M

ii) M^* es eudoxiana syss lo es M

5.6 *Proposición.- Si $M \approx M^*$, entonces M^* es continua syss lo es M.*

Demostración.- Supongamos que $f:M \longrightarrow M^*$ es proporcionalidad. Por ser f isomorfismo entre los semigrupos aditivos $(M,+)$ y $(M^*,+)$, uno será divisible (y no nulo) syss lo es el otro. Por ser f, de acuerdo con 5.2, isomorfismo entre las estructuras de orden $(M,<)$ y $(M^*,<)$, para cada subcortadura (M',M''), de M, será $(f(M') \, , \, f(M''))$ una subcortadura de M^*, siendo esta vana syss lo es aquella, luego $(M^*,<)$ será completa syss lo es $(M,<)$.

5.7 *Proposición.- Toda proporcionalidad de magnitudes escalares es un isomorfismo de los respectivos semimódulos asociados.*

Demostración.- Sigue de 5.3 y 5.6.

Corolario.- Sea $f:M \longrightarrow M^*$ una proporcionalidad de magnitudes escalares y sea u una cantidad de M. Entonces $f(u)$ es unidad de M^* syss u es unidad de M.

5.8 *Definición.- Siendo M y M^* magnitudes escalares, u unidad de M, u^* unidad de M^* y $f:M \longrightarrow M^*$ proporcionalidad, la aplicación $\tilde{f}$ que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "med_u"'] & M^* \arrow[d, "med_{u^*}"] \\
S(M) \arrow[r, "\tilde{f}"] & S(M^*) = S(M)
\end{tikzcd}$$

se llama "función de proporcionalidad" asociada a f.

5.9 *Proposición*.- *La función de proporcionalidad $\tilde{f}$, que acaba de definirse, es biyectiva y verifica:*

a) $\tilde{f}(x+y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)$

b) $\tilde{f}(xu) = x\tilde{f}(y)$

c) $x \leq y$ *sii* $\tilde{f}(x) \leq \tilde{f}(y)$

para cualesquiera $x,y \in S(M)$.

Demostración.- Basta tener en cuenta que f, med_u y med_{u*} son proporcionalidades y que $\tilde{f} = med_{u*} \circ f \circ med_u^{-1}$

Corolario (y definición).- *La función de proporcionalidad $\tilde{f}$ es lineal, es decir, de la forma*

$$\boxed{\tilde{f}(x) = kx}$$

siendo k un número (denominado "constante de proporcionalidad").

Demostración.- Recordemos que S(M) es semianillo unitario. Si f(1) = k, de acuerdo con 5.9.b), se tiene:

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x\cdot 1) = x\tilde{f}(1) = xk$$

5.10 *Proposición*.- *Sea $f: M \longrightarrow M^*$ proporcionalidad de magnitudes escalares y sea u^* unidad de M^*. La aplicación producto de f por med_{u*} es una medida de M con la unidad $u = f^{-1}(u^*)$, es decir, el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "med_u"'] & M^* \arrow[d, "med_{u^*}"] \\
 & S(M^*)
\end{tikzcd}$$

donde $u = f^{-1}(u^*)$, es conmutativo.

Demostración.- Basta recordar 5.5 y tener en cuenta que la aplicación compuesta $med_{u*} \circ f$ es una proporcionalidad, en la que la imagen de xu es

$$med_{u*} \circ f(xu) = med_{u*} \circ f(xf^{-1}(u^*)) = x\cdot med_{u*}u^* = x$$

5.11 *Definición*.- *La aplicación $med_{u*} \circ f$, considerada en 5.10, se dice que es una "medida indirecta" de M.*

Ejemplo.- De acuerdo con la notación de 5.10, si f es la aplicación que asocia a cada ángulo central el arco que abarca y u* es el radio, entonces u es el "radián", es decir, radián es el ángulo que abarca un arco , cuya medida con el radio como unidad es 1. La medida de ángulos en radianes es, pues, una medida indirecta.

BIBLIOGRAFIA

[1]. ABELLANAS, P.: *Teoría de magnitudes escalares*; incluido en "Matemáticas para Físicos e Ingenieros". Ed. Romo.

