

R. M. Crujeiras Casais
P. Fernández Ascariz
M.T. Sánchez Rúa
S. Vilariño Fernández
EDITORES

As matemáticas do veciño

Actas do Seminario de Iniciación á Investigación

2007



INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

ACTAS DO SEMINARIO

DE

INICIACIÓN Á INVESTIGACIÓN

ANO 2007

Comité editorial:

Rosa María Crujeiras-Casais

Pablo Fernández Ascariz

María Teresa Sánchez Rúa

Silvia Vilariño Fernández

Imprime:

Imprenta Universitaria
Campus universitario sur
15782 Santiago de Compostela

D. L. C 2672-2008

Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.

Hipatia de Alejandría

- Maxestade, os sabios están aquí.

Un por un, ocuparon o seu lugar: o profeta, rodeado por unha aura de divindade; o xurista, cos libros das leis non escritas e un home de ciencia. Pesando sobre as súas costas a responsabilidade de alimentar ao pobo, o profeta interveu: "Maxestade, auguro un ano de choivas en tempo, de colleitas abundantes e de pastos fértiles. O pobo non ten motivo para preocuparse. Garde o gran para a súa Maxestade". A súa Maxestade deu orde de informar ao pobo de que se achegaba un período de prosperidade para todos, e que palacio gardaría o gran, como se viñera facendo ata daquela. "As terras son vosas, e tamén o que producen: o gran e as sementes. O pobo debería estar agradecido pola vosa condescendencia, por compartir con eles o que é voso." A súa Maxestade deu orde de informar ao pobo de que, por lei, as terras e todo o que producían eran da súa Maxestade, pero que pola súa bondade, deixaría que o pobo as traballase e recollese parte do froito. Confortado pola aprobación dos sabios, preguntou ao último deles o seu parecer. "A súa Maxestade non precisa da opinión dun humilde home de ciencia. Esta tería valor se quixerades resolver o problema, se a vosa intención fose facer un reparto xusto do gran entre o pobo, se en verdade vos interesara coñecer o que ocorre fóra das portas de palacio. Non queirades avalar coa ciencia o que non busca resposta nela".

Prefacio

El otro día me invitaron a dar una conferencia en el centro de enseñanza en el que cursé el bachillerato. Me pidieron que les hablara a los estudiantes sobre mi experiencia como universitario. Yo comencé mi charla comentando que los universitarios tenemos el gran privilegio de poder dedicar nuestra vida profesional a buscar la verdad y, además, de poder hacerlo en un clima de completa autonomía y libertad. También les dije que los mejores universitarios que conozco reaccionan ante este privilegio con responsabilidad, esforzándose todo lo que pueden por mantener el conocimiento científico y por ampliar sus fronteras.

Por supuesto, estas afirmaciones podrían ser matizadas pero, en lo básico, reflejan mi modo de entender la vida universitaria. Por eso me llena de satisfacción prologar estas actas. Al verlas me vienen a la cabeza las palabras que escribí antes: búsqueda, verdad, libertad, responsabilidad, esfuerzo, conocimiento, ciencia. Ojalá que los jóvenes autores de estos artículos nunca pierdan su ilusión presente y que algún día, al mirar atrás, puedan sentirse orgullosos porque han vivido con honradez su vida como universitarios.

Ignacio García Jurado

Índice Xeral

Introducción	1
Ana Belén Rodríguez Raposo “Álgebra é nome de muller”	3
Rosa María Crujeiras Casais “Técnicas espectrais na estatística”	7
María Teresa Sánchez Rúa “¿Por qué se rompe una viga?”	11
Carlos Meniño Cotón “Categoría L-S en Foliaciones”	15
Manuel A. Mosquera Rodríguez “¿Cuánto debería costar un peaje?”	19
Néstor García Chan “Equilibrio de Nash aplicado a un problema de control medioambiental”	23
Pablo Fernández Ascariz “Homología y GAP”	27
Pablo González Sequeiros “Conxuntos de Cantor e dinámica”	31
María Pérez Fernández de Córdoba “Número de ramificación de un árbol”	35
José Carlos Díaz Ramos “O epitafio de Arquímedes”	39
Manuel García Magariños “Estatística y genética”	43

