

REVISTA
DE LA

ACADEMIA
DE
CIENCIAS

Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales

DE
ZARAGOZA



Serie 2^a

Volumen 39

1984

INDICE DE MATERIAS

	<i>Págs.</i>
M. ^a P. ALFARO y L. VIGIL. — <i>Sobre raíces de algunas ecuaciones en la teoría de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad</i>	5
J. M. DE OLAZÁBAL. — <i>Una propiedad aritmética de las $\mathcal{F}$-envolturas de grupos finitos π-resolubles</i>	11
M. A. GIL y T. BREZMES. — <i>La quietud esperada: un criterio para comparar sistemas de información difusos</i>	13
J. MARTÍNEZ y C. PÉREZ. — <i>On a general theorem of Krein-Milman</i>	25
M. P. CAGIGAL. — <i>Transport mechanisms in thin film deposition using a R.F. Sputtering system</i>	29
M. P. CAGIGAL. — <i>Caracterización y evaluación de los fenómenos que tienen lugar durante el crecimiento de películas delgadas depositadas en un sistema diodo de R.F.-Sputtering</i>	39
V. SÁNCHEZ CELA. — <i>A structural and compositional suitable habitat in the petrological transformation processes</i>	47
J. M. TENA y J. A. MANDADO. — <i>Estudio geológico de la cuenca terciaria de Calatayud - Daroca</i>	69

SOBRE RAICES DE ALGUNAS ECUACIONES EN LA TEORIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES SOBRE LA CIRCUNFERENCIA UNIDAD.

M^a P. ALFARO Y L. VIGIL

Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Ciencias.
Universidad de Zaragoza. (ESPAÑA).

As a large corollary or the known property

$$\frac{|\hat{P}_n(z)|}{|\hat{K}_n(z,0)|} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 1 \iff |z| \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 1 \quad \forall n$$

we determine here the situation with respect to the unit circle of the roots of several polynomials relative to the theory of orthogonal polynomials.

Sea Π el espacio vectorial de los polinomios en z con coeficientes en $\mathbb{C}$. Sea $(\hat{P}_n(z))_{n=0}^{\infty}$ la base ortonormal asociada a un producto escalar definido en Π mediante una matriz de Toeplitz y $(\hat{K}_n(z,0))_{n=0}^{\infty}$ la correspondiente sucesión de n -núcleos ($\hat{K}_n(z,0)$ es, para cada n , el polinomio recíproco, $\hat{P}_n^*(z)$, de la teoría clásica). Con $(e_n)_{n=0}^{\infty}$, $(w_n)_{n=1}^{\infty}$, designamos las sucesiones paramétricas que utilizamos habitualmente, ([1]),

$$e_n = \Delta_n / \Delta_{n-1} \quad n = 1, 2, \dots; \quad e_0 = 1$$

$$w_n = -e_{n-1} \sqrt{e_n} \hat{P}_n(0), \quad n = 1, 2, \dots$$

Es sabido que los polinomios de la sucesión fundamental satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia ([2])

$$z \hat{P}_{n-1}(z) = \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \hat{P}_n(z) + \frac{w_n}{e_{n-1}} \hat{K}_{n-1}(z,0) \quad (R-I)$$

$$\hat{K}_n(z,0) = \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \hat{K}_{n-1}(z,0) - \frac{\bar{w}_n}{e_{n-1}} \hat{P}_n(z) \quad (R-II)$$

$$\hat{K}_{n-1}(z,0) = \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \hat{K}_n(z,0) + \frac{\bar{w}_n}{e_{n-1}} z \hat{P}_{n-1}(z) \quad (R-III)$$

$$\hat{P}_n(z) = \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} z \hat{P}_{n-1}(z) - \frac{w_n}{e_{n-1}} \hat{K}_n(z,0) \quad (R-IV)$$

Este trabajo puede considerarse como un amplio corolario de la propiedad siguiente ([1]):

Para todo n :
$$\frac{|\hat{p}_n(z)|}{|\hat{k}_n(z,0)|} \leq 1 \Leftrightarrow |z| \leq 1 \quad (1)$$

En él se determina la situación respecto de la circunferencia unidad U , de las raíces de los polinomios de una familia relacionada con la teoría. Se ha elegido el conjunto de todas las combinaciones lineales que pueden construirse con dos de los tres polinomios ligados por cada una de las cuatro fórmulas de recurrencia anteriores. Esta elección no ha sido arbitraria: combinaciones lineales de los $\hat{p}_n(z)$ y $\hat{k}_n(z,0)$ o incluso de los polinomios de segunda especie asociados a ellos, aparecen en el estudio de distintas cuestiones de la teoría.

El procedimiento a seguir con cada uno de los citados polinomios es bastante semejante; por ello, nos limitaremos a exponer el estudio completo sólo en un par de casos distintos y a dar un cuadro (I) que recoge todos los resultados obtenidos.

C U A D R O I ($a = re^{i\theta}$)

	$\text{sen } \beta_n = 0$	$0 < \text{sen } \beta_n < 1$
$az\hat{p}_{n-1}(z) - \hat{p}_n(z)$	$ \alpha < 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos \theta \leq \frac{1+r^2}{2r} \cos \beta_n$
$az\hat{p}_{n-1}(z) + \hat{p}_n(z)$	$ \alpha < 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos \theta \geq -\frac{1+r^2}{2r} \cos \beta_n$
$az\hat{p}_{n-1}(z) - \hat{k}_{n-1}(z,0)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$
$az\hat{p}_{n-1}(z) + \hat{k}_{n-1}(z,0)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$
$a\hat{p}_n(z) - \hat{k}_{n-1}(z,0)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos(\theta + \nu_n) \leq \frac{r^2-1}{2r} \cotg \beta_n$
$a\hat{p}_n(z) + \hat{k}_{n-1}(z,0)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos(\theta + \nu_n) \geq -\frac{r^2-1}{2r} \cotg \beta_n$
$a\hat{k}_n(z,0) - \hat{k}_{n-1}(z,0)$	$ \alpha > 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos \theta \geq \frac{1+r^2}{2r} \cos \beta_n$
$a\hat{k}_n(z,0) + \hat{k}_{n-1}(z,0)$	$ \alpha > 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos \theta \leq -\frac{1+r^2}{2r} \cos \beta_n$
$a\hat{k}_{n+1}(z,0) - \hat{p}_n(z)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos(\theta - \nu_n) \leq \frac{1-r^2}{2r} \cotg \beta_n$
$a\hat{k}_{n+1}(z,0) + \hat{p}_n(z)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos(\theta - \nu_n) \geq -\frac{1-r^2}{2r} \cotg \beta_n$
$a\hat{k}_n(z,0) - \hat{p}_n(z)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$
$a\hat{k}_n(z,0) + \hat{p}_n(z)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$

Los cuadros II y III corresponden a situaciones particulares interesantes (Nótese que el cuadro II expone, en particular, los resultados correspondientes a raíces de combinaciones lineales convexas de los polinomios en cuestión).

CUADRO II

 $(a \in \mathbb{R}^+)$

	$\text{sen } \beta_n = 0$	$0 < \text{sen } \beta_n < 1$
$az\hat{p}_{n-1}(z) - \hat{p}_n(z)$	$ \alpha < 1 \quad (a \neq 1)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1+a^2}{2a} \cos \beta_n$
$az\hat{p}_{n-1}(z) + \hat{p}_n(z)$	$ \alpha < 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq -\frac{1+a^2}{2a} \cos \beta_n$
$az\hat{p}_{n-1}(z) - \hat{k}_{n-1}(z, 0)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \geq 1$	
$az\hat{p}_{n-1}(z) + \hat{k}_{n-1}(z, 0)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \geq 1$	
$a\hat{p}_n(z) - \hat{k}_{n-1}(z, 0)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \geq 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos v_n \leq \frac{a^2-1}{2a} \cotg \beta_n$
$a\hat{p}_n(z) + \hat{k}_{n-1}(z, 0)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \geq 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos v_n \geq -\frac{a^2-1}{2a} \cotg \beta_n$
$a\hat{k}_n(z, 0) - \hat{k}_{n-1}(z, 0)$	$ \alpha > 1 \quad (a \neq 1)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1+a^2}{2a} \cos \beta_n$
$a\hat{k}_n(z, 0) + \hat{k}_{n-1}(z, 0)$	$ \alpha > 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq -\frac{1+a^2}{2a} \cos \beta_n$
$a\hat{k}_{n-1}(z, 0) - \hat{p}_n(z)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos v_n \leq \frac{1-a^2}{2a} \cotg \beta_n$
$a\hat{k}_{n-1}(z, 0) + \hat{p}_n(z)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos v_n \geq -\frac{1-a^2}{2a} \cotg \beta_n$
$a\hat{k}_n(z, 0) - \hat{p}_n(z)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$	
$a\hat{k}_n(z, 0) + \hat{p}_n(z)$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1$	

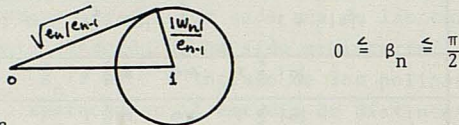
CUADRO III

	$\text{sen } \beta_n = 0$	$0 < \text{sen } \beta_n < 1$
$z\hat{p}_{n-1}(z) - \hat{p}_n(z)$		$ \alpha > 1$
$z\hat{p}_{n-1}(z) + \hat{p}_n(z)$	$ \alpha < 1$	$ \alpha < 1$
$z\hat{p}_{n-1}(z) - \hat{k}_{n-1}(z, 0)$		$ \alpha = 1$
$z\hat{p}_{n-1}(z) + \hat{k}_{n-1}(z, 0)$		$ \alpha = 1$
$\hat{p}_n(z) - \hat{k}_{n-1}(z, 0)$	$ \alpha = 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos v_n \leq 0$
$\hat{p}_n(z) + \hat{k}_{n-1}(z, 0)$	$ \alpha = 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos v_n \geq 0$
$\hat{k}_n(z, 0) - \hat{k}_{n-1}(z, 0)$		$ \alpha < 1$
$\hat{k}_n(z, 0) + \hat{k}_{n-1}(z, 0)$	$ \alpha > 1$	$ \alpha > 1$
$\hat{k}_{n-1}(z, 0) - \hat{p}_n(z)$	$ \alpha = 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos v_n \leq 0$
$\hat{k}_{n-1}(z, 0) + \hat{p}_n(z)$	$ \alpha = 1$	$ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \cos v_n \geq 0$
$\hat{k}_n(z, 0) - \hat{p}_n(z)$		$ \alpha = 1$
$\hat{k}_n(z, 0) + \hat{p}_n(z)$		$ \alpha = 1$

La relación fundamental

$$1 = \frac{e_n}{e_{n-1}} + \left| \frac{w_n}{e_{n-1}} \right|^2 \quad (2)$$

demostrada en [1], admite una interpretación geométrica evidente



mediante la cual resulta,

$$\sqrt{e_n/e_{n-1}} = \cos \beta_n, \quad |w_n|/e_{n-1} = \sin \beta_n$$

El caso $\beta_n = \pi/2$ corresponde a una situación terminal. Supondremos, pues, en lo que sigue $0 \leq \beta_n < \pi/2$. Pondremos $\arg \frac{w_n}{e_{n-1}} = \nu_n$ y $a = re^{i\theta}$ será un número complejo arbitrario.

$$1.- \text{Ecuación } a z \hat{p}_{n-1}(z) - \hat{p}_n(z) = 0$$

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz de la ecuación se verificará

$$a \hat{p}_{n-1}(\alpha) = \hat{p}_n(\alpha)$$

en cuyo caso, de R-I resulta

$$(1-a \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}}) \alpha \hat{p}_{n-1}(\alpha) = \frac{w_n}{e_{n-1}} \hat{k}_{n-1}(\alpha, 0) \quad (3)$$

Distinguiremos dos situaciones

$$i) \quad \sin \beta_n = 0$$

La relación anterior se reduce a

$$(1-a) \alpha \hat{p}_{n-1}(\alpha) = 0$$

así que $|\alpha| < 1$ siempre que $a \neq 1$. Nótese que este caso corresponde a $\hat{p}_{n-1}(z) = \hat{p}_n(z)$ con lo cual

$$a z \hat{p}_{n-1}(z) - \hat{p}_n(z) = (a-1) \hat{p}_n(z)$$

$$ii) \quad 0 < \sin \beta_n < 1$$

De (3) se deduce

$$\left| \frac{\hat{k}_{n-1}(\alpha, 0)}{\alpha \hat{p}_{n-1}(\alpha)} \right|^2 = \frac{|1-r \cos \beta_n e^{i\theta}|^2}{\sin^2 \beta_n}$$

Por tanto, de acuerdo con (1), se tendrá

$$|\alpha| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1+r^2 \cos^2 \beta_n - 2r \cos \theta \cos \beta_n}{\sin^2 \beta_n} \geq 1$$

resultando finalmente

$$|\alpha| \leq 1 \Leftrightarrow \cos \theta \leq \frac{1+r^2}{r^2} \cos \beta_n$$

En particular,

$$\text{si } a \in \mathbb{R}^+, \quad |\alpha| \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1+r^2}{r^2} \cos \beta_n$$

$$\text{si } a = 1, \quad |\alpha| \leq 1 \Leftrightarrow \cos \beta_n \geq 1.$$

$$2.- \text{ Ecuación } a z \hat{p}_{n-1}(z) - \hat{k}_{n-1}(z, 0) = 0$$

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz, $a \alpha \hat{p}_{n-1}(\alpha) = \hat{k}_{n-1}(\alpha, 0)$ con lo cual

$$\frac{|\alpha \hat{p}_{n-1}(\alpha)|}{|\hat{k}_{n-1}(\alpha, 0)|} = 1/|a|$$

y, en cualquier caso, se tiene

$$|\alpha| \leq 1 \Leftrightarrow |a| \geq 1$$

Las fórmulas de recurrencia aportan, ahora, una información suplementaria. En efecto, de R-I se deduce

$$(1-a \frac{w_n}{e_{n-1}}) \alpha \hat{p}_{n-1}(\alpha) = \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \hat{p}_n(\alpha) \quad (4)$$

luego

$$\left| \frac{\hat{p}_n(\alpha)}{\alpha \hat{p}_{n-1}(\alpha)} \right|^2 = \frac{|1-r \sin \beta_n e^{i(\theta+v_n)}|^2}{\cos^2 \beta_n}$$

y, por tanto,

$$\left| \frac{\hat{p}_n(\alpha)}{\alpha \hat{p}_{n-1}(\alpha)} \right|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1+r^2 \sin^2 \beta_n - 2r \sin \beta_n \cos(\theta+v_n)}{\cos^2 \beta_n} \leq 1$$

$$\left| \frac{\hat{p}_n(\alpha)}{\alpha \hat{p}_{n-1}(\alpha)} \right|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1+r^2}{2r} \sin \beta_n \leq \cos(\theta+v_n) \quad (5)$$

Finalmente, se tiene

- 1) Si $|a| > 1$ y $\frac{1+r^2}{2r} \sin \beta_n \leq \cos(\theta+v_n) \Rightarrow \frac{|\hat{p}_n(\alpha)|}{|\hat{p}_{n-1}(\alpha)|} < 1$
- 2) Si $|a| < 1$ y $\frac{1+r^2}{2r} \sin \beta_n \geq \cos(\theta+v_n) \Rightarrow \frac{|\hat{p}_n(\alpha)|}{|\hat{p}_{n-1}(\alpha)|} > 1$
- 3) Si $|a| = 1$, se tiene $\frac{|\hat{p}_n(\alpha)|}{|\hat{p}_{n-1}(\alpha)|} \leq 1 \Leftrightarrow \sin \beta_n \leq \cos(\theta+v_n)$

En particular, si $a = 1$

$$\frac{|\hat{p}_n(\alpha)|}{|\hat{p}_{n-1}(\alpha)|} \leq 1 \Leftrightarrow \sin \beta_n \leq \cos v_n$$

Nota.

En el caso del polinomio $a \hat{k}_n(z, 0) - \hat{p}_n(z)$, para cada α raíz del mismo se obtiene, a partir de R-II, la condición

$$\frac{|\hat{K}_{n-1}(\alpha, 0)|}{|\hat{K}_n(\alpha, 0)|} \leq 1 \Leftrightarrow \sin \beta_n \leq -\cos v_n \quad (6)$$

Conclusiones semejantes a (5) y (6) respectivamente, resultan para los polinomios $az\hat{P}_{n-1}(z) + \hat{K}_{n-1}(z, 0)$ y $a\hat{K}_n(z, 0) + \hat{P}_n(z)$.

Bibliografía

- 1.- M. ALFARO: Rev. Acad. Ci. Zaragoza (2), 29 (1974), pp. 5-79.
- 2.- M.P. ALFARO: Rev. Acad. Ci. Zaragoza 36 (1981), pp. 5-14.
- 3.- G. FREUD: "Orthogonal polynomials". Pergamon Press. Londres (1981).

UNA PROPIEDAD ARITMETICA DE LAS $\mathcal{F}$ -ENVOLTURAS DE GRUPOS FINITOS π -RESOLUBLES

J.M. DE OLAZÁBAL

Departamento de Algebra y Fundamentos. Facultad de Ciencias.
Universidad de Santander. España.

All through this paper group means finite group. Let π be a set of prime numbers. In 1972 Brewster shows that every π -solvable group G contains $\mathcal{F}$ -projectors and each two $\mathcal{F}$ -projectors are conjugate in G , if $\mathcal{F}$ is a π -saturated formation¹. Brewster remarks that the class of the π '-groups is a π -saturated formation.

Let $\mathcal{G}_\pi$ be the class of the π -groups. Through, in general, an $\mathcal{G}_\pi$ -projector is not a π -Hall subgroup², it is easy to verify that the $\mathcal{G}_{\pi'}$ -projectors of a π -solvable group G are exactly the π' -Hall subgroups of G , i.e., its index is a $(\pi')' = \pi$ -number.

Let $\mathcal{F}$ be a π -saturated formation. We consider when an $\mathcal{F}$ -projector of a π -solvable group G has w' -index at G , with $w = \text{char } \mathcal{F}$, and we prove the following result: "Let $\mathcal{F}$ be a π -saturated Formation and $w = \text{char } \mathcal{F}$. Then the following conditions are equivalent:

- i) The $\mathcal{F}$ -projectors of every π -solvable group G have w' -index at G .
- ii) If G is a π -solvable group, N a minimal normal π -subgroup of G , then $G/N \in \mathcal{F}$ and $N \in \mathcal{F}$ implies $G \in \mathcal{F}$.

1.- Definición

Sea $\mathcal{F}$ una clase de grupos finitos, $w = \text{car } \mathcal{F}$. Se dice $\mathcal{F}$ -cobertura de un grupo G a una $\mathcal{F}$ -envoltura F de G tal que $|G:F|$ sea un w' -número.

2.- Ejemplos

- i) Para cada grupo G , H es una $\mathcal{G}_\pi$ -cobertura de G si y sólo si H es un π -subgrupo de Hall de G
- ii) C_3 y C_5 son $\mathcal{G}_\pi$ -envolturas de A_5 , con $\pi = \{3, 5\}$, pero ni C_3 ni C_5 son $\mathcal{G}_\pi$ -coberturas².

3.- Proposición

i) Sea $\mathcal{F}$ una clase s -cerrada de grupos, $w = \text{car } \mathcal{F}$. Si $F \in \mathcal{F}$ y $|G:F|$ es un w' -número, F es una $\mathcal{F}$ -envoltura de G ; por tanto, F es una $\mathcal{F}$ -cobertura de G .

ii) Sea $\mathcal{F}$ un homomorfo n -cerrado, $w = \text{car } \mathcal{F}$. Si G es un grupo resoluble con un $\mathcal{F}$ -subgrupo F de w' -índice, F es una $\mathcal{F}$ -envoltura de G ; de aquí, F es una $\mathcal{F}$ -cobertura de G .

Demostración

$F \leq U \leq G$ y U/K $\mathcal{F}$ -grupo implica $FK \leq U$. Si $FK \neq U$, existe un primo p divisor de $|U:FK|$; así, $p \mid |G:F|$ y $p \in w'$. Por otro lado, $p \mid |U/K|$, luego C_p es un subgrupo de U/K , por lo que $C_p \in \mathcal{F}$. Se sigue que $p \in w$, una contradicción.

ii) Es análoga, ya que si U/K es un $\mathcal{F}$ -grupo resoluble y $p \mid |U/K|$, existe un factor principal de U/K p -elemental abeliano; por lo tanto, puesto que $\mathcal{F}$ es un homomorfo n -cerrado, C_p es un $\mathcal{F}$ -grupo y se deduce una contradicción de la misma manera.

4.- Definición¹

Decimos que $\mathcal{F}$ es una formación π -saturada si $\mathcal{F}$ es una formación saturada tal que $G/O_{\pi}(G) \in \mathcal{F}$ implica $G \in \mathcal{F}$.

5.-Proposición

Sea $\mathcal{F}$ una formación π -saturada, $w = \text{car } \mathcal{F}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) Las $\mathcal{F}$ -envolturas de todo grupo π -resoluble tienen w -índice en G
- ii) Si G es π -resoluble, N un π -subgrupo normal minimal de G , entonces $G/N \in \mathcal{F}$ y $N \in \mathcal{F}$ implica $G \in \mathcal{F}$.

Demostración

i) implica ii): Sea G un contraejemplo minimal. Así $G \notin \mathcal{F}$ y existe un π -subgrupo normal minimal N de G tal que $N \in \mathcal{F}$ y $G/N \in \mathcal{F}$. Puesto que $\mathcal{F}$ es saturada N no puede estar incluido en $O_{\pi}(G)$; y puesto que G es π -resoluble, N es p -elemental abeliano. Sea F un subgrupo maximal de G tal que $N \not\subseteq F$; entonces, $G = FN$ y $F \cap N = 1$, puesto que N es abeliano y normal minimal de G . Por tanto, $F \cong G/N \in \mathcal{F}$.

Por otro lado, si M es otro subgrupo normal minimal de G , $G/M \in \mathcal{F}$, ya que $\mathcal{F}$ es formación; así $(M \times N)/M$ es un π -subgrupo normal minimal de G/M tal que $(M \times N)/M \cong N \in \mathcal{F}$ y $(G/M)/(M \times N)/M \in \mathcal{F}$ lo que contradice la minimalidad de G . En este momento es fácil comprobar que F es una $\mathcal{F}$ -envoltura de G , y, por tanto, $|G:F|$ es un w -número. Se sigue que N es un w -grupo y $p \in w$. Finalmente, N es un $\mathcal{F}$ -grupo p -elemental abeliano, luego $C_p \in \mathcal{F}$ y $p \in \mathcal{F}$, lo que es contradictorio.

ii) implica i): Sea G contraejemplo minimal; G debe ser π -resoluble con una $\mathcal{F}$ -envoltura F tal que $|G:F|$ no es w -número; así, $G \notin \mathcal{F}$. Dado N normal minimal de G , FN/N es una $\mathcal{F}$ -envoltura de G/N y por minimalidad de G , $|G:FN|$ es un w -número. Por tanto, $F \neq FN$ y $|FN:F|$ no puede ser w -número. Puesto que F es $\mathcal{F}$ -envoltura de FN , debe ser $FN = G$, por minimalidad. Así, $G/N \cong F/(F \cap N) \in \mathcal{F}$.

