

REVISTA
DE LA

ACADEMIA
DE
CIENCIAS

Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales

DE
ZARAGOZA



Serie 2^a

Volumen 44

1989

INDICE DE MATERIAS

	<i>Págs.</i>
F. J. Arcega, J. M. Forniés-Marquina y J. Garay. — «A new method of resolving the Roberts-Hippel relationship»	5
I. K. Argyros. — «On a theorem of Fisher and Khan»	13
I. K. Argyros. — «On a fixed point theorem in a 2-banach space»	19
I. K. Argyros. — «On quadratic equations»	23
J. M. Martínez Cervera. — «Sobre la computación de isomorfismos simpliciales de superficies»	33
C. Romo Santos. — «Transversalidad de variedades, caracterización».	43
J. M. Franco y M. Palacios. — «Integración numérica de las ecuaciones del movimiento del satélite artificial»	51
R. Cid Palacios. — «Corrección de órbitas de estrellas sobles visuales por medio de series de Fourier»	71
A. Abad, A. Deprit, A. Elipe and M. L. Sein-Echaluce. — «A perturbed elliptic oscillator: Flow inversion through butterfly bifurcations».	89
J. M. Franco. — «Una solución asintótica para el intermediario radial de Deprit con rozamiento atmosférico en el caso ecuatorial»	107
R. Molina y A. Vigueras. — «Series de Lie e integrales primeras del problema del girostato con un punto fijo en un campo central newtoniano de potencial $V^{(2)}$ »	125
B. Ruiz, F. M. Royo y S. Otín. — « H_m^E de mezclas líquidas binarias» ...	137
C. Martínez, A. López-Molinero y J. R. Castillo. — «Consideraciones sobre los métodos usuales de diferenciación de Fe(II)/Fe(III) en material vegetal»	145
M. T. Muiño, M. L. Peleato y J. A. Cebrián. — «Ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa en el hongo <i>aspergillus oryzae</i> »	157
A. Navas y F. Alberto. — «Tipología de las relaciones iónicas entre los componentes mayoritarios de la salinidad en la red hidrográfica del Ebro»	169
A. Aparicio, Y. A. Borshevsky, N. I. Medvedovskaya, I. P. Novitsky, V. Sánchez. — « δO^{18} values of plutonic-metamorphic series at cabo ortegal complex (Northwestern Spain): petrogenetic implications».	183
J. Mandado y J. M. Tena. — «Génesis del yeso primario lenticular en sedimentos evaporíticos»	199

A NEW METHOD OF RESOLVING THE ROBERTS-HIPPEL RELATIONSHIP

F.J. ARCEGA, J.M. FORNIÉS-MARQUINA Y J. GARAY

Facultad de Ciencias. Ciudad Universitaria. 50009 ZARAGOZA (España).

A program for calculating the complex dielectric permittivity using the Roberts-von Hippel has been written. This program is based on the shape and properties of the complex function $\frac{\tanh(Z)}{Z}$ and it consists in beginning the iterative method of searching the correct solution from one of four selected points near the poles of the function.

1.-INTRODUCTION

The measurement of the complex dielectric permittivity $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ by the short-circuited waveguide-method (Robert and Hippel, 1946) needs to resolve the equation

$$(1) \quad \frac{\tanh(Z)}{Z} = Y$$

where Z and Y are complex numbers. The first of them Z is related with the propagation constant γ of the guided electromagnetic wave, which at the same time is connected directly with the dielectric permittivity by the equation

$$(2) \quad Z = e \cdot \gamma = e \cdot 2\pi \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\epsilon}{\lambda_c^2} \right)^{1/2}$$

valid only for non-magnetic media (Baden Fuller, 1969) and where e is the thickness of the dielectric sample placed at the short-circuited waveguide end, λ_c is the cut-off wavelength and λ_0 is the free space wavelength. The second complex value Y depends upon the experimental data that characterize the measuring method, i.e. the standing wave ratio θ and the displacement dm produced in a maximum of the standing wave ratio, by insertion in the waveguide of a thickness e of the dielectric sample. The value of Y is (Fornies and Vicq, 1977)

$$(3) \quad Y = -j \frac{\lambda_g}{2\pi e} \frac{1 + j \theta \tan\left(\frac{2\pi d m}{\lambda_g}\right)}{\theta + j \tan\left(\frac{2\pi d m}{\lambda_g}\right)}$$

being j the pure imaginary complex and λ_g the guided wavelength.

In the majority of experimental designs based on the short-circuited waveguide, the standing wave ratio is determined indirectly in function of the attenuation α measured with a crystal detector of quadratic law, according to

$$(4) \quad \alpha = 20 \log \theta$$

The electric conduction in the walls of the guide and the impedance mismatches at the junctions causes some error in the measurement of θ (or α). To reduce this error, a correction has been had in mind (Fornies and Vicq, 1977)

$$(5) \quad \theta_v = \frac{\theta_m \theta_{cc} - 1}{\theta_{cc} - \theta_m}$$

where θ_v is the corrected standing wave ratio, θ_m is the measured experimental value and θ_{cc} corresponds to the initial value of θ without dielectric sample.

As it can be seen easily, the equation (1) has root multiplicity but a suitable choice of the thickness of the dielectric sample permit us to assure that the only one valid solution will be the one with smaller multiplicity order. In general, it is enough, in function of the measuring frequency, that the thickness of the dielectric sample was sufficiently narrow to avoid the presence of more than one period of the guided wave in the inner of the dielectric sample, that is to say, the solution with the smaller multiplicity order will be obtained when the thickness e will be less than λ_g .

Finally, the aim of this work has consisted in searching for a fast method of resolving the equation (1). For this reason, we have written a simple computation program that could be implemented in pocket-programable calculators or microcomputers to be used in the automatization of experimental measurements and in the dielectric characterization of materials "on line" in industrial applications.

1.-DESCRIPTION OF THE PROCEDURE

1.1 The function

The dependence of the real, C , and imaginary, D , parts of the complex value Y in function of the values A and B , such that $Z=A+jB$ in accordance with equation (1), it is shown in figures 1(a) and 1(b). In these figures we can see the two first poles placed at $(0, \pm\pi/2)$. The other poles of the function are not necessary to our interest, as we have seen above for a selected thickness of the dielectric sample,

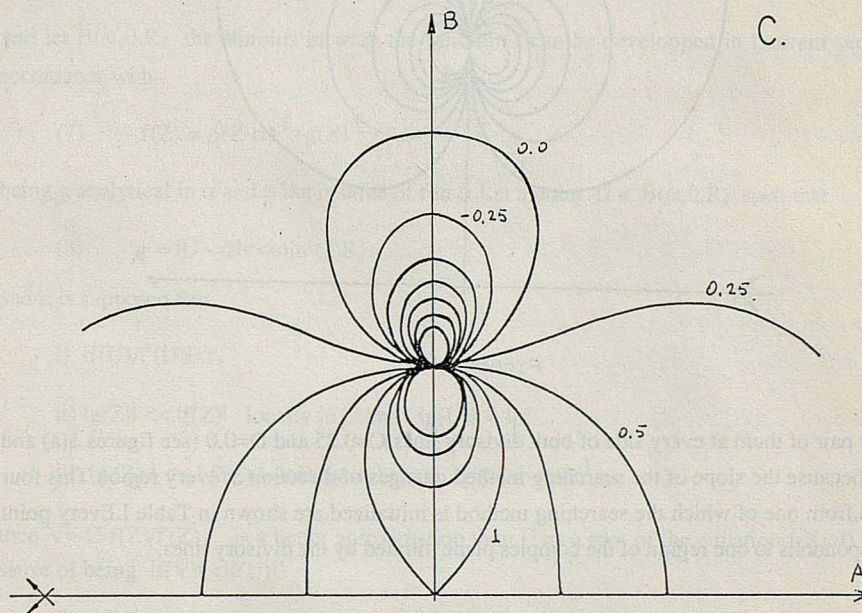


Figure 1(a)

the only one right solution is the one with smaller multiplicity order. Neither the downer semiplane ($B < 0$) because solutions of this region lead to values of the dielectric permittivity that have not physical meaning, i.e. the complex dielectric permittivity has negative values.

These circumstances, joined with the fact that the curves of the figure 1(a) are orthogonal to the ones of the figure 1(b), have permitted to us to choose four points near the pole of interest ($A=0, B=\pi/2$)

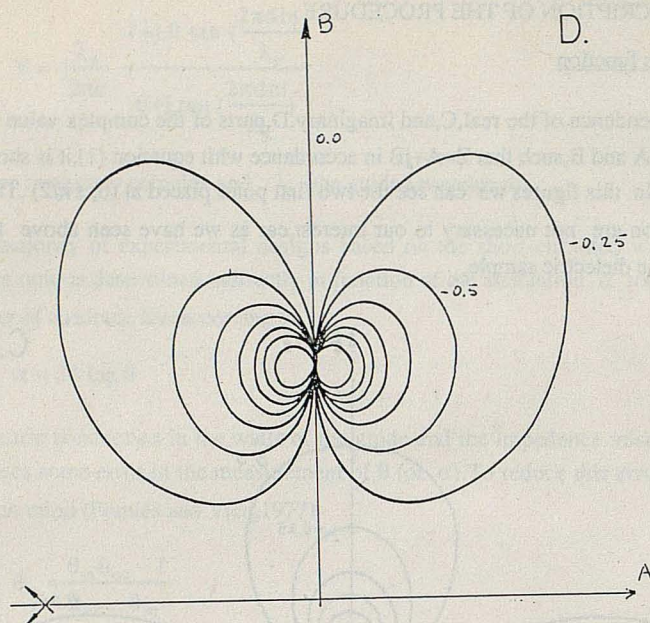


Figure 1(b)

every pair of them at every side of both divisory lines, $C=0.25$ and $D=0.0$ (see figures 1(a) and 1(b)) because the slope of the searching method changes of direction at every region. This four points, from one of which the searching method is initialized, are shown in Table I. Every point corresponds to one region of the complex plane limited by the divisory lines.

TABLE I

$C > 0.25$	$B = 1.5$
$C < 0.25$	$B = 1.63$
$D > 0.0$	$A = -0.05$
$D < 0.0$	$A = 0.0$

2.2 Mathematical foundations

The advantaged searched in this computation method is the rapidity and simplicity. For this reason we have used the tangent iterative method to resolve the equation (1) but applied directly to complex numbers and not by separation in two equations, real and imaginary, as it is

usually done in this type of complex equations. A generalization of this class is possible for this particular case as it will be proved immediately.

Theorem. - Let α a simple pole of a function f that in our case is

$$(6) \quad f(Z) = \frac{\tanh(Z)}{Z} - Y$$

and let $B(\alpha; 0, R)$ the annulus in which the function f can be developed in Laurent series in accordance with

$$(7) \quad f(Z) = \rho(Z - \alpha)^{-1} + g(Z)$$

being g analytical in α and ρ the residue of f in α . Let a point $U \in B(\alpha; 0, R)$ such that

$$(8) \quad r = |U - \alpha| < \min(1, R)$$

and it is supposed that

$$i) |f(U)/f'(U)| < r$$

$$ii) |g(Z)| \ll |f(Z)| \text{ locally in } U \text{ and } |g(U)| < |\rho|$$

$$iii) |g'(Z)| \ll |f'(Z)| \text{ locally in } U \text{ and } |g'(U)| < |\rho| r^{-1}$$

then $V = U - f(Z)/f'(Z)$ is a better approximation than U as a root of the equation $f(Z) = 0$ in the sense of being $|f(V)| < |f(U)|$.

Proof. - Using the Taylor series development of f near the point U we have

$$(9) \quad \frac{f(V)}{f(U)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f^{(n)}(U)}{n!} \frac{|f(U)|^{n-1}}{|f'(U)|^n}$$

In the other hand, from the Laurent series development of f near the pole α we have, for every n natural

$$(10) \quad f^{(n)}(U) = (-1)^n n! \rho (U - \alpha)^{-n-1} + g^{(n)}(U)$$

From the equations (9) and (10), it results

$$(11) \quad \frac{f(V)}{f(U)} = \rho \frac{U-\alpha}{f(U)} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{f(U)}{(U-\alpha)f(U)} \right]^n + \frac{1}{f(U)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{g^{(n)}(U)}{n!} \left[\frac{f(U)}{f(U)} \right]^n$$

The first term of the second member of the equation (11) is the sum of a geometric series and the second is a part of the Taylor series development of g in U . By substitution

$$(12) \quad \frac{f(V)}{f(U)} = \frac{\rho f(U)}{f'(U) | (U-\alpha)f'(U) - f(U) |} + \frac{g(V) - g(U)}{f(U)} + \frac{g'(U)}{f'(U)}$$

and using the boundary limits supposed in the statement, where α is in our case the pole in $(0, \pi/2)$ and the U are every one of the four points of the table I, we can see that the hypothesis of the theorem are verified. In consequence we can apply the tangent method to this particular case.

2.3 The program

The value of the beginning point of the iterative process $U=Z=A+jB$ is calculated in function of experimental data in accordance with the values shown in Table I. From Z , the next approximations are obtained by the tangent method directly to the complex numbers. So the next point in the approximation procedure is obtained by the equation

$$(13) \quad \frac{f(Z_i) - f(Z_{i+1})}{Z_i - Z_{i+1}} = f'(Z_i)$$

being $f'(Z_i)$ the value of the derivative of the function in the point Z , obtained by the equation

$$(14) \quad f'(Z_i) = \frac{f(Z_i + \Delta Z) - f(Z_i)}{\Delta Z}$$

with ΔZ a complex number of value $\Delta Z = -0.001 + j 0.001$. In the figure 2 we can see a block diagram of the procedure. Other modifications can be added to obtain more performances in order to calculate series of experimental data of for working with this program as a subroutine.

3.-DISCUSSION

The advantage of applying directly the tangent method (Newton's method) to a function of complex variable is the simplicity and the facility of programming in contrast with other methods (Calamia and Paoli, 1970; Bourret et al, 1975; Freundlich and Kolodziej, 1982) of

solving the equation (1) because they separate the real and imaginary parts of the function for working in the real space and they have to solve a relatively complex system of equations.

This method has the advantage of converging rapidly, having a very good approximation with less than ten iterative processes. In general with six iterations a precision better than the four significant figure is obtained. This accuracy is enough for this case because the experimental error as well in the displacement dm as in the standing wave ratio are considerably higher. The time for resolving a proposed problem is very short, approximately 0.1 seconds, by the good convergency of the method considerably lesser than the times given by other methods.

TABLE II

	ϵ'	ϵ''	Precision	Temperatures
Water 9GHz	59.452	28.065	$0.7 \cdot 10^{-7}$	26° C
	63.219	14.817	$0.5 \cdot 10^{-6}$	48° C
Heptylamin 15GHz	3.477	0.447	$0.3 \cdot 10^{-6}$	21° C
	3.141	0.685	$0.1 \cdot 10^{-6}$	-20° C
Chlorbenzene 15GHz	3.890	1.380	$0.4 \cdot 10^{-6}$	30° C
	4.197	1.146	$0.5 \cdot 10^{-6}$	80° C

As an exemple we show in the table II the calculated values of the dielectric permittivity of several polar liquids. For determining the accuracy of the approximative method, the values of C and D that corresponds to the A and B values obtained from the iterative method have been calculated. So the distance between the experimental values of C and D and this values obtained from the final value gives an idea of the approximation obtained. As it can be deduced from the data of table II, the accuracy is, in all cases, excellent. The only region that can not be obtained by the program is the region in the proximity of the pole, i.e., when the values of θ are very high or the values of dm are close to $\lambda_g/4$, but this fact is not very frequent and can be avoided by using a different thickness of the dielectric sample.

REFERENCES:

BADEN FULLER A.J., (1969): *Microwaves*. Pergamon Press.

ON A THEOREM OF FISHER AND KHAN

I.K. ARGYROS

Department of Mathematics. New Mexico State University.
Las Cruces, NM 88003.

We prove some new theorems which generalize some fixed point theorems of B. Fisher and M.S. Khan.

Introduction. The following theorems have been proved in [3], [2] respectively:

Theorem 1. Let P and Q be mappings of the complete metric space X into itself such that for all x, y in X either

$$d(Px, Qy) \leq c \frac{d(x, Px)d(x, Qy) + d(y, Qy)d(y, Px)}{d(x, Qy) + d(y, Px)}$$

if $d(x, Qy) + d(y, Px) > 0$, where $0 \leq c < 1$, or $d(Px, Qy) = 0$ if $d(x, Qy) + d(y, Px) = 0$. Then P and Q have a unique common fixed point z .

Theorem 2. Let P and Q be mappings of the complete metric space X into itself such that for all x, y in X either

$$d(Px, Qy) \leq \frac{b\{d(x, Qy)\}^2 + c\{d(y, Px)\}^2}{d(x, Qy) + d(y, Px)}$$

if $d(x, Qy) + d(y, Px) > 0$, where $0 \leq b, c, b + c < 1$, or $d(Px, Qy) = 0$ if $d(x, Qy) + d(y, Px) = 0$. Then P and Q have a unique common fixed point z .

We now consider mappings P and Q satisfying more general rational inequalities. We first prove the theorem.

Theorem 3. Let P and Q be mappings of the complete metric space X into itself such that for all x, y in X either

$$d(Px, Qy) \leq \frac{c_1 \{d(x, Qy)\}^2 + c_2 \{d(y, Px)\}^2 + c_3 d(x, Px) d(x, Qy) + c_4 d(y, Qy) d(y, Px)}{d(x, Qy) + d(y, Px)}$$

if $d(x, Qy) + d(y, Px) > 0$, where

$$0 \leq c_1, c_2, c_1 + c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_4 + c_3 c_4 < 1,$$

or $d(Px, Qy) = 0$ if $d(x, Py) + d(y, Px) = 0$. Then P and Q have a unique common fixed point z .

Proof. Case 1. Let us assume that $d(x, Qy) + d(y, Px) > 0$ for all x, y in X . Let x be an arbitrary point in X and define the sequences $\{u_n\}, \{v_n\}, n = 1, 2, \dots$ by

$$\begin{aligned} u_{2n} &= d((PQ)^n x, Q(PQ)^n x), \quad u_{2n+1} = d(T(PQ)^n x, (PQ)^{n+1} x), \\ v_{2n} &= d((PQ)^n x, (PQ)^{n+1} x), \quad v_{2n+1} = d(Q(PQ)^n x, Q(PQ)^{n+1} x). \end{aligned}$$

By hypothesis

$$v_{2n} = d((PQ)^n x, (PQ)^{n+1} x) + d(Q(PQ)^n x, Q(PQ)^n x) > 0,$$

$$v_{2n+1} = d(Q(PQ)^n x, Q(PQ)^{n+1} x) + d((PQ)^{n+1} x, (PQ)^{n+1} x) > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Using (1) we get

$$u_{2n+1} \leq c_2 v_{2n} + c_4 u_{2n} \leq c_2 (u_{2n} + u_{2n+1}) + c_4 u_{2n}$$

or

$$u_{2n+1} \leq \left(\frac{c_2 + c_4}{1 - c_2} \right) u_{2n}.$$

Similarly,

$$u_{2n} \leq \left(\frac{c_1+c_3}{1-c_1} \right) u_{2n-1}$$

and therefore

$$u_{2n+1} \leq \left(\frac{c_1+c_4}{1-c_2} \right) u_{2n} \leq \left(\frac{c_2+c_4}{1-c_2} \right) \left(\frac{c_1+c_3}{1-c_1} \right) u_{2n-1} \leq \left[\left(\frac{c_1+c_3}{1-c_1} \right) \left(\frac{c_2+c_4}{1-c_2} \right) \right]^{2n} u_1, n=1,2,\dots$$

By the restriction imposed on the c_i 's, $i = 1, 2, 3, 4$ we have that

$$0 \leq \left(\frac{c_1+c_3}{1-c_1} \right) \left(\frac{c_2+c_4}{1-c_2} \right) < 1,$$

therefore the sequence

$$\{x, Qx, PQx, \dots, (PQ)^n x, Q(PQ)^n x, \dots\}$$

is a Cauchy sequence in the complete metric space X and so has a limit z in X .

We now have

$$d((PQ)^n x, Qz) \leq$$

$$\frac{c_1 \{d(Q(PQ)^{n-1} x, Qz)\}^2 + c_2 \{d(z, (PQ)^n x)\}^2 + c_3 d(Q(PQ)^{n-1} x, (PQ)^n x) d(Q(PQ)^{n-1} x, Qz) + c_4 d(z, Qz) d(z, (PQ)^n x)}{d(Q(PQ)^{n-1} x, Qz) + d(z, (PQ)^n x)}$$

or

$$d(z, Qz) \leq c_2 d(z, Qz) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

or $Qz = z$, since $c_1 < 1$. Similarly, we can show $Pz = z$ that is $d(z, Qz) + d(z, Pz) = 0$, contrary to our assumption. There must exist, therefore, x, y in X such that

$$d(x, Qy) + d(y, Px) = 0 \text{ and so } d(Px, Qy) = 0$$

that is

$$x = Qy = Px = y$$

or $x = y = z$ is a common fixed point of P and Q .

Finally, let us suppose that P and Q have a second distinct common fixed point w . Then

$$\begin{aligned} d(z, w) = d(Pz, Qw) &\leq \frac{c_1 \{d(z, Qw)\}^2 + c_2 \{d(w, Pz)\}^2 + c_3 d(z, Pz)d(z, Qw) + c_4 d(w, Qw)d(w, Pz)}{d(z, Qw) + d(w, Pz)} \\ &\leq \frac{c_1 + c_2}{2} d(z, w) \end{aligned}$$

which is a contradiction since $c_1 + c_2 < 1$. This proves the uniqueness of the common fixed point z .

Case 2. Let us assume $d(Px, Qy) = 0$ if $d(x, Qy) + d(y, Px) = 0$. We then proceed as in the latter part of Case 1 and the theorem is proved.

Remark 1. Note that:

(a) for $c_1 = c_2 = 0$ and $c_3 = c_4 = c$ in theorem 3 we obtain theorem 1.

(b) For $c_3 = c_4 = 0$ in theorem 3, we obtain theorem 2.

Furthermore, we can generalize the rest of the theorems and corollaries of [2] and [3] using theorem 3. However, for the sake of brevity we only state a theorem whose proof parallels with slight obvious changes the proof of theorem 3 in [2].

Theorem 4. Let P and Q be mappings of the metric space X into itself and such that for all x, y in X , either

$$d(Px, Qy) \leq \frac{c_2 \{d(y, Px)\}^2 + c_4 d(y, Qy)d(y, Px)}{d(x, Qy) + d(y, Px)}$$

if $d(x, Qy) = d(y, Px) > 0$, where $0 \leq c_2 < 1$, $0 \leq c_4$, or $d(Px, Qy) = 0$ if $d(x, Qy) = d(y, Px) = 0$. Then P and Q have a unique fixed point z and further, P is a constant mapping with $Px = z$ for all x in X .

Remark 2. Note that:

(a) X in theorem 4 is not necessarily complete and so we cannot use theorem 3 to give us a common fixed point.

(b) For $c_4 = 0$, we obtain theorem 3 in [2].

REFERENCES

- [1] B. Fisher, On a theorem of Kahn, Riv. Mat. Univ. Parma 3, (1978), 15-25.
- [2] _____, Mappings satisfying rational inequalities, Nanta Mathematica, Vol. 12.2, p. 193-199.
- [3] M.S. Khan, A fixed point theorem for metric spaces, Riv. Mat. Univ. Parma 2, (1977), 12-27.
- [4] C. Istratescu, Fixed point theory, Academic Press, (1984).

ON A FIXED POINT THEOREM IN A 2-BANACH SPACE

I.K. ARGYROS

Department of Mathematics. New Mexico State University.
Las Cruces, NM 88003.

In this note we generalize a theorem of P.L. Sharma and B.K. Sharma for non-contraction type mapping on 2-Banach space.

Introduction. The definition and the properties of a 2-Banach space are given in [1], [2], [3], [5]. Here we generalize a theorem of non-contraction type mapping on 2-Banach space given in [4].

Theorem. Let F be a mapping of a 2-Banach space X into itself. If F satisfies the conditions:

(a) $F^2 = I$ where I is the identity mapping on X ,

(b) $\|F(x) - F(y), z\| \leq c_1\|x - y, w\| + c_2\|x - F(x), w\| + c_3\|y - f(y), w\| + c_4\|x - F(y), w\| + c_5\|y - f(x), w\|$

for every x, y and $w \in X$, where $0 \leq A, B, C, D, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$.
 $c_5c_4 < 1$ and $A + B + C + D < 2$ with

$$A = \frac{c_1}{2} + \frac{c_4}{2} + c_3 + c_2c_5 + \frac{c_1c_5}{2} + \frac{c_5^2}{2}/1 - c_4c_5,$$

$$B = c_2 + c_3c_5/1 - c_5c_4,$$

$$C = \frac{c_1}{2} + c_2 + \frac{c_5}{2} + c_4A \quad \text{and}$$

$$D = c_3 + c_4B.$$

Then F has at least one fixed point in X .

Proof. Let x be an arbitrary point in X , and set as in [4]
 $y = \frac{1}{2}(F + I)(x)$, $z = F(y)$, $u = 2y - z$.

Using (a) and (b) we get

$$\begin{aligned} \|z - x, w\| &= \|F(y) - x, w\| = \|F(y) - F^2(x), w\| \leq \\ &\leq c_1\|y - F(x), w\| + c_2\|y - F(y), w\| + c_3\|F(x) - F^2(x), w\| + c_4\|y - F^2(x), w\| + \\ &+ c_5\|F(x) - F(y), w\| \\ &\leq \frac{c_1}{2}\|x - F(x), w\| + c_2\|y - F(y), w\| + c_3\|x - F(x), w\| + \frac{c_4}{2}\|x - F(x), w\| \\ &+ c_5\left[\frac{c_1}{2}\|x - F(x), w\| + c_2\|x - F(x), w\| + c_3\|y - F(y), w\| + c_4\|x - z, w\| + \right. \\ &\left. + \frac{c_5}{2}\|x - F(x), w\|\right] \end{aligned}$$

or

$$\|z - x, w\| \leq A\|x - F(x), w\| + B\|y - F(y), w\|.$$

Also,

$$\begin{aligned} \|u - x, w\| &= \|F(x) - F(y), w\| \\ &\leq \frac{c_1}{2}\|x - F(x), w\| + c_2\|x - F(x), w\| + c_3\|y - F(y), w\| + c_4\|x - z, w\| \\ &+ \frac{c_5}{2}\|x - F(x), w\| \\ &\leq \left(\frac{c_1}{2} + c_2 + \frac{c_5}{2}\right)\|x - F(x), w\| + c_3\|y - F(y), w\| + \\ &+ c_4(A\|x - F(x), w\| + B\|y - F(y), w\|) \end{aligned}$$

or

$$\|u - x, w\| \leq C\|x - F(x), w\| + D\|y - F(y), w\|.$$

Now,

$$\begin{aligned} 2\|y - F(y), w\| = \|z - u, w\| &\leq A\|x - F(x), w\| + B\|y - F(y), w\| + C\|x - F(x), w\| + \\ &+ D\|y - F(y), w\| \end{aligned}$$

or

$$\|y - F(y)\| \leq \left(\frac{A+C}{2-B-D}\right) \|x - F(x)\|.$$

Set $P = \frac{1}{2} (F + I)$ to get

$$\begin{aligned} \|P^2(x) - P(x)\| &= \|P(y) - y\| \\ &= \left\| \frac{1}{2} (F + I)(y) - y \right\| \\ &= \frac{1}{2} \|y - F(y)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{A+C}{2-B-D}\right) \|x - F(x)\| \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{A+C}{2-B-D}\right) \|x - (2P(x) - x)\| \\ &= \left(\frac{A+C}{2-B-D}\right) \|P(x) - x\|. \end{aligned}$$

The above inequality now shows that the sequence $\{P^n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$ is a Cauchy sequence in X , since $0 \leq \frac{A+C}{2-B-D} < 1$ and as such it converges to some $v \in X$. Therefore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = v$$

so

$$P(v) = v \text{ that is}$$

$$F(v) = v \text{ i.e., } v \text{ is a fixed point of } F$$

and that completes the proof.

The theorem in [4] is obtained by taking $c_4 = c_5 = 0$ and $c_2 = c_3$ in the above theorem.

REFERENCES

- [1] Gähler, S. 2-Metrische Räume und ihre topologische Struktur, Math. Nach. 26, (1963-64), 115-148.
- [2] Iseki, K., Shurua, P.L. and Sharma, B.K. Contraction type mappings on 2-metric space, Math. Japon. Vol. XX, No. X, (1975), 13-28.
- [3] Sharma, P.L. and Sharma, B.K. Contraction type mapping on general 2-metric space, Tamkang J. Math. Vol. 7, No. 2, (1976), 47-59.
- [4] . Non-contraction type mappings in 2-Banach space, Nanta Mathematica Vol. 12, No. 1, (1979), 91-93.
- [5] White, A.G. 2-Banach spaces, Math. Nachr. 42, (1969), 43-60.

ON QUADRATIC EQUATIONS

I.K. ARGYROS

Department of Mathematics. New Mexico State University.
Las Cruces, NM 88003.

A new iteration is presented for finding solutions of the quadratic equation in a Banach space. Our results can apply to quadratic integral equations arising in the theories of radiative transfer, neutron transport and in the kinetic theory of gases.

Introduction. In the theories of radiative transfer and neutron transport [3], [4], [5], [11] an important role is played by nonlinear integral equations of the form

$$x(s) = g(s) + x(s) \int_0^1 f(s,t)x(t)dt, \quad (1)$$

where $g(s)$ and $f(s,t)$ are given functions on $[0,1]$.

Equation (2) can be considered as a special case of the equation

$$x = y + x\tilde{K}(x) \quad (2)$$

where $\tilde{K}$ is a linear operator on a Banach algebra X_A and $y \in X_A$ is fixed.

Obviously, equation (2) reduces to (1) if we take $y = g(s)$ and

$$\tilde{K}(x)(s) = \int_0^1 f(s,t)x(t)dt.$$

The method of successive substitutions, [1], [10], the continued fraction iteration, [9] and the Newton-Kantorovich iteration [6], [8] have been used to obtain a solution x^* of special cases of (1)(or (2)).

In almost all the above cases however the solution x^* satisfies the estimate

$$\|x^*\| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4\|y\|b}}{2b} \equiv d, \quad (3)$$

where

$$b = \sup_{0 \leq s \leq 1} \int_0^1 |f(s, t)| dt$$

provided that

$$4\|y\|b < 1. \quad (4)$$

Under the above assumption however it is known that the corresponding real quadratic equation has two solutions. We wonder if this can be true in a Banach space X . It turns out that this is true under certain assumptions. What we really need to do (assuming that (4) holds) is to generate an iteration $\{x_n\}$ convergent to a solution x^* of (1) (or (2)) which guarantees that if

$\|x_0\| \geq d$ then $\|x_n\| \geq d$ and therefore

$$\|x^*\| \geq d. \quad (5)$$

We suggest the iteration

$$x_{n+1} = (L(x_n))(K(x_n)) \quad (6)$$

for solving (1) (or (2)), where

$$L(x) = x - y \quad (7)$$

and

$$K(x) = \frac{1}{K(x)} \quad (8)$$

provided that $K(x)$ is well defined and $L(x) \neq 0$ on

$U(z, r) = \{x \in X_A / \|x - z\| < r\}$ for some $z \in X_A$ and $r > 0$.

In the first part of this paper we give conditions for the convergence of (6) to a solution of (1) (or (2)) without making use of the standard hypothesis (4).

In the second part we provide conditions for the solution of the abstract quadratic equation

$$x = y + B(x, x) \quad (9)$$

where B is a bounded bilinear operator on a Banach space X and $y \in X$ is fixed, using the iteration

$$x_{n+1} = B(x_n)^{-1}(x_n - y), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

for some $x_0 \in X$.

Moreover we show that (10) has the property (5) if

$$4\|B\| \cdot \|y\| < 1. \quad (11)$$

Finally note that for $B(w, v) = wKv$ and $X = X_A$ equation (9) reduces to (2).

I Basic Results.

We denote by $C[0,1]$ the Banach space of all real continuous functions on $[0,1]$ with the maximum norm,

$$\|x\|_C = \max_{0 \leq s \leq 1} |x(s)|. \quad (12)$$

Note that the space $X_A = C[0,1]$ with norm given by (12) is a Banach algebra. In the rest of this part $\|x\|$ denotes $\|x\|_C$.

We can now prove a consequence of the contraction mapping principle theorem [11].

Theorem 1. Assume:

(i) there exist $z \in X$ and an interval $I = [r_1, r_2]$, $r_1 > 0$ such that the operator T given by

$$T(x) = (L(x))(K(x)), \quad (13)$$

where L and K are given by (7) and (8) respectively

is well defined, the operator $K(z)$ is bounded and a number $a > 0$ is given by

$$a = a(z, r) = \frac{\|K(z)\|}{1 - \|K\| \|K(z)\| \cdot r} \quad (14)$$

for

$$0 < r < \frac{1}{\|K\| \cdot \|K(z)\|}.$$

(ii) For any $x \in I$ the following inequalities are satisfied:

$$\tilde{\|K\|}(r + \|z - y\|)a^2 + a - 1 < 0; \quad (15)$$

$$a\|I - zK\| - 1 < 0; \quad (16)$$

and

$$\frac{a\|P(z)\|}{1 - a\|I - zK\|} \leq r < \|z - y\| \quad (17)$$

where

$$P(z) = z\tilde{K}(z) + y - z. \quad (18)$$

Then

(a) Equation (2) has a unique solution $x^* \in U(z, r_2)$ which can be obtained as the limit of the iteration

$$x_{n+1} = (L(x_n))(K(x_n))$$

for any $x_0 \in U(z, r_2)$.

(b) Moreover $x^* \in \bar{U}(z, r_1)$.

Proof. Let $r \in I$ and choose $w, v \in \bar{U}(z, r)$.

Claim 1. T is a contraction on $\bar{U}(z, r)$.

We have,

$$\begin{aligned} T(w) - T(v) &= K(w)(w-y) - K(v)(v-y) \\ &= K(v)\tilde{K}(v-w)K(w)(w-y) + K(v)(w-v). \end{aligned} \quad (19)$$

Hence,

$$\|T(w) - T(v)\| \leq [\|\tilde{K}\|(r + \|z-y\|)a^2 + a]\|w-v\|.$$

The above inequality now and (15) justify the claim.

Claim 2. T maps $\bar{U}(z, r)$ into $\bar{U}(z, r)$.

The claim easily follows from the inequality

$$\|T(w) - z\| \leq a(\|I - zK\|r + \|P(z)\|) \leq r,$$

using (16) and (17).

Remarks (a) The condition $r < \|z-y\|$ is imposed because otherwise if say, $x_0 = y \in \bar{U}(z, r)$ the sequence given by (6) is not defined.

(b) If the sequence $\{x_n\}$ generated by (6) is either increasing or

decreasing and the rest of the hypotheses in Theorem 1 hold except (15) then the sequence $\{x_n\}$ is contained in $\bar{U}(z, r)$ and by the monotone convergence theorem, there exists $x^* > 0$, $x^* \in X_A$ such that $x_n \rightarrow x^*$ as $n \rightarrow \infty$. Since $x_{n+1} = (L(x_n))(K(x_n))$ and $x_n \rightarrow x^*$ it follows that x^* is a solution of equation (2) which may not be unique in $\bar{U}(z, r)$, since T may not be contraction operator on $\bar{U}(z, r)$.

We will now extend our results to include equation (9) and iteration (10).

II Extension - Remarks.

From now on we assume that X is a Banach space and that B in (9) is a bounded symmetric bilinear operator [1], [11]. The operator B is assumed to be symmetric without loss of generality since B can always be replaced by the mean $\bar{B}$ of B defined by

$$\bar{B}(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x)), \quad x, y \in X.$$

We have

$$\bar{B}(x, x) = B(x, x) \quad \text{for all } x \in X.$$

Denote by $B(x)$, $x \in X$ the linear operator on X defined by

$$B(x)(y) = B(x, y), \quad x, y \in X.$$

We are now going to show that iteration $\{x_n\}$ given by (10) in case of convergence to a solution x^* of (10) is such that $\|x^*\| \geq d$ under certain assumptions.

Proposition 2. Assume:

(1) The iteration

$$x_{n+1} = B(x_n)^{-1}(x_n - y)$$

is well defined for all $n = 0, 1, 2, \dots$ for some $x_0 \in X$ and converges to a solution x of (10).

(2) The following is true:

$$1 - 4\|B\| \cdot \|y\| > 0,$$

and

(3) let $p \in [p_1, p_2]$, where p_1, p_2 are the solutions of the equation

$$\|B\|p^2 - p + \|y\| = 0.$$

If,

$$\|x_0\| > p$$

then

$$\|x_n\| \geq p, n = 0, 1, 2, \dots$$

and

$$\|x\| \geq p.$$

(Note that d given by (3) for $b = \|B\|$ is such that $d \in [p_1, p_2]$).

Proof. Using (9) we have

$$B(x_n, x_{n+1}) = x_n - y$$

or,

$$\|x_n - y\| = \|B(x_n, x_{n+1})\| \leq \|B\| \cdot \|x_n\| \cdot \|x_{n+1}\|,$$

so,

$$\|x_{n+1}\| \geq \frac{\|x_n - y\|}{\|B\| \cdot \|x_n\|} \geq \frac{\|x_n\| - \|y\|}{\|B\| \cdot \|x_n\|}.$$

Assume that $\|x_k\| \geq p$ for all $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Since $\|x_n\| \geq p \geq \|y\|$ to show $\|x_{n+1}\| \geq p$, it is enough to show

$$\frac{\|x_n\| - \|y\|}{\|B\| \|x_n\|} \geq p$$

or

$$\|x_n\| \geq \frac{\|y\|}{1 - p\|B\|}.$$

Finally it suffices to show

$$p \geq \frac{\|y\|}{1 - p\|B\|}$$

or

$$\|B\|p^2 - p + \|y\| \leq 0 \text{ which is true for } p \in [p_1, p_2].$$

That completes the proof of the proposition.

Using the Banach lemma for the invertability of linear operators [11] we can easily show the following result.

Proposition. Let $z \in X$ be such that the linear operator $B(z)$ is invertible. Then $B(x)$ is also invertible for all $x \in U(z, R_0)$, where

$$R_0 = \frac{1}{\|B\| \cdot \|B(z)^{-1}\|}.$$

We will need the definition:

Definition. Let $z \in X$ be such that the linear operator $B(z)$ is invertible. Let $R > 0$ be fixed and $R < R_0$.

The operators $\tilde{P}, \tilde{T}$ given by

$$\tilde{P}(x) = B(x, x) + y - x$$

and

$$\tilde{T}(x) = (B(x))^{-1}(x - y)$$

are then well defined on $U(z, R)$.

Define the real functions F_1 and F_2 on $\mathbb{R}^+$ by

$$F_1(R) = e_1 R^2 + e_2 R + e_3$$

and

$$F_2(R) = e_4 R^2 + e_5 R + e_6,$$

where

$$e_1 = (\|B\| \cdot \|B(z)^{-1}\|)^2,$$

$$e_2 = -2\|B\| \cdot \|B(z)^{-1}\|,$$

$$e_3 = 1 - \|B(z)^{-1}\| - \|B\| \cdot \|B(z)^{-1}\|^2 \|z - y\|,$$

$$e_4 = \|B\| \cdot \|B(z)^{-1}\|,$$

$$e_5 = \|B(z)^{-1}\| (I - B(z))\| - 1$$

and

$$e_6 = \|B(z)^{-1}\| \tilde{P}(z)\|.$$

Working as in Theorem 1 we can easily show the following consequence of the contraction mapping principle [11].

Theorem 3. Assume:

(1) there exists $z \in X$ such that the linear operator $B(z)$ is invertible.

(2) The following are true:

$$e_3 > 0,$$

$$e_5 < 0,$$

$$e_5^2 - 4e_4e_6 > 0$$

and

(3) there exists $R > 0$ such that

$$F_1(R) > 0,$$

$$F_2(R) \leq 0$$

and

$$R < \|z - y\|.$$

Then

(a) the operator $\tilde{T}$ given by

$$\tilde{T} = B(x)^{-1}(x - y)$$

is well defined and it has a unique fixed point $x \in \bar{U}(z, R)$.

(b) The iteration

$$x_{n+1} = B(x_n)^{-1}(x_n - y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

is well defined and it converges to x for any $x_0 \in \bar{U}(z, R)$.

Moreover, if

$$1 - 4\|B\| \cdot \|y\| > 0$$

and

$$\|x_0\| > \frac{1}{2\|B\|}$$

then

$$\|x\| > \frac{1}{2\|B\|}.$$

Remarks 2. (a) If the hypotheses of Theorem 2 are true then equation (9) has two solutions x_1 and x_2 such that

$$\|x_1\| \leq d$$

and

$$\|x_2\| > d.$$

(b) If $X = X_A$ then the hypotheses of Theorem 1 can easily be verified. If X is a Banach space then the conditions of Theorem 2 may be difficult to verify since the invertability of the linear operator $B(z)$ may be almost impossible. Moreover z has to be chosen close to the solution.

However the other two popular methods for solving (9), namely Newton's method

$$x_{n+1} = x_n - (2B(x_n) - I)^{-1}(\tilde{P}(x_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

and the method of successive substitutions

$$x_{n+1} = Y + B(x_n, x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

share similar difficulties.

In particular Newton's method also requires z to be "close" to the solution and the invertability of the operator $I - 2B(x_n)$ at each step (or the invertability of $(I - 2B(x_0))$ if we are referring to the modified Newton's method).

Moreover the method of successive substitution makes no use of the invertability of the linear operator $B(z)$, but z must still be close to the solution and

$$\|z\| < d,$$

under hypothesis (11) [1], [2], [10]. Therefore it cannot be used to find a

solution x such that

$$\|x\| > d,$$

since the solution obtained then satisfies

$$\|x\| \leq d.$$

Finally note that in a general Banach space X neither (20) or (21) share the property of keeping the iterates away from zero as iteration (10) does. Therefore iteration (10) if applicable can be used to find the "large" solutions of (9) (if they exist) under hypothesis (11).

References

- [1] Argyros, I. K. Quadratic equations and applications to Chandrasekhar's and related equations. Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 32, 2, (1985), 275-292.
- [2] _____. On a class of nonlinear integral equations arising in neutron transport. Aequationes Mathematicae, Vol. 35, (1988), 29-49.
- [3] Cahlon, B. Numerical solution of nonlinear Volterra integral equations. J. Comput. Appl. Math. 7, 2, (1981), 121-128.
- [4] Case, K. M. and Zweifel, P. F. Linear transport theory. Addison Wesley Publ. Reading, MA, 1967.
- [5] Chandrasekhar, S. Radiative transfer. Dover, Publ. N. York, 1960.
- [6] Kelley, C. T. Solution of the Chandrasekhar H-equation by Newton's method. J. Math. Phys. 21, (1980), 1625-1628.
- [7] Kuratowski, C. Sur les espaces complets. Fund. Math. 15, (1930), 301-309.
- [8] Legget, R. W. On certain nonlinear integral equations. J. Math. Anal. Appl. 57, (1977), 462-468.
- [9] McFarland, J. E. An iterative solution of the quadratic equation in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 9, (1958), 824-830.
- [10] Rall, L. B. Quadratic equations in Banach space. Rend. Circ. Mat. Palermo, 10, (1961), 314-332.
- [11] _____. Computational solution of nonlinear operator equations. John Wiley Publ. New York, 1968.

SOBRE LA COMPUTACION DE ISOMORFISMOS SIMPLICIALES DE SUPERFICIES*

J.M. MARTINEZ CERVERA

Escuela Universitaria de E.G.B. de Pamplona. Plazuela de San José.
PAMPLONA (España).

In this paper we give basic procedures to define an algorithm that checks if two simplicial surfaces are isomorphic. This algorithm is designed to be programmed in Lisp. We introduce the notion of simplicial semisurface and use a recursive method which is applied inductively on the number of 2-simplexes of the surface.

Agradecimientos. La autora quiere agradecer la ayuda prestada por el I.E.R. (Instituto de Estudios Riojanos) que ha permitido la realización de este trabajo.

* Para obtener el programa realizado en Lisp sobre este trabajo dirigirse directamente a la autora.

0.INTRODUCCION.

Un espacio Hausdorff tal que cada uno de sus puntos tiene un entorno homeomorfo a un 2-disco euclideo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ o a un 2-semidisco $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}$ se denomina 2-variedad topológica. En este trabajo nos limitaremos al estudio de las 2-variedades topológicas Hausdorff segundo numerables y compactas que llamaremos superficies topológicas. El conjunto de los puntos que tienen entornos homeomorfos a 2-semidiscos forman el borde de la superficie topológica. Si dicho borde es vacío se dice que dicha superficie es cerrada.

En 1925, Tiber Radó [5] probó que toda superficie admite una triangulación. Como consecuencia de este resultado, trabajaremos con la siguiente definición alternativa de superficie, aunque previamente introducimos el concepto de semisuperficie. Llamaremos semisuperficie simplicial a un complejo simplicial euclideo y finito de dimensión dos tal que todo símplice es cara de algún 2-símplice, cada 1-símplice es cara o bien de un 2-símplice o bien de dos 2-símplices. Llamaremos borde de la semisuperficie al subcomplejo generado por las aristas que son cara de un solo 2-símplice. Además se debe satisfacer que todo 0-símplice que no este en el borde tiene un halo que es una circunferencia, y el halo de un 0-símplice del borde es una suma disjunta de arcos. Donde llamamos halo de un 0-símplice al subcomplejo formado por los 1-símplices que no inciden con el 0-símplice y que son cara de los 2-símplices que inciden con el 0-símplice dado. Una circunferencia es un complejo 1-dimensional conexo y finito tal que cada 0-símplice es cara de dos 1-símplices. Un arco es un complejo 1-dimensional conexo y finito tal que cada 0-símplice es cara de uno o dos 1-símplices. Para los 0-símplices, 1-símplices y 2-símplices utilizaremos también los nombres de vértices, aristas y triángulos. Si cada 0-símplice del borde tiene como halo un arco entonces se llama a dicho complejo simplicial superficie simplicial.

El uso de ordenadores para la resolución de problemas de superficies no es nuevo. Tengamos presente que la conjetura de los cuatro colores fue finalmente resuelta por Appel y Haken en 1976 con la ayuda de un ordenador. Probando de este modo que el ordenador podía ser útil para probar teoremas en matemáticas, ver [2, pag 111]. En este trabajo utilizaremos el ordenador para decidir si dos superficies simpliciales son o no isomorfas de modo simplicial. Este algoritmo complementa uno previo [4] que generaba todas las posibles triangulaciones de superficies, si bien no eliminaba aquellas que eran isomorfas.

Para representar las superficies (y semisuperficies) utilizaremos listas ordenadas de ternas y para su borde listas ordenadas de pares. En la sección 2 definimos las nociones de tipo y tipo fino que permiten definir a continuación procedimientos de reducción para transformar el problema de isomorfismo de dos superficies simpliciales de $n+1$ triángulos en el mismo problema pero para superficies de n triángulos. Todas estos procedimientos se pueden realizar sin dificultad utilizando las funciones elementales del lenguaje Lisp aplicadas a adecuadas listas de ternas, pares, etc.

En la sección 3, probamos los resultados teóricos que nos permiten asegurar que utilizando los procedimientos descritos en la sección 2 se puede resolver el problema de isomorfismo simplicial para superficies simpliciales de modo algorítmico. Daremos además una breve descripción del algoritmo que utilizamos.

1. REPRESENTACION DE SUPERFICIES.

Una arista es una pareja no ordenada formada por dos números naturales (≥ 0). Es claro que una pareja ordenada y su transposición determinan la misma arista. Un triángulo es una terna no ordenada de números naturales. Como antes un triángulo será representado por una terna ordenada, si bien deberemos tener en cuenta que una terna ordenada y todas sus permutaciones representan el mismo triángulo.

Definición 1. Una superficie es una pareja $(\Sigma, \partial\Sigma)$ donde Σ es un conjunto de triángulos y $\partial\Sigma$ es un conjunto de aristas tales que los triángulos de Σ y sus caras forman una superficie simplicial cuyo borde está formado por las caras de las aristas de $\partial\Sigma$.

Definición 2. Una representación de una superficie es una pareja ordenada $(S, \partial S)$ donde S es una lista ordenada de ternas ordenadas y ∂S es una lista de pares ordenados y tal que al olvidar las ordenaciones determina una superficie $(\Sigma, \partial\Sigma)$. Notemos que una superficie admite varias representaciones, si bien cada representación determina una única superficie. Por esta razón y si no hay lugar a confusión una representación de una superficie será denominada también como superficie.

Definición 3. Llamaremos semisuperficie a una pareja $(\Sigma, \partial\Sigma)$ donde Σ es un conjunto de triángulos y $\partial\Sigma$ es un conjunto de aristas tales que los triángulos de Σ y sus caras forman una semisuperficie simplicial cuyo borde está formado por las caras de las aristas de $\partial\Sigma$.

En este trabajo trabajaremos con frecuencia con ternas de la forma $(\Sigma, \partial\Sigma, P)$ donde $(\Sigma, \partial\Sigma)$ es una semisuperficie (superficie) y P es una lista (ordenada) de aristas orientadas contenidas en ∂S , llamaremos a estas ternas semisuperficies intermedias. Más exactamente trabajaremos con representaciones $(S, \partial S, P)$ de estas semisuperficies intermedias.

Los conjuntos ordenados serán denotados con ayuda de paréntesis; por ejemplo, (a, b, c) es el conjunto $\{a, b, c\}$ con el orden $a < b < c$. Si A y B son

conjuntos ordenados distintos, $A \cup B$ será el conjunto ordenado reunión de A y B que extiende los ordenes de A y B y tal que $a < b$ para cada $a \in A$ y $b \in B$.

2. TIPOS Y PROCEDIMIENTOS.

Sea $(S, \partial S)$ una representación de una superficie $(\Sigma, \partial \Sigma)$ y se P una lista ordenada de aristas orientadas contenidas en ∂S .

Definición 1. Sea u una arista orientada de ∂S esta determina un único triángulo de S que denotaremos por $t(u)$ sean a y p las otras dos aristas de $t(u)$ orientadas de tal modo que a, u, p sean consecutivas. Llamaremos tipo de u en $(S, \partial S)$ a una de las cuatro palabras {ambas, anterior, posterior, ninguna} según se verifique respectivamente que a y p son miembros de ∂S , a es miembro y p no es miembro de ∂S , p es miembro y a no es de ∂S y finalmente ni a ni p son miembros de ∂S .

Definición 2. Sea u una arista orientada de P contenido en ∂S de tipo anterior llamaremos tipo fino de u en $(S, \partial S, P)$ a una de los siguientes de listas de enteros $\{(1, n) (-1, n) (0)\}$ donde $(1, n)$ significa que la arista a anterior a u esta en P en el lugar n , $(-1, n)$ que la arista opuesta $-a$ esta en P en el lugar n y finalmente (0) significa que la arista a no esta en P . Para una arista u de P de tipo posterior se define su tipo fino de modo análogo.

Si u es una arista de P de tipo ambas llamaremos tipo fino a uno de los siguientes listas de enteros $\{(1, 0, n) (-1, 0, n) (0, 1, m) (0, -1, m) (1, 1, n, m) (1, -1, n, m) (-1, 1, n, m) (-1, -1, n, m) (0, 0)\}$ donde $1, -1, 0$ significa respectivamente que la correspondiente arista esta en P , esta su opuesta, no esta ella ni su opuesta y n, m son los lugares que ocupan en P . Ejemplo $(1, -1, n, m)$ significa que la arista anterior a esta en P y también la opuesta de la posterior y que la anterior ocupa el lugar n de P y la posterior ocupa el lugar m de P .

Finalmente, si u es una arista de P de tipo ninguno, entonces su tipo fino es un entero $\{0, 1\}$. Si es 0 significa que el primer 0 -símplice de la arista anterior (que el el último de la posterior) no es un 0 -símplice de ∂S y si es 1 significa que si es de ∂S .

Los procedimientos que describimos a continuación transforman una superficie intermedia $(S, \partial S, P)$ de $n+1$ triángulos, en una superficie intermedia $(S', \partial S', P')$ de n triángulos. Denotamos por u la primera arista de P , $t(u)$ es la única terna de S de la u es cara y a y p denotan la arista anterior y posterior de u en $t(u)$.

1. El procedimiento "ambas" se aplica para aristas u de tipo "ambas" y viene definido por

$$S' = S \setminus (t(u))$$

$$\partial S' = \partial S \setminus (u, a, -a, p, -p)$$

$$P' = P \setminus (u, a, -a, p, -p)$$

Notemos que P' disminuye en una, dos o tres aristas.

2. El procedimiento "anterior" se aplica para aristas u de tipo anterior y viene definido por las fórmulas

$$S' = S \setminus (t(u))$$

$$\partial S' = (-p) \cup (\partial S \setminus (u, a, -a))$$

$$P' = (-p) \cup (P \setminus (u, a, -a))$$

3. El procedimiento "posterior" se aplica para aristas u de tipo posterior y viene definido por

$$S' = S \setminus (t(u))$$

$$\partial S' = (-a) \cup (\partial S \setminus (u, p, -p))$$

$$P' = (-a) \cup (P \setminus (u, p, -p))$$

Notemos que tanto en este caso como en el 2, P' tiene el mismo número o uno menos de aristas que P .