[2]. BOYER, C.: *A history of Mathematics*: Wiley

[3]. DEDEKIND: *Was sind und was sollen die Zahlen*

[4]. EUCLIDES (EUDOXO): *Elementos. V*

[5]. KRULL, W.: *Automorphismen und Spiegelungen Eudoxischen Halbgruppen*: Zentralblatt fur Math.79 (1962)

[6]. PUIG ADAM, P.: *Geometría Métrica*

[7]. REY PASTOR, J.: *Análisis Algebraico*

[8]. ROANES LOZANO, E.: *Magnitudes absolutas*; Memoria de Licenciatura (1985)

[9]. SAN JUAN, R.: *Teoría de las magnitudes escalares y sus fundamentos algebraicos*; Real Academia de Ciencias

[10]. ZASSENHAUS, H.: *What is an angle?*: Math. Ass. of Am.

PEQUEÑAS IDEAS

LOS NUMEROS COMBINATORIOS EN EL ESTUDIO DE LAS PROGRESIONES ARITMETICAS

Al estudiar las progresiones aritméticas de primer orden, se obtiene

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d$$

$$S_n = \left[\frac{a_1 + a_n}{2}\right] n = a_1\, n + \frac{n(n-1)}{2}\, d$$

Si aprovechamos los números combinatorios del triángulo de Tartaglia, y las notaciones de las diferencias finitas, estas igualdades se pueden escribir, respectivamente:

$$a_n = \binom{n-1}{0} \Delta^0(a_1) + \binom{n-1}{1} \Delta^1(a_1)$$

$$S_n = \binom{n}{1} \Delta^0(a_1) + \binom{n}{2} \Delta^1(a_1)$$

Definidas las progresiones aritméticas de órdenes superiores, por extensión de las fórmulas anteriores, podemos conjeturar primero y demostrar después:

$$a_n = \binom{n-1}{0} \Delta^0(a_1) + \binom{n-1}{1} \Delta^1(a_1) + \binom{n-1}{2} \Delta^2(a_1) + \ldots. + \binom{n-1}{k} \Delta^k(a_1)$$

y

$$S_n = \binom{n}{1} \Delta^0(a_1) + \binom{n}{2} \Delta^1(a_1) + \binom{n}{3} \Delta^2(a_1) + \ldots + \binom{n}{k+1} \Delta^k(a_1)$$

para el término enésimo y la suma de los n primeros términos, respectivamente, de una progresión aritmética de orden k.

Ejemplo:

Calcular $\sum_{1}^{n} i^3$. Obtenidas las diferencias sucesivas, se tiene:

$$\sum_{1}^{n} i^3 = \binom{n}{1} 1 + \binom{n}{2} 7 + \binom{n}{3} 12 + \binom{n}{4} 6$$

Pablo Dávila Ocampos
Catedrático I.B. "Príncipe Felipe". Madrid

RESEÑA DE LIBROS

"CUENTOS Y CUENTAS DE LOS MATEMATICOS", por Rafael Rodríguez Vidal y Mª Carmen Rodríguez Rigual. Ed. Reverté. Barcelona, 1985. 173 págs.

Hace algún tiempo -"Gaceta Matemática", 34, 1982- comentábamos la aparición del libro de R. Vidal "Diversiones Matemáticas" que tomaba el relevo de otro que había publicado en 1958, debido a la pluma de su padre D. Rafael Rodríguez Annoni, bajo el sugestivo título "Al Margen de la Clase". Hoy se consolida aquella continuidad con la edición de esta nueva obrita en la que el autor ha contado con la colaboración de su hija Carmina, Profesora de Matemáticas del I.B. de Lérida. Y esta continuidad se manifiesta no sólo en el ámbito familiar de la autoría sino también en el de la dedicación a una labor pedagógica cuya recepción por el público ha sido lo bastante alentadora, en voz de los autores, como para invitarles a escribir ésta su prolongación.

Decíamos, refiriéndonos al libro que comentábamos en aquella ocasión: *"Se trata en su conjunto de una colección de notas, pequeños problemas, observaciones de la realidad, anécdotas, sugerencias, etc., que nos ponen ante los ojos el hecho matemático en su más primaria expresión; que nos incitan a introducirnos en él como en un juego, aun a sabiendas de que algunas de estas leves cuestiones han dado a veces pie a las más aquilatadas construcciones matemáticas, aquí solamente insinuadas"*. Estas mismas palabras podríamos aplicarlas ahora a esta nueva colección de piezas breves, deliciosas la mayoría de ellas, que al que se inicia le pueden servir de entretenida actividad en la adquisición de conocimientos y, a los que enseñamos, de muy estimable recurso didáctico.