Si N es un π' -grupo, $G \in \mathcal{F}$, pues $\mathcal{F}$ es π -saturada; necesariamente, N es un π -subgrupo normal minimal de G . Ahora la hipótesis ii) impide que N sea $\mathcal{F}$ -grupo. Por lo tanto, N es p -elemental abeliano, siendo p un primo de w . Pero $|G:F| = |FN:F| = |N:F \cap N|$ no es un w -número, luego $|N| = p^r$ no puede ser w -número; es decir, $p \in w$, una contradicción.

6.- Corolario

Sea $\mathcal{F}$ una formación π -saturada. Son equivalentes:

- i) Todo grupo π -resoluble tiene una única clase conjugada de $\mathcal{F}$ -coberturas.
- ii) Si G es π -resoluble con un π -subgrupo normal minimal N , entonces $G/N \in \mathcal{F}$ y $N \in \mathcal{F}$ implica $G \in \mathcal{F}$.

Observación

Debemos notar que toda formación π -saturada y extensible, por ejemplo la clase de los π' -grupos, cumple la hipótesis ii) de la proposición 5 y corolario 6.

Agradecimientos

Expreso mi reconocimiento al Pr. Zappa por sus sugerencias en la redacción de estos resultados.

REFERENCIAS

- 1 BREWSTER, B.: " $\mathcal{F}$ -projectors in finite π -solvable groups"
Archiv Math. (Basel) 23, 1972 pp. 133-138.
- 2 OLAZABAL, J.M.: " π -subgrupos de Hall y envolturas"
Comunicación presentada en la XII R.A.M.E. Málaga 1976. En prensa.

LA QUIETUD ESPERADA: UN CRITERIO PARA COMPARAR SISTEMAS DE INFORMACION DIFUSOS

M.A. GIL Y T. BREZMES

Departamento de Matemáticas. Universidad de Oviedo.

The aim of this paper is to extend the "Criterion of maximizing the expected quietness", stated in a previous paper, to the situation where we consider a statistical decision problem in which the available information from the associated experiments is vague. More precisely, we shall be concerned with the case where the possible experimentation only provides information involved in a fuzzy information system.

Thus, we shall define "value of the expected quietness of a fuzzy information system". Then, on the basis of this concept, the new criterion is established and exhaustively studied.

1. INTRODUCCION.

En el problema de decisión estadística, la persona responsable de la decisión (decisor) tiene varios cursos de acción (acciones) posibles y la consecuencia de cualquiera de éstos depende del estado de la naturaleza. En dicho problema se admite que el decisor es capaz de evaluar numéricamente las distintas consecuencias, asignando valores (utilidades) a cada par (acción, estado). Cada uno de estos valores cuantifica el interés de la elección de la correspondiente acción ante el estado de la naturaleza. Además, aunque el verdadero estado se desconoce, puede establecerse una distribución a priori sobre el espacio de los posibles estados (se supone ambiente de riesgo).

Por otra parte, el problema de decisión estadística incluye la consideración de sistemas de información probabilísticos (o experimentos, en la terminología estadística usual), a partir de cada uno de los cuales pueden obtenerse informaciones exactas según cierta distribución condicionada por el estado de la naturaleza.

El problema de decisión difuso, formulado por H. Tanaka *et al.*^{14, 15}, parte de un problema de decisión estadística en el que al decisor le resulta complejo o no es capaz de evaluar el interés de cada acción ante cada estado y, sin embargo, puede valorar el correspondiente a ciertos conjuntos difusos sobre el espacio de acciones (acciones difusas) frente a cada uno de ciertos sucesos difusos sobre el espacio de estados (estados difusos). Esta considera-

ción no es una elucubración teórica, sino que tiene una base real clara. Así, suele resultarmás sencillo asignar utilidades a un conjunto de pares (acción difusa, estado difuso), que usualmente se encuentran en menor número que los pares (acción, estado).

Sin embargo, el elemento fundamental del problema de decisión difuso reside en la suposición de que de la realización de los sistemas de información probabilísticos no necesariamente somos capaces de obtener información exacta sino que más bien la información al alcance puede expresarse en términos de la información suministrada por un sistema de información difuso (que es cierto conjunto de sucesos difusos sobre un sistema probabilístico).

Obviamente, un problema de decisión difuso constituye una generalización de un problema de decisión estadística, pero la definición de probabilidad de un suceso difuso dada por Zadeh¹⁷, y la extensión de conceptos que vamos a llevar a cabo, permiten tratar el problema difuso como no difuso (con el aliciente de que una información difusa es más fácil de alcanzar que una información exacta).

Nuestro objetivo final va a ser el de la comparación entre los sistemas de información disponibles para un decisor en un problema de decisión difuso.

2. VALOR DE LA QUIETUD ESPERADA DE UN SISTEMA DE INFORMACION DIFUSO.

Consideremos un problema de decisión estadística con espacio de estados de la naturaleza S y espacio de acciones A . Un sistema de información probabilístico (s.i.p.) asociado al problema consiste en una terna $X = (X, \mathcal{B}_X, P_s)$, $s \in S$, en que $(X, \mathcal{B}_X)$ es un espacio medible (siendo X un subconjunto de un espacio euclídeo, usualmente $\mathbb{R}$, y $\mathcal{B}_X$ es la σ -álgebra de Borel sobre X). Generalmente se supone que S es un conjunto en un espacio euclídeo. Admitiremos también que existe una distribución de probabilidad a priori π sobre $(S, \mathcal{B}_S)$, donde $\mathcal{B}_S$ representa la σ -álgebra de Borel sobre S . Las medidas P_s , junto a la distribución π , determinan la distribución marginal sobre X , la distribución conjunta sobre $X \times S$ y las distribuciones a posteriori π_x sobre S para cada $x \in X$.

Consideremos, por otra parte, un problema de decisión difuso determinado por:

- * un espacio de estados difusos, $S = \{S_1, S_2, \dots, S_r\}$, que es una partición difusa de S por sucesos difusos (es decir, $S_1, S_2, \dots, S_r$ son subconjuntos difusos de S cuyas funciones de pertenencia $\mu_{S_1}, \mu_{S_2}, \dots, \mu_{S_r}$ son medibles Borel, y $\mu_{S_1}(s) + \mu_{S_2}(s) + \dots + \mu_{S_r}(s) = 1$, para cada $s \in S$).
- * un espacio de acciones difusas, $A = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$. Cada acción difusa A_i es un subconjunto difuso de A .
- * una función de utilidad positiva sobre $A \times S$.
- * la disponibilidad de sistemas de información difusos (s.i.p.) que son particiones difusas de s.i.p. asociados al problema de decisión estadística e integradas por sucesos difusos.

La definición de probabilidad de un suceso difuso, Zadeh¹⁷, permite admitir la existencia de las siguientes medidas de probabilidad relacionadas con

un s.i.d. $X = \{X_1, X_2, \dots, X_t\}$ sobre el s.i.p. X :

$$P(S_k) = \int_S \mu_{S_k}(s) d\pi(s), \quad \forall S_k \in S$$

$$P_S(X_m) = \int_X \mu_{X_m}(x) dP_S(x), \quad \forall X_m \in X, \quad \forall s \in S$$

$$P_{S_k}(X_m) = \int_S \int_X \mu_{X_m}(x) \mu_{S_k}(s) \frac{1}{P(S_k)} dP_S(x) d\pi(s), \quad \forall S_k \in S$$

$$\forall X_m \in X$$

$$P(S_k, X_m) = P_{S_k}(X_m) \cdot P(S_k) = \int_S \int_X \mu_{X_m}(x) \mu_{S_k}(s) dP_S(x) d\pi(s)$$

$$\forall S_k \in S, \quad \forall X_m \in X$$

$$P(X_m) = \sum_k P(S_k, X_m), \quad \forall X_m \in X$$

Tanaka *et al.*¹⁵ han generalizado la fórmula de Bayes al caso difuso, obteniendo:

$$P(S_k/X_m) = \int_S \int_X \frac{\mu_{X_m}(x) \mu_{S_k}(s)}{P(X_m)} dP_S(x) d\pi(s), \quad \forall S_k \in S$$

$$\forall X_m \in X$$

(En las definiciones anteriores, y en lo que sigue, entenderemos todas las integrales en el sentido de Lebesgue-Stieljes y supondremos que todas las probabilidades condicionadas que se consideren tienen sentido).

Tanaka *et al.*^{14,15} definieron:

Definición 2.1.- Se llama *utilidad esperada de la acción difusa* A_ℓ al valor:

$$u(A_\ell) = \sum_k P(S_k) u(A_\ell, S_k)$$

Definición 2.2.- Se llama *utilidad esperada de la acción difusa* A_ℓ *dada la información difusa* $X_m \in X$ al valor:

$$u(A_\ell/X_m) = \sum_k P(S_k/X_m) u(A_\ell, S_k)$$

Nosotros introducimos ahora las siguientes definiciones:

Definición 2.3.- Se llama *inquietud asociada a la acción difusa* A_ℓ al valor:

$$HU^*(A_\ell) = - \sum_k P(S_k) \lg \frac{u(A_\ell, S_k)}{u(A_\ell)}$$

Definición 2.4.- Se llama *inquietud asociada a la acción difusa* A_ℓ *dada la información difusa* $X_m \in X$ al valor:

$$HU^*(A_\ell/X_m) = - \sum_k P(S_k/X_m) \lg \frac{u(A_\ell, S_k)}{u(A_\ell/X_m)}$$

Definición 2.5.- Denominamos *acción difusa óptima a priori* a una acción difusa A_0^* que cumpla:

$$HU^*(A_0^*) = \min_{A_\ell} HU^*(A_\ell)$$

Definición 2.6.- Denominamos *acción difusa óptima a posteriori dada la información difusa* $X_m \in X$ a una acción difusa $A_{X_m}^*$ tal que:

$$HU^*(A_{X_m}^*/X_m) = \min_{A_\ell} HU^*(A_\ell/X_m)$$

Definición 2.7.- Recibe el nombre de "*valor de la quietud esperada del s.i.d. X*" la expresión:

$$\begin{aligned} IU^*(S;X) &= HU^*(A_0^*) - \sum_m P(X_m) HU^*(A_{X_m}^*/X_m) = \\ &= \sum_k \sum_m P(S_k, X_m) \lg \frac{u(A_{X_m}^*, S_k) u(A_0^*)}{u(A_{X_m}^*/X_m) u(A_0^*, S_k)} \end{aligned}$$

(Cuando sea necesario especificar la distribución a priori sobre S , denotaremos por $IU^*(S;X;\pi)$).

NOTA: La *medida de inquietud* en que se basa la elección entre las acciones difusas, generaliza al caso difuso una medida estudiada exhaustivamente en artículos anteriores⁵ y que forma parte de la familia de las entropías "inset" del tipo de Shannon¹ (concretamente, es una particularización de la medida de información de Kullback¹³). Sus propiedades y caracterización axiomática han sido estudiadas^{4,5}, evidenciándose que era una medida adecuada del grado de inquietud. Como la medida de inquietud es invariante por homotecias respecto a las utilidades, su eficacia es mayor cuando la evaluación de utilidades se lleva a cabo atendiendo a las razones entre cada dos utilidades (por lo que considerar éstas positivas no representa restricción alguna). Si, por ejemplo, el individuo hubiera asignado utilidades atendiendo a las diferencias entre ellas sería más conveniente utilizar una medida invariante por traslaciones, como la varianza, cuyas propiedades y caracterización axiomática como medida de inquietud han sido vistas⁷. (No obstante, la simetría de la función $f(x) = x^2$ y la no simetría de $f(x) = -\lg x$, confieren una mayor posibilidad de distinción a la medida aquí considerada que a la varianza).

3. COMPARACION DE SISTEMAS DE INFORMACION DIFUSOS.

En el problema de decisión difuso anterior, sean X e Y cualesquiera s.i.d. asociados al problema. Decimos que X es *preferido o indiferente* a Y , y lo denotaremos por $X \stackrel{IU^*}{\succeq} Y$, si y sólo si:

$$IU^*(S;X) \geq IU^*(S;Y)$$

para la distribución a priori concreta sobre S .

Decimos que X es *indiferente* a Y , y lo denotaremos por $X \stackrel{IU^*}{\sim} Y$, si y sólo si $IU^*(S;X) = IU^*(S;Y)$, para la distribución a priori concreta sobre S .

Obviamente, la relación Iu^* $\geq$ determina un preorden completo en el conjunto de los s.i.d. asociados al problema de decisión difuso considerado.

4. PROPIEDADES.

Gracias a las definiciones de Zadeh¹⁷ y a las recogidas en la sección 2, el criterio que acabamos de proponer es matemáticamente un caso particular del criterio estudiado en⁶ aunque esencialmente se trate de una extensión de este último. En consecuencia, todas las propiedades vistas para el criterio en el caso no difuso⁶ podrían enunciarse en términos de los s.i.d. de forma inmediata.

Sin embargo, hemos preferido enunciar propiedades menos generales pero más interesantes por concernir específicamente a los s.i.p. del problema de decisión no difuso que sirve de base. Esto conduce, además, a interpretaciones muy intuitivas.

Antes de llevar a cabo el estudio de tales propiedades, vamos a recordar e introducir ciertas definiciones:

Definición 4.1.- Un s.i.p. X a partir del cual puede obtenerse la información exacta x con una distribución independiente del estado, $\forall x \in X$, se denomina *sistema de información probabilístico nulo*.

Definición 4.2.- Decimos que $X_m \in X$ es una *información difusa totalmente difusa* si su función de pertenencia, μ_{X_m} , es constante.

Definición 4.3.- Sean $X_1 = (X_1, B_{X_1}, P_s^1)$ y $X_2 = (X_2, B_{X_2}, P_s^2)$, $s \in S$, s. i. p. asociados al problema de decisión estadística de base. Un *sistema de información probabilístico combinado* es un s.i.p. $X_1 \times X_2 = (X_1 \times X_2, B_{X_1 \times X_2}, P_s)$, $s \in S$, tal que P_s^1 y P_s^2 son las medidas de probabilidad marginales a partir de P_s . En particular, el s.i.p. $X^{(n)} = X \times X \times \dots \times X$, $n \in \mathbb{N}$, recibe el nombre de *muestra aleatoria de tamaño n a partir de X* .

Definición 4.4.- Se dice que X_1 y X_2 son dos *sistemas de información probabilísticos independientes* si y sólo si, $\forall s \in S$, la medida de probabilidad P_s sobre el s.i.p. combinado considerado, $X_1 \times X_2$, es la medida de probabilidad producto de las medidas de probabilidad marginales P_s^1 y P_s^2 sobre X_1 y X_2 , respectivamente.

En el caso difuso, reproducimos las definiciones 4.3 como sigue:

Definición 4.5.- Sean X_1 y X_2 s.i.d. sobre los s.i.p. X_1 y X_2 , respectivamente. Si $X_1 \times X_2 = (X_1 \times X_2, B_{X_1 \times X_2}, P_s)$ representa un s.i.p. combinado, definimos el *sistema de información difuso combinado* como el s.i.d. $X_1 \times X_2$ sobre $X_1 \times X_2$ constituido por los pares (x_{m_1}, x_{m_2}) , $(x_{m_1} \in X_1, x_{m_2} \in X_2)$, tales que según la definición probabilística de Zadeh¹⁷:

$$P_s(x_{m_1}, x_{m_2}) = \int_{X_1 \times X_2} \mu_{X_{m_1}}(x_1) \mu_{X_{m_2}}(x_2) dP_s(x_1, x_2), \quad \forall s \in S$$

En particular, el s.i.d. $X^{(n)} = X \times X \times \dots \times X$, $n \in \mathbb{N}$, se denomina *muestra aleatoria difusa de tamaño n a partir de X* .

Introducimos, finalmente, el concepto siguiente:

Definición 4.6.- Definimos un *estadístico a partir de $X^{(n)}$* como una función real a partir de $X^{(n)}$. Supondremos generalmente que un estadístico $T(X^{(n)})$ a partir de $X^{(n)}$ es un s.i.p., y proponemos definir la *distribución de probabilidad de $T(X^{(n)})$* como:

$$P_s(t) = P_s \left\{ \begin{array}{l} X_m^{(n)} \in X^{(n)} / X_m^{(n)} \\ T(X_m^{(n)}) = t \end{array} \right\} = \sum_{X_m^{(n)} \in X^{(n)} / T(X_m^{(n)}) = t} P_s(X_m^{(n)})$$

(donde $\cup$ representa la "bold union" definida por Giles¹¹).

(Conviene recordar que una partición difusa es una partición ordinaria en el sentido de la "bold union", $\cup$, y la "bold intersection", $\cap$, dadas por Giles¹¹. Por otra parte, un estadístico a partir de una muestra aleatoria $X^{(n)}$ determina una partición sobre el espacio muestral $X^{(n)}$, de manera que cada valor del estadístico puede identificarse "probabilísticamente" con el conjunto de valores muestrales cuya imagen por el estadístico es dicho valor. De forma análoga, la definición probabilística en 4.6 sugiere que cada valor t de estadístico $T(X^{(n)})$ puede identificarse probabilísticamente con la "bold union" de los valores muestrales difusos que se aplican en t y, de este modo, $T(X^{(n)})$ determina una nueva partición difusa sobre $X^{(n)}$).

A continuación, establecemos las propiedades más relevantes que garantizan la idoneidad del nuevo criterio, cuya particularización al caso no difuso, son las estudiadas anteriormente⁶.

Teorema 4.1.- Si N es un s.i.d. sobre un s.i.p. nulo N , se verifica que $X \stackrel{IU^*}{\geq} N$, para todo s.i.d. X y cualquiera que sea la distribución a priori sobre S .

Si $\mathcal{D}$ es un s.i.d. formado por informaciones totalmente difusas, se verifica que $X \stackrel{IU^*}{\geq} \mathcal{D}$, para todo s.i.d. X y cualquiera que sea la distribución a priori sobre S .

Demostración: Si N es un s.i.d. sobre un s.i.p. nulo, entonces:

$$P(S_k/N_p) = P(S_k), \quad \forall S_k \in S, \quad \forall N_p \in N$$

de donde:

$$HU^*(A_\ell/N_p) = HU^*(A_\ell)$$

y, por tanto, $IU^*(S;N) = 0$.

Análogamente, si $\mathcal{D}$ es un s.i.d. y cada información en $\mathcal{D}$ es totalmente difusa, se cumple que para cada $D_q \in \mathcal{D}$:

$$P(S_k/D_q) = P(S_k), \quad \forall S_k \in S$$

de donde, razonando como antes, $IU^*(S;D) = 0$.

Por otro lado, cualquiera que sea otro s.i.d. X , en virtud de la definición de $A_{X_m}^*$, A_0^* , y por la desigualdad de Jensen:

$$\begin{aligned} \sum_m P(X_m) HU^*(A_{X_m}^*/X_m) &\leq \sum_m P(X_m) HU^*(A_0^*/X_m) + \\ &+ [\lg u(A_0^*) - \sum_m P(X_m) \lg u(A_0^*/X_m)] = HU^*(A_0^*) \end{aligned}$$

En consecuencia, $IU^*(S;X) \geq 0$. Luego:

$$X \underset{I U^*}{\geq} N \quad y \quad X \underset{I U^*}{\geq} D \quad \blacksquare$$

El Teorema 4.1 tiene la interpretación siguiente: cualquier s.i.d. es preferido o indiferente a un s.i.d. construido sobre un s.i.p. que no proporciona información estadística sobre S , y a cualquier s.i.d. que sólo pueda proporcionar información "uniformemente imprecisa" sobre el s.i.p. referencial.

Teorema 4.2.- Si X_1 y X_2 son s.i.d. sobre los s.i.p. X_1 y X_2 , respectivamente, se verifica que:

$$X_1 \times X_2 \underset{I U^*}{\geq} X_1$$

Además, si:

a) La distribución del s.i.p. X_2 condicionada por la información difusa X_{m_1} no depende del estado, $\forall X_{m_1} \in X_1$,

o:

b) X_2 es un s.i.d. tal que cada $X_{m_2} \in X_2$ es totalmente difusa,

se cumple que:

$$X_1 \times X_2 \underset{I U^*}{\sim} X_1$$

cualquiera que sea la distribución a priori sobre S .

Demostración: En efecto, $\forall X_{m_1} \in X_1$, $\forall X_{m_2} \in X_2$:

$$HU^*(A_{X_{m_1}}^*/X_{m_1}, X_{m_2}) \geq HU^*(A_{X_{m_1} X_{m_2}}^*/X_{m_1}, X_{m_2})$$

y, teniendo en cuenta las definiciones de $A_{X_{m_1} X_{m_2}}^*$, $A_{X_{m_1}}^*$, y la desigualdad de Jensen, se tiene que:

$$\begin{aligned} IU^*(S; X_1 \times X_2) &= HU^*(A_0^*) - \sum_{m_1} \sum_{m_2} P(X_{m_1}, X_{m_2}) HU^*(A_{X_{m_1} X_{m_2}}^*/X_{m_1}, X_{m_2}) \geq \\ &\geq HU^*(A_0^*) - \sum_{m_1} \sum_{m_2} P(X_{m_1}, X_{m_2}) HU^*(A_{X_{m_1}}^*/X_{m_1}, X_{m_2}) + \end{aligned}$$

$$+ [\sum_{m_1} P(X_{m_1}) \lg u(A_{X_{m_1}}^*/X_{m_1}) - \sum_{m_1} \sum_{m_2} P(X_{m_1}, X_{m_2}) \lg u(A_{X_{m_1}}^*/X_{m_1}, X_{m_2})]$$

$$= HU^*(A_0^*) - \sum_{m_1} P(X_{m_1}) HU^*(A_{X_{m_1}}^*/X_{m_1}) = IU^*(S; X_1)$$

Por tanto $X_1 \times X_2 \stackrel{IU^*}{\geq} X_1$.

Por otra parte, en las condiciones de los apartados a) y b), se cumple que:

$$P(S_k/X_{m_1}, X_{m_2}) = P(S_k/X_{m_1}), \quad \forall X_{m_1} \in X_1, \forall X_{m_2} \in X_2, \forall S_k \in S$$

de donde $HU^*(A_\ell/X_{m_1}, X_{m_2}) = HU^*(A_\ell/X_{m_1}), \quad \forall A_\ell \in A$ y, en consecuencia, por las definiciones de $A_{X_{m_1}}^*$ y $A_{X_{m_1} X_{m_2}}^*$, resulta:

$$HU^*(A_{X_{m_1}}^*/X_{m_1}) = HU^*(A_{X_{m_1} X_{m_2}}^*/X_{m_1}, X_{m_2})$$

es decir:

$$IU^*(S; X_1 \times X_2) = IU^*(S; X_1)$$

Luego:

$$X_1 \times X_2 \stackrel{IU^*}{\geq} X_1$$

El Teorema 4.2 afirma que recibir información a partir de dos s.i.d. es preferido o indiferente a recibirla de uno sólo de ellos. Si, además, uno de los sistemas, o bien está basado en un s.i.p. que no puede añadir información estadística sobre S a la contenida en el otro s.i.d., o bien sólo proporciona información totalmente difusa, recibir información de los dos sistemas es indiferente a recibirlo sólo del otro s.i.d.