Laura Saavedra Lago “Matemáticas y el protocolo de Kyoto”	47
Silvia Vilarino Fernández “Algunas curvas famosas”	51
Carlos Soneira Calvo “Categorías en xeometría”	55
Adela Martínez Calvo “Regresión non paramétrica funcional”	59
Miguel Brozos Vázquez “Curvatura e Relatividade”	63

Introducción

O presente volume contén os resumos das charlas que se impartiron ó longo do ano 2007 no Seminario de Iniciación á Investigación (SII). Tal seminario, organizado por alumnos de doutoramento, ten lugar na Facultade de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela e encádrase dentro das actividades do Instituto de Matemáticas.

O SII ten a súa orixe a comezos do ano 2005, como unha iniciativa dos alumnos de Terceiro Ciclo da Facultade e como resposta ás necesidades de crear un seminario que cumprise, cando menos, os seguintes obxectivos:

1. Fomentar o intercambio de coñecemento.
2. Proporcionar un lugar onde dar a coñecer os campos nos que cada ún centra as súas investigacións.
3. Facilitar a práctica de falar en público, máis en concreto dar charlas e afacerse a escoitar e practicar activamente neste tipo de eventos.
4. Proporcionar un marco onde se poidan levar a cabo as actividades necesarias para que cada quen saiba explicar as ideas fundamentais dos seus traballos incluso a persoas non especialistas no seu campo.

Por terceiro ano consecutivo o SII acadou estes obxectivos básicos e ademáis proporcionou un marco de intercambio de coñecemento entre alumnos de tódolos departamentos da Facultade. Continuando coas pautas marcadas nos anos anteriores, e agás baixo causas xustificadas, o seminario desenvolveuse cunha periodicidade semanal. Comenzando no mes de Xaneiro, as charlas continuaron ata o mes de Xuño, suspendéndose en Outono debido a que, nestas datas, a maior parte dos organizadores e asistentes se atopaban en viaxes de investigación noutras universidades. Neste terceiro ano, a diferenza das edicións anteriores, o SII abriu as súas portas non só os alumnos dos diferentes departamentos, senón que por primeira vez permitiu a asistencia do profesorado da facultade.

No referente á organización do SII, este ano renovouse o comité organizador, formado durante este ano por catro estudantes de doutoramento, que se encargaron tanto da coordinación do evento en si: calendario de charlas, anuncio das mesmas, reserva de aula, proporcionar o material necesario ao poñente, etc; como da publicación deste anuario, onde se recolle un resumo de cada unha das charlas impartidas. Este mesmo comité organizador encargouse da confección deste volume a partir dos resumos proporcionados polos poñentes,

e figura neste como comité editorial. Ademais é importante salientar que cada un dos resumos aquí recollidos pasou un proceso de revisión por parte dun alumno de Terceiro Ciclo dun departamento distinto ao do autor, logrando así que os resumos sexan comprensibles por aqueles que non son expertos no campo correspondente.

Os membros do comité organizador deste último ano queremos agradecer os membros do comité dos dous anos anteriores o legado que nos deixaron, trala súa iniciativa de compartir entre tódolos departamentos a investigación que se realizan en cada un deles, tratando así de estreitalos lazos entre as distintas ramas desta ciencia que compartimos todos, as Matemáticas. Ademais seguindo con esta iniciativa, os membros do actual comité deixamos paso as novas xeracións de estudantes de Terceiro Ciclo, para que continuen coa organización deste seminario durante os posteriores anos. Por todo isto, queremos facer expreso o noso máis sincero agradecemento a todos aqueles que, dun xeito ou outro, nos axudaron nesta tarefa.

Agradecementos

Quixeramos mencionar neste apartado que a organización do seminario tería sido, sen dúbida, moito máis difícil de non contarmos coa colaboración desinteresada de moita xente. Por este motivo, desexamos agradecer a todos os que participaron no SII, ben como poñentes, ben como oíntes, e moi especialmente aos que participaron no proceso de arbitraje: Miguel Brozos Vázquez, Esteban Calviño Louzao, José Carlos Díaz Ramos, Francisco Javier Fernández Fernández, Luz García García, Pablo González Sequeiros, María Pérez Fernández de Córdoba, María Piñeiro Lamas e Adela Martínez Campos . Merece unha mención destacada Beatriz Pateiro López, autora da portada destas actas.