4. El procedimiento "ninguna" se aplica para aristas u de tipo "ninguna" y viene definido por

4.0) Si el tipo fino es 0:

$$S' = S \setminus (t(u))$$

$$\partial S' = (-a, -p) \cup (\partial S \setminus (u))$$

$$P' = (-a, -p) \cup (P \setminus (u))$$

4.1) Si el tipo fino es 1. En primer lugar se considera la semisuperficie:

$$S_0 = S \setminus (t(u))$$

$$\partial S_0 = (-a, -p) \cup (\partial S \setminus (u))$$

$$P_0 = (-a, -p) \cup (P \setminus (u))$$

Notemos que $(S_0, \partial S_0, P_0)$ es una semisuperficie con punto singular $a \cap p$, en este punto singular se puede duplicar para convertir la

semisuperficie en superficie. Es fácil ver que la estrella de $a \cap p$ en S es un "abanico" de 2-símplices y al quitar el $t(u)$ que es un 2-símplice "central" en el abanico debido a que su tipo es ninguno quedan dos subabanicos. Para desingularizar el punto $a \cap p$ es suficiente con cambiar el nombre del vértice eje de uno de los dos subabanicos. Para ello hay que dar un procedimiento que busque los 2-símplices de uno de los subabanicos y vaya cambiando el nombre del punto singular. Ello se puede realizar mediante el siguiente proceso

Sea $t(a)$ el 2-símplice de S_0 que determina a , y sea a_1 la arista anterior a la arista a , si a_1 esta en el borde de S_0 entonces cambiar el nombre del punto singular en $t(a)$ y llamar al resultado S' de modificar S_0 con el nuevo valor de $t(a)$, $\partial S'$ el resultado de modificar ∂S_0 al cambiar el nombre del vértice $a \cap p$ en $-a$ y en a_1 , y finalmente P' el resultado de modificar P_0 al cambiar el nombre del vértice $a \cap p$ en $-a$. Como nuevo nombre del vértice se puede tomar máximo de los vértices de S_0 más uno.

En otro caso si a_1 no esta en el borde de S_0 entonces se busca $t(a_1)$ en $S_0 \setminus \{t(u)\}$ y se considera la arista a_2 anterior a a_1 , llegara un momento en el que a_n este en el borde de S_0 entonces cambiar el nombre del punto singular en $t(a)$, $t(a_1)$, ..., $t(a_{n-1})$ y llamar al resultado S' de modificar S_0 con el nuevos valores de $t(a)$, $t(a_1)$, ..., $t(a_{n-1})$, $\partial S'$ el resultado de modificar ∂S_0 al cambiar el nombre del vértice $a \cap p$ en $-a$ y en a_n , y finalmente P' el resultado de modificar P_0 al cambiar el nombre del vértice $a \cap p$ en $-a$.

Entonces este procedimiento genera finalmente una superficie intermedia $(S', \partial S', P')$. Notemos que la nueva superficie S' quizás tenga una componente conexa más.

3. RESULTADOS TEORICOS Y DESCRIPCION DEL ALGORITMO

En este párrafo trabajaremos con semisuperficies simpliciales intermedias así una superficie Σ significa el complejo simplicial 2-dimensional correspondiente y en algunos casos su realización como espacio topológico.

Teorema1. Sean $(S_1, \partial S_1, P_1)$, $(S_2, \partial S_2, P_2)$ superficies simpliciales intermedias tal que P_1 y P_2 son no vacíos con u_1 y u_2 como primeras aristas supongamos también que f es un isomorfismo simplicial de P_1 en P_2 que conserva la orientación de las aristas y el orden de lista. Supongamos también que S_1 y S_2 representan las superficies Σ_1 y Σ_2 . Entonces f extiende hasta un isomorfismo simplicial $F: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ si y sólo si u_1 y u_2 tienen el mismo tipo y tipo fino y la aplicación inducida $f': P'_1 \rightarrow P'_2$ extiende a un isomorfismo simplicial $F': \Sigma'_1 \rightarrow \Sigma'_2$, donde Σ'_1 y Σ'_2 son las superficies representadas por S'_1 y S'_2 definidas en el párrafo anterior.

Demostración: Si f extiende hasta un isomorfismo simplicial $F: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ claramente F aplica $t(u_1)$ en $t(u_2)$, entonces $F' = F/cl(\Sigma_1 - t(u_1))$ extiende $f': P'_1 \rightarrow P'_2$ además u_1 y u_2 claramente tienen el mismo tipo y el mismo tipo fino.

Recíprocamente, si f' extiende a un isomorfismo F' , se pueden considerar los casos

1) Si u_1 y u_2 son de tipo ambas $t(u_1)$ y $t(u_2)$ son en realidad componentes conexas de S_1 y S_2 , respectivamente. Por tener u_1 y u_2 el mismo tipo fino f induce de modo natural f' . En este caso isomorfismo F' se extiende a F de modo que los nuevos vértices $a_1 \cap u_1$, $u_1 \cap p_1$, $p_1 \cap a_1$ se aplican en $a_2 \cap u_2$, $u_2 \cap p_2$, $p_2 \cap a_2$ respectivamente. Por ejemplo si el tipo fino es $(1, -1, n, m)$ las relaciones entre f y f' vienen dadas por

$$P_1 = (u_1) \cup P_1' \cup (a_1) \cup (-p_1) \quad P_2 = (u_2) \cup P_2' \cup (a_2) \cup (-p_2)$$

$$f'/P_1' = f/P_1'$$

donde a_1 y a_2 deben quedar en lugar n y p_1 y p_2 deben quedar en lugar m .

2) Si u_1 y u_2 son de tipo anterior, el isomorfismo F' se extiende a F de modo que el nuevo vértices $a_1 \cap u_1$ se aplica en $a_2 \cap u_2$ y según sea el tipo fino las relaciones entre f y f' vienen dadas por

a) Tipo fino de u_1 = Tipo fino de $u_1 = (0)$. Entonces

$$P_1 = (u_1) \cup (P_1' - (v_1)), \quad P_2 = (u_2) \cup (P_2' - (v_2))$$

donde v_1 y v_2 son las primeras aristas de P_1' y P_2' ($v_1 = -P_1, v_2 = -P_2$).

$$f'/(P_1' - (v_1)) = f/(P_1' - (v_1)) \text{ y}$$

$$f(a_1 \cap p_1, p_1 \cap u_1) = f(a_2 \cap p_2, p_2 \cap u_2)$$

b) Tipo fino de u_1 = Tipo fino de $u_1 = (1, n)$. Entonces

$$P_1 = (u_1) \cup (P_1' - (v_1)) \cup (a_1) \quad P_2 = (u_2) \cup (P_2' - (v_2)) \cup (a_2)$$

$$f'/(P_1'-(v_1))=f/(P_1'-(v_1)) \text{ y}$$

$$f(a_1 \cap p_1, p_1 \cap u_1) = (a_2 \cap p_2, p_2 \cap u_2)$$

$$f(a_1 \cap p_1, a_1 \cap u_1) = (a_2 \cap p_2, a_2 \cap u_2)$$

donde a_1 y a_2 deben quedar en lugar n de las listas.

c) Tipo fino de u_1 = Tipo fino de $u_1 = (-1, n)$. Es análogo a a2) cambiando a_1 por $-a_1$ y a_2 por $-a_2$.

3) Si u_1 y u_2 son de tipo posterior, se procede de manera análoga al caso 2).

4) Si u_1 y u_2 son de tipo ninguno, y de tipo fino 0 entonces sobre los vértices $F = F'$, de este modo $t(u_1)$ se aplica en $t(u_2)$, notemos que en este caso

$$P_1 = (u_1) \cup (P_1' - (v_1, w_1)), \quad P_2 = (u_2) \cup (P_2' - (v_2, w_2))$$

donde v_1, w_1 son los dos primeros miembros de P_1' y análogamente v_2, w_2 , entonces f aplica u_1 en u_2 y sobre el resto actúa como f' .

Si u_1 y u_2 son de tipo ninguno, y de tipo fino 1 entonces para reconstruir Σ_1 a partir de Σ_1' debo identificar el vértice final de v_1 con el vértice inicial de w_1 y análogamente para Σ_2' esta identificación se puede hacer de modo simplicial ya que Σ_1' ha sido construida a partir de Σ_1 como f aplica el vértice final de v_1 en el final de v_2 y el inicial de w_1 en el inicial de w_2 el isomorfismo F' induce un isomorfismo F'' en las semisuperficies definidas por la identificación., ahora no hay problema En definir F sobre los vértices de Σ_1 precisamente igual a F'' de modo que F aplica $t(u_1)$ en $t(u_2)$ y naturalmente u_1 en u_2 obteniéndose así el isomorfismo deseado.

Teorema 2. Sean $(S_1, \partial S_1)$ $(S_2, \partial S_2)$ representaciones de superficies simpliciales conexas $(\Sigma_1, \partial \Sigma_1)$ $(\Sigma_2, \partial \Sigma_2)$ de modo que ambas tienen borde no vacío sea u_1 una arista orientada de ∂S_1 entonces Σ_1 es isomorfa simplicialmente a Σ_2 si y solo si para una arista u_2 con adecuada orientación las superficies simpliciales intermedias $(S_1, \partial S_1, P_1 = \{u_1\})$, $(S_2, \partial S_2, P_2 = \{u_2\})$ son isomorfas.

Corolario. El grupo de isomorfismos simpliciales de una superficie simplicial conexa con borde no vacío es isomorfo a un subgrupo del grupo de isomorfismos simpliciales de un número finito de circunferencias simpliciales.

Teorema 3. Sean S_1, S_2 representaciones de superficies simpliciales conexas Σ_1, Σ_2 sea t_1 un triángulo de S_1 entonces Σ_1 es isomorfa simplicialmente a Σ_2 si y solo si para algún triángulo t_2 de S_2 ($S_1 - \{t_1\}$, ∂t_1), ($S_2 - \{t_2\}$, ∂t_2) son isomorfas simplicialmente.

Descripción del algoritmo. Si queremos saber si dos superficies simpliciales conexas Σ_1, Σ_2 son isomorfas simplicialmente o no basta escoger t_1 un triángulo de S_1 y aplicando el Teorema 3 ver si para algún triángulo t_2 de S_2 se verifica que ($S_1 - \{t_1\}$, ∂t_1), ($S_2 - \{t_2\}$, ∂t_2) son isomorfas simplicialmente (para esto basta que t_2 vaya recorriendo todos los triángulos de S_2). Para averiguar si ($S_1 - \{t_1\}$, ∂t_1), ($S_2 - \{t_2\}$, ∂t_2) son isomorfas simplicialmente aplicaremos el Teorema 2 escogiendo alguna arista u_1 de ∂t_1 y viendo si para alguna arista orientada u_2 de ∂t_2 (u_2 ira recorriendo las aristas de ∂t_2) las superficies intermedias ($S_1 - \{t_1\}$, $\partial t_1, P_1 = \{u_1\}$) ($S_2 - \{t_2\}$, $\partial t_2, P_2 = \{u_2\}$) son isomorfas simplicialmente. Para resolver este último problema aplicamos el Teorema 1 reduciendolo a comprobar si las correspondientes superficies intermedias obtenidas al aplicar los procedimientos definidos en párrafo 2 son isomorfas, con la importante propiedad de que ambas tienen un triángulo menos. Por tanto aplicando un número de veces el Teorema 1 si ambas quedan reducidas a la superficie vacia se seguirá finalmente que Σ_1 y Σ_2 son isomorfas simplicialmente.

REFERENCIAS.

- [1] J. Chailloux "Le_Lisp de l'INRIA. Manuel de référence" (1985)
- [2] P.A. Firby, C.F. Gardiner "Surface Topology" Ellis Horwood (1982)
- [3] W.S. Massey "Introducción a la Topología Algebraica" Reverté, 1972.
- [4] J.M. Martinez Cervera "Un algoritmo para la construcción de triangulaciones de superficies" Actas del IV Sem. de Top. (1988) 73-81
- [5] T. Radó "Über den Begriff von Riemannsche Fläche" Acta Sci. Math. (Szeged) 2 (1924/26), 101-120.
- [6] D.S. Touretzky "Lisp. Introducción al cálculo simbólico" Ed. Díaz de los Santos.(1986).

TRANSVERSALIDAD DE VARIEDADES. CARACTERIZACION.

C. ROMO SANTOS

Departamento de Algebra. Universidad Complutense. Madrid.

This work, dedicated to the characterization of the transversality of algebroid manifolds, contains several propositions about different conditions of equivalence.

Introducción.— Este trabajo está dedicado a la caracterización de la transversalidad de variedades algebroides. La noción de la transversalidad es de gran importancia en el estudio del contacto maximal.

Nota 1

- i) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica arbitraria, $Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d$, indeterminadas sobre K con $c+d = n$ y $R = K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]] = K[[Z, W]]$ el anillo de series de potencias formales en las indeterminadas $Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d$ con coeficientes en K .

Llamaremos variedad algebroide sumergida en K^{c+d} a $V(I) = \text{Spec}(K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]]/I)$ siendo I un radical cualquiera de $K[[Z, W]]$.

Si I es un ideal regular, diremos que la variedad algebroide correspondiente $V(I)$ es una variedad algebroide regular.

- ii) Si M es el ideal maximal de $K[[Z, W]]$ podemos identificar $g_M^r(K[[Z, W]])$ con $K[[Z, W]]$ siendo $\bar{Z}_i = Z_i + M^2$, $1 \leq i \leq c$, $\bar{W}_j = W_j + M^2$, $1 \leq j \leq d$.

Llamaremos $\text{in}_M(I)$ al ideal inicial de I en $g_M^r(K[[Z, W]])$. En estas condiciones escribiremos

$$C_V = \text{Spec}\{K[\bar{Z}, \bar{W}] / \text{in}_M(I)\}$$

y diremos que C_V es el cono tangente a la variedad V .

Definición 2.- Sea $V = V(I)$ una variedad algebroide y W una variedad algebroide regular,

$$W = \text{Spec}\{K[[Z, W]] / (z_1, \dots, z_c)R\}$$

Se dirá que la variedad algebroide regular W es transversal a la variedad algebroide V si y solo si el morfismo canónico

$$C_V \xrightarrow{\omega} C_W = T_W$$

es plano.

Nota 3.- Al morfismo ω entre los conos tangentes corresponde el homomorfismo de anillos

$$K[\bar{W}] \longrightarrow K[\bar{Z}, \bar{W}] / \text{in}_M(I)$$

que es la composición de la inclusión $K[\bar{W}] \longrightarrow K[\bar{Z}, \bar{W}]$ con el homomorfismo natural $K[\bar{Z}, \bar{W}] \longrightarrow K[\bar{Z}, \bar{W}] / \text{in}_M(I)$

Entonces, la variedad algebroide regular W es transversal a la variedad algebroide V si y solo si el homomorfismo

$$\varphi: K[\bar{W}] \longrightarrow K[\bar{Z}, \bar{W}] / \text{in}_M(I)$$

es un homomorfismo plano de anillos.

Proposición 4.- Las condiciones siguientes son equivalentes:

- i) La variedad W es transversal a la variedad V .
- ii) Los elementos $\{\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_d\}$ forman una sucesión regular del $K[\bar{W}]$ -módulo $K[\bar{Z}, \bar{W}] / \text{in}_M(I)$

Demostración.-

i) $\implies$ ii)

Demostraremos esta implicación por inducción. Veremos en primer lugar que $\bar{W}_1$ no es divisor de cero respecto de

$$K[\bar{Z}, \bar{W}] / \text{in}_M(I).$$

$$\bar{W}_1 \cdot f(\bar{Z}, \bar{W}) + \text{in}_M(I) = 0.$$

r y dos familias de elementos $\{g_j(\bar{\omega})\}_{j=1, \dots, r}$

$$\{f_j(\bar{z}, \bar{w}) + in_M(I)\}_{j=1 \dots r}, \quad g_j(\bar{w}) \in K[\bar{w}]$$

y $f_j(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I) \in K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I)$ tales que

$$\bar{w}_1 g_1(\bar{w}) = \dots = \bar{w}_1 g_r(\bar{w}) = 0$$

$$y \quad f(\bar{z}_i, \bar{w}_i) + \text{in}_M(I) = \sum [g_j(\bar{w}_i) f_j(\bar{z}_i, \bar{w}_i) + \text{in}_M(I)]$$

de donde se deduce que $g_j(\bar{w}) = 0$, $j = 1, \dots, r$, y así

$$f(\bar{Z}, \bar{W}) + \text{in}_M(I) = 0.$$

Sea ahora i un entero, $1 \leq i < d$ y supongamos probado que $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i\}$ es una sucesión regular del $K(\frac{W}{\bar{w}})$ -módulo $K(\frac{W}{\bar{w}})/\text{in}_M(I)$. Vamos a probar que $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i, \bar{w}_{i+1}\}$ es también una sucesión regular.

Consideremos una relación del tipo

$$\bar{W}_{i+1} f(\bar{Z}, \bar{W}) + in_M(I) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \{f_{\ell}(\bar{Z}, \bar{W}) + in_M(I)(\bar{W}_{\ell} + in_M(I))\}$$

Se tiene, pues, que

$$\bar{W}_1 \{f_1(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I)\} + \dots + W_{\pm} \{f_i(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I)\} - \bar{W}_{i+1} \{f(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I)\} = 0$$

Por la hipótesis de platitud sabemos que existe un entero r y dos familias

$$\{g_{\ell j}(\bar{w})\}, \quad \ell = \overset{1}{1}, \dots, \overset{i+1}{i+1}, \quad g_{\ell j} \in K|\bar{w}|, \quad$$

$$\{h_j(\frac{Z}{\mathcal{Z}}, \frac{W}{\mathcal{W}}) + \text{in}_M(I)\}_{j=1, \dots, r}, \quad h_j(\frac{\bar{Z}}{\bar{\mathcal{Z}}}, \frac{\bar{W}}{\bar{\mathcal{W}}}) + \text{in}_M(I) \in K[\frac{\bar{Z}}{\bar{\mathcal{Z}}}, \frac{\bar{W}}{\bar{\mathcal{W}}}] / \text{in}_M(I)$$

tales que

[illegible]

Y

$$[2] \quad \begin{cases} f_l(\bar{Z}, \bar{W}) + in_M(I) = \sum g_{lj}(\bar{W}) \{h_j(\bar{Z}, \bar{W}) + in_M(I)\} \\ l = 1, \dots, i \\ -f(\bar{Z}, \bar{W}) + in_M(I) = \sum g_{i+1,j}(\bar{W}) \{h_j(\bar{Z}, \bar{W}) + in_M(I)\} \end{cases}$$

De [1] se deduce que $g_{i+1,j}(\bar{w}) \in (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_1)K[\bar{z}, \bar{w}]$ para todo $j = 1, \dots, r$, y por tanto de [2] resulta que

$$f(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I) \in \{\bar{w}_1 + \text{in}_M(I), \dots, \bar{w}_r + \text{in}_M(I)\} K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I)$$

q. e. d.

ii) $\implies$ i)

Tenemos que $K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I) = K[\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_c, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d] / \text{in}_M(I) = K[\delta_1, \dots, \delta_c, \delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d}]$ con $\delta_i = \bar{z}_i + \text{in}_M(I)$, $1 \leq i \leq c$, $\delta_j = \bar{w}_j + \text{in}_M(I)$, $c+1 \leq j \leq c+d$.

Se verifica que $M' = (\delta_1, \dots, \delta_c, \delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d})$ es un ideal maximal de $K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I)$.

Puesto que un morfismo de conos es plano si y solo si es plano en el origen, bastará demostrar que $(K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I))_{M'}$ es $K[\bar{w}]$ -plano. Por la hipótesis sabemos que los elementos $\{\delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d}\}$ forman una sucesión regular de

$K[\delta_1, \dots, \delta_c, \delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d}]$, luego los elementos $\{\frac{\delta_{c+1}}{1}, \dots, \frac{\delta_{c+d}}{1}\}$ forman una sucesión $(K[\delta_1, \dots, \delta_c, \delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d}])_{M'}$ regular.

De aquí se deduce que el subanillo $K[\frac{\delta_{c+1}}{1}, \dots, \frac{\delta_{c+d}}{1}]$ de $(K[\delta_1, \dots, \delta_c, \delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d}])_{M'}$ es isomorfo al anillo de polinomios $K[\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d]$ bajo un isomorfismo que transforma $\bar{w}_i$ en δ_i , $i = 1, \dots, d$, y que $(K[\delta_1, \dots, \delta_c, \delta_{c+1}, \delta_{c+2}, \dots, \delta_{c+d}])_{M'}$ es $K[\frac{\delta_{c+1}}{1}, \dots, \frac{\delta_{c+d}}{1}]$ -plano, q. e. d.

Nota 5. - Vamos ahora a estudiar el significado de la noción de transversalidad en el caso en que V sea una hipersuperficie, esto es, que I sea un ideal principal.

Sea

$$I = (f(\bar{z}, \bar{w}))K[\bar{z}, \bar{w}], \quad f(\bar{z}, \bar{w}) \in K[\bar{z}, \bar{w}]$$

y sea $\bar{f}(\bar{z}, \bar{w})$ la forma inicial de $f(\bar{z}, \bar{w})$, luego

$$\text{in}_M(I) = (\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}))K[\bar{z}, \bar{w}].$$

Proposición 6. - Con las hipótesis de la nota 5, las condiciones siguientes son equivalentes:

i) W es transversal a V .

ii) $\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) \notin (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d)K[\bar{z}, \bar{w}]$, es decir $f(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_c, 0, \dots, 0) \neq 0$.

Demostración.-

Se verifica que $\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) \notin (\bar{w}_1)K[\bar{z}, \bar{w}]$ pues si perteneciera sería $\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) = g(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_1$ y por hipótesis de transversalidad, debería ser $g(\bar{z}, \bar{w}) \in (\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}))K[\bar{z}, \bar{w}]$ lo que no es posible por ser de menor grado.

Sea ahora i un entero $1 \leq i < s$ y supongamos probado que $\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) \notin (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i)K[\bar{z}, \bar{w}]$.

Si $\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) \in (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i, \bar{w}_{i+1})K[\bar{z}, \bar{w}]$, sería

$$\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) = f_1(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_1 + \dots + f_i(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_i + f_{i+1}(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_{i+1}$$

y por hipótesis de transversalidad se podría escribir

$$f_{i+1}(\bar{z}, \bar{w}) = h(\bar{z}, \bar{w})\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) + h_1(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_1 + \dots + h_i(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_i$$

Así

$$\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) [1 - h(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_{i+1}] = [f_1(\bar{z}, \bar{w}) + \bar{w}_{i+1}h_1(\bar{z}, \bar{w})]\bar{w}_1 + \dots + [f_i(\bar{z}, \bar{w}) + \bar{w}_{i+1}h_i(\bar{z}, \bar{w})]\bar{w}_i$$

y como $\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) \notin (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i)K[\bar{z}, \bar{w}]$ debe ser

$$1 - \bar{w}_{i+1}h(\bar{z}, \bar{w}) \in (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i)K[\bar{z}, \bar{w}] \quad \text{que es imposible.}$$

$$\text{Esto prueba que } \bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) \notin (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d)K[\bar{z}, \bar{w}]$$

ii) $\implies$ i)

Probaremos que W es transversal a V demostrando que $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d\}$ es una sucesión regular del $K[\bar{w}]$ -módulo

$$K[\bar{z}, \bar{w}] / (\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}))K[\bar{z}, \bar{w}]$$

Si fuese $\bar{w}_1 \cdot g(\bar{z}, \bar{w}) = h(\bar{z}, \bar{w}) \cdot \bar{f}(\bar{z}, \bar{w})$, como

$$\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) \notin (\bar{w}_1)K[\bar{z}, \bar{w}] \text{ debe ser } h(\bar{z}, \bar{w}) \in (\bar{w}_1)K[\bar{z}, \bar{w}] \text{ y así}$$

$$g(\bar{z}, \bar{w}) = \frac{h(\bar{z}, \bar{w})}{\bar{w}_1} \bar{f}(\bar{z}, \bar{w}), \text{ lo que prueba que } W \text{ no es divisor de cero.}$$

Sea ahora i un entero, $1 \leq i \leq d$ y supongamos probado que $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i\}$ es una sucesión regular. Sea una relación

$$\bar{w}_{i+1}g(\bar{z}, \bar{w}) = h(\bar{z}, \bar{w})\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) + h_1(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_1 + \dots + h_i(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_i$$

Se debe verificar que $h(\bar{z}, \bar{w}) \in (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_1, \bar{w}_{i+1})K[\bar{z}, \bar{w}]$

y así $h(\bar{z}, \bar{w}) = \ell_1(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_1 + \dots + \ell_i(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_i + \ell_{i+1}(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_{i+1}$

con lo que $\bar{w}_{i+1}^{-1}[g(\bar{z}, \bar{w}) - \ell_{i+1}(\bar{z}, \bar{w})\bar{f}(\bar{z}, \bar{w})] \in (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i)K[\bar{z}, \bar{w}]$

lo que implica que $g(\bar{z}, \bar{w}) - \ell_{i+1}(\bar{z}, \bar{w})\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) \in (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i)K[\bar{z}, \bar{w}]$

y así $g(\bar{z}, \bar{w}) + (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i)K[\bar{z}, \bar{w}] \in (F(\bar{z}, \bar{w}))K[\bar{z}, \bar{w}]$ q. e. d.

Proposición 7.- Con las notaciones anteriores, supongamos que $I = (f_1, \dots, f_m)$, donde las formas iniciales $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m$, de $f_1, \dots, f_m$ forman una base minimal de $\text{in}_M(I)$ y sea S_i la hipersuperficie

$$S_i = \text{Spec}(K[[\bar{z}, \bar{w}]] / (f_i)K[[\bar{z}, \bar{w}]])$$

Si W es transversal a V , entonces W es transversal a S_i , $\forall i = 1, \dots, m$.

Demostración.- En virtud de la proposición anterior el resultado quedará probado si demostramos que todas las $\bar{f}_i$ deben tener necesariamente un término independiente de $\bar{w}$. Supongamos, por ejemplo, que $\bar{f}_1$ no posee término independiente de $\bar{w}$, entonces $f_1 \in \text{in}_M(I) \cap (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d)K[\bar{z}, \bar{w}] = \text{in}_M(I) \cdot (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d)K[\bar{z}, \bar{w}]$ y así se podrá escribir $f_1 = \bar{w}_1g_1 + \dots + \bar{w}_dg_d$, $g_i \in \text{in}_M(I)$ donde los g_i son homogéneos de grado una unidad inferior al de $\bar{f}_1$. Pero también se tiene que

$$g_i = \sum_{j=1}^m g_{ij}\bar{f}_j, \quad i = 1, \dots, d,$$

donde los g_{ij} son cero u homogéneos y tales que

$$\text{grado } g_i = \text{grado}(g_{ij}) + \text{grado}(\bar{f}_j).$$

Por tanto se puede escribir

$$\bar{f}_1 = (\bar{w}_1g_{11} + \dots + \bar{w}_dg_{s1})\bar{f}_1 + \dots + (\bar{w}_1g_{1m} + \dots + \bar{w}_dg_{sm})\bar{f}_m$$

Pero como para cada $i = 1, \dots, d$, debe ser

$$\text{grado } g_i = \text{grado}(\bar{f}_1) - 1 = \text{grado}(g_{i1}) + \text{grado}(\bar{f}_1),$$

es necesariamente $g_{11} = \dots = g_{s1} = 0$; lo que contradice la hipótesis de que $(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m)$ sea una base minimal de $\text{in}_M(I)$.

Bibliografía

- (1) Bennett, B.M. "On the characteristic functions of a local ring".
Ann. Math. 91 (1970).
- (2) Hironaka, H. "Introducción to the theory of infinitely near singular points". Memorias de Matemática del Instituto Jorge Juan. C.S.I.C.
Madrid 1974.
- (3) Lejeune-Jalabert, M., Teissier B. "Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités". Ecole Polytechnique. Paris 1972.
- (4) Romo Santos, C. "Resolución de singularidades de variedades algebroides sobre un cuerpo de característica cualquiera". Tesis Doctoral. Universidad Complutense. Madrid 1976.

1. INTRODUCCION

La solución analítica de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un satélite artificial perturbado por las distintas acciones de no existencia de la Tierra, acción de radiación solar, rozamiento atmosférico, etc., no es posible en la práctica. Históricamente las soluciones a este problema se han obtenido utilizando principalmente dos técnicas: métodos de perturbaciones generales y métodos de perturbaciones especiales. La primera consiste en encontrar una solución al problema analítico mediante series aproximadas, donde el modelo del problema a estudiar viene limitado por la posibilidad de calcular dicha solución. Un ejemplo típico de esta técnica son los clásicos métodos de perturbaciones, que permiten un rápido y eficiente cálculo de la órbita de un satélite, pero están limitados por el método de cálculo a estudiar y por las condiciones de las series dependientes de un pequeño parámetro.

En la segunda técnica, el modelo perturbado completo puede ser incluido en las ecuaciones del movimiento. Estas ecuaciones se resuelven por medio de métodos de integración numérica, entre los que destaca el de Cowell [1] como uno de los clásicos de generación de órbitas más utilizados. El método de Cowell es un método numérico de integración directa de tipo Runge-Kutta que proporciona el vector de posición y el vector

INTEGRACION NUMERICA DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DEL SATELITE ARTIFICIAL

J.M. FRANCO Y M. PALACIOS

Dpto. de Matemática Aplicada (E.T.S.I.I.). Universidad de Zaragoza.

Avda. María Zambrano, 50, 50015-Zaragoza (España)

Analytical solution of the differential equations describing the motion of an artificial satellite perturbed by gravitational and non-gravitational effects is not available. The solution is obtained using numerical integration techniques like Cowell's method. In this paper, we propose adaptive Cowell methods that integrate exactly algebraic polynomials and trigonometric functions. Besides, we derive a procedure for the construction of adaptive Cowell formulae of arbitrarily high order of accuracy. Finally, numerical results have been obtained for two test problems of perturbed satellite type using the KS-variables.

1. INTRODUCCION

La solución analítica de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un satélite artificial perturbado por los distintos efectos de no esfericidad de la Tierra, presión de radiación solar, rozamiento atmosférico, etc., no es posible calcularla. Históricamente las soluciones a este problema se han obtenido utilizando principalmente dos técnicas: *métodos de perturbaciones generales* y *métodos de perturbaciones especiales*. La primera consiste en encontrar una solución al problema mediante métodos analíticos aproximados, donde el modelo del problema a estudiar viene limitado por la posibilidad de calcular dicha solución. Un ejemplo típico de esta técnica son los clásicos métodos de promedios, que permiten un rápido y eficiente cálculo de la órbita de un satélite, pero están limitados por el modelo de satélite a estudiar y por las truncaciones de las series dependientes de un pequeño parámetro.

En la segunda técnica, el modelo perturbado completo puede ser incluido en las ecuaciones del movimiento. Estas ecuaciones se resuelven por medio de métodos de integración numérica, entre los que destaca el de Cowell [1] como una de las técnicas de generación de órbitas más utilizada. El método de Cowell es un método numérico de integración directa de tipo multipaso que proporciona el vector de posición y el vector

velocidad en un instante t_{n+1} , suponiendo que éstos se conocen en el instante t_n , para un problema de valor inicial de segundo orden de la forma

$$\begin{aligned} y''(t) &= f(t, y(t), y'(t)), \quad t \in (t_0, T] \\ y(t_0) &= y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

En este trabajo, proponemos métodos adaptados de tipo Cowell que integren exactamente polinomios algebraicos y funciones trigonométricas. Esta adaptación se obtiene modificando todos los coeficientes de los clásicos métodos de Cowell de manera que dichos coeficientes sean funciones de un parámetro v que es el producto de la frecuencia principal del problema por el paso de integración. En la sección 2 recopilamos las principales líneas de trabajo actuales para mejorar los métodos de generación de órbitas. En la sección 3 comentamos algunas particularidades a cerca del tratamiento numérico de las ecuaciones del movimiento de un satélite artificial, resaltando la utilidad de las regularizaciones temporales y, en particular, de la transformación KS[8]. En la sección 4 realizamos una introducción a los métodos adaptados de tipo Cowell, estudiamos las propiedades de orden de consistencia y obtenemos fórmulas recurrentes que permiten calcular métodos adaptados de tipo Cowell de orden arbitrario.

Finalmente, efectuamos comparaciones numéricas de los métodos propuestos para una pareja de problemas modelo del tipo satélite del artificial.

2. MEJORAS DE LOS METODOS ORBITALES

Recientemente se han realizado numerosas investigaciones para mejorar la aproximación y eficiencia de los métodos de generación de órbitas. En general, el desarrollo de métodos óptimos para la predicción de órbitas consiste en una reformulación de las ecuaciones del movimiento en términos de un nuevo conjunto de variables tales que las ecuaciones resultantes sean más manejables para su resolución. Las principales líneas empleadas en estas reformulaciones son las siguientes:

i) Elección de un conjunto de variables apropiadas para la integración numérica del problema.

Los métodos de perturbaciones generales requieren el uso de variables canónicas que son más adecuadas para la utilización de técnicas de promedios, tales como el método de Von Zeipel[2], Krylov-Bogolyubov[4], Deprit[3], etc.; de forma similar, en los métodos de perturbaciones especiales, una selección apropiada de las variables puede mejorar la eficiencia del método numérico de integración. En general, la aproximación obtenida por los métodos de integración numérica aumenta en relación al orden del

método; pero la región de estabilidad numérica decrece, es decir, el error se propaga de forma exponencial. Entonces, las longitudes de los pasos de integración a utilizar quedan muy limitadas. Un cambio de las variables dependientes puede mejorar las características de la estabilidad del proceso. Si las ecuaciones del movimiento tienen un buen comportamiento, es decir, si éstas cambian ligeramente debido a pequeñas variaciones de los elementos (orbitales), obtendremos grandes regiones de estabilidad numérica en términos de la longitud del paso de integración, pudiéndose utilizar métodos numéricos de orden elevado para su resolución.

ii) Elección de la variable independiente.

Una integración numérica eficiente puede conseguirse ajustando la longitud del paso de integración para obtener una uniformización del error local sobre una órbita completa. Para órbitas cuasi-circulares, cuando se utiliza el tiempo como variable independiente, la integración con paso fijo produce uniformización del error local a lo largo de la órbita. En el caso de órbitas excéntricas, se necesita un mecanismo de uniformización tal que un pequeño paso en el tiempo sea utilizado en la región de grandes perturbaciones y un paso mayor en el tiempo en la región de pequeñas perturbaciones. Esto se puede conseguir implementando un algoritmo de integración a paso variable; sin embargo, los frecuentes cambios en el paso de integración son costosos y suelen introducir errores. Por esta razón, se suele utilizar una regulación analítica del paso, dando lugar a la utilización de otra variable independiente distinta del tiempo. La nueva variable independiente s , está relacionada con el tiempo mediante una expresión del tipo

$$ds = \frac{\sqrt{\mu}}{r^n} dt, \quad (2.1)$$

donde r es la magnitud del vector de posición del satélite y n es una constante de uniformización. El efecto de esta transformación es que pasos fijos en s dan lugar a pequeños pasos en t para r pequeño (cuando las perturbaciones son más acusadas), mientras que cuando r es mayor (las perturbaciones son menos acusadas), se obtienen pasos más largos en t .

La elección apropiada de la constante de uniformización n depende del conjunto de variables dependientes utilizado y de las fuentes del error local. La principal fuente de error local en la integración numérica está en el término J_2 del efecto gravitacional del achatamiento de la Tierra; una constante de uniformización adecuada para estas perturbaciones es $n = 3/2$. Las ecuaciones del movimiento en función de las variables Delaunay-Similar(DS) se uniformizan, para la perturbación debida a J_2 , mediante la

elección de una constante de uniformización $n = 2$. La formulación en variables de Kustaanheimo-Stiefel(KS) utiliza una constante de uniformización $n = 1$, que elimina las singularidades de colisión en las ecuaciones del movimiento.

Hacemos notar que, en el caso de órbitas altamente excéntricas, la uniformización del error local no se puede obtener mediante una regularización analítica del paso, puesto que, además de los efectos gravitacionales de la Tierra, también son importantes los efectos gravitacionales de otros planetas, como la Luna o el Sol. En estos casos se necesita un algoritmo numérico a paso variable.

iii) Elección de un conjunto de variables dependientes regulares.

Desde un punto de vista general, sería deseable el uso de un conjunto de variables dependientes bien definidas, o regulares, para todo el rango posible de condiciones orbitales. Por ejemplo, las variables de Kepler o las variables de Delaunay no están bien definidas para pequeñas excentricidades o inclinaciones pequeñas y próximas a 180 grados. Desafortunadamente, regularidad y canonicidad en las variables parecen ser dos requerimientos mutuamente exclusivos. Para aplicaciones de métodos de perturbaciones especiales, las variables de Kustaanheimo-Stiefel(KS) son completamente regulares.

iv) Elección de un conjunto de variables tales que las ecuaciones del movimiento no perturbado sean dinámicamente estables.

Una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales se dice dinámicamente estable, si pequeñas variaciones en los valores iniciales, producen una pequeña variación de la solución, para cualquier valor de la variable independiente mayor que cero. La estabilidad dinámica es una de las principales motivaciones para el empleo de la transformación KS. Esta característica de estabilidad dinámica es muy ventajosa cuando se pretende resolver el problema por medio de una integración numérica.

v) Elección de un conjunto de elementos tales que las ecuaciones del movimiento no tengan términos de corto periodo.

Como se ha mencionado anteriormente, la eficiencia de los métodos de integración numérica es óptima cuando el conjunto de variables a integrar varía poco. La eliminación de los términos de corto periodo en las ecuaciones del movimiento significa una variación suave de las variables dependientes y, entonces, es posible la utilización de pasos de integración de logitud significativamente mayor, con un ahorro importante en el costo computacional.

La elección de un método de generación de órbitas óptimo depende del tipo de órbita, de la aproximación requerida y de la eficiencia en costo computacional. En general, para órbitas cuasi-circulares no es necesaria una regulación analítica del paso de integración, pero, para órbitas con excentricidad mayor o igual que 0.1, una regulación analítica del paso de integración es conveniente siempre. Además, según aumenta la constante de uniformización, la longitud del paso temporal en el perigeo disminuye y en el apogeo aumenta.

3. SOBRE LA INTEGRACION NUMERICA

La integración numérica de las ecuaciones del movimiento de un satélite artificial terrestre se realiza bien con métodos de un paso de tipo Runge- Kutta o bien empleando métodos de tipo multipaso. Los métodos de tipo Runge-Kutta suelen dar buenas aproximaciones, pero, en general, son costosos desde el punto de vista computacional, puesto que necesitan utilizar un número elevado de etapas o evaluaciones de la función de fuerzas hasta completar la integración. En cambio, los métodos de tipo multipaso minimizan el número de evaluaciones de la función de fuerzas requerido para obtener una aproximación dada al final del intervalo de integración. En general, los métodos multipaso son más eficientes, presentando el único inconveniente de su iniciación, que puede llevarse a cabo con un método de tipo Runge-Kutta.

En el estudio de la clase de métodos multipaso se pueden considerar las siguientes cuestiones:

(1) Tipo de formulación: Estos métodos pueden formularse de dos formas diferentes:

i) Clase II, que integran el sistema diferencial de segundo orden directamente (p.e., el método de Cowell).

ii) Clase I, que integran el sistema doble de primer orden equivalente (p.e., el método de Adams).

Comparaciones numéricas entre métodos de Clase II y Clase I fueron realizadas por Moore and Beaudet[5] frente a distintos modelos test de satélite artificial, resultando más eficientes los métodos de Clase II.

(2) Tipo de algoritmo: Los métodos de tipo multipaso suelen actuar en la forma predictor-corrector de muy distintas maneras, como por ejemplo PE, P(EC)ⁿ, P(EC)ⁿE y PECE*, donde P = predictor, E = evaluación de la función de fuerzas, C = corrector,

E^* = seudo-evaluación de la función de fuerzas (evaluar solo una parte de dicha función, utilizando la parte restante ya evaluada en el paso anterior).

(3) Orden del método: La elección del orden del proceso numérico a utilizar tiene un doble sentido, ya que los métodos de orden elevado son más aproximados, pero son menos estables desde el punto de vista numérico.

(4) Control del paso de integración: Puesto que la dinámica orbital puede sufrir grandes variaciones durante una revolución (p.e., órbitas muy excéntricas), el algoritmo numérico debe poseer un mecanismo que permita variar la longitud del paso de integración según las necesidades requeridas. Esto puede conseguirse mediante un control del error local del método junto con un mecanismo de cambio de paso automático, o mediante transformaciones analíticas de la variable independiente (regularización temporal). En general, Velez and Dixon[6] han comprobado que una regularización temporal es más eficiente que un mecanismo numérico de variación del paso de integración, excepto en el caso en que la órbita sea altamente excéntrica y entonces las perturbaciones de los planetas del sistema solar sean acusadas, en cuyo caso es aconsejable una regularización temporal y un mecanismo de variación del paso de integración mediante un control del error local del método.

Regularización temporal.

Las ecuaciones del movimiento de un satélite, en formulación de Cowell, se pueden expresar mediante la fórmula general

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{P}(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}) \quad (3.1)$$

donde:

$\vec{r}$ es el vector posición en un sistema inercial cartesiano

μ es la constante gravitacional

$\vec{P}$ es el conjunto total de fuerzas perturbadoras

t es el tiempo físico y $r = |\vec{r}|$

Cuando se intenta calcular órbitas sensiblemente excéntricas o que conectan regiones con diferentes magnitudes de fuerzas gravitacionales, es muy aconsejable un cambio de variable independiente (regularización temporal) definida por la relación

$$\frac{dt}{ds} = \frac{r^n}{\sqrt{\mu}}, \quad 1 \leq n \leq 2 \quad (3.2)$$

Para $n = 1$ ó 2 en la integración del movimiento elíptico, esta nueva variable independiente coincide con la anomalía excéntrica ó la anomalía verdadera, respectivamente. El empleo de regularizaciones en la computación de trayectorias Tierra-Luna fué introducido por Szebehely et al.[7]; este autor indica que la regularización conlleva un incremento en aproximación y una reducción en costo computacional a pesar de tener que integrar una ecuación más.

Efectuando el cambio de variable independiente (3.2), las ecuaciones del movimiento (3.1) se transforman en

$$\ddot{\vec{r}}'' = n \left(\frac{\vec{r}' \vec{r}'}{r} \right) - r^{2n-3} \vec{r} + \frac{r^{2n}}{\mu} \vec{P}(t, \vec{r}, \frac{\sqrt{\mu}}{r^n} \vec{r}') \quad (3.3)$$

$$t'' = \frac{n r^{2n-1} \frac{dr}{dt}}{\mu} \quad (3.4)$$

La transformación KS.

Por medio de la transformación KS, las ecuaciones no lineales del movimiento del problema de los dos cuerpos se transforman en un conjunto de ecuaciones lineales, dinámicamente estables y similares a las ecuaciones de un oscilador armónico no perturbado. Esta transformación consiste en elegir un conjunto de variables dependientes regulares tales que las ecuaciones diferenciales resultantes también sean regulares, es decir, que no tengan singularidades. Esta regularización de las ecuaciones del movimiento requiere la extensión del espacio físico tridimensional a un espacio de dimensión cuatro, con lo que se incrementa en una unidad los grados de libertad del problema.

En particular, la transformación KS, en forma matricial, viene dada por

$$\vec{x} = L(\vec{u}) \vec{u} \quad (3.5)$$

acompañada por una regularización temporal con constante de uniformización $n = 1$,

$$dt = \frac{r}{\sqrt{\mu}} ds \quad (3.6)$$

donde

$$\vec{x} = (\vec{r}, 0)^T, \quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$$

y $L(u)$ es una matriz cuadrada de orden cuatro (para más detalles ver Stiefel & Scheifele [8]).

Si las fuerzas perturbadoras se descomponen en la forma

$$\vec{P} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} + \vec{\Phi}(t, \vec{r}, \vec{r}')$$

donde:

V representa un potencial

$\vec{\Phi}$ representa el resto de fuerzas perturbadoras no conservativas,

Aplicando la transformación (3.5) y la regularización (3.6), las ecuaciones del movimiento se pueden escribir en la forma

$$\vec{u}'' + \omega^2 \vec{u} = -\frac{r}{4} \frac{\partial V}{\partial \vec{u}} - \frac{1}{2} V \vec{u} + \frac{r}{2} L^T(\vec{u}) \vec{\Phi}(t, \vec{r}, \vec{r}') \quad (3.7)$$

$$t'' = \frac{2}{\sqrt{\mu}} (\vec{u}, \vec{u}') \quad (3.8)$$

$$\omega' = \frac{1}{4\omega} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} r - 2 L^T(\vec{u}) \vec{\Phi} \vec{u}' \right\} \quad (3.9)$$

donde 2ω representa la energía total del sistema y viene dada por

$$2\omega^2 = \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 - V = \frac{1 - 2|\vec{u}'|^2}{|\vec{u}|^2} - V$$

4. EL METODO DE COWELL ADAPTADO

En mecánica orbital y en el caso particular del satélite artificial (ver sección 3) aparecen problemas regidos por ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$\begin{cases} y'' \pm \omega^2 y = f(t, y, y'), & t \in [t_0, T], \quad \omega > 0 \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

donde ω es un parámetro característico del problema que puede ser conocido o estimado con bastante exactitud y tal que la fuerza perturbadora $f(t, y, y')$ es pequeña con respecto al término restante $\omega^2 y$. El tratamiento numérico del problema (4.1) puede conducirse aplicando el clásico método de Cowell[1]. Este método, como todos los métodos de coeficientes constantes, integran exactamente polinomios algebraicos hasta un cierto grado, es decir, sin error de truncación local. Sin embargo, debido a la naturaleza de los fenómenos que rigen las ecuaciones del movimiento de éste tipo de

problemas, parece conveniente considerar métodos que además de polinomios algebraicos integren también otro tipo de funciones. Además, los métodos de Cowell de orden mayor que dos tienen una deficiencia numérica: para un problema test que describe un movimiento circular uniforme, la solución numérica espirala hacia el interior. A este fenómeno se le conoce como *inestabilidad orbital*. Por lo tanto, parece conveniente la idea de adaptar métodos de orden elevado a la integración de fenómenos oscilantes. En este campo se encuentran los trabajos de Gautschi[9], Lyche[10], Bettis[11] y Jain et al.[12].

4.1 FORMULACION DE LOS METODOS Y CONDICIONES DE ORDEN

Siguiendo las directrices expuestas, se proponen métodos adaptados de tipo Cowell con los coeficientes dependiendo de un parámetro $v = \omega h$, en la forma

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_j^{(2)}(v) y_{n+j} &= h^2 \sum_{j=0}^k \beta_j^{(2)}(v) f(t_{n+j}, y_{n+j}, y'_{n+j}) \\ \sum_{j=0}^k \alpha_j^{(1)}(v) y'_{n+j} &= h \sum_{j=0}^k \beta_j^{(1)}(v) f(t_{n+j}, y_{n+j}, y'_{n+j}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde los coeficientes $\alpha_j^{(i)}(v)$ y $\beta_j^{(i)}(v)$ son funciones acotadas y continuas para todo $v \in [0, \Lambda]$ con Λ dado. Estos métodos vienen caracterizados mediante operadores lineales $L_h^{(1)}, L_h^{(2)}$, definidos por

$$L_h^{(i)}[y(t)] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j^{(i)}(v) y^{(2-i)}(t+jh) - h^2 \beta_j^{(i)}(v) \{y''(t+jh) + \omega^2 y(t+jh)\}] \quad (4.3)$$

$i = 1, 2$

de forma que anulen a los espacios lineales $\Pi_p(\omega)$ engendrados por las funciones modificadas de Stumpff $\phi_i(t, \omega)$, $i = 0, 1, \dots, p$, donde

$$\phi_0(t, \omega) = \begin{cases} \cos \omega t, & \omega \neq 0 \\ 1, & \omega = 0 \end{cases}, \quad \phi_{i+1}(t, \omega) = \int_0^t \phi_i(t, \omega) dt, \quad i \geq 0$$

Se observa inmediatamente que el espacio lineal $\Pi_p(\omega)$ engendrado por las funciones $\phi_i(t, \omega)$ puede expresarse en la forma

$$\Pi_p(\omega) = \begin{cases} \text{Span} \{1, t, t^2, \dots, t^{p-2}, \cos \omega t, \sin \omega t\}, & \text{si } \omega \neq 0 \\ \text{Span} \{1, t, t^2, \dots, t^{p-2}, t^{p-1}, t^p\}, & \text{si } \omega = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, en el caso $\omega = 0$, los esquemas lineales (2.2) coinciden con los clásicos métodos de Cowell de coeficientes constantes.

La conexión existente entre los espacios lineales $\Pi_p(\omega)$ y los operadores lineales $L_h^{(i)}$ ($i = 1, 2$) queda reflejada en los siguientes resultados cuya demostración puede verse en Palacios & Franco[13].

PROPOSICION 1: Los operadores lineales $L_h^{(i)}$ asociados al método adaptado (2.4) anulan el espacio $\Pi_p(\omega)$ si y solo si se verifican las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} D_0^{(2)} &= \sum_{j=0}^k \alpha_j^{(2)}(v) \phi_0(j, v) = 0, \quad D_0^{(1)} = \sum_{j=0}^k \beta_j^{(1)}(v) \phi'_0(j, v) = 0 \\ D_1^{(2)} &= \sum_{j=0}^k \alpha_j^{(2)}(v) \phi_1(j, v) = 0, \quad D_1^{(1)} = \sum_{j=0}^k \beta_j^{(1)}(v) \phi'_1(j, v) = 0 \\ D_i^{(2)} &= \sum_{j=0}^k [\{\alpha_j^{(2)}(v) - v^2 \beta_j^{(2)}(v)\} \phi_i(j, v) - \beta_j^{(2)}(v) \phi_{i-2}(j, v)] = 0 \\ D_i^{(1)} &= \sum_{j=0}^k [\alpha_j^{(1)}(v) \phi_{i-1}(j, v) - \beta_j^{(1)}(v) \{\phi_{i-2}(j, v) + v^2 \phi_i(j, v)\}] = 0 \\ i &= 2, 3, \dots, p \end{aligned} \quad (4.4)$$

PROPOSICION 2:

- i) Todo método adaptado de tipo Cowell que anula el espacio lineal $\Pi_{p+1}(\omega)$ tiene orden p , para todo ω real.
- ii) Las condiciones $D_i^{(r)} = 0$, $i = 0, 1, \dots, p+1$, $r = 1, 2$, son suficientes para alcanzar orden p , pero no necesarias, ya que bastaría con exigir.

$$D_0^{(r)} = 0(h^{p+2}), D_1^{(r)} = 0(h^{p+1}), \dots, D_{p+1}^{(r)} = 0(h), \quad r = 1, 2$$

Estos resultados proporcionan un camino para la obtención de métodos adaptados de tipo Cowell mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales dado por las condiciones (4.4). Además, el fenómeno de la inestabilidad orbital queda eliminado, ya que estos métodos integran exactamente las ecuaciones de osciladores armónicos no perturbados.

4.2 CONSTRUCCION DE METODOS ADAPTADOS DE TIPO COWELL

La obtención de métodos adaptados de tipo Cowell mediante la resolución del sistema lineal dado por las condiciones (4.4), puede resultar inabordable en la práctica cuando se requieren métodos de orden elevado. Este inconveniente puede ser evitado, al menos para ciertas familias de fórmulas, mediante la obtención de unas leyes de

recurrencia que permitan determinar los coeficientes del método utilizando cálculos directos

La solución general del problema de valor inicial (4.1) viene dada por

$$y(t) = C_1 \phi_0(t, \omega) + C_2 \omega \phi_1(t, \omega) + \int_{t_n}^t f(s) \phi_1(t-s, \omega) ds, \quad (4.5)$$

$$y'(t) = \omega^2 C_1 \phi_1(t, \omega) + \omega C_2 \phi_0(t, \omega) + \int_{t_n}^t f(s) \phi_0(t-s, \omega) ds$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, ω es la frecuencia principal del problema (4.1) y $f(s)$ representa a $f(s, y(s), y'(s))$ en un abuso de notación. Si sustituimos en (4.5) los valores de $t = t_{n+1}, t_n, t_{n-1}$ y eliminamos las constantes C_1 y C_2 de las ecuaciones resultantes, obtenemos las relaciones

$$y(t_{n+1}) - 2\phi_0(1, \nu) y(t_n) + y(t_{n-1}) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(s) + f(2t_n - s)] \phi_1(t_{n+1} - s, \omega) ds,$$

$$y'(t_{n+1}) - 2\phi_0(1, \nu) y'(t_n) + y'(t_{n-1}) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(s) - f(2t_n - s)] \phi_0(t_{n+1} - s, \omega) ds,$$

con $\nu = \omega h$. Estas ecuaciones serán la base fundamental para la construcción de *métodos adaptados de tipo Cowell* de orden elevado. Si aproximamos la función perturbadora $f(t, y(t), y'(t))$ por su polinomio de interpolación de Newton (en la forma de diferencias regresivas) en una red de puntos equidistantes $t_j = t_0 + jh$, ($0 \leq j \leq k$)

$$P(t) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-\tau}{j} \nabla^j f_k, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (4.6)$$

donde $\tau = (t - t_k)/h$, $\nabla^j f_k$ es la j -ésima diferencia regresiva y $f_k = f(t_k, y_k, y'_k)$, obtenemos los siguientes métodos adaptados

$$y_{n+1} - 2\phi_0(1, \nu) y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^k \sigma_{j,r}^{(0)}(\nu) \nabla^j f_{n+\tau} \quad (4.7)$$

$$y'_{n+1} - 2\phi_0(1, \nu) y'_n + y'_{n-1} = h \sum_{j=0}^k \sigma_{j,r}^{(1)}(\nu) \nabla^j f_{n+\tau}$$

donde denotamos el método explícito con $r = 0$ y con $r = 1$ cuando es implícito. Los coeficientes $\sigma_{j,r}^{(i)}$ vienen dados por las expresiones integrales:

Caso explícito

$$\sigma_{j,0}^{(2)} = (-1)^j \int_0^1 \left[\binom{-\tau}{j} + \binom{\tau}{j} \right] \phi_1(1-\tau, v) d\tau$$

$$\sigma_{j,0}^{(1)} = (-1)^j \int_0^1 \left[\binom{-\tau}{j} - \binom{\tau}{j} \right] \phi_0(1-\tau, v) d\tau$$

Caso implícito

$$\sigma_{j,1}^{(2)} = (-1)^j \int_{-1}^0 \left[\binom{-\tau}{j} + \binom{\tau+2}{j} \right] \phi_1(-\tau, v) d\tau$$

$$\sigma_{j,1}^{(1)} = (-1)^j \int_{-1}^0 \left[\binom{-\tau}{j} - \binom{\tau+2}{j} \right] \phi_0(-\tau, v) d\tau$$

Estos coeficientes se pueden calcular de una forma sencilla y recurrente mediante la técnica de obtener funciones generatrices $G_r^{(i)}(t)$ (ver Henrici[14]) que tienen por coeficientes a los $\sigma_{j,r}^{(i)}$ en sus desarrollos de Maclaurin.