En dos partes dividen su obra los autores. La primera, que titulan "Problemas para Plática y Pasatiempo", consta de más de sesenta pequeños ejercicios recogidos en unos cuantos epígrafes: Cuentos y cuentas de Oriente, Fábulas de la numeración, De ventas y precios extravagantes, Multiplicaciones intrigantes, Los trabacuentas, Juegos con veinte naipes, Dardos, dados y billar, Para responder sin cálculos, Para adivinar sin preguntar nada, Número y forma en escena, Tangram y pavimentaciones, Para tertulias con lápiz y papel, Problemas notables de viejos libros y Los cuadrados mágicos; terminando con las soluciones de todos ellos.

Esta mera relación de títulos, elegidos con tanta habilidad, nos anticipa ya el estilo de la obra. Acertadamente observan los autores que la cultura hindú, seguida de la árabe, fue la primera que dio a sus problemas un enunciado poético, que mezcló los cuentos con las cuentas, y que lo mismo creó el Algebra que "Las mil y una noches". Y siguiendo ese modelo han recopilado una gran variedad de enunciados, como los comerciantes de Vich, el codicioso castigado, el bebedor internacional, la docenica del fraile o la música y la progresión geométrica. Otros son casi de prestidigitación, como los de adivinanzas, y muchos de ellos realmente incitantes y no fáciles de resolver, aun cuando resulten evidentes una vez conocida la solución; viene muy al caso la cita de Balmes: *"No está la dificultad en comprender, sino en atinar"*.

La segunda parte se titula "Relatos anecdóticos e históricos" y consta de cerca de cuarenta temas agrupados bajo estos títulos: La paradoja del montón de trigo, Las "paradoxas" matemáticas del P. Feijóo, Paradojas ingenuas con el infinito, Panorámica de la historia de las matemáticas, Mito, ciencia y poesía de los poliedros regulares, Aforismos matemáticos de Leonardo da Vinci, Desafíos aritméticos, Metodología según circunstancias , Preparación aritmética al Fray Gerundio, Matemáticas, física y

fetichismo, Huellas femeniles en el camino de la matemática y Cuestiones de pares y nones.

Aquí la finalidad es distinta, más de cuentos que de cuentas. Es todo un muestrario de apuntes biográficos, anécdotas, páginas literarias y relatos en los que salta el argumento matemático donde menos podía esperarse. Y se mezclan no sólo los nombres que aparecen en los anteriores títulos sino otros bien distantes de nuestro mundillo, Cervantes o Dumas, Pereda o Alberti o Machado: todos aportan algún dato que podamos aprovechar. Incluye finalmente el libro un glosario cronológico de autores y un índice onomástico.

Poco más debemos decir de este bello librito. Acaso, únicamente, la impresión última que resume su forma, una vez esbozado el fondo: que está hermosamente escrito y que se lee de un tirón.

J.J.E.

"ECUACIONES DIFERENCIALES. METODOS DE CALCULO. PROBLEMAS", por Vicente Fraile Ovejero. Ed. Tebar-Flores. Madrid, 1985. 300 págs.

En dos aspectos deseo fijarme al comentar este libro. Uno, el de la pura reseña: Se trata, como indica su título, de un texto de ecuaciones diferenciales en el que el énfasis se ha puesto en los métodos de su cálculo y resolución. No es, pues, tanto un desarrollo sistemático de la teoría cuanto un libro eminentemente práctico, dedicado a proporcionar los útiles para atacar los problemas que conducen a este tipo de ecuaciones y resolverlas.

Lejos, sin embargo, de reducirse a una colección de recetas. Cada capítulo comienza con un planteamiento de la cuestión, definiciones y conceptos que se van a utilizar y modelos aclaratorios, para entrar en la exposición de los méotodos de integración y de cálculo, acompañados cada uno de ellos de los correspondientes ejemplos. Finaliza con una decena de problemas completamente resueltos, cuyo valor didáctico es innegable, y unos cuantos ejercicios más que se proponen al lector y cuya solución escueta se añade al final del libro.