Como xa indicamos, o comité editorial será renovado. Por este motivo, non queremos deixar pasar esta oportunidade para dar o noso alento aos novos membros do comité e desexarilles a mellor das sortes.

Santiago de Compostela, 28 de Abril de 2008.

O Comité Editorial.

Álgebra é nome de muller

Ana Belén Rodríguez Raposo

Departamento de Álgebra

16 de Xaneiro de 2007

Resumo

Sexa por tradición ou por esa convicción tan arraigada na sociedade de que existen traballos de homes e traballos de mulleres, moitas veces, e de maneira inconsciente, ás iniciais dos matemáticos que aparecen nas nosas investigacións (e na historia) poñémoslles nomes masculinos. Pero de vez en cando sucede que esa inicial esconde unha Susan, unha Gabriella ... ou unha Emmy. Neste caso resulta inevitable preguntarse onde están as demais. Que pasou con todas estas mulleres que quixeron estudar matemáticas e que o conseguiron.

Como resultaría moi extenso falar de todas, aínda que non o pareza, centrareime na biografía dunha delas, na que se resumen moitas das dificultades debidas ó feito de ser muller e a brillantez e o xenio matemático ó alcance de poucos homes do seu tempo. Podería explicar con moito máis detalle os motivos polos que escollín a Emmy Noether. Era alxebrista, a mai (e pai) da álgebra moderna, un dos mellores matemáticos¹ do século XX, fundamental na concepción da física moderna e creadora dunha importante escola de álgebra abstracta. Sen embargo a elección de Emmy como protagonista desta charla ten unha razón fundamentalmente sentimental: unha das satisfaccións da miña investigación foi descubrir que un dos teoremas da miña tese é unha xeralización dun teorema de Emmy Noether. Se esta razón non vos parece válida, por favor, quedádevos con que ela é a culpable da maioría da álgebra que se estudia hoxe en día.

Antes de empezar a falar de Emmy, farei un breve resumo das vidas dalgunhas mulleres que antes que ela (e que nós) se dedicaron ás matemáticas. A continuación recordarei os momentos máis importantes na vida de Emmy Noether, así coma os seus descubrimentos matemáticos fundamentais, e finalmente darei este resultado que mencionaba antes.

Hipatia

Sempre que se fala de mulleres matemáticas, a primeira que se nos vén á cabeza é Hipatia de Alexandría. Hipatia viviu entre os anos 370 e 415. Foi filla do matemático Teón de Alexandría, do que aprendeu grande parte das matemáticas que sabía. Axiña demostrou a súa valía como científica, comentando os Elementos e inventando un astrolabio. Foi profesora da Escola de Alexandría, unha das máis importantes do momento, e tivo varios

PALABRAS CLAVE: Emmy Noether

¹Escribo aquí matemático conscientemente, xa que se debe incluír a homes e a mulleres dentro desta afirmación

alumnos. Cando os radicais cristiáns entraron en Alexandría, non puideron permitir que unha muller sabia, libre e pagana vivise, así que a mataron arrincándolle a pel a tiras nas rúas de Alexandría.

Caroline Herschel

Seguramente despois de Hipatia parecería máis lóxico falar de Maria Agnesi, matemática recoñecida no seu tempo, e non da descoñecida Caroline Herschel. Escollina a ela porque foi unha muller humilde, pouco amiga da notoriedade, e igual que moitas mulleres deixou que os homes que a rodeaban levasen a fama que ela merecía. Naceu no ano 1750 en Alemania, e viviu 98 anos. Morreu en Inglaterra despois de dedicar grande parte da súa vida ó seu irmán e ó seu sobriño. Púxose en contacto coa ciencia a través dun familiar, igual que Hipatia, neste caso o astrónomo William Herschel. Caroline comezou axudando ó seu irmán nas súas investigacións, pero pouco a pouco demostrou que ela tamén tiña un grande talento para a astronomía. Sábese que descubriu moitos obxectos celestes, e sospeitase que algúns dos descubrimentos de William e do seu sobriño John Herschel son debidos a ela. Xa moi maior, preto dos 80 anos, foi nomeada membro honorario da Real Academia inglesa e da Real Academia irlandesa, aínda que nunca foi membro numerario pola súa condición feminina.