Teorema 4.3.- Una muestra aleatoria difusa proporciona mayor valor de la quietud esperada cuanto mayor es su tamaño, es decir:

$$X^{(n+1)} \stackrel{IU^*}{\geq} X^{(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

cualquiera que sea la distribución a priori sobre S , y para cualquier s.i.d. X .

Demostración: Es una consecuencia inmediata del Teorema 4.2. ■

Teorema 4.4.- Sean X_1, X_2, X_3 tres s.i.d. sobre los s.i.p. X_1, X_2, X_3 , respectivamente. Supongamos que X_1 y X_2 son independientes y que X_3 y X_2 lo son también. Entonces, si $X_1 \stackrel{IU^*}{\geq} X_3$ para toda distribución a priori sobre S :

$$X_1 \times X_2 \stackrel{IU^*}{\geq} X_3 \times X_2$$

cualquiera que sea la distribución a priori sobre S .

Demostración: Para probarlo, conviene tener en cuenta que, bajo las condiciones supuestas:

$$IU^*(S; X_1 \times X_2; \pi) = IU^*(S; X_2; \pi) + \sum_{m_2} P(X_{m_2}) IU^*(S; X_1; \pi_{X_{m_2}})$$

$$IU^*(S; X_3 \times X_2; \pi) = IU^*(S; X_2; \pi) + \sum_{m_2} P(X_{m_2}) IU^*(S; X_3; \pi_{X_{m_2}})$$

cualquiera que sea la distribución a priori π sobre S y siendo $\pi_{X_{m_2}}$ la correspondiente distribución a posteriori sobre S dada la información difusa $X_{m_2} \in X_2$.

En virtud de las dos igualdades anteriores, al ser $X_1 \stackrel{IU^*}{\geq} X_3$ para toda distribución sobre S :

$$IU^*(S; X_1; \pi_{X_{m_2}}) \geq IU^*(S; X_3; \pi_{X_{m_2}}), \forall X_{m_2} \in X_2$$

de donde:

$$IU^*(S; X_1 \times X_2; \pi) \geq IU^*(S; X_3 \times X_2; \pi)$$

Luego:

$$X_1 \times X_2 \stackrel{IU^*}{\geq} X_3 \times X_2 \quad \blacksquare$$

El Teorema 4.4 puede explicarse como sigue: la relación de preferencia entre dos s.i.d. se conserva cuando cada uno de ellos se combina con un s.i.d. basado en un s.i.p. independiente de cada uno de los s.i.p. que sirven de base a los dos s.i.d. iniciales.

Teorema 4.5.- Sea $X = \{X_{11}, \dots, X_{1n_1}, \dots, X_{t1}, \dots, X_{tn_t}\}$ un s.i.d. sobre el s.i.p.

X , y sea $X^\circ = \{X_1^\circ, \dots, X_t^\circ\}$ otro s.i.d. sobre X definido a partir de X por la relación:

$$X_m^\circ = \bigcup_{i=1}^{n_m} X_{mi}$$

(es decir, los elementos de X° se obtienen agrupando los de X mediante la "bold union"). Se verifica entonces que:

$$X \stackrel{IU^*}{\geq} X^\circ$$

cualquiera que sea la distribución a priori sobre S .

Demostración: En virtud de la ortogonalidad de X , se cumple que:

$$\mu_{X_m^\circ}(x) = \sum_{i=1}^{n_m} \mu_{X_{mi}}(x), \quad \forall x \in X, m=1, 2, \dots, t$$

Obviamente X° resulta ser una partición difusa de X .

Por otro lado:

$$P_s(X_m^\circ) = \sum_{i=1}^{n_m} P_s(X_{mi}), \quad \forall s \in S, m=1, 2, \dots, t$$

$$P(X_m^\circ) = \sum_{i=1}^{n_m} P(X_{mi})$$

de donde, al ser $u(A_{X_m^\circ}^*/X_m^\circ) = \sum_{i=1}^{n_m} \frac{P(X_{mi})}{P(X_m^\circ)} u(A_{X_{mi}}^*/X_{mi})$, $m=1, 2, \dots, t$, y en virtud

de la desigualdad de Jensen y la definición de $A_{X_m^\circ}^*$ y $A_{X_{mi}}^*$, se tiene que:

$$IU^*(S; X) - IU^*(S; X^\circ) \geq \sum_{m=1}^t \sum_{i=1}^{n_m} P(X_{mi}) [HU^*(A_{X_{mi}}^*/X_{mi}) - HU^*(A_{X_m^\circ}^*/X_m^\circ)] \geq 0$$

Luego:

$$IU^*(S;X) \geq IU^*(S;X^o)$$

Por tanto:

$$X \geq X^o$$

Interpretamos este teorema diciendo que la "condensación" de un s.i.d. en el sentido de la "bold union" entraña una pérdida de información, que a su vez conlleva una disminución en la quietud.

Teorema 4.6.- Sea X un s.i.d. sobre el s.i.p. X . Sea $X^{(n)}$ una muestra aleatoria difusa a partir de X . Consideremos un estadístico $T(X^{(n)})$ a partir de $X^{(n)}$. Si se admite la condición probabilística propuesta en la Definición 4.6, se verifica que:

$$X^{(n)} \geq T(X^{(n)})$$

cualquiera que sea la distribución a priori sobre S .

Demostración: En virtud de la condición de la Definición 4.6, puede considerarse el presente teorema como una consecuencia del Teorema 4.5, puesto que T determina una nueva partición difusa a través de la "bold union" de los elementos de $X^{(n)}$ que llevan asociada la misma imagen por T . ■

5. OBSERVACIONES FINALES.

La extensión del criterio de la sección 3 podría haberse desarrollado para el caso en que sólo algunos elementos del problema de decisión fueran difusos. Así, por ejemplo, es muy interesante comparar s.i.d. considerando nítidos los estados y las acciones (aunque sobre el hecho de que éstas fueran o no difusas ya indicamos que no representaba ninguna modificación esencial, ni de tratamiento matemático, en el problema).

Finalmente, queremos reseñar que, en otros trabajos^{6,8,9}, se han llevado a cabo extensiones de otros criterios de comparación de experimentos al caso difuso, verificándose propiedades análogas a las aquí comprobadas.

BIBLIOGRAFIA:

1. J. ACZEL: A New Theory of Generalized Information Measures, recent results in the "old" Theory and some "real life" interpretations of old and new Information Measures. Proc. Sec. World Conf. on Math. at the service of man, p.3. Canarias. (1982).
2. D. BLACKWELL: Comparisons of experiments. Proc. Sec. Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability. University of California Press, 93-102. (1951).
3. M.P. GARCIA-CARRASCO: Criterios para la comparación de experimentos. Rev. Trab. Est. e I.O., Vol. 29, C.2, 28-51. (1978).
4. M.A. GIL: Caracterización axiomática de una medida para la incertidumbre correspondiente a las utilidades. Actas XII Reunion Nac. S.E.I.O., 311-322. Jaca. (1980).
5. M.A. GIL: On two unquietness measures for the finite experiences. Proc. Sec. World Conf. on Math. at the service of man, 299-304, Canarias. (1982).
6. M.A. GIL: Criterion of maximizing the expected quietness (invariant by homotheties in relation to the utilities). Rev. R.A.I.R.O.-Recherche Opérationnelle, Vol. 16, n° 4, 319-331. (1982).
7. M.A. GIL: Caracterización axiomática para la varianza. Rev. Trab. Est. e I.O., Vol. 34, n° 2, 40-51. (1983).

- 8.M.A. GIL, M.T. LOPEZ and P.GIL: Comparison between fuzzy information systems. (Aceptado para publicación en "Kybernetes").
- 9.M.A. GIL, M.T. LOPEZ and P.GIL: Quantity of Information; Comparison between Information Systems; 1. Non Fuzzy States, 2. Fuzzy States. (Aceptado para publicación en "Fuzzy Sets and Systems").
- 10.M.A. GIL and T. BREZMES: Fuzzified Blackwell's method to compare experiments. (pendiente de publicación).
- 11.R. GILES: Lukasiewicz logic and fuzzy theory. Internat. J. Man. Mach. Stud., 8, 313-327. (1976).
- 12.J.A.GOGUEN: L -fuzzy sets. J. Math. Anal. Appl., 18, 145-174. (1967).
- 13.S.KULLBACK: Information Theory and Statistics. Wiley. New York. (1959).
- 14.T.OKUDA, H. TANAKA and K. ASAI: A formulation of fuzzy decision problems with fuzzy information, using probability measures of fuzzy events. Inform. Contr., 135-147. (1978)
- 15.H. TANAKA, T. OKUDA and K. ASAI: Fuzzy information and decision in statistical model. Advances in fuzzy sets Theory and applications. North-Holland, 303-320. (1979).
- 16.L.A. ZADEH: Fuzzy sets. Inform.Contr. 8, 338-353. (1965).
- 17.L.A. ZADEH: Probability measures of fuzzy events. J. Math. Anal. Appl., 23, 421-427. (1968).

ON A GENERAL THEOREM OF KREIN-MILMAN

J. MARTINEZ Y C. PEREZ.

Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Ciencias.
Universidad de Santander. España.

B. FUCHSSTEINER gave a general theorem of Krein-Milman within the context of topological spaces endowed with a "regular and topological convexity", spaces which generalize the usual topological vector spaces. However, there is an incorrectness in the proof of lemma 3 in his paper (because β^* might be equal to β_1). Although all the results in this paper remain valid if, for instance, the topology is in addition connected, we will establish non-trivial examples where the main results fail.

According to ¹, a convexity ψ on a Hausdorff space E (i.e. $\psi: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ that satisfies a) $\psi(B) \supset B$ and b) $B \subset \psi(A)$ implies $\psi(B) \subset \psi(A)$) is said to be regular and topological if the following statements hold for all $B \subset E$,

- 1) $\psi(\overline{\psi(B)}) = \overline{\psi(B)}$.
- 2) If B is open, then $\psi(B)$ is open.
- 3) $\bigcap \{ \overline{\psi(U)} / U \in \mathcal{U}(B) \} \subset \overline{\psi(B)}$, where $\mathcal{U}(B)$ stands for a filter base of neighborhoods of B .
- 4) If B is an open ψ -convex set of E and γ is a finite subset of $\bar{B}$, then $\psi(\gamma) \cap (\bar{B} - B) \subset \psi(\gamma \cap (\bar{B} - B))$.

Throughout this note, E will be a Hausdorff topological vector space over a non-archimedean (non-trivially) valued field K with characteristic different from 2. We are going to consider the convexity of MONNA ψ on E (i.e. $\psi(A)$ will indicate the convex hull, à la Monna, of a subset A of E).

K is said to be spherically complete if it verifies the binary intersection property; in this case the Hahn-Banach theorem holds (see ²) for locally convex spaces (i.e. spaces with a base of neighborhoods of 0 consisting of convex sets).

1. LEMMA: If K is spherically complete, C is a closed convex set of a locally convex space E , and b does not belong to C , then there is a closed hyperplane H which separates C and b .

PROOF: It follows from Propositions 55 and 69 of ³.

2. THEOREM: Let E be a locally convex space. If K is spherically complete, then ψ is a regular and topological convexity on E .

PROOF: Properties 1) and 4) are obvious. In order to verify 2) and 5) it is enough to notice that C open and convex implies C closed whenever C has non-empty interior.

Let now $b \notin \overline{\psi(B)}$ and let H be a closed hyperplane separating $\overline{\psi(B)}$ and b . Since $\overline{\psi(B)}$ and b are in different sides of H , one of these sides is a neighborhood of B but does not contain b .

If ψ is a regular and topological convexity on E and A is a part of E , then a non-empty set $S \subset A$ is defined to be a support of A ¹ if $\psi(\gamma) \cap S \subset \psi(\gamma \cap S)$ for every finite subset γ of A . A point $x \in A$ is called extreme when $\{x\}$ is a support of A .

3. LEMMA: Let A be a non-empty convex subset of K . Then, A is the only support of A .

PROOF: We can suppose that $0 \in A$. As A is convex, A has to be one of the following sets: $\{x \in K / |x| \leq \rho\}$, $\{x \in K / |x| < \rho\}$ or K , for adequate values of $\rho > 0$ (see ³, p. 119).

a) Let $A = \{x \in K / |x| \leq \rho\}$. If there is an $a \in A-S$ with $|a| = \rho$, then $S = \psi(\{a, 0\}) \cap S \subset \psi(\{a, 0\} \cap S) \subset \{0\}$, but this is impossible because $A-S$ is convex and the characteristic of K is different from 2. Now, if S is a proper subset, take $a \in A-S$ ($|a| < \rho$) and $s \in S$ with $|s| = \rho$. Thus, $S = \psi(\{a, s\}) \cap S \subset \psi(\{a, s\} \cap S) = \{s\}$ and S is not a support.

b) Now let $A = \{x \in K / |x| < \rho\}$. We can suppose that the valuation on K is dense, because, otherwise, $A = \{x \in K / |x| \leq \rho'\}$ with $\rho' = \max\{|x| / x \in A\}$ and the proof is as above. Let S be a proper support of A . The set $A-S$ being convex, either $A-S = \{x \in K / |x-a| < r\}$ or $A-S = \{x \in K / |x-a| \leq r\}$ with $r, |a| < \rho$. Taking $y, y' \in A$ with $\rho > |y| > |y'| > \max(r, |a|)$, then $y, y' \in S$ and $y' \in \psi(\{a, y\}) \cap S$, but $y' \notin \psi(\{a, y\} \cap S)$; so S cannot be a support.

c) If $A = K$, the proof is as in part b).

4. THEOREM: If A is convex with non-empty interior ($A^i \neq \emptyset$), then A is the only closed support of A .

PROOF: The result is true if $\dim E = 1$ (lemma 3). Let us suppose that $0 \in A$, $\dim E > 1$ and S is a proper closed support of A . Because $A^i \neq \emptyset$ and A is convex, A is clopen and the same is also true for $A-S$; so S is open.

Let $x \in A-S$ and take $y \in S$ linearly independent of x . Choose $\epsilon > 0$ and a continuous seminorm p such that $\{x \in E / p(x-y) < \epsilon\} \subset S$. Define $z = y + \lambda x$ with $\lambda \in K - \{0\}$, $|\lambda| \leq 1$, and also $|\lambda| < \epsilon p^{-1}(x)$ if $p(x) \neq 0$.

Thus, $z \in \psi(\{y, x, 0\}) \cap S$, but $z \notin \psi(\{y, x, 0\} \cap S)$ because x, y are linearly independent.

If the valuation of K is discrete we have another similar theorem changing $A^i \neq \emptyset$ by A bounded.

5. THEOREM: Let A be a non-empty bounded, closed, convex subset of E . If the valuation of K is discrete, then A is the only closed support of A .

PROOF: Let $0 \in A$ and suppose A to be absorbent (otherwise we replace E by the linear hull of A). Since the valuation on K is discrete,

$$A = \{x \in E / p(x) \leq 1\}$$

where p is the maximal Minkowski functional of A (see ⁴, p. 31). If τ is the original topology on E and τ_p is the topology defined by p , we must have $\tau \leq \tau_p$ because A is bounded. Since every closed support for τ is also a closed support for τ_p , the conclusion is now an easy consequence of theorem 4.

REMARK: J. VAN TIEL and other authors have considered a different convexity on vector spaces over non-archimedean fields: the absolute convexity. A is said to be absolutely convex if A is convex (à la Monna) and contains the origin. If $\psi_a(A)$ denotes the absolutely convex hull of A , it is straightforward to prove that, with the exception of 4), ψ_a satisfies the conditions to be a regular topological convexity. Also, if $\dim E > 1$, the analogous to theorem 4 and theorem 5 hold; but in K , $S = \{x \in A / |x| = 1\}$ is a support of $A = \{x \in K / |x| \leq 1\}$.

REFERENCES:

1. B. FUCHSSTEINER: Math. Ann. 186, 149-154 (1970).
2. J. VAN TIEL: Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. A 68, 249-289 (1965).
3. J. P. CARPENTIER: Séminaire Choquet. Initiation à l'Analyse, 4^e année. 701-768 (1964-1965).
4. A. F. MONNA: Analyse non-archimédienne. Springer-Verlag, Berlin (1970).

TRANSPORT MECHANISMS IN THIN FILM DEPOSITION USING A R.F. SPUTTERING SYSTEM.

M.P. CAGIGAL.

Departamento de Optica y Estructura de la Materia. Facultad de Ciencias. Universidad de Santander. Santander. (Spain).

In this paper we examine the relationships between the geometry of a film deposited by R.F. sputtering and the conditions under which the deposition was carried out.

The transport mechanisms which take place during the deposition process were studied for the pressure range in which our sputtering system functions optimally. In addition, precise experimental measurements were performed in order to determine the variation in the transport mechanisms as a function of pressure; the most appropriate transport model is indicated for the operation chamber pressure.

1.- INTRODUCTION

To get a good knowledge of a thin film we must know the response of the film when it is electrically or optically excited. If the electrical properties are measured, the changes of the capacity and resistivity are characterized by the inhomogeneities in thickness. If the optical properties are measured, the changes in thickness determine the interferential state of the resulting light.

During the growing of a thin film there are two simultaneous important processes: deposition and re-emission. The deposition rate of the sputtered particles from the target to the thin film is a function of the geometrical configuration of the system, the pressure and the power used to make the deposition.

Several among these parameters have a cylindrical symmetry. In a similar way the way of the re-emitted (re-sputtered or re-evaporated) particles has a radial dependence. At last the growing rate equals the deposition rate minus the re-emission rates and it is a radial function.

The aim of this paper is to obtain theoretical values of the thickness as a function of the deposition parameters (power, pressure, etc) and the

geometrics parameters (radius , distance between target and work-holder ,etc).

Logan et al.³ considered the growth rate to be a infinite sum of the temrs corresponding to the opposed procesees of the deposition and re-emission. However, we shall take into account only the most important phenomena , consi- dering the grwht rate to be the deposition rate minus the rate of the re-eva- poration and re-sputtering . The theoretical approximation was experimentally took out. This will lead us to an expression for the values of the inhomogeneity of the thickness . The deposition and etching experiments were performed using a RF diode sputtering system with a 5" CdS target.

2.- TRANSPORT MECHANISMS

In a RF-sputtering system the atoms of the target are sputtered by the ions of the plas ma which become very energetic as they cross the plasma cathode seath.

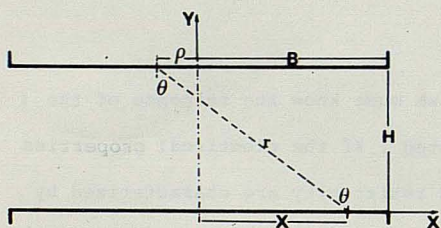


Figure 1:

Schematic representation of the target and substrate in a diode system.

Once they have been sputtered from the target, the ejected atoms must cross the interelectrode space before being deposited on the sustrate to form a thin film. The type of transport which takes place is a function of the number of collisions occurring in the course of the trajectory⁴. As a first approximation to the problem wa shall consider the two extreme cases of transport : in the first case, which will be termed "direct flight" (D.F.) , there are hardly any collisions.

In the D.F. process the target atoms are assumed to reach the substrate with very nearly the same direction they had when they left the target i. e. ha-

ving experienced very few collisions. Considering isotropic emission from the target, the D.F. concept implies an equation for the deposition rate like the following ⁵:

$$R(x) = \text{cte.} / 1 - \frac{(H/B)^2 + (x/B)^2 - 1}{\left[\left(\frac{H}{B} \right)^2 - \left(\frac{x}{B} \right)^2 + 1 \right]^2 + 2 \left(\frac{x}{B} \frac{H}{B} \right)^2}^{1/2} / \quad (1)$$

where x is the position of the sample, H is the distance between electrodes and B is the radius of the electrodes. The corresponding deposition rate profiles are found in the bibliography ⁶ (fig. 1).

The other extreme case is the one in which the sputtered particles reach the substrate only after a large number of collisions, which implies a complete loss of the initial direction. This diffusion process (D.) corresponds to a standard equation. We make the assumption that the density, and therefore the emission are constant over the target surface (n_0), and zero over the substrate surface and boundary.

For these conditions the deposition rate is of the form ⁷:

$$R(x) = \text{cte} \quad D_1 \quad \frac{2 n_0}{B} \quad \sum_j \frac{P_j}{J_1(P_j B) \sinh(P_j H)} \quad J_0(P_j x) \quad (2)$$

D_1 represents the diffusion coefficient of the particles ejected from the target with respect to those of the plasma. D_1 is a function of the pressure and the characteristics of the gas and the target. J_0 and J_1 are Bessel functions and P_j are the J_0 cancelling coefficients. The first problem which arises when calculating rates of deposition is how many terms of the summation to take into account. It can be seen that for $j > 4$ the radial variation of thickness is independent of the number of terms; thus, we always considered a summation of 5 or 6 terms.

An intermediate deposition process remains to be studied. This case takes into account the possibility of particles reaching the substrate with a velocity higher than the thermal velocity (D.F.) or with a thermalized one (D.) ⁴. Since we assume that this transport process corresponds fundamentally to the direct flight process, we used the D.F. model as the basis onto which we introduced a modification based on the study of Keller and Simmons ⁸ on unidirectional transport. These authors postulate the existence of atoms with two

types of velocities resulting from the arrival of some atoms by means of a diffusion process (I_D) while others arrive by a streaming process (I_s), with the two mechanisms being superimposed.

Making the normal diffusion assumption $v^2 \ll KT/\bar{M}$, where v is the average velocity and $\bar{M}$ is the average mass and using standard boundary conditions the transport factor then has the following form:

$$\beta(r) = \frac{I_D + I_s}{I_0} = \frac{3\lambda}{2r} \left[1 - \exp\left(-\frac{2r}{3\lambda}\right) \right] \quad (3)$$

where I_0 is the particle flux in the target, λ is the mean free path of the target atoms respect to those of the background gas and r is the distance from the emitter to the receiver.

This transport factor is applied to each of the possible target-substrate paths by introducing in into the integral for deposition rate

$$R(x) = cte \iint_{\rho} \beta(r) \frac{\cos^2 \theta(x)}{r^2(x)} \rho \, d\rho \, da \quad (4)$$

Evaluating this integral numerically we have obtained deposition rates for a broad range of target-substrate separations and appropriate pressure range.

It is also interesting to study the deposition on vertically positioned substrates. We shall continue to use the previous procedure; however, in this case the angle of emission from the target must be differentiated from the angle of arrival at the substrate.

3.- EXPERIMENTAL PROCEDURES (METHODS)

The experiments were performed in a GCA Vacuum Industries 2305 diode R.F sputtering system with a CdS target 12.7 cm. in diameter and an interelectrode distance of 4.8 cm. The discharge chamber was pumped to a final pressure of 10^{-3} mtorr. before introducing an Ar gas flow of 20-25 $\text{cm}^3 \text{min}^{-1}$. The Ar gas pressure was varied in the range of 2 to 10 mtorr. and the power was varied in the range of 60 to 180 watts.