Los capítulos a que hacemos referencia comprenden los temas de las ecuaciones diferenciales ordinarias, de la transformada de Laplace, en el que creemos adivinar un interés especial por parte del autor, y el de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, más un apéndice sobre ecuaciones en diferencias finitas.

Salta a la vista que no es un libro improvisado ni escrito con precipitación. Se advierte en él la maduración debida sin duda a la probable experiencia de haber explicado largos años estas lecciones. Parodiando en sentido contrario las palabras de un historiador, "todo hace creer que la materia desarrollada ha sufrido la preciosa elaboración de la enseñanza oral". El resultado es un texto escrito con sencillez y claridad, dos cualidades que no siempre van juntas. Más aún, como señala su prologuista P. Dou, "*cumple el requisito fundamental de estar bien escrito*".

Aquí podría terminar esta recensión, pero quiero señalar una segunda nota muy particular. El primer capítulo, insólito en este tipo de libros, desarrolla una teoría que yo sé muy cara para el autor: la de las que él llama funciones valoradas. Son las definidas por el valor absoluto de una función real cualquiera. Establece sus reglas de derivación y de integración, las relaciona con las distribuciones y con las funciones escalonadas y poligonales, y también les aplica, en la correspondiente lección, la transformada de Laplace. Este tipo de funciones fueron estudiadas por un hermano suyo, Arturo, prematuramente desaparecido a sus veintisiete años, y hace ya más de cuarenta, y cuyas publicaciones llega a citar S. Cámara en su "Geometría Analítica". Tales funciones poseen una suerte de propiedades y, sobre todo, se les puede dotar de un tratamiento simbólico muy próximo al ordinario de las funciones. Nuestro autor ha querido, estoy seguro, divulgar esta teoría, sencilla, poco conocida, ágil y de gran aplicación, y muy de su gusto personal, al tiempo que rendir un tributo de devoción a su hermano al que, justamente, dedica la obra.

J.J.E.

En la redacción de este Boletín, todavía no se han recibido soluciones a los siguientes problemas propuestos en números anteriores:

- Problema n° 6 del Boletín n° 4.
- Problema n° 3 del Boletín n° 5.
- Problema n° 3 del Boletín n° 6 (ver corregido el enunciado de éste en el n° 8)
- Problemas n° 3 y n° 4 del Boletín n° 7.
- Problema n° 3 del Boletín n° 8.
- Problemas n^os 1 al 8 y 10 del Boletín n° 9.
- Problemas n^os 1 al 9 del Boletín n° 10.

Esperamos que esta nota anime a nuestros compañeros a encontrar estas soluciones y que nos las remitan para su publicación en los próximos números.

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA PRIMERA FASE DE LA " XXIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA ", CUYA CRONICA SE RECOGE EN ESTE BOLETIN.

PROBLEMA 1° :

Sean m y n dos números enteros y positivos distintos, tales que $m^2 + n^2$ es múltiplo de $m + n$. Se pide:

1° - Probar que m y n no pueden ser primos entre si.

2° - Determinar todos los valores de m que cumplen esa condición, si $n = 35$.

PROBLEMA 2° :

Hallar todos los números reales x , y , z , que verifican:

$$x\,y\,z = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$$

PROBLEMA 3° :

Dado un triángulo ABC , sea B´ un punto del lado AB distinto de A y de B , C´ el punto de intersección con AC de la paralela por B´ a BC , x la circunferencia de centro B que pasa por C , x´ la circunferencia de centro B que pasa por C´ y D el otro punto de intersección de x´ con la recta AC. Siendo t la tangente a x en C y t´ la tangente a x´ en D , demostrar que:

1° - t y t´ son rectas secantes (se cortan).

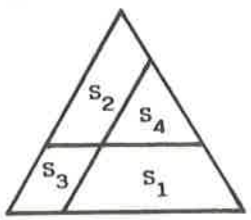
2° - Si T es el punto de intersección de t y t´ , entonces el triángulo CTD es isósceles.

PROBLEMA 4° :

Dadas las ecuaciones $x^2 + bx + c = 0$, $x^2 + b'x + c' = 0$, donde b , c , b' , c' son números enteros que cumplen $(b-b')^2 + (c-c')^2 > 0$ probar que si las ecuaciones tienen una raiz común, las dos segundas raices son enteros distintos.