Sophie Germain

Sen dúbida, unha das grandes matemáticas da historia. Naceu en París en 1776 dentro dunha familia acomodada. Gracias á súa boa posición económica puidose permitir estudar (pola súa conta, iso sí), latín, grego e ciencias. Como non podía asistir ás clases na universidade valíase dos apuntes que lle pasaba un amigo dela, Antoine Auguste Leblanc. Máis adiante utilizou este nome para manter unha correspondencia con Lagrange, xa que temía que a rexeitase se sabía que era unha muller. A pesar de que máis adiante Lagrange soubo a súa verdadeira identidade, apoiouna no seu intento de ingreso na Academia de Ciencias de Paris. O mesmo sucedeu con Gauss, que ó saber que Monsieur Leblanc era en realidade Mademoiselle Germain dixo: *Cando unha persoa do seu sexo [...] debe atopar infinitamente máis obstáculos e dificultades que os homes para familiarizarse son esas investigacións espinosas, sabe a pesar diso franquear trabas e penetrar no máis profundo, fai falla sen dúbida que teña o máis noble coraxe, os talentos máis extraordinarios, a intelixencia superior.* A pesar destas palabras de Gauss denegáronlle un premio na academia das Ciencias de Paris, que máis adiante conseguiu, a pesar de que nese momento se viu humillada por Cauchy, inimigo de toda innovación e talento que non viñesen del.

Sofia Kovalevskaja

Sofia Kovalevskaja, ou mellor dito Sofia Vasilievna, naceu en Moscú o 15 de xaneiro de 1850. Foi filla dun xeneral ruso e dunha dama da nobleza alemana, é dicir, filla dunha familia pudiente que se preocupou de darlle unha educación. A súa paixón polas matemáticas non naceu, sen embargo, dos preceptores que lle proporcionaron seus pais, senón do

papel que cubría a súa habitación en Polibno, que estaba sacado dun tratado de análise de Ostrogradski. A pesar de atopar moitas trabas, non cedeu no seu empeño, e arranxou un matrimonio ficticio cun estudante de bioloxía, Vladimir Kovalevski, que marchaba a estudar a Heidelberg, en Alemania, lugar onde as mulleres si podían estudar. Unha vez alí púxose en contacto cos matemáticos máis importantes da época, sendo o seu grande mentor Karl Weierstrass, a quen sorprendeu coas brillantes solucións duns problemas de análise que lle plantexara coa fin de desfacerse dela. Foi o propio Weierstrass o que presentou os seus traballos máis importantes sobre os aneis de Saturno, ecuacións en derivadas parciais e integrais abelianas. Estes traballos valéronlle un grande recoñecemento dentro da comunidade matemática, e permitíronlle acadar o título de catedrática na universidade de Estocolmo, sendo a terceira muller en conseguir unha posición académica semellante. Debido a tódalas dificultades que atopou ó longo da súa carreira foi durante toda a súa vida unha activa feminista e loitou en pro das liberdades. Morreu en Estocolmo, en pleno auxe da súa carreira, de tuberculose ós 41 anos de idade.