Our experimental work was based on two types of experiment: those performed on the substrate (deposition experiments) and those on the target (etching experiments). For both the deposition and etching processes, measurements were

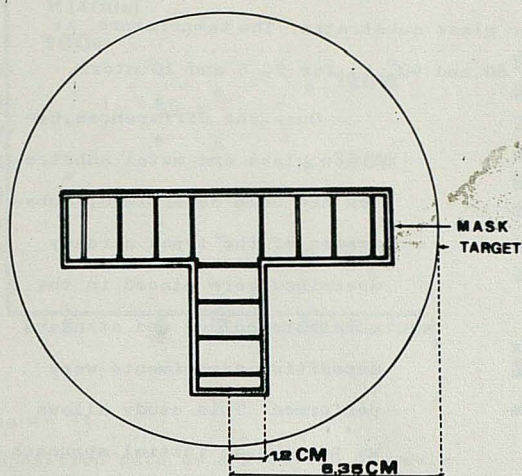


Figure 2:

Schematic drawing of the steel mask placed over the 5" target for the measurements of growth and etching. The distance between the reference points is 1.2 cm. The central zone is unmasked, since its flatness is demonstrated experimentally.

substrates which were in thermal contact with the target or the substrateholder. For the measurements of etching on the target the same three types of substrate were used but they were coated with a film of CdS before being placed under the mask.

The use of three types of substrates allows us to estimate what part of the etching on the target is due to evaporation and what part is produced by sputtering. Likewise, on the substrate this procedure allows us to make separate estimates of the components of re-emission (re-sputtering and re-evaporation) which occur during the growth of the thin film. A general result was that both the etching rate and the deposition rate were independent of the thickness of the glass.

In order to estimate orders of magnitude of the existing phenomena, an experiment was carried out using the three types of substrates coated with a CdS film. These substrates were then placed under the mask, as already described, and the whole unit (mask with attached substrates) was placed on the substrate-holder and a R-F signal of 60 watts was applied. In this way, we provoked a process similar to deposition but in this case the sputtering occurred on the masked films.

made of the "steps" produced by masking. These steps were measured using a DEKTAK SLOAN profile analyzer. We made a T-shaped steel mask, as shown in figure 2, with the four measurement points distributed uniformly in each direction. Three types of substrates were placed under the mask: thin glass substrates were located under one branch of the "T", thick glass was used under another branch and under the third we placed metal

The growth rate for metallic substrates in thermal contact with the substrate holder was 11 % higher than for glass substrates. The temperature at $r = 0$ in this experiment was between 80 and 90° C, for 2, 5 and 10 mtorr.

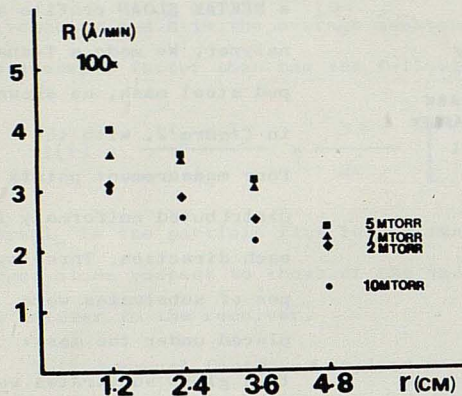


Figure 3:

Deposition rate as a function of position for chamber pressures of 2, 5, 7 and mtorr, and 60 watts of power.

It can be observed that there is a level central zone with the growth rate decreasing for position farther from the center. The shape of the profile is a function of the pressure; however, there is no regular relation.

From an analysis of this data values for the deposition rate at $r = 0$ can be obtained for the pressure range already studied (Fig. 4). In this Figure the data for 120 and 180 watts is included; it can be seen that the maximum deposition rate, which occurs at 5 mtorr for 60 watts, remains the same at 120 watts but for 180 watts shifts to higher pressures.

Finally, the different types of substrate coated with a film of CdS were suitably masked and then placed on a metallic target designed for this purpose; a standard deposition experiment was then carried out. Figure 5 shows the etching rate as a function of position for different pressures, and how the etching at $r = 0$ increases a great deal when the pressure is increased from 2 to 5 mtorr while there is hardly any variation between 5 and 10 mtorr. An interesting aspect of this experiment was the appearance of the "trenching" effect: at 10 mtorr this effect was clearly noticeable, at 5 mtorr it was weaker and at 2 mtorr is disappeared completely.

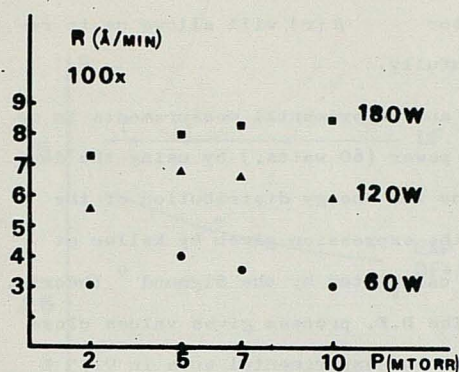


Figure 4:

Deposition rate as a function of pre - ssure for powers of 60, 120 and 180 watts in the applied R. F. signal.

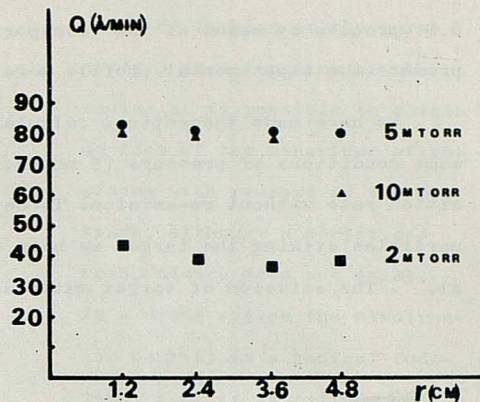


Figure 5:

Normalized rate of etching on the target as a function of position for three values of chamber pressure, and 60 watts of power.

4.- CHOICE OF A TRANSPORT MODEL

A first approach to the problem is to obtain experimental and simulated data; once the values have been normalized with respect to their value at $r = 0$ they can be compared. In figure 6 three deposition-rate curves are plotted simultaneously for a chamber pressure of 10 mtorr and a applied power

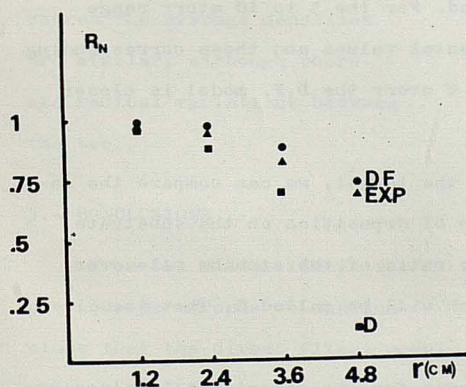


Figure 6:

Normalized deposition rates corresponding to simulations based on the D.F. and D. models, as well as experimental values, for 10 mtorr of chamber pressure and 60 watts of power.

of 60 watts. Two of the curves were obtained by simulation, one assuming a diffusion process and the other assuming direct flight (D.F.). The third curve corresponds to the experimental values. It is obvious that the experimental deposition curve is closer to the direct flight process than to diffusion, in spite of the fact that the pressure is the highest of those studied. In other words, a pressure of 10 mtorr is not high enough for the process to be predominantly one of diffusion. We shall see later that correcting the

D.F. process by means of the transport factor $\beta(r)$ will allow us to reproduce the experimental profile more faithfully.

We have made theoretical calculations and experimental measurements in the same conditions of pressure (5 mtorr.) and power (60 watts.) by using the deposition rate without re-emission. To determine the energy distribution of the particles striking the target we have used the expression given by Keller et al.⁸. The emission of target material was calculated by the Sigmund⁹ theory.

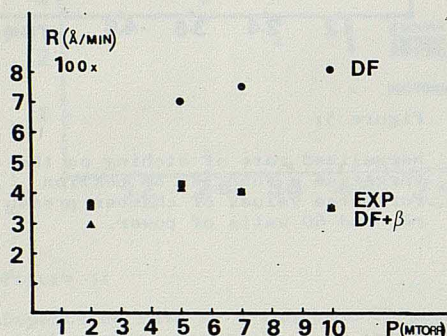


Figure 7:

Growth rates at $r = 0$ as a function of chamber pressure: experimental values and those calculated by using the D.F. and D.F. + β models.

The D.F. process gives values close to the experimental ones in 91.5 % of the cases while the corresponding figure for the D. process is only 47.5 %.

Since a qualitative study has allowed us to discard the diffusion model, we have made the calculations for the simulated deposition profiles corresponding only to direct flight (D.F.) and direct flight modified by the transport factor (D.F. + β).

Figure 7 shows the experimental values as well as those corresponding to

D.F. + β for the pressure range studied. For the 5 to 10 mtorr range there is good agreement between the experimental values and those corresponding to D.F. + β . However, for pressures of 2 mtorr the D.F. model is closer to the experimental process.

As a result of etching measurements on the target, we can compare the rate of emission from the target with the rate of deposition on the substrate. This comparison can be made by means of the ratio of the etching rate over the deposition rate at the center line, which will be called G . That is,

$$G = R_d / Q.$$

Figure 8 shows G as a function of pressure for the experimental values as well as for the simulations corresponding to D.F. + β . Once again we find that at 2 mtorr the D.F. model corresponds closely to the experimental values while in the 5 to 10 mtorr range the model for D.F. + β corresponds more closely to the real process.

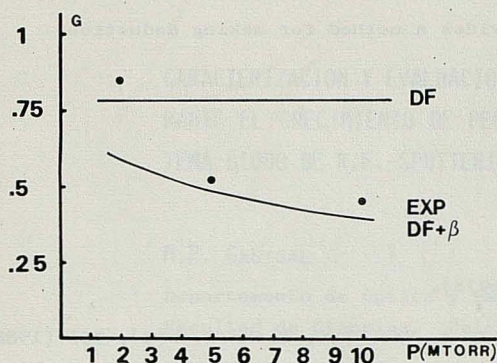


Figure 8:

Values of G as a function of pressure: experimental values and those calculated by using the D.F. and D.F. + β models.

unity. Figure 9 shows values of G with respect to " r " for different pressures. From this figure it can be deduced that the electron-ion density at 2 mtorr is approximately half of that for 5 and 10 mtorr. For these latter pressures the average densities are similar, although there are radical variations between the two.

5.- CONCLUSIONS

From the discussion in the previous paragraphs we can conclude that the direct flight model

with the modifications introduced by a transport factor accurately reproduces the experimental values obtained for the deposition rate as a function of position on the substrate holder for the 5 to 10 mtorr pressure range. However, at 2 mtorr the direct flight model provides the closest approximation to the real situation.

By looking at the parameter G as a function of the radius it is possible to obtain an idea of the behaviour of the plasma with respect to the pressure, although a strict correspondence does not exist. In a diode system the electron density is a radical function, i.e. it is cylindrically symmetrical. The lower the density of the plasma the closer the deposition rate will be to the etching rate, in other words, G will approach

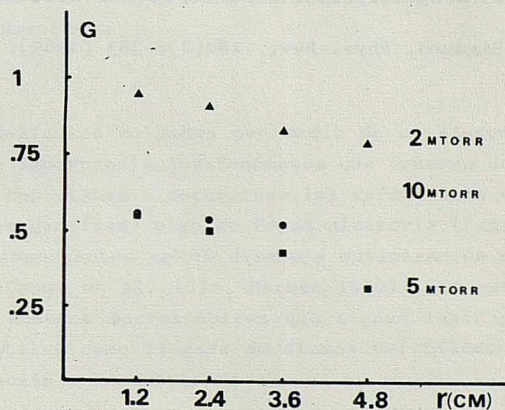


Figure 9:

Values of G as a function on the radius for chamber pressures of 2, 5 and 10 mtorr.

It has also been shown that the study of the rates of etching on the target and deposition on the substrate provides a method for making deductions about internal processes of transport.

REFERENCES

- ¹ J. Szcyrbowski, J. Phys. D. 11, 583 (1978).
- ² G.C. Schwartz, R.E. Jones, L.J. Maissel, J. Vac. Sci. Technol. 6(3), 351 (1968)
- ³ J.S. Logan, J.H. Keller, R.G. Simmons, J. Vac. Sci. Technol. 14, 1 (1977).
- ⁴ W.D. Westwood, J. Vac. Sci. Technol. 15(1), 1 (1978).
- ⁵ L. Holland. "Vacuum Manual", E. F.N. SPON (1974).
- ⁶ R.J. Gnaedinger, J. Vac. Sci. Technol., 6(3), 355 (1968).
- ⁷ F. Plas, J. Machet, J. Guille, Thin Solid film., 71,147 (1980).
- ⁸ J.H. Keller, R.G. Simmons, IBM J. Res. Dev., 23, 24 (1979).
- ⁹ Sigmund, Phys. Rev., 184(2), 383 (1969).

CARACTERIZACION Y EVALUACION DE LOS FENOMENOS QUE TIENEN LUGAR DURANTE EL CRECIMIENTO DE PELICULAS DELGADAS DEPOSITADAS EN UN SISTEMA DIODO DE R.F.-SPUTTERING.

M.P. CAGIGAL

Departamento de Optica y Estructura de la Materia.

Facultad de Ciencias. Universidad de Santander.

The thickness variations determination are of capital importance in the characterization of a thin film.

In this work we value the different macroscopical phenomena that take place in a growing film using a diode RF-sputtering system.

We have performed a set of measurement considering different aspects of the deposition process. We determine the importance of each class of particles in the growing film depending on the characteristic of the deposition.

INTRODUCCION

En el sistema de depósito de películas delgadas por medio de un sistema diodo de R.F. sputtering son de gran importancia los fenómenos que ocurren durante el crecimiento de la película con vistas a determinar las variaciones de espesor, bien de forma monótona (inhomogeneidad) bien de forma aleatoria (rugosidad superficial), características importantes en el diseño y optimización de células solares (Craig et al. 1981, Cuomo et al. 1974, Harman 1979). En este trabajo se valoran los diferentes fenómenos macroscópicos que tienen lugar en la película durante el crecimiento, tales como llegada de átomos del blanco y reemisión por mecanismos de reevaporación y resputtering.

Los átomos extraídos del blanco junto con iones provenientes del plasma interelectrónico y electrones emitidos por el blanco, llegan al sustrato para ir formando, a través de una serie de etapas (nucleación, coalescencia, etc.) una película delgada (Holland 1967). El objetivo de este trabajo es poner de manifiesto la importancia de cada uno de estos tres tipos de partículas en el crecimiento de la película, en función de las características de depósito.

MEDIDA DE VELOCIDADES DE DEPOSITO

Los depósitos se realizaron en un sistema diodo de R.F.-sputtering G.C.A. Vacuum Industries 2305, con un blanco de CdS de 12.7 cm de diámetro. La distancia interelectrónica fue 4.8 cm. La cámara de vacío se bombeó a una presión

final de 10^{-4} pa. antes de introducir un flujo de 20-25 $\text{cm}^3/\text{min.}$ de Ar. La presión durante el depósito se situó en el rango de 2 a 10 mtorr. mientras que la potencia y tensión aplicadas al blanco son funciones del tipo de experiencia como veremos.

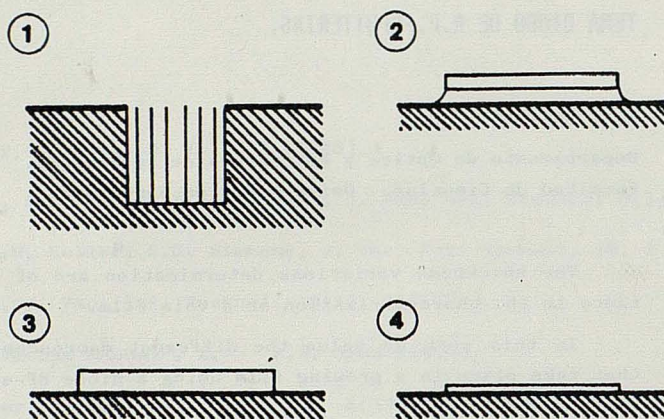


Fig. 1.- Se representan los cuatro tipos de sustratos empleados en las experiencias de depósito. El primero no permite ningún tipo de reemisión, el segundo por estar en contacto térmico con el portasustratos no permite reevaporación y el tercero y cuarto son vidrios de diferentes grosores.

El primer conjunto de medidas se realizaron con depósitos sobre cuatro tipos diferentes de sustratos (figura 1). El primero era un conjunto de superficies cilíndricas concéntricas de forma que a los átomos, una vez atrapados, les resultase prácticamente imposible el ser reemitidos (Logan 1970). El segundo tipo consistió en sustratos metálicos en contacto térmico con el portasustratos, actuando este como sumidero de calor de las películas durante el crecimiento. El tercer y cuarto tipos de sustratos fueron vidrios de diferentes grosores (1.25 mm, 0.17 mm) que permitían comprobar si se producía algún tipo de conexión térmica entre película y el portasustratos.

La distribución de los sustratos fué radial y se dispusieron en forma de cruz, correspondiendo un tipo de sustrato a cada brazo. Se comprobó el comportamiento de la velocidad de crecimiento, y en su caso de la de reemisión, frente a la posición en el portasustratos.

El primer resultado fué que a 60 watios y en todas las condiciones de presión obteníamos dos pares de conjuntos de medidas iguales correspondientes al depósito sobre vidrio fino y grueso y cilindros concéntricos por un lado, y al depósito sobre sustrato metálico por otro. La igualdad de velocidades entre las películas crecidas sobre vidrio y sobre cilindros concéntricos (fig. 2) implica que no se produce resputtering debido a que el potencial de autopolariza-

ción es superior al umbral de sputtering.

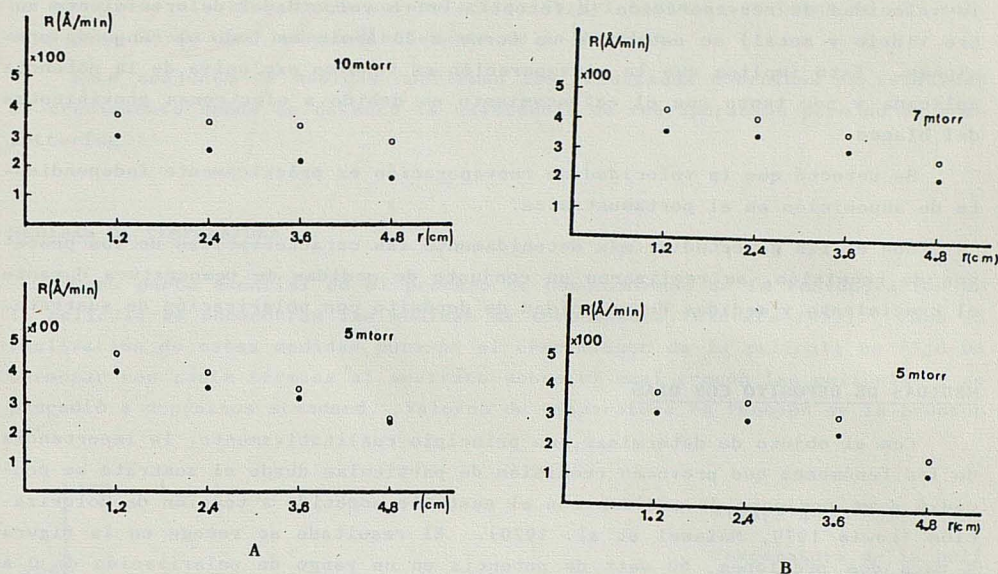


Fig. 2.- Velocidad de crecimiento R en sustratos tipos 1, 2, 3 (●) y 4 (○) en el rango de 2 a 10 mtorr., en función de la posición en el portasustratos: r .

También se observa que al dotar a la película en crecimiento de un sumidero de calor (sustrato metálico en contacto con el portasustrato) la reemisión debida a efectos térmicos desaparece al tiempo que se aprecia un aumento en la velocidad de depósito.

También comprobamos que el vidrio no se comportaba como sumidero de calor ya que la velocidad de crecimiento de la película fue independiente del grosor del mismo. Se comprobó que la velocidad de depósito sobre sustrato metálico fué superior a las producidas sobre vidrio independientemente de las condiciones de depósito. Esto implica que el fenómeno de reevaporación es significativo.

El número de medidas realizadas es función de su repetibilidad, cuando varias medidas oscilan en torno a su valor medio menos de un 10% se toman 3 medidas. Para desviaciones superiores se aumenta el número de medidas hasta un máximo de seis.

En la figura 2 se recojen el conjunto de medidas según la posición en el portasustratos para sustratos tipos 1 y 3 a diferentes presiones observándose un descenso en la velocidad de crecimiento a medida que el radio aumenta.

Resulta interesante comparar las velocidades de depósito para $r = 0$ en sustratos tipos 1 y 3 en función de la presión (figura 2) dándose un máximo de ve-

locidad de depósito a 5 mtorr.

En los resultados experimentales que dan en las figuras 2 se observa que la velocidad de reevaporación (diferencia entre velocidades de crecimiento sobre vidrio y metal) se establece un torno a $60 \text{ \AA}/\text{min}$ en todo el rango de presiones. Esto implica que la reevaporación es función exclusiva de la potencia aplicada y por tanto que el calentamiento es debido a electrones provenientes del blanco.

Se detectó que la velocidad de reevaporación es prácticamente independiente de suposición en el portasustratos.

Con el fin de estudiar más detenidamente las características de los procesos de reemisión, se realizaron un conjunto de medidas de temperatura durante el crecimiento y medidas de velocidad de depósito con polarización de sustrato.

MEDIDAS DE DEPOSITO CON DIAS

Con el objeto de determinar, en principio cualitativamente, la importancia de los fenómenos que provocan reemisión de partículas desde el sustrato se procedió a un conjunto de medidas con el sustrato sometido a tensión de polarización (Lewis 1979, Maissel et al. 1970). El resultado se recoge en la figura 3 para dos presiones, 60 watt de potencia en un rango de polarización de 0 a -200 voltios.

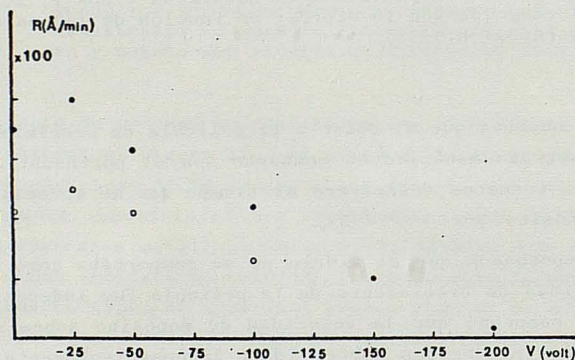


Fig. 3.- Velocidad de crecimiento en función de la tensión de polarización del sustrato para presiones de 5 y 10 mtorr. para una potencia aplicada al blanco de 60 watios.

Se observó una primera zona en la que la velocidad de crecimiento aumentaba al aumentar la magnitud de la polarización, lo que se explica en términos de frenado electrónico. A continuación la existencia de un máximo implica que entra en juego el proceso de resputtering que hasta ahora no se había producido ya que la energía adquirida al atravesar la vaina era inferior a la umbral de sputtering.