Consideremos funciones generatrices de la forma

$$G_r^{(i)}(t, v) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{j,r}^{(i)}(v) t^j, \quad r = 0, 1, \quad i = 1, 2$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes $\sigma_{j,r}^{(i)}$ en las expresiones de las funciones generatrices $G_r^{(i)}(t)$, obtenemos

$$G_r^{(2)}(t, v) = \frac{2(1 - \phi_0(1, v))(1-t) + t^2}{[r + (1-r)(1-t)] [(\log(1-t))^2 + v^2]}, \quad r = 0, 1 \quad (4.8)$$

$$G_r^{(1)}(t, v) = - \frac{\{2(1 - \phi_0(1, v))(1-t) + t^2\} \log(1-t)}{[r + (1-r)(1-t)] [(\log(1-t))^2 + v^2]}, \quad r = 0, 1$$

Se observa inmediatamente que cuando el parámetro v tiende a cero, las funciones generatrices (4.8) se convierten en

$$G_0^{(2)}(t, 0) = \frac{t^2}{(1-t)(\log(1-t))^2}, \quad G_1^{(2)}(t, 0) = \frac{t^2}{(\log(1-t))^2},$$

coincidiendo con las funciones generatrices obtenidas por Henrici[14] para los clásicos métodos de tipo Cowell (caso explícito y caso implícito).

Si ahora consideramos los desarrollos de Taylor, en un entorno del punto $t = 0$, de las funciones generatrices (4.8), obtenemos las siguientes leyes de recurrencia para el cálculo de los coeficientes $\sigma_{j,r}^{(i)}$.

Caso explícito:

$$\sigma_{0,0}^{(2)} = \frac{2(1 - \phi_0(1, v))}{v^2}, \quad \sigma_{1,0}^{(2)} = 0$$

$$\sigma_{n+2,0}^{(2)} = \frac{1}{v^2} \left[1 - \sigma_{n,0}^{(2)} - \frac{2}{3} h_2 \sigma_{n-1,0}^{(2)} - \frac{2}{4} h_3 \sigma_{n-2,0}^{(2)} - \dots - \frac{2}{n+2} h_{n+1} \sigma_{0,0}^{(2)} \right], \quad n \geq 0$$

$$\sigma_{0,0}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{1,0}^{(1)} = \frac{2(1 - \phi_0(1, v))}{v^2}$$

$$\sigma_{n+2,0}^{(1)} = \frac{1}{v^2} \left[h_n + \frac{2(1 - \phi_0(1, v))}{n+2} - \sigma_{n,0}^{(1)} - \frac{2}{3} h_2 \sigma_{n-1,0}^{(1)} - \dots - \frac{2}{n+2} h_{n+1} \sigma_{0,0}^{(1)} \right]$$

$n \geq 0$

Caso implícito:

$$\sigma_{0,1}^{(2)} = \frac{2(1 - \phi_0(1, v))}{v^2}, \quad \sigma_{1,1}^{(2)} = -\sigma_{0,1}^{(2)}, \quad \sigma_{2,1}^{(2)} = \frac{1 - \sigma_{0,1}^{(2)}}{v^2}$$

$$\sigma_{n+2,1}^{(2)} = \frac{1}{v^2} \left[-\sigma_{n,1}^{(2)} - \frac{2}{3} h_2 \sigma_{n-1,1}^{(2)} - \frac{2}{4} h_3 \sigma_{n-2,1}^{(2)} - \dots - \frac{2}{n+2} h_{n+1} \sigma_{0,1}^{(2)} \right], \quad n \geq 1$$

$$\sigma_{0,1}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{1,1}^{(1)} = \frac{2(1 - \phi_0(1, v))}{v^2}, \quad \sigma_{2,1}^{(1)} = -\frac{\sigma_{1,1}^{(1)}}{2}$$

$$\sigma_{n+2,1}^{(1)} = \frac{1}{v^2} \left[\frac{1}{n} - \frac{2(1 - \phi_0(1, v))}{(n+2)(n+1)} - \sigma_{n,1}^{(1)} - \frac{2}{3} h_2 \sigma_{n-1,1}^{(1)} - \dots - \frac{2}{n+2} h_{n+1} \sigma_{0,1}^{(1)} \right]$$

$n \geq 1$

Una vez que hemos calculado los coeficientes $\sigma_{j,r}^{(i)}$, podemos expresar el método (4.7) en forma lagrangiana como

$$y_{n+1} - 2\phi_0(1, v)y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_{k,j,r}^{(2)}(v) f_{n+j}, \quad r = 0, 1 \quad (4.9)$$

$$y'_{n+1} - 2\phi_0(1, v)y'_n + y'_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_{k,j,r}^{(1)}(v) f_{n+j}, \quad r = 0, 1$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$\beta_{k,j,r}^{(i)}(v) = (-1)^j \sum_{s=0}^{k-j} \binom{j+s}{j} \sigma_{j+s,r}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad r = 0, 1 \quad (4.10)$$

Hacemos notar que es de gran importancia el hecho de haber obtenido una leyes de recurrencia sencillas para el cálculo de los coeficientes, ya que esto nos permitirá la construcción de métodos adaptados de tipo Cowell para cualquier orden de aproximación sin excesivo trabajo.

5. COMPARACIONES NUMERICAS

En orden a ilustrar la eficiencia de los métodos adaptados de tipo Cowell para el caso del movimiento de un satélite artificial terrestre, consideramos las ecuaciones generales del movimiento de un satélite kepleriano perturbado

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = \vec{P} \left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \quad (5.1)$$

Después de efectuar la transformación de Kustaanheimo-Stiefel (KS), las ecuaciones del movimiento se pueden escribir en la forma

$$\ddot{\vec{u}} + \omega^2 \vec{u} = \vec{\Phi}(s, \vec{u}, \dot{\vec{u}}), \quad dt = r ds \quad (5.2)$$

donde se ha supuesto que la función perturbadora Φ no contiene explícitamente el tiempo físico. Puesto que las ecuaciones del movimiento (5.2) responden al caso de un oscilador armónico perturbado, parece la formulación más adecuada para efectuar experimentos numéricos con los métodos adaptados de tipo Cowell.

Satélite artificial sin rozamiento atmosférico.

En un primer ejemplo, consideramos el movimiento de un satélite artificial con un potencial perturbador V , sin más influencias de otro tipo. Después de efectuar una regularización mediante la transformación KS, las ecuaciones del movimiento pueden expresarse como

$$\ddot{\vec{u}} + \omega^2 \vec{u} = -\frac{r}{4} \frac{\partial V}{\partial \vec{u}} - \frac{1}{2} V \vec{u} \quad (5.3)$$

donde

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2} \right) - \frac{V}{2} = \frac{h}{2}$$

y h simboliza la magnitud de la energía total del movimiento elíptico que será constante y positiva, lo que nos permitirá tomar a ω como el parámetro idóneo para el caso de los métodos adaptados.

En particular, consideraremos un movimiento perturbado por el término dominante del achatamiento terrestre, J_2 , que será integrado por medio de distintos métodos numéricos de tipo multipaso. En el espacio físico el potencial perturbador considerado es

$$V = -\frac{\epsilon}{r^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{z^2}{r^2} \right), \quad (5.4)$$

donde ϵ es el parámetro gravitacional normalizado

$$\epsilon = \frac{3 J_2}{2 r_p^2},$$

y donde r_p es la distancia al perigeo de la órbita osculatriz inicial no perturbada, expresada en términos del radio ecuatorial terrestre. Para este potencial conservativo, ω es una constante de la energía total del sistema. Entonces (5.3) representa un oscilador armónico perturbado con frecuencia constante ω y la perturbación no contiene al tiempo físico explícitamente.

Las condiciones iniciales se eligieron tomando como referencia una órbita Kepleriana osculatriz de inclinación i , considerando el perigeo normalizado a la unidad y situado en el nodo ascendente en el instante $t = 0$. En este instante, la órbita osculatriz es una elipse de excentricidad e . Una vez que se seleccionan la inclinación y la excentricidad, las condiciones iniciales quedan fijadas puesto que $a = (1 - e)^{-1}$, y

$$\omega_0^2 = \frac{1}{4a} - \frac{V_0}{2},$$

donde V_0 es el valor inicial del potencial perturbador.

En este ejemplo, la integración numérica se ha realizado con métodos multipaso de orden 8, el mismo orden en todos los métodos para que los errores de truncación locales de los métodos sean comparables. El valor de la constante ϵ fue seleccionado para una altitud aproximada del satélite de 500 Km. respecto a la superficie de la Tierra en el perigeo. La integración se realizó para inclinaciones de la órbita de $i = 0^\circ$, $i = 30^\circ$, para

las excentricidades $e = 0., 0.1, 0.3, 0.5$ y longitudes del paso de integración correspondiente a 60 pasos por revolución. Las soluciones numéricas obtenidas se compararon con una órbita de referencia que fue computada con el clásico método de Cowell de orden 12 y 180 pasos por revolución. El proceso de iniciación de los métodos multipaso se efectuó con un método Runge-Kutta, RK(7,8), tomando el orden 8 y longitud de paso de integración $1/4$ del paso considerado para el método multipaso en cada caso.

Los resultados numéricos se presentan en las TABLAS 1 y 2, donde los errores que aparecen representan la diferencia entre la solución numérica y la órbita de referencia considerada, en norma euclídea, después de 50 revoluciones del satélite.

Satélite artificial con rozamiento atmosférico.

En un segundo ejemplo, consideramos el movimiento de un satélite artificial perturbado con un potencial perturbador V igual al del ejemplo anterior y con un efecto debido al rozamiento atmosférico (drag). Con las mismas consideraciones que en el ejemplo anterior y después de efectuar una regularización mediante la transformación KS, las ecuaciones del movimiento pueden escribirse en la forma

$$\ddot{\vec{u}} + \omega^2 \vec{u} = -\frac{r}{4} \frac{\partial V}{\partial \vec{u}} - \frac{1}{2} V \vec{u} - \delta \left[r \sum_{i=1}^4 u_i^2 \right] \vec{u}' \quad (5.5)$$

El término que distingue las ecuaciones (5.5) de las ecuaciones (5.3) es el correspondiente al modelo de rozamiento atmosférico considerado, que responde a un modelo simplificado de Harris and Priester[15] y fue tomado de Moore[16]. Los parámetros son:

$$\delta = \rho C_D, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{1-r}{H}\right)$$

ρ es la densidad del aire

ρ_0 es la densidad del aire cuando $r=1$

H es una escala de densidad altura

C_D es el coeficiente efectivo del rozamiento atmosférico

El problema fue integrado con los siguientes valores:

$$i = 0^\circ, 30^\circ,$$

$$e = 0., 0.1, 0.3, 0.5,$$

$$H = 7.65931 \times 10^{-3} \text{ (correspondiente a una escala densidad-altura de 500 Km.)}$$

$$\rho_0 C_D = 6.0 \times 10^{-15}$$

Las condiciones iniciales se tomaron sobre una órbita osculatriz elíptica como en el ejemplo anterior. Notemos que en este caso la energía total del sistema no es constante y, por lo tanto, la frecuencia ω ya no será constante como ocurría en el ejemplo anterior. Llamamos ω_0 al valor de la frecuencia ω en el instante $t = 0$ y expresando las ecuaciones del movimiento en la forma

$$\ddot{\vec{u}} + \omega_0^2 \vec{u} = (\omega_0^2 - \omega^2) \vec{u} - \frac{r}{4} \frac{\partial V}{\partial \vec{u}} - \frac{1}{2} V \vec{u} - \delta \left[r \sum_{i=1}^4 u_i'^2 \right] \vec{u} \quad (5.6)$$

se obtienen las ecuaciones de un oscilador armónico perturbado con frecuencia constante ω_0 . Para conseguir esto, hemos introducido en el segundo miembro de (5.6) una perturbación del orden de $|\omega_0^2 - \omega^2|$, y como la variación de ω es del orden del parámetro δ , podemos decir que hemos introducido en la función perturbadora del oscilador armónico una perturbación de orden menor o igual a la que ya tenía, por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales no sufre ningún tipo de desvirtuación.

La integración del problema (5.6) se realizó con los mismos métodos (de orden 8) que en el ejemplo anterior, con la misma longitud de paso de integración y el mismo proceso para la obtención de la órbita de referencia con la que se van a comparar los resultados.

Los resultados numéricos vienen dados en las TABLAS 3 y 4, y los errores representan la diferencia entre la solución numérica y la órbita de referencia en norma euclídea, después de 50 revoluciones del satélite.

$i = 0^\circ$	Met. Adams	Met. Cowell	Cowell adapt.
$e = 0.$	0.532×10^{-9}	0.797×10^{-11}	0.267×10^{-14}
$e = 0.1$	0.342×10^{-9}	0.525×10^{-11}	0.315×10^{-14}
$e = 0.3$	0.162×10^{-9}	0.212×10^{-11}	0.439×10^{-14}
$e = 0.5$	0.337×10^{-10}	0.495×10^{-12}	0.809×10^{-14}

TABLA 1

CONCLUSIONES

A la vista de los resultados presentados en las TABLAS 1, 2, 3 y 4, todos ellos obtenidos con métodos del mismo orden, es decir, métodos comparables en términos de aproximación local, podemos establecer las siguientes conclusiones.

El método adaptado de Cowell que tiene propiedades de estabilidad orbital o periodicidad (integra exactamente osciladores armónicos no perturbados), da siempre mejores resultados que los métodos de Cowell y Adams que no tienen dichas propiedades.

Los métodos de Adams funcionan apreciablemente peor que los restantes métodos que están especialmente diseñados para ecuaciones diferenciales de segundo orden.

$i = 30^\circ$	Met. Adams	Met. Cowell	Cowell adapt.
$e = 0.$	0.549×10^{-8}	0.787×10^{-10}	0.341×10^{-14}
$e = 0.1$	0.411×10^{-8}	0.512×10^{-10}	0.171×10^{-13}
$e = 0.3$	0.197×10^{-8}	0.209×10^{-10}	0.235×10^{-13}
$e = 0.5$	0.462×10^{-9}	0.522×10^{-11}	0.742×10^{-13}

TABLA 2

El método adaptado de Cowell precisa un conocimiento a priori (exacto o bastante aproximado) de la frecuencia del problema, cosa que ocurre para el movimiento de satélites artificiales terrestres utilizando las variables de Kustaanheimo-Stiefel.

En el caso del método adaptado de Cowell, se observa en las tablas de resultados que cuando la excentricidad aumenta, la constante que aparece en los errores también aumenta, mientras que en los restantes métodos suele ocurrir lo contrario. Esto se debe a que al aumentar la excentricidad, la energía decrece hacia cero y se pierde precisión en el cálculo de los coeficientes del método, ya que el producto de la frecuencia ω por el paso de integración aparece dividiendo. Para los restantes métodos, como integran exactamente polinomios algebraicos y el problema no perturbado tiende a un movimiento parabólico ($u'' = 0$) cuando la energía tiende a cero, se produce una mejora en las aproximaciones.

$i = 0^\circ$	Met. Adams	Met. Cowell	Cowell adapt.
$e = 0.$	0.641×10^{-8}	0.711×10^{-10}	0.354×10^{-13}
$e = 0.1$	0.458×10^{-8}	0.509×10^{-10}	0.497×10^{-13}
$e = 0.3$	0.287×10^{-8}	0.315×10^{-10}	0.739×10^{-13}
$e = 0.5$	0.558×10^{-9}	0.697×10^{-11}	0.897×10^{-13}

TABLA 3

En general, se observa que el método adaptado de Cowell parece más adecuado que otros métodos de tipo similar cuando se considera la integración de movimientos orbitales correspondientes a satélites artificiales terrestres, utilizando variables de Kustaanheimo-Stiefel.

$i = 30^\circ$	Met. Adams	Met. Cowell	Cowell adapt.
$e = 0.$	0.632×10^{-7}	0.685×10^{-9}	0.341×10^{-13}
$e = 0.1$	0.501×10^{-7}	0.487×10^{-9}	0.171×10^{-13}
$e = 0.3$	0.289×10^{-7}	0.301×10^{-9}	0.235×10^{-13}
$e = 0.5$	0.817×10^{-8}	0.735×10^{-10}	0.742×10^{-13}

TABLA 4

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente sufragado por el Proyecto PB87-0637 de la CICYT.

REFERENCIAS

- [1] - Velez, C.E. et al. : "*Mathematical Theory of the GTDS* ", Goddar Space Flight Center, Report X-582-76-77, (1976)

- [2] - Brouwer, D. and Clemence, G.M. : "*Methods of Celestial Mechanics* ", Academic Press, New York, (1961)
- [3] - Deprit, A. : "*Canonical transformations depending on a small parameter* ", *Celes. Mech.*, 1 (1969) 12-30
- [4] - Bogoliubov, N.N. and Mytropolski, Y.A. : "*Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations* ", Hindustan Publishing Corporation, New Delhi, (1961)
- [5] - Moore, W. and Beaudet, P. : "*The testing of fixed-step numerical integration processes for the Cowell method of special perturbations* ", *Lecture Notes in Math.*, vol. 362, (1973)
- [6] - Velez, C.E. and Dixon, B. : "*On the choice of numerical integration methods in the computations of orbits* ", Goddar Space Flight Center, Report X-582-74-97, (1974)
- [7] - Szebehely, V. et al. : "*A group of earth-to-moon trajectories with consecutive collisions* ", *Celes. Mech. and Astrod.*, Academic Press, New York, (1964) p. 35
- [8] - Stiefel, E.L. and Scheifele, G. : "*Linear and regular celestial mechanic* ", Springer-Verlag, New York, (1971)
- [9] - Gautschi, W. : "*Numerical integration of ODE's based on trigonometric polynomials* ", *Numer. Math.*, 3 (1961) 381-397
- [10] - Lyche, T. : "*Chebyschevian multistep methods for ODE's* ", *Numer. Math.*, 19 (1972) 62-75
- [11] - Bettis, D.G. : "*Stabilization of finite difference methods of numerical integration* ", *Celes. Mech.*, 2 (1970) 282-295
- [12] - Jain, M.K., Jain, R.K. and Ananthakrishnaiah, U. : "*P-stable methods for periodic IVP of second order differential equations* ", *BIT* 19 (1979) 347-355
- [13] - Palacios, M. and Franco, J.M. : "*Adaptive Cowell methods for orbital motions* ", paper ASS 89-151 (1989) en prensa
- [14] - Henrici, P. : "*SDiscrete variable methods in ODE's* ", Wiley (1964)
- [15] - Harris, I. and Priester, W. : "*Atmospheric structure and its variations in the region from 120 to 80 km* ", *COSPAR International Reference Atmosphere*, (1965)
- [16] - Moore, P. : "*Orbitally stable multistep methods* ", *Celes. Mech.*, 17 (1978) 281-298

CORRECCION DE ORBITAS DE ESTRELLAS SOBLES VISUALES POR MEDIO DE SERIES DE FOURIER

R. CID PALACIOS

Departamento de Física Teórica. Facultad de Ciencias Matemáticas.
Ciudad Universitaria. 50009 ZARAGOZA (España).

In this work, using Fourier series $t \approx F(\theta)$, with coefficients K_0 , A_0 , A_n , B_n , a method for the correction of previous orbits of visual binary stars is developed. For this purpose and by means of the initial orbital elements $(a_0, e_0, T_0, P_0, \Omega_0, \omega_0, I_0)$ and residual differences $\Delta\theta$ in position angles, the computation of the increments ΔK_0 , ΔA_0 , ΔA_n , ΔB_n , is accomplished. In order to determine this increments, the method of least squares is applied, but this determination can be obtained by means another numerical methods. The essential advantages of our method consist in its iterative character and that the computation of the coefficients K_0 , A_0 , A_n , B_n , is not necessary.

1. INTRODUCCION.

El movimiento elíptico u *órbita relativa* de una estrella E con respecto a la estrella principal E_0 viene determinado por el radio vector o distancia $r(t) = \overline{E_0 E}$ y por el ángulo o anomalía verdadera $f = \widehat{E E_0 E}$, siendo E la posición de la estrella a su paso por el periastro.

La proyección cilíndrica de la *órbita relativa* sobre el plano tangente a la esfera celeste en E_0 , determina las posiciones E' de la estrella en su *órbita aparente*, definidas ordinariamente por medio de las distancias $\rho = \overline{E_0' E'}$ y de los ángulos de posición $\theta = \widehat{N E_0' E'}$, contados de 0° a 360° a partir del Norte (N), en las direcciones Norte-Este-Sur-Oeste.

Denotando como es habitual por $(a, e, T, \Omega, \omega, I)$ los elementos orbitales ordinarios de un movimiento elíptico (semieje mayor, excentricidad, época de paso por el periastro, ángulo del nodo, argumento del periastro e inclinación), a los que debemos añadir en este caso el periodo P o el movimiento medio $\mu = 2\pi/P$, las bien conocidas relaciones entre las variables (ρ, θ, t) y (r, f, t) , son

$$\begin{aligned}\rho \cos (\theta - \Omega) &= r \cos (\omega + f) \\ \rho \sin (\theta - \Omega) &= r \sin (\omega + f) \cos I\end{aligned}\quad (1.1)$$

de modo que, una vez determinados los elementos orbitales, para cada época t , la secuencia de fórmulas

$$\begin{aligned}M &= \mu(t - T) & \xi - e \sin \xi &= M \\ r &= a(1 - e \cos \xi) & \tan(f/2) &= (\sqrt{1+e}/\sqrt{1-e}) \tan(\xi/2)\end{aligned}\quad (1.2)$$

donde M y ξ designan las anomalías media y excéntrica, juntamente con las igualdades (1.1), permiten calcular las efemérides (ρ_c, θ_c, t) .

Como se sabe, el cálculo de la órbita de una estrella doble visual se basa en el conocimiento de un cierto número de observaciones (ρ_0, θ_0, t) , con ayuda de las cuales diferentes métodos analíticos o geométricos permiten el cálculo de los elementos orbitales; pero lo importante es que las diferencias observación-cálculo, $\Delta\rho = \rho_0 - \rho_c$, $\Delta\theta = \theta_0 - \theta_c$, sean minimizadas.

Sobre este proceso de minimización, que determina lo que conocemos como *corrección de órbitas*, conviene hacer algunas observaciones, ya sea sobre la cantidad a minimizar, los pesos de las observaciones, el sistema de variables a utilizar, la convergencia del proceso, los resultados del mismo, etc.

Para comprender mejor lo que sigue, recordemos que si q_v ($q_v = 1, 2, \dots, 7$) son, en general, elementos orbitales independientes y disponemos de n datos de observación a_k^0 ($k = 1, 2, \dots, n$) entonces se tendrán n relaciones $a_k = f(q_v, t_k)$, de manera que si damos valores previos q_v^0 a los elementos orbitales y efectuamos con éstos los correspondientes cálculos de efemérides, obtendremos unos valores calculados $a_k^c = f(q_v, t_k)$.

Desarrollando la función $f(q_v, t)$ en serie de Taylor, en el entorno de valores (q_v^0, t) , después de despreñar términos de segundo orden, resultan las n ecuaciones

$$\sum (\partial f / \partial q_v) \Delta q_v = a_k^0 - a_k^c \quad (1.3)$$

que deberán conducir a la minimización de las diferencias obser-

vación-cálculo ($a_k^0 - a_k^c$).

El criterio más utilizado en la minimización es el de mínimos cuadrados, que consiste en buscar la órbita para la cual la suma de cuadrados de las diferencias observación-cálculo es mínima. Otro criterio igualmente utilizable consiste en minimizar la suma de los valores absolutos de las diferencias observación-cálculo. Pero en todo caso, conviene recordar que la corrección de una órbita por éstos o cualesquiera otros métodos, no sólo han de minimizar las diferencias observación-cálculo, sino que dichas diferencias han de estar bien distribuidas, combinando alternativamente signos positivos y negativos.

Con respecto a los algoritmos empleados para la minimización, se suelen distinguir aquellos que sólo utilizan los valores de la función a minimizar, de los que utilizan, además, las derivadas primeras, segundas, etc., o una combinación de ellas.

En relación con el sistema de variables utilizado, señalemos el método de Comstock (1918), que emplea el conjunto de elementos orbitales ($a, e, T, \Omega, \omega, I, \mu$) para minimizar las diferencias $\Delta\rho = \rho_0 - \rho_c$ y $\Delta\theta = \theta_0 - \theta_c$, o la variante de Hirst (1944), que solamente minimiza las diferencias en ángulos de posición.

En el método de Thiele (1883) la corrección se aplica a las diferencias $\Delta x = x_0 - x_c$, $\Delta y = y_0 - y_c$, en coordenadas cartesianas, utilizando los elementos orbitales ordinarios (e, T, μ) y las constantes de Innes (1926, 1932) (A, B, F, G) que más adelante definiremos.

En el método desarrollado por C. Longás (1982) para distancias y ángulos de posición, se emplean las variables de Delaunay (L, G, H, g, h) juntamente con los elementos orbitales (T, μ).

Entre este conjunto de métodos de corrección, que no pretende ser exhaustivo, citemos finalmente el método de Klinkerfueß (1855, 1858, 1912) que consiste en comparar las tres razones dobles independientes de seis ángulos de posición observados, con las correspondientes calculadas por efemérides, para corregir los elementos orbitales (e, T, P).

En el presente artículo se presenta una versión modificada del cálculo y corrección de órbitas de pares visuales por medio de desarrollos en serie de Fourier, como continuación a trabajos

anteriores (R. Cid, 1950 y 1952), dado que la introducción del cálculo con ordenadores ha permitido mejorar la resolución de estos problemas a través de un planteamiento más adecuado.

Como veremos, en nuestro método de corrección solamente intervienen las diferencias observación-cálculo en ángulos de posición, abundando en el criterio de que estas observaciones suelen ser de una precisión superior a las observaciones de distancias y permiten, por tanto, detectar mejor la existencia de perturbaciones originadas por un tercer cuerpo.

La principal ventaja del método reside en el hecho de que una órbita previa, calculada por cualquier método, puede ser corregida sin tener que calcular los coeficientes del correspondiente desarrollo en serie de Fourier, limitando los cálculos a la obtención de las correcciones de dichos coeficientes, de las que pueden deducirse las correcciones que deben aplicarse a los elementos orbitales previos. El método es evidentemente iterativo.

2. DESARROLLOS EN SERIE DE FOURIER.

En el movimiento elíptico relativo es bien conocido el desarrollo en serie

$$r^2 = a^2 \cos \phi (1 + \sum c_n \cos n\phi) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

donde se ha empleado la notación $e = \sin \phi$ y los coeficientes c_n vienen dados por la igualdad

$$c_n = 2(-1)^n (1 + n \cos \phi) \tan^n (\phi/2) \quad (2.2)$$

Además, si tenemos en cuenta la ley de las áreas

$$r^2 df = C dt = \mu a^2 \cos \phi dt \quad (2.3)$$

la integración del desarrollo (2.1) nos da

$$M = \mu(t-T) = f + \sum \frac{c_n}{n} \sin n\phi \quad (2.4)$$

Paralelamente, en la órbita aparente se cumple también la ley de las áreas en la forma

$$\rho^2 d\theta = C' dt = C \cos I dt \quad (2.5)$$

por lo cual las fórmulas (2.3) y (2.5) nos permiten establecer la siguiente relación

$$df/d\theta = \rho^2/r^2 \cos^2 I \quad (2.6)$$

Por otra parte, de las ecuaciones (1.1) se deduce fácilmente la igualdad

$$\rho = r [\cos(\theta - \Omega) \cos(\omega + f) + \sin(\theta - \Omega) \sin(\omega + f) \cos I] \quad (2.7)$$

que nos demuestra la continuidad y el carácter periódico de la función ρ .

Analogamente, si derivamos las ecuaciones (1.1) con respecto a θ , y tenemos en cuenta la relación (2.6), resulta

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho^2}{r^2 \cos^2 I} \left[\frac{\rho}{r} \frac{dr}{df} + r \{ \sin(\theta - \Omega) \cos(\omega + f) \cos I - \cos(\theta - \Omega) \sin(\omega + f) \} \right] \quad (2.8)$$

de donde se deduce que, excluidas las colisiones ($r = 0$) y las inclinaciones $I = 90^\circ$, la derivada $d\rho/d\theta$ es también una función continua de periodo 2π .

En consecuencia, la función $2\rho(d\rho/d\theta)$ admite un desarrollo en serie de Fourier

$$2\rho(d\rho/d\theta) = \alpha_0 + \sum \alpha_n \cos n\theta - \sum \beta_n \sin n\theta \quad (2.9)$$

uniformemente convergente, con coeficientes α_n , β_n , acotados y con $\alpha_0 = 0$, puesto que

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\rho d\rho = \left[\rho^2 \right]_0^{2\pi} = 0$$

Integrando (2.9) con respecto a θ , obtendremos un desarrollo uniformemente convergente del tipo

$$\rho^2 = a_0 + \sum a_n \sin n\theta + \sum b_n \cos n\theta \quad (2.10)$$

con coeficientes $a_n = \alpha_n/n$, $b_n = -\beta_n/n$.

Finalmente, si aplicamos a este desarrollo la ley de las áreas (2.5) e integramos, en el intervalo $(0, \theta)$, a cuyos valo-

res suponemos que corresponden los instantes (t_0, t) , tendremos

$$C'(t-t_0) = a_0 \theta + \sum \frac{a_n}{n} (1 - \cos n\theta) + \sum \frac{b_n}{n} \sin n\theta \quad (2.11)$$

Ahora bien, haciendo

$$K_0 = t_0 + \sum \frac{a_n}{C'n} , \quad A_n = \frac{a_n}{C'} , \quad B_n = \frac{b_n}{C'} \quad (2.12)$$

el desarrollo anterior se puede escribir en la forma

$$t = K_0 + A_0 \theta - \sum \frac{A_n}{n} \cos n\theta + \sum \frac{B_n}{n} \sin n\theta \quad (2.13)$$

siendo

$$A_0 = \frac{a_0}{C'} , \quad \frac{A_n}{n} = \frac{a_n}{C'n} = \frac{\alpha_n}{C'n^2} , \quad \frac{B_n}{n} = \frac{b_n}{C'n} = - \frac{\beta_n}{C'n^2}$$

Por consiguiente, si H es una cota superior de $|\alpha_n|/C'$ y $|\beta_n|/C'$, las series $\sum (A_n/n)$, $\sum (B_n/n)$, son mayoradas por la serie $\sum (H/n^2)$, que es una serie armónica de segundo grado y por tanto su convergencia, así como la de cualquier serie parcial, está asegurada.

Finalmente, si tenemos presente el carácter periódico del desarrollo (2.13), será

$$t+P = K_0 + A_0 (\theta+2\pi) - \sum \frac{A_n}{n} \cos n\theta + \sum \frac{B_n}{n} \sin n\theta \quad (2.14)$$

y restando (2.14) y (2.13), tendremos

$$P = 2\pi A_0 \quad (2.15)$$

Asimismo, con objeto de evitar innecesarias repeticiones, utilizaremos la siguiente notación de índices

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots , \quad i = 1, 3, 5, \dots , \quad p = 2, 4, 6, \dots$$

y de funciones

$$F_i(\theta) = - \sum \frac{A_i}{i} \cos i\theta + \sum \frac{B_i}{i} \sin i\theta \quad (2.16)$$

$$F_p(\theta) = A_0 \theta - \sum \frac{A_p}{p} \cos p\theta + \sum \frac{B_p}{p} \sin p\theta$$

con lo cual el desarrollo (2.13) se puede escribir así

$$t(\theta) = K_0 + F_i(\theta) + F_p(\theta) = K_0 + F_n(\theta) \quad (2.17)$$

Según esto, dadas dos épocas $t(\theta)$ y $t(\theta+\Pi)$, se comprueban fácilmente las igualdades

$$F_i(\theta+\Pi) = -F_i(\theta) \quad (2.18)$$

$$F_p(\theta+\Pi) = A_0\Pi + F_p(\theta)$$

y por tanto

$$t(\theta+\Pi) - t(\theta) = A_0\Pi - 2F_i(\theta) = \frac{P}{2} - 2F_i(\theta) \quad (2.19)$$

$$t(\theta+\Pi) + t(\theta) = 2K_0 + A_0\Pi + 2F_p(\theta) = 2K_0 + \frac{P}{2} + 2F_p(\theta)$$

Ahora bien, cada anomalía verdadera f_k de la órbita relativa determina una época $t(f_k)$ que coincide con otra $t(\theta_k)$ de la órbita aparente, de tal manera que la época $t(f_k+\Pi)$ también coincide con $t(\theta_k+\Pi)$, debido a la forma en que los radios vectores de la órbita relativa son proyectados en la aparente. Se tienen, pues, las igualdades

$$t(f_k) = t(\theta_k) \quad , \quad t(f_k+\Pi) = t(\theta_k+\Pi) \quad (2.20)$$

Entonces, designando por $M(f_k)$ y $M(f_k+\Pi)$ las anomalías medias de la órbita relativa que corresponden a dichas épocas, se verificarán las igualdades

$$M(f_k+\Pi) - M(f_k) = \mu[t(\theta_k+\Pi) - t(\theta_k)] = \Pi - 2\mu F_i(\theta_k) \quad (2.21)$$

$$M(f_k+\Pi) + M(f_k) = \Pi + 2\mu[K_0 - T + F_p(\theta_k)]$$

de acuerdo con las fórmulas (2.19).

3. DETERMINACION DE ELEMENTOS ORBITALES.

Aunque el método ha sido diseñado de manera especial para la corrección de órbitas, conviene que veamos las ecuaciones que se pueden emplear para la determinación de los elementos orbitales, a partir de los coeficientes K_0 , A_0 , A_n , B_n , de la serie de Fourier (2.13).

Periodo

Ya hemos visto que la igualdad (2.15), esto es

$$P = 2\pi A_0 \quad (3.1)$$

permite determinar el periodo a partir del coeficiente A_0 .

Epoca de paso por el periastro.

Si θ_0 y $\theta_0 + \pi$ son los ángulos de posición correspondientes a las épocas de paso por el periastro y apoastro, se comprueba que $M(\theta_0) = 0$ y $M(\theta_0 + \pi) = \pi$, por consiguiente las fórmulas (2.21) nos demuestran las relaciones

$$F_i(\theta_0) = 0 \quad (3.2)$$

$$F_p(\theta_0) = -K_0 + T$$

que pueden servir para la determinación de la época T de paso por el periastro, calculando el ángulo θ_0 por medio de la primera igualdad y la época T por la segunda.

Excentricidad.

Designando por θ_1 el ángulo de posición correspondiente a la anomalía verdadera $f_1 = \pi/2$, y poniendo $e = \cos \phi$, desde la fórmula

$$\text{tag}(f/2) = (\sqrt{1+e}/\sqrt{1-e}) \text{tag}(\xi/2) \quad (3.3)$$

que ya figura en (1.2), se obtienen las anomalías medias

$$M(f_1) = \phi - e \sin \phi$$

$$M(f_1 + \pi) = 2\pi - \phi + e \sin \phi$$

de donde

$$M(f_1 + \pi) - M(f_1) = 2\pi - 2\phi + 2e \sin \phi$$

$$M(f_1 + \pi) + M(f_1) = 2\pi$$

y por aplicación de las fórmulas (2.21) resultan las igualdades

$$F_i(\theta_1) = -\frac{P}{4} + \frac{1}{\mu}(\phi - e \sin \phi) \quad (3.4)$$

$$F_p(\theta_1) = \frac{P}{4} - K_0 + T$$

que pueden ser empleadas para obtener la excentricidad, calculando el ángulo θ_1 por la segunda y la excentricidad por aproximación de la primera.

Cálculo de los elementos Ω , ω , I .

Las constantes de Innes, para $a = 1$, vienen dadas por las igualdades

$$\begin{aligned} A &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos I \\ B &= \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos I \\ F &= -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos I \\ G &= -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos I \end{aligned} \quad (3.5)$$

y pueden ser aplicadas a las ecuaciones (1.1) para obtener fácilmente las siguientes

$$\begin{aligned} \rho \sin \theta &= r(B \cos f + G \sin f) \\ \rho \cos \theta &= r(A \cos f + F \sin f) \end{aligned} \quad (3.6)$$

de donde

$$\tan \theta = \frac{B \cos f + G \sin f}{A \cos f + F \sin f} \quad (3.7)$$

Siguiendo las líneas de nuestro artículo (R. Cid, 1960), esta relación, para tres pares de valores (f_0, θ_0) , (f_1, θ_1) y (f_2, θ_2) , conduce a un sistema que sirve para obtener los cocientes A/F , B/F , G/F (o cualesquiera otros), por medio de los cuales se pueden determinar los elementos Ω , ω , I , a través de las conocidas igualdades

$$\begin{aligned} \tan(\Omega + \omega) &= \{(B/F) - 1\} / \{(A/F) + (G/F)\} \\ \tan(\Omega - \omega) &= \{(B/F) + 1\} / \{(A/F) - (G/F)\} \\ \tan^2(I/2) &= \{(A/F) - (G/F)\} \cos(\Omega + \omega) / \{(A/F) + (G/F)\} \cos(\Omega - \omega) \\ &= \{(B/F) + 1\} \sin(\Omega + \omega) / \{(B/F) - 1\} \sin(\Omega - \omega) \end{aligned} \quad (3.8)$$

De hecho, según cálculos anteriores podemos disponer de los pares $(0, \theta_0)$, $(\pi/2, \theta_1)$, a los que podemos añadir un tercero

$(\pi/4, \theta_2)$, cuyo cálculo implica la resolución de alguna de las ecuaciones

$$F_i(\theta_2) = -\frac{1}{u} \left[\frac{e\sqrt{2(1-e^2)}}{2-e^2} + \frac{1}{2} \arccos \left(3 - \frac{4}{2-e^2} \right) \right] \quad (3.9)$$

$$F_p(\theta_2) = -K_o + T + \frac{1}{u} \left[\frac{e^2\sqrt{1-e^2}}{2-e^2} + \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{e^2}{2-e^2} \right) \right]$$

Aplicando dichos pares de valores a la ecuación (3.7), obtenemos el sistema

$$\frac{B}{A} = \tan \theta_o, \quad \frac{G}{F} = \tan \theta_1, \quad \frac{B+G}{A+F} = \tan \theta_2 \quad (3.10)$$

del que se deducen las igualdades

$$\frac{A}{F} = k = \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{\tan \theta_o - \tan \theta_2}, \quad \frac{B}{F} = k \tan \theta_o, \quad \frac{G}{F} = \tan \theta_1 \quad (3.11)$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} \tan(\Omega+\omega) &= \{k \tan \theta_o - 1\} / \{k + \tan \theta_1\} \\ \tan(\Omega-\omega) &= \{k \tan \theta_o + 1\} / \{k - \tan \theta_1\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\tan^2(I/2) = \frac{\{k - \tan \theta_1\} \cos(\Omega+\omega)}{\{k + \tan \theta_1\} \cos(\Omega-\omega)} = \frac{\{k \tan \theta_o + 1\} \sin(\Omega+\omega)}{\{k \tan \theta_o - 1\} \sin(\Omega-\omega)}$$

Esta última ecuación sirve habitualmente para discriminar el verdadero cuadrante de los argumentos $(\Omega+\omega)$ y $(\Omega-\omega)$, puesto que su segundo miembro debe ser siempre positivo.

4. CORRECCION DE ORBITAS.

Como ya quedó indicado en la introducción, nuestro método, basado en desarrollos en serie de Fourier, tiene su principal ventaja en el hecho de que no resulta necesario calcular los coeficientes $a_0, a_n, b_n, K_o, A_0, A_n, B_n$, de los desarrollos dados por (2.10) y (2.13), que han servido de fundamento a toda la formulación anterior.

En efecto, dado un conjunto de m observaciones (ρ, θ, t) de un par visual, consideremos una órbita de elementos $(a_o, e_o, T_o, P_o, \Omega_o, \omega_o, I_o)$ (*) calculada previamente por cualquier método

(*) a_o designa el semieje mayor de la órbita calculada previamente y no debe ser confundido con el coeficiente a_0 del desarrollo (2.10).

y sean (ρ_c, θ_c, t) las distancias y ángulos de posición correspondientes a una época cualquiera t , obtenidos por un cálculo de efemérides (fórmulas 1.1 y 1.2) con los elementos $(a_o, e_o, T_o, P_o, \Omega_o, \omega_o, I_o)$.

De la misma forma podemos calcular las constantes del movimiento $C'_o = \mu_o a_o^2 \sqrt{1-e_o^2} \cos I_o$, $A_o = P_o/2\pi$, etc., así como las constantes A, B, F, G , por las igualdades (3.5) y los ángulos $\theta_o, \theta_1, \theta_2$, por las fórmulas (3.10).

Una vez finalizados los cálculos anteriores dispondremos de las m diferencias observación-cálculo $(\theta_o - \theta_c)$ y de las distancias ρ_c .

Ahora bien, dado que las observaciones se suponen exentas de errores en las medidas de tiempo, y por tanto $\Delta t = 0$, podemos diferenciar la fórmula (2.13), resultando

$$\Delta K_o + \theta_c \Delta A_o - \sum \frac{\Delta A_n}{n} \cos n\theta_c + \sum \frac{\Delta B_n}{n} \sin n\theta_c + (\theta_o - \theta_c) [A_o + \sum A_n \sin n\theta_c + \sum B_n \cos n\theta_c] = 0$$

o bien

$$\Delta K_o + \theta_c \Delta A_o - \sum \frac{\Delta A_n}{n} \cos n\theta_c + \sum \frac{\Delta B_n}{n} \sin n\theta_c = - \frac{\rho_c^2 (\theta_o - \theta_c)}{C'_o} \quad (4.1)$$

y esta fórmula permite el cálculo de los incrementos $\Delta K_o, \Delta A_o, \Delta A_n, \Delta B_n$, por el método de mínimos cuadrados.

Basta, en efecto, considerar el sistema lineal de coeficientes $1, \theta_c, -\cos n\theta_c, \sin n\theta_c$, y de términos independientes $-\rho_c^2 (\theta_o - \theta_c) / C'_o$, y resolverlo con respecto a los mencionados incrementos en cualquiera de las formas habituales.

Veamos ahora como pueden ser calculados los incrementos $\Delta P, \Delta T, \Delta e, \Delta \Omega, \Delta \omega, \Delta I$, que sumados a los elementos previos $(P_o, T_o, e_o, \Omega_o, \omega_o, I_o)$ nos proporcionan nuevos elementos orbitales $P = P_o + \Delta P$, $T = T_o + \Delta T$, $e = e_o + \Delta e$, $\Omega = \Omega_o + \Delta \Omega$, $\omega = \omega_o + \Delta \omega$, $I = I_o + \Delta I$.

Para ello, comenzaremos estableciendo algunas fórmulas y notaciones que simplifican nuestra exposición posterior.

1°.- En lo sucesivo y cuando convenga a nuestros propósitos, emplearemos también las siguientes notaciones:

$$F(C_n, \theta) = A_0 \theta - \sum \frac{A_n}{n} \cos n\theta + \sum \frac{B_n}{n} \operatorname{sen} n\theta \quad (4.2)$$

$$F(\Delta C_n, \theta) = \theta \Delta A_0 - \sum \frac{\Delta A_n}{n} \cos n\theta + \sum \frac{\Delta B_n}{n} \operatorname{sen} n\theta$$

siendo C_n uno cualquiera de los coeficientes A_0, A_n, B_n .

2°.- Si θ_α designa un ángulo de posición constante, al que corresponde la época t_α , y ponemos $\theta = \theta_\alpha + \Delta\theta_\alpha$, $t = t_\alpha + \Delta t_\alpha$, siendo (θ, t) un ángulo de posición y una época próximas a las anteriores $(\theta_\alpha, t_\alpha)$, tendremos

$$F(C_n, \theta) = F(C_n, \theta_\alpha) + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_\alpha \Delta\theta_\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}\right)_\alpha \Delta\theta_\alpha^2 + \dots$$

pero

$$(\partial F / \partial \theta)_\alpha = (\rho^2 / C')_\alpha, \quad \frac{1}{2} (\partial^2 F / \partial \theta^2)_\alpha = (\rho d\rho / d\theta)_\alpha, \dots$$

por tanto, si tenemos en cuenta la ley de las áreas, resulta

$$\begin{aligned} F(C_n, \theta) &= F(C_n, \theta_\alpha) + (\rho^2 \Delta\theta_\alpha / C')_\alpha + \dots = \\ &= F(C_n, \theta_\alpha) + t - t_\alpha + \dots \end{aligned}$$

y sumando a ambos miembros el coeficiente K_0 y eliminando el término común $t = K_0 + F(C_n, \theta)$, obtenemos

$$t_\alpha = K_0 + F(C_n, \theta_\alpha) + \dots \quad (4.3)$$

En particular, para $t_\alpha = T$, $\theta_\alpha = \theta_0$, obtenemos el verdadero significado de la constante K_0 , es decir

$$K_0 = T - F(C_n, \theta_0)$$

En este caso particular, con $f_0 = 0$ y $\tan \theta_0 = B/A$, según las fórmulas (2.7), (2.8) y (3.10), se obtiene sin dificultad

$$(\rho \Delta \rho / \Delta \theta)_0 \Delta \theta_0^2 = \{(FA + GB) / \cos^2 I\} \Delta T \Delta \theta_0$$

3°.- Incrementando la igualdad (4.3), resulta

$$\Delta t_\alpha = K_0 + F(\Delta C_n, \theta_\alpha) + \dots$$

4°.- Por otra parte, de la ecuación de Kepler

$$\mu(t_\alpha - T) = M_\alpha = E_\alpha - e \operatorname{sen} E_\alpha$$

deducimos las igualdades

$$t_\alpha = K_0 + F(C_n, \theta_\alpha) = T + \frac{1}{\mu}(E_\alpha - e \operatorname{sen} E_\alpha)$$

de las cuales la última es equivalente a la suma de las ecuaciones (3.4) para $t_\alpha = t_1$ y $\theta_\alpha = \theta_1$, y a la suma de las ecuaciones (3.9) para $t_\alpha = t_2$ y $\theta_\alpha = \theta_2$.

Concretamente, se tiene

$$M_1(\pi/2) = \operatorname{arccos} e - e\sqrt{1-e^2}$$

$$M_2(\pi/4) = \operatorname{arccos} \frac{e + \sqrt{2(1-e^2)}}{2-e^2} - \frac{e(\sqrt{2}-e)\sqrt{1-e^2}}{2-e^2}$$

Finalmente, incrementando estas últimas ecuaciones llegamos a las siguientes

$$(\rho^2 \Delta \theta / C')_\alpha = \Delta t_\alpha = \Delta T + \Delta \left[\frac{1}{\mu}(E_\alpha - e \operatorname{sen} E_\alpha) \right] \quad (4.4)$$

$$\Delta K_0 + F(\Delta C_n, \theta_\alpha) = \Delta T + \Delta \left[\frac{1}{\mu}(E_\alpha - e \operatorname{sen} E_\alpha) \right] \quad (4.5)$$

que utilizaremos a continuación para la determinación de los nuevos elementos orbitales.

Corrección de periodo

Incrementando la fórmula (2.15), se obtiene

$$P = P_0 + \Delta P = P_0 + 2\pi \Delta A_0 \quad (4.6)$$

Corrección de la época de paso por el periastro.

Aplicando la fórmula (4.4) al caso $t_\alpha = T$, $\theta_\alpha = \theta_0$, tendremos

$$T = T_0 + \Delta T = T_0 + \Delta K_0 + F(\Delta C_n, \theta_0) \quad (4.7)$$

Corrección de la excentricidad.

La fórmula (4.5) para $t_\alpha = t_1$, $\theta_\alpha = \theta_1$, con $\operatorname{cos} E_1 = e$,

nos da

$$\Delta K_0 + F(\Delta C_n, \theta_1) = \Delta T + \frac{\Delta P}{2\Pi} (\text{arccose} - e\sqrt{1-e^2}) - \frac{P}{\Pi} \sqrt{1-e^2} \Delta e$$

puesto que

$$\Delta(E_1 - e \text{sen } E_1) = -2\sqrt{1-e^2} \Delta e$$

En consecuencia

$$e = e_0 + \Delta e = e_0 + (\Pi/P\sqrt{1-e_0^2}) \{ \Delta K_0 + F(\Delta C_n, \theta_1) - \Delta T - (\Delta P/2\Pi) (\text{arccose} - e_0\sqrt{1-e_0^2}) \} \quad (4.8)$$

Corrección de los elementos Ω, ω, I .

Si hacemos

$$u_0 = \text{tag } \theta_0 = \frac{B}{A}, \quad u_1 = \text{tag } \theta_1 = \frac{G}{F}, \quad u_2 = \text{tag } \theta_2 = \frac{B+G}{A+F} \quad (4.9)$$

tendremos

$$\Delta u_0 = (1+u_0^2) \Delta \theta_0, \quad \Delta u_1 = (1+u_1^2) \Delta \theta_1, \quad \Delta u_2 = (1+u_2^2) \Delta \theta_2 \quad (4.10)$$

y por tanto

$$\Delta k = \Delta \left(\frac{u_2 - u_1}{u_0 - u_2} \right) = \left[(1+k) \Delta u_2 - \Delta u_1 - k \Delta u_0 \right] / (u_0 - u_2) \quad (4.11)$$

Analogamente, diferenciando logarítmicamente las fórmulas (3.12), se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} \Delta \Omega + \Delta \omega &= \frac{\text{sen } 2(\Omega + \omega)}{2} \left[\frac{1}{k u_0 - 1} (u_0 \Delta k + k \Delta u_0) - \frac{1}{k + u_1} (\Delta k + \Delta u_1) \right] \\ \Delta \Omega - \Delta \omega &= \frac{\text{sen } 2(\Omega - \omega)}{2} \left[\frac{1}{k u_0 + 1} (u_0 \Delta k + k \Delta u_0) - \frac{1}{k - u_1} (\Delta k - \Delta u_1) \right] \quad (4.12) \\ \Delta I &= \text{sen } I \left[\frac{(u_1 \Delta k - k \Delta u_1)}{k^2 - u_1^2} - \frac{(\Delta \Omega + \Delta \omega)}{2} \text{tag } (\Omega + \omega) + \frac{(\Delta \Omega - \Delta \omega)}{2} \text{tag } (\Omega - \omega) \right] \end{aligned}$$

Para el cálculo de los incrementos $\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \Delta k$, basta aplicar la fórmula (4.4) teniendo en cuenta que

$$\rho_\alpha^2 = r_\alpha^2 (1 + \text{tag}^2 \theta_\alpha) (\Lambda \cos f_\alpha + F \text{sen } f_\alpha)^2$$

Entonces, poniendo $h = \mu_0 \cos I_0 / (1 - e_0^2)^{3/2}$, tenemos

$$(\rho^2 \Delta \theta / C')_{\alpha} = h \Delta u_{\alpha} (A \cos f_{\alpha} + F \sin f_{\alpha})^2 / (1 + e \cos f_{\alpha})^2$$

y finalmente

$$\Delta u_{\alpha} = \{\Delta K_0 + F(\Delta C_n, \theta_{\alpha})\} (1 + e \cos f_{\alpha})^2 / h (A \cos f_{\alpha} + F \sin f_{\alpha})^2$$

a) Para $f_{\alpha} = 0$, resulta

$$\Delta u_0 = \Delta T (1 + e_0)^2 / h A^2$$

b) Para $f_{\alpha} = \pi/2$, se obtiene

$$\Delta u_1 = \{\Delta K_0 + F(\Delta C_n, \theta_1)\} / h F^2$$

c) Para $f_{\alpha} = \pi/4$, obtenemos

$$\Delta u_2 = \{\Delta K_0 + F(\Delta C_n, \theta_2)\} (2 + e\sqrt{2})^2 / 2h (A + F)^2$$

completándose así la corrección de los elementos orbitales.

FORMULARIO DEL METODO DE CORRECCION.

1. Datos: Se suponen conocidas m observaciones del tipo (ρ_0, θ_0, t) así como los elementos $(a_0, e_0, T_0, P_0, \Omega_0, \omega_0, I_0)$ de una órbita calculada previamente por cualquier método.

2. Se calculan las constantes

$$A = P_0 / 2\pi$$

$$\mu_0 = 2\pi / P_0$$

$$C'_0 = \mu_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \cos I_0$$

$$A = \cos \Omega_0 \cos \omega_0 - \sin \Omega_0 \sin \omega_0 \cos I_0$$

$$B = \sin \Omega_0 \cos \omega_0 + \cos \Omega_0 \sin \omega_0 \cos I_0$$

$$F = -\cos \Omega_0 \sin \omega_0 - \sin \Omega_0 \cos \omega_0 \cos I_0$$

$$G = -\sin \Omega_0 \sin \omega_0 + \cos \Omega_0 \cos \omega_0 \cos I_0$$

3. Se calculan los ángulos $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, por las fórmulas

$$\tan \theta_0 = B/A, \quad \tan \theta_1 = G/F, \quad \tan \theta_2 = (B+G)/(A+F)$$

teniendo presente que los signos de $\sin \theta_k$ y $\cos \theta_k$ ($k=0,1,2$)

coinciden con los numeradores y denominadores respectivos, lo

que permite determinar el verdadero cuadrante al que pertenecen dicho ángulos.