Emmy Noether, nai da álgebra moderna

Emmy naceu nunha pequena cidade ó sur de Gottinga, en Erlangen, onde seu pai, Max Noether, era catedrático de matemáticas. Dende moi pequena estivo en contacto co mundo das matemáticas, e recibiu unha boa educación nun instituto alemán. Tiña o título de profesora de francés, pero a súa afición polas matemáticas foi máis forte, e doctorouse en matemáticas en 1907 baixo a supervisión dun amigo do seu pai, Paul Gordan, cando as mulleres non estudiaban na universidade e moito menos se doutoraban. No ano 1908 comezou a súa época dourada como matemática, a pesar de tódalas dificultades que tivo para atopar un traballo axeitado a un cerebro da súa categoría. En 1908 entrou a formar parte do Circolo Matematico di Palermo, e o ano seguinte da Asociación Alemana de Matemáticos. Alí puido presentar os seus traballos, e gracias a esta publicidade no ano 1915 foi invitada por Hilbert ó centro do saber matemático do momento: a universidade de Gottinga. Tres anos despois publicou o seu famoso teorema de Noether, tan importante para a relatividade e a física de partículas, e derivado do seu estudio anterior da teoría de invariantes. Durante moito tempo os dous grandes matemáticos de Gottinga, Klein e Hilbert, intentaron que se lle concedese a Emmy un posto fixo de profesora. Xamais o conseguiron. Todo o que conseguiron foi que impartise seminarios baixo o nome de Hilbert, ata que en 1919 conseguiu que se lle recoñecese un posto de profesora, non remunerado, iso si. Sen embargo, esta discriminación só a padecía dende o mundo da administración da universidade, xa que tiña o recoñecemento de tódolos seus colegas, como o demostran as súas colaboracións con matemáticos da talla de Hermann Weyl. Foi profesora de alxebristas como Krull ou Schmidt, e deixou o seu legado máis a través dos seus alumnos que dos seus propios escritos, como sucedeu con Caroline Herschel.

En 1933, debido á súa condición de xudía e muller, marchou a Estados Unidos, onde atopou unha posición como profesora nunha universidade feminina, despois de pasar unha temporada no Instituto de Estudos Avanzados de Princeton, lugar onde Einstein e Gödel traballaron. Morreu, como Sofia Kovalevskaja, de tuberculose, deixando un oco imposible de encher para os seus alumnos e colaboradores.

As matemáticas de Emmy

Dentro do período creador de Emmy podemos distinguir fundamentalmente tres etapas:

1. 1904-1915, Erlangen: Nesta etapa estudiau con Paul Gordan. O seu método de estudio era fundamentalmente formalista. Comezou a estudar a teoría dos invariantes, que a levou máis adiante ó seu teorema de Noether.
2. 1915-1933, Gottinga: Esta foi a etapa máis fructífera da vida matemática de Emmy. No ano 1918 enunciou o teorema de Noether que relaciona os principios de conservación de magnitudes físicas coa existencia dalgunha simetría (grupo de transformacións que preservan certas características do sistema físico a estudar):

Teorema 1. *Sexa un sistema dinámico descrito por unha acción S , e invariante baixo un grupo de simetría cun número finito de xeradores. Entón asociado a cada xerador temos unha corrente e unha carga conservadas.*

Comezou en torno a 1920 a estudar a teoría abstracta de ideais, o que a levou a unificar importantes resultados da teoría de números e a xeometría alxébrica. Estes resultados permitiron unificar dúas ramas fundamentais da álgebra. Fundou tamén nesta época a teoría de álxebras non conmutativas.

3. 1933-1935, Estados Unidos: A penas viviu dous anos en Estados Unidos, co cal a súa contribución nesta etapa é moito menor, estando fundamentalmente ligada á álgebra non conmutativa.

Epílogo

Non podo menos que dicir aquí que as matemáticas, as alxebristas, non acaban con Emmy. O seu legado, matemático e non matemático, foi recollido por moitas mulleres que non se asustaron ante as dificultades debidas ó seu sexo (a parte das inherentes á materia). Aínda que humilde, quero rendirlle tributo dende aquí a tódalas Hipatias, Sofias, Emmys. Que non as esquezamos nunca.

Técnicas espectrais na estatística

Rosa María Crujeiras Casais

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

30 de Xaneiro de 2007

Resumo

No estudo de datos espaciais ten grande importancia a identificación de estruturas de dependencia que describan o comportamento das variables aleatorias referenciadas a puntos no espazo. Se denotamos por $\{Z(s), s \in \mathbb{R}^2\}$ un campo aleatorio no espazo, é de interese obter unha estimación da súa función de covarianzas:

$$C(u) = Cov(Z(s), Z(s + u)),$$

que mide a dependencia entre os datos. Esta dependencia tamén pode ser reflectida a través do variograma, que recolle a variabilidade das diferenzas entre as observacións do proceso.