La velocidad de crecimiento en su máximo valor es comparable a la de depósito en condiciones normales, es decir sin polarización externa de sustrato. Lo que sitúa el valor de la autopolarización del sustrato en torno de -25 voltios para 60 watios; independientemente de la presión.

Este conjunto de medidas confirman los resultados obtenidos en velocidad de crecimiento donde se detectó la existencia de reevaporación pero no de resputtering.

MEDIDAS DE TEMPERATURA

Como parte esencial en el proceso de conocimiento de la reevaporación en la película se encuentran las medidas de temperatura (Winters 1979). Para la realización de estas medidas durante el crecimiento de la película se fijó un termopar con pasta térmica al sustrato sobre el cual crecen las películas y se procedió a depósitos standard. Valores de temperatura en función de la presión

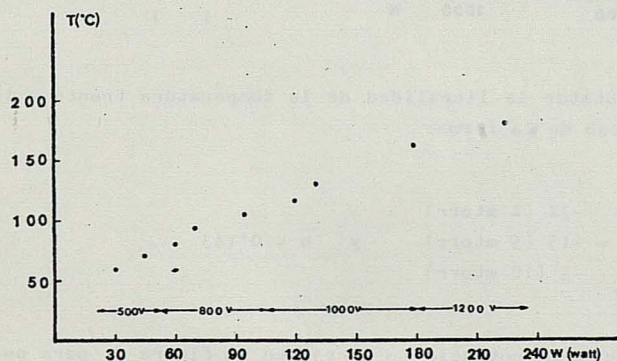


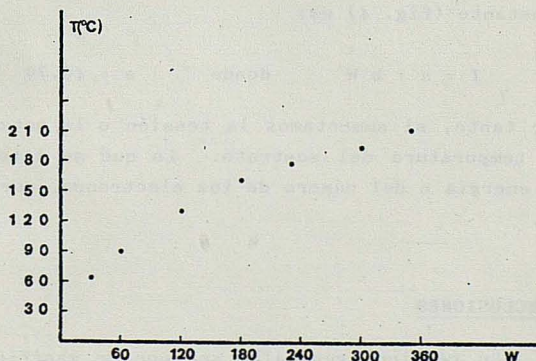
Figura 4

Temperatura de la película en crecimiento frente a la presión en cámara para $r = 0$ y diferentes potencias.

para diferentes potencias se recojen en la figura 4. En ella se observa como la temperatura es función principalmente de la potencia, mientras que la presión introduce únicamente ligeras variaciones.

Figura 5

Temperatura frente a potencia para 5 mtorr. de presión en cámara.



Ya que temperatura y la reemisión por causas térmicas están tan íntimamente ligadas, la figura 4 nos muestra el comportamiento frente a la potencia no solo de la temperatura sino de la reevaporación. Una información similar podemos obtener de la figura 5 aunque en un amplio rango de potencias (30 w - 360 w) para la presión de 5 mtorr.

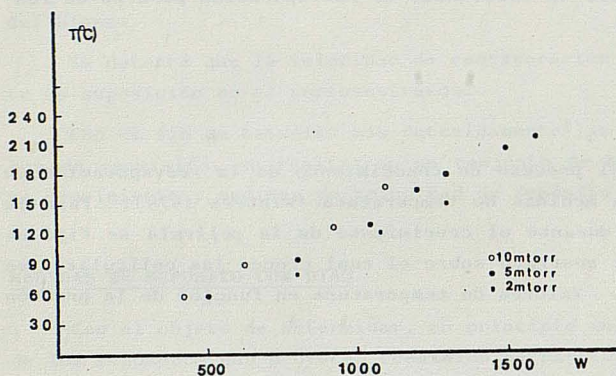


Figura 6

Temperatura frente a tensión en el rango 2, 5 y 10 mtorr de presión en cámara.

Resulta interesante constatar la linealidad de la temperatura frente a la tensión (fig. 6) relacionándose de la forma:

$$T = a + b V, \quad \begin{array}{l} -32 \text{ (2 mtorr)} \\ a = -15 \text{ (5 mtorr)} \\ -3 \text{ (10 mtorr)} \end{array} \quad y \quad b = 0.143$$

El comportamiento frente a la potencia se recoge en la figura 5, para una presión constante de 5 mtorr respondiendo a la ecuación siguiente:

$$T = -2.20 \cdot 10^{-3} \cdot W^2 + 1.19 \cdot W + 26.11$$

mientras que el comportamiento de la temperatura frente a la potencia a tensión constante (fig. 4) es:

$$T = a + b W \quad \text{donde} \quad a = 40.79 \quad y \quad b = 0.66.$$

Por tanto, si aumentamos la tensión o la potencia aplicadas al blanco, aumenta la temperatura del sustrato. Lo que se interpreta en términos de aumento de la energía o del número de los electrones, que golpean la película en crecimiento.

CONCLUSIONES

En términos generales se pone de manifiesto la enorme relación entre las

condiciones de crecimiento de la película (bombardeos, flujo de llegada, condiciones térmicas, etc.) con las condiciones eléctricas del depósito (tensión y potencial), la presión y el tipo de sustrato, cuantificando los aspectos detectados como más relevantes.

Se comprueba mediante medidas de temperatura que la velocidad de reemisión debida a causas térmicas es función principalmente de la potencia, introduciendo la presión ligeras variaciones.

A través de las medidas de temperatura y su relación con la potencia y tensión aplicadas al blanco, se pone de manifiesto que el origen de la reevaporación son los electrones secundarios emitidos por el blanco.

Se comprueba también la inexistencia de resputtering en depósitos a 60 wattios lo que indica que el valor de autopolarización es inferior al umbral de sputtering.

A STRUCTURAL AND COMPOSITIONAL SUITABLE HABITAT IN THE PETROLOGICAL TRANSFORMATION PROCESSES.

V. SÁNCHEZ CELA.

Petrology Department. Faculty of Sciences. University of Zaragoza. ZARAGOZA (Spain).

In this paper we want to emphasise the importance of the Keuper marly materials covered by carbonatic rocks together with the presence of active chemical elements of endogenetic provenance in the origin and differentiation of some Alpine igneous rocks located in the Iberian Mountains of Spain.

The petrogenesis of these igneous rocks can be explained within a metasomatic-transformist model, which took place in a suitable geological environment defined among others by the following factors:

- Existence of sedimentary-wall rocks, very suitable to the transformation processes, such as the Keuper-evaporitic sediments.
- Contribution of a chemical-thermal activation energy of endogenetic origin that appear to be in relationship with underlying granitic masses.
- Suitable structuration of the sedimentary materials that in certain conditions can originate physical-chemical gradients of endogenetic-petrological meaning.

An interesting petrological consideration deduced of this paper and of some observations and works realized in other areas is that analogous petrogenetic processes could be extensible to other zones where Hercynian-Alpine igneous rocks exhibit similar structural-petrological characters.

1.- INTRODUCCION

In many Spanish Alpine structures, generally of domatic-anticlinorial types, there exist some little outcrops of igneous rocks that were quoted and partially studied by different authors: AZAMBRE et al. 1981; BRAZ AFONSO, 1979; BAKX, 1935; CASTELLARIN et al, 1978; DURAND-WACKENHEIM, 1974; LAGO SAN JOSE, 1980, 1981; LAGO SAN JOSE & POCOVI, 1980, 1982, 1984a, 1984b; LAMARE, 1935, MARTIN, 1936; ORTI CABO, 1974; ORTI CABO & VAQUER, 1980; PUGA & RUIZ, 1980; SAN MIGUEL, 1936; WALGENWITZ, 1976, etc.

These rocks, generally of ophitic-doleritic nature, have been defined, by some of the quoted authors, as igneous rocks of "mantelic origin" more or less differentiated, that have made their intrusion in a distensive geological environment.

The singular and constant association between the "ophitic" and related rocks with the Triassic materials of Keuper facies has caught our attention. This has led us to think of - the possibility that there could exist some relationship between the evaporitic marls and - the origin and evolution of these rocks.

Our geological and petrological studies on these ophitic and related rocks have led us to establish a petrogenetic model different for these rocks.

In this pattern two main environmental factors are implicated:

- Existence of a sialic socle that in our opinion is the cause and origin, in certain geological periods, of the contribution of a chemical and thermal energy.
- Presence of a sedimentary cover whose stratigraphic, structural and compositional characters are all very suitable to the transformation-contamination processes.

2.- STRUCTURAL FEATURES.

Almost all these igneous rocks, associated to domatic-anticlinorial structures, present NW-SE orientations. These structures, of Alpine age, are broadly parallel to the Hercynian ones. (SANCHEZ CELA, 1981, 1982; SANCHEZ CELA & GARCIA ANQUELA, 1984). (Fig. 1).

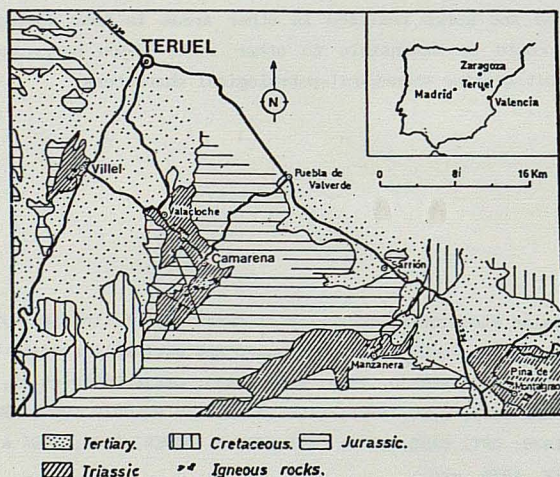


Fig. 1.- Schematic map with the location of some outcrops of Alpine igneous rocks-facies in the S-SW of Teruel-Spain. (Sánchez Cella & García Anquela, -- 1984).

The main outcrops of igneous rocks are related to these structures. Other igneous rocks, from andesites of Permian age to "basalts" of Jurassic age also follow these trends.

Owing to their particular properties, the Keuper materials generally exhibit a manifest deformation in contact with igneous rocks, as well as in the nearby areas. So many ophites - in the Pyrenees, which appear to be located within the upper part of Keuper and even, in -- upper stratigraphic levels, as intrusive-allocthonous masses. These intrusive phenomena could, in our opinion, be the reason why the contact-relations and hence the mechanisms of emplacement of these and other similar igneous rocks have often been one of the main reasons of the different petrogenetic interpretations nowadays existent.

Luckily, in some places as occurs in the Teruel area, the igneous rocks-facies exhibit a gradational transition to the sedimentary Keuper-wall materials.

Broadly, speaking in the Teruel area, two modes of occurrence are present: substratiform and sub-intrusive. In both modes there is a gradational transition between the igneous rocks and the wall-rock materials, through an intermediate zone (from 20 to 100 cm width), that we will subsequently refer to as mixed-microlithic zone (Fig. 2).

In this area there are also centimetrical bodies, which seem to be isolated from the - main mass that have been interpreted by some authors as fragments originating from the principal mass, broken off by tectonic processes. Our field and petrographic studies show that - these small bodies or "fragments" are the result of independent, simultaneous and punctual - petrological processes spatially unrelated to the principal mass.

These conclusions have been obtained after a petrographic study. Many of the assumed - "fragments" correspond to what we have defined as mixed and microlitic facies that grade into Triassic wall materials, where grained facies have not been developed possibly because of - their low physical-chemical gradients.

These features, together with the lack of any presumable tectonic-petrographic features in these supposed fragments, seem to invalidate the idea of their origin as worn-off fragments of the main mass.

3.- PETROLOGY OF IGNEOUS ROCKS

3.1.- Introduction

Our field studies, mainly realized in the Iberian Mountains (Teruel), indicate that the igneous rocks-facies are always located in the Keuper levels. The Paleozoic materials in near by zones do not include equal or similar rocks. We have observed that in all of the outcrops (sub-stratiform and sub-intrusive) there exists a gradational transition at millimetrical scale between wall-Keuper materials and the igneous facies rocks. (SANCHEZ CELA & GARCIA ANQUELA, 1984).

From the wall-Keuper to the dominant igneous facies rocks of the centre of an outcrop, there is a gradational transition through different rocks defined by us as "border facies":

"mixed rocks", "microlithic facies" and "protodiabasic facies". The dominant rocks that form - the main bulk of the outcrops are constituted by grained-rocks, mainly syenites-monzonites. Other rocks may also exist, such as monzogabbros and basic alkaline rocks (SANCHEZ CELA & GARCIA ANQUELA, 1984).

The field, petrological and structural features seem to point towards a certain relationship between the sedimentary wall-rocks and the lateral evolution of the igneous rocks, deduced among others, from the following features (Fig. 2 and 3).

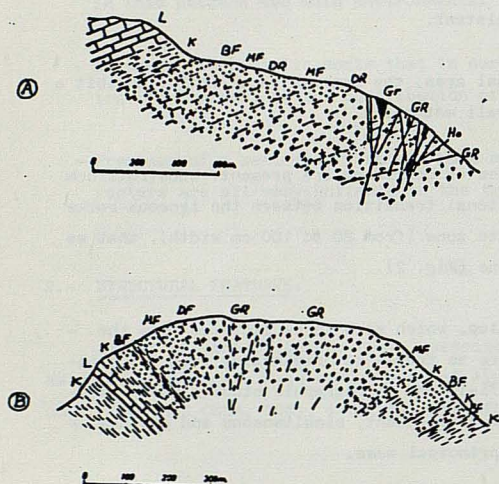


Fig. 2.- Schematic cross-sections. A= Sub-stratiform outcrop; B= Sub-intrusive outcrop: L= Liassic carbonatic rocks; K= Marly-evaporitic Keuper materials. BF= Border facies; MF= Microlithic facies; DR= Diabasic rocks; GR= Grained rocks; Ho= Hornfels (Sánchez Cela & García Anquela, 1984).

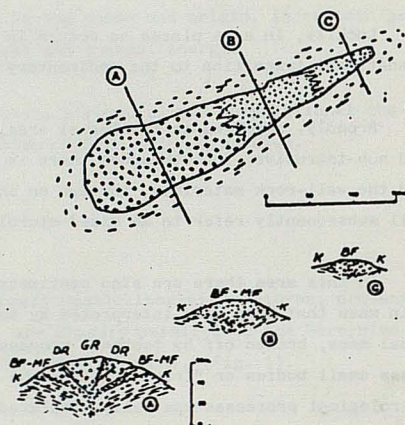


Fig. 3.- Schematic mapping of a shallow outcrop with the evolution of the petrographic facies. GR= Grained rocks. DR= Diabasic rocks. MF= Microlithic facies; BF= Border facies; K= Marly-evaporitic Keuper materials.

- Gradational transition from sedimentary to igneous rocks through "mixed" or "hybridous" facies of intermediate petrographic-chemical composition.
- Irregular petrographic distribution originated by the alternation of different igneous rocks and the wall-Keuper materials to all scales with gradational transition among them.
- Existence, in some cases, of small masses isolated from the igneous bulk of "mixed" or "hybridous" facies within the sedimentary rocks, that are interpreted as independent and simultaneous punctual processes, as stated above.
- Existence of small and very shallow outcrops of igneous rocks, without roots, constituted only by "mixed" or "hybridous" facies rocks with abundant Keuper materials remains, differentially transformed, with a gradational transition between both petrographic facies (Fig. 3).

3.2.- Petrographic types.

The petrographic types defined in the Iberian Mountains (Teruel) according to the leucocratic minerals, could be in some cases, in contradiction to their chemical composition. So a "typical syenite" can geochemically correspond to a subsaturated rock.

This lack of correspondence between the petrographic and the chemical composition, constitutes an interesting petrological feature, that we shall comment on below.

From the wall-Keuper materials to the center of the outcrops, regardless of the existence of the frequent repetitions, the following petrographic facies, can be established (Fig. 2 and 3).

- a) Mixed or hybridous rocks
- b) Microlithic-diabasic rocks
- c) Grained rocks

The "mixed or hybridous rocks", located in contact with Keuper materials, within the "border facies" constitute, in our opinion, a valuable "tool" to understand the meaning of the petrological processes that took place in the origin of the igneous rock-facies.

These hybridous rocks, are constituted by chloritic-illitic, minerals, more or less recrystallized, which include Fe-titaniferous minerals, quartz, feldspars, apatite and other accessory minerals. In spite of their micrometric size the petrographic features indicate that such minerals, of a subsequent origin, have been developed within sedimentary materials differentially transformed.

The "microlithic-diabasic" facies correspond to the intermediate rock-types between the mixed and the 'grained rocks. Here their mineral composition is more easily recognized. It is associated with the abundant crystals of chlorites, Fe-Ti, and argillaceous minerals. K-feldspar, plagioclase, biotite, quartz, apatite, zircon, rutile and sometimes carbonates as subordinate-accessory minerals.

The "grained" rocks are the most abundant facies in the outcrops. In general the petrographic types correspond to syenites, monzonites, monzogabbros and basic alkaline rocks.

In some points and in fracture zones there are granitic and hornfels rocks. (SANCHEZ CELA, 1981, 1982).

The geological-field studies together with the petrological ones on the relation between the different types of rocks indicate that in the origin of these rocks we can establish three petrological temporal episodes of formation. In the first the monzogabbros and in general the most basic igneous rocks are formed. In a second stage the greater part of syenite-monzonites are formed. Finally some quartz-syenite and phyllonian granitic rocks are formed.

3.3. Chemical features. Petrological implications.

The chemical data together with the use of some diagrams appear to indicate a certain relationship between the sedimentary-wall rocks with the associated igneous rocks facies (Table I). (SANCHEZ CELA, & GARCIA ANQUELA, 1984).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
SiO ₂	50'90	46'47	47'55	50'97	46'04	48'05	52'93	53'82	47'11	42'02	53'90	47'77	46'08	48'97	45'35	41'03	50'71	51'20	54'70
Al ₂ O ₃	15'81	15'38	15'85	16'21	16'24	15'24	16'32	16'87	16'91	17'61	16'36	16'15	15'89	16'06	15'78	16'40	14'01	13'69	15'56
Fe ₂ O ₃	7'27	6'01	7'23	7'20	7'37	7'25	4'85	3'65	4'53	2'20	5'07	7'51	7'96	6'21	5'31	2'34	3'59	2'21	4'70
FeO	2'93	4'89	3'74	2'98	4'16	4'38	1'70	2'30	3'62	2'90	3'11	4'66	4'67	3'60	2'85	3'10	5'85	6'15	1'59
MnO	0'48	0'44	0'62	0'21	0'40	0'10	0'13	0'11	0'10	0'10	0'34	0'40	0'45	0'38	0'20	0'30	0'14	0'12	0'02
MgO	7'57	9'38	7'54	7'30	8'78	6'53	8'30	8'63	11'34	10'47	5'82	8'46	9'32	8'62	13'15	12'57	7'81	9'04	10'90
CaO	2'83	5'75	5'08	1'84	5'10	4'05	3'93	2'14	2'76	4'04	0'98	0'54	0'65	0'70	2'48	3'40	10'13	7'50	2'66
Na ₂ O	3'06	2'63	2'42	4'86	2'78	6'18	3'26	2'76	3'16	2'22	2'07	2'00	2'23	1'98	1'62	1'87	3'29	4'35	1'08
K ₂ O	3'61	2'59	3'90	2'21	2'11	1'64	2'65	3'63	2'56	2'84	7'08	6'15	6'26	7'26	5'43	3'62	0'69	0'84	0'24
TiO ₂	1'47	1'92	2'09	2'54	2'15	2'37	1'70	2'16	1'44	1'72	1'59	2'30	1'98	2'00	1'80	1'64	1'00	0'98	0'75
P ₂ O ₅	0'51	0'48	0'45	0'62	0'58	0'65	0'46	0'53	0'53	0'58	0'45	0'51	0'57	0'40	0'35	0'40	0'11	0'17	0'13
H ₂ O	3'50	3'90	3'50	3'00	3'80	3'60	3'61	3'30	4'83	5'96	3'15	3'60	4'00	3'80	5'20	6'32	2'51	3'46	7'21
CO ₂	-	-	-	-	-	-	-	-	0'92	2'01	-	-	-	-	0'40	2'30	-	-	-
SO ₃	-	-	-	-	-	-	-	-	0'14	4'31	-	-	-	-	0'10	3'66	-	-	-
Cl	-	-	-	-	-	-	-	-	0'10	1'10	-	-	-	-	-	0'80	-	-	-
TOTAL	99'94	99'84	99'97	99'94	99'51	100'04	99'84	99'90	99'95	100'08	99'92	100'05	100'06	99'98	100'2	99'75	99'84	99'71	99'94

Table I.- Major chemical elements. Analysis 1-10= Substratiform outcrop; 1-8: grained rocks. 9= border-microlithic facies and 16 = Keuper materials. Analysis 11-16= Sub-intrusive outcrop, 11-14= grained rocks; 15= border-microlithic facies, and 16= Keuper materials. Analysis 17-19= ophitic outcrop of Pyrenean zone; 17= ophitic rock (average of 27); 18= border-microlithic facies (average of 6), and 19= Keuper materials -- (Sánchez Cela & García Anquela, 1984).

Some observations on the chemical data are the following:

- Relatively low percentages of SiO₂ and high of Al₂O₃ in relation to the data deduced from the petrographic studies.
- High percentages of MgO
- High ratios of Fe₂O₃ in relation to FeO.
- High percentages of TiO₂ and P₂O₅, etc.

From diagrams (Fig. 4) one can to deduce a continuous geochemical evolution from Keuper materials to the igneous rocks. The chemical and petrographic data appear to indicate that these igneous rocks conserve some features of their "sedimentary heredity".

From evolutive petrographic and chemical data from the Triassic wall-materials to dominant central igneous facies rocks it is possible to deduce the probable sedimentary heredity of some of the features.

Data on the composition of the Keuper materials, show that sediments exhibit high rates in magnesium indicated by amounts between 12 and 14.8 of MgO, which seems mainly derived from the richness in minerals of the chloritic types.

The high ratio of $\text{Fe}_2\text{O}_3/\text{FeO}$, that defines these rocks as oxidized, according to the chemical analysis, could be a consequence of the chemical nature of the wall-materials and/or of the -- "oxidation processes", that probably took place during the "building" of the igneous facies -- rocks.

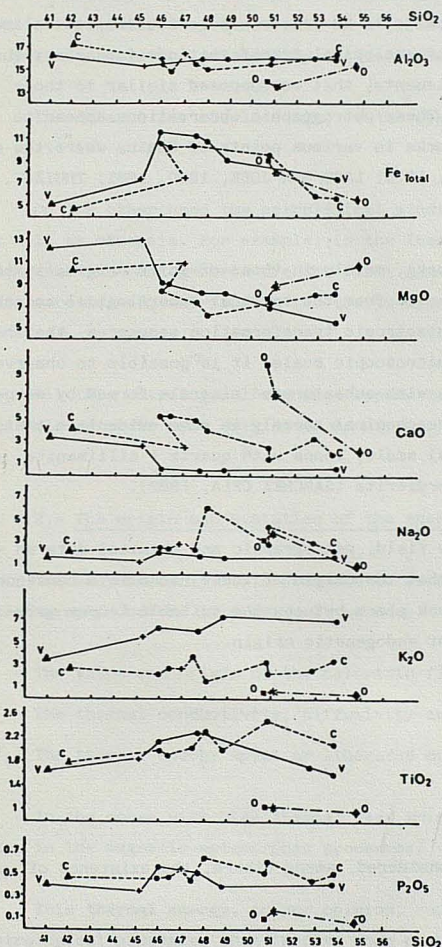


Fig. 4.-- Oxides- SiO_2 binary diagrams. C= Sub-stratiform outcrop (C-mareña zone). V= sub-intrusive outcrop (Vilhel zone). O= Ophitic rocks. Solid circles = Igneous facies rocks. Solid triangles = Keuper - wall materials. Crosses = Border-micro lithic facies. Solid squares = Ophitic rocks. Solid diamonds = Keuper-wall materials of ophi tes. Stars = Border-micro lithic facies in ophi tes (Sánchez Cela & García Anquela, 1984).