4. Calcular las distancias ρ_c y los ángulos de posición θ_c , para cada una de las m observaciones por medio de siguiente formulario:

$$M = 2\pi(t - T_0)/P_0$$

El cálculo de la anomalía excentrica E , de cada época observada, se obtiene iterativamente por la secuencia de fórmulas

$$M_i = E_i - e_0 \sin E_i$$

$$\Delta E_i = (M - M_i)/(1 - e_0 \cos E_i)$$

$$E_{i+1} = E_i + \Delta E_i$$

a partir de un valor inicial

$$E_0 = M + e_0 \sin M$$

hasta que el valor de ΔE_i sea inferior a un número dado ϵ .

$$\tan(f/2) = \{\sqrt{(1+e_0)/(1-e_0)}\} \tan(E/2)$$

$$r = a_0(1-e_0)/(1+e_0 \cos f)$$

$$\rho_c^2 = r^2 \{ (A^2+B^2) \cos^2 f + (F^2+G^2) \sin^2 f + 2(AF+BG) \sin f \cos f \}$$

$$\tan \theta_c = (B \cos f + G \sin f) / (A \cos f + F \sin f)$$

$$\theta_c = \arctan \theta_c$$

Los signos de $(B \cos f + G \sin f)$ y $(A \cos f + F \sin f)$ determinan el verdadero cuadrante de θ_c .

Aun cuando en la corrección el método no utiliza las distancias observadas, es conveniente calcular el incremento

$$\Delta a = (\rho_0 - \rho_c)/\rho_c$$

para cada época t , con objeto de corregir al final el semieje mayor de la órbita.

5. Aplicar el método de mínimos cuadrados a la igualdad

$$\Delta K_0 + F(\Delta C_n, \theta_c) = -\rho^2(\theta_0 - \theta_c)/C'$$

calculando los incrementos ΔK_0 , ΔA_0 , $\Delta A_n/n$, $\Delta B_n/n$, que sean necesarios.

6. Calcular las cantidades

$$Q_0 = \Delta K_0 + F(\Delta C_n, \theta_0)$$

$$Q_1 = \Delta K_0 + F(\Delta C_n, \theta_1)$$

$$Q_2 = \Delta K_0 + F(\Delta C_n, \theta_2)$$

Corrección de los elementos orbitales.

7. El nuevo periodo se obtiene por la igualdad

$$P = P_0 + 2\pi\Delta A_0$$

8. La época de paso por el periastro se calcula por la igualdad

$$T = T_0 + Q_0$$

9. La excentricidad es calculada por la fórmula

$$e = e_0 + \{Q_1 - \Delta T - \Delta A_0(\phi - e \sin \phi)\} / 2A_0 \sin \phi$$

siendo $\phi = \arccos e$

10. Definir las cantidades

$$u_0 = B/A, \quad u_1 = G/F, \quad u_2 = (B+G)/(A+F)$$

$$k = A/F, \quad h = u_0 \cos I_0 / (1 - e_0^2)^{3/2}$$

calculando los incrementos

$$\Delta u_0 = h \Delta T (1 + e_0)^2 / A^2$$

$$\Delta u_1 = h Q_1 / F^2$$

$$\Delta u_2 = h Q_2 (2 + e/2)^2 / 2(A+F)^2$$

$$\Delta k = \{(1+k)\Delta u_2 - \Delta u_1 - k\Delta u_0\} / (u_0 - u_2)$$

11. Definir los ángulos

$$S = \Omega_0 + \omega_0, \quad D = \Omega_0 - \omega_0$$

y calcular

$$\Delta S = \Delta \Omega_0 + \Delta \omega_0 = \frac{1}{2} \sin 2S \left\{ \frac{u_0 \Delta k + k \Delta u_0}{k u_0 - 1} - \frac{\Delta k + \Delta u_1}{k + u_1} \right\}$$

$$\Delta D = \Delta \Omega_0 - \Delta \omega_0 = \frac{1}{2} \sin 2D \left\{ \frac{u_0 \Delta k + k \Delta u_0}{k u_0 + 1} - \frac{\Delta k - \Delta u_1}{k - u_1} \right\}$$

obteniendo finalmente

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{2}(\Delta S + \Delta D)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2}(\Delta S - \Delta D)$$

$$I = I_0 + \text{sen } I_0 \left[\frac{u_1 \Delta k - k \Delta u_1}{k^2 - u_1^2} - \frac{1}{2} \Delta S \text{tag} S + \frac{1}{2} \Delta D \text{tag} D \right]$$

12. Para el cálculo del semieje mayor, se promedian las cantidades Δa , obtenidas al final del paso 4, es decir

$$\delta a = (\Sigma \Delta a) / m$$

siendo m el número de observaciones y se calcula el nuevo semieje mayor por la fórmula

$$a = a_0 + \delta a$$

Con los nuevos elementos obtenidos ($a, e, T, P, \Omega, \omega, I$) se puede reiniciar el proceso una y otra vez, hasta que la suma de los cuadrados de los errores ($\theta_0 - \theta_c$) sea inferior a un número dado, o hasta que dicha suma se estabilice.

En un próximo trabajo se efectuará el cálculo de algunas órbitas de estrellas dobles por el método expuesto aquí.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

1. CID, R. (1950): Rev. de Geofísica n° 35, pag. 262 y n° 36, pag. 350.
2. CID, R. (1952): Urania n° 232, pag. 201.
3. CID, R. (1960): Urania n° 252, pag. 129.
4. COMSTOCK, G.C. (1918): Ast. Journal, 31, pag. 33.
5. HIRST, W.P. (1944): M. N. of the R. A. S., 5, pag. 171.
6. INNES, R.T.A. y VAN DEN BOS, W.H. (1926): Union Obs. Cir. 68, pag. 354 y Union Obs. Cir. 86, pag. 261 (1932).
7. KLINKERFUES, (1855): A. N. 42, pag. 81 y A. N. 47, pag. 353.
8. LONGAS, C. (1982): Facultad de Ciencias. Departamento de Física de la Tierra y el Cosmos. Universidad de Zaragoza.
9. THIELE, T.N. (1883): A. N. 245 y A. N. 52, pag. 39 (1960).

A perturbed elliptic oscillator: Flow inversion through butterfly bifurcations

A. Abad*, A. Deprit†, A. Elipe*† and M. L. Sein-Echaluce‡

*Departamento de Física Teórica (Astronomía). Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza

†National Institute of Standards and Technology. Gaithersburg, MD 20899. U.S.A.

‡Departamento de Matemática Aplicada. E.T.S.I.I., Universidad de Zaragoza, 50014 Zaragoza

We analyze the system consisting of two harmonic oscillators with equal frequencies; the perturbation imposed on the system is the gradient of a polynomial in the coordinates of degree not greater than 4. The perturbed elliptic oscillator is normalized in terms of Lissajous variables. The reduced system belongs to a wide class of Hamiltonians in one degree of freedom. We analyze one of its subclasses; we show how the phase flow evolves with the parameters. The main feature of the averaged system is a process by which the system passes through a cycle of three butterfly bifurcations to reverse the sense of its phase flow.

1 Introduction

This paper deals with dynamical systems represented by Hamiltonians of the type

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \mathcal{V}(x, y), \quad (1)$$

the potential being of the form

$$\mathcal{V}(x, y) = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \sum_{n \geq 3} \mathcal{V}_n(x, y)$$

with the term $\mathcal{V}_n$ as a homogeneous polynomial in x and y of degree n . The letters X and Y stand for the momenta conjugate to the coordinates x and y respectively. This class of Hamiltonians appears very often in galactic dynamics and in atomic physics (see, e.g., [1-7]). They have drawn much attention in the past twenty years because the dynamical systems they represent show chaos appearing above a certain threshold of energy.

Past that critical value, will one find a new threshold of energy where the system will return to a phase regime without chaos? Some authors [8,9] have given evidence that this is indeed the case when the potential $\mathcal{V}$ constitutes a well. For our part, we contend that

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{1,0} &= \omega^2 \alpha x^2 y, \\ \mathcal{H}_{2,0} &= 2\eta \omega^2 \beta^2 y^4.\end{aligned}$$

The quantities α, β are finite parameters, and η is a sign switch equal either to $+1$ or -1 . This is a particular case of systems of the type (1)

We study the system in the neighborhood of the stable equilibrium at the origin. At this point, the unperturbed term $\mathcal{H}_{0,0}$ presents a 1-1 resonance, and it will be advantageous to apply to the *Lissajous* transformation [12]

$$\phi : (\ell, g, L, G) \mapsto (x, y, X, Y).$$

The Lissajous coordinates (ℓ, g, L, G) play for elliptic oscillators the same role as the Delaunay coordinates for Keplerian systems. In explicit form, the Lissajous transformation is defined by the equations

$$\begin{aligned}x &= \sigma \cos(\ell + g) - \delta \cos(\ell - g), \\ y &= \sigma \sin(\ell + g) + \delta \sin(\ell - g), \\ X &= \omega(\delta \sin(\ell - g) - \sigma \sin(\ell + g)), \\ Y &= \omega(\delta \cos(\ell - g) + \sigma \cos(\ell + g))\end{aligned}$$

where σ, δ are the quantities

$$\sigma = \sqrt{(L+G)/2\omega}, \quad \delta = \sqrt{(L-G)/2\omega}$$

depending solely on the moments L and G . Under the Lissajous transformation, the Hamiltonian $\mathcal{H}$ changes into the function $\phi^* \mathcal{H}$ whose terms are

$$\mathcal{H}_{0,0} = \omega L = \omega^2(\sigma^2 + \delta^2),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{1,0} &= \frac{1}{4}\omega^2 \alpha \left[(2\sigma^2 + \delta^2)\delta \sin(\ell - g) + (2\delta^2 + \sigma^2)\sigma \sin(\ell + g) \right. \\ &\quad - 3\sigma\delta^2 \sin(\ell - 3g) - 3\sigma^2\delta \sin(\ell + 3g) \\ &\quad - \sigma\delta^2 \sin(3\ell - g) - \sigma^2\delta \sin(3\ell + g) \\ &\quad \left. + \delta^3 \sin(3\ell - 3g) + \sigma^3 \sin(3\ell + 3g) \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{2,0} &= \omega^2 \beta^2 \eta \left[\frac{3}{2}(\sigma^4 + \delta^4 + 4\sigma^2\delta^2) - 6\sigma\delta(\sigma^2 + \delta^2) \cos 2\ell \right. \\ &\quad + 3\sigma^2\delta^2 \cos 4\ell + 6\sigma\delta(\sigma^2 + \delta^2) \cos 2g \\ &\quad + 3\sigma^2\delta^2 \cos 4g - 2\delta^2(3\sigma^2 + \delta^2) \cos(2\ell - 2g) \\ &\quad - 2\sigma^2(\sigma^2 + 3\delta^2) \cos(2\ell + 2g) - 2\sigma\delta^3 \cos(2\ell - 4g) \\ &\quad - 2\sigma^3\delta \cos(2\ell + 4g) + 2\sigma\delta^3 \cos(4\ell - 2g) \\ &\quad \left. + 2\sigma^3\delta \cos(4\ell + 2g) + \frac{1}{2}\delta^4 \cos(4\ell - 4g) + \frac{1}{2}\sigma^4 \cos(4\ell + 4g) \right].\end{aligned}$$

Averaging over the elliptic anomaly ℓ will normalize this Hamiltonian, i.e., it will change it into a function $\mathcal{H}'$ that belongs to the kernel of the Lie derivative $L_0 : F \rightarrow (F, \mathcal{H}_0)$, the

the possibility of chaos exists even at low energies whether or not the potential makes a well. Our argument is based on the existence of unstable equilibria and of homoclinic solutions asymptotic to them. Very often, the slightest perturbation imposed on the system will develop such a system of unstable equilibria and homoclinic orbits into areas of stochasticity.

The usual numerical techniques prove unwieldy in tracing Poincaré's cross sections at very low levels of energy because numerical integration deteriorates rapidly by loss of significance in the neighborhood of an unstable equilibrium. To overcome these difficulties, we proceed by analytical means. The Hamiltonian in (1) is basically a perturbed elliptic oscillator. It consists of two harmonic oscillators with equal frequencies, ω . As we are interested mainly in the long term behavior of the perturbed system, we average the Hamiltonian over the basic period of the elliptic oscillator. The fact that the system presents a 1-1 resonance does not cause difficulties if we carry the normalization in the Lissajous variables (Section 2). After normalization, the phase space becomes what mathematicians call a fiber bundle, more precisely in our case, a row of two-dimensional spheres.

The particular example we are treating admits two independent parameters. In fact its average falls into to a more general type of Hamiltonian systems with one degree of freedom involving three independent parameters, say P , Q , and R . Therefore, instead of analyzing the particular case in detail, we study the general case to which it belongs. To this end, we determine the affine class of the Hamiltonian according to the values of its parameters. On the basis of that classification, we locate the equilibria and determine their stability (Section 3).

One region in the parameter space, namely the plane $R = 0$, proves especially interesting. As we show in Section 4, there occur six situations where the phase flow corresponds to a rotation about a fixed axis at a variable rate. The angular speed vanishes not only at the endpoints of the axis of rotation but also along the great circle perpendicular to the axis of rotation, which means that the system presents there a degeneracy. As a matter of fact, when changes in the parameters P and Q get the system to pass through these special values, bifurcations of a special nature occur; we identify these as *butterfly* bifurcations [10, p. 359]. A similar transition was recognized recently in the polar case of the van der Waals interaction [11].

A detailed analysis of the parameter space outside the plane $R = 0$ will be published elsewhere.

2 The Lissajous transformation and Normalization.

We begin this paper with the Hamiltonian function:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{0,0} + \mathcal{H}_{1,0} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{2,0} \quad (2)$$

where

$$\mathcal{H}_{0,0} = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2),$$

term $(F, \mathcal{H}_0)$ designating the Poisson bracket of the functions F and $\mathcal{H}_0$. Indeed, in the Lissajous variables, since $\mathcal{H}_0 = \omega L$, the Lie derivative is the simple differential operator

$$\mathcal{L}_0 = \omega \partial / \partial \ell.$$

There results that normalization of a Hamiltonian that is periodic in ℓ amounts to averaging over ℓ or, to speak the language of the astronomers, to eliminating ℓ . The normalization is implemented *via* a Lie transformation

$$(\ell', g', L', G') \rightarrow (\ell, g, L, G).$$

The transformation is obtained by the classical algorithm of [13]. The result is the series

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}_{0,0} + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{0,2} + \mathcal{O}(\delta^6, \sigma^6),$$

beginning with terms

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{0,0} &= \omega L', \\ \mathcal{H}'_{0,2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} Q G'^2 + R L' \sqrt{L'^2 - G'^2} \cos 2g' + \frac{1}{4} P (L'^2 - G'^2) \cos 4g' \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

From here on, for the sake of simplifying the notations, we omit the primes from the new variables. The quantities P , Q and R are the functions of the parameters α , β and η as listed below:

$$P = 3\eta\beta^2 + \frac{5}{2}\alpha^2, \quad Q = -3\eta\beta^2 + \frac{33}{6}\alpha^2, \quad R = 3\eta\beta^2 + \frac{5}{6}\alpha^2. \quad (4)$$

The Lissajous transformation and the normalization have been executed automatically with the aid of an algebraic manipulator [14,15] on an IBM/RT.

Equations (4) map the parameter plane (α^2, β^2) into the plane $19P - 5Q - 24R = 0$ in the three dimensional space (P, Q, R) . From here on, however, we shall consider the new Hamiltonian for the parameters P , Q and R running over the entire space without constraining them to that plane.

3 Critical points

The angle ℓ being ignorable, its conjugate momentum L is an integral. Each manifold $L = \text{constant}$ is two-dimensional. More precisely—and this is a most decisive element in analyzing perturbed elliptic oscillators of the type (1)—after normalization, the original problem is reduced to a system with one degree of freedom, since L is an integral of the motion, and the reduced phase space actually has the topology of a sphere. This fact is easily seen when adopting the spherical coordinates:

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - G^2} \cos 2g, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - G^2} \sin 2g, \quad \xi_3 = \frac{1}{2} G.$$

The points $\xi_3 > 0$ (northern hemisphere) correspond to ellipses travelled in the direct sense while those for which ξ_3 is < 0 (southern hemisphere) represent ellipses travelled in

the retrograde sense. Any point of the equatorial circle $\xi_3 = 0$ corresponds to a segment along a straight line passing through the origin which is its midpoint. The north pole is a circle travelled in the direct sense, whereas the south pole is the same circle but travelled in the retrograde sense.

After this change of variables, the second order Hamiltonian becomes

$$\mathcal{H}_{0,2} = \frac{1}{2}P(\xi_1^2 - \xi_2^2) + \frac{1}{2}Q\xi_3^2 + RL\xi_1. \quad (5)$$

The trajectories are the level contours of $\mathcal{H}_{0,2}$ on the sphere

$$\mathcal{S}(L) : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{1}{4}L^2. \quad (6)$$

Geometrically speaking, they are made of the intersections of the quadric in (5) with $\mathcal{S}(L)$. We take advantage of this property when we draw the averaged orbits on the orbital spheres in Fig. 3, thereby avoiding repeated numerical integrations of the equations of motion.¹ Yet we must recognize that the nature of the quadric in (5) varies with the parameters P , Q , R and the value H of $\mathcal{H}_{0,2}$. A complete classification appears in Table 1. Considering the complexity of this classification, we found it necessary to accumulate as much information as possible about the nature of the phase flow prior to drawing the phase orbits.

$H \neq 0$	$P = 0, R = 0$	two parallel planes
	$P = 0, R \neq 0$	parabolic cylinder
	$Q = 0$	hyperbolic cylinder
	$\text{sig}(P) = \text{sig}(Q) = \text{sig}(H)$	hyperboloid with one sheet
	$\text{sig}(P) = \text{sig}(Q) \neq \text{sig}(H)$	hyperboloid with two sheets
	$\text{sig}(P) \neq \text{sig}(Q) = \text{sig}(H)$	hyperboloid with one sheet
	$\text{sig}(Q) \neq \text{sig}(P) = \text{sig}(H)$	hyperboloid with two sheets
$H = 0$	$P = 0, R = 0$	plane $\xi_3 = 0$
	$P = 0, R \neq 0$	parabolic cylinder
	$Q = 0$	two planes $\xi_1 = \pm \xi_2$
	$P \neq 0, Q \neq 0$	cone

Table 1: Affine classes of the quadric $\mathcal{H}_{0,2}$

¹Since the time Fig. 3 has been completed (July 1988, see [16]), faster, simpler and more effective techniques have been developed for depicting the phase flow induced by a Hamiltonian with one degree of freedom [17].

Before entering into details, we should observe that, whatever the parameters P , Q and S , the averaged equations may be solved in terms of elliptic functions. Indeed, on account of the Poisson brackets

$$(\xi_1, \xi_2) = \xi_3, \quad (\xi_2, \xi_3) = \xi_1, \quad (\xi_3, \xi_1) = \xi_2,$$

the equations of the motion are:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= (\xi_1, \mathcal{H}_{0,2}) = -(P+Q)\xi_2\xi_3, \\ \dot{\xi}_2 &= (\xi_2, \mathcal{H}_{0,2}) = -(P-Q)\xi_1\xi_3 - RL\xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= (\xi_3, \mathcal{H}_{0,2}) = 2P\xi_1\xi_2 + RL\xi_2.\end{aligned}\tag{7}$$

Using (5) and (6) to express ξ_2 and ξ_3 in terms of ξ_1 , we reduce the system (7) on the manifold $\mathcal{H}_{0,2} = H$ to the quadrature

$$\dot{\xi}_1 = \pm 2 \sqrt{\left[\frac{1}{8}QL^2 - H + RL\xi_1 + \frac{1}{2}(P-Q)\xi_1^2\right] \left[\frac{1}{8}PL^2 + H - RL\xi_1 - P\xi_1^2\right]}.$$

It follows that the independent variable t is an elliptic integral of the first kind in ξ_1 , hence by inversion, that ξ_1 is an elliptic function of t .

4 Butterfly bifurcations.

The problem is considerably simplified when $R = 0$ owing to the fact that it is then invariant with respect to the central symmetry

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3).\tag{8}$$

Besides, the transformation

$$\xi_1 \rightarrow \xi_2, \quad \xi_2 \rightarrow \xi_1, \quad P \rightarrow -P\tag{9}$$

does not change the integral $\mathcal{H}_{0,2}$ whereas the transformations

$$\xi_1 \rightarrow \xi_2, \quad \xi_2 \rightarrow \xi_1, \quad Q \rightarrow -Q,\tag{10}$$

and

$$P \rightarrow -P, \quad Q \rightarrow -Q\tag{11}$$

change its sign only. We shall see later in the Appendix how these symmetry rules cut the number of cases to be considered while building the general solution to the equations of motion.

In the present case, the equations of motion reduce to

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -(P+Q)\xi_2\xi_3, \\ \dot{\xi}_2 &= -(P-Q)\xi_1\xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= 2P\xi_1\xi_2.\end{aligned}\tag{12}$$

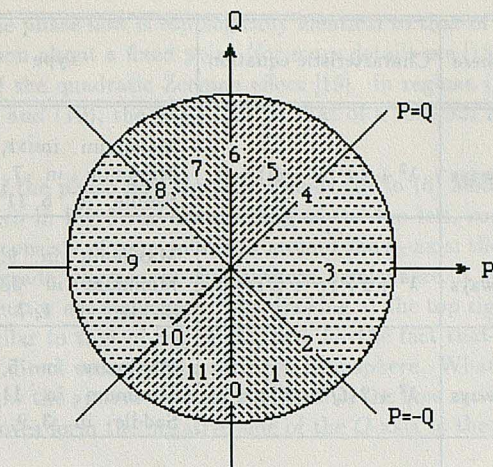


Figure 1: Partitions in the plane of parameters

To begin with, we look at its equilibria. These are in fact the local extrema of $\mathcal{H}_{0,2}$ on the sphere $S(L)$. Their locations and characteristics are given in Table 2. Note that, on account of the central symmetry, the equilibria appear in pairs of points diametrically opposite. The discussion of their existence and stability is simplified when we consider the pair of parameters P and Q as the Cartesian coordinates of a point. From Table 2, we infer that the plane (P, Q) is divided in six segments; special attention must be paid to the boundaries separating these segments. Figure 1 shows how we label the segments and their boundaries.

Table 2 indicates that the equilibria are changing their character through the different regions in the parameter plane (P, Q) . On the other hand, we have plotted in Figure 2 the values taken by the energy term $\mathcal{H}_{0,2}$ at the equilibria when the parameter point (P, Q) travels along a circle centered at the origin. A quick glance at this plot reveals that all the boundaries, named (0), (2), (4), (6), and (10), are lines of bifurcations. Two things are happening on these lines, first an exchange of equilibria where the integral $\mathcal{H}_{0,2}$ takes its absolute maximum or minimum, and correspondingly an exchange of stability. Take for instance what happens on the boundary (6). In region (5), $\mathcal{H}_{0,2}$ reaches its maximum at the equilibria E_0 and E_5 , and its minimum at E_2 and E_4 ; past the boundary, in region (7), the same integral is still maximum at E_0 and E_5 but now becomes minimum at E_1 and E_3 . Furthermore, whereas E_2, E_4 are stable and E_1, E_3 unstable in region (5), these points reverse their stability in region (6).

We obtain the general solution outside the equilibria simply by integrating the differential equations of motion. This can be done explicitly in terms of elliptic functions. The actual calculations, however, are too tedious to be reproduced in the body of the paper, and we have reported them to the Appendix. Suffice to note that, in regions (1), (3), (5),

Point	Where	Characteristic equation	Type	$\mathcal{H}_{0,2}$
$(\pm L/2, 0, 0)$ (E_1, E_3)	Always	$\lambda^2 + 2P(P - Q) = 0$	Maximum in 1, 2, 3 Minimum in 7, 8, 9 Saddle in 5, 11	$\frac{1}{8}P L^2$
$(0, \pm L/2, 0)$ (E_2, E_4)	Always	$\lambda^2 + 2P(P + Q) = 0$	Maximum in 9, 10, 11 Minimum in 3, 4, 5 Saddle in 1, 7	$-\frac{1}{8}P L^2$
$(0, 0, \pm L/2)$ (E_0, E_5)	Always	$\lambda^2 + 2(Q^2 - P^2) = 0$	Maximum in 5, 6, 7 Minimum in 11, 0, 1 Saddle in 3, 9	$\frac{1}{8}Q L^2$
Meridian $\xi_1 = 0$	2, 8	degeneracy		
Meridian $\xi_2 = 0$	4, 10	degeneracy		
Equator $\xi_3 = 0$	6, 0	degeneracy		

Table 2: Classification of the equilibria points.

(7), (9) and (11), the phase flow is topologically identical to that of a tri-axial rigid body in torque-free rotation about a fixed point (for more details see [18]) or for that matter, to the polar case of the quadratic Zeeman effect [19]. In regions (0), (2), (4) and their symmetric (6), (8), and (10), the phase flow is that of a rotation at a constant velocity about a coordinate axis.

The evolution of the phase flow through regions (0) to (6) along a circle $P^2 + Q^2$ of given radius is shown in Fig 3. In the drawing at the top left, corresponding to region (0), the phase flow consists of pure rotations around the ξ_3 -axis; the flow in the northern hemisphere is retrograde whereas, in the southern hemisphere, it is direct. As expected, all points on the equator are stationary. The drawing at the top right corresponds to the region (6); it is similar to that of region (0), save for the fact that the flow has changed orientation; it is of direct sense in the northern hemisphere. What the whole picture in Fig. 3 explains is how the system reverses the sense of the flow as the point (P, Q) in the parameter space moves from the negative side of the Q -axis to the positive side.

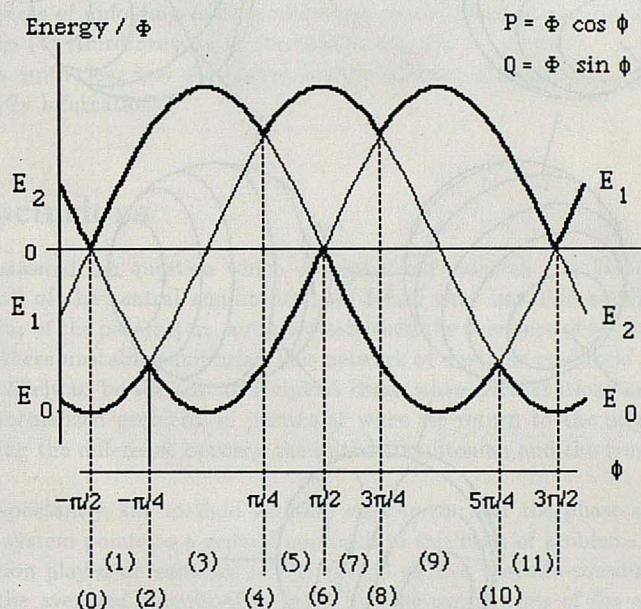


Figure 2: The integral $\mathcal{H}_{0,2}$ at the equilibria as the point (P, Q) travels a circle centered at the origin of coordinates, starting on the boundary line (0). Thick lines indicate that the equilibria are stable; thin lines say that they are unstable.

The flow inversion results from bifurcations of *butterfly* type. We see that most easily by following the evolution along the sequence of plots in Fig. 3.

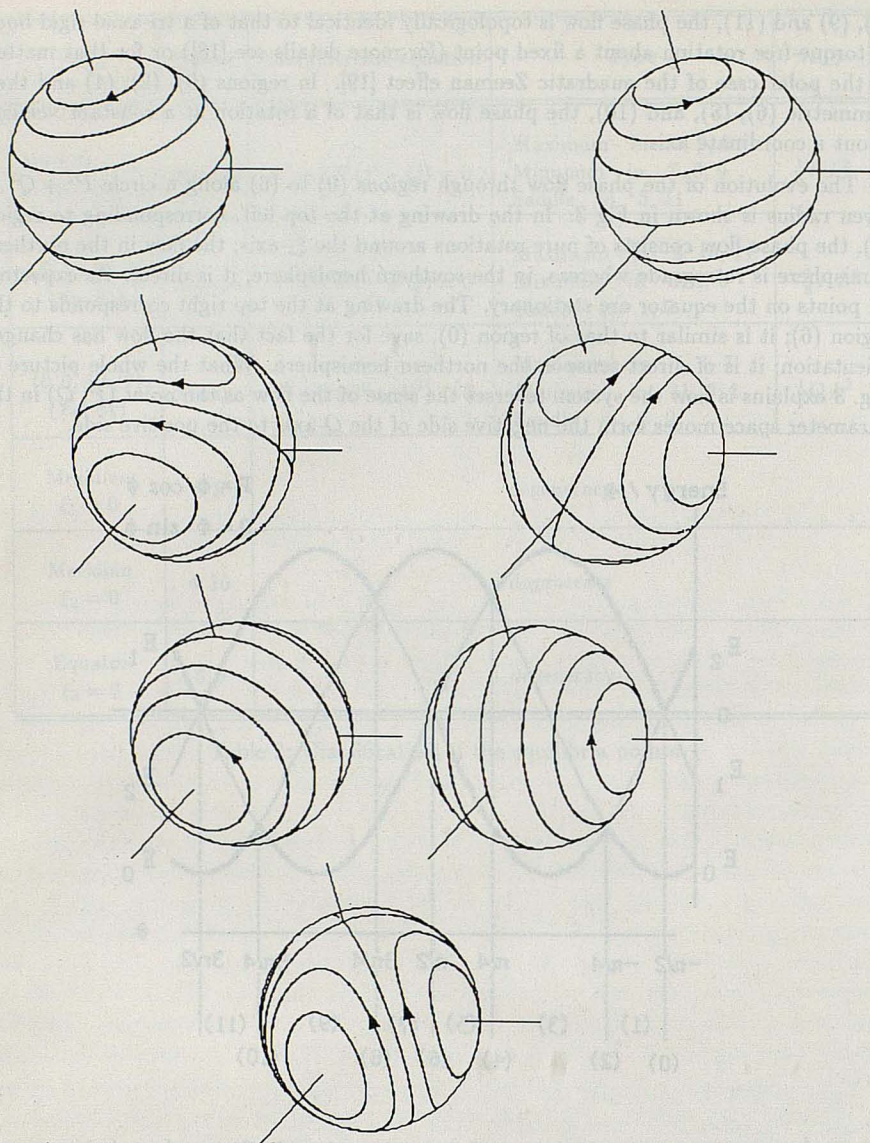


Figure 3: Evolution of the phase flow through the butterfly bifurcations.

Entering region (1) coming from region (0), we recognize in the second drawing down on the left of Fig. 3, that all equilibria in the equator disappear save for these at the extremities of the ξ_2 -axis which become unstable, and those at the extremities of the ξ_1 -axis which become stable. The *butterfly* has opened its wings which it had folded along the equator when P was (0) and $Q < 0$, (region 0).

As the parameter point (P, Q) approaches region (2), the butterfly tends to fold its wings in the meridian plane $\xi_1 = 0$. The folding is complete in region (2), as we can see in the third drawing down at the left. At that stage, all points in that meridian are equilibria; thus a degeneracy occurs, and the phase flow corresponds to a differential rotation about the ξ_1 -axis.

No sooner has the butterfly folded its wings than it reopens them, but this time using the ξ_3 -axis as the unfolding hinge. The drawing at the bottom of Fig 3 shows what the flow is when the parameter point (P, Q) traverses region (3). All equilibria in the meridian $\xi_1 = 0$ disappear except those at the extremities of the ξ_3 -axis (unstable) and at the extremities of the ξ_2 -axis (stable).

This process of unfolding-folding-unfolding repeats itself at the transition boundary that is region (4) (third drawing to the right in Fig 3).

It is now quite clear how the system reverts its sense of rotations by passing through three butterfly bifurcations.

5 Conclusions

We have answered the question which prompted our research. At low energies, in the neighborhood of the central equilibrium, we found that unstable equilibria appear in some domains of the parameters, and we established the existence of homoclinic solutions connecting these unstable equilibria. This network of unstable equilibria and homoclinic solutions is likely to be the seat of incipient chaos when perturbations are added to the truncated normalized problem, in particular when we return to the original system by re-introducing the difference between the initial Hamiltonian and the truncated approximation.

More importantly, the method we have used to uncover the phase structure of the normalized system points to a general approach to this class of problems. The Lissajous transformation played an essential role in that it yielded "pseudo-coordinates" in which to express the averaged Hamiltonian, much like the components of the angular velocity for a solid body free to rotate about a fixed point. The behavior of the elliptic oscillator at low energies, we have seen, is commanded by a Hamiltonian that is a quadratic form in the pseudo-coordinates ξ_1, ξ_2 and ξ_3 over the sphere $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = L^2/4$. We propose that such quadratic Hamiltonians be studied for themselves, and that the phase flow they determine be examined for its dependence on the coefficients in the quadratic form taken as parameters, irrespective of the particular dynamical system whose normalization might be reduced to that quadratic form. This note gives reasons to believe that the general analysis of Hamiltonian systems represented by a quadratic form in pseudo-coordinates

promises to be quite useful in studying wide classes of perturbed integrable systems.

Acknowledgements

Support for this research came in part from the C.I.C.Y.T. (Proyecto # PB87-0637), from the IberCaja (Proyecto 1989), to the second author (A. D.) from the Computational and Applied Mathematics Program of the D.A.R.P.A. (Washington). The third author (A. E.) gratefully acknowledges having been awarded a fellowship by the European Space Agency to spend the schoolyear 1988-1989 at the U. S. National Institute of Standards and Technology.

Authors are listed in alphabetical order.

References

- [1] Hénon, M. and Heiles, C.: 1963, *Astron. J.*, **69**, 73.
- [2] Contopoulos, G.: 1958, *Stockholms Observatoriums Annaler*, **20**, 1-24.
- [3] Contopoulos, G. and Woltjer, L.: 1964, *Astroph. J.* **140**, 1106-1119.
- [4] Barbanis, B.: 1966, *Astron. J.*, **71**, 415-424.
- [5] Ollongren, A.: 1962, *Bull. Astronom. Institutes of The Netherlands*. **16**, 241-295.
- [6] Ollongren, A.: 1967, *Astronom. J.*, **72**, 474-479.
- [7] Bountis, T, Segur, H. and Vivaldi, F.: 1984, *Phys. Rev. A*, **25**, 1257-1264.
- [8] Baranger, M. and Davies, K.T.R.: 1987, *Ann. Phys.*, **177**, 330-358.
- [9] Benelmostafá, M.M.: 1985, *Thèse de doctorat de troisième cycle*. Univ. of Pau.
- [10] David, D., Holm, D. D. and Tratnik, M.V.: 1989, *Physics Letters A* **137**, 355-364.
- [11] Deprit, A., Elipe, A. and Ferrer, S.: 1989, *Revista Acad. Ci. Zaragoza*, to appear.
- [12] Deprit, A.: 1988, manuscript intended for publication in *Celestial Mechanics*.
- [13] Deprit, A.: 1969, *Celest. Mech.* **1** 12-31.
- [14] Dasenbrock, R.R.: 1982, *Naval Research Lab. Report* 8611.
- [15] Abad, A. and Sein-Echaluce, M. L.: 1989, *Revista Acad. Ci. Zaragoza* **43**, 117-127.
- [16] Abad, A. Elipe, A. and Sein-Echaluce, M. L.: 1989, *Celest. Mech.*, **45**, 99-102.
- [17] Coffey, S., Deprit, A., Deprit, E., Healy, L. and Miller, B. R.: 1989. *Proceedings of the Symposium on Computer Assisted Proofs in Analysis*, Institute of Mathematical Applications, University of Minnesota, Minneapolis, accepted for publication.
- [18] Deprit, A. and Elipe, A.: 1989, in preparation.
- [19] Deprit, A. and Ferrer, S.: 1988, submitted to *Int. J. of Non-Linear Mechanics*.
- [20] Jacobi, C. G. J.: 1881, *Gesammelte Werke*, **1**, 125-127.

Appendix

In the degenerate cases, the general solution of the equation of motion is expressed in terms of circular functions. The results in regions (0) and (2) are given in Table 3. Corresponding results in regions (4) and (6) are derived from those in regions (2) and (0) respectively by applying the symmetry rule (10); those in regions (8) and (10) are obtained from their equivalent in regions (2) and (4) respectively by applying the symmetry rule (9).

Region 0, $P = 0, Q < 0$		
$\xi_3 > 0$	$\xi_1 = -\sqrt{\frac{1}{4}L^2 - \gamma^2} \cos \lambda t$ $\xi_2 = -\sqrt{\frac{1}{4}L^2 - \gamma^2} \sin \lambda t$ $\xi_3 = \gamma$	$\gamma^2 = \frac{2H}{Q}$ $\lambda = Q\xi_3$
Region 2, $P + Q = 0, Q < 0$		
$\xi_1 > 0$	$\xi_1 = \gamma$ $\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{4}L^2 - \gamma^2} \cos \lambda t$ $\xi_3 = \sqrt{\frac{1}{4}L^2 - \gamma^2} \sin \lambda t$	$\gamma^2 = \frac{H}{P} + \frac{L}{4}$ $\lambda = 2P\xi_1$

Table 3: Solutions in the degenerate cases.

As for the general solution outside the bifurcation lines, let us observe that the solutions in region (5) are images of those in (1) by the symmetry (10), and that those in regions (7), (9) and (11) are images of the solutions in (5), (3) and (1) respectively by the symmetry (9). Thus we need only to produce the general solutions in regions (1) and (3).

In order to simplify the notations, we have set:

$$J = \frac{8H}{L^2}, \quad \zeta_i = \frac{2}{L}\xi_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Region 1.

In the parameter lane (P, Q) , the region is defined by the conditions

$$Q < 0 < P < -Q.$$

In that region, according to Table 2 and Figure 2,

$$\mathcal{H}_{0,2}(E_0) \leq \mathcal{H}_{0,2} \leq \mathcal{H}_{0,2}(E_1),$$

which relations imply that

$$Q \leq J \leq P.$$

As can be seen readily from Figure 2, three cases have to be considered depending on how $\mathcal{H}_{0,2}$ compares with its value $-PL^2/8$ at the equilibrium E_2 :

- $Q < J < -P < 0 < P$,
- $Q < J = -P < 0$,
- $Q < -P < J < P$.

In all three cases, the elliptic quadrature may be written in the form

$$\dot{\zeta}_3 = 2P \zeta_1 \zeta_2 = \sqrt{(J+P) - (Q+P)\zeta_3^2} \sqrt{(Q-P)\zeta_3^2 - (J-P)}.$$

Its reduction to a Legendre elliptic integral of the first kind depends on how J is situated with respect to $-P$.

- $J + P < 0$.

In this interval,

$$\dot{\zeta}_3 = \sqrt{Q^2 - P^2} \sqrt{(a^2 - \zeta_3^2)(\zeta_3^2 - b^2)},$$

with

$$a^2 = \frac{P+J}{Q+P}, \quad b^2 = \frac{P-J}{P-Q}, \quad a^2 < b^2.$$

To perform the quadrature, we make the change

$$\zeta_3^2 = a^2 \sin^2 \chi + b^2 \cos^2 \chi$$

and we obtain:

$$n dt = - \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}}$$

where

$$n = b\sqrt{Q^2 - P^2}, \quad k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} < 1.$$

Hence, by inversion,

$$\chi = \text{am}(n(t - t_0), k)$$

so that

$$\begin{aligned} \zeta_1^2 &= \frac{Q+P}{2P} (b^2 - a^2) \text{cn}^2(n(t - t_0), k), \\ \zeta_2^2 &= \frac{Q-P}{2P} (b^2 - a^2) \text{sn}^2(n(t - t_0), k), \\ \zeta_3^2 &= b^2 \text{dn}^2(n(t - t_0), k). \end{aligned}$$

The motions may thus be viewed as rotations about the axis ζ_3 .

• $J + P = 0$.

Here the motion is degenerate. Indeed, the elliptic quadrature in ζ_3 becomes

$$\dot{\zeta}_3 = \zeta_3 \sqrt{Q^2 - P^2} \sqrt{b^2 - \zeta_3^2},$$

so that the differential equations are integrable explicitly in terms of hyperbolic functions.

The results are

$$\zeta_1^2 = \frac{Q+P}{2P} b^2 \tanh^2[n(t-t_0)],$$

$$\zeta_2^2 = \frac{Q-P}{2P} b^2 \frac{1}{\cosh^2[n(t-t_0)]},$$

$$\zeta_3^2 = b^2 \frac{1}{\cosh^2[n(t-t_0)]}.$$

• $J + P > 0$.

The modulus k introduced above is here > 1 . Therefore we apply Jacobi's inverse modulus transformation [20] to the solution derived above. In this manner, we find that the general solution is

$$\zeta_1^2 = \frac{Q+P}{2P} (b^2 - a^2) \operatorname{dn}^2(k n(t-t_0), 1/k),$$

$$\zeta_2^2 = \frac{Q-P}{2P} (b^2 - a^2) \frac{1}{k^2} \operatorname{sn}^2(k n(t-t_0), 1/k),$$

$$\zeta_3^2 = b^2 \operatorname{cn}^2(k n(t-t_0), 1/k).$$

It represents a rotation around the axis ζ_1 .

Region 3.

On the one hand, the region in the parameter plane (P, Q) is defined by the relations

$$P > |Q| > 0.$$

on the other hand, the value of the integral $\mathcal{H}_{0,2}$ is such that

$$\mathcal{H}_{0,2}(E_2) < \mathcal{H}_{0,2} < \mathcal{H}_{0,2}(E_1),$$

which means that

$$-P < J < P.$$

There will be three distinct types of solutions according to where $\mathcal{H}_{0,2}$ is located with respect to $\mathcal{H}_{0,2}(E_3)$. At any rate, it is more convenient to proceed from the elliptic integral

$$\dot{\zeta}_1 = -(P+Q) \zeta_2 \zeta_3 = -\sqrt{(P-Q) \zeta_1^2 - (J-Q)} \sqrt{(J+P) - 2P \zeta_1^2}$$

- $J - Q < 0$.

In this case,

$$\dot{\zeta}_1 = -\sqrt{2P(P-Q)}\sqrt{(\zeta_1^2 + a^2)(b^2 - \zeta_1^2)},$$

with

$$a^2 = \frac{Q-J}{P-Q}, \quad b^2 = \frac{J+P}{2P}, \quad a^2 < b^2.$$

To perform this quadrature, we make the change

$$\zeta_1 = b \cos \chi$$

and we obtain that:

$$n dt = \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}},$$

where

$$n = \sqrt{2P(P-Q)}\sqrt{b^2 + a^2}, \quad k^2 = \frac{b^2}{b^2 + a^2} < 1$$

By inversion,

$$\chi = \text{am}(n(t - t_0), k)$$

so that

$$\begin{aligned} \zeta_1^2 &= b^2 \text{cn}^2(n(t - t_0), k), \\ \zeta_2^2 &= \frac{P-Q}{P+Q} (a^2 + b^2) \text{dn}^2(n(t - t_0), k), \\ \zeta_3^2 &= \frac{2P}{Q+P} b^2 \text{sn}^2(n(t - t_0), k), \end{aligned}$$

and the trajectories are rotations around the axis ζ_2 .

- $J = Q \equiv a = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= -\zeta_1 \sqrt{P-Q} \sqrt{(P+Q) - 2P\zeta_1^2} \\ &= -\zeta_1 \sqrt{P^2 - Q^2} \sqrt{b^2 - \zeta_1^2}. \end{aligned}$$

This quadrature may be easily integrated, and there results that

$$\begin{aligned} \zeta_1^2 &= b^2 \frac{1}{\cosh^2[n(t - t_0)]}, \\ \zeta_2^2 &= \frac{P-Q}{P+Q} b^2 \frac{1}{\cosh^2[n(t - t_0)]}, \\ \zeta_3^2 &= \tanh^2[n(t - t_0)], \end{aligned}$$

where $n = -b\sqrt{P^2 - Q^2}$.

- $J + Q > 0$.

Inverting the modulus k in the general solution above, we find that

$$\begin{aligned}\zeta_1^2 &= b^2 \operatorname{dn}^2(kn(t-t_0), 1/k), \\ \zeta_2^2 &= \frac{P-Q}{P+Q} (a^2 + b^2) \operatorname{cn}^2(kn(t-t_0), 1/k), \\ \zeta_3^2 &= \frac{2P}{Q+P} b^2 \frac{1}{k} \operatorname{sn}^2(kn(t-t_0), 1/k),\end{aligned}$$

which shows that the motions consist of rotations around the axis ζ_1 .

INFRANCO

Departamento de Matemática Aplicada (E.T.S.I.I.)

Universidad de Zaragoza, 50015 Zaragoza, Spain

An asymptotic solution to Deprit's radial intermediate in the spatial case with a linear drag model is obtained. The drag model is considered as a force proportional to the vector velocity and inversely proportional to the square of the distance to the center of attraction. The solution is obtained in compact form by using the Kuylen-Hogdahl's method. Some numerical simulations to the solution are done.

1. INTRODUCTION

En la literatura aparecen muy pocas soluciones de tipo analítico al problema del movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio central con un modelo de resistencia proporcional a la velocidad y inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de atracción. En este artículo se obtiene una solución en forma compacta, utilizando variables elípticas, para el problema del movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio central con un modelo de resistencia proporcional a la velocidad y inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Deprit [1] propone un modelo de fricción alternativa al que la velocidad de la amplitud es directamente proporcional a la velocidad e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de atracción. Este modelo da lugar a una ecuación diferencial escalar de segundo orden no homogénea. Para resolver el problema utiliza una técnica de perturbaciones y obtiene una solución de la ecuación diferencial tanto en primer orden, mostrando que la constante de proporcionalidad del fricción es un parámetro pequeño, despreciando los términos de orden superior.

Milneva & Barrow [2] encuentran una solución analítica para el caso de movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio. En sus esfuerzos plantean el problema general en términos de Cowell (ecuación de una variable diferencial) y sugieren un método de segundo orden y utilizan el modelo de fricción proporcional a la velocidad. En particular, encuentran una solución analítica para el caso en que la función de fuerza gravitatoria

UNA SOLUCION ASINTOTICA PARA EL INTERMEDIARIO RADIAL DE DEPRIT CON ROZAMIENTO ATMOSFERICO EN EL CASO ECUATORIAL

J.M.FRANCO

Grupo de Mecánica Espacial

Departamento de Matemática Aplicada (E.T.S.I.I.)

Universidad de Zaragoza, 50015-Zaragoza, SPAIN

An asymptotic solution to Deprit's radial intermediary in the equatorial case with a specific drag model, is obtained. The drag model is considered as a force proportional to the vector velocity and inversely proportional to the square of the distance to the center of attraction. The solution is obtained in compact form by using the Krylov-Bogoliubov's method. Some numerical simulations to the solution are done.

1. INTRODUCCION

En la literatura aparecen muy pocas soluciones de tipo analítico para el problema del satélite con frenaje atmosférico. Brouwer & Hori[2] desarrollan una solución en forma compacta, utilizando variables canónicas, para el problema del satélite incluyendo términos de primer orden debidos al achatamiento de la Tierra e incluyendo correcciones de primer orden para un modelo de frenaje atmosférico directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.

Danby[3] propone un modelo de frenaje alternativo en el que la viscosidad de la atmósfera es directamente proporcional a la velocidad e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de masas del sistema. Este modelo da lugar a una ecuación diferencial escalar de segundo orden no homogénea. Para resolver el problema utiliza una técnica de perturbaciones y obtiene una solución de la ecuación diferencial hasta el primer orden, suponiendo que la constante de proporcionalidad del frenaje es un pequeño parámetro, despreciando los términos de orden superior.

Mittleman & Jezewski[6] encuentran una solución analítica para el clásico problema de los dos cuerpos con frenaje atmosférico. Dichos autores plantean el problema general en formulación de Cowell (partiendo de una ecuación diferencial vectorial no lineal de segundo orden) y utilizan el modelo de frenaje propuesto por Danby[3]. En particular, encuentran una solución analítica para el caso en que la función de fuerzas gravitacional

sea la correspondiente al problema de los dos cuerpos, de manera que, cuando el parámetro del frenaje tiende a cero, su solución tiende a la clásica solución de Kepler.

En este trabajo, de forma análoga a Mittleman & Jezewski[6], planteamos el problema general, en formulación de Cowell, de las ecuaciones del movimiento de un satélite artificial con frenaje atmosférico y restringimos nuestro estudio al caso en que éste se mueve bajo la acción de un campo de fuerzas centrales. Obtenemos la integral del momento angular para el caso del modelo de frenaje propuesto por Danby y planteamos las ecuaciones del movimiento en el caso de un campo de fuerzas centrales. En particular, obtenemos una solución asintótica del problema hasta el segundo orden, utilizando el método de Krylov-Bogliubov, para el caso en que la función de fuerzas gravitacional deriva del potencial correspondiente al intermediario radial de Deprit[4] en el caso ecuatorial, que contiene términos de primer orden. La ecuación del tiempo (ecuación generalizada de Kepler) no puede integrarse en términos de funciones conocidas y, por lo tanto, ha de resolverse mediante fórmulas de cuadratura numéricas (fórmulas de cuadratura de Gauss, fórmulas de Romberg, etc.). En el apéndice final presentamos la solución del problema de los dos cuerpos con el modelo de frenaje considerado.

2. FORMULACION DEL PROBLEMA

Las ecuaciones del movimiento de un satélite artificial terrestre con frenaje atmosférico (en formulación de Cowell) pueden expresarse por medio de la ecuación diferencial vectorial no lineal de segundo orden

$$\ddot{\mathbf{r}} + D(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}} + \text{grad } V(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición del satélite respecto del centro de masas del cuerpo atrayente (la Tierra), $D(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ es un coeficiente escalar correspondiente al modelo de frenaje atmosférico, $V(\mathbf{r})$ representa la energía potencial del sistema y $\dot{\mathbf{r}}$ es la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a la variable independiente t .

En este trabajo estudiamos el caso particular en que la energía potencial corresponde a un campo de fuerzas centrales, es decir, $\text{grad } V(\mathbf{r}) = F(r) \mathbf{r}$, donde $F(r)$ es una función escalar del módulo del vector de posición ($r = |\mathbf{r}|$).

2.1 INTEGRAL DEL MOMENTO ANGULAR

En el problema del satélite artificial con frenaje atmosférico que se mueve bajo la acción de un campo de fuerzas centrales, las ecuaciones del movimiento (1) pueden expresarse mediante la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$\ddot{\mathbf{r}} + D(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}} + F(r) \mathbf{r} = 0, \quad (2)$$

Análogamente a Jezewski & Mittleman[5], definimos el vector unitario

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}}{r^2 \dot{\theta}} \quad (3)$$

donde $r^2 \dot{\theta} = |\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}|$ es la magnitud del momento angular y el ángulo θ representa el argumento de latitud (θ está relacionado con la anomalía verdadera). Multiplicando vectorialmente la ecuación (2) por $\mathbf{r}$ resulta

$$\mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} + D(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (4)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}})$ y utilizando la ecuación (3) podemos expresar (4) como

$$\left(\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) + D(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) r^2 \dot{\theta} \right) \mathbf{N} = 0$$

de donde

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) + D(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) r^2 \dot{\theta} = 0 \quad (5)$$

Hacemos notar que si $D(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0$, de la ecuación (5) se tiene la clásica integral del momento angular kepleriano $r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$. Pero la ecuación (5) también admite otra cuadratura si $D(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \alpha/r^2$, con α una constante, ésta cuadratura será:

$$r^2 \dot{\theta} + \alpha \theta = h_0, \quad (6)$$

donde h_0 es una constante de integración. El modelo obtenido para el coeficiente del frenaje atmosférico, $D(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \alpha/r^2$, coincide con el propuesto por Danby[3]. Llevando éste a la ecuación (4), usando la ecuación (6) e integrando, obtenemos la siguiente integral del momento angular

$$\left(\frac{h_0}{h_0 - \alpha \theta} \right) \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{H} \quad (7)$$

con $\mathbf{H}$ una constante vectorial. Hacemos notar que la integral (7) coincide con la obtenida por Jezewski & Mittleman[5] para el problema de los dos cuerpos con frenaje atmosférico y, además, si no apareciera el frenaje atmosférico ($\alpha = 0$), la ecuación (7) se reduce a la clásica integral del momento angular.