PROBLEMA 5° :

En un triángulo equilátero de lado 1, determinar a qué distancia de los lados se han de trazar dos paralelas, de modo que lo descompongan en cuatro regiones como se indica en la figura, tales que sus áreas S_1, S_2, S_3, S_4 (en ese orden) estén en progresión aritmética. Expresar la solución exacta, mediante radicales y simplificada (no hay que dar soluciones aproximadas).



PROBLEMA 6° :

Sea N un número natural par y consideremos las ternas (x, y, z) de números naturales mayores que 1 tales que N sea el mínimo común múltiplo de (x, y, z) . Hallar x , y , z , de modo que sea máximo:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

PROBLEMA 7° :

Sean a , b , c los lados de un triángulo y α , β , γ los ángulos opuestos a cada uno de ellos. Demostrar que si se verifica:

$$a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \, (a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta) ,$$

el triángu-lo es isósceles.

PROBLEMA 8° :

Se consideran los triángulos que resultan de unir el baricentro de un triángulo rectángulo con cada uno de los vértices. Demostrar que si los lados del triángulo rectángulo son números naturales, las áreas de los triángulos considerados son números pares.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA XXVII OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL, CELEBRADA EN VARSOVIA EN JULIO DE 1986, CUYA RESEÑA FUE PUBLICADA EN EL ANTERIOR NUMERO DE ESTE BOLETIN.

PROBLEMA 9° :

Sea d cualquier número entero estrictamente positivo distinto de 2 , 5 y 13 . Demuestre que pueden hallarse dos números diferentes pertenecientes al conjunto $\{ 2 , 5 , 13 , d \}$, tales que $ab - 1$ no es un cuadrado perfecto.

PROBLEMA 10° :

Dados un triángulo $A_1A_2A_3$ y un punto P_o en el plano, se define $A_s = A_{s-3}$ para todo $s \geq 4$. Construimos una sucesión de puntos P_o , P_1 , P_2 , ... , tal que P_{k+1} (k = 0, 1, 2, ...) es la imagen de P_k por una rotación de centro A_{k+1} y de ángulo 120° en sentido horario. Demuestre que si $P_{1986} = P_o$, entonces el triángulo $A_1A_2A_3$ es equilátero.

PROBLEMA 11° :

A cada vértice de un pentágono regular le asignamos un número entero de modo que la suma de estos cinco números es estrictamente positiva. Si a tres vértices consecutivos corresponden los números x , y , z , con $y < 0$, entonces se puede realizar la operación siguiente: Los números x , y , z se reemplazan respectivamente por $x+y$, $-y$, $z+y$. Esta operación se efectúa repetidamente mientras alguno de los cinco números sea estrictamente negativo. Determine si después de un número finito de pasos, este procedimiento necesariamente termina.

PROBLEMA 12° :

Sean A y B dos vértices consecutivos de un polígono regular de n lados $(n \geq 5)$ y de centro O . Un triángulo XYZ , igual al triángulo OAB , está colocado inicialmente de manera que los puntos X , Y y Z coinciden respectivamente con los puntos O , A y B . El trián

gulo XYZ se desplaza en el plano del polígono de tal modo que los puntos Y y Z siempre están sobre los lados del polígono y el punto X queda en el interior del mismo.

Halle el lugar geométrico descrito por X cuando Y y Z recorren, cada uno, toda la frontera del polígono.

PROBLEMA 13° :

Hallar todas las funciones f definidas del conjunto de los números reales no negativos en sí mismo, que satisfacen las tres condiciones siguientes:

i $\quad f\left[x f(y)\right] f(y) = f(x+y)$, para todo $x , y \geq 0$

ii $\quad f(2) = 0$

iii $\quad f(x) \neq 0$, para $0 \leq x < 2$.

PROBLEMA 14° :

En el plano se da un conjunto finito de puntos con coordenadas enteras. ¿ Es siempre posible colorear algunos de los puntos del conjunto en rojo y los puntos restantes en blanco, de modo que, para cualquier línea recta L paralela a uno u otro de los ejes coordenados, el valor absoluto de la diferencia entre el número de puntos blancos y el número de puntos rojos en L , no sea mayor que 1 ?

Justifique su respuesta.