The geochemical evolution from Keuper wall-materials, to the igneous rocks, together with some petrographic deductions, seem to indicate that the oxidized feature of igneous rocks does not correspond to a hypergenetic-alteration process, but to the primary character formed during -- the petrogenesis of these igneous rocks.

Other elements, relatively abundant in the igneous rocks and that could be -- indicators of a sedimentary heredity, are TiO_2 and P_2O_5 . The former, mainly contained in ilmenite minerals (abundant in all the igneous facies rocks) is also frequently associated to iron minerals in the -- Triassic-wall sediments. The P_2O_5 in apatites of igneous rocks could be in great part formed by the remobilization and -- transformation of phosphorous components, nowadays present in some Muschelkalk-Keuper levels.

The relative low ratio of SiO_2 and high of Al_2O_3 in many rocks could be explained by the constant presence in all the petrography types of abundant argillaceous minerals, which we interpreted as materials of sedimentary origin differentially transformed during the processes that took place in the origin of the igneous facies rocks.

This apparent anomaly can be explained because these rocks have not reached the petrological equilibrium. So the -- quartz, in the syenitic rocks, is a later mineral associated with interstices where it almost always appears reacting with the ferromagnesian minerals (chlorite-sepentes) originated in the prior -- stages.

This lack of petrological equilibrium could be a consequence of the type and evolution of the petrogenetic process. So our first data, from the field to petrographic-geochemical ones, seem to indicate that the processes, that formed the igneous rocks were developed in various stages which were active for a long time.

These processes of long-term-evolution deduced from field and petrographic observations within different types of rocks (from monzogabbros to granites) are also observed within the same petrographic rock-type. So, for example, in a monzonite it is possible to establish several mineralogical crystallization sequences, as well as mineralogical transformations induced by the contribution of subsequent allocthonous chemical elements, that we supposed similar to those which later formed the granitic and hornfel rocks. These petrographic observations appear to conform to the absolute ages realized on ophitic rocks in various points of Spain, where the ages range from 200 to 170 m. y. CASTELLARIN et al, 1978; LAGO SAN JOSE, 1980, 1981; THUIZAT, 1976; WESTPHAL et al, 1976; WALGENWITZ, 1976; etc.

On the other hand in almost all the igneous rocks, mainly in those of later origin, it is possible to note a lack in the petrological equilibrium from the textural-mineralogical and chemical data. For example through the existence of anisotropic transformation sequences, that range from subsaturated to saturated minerals. So on a microscopic scale, it is possible to observe over-saturated zones (quartz-zones) and some others with subsaturated minerals formed by serpentinic-chloritic minerals. This apparent petrographic-chemical anomaly is more evident in the hornfel rocks, where there exist, on a microscopical scale, zones with quartz + sillimanite + feldspars and others with spinel + kornerupine + cordierite (SANCHEZ CELA, 1982).

All these final observations together with the field, petrographic and chemical data on the studied igneous rocks facies seem to indicate that the origin of these rocks is a consequence of petrological transformation processes that took place between the suitable Keuper materials and metasomatizing silica-alkaline elements of endogenetic origin.

4.- PETROGENETIC MODEL

4.1.- Introduction

In our petrogenetic-evolutive model we have considered, among others, the existence of various factors:

- Existence of sedimentary materials highly suitable to petrological transformations.
- Contribution of a energetic flux, chemically and thermally active for long geological periods.
- Adequate structural, stratigraphic and petrological disposition of the geological materials.
- Formation of punctual physical and chemical gradients mainly induced by the anterior factors.

As is known the Keuper sediments are highly suitable materials to the transformation processes. It is well known among petrologists that the sediments constituted by argillaceous mine-

erals (mainly illites and chlorites) together with various evaporitic materials ($\text{CO}_3^{=}$, $\text{SO}_4^{=}$, Cl^- , etc...) in an environment rich in water are highly suitable for mineralogical transformations from the first diagenetic stages. So during the diagenetic stages K-feldspar, Na-plagioclases and some micaceous minerals as well as quartz can be formed (MARFIL, 1970; GARCIA PALACIOS et al, 1976; GARCIA PALACIOS et LUCAS, 1972; etc.).

Obviously those petrological transformations will be more important if the physical factors overpass the diagenetic ones in a chemically open system, for example when the suitable - Keuper materials are affected by the contribution of magmatic or metasomatic fluids.

The data on the absolute ages of the ophitic and related rocks ranging generally from 200 m. y. to 170 m. y.

On the other hand the petrological studies show different stages of formations for rocks as well as minerals. For example, in the Iberian Mountains, near Teruel, the basic alkaline - rocks and the monzogabbros are the first generation of igneous rocks. Later the syenite-monzonite were formed, and finally the quartz-syenites and some phyllonian granitic rocks were originated.

All this petrological sequence appear to vouch the idea that the origin of the "ophitic" and related rocks were originated during a delayed geological period.

4.2.- The origin and evolution of the thermal energy.

Thermodynamically it is possible to estimate the temperature at a certain point of the - stratigraphic column if previously we know:

- The value and origin of the calorific flux.
- The thermal conductivity, diffusivity and the specific heat of the geological materials.
- The thermal energy spent or liberated during the transformation petrological processes.

In the zones with high thermal flux this energy springs from the allocthonous chemical matter in the magmatic-metamorphic processes.

This thermal energy, in our opinion, could be liberated in part, as a consequence of depth-petrological processes that involve some phase transformations. (This theory is easily understood within a physical-chemical model of structuration of the Earth (Crust-Mantle discontinuity).

In general the normal thermal flux, that is relatively uniform, is attributed to a radioactive origin (long life isotopes, mainly U_{235} , U_{238} and K_{40})

The "normal" and low thermal flux of radioactive origin can be modified by the structural and compositional characters of the geological materials located in the Upper-Crust.

- By the structural disposition of the endogenetic granitic masses within the Upper Cortex - in relation to the other geological materials.

- By the structural and compositional disposition of the sedimentary materials that fossilize the granitic rocks.

The references on the distribution of the thermal flux in zones with granitic rocks tell us the following:

- Existence, in general, of a positive thermal anomaly in the granitic rocks in relation to the sedimentary-wall rocks.
- Existence of a secondary positive thermal anomaly in the contact between granites and the sedimentary-wall rocks, and also in the fault-zones and in general in zones with a high degree of fracturation within the granitic masses.

This morphological distribution of thermal anomalies seems rather parallel to the distribution of the radioactive anomalies. This feature appears to indicate the existence of a certain relationship between both phenomena.

This thermal residual energy nowadays must have been more important in the past geological times, for example 280 m. y. or 190 m. y. ago (Hercynian and Alpine times).

In those times as well as a greater thermal energy there must have also existed a greater chemical activity. Both, chemical and thermal, energies are very important in all the petrological processes.

On the other hand the geological-field data together with the petrological ones appear to indicate that both energies are in relationship with the existence of underlaying granitic masses, that nowadays partially spring up in some zones.

The structural and compositional disposition of the levels of the sedimentary rocks, that are fossilizing the primary sources of thermal flux, can originate differential thermal processes (also chemical ones) because of the different behaviour of the geological materials (JAEGER, 1959; MONGELLI, 1968, 1969; MONGELLI et al, 1982; TKACH and JORCHAK, 1972, etc). (Fig. 5 and 6).

A quick injection of allocthonous chemical elements, within a sedimentary cover, can originate punctual overpressures which can be in great part transformed into an additional heat source. Another possible thermal-source, although less important, is the existence of radioactive processes that can take place in the shallow levels (e.g. ^{40}K).

All these thermal sources can originate interesting temperature gradients of endogenetic petrological meaning.

On the other hand the differential thermal behaviour of the sedimentary levels and of the igneous rocks can together the different thermal sources and in certain suitable structural and petrological conditions, act as a thermal accumulator or thermal storage provided there exist a more or less continuous thermal feedback, active a long time.

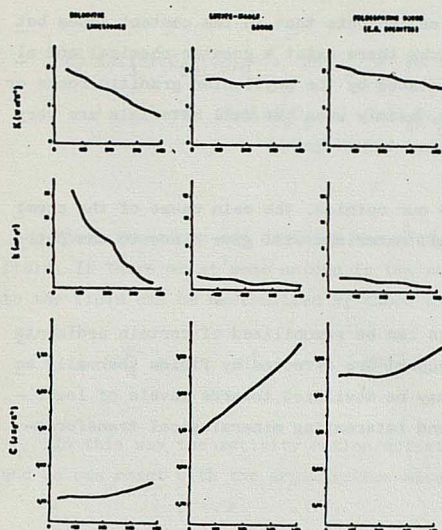


Fig. 5.- An approaching thermal behaviour in various petrographic types. K= Thermal conductivity; k= Thermal diffusivity; C= Thermal capacity.

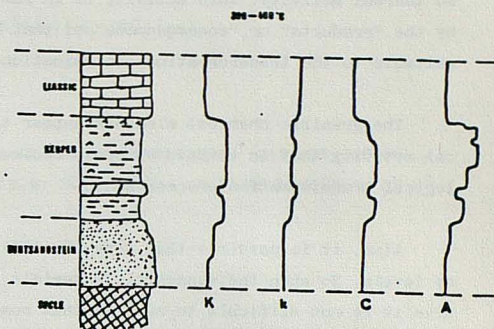


Fig. 6.- An approaching thermal and "chemical" behaviour in the Triassic-Liassic stratigraphic column. K= Thermal conductivity; k= Thermal diffusivity; C= Thermal capacity. P= "Petrological affinity".

4.3.- The environmental pressure.

In general the initial pressure at any point of the stratigraphic column is mainly owing to the load pressure originated by the overlying geological materials. $P = g h$, where the geobaric gradients $\Delta P / \Delta Z = \bar{\rho} g$ ($\bar{\rho}$ is the average density).

In the Crust $\bar{\rho} \approx 2,7 \text{ g/cm}^3$; then $\Delta P / \Delta Z = 2,7 \text{ M Pa/Km}$ (1 M Pa=10 bar.).

On the other hand the chemical contribution of endogenetic origin, in certain structural-compositional conditions; can cause an increase in the average density (Δ); $\Delta P' / \Delta Z = \rho' g$. - This originates an overpressure, in many cases only with punctual meaning, because of an increase as in the mass as in the density of the geological materials, mainly during the first stages of the petrological processes (transformation-contamination). During these first stages the partial pressure originated by the fluids can be very important. These fluids are abundantly present in the marly-evaporitic materials of the Keuper and in other stratigraphic levels of different geological periods.

4.4.- The chemical energy

The geological-field and the petrological studies indicate that in the contact zones between the granitic masses and the sedimentary-wall rocks there exist a greater chemical and also thermal activity. This activity is in some zones stated by the phyllonian granitic rocks or by the "products" or "consequences" of that activity, mainly when the wall materials are very suitable to the transformation-contamination processes.

The granitic chemical elements appear to be, in our opinion, the main cause of the chemical activity that in certain suitable sedimentary-wall materials will give place to the petrological transformation processes.

Also, it is possible that some chemical elements can be remobilized of certain sedimentary levels. So when the evaporitic materials (e.g. Keuper) are affected by fluids thermally active it is not difficult to suppose that some ions may be mobilized towards levels of lower thermal energy, where they can participate in many and interesting mineralogical transformations some of which we will now comment on.

4.5.- Petrological transformations

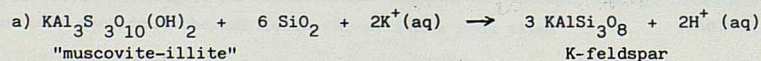
If we foresee or we deduce the existence of a chemical and physical energy of endogenetic origin, it is possible to derive interesting petrological transformation within the Keuper levels because of the their high reaction affinity which such levels have in the presence of an active chemical-physical flux.

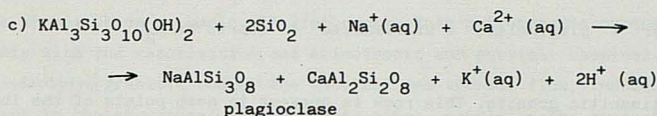
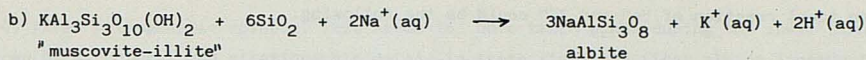
These transformations appear to take place in hydrothermal environments where the chemical features of the fluid phase together with the physical factors which are going to conditionate the evolution of the mineralogical-petrological transformations. In these transformations the ratio between the activity of the metallic ions in relations to H^+ ions is very important.

If we only consider the pelitic part of the marly-evaporitic materials of the Keuper, the silica-alkaline flux may react with the argillaceous-micaceous minerals of the pelitic part - and originate, among others, feldspars and quartz, according to the chemical environment and the ratio between the activity cation/ H^+ .

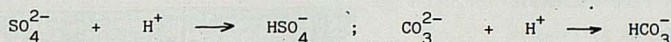
The analytic data indicate that the pelitic components are mainly constituted by illitic-muscovitic minerals.

The following are some transformations that can take place between the argillaceous-micaceous minerals and the active chemical elements:



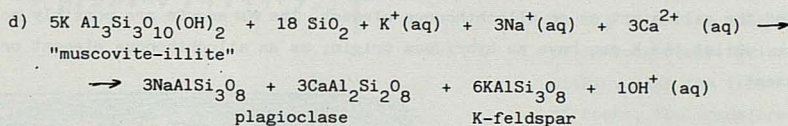


These reactions can diminish the ratio between the cation activity/ H^+ activity of the fluid. If there exist some anions in the solution (e.g. SO_4^{2-} , CO_3^{2-} , etc.) the addition of H^+ to the fluid can be neutralized by those anions;

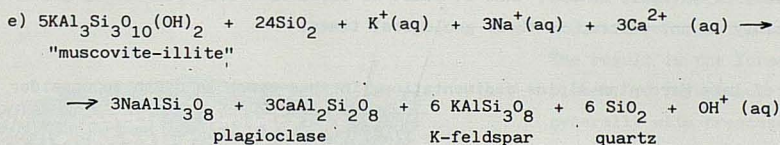


In this way the activity cation/activity- H^+ can be increased, then the fluid rich in Na and Ca can react with the argillaceous-micaceous and builds up plagioclases.

If there exists large amounts of Na and Ca, present in the Keuper evaporites (CO_3Ca , ClNa $\text{SO}_4\text{Ca}-2\text{H}_2\text{O}$), the formation of alkaline feldspars and plagioclases can also be very wide-spread.

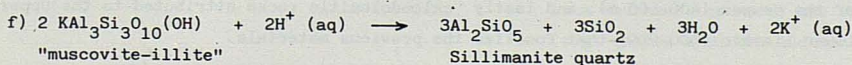


If there also exist an excess of silica, quartz as well as feldspar minerals can be formed:

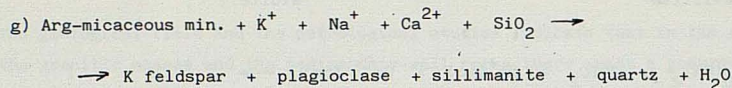


The first and second reactions (a + b) can have the petrological meaning of a syenitic rock. The 3rd (c) of a dioritic rock. The 4th (d) of a monzonitic rock; and the 5th (e) of a granitic rock.

If the H^+ -activity is not neutralized, in certain T and P conditions the argillaceous-micaceous minerals can originate "metamorphic" minerals:

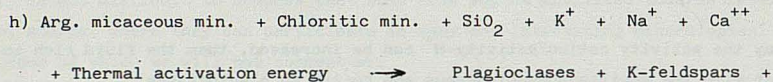


An ideal reaction of "e" and "f" could be the following:



That is to say a sillimanitic granite. This rock is present in some points of the Iberian Mountains.

As well of these transformations, where the more abundant petrographic minerals are involved, there are others where the chloritic minerals together the other argillaceous minerals - and the cations present in the evaporitic materials can originate very different minerals, such as: biotites, amphiboles, pyroxenes, etc. provided there exists a chemical and thermal activation energy:



$\pm$ Pyroxenes $\pm$ Amphiboles $\pm$ Biotites, which respond to a monzonitic rock. These last rocks are very abundant in the studied outcrops.

In these ideal transformations the argillaceous-chloritic minerals act as autochthonous componentes and the silica act as an allochthonous element. The Na and Ca are possibly mobilized elements, whilst the K can have an hybridous origin, as an allochthonous element or/and mobilized element.

AN APPROACHING MODEL OF PETRO-STRUCTURAL EVOLUTION (Fig. 7)

A) The initiation of this model would be in the Upper Paleozoic times with sedimentary - materials, mainly of lutithic nature, that it would be differentially affected by granitic masses that possibly do not outcrop in those geological times.

B) Stage of late Hercynian-Alpine sedimentation. In this epoch we ought to consider two episodes.

- A late-Hercynian sedimentation formed by the materials of the Upper Paleozoic (Stephaniense-Permian). During these times in some parts of the Iberian Mountains, various petrogenetic processes which are manifested by different igneous rocks facies, generally of dacitic-andesitic types, took place.

- Discordant on the previous materials the first phase of alpine sedimentations takes place. This is constituted by sediments of the Triassic, of "German" facies, that is to say a detrital Buntsandstein (100-40 m.); a calcodolomitic Muschelkal (40-5 m); marly-evaporitic materials of the Keuper (400-100 m); and lastly calcodolomitic rocks attributed to the Upper-Keuper or Lower Liassic (500-200) that fossilize the previous materials.

C) First petrogenetic episode. This seems to have taken place during the Lower Liassic (deduced by structural and stratigraphic data). In these times the first alpine igneous facies are formed. According to the different areas these rocks respond to types from ophite-dolerites to monzogabbros or basic alkaline rocks. This petrogenetic process appears to be in relationship with the reactivation and anisotropic and partial chemical remobilization of supposed underlying granitic rocks. The chemical and thermal flux, induced by these rocks, is more manifest in the structural discontinuity zones, mainly in the contact zones between the granitic rocks and the sedimentary wall rocks.

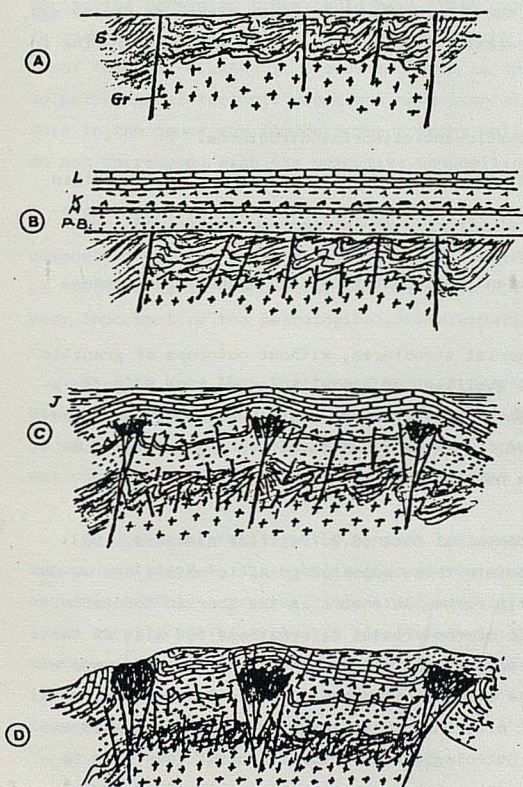


Fig. 7.- A petro-structural evolutive model. A= initial stage during the Upper Paleozoic. B= late Hercynian-Triassic sedimentation. C= First petrogenetic episode. D= Second petrogenetic episode; S= Shales-lutites; Gr= supposed granitic rocks. L= Liassic; K= Keuper; M= Muschelkalk; P-B= Permo-Bunt; J= Jurassic.

In this epoch the chemical and thermal energy, of granitic origin, react and transform the suitable sedimentary wall rocks (Keuper-marly-evaporitic materials); the result is the formation of the first generation of igneous rocks facies.

D) Second petrogenetic episode. This petrological process seems to have taken place during the Middle Liassic, perhaps between this and the Upper Liassic. It is during this time when the main bulk of igneous rocks facies are formed, within, like the first generation of rocks, the transformist petrogenetic theory. As well as of ophitic doleritic rocks, monzonitic and some syenitic rocks are formed. At the same time the igneous rocks generated in first episode suffer partial and differential transformations. The result is the formation, in many places, of "hybridous igneous rocks", generally with breached textures and clearly with two mineralogical generations.

E) Third petrogenetic episode. This petrogenetic episode only present in some places, seems to have taken place during the Upper Liassic or between this and the Middle Jurassic. In this epoch the richest silica and alkaline rocks are formed (e.g. quartz-syenites and some granites with sillimanite). These rocks,

generally in the center of the outcrops, exhibit mechanic features y breached textures in the contact with the igneous rocks facies of the two prior generations.

To this petrogenetic episode we could still add a fourth one, but it has a greater meaning structural than petrogenetically. Only punctual transformations, generally of retrograde character, are present. This long episode enclose various tectonics phases from Jurassic to - Pliocene, favoured by the plastic behaviour of the Keuper materials.

6.- SOME FINAL REMARKS

Beside our petrogenetic considerations on the origin of some igneous rocks, of alpine age, we want to call attention on other aspects in relation with this question, and they are the following:

- Petro-structural meaning of some alpine domatic-anticlinorial structures.
- Possible extention of this or analogous petrogenetic model as explanation of the origin of igneous rocks, of basic-intermediate nature, associated to Paleozoic materials located in the Hercynian of the SW of Spain.
- Possible spatial-temporal convergence between the transformist and magmatic processes.

In our opinion the alpine domatic-anticlinorial structures, without outcrops of granitic rocks, appear to be the result of some "crustal swelling" of a sialic nature that superficially they may manifest themselves with structures with ovoid morphologies. generally bordered with disconform contacts, differentially faulted, in whose zones sometimes are located some igneous rocks facies from basic to intermediate nature.

This "crustal swelling", manifested by geophysical data (G.T. Perfiles Sísmicos, 1983) - is mainly formed by "granitic" rocks. In some points these supposed granitic masses can be deduced by the presence of some phyllonian granitic rocks, as occurs in the Iberian Mountains. These rocks are not only the cause of the origin of the crustal deformations but also of the existence of thermal and radioactive anomalies nowadays mainly present in the border zones - (granite with rocks wall). We suppose that these zones in the past geologic times (e.g. 190 m. y. ago) were not only more thermally active but also they constituted active zones of chemical flux, of "granitic" nature, that in a suitable petrological structural habitat gave rise to - the different igneous facies rocks.