2.2 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Utilizando el modelo de frenaje atmosférico obtenido en la subsección 2.1 e introduciendo el ángulo polar θ (argumento de latitud) como la variable independiente,

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' \dot{\theta}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'' \dot{\theta}^2 + \mathbf{r}' \ddot{\theta},$$

donde $\mathbf{r}'$ denota la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto al ángulo θ , la ecuación (2) se transforma en

$$\dot{\theta}^2 \mathbf{r}'' + \left(\ddot{\theta} + \frac{\alpha \dot{\theta}}{r^2} \right) \mathbf{r}' + F(r) \mathbf{r} = 0 \quad (8)$$

Introduciendo el vector unitario $\zeta = \mathbf{r}/r$ y efectuando el clásico cambio de variable

$$r = \frac{1}{u}, \quad r' = -\frac{u'}{u^2}, \quad r'' = -\frac{u''}{u^2} + 2 \frac{(u')^2}{u^3},$$

la ecuación (8) se transforma en

$$\zeta'' + \left(\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}^2} + \frac{\alpha u^2}{\dot{\theta}} - \frac{2 u'}{u} \right) \zeta' + \left(\frac{2 (u')^2}{u^2} - \frac{u''}{u} - \frac{\ddot{\theta} u'}{\dot{\theta}^2 u} - \frac{\alpha u u'}{\dot{\theta}} + \frac{F(u)}{\dot{\theta}^2} \right) \zeta = 0 \quad (9)$$

Esta ecuación se puede poner en forma abreviada como

$$v = \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}^2} + \frac{\alpha u^2}{\dot{\theta}} - \frac{2 u'}{u} \quad (10)$$

$$\zeta'' + v \zeta' + \left(\frac{F(u)}{\dot{\theta}^2} - \frac{u''}{u} - v \frac{u'}{u} \right) \zeta = 0 \quad (11)$$

Utilizando la cuadratura dada por la ecuación (6) se comprueba sin mucha dificultad que el coeficiente $v = 0$ y la ecuación (11) queda reducida a:

$$\zeta'' + \left(\frac{F(u)}{\dot{\theta}^2} - \frac{u''}{u} \right) \zeta = 0 \quad (12)$$

Además, de la ecuación (6) es posible obtener $\dot{\theta} = (h_0 - \alpha \theta) u^2$ y, por lo tanto, en el coeficiente de ζ aparece la dependencia del frenaje atmosférico. Si suponemos que no aparece frenaje ($\alpha = 0$) y tomamos como función de fuerzas $F(u)$ la correspondiente al problema de los dos cuerpos, resulta que el coeficiente de ζ es igual a 1, dando lugar a la ecuación diferencial de las cónicas keplerianas. Cuando se considera el efecto del frenaje, es decir $\alpha \neq 0$, podemos imponer que el coeficiente de ζ sea igual a 1, dando lugar a las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\zeta'' + \zeta = 0 \quad (13)$$

$$u'' + u = \frac{F(u)}{(h_0 - \alpha \theta)^2 u^3} \quad (14)$$

La solución de la ecuación (13) es inmediata, y va a dar lugar a cónicas, mientras que la solución de la ecuación (14) va a proporcionar la variación del módulo del radio vector, siendo la solución general del problema de la forma

$$r(\theta) = r(\theta) (A \sin \theta + B \cos \theta),$$

con **A** y **B** constantes vectoriales. Para el posterior estudio de la resolución de la ecuación (14) y simplificar las manipulaciones algebraicas, análogamente a Mittleman & Jezewski[6], efectuaremos el cambio de variable independiente $z = h_0/\alpha - \theta$, quedando expresada la ecuación (14) en la forma

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + u = \frac{F(u)}{\alpha^2 z^2 u^3} \quad (15)$$

3. APLICACION AL INTERMEDIARIO RADIAL DE DEPRIT

En esta sección estudiamos la integración de la ecuación (15) cuando la función de fuerzas $F(u)$ deriva de la función potencial correspondiente al intermediario radial propuesto por Deprit [4], que en el caso ecuatorial viene dada por

$$V(r) = -\frac{\mu}{r} - \varepsilon \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta}{p} \right)^2 \frac{1}{r^2}, \quad (16)$$

donde μ es la constante gravitacional, $\varepsilon = J_2$, Θ es el módulo del momento angular que coincide con $|H|$ de la ecuación (7) cuando se toma la condición inicial en $\theta(t_0) = 0$ y $p = \Theta^2/\mu$. Teniendo en cuenta que $\Theta = |H| + O(\alpha)$ y despreciando los términos de orden $O(\varepsilon\alpha)$ en (16), la función de fuerzas $F(r)$ será

$$F(r) = \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{1}{r^3} \left[\mu + \varepsilon \left(\frac{H^2}{p} \right)^2 \frac{1}{r} \right], \quad (17)$$

donde ahora $H = |H|$ y $p = H^2/\mu$ son constantes. Teniendo en cuenta el cambio de variable dependiente ($u = 1/r$) y sustituyendo la expresión (17) en la ecuación (15), la variación del módulo del radio vector viene expresada en la ecuación diferencial de segundo orden no homogénea

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + u = \frac{a_0}{z^2} + \varepsilon \frac{a_1}{z^2} u, \quad (18)$$

donde $a_0 = \frac{\mu}{\alpha^2}$, $a_1 = \frac{H^2}{p^2 \alpha^2}$.

Para la resolución de la ecuación (18) utilizaremos un método de perturbaciones, que es una adaptación del clásico método de Krylov-Bogoliubov[8].

En el caso del problema no perturbado ($\varepsilon = 0$), la ecuación (18) se reduce a

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + u = \frac{a_0}{z^2},$$

y corresponde a la ecuación del movimiento del problema de los dos cuerpos con frenaje atmosférico. Este problema fue resuelto analíticamente por Mittleman & Jezewski[6], que obtuvieron la siguiente solución

$$u(z) = e_0 \cos(z - z_0) + a_0 g(z),$$

donde e_0, z_0 son constantes de integración y la función $g(z)$ viene expresada por

$$g(z) = \int_0^{\infty} \frac{\tau e^{-z\tau}}{\tau^2 + 1} d\tau,$$

(para más detalles sobre la función $g(z)$ ver el apéndice final). Esta solución del problema no perturbado será de gran utilidad a la hora de adaptar el método de Krylov-Bogoliubov a la resolución de la ecuación (18)

3.1 EL METODO ADAPTADO DE KRYLOV-BOLIUBOV

Este método es válido para la resolución de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + u = h(z) + \varepsilon f(z, u; \varepsilon) \quad (19)$$

por medio de aproximaciones asintóticas, siendo ε un pequeño parámetro. Para la resolución de la ecuación (19), buscaremos una solución de la forma

$$u(z) = u_0(z) + \varepsilon u_1(z, \delta, \phi) + \varepsilon^2 u_2(z, \delta, \phi) + \dots, \quad (20)$$

donde $u_0(z) = \delta \cos \phi + g(z)$ representa la solución formal del problema no perturbado ($\varepsilon = 0$), las funciones $u_i(z, \delta, \phi)$ son funciones periódicas del argumento ϕ con periodo 2π y las variables δ y ϕ son funciones de la variable independiente z que vienen expresadas en forma asintótica por

$$\frac{d\delta}{dz} = \varepsilon A_1(z, \delta) + \varepsilon^2 A_2(z, \delta) + \dots \quad (21a)$$

$$\frac{d\phi}{dz} = 1 + \varepsilon B_1(z, \delta) + \varepsilon^2 B_2(z, \delta) + \dots \quad (21b)$$

Entonces, hemos de encontrar las expresiones de las funciones $u_i(z, \delta, \phi)$, $A_i(z, \delta)$ y $B_i(z, \delta)$ de manera que la ecuación (20), después de sustituir las expresiones de δ y ϕ por las funciones definidas en (21a) y (21b), verifique la ecuación diferencial (19).

Derivando en la ecuación (20) resulta

$$\begin{aligned}\frac{du}{dz} &= g'(z) + \sum_{n \geq 1} \epsilon^n \frac{\partial u_n}{\partial z} + \left(\cos \phi + \sum_{n \geq 1} \epsilon^n \frac{\partial u_n}{\partial \delta} \right) \frac{d\delta}{dz} + \left(-\delta \operatorname{sen} \phi + \sum_{n \geq 1} \epsilon^n \frac{\partial u_n}{\partial \phi} \right) \frac{d\phi}{dz} \\ \frac{d^2u}{dz^2} &= g''(z) + \sum_{n \geq 1} \epsilon^n \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \left(\cos \phi + \sum_{n \geq 1} \epsilon^n \frac{\partial u_n}{\partial \delta} \right) \frac{d^2\delta}{dz^2} + \left(-\delta \operatorname{sen} \phi + \sum_{n \geq 1} \epsilon^n \frac{\partial u_n}{\partial \phi} \right) \frac{d^2\phi}{dz^2} + \\ &\quad + \left(\sum_{n \geq 1} \epsilon^n \frac{\partial^2 u_n}{\partial \delta^2} \right) \left(\frac{d\delta}{dz} \right)^2 + \left(-\delta \cos \phi + \sum_{n \geq 1} \epsilon^n \frac{\partial^2 u_n}{\partial \phi^2} \right) \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 + \\ &\quad + 2 \left(-\operatorname{sen} \phi + \sum_{n \geq 1} \epsilon^n \frac{\partial^2 u_n}{\partial \delta \partial \phi} \right) \frac{d\delta}{dz} \frac{d\phi}{dz}\end{aligned}$$

Análogamente, derivando en las ecuaciones (21a), (21b) y truncando hasta los términos de segundo orden

$$\frac{d^2\delta}{dz^2} = \epsilon \frac{\partial A_1}{\partial z} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial A_2}{\partial z} + A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \delta} \right) + 0(\epsilon^3), \quad \frac{d^2\phi}{dz^2} = \epsilon \frac{\partial B_1}{\partial z} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial z} + A_1 \frac{\partial B_1}{\partial \delta} \right) + 0(\epsilon^3)$$

$$\left(\frac{d\delta}{dz} \right)^2 = \epsilon^2 A_1^2 + 0(\epsilon^3), \quad \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 = 1 + \epsilon 2B_1 + \epsilon^2 (B_1^2 + 2B_2) + 0(\epsilon^3)$$

$$\frac{d\delta}{dz} \frac{d\phi}{dz} = \epsilon A_1 + \epsilon^2 (A_1 B_1 + A_2) + 0(\epsilon^3)$$

Sustituyendo estas expresiones en la expresión de la derivada segunda de la función u y truncando los términos de orden mayor que dos resulta

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dz^2} &= g''(z) - \delta \cos \phi + \epsilon \left\{ - \left(2A_1 + \delta \frac{\partial B_1}{\partial z} \right) \operatorname{sen} \phi - \left(2\delta B_1 - \frac{\partial A_1}{\partial z} \right) \cos \phi + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \phi^2} \right\} \\ &\quad + \epsilon^2 \left\{ \left(\frac{\partial A_2}{\partial z} + A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \delta} - \delta B_1^2 - 2\delta B_2 \right) \cos \phi - \left(\delta \frac{\partial B_2}{\partial z} + \delta A_1 \frac{\partial B_1}{\partial \delta} + 2A_2 + 2A_1 B_1 \right) \operatorname{sen} \phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial \delta} + \frac{\partial B_1}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial \phi} + 2A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \delta \partial \phi} + 2B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \phi^2} \right\} + 0(\epsilon^3)\end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (19) y suponiendo que la función $f(z, u; \epsilon)$ admite un desarrollo en potencias del pequeño parámetro ϵ en la forma

$$f(z, u; \epsilon) = f_0(z, u) + \epsilon f_1(z, u) + \epsilon^2 f_2(z, u) + \dots,$$

e identificando términos del mismo orden, hasta orden dos, obtenemos las siguientes relaciones

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \phi^2} + u_1 = F_1(z, \delta, \phi, A_1, B_1, \frac{\partial A_1}{\partial z}, \frac{\partial B_1}{\partial z}), \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \phi^2} + u_2 = F_2(z, \delta, \phi, A_2, B_2, \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial B_2}{\partial z}), \quad (23)$$

siendo las funciones F_i periódicas en la variable ϕ con periodo 2π . Teniendo en cuenta que las funciones $u_i(z, \delta, \phi)$, son periódicas en la variable ϕ con periodo 2π , éstas, admitirán un desarrollo en serie de Fourier de la forma

$$u_i(z, \delta, \phi) = a_{i,0}(z, \delta) + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_{i,n}(z, \delta) \cos n\phi + b_{i,n}(z, \delta) \sin n\phi)], i \geq 1 \quad (24)$$

Llevando estas expresiones de las u_i a las ecuaciones en derivadas parciales (22) y (23) y resolviendo en las incógnitas $a_{i,n}$, $b_{i,n}$, A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , obtendríamos una solución asintótica de segundo orden para la ecuación (19).

3.2 RESOLUCION DE LA ECUACION (18)

Siguiendo el proceso de cálculo desarrollado en el epígrafe 3.1 e identificando términos en ϵ y ϵ^2 obtenemos

Términos en ϵ :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \phi^2} + u_1 = \frac{a_0 a_1}{z^2} g(z) + \left(2A_1 + \delta \frac{\partial B_1}{\partial z} \right) \sin \phi + \left(\frac{a_1}{z^2} \delta + 2\delta B_1 - \frac{\partial A_1}{\partial z} \right) \cos \phi, \quad (25)$$

Teniendo en cuenta que la función u_1 admite un desarrollo en serie de Fourier dado por la ecuación (24), identificando términos en seno y coseno resulta

$$\frac{\partial^2 a_{1n}}{\partial z^2} + (1 - n^2) a_{1n} = 0, \quad \frac{\partial^2 b_{1n}}{\partial z^2} + (1 - n^2) b_{1n} = 0, \quad n \geq 2 \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial z^2} = \frac{a_1}{z^2} \delta + 2\delta B_1 - \frac{\partial A_1}{\partial z} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 b_{11}}{\partial z^2} = 2A_1 + \delta \frac{\partial B_1}{\partial z} \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 a_{10}}{\partial z^2} + a_{10} = \frac{a_0 a_1}{z^2} g(z) \quad (29)$$

Se comprueba fácilmente que imponiendo que $\delta = \text{cte.}$ y el coeficiente $a_{1,1} = 0$, soluciones particulares de las ecuaciones (26), (27) y (28) son

$$A_1 = 0, \quad B_1 = -\frac{a_1}{2z^2}, \quad b_{1,1} = \frac{a_1}{2z} \delta,$$

$$a_{1,n} = b_{1,n} = 0, \quad n \geq 2$$

Para encontrar una solución particular de la ecuación (29) utilizaremos la técnica de desarrollar en serie de potencias, buscando una solución asintótica de la forma (Olver[7])

$$a_{1,0}(z) = \frac{a_0 a_1}{z^4} + \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{z^n}, \quad 1 < z < \infty,$$

llevando esta expresión a la ecuación (29), obtenemos

$$c_0 = 1, \quad c_{2n-1} = 0, \quad n \geq 1$$

$$c_{2n} = (-1)^n \left\{ (2n+1)! + \sum_{j=1}^n (2n+3)(2n+2) \dots (2n-2j+4)(2n-2j+1)! \right\}, \quad n \geq 1$$

En estas condiciones, el término de primer orden de la solución será

$$u_1(z, \delta, \phi) = a_{1,0}(z) + \frac{a_1}{2z} \delta \sin \phi \quad (30)$$

Términos en ε^2 :

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \phi^2} + u_2 = \frac{a_0 a_{10}(z)}{z^2} + \left(2A_2 + \delta \frac{\partial B_2}{\partial z} \right) \sin \phi + \left(2\delta B_2 - \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{a_1^2}{4z^2} \delta \right) \cos \phi, \quad (31)$$

Considerando u_2 expresada como en (24) y procediendo como en el caso anterior, tenemos

$$\frac{\partial^2 a_{2n}}{\partial z^2} + (1 - n^2) a_{2n} = 0, \quad \frac{\partial^2 b_{2n}}{\partial z^2} + (1 - n^2) b_{2n} = 0, \quad n \geq 2 \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 a_{21}}{\partial z^2} = 2\delta B_2 - \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{a_1^2}{4z^2} \delta \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 b_{11}}{\partial z^2} = 2A_2 + \delta \frac{\partial B_2}{\partial z} \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 a_{20}}{\partial z^2} + a_{20} = \frac{a_1}{z^2} a_{10}(z) \quad (35)$$

De forma similar al caso anterior obtenemos soluciones particulares para las ecuaciones (32), (33) y (34) dadas por

$$A_2 = 0, \quad B_2 = \frac{a_1^2}{8z^4}, \quad a_{2,1} = 0, \quad b_{2,1} = -\frac{a_1^2}{24z^3} \delta,$$

$$a_{2,n} = b_{2,n} = 0, \quad n \geq 2$$

La resolución de (35) se realizará buscando una solución particular desarrollada en serie de potencias en la forma (Olver[7])

$$a_{2,0}(z) = \frac{a_0 a_1^2}{z^6} + \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{z^n}, \quad 1 < z < \infty,$$

llevando esta expresión a la ecuación (35), obtenemos

$$b_0 = c_0, \quad b_{2n-1} = 0, \quad n \geq 1$$

$$b_{2n} = c_{2n} + \sum_{j=1}^n \{ (-1)^j (2n+5)(2n+4) \dots (2n-2j+6) c_{2n-2j} \}, \quad n \geq 1$$

El término de segundo orden de la solución (20) será

$$u_2(z, \delta, \phi) = a_{2,0}(z) - \frac{a_1^2}{24z^3} \delta \sin \phi. \quad (36)$$

Por otra parte, el sistema (21a-b) se reduce a

$$\frac{d\delta}{dz} = 0 + O(\epsilon^3)$$

$$\frac{d\phi}{dz} = 1 - \epsilon \frac{a_1}{2z^2} + \epsilon^2 \frac{a_1^2}{8z^4} + O(\epsilon^3),$$

de donde, integrando se tiene

$$\delta = \delta_0 + O(\epsilon^3) \quad (37)$$

$$\phi = (z - z_0) + \epsilon \frac{a_1}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right) - \epsilon^2 \frac{a_1^2}{24} \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z_0^3} \right) + O(\epsilon^3) \quad (38)$$

y la solución de la ecuación (18) hasta segundo orden viene dada por

$$u(z) = \delta \cos \phi + a_0 g(z) + \epsilon \left(a_{10}(z) + \frac{a_1}{2z} \delta \sin \phi \right) + \epsilon^2 \left(a_{20}(z) - \frac{a_1^2}{24z^3} \delta \sin \phi \right)$$

Entonces, la solución para el vector de posición $r(\theta)$ será de la forma

$$r(\theta) = r(\theta) (A \sin \theta + B \cos \theta), \quad (39)$$

con A y B constantes vectoriales y $r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)}$

Despejando en la ecuación (6) y teniendo en cuenta que $r = r(\theta)$, la ecuación del tiempo viene dada por la siguiente cuadratura

$$t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(r(\theta))^2}{(h_0 - \alpha \theta)} d\theta \quad (24)$$

que de acuerdo con la expresión de $r(\theta)$ no es integrable en función de funciones elementales y habrá de resolverse mediante alguna fórmula de cuadratura numérica estandar, por ejemplo, fórmulas gaussianas, integración de Romberg, etc.

4. ILUSTRACIONES GRAFICAS

En las figuras presentadas a continuación ilustramos los efectos del frenaje atmosférico, α , sobre la distancia radial $r(\theta) = 1/u(\theta)$. Se eligieron los valores de las constantes h_0 y μ iguales a 1 y distintos valores de δ y ϵ .

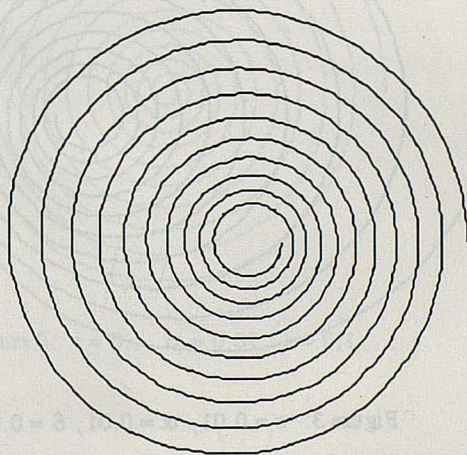


Figura 1: $\epsilon = 0.01$, $\alpha = 0.01$, $\delta = 0.1$

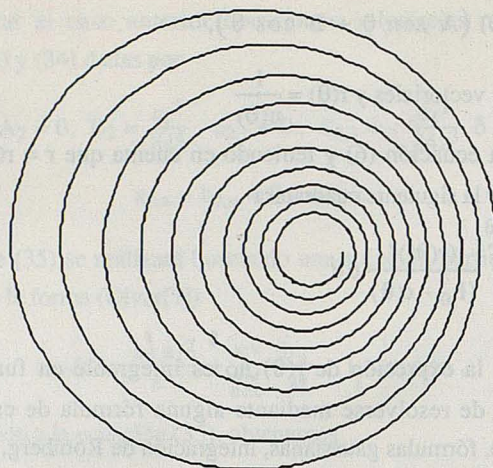


Figura 2: $\epsilon = 0.01$, $\alpha = 0.01$, $\delta = 0.3$

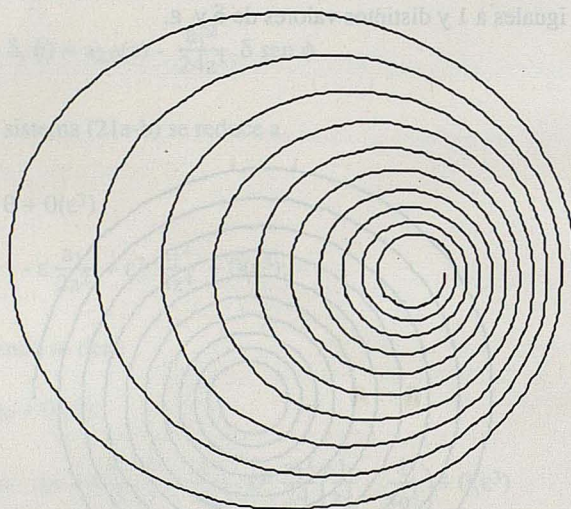


Figura 3: $\epsilon = 0.01$, $\alpha = 0.01$, $\delta = 0.5$

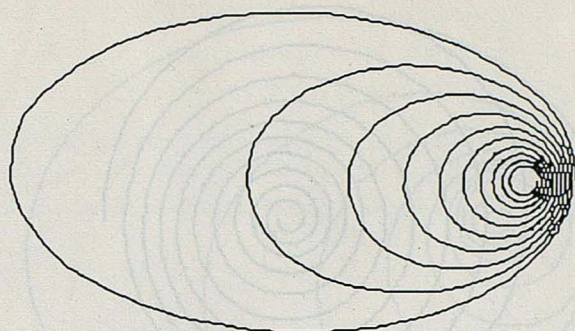


Figura 4: $\epsilon = 0.01$, $\alpha = 0.01$, $\delta = 0.9$

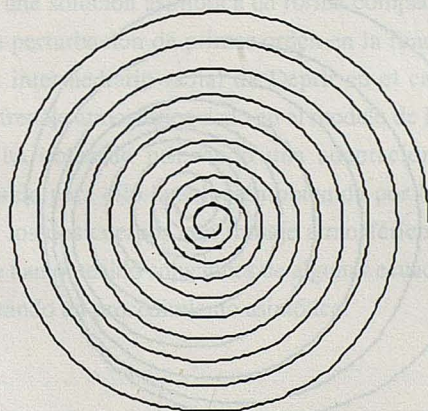


Figura 5: $\epsilon = 0.1$, $\alpha = 0.01$, $\delta = 0.1$

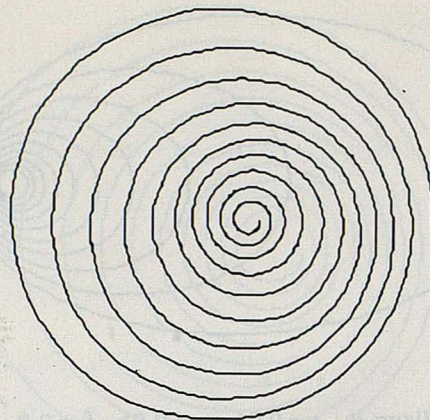


Figura 6: $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 0.01$, $\delta = 0.3$

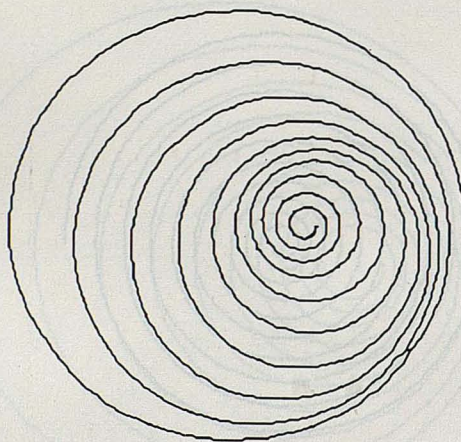


Figura 7: $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 0.01$, $\delta = 0.5$

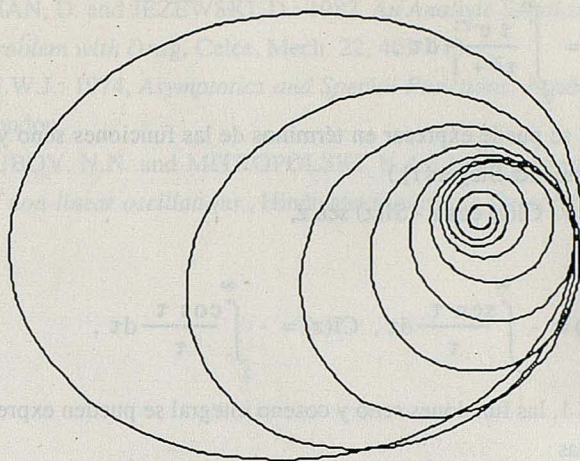


Figura 8: $\epsilon = 0.1$, $\alpha = 0.01$, $\delta = 0.9$

5. CONCLUSIONES

Hemos obtenido una solución asintótica en forma compacta para el problema de los dos cuerpos con una perturbación de primer orden en la función potencial del tipo $1/r^2$ (que corresponde al intermediario radial de Deprit en el caso ecuatorial) incluyendo además el efecto del frenaje atmosférico dado en el modelo de Danby[3].

La solución se ha obtenido utilizando una adaptación del método de Krylov-Bogoliubov, empleando para ello la solución obtenida por Mittleman and Jezewski[6] para el problema de los dos cuerpos con frenaje atmosférico como solución inicial del proceso. También se han obtenido soluciones de algunas ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas utilizando un procedimiento asintótico.

APENDICE:

Utilizando la técnica de la transformada inversa de Laplace, Mittleman & Jezewski[6] obtienen la solución

$$u(z) = e_0 \cos(z - z_0) + a_0 g(z),$$

para la ecuación

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + u = \frac{a_0}{z^2},$$

donde e_0 , z_0 son constantes de integración y la función $g(z)$ viene expresada como

$$g(z) = \int_0^{\infty} \frac{\tau e^{-z\tau}}{\tau^2 + 1} d\tau,$$

Esta función se puede expresar en términos de las funciones seno y coseno integral como (ver Abramowitz-Stegun[1])

$$g(z) = -CI(z) \cos z - SI(z) \sin z,$$

donde

$$SI(z) = - \int_z^{\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau, \quad CI(z) = - \int_z^{\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau,$$

Para $0 < z \leq 1$, las funciones seno y coseno integral se pueden expresar mediante las series de potencias

$$SI(z) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad SI(z) = \gamma_0 + \ln z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n(2n)!},$$

donde γ_0 es la constante de Euler $\gamma_0 = 0.5772156649015328606 \dots$

Para $1 < z < \infty$, se puede obtener un desarrollo asintótico de la función $g(z)$ en la forma

$$g(z) = \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{3!}{z^2} + \frac{5!}{z^4} - \frac{7!}{z^6} + \dots \right)$$

AGRADECIMIENTOS

La realización de este trabajo ha sido parcialmente subvencionada por el proyecto PB87-0637 de la CICYT.

REFERENCIAS

- [1] - ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.: 1972, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York.
- [2] - BROUWER, D. and HORI, G.: 1961, *Astron. J.* 66, 193
- [3] - DANBY, J.M.A.: 1962, *Fundamentals of Celestial Mechanics*, MacMillan Co., New York.
- [4] - DEPRIT, A.: 1981, *The Elimination of the Parallax in Satellite Theory*, *Celest. Mech.* 24, 111-153.
- [5] - JEZEWSKI, D. and MITTLEMAN, D.: 1983, *Integrals of Motion for the Classical Two-Body Problem with Drag*, *Int. J. Non-Linear Mech.* 18, 119-124.

- [6] - MITTLEMAN, D. and JEZEWSKI, D.: 1982, *An Analytic Solution to the Classical Two-body Problem with Drag*, Celes. Mech. 22, 401-413.
- [7] - OLVER, F.W.J.: 1974, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York and London.
- [8] - BOGOLIUBOV, N.N. and MITROPOLSKI, Y.A.: 1961, *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*, Hindustan Publishing Corporation, New Delhi.

SERIES DE LIE E INTEGRALES PRIMERAS DEL PROBLEMA DEL GIROSTATO CON UN PUNTO FIJO EN UN CAMPO CENTRAL NEWTONIANO DE POTENCIAL $V^{(2)}$

R. MOLINA Y A. VIGUERAS

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. E.T.S. de
Ingenieros Industriales de Cartagena. Universidad de Murcia.

In this paper, we recall some results about the Lie Series and their application to obtain the first integrals of a system of ordinary differential equations. The problem of rotational motion of a stationary gyrostato about a fixed point in a central Newtonian force field is considered. We prove that for complete integration of the equations of motion it is sufficient to find four independent first integrals. By using the above mentioned results, the first integrals of this problem are obtained. Some integrable cases of this problem are given.

1.- SERIES DE LIE GENERALIZADAS E INTEGRALES PRIMERAS DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

Sean

$$f_m(t, z_1, z_2, \dots, z_n), \quad m = 0, 1, \dots, n$$

$(n+1)$ funciones analíticas definidas en G , entorno del origen de $\mathbb{C}^{n+1}$, y consideremos el operador diferencial lineal W dado por la expresión

$$W = f_0(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n f_k(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_k} \quad (1.1)$$

Entonces, si $f(t, z_1, z_2, \dots, z_n)$ es una función analítica sobre G y definimos

$$W^0 f \equiv f ; \quad W^n \equiv W(W^{n-1} f)$$

podemos dar la siguiente

Definición.- Una serie de la forma

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} W^s f(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (1.2)$$

es llamada *serie de Lie generalizada*.

Si $f_0(t, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$ y las funciones f_k ($k = 1, 2, \dots, m$) y f no dependen del tiempo, las series (1.2) anteriores se denominan *series de Lie ordinarias*.

Entre las propiedades más importantes de este tipo de series están las siguientes (Leimanis (1965), pp.128-131):

Teorema.- (Propiedad de permutabilidad)

Sean

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} W^s z_i = u_i ; \quad \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} W^s t = u_0$$

y $F(t, z_1, z_2, \dots, z_n)$ una función analítica en un entorno del origen, cuyo desarrollo en serie de potencias converge en el punto $(u_0, u_1, \dots, u_n)$. Entonces, se verifica que

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} W^s F(t, z_1, z_2, \dots, z_n) = \\ & = F\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} W^s t, \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} W^s z_1, \dots, \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} W^s z_n\right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Teorema.- Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d}{dt} z_i = f_i(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

donde las funciones $f_i(t, z_1, z_2, \dots, z_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, son analíticas en el intervalo compacto

$$I = \prod_0^n [-\alpha_i, \alpha_i]$$

entonces, n integrales primeras independientes del sistema (1.4) son de la forma

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s t^s}{s!} W^s \{z_i\} = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

donde c_i son constantes arbitrarias y W es un operador de la forma

$$W = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n f_k(t, z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_k} \quad (1.6)$$

Además, las series (1.5) convergen absoluta y uniformemente en el dominio Q dado por

$$Q = [-T, T] \times \prod_{i=1}^n [-\mu \alpha, \mu \alpha]$$

donde

$$M = \max_i |f_i| \quad ; \quad \alpha = \min_{i=1, 2, \dots, n} \{\alpha_i\} \quad ; \quad 0 < \mu < 1$$

y

$$T < \min \left\{ \mu \alpha, \frac{\alpha(1-\mu)^{n+2}}{M(n+2)} \right\}$$

Si el sistema (1.4) fuese autónomo, sus integrales primeras serian

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s t^s}{s!} U^s \{z_i\} = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.5')$$

donde c_i son constantes arbitrarias y U es un operador de la forma

$$U = \sum_{k=1}^n f_k(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_k} \quad (1.6')$$

Las integrales primeras encontradas para casos particulares no son de la forma (1.5'), sino que van a representar ciertas combinaciones de las integrales (1.5'). De hecho, se va a verificar la siguiente

Proposición.- En las anteriores condiciones, si $F(z_1, \dots, z_n)$ es una función analítica de n variables, entonces una integral primera de (1.4) tiene la forma

$$F\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s t^s}{s!} U^s z_1, \dots, \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s t^s}{s!} U^s z_n\right) = c$$

siendo c una constante arbitraria, que, en virtud de (1.3), puede escribirse como sigue

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s t^s}{s!} U^s \{F(z_1, z_2, \dots, z_n)\} = c \quad (1.7)$$

2.- PROBLEMA DEL GIROSTATO CON UN PUNTO FIJO EN UN CAMPO CENTRAL NEWTONIANO DE POTENCIAL $V^{(2)}$.

Las ecuaciones del movimiento para el problema del giróstat S con un punto fijo O en un campo central newtoniano de potencial V , vienen dadas por:

$$\dot{\vec{l}} + \dot{\vec{l}}_r + \vec{\omega} \wedge (\vec{l} + \vec{l}_r) = \vec{k} \wedge \text{grad}_{\vec{k}} V \quad (2.1)$$

$$\dot{\vec{k}} + \vec{\omega} \wedge \vec{k} = \vec{0} \quad (2.2)$$

donde $\vec{l} = (I_1 w_1, I_2 w_2, I_3 w_3)$, con I_1, I_2, I_3 momentos principales de inercia de S en O , $\vec{\omega} = (w_1, w_2, w_3)$ la velocidad instantánea de rotación de la parte rígida del giróstat con respecto a un sistema de referencia fijo o inercial $OX_1 X_2 X_3$, $\vec{l}_r$ el momento girostático, que supondremos constante, $\vec{l}_r = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ el vector unitario del eje OX_3 expresado en el sistema móvil.

En lo sucesivo, y como es habitual, el potencial V será aproximado por $V^{(2)}$ que, salvo una constante, está dado por

$$V^{(2)} = mg(x_1 k_1 + x_2 k_2 + x_3 k_3) + \frac{3}{2} \frac{g}{r} (I_1 k_1^2 + I_2 k_2^2 + I_3 k_3^2) \quad (2.3)$$

siendo (x_1, x_2, x_3) el vector del centro de masas en el sistema móvil, m la masa total del giróstato, g la aceleración de la gravedad a la distancia r del centro de atracción P , constante en nuestro caso.

Con todo esto, el sistema de ecuaciones del movimiento (2.1)-(2.2) se escribe en forma normal:

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \{(I_2 - I_3)w_2w_3 - w_2a_3 + w_3a_2 + m_0(k_2x_3 - k_3x_2) + m_1(I_3 - I_2)k_2k_3\}/I_1 \\ \dot{w}_2 &= \{(I_3 - I_1)w_1w_3 - w_3a_1 + w_1a_3 + m_0(k_3x_1 - k_1x_3) + m_1(I_1 - I_3)k_1k_3\}/I_2 \quad (2.4) \\ \dot{w}_3 &= \{(I_1 - I_2)w_1w_2 - w_1a_2 + w_2a_1 + m_0(k_1x_2 - k_2x_1) + m_1(I_2 - I_1)k_1k_2\}/I_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{k}_1 &= k_2w_3 - k_3w_2 \\ \dot{k}_2 &= k_3w_1 - k_1w_3 \\ \dot{k}_3 &= k_1w_2 - k_2w_1\end{aligned} \quad (2.5)$$

siendo $m_0 = m g$, $m_1 = 3 g/r$.

Procediendo como en el caso del sólido pesado, si escogemos una de las variables, por ejemplo w_1 como independiente, necesitaremos solamente determinar cinco funciones incógnitas $(w_2, w_3, k_1, k_2, k_3)$, ya que el tiempo viene dado por la cuadratura

$$t = \int I_1 [(I_2 - I_3)w_2w_3 - w_2a_3 + w_3a_2 + m_0(k_2x_3 - k_3x_2) + m_1(I_3 - I_2)k_2k_3]^{-1} dw_1$$

Resolviendo esta ecuación con respecto a $w_1 = w_1(t)$ y sustituyendo esta expresión en las obtenidas previamente, tendremos un conjunto de funciones $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$, $k_3(t)$ que resuelven nuestro problema. Vemos, por tanto, que dicho problema queda reducido a la obtención de cinco integrales primeras independientes y una cuadratura.

Por simplificar la notación, representemos por A_1 , A_2 , A_3 ,

a los segundos miembros de (2.4) y por B_1, B_2, B_3 a los segundos miembros de (2.5), de manera que el anterior sistema quedaria:

$$\dot{w}_1 = A_1, \dot{w}_2 = A_2, \dot{w}_3 = A_3 \quad (2.4')$$

$$\dot{k}_1 = B_1, \dot{k}_2 = B_2, \dot{k}_3 = B_3 \quad (2.5')$$

Observemos que w_i no figura en A_i , ni k_i en B_i para cada $i = 1, 2, 3$. Por consiguiente

$$\frac{\partial A_i}{\partial w_i} = \frac{\partial B_i}{\partial k_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

y así

$$\frac{\partial A_1}{\partial w_1} + \frac{\partial A_2}{\partial w_2} + \frac{\partial A_3}{\partial w_3} + \frac{\partial B_1}{\partial k_1} + \frac{\partial B_2}{\partial k_2} + \frac{\partial B_3}{\partial k_3} = 0$$

Pero esta es la condición para que exista un multiplicador $\mu = 1$, según la teoría del último multiplicador de Jacobi. Por lo tanto sólo son necesarias cuatro integrales primeras independientes, puesto que la quinta, en virtud de la mencionada teoría, puede ser obtenida por una cuadratura.

En resumen, se ha probado para nuestro problema la siguiente

Proposición.- La integral general del problema dado por (2.4)-(2.5) puede obtenerse, al menos teóricamente, tan pronto como sean conocidas cuatro integrales primeras independientes.

3.- INTEGRALES PRIMERAS DEL PROBLEMA PLANTEADO.

A continuación veremos el número de integrales de que podemos disponer siempre, y los problemas que pueden ser resueltos de este modo.

Consideremos el operador Γ dado por

$$\Gamma = A_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + A_2 \frac{\partial}{\partial w_2} + A_3 \frac{\partial}{\partial w_3} + B_1 \frac{\partial}{\partial k_1} + B_2 \frac{\partial}{\partial k_2} + B_3 \frac{\partial}{\partial k_3} \quad (3.1)$$

y apliquemos los resultados del primer párrafo para probar las siguientes

Proposición.- El sistema (2.4)-(2.5) admite las siguientes integrales primeras:

$$k_1 (I_1 w_1 + a_1) + k_2 (I_2 w_2 + a_2) + k_3 (I_3 w_3 + a_3) = c \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{2} (I_1 w_1^2 + I_2 w_2^2 + I_3 w_3^2) + V^{(2)} = h_0 \quad (3.3)$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1 \quad (3.4)$$

Demostración: Por (1.7), sabemos que si $F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3)$ es una función analítica, entonces

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s t^s}{s!} \Gamma^s F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3) = c$$

es una integral primera. Así, tomando en primer lugar

$$F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3) = k_1(I_1 w_1 + a_1) + k_2(I_2 w_2 + a_2) + k_3(I_3 w_3 + a_3)$$

resulta que

$$\Gamma^0 F = F$$

$$\begin{aligned} \Gamma F = & \frac{1}{I_1} \{ (I_2 - I_3) w_2 w_3 - w_2 a_3 + w_3 a_2 + m_0 (k_2 x_3 - k_3 x_2) + m_1 (I_3 - I_2) k_2 k_3 \} I_1 k_1 + \\ & + \frac{1}{I_2} \{ (I_3 - I_1) w_1 w_3 - w_3 a_1 + w_1 a_3 + m_0 (k_3 x_1 - k_1 x_3) + m_1 (I_1 - I_3) k_1 k_3 \} I_2 k_2 + \\ & + \frac{1}{I_3} \{ (I_1 - I_2) w_1 w_2 - w_1 a_2 + w_2 a_1 + m_0 (k_1 x_2 - k_2 x_1) + m_1 (I_2 - I_1) k_1 k_2 \} I_3 k_3 + \\ & - (k_3 w_2 - k_2 w_3) (I_1 w_1 + a_1) - (k_1 w_3 - k_3 w_1) (I_2 w_2 + a_2) - \\ & - (k_2 w_1 - k_1 w_2) (I_3 w_3 + a_3) = 0 \end{aligned}$$

y así $\Gamma^s F = 0 \quad \forall s > 1$, con lo que

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s t^s}{s!} \Gamma^s F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3) = F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3)$$

y

$$k_1(I_1 w_1 + a_1) + k_2(I_2 w_2 + a_2) + k_3(I_3 w_3 + a_3) = c$$

es una integral primera.

Para demostrar (3.3) y (3.4) actuamos de igual forma que en (3.2), considerando (resp.) las funciones analíticas

$$F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{2} (I_1 w_1^2 + I_2 w_2^2 + I_3 w_3^2) + V^{(2)}$$

$$F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3) = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \quad \blacksquare$$

Estudiemos algunos casos particulares en los que existe una cuarta integral algebraica:

Proposición.- Si el centro de masas coincide con el punto fijo y el momento girostático se anula, obtendremos una cuarta integral dada por

$$I_1^2 w_1^2 + I_2^2 w_2^2 + I_3^2 w_3^2 - m_1(I_2 I_3 k_1^2 + I_1 I_3 k_2^2 + I_1 I_2 k_3^2) = c \quad (3.5)$$

Demostración: Sea F la función analítica definida por:

$$F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3) = I_1^2 w_1^2 + I_2^2 w_2^2 + I_3^2 w_3^2 - m_1(I_2 I_3 k_1^2 + I_1 I_3 k_2^2 + I_1 I_2 k_3^2)$$

y sea Γ el operador dado por (3.1). Entonces es inmediato el probar que

$$\Gamma^0 F = F$$

$$\begin{aligned} \Gamma F = & 2I_1 w_1 \{ (I_2 - I_3)(w_2 w_3 - m_1 k_2 k_3) \} + 2m_1 I_2 I_3 k_1 (w_2 k_3 - w_3 k_2) + \\ & + 2I_2 w_2 \{ (I_3 - I_1)(w_1 w_3 - m_1 k_1 k_3) \} + 2m_1 I_1 I_3 k_2 (w_3 k_1 - w_1 k_3) + \\ & + 2I_3 w_3 \{ (I_1 - I_2)(w_1 w_2 - m_1 k_1 k_2) \} + 2m_1 I_1 I_2 k_3 (w_1 k_2 - w_2 k_1) = 0 \end{aligned}$$

con lo cual

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s t^s}{s!} \Gamma^s F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3) = F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3)$$

y entonces

$$I_1^2 w_1^2 + I_2^2 w_2^2 + I_3^2 w_3^2 - m_1(I_2 I_3 k_1^2 + I_1 I_3 k_2^2 + I_1 I_2 k_3^2) = c$$

es una integral primera en virtud de (1.7). $\blacksquare$

Proposición.- Si el centro de masas coincide con el punto fijo y si el giróstato es simétrico ($I_1 = I_2$), estando además el momento girostático sobre el eje de simetría ($a_1 = a_2 = 0$), entonces existe la integral

$$w_1^2 + w_2^2 + \left(\frac{I_3 w_3 + a_3}{I_1} \right)^2 - m_1 \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1} \right) k_3^2 = c \text{ (cte)} \quad (3.6)$$

Demostración: Sea F la función analítica dada por

$$F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3) = w_1^2 + w_2^2 + \left(\frac{I_3 w_3 + a_3}{I_1} \right)^2 - m_1 \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1} \right) k_3^2$$

y Γ el operador (2.6), que, si lo escribimos en las hipótesis de esta proposición, tiene la forma

$$\begin{aligned} \Gamma = & \{ (I_1 - I_3) w_2 w_3 - w_2 a_3 + m_1 (I_3 - I_1) k_2 k_3 \} / I_1 \frac{\partial}{\partial w_1} \\ & + \{ (I_3 - I_1) w_1 w_3 + w_1 a_3 + m_1 (I_1 - I_3) k_1 k_3 \} / I_2 \frac{\partial}{\partial w_2} \\ & - (w_2 k_3 - w_3 k_2) \frac{\partial}{\partial k_1} - (w_3 k_1 - w_1 k_3) \frac{\partial}{\partial k_2} - (w_1 k_2 - w_2 k_1) \frac{\partial}{\partial k_3} \end{aligned}$$

Así, es inmediato el comprobar que

$$\Gamma^0 F = F \quad ; \quad \Gamma^s F = 0 \quad \forall s \geq 1$$

con lo que

$$\sum_{s=0}^x \frac{(-1)^s t^s}{s!} \Gamma^s F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3) = F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3)$$

y entonces

$$w_1^2 + w_2^2 + \left(\frac{I_3 w_3 + a_3}{I_1} \right)^2 - m_1 \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1} \right) k_3^2 = \text{cte}$$

es una integral primera.

De igual forma se demuestran las siguientes proposiciones:

Proposición.- Si el centro de masas coincide con el punto fijo y si el giróstato es esférico ($I_1 = I_2 = I_3$), se obtiene la integral

$$(I_1 w_1 + a_1)^2 + (I_2 w_2 + a_2)^2 + (I_3 w_3 + a_3)^2 = c^2 \quad (3.7)$$

Proposición.- Si el giróstato es esférico, aunque el centro de masas no coincida con el punto fijo, siendo $\vec{l}_r = \lambda \vec{r}_0$ ($\vec{l}_r$ es nulo ó paralelo a $\vec{r}_0$), entonces existe la integral

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 = a = \text{cte} \quad (3.8)$$

donde $\vec{r}_0 = (x_1, x_2, x_3)$.

Proposición.- Si el giróstato es simétrico y tanto $\vec{l}_r$ como $\vec{r}_0$ están sobre el eje de simetría (es decir, se verifican $I_1 = I_2$; $a_1 = a_2 = 0$; $x_1 = x_2 = 0$), entonces tenemos la cuarta integral

$$w_3 = \text{cte} \quad (3.9)$$

Demostración: Si con las actuales hipótesis escribimos Γ tendremos

$$\begin{aligned} \Gamma = & \{ (I_1 - I_3) w_2 w_3 - w_2 a_3 + m_0 k_2 x_3 + m_1 (I_3 - I_1) k_2 k_3 \} / I_1 \frac{\partial}{\partial w_1} \\ & + \{ (I_3 - I_1) w_1 w_3 + w_1 a_3 - m_0 k_1 x_3 + m_1 (I_1 - I_3) k_1 k_3 \} / I_2 \frac{\partial}{\partial w_2} \\ & - (w_2 k_3 - w_3 k_2) \frac{\partial}{\partial k_1} - (w_3 k_1 - w_1 k_3) \frac{\partial}{\partial k_2} - (w_1 k_2 - w_2 k_1) \frac{\partial}{\partial k_3} \end{aligned}$$

Sea entonces

$$F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3) = w_3$$

Por lo tanto se verifica $\Gamma F = 0$ trivialmente, y así $\Gamma^s F = 0$

$\forall s \geq 1$, con lo que

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s t^s}{s!} \Gamma^s F(w_1, w_2, w_3, k_1, k_2, k_3) = w_3$$

y $w_3 = \text{cte}$ es una integral primera por (1.7). ■

Observaciones:

Si $x_3 = 0$, las integrales primeras (2.11)-(2.14) no se superponen, sino que cada una es consecuencia de la otra y de las tres restantes, de manera que, cuando se dé esta circunstancia, tomaremos una de las dos, normalmente (2.14)

debido a su sencillez, como la cuarta integral buscada.

El problema planteado es considerado en Tsopa (1979,81) y Viguera (1983) en forma hamiltoniana, utilizando las variables de Andoyer e integrando en diversos casos próximos a regulares por métodos de perturbaciones.

En un próximo trabajo intentaremos probar que los casos citados son los "únicos" en los que existe una cuarta integral algebraica independiente de las (3.2), (3.3) y (3.4) utilizando el método del pequeño parámetro de Poincaré de modo análogo a Arkhangel'skii (1962,63) en un problema similar para el sólido rígido. A este respecto, recordemos que la validez del teorema de Poincaré para el problema del giróstatto pesado con un punto fijo fué probada por Keis (1964).

BIBLIOGRAFIA:

- Arkhangelskii, Iu.A.: 1962, J. Appl. Math. Mech. 26, 1693.
- Arkhangelskii, Iu.A.: 1963, J. Appl. Math. Mech. 27, 1059.
- Cid, R. y Camarena, V.: Curso de Mecánica. Servicio de Publicaciones, Universidad de Zaragoza.
- Cid, R. y Viguera, A.: 1985, Celest. Mech. 36, 155.
- Keis, I.A.: 1964, J. Appl. Mech. 28, 633.
- Leimanis, E.: 1965, The General Problem of the Motion of Compled Rigid Bodies about a Fixed Point. Springer-Verlag, Berlin.
- Tsopa, M.P.: 1979, J. Appl. Math. Mech. 43, 189.
- Tsopa, M.P.: 1981, J. Appl. Math. Mech. 44, 285.
- Viguera, A.: 1983, Actas IV Asamblea Nacional de Astron. y Astrof., Vol II, 955.

H_m^E DE MEZCLAS LIQUIDAS BINARIAS

B. RUIZ, F.M. ROYO Y S. OTIN

Departamento de Química Física. Facultad de Ciencias.
Ciudad Universitaria. 50009 ZARAGOZA (España)

Excess molar enthalpies were measured over the whole composition range for (1-chlorohexane + furane, + n-hexane, chlorocyclohexane + cyclohexane), (2-chlorobutane + n-hexane) and (chlorobenzene + benzene) at 298.15 K. An isothermal calorimeter was used.

1. INTRODUCCION.

En trabajos anteriores (1-6) se midieron propiedades de exceso de mezclas líquidas binarias conteniendo un derivado halogenado y un eter con el fin de estudiar cualitativamente la interacción X-O. Al objeto de completar este trabajo presentamos los resultados de H_m^E de los sistemas (1-clorohexano + furano, + n-hexano, + clorociclohexano + ciclohexano), (2-clorobutano + n-hexano y clorobenceno + benceno) a la temperatura de 298.15 K.

2. EXPERIMENTAL.

Los líquidos usados son: Merck: ciclohexano y benceno cuya pureza es superior al 99'54 moles por cien, y Fluka: (furano (puriss, mejor que 99 moles por cien), clorociclohexano (puriss, mejor que 99'5 moles por cien) 1-clorohexano (puriss, mejor que 99'5 moles por cien), 2-clorobutano (puriss, mejor que 99'5 moles por cien) y clorobenceno (puriss, mejor que 99'5 moles por cien).

Los productos se utilizaron sin posterior purificación pero se mantuvieron en contacto con tamiz molecular.

PROCEDIMIENTO:

Las medidas de entalpía de exceso se llevaron a cabo con una técnica calorimétrica puesta a punto en este Departamento (7). El calorímetro opera en condiciones cuasi-adiabáticas, a presión constante y en ausencia de fase vapor. Los líquidos se encuentran separados por mercurio donde se introduce una sonda que lleva incorporados el elemento de calefacción y el sensor de temperatura. El elemento de calefacción es una resistencia de aproximadamente $150\ \Omega$ de cuatro terminales bobinada en doble sentido (no inductiva) y construida con hilo de constantán. Una fuente de corriente continua estabilizada alimenta la resistencia, y la energía liberada necesaria para compensar el enfriamiento producido durante el proceso de mezcla se calcula a partir de la caída de tensión en sus extremos y del tiempo de calefacción. Los cambios de temperatura dentro del calorímetro se siguen con un termistor ($\sim 10\ \text{k}\Omega$ a 25°C) que, alimentado por un acumulador de plomo, actúa como elemento referencial a través de su potencial eléctrico medido con un voltímetro de gran resolución.

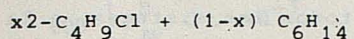
El calorímetro se encuentra sumergido en un baño a temperatura estabilizada en $\pm 2\text{mK}$; teniendo en cuenta que entre el calorímetro y el baño existe una cámara de aire que amortigua las oscilaciones térmicas del baño, los cambios de temperatura en el interior del calorímetro se reducen considerablemente y experimentalmente se ha estimado que las fluctuaciones son de $\pm 0,2\text{mK}$.

3. RESULTADOS.

Los valores de H_m^E fueron apuntados por mínimos cuadrados a una función del tipo Redlich-Kister:

$$H_m^E = x(1-x) \sum_{i=0} A_i (1-2x)^i \quad (1)$$

TABLA 5



x	Experimental
0.1638	281
0.1791	301
0.2555	382
0.2857	411
0.3551	456
0.4316	479
0.4591	487
0.4978	485
0.5372	481
0.6056	455
0.6756	407
0.7058	381
0.7615	331
0.7972	295
0.8206	260
0.9106	146

TABLA 6



x	Experimental
0.0978	-3.2
0.2098	-3.6
0.2416	-5.1
0.2889	-6.7
0.2935	-5.5
0.3834	-6.4
0.4887	-5.8
0.5786	-6.1
0.6384	-5.6
0.7226	-4.9
0.7366	-5.1
0.7793	-3.9
0.8932	-2.8

TABLA 7. Valores de los coeficientes A_1 para la ecuación
(1) y desviaciones estándar (s).

SISTEMA	A_0	A_1	A_2	s
$x1-C_6H_{13}Cl$				
+ (1-x) C_4H_4O	1192	-470	198.9	1.8
+ (1-x) C_6H_{14}	1438	-369.1	43.11	3.4
$xc-C_6H_{11}Cl$				
+ (1-x) $c-C_6H_2$	1469	-332.6	75.64	2.5
+ (1-x) C_6H_{14}	2002	-76.13	256.3	4.3
$x2-C_4H_9Cl + (1-x)C_6H_{14}$	1934	-189.3	-20.52	2.7
$xC_6H_5Cl + (1-x) C_6H_6$	-24.13	3.05	-10.48	0.6

donde x representa la fracción molar.

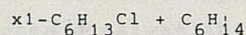
En las tablas 1-6 se recogen para todos los sistemas, a la temperatura de 298.15 K, los resultados experimentales y desviaciones estándar. En la tabla 7, los coeficientes A_i de la ecuación (1). Los mismos resultados se representan en la fig 1.