XXVII MIĘDZYNARODOWA OLIMPIADA MATEMATYCZNA

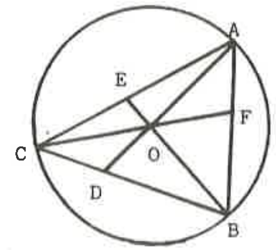
PROBLEMA 6° DEL BOLETIN N° 8

Dado un triángulo ABC, se consideran los puntos D, E, F de las rectas BC, AC y AB, respectivamente. Si las rectas AD, BE y CF pasan todas por el centro O de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, cuyo radio es r, demostrar que:

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{r}$$

Solución:

Como ángulo central de un inscrito, $\widehat{BOC} = 2A$, y en el triángulo



isósceles BOC , será $\widehat{OBC} = \frac{\pi - 2A}{2} = \frac{\pi}{2} - A$ y también $\widehat{CEB} = \pi - C - (\frac{\pi}{2} - A) = \frac{\pi}{2} + A - C$.

El teorema de los senos aplicado al triángulo BCE da:

$$\frac{\text{sen } C}{BE} = \frac{\text{sen } \widehat{CEB}}{a}$$

pero como es

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2r \text{ , resulta:}$$

$$BE = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } \widehat{CEB}} = \frac{2r \text{ sen } A \text{ sen } C}{\text{sen}(\frac{\pi}{2} + A - C)} = \frac{2r \text{ sen } A \text{ sen } C}{\cos(C - A)}$$

Procediendo análogamente con AD y CF se obtiene:

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{2r} \cdot \frac{\text{sen } A \cos(B-C) + \text{sen } B \cos(C-A) + \text{sen } C \cos(A-B)}{\text{sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C} =$$

$$= \frac{1}{2r} \cdot \frac{\text{senA cosB cosC} + \text{cosA senB cosC} + \text{cosA cosB senC} + 3 \text{ senA senB senC}}{\text{sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C}$$

$$= \frac{1}{2r}\left(\frac{\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C}{\text{tg } A \text{ tg } B \text{ tg } C} + 3\right) = \frac{1}{2r} \cdot 4 = \frac{2}{r} \text{ , c. d. d. ,}$$

ya que, como $A + B + C = \pi$, $\text{tg } C = \text{tg}(\pi - A - B) = - \frac{\text{tg } A + \text{tg } B}{1 - \text{tg } A \text{ tg } B}$

y en consecuencia $\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C = (\text{tg } A + \text{tg } B)\left(1 - \frac{1}{1 - \text{tg } A \text{ tg } B}\right) =$

$$= (\text{tg } A + \text{tg } B) \frac{- \text{tg } A \text{ tg } B}{1 - \text{tg } A \text{ tg } B} = \text{tg } A \text{ tg } B \text{ tg } C \text{ .}$$

Argearge

PROBLEMA 9° del boletin n° 9

Sean p y q números naturales tales que:

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} \quad ;$$

probar que p es divisible por 1979 .

Solución

La igualdad anterior se puede expresar en la forma:

$$\frac{p}{q} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{659}\right) ,$$

de donde resulta

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \frac{1}{662} + \dots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

y agrupando los pares de sumandos que equidistan de los extremos:

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319}\right) + \left(\frac{1}{661} + \frac{1}{1318}\right) + \dots + \left(\frac{1}{989} + \frac{1}{990}\right)$$

o sea:

$$\frac{p}{q} = \frac{1979}{660 \,.\, 1319} + \frac{1979}{661 \,.\, 1318} + \dots + \frac{1979}{989 \,.\, 990} = 1979 \,.\, \frac{a}{b}$$

donde $\frac{a}{b} = \frac{1}{660 \,.\, 1319} + \frac{1}{661 \,.\, 1318} + \dots + \frac{1}{989 \,.\, 990}$, siendo

b igual al producto de todos los denominadores, o sea

$$b = 660 \,.\, 661 \,.\, 662 \,.\, \dots \,.\, 1319 \quad ;$$

fácilmente se comprueba que 1979 es primo y como los factores de b son todos menores que 1979 , resulta que 1979 y b son primos entre sí.

De $\frac{p}{q} = 1979 \,.\, \frac{a}{b}$ resulta $p = \frac{1979 \,.\, (a\,q)}{b}$ y como b divide al producto 1979 . (a q) y es primo con 1979, resulta que b divide a (a q) , esto es $\frac{a\,q}{b} = c$ (natural) y por tanto $p = 1979 \,.\, c$. Lo que prueba que p es divisible por 1979.

José Valdés Suárez

Madrid