After our studies on the basic-intermediate igneous rocks facies of Alpine age, we think that possibly we had not exactly defined the sedimentary habitat in relationship to the Hercynian basic-intermediate rocks of SW of Spain. So in our works these igneous rocks were attributed as originated by metasomatic-transformation processes by reaction between granitic chemical elements and the carbonatic wall rocks. (APARICIO & SANCHEZ CELA, 1972; SANCHEZ CELA, 1971, 1981, 1982; SANCHEZ CELA & APARICIO, 1972; SANCHEZ CELA & ORDOÑEZ, 1974).

Those conclusions were deduced because the igneous facies rocks appear almost always to be associated to carbonatic rocks, attributed in some cases to Cambrian and in others to Devonian.

Through the geological and petrographic data we know that as well as the dolomite-limestones, in more or less compact masses, exist other materials such as the marls, which are very abundant in some stratigraphic sequences of the Paleozoic and that curiously correspond, in many cases, with the "location" of igneous facies rocks, from basic to intermediate types.

Through theoretical data, added to references on the composition of the sedimentary materials in similar stratigraphic levels and where they are less affected by the alteration and transformation processes, we deduce that the wall-materials associated to igneous facies rocks during the Hercynian times could have other composition. So, for example, they could be richer in evaporitic componentes (chlorides sulphates and other salts). These salts, as a consequence of the post-diagenetic processes, such as the alteration because of its high solubility add to petrological-tectonic processes have been almost removed from the stratigraphic records. - This is the cause why nowadays the present wall-materials petrographically and geochemically do not correspond with its primitive composition.

For this reason we consider that in the Hercynian times, for example in the Devonian, the composition of the sedimentary materials, could be different to the present. So they, as well as the carbonatic components, could contain sulphates and other salts, nowadays "altered", all very important in the petrological transformation processes.

We also know that the transformation processes are less important in the "compact" rocks because of the difficulty in the infiltration-diffusion of the metasomatizing elements. Because of this we consider that the calcareous rocks, associated to basic igneous facies rocks, - may correspond, in many cases, to the "fronts" of the transformation processes.

In our interpretation the compact carbonatic rocks constitute a "cover plate", which acts as an "isolater" to the mobilization of the chemical elements of endogenetic origin. As a consequence of this a greater concentration of allocthonous chemical elements can take place in lower stratigraphic levels. If simultaneously these stratigraphic levels correspond to sedimentary materials very suitable to being transformed, and the processes act for a long time, it is not very difficult to understand "where" and "why" the petrological transformation processes took place.

For all these considerations we deduce that the marly evaporitic-Triassic materials together with the existence of an impermeable carbonatic cover can constitute in certain chemical-physical conditions a petrological and selectivity "baking place".

These considerations could be extended to other similar petrological environments, that nowadays appear to be modified by petrological and tectonic-alteration processes, as could have occurred in the origin of many basic-intermediate rocks of Hercynian age of the SW of Spain.

In this way the reaction-transformation processes between the "suitable materials" (marly-evaporitic materials) and some allocthonous active elements, such as the silica-alkalis, -

can take place to high temperatures, and in certain conditions to originate the partial fusion of the materials. In this idea between the metasomatic-transformation processes and the magmatic ones could not exist a clear differentiation, because there exists in some cases, a gradual transition-evolution between both processes.

So it is possible that some "igneous textures", such as the fluidity or pillowed textures, that we can sometimes observe in some Alpine ophites, could represent an incipient fusion state or an intermediate state between the solid and the melted one.

In this idea we believe that some magmatic phenomena could correspond to the "thermal culmination" attained during some transformation processes.

In our opinion greater attention and consideration to the interaction processes that can take place between the mobilizing active-chemical elements and the suitable sedimentary-wall materials as well as on the origin and evolution of physical energy, would be necessary.

REFERENCES

- APARICIO YAGUE, A. y SANCHEZ CELA, V. (1972).- Origen de las rocas básicas de los alrededores de Burguillos del Cerro (Badajoz).
Bol. R. Soc. Esp. Hist. Nat. Geol., 70, 139-151.
- AZAMBRE, B., ROSSY, M. et ELLOY, R. (1981).- "Les dolerites triassiques (ophites) des Pyrenees: données nouvelles fournies par les sondages petroliere en Aquitaine".
Bull. Soc. Geol. France, 23, 263-269.
- BRAZ AFONSO, (1979).- "Contribución al conocimiento mineralógico de las ofitas españolas".
Tesis Doctoral. Univ. de Salamanca. 227 p.
- BAKX, L. (1935).- "La geologie de Cascante del Rio et Valacloche. Espagne".
Leids. Geol. Med., 7, 157-220.
- CASTELLARIN, A., LUCCHINI, F., ROSSELL, J. ROSSI, P.L., SANTORI, R. et SAVELLI, C. (1978).- "Preliminary data on mesozoic "ophites" from the southern Pyrenees".
Miner. Petrogr. Acta, 22, 85-93.
- DURAND-WACKENHEIM, C. (1974).- "Etude petrologique des roches eruptives de la bordure nord du Massif de l'Arize (Ariege).
These Univ. Paris, 79 págs.
- GARCIA PALACIOS, M.C., LUCAS, J., DE LA PEÑA, J.A. y MARFIL, R. (1976).- "La cuenca Triásica de la rama castellana de la Cordillera Ibérica. I. Petrografía y Mineralogía".
I. Coloquio de Estratigrafía y Paleografía del Trías y Pérmico en España. Madrid.

- GARCIA PALACIOS, M.C. et LUCAS, J. (1977).- "Le bassin Triasique de la branche Castellana de la chaine Iberique. II. Geochimie".
Cuad. Geol. Iberica, 4, 355-368. Madrid.
- "GRUPO TRABAJO DE PERFILES SISMICOS PROFUNDOS" (1983).- Perfiles sísmicos profundos.
Bol. Geol. Min. XCIV-IV, 339-347.
- JAEGER, J.C. (1959).- The use of complete temperature-time curves for determination of thermal conductivity with particular reference to rocks.
Aust. J. Phys. 12, 203-217.
- LAGO SAN JOSE, M. (1980).- "Estudio geológico, petrológico, geoquímico y de aprovechamiento - industrial de las rocas ofíticas en el Norte de España".
Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza, 444 p.
- LAGO SAN JOSE, M. (1981).- Consideraciones sobre la edad de unas rocas ofíticas en la zona meridional sur-Pirenaica (Provincia de Huesca-Lérida).
Rev. Acad. Ciencias. Zaragoza, 36, 115-121.
- LAGO SAN JOSE, M. y POCOVI JUAN, A. (1980).- "Observaciones petrográficas y tectónicas sobre las ofitas del área de Aulet (prepirineo meridional, Huesca)".
Acta Geol. His. 15, 141-151.
- LAGO SAN JOSE, M. y POCOVI JUAN, A. (1982).- Nota preliminar sobre la presencia de estructuras fluidales en las ofitas del area de Estopiñán (Provincia de Huesca).
Acta. Geol. Hispánica, 17, 227-233.
- LAGO SAN JOSE, M. y POCOVI JUAN, A. (1984a).- Las espilitas del area del Moncayo (Zaragoza-Soria). Caracteres geológicos y petrológicos.
I. Congr. Español de Geología t. II, 161-176.
- LAGO SAN JOSE, M. y POCOVI JUAN, A. (1984b).- Aspectos geológicos y petrológicos de las doleritas triásicas (Ofitas) de Cantabria.
I. Congr. Español. de Geología, t. II, 147-160.
- LAMARE, P. (1935).- "A propos des ophites triasiques et des roches eruptives cretacees des - provinces basques d'Espagne".
C.R. Somm. Geol. Fr., 12, 171-172.
- MARFIL, R. (1970).- "Estudio petrogenético del Keuper en el sector meridional de la Cordillera Ibérica".
Est. Geol.; 26, 113-161.
- MARTIN, R. (1936).- "Die Geologie von Camarena de la Sierra und Riodeva (provinz Teruel, Spanien)".
Leids. Geol. Med., 8, 55-154.

- MONGELLI, F. (1968).- Un metodo per la determinazione in laboratorio della conducibilità termica delle rocce.
Boll. Geofis. Terr. Appl. 27, 51-58.
- MONGELLI, F. (1969).- Thermal conductivity measurements of some Apulian limestones by the "cut-core" method.
In: Atti. XVIII Convegno annuale "Associazione Geofisica Italiana". Napoli (Italy) pp. 137-154.
- MONGELLI, F; LODDO, M. and TRAMACERE, A. (1982).- Thermal conductivity, Diffusivity and Specific Heat variation of some Travale field (Tuscany) Rocks versus temperature.
Tectonophysics, 83, 33-43.
- ORTI CABO, F. (1974).- "El Keuper de Levante español".
Est. Geol., 30, 7-46.
- ORTI CABO, F. y VAQUER, R. (1980).- "Volcanismo Jurásico del sector valenciano de la Cordillera Ibérica. Distribución y trama estructural".
Act. Geol. Hisp., 15, 127-130.
- PUGA, E. y RUIZ CRUZ, M.D. (1980).- Observaciones petrológicas y geoquímicas sobre el magmatismo básico mesozoico del sector central de la Cordillera Subbética.
Cuad. Geol. Univ. Granada (España) 11, 127-155.
- SAN MIGUEL, M. (1936).- "Estudio de las rocas eruptivas de España".
Mem. Ac. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, T.G. Madrid.
- SANCHEZ CELA, V. (1971).- Consideraciones petrogénéticas sobre las rocas dioríticas de la zona de Mérida.
Estudios Geol. 27, 305-310.
- SANCHEZ CELA, V. (1981).- "Sillimanite-bearing rocks of Alpine age associated to Triassic materials near Teruel (Spain)".
Est. Geol., 3, 135-140.
- SANCHEZ CELA, V. (1982).- "On the existence of hornfels associated to Triassic materials of - Keuper facies, near Teruel (Spain)".
Est. Geol., 38, 405-413.
- SANCHEZ CELA, V. & APARICIO YAGUE, A. (1972).- Petrogénesis de las rocas básicas del SW de España.
Bol. Geol. Min. España, 83, 402-406.
- SANCHEZ CELA, V. y ORDOÑEZ DELGADO, S. (1974).- Consideraciones sobre unas rocas diabásicas - del SE de la provincia de Badajoz.
Bol. Geol. Min. España, 85, 208-213.

- SANCHEZ CELA, V. & GARCIA ANQUELA, J.A. (1984).- Igneous rocks of alpine age associated with Keuper materials in the Iberian mountains, near Teruel (Spain).
Estudios Geol. 40, 23-32.
- THUIZAT, R. (1976).- Ages Potassium-Argon de dolerites mesozoiques du Maroc. 1^{ème} Reunión Annua
lle des Sciences de la Terre, p. 379.
- TKACH, G.F. and YORCHAK, R.P. (1972).- Measurement of thermal parameters of rocks over a wide
temperature range.
Izvestiya, 5, 321-322.
- WALGENWITZ, F. (1976).- "Etude petrologique des roches intrusives triassiques des écailles du
socle profond et des gites de chlorite de la region d'Elizondo (Navarra Espagnole)".
Thèse Fac. Sc. Techn. Univ. Besançon, 167 p.
- WESTPHAL, M; MONTINYG, R; THUIZAT, R; BARDON, C; BOSSERT, A. et HAMZEH, R. (1979).- Paleomag-
métisme et datation du volcanisme, permien triassique et crétacé du Maroc.
Com. J. Earth. Sci. 16, 2150-2164.

ESTUDIO GEOLOGICO DE LA CUENCA TERCIARIA DE CALATAYUD-DAROCA.

J.M. TENA Y J.A. MANDADO.

Departamento de Petrología. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza.

The sedimentary materials from the Calatayud-Daroca tertiary basin are constituted by breccias, conglomerates, sandstones, claystones and siltstones, marls, limestones and gypsites. Their cuasi-concentric disposition is conditioned by the rapid loss of transport competency and capacity in an extensive plain, where a lake system with evaporitic precipitation is developed. Diagenetic processes furnish a very important metasomatism, specially of carbonatic rocks that are dolomitized and silicified.

1.- SITUACION Y CARACTERÍSTICAS GEOGRAFICAS.

La subcuenca de Calatayud-Daroca es una depresión alargada, con el eje principal en dirección aproximada NO-SE, de una longitud de más de 110 Kms. y una anchura que varía entre 10 y 26 Kms. Es una de las regiones de la Ibérica mejor diferenciadas, constituyendo la divisoria entre las llamadas "Rama Castellana" (u oriental), y "Rama Aragonesa" (u occidental). Queda incluida en las hojas 1/50.000, del M.T.N. nº 380 (Borovia), 381 (Illueca), 408 (Torrijo de la Cañada), 409 (Calatayud), 437 (Ateca), 438 (Paniza), 464 (Used) y 465 (Daroca).

Toda el área queda flanqueada al N y S por sierras marginales con cotas de hasta 1.400 m. (Sierra de la Virgen, de Vicort y del Peco al N, y de Pardos y de Santa Cruz al S). Al N.O. de Calatayud se forma una amplia llanura y el centro de la zona SE está ocupado por elevadas planas diferenciadas por los valles de los ríos.

2.- CARACTERISTICAS GEOLOGICAS GENERALES. GEOMORFOLOGIA Y TECTONICA.

Geológicamente, la subcuenca de Calatayud-Daroca es una fosa tectónica rellena de materiales miocenos y delimitada por materiales más antiguos, en su mayor parte paleozóicos. En el extremo NO se alcanza el contacto con materiales mesozóicos (en Bijuesca y Torrelapaja), y por el SE queda limitada, en las proximidades de Daroca, por el umbral y falla inversa que la separa de la subcuenca de Calamocha-Teruel.

El contacto entre el relleno de la cuenca y los materiales paleozóicos y mesozóicos suele ser a través de falla inversa en el borde Sur, mientras que en el Norte se realiza por falla normal, oculta generalmente por una discordancia que pone en contacto los conglomerados terciarios con las capas monoclinales paleozóicas.

Las formas de relieve de la cuenca son fiel reflejo de las variaciones litológicas del material colmatante y de los accidentes estructurales. Los bordes son abruptos en los contactos con las sierras paleozóicas, con descenso brusco hacia la depresión central constituida por una penillanura en la que se ha producido el encajamiento reciente y profundo de los ríos; las zonas entre ríos quedan diferenciadas normalmente por grandes taludes que enlazan desniveles de hasta 300 m. desde el fondo de los valles a las cotas más elevadas que corresponden a las calizas pontienses.

Desde finales del Pontiente la cuenca se ha mantenido prácticamente estática salvo pequeños reajustes traducidos en alabeos y un leve basculamiento generalizado hacia el E, por lo que las formas de relieve son todas post-pontienses. Será la implantación de la red hidrográfica cuaternaria la causante del modelado actual, y las direcciones de los ríos vendrán reguladas tanto por alineaciones estructurales como por la mayor facilidad de erosión de determinados materiales o por la favorabilidad generada en las zonas de cambio de facies (BOMER¹, 1960).

Los dos grandes sistemas de drenaje corresponden al Jalón y a su afluente el Jiloca. El curso del Jalón, con dirección aproximada E-O, atraviesa transversalmente todas las formaciones litológicas planteando problemas de difícil solución en cuanto a su forma de implantación; probablemente ha estado condicionado en gran parte por el basculamiento hacia el Este.

El río Jiloca por el contrario presenta un cauce netamente influenciado por la tectónica. De Luco a Murero sigue una falla que limita la fosa y posteriormente se encaja en los materiales miocenos, mucho más erosionables, para seguir de forma aproximada y hasta su desembocadura los cambios de facies.

Las formaciones de terrazas son de escaso desarrollo y siempre discontinuas; únicamente en el Jalón tienen alguna entidad, en especial en la margen derecha en las proximidades de Terrer y Calatayud. Mayor importancia tienen los glacias, en especial los más antiguos. Los de mayor amplitud son los situados al N de la Sierra de Armantes, NE de Cervera de la Cañada y N y E de Villarroja de la Sierra. De este modo podemos decir que la evolución de la zona tras la colmatación miocena y los últimos reajustes tectónicos se ha caracterizado por el desarrollo homogéneo de la erosión postmiocena que peneplanizó toda la cuenca y, tras un leve basculamiento hacia el Este, por el encajamiento de los valles de los ríos según directrices tectónicas (fallas) o aprovechando las zonas de menor resistencia (cambio de facies).

Contemporáneo con el basculamiento o en una etapa ligeramente anterior se desarrolló una superficie detrítica tipo raña que cubre gran parte del borde N en la hoja de Calatayud, al E de Clarés de Ribota.

El conjunto de materiales paleozóicos y mesozóicos circundantes de la fosa muestra una típica tectónica apalachiense, con fallas inversas y cobijaduras resultado de los esfuerzos alpinos. Son frecuentes grandes cabalgamientos y normalmente los niveles paleozóicos preservados están constituidos por crestas cuarcíticas monoclinales con buzamiento general hacia el SO.

La formación de la depresión que constituye la cuenca de Calatayud corresponde a la generación de una fosa por diferenciación de dominios según una tectónica de escamas. Esta fosa podría haber funcionado como tal desde el comienzo de la elevación generalizada de la Ibérica durante la orogenia alpina, (TENA et al²., 1979), o bien como propone JULIVERT³ (1954) sólo tras un hundimiento producido durante la etapa de distensión, correspondiendo a un primitivo anticlinal de fondo.

La fase principal de los movimientos tectónicos comenzó a finales del Oligoceno y se prolongó hasta el Vindoboniense, explicando la gran masa de sedimentos acumulada, ya que el rejuvenecimiento constante de los bordes daría lugar a un suministro continuado e importante de detritus.

El umbral de Daroca corresponde a la unión de dos bloques que fueron sujeto de una menor perturbación de forma tal que la elevación fué mayor en la parte occidental que en la oriental. La movilización diferencial se tradujo en una emersión del bloque de Teruel-Montalbán en falla inversa, con cabalgamiento sobre el bloque de Calatayud.

Con excepción de pequeños accidentes tectónicos en las calizas terminales, todos los sedimentos terciarios se encuentran prácticamente horizontales, lo que denota una gran estabilidad en épocas posteriores al Vindoboniense. El proceso de distensión no dará lugar más que a una mejor caracterización de los accidentes previamente formados, y así se acentuará la diferenciación de bloques en el umbral de Daroca y se producirá una reactivación del borde Sur, permitiendo el cabalgamiento del Paleozóico sobre los conglomerados terciarios.

Las calizas de las planas suelen presentar fallas y plegamientos cuyo origen se debe al reajuste de los materiales infrayacentes y a la halocinesis de los yesos, sin que haya influido en manera alguna ningún tipo de fenómenos tectónicos de mayor estilo en los que estuviera implicado el basamento.

3.- PALEONTOLOGIA Y ESTRATIGRAFIA.

La gran cantidad de restos de mamíferos encontrados en los materiales terciarios de la Cuenca de Calatayud han servido para establecer, aunque todavía incompleta, la cronoestratigrafía de la cuenca.

Las asociaciones faunísticas han puesto de manifiesto una etapa de sedimentación que comprende desde el Paleógeno hasta el Pleistoceno, perteneciendo en su mayor parte al Mioceno medio y superior, y en especial al Vindoboniense y al Pontiense.

Debido a que los términos usuales de división del Terciario en pisos como Aquitanien- se, Burdigaliense, Vindoboniense, etc., son de difícil correlación con series continentales, distintos autores (BRUIJN⁴, 1967; DAAMS⁵, 1977; WEERD et al.⁶, 1978) coinciden en la necesidad de utilizar otra terminología más adecuada, indicando que de más antiguo a más moderno en la cuenca de Calatayud están presentes el Agenianense (Mioceno inferior), Aragoniense, Vallesianense, Turolianense, Rusciniense y Villansianense, correspondiendo éste último al Pleistoceno inferior.

Estos pisos se han datado de acuerdo con la sucesión de familias de micromamíferos, para las que, según una ordenación de más antigua a más moderna, (BRUIJN⁴, 1967) se han determinado: a) Asociación dominante de *Gliridae* y *Eomyidae* b) Predominio de *Muridae*. c) Predominio de *Arvicolidae*.

También se han localizado en la cuenca tres yacimientos de coprolitos (HERNANDEZ PACHECO y MELENDEZ⁷, 1957; BRUIJN⁴, 1967) sin valor geocronológico pero que son de gran interés para la reconstrucción paleogeográfica.

En las calizas y margas del centro de la cuenca hemos observado una gran abundancia de restos algáceos (en especial caráceas), ostrácodos y gasterópodos pulmonados, cuya identificación a nivel de especie ha resultado imposible. Existen también lechos lignitíferos de escaso espesor intercalados en los tramos margosos.

La relativamente escasa amplitud de la cuenca no es obstáculo para que en ella esté representada una gradación completa de sedimentos, desde los detríticos más groseros (brechas y conglomerados) hasta las evaporitas, (yesos, calizas) con los términos intermedios de areniscas, lutitas y margas. La morfología condiciona la distribución espacial de los diferentes materiales, observándose una disposición en bandas casi concéntricas constituidas por materiales progresivamente más gruesos cuanto más próximos a los bordes.

En la vertical se aprecia gran variedad de facies con tendencia generalizada a disminuir el tamaño de grano hacia el techo. Son característicos los cambios laterales que llegan

a situar en un mismo nivel topográfico y cronoestratigráfico los yesos y las areniscas en un espacio de cientos y aún a veces decenas de metros.

El aporte de materiales y su depósito está condicionado por la topografía de los bordes y el progresivo hundimiento hacia el SE. La granoselección se realiza en pocos metros y el es caso transporte da lugar a una elevada proporción de cantos angulosos. Sin embargo, y a pesar de la proximidad de las zonas de erosión, sólo de forma ocasional han podido alcanzar las zonas centrales cantos detríticos de tamaño superior al de las arenas gruesas. Esto da idea de la rápida pérdida de energía de las corrientes suministradoras de detritus.

La superficie ocupada por brechas en el borde SO se mantiene prácticamente constante, mientras que en el NE es variable, llegando incluso a desaparecer sustituidas por detritus to davía más groseros como son los simples derrubios de ladera. Los conglomerados son típicos representantes de las facies de borde aunque en algunos casos llegan casi hasta el centro de la cuenca, rellenando masivamente estructuras de canales.

La distribución espacial megascópica de los niveles detríticos muestra un reparto diferencial en los bordes, resultado de la asimetría estructural de la cuenca: el relieve abrupto y escasa área de aportes en el borde Sur da lugar a facies de cono de deyección, con los segmentos proximales constituidos por conglomerados masivos y los distales por una alternancia de paleocanales de conglomerados y niveles de lutitas arenosas ocasionalmente con depósitos de playas o de llanura de inundación). Por el contrario, el borde Norte sería de relieve más suave y con mayores dimensiones en las zonas de aportes, que se traduce en sedimentos de arroyada difusa sin que sea posible el desarrollo de una red jerarquizada de cauces.

En la zona NO de la cuenca son fácilmente apreciables estructuras y fábricas que permi ten identificar tanto las direcciones de los aportes como el mecanismo de sedimentación. La presencia de barras de gravas masivas con frecuente estratificación cruzada tabular, la formación ocasional de secuencias granocrecientes, la inexistencia de secuencias granodecrecientes bien desarrolladas y la geometría espacial de los cuerpos con abundantes estructuras de canales laterales, responden a las características típicas de regímenes de ríos ramificados y anastomosados.