TABLA 1



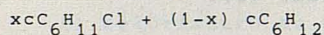
x	Experimental
0.1332	190
0.1754	230
0.2651	280
0.3477	307
0.3645	310
0.4510	308
0.5183	294
0.5505	284
0.5905	268
0.6809	227
0.7426	196
0.8219	141

TABLA 2



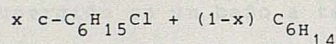
x	Experimental
0.0877	140
0.1850	259
0.2448	304
0.3090	342
0.3658	355
0.3948	357
0.4808	364
0.4924	359
0.5498	349
0.6116	319
0.7074	271
0.7886	206
0.8003	197

TABLA 3



x	Experimental
0.1827	255
0.1924	268
0.2771	323
0.3186	345
0.3576	359
0.3825	366
0.4436	374
0.4806	373
0.5657	354
0.6680	301
0.6910	288
0.7558	244
0.7819	222
0.8335	178

TABLA 4



x	Experimental
0.1769	316
0.1941	332
0.2112	360
0.3165	441
0.4105	495
0.4426	498
0.4763	496
0.4955	500
0.5537	489
0.6197	472
0.8105	321
0.8369	285
0.8984	191
0.9333	131

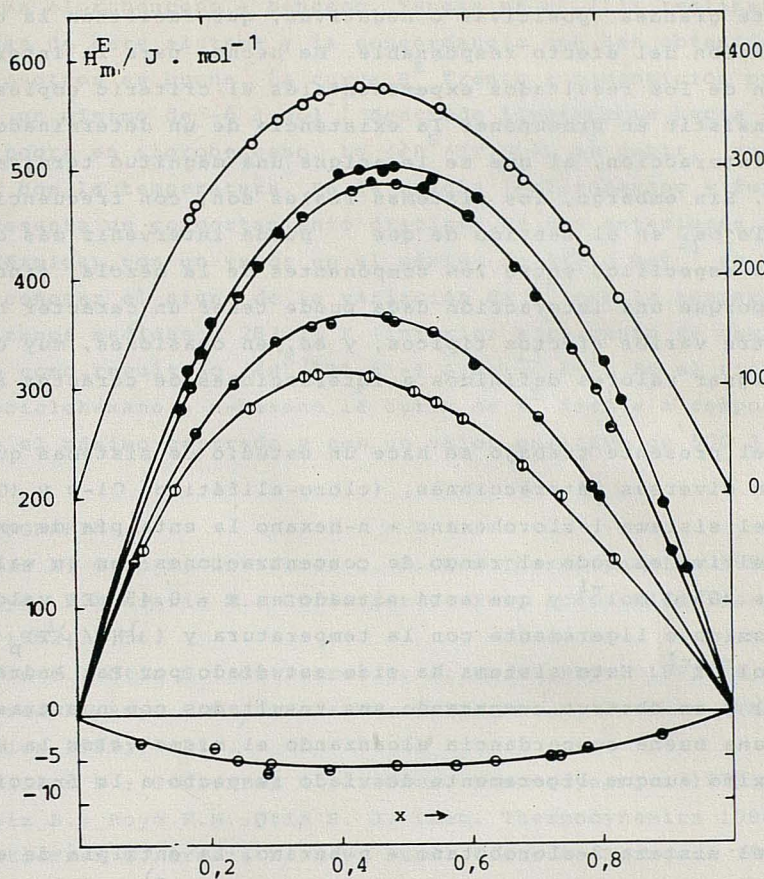


Figura 1. Entalpía de exceso frente a la fracción molar a 298.15 K para: $x_1\text{-C}_6\text{H}_{13}\text{Cl} + : \text{O}, (1-x) \text{C}_4\text{H}_4 \text{ O}; \bullet (1-x) \text{C}_6\text{H}_{14}; x\text{C}_6\text{H}_{11}\text{Cl} + : \text{O}, (1-x) \text{C}_6\text{H}_{12}; \bullet: (1-x) \text{C}_6\text{H}_{14}; x\text{-2C}_4\text{H}_9\text{Cl} + : \bullet (1-x) \text{C}_6\text{H}_{14}; x\text{2-C}_6\text{H}_5\text{Cl}; \bullet (1-x) \text{C}_6\text{H}_6$.

4. DISCUSION

Las interacciones específicas entre los componentes de una mezcla suelen ir asociadas a cambios de energía particu

cularmente grandes, positivas o negativas, que facilitan la caracterización del efecto responsable. De hecho, para la interpretación de los resultados experimentales el criterio empleado suele consistir en presuponer la existencia de un determinado tipo de interacción, al que se le asigna una magnitud térmica definida. Sin embargo, los sistemas reales son, con frecuencia, más complejos, en el sentido de que puede intervenir más de un efecto específico entre los componentes de la mezcla, sino también porque una interacción dada puede tener un carácter híbrido entre varios efectos típicos, y es, en ocasiones, muy difícil asignar valores definidos a interacciones de carácter aislado.

En el presente trabajo se hace un estudio de sistemas que presentan diversas interacciones, (cloro-alifático) Cl-O y (Cl- π).

En el sistema 1-clorohexano + n-hexano la entalpía de exceso es positiva en todo el rango de concentraciones con un valor máximo de 365 J mol^{-1} y que está situado en $x = 0.45$. El valor de H^E disminuye ligeramente con la temperatura y $(\partial H^E / \partial T)_P = -0.7 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Este sistema ha sido estudiado por Paz Andrade et al (8) y se observa, comparando sus resultados con nuestras medidas, una buena concordancia alcanzando el mismo valor la H^E en el máximo aunque ligeramente desviado respecto a la fracción molar.

En el sistema 2-clorobutano + n-hexano. La entalpía de exceso es positiva con un valor máximo de 485 J mol^{-1} y simétrica respecto a la fracción molar. Hueng Doan-Nguyen et al (9) la han estudiado a 298.15 K y es prácticamente coincidente con nuestras medidas. El coeficiente de temperatura de H^E es ligeramente negativo con un valor de $-0.5 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

El sistema clorociclohexano + ciclohexano presenta una entalpía endotérmica máxima de 275 J mol^{-1} a una fracción molar $x = 0.5$. Kamer et al (10) han estudiado estas mezclas siendo de un valor térmico análogo aunque existe gran discrepancia en cuanto a su posición y anchura. $(\partial H^E / \partial T)_P$ es $\approx 0.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Sistema clorobenceno + benceno. Tanaka et al (11) realizaron medidas de este sistema y la concordancia con las obtenidas por nosotros es buena. La curva H_m^E frente a composición presenta un mínimo de -6 J mol^{-1} desviado ligeramente hacia la zona pobre en clorobenceno. La $(\partial H^E / \partial T)_P \approx 0$, es decir, apenas varia con la temperatura. En la mezcla 1-clorohexano + furano se presenta un comportamiento distinto de los anteriores, (es endotérmica), con un valor en el máximo de 310 J mol^{-1} en $x=0.4$. Para conocer el signo de la variación de H^E con la temperatura realizamos medidas a 283.15 K (inferior a su punto de ebullición) dando como resultado $(\partial H^E / \partial T)_P = -1 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. En el sistema clorociclohexano + n-hexano la curva de H_m^E frente a composición tiene el máximo centrado y con un valor positivo de 500 J mol^{-1} .

BIBLIOGRAFIA

- 1) Ruiz B.; Otin S.; Gutierrez C. J. Chem Thermodynamics 1984, 16, 25.
- 2) Royo, F.M.; Gracia M.; Gutierrez C. Rev. Acad. Ciencias Zaragoza 1982, 37, 51.
- 3) Polo C.; Otin S.; Gutierrez C. J. Chim. Phys. 1977, 74, 152.
- 4) Perez P.; Royo F.M.; Gracia M.; Gutierrez C. J. Chem. Thermodynamics 1985, 17, 711.
- 5) Guillen D.; Gutierrez C. J. Chem. Thermodynamics 1978, 10, 567.
- 6) Ruiz B.; Royo F.M.; Otin S. J. Chem. Thermodynamics 1988, 20, 239.
- 7) Gutierrez C.; Gracia M. Rev. Acad. Ciencias Zaragoza 1971, 26, 101.
- 8) Paz Andrade I.; Bravo R.; Garcia M.; Grolier J. and Kehiaian H. J. Chim. Phys. 1979, 76, 51.
- 9) Hueng Doan J.; Vera J.; Ratcliff G. J. Chem. Eng. Data. 1978, 23, 218.
- 10) Kauer E.; Kichner S.; Haupt D.; Bittich H. Z. Phys. Chemie, 1972, 3/4, 153.
- 11) Tanaka R.; Murakami S.; Fujishiri R. J. Chem. Thermodynamics 1974, 6, 209.

CONSIDERACIONES SOBRE LOS METODOS USUALES DE DIFERENCIACION DE FE(II)/FE(III) EN MATERIAL VEGETAL

C. MARTINEZ, A. LOPEZ-MOLINERO Y J.R. CASTILLO

Departamento de Química Analítica. Facultad de Ciencias.
Ciudad Universitaria. 50009 ZARAGOZA (España).

Several techniques and procedures of Fe(II) and Fe(III) determination have been studied: Molecular Absorption Spectrophotometry using 1-10 phenantroline, 2-2'-bipyridile, thiocyanate. An inhibitor effect of the extractant-complexant agents, 1,10-phenantroline, 2,2'-bipyridile has been demonstrated in ASS and AES. Fe(III): o-phen and Fe(III): o-phen complexes have been studied by I.R. spectrometry, and different peaks have been found. Iron(II) and total iron have been determined in vegetables, with a procedure which combines MAS and AAS.

1 INTRODUCCION

Con ser la macrodeterminación de Fe una práctica de general conocimiento, no deja de presentar problemas la microdeterminación diferenciada de los estados de valencia (II y III) del elemento en materiales de interés biológico. Estos medios se caracterizan por ser altamente específicos y capaces ya no solo de diferenciar estados de valencia, sino de solo admitir en su composición uno de ellos.

Diversas técnicas analíticas instrumentales han sido aplicadas a la micro determinación de Fe. La más utilizada ha sido sin duda la espectrofotometría de absorción molecular (EAM), que desde la síntesis de los compuestos "ferroina" hacia finales del siglo XIX (Blau, F.(1)) ha empleado un buen número de reactivos (Ustimiento, V. N. y col.(2), Marate, W. S. y col.(3), Ilyas, S.Q.R. y col.(4), Nemori, A. y col.(5), Ambhore, D.P. y col.(6)). De entre ellos es obligado mencionar: fenantrolina (o-phen) (Harvey, A.E. y col.(7), Verbeek, F.(8)), bathofenantrolina (Marzenko, Z.(9)), ferroina (McBride, L. y col.(10)), bipyridilo (bipy) (Abadia, J.E. y col.(11)), TPTZ (Stookey, L.(12)), BPDS (McBride, L. y col.(10)).

Es clásica la determinación de Fe(II) y Fe(III) mediante diversas técnicas electroanalíticas, generalmente mediante la formación de complejos que modifican los potenciales de oxido-reducción de los iones, haciendo que los potenciales de onda mediase desplacen hacia potenciales menos negativos. Cabe destacar la polarografía convencional (Beyer, M. E. y col.(13)), la polarografía impulsional (Bien, G.S. y col.(14), Popoya, M. I.(15)) y voltametría de redisolución anódica (Kemula, W. y col.(16), Buttle, J. y col.(17), Buttle, J. y col.(18), Monien, H. y col.(19)).

La espectroscopía atómica (de emisión y de absorción) ha puesto a punto métodos de determinación de Fe total, que se caracterizan por su rapidez, siendo rutinariamente utilizados (Perkin Elmer Analytical Methods for At. Absorption. Spect.(20), Pinta M. (21)). Especial mención merece el electrodo propuesto por Alexander y colaboradores (22) que permite la volatilización y excitación de tejidos biológicos directamente sin apenas un tratamiento previo, en un arco DC.

Si bien la espectroscopía Mössbauer se caracteriza por presentar una clara diferenciación de los dos estados de valencia del Fe (Dyar, M. D. y col.(23), Ferrow, E.(24)) y los resultados obtenidos mediante esta técnica han sido comparados frente a otros métodos analíticos (Goldman, D. y col.(25), Ericsson, T. y col.(26), Sersale, R. y col.(27)), no se ha generalizado, por el momento, su utilización dados los inconvenientes experimentales que conlleva.

La separación de iones ferroso-férrico en solución ha sido acometida mediante la cromatografía en columna de intercambio iónico tanto catiónico (Zargochev, B. y col.(28) como aniónico (Kraus, K. A. y col.(29), Pollard, F.H. y col.(30), Morie, G. P. y col.(31)). Recientemente, se ha publicado la separación y determinación de dichos iones mediante cromatografía iónica (Moses, C.O. (32)) en aguas naturales.

La extracción a fase orgánica de las especies de Fe es un procedimiento ya clásico, que produce un aumento en la sensibilidad de los procedimientos (Willis, R.B. y col.(34), Schilt, A.A. y col.(35), Korenaga, T. y col.(35), Jha, A. R. y col.(36)). Con estas pautas de trabajo se han desarrollado metodologías que utilizan tensoactivos y que junto a la formación de complejos ternarios provocan fuertes exaltaciones en la absorptividad molar de dichos complejos proporcionando métodos extraordinariamente sensibles (Tarek, M. y col.(37), Marczenko, Z. y col.(38), Hiawaki, M. y col.(39)).

En el presente trabajo se han evaluado diversos métodos de determinación de Fe(II)/Fe(III) y mediante un procedimiento combinado de E.A.M.-E.A.A., se ha analizado el contenido en Fe(II) y Fe total en material vegetal (espinacas)

2 PARTE EXPERIMENTAL

2.1 Aparatos

Se ha utilizado la siguiente instrumentación:

Espectrofotómetro Perkin-Elmer, UV-visible, Lambda 5.
Espectrofotómetro de absorción atómica Perkin-Elmer SP-PE 2380; las condiciones de trabajo optimizadas se ofrecen en la tabla I.
Espectrofotómetro de emisión atómica en plasma de acoplamiento inductivo (EEA-PAI) Jobin Yvon modelo SP-38, las condiciones óptimas de trabajo se ofrecen en la tabla I. Espectrofotómetro infrarrojo Perkin Elmer 783. pH metro Jenway PHM6, mufla Heron, microordenador Apple Macintosh Plus.

TABLA I

SP-PE. 2380

- Caudal aire = 15.5 L/min.
- Presión de alimentación de aire 50 psi.
- Caudal acetileno = 2.0 L/min.
- Presión de alimentación de acetileno 0.8 bar.
- Altura del mechero $h = 2.3$ cm.
- Anchura de rendija s.w. = 0.2 nm.
- Intensidad de la lámpara $I = 30$ mA.
- Longitud de onda 248.368 nm.

J-Y.SP 38

- Caudal de gas plasmageno 13 L/min.
- Caudal de gas envolvente 0.5 L/min.
- Caudal de gas nebulizador 0.2 L/min.
- Potencia incidente 1.0 Kw.
- Altura de observación 15 mm.
- Anchura de rendija s.w. = 50 μ m

TABLA I: Condiciones óptimas de trabajo del espectrofotómetro de absorción atómica P-E, 2380, y condiciones óptimas de trabajo del espectrofotómetro de emisión atómica J-Y, SP 38.

2.2 Reactivos

- Solución standar de Fe(II): disolución de 1000 $\mu\text{g/mL}$ de Fe(II) como sal de Mohr $\text{Fe}(\text{NH}_4)_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, que se disuelve añadiendo 2 mL de H_2SO_4 concentrado.

- Solución standar de Fe(III): disolución de 1000 $\mu\text{g/mL}$ preparada a partir de $\text{Fe NH}_4(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ (alumbre). La disolución es lenta y es necesario añadir unos mLs de HCl(c) .

- Solución de 1,10- fenantrolina : disolución de clorhidrato de fenantrolina al 0.25% en HCl 0.1 N.

- Solución de 2,2' bipyridilo : disolución de clorhidrato de bipyridilo al 0.25% en HCl 0.1 N.

- Solución de KSCN: disolución de KSCN 2 M.

Soluciones de oxidantes y reductores fueron obtenidas a partir de los correspondientes compuestos comerciales calidad r.a., como así lo fueron otros reactivos necesarios para las condiciones de análisis.

En todos los procesos de dilución se ha utilizado agua desionizada de alta pureza a través de un sistema Milí Q.

2.3 Procedimientos

2.3.1 Determinación de Fe(II) en espinacas con o-phen:

La muestra vegetal finamente dividida se trata con una disolución de o-phen (0.083 M.) durante 24 h. Es necesario proteger las disoluciones de la luz ya que esta induce a la reducción de Fe(III) y además del oxígeno atmosférico para evitar la oxidación del Fe(II) presente en la muestra. La disolución extraída se filtra a través de papel de filtro y la determinación espectrofotométrica se realiza a 512 nm.

2.3.2 Determinación de Fe(II) en espinacas con Bipy:

El procedimiento analítico es idéntico al anterior, realizándose la determinación espectrofotométrica a 522 nm.

2.3.3 Determinación de Fe total por EAA:

La muestra vegetal, previamente desecada y calcinada ($T=525^\circ\text{C}$ durante 3h.) se ataca con una mezcla ácida HNO_3 y HCl en caliente. La disolución de ataque se diluye a 25 mL con agua destilada, y se mide la absorción atómica de dicha disolución a 248.368 nm.

2.3.4 Síntesis de los complejos Fe(II):o-phen y Fe(III):o-phen en medio acetona-H₂O.

Se hacen reaccionar en una mezcla de acetona-H₂O al 50%, 0.0025 moles de sulfato férrico anhidro con 0.01 de monohidrato de fenantrolina, produciéndose la precipitación de cristales finisimos de color marrón. Si se acidifica el medio con sulfúrico (pH 2-5), el precipitado se vuelve más voluminoso. Se procede seguidamente a la filtración a través de placa filtrante para evitar la posible reducción de Fe(III) por el papel de filtro.

El complejo de Fe(II) se obtiene a través un procedimiento similar.

3 RESULTADOS Y DISCUSION

Previamente a la elección de un método de determinación de Fe, se ha procedido a la evaluación comparada de los principales métodos descritos en la bibliografía.

3.1 Metodos espectrofotométricos

En primer lugar se realizó un estudio de los métodos espectrofotométricos de determinación de Fe(II) y Fe(III). En la tabla II se ofrecen los resultados.

TABLA II:

<u>Especie</u>	<u>Reactivo</u>	<u>Cond. Exp.</u>	<u>Long. onda</u> nm.	<u>Rango lineal</u> µg/mL	<u>Reproducib</u> %C.V.
Fe(III)	o-phen	pH 4, tamp biftalato estabilidad:12-60 min. oxidante:persulfato	361	-	-
Fe(III)	SCN ⁻	extracción a MIBK (sin H ₂ O ₂)	495	-	0,19

Fe(II) o-phen	pH 4, tamp biftalato	512	1-14	-
	reductor hidroxilamina			
	tº estabilidad:15-60 min.			
	sin reductor			
	tº estabilidad:15-30 min.			
Fe(II) bipy	pH 4, tamp biftalato	522	1-16	-
	reductor hidroxilamina			
	tº estabilidad:20-60 min.			
Fe _{tot} o-phen	pH 4, tamp biftalato	390	1-23	-

TABLA II: Condiciones experimentales de los métodos espectrofotomé de determinación de Fe y sus prestaciones analíticas.

De la misma cabe destacar:

-. La experiencia de calibración en la determinación de Fe(III) con o-fenantrolina se debe de verificar en presencia de un oxidante para eliminar el Fe(II) producido como consecuencia del equilibrio Fe(II)-Fe(III). Han sido probados con este fin diversos oxidantes, concluyéndose que la adición de persulfato amónico en concentración de $4.5 \cdot 10^{-3}$ M. para no más de 3 µg/mL de Fe(III) conduce a los mejores resultados.

Con las condiciones de esta experiencia se demuestra a partir de la figura 1 que a la longitud de onda de 390 nm $\Sigma_{Fe(III)} = \Sigma_{Fe(II)}$ lo que permite determinar el contenido de Fe total de una disolución.

-. La determinación de Fe(III) con tiocianato, en presencia de H₂O₂, conduce a un aumento de sensibilidad, aunque la estabilidad del complejo disminuye, haciendose crítico el tiempo de medida.

-. La determinación de Fe(II) se ha realizado en presencia

de reductores, para asegurar el procedimiento de calibración. La hidroxilamina condujo a los mejores resultados en concentraciones de 2.87 M. para una concentración entre 150 y 750 µg/mL en el ión ferroso.

3.2 Métodos de espectroscopía atómica (EAA, EEA)

Es muy habitual la extracción de Fe(II) y Fe(III) en materiales biológicos mediante un tratamiento de la muestra con agentes acomplejantes. Entre los más importantes caben destacarse: 1,10-fenantrolina, y 2,2'-bipiridilo.

La posterior determinación analítica de los elementos se realiza bien espectrofotométricamente o bien por espectroscopía atómica.

A la vista de estos procedimientos hemos estudiado la influencia de los agentes extractantes - complejantes en la determinación por EAA y EEA del Fe.

En las figuras 1 y 2 se observa como la formación de los complejos influye de una manera no despreciable tanto en las medidas de absorción como en las de emisión atómica para llamas de acetileno.

En absorción atómica los complejos de Fe(II) con o-phen y bipy presentan una manifiesta reducción en los valores de absorbancia respecto a los que presentan los correspondientes complejos de Fe(III). Estos resultados pueden argumentarse en base a la magnitud de las constantes de formación de los complejos, que son menores para Fe(III).

En emisión atómica por PAI se ha detectado que la emisión tanto para líneas iónicas (258.58 nm, 231.34 nm) como atómicas (248.32 nm, 252.28 nm) es menor en los complejos de Fe(II).

Ha sido estudiado también este efecto de variación de la señal en espectroscopía atómica en función de la formación de diversos complejos, con reactivos como: oxalato, citrato, tartrato, AEDT, poniéndose de manifiesto una disminución de las señales espectroscópicas para los complejos de Fe(II) respecto a los de Fe(III).

Será necesario tener en cuenta estos efectos "matriz" del complejante en los procedimientos de calibración de estas técnicas.

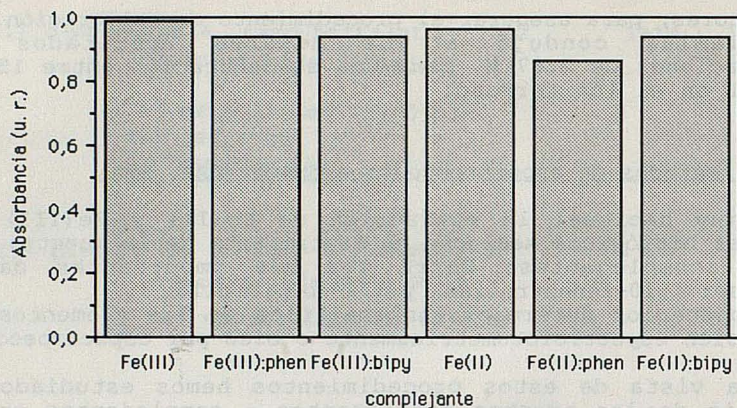


FIGURA 1

Absorcion Atómica a 248,32 nm. en unidades relativas (u.r.) de las soluciones de Fe(III) y Fe(II) y de sus complejos con o-phen y bipy en las condiciones instrumentales de la tabla I, para una concentración de $[Fe(II)] = [Fe(III)] = 100,00 \mu\text{g/mL}$ y una concentración de acomplejante 10 veces la de Fe.

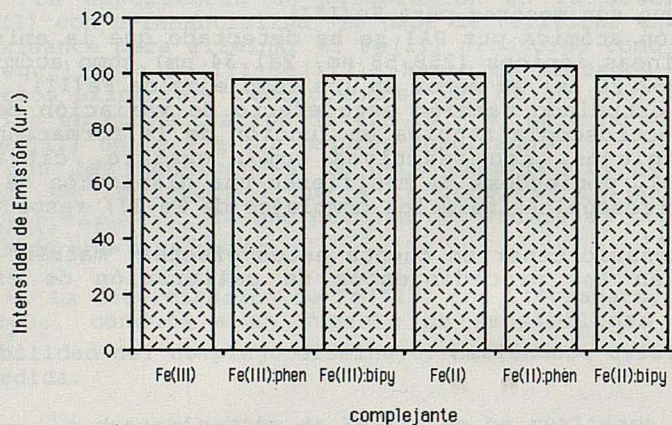


FIGURA 2

Intensidad de emisión en unidades relativas (u.r.) de la línea iónica 259,940 nm de los complejos de Fe(III) y Fe(II) y

sus complejos con o-phen y bipy, en las condiciones instrumentales de la tabla I, para una concentración de $[\text{Fe(III)}] = [\text{Fe(II)}] = 100,00 \text{ } \mu\text{g/mL}$ y una concentración de complejante 10 veces la de Fe.

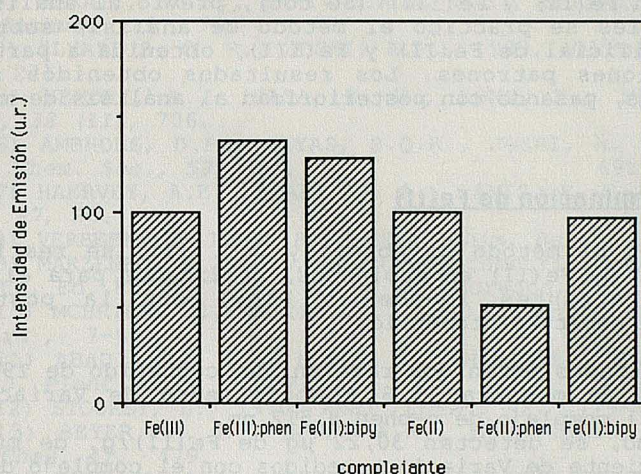


FIGURA 3

Intensidad de emisión en unidades relativas (u.r.) en la línea atómica 248,327 nm de los complejos de Fe(III) y Fe(II) y sus complejos con o-phen y bipy, en las condiciones instrumentales de la tabla I, para una concentración de $[\text{Fe(III)}] = [\text{Fe(II)}] = 100,00 \text{ } \mu\text{g/mL}$ y una concentración de complejante 10 veces la de Fe.

3.3 Espectroscopía IR

A partir de las experiencias de Driver y colaboradores (Driver, R. y col.(40)) se sintetizaron los complejos de Fe(III):o-phen y Fe(II):o-phen. Dichos complejos una vez purificados, han sido caracterizados por espectroscopía IR. Los resultados obtenidos demuestran la diferenciación cualitativa de ambos complejos. El complejo Fe(III):o-phen presenta la aparición de bandas a 975 cm^{-1} y 830 cm^{-1} atribuidas a la tensión $\text{Fe}^{3+}\text{-O-Fe}^{3+}$, que no presenta el complejo Fe(II):o-phen.

4 APLICACION: DETERMINACION DE Fe(II) Y Fe_{TOT} EN ESPINACAS

Dada la dificultad de encontrar materiales vegetales de referencia en Fe(II) y Fe(III) (Fe tot), previo al análisis de muestras reales se practicó el método de análisis sobre una solución artificial de Fe(II) y Fe(III) , obtenida a partir de las disoluciones patrones. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, pasando con posterioridad al análisis de muestra vegetal real.

4.1 Determinación de Fe(II)

Siguiendo el método de Abadía y col. (11) se realizó la determinación de Fe(II) en espinacas, utilizando para ello dos agentes extractantes (o-phen y bipy) con la posterior determinación espectrofotométrica.

Los resultados obtenidos revelan: un contenido de $19,81 \mu\text{g}$ de $\text{Fe(II)}/\text{g}$. de muestra ($3,8 \%$ Coeficiente de Variación) medidos con el complejo de o-phen a 512 nm .

Así mismo, se detectan $30,22 \mu\text{g}$ de $\text{Fe(II)}/\text{g}$. de muestra ($4,5 \%$ Coeficiente de Variación) medidos con el complejo de bipy a 522 nm .

Tras este estudio se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- Bipy es un agente extractante más poderoso que o-phen y, aunque presenta una menor sensibilidad como reactivo espectrofotométrico, presenta mejores resultados.

- Con tiempos de extracción de 24 h . es necesario mantener las disoluciones en atmósfera de nitrógeno para evitar la oxidación de Fe(II)

- Para longitudes de onda menores a 450 nm se produce absorción de otros productos de degradación de la clorofila.

4.2 Determinación de Fe_{tot}

La determinación fue realizada por E.A.A., según el procedimiento ya descrito. El resultado medio de 8 determinaciones presentó un contenido de $203,19 \mu\text{g}/\text{g}$ en la muestra húmeda ($3,1\%$ Coeficiente de Variación).

5 BIBLIOGRAFIA

- (1) BLAU, F., 1898, Monash, 19, 666.
- (2) USTIMIENKO, V. N., MAIBORODA, I.K., 1983, *Zavod. Lab.*, 49 (8), 41.
- (3) MARATE, W. S., SHRIVASTADA, S.C., KHARAT, R.B., 1982, *Fert. Technol.*, 19, 76.
- (4) ILYAS, S. Q. R., JOSHI, A.P., 1983, *Mikrochim. Acta*, 3 (3-4), 271.
- (5) NEMORI, A., SASA, K. H., KONO, T., 1983, *Bunseki Kagaku*, 32 (11), 706.
- (6) AMBHORE, D.P., ILYAS, S.Q.R., JOSHI, A. P., 1982, *J. Indian Chem. Soc.*, 59, (5), 691.
- (7) HAERVEY, A.E., SMART, J. A., AMIS, E. S., 1955, *Anal. Chem.*, 27, 26.
- (8) VERBEEK, F., 1963, *Bull. Soc. Chim. Belg.*, 70, 423.
- (9) MARZENKO, Z., 1976, *Spectrophotometric Determination of Elements*, Ed. Ellis Horwood, Chichester.
- (10) MCBRIDE, L., SMITHT, F., 1980, *Chemical Co. Columbus, Ohio* 3 rd, 7-60 G.
- (11) ABADIA, J. E., MONGE, L., MONTAÑES, F., HERAS, L., 1984, *J. Plant Nutr.*, 7, 777.
- (12) STOOKEY, L., 1970, *Anal. Chem.*, 42, 779-781.
- (13) BEYER, M. E., BOND, A.M., MCLAUGHLIN, R.J., 1985, *Anal. Chem.*, 47, 479.
- (14) BIEN, G. S., GOLDEBERG, E.D., 1955, *Anal. Chem.*, pp 97-98.
- (15) POPOYA, M. I., 1983, *Zavod. Lab.*, 49 (1), 20.
- (16) KEMULA, W., GALUS, Z., 1959, *Bull Acad. Polon. Sci. Chim.*, 7, 729.
- (17) BUTTLE, J., MONNIER, D., HAERDI, W., 1961, *Chimic.*, 21, 587.
- (18) BUTTLE, J., MONNIER, D., HAERDI, W., 1961, *J. Electroanal. Chem.*, 23, 89.
- (19) MONIEN, H., JACOB, P., 1972, *Z. Anal. Chem.*, 260, 195.
- (20) Perkin Elmer. *Analytical Methods for At. Absorption.*, 1982, Spect. Norwalk CT.
- (21) PINTA, M., *Spectrométrie D'Absorption Atomique I, II.*, 1971, Ed. Masson et ^{Cie}, Paris.
- (22) ALEXANDER, G.V., MCANULTY, L. T., 1981, *Journal of Plant Nutrition*, 3 (1-4), 51.
- (23) DYAR, M.D., BURNS, R.G., 1986, *An. Mineral*, 72, 955.
- (24) FERROW, E., 1987, *Phys. Chem. Miner.*, 14, 276.
- (25) GOLDMAN, D., BEWLEY, D. E., 1985, *J. An. Ceram. Soc.*, 68, 691.
- (26) ERICSSON, T., LINARES, J., LOTSE, E., 1984, *Clay Miner.*, 19, 85.
- (27) SERSALE, R., BURRIESA, N., PINO, L., 1984, *Bart J. C. Mater Lett.*, 3, 51.
- (28) ZARGOCHEV, B., BASOLEV, B., 1961, *Compt. Rend. Acad.*

Bulgare Sci., 14, 479.

(29) KRAUS, K. A., MOORE, G. E., 1953, *J. Am. Chem. Soc.*, 75, 1460.

(30) POLLARD, F. H., MCOMIE, J. F., NICKLES, G., HANDSON, P., 1960, *J. Chromatog.*, 4, 108.

(31) MORIE, G.P., SWEET, T. R., 1964, *Anal. Chem.*, 36, 140.

(32) MOSES, C.O., HERLITH, H. T., HERMAN, J. S., MILLS, A. L., 1988, *Talanta*, 35, 15.

(33) WILLIS, R. B., SANGESTER, D., 1976, *Anal. Chem.*, 48, 59.

(34) SCHILT, A.A., ABRAHAM, R. L., MARTIN, J. E., 1973, *Anal. Chem.*, 45, 1808.

(35) KORENAGA, T., MOTOMIZU, S., TOEI, K., 1973, *Anal. Chim. Acta*, 65, 335.

(36) JHA, A. R., MISRHA, R.K., 1981, *Analist*, 106, 1150.

(37) TAREK, M., ZAKI, M., MAHAMOUD, W. H., EL- SAYED, A. Y., 1988, *Talanta*, 35, 253.

(38) MARCZENKO, Z., KALAWSKA, M., 1981, *Anal. Chim. Acta*, 123, 279.

(39) HIYAWAKI, M., VENSUGI, K., 1985, *Microchim. Acta*, I, 135.

(40) DRIVER, R., WALKER, W. R., 1967, *Aust. J. Chem.*, 20, 1375.

RIBULOSA 5-FOSFATO 3-EPIMERASA EN EL HONGO ASPERGILLUS ORYZAE

M.T. MUIÑO¹, M.L. PELEATO² Y J.A. CEBRIÁN¹

1. Departamento de Bioquímica. Facultad de Veterinaria. Miguel Servet, 117. 50013 ZARAGOZA (España).
2. Departamento de Bioquímica. Facultad de Ciencias. Ciudad Universitaria. 50009 ZARAGOZA (España).

Some physical, chemical and kinetic properties for the ribulose 5-phosphate 3-epimerase (EC 5.1.2.1.3) from the fungus Aspergillus oryzae growth with ribose as sole carbon source were studied.

The maximum activity pH was 7.5, which coincides with the maximum stability pH. The enzyme was inactivated over 35°C.

The K_m value determined for ribulose 5-phosphate was 24 μ M, and the arabinose 5-phosphate was a competitive inhibitor with a K_{ui} values of 0.42 mM.

INTRODUCCION

Las enzimas de la etapa de isomerización de la fase no oxidativa de la ruta de las pentosas fosfato han cobrado enorme importancia, desde la polémica suscitada por la descripción de nuevas pentosas fosfato como metabolitos de la fase no oxidativa (WILLIAMS et al., 1978).

Todas las enzimas de la ruta de las pentosas fosfato han sido descritas en diversas especies de hongos (OSMOND y REES, 1969 y HANKINSON y COVE, 1974) excepto la ribulosa-5-fosfato 3-epimerasa (EC. 5.1.2.1.3.).

MATERIAL Y METODOS

- Material biológico: Se ha utilizado una cepa de Aspergillus oryzae procedente de la colección de cultivos del Departamento de Microbiología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Salamanca.
- Reactivos: Enzimas, coenzimas y sustratos proceden de SIGMA CHEM. COMP. (St. Louis, Mo. USA); todos los restantes productos químicos son de calidad análisis.

- Cultivo del Aspergillus: Los micelios se han desarrollado en ribosa como única fuente de carbono. Las condiciones de cultivo se han descrito previamente (MUIÑO y CEBRIAN, 1.980).
- Preparación del extracto enzimático: Ha sido descrito previamente (MUIÑO y CEBRIAN, 1.980)
- Técnicas analíticas:

Determinación de proteínas: Se ha realizado por el método de LOWRY et al. (1.951).

Determinación de la actividad enzimática: La actividad de la ribulosa 5 fosfato 3-epimerasa se ha determinado modificando el método de KIELY et al. (1973).

Fundamento:

Ru5P Ru5P3 EPIMERASA $\rightarrow$ Xu5P

Xu5P + R5P TK $\rightarrow$ Sh7P + GA3P

GA3P TIM $\rightarrow$ DHAP

DHAP + NADH α -GDH $\rightarrow$ G3P + NAD+

La mezcla de reacción utilizada ha sido:

tampón imidazol-ClH pH 7.5 40 mM; Ru5P 0.6 mM; R5P 2mM; TPP 50 μ m; Cl₂Mg 5 mM; TK 0.2 U; α -GDH 1 U; TIM 4 U; NADH 0.1 mM y extracto enzimático en cantidad suficiente para producir un aumento mínimo de 0.005 unidades de densidad óptica por minuto. Las determinaciones se han llevado a cabo en espectrofotómetro visible/U.V. SPECTRONIC 2000 por variación de densidad óptica a 340 nm en un volumen de 1 ml y con cubetas de 1 cm de paso de luz. En la cubeta de referencia se sustituye el sustrato glucídico por igual volumen de agua destilada.

La determinación de la constante de Michaelis (K_m) se hizo variando la concentración de ribulosa 5-fosfato entre 60 μ m y 0.6 mM con una diferencia entre dos ensayos consecutivos de 60 μ m. Esta misma prueba se llevó a cabo con diferentes tampones de pH

Determinación de proteínas: Se ha realizado por el método de LOWRY et al. (1.951).

Determinación de la actividad enzimática: La actividad de la ribulosa 5 fosfato 3-epimerasa se ha determinado modificando el método de KIELY et al. (1973).

Fundamento:

Ru5P $\xrightarrow{\text{Ru5P3 EPIMERASA}}$ Xu5P

Xu5P + R5P $\xrightarrow{\text{TK}}$ Sh7P + GA3P

GA3P $\xrightarrow{\text{TIM}}$ DHAP

DHAP + NADH $\xrightarrow{\text{-GDH}}$ -G3P + NAD⁺

La mezcla de reacción utilizada ha sido:

tampón imidazol-ClH pH 7.5 40 mM; Ru5P 0.6 mM; R5P 2mM; TPP 50 μ m; Cl₂Mg 5 mM; TK 0.2 U; -GDH 1 U; TIM 4 U; NADH 0.1 mM y extracto enzimático en cantidad suficiente para producir un aumento mínimo de 0.005 unidades de densidad óptica por minuto. Las determinaciones se han llevado a cabo en espectrofotómetro visible/U.V. SPECTRONIC 2000 por variación de densidad óptica a 340 nm en un volumen de 1 ml y con cubetas de 1 cm de paso de luz. En la cubeta de referencia se sustituye el sustrato glucídico por igual volumen de agua destilada.

La determinación de la constante de Michaelis (K_m) se hizo variando la concentración de ribulosa 5-fosfato entre 60 μ m y 0.6 mM con una diferencia entre dos ensayos consecutivos de 60 μ m. Esta misma prueba se llevó a cabo con diferentes tampones de pH

variable, para estudiar la influencia del pH sobre la constante de Michaelis.

La determinación de las constantes de inhibición (k_i) se hizo añadiendo el posible efector a ambas cubetas.

Determinación del efecto del pH sobre la actividad: Se determinó la actividad específica, según se describe anteriormente, en un margen de pH de 5 a 10, con una diferencia de 0.5 unidades de pH entre dos ensayos consecutivos, utilizando en cada caso el tampón adecuado, y manteniendo constantes todos los demás componentes de la mezcla de reacción.

Determinación del efecto del pH sobre la estabilidad enzimática: Los extractos enzimáticos se diluyeron con cada uno de los tampones, hasta obtener una concentración final de proteínas igual en todos los casos. Preincubadas las preparaciones enzimáticas a 30°C durante 15 minutos, se determinaron las actividades específicas residuales.

Determinación del efecto de la temperatura sobre la actividad enzimática:

Inactivación térmica a tiempo de incubación constante: Los extractos enzimáticos se diluyeron con el tampón de máxima estabilidad hasta alcanzar una concentración final de proteínas igual en todos los casos. Volúmenes iguales de dichos extractos se incubaron a diferentes temperaturas entre 10 y 60°C. Transcurridos 5 minutos se determinaron las actividades residuales.

Inactivación térmica a temperatura constante: A la temperatura a la cual se observó que se iniciaba la inactivación, 40°C, se

incubó una adecuada dilución de extracto enzimático, y se determinó la actividad específica residual a 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50 y 60 minutos.

RESULTADOS

- Influencia del pH

En la **figura 1** se expresa el efecto que ejercen distintos valores de pH sobre la actividad de la ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa, de extractos de micelios de *A. oryzae* crecido sobre ribosa. El perfil de la curva de actividad permite observar que la máxima actividad de esta enzima se obtiene a valores de pH comprendidos entre 7.5 y 8.

- Determinación del pH de máxima estabilidad

Como se observa en la **figura 2**, el máximo de estabilidad coincide con un pH de 7.5 conservando sin embargo a valores comprendidos entre 7 y 9 más del 80% de su actividad, después de 15 minutos de incubación.

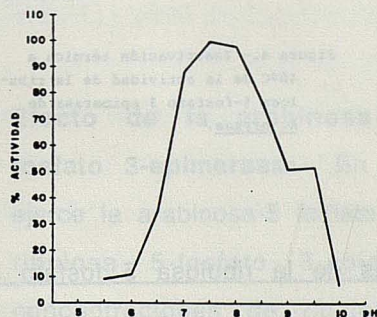


Figura 1.- Influencia del pH sobre la actividad de la ribulosa 5-fosfato 3 epimerasa de *A. oryzae*.

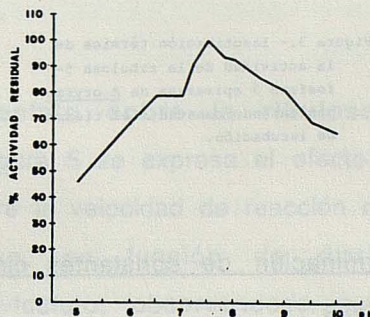


Figura 2.- Efecto del pH sobre la estabilidad de la ribulosa 5-fosfato 3 epimerasa de *A.oryzae*.

- Efecto de la temperatura

La temperatura a la cual la actividad enzimática es máxima resulta ser entre 25 y 35°C. A 60°C, la inactivación es total (**Figura 3**). Para determinar el efecto del tiempo de incubación a temperatura constante se escogió la temperatura de 40°C, por observarse que a esta temperatura se inicia la inactivación. En la **figura 4** puede verse que la actividad decrece rápidamente, siendo menos del 50% después de 15 minutos de incubación, para descender luego progresivamente hasta el 5% de su actividad inicial a los 60 minutos.

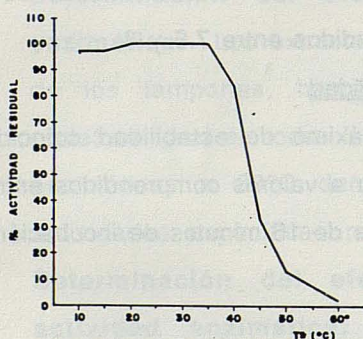


Figura 3.- Inactivación térmica de la actividad de la ribulosa 5-fosfato 3 epimerasa de *A.oryzae* manteniendo constante el tiempo de incubación.

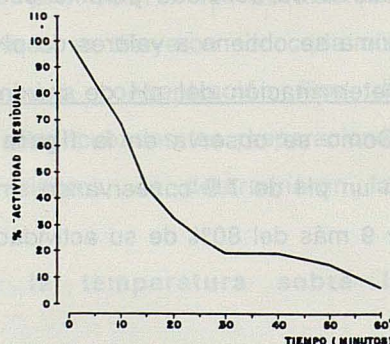


Figura 4.- Inactivación térmica a 40°C de la actividad de la ribulosa 5-fosfato 3 epimerasa de *A.oryzae*.

- Determinación de constantes cinéticas de la ribulosa 5 fosfato 3-epimerasa

- **Determinación de la constante de Michaelis:** Se determinó la influencia que ejercen concentraciones crecientes de la ribulosa

5-fosfato sobre la velocidad de reacción de la ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa. El valor de K_m obtenido es de $0.024 \text{ mM} \pm 0.005$ siendo el valor medio de 6 determinaciones.

- **Efecto del pH sobre la k_m :** En la tabla I, se expresan los resultados obtenidos al determinar la K_m de esta enzima respecto a la ribulosa 5-fosfato, a diferentes valores de pH. La máxima afinidad se obtiene a pH 7, valor que no corresponde al pH de máxima actividad.

TABLA I.- Influencia del pH sobre la K_m de ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa de *A. oryzae* respecto a la ribulosa 5-fosfato.

pH	K_m (mM)
6,5	0,037
7	0,019
7,5	0,024
8	0,075
8,5	0,1

Efecto de la arabinosa 5-fosfato sobre la ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa: En la figura 5 se expresa el efecto que ejerce la arabinosa-5 fosfato sobre la velocidad de reacción de la ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa, en función de distintas concentraciones de ribulosa 5-fosfato, observándose que la arabinosa 5-fosfato ejerce una inhibición de tipo acompetitivo

sobre la ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa, con una $K_{iu} = 0.42$ mM y $K_i/K_m = 17.64$.

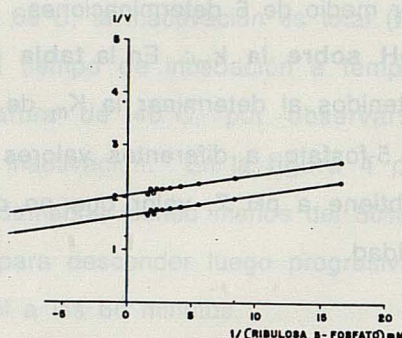


Figura 5.- Inhibición por arabinosa 5-fosfato de la ribulosa 5-fosfato 3 epimerasa, respecto a la ribulosa 5-fosfato. 0 - con arabinosa 5-fosfato 0.1 mM.

DISCUSION

El pH de máxima actividad de la ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa, 7.5-8, coincide con lo encontrado para los enzimas de la fase no oxidativa de la ruta de las pentosas fosfato en otros organismos (SIMCOX et al., 1977; HANKINSON y COVE, 1974; NOVELLO y Mc LEAN, 1968 y LEVERING et al., 1982) entre otros.

El pH de máxima estabilidad, que no tiene por que coincidir con el de máxima actividad, en este caso coincide, siendo más amplio el rango de pH al cual la ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa es activa.

La ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa se inactiva rápidamente a temperaturas superiores a 35°C. Esto indica que no posee caracter termoestable.

La constante de Michaelis de la ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa de A. oryzae respecto a la ribulosa 5-fosfato es igual a 0.024 mM; este valor es 100 veces inferior a los citados por KIELY et al. (1.973) para levadura, 2.4 mM y para hígado de vaca, 2.9 mM, lo que indica que esta enzima posee una afinidad por la ribulosa 5-fosfato muy alta. Valores inferiores se han descrito en diversos órganos de mamíferos; así, en hígado de ternera la K_m para la ribulosa 5-fosfato es de 0.19mM (WOOD, 1979) y en cerebro de rata 0.143 mM (KAUFFMAN, 1972). HURWITZ y HORECKER,(1.956) citan valores de K_m de 1 mM para ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa procedente de Lactobacillus pentosus.

El hecho de que el pH de máxima actividad, 7.5, no coincida con el pH en que la afinidad del enzima por el sustrato sea máxima, podría indicar que esta enzima, en su entorno intracelular, actúa a un pH distinto del pH óptimo de actividad.

La inhibición de la ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa por arabinosa 5-fosfato, descrita por WILLIAMS et al. (1.978), es muy ligera y de tipo acompetitivo. Aunque podría pensarse que es una inhibición de tipo artefactual por utilizarse transcetolasa de levadura en la mezcla de reacción, y estar descrita por WOOD y GASGON (1980) una inhibición de la transcetolasa por arabinosa 5-fosfato, se ha comprobado previamente que esta pentosa no afecta a la transcetolasa de levadura.

RESUMEN

Extractos crudos procedentes de micelios de Aspergillus oryzae desarrollado sobre ribosa presentan actividad de ribulosa 5-fosfato 3-epimerasa.

Se han estudiado algunas de las características cinéticas y fisicoquímicas de la enzima de Aspergillus oryzae crecido en ribosa como única fuente carbonada. El pH de máxima actividad es 7.5 y coincide con el de máxima estabilidad. Temperaturas superiores a 35°C desactivan la enzima. La K_m para la ribulosa 5-fosfato es de 0.024 mM. La arabinosa 5-fosfato es un inhibidor acompetitivo y la K_{ui} resultó ser de 0.42mM.

Abreviaturas

DHAP: dihidroxiacetona fosfato; GA3P: gliceraldehído 3-fosfato; GDH: glicerol 3-fosfato deshidrogenasa; K_{iu} : constante de inhibición no competitiva o acompetitiva; K_m : constante de Michaelis; NAD⁺: nicotinamida adenin dinucleótido; NADH: nicotinamida adenin dinucleótido reducido; R5P: ribosa 5-fosfato; Ru5P: ribulosa 5-fosfato; Sh7P: sedoheptulosa 7-fosfato; TK: transcetolasa; TIM: triosa fosfato isomerasa; TPP: tiamina pirofosfato; Xu5P: xilulosa 5-fosfato.

BIBLIOGRAFIA

- HANKINSON, D. y COVE, D.J. (1974). J. Biol. Chem. 249 (8), 2344-2353.
- HURWITZ, J. y HORECKER, B.L. (1956). J. Biol. Chem. 223, 993-1002.
- KAUFFMAN, F.C. (1972). J. Neurochem. 19, 1-9.

- KIELY, M.E.; STUART, A.L. y WOOD, T. (1973). Biochem. Biophys. Acta 293, 534-541.
- LEVERING, P.R.; DIZKHUIZEN, L. y HARDER, W. (1982). FEMS Microbiology Letters 14, 257-261.
- LOWRY, D.H.; ROSEBROUGH, N.J.; FARR, A.L. y RANDALL, R.I. (1951). J. Biol. Chem. 193, 265-275.
- MUIÑO, T. y CEBRIAN, J.A. (1980). Rev. Esp. Fisiol. 36, 193-198.
- NOVELLO, F. y McLEAN, P. (1968). Biochem. J. 107, 775-791.
- OSMOND, C.B. y REES, T. (1969). Biochim. Biophys. Acta 184, 35-42.
- SIMCOX, P.D.; REID, E.E.; CANVIN, D.T. y DENNIS, D.T. (1977). Plant Fisiol. 59, 1128-1132.
- WILLIAMS, J.F.; BLACKMORE, P.F. y CLARK, M.G. (1978). Biochem. J. 176, 257-282.
- WOOD, T. (1979). Biochem. Biophys. Acta 570, 352-362.
- WOOD, T. y GASCON, A. (1980). Archives of Biochemistry and Biophysics 203, 727-733.

INTRODUCCIÓN

La alteración de rocas y suelos constituye el mayor proceso administrativo de los suelos y las aguas superficiales (JENSEN y CHRIST, 1969). En la cuenca del Ebro, la naturaleza de las litologías ejerce un fuerte control sobre la química del agua. Los valores de las concentraciones iónicas medias de los ríos, en las estaciones de muestreo de la red de calidad de aguas (red CCA), muestran cambios con distintos caracteres litológicos así lo demuestran (ABRIL y NAVAS, 1981). Por ello, tanto las concentraciones de sulfatos como la concentración del agua varía considerablemente entre los distintos tributarios del Ebro o a lo largo de un mismo río al atravesar distintas litologías.

En la última década, se ha prestado una creciente atención a la investigación de la variabilidad espacial de la calidad de las aguas superficiales (JENSEN y WOOD, 1979). Algunos estudios se han orientado a la evaluación de los factores responsables de tal variación, y la influencia de los distintos controles

TIPOLOGIA DE LAS RELACIONES IONICAS ENTRE LOS COMPONENTES MAYORITARIOS DE LA SALINIDAD EN LA RED HIDROGRAFICA DEL EBRO

A. NAVAS* Y F. ALBERTO**

* Department of Geography. Amory Building. Rennes Drive. University of Exeter. Exeter EX4 4RJ (United Kingdom).

** U.E.I. de Edafología. Estación Experimental de Aula Dei. C.S.I.C. Apartado 202. 50080 Zaragoza (España).

This paper presents an study on the typology of ionic relationships between the major salinity components in the sampling stations of the Ebro river network. The simple linear regressions established between ions leads 13 different types of both $\text{SO}_4 = -\text{Ca}^{++}$ and $\text{Cl}^- - \text{Na}^+$ relationships. In each of these ionic regressions, the correlation coefficient and the gradient of the curve permit the identification of the salt that produced them (gypsum and halite). The existence of other salts, as well as other physico-chemical processes such as precipitation and ionic exchange can be also inferred.

Mapping of this information provides the identification of primary salinity sources in the catchments corresponding to each sampling station. The large spatial variability encountered, reflects the litho-geological diversity in the subbasins, but is also a consequence of the study scale.

1 INTRODUCCION

La alteración de rocas y suelos constituye el mayor proceso suministrador de solutos a las aguas superficiales (GARRELS y CHRIST, 1965). En la cuenca del Ebro, la naturaleza de las litologías ejerce un fuerte control sobre la química del agua. Los valores de las concentraciones iónicas medias de los ríos, en las estaciones de muestreo de la red de calidad de aguas (red COCA), drenando cuencas con distintos caracteres litogeológicos así lo demuestran (ALBERTO y NAVAS, 1986 I). Por ello, tanto las concentraciones de solutos como la composición del agua varía ampliamente entre los distintos tributarios del Ebro o a lo largo de un mismo río al atravesar distintas litofacies.

En la última década, se ha prestado una creciente atención a la investigación de la variabilidad espacial de la calidad de las aguas superficiales (UNESCO-WHO, 1978). Algunos estudios se han orientado a la evaluación de los factores responsables de tal variación, y la influencia de los distintos controles

ambientales (geología, edafología, topografía, vegetación y otras contribuciones atmosféricas y antrópicas) ha sido ampliamente discutida (GORHAM, 1961; MILLER, 1961; WALLING, 1980). Dependiendo de la escala, sólo consideraciones generales acerca del clima y la geología pueden ser invocadas; sin embargo, un estudio mas detallado puede evidenciar la existencia de complejas interacciones entre factores litológicos, edáficos, fisiográficos, hidrometeorológicos y antrópicos (WALLING y WEBB, 1978).