Na literatura sobre este tema existen diferentes opcións á hora de dar unha estimación desta función, tanto paramétricas como nonparamétricas, pero moi pouco se tiña feito para comprobar a adecuación de tales estimacións aos datos. De feito, as únicas referencias que atopamos neste senso son os traballos de Diblasi e Bowman [1], que propoñen un test para chequear a independencia dun proceso (baseado no variograma), e a conseguinte extensión feita en [2], no que se contrasta un modelo paramétrico para esta función. Con todo, os contrastes basados neste tipo de funcións, tanto no covariograma coma no variograma, non presentan un bo comportamento, dado que coas características destas funcións non é sinxelo capturar comportamentos singulares no proceso. Ademáis, se nos datos, como é previsible, existe unha dependencia, está trasladarase tamén ás correspondentes estimacións do covariograma e do variograma, o que dificulta a obtención da distribución de estatísticos nos que interveñan estas funcións.

Unha alternativa ao modelado da dependencia que evita os problemas de utilizar unha estimación do covariograma ou do variograma, atópase nas técnicas espectrais, no espazo de frecuencias. Neste caso, a función que describe a estrutura de dependencia é a densidade espectral, que non é máis que a transformada de Fourier da función de covarianzas:

$$f(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int C(u) e^{-iu'\lambda} du.$$

O estimador nonparamétrico clásico da densidade espectral é o periodograma, que se define nas frecuencias de Fourier λ_k como:

$$I(\lambda_k) = \frac{1}{(2\pi)^2 N} \left| \sum_s Z(s) e^{-is'\lambda_k} \right|^2,$$

pero que, reescribindo o sumatorio no valor absoluto, pode verse como a transformada de Fourier discreta das covarianzas mostrais. Este estimador é asintoticamente insesgado para a densidade espectral, pero non é consistente dado que a súa varianza é proporcional ao valor da densidade espectral en cada frecuencia e non se reduce cando o número de observacións aumenta. Con todo, o principal atractivo do periodograma radica en que os seus valores, para distintas frecuencias de Fourier son asintoticamente independentes. Ademais, para unha grande variedade de procesos estocásticos no espazo, o periodograma pode escribirse como:

$$I(\lambda_k) = f(\lambda_k)V_k + R_N(\lambda_k),$$

onde $f(\lambda_k)$ é a densidade espectral na correspondente frecuencia de Fourier, V_k son variables aleatorias independentes e indenticamente distribuídas segundo unha variable exponencial de parámetro unidade, e o termo $R_N(\lambda_k)$ (que dependen do número de datos N) é asintoticamente despreziable. Este feito permítenos construír distintos estatísticos de contraste para ver a bondade do axuste dun estimador paramétrico, establecendo ademais a súa distribución. Por exemplo, un estatístico de contraste pode darse utilizando unha distancia L_2 -ponderada:

$$T_1 = N|H|^{1/4} \int_{\Pi^2} \left(\frac{1}{N|H|^{1/2}} \sum_k K(H^{-1/2}(\lambda - \lambda_k)) \left(\frac{I(\lambda)}{f_{\hat{\theta}}(\lambda)} - 1 \right) \right)^2 d\lambda,$$

onde $f_{\hat{\theta}}$ é unha estimación paramétrica para a densidade espectral (ou calquera outra estimación), K é unha función núcleo e H é unha matriz ventana que regula o grao de suavización que inducimos no estatístico. Pode verse que este estatístico segue, asintoticamente, unha distribución normal [3].

Se aplicamos logaritmos na expresión do periodograma, obtemos que o log-periodograma pode escribirse como:

$$Y_k = Y(\lambda_k) = m(\lambda_k) + z_k + r_k,$$

sendo $z_k = \log(V_k)$ e $r_k = \log\left(1 + \frac{R_N(\lambda_k)}{f(\lambda_k)V_k}\right)$, o que recorda á representación dun modelo de regresión. Neste caso, pode ser adecuado considerar un estatístico baseado nunha distancia de verosimilitude:

$$T_2 = \sum_k \left(e^{Y_k - m_{\hat{\theta}}(\lambda_k)} + m_{\hat{\theta}}(\lambda_k) - e^{Y_k - \hat{m}(\lambda_k)} - \hat{m}(\lambda_k) \right),$$

onde $m_{\hat{\theta}}$ é unha estimación paramétrica da log-densidade espectral e \hat{m} é unha estimación nonparamétrica da mesma función. Pódese comprobar que este estatístico tamén se distribúe asintoticamente como unha normal [3].