La escasa continuidad de los cuerpos detríticos junto con la mala selección de los materiales sugiere un régimen de precipitaciones esporádicas que se traduce en una escasa emigración de cauces con cambio de curso en períodos de grandes avenidas, y siempre con escaso desarrollo de los cauces frente a las amplias áreas ocupadas por la llanura de inundación.

Los sedimentos detríticos y lutítico-carbonatados son con mucho los materiales más abundantes y representativos de la cuenca, con pasos gradacionales insensibles de unos a otros. Se presentan en unidades de grandes espesores, de colores rojos o naranjas y localmente verdes o amarillentos, y también constituyen la matriz de muchas areniscas con las que gradan conforme se aproximan a los bordes.

Los yesos ocupan la parte central de la depresión. Normalmente se presentan en grandes unidades, pero también son frecuentes lechos aislados de espesores variables, desde pocos cms. a dos metros, interestratificados en las arcillas rojas y las margas. El desarrollo de los ye sos se sitúa fundamentalmente desde la Sierra de Armantes hacia el SE, mientras que en la zo na NO prácticamente no existen salvo algunas hiladas de yesos nodulares intercalados en lutitas y margas.

En las zonas que corresponden a los bordes del lago sulfatado los yesos se interdigitan con las margas y lutitas y en la zona próxima a Calatayud se ha observado que los contactos a muro se efectúan mediante una discordancia erosiva, mientras que a techo son normales; estas observaciones permiten deducir que el cambio de condiciones climáticas fué brusco en la base y progresiva y gradual en el techo.

Están representados gran variedad de sedimentos calcáreos, siendo frecuentes los fenómenos de silicificación. Su máxima representación se sitúa en las planas que ocupan el centro de la cuenca, con continuidad casi constante desde la Sierra de Armantes hasta Daroca, pero también están presentes como intercalaciones entre los sedimentos detríticos finos o interdigitándose con los yesos. Los colores varían de blancos a grises y rojizos en función del contenido en materia orgánica o arcilla.

Las calizas inferiores de la Sierra de Armantes, como todos los episodios calcáreos próximos que se interdigitan con los yesos, se supone que responden a procesos de precipitación en la llanura circundante al lago sulfatado, mientras que las de las planas serían el resultado de depósito en el lago central que por circunstancias climáticas ha pasado a ser de aguas menos salobres. La existencia de algas, cuyos restos fósiles han sido identificados en grandes cantidades en la observación de láminas delgadas, ha sido de gran influencia en la precipitación de los carbonatos. Es también frecuente la intercalación de lechos lignitíferos que indican la existencia en zonas no inundadas de una abundante flora de organización superior.

4.- COLUMNAS LITOLÓGICAS. PETROLOGIA Y GEOQUIMICA.

El estudio de los caracteres litológicos (petrográficos y geoquímicos) se ha realizado a partir del análisis de muestras correspondientes a series aflorantes en superficie y a los testigos continuos de los sondeos 409-1 y 409-2 realizados por la J.E.N. al O y NO de la Sierra de Armantes.

Las ocho columnas litológicas estudiadas (Tabla 1), distribuidas por toda la cuenca, no permiten establecer más que consideraciones puntuales y su integración en un contexto común no puede realizarse más que dentro de unas líneas muy generales, siendo prácticamente imposible singularizar alguna característica en cualquier zona que pueda ser extrapolada al contexto general.

Columna litológica	Coordenadas U.T.M. (techo)		Cota	
	Longitud	Latitud	techo	Potencia
1- Sondeo 409-1	6.05.75	45.85.35	665	232
2- " 409-2	6.02.30	45.84.65	712	220
3- Armantes	6.07.25	45.83.20	886	218
4- Anifón	6.09.00	45.88.08	741	122
5- Ribota	6.11.24	45.83.67	742	169
6- Fuentes de J.	6.22.55	45.67.04	946	291
7- Nombrevilla	6.36.85	45.53.80	990	140
8- Bágüena	6.41.10	45.45.93	1065	163

Tabla 1: Situación de las columnas litológicas.

Aunque cartográficamente es posible diferenciar un gran número de litologías, realmente éstas son resultado de la individualización o asociación en variadas proporciones de los seis tipos litológicos siguientes: a) Brechas y conglomerados. b) Areniscas. s.l. c) Lutitas. d) Margas. e) Yesos f) Calizas.

Las brechas y conglomerados están representados fundamentalmente en los bordes, aunque algunas hiladas de conglomerados pueden alcanzar de forma esporádica las zonas centrales de la cuenca, principalmente en el sector situado al NO. Las brechas, que no llegan a constituir estratos bien delimitados, quedan restringidas a los bordes más estrictos. Los clastos, muy mal seleccionados, tienen tamaños muy variados y son siempre polimícticos, aunque predominan

los cantos cuarcíticos angulosos de origen paleozóico excepto en las zonas próximas a los afloramientos mesozóicos. Los grandes clastos aparecen soportados por una matriz areniscoso-lutítica y un cemento margoso-ferruginoso. Presentan un fuerte color rojo, disposición bandea de los cantos y una mala o mediana estratificación.

El cemento ferruginoso representa en promedio del 0,8 al 1,35% del material interpuesto, y está constituido casi exclusivamente por hematites que proporciona una intensa colocación rojiza. La matriz de los conglomerados de borde está constituida por materiales detríticos de grano fino, principalmente lutitas arcillosa y limosas o lutitas arenosas.

Los enclaves aislados de acumulaciones de gravas masivas, frecuentes especialmente en la zona Norte, responden a estructuras de paleocauces, con cantos bastante bien rodados y heterométricos. Su mineralogía corresponde tanto a materiales paleozóicos como mesozóicos, siendo frecuente la presencia de calizas oolíticas muy recrystalizadas indicadoras de aportes del Mesozóico aflorante en el borde NO.

Las hiladas de conglomerados, intercalados esporádicamente entre los sedimentos del centro de la cuenca, están compuestos por cantos de calizas, cuarcitas y pizarra de menor tamaño que los masivos conglomerados de borde y mejor redondeados, cementados por carbonatos o con matriz arenoso-lutítica. Suelen adoptar formas lenticulares o niveles planares de poca extensión, con espesores que varían desde 2 m. a pocos cms.

El tránsito desde los bordes hacia las zonas interiores de la cuenca se caracteriza por un predominio de las facies de grano más fino, con alternancia de conglomerados con lutitas en unidades diferenciadas. Estas facies de alternancias están mejor desarrolladas en el borde SO (con máximo desarrollo en la rambla de Valcodos), mientras que son raras o escasean en el borde NE.

Las arenitas están distribuidas por toda la cuenca y en todos los tramos de la serie estratigráfica, normalmente con matriz arcillosa o cementos carbonatados. Son muy frecuentes los términos intermedios entre areniscas y lutita, con porcentajes composicionales muy variados.

Los granos de las arenitas son heterométricos, con tamaño que varían de microconglomerado a arenita de grano fino. Normalmente son polimícticas con granos de cuarzo, cuarcita y en menor proporción pizarra y calizas, pudiéndose clasificar en términos generales como sublitoarenitas. Los cantos de cuarzo son fundamentalmente de subangulosos a subredondeados, observándose diferentes grados de madurez para granos del mismo tamaño; estas características, unida a los distintos tipos de extinción, permiten identificar los cuarzos de segunda generación, procedentes de la meteorización de rocas detríticas mesozóicas, de los procedentes del Paleozoico metamorfozados (primera generación). Como componentes subordinados y en orden de importancia se puede citar la existencia de fragmentos de cuarcita, esquistos ferruginosos con alto grado de oxidación, pizarras y rocas carbonáticas (biomícticas, oolíticas, esparíticas, etc). Los accesorios más frecuentes y en orden de abundancia son: opacos, óxidos de hierro, feldespatos alcalinos, turmalina, circón, moscovita, biotita, rutilo y plagioclasa.

La matriz es arcillosa-lutítica y el cemento carbonático generalmente micrítico o microesparítico, aunque no faltan términos esparíticos en los poros y cavidades con una textura de relleno drúsico, principalmente en las proximidades de los cantos carbonáticos. Existe una mayor proporción de cementos carbonáticos en la zona N, especialmente apreciable en la Sierra de Armantes y sus proximidades.

En los materiales de grano más fino se encuentran porcentajes variables de carbonatos, por lo que no puede hablarse nunca de lutitas sino de lutitas margosas o margas. La relación Ca/Mg del carbonato existente en ellas se sitúa entre los valores de 1'6 y 7'5. Se ha observado la presencia de cuarzos bipiramidales de pequeño tamaño.

Los yesos masivos existentes en los alrededores de Calatayud y Fuentes de Jiloca se presentan con gran variedad de estructuras, desde bancos compactos de alabastro a capas enterolíticas y nodulares de yesos alabastrinos o sacaroideos alternantes con finas intercalaciones de arcillas y margas de colores verdosos. Son frecuentes las texturas lenticulares indicativas del origen primario del yeso, que ha crecido de forma desplazante en un medio de playa de lago, aunque en la mayoría de los casos sólo se observan las texturas típicas del yeso alabastrino secundario, sin que se aprecien restos de anhidrita. Son muy abundantes las estructuras enterolíticas y macronodulares, que probablemente están íntimamente relacionadas con las distorsiones de los estratos de caliza suprayacentes.

Los yesos dispersos se encuentran en niveles lentejonares o nodulares intercalados en arcillas y margas. Su textura es granoblástica interpenetrada, con cristales idiomorfos de yeso prismático que presentan inclusiones de restos de anhidrita, y accesoriamente asociados algunos cristales de carbonatos de composición esencialmente dolomítica.

La precipitación de los yesos masivos se ha producido como consecuencia de la persistencia de un régimen lagunar en clima árido, y se ha considerado que al menos gran parte de ellos tienen como origen la lixiviación de anteriores yacimientos mesozóicos.

Cabe citar entre las evaporitas sulfatadas la presencia de epsomita, observada frecuentemente como eflorescencias en muy diversos tramos litológicos.

En los carbonatos presentes en la cuenca están representados desde los términos de calizas más puras con el 95% de calcita, hasta dolomías poco calcáreas, siendo frecuentes fenómenos de silicificación. Hay que distinguir entre los niveles más inferiores, intercalados con margas y arcillas, y los superiores, que con espesores variables generalmente culminan todas las series.

Las calizas de los tramos inferiores son generalmente micritas, ocasionalmente esparitizadas y con cuarzos detríticos muy finos. El residuo insoluble suele ser importante, y el contenido en magnesio es generalmente elevado por lo que deben ser clasificadas como calizas dolomíticas e incluso dolomías poco calcáreas. Los tramos terminales son netamente diferentes, apreciándose una clara influencia orgánica; los términos más corrientes son biomicritas y bioesparitas, con muy bajos contenidos en magnesio.

La dolomitización de algunos niveles es muy importante, y aunque las condiciones de la cuenca responden a las que se estima son favorables para la precipitación de dolomita (régimen lagunar con elevadas concentraciones salinas), se ha observado que la mayor parte de la dolomita es de origen secundario. El origen del magnesio necesario para la dolomitización podría proceder de la reordenación estructural de las calizas de origen algáceo con elevados contenidos en magnesio, o de la expulsión a partir de los estratos inferiores, de fluidos con grandes concentraciones de aquél, quizás como resultado de la reorganización diagenética de arcillas.

Es frecuente la presencia de nódulos de sílex en las calizas y ocasionalmente el proceso de silicificación ha sido tan importante que llega a condicionar la existencia de niveles continuos de sílexitas. En la Sierra de Armantes este proceso ha sido de tal envergadura que los últimos 50 metros del perfil de la Ermita del Cristo de Ribota corresponden a calizas silicificadas, con capas diferenciadas de sílex de hasta un metro de espesor.

Todas las calizas terminales presentan una relación Ca/Mg con valores superiores a 190, por lo que pueden clasificarse como calizas puras. Los carbonatos de la Sierra de Armantes asociados a los niveles yesíferos, presentan texturas micríticas de granulares a peletoidales, con alta porosidad y recristalizaciones de microesparíticas a esparíticas muy irregularmente dispuestas. Sus relaciones Ca/Mg son muy bajas, con valores entre 1,7 y 2,5 por lo que pueden considerarse como dolomías ligeramente calcáreas a dolomías calcáreas. Presentan aso-

ciado en ocasiones cantidades variables de sílex disperso, proporcionando a estas rocas una elevada dureza y escasa porosidad.

5.- SINTESIS EVOLUTIVA. ESQUEMA PALEOGEOGRAFICO.

Los tipos litológicos de la cuenca terciaria, su distribución y relaciones con los materiales más antiguos de los bordes nos permiten deducir la posible evolución desde comienzos del Terciario hasta la época actual. Por otra parte, los abundantes restos faunísticos característicos de determinados ambientes ecológicos serán de gran valor para poder identificar las condiciones y cambios climatológicos que en último término propiciarán la existencia o ausencia de precipitación de rocas evaporíticas y de determinadas litologías detríticas.

Carecemos de pruebas materiales para poder precisar el tipo de sedimentos directamente apoyados sobre el sustrato paleozóico, por lo que solamente podemos establecer conjeturas. Según nuestras hipótesis debe existir una cohertera mesozóica replegada interpuesta entre los materiales paleozoicos y terciarios ocupando todo o gran parte del fondo de la cuenca y con espesores tanto mayores cuanto más rápido haya sido el hundimiento de los bloques individualizados por la tectónica alpina.

Sobre los sedimentos mesozóicos y ya con el hundimiento generalizado, comenzó el relieve terciario. Hay que suponer que la activa erosión de los rejuvenecidos relieves proporcionaría a los primeros materiales aportados a la cuenca un carácter esencialmente detrítico tanto en los bordes como en las zonas interiores. Características de esta primera etapa serán las brechas, conglomerados y areniscas, que aunque restringidos hoy a las zonas marginales, hay que suponer su preponderancia en toda la cuenca durante toda la etapa juvenil.

La atenuación del hundimiento tectónico y el rebajado de los agudos perfiles morfológicos de la primera etapa permitirían la formación de materiales más trabajados y propios de ambientes de menor gradiente energético. A este período deben corresponder grandes masas de areniscas y lutitas representadas en los niveles inferiores de los sondeos y de las columnas litológicas. La observada gradación de tamaños desde los bordes al centro y la presencia de arenitas con una composición mineralógica que señala la influencia de los materiales mesozoicos, es índice de un rápido y prolongado avance de los aportes detríticos hasta el centro de la cuenca. En esta etapa será imposible el desarrollo de facies evaporíticas.

El progresivo decrecimiento de los aportes detríticos unido a un cambio climático hacia condiciones más áridas, permitió que al final de las etapas medias de colmatación comenzara la precipitación de evaporitas en los lagos y lagunas del centro de la cuenca, pudiéndose señalar dos fases claramente diferenciadas en el tiempo. La etapa inicial se presenta con predominio de precipitación de yeso en los lagos, que se imbrica con las calizas generadas en las llanuras inmediatas y los detríticos finos que consiguen alcanzar las zonas más internas. A este período le sucede una etapa final en la que desaparece el dominio de los lagos sulfatados para dar paso a un sistema generalizado de precipitación carbonática de mayor amplitud y desarrollo y con la máxima representación en las calizas culminantes que constituyen las planas.

La identificación de las asociaciones faunísticas corroboran las condiciones climatológicas que favorecen la seriación de los materiales de relleno. Así, los fósiles del Agnienense y Aragoniense inferior (Mioceno inferior) son propios de un hábitat de clima húmedo, y los sedimentos correspondientes a este período son fundamentalmente detríticos con las grandes series de areniscas y lutitas rojas que constituyen los aportes de base. El Aragoniense medio tiene características de clima seco y correspondería a la precipitación masiva de yesos a partir de salmueras concentradas. A este período seco sucede el Aragoniense superior y Vallesiense inferior, más húmedo, con un mayor aporte de aguas que provocarían la di

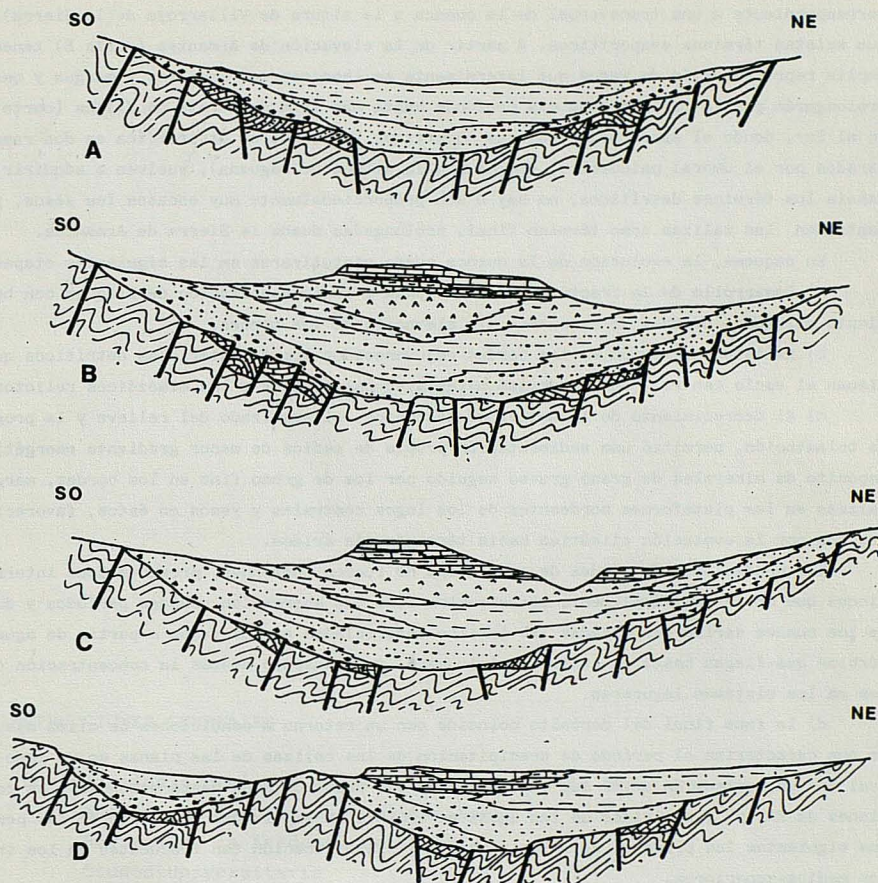


Fig. 1.- Cortes transversales de la Cuenca de Calatayud-Daroca, mostrando la supuesta distribución de las facies miocenas y el fondo de la cubeta. Corte A, a la altura de Villarroya de la Sierra; corte B por la Sierra de Armantes; C por Morata de Jiloca; D por Báguena. Esquemas no a escala.

lución de las sales impidiendo la precipitación de sulfatos; es el período de precipitación masiva de calizas en lagos de poca profundidad como muestran la abundancia de restos lignitíferos, grietas de desecación y travertinos, proceso que en gran parte estaría favorecido por algas y otros organismos inferiores.

La posición horizontal o subhorizontal de los sucesivos estratos en prácticamente toda la cuenca, es un claro índice de que el relleno fué acomodándose progresivamente al hundimiento, manteniéndose un equilibrio continuado entre ambos fenómenos. El gradiente energético, salvo en los momentos iniciales, se mantuvo de forma permanente en niveles que únicamente permitieron una rápida clasificación de los sedimentos por tamaños, sin que los detríticos gruesos lograran alcanzar grandes distancias.

Como síntesis de la estructuración de la cuenca, posible situación y distribución de materiales bajo las zonas aflorantes, y donde queda sintetizada la evolución, hemos considerado oportuno efectuar unos cortes seriados, no a escala, que son los representados en la Figura 1. Puede apreciarse la total incidencia de las facies detríticas en el NO (corte A,

correspondiente a una transversal de la cuenca a la altura de Villarroya de la Sierra), sin que existan términos evaporíticos. A partir de la elevación de Armantes (corte B) tenemos la amplia representación de yesos que lateralmente se imbrican con arcillas y margas y que se prolongarán por lo que fué zona más profunda hasta más allá de Morata de Jiloca (corte C). En el Sur, donde el surco principal que constituye la cuenca se diversifica en dos ramas se parados por el umbral paleozóico, (corte D a la altura de Báguena), vuelven a adquirir importancia los términos detríticos, no hay o son proporcionalmente muy escasos los yesos, y se mantienen las calizas como término final, prolongadas desde la Sierra de Armantes.

En esquema, la evolución de la cuenca puede sintetizarse en las siguientes etapas:

- a) Desarrollo de la fracturación en escamas e individualización de bloques con hundimiento del surco central de la cuenca y/o elevación de los bordes.
- b) La intensa erosión de los bordes rejuvenecidos aporta materiales detríticos que rellenan el vacío central, cubriendo los materiales paleozóicos y los mesozóicos relictos.
- c) El decrecimiento de la actividad tectónica, el suavizado del relieve y la progresiva colmatación, permitió una sedimentación propia de medios de menor gradiente energético con depósito de minerales de grano grueso seguido por los de grano fino en los bordes, margas y calizas en las plataformas bordeantes de los lagos centrales y yesos en éstos, favorecido el proceso por la evolución climática hacia términos más áridos.

Las condiciones de aridez de esta etapa no fueron continuas, presentándose interrupciones que no serían simplemente estacionales sino que abarcarían grandes períodos y durante los cuales serían depositadas las lutitas intercaladas en los yesos a partir de aguas turbias que llegan hasta el centro de la cuenca, disminuyendo además la concentración de sales en los sistemas lagunares.

- d) La fase final del depósito coincide con un retorno a condiciones de clima más húmedo que caracteriza el período de precipitación de las calizas de las planas en un lago central con una extensión mayor que cualquiera de los desarrollados hasta entonces. Las condiciones de Eh, pH y salinidad de las aguas de imbibición expulsadas favorecen en los períodos siguientes los procesos de dolomitización y silicificación tan frecuentes en los tramos medios-superiores.

e) A finales del Terciario, con la apertura de la comunicación de la cuenca con el Valle del Ebro mediante la hoz labrada por el Jalón en los materiales paleozóicos, se implantó una red de drenaje cuyo proceso de erosión favoreció la adquisición de los caracteres morfológicos actuales.

6.- BIBLIOGRAFIA

1. BOMER, B. (1960). Est. Geogr., año 21, 80, 393-402. Madrid
2. TENA, J.M.; MANDADO, J. y GISBERT, J. (1979). Inst. Est. nucl. Madrid.
3. JULIVERT, M. (1954). Arrahona, 1-18. Sabadell.
4. BRUIJN, H. de. (1967). Bol. Inst. Geol. Min. España, 78, 187-373.
5. DAAMS, R. et al. (1977). Newsl. Strat., 6(1), 42-55.
6. WEERD, A. and DAAMS, R. (1978). Palaeontology. Reprint from Proc. Kon. Ned. Akad., Ser. B, 81(4), 448.
7. HERNANDEZ PACHECO, F. y MELENDEZ, B. (1957). Bol. Inst. Geol. Min. España, 47.