Uno de los recientes objetivos en la investigación hidrogeoquímica es el análisis de las relaciones entre los constituyentes disueltos y la litología con la finalidad de deducir la posible causa-efecto e identificar los principales controles geoquímicos. Para ello se han utilizado técnicas estadísticas diversas entre las que se incluyen las correlaciones canónicas, regresiones múltiples, el análisis factorial (LE MARECHAL y TEIL, 1973; DEPETRIS, 1980), multivariante (WEBB, 1983) y cluster (WILLIAMS, 1982).

La identificación de la sal de procedencia puede también realizarse a través del establecimiento de regresiones lineales simples entre los distintos constituyentes inorgánicos, en función de las relaciones estequiométricas existentes entre los productos de la fase sólida y los disueltos. Esta metodología ha sido utilizada por MAGARITZ et al. (1981) y ALBERTO y NAVAS (1989).

Cuando la composición iónica del agua de los ríos es documentada en diferentes emplazamientos, el análisis de las relaciones entre iones y la representación cartográfica de tal información puede resultar de gran utilidad para inferir la naturaleza de la sal de origen, demostrar las variaciones espaciales y relacionarlas con los principales factores de control. En este estudio se presenta una primera prospección de la tipología de las relaciones iónicas entre los componentes mayoritarios de la salinidad y su distribución espacial en las estaciones de muestreo de la red hidrográfica del Ebro.

2 EL AREA DE ESTUDIO

La cuenca del río Ebro, con una extensión de 85.000 km², contiene una gran variedad de tipos de rocas que a su vez presentan una considerable diversidad litológica. Así, las rocas ígneas y metamórficas constituyen junto con las rocas paleozoicas sedimentarias (mayoritariamente detríticas) el núcleo de los macizos montañosos pirenaicos e ibéricos, la cobertera mesozoica es eminentemente carbonática, mientras que los materiales terciarios presentan una gradación desde detríticos groseros a finos en los bordes hasta rocas evaporíticas en el centro de la cuenca. Esta diversidad geológica está acompañada por contrastes en el relieve, que a su vez llevan aparejadas distintas características hidrometeorológicas, con precipitaciones que sobrepasan anualmente los 2600 mm en las cabeceras de cuenca de los ríos pirenaicos hasta los escasos 300 mm en el centro de la depresión.

Esta gran cuenca terciaria, coincide prácticamente con la depresión del Ebro, que aparece confinada por los relieves circundantes y es drenada por el río Ebro y sus afluentes. La sedimentación en esta unidad topográficamente deprimida, y de forma aproximadamente triangular, está caracterizada en su sector central por potentes formaciones evaporíticas, mayoritariamente yesíferas, que localmente aparecen asociadas con mineralizaciones de sales mas solubles (haloideas y sulfatadas). En los bordes de la depresión afloran las mineralizaciones de sales del Keuper y eocenas (sales sódicas y potásicas de Navarra). En conjunto, las formaciones yesíferas ocupan el 22% de la superficie de la cuenca (ALBERTO y NAVAS, 1986a) y determinan que en la composición química de las aguas que drenan estas áreas, los componentes mayoritarios de la salinidad sean los aniones sulfato, cloro y bicarbonato y los cationes calcio, sodio, magnesio y potasio.

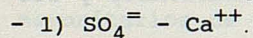
3 MATERIAL Y METODOS

En la calidad química de las soluciones acuosas, la suma de las concentraciones de todos los solutos, iguala al total de sólidos disueltos, que se relaciona linealmente con la conductividad eléctrica. A su vez, las concentraciones de cada uno de los solutos pueden ser expresadas como funciones lineales de la conductividad eléctrica (STEELE, 1968).

Las relaciones entre conductividad y los cationes y aniones mayoritarios en las aguas superficiales de la red hidrográfica del Ebro (NAVAS, 1983; ALBERTO y NAVAS 1986b) evidenciaron claramente que los iones cloro y sodio, por una parte, y sulfato y calcio, por otra, son los que mas contribuyen a la salinidad (hasta un 90 %), mientras que los bicarbonatos explicarían el porcentaje restante. La principal contribución del magnesio a la salinidad se asocia fundamentalmente a los sulfatos y también a los cloruros, como así se demostró mediante un ensayo de relación entre el magnesio y los iones sodio y calcio (NAVAS, 1983), observándose que las mas altas concentraciones de magnesio se correspondían bien con los mas altos valores de sodio o con los mas altos de calcio.

El hecho de que los iones sulfato y cloro sean los que mas contribuyen a la salinidad, y a su vez la procedencia común del sulfato y calcio del yeso y del cloro y sodio de la halita (ALBERTO y NAVAS, 1986b), nos lleva a considerar las respectivas relaciones iónicas como mas representativas para la descripción tipológica, así como para la identificación de la naturaleza de las sales de origen, de las posibles interferencias de otras sales o de la identificación de procesos fisicoquímicos de precipitación o cambio iónico.

Por tanto, las regresiones lineales establecidas en cada una de las estaciones de muestreo de la red hidrográfica del Ebro, son las siguientes:



- 2) $\text{SO}_4^{=}$ - Ca^{++*} , donde Ca^{++*} representa el procedente de la disolución del yeso, una vez descontada la participación del calcio de los bicarbonatos de acuerdo a la metodología propuesta por NAVAS (1988), ante la falta de linealidad observada en los valores mas bajos de la recta de regresión entre sulfato y calcio (ALBERTO y NAVAS, 1986 b).
- 3) Cl^- - Na^+ .
- 4) Cl^- - $\text{SO}_4^{=}$.

Para ello, se han utilizado los datos de los anuarios de calidad de aguas (MOPU, 1972-1985) correspondientes a las 68 estaciones de muestreo de la red hidrográfica del Ebro. Para expresar las relaciones de estequiometría, las concentraciones de los respectivos iones se han transformado de mg l^{-1} a meq l^{-1} .

La frecuencia de muestreo varía dependiendo del tipo de estación; en la mayoría se realizan anualmente 2 muestreos, correspondiendo generalmente a épocas de altos y bajos caudales, 4 muestreos en otras y 12 muestreos en algunas de las situadas en el curso del río Ebro. El número de datos depende asimismo de la fecha de inicio de funcionamiento de la estación de muestreo, como consecuencia de la creciente expansión de la red de calidad de aguas.

La tipología de relaciones iónicas se describe en función de los resultados de las regresiones entre $\text{SO}_4^{=}$ - Ca^{++*} y entre Cl^- - Na^+ . La relación entre sulfato y calcio es enunciada en primer término y según la existencia o no de correlación entre ambos iones se han diferenciado dos grandes grupos.

a) Existe correlación entre sulfato y calcio. Dependiendo del valor de la pendiente existen tres posibilidades: 1) $\text{SO}_4^{=} > \text{Ca}^{++}$, 2) $\text{SO}_4^{=} < \text{Ca}^{++}$, 3) $\text{SO}_4^{=} = \text{Ca}^{++}$. Dentro de cada uno de estos tipos la regresión entre los iones cloro y sodio, presenta a su vez tres posibilidades con relación al valor de la pendiente: 1) $\text{Cl}^- > \text{Na}^+$, 2) $\text{Cl}^- < \text{Na}^+$, 3) $\text{Cl}^- = \text{Na}^+$, o 4) no existe correlación entre ambos iones, $\text{Cl}^- \# \text{Na}^+$.

b) No existe correlación entre sulfato y calcio, $\text{SO}_4^{=} \# \text{Ca}^{++}$. Las cuatro posibilidades referidas anteriormente para la relación entre cloro y sodio son también consideradas.

3 TIPOLOGIA DE LAS RELACIONES IONICAS

Los resultados de las regresiones lineales establecidas se recogen en los Cuadros 1 y 2.

Respecto a las regresiones anión-catión ($\text{SO}_4^{=}$ - Ca^{++} y Cl^- - Na^+), la existencia o no de elevada correlación entre los respectivos iones es indicativa de la procedencia común o no de una determinada sal (yeso o halita), mientras que el valor de la pendiente informa sobre la existencia de otras sales suministradoras de tales iones (diferentes de las consideradas), o de procesos de precipitación o cambio iónico. Así, cuando la pendiente es igual a uno, no existen otras sales diferentes del yeso o halita. Cuando la pendiente es inferior a uno, refleja la existencia de otros sulfatos o cloruros (diferentes del yeso o halita) o de procesos de pérdida de calcio precipitado como carbonato o intercambiado en el complejo de cambio de suelos y sedimentos. Cuando la pendiente es superior a uno refleja la existencia de otras sales suministradoras de calcio o sodio (cloruros o sulfatos respectivamente), o una procedencia del cambio iónico.

En cuanto a las regresiones entre cloro y sulfato (Cuadro 2), la existencia de correlación entre ambos aniones se corresponde con la abundancia de litofacies evaporíticas en las cuencas de la respectivas estaciones de muestreo, reflejando la asociación mineralógica de ambas sales y la similaridad de mecanismos de incorporación a las aguas superficiales. Lógicamente, la ausencia de correlación se encuentra en las estaciones de muestreo de ríos drenando cuencas con ninguna o escasa representación de litologías salinas. La ausencia de correlación en algunas estaciones de muestreo (Aragon, Caparroso (5); Iregüa, Islallana (36); Jalón, Grisén (87); Oca, Oña (93) e Isuela, Pompenillo (218)), aun cuando la presencia de materiales salinos sobrepasa el 10% del total de la superficie de las respectivas cuencas (NAVAS, 1988), podría deberse a distintas proporciones de yeso y halita en ellas, o a

Cuadro 1.- Resultados de las regresiones lineales entre $\text{SO}_4^{--} - \text{Ca}^{++}$ y $\text{SO}_4^{--} - \text{Ca}^{++*}$ en las estaciones de muestreo de la red hidrográfica del Ebro.

Rio	Estacion	No.	n	$\text{SO}_4^{--} - \text{Ca}^{++}$				$\text{SO}_4^{--} - \text{Ca}^{++*}$			
				r	S	b	a	r	S	b	a
Ebro	Miranda	1	63	.633	***	1.31	1.81	.741	***	.86	.25
Ebro	Castejón	2	31	.865	***	.62	2.81	.793	***	.46	.90
Ega	Andosilla	3	24	.917	***	.66	4.06	.907	***	.59	1.14
Arga	Peralta	4	24	.900	***	1.07	2.65	.920	***	1.07	.25
Aragón	Caparros	5	24	.058		.06	2.63	.650	***	.67	.08
Jalón	Huérmeda	9	22	.847	***	.67	2.91	.754	***	.53	.73
Ebro	Zaragoza	11	63	.941	***	.63	3.00	.831	***	.44	1.00
Martín	Hijar	14	18	.972	***	.87	0.39	.972	***	.81	-.96
Guadalope	Alcañiz	15	24	.985	***	.83	2.00	.984	***	.77	-.09
Cinca	Fraga	17	23	.663	***	.43	2.55	.422	*	.23	1.10
Aragón	Jaca	18	24	.430	*	1.74	1.71	.396	*	.81	.19
Valira	Seo de Urgel	22	16	.435	*	1.23	1.06				
Segre	Seo de Urgel	23	19	.525	**	1.66	1.24				
Segre	Lérida	24	18	.943	***	.75	1.83	.919	***	.49	.71
Segre	Serós	25	23	.613	***	.61	2.38	.574	***	.39	1.15
Ebro	Tortosa	27	24	.936	***	.59	2.65	.958	***	.57	.54
Ebro	Mequinenza	29	17	.729	***	.59	2.64	.803	***	.57	.72
Guatizalema	Peralta de Alcofea	32	6	-.240		-.80	4.23	-.193		-.47	1.20
Alcanadre	Peralta de Alcofea	33	6	.429		1.14	1.92	.694		.58	.34
Iregua	Isallana	36	19	.825	***	1.28	1.18	.765	***	.80	.29
Najerilla	Torremontalvo	38	19	.787	***	1.27	1.35	.872	***	1.00	.16
Jiloca	Calamocha	42	23	.731	***	.60	4.30	.673	***	.46	2.11
Tirón	Cuscúrita	50	17	.606	***	.47	4.13	.553	*	.40	3.30
Arba	Gallur	60	21	.703	***	.38	3.05	.604	***	.34	1.38
Irati	Liédena	65	17	.339		.77	2.30	.569	**	.73	.09
Arga	Echauri	69	24	.235		.40	3.22	.206		.33	1.33
Ega	Estella	71	19	.734	***	1.08	3.81	.642	***	.73	1.09
Zadorra	Arce	74	23	.144		.21	4.08	.564	***	.88	.56
Jalón	Grisén	87	20	.683	***	.54	3.67	.498	*	.47	1.18
Gállego	Zaragoza	89	21	.858	***	.82	1.97	.808	***	.76	.11
Nela	Trespaderne	92	18	.814	***	1.74	1.77	.746	***	1.31	-.03
Oca	Oña	93	18	.909	***	.81	3.51	.900	***	.92	.20
Segre	Balaguer	96	31	.886	***	.77	2.00	.877	***	.68	.56
N. Ribagorzana	La Piñana	97	23	.715	***	.81	1.68	.637	***	.69	.53
Aragón	Yesa	101	24	.156		.56	2.28	.455	*	.74	.15
Huerta	Mezalocha	105	16	.722	***	.76	2.55	.633	***	.50	.77
Ebro	Sástago	112	24	.986	***	.71	2.72	.984	***	.54	.93
Segre	Pons	114	26	.617	***	1.42	1.36	.611	***	.86	.23
Ebro	Mendavia	120	89	.644	***	.59	2.73	.800	***	.74	.39
Ebro	Flix	121	14	.912	***	.50	3.05	.888	***	.43	1.19
Gállego	Anzónigo	123	24	.513	**	1.36	1.42	.607	***	1.02	.19
Arga	Huarte	159	17	.479		1.60	1.50	.597	**	2.41	-.17
Ebro	Palazuelos	161	20	.714	***	.98	2.02	.801	***	.65	.39
Ebro	Pignatelli	162	58	.848	***	.63	3.01	.750	***	.36	1.26
Ebro	Ascó	163	48	.826	***	.51	3.14	.778	***	.51	1.06
Bayas	Miranda	165	21	.878	***	.78	2.61	.930	***	.91	.17
Jerea	Palazuelos	166	18	.145		.26	3.45	.179		.20	.59
N. Pallaresa	Camarsa	169	17	.734	***	1.20	1.13	.757	***	.71	.18
Matarranya	Maella	176	17	.470		.43	2.34	.421		.32	-.21
Zadorra	Vitoria	179	20	.462	*	.83	3.09	.344		.59	.26
Zadorra	Durana	180	16	.458		1.28	2.57	.240		.48	.52
Aragón	Sangüesa	205	17	.379		.58	2.26	-.100		-.06	.37
Segre	Pla de San Tirs	206	16	.540	*	2.30	1.16				
Segre	Termens	207	24	.964	***	.95	1.64	.922	***	.67	.53
Ebro	Conchas de Haro	208	27	.199		.28	3.01	.502	***	.50	.56
Gállego	Zuera	209	19	.984	***	.76	1.93	.985	***	.73	-.01
Ebro	Ribarroja	210	19	.777	***	.58	2.68	.847	***	.60	.48
Ebro	Presa de Pina	211	60	.975	***	.75	2.82	.954	***	.57	.93
Ebro	Cherta	212	54	.807	***	.48	3.20	.807	***	.44	1.18
Cidacos	Calahorra	213	18	.584	**	.58	3.21	.547	**	.46	1.45
Alhama	Alfaro	214	17	.848	***	.52	4.52	.863	***	.50	2.11
Huerta	Zaragoza	216	20	.844	***	.65	2.91	.796	***	.51	1.03
Arga	Ororbía	217	11	.376		.38	2.77	-.029		-.03	1.02
Isuela	Pompenillo	218	10	-.193				.016		.01	1.66
Segre	Torres de Segre	219	10	.971	***	.71	2.05	.949	***	.52	.55
Clamor Amarga	Zaidín	225	6	.990	***	.50	2.55	.986	***	.52	.25
Alcanadre	Ontiñena	226	6	.722		.26	3.94	.922	***	.44	1.56
Flumen	Sariñena	227	6	.817	*	.32	4.09	.927	***	.34	2.27
Cinca	Monzón	228	20	.261		.47	2.37	.801	***	.80	.18

Significación estadística: *** $\geq 99.99\%$, ** $\geq 99.975\%$, * $\geq 99.95\%$.

Cuadro 2.- Resultados de las regresiones lineales entre $\text{Cl}^- - \text{Na}^+$ y $\text{Cl}^- - \text{Na}^+$
en las estaciones de muestreo de la red hidrográfica del Ebro.

Rio	Estacion	No.	n	$\text{Cl}^- - \text{Na}^+$				$\text{Cl}^- - \text{SO}_4^{=}$			
				r	S	b	a	r	S	b	a
Ebro	Miranda	1	63	.934	***	1.23	-.18	.435	***	.46	.64
Ebro	Castejón	2	31	.960	***	1.04	.08	.845	***	.73	.33
Ega	Andosilla	3	24	.957	***	1.09	<.01	.950	***	.64	.72
Arga	Peralta	4	24	.973	***	1.02	-.43	.921	***	.19	.35
Aragón	Caparrosos	5	24	.332	***	.39	.59	.245	***	.26	.60
Jalón	Huérmeda	9	22	.937	***	1.20	-.51	.828	***	2.52	-.34
Ebro	Zaragoza	11	63	.983	***	1.12	-.08	.961	***	.87	.28
Martín	Hijar	14	18	.811	***	.59	1.26	.896	***	4.89	7.19
Guadalope	Alcañiz	15	24	.879	***	1.10	-.06	.869	***	9.50	1.06
Cinca	Fraga	17	23	.964	***	1.33	-.06	.847	***	.89	.86
Aragón	Jaca	18	24	.247		.39	.05	.210		.70	.10
Valira	Seo de Urgel	22	16	-.295		-.87	.38	.024		.06	.23
Segre	Seo de Urgel	23	19	-.159		-.86	.52	.138		.35	.25
Segre	Lérida	24	18	.952	***	1.61	-.24	.891	***	3.75	-.74
Segre	Serós	25	23	.959	***	1.45	-.09	.775	***	2.00	.73
Ebro	Tortosa	27	24	.936	***	1.13	.09	.894	***	1.14	.52
Ebro	Mequinenza	29	17	.967	***	1.11	-.07	.935	***	1.10	.23
Guatizalema	Peralta de Alcofea	32	6	.985	***	2.05	-.65	.909	***	1.27	.12
Alcanadre	Peralta de Alcofea	33	6	.982	***	1.13	-.03	.782	*	.90	-.03
Iregua	Islallana	36	19	.692	***	.84	.04	.340		1.46	.66
Najerilla	Torremontalvo	38	19	.680	***	.61	.07	.431		2.23	.61
Jiloca	Calamocha	42	23	.403		.58	.39	.329		1.58	3.56
Tirón	Cuzcurita	50	17	.942	***	2.24	.83	.615	***	1.44	8.09
Arba	Gallur	60	21	.968	***	1.15	.07	.963	***	.55	.43
Irati	Liédena	65	17	.833	***	.94	-.05	.101		.10	.26
Arga	Echauri	69	24	.943	***	.90	-.13	.561	***	.09	.43
Ega	Estella	71	19	.665	***	.59	.53	.674	***	.34	.73
Zadorra	Arce	74	23	.875	***	1.12	-.11	.268		.29	.90
Jalón	Grisén	87	20	.943	***	.94	.27	.216		.15	3.86
Gállego	Zaragoza	89	21	.808	***	1.20	.14	.878	***	.56	1.31
Nela	Trespaderne	92	18	.963	***	.96	-.09	.924	***	.64	.10
Oca	Oña	93	18	.986	***	1.16	-.26	-.124		-.17	4.27
Segre	Balaguer	96	31	.046		.24	1.29	.848	***	2.54	.15
N. Ribagorzana	La Piñana	97	23	.750	***	.84	.12	.638	***	1.56	.63
Aragón	Yesa	101	24	.461	*	1.03	-.02	-.218		-.35	.43
Huerva	Mezalocha	105	16	.916	***	.44	.28	.356		.79	1.30
Ebro	Sástago	112	24	.901	***	.95	.99	.867	***	.88	1.35
Segre	Pons	114	26	.749	***	.85	.05	.747	***	1.54	.21
Ebro	Mendavia	120	89	.927	***	1.08	.15	.550	***	.32	1.23
Ebro	Flix	121	14	.956	***	1.22	-.20	.934	***	1.15	.56
Gállego	Anzánigo	123	24	.115		.06	.24	.520	**	.39	.36
Arga	Huarte	159	17	.638	***	.92	.04	.407		.80	.14
Ebro	Palazuelos	161	20	.989	***	1.22	-.19	.788	***	1.23	.21
Ebro	Pignatelli	162	58	.981	***	1.05	.05	.889	***	.51	.65
Ebro	Ascó	163	48	.975	***	1.11	-.05	.936	***	1.12	.07
Bayas	Miranda	165	21	.863	***	1.44	-.17	.624	***	1.69	.66
Jerea	Palazuelos	166	18	.563	**	.57	.05	-.267		-.70	.74
N. Pallaresa	Camarsa	169	17	.852	***	.96	-.03	.445		1.12	.22
Matarraña	Maella	176	17	.732	***	1.28	-.22	.663	***	3.31	-.56
Zadorra	Vitoria	179	20	.914	***	1.34	-.32	.072		.06	1.04
Zadorra	Durana	180	16	.341		.18	.27	-.108		-.10	.57
Aragón	Sangüesa	205	17	.560	*	2.03	-.15	.352		.84	.26
Segre	Pla de San Tirs	206	16	.873	***	1.02	-.01	.208		.35	.22
Segre	Termens	207	24	.961	***	1.33	-.12	.965	***	2.82	-.28
Ebro	Conchas de Haro	208	27	.911	***	1.53	-.37	.520	***	.79	.40
Gállego	Zuera	209	19	.967	***	1.01	.43	.902	***	.44	2.88
Ebro	Ribarroja	210	19	.954	***	1.15	-.02	.922	***	1.21	.20
Ebro	Presa de Pina	211	60	.979	***	1.10	.01	.974	***	.94	.24
Ebro	Cherta	212	54	.968	***	1.15	-.13	.936	***	1.19	-.02
Cidacos	Calahorra	213	18	.844	***	.85	1.55	.631	***	.60	1.11
Alhama	Alfaro	214	17	.967	***	1.04	.05	.860	***	2.56	-.435
Huerva	Zaragoza	216	20	.952	***	1.11	-.05	.605	***	.93	2.32
Arga	Ororbía	217	11	.942	***	.96	<-.01	.798	***	.29	.07
Isuela	Pompenillo	218	10	.211		.39	2.31	-.386		-.74	3.40
Segre	Torres de Segre	219	10	.987	***	1.61	-.32	.950	***	3.29	-1.08
Clamor Amarga	Zaidín	225	6	.983	***	1.63	.22	.989	***	2.34	1.72
Alcanadre	Ontiñena	226	6	.693		.67	2.99	.780		.78	1.74
Flumen	Sariñena	227	6	.962	***	1.94	-2.43	.961	***	1.33	.07
Cinca	Monzón	228	20	.979	***	1.00	.16	.954	***	.28	.57

Significación estadística: ***≥99.99%, **≥99.975%, *≥99.95%.

su distinta accesibilidad a los mecanismos de incorporación a las aguas.

En un intento de relacionar la tipología de las relaciones iónicas encontradas con el entorno lito-geológico de origen, estas se han encuadrado en los ríos y tramos de ríos que previamente se diferenciaron en la cuenca atendiendo a sus caracteres de composición iónica (NAVAS, 1988).

El grupo A) incluye los ríos de aguas con un nivel de mineralización medio, pero caracterizados por altas concentraciones de bicarbonatos. En este grupo la tipología de relaciones es la siguiente:

- $\text{SO}_4^{=}$ > Ca^{++} y Cl^{-} < Na^{+} en los ríos Arba, Gallur (60); Gállego, Zaragoza (89); Clamor Amarga, Zaidín (225) y Flumen, Sariñena (227).
- $\text{SO}_4^{=}$ < Ca^{++} y Cl^{-} > Na^{+} en Arga, Huarte (159).
- $\text{SO}_4^{=}$ < Ca^{++} y Cl^{-} # Na^{+} en Alcanadre, Ontiñena (226).
- $\text{SO}_4^{=}$ # Ca^{++} y Cl^{-} # Na^{+} en Isuela, Pompenillo (218).

A partir de ellas se infiere la existencia de una fuente de sulfatos distinta del yeso y de sodio distinta de la halita, que puede relacionarse con la presencia, en las cuencas de recepción de algunas estaciones de muestreo, de carbonatos muy solubles de sodio y magnesio, dándose la circunstancia de que las áreas madres de carbonatos muy solubles no lo son de yesos.

Los tramos de los ríos del grupo B) corresponden a cabeceras de cuenca en los Pirineos, y en consecuencia sus aguas están escasamente mineralizadas. Las relaciones iónicas son las siguientes:

- $\text{SO}_4^{=}$ # Ca^{++} y Cl^{-} # Na^{+} en los ríos Valira y Segre en Seo de Urgel (22) y (23).
- $\text{SO}_4^{=}$ # Ca^{++} y Cl^{-} = Na^{+} en Segre en Plá de San Tirs (206).

Tales relaciones evidencian la ausencia de yeso o halita, lo que se corresponde con el predominio en las respectivas cuencas de rocas eminentemente silíceas, de forma que la alteración de silicatos constituye la principal fuente suministradora de iones.

En los ríos del grupo C), que presentan niveles medios de

mineralización, la tipología encontrada es la siguiente:

- $\text{SO}_4^{=}$ > Ca^{++} y Cl^- < Na^+ en Ebro, Miranda (1); Zadorra, Arce (74); Ebro Mendavia (120); Ebro, Palazuelos (161); Bayas, Miranda (165) y Ebro, Conchas de Haro (208).
- $\text{SO}_4^{=}$ > Ca^{++} y Cl^- > Na^+ en Iregüa, Islallana (36); Irati, Liédena (65); Noguera Ribagorzana, La Piñana (97); Segre, Pons (114) y Noguera Pallaresa, Camarasa (169).
- $\text{SO}_4^{=}$ > Ca^{++} y Cl^- = Na^+ en Aragón, Yesa (101) y Cinca, Monzón (228).
- $\text{SO}_4^{=}$ > Ca^{++} y Cl^- # Na^+ en Aragón, Caparroso (5).
- $\text{SO}_4^{=}$ < Ca^{++} y Cl^- > Na^+ en Nela, Trespaderne (92).
- $\text{SO}_4^{=}$ < Ca^{++} y Cl^- = Na^+ en Arga, Peralta (4).
- $\text{SO}_4^{=}$ = Ca^{++} y Cl^- > Na^+ en Najerilla, Torremontalvo (38) y Ega, Estella (71).
- $\text{SO}_4^{=}$ = Ca^{++} y Cl^- # Na^+ en Gállego, Anzánigo (123).
- $\text{SO}_4^{=}$ # Ca^{++} y Cl^- > Na^+ en Alcanadre, Peralta de Alcofea (33); Zadorra, Vitoria (179) y Aragón, Sangüesa (205).
- $\text{SO}_4^{=}$ # Ca^{++} y Cl^- < Na^+ en Jerea, Palazuelos (166).
- $\text{SO}_4^{=}$ # Ca^{++} y Cl^- # Na^+ en Aragón, Jaca (18) y Zadorra, Durana (180).

En este grupo, la heterogeneidad litológica entre cuencas determina una gran variabilidad en las relaciones iónicas que indican, para la mayoría de las estaciones de muestreo, la existencia de yeso, halita y de otras sales sulfatadas, fundamentalmente de sodio. Las bajas concentraciones de magnesio (entre 0.3 y 2 meql⁻¹), permiten descartar su procedencia de una importante fuente sulfatada.

En los ríos del grupo D) las aguas están altamente mineralizadas. Las relaciones iónicas son las siguientes:

- $\text{SO}_4^{=}$ > Ca^{++} y Cl^- < Na^+ en Ebro, Castejón (2); Ega, Andosilla (3); Jalón, Huérmeda (9); Ebro, Zaragoza (11); Guadalope, Alcañiz (15); Cinca, Fraga (17); Segre, Lérida (24); Segre, Serós (25); Ebro, Tortosa (27); Ebro, Mequinenza (29); Tirón, Cuzcurita (50); Oca, Oña (93); Ebro, Flix (121); Ebro, Pignatelli (162); Ebro, Ascó (163); Segre, Termens (207); Ebro, Ribarroja (210); Ebro, Presa de Pina (211); Ebro,

Cherta (212); Alhama, Alfaro (214); Huerva, Zaragoza (216) y Segre, Torres de Segre (219).

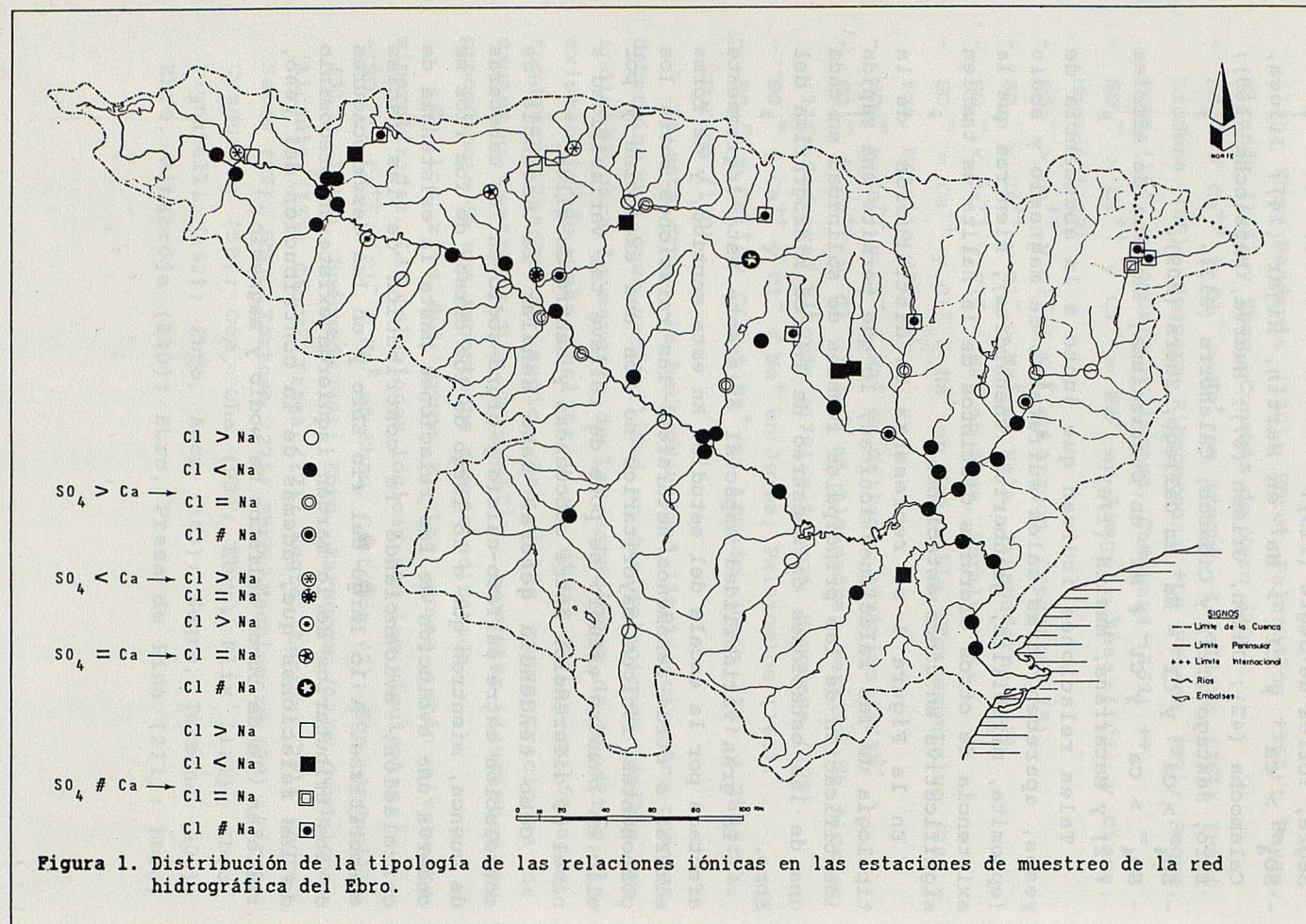
- $\text{SO}_4^{=}$ > Ca^{++} y Cl^- > Na^+ en Martín, Híjar (14); Jiloca, Calamocha (42); Jalón, Grisén (87); Huerva, Mezalocha (105); Ebro, Sástago (112) y Cidacos, Calahorra (213).
- $\text{SO}_4^{=}$ > Ca^{++} y Cl^- = Na^+ en Gállego, Zuera (209).
- $\text{SO}_4^{=}$ > Ca^{++} y Cl^- # Na^+ en Guatizalema, Peralta de Alcofea (32) y Matarraña, Maella (176).

Tales relaciones indican que junto a la abundancia de yesos, aparecen otras sales sulfatadas de magnesio y sodio (epsomita, mirabilita, glauberita, thenardita), mientras que la existencia de otros cloruros distintos de la halita es también significativa en cinco estaciones.

En la Figura 1 se representa la distribución de la tipología de las relaciones iónicas, lo que permite una rápida identificación de las principales fuentes de salinidad en cada una de las estaciones de muestreo de la red hidrográfica del Ebro.

La gran variabilidad espacial existente está lógicamente afectada por la escala del estudio. En este sentido, y de forma similar a otros fenómenos naturales, las relaciones entre los componentes iónicos mayoritarios no son una excepción y por ello en nuestro estudio se pone de relieve tal variabilidad a nivel de diferencias entre subcuencas y dentro de ellas.

Como tendencia general cabe señalar la ausencia de correlación entre sulfato-calcio y cloro-sodio en las cabeceras de cuenca, mientras que a lo largo de los cursos de los ríos se observa una evolución de las relaciones hasta la existencia de correlación, evidenciando la contribución de las facies evaporíticas. A lo largo del río Ebro y en las desembocaduras de los tributarios de la margen izquierda existe un predominio de las relaciones que, además de la contribución del yeso, reflejan la de otros sulfatos de sodio y magnesio.



BIBLIOGRAFIA

- ALBERTO, F. y A. NAVAS. 1986a. La participación de los yesos en la salinización de las aguas superficiales de la cuenca del Ebro. I. Cartografía de síntesis de las formaciones con yesos. Anales de Aula Dei, 18:7-18.
- ALBERTO, F. y A. NAVAS. 1986b. La participación de los yesos en la salinización de las aguas superficiales de la cuenca del Ebro. II. Contribución relativa de los iones $SO_4^{=}$ y Ca^{++} a la salinidad. Anales de Aula Dei, 18: 19-29.
- ALBERTO, F. y A. NAVAS. 1989. La participación de los yesos en la salinización de las aguas superficiales de la cuenca del Ebro. III. Metodología de cuantificación. Anales de Aula Dei. (En prensa).
- DEPETRIS, P.J. 1980. Hydrochemical aspects of the Negro River, Patagonia Argentina. Earth Surface Processes, 5:181-186.
- GARRELS, R.M. y C.L. CHRIST. 1965. Solutions, Minerals and Equilibria. Harper and Row, New York.
- GORHAM, E. 1961. Factors influencing supply of major ions to inland waters with special reference to the atmosphere. Bull. Geol. Soc. Am., 72: 795-840.
- LE MARECHAL, A. y H. TEIL. 1973. Application de quelques traitements statistiques aux données hydrochimiques des sources thermominerales du Cameroun. Cahiers ORSTOM. Serie Geologie, 5:217-234.
- MAGARITZ, M; A. NADLER; H. KOYUMDJISKY y J. DAN. 1981. The use of Na/Cl ratios to trace solute sources in a semiarid zone. Water Resources Research, 17:602-608.
- MILLER, J.P. 1961. Solutes in small streams draining single rocks types, Sangre de Cristo Range, New Mexico. U.S. Geol. Survey Water Supply Paper, 1535-F.
- M.O.P.U. 1972-1985. Analisis de calidad de aguas. Red Oficial de M.O.P.U.. Servicio de Publicaciones. Direccion General de Obras Hidraulicas. Madrid.

- NAVAS, A. 1983. Las litofacies yesíferas de la cuenca del Ebro. Síntesis cartográfica y consideraciones sobre su papel en la Planificación Territorial. Tesis de Master of Science. IAMZ, Zaragoza. 239 pp.
- NAVAS, A. 1988. La participación de los yesos en la salinización de las aguas superficiales de la cuenca del Ebro. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza. 466 pp.
- STEELE, T.D. 1968. Digital-computer applications in chemical quality studies of surface water in a small watershed: IASH-UNESCO Symposium on Use of Analog and Digital Computers in Hydrology, Tucson, Arizona, December, 1968. IAHS 80:203-214.
- UNESCO-WHO, 1978. Water quality surveys. Studies and reports in Hydrology, 23.
- WALLING, D.E. 1980. Water in the catchment ecosystem. In Gower, A.M. (Editor), Water Quality in Catchment Ecosystems, Wiley, Chichester, 1-47.
- WALLING, D.E. y B.W. WEBB, 1978. Mapping solute loadings in an area of Devon, England. Earth Surface Processes, 3: 85-99.
- WEBB, B.W. 1983. Factors influencing spatial variation of background solute levels in a Devon river system. Rep. Trans. Devon. Ass. Advnt. Sci., 115:51-69.
- WILLIAMS, R.E. 1982. Statistical identification of hydraulic connections between the surface of a mountain and internal mineralized sources. Ground Water, 20:466-478.

^{60}Fe VALUES OF PLUTONIC-METAMORPHIC SERIES AT CABO ORTEGAL COMPLEX (NORTHWESTERN SPAIN): PETROGENETIC IMPLICATIONS

A. APARICIO¹, Y.A. BORSHEVSKY², N.I. MEDVEDOVSKAYA², I.P. NOVITSKY², V. SÁNCHEZ³

1. Departamento de Geología (M.N.C.N.), C.S.I.C. José Gutiérrez Abascal, 2. 28006 MADRID (Spain)

2. Institute of the Lithosphere. Academy of Sciences. Staromonetsky per 22. MOSCOW 109180 (USSR)

3. Departamento de Geología. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza. 50009 ZARAGOZA (Spain)

^{60}Fe isotopic composition of granulites, eclogites and amphibolites from the mafic-ultramafic Cabo Ortegal Complex suggest that they had a paraderivate origin. This is contrary to current theories which argue for a mantle origin.

Geochronological and structural-stratigraphic considerations allow us to consider the original sedimentary series, generally of Cambrian age, as formed by carbonate rocks (dolomites and magnesites) together with argillaceous-sandy materials. These materials were later affected by various Hercynian igneous-metamorphic episodes related to the origin and emplacement of various granitic rocks.

1.- INTRODUCTION.

The Cabo Ortegal Complex located in Northwestern Spain (Galicia) (fig. 1) is mainly constituted by pelitic materials together with mafic-ultramafic rocks, all of them affected by various deformation and metamorphic processes during Hercynian times (Vogel, 1967; Engels, 1972; Fernández & Monteserin, 1976; Arps et al., 1977; Fernández & Fernández, 1977; Den Tex, 1981a; Vogel et al., 1983; Martínez et al., 1988; etc.).

The main lithological types are schists, amphibolites, granulites, eclogites and serpentinites; the latter referred to by some geologists, as peridotites. Calc-silicate rocks and marbles are intercalated within the Complex. In some places leucogranitoids are also present; they appear to represent the apophysis of a thick sialic basement at Cabo Ortegal (Córdoba et al., 1987).

Isotopic and geochronological data indicate that in such a zone igneous and metamorphic processes took place, from 500 m.y. to 280 m.y. ago (Van Calsteren, 1977a; Van Calsteren et al.,

1979; Kuipjer, 1979; Priem & Den Tex, 1984; Griffiths et al., 1985; etc.). During this time various igneous-metamorphic episodes, many of them of a retrograde character, has been identified. Related to these episodes various structural-deformation stages have been established.

In almost all the proposed petrogenetic models, the mafic-ultramafic rocks are considered to have a mantle provenance, emplaced either as "solid" peridotites by an unknown mechanism or formed by the consolidation of basaltic gabbro magmas (Van Calsteren, 1977b; Arps et al., 1977; Vogel et al., 1983; Arenas et al., 1986; etc.). The peridotites or gabbros (basalts) were later transformed into amphibolites, eclogites, serpentinites, etc. during various metamorphic processes. Nevertheless many workers do find some geochemical differences in the basic magmas considered as original. For example, Vogel et al. (1983) proposes the existence of quartz-tholeiitic magmas, whereas Van Calsteren (1978) proposes plateau basalts. Koning (1966); Den Tex (1981a,b); Pérez Estaún (1982); Martínez Catalán et al. (1984) and Arenas et al. (1986) consider the serpentinites and associated rocks as belonging to a metaofiolitic serie. Other workers, such as Maaskant (1970), define the serpentinites as picritic magmas differentiated from a parental ultrabasic magma. Kuipjer & Arps (1983) though consider that the serpentinites were formed by differentiation of lherzolites. The original magmas of these serpentinites are considered by some as of MORB and even N-MORB and E-MORB types (Pérez Estaún, 1982; Martínez Catalán et al., 1984; Griffiths et al., 1985; Arenas, 1985; Arenas et al., 1986).

Van Calsteren (1977b) relates the existence of these ultrabasic magmas to the existence of a Mantle plume at the base of the lithosphere. Other workers, such as Arps et al. (1977); Kuipjer & Arps (1983; Arenas et al. (1986); etc. consider that the ophiolitic sequence represent fragments of an normal oceanic crust.

All the geologists cited above suggest that the basic-ultrabasic rocks have a mantle-lower crust provenance and were emplaced or intruded into pelitic sedimentary rocks. Later they were affected by various structural-metamorphic processes from Upper Precambrian to Lower Paleozoic times. The result was the formation of a "igneous-sedimentary Complex" variously metamorphized, e.g. greenschists, amphibolites, eclogites, etc.

However, other authors in more recent works (Sánchez Cela & Aparicio, 1982; Aparicio et al., 1987; Aparicio & Sánchez Cela, 1987a) consider that the mafic-ultramafic rocks are derived from sedimentary rocks (marls and carbonate rocks). This conclusion is based on the characteristics of the ultramafic-mafic outcrops and their relationships with the metasedimentary (schists, marbles, calc-silicate rocks) and plutonic rocks together with geochemical analyses.

2.- δO^{18} ISOTOPIC DATA.

The first studies on δO^{18} values of the Cabo Ortegal Complex were reported by Javoy & Allegre (1967) and Vogel & Garlick (1970). The latter made δO^{18} measurements in calcsilicate rocks (8.9 and 11.7), eclogites (1.5-2.5) and paragneisses enclosed within eclogites (9.6). Javoy & Allegre obtained a value of 3.16 on an eclogite sample. Curiously, the petrogenetic conclusions of both authors appear to be opposite: Javoy & Allegre suggest a paraderivate origin for the eclogites by decarbonation of the sediments, but Vogel & Garlick interpret the same eclogites as having a basic igneous origin.

In order to test our model, various δO^{18} values were measured on different rocks from the Cabo Ortegal Complex. The geographic, cartographic and litological names of Fernández & Fernández (1977), Vogel et al. (1983) and Arenas et al. (1986) have been used (table 1).

In the pelitic materials, two gneisses (schists) were selected in those zones unaffected by the intrusive granites. One (sample 1) corresponds to a gneiss (schist) intercalated within the ultramafic rocks (serpentinites of Obico), the other schist (sample 2) is located in the unity named as Gneisses of "Chimparra" in Western Cabo Ortegal. Eclogites were selected from the "Concepenido" Massif (sample 3) and from Punta Longa-Cabo Ortegal (sample 4). Granulites were collected from the "Bacariza" formation (samples 5 and 6). In the ultramafic Massif of "Herbeira" two samples (7 and 8) were collected. Sample 9 corresponds to an amphibolite of "Purrido" (metagabbro-metabasalts), and 10 corresponds to an amphibolite enclosed within the metabasites of the "Bacariza" formation. Among leucogranitoids two samples were selected within the "Chimparra" formation (11 and 12) with some different compositional features.

All these samples were analyzed in a Varian MAT-250 spectrometer at the Isotopic Geologic Laboratory of the ILSAN (USSR Academic Sciences), using the xenon-fluoride method with segregation of oxygen as O_2 from minerals and rocks. The international NBS-28 standard was used. δO^{18} values were made in relation to SMOW in ‰ (table 2).

From the different values the following conclusions can be made:

- For the schists the δO^{18} values (10.2 and 10.5) indicate normal values for these rock-types. That is to say they correspond with rocks from a paraderivate origin (e.g. pelitic materials).
- The δO^{18} values of granitoides (9.5 and 10.5) are similar to "S" type granites (Harmon et al., 1984; Wilson et al, 1985), established before by Aparicio & Sánchez Cela (1987b) on the basis of geochemical features.

-The δO^{18} values of eclogites (7.2 and 7.5) and granulites (8.8 and 9.2) suggest more strongly a paraderivate origin than a igneous mantle origin. The eclogites, granulites and amphibolites exhibit higher δO^{18} values that if they were from a mantle provenance.

-The δO^{18} values for serpentinites of "Herbeira" Massif (5.5 and 6.2) can be considered as normal for ultramafics (Wenner & Taylor, 1973, 1974; Taylor, 1974; Kyser et al, 1982), provided that such rocks have not suffered any modifications by interchange with "superficial", metamorphic or magmatic waters, which could decrease the original values.

3.- PETROGENETIC CONSIDERATIONS AND DISCUSSION.

In many places within Cabo Ortegal Complex two important stratigraphic-petrological features must be indicated:

-Existence of a frequent association between ultramafic rocks, mainly formed by serpentinites-chloritites and marbles, and calcsilicate rocks of indubitable sedimentary inheritance.

-Presence of "sedimentary features", as stratification in many ultramafic rocks (mainly serpentinites).

Merely the presence of these geological features could be enough to indicate a paraderivate origin of the ultramafics at Cabo Ortegal Complex.

Calcsilicate rocks also exist within ultramafics (serpentinites) as thin intercalated levels. This has been observed by other workers (e.g. Vogel, 1967; Van Der Meer Mohr, 1975; Fernández & Fernández, 1977; Arde Duarte et al., 1977; Vogel et al., 1983; Arenas, 1985). Vogel (1967) also mentions

the presence of these calcsilicate rocks associated with other rocks at Cabo Ortegal Complex as granulites, eclogites and amphibolites, although their presence is also cited in other plutonic-metamorphic Complexes in nearby Northwestern zones and Northern Portugal (Arenas et al., 1986).

From various isotope studies (Javoy & Allegre, 1967; Shieh & Taylor, 1969; Garlik, 1969; Wenner & Taylor, 1974; Morrison & Valley, 1988) it has been deduced that the decrease in isotope values in rocks can be caused by:

- a) Interchange effect with metamorphic-igneous fluids.
- b) An increase in the grade of metamorphism.
- c) CO₂ lost in carbonate rocks.

The two first factors of isotope diminution should be similar in all lithological types at Cabo Ortegal, a fact that appears not to have occurred. Therefore we can deduce that the composition of the protolith which gave rise to the ultramafics (serpentinites) was more susceptible to the "admission" of the fluids (e.g. carbonate rocks) than schists, amphibolites, granulites and eclogites. This suggests that the original rocks could have been sedimentary carbonates.

The possibility that the original protolith at Cabo Ortegal was formed by Mg-rich sedimentary rocks (magnesites-dolomites) was suggested by Aparicio et al. (1987). Such rocks under metamorphic-igneous environments, could produce not only various chlorites and serpentinites but also olivines, pyroxenes and spinels all of them present, although scarce in the ultramafics.

Aharon (1988) records that δO^{18} values for magnesian carbonate rocks (magnesites, dolomites) vary from 11.2 to 14.6 although stating that the isotope O^{18} values in magnesites can be modified because of the activity of the fluids. Shieh & Taylor (1969) recorded decreasing O^{18} values, down to 5‰ in carbonate rocks because of release CO₂ which changed the "normal sedimentary

values" (e.g. δO^{18} about 12-14‰) into Mantle values (e.g. δO^{18} about 5-6‰).

In our opinion a paraderivate origin provides a more rational petrogenetic interpretation for the Cabo Ortegal "igneous-metamorphic" Complex.

The presence of sedimentary carbonate rocks is easily deduced through two important observations: a) existence of calcsilicate rocks intercalated with ultramafics and associated rocks. b) Existence in nearby geological zones and in similar stratigraphic levels (Lower Cambrian) of magnesites and dolomites together with other sedimentary rocks (Doval et al., 1977).

The geological area next to the Cabo Ortegal Complex is in stratigraphic-structural conformity, with shales and low-grade schists from Ordovician to Silurian ages (Fernández & Monteserin, 1976; Fernández & Fernández, 1977). Such surrounding materials appear to correspond to the sedimentary cover that, gradually changes into older sedimentary materials (mainly Cambrian) which appear to constitute the oldest materials at the Cabo Ortegal Complex.

On the other hand, the stratigraphic and metamorphic serialations together with geochronological data and stratigraphic correlations appear to strengthen field and petrological studies in the same way as the existence of a gradual transition between the old igneous-metamorphic nucleus and the epimetamorphic-sedimentary surrounding materials do at Cabo Ortegal. Kuipjer (1979) and Van Calsteren (1977a) have determined a Cambrian age (about 541 m.y.) for materials that lie below Ordovician materials, which themselves date to 280 m.y. at the top of the sequence (Priem & Den Tex, 1984). These last ages appear to indicate the ages of the igneous and metamorphic processes that have affected them. The values of 470-440 m.y. and 300 m.y. could be represent igneous-metamorphic events that in such

epochs affected Cambrian materials or "mixing ages" between cambrian rocks and carboniferous granitization processes.

Although a similar petrogenetic model (fig. 2) been proposed for other Hercynian zones in the Iberian Massif (Sánchez Cela & Aparicio, 1982; Aparicio & García Cacho, 1987; Sánchez Cela & Aparicio, 1989) new isotope, geochemical and geophysical data are necessary in order to test the model for the origin by granitization and metamorphic processes of the mafic-ultramafic rocks in other parts of the World.

ACKNOWLEDGEMENTS:

This work have partially been supported by project 608/467 C.S.I.C. We thank to J.L. Casaseca, J. Arroyo for assistance in manuscript preparation.

4.-REFERENCES.

AHARON (1988). A stable-isotope study of magnetites from the Run Jungle Uranium field, Australia: Implications for the origin of strata-bound massive magnesites. *Chem. Geol.*, 69: 127-145.

APARICIO YAGUE, A. & GARCIA CACHO, L. (1987). Geología del Sistema Central Español. *Memoria C.S.I.C.- Comunidad de Madrid*, 32 pp.

APARICIO YAGUE, A.; SANCHEZ CELA, V. & GARCIA CACHO, L. (1987). Petrological and geochemical considerations on the Cabo Ortegal Complex (NW Spain). *Rev. Acad. Ciencias Zaragoza*, 42: 131-162.

APARICIO YAGUE, A. & SANCHEZ CELA, V. (1987a). A new petrogenetic model for Cabo Ortegal Complex (NW Spain). *Terra Cognita*, 7, nº 2-3: 415.

APARICIO YAGUE, A. & SANCHEZ CELA, V. (1987b). Petrological meaning of garnets in granitic rocks (Cabo Ortegal, NW of

Spain). *Rend. Soc. Ital. Min. Petr.*, 42: 316-317.

ARCE DUARTE, J.M.; FERNANDEZ TOMAS, J.; MONTESERIN LOPEZ, V. & PEINADO MORENO, M. (1977). Mapa Geológico de España, escala 1:50.000. Hoja 2, Cillero. I.G.M.E. Madrid.

ARENAS, R. (1985). *Evolución petrológica y geoquímica de la unidad alóctona inferior del Complejo Metamórfico Básico-Ultrabásico de Cabo Ortegal (Unidad de Moeche) y del Silúrico Parautoctono, Cadena Hercínica Ibérica (NW de España)*. Tesis Univ. Complutense Madrid, 543 pp.

ARENAS, R.; GIL IBARGUCHI, J.I.; GONZALEZ LODEIRO, F.; KLEIN, E.; MARTINEZ CATALAN, J.R.; ORTEGA GIRONES, E.; PABLO MACIA, J.G. de & PEINADO, M. (1986). Tectonostratigraphic units in the Complexes with mafic and related rocks of the NW of the Iberian Massif. *Hercynica*, 2: 87-110.

ARPS, C.E.S.; CALSTEREN, P.W.C. von; HILGEN, J.D.; KUIJPER, R.O. & TEX, D. den (1977). Mafic and related complexes in Galicia: An excursion guide. *Leidse Geol. Med.*, 51: 63-94.

CORDOBA, D.; BANDA, E. & ABSORGE, J. (1987). The Hercynian crust in Northwestern Spain: a seismic survey. *Tectonophysics*, 132: 321-333.

DEN TEX, E. (1981a). A geological section across the Hesperian massif in western and central Galicia. *Geol. in Mijnbouw*, 60: 33-40.

DEN TEX, E. (1981b). Basement evolution in the northern Hesperian Massif. A preliminary survey of results obtained by the Leiden Research Group. *Leidse Geol. Med.*, 52: 1-21.

DOVAL, M.; BRELL, M. & GALAN, E. (1977). El yacimiento de magnesita de Incio (Lugo, España). *Bol. Geol. Min.*, 88: 50-64.

ENGELS, J.P. (1972). The catazonal poly-metamorphic rocks of Cabo Ortegal (NW Spain) a structural and petrofabric study. *Leidse Geol. Med.*, 48: 83-133.

FAWCETT, J.J. & YODER, M.S. Jr. (1966). Phase relationship of chlorites in the system $MgO-Al_2O_3-SiO_2-H_2O$. *Amer. Min.*, 51: 353-380.

FERNANDEZ MARTINEZ, F. & FERNANDEZ POMPA, F. (1977). Mapa Geológico de España, escala 1:50.000. Hoja 1, Cariño. I.G.M.E. Madrid.