Bibliografía

- [1] A. Diblasi e A.W. Bowman; *On the use of the variogram in checking for independence in spatial data*, *Biometrics* **57** (2001), 211–218.
- [2] D. Maglione e A. Diblasi; *Exploring a valid model for the variogram of an isotropic spatial process*, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **18** (2004), 366–376.
- [3] R.M. Crujeiras Casais; *Contributions to spectral spatial statistics. PhD Thesis*, Universidade de Santiago de Compostela, 2007.

¿Por qué se rompe una viga?

María Teresa Sánchez Rúa

Departamento de Matemática Aplicada

13 de Febrero de 2007

Resumen

La relativa sencillez de los ensayos de flexión hace que sean los más utilizados para determinar el módulo de ruptura (MOR) para materiales frágiles: la tensión máxima que una probeta sometida al ensayo de flexión en tres puntos puede soportar antes de romper (véase Figura 1). El MOR se calcula a través de una expresión explícita, que involucra el módulo de la fuerza máxima que soporta la probeta, la distancia entre los apoyos y el segundo momento de inercia de la sección transversal de la probeta.



Figura 1: Ensayo de flexión en tres puntos.

El ensayo de flexión en tres puntos consiste en lo siguiente: Se coloca una probeta de cierto material frágil entre tres cilindros sin sujeción adicional dejando que el actuador o cilindro superior ejerza una carga gradualmente creciente hasta que se produzca la ruptura de la probeta (véase Figura 1).

En los libros clásicos de ingeniería, el MOR de una viga cuadrada de lado $2a$ que soporta una carga de ruptura de módulo H es

$$\sigma_{ft} = \frac{3Hl}{8a^3}, \quad (1)$$

donde $2l$ es la distancia entre los cilindros inferiores o apoyos.

Por lo tanto, para calcular el MOR de cierto material, realizamos ensayos de flexión en distintas muestras del material calculando las fuerzas máximas de ruptura (dato de salida de la máquina que realiza el experimento). Utilizando la fórmula (1), obtenemos el MOR para dicho material.

Sin embargo, el hecho de que distintas muestras de un mismo material lleven a valores diferentes para el MOR es habitual, pero hasta ahora no existen estudios sobre este comportamiento. Por ello, hemos obtenido el modelo matemático asociado al ensayo de flexión en tres puntos y una nueva fórmula para calcular el MOR.

Modelo matemático

Consideramos una probeta que ocupa en reposo el dominio $\Omega = \omega \times (-L, L)$, $L > 0$, donde ω denota su sección transversal. Sea Γ la frontera de la probeta que es unión de la frontera lateral Γ_l y las bases $\Gamma_{\pm} = \omega \times \{\pm L\}$ y sea \mathbf{n} el vector normal exterior a Γ . Suponemos que la frontera lateral Γ_l se divide en tres regiones abiertas, no vacías y disjuntas entre sí, Γ_C , Γ_{N_1} y Γ_{N_2} .

Γ_C es la región de la probeta susceptible de entrar en contacto con los cilindros inferiores o apoyos. Los apoyos se suponen rígidos, así que la probeta no puede penetrar en ellos, es decir, la componente normal de los desplazamientos, $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, no puede ser positiva. Además, debido al principio de acción-reacción, donde existe un contacto efectivo, $u_n = 0$, los apoyos ejercen una presión en la dirección del vector normal y hacia arriba. Por ello, la componente normal del vector de esfuerzos, $\sigma_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$, verifica que $\sigma_n \leq 0$. Por el contrario, donde no existe contacto, $u_n < 0$, la distancia entre la probeta y los apoyos es no nula y, en consecuencia, el movimiento tiene lugar libremente, $\sigma_n = 0$. Por último, suponemos que no existe rozamiento en la zona de contacto, es decir, la componente tangencial del vector de esfuerzos, $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \sigma_n \mathbf{n}$, es nula. Resumiendo, en la zona de contacto con los apoyos, consideramos una condición de contacto unilateral sin rozamiento, conocida como condición de Signorini (véase [1]):

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0}, \quad \sigma_n \leq 0, \quad u_n \leq 0, \quad \sigma_n u_n = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_C.$$

Γ_{N_1} se corresponde con la región de la frontera sobre la cual el actuador ejerce fuerzas superficiales de tracción de densidad $\mathbf{h} = (0, -h, 0)$, $h > 0$.