FERNANDEZ POMPA, F. & MONTESERIN LOPEZ, V. (1976). Mapa Geológico de España, escala 1:50.000. Hoja 7, Cedeira. I.G.M.E. Madrid.

GARLICK, G.D. (1969). *The stable isotopes of oxygen*. Handbook of Geochemistry. Ed. K.H. Wedepohl. Springer-Verlag, 1-27.

GRIFFITHS, J.B.; PEVEAT, J.J.; CORNICHE, J.; IGLESIAS, M. & GIL, J.I. (1985). U-Pb, Nd isotope and REE geochemistry in eclogites from the Cabo Ortegal Complex, Galicia, Spain. An example of REE immobility conserving MORB like patterns during high-grade metamorphism. *Chem. Geol. (Isotope Geoscience Section)*, 52: 217-225.

HARMON, R.S.; HALLIDAY, A.N.; CLAYBURN, J.A.P. & STEPHENS, W.E. (1984). Chemical and isotopic systematics of the Caledonian intrusions of Scotland and Northern England. A guide to magma source region and magma-crust interaction. *Phil. Trans. R. Soc. London*, A310: 709-742.

JAVOY, M. & ALLEGRE, C.J. (1967). Etude de la composition O^{18}/O^{16} de quelques eclogites: conséquences pétrologiques et géophysiques. *Bull. Soc. Geol. France*, (7), 9: 800-808.

KONING, H. (1966). Les types de roches basiques et ultrabasiques qu'on rencontre dans la partie occidentale de la Galice (Espagne). *Leidse Geol. Med.*, 36: 235-242.

KUIPJER, R.P. (1979). U-Pb systematics and the petrogenetic evolution of infracrustal rocks in the Paleozoic basement of Western Galicia, NW Spain. *Verh. ZWO Lab. Isot. Geol.*, 5: 1-101.

KUIPJER, R.P. & ARPS, C.E.S. (1983). Un modelo de evolución basado en el desarrollo de una "mantle plume". In: *Geología de España*, Tomo I. I.G.M.E., 455-457.

KYSER, T.K.; O'NEIL, J.R. & CARMICHAEL, I.S.E. (1982). Genetic relations among basic lavas and ultramafic nodules, evidence from oxygen isotope composition. *Contr. Min. Petr.*, 81: 88-102.

MAASKANT, P. (1970). Chemical petrology of polymetamorphic ultramafic rocks from Galicia, NW Spain. *Leidse Geol. Med.*, 45: 237-325.

MARTINEZ CATALAN, J.R.; KLEIN, E.; PABLO MACIA, J.G. & GONZALEZ LODEIRO, F. (1984). El Complejo de Ordenes: subdivisión, descripción y discusión sobre su origen. *Cuad. Lab. Xeol. Laxe*, 7: 139-210.

MARTINEZ, F.J.; JULIBERT, M.; SEBASTIAN, A.; ARBOLEYA, M.L. & GIL IBARGUCHI, J.I. (1988). Structural and thermal evolution of high-grade areas in the Northwestern parts of the Iberian Massif. *Amer. Journal Sci.*, 288: 969-996.

MORRISON, J. & VALLEY, J.W. (1988). Contamination of the Marcy Anorthosite massif, Adirondack Mountains, NY: petrologic and isotopic evidence. *Contr. Min. Petr.*, 98: 97-108.

PEREZ ESTAUN, A. (1982). Características geoquímicas de las rocas básicas del complejo de Cabo Ortegal: revisión de los datos existentes. *Brev. Geol. Ast.*, 26(3-4): 26-32.

PRIEM, H.N.A. & DEN TEX, E. (1984). Tracing crustal evolution in the NW Iberian Peninsula through the Rb-Sr and U-Pb systematics of Paleozoic granitoids: a review. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 35: 121-130.

SANCHEZ CELA, V. & APARICIO YAGUE, A. (1982). Feldspathic-quartz rocks of sedimentary metamorphic and igneous facies in relation to granitization-transformation processes in the Hercynian Massif of Spain. In: *Transformists Petrology*, 189-230. Theophrastus publications SA. Athens. ed. F.K. Drescher-Kaden and SS Augustithis.

SANCHEZ CELA, V. & APARICIO YAGUE, A. (1989). Basic-intermediate igneous rocks formed by transformation processes in the SW of Spain. (in press).

SHIEH, Y.N. & TAYLOR, H.P. (1969). Oxygen and carbon isotope studies of contact metamorphism of carbonate rocks (Abstract). *Trans. Am. Geophys. Union*, 50: 328.

TAYLOR, H.P. (1974). The application of oxygen and hydrogen isotope studies to problems of hydrothermal alteration and ore deposition. *Economic Geology*, 69: 843-883.

VAN CALSTEREN, P.W.C. (1977a). Geochronological, geochemical and geophysical investigations in the high-grade mafic-ultramafic complex at Cabo Ortegal and other preexisting element in the Hercynian basement of Galicia (NW Spain). *Leidse*

Geol. Med., 51: 57-61.

VAN CALSTEREN, P.W.C. (1977b). A mantle-plume model interpretation for the Paleozoic geology of Galicia with emphasis on the Cabo Ortegal area (NW Spain). *Proc. Kon. Ned. Acad. Wet.*, B80: 156-168.

VAN CALSTEREN, P.W.C. (1978). Geochemistry of the polymetamorphic mafic-ultramafic complex at Cabo Ortegal (NW Spain). *Lithos*, 11: 61-72.

VAN CALSTEREN, P.W.C.; BOELRIJK, N.A.I.M.; HEBEDA, E.H.; PRIEM, H.N.A. DEN TEX, E.; VERDURMEN, E.A.Th. & VERSCHURE, R.H. (1979). Isotopic dating of older elements (including the Cabo Ortegal mafic-ultramafic complex) in the Hercynian orogen of NW Spain: Manifestations of a presumed early Paleozoic Mantle-plume. *Chem. Geology*, 24: 35-56.

VAN DER MEER MOHR, C.G. (1975). The Paleozoic strata near Moeche in Galicia, NW Spain. *Leidse Geol. Med.*, 49: 33-37.

VOGEL, D.E. (1967). Petrology of an eclogite and pyrigarnite-bearing polymetamorphic rock complex at Cabo Ortegal, NW Spain. *Leidse Geol. Med.*, 40: 121-123.

VOGEL, D.E. & GARLICK, G.D. (1970). Oxygen-isotope ratios in metamorphic eclogites. *Contr. Min. Petr.*, 28: 183-191.

VOGEL, D.E.; ENGELS, J.P. & DEN TEX, E. (1983). El Complejo de Cabo Ortegal. In: *Geologia de España*, Tomo I. I.G.M.E. Madrid, 440-449.

WENNER, D.B. & TAYLOR, H.P. (1973). Oxygen and hydrogen isotope studies of the serpentinization of ultramafic rocks in oceanic environments and continental ophiolite complexes. *Amer. Jour. Sci.*, 273: 207-239.

WENNER, D.B. & TAYLOR, H.P. (1974). D/H and O^{18}/O^{16} studies of serpentinization of ultramafic rocks. *Geoch. Cosmoch. Acta*, 38: 1255-1286.

WILSON, M.R.; HAMILTON, P.J.; FALICK, A.E.; AFTALION, M. & MICHARD, A. (1985). Granites and early proterozoic crustal evolution in Sweden: evidence from Sm-Nd, U-Pb and O isotope systematics. *Earth and Planetary Sci. Letters*, 72: 376-388.

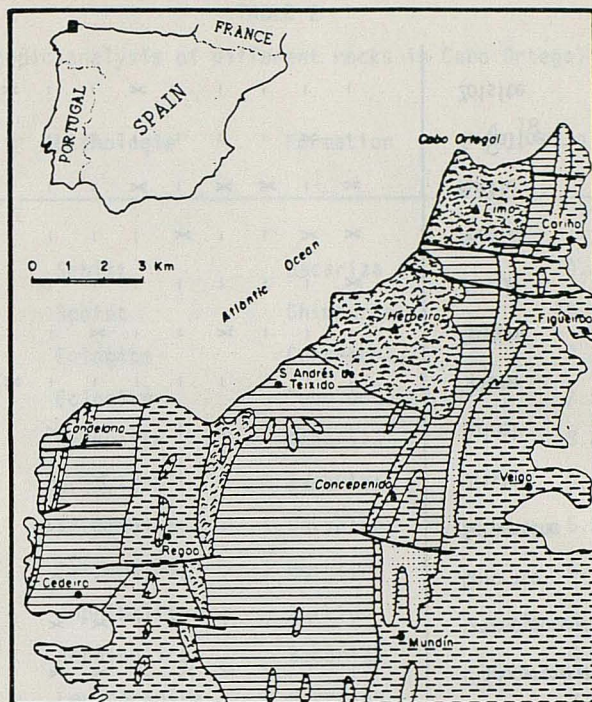


FIG. 1. Schematic geological map of Cabo Ortegal

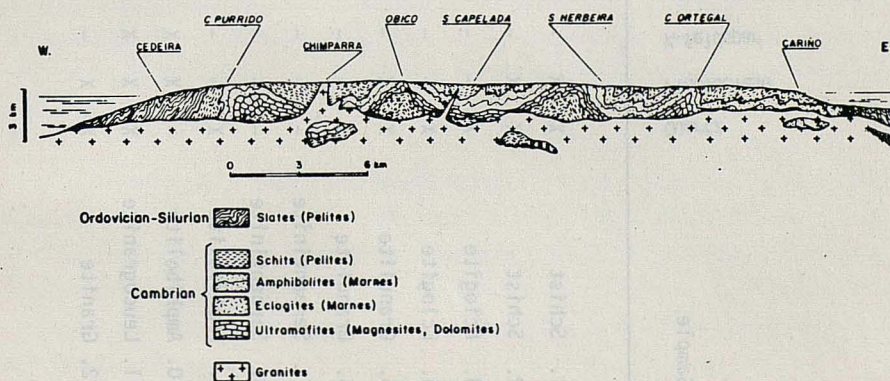
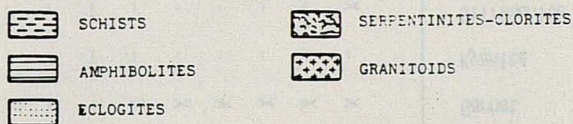


Fig. 2. Theoretical cross-section of Cabo Ortegal area.

TABLE 1
Mineralogical composition of analyzed samples

Sample	Quartz	Plagioclase	K-feldspar	Muscovite	Biotite	Garnet	Kyanite	Sillimanite	Amphibol	Clinopyroxene	Orthopyroxene	Chlorite	Serpentine	Olivine	Spinel	Sphene	Opacites	Zircon	Apatite	Rutile	Tumaline	Zoisite
1. Schist	X	X	-	X	X	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	-	-
2. Schist	X	X	-	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-	X	-
3. Eclogite	X	-	-	-	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-	-
4. Eclogite	X	-	-	-	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	X	-	-	X	-	-
5. Granulite	X	X	-	-	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-	-	-
6. Granulite	X	-	-	-	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-	X
7. Serpentinite	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	-	X	X	-	-	X	-	-	-	-	-
8. Serpentinite	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-
9. Amphibolite	X	-	-	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	X
10. Amphibolite	-	X	X	-	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	-	X	-	-	X	X	-	-
11. Leucogranite	X	X	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12. Granite	X	X	-	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-	X	-	-	-	X

TABLE 2

 $\delta^{18}O$ Isotopic analysis of different rocks in Cabo Ortegal area

Sample nº	Lithologie	Formation	$\delta^{18}O$ (‰) SMOW
1	Schist	Bacariza	10.2
2	Schist	Chimparra	10.5
3	Eclogite	Concepenido	7.2
4	Eclogite	Cabo Ortegal	7.5
5	Granulite	Bacariza	8.8
6	Granulite	Bacariza	9.2
7	Serpentine	Herbeira	5.5
8	Serpentine	Herbeira	6.2
9	Anphibolite	Purrido	8.0
10	Anphibolite	Bacariza	8.6
11	Leucogranite	Barrosas	9.5
12	Aplite	Regoa	10.5

1. INTRODUCCION. DESCRIPCION DEL YISO LENTICULAR

Actualmente, en los yacimientos sedimentarios sólo se describen dos formas yaciformes primarias: el yiso lenticular y el yiso subglobular. Ambas son características de unas condiciones de depósito muy concretas, de un tipo de sustrato muy peculiar. El yiso lenticular es, al vez, la morfología de yiso más extendida, debido a que es la forma yaciforme más característica presente en los molinos evaporíticos naturales, y a que sus modificaciones de formación son muy numerosas y específicas.

La morfología del yiso lenticular es descrita desde muy antiguo, pero el primer trabajo asociado por nosotros que trata al respecto en la criología, es de 1917, y de un autor que tampoco ambientaba de forma correcta su aparición hasta 1917 con Minson. Este autor así describe la forma: "... cristales con forma de lente biconvexa, en la mayor parte de sus caras laterales rectas. Se presentan aislados o formando grupos frecuentes al desarrollo de agrupaciones en raras".

El habitus cristalo yaciforme a partir del cual se desarrolla el yiso es el prisma cristalo yaciforme de forma (1) (2), presentado las superficies curvas aproximadamente paralelas a un eje de la forma (1) (2) - según Minson (1917) - y (1) (3) - según Dana (1924) -. Las caras laterales

GENESIS DEL YESO PRIMARIO LENTICULAR EN SEDIMENTOS EVAPORITICOS

J. MANDADO Y J.M. TENA

Departamento de Geología, Petrología y Geoquímica. Facultad de Ciencias Geológicas. Ciudad Universitaria. 50009 ZARAGOZA (España).

Lenticular gypsum is a mineralogical type genetically constrained to very specific conditions. In modern environments it's restricted to sebkha evaporitic sediments, playa-lake complex and desertic crust. So, the existence of lenticular gypsum in gypsiferous rocks constitutes a clue of the paleoenvironmental features in the original sedimentary medium.

In this work genetical characters (salinity ranges, enclosing material types, organic matter existence, etc.) of the lenticular gypsum bearing environments are considered. Laboratory experiments about mineralogical synthesis provide significative data about this topic. Both source data allow to delimitate a interstitial growing model for lenticular gypsum. Evaporative pumping up process of phreatic waters through unconsolidated sediment provides the required sulphate. Besides, specific development of this morphological gypsum type need high environmental salinity and the existence of organic matter.

Finally, the conservation conditions of these mineralogical type through geological record are evaluated, proposing a dynamic model, mainly conditioned by time span of wet and dry periods.

1.- INTRODUCCION. DESCRIPCION DEL YESO LENTICULAR.

Actualmente, en los medios sedimentarios sólo se identifican dos texturas yesíferas primarias: el yeso lenticular y el yeso selenítico. Ambas son características de unas condiciones de depósito muy concretas, de ahí el enorme interés en su estudio. El yeso lenticular es, tal vez, la morfología de yeso más estudiada, debido a que es la textura yesífera más característica presente en los medios evaporíticos actuales, y a que sus condiciones de formación son muy restringidas y específicas.

La morfología del yeso lenticular está descrita desde muy antiguo, pero el primer trabajo conocido por nosotros que centra su estudio en la cristalografía, evolución y circunstancias genético-ambientales de estos cristales no aparece hasta 1955 con Masson. Este autor los describe como: "... cristales con forma de lente biconvexa, sin la menor traza de caras cristalinas racionales. Se presentan aislados o maclados, siendo frecuente el desarrollo de agrupaciones en roseta ...".

El hábito cristalino básico a partir del cual se desarrolla el cristal es el prisma rómbico de la forma ($\bar{1}11$), presentando las superficies curvas aproximadamente paralelas a las caras de la forma ($\bar{1}02$) -- según Masson (1955) -- ó ($\bar{1}03$) -- según Dana (1951) --. Las cuatro caras de

($\bar{1}11$) forman un prisma aplastado y las caras ($\bar{1}02$) lo cortan a bajo ángulo, por lo que el cristal tiene caras terminales amplias (Fig. 1). Es frecuente que los bordes agudos entre las caras ($\bar{1}11$) aparezcan truncados por caras pinacoidales de la forma (010), que suelen dar caras largas y muy estrechas. También puede estar presente la unidad de prisma (110) como una cara muy pequeña que trunca el límite agudo entre ($\bar{1}11$) y ($\bar{1}02$). La forma discoidal final suele ser aproximada, pudiéndose apreciar en ocasiones las caras ($\bar{1}11$) como caras largas y estrechas que bordean a las caras convexas, irregulares.

Los cristales lenticulares aparecen casi siempre en medio de sedimentos detríticos de tipo arenoso a lutítico, o entre carbonatos, y es muy frecuente que presenten inclusiones del material encajante. Este fenómeno es especialmente notorio en los cristales de gran tamaño, pues en sus superficies de exfoliación (010) se acumulan los granos encerrados por el avance de las caras del cristal durante el crecimiento, disponiéndose en estructuras de "cola de pescado" (Shearman, 1966).

El tamaño individual de los cristales puede oscilar desde menos de 50 micras hasta los 20 cm. (datos de Bertrand y Jelisejeff, 1974, y Watson, 1979 y 1983). Los cristales lenticulares de grandes dimensiones (más de 1 mm.) suelen presentarse aislados o, a lo sumo, agrupados en rosetas, mientras que los cristales más pequeños suelen estar asociados formando nódulos, niveles enterolíticos e, incluso, capas compactas. En este aspecto, West et al. (1979) describen nódulos aproximadamente esféricos o elípticos, de 1 a 4 cm. de diámetro, constituídos totalmente por diminutos cristales de yeso lenticular (de menos de 50 $\mu\text{m.}$) y sin impurezas; igualmente, Dronkert (1977, 1981) cita capas yesíferas actuales, de aspecto enterolítico, constituídas por una acumulación de microcristales de yeso lenticular.

La existencia de cristales lenticulares de yeso en un sedimento o roca sedimentaria se puede inferir no sólo por su presencia concreta, sino también por la existencia de moldes o pseudomorfos de esta morfología en otro tipo de materiales (véase Kerr and Thomson, 1963; Illing et al., 1965; West et al., 1979; etc.).

La interpretación generalizada de los diferentes autores que han estudiado la problemática de los cristales de yeso lenticulares es que el crecimiento de los mismos se realiza por diagénesis temprana, en el interior de un sedimento en estado pastoso o semipastoso, por precipitación directa de yeso a partir de las soluciones saturadas que imbiben los sedimentos, y crecimiento intersticial desplazante de los mismos. Las condiciones del medio necesarias para propiciar el proceso deben ser de alta aridez.

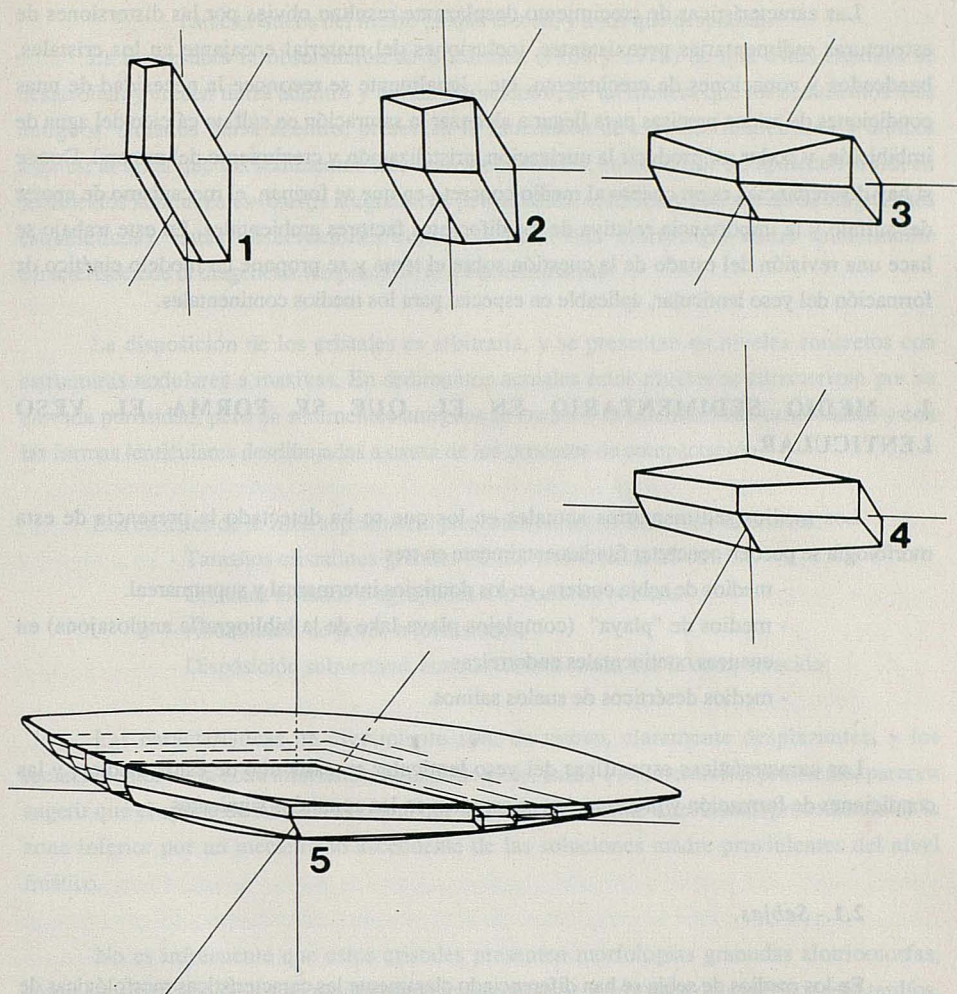


Figura 1.- Diagrama idealizado de la evolución de un cristal prismático de yeso (1) hasta el cristal lenticular (5) por desarrollo preferente de las caras $\{02\}$ a expensas de las caras prismáticas $\{11\}$, las pinacoidales $\{010\}$ y las prismáticas $\{110\}$.

Las características de crecimiento desplazante resultan obvias por las distorsiones de estructuras sedimentarias preexistentes, inclusiones del material encajante en los cristales, bandeados y zonaciones de crecimiento, etc.; igualmente se reconoce la necesidad de unas condiciones de aridez precisas para llegar a alcanzar la saturación en sulfato cálcico del agua de imbibición, y poder así producir la nucleación, cristalización y crecimiento del mineral. Donde sí hay discrepancias es en cuanto al medio concreto en que se forman, el mecanismo de aporte del sulfato y la importancia relativa de los diferentes factores ambientales. En este trabajo se hace una revisión del estado de la cuestión sobre el tema y se propone un modelo cinético de formación del yeso lenticular, aplicable en especial para los medios continentales.

2.- MEDIO SEDIMENTARIO EN EL QUE SE FORMA EL YESO LENTICULAR.

Los medios sedimentarios actuales en los que se ha detectado la presencia de esta morfología se pueden concretar fundamentalmente en tres:

- medios de sebja costera, en los dominios intermareal y supramareal.
- medios de "playa" (complejos playa-lake de la bibliografía anglosajona) en cuencas continentales endorreicas.
- medios desérticos de suelos salinos.

Las características específicas del yeso lenticular en cada uno de estos medios, y las condiciones de formación y presentación se estudian en los apartados siguientes.

2.1.- Sebjas.

En los medios de sebja se han diferenciado claramente las características morfológicas de los cristales de yeso generados en las zonas intermareales de los de áreas supramareales.

Cuando el yeso nuclea y crece en la zona intermareal, los cristales formados se caracterizan por:

- tamaño reducido (desde menos de 1mm. hasta 1 cm. para Shearman, 1966; inferiores a 50 μ m. para West et al., 1979).
- gran pureza, por total o casi total ausencia de inclusiones.
- morfologías lenticulares extremadamente perfectas.
- estrecha asociación con sedimentos de barros aragoníticos y tapices algales,

característicos del medio en que crecen, y a los que desplazan.

Es interesante la observación de Shearman (1966 y 1978) de que estos cristales se desarrollan y crecen tierra adentro y nunca mar adentro, de tal manera que los sedimentos más antiguos, situados tierra adentro, presentan la asociación de cristales lenticulares y tapices algales, al igual que los sedimentos intermareales actuales, en tanto que no aparecen jamás en sedimentos submareales (barros aragoníticos peletoidales, oolíticos y con arenas de fragmentos esqueléticos). Estas observaciones concretan pues esta morfología como inicialmente característica de la diagenesis temprana en la zona intermareal.

La disposición de los cristales es arbitraria, y se presentan en niveles concretos con estructuras nodulares a masivas. En sedimentos actuales estos niveles se caracterizan por su elevada porosidad, pero en sedimentos antiguos se encuentran intensamente cementados y con las formas lenticulares desdibujadas a causa de los procesos de compactación.

Los cristales de la zona supramareal presentan características muy diferentes:

- Tamaños cristalinos grandes (desde 1 mm. hasta 20 cm.).
- Cristales aislados o agrupados a lo sumo en rosetas.
- Abundancia de poros o inclusiones.
- Disposición subvertical, aunque distorsionada tras la compactación.

Las características de crecimiento son, de nuevo, claramente desplazantes, y los recrecimientos en la zona inferior de algunos de ellos, unido a su orientación preferente, parecen sugerir que el aporte de sulfatos al cristal que crece es claramente direccional, procediendo de la zona inferior por un mecanismo ascendente de las soluciones madre provenientes del nivel freático.

No es infrecuente que estos cristales presenten morfologías granudas alotriomorfas, como consecuencia de los recrecimientos sindiagenéticos y procesos diagenéticos más tardíos, que tienden a distorsionar las texturas primarias. Estos procesos se ven favorecidos por sus porosidades y elevado contenido en impurezas.

2.2.- Medios de playa.

Estos medios sedimentarios son similares a los de sebja en cuanto a las características de crecimiento intersticial con morfología desplazante del yeso. Las diferencias más notorias cabe centrarlas en el origen marino o continental de uno u otro medio, y se concretan en la diferencia

composicional del agua y sedimentos no yesíferos, y en la extensión areal de ambos. Por otra parte, la conservación de los cristales es más precaria en los medios de playa que en los de sebja.

Los cristales se desarrollan principalmente en las llanuras de barros situadas en torno al lago, a partir de las aguas procedentes del nivel freático. El agua freática asciende por capilaridad a través de los sedimentos de la llanura de barros, aumentando al mismo tiempo su concentración, con lo que se alcanza el producto de solubilidad del yeso, que nuclea en los poros y crece intersticialmente.

Ocasionalmente se han descrito también morfologías lenticulares, prácticamente subsuperficiales, en las zonas centrales de lagos estacionales que se desecan totalmente durante el estiaje (hay interesantes ejemplos en la bibliografía española, como los de Carenas y Marfil, 1979, y Pueyo, 1978). Los depósitos de costras que se forman en estos casos contienen gran cantidad de sales muy solubles que, generalmente, se redisuelven con facilidad durante las etapas húmedas, por lo que no suele quedar constancia de estos procesos en el registro geológico salvo por la existencia de moldes o pseudomorfos.

2.3.- *Costras desérticas.*

Un tercer medio en el que se generan estas morfologías son los desérticos. Las costras generadas en ellos podrían asimilarse a las de playa, pero hay suficientes características diferenciales que aconsejan contemplarlo como un medio distinto. Su principal característica diferenciadora estriba en la extraordinaria aridez y ausencia de un nivel de agua aflorante (sea el mar o el lago salobre), por lo que el aporte de sales procede exclusivamente del nivel freático subsuperficial. El medio encajante puede ser muy variado: arenoso a lutítico, pero raramente es carbonatado por la escasa concentración de este anión en el agua.

Los cristales lenticulares generados en este medio (rosas del desierto) se citan y describen desde muy antiguo por su espectacularidad y belleza, pero obedecen sólo a una de las fases de nucleación y cristalización que se pueden diferenciar. Watson (1983) cita, en costras yesíferas subsuperficiales, la existencia de dos subhorizontes:

- el superior, a menos de un metro de la superficie, formado por cristales lenticulares de 1 a 200 mm. de diámetro, aislados o agrupados en rosetas, con abundantes inclusiones zonadas.

- el inferior, más profundo, con cristales idiomorfos o lenticulares, menores de 1 mm., y sin relación clara con la lámina de agua.

Los primeros se interpretan como formados en la zona de evaporación capilar por un mecanismo de aporte "per ascensum"; mientras que los inferiores, más pequeños, sin inclusiones ni impurezas, parecen indicar un mecanismo diferente de formación, que probablemente sea por precipitación directa dentro del nivel freático, en el que la sobresaturación es constante y los aportes polidireccionales.

3.- CONDICIONAMIENTOS AMBIENTALES.

Las principales características de todos los medios en los que se forman yesos lenticulares son el crecimiento desplazante del yeso y el mecanismo de aporte del sulfato por un proceso de bombeo por evaporación, pero hay otras características del medio que pueden ser responsables de esta peculiar morfología.

El *soporte del medio* en el que nuclean y crecen los cristales es muy variado y no parece que controle en modo alguno la morfología. Hay citas de estos cristales inmersos en materiales muy diversos: barros aragoníticos (en las sebjas de la Trucial Coast), detríticos silicatados mal clasificados (en las sebjas de Laguna Madre o playas del Gran Lago Salado), lutitas y detríticos finos (en costras desérticas de Chott et Chergui), arenas limpias de grano grueso (en costras desérticas de Somaliland), etc.

Algunos autores (Masson, 1955) citan la importancia de la *porosidad* del sedimento como factor favorecedor del mejor y más rápido aporte de sulfato al cristal en formación, pero no encuentran ninguna correlación de ésta con la morfología.

Un factor ambiental importante es la presencia de *materia orgánica* en el medio sedimentario. En sebjas marinas se evidencia por las omnipresentes algas verde-azuladas que constituyen los tapices algales y actúan como acumuladores de sedimentos (Masson, 1955; Kerr and Thomson, 1963; Shearman, 1966; etc.). En salinas actuales de Alicante, Dronkert (1977) llega a describir capas yesíferas enterolíticas formadas por una acumulación de microcristales de yeso lenticular, con separaciones orgánicas muy importantes, restos de los tapices algales entre los que crecieron los cristales. La materia orgánica es también sumamente importante en los medios de playa, bien como tapices algales, restos herbáceos, e, incluso, restos orgánicos animales. El único medio en el que esta relación no se mantiene tan estrechamente es el de las

costras desérticas, generalmente poco rico en materia orgánica.

La *salinidad* del medio se ha invocado también como factor favorable, pero puede ser sumamente variable tanto en cantidad de iones como en las proporciones relativas de los mismos. Un repaso bibliográfico muestra unos intervalos de salinidad muy amplios: desde una zona de semiaridez, como la descrita por West et al. (1979) en una sebja de la costa mediterránea y en la que se citan salinidades del 3.1 al 6.1 % para el agua de imbibición, hasta los valores presentados por Kerr and Thomson (1963) que dan valores de 14.0 a 38.0 % en la sebja de la Laguna Madre. Estos datos son difícilmente comparables, pues el contenido y proporción de sales disueltas es muy variable. Se ha especulado con la importancia del Na^+ disuelto en la génesis de esta morfología (Deicha, 1943), pero ha sido necesario recurrir a métodos experimentales de laboratorio para delimitar con precisión los factores que influyen en su génesis y desarrollo.

4.- DATOS EXPERIMENTALES SOBRE LA GENESIS DEL YESO LENTICULAR.

Las experiencias de laboratorio del sistema $\text{CaSO}_4\text{-H}_2\text{O}$ son fáciles de realizar, pero es más difícil simular las condiciones reales de formación de los cristales y, en especial, los de crecimiento desplazante. Cody and Shanks (1974) son los primeros que se plantean el intento de reproducirlas, provocando la nucleación y crecimiento del yeso en un medio pastoso constituido por materiales arcillosos (montmorillonitas sódicas o bentonitas) dispersos en agua a una proporción constante. El gel así formado lo introdujeron en un tubo en U y por cada una de las ramas del tubo añadieron la solución de Ca^{++} y la de $\text{SO}_4^{=}$ respectivamente, controlando cuidadosamente las condiciones ambientales de pH y temperatura. De esta manera obtuvieron diferentes tipos de cristales prismáticos. La adición de contenidos moderados de NaCl a las soluciones hizo disminuir el número de núcleos y aumentar el tamaño promedio de los cristales.

Posteriormente, en 1976, Cody prosigue y diversifica las experiencias, introduciendo cambios en el tipo de bentonita utilizada, aunque siempre monomineralica, en las condiciones de pH, en la temperatura, y en la concentración y tipo de sales disueltas, procurando obtener siempre la máxima diversidad, pero manteniendo condiciones similares a las de los medios naturales.

Los cristales obtenidos a partir de las bentonitas cálcicas son de tipo idiomorfo, con caras lisas y escasas trazas de corrosión, mientras que los que se forman en bentonitas sódicas

son inicialmente semejantes, pero con mayores tasas de corrosión en las caras (010), sobre todo a altas temperaturas y contenido en sales. Conforme crecen estos cristales la corrosión acompaña al crecimiento, llegando al final a predominar sobre éste y dando, en casos extremos, secciones de forma aproximadamente discoidal; este efecto se potencia con el incremento de temperatura, presencia de cloruros disueltos (hasta el punto de que en ausencia de Cl^- los fenómenos de corrosión y posterior recrecimiento son prácticamente inexistentes), presencia de iones monovalentes (Li^+ , NH_4^+ , K^+), porcentajes de arcilla en la pasta, y presencia de materia orgánica (extractos de plantas verdes). Las variaciones en la morfología cristalina se pueden explicar mediante las ideas de Edinger (1973) a partir de procesos de cristalización experimental. Para este autor los iones HSO_4^- , NO_3^- y Na^+ (en forma de sales dobles complejas de Na-Ca) se depositan preferentemente en la cara ($\bar{1}11$), constituida exclusivamente por Ca^{++} , retardando su crecimiento; los cationes, especialmente monovalentes, se fijan en la cara (110), lo que produce la reducción de su tasa de crecimiento respecto a otras, permitiendo el desarrollo de morfologías diferentes. Por otra parte, según Barcelona and Atwood (1978) los compuestos orgánicos extraíbles del agua del mar con cloroformo, afectan a la precipitación del yeso inhibiendo la formación de cristales; estas ideas son expresadas también por Liu and Nancollas (1973) y Van Rosmalen et al. (1976). El proceso se realiza por un mecanismo de adsorción de las cadenas más largas de ácidos grasos sobre las caras del cristal con Ca^{++} -- caras ($\bar{1}11$)-- y se refleja en el crecimiento de cristales menores, más tabulares y equidimensionales.

Prosiguiendo en sus experiencias de síntesis en condiciones de crecimiento desplazante, Cody, en 1979, llega a la conclusión de que el factor crítico que lleva al hábito lenticular es la presencia de materia orgánica. Empleando la misma técnica experimental de ensayos anteriores y provocando la nucleación por evaporación de soluciones inicialmente saturadas en yeso para poder controlar también los efectos de la salinidad del agua, e incorporando materia orgánica en forma de hojas de manglar maceradas en el agua de dispersión de las arcillas, obtiene siempre cristales lenticulares. Los demás factores ambientales considerados en las experiencias anteriores, inciden exclusivamente en las dimensiones de los cristales formados. A la vista de estos resultados, Cody concluye que los cristales lenticulares se forman porque algunos tipos de materia orgánica reducen drásticamente el crecimiento, normalmente rápido, perpendicular a las formas de yeso ($\bar{1}11$) y ($\bar{1}03$) y consecuentemente minimiza el crecimiento paralelo a su eje cristalográfico c. Esta inhibición de crecimiento selectiva permite normalmente desarrollos lentos perpendiculares a las formas (110) y (010), dando una morfología tabular, que combinada con la curvatura peculiar asociada a las caras ($\bar{1}11$) y ($\bar{1}03$) produce el hábito lenticular. Ensayando con ácidos húmicos extraídos de suelos pardos se han obtenido cristales de yeso, grandes y pardos, con una morfología lenticular muy acusada, siempre que la tasa de

crecimiento sea muy lenta para no enmascarar el efecto de retardo de crecimiento de determinadas caras.

5.- MECANISMO DE APOORTE DEL SULFATO. PROCESO DE BOMBEO POR EVAPORACION.

Una vez establecida y aceptada la hipótesis del crecimiento desplazante de los cristales lenticulares de yeso y delimitados los principales factores que controlan la morfología, las preguntas más importantes que se plantean son: ¿Cuál es el mecanismo de aporte de sulfato al sedimento para que en su interior nucleen y crezcan los cristales desplazantes?, ¿cuál es la fuente original de ese sulfato?

Los cristales lenticulares son interpretados por la mayoría de los autores como generados por concentración evaporítica del agua freática, que es aspirada a la superficie por un proceso de bombeo por evaporación (Reading, 1978; West et al., 1979; etc.), creciendo desplazantemente en el medio cuando se sobrepasa el producto de solubilidad del yeso en las aguas que ascienden por capilaridad. Las otras teorías reseñadas en la bibliografía, como son la del aporte "per descensum", procesos de mezcla de aguas, cambios de salinidad, procesos redox, etc., tienen aplicaciones muy concretas o son simplemente factores que influyen sobre la tasa de precipitación, pero no sobre el proceso mismo, por lo que no precisan de un análisis detallado.

A continuación desarrollaremos los fundamentos físico-químicos del proceso de bombeo por evaporación con el fin de delimitar su viabilidad para los medios naturales en los que se desarrollan los cristales lenticulares.

El sulfato procede directamente del nivel de agua freática del medio, cuya composición puede ser exclusivamente marina o mezcla de marina y continental en las sebas, y de origen exclusivamente continental en playas y costras desérticas. Ocasionalmente, el contenido en sulfato del agua freática puede enriquecerse durante el ascenso al atravesar niveles con depósitos sulfatados.

El fenómeno más importante, y auténtico cebador del proceso, es el ascenso capilar, que es consecuencia de la presión capilar (P_c) y en el que es fundamental el radio de los poros. En efecto, los poros pueden considerarse como cavidades de tamaño capilar, por lo que en ellos la P_c es una fuerza efectiva que hay que considerar, además de la gravedad. La presión capilar obedece a la fórmula:

$$P_c = \frac{2\sigma \cos\theta}{r_t} \quad (1)$$

donde: σ es la tensión superficial del líquido, θ el ángulo de contacto del líquido con la cavidad capilar y r_t el radio del tubo. Por tanto, a menor tamaño de poro el agua asciende por capilaridad a una altura mayor.

Naturalmente, la ordenación de radios de los poros de un sedimento no es tan regular como en los modelos teóricos, pues normalmente se encuentran poros de radio pequeño junto a otros de grandes dimensiones, pero, a grandes rasgos, hay una distribución regular, por lo que podemos suponer que existe un esquema homogéneo de distribución del agua capilar en los poros en las zonas siguientes:

- Zona de agua connata o irreducible, que corresponde a los niveles más altos a los que asciende el agua al situarse en el contacto entre los granos detríticos, en las cavidades de menor radio, dejando el resto de la cavidad llena de aire.

- Bajo esta zona hay otra, de transición, en la que el agua cubre la práctica totalidad del área superficial de los granos detríticos, que podemos considerar como cavidades capilares de radio medio, encontrándose el aire en burbujas en los huecos entre granos que corresponden a las cavidades de mayor radio.

- Finalmente, en la parte inferior se sitúa la zona de saturación completa en agua, en la que hasta los poros de mayor radio están totalmente llenos de agua y se puede considerar prácticamente como la zona de agua libre o el límite del nivel freático.

La altura máxima de una columna de agua retenida por presión capilar la podemos expresar, en su forma más sencilla, mediante la siguiente fórmula:

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{r g (\rho_a - \rho)} \quad (2)$$

donde: γ es la tensión superficial del líquido, r el radio de poro del sedimento, θ el ángulo de contacto del líquido con el sólido, g la constante de la gravedad, ρ_a la densidad del líquido y ρ la del aire.

De manera aproximada, y dando valores numéricos a las constantes de la ecuación anterior, podemos expresar $h = f(r)$ de la siguiente manera:

$$h = 0.148/r \quad (3)$$

(considerando agua pura a 20°C en contacto con esferas de cuarzo, por lo que $\theta = 0^\circ$, $\cos \theta = 1$ y $\gamma = 72.75$ dinas/cm.).

Con estos valores aproximados y aplicando la ecuación (3), podemos deducir que para sedimentos con tamaño de grano lutítico, cuyo radio de poro es inferior a 0.004 mm., la altura que puede alcanzar la columna de agua que asciende por capilaridad es superior a 3.6 m.; para sedimentos de tamaño de grano limo, con radios de poro que oscilan entre 0.015 y 0.004 mm., llegará a alturas comprendidas entre 1 y 3.6 m.; en los granos de tamaño arena, los radios de poro son mayores de 0.015 mm., por lo que variará entre 0.1 y 1 m. el ascenso capilar; y, finalmente, en los de tamaño grava será inferior a 0.1 m.

Estos cálculos nos proporcionan escalas de valores en condiciones ideales, por lo que es preciso hacer un breve comentario en relación con la posible influencia de la variación de las condiciones ambientales, tales como la temperatura o la concentración de sales, sobre la tensión superficial del líquido.

Como se aprecia en la tabla I, al aumentar la temperatura tiende a disminuir la tensión superficial del agua según una relación lineal que, a partir de los datos experimentales indicados en la misma, podemos expresar con la siguiente ecuación:

$$\gamma = 75.88 - 0.1647 T (^{\circ}\text{C}) \quad (4)$$

De acuerdo con esto, a temperaturas algo mayores que las normales, como pueden ser las correspondientes a medios áridos o de playa, la tensión superficial del agua disminuye, y en la misma proporción lo hará la columna de agua que asciende por capilaridad.

Otro factor que influye sobre la tensión superficial es la concentración de sales disueltas, como se puede apreciar en los datos experimentales de la Tabla I, que afectan de manera directa y con un factor corrector superior. Al igual que en el caso anterior podemos establecer una correlación entre γ y la salinidad, que se expresa a partir de los valores disponibles, como:

$$\gamma = 72.53 + 0.37 \cdot \% \text{ Na Cl (a } 20^{\circ}\text{C)} \quad (5)$$

Según esto, a mayor cantidad de halita disuelta, aumenta la tensión superficial del agua y la columna de agua asciende por capilaridad a una mayor altura.

A la vista de estos datos, y teniendo también en cuenta los efectos de la salinidad sobre la densidad del agua, podemos afirmar que en los medios naturales en que crecen los cristales lenticulares de yeso, con temperaturas elevadas y altas salinidades, la altura de la columna de agua que asciende por capilaridad es de un orden de magnitud similar al calculado anteriormente en condiciones ideales.

Tabla I: Variación de la tensión superficial del agua, sin aire, en función de la temperatura, y en función del % de Na Cl disuelto a 20 °C. Datos de Weast, 1967.

Temperatura °C	Tensión superficial dinas/cm.	% de NaCl a 20 °C	Tensión superficial dinas/cm.
0	75.60	0.58	72.92
5	74.90	2.84	73.75
10	74.22	5.43	74.39
15	73.49	10.46	76.05
18	73.05	14.92	77.65
20	72.75	22.62	80.95
25	71.97	25.92	82.55
30	71.18		
40	69.56		
50	67.91		
60	66.18		
70	64.40		
80	62.60		
100	58.90		

El proceso de evaporación que se produce en climas áridos, afectará también al agua capilar, aumentando la concentración de sulfato y provocando la precipitación de yeso al sobrepasarse su producto de solubilidad; consecuentemente, el nivel freático aporta agua cargada en sales para compensar la eliminada por evaporación, garantizando así un aporte constante de material desde el nivel saturado hasta el nivel capilar en el que se produce la nucleación y crecimiento de los cristales. Tenemos así un procedimiento de bombeo cuyo motor principal es la evaporación por acción solar.

La circulación capilar no puede ser excesivamente rápida y depende de manera directa del tamaño de radio del poro, por lo que tendremos una zonación de la concentración del agua desde los niveles inferiores subsaturados a los superiores sobresaturados, lo cual, por otra parte, puede favorecer también el aporte de material por procesos de difusión iónica.

En este esquema dinámico, el agua puede alcanzar la saturación en sulfato en cualquiera de las tres zonas descritas en función de la tasa de evaporación y de la concentración inicial en el agua freática. El que se produzca en una u otra zona caracterizará la formación de cristales diferentes.

Para muchos autores resulta dudoso que la persistencia de la precipitación pueda dar un desplazamiento a gran escala y la formación de capas prácticamente monominerálicas de

cristales lenticulares, o que el aumento del relleno de los poros no reduzca la porosidad hasta un grado tal que un ascenso posterior por capilaridad quede inhibido. Estas objeciones no son muy válidas para los medios de playa o sebja, pues, por una parte, la plasticidad del sedimento empapado en agua permite el fácil desplazamiento de los granos, y, por otra, la especial morfología de los cristales lenticulares condiciona empaquetamientos poco densos, por lo que incluso capas compactas de cristales lenticulares deben conservar una cierta porosidad efectiva.

Si las condiciones se mantienen más o menos uniformes durante un tiempo suficientemente largo, el mecanismo de bombeo por evaporación tiende a dar horizontes continuos con acumulaciones de cristales lenticulares de pequeño tamaño, tal como han podido observar Dronkert (1977) y West et al. (1979) en sedimentos actuales.

6.- CONCLUSIONES. MODELO GENETICO.

Como consecuencia de todo lo expuesto proponemos que el mecanismo de formación, desarrollo y zonación de los cristales, para los medios de playa o sebja supramareal, se efectúa según el esquema idealizado de la figura 2, en el que se diferencian los distintos procesos de nucleación y crecimiento en cada una de las tres zonas freáticas, y la influencia de las estaciones secas y húmedas sobre la estabilidad del sistema.

Durante la estación seca el nivel freático desciende y, al mismo tiempo, aumenta la concentración de sales del agua, pudiendo llegar a precipitar yeso prismático. El agua que asciende por capilaridad aumenta la concentración en sulfato de tal manera que en la zona de transición se puede alcanzar una sobresaturación suficiente para que precipite yeso entre los sedimentos a través de los que asciende el agua; esta precipitación, al producirse en condiciones de ligera sobresaturación y rápidos aportes unidireccionales, generará unos pocos núcleos de cristalización alrededor de los cuales continuará la precipitación del yeso, formándose grandes cristales lenticulares de crecimiento rápido, englobando parte del sedimento encajante. El agua que continúa el ascenso capilar, recuperará rápidamente la concentración en $\text{SO}_4^{=}$ y la aumentará, al crecer la superficie de contacto entre agua y aire seco en las cavidades capilares, al mismo tiempo que reduce la velocidad de circulación; con lo que se alcanzarán elevadas sobresaturaciones en sulfato, por lo que nuclearán y precipitarán gran cantidad de pequeños cristales lenticulares que, debido a la escasez de aportes, no alcanzarán grandes desarrollos.

Durante la estación húmeda el agua freática disminuye su concentración en sales y el nivel freático asciende, lo que conlleva la disolución total o parcial del yeso existente en la zona

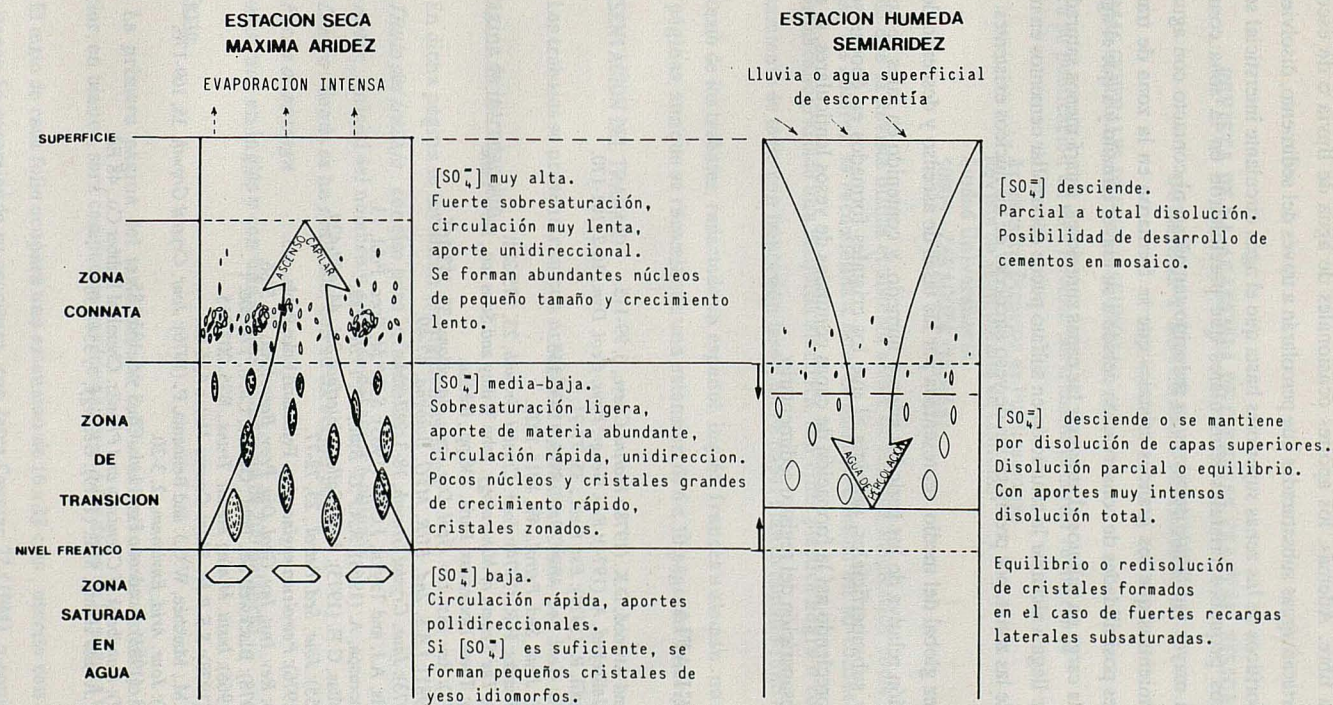


Figura 2.- Esquema idealizado de formación, zonación y desarrollo de cristales lenticulares en medios desplazantes (del tipo playa-lago o equivalentes) y su evolución estacional.

actual de agua libre. Además, los aportes ocasionales de agua de lluvia o de escorrentía superficial aportarán aguas subsaturadas que percolarán a través del sedimento, disolviendo los depósitos evaporíticos de las zonas superiores hasta que el agua circulante intersticial se sature en sulfatos. Los pequeños cristales lenticulares que precipitaron en la zona connata se disolverán con mayor facilidad, debido a su reducido tamaño y al contacto con aguas muy subsaturadas; mientras que los grandes cristales que se formaron en la zona de transición tendrán mayores posibilidades de conservación debido a su mayor tamaño y a que el agua, que ha aumentado la carga en sulfatos al atravesar las capas superiores, estará menos saturada. Si el agua percolante llega a alcanzar la saturación en sulfato puede desarrollar cementos en mosaico en cualquiera de las zonas, por precipitación de yeso alrededor de los núcleos existentes.

La aridez global del medio, representada por las tasas de ascenso y descenso del nivel freático, duración relativa de los periodos árido y húmedo, y contenido en sales de las aguas superficiales y subsuperficiales, propicia el que los cristales formados en épocas secas se preserven, favoreciendo así la formación de capas continuas de yesos lenticulares, o, en caso contrario, su desaparición del registro sedimentario.

7.- BIBLIOGRAFIA.

- Barcelona, M.J. and Atwood, D.K. (1978): *Marine Chem.*, 6, 99-115.
 Bertrand, I.P. et Jeliisejeef, A. (1974): *Rev. Geogr. Phys. Geol. Dyn.*, 16-2, 161-170.
 Carenas, B. y Marfil, R. (1979): *Est. Geol.*, 35, 77-91.
 Cody, R.D. (1976): *Geol. Soc. Amer. Bull.*, 87-8, 1163-1168.
 " (1979): *Jour. Sed. Petrol.*, 49, 1015-1028.
 " and Shanks, H.R. (1974): *Jour. Crystal Growth*, 23, 275-281.
 Dana, J.D. (1951): *The System of Mineralogy*. John Wiley and Sons Inc., New York.
 Deicha, G. (1943): These Doctoraux, Paris, 206 pp., inédita.
 Dronkert, H. (1977): *Rev. Inst. Inv. Geol. Dip. Prov. Barcelona*, 32, 153-165.
 " (1981): *I.A.S. 2nd. EUR. MTG. Bologna*, 47-49.
 Edinger, S.E. (1973): *Jour. Crystal Growth*, 18-3, 217-224.
 Illing, L.W.; Wells, A.J. and Taylor, J.C.M. (1965): *S.E.P.M. Spec. Publ.* 13.
 Kerr, S.D. and Thomson, A. (1963): *A.A.P.G. Bull.*, 47, 1726-1732.
 Liu, S. and Nancollas, G.H. (1973): *Jour. Colloid, Interface Sci.*, 44, 422-429.
 Masson, P.H. (1955): *Jour. Sed. Petrol.*, 25, 72-77.
 Mayer-Gurr, A. (1976): *Petroleum engineering*. Ferdinand Enke Publs., v.3.
 Pueyo, J.J. (1978): *Rev. Inst. Inv. Geol. Dip. Prov. Barcelona*, 33, 5-56.
 Reading, H.G. (1978): Blackwell Sci. Publ., Oxford, Ch. 8, 178-206.
 Shearman, D.J. (1966): *Instit. Mining Metall. Trans.*, B75, 207-215.
 " (1978): *S.E.P.M. Short Course Notes* 4, 6-42.
 Van Rosmalen, G.M.; Marchee, W.G.J. and Bennema, P. (1976): *Jour. Crystal Growth*, 35, 169-176.
 Watson, A. (1979): *Jour. Arid. Environm.*, 2, 3-20.
 " (1983): Academic Press Ltd., Ch. 5 y 6, 133-185.
 Weast, R.C. (1967): *Handbook of Chemistry and Physics*. Chemical Rubber Co., 48 Ed.
 West, I.M.; Ali, Y.A. and Hilmy, M.E. (1979): *Geology*, 7, 354-358.