Finalmente, Γ_{N_2} representa el resto de la frontera lateral de la probeta sobre la que no actúa ningún tipo de fuerza. Las bases de la probeta también se suponen libres de fuerzas.

Para completar el modelo consideramos un material elástico, es decir, el tensor de deformaciones está relacionado con el tensor de tensiones a través de la ley de Hooke (véase [2]). Además, suponemos que la probeta está bajo la acción de su propio peso, $\mathbf{f} = (0, -\rho g, 0)$ donde ρ la densidad del material considerado.

Resumiendo, el problema que queremos resolver es el siguiente:

Problema (P):

Encontrar el vector de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ y el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, en cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$, verificando:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{h} \text{ sobre } \Gamma_{N_1}, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_{N_2} \cup \Gamma_{\pm}, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau &= \mathbf{0}, \sigma_n \leq 0, u_n \leq 0, \sigma_n u_n = 0 \text{ sobre } \Gamma_C, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I} + \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ en } \Omega, \end{aligned}$$

donde E y ν son el módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material, respectivamente.

Análisis asintótico y nueva fórmula para el MOR

Para tratar de justificar la fórmula teórica clásica (1) para el MOR utilizaremos el método de desarrollos asintóticos (véase [2]). Esta metodología nos permite obtener un modelo límite unidimensional a partir del problema tridimensional cuando el área de la sección transversal es pequeña con respecto a la longitud de la viga.

El modelo límite unidimensional obtenido para el ensayo de flexión en tres puntos es similar al presentado en [2], pero el desplazamiento vertical involucra una desigualdad variacional debida a la condición de contacto con los apoyos.

La nueva fórmula para el MOR de una viga rectangular de lado $2a$ sometida a una fuerza de ruptura de módulo H viene dada por

$$\hat{\sigma}_{ft} = \frac{3H}{8a^3} \left(l - \frac{\delta}{2} \right) - \frac{3F}{16a^3} (L - 2l), \quad (2)$$

donde 2δ es el espesor de la zona donde el actuador ejerce la fuerza de ruptura y F es el módulo de la fuerza gravitacional.

Podemos ver que si la resultante de las fuerzas de volumen F puede despreciarse y el actuador ejerce realmente una fuerza puntual (es decir, $\delta = 0$), la expresión anterior coincide con la fórmula teórica clásica (1).

Resultados numéricos

Vamos a presentar a continuación los resultados numéricos obtenidos, comparando los distintos valores del MOR. En nuestro experimento vamos a considerar vigas hechas de porcelana. Los parámetros característicos de la porcelana son los siguientes:

$$E = 6.9975 \times 10^{10} \text{ Pa}, \nu = 0.175, \rho = 2340 \text{ kg/m}^3.$$

Usaremos vigas cuadradas de lado $2a = 0.00425\text{m}$ y longitud $2L = 0.118\text{m}$. Además, consideraremos dos distancias entre los apoyos, $2l_1 = 0.06\text{m}$ y $2l_2 = 0.10\text{m}$.

La metodología para calcular los distintos valores del MOR es la siguiente:

- En primer lugar, gracias al Instituto de Cerámica (USC), hemos llevado a cabo varios experimentos sobre probetas de porcelana, determinando la fuerza de ruptura experimental H . Los valores de estas fuerzas aparecen en la segunda columna de la Tabla 1.
- A continuación, usando la fórmula teórica clásica (1), para la fuerza de ruptura experimental H calculamos un primer valor para el MOR, σ_{ft} (véase la tercera columna de la Tabla 1).
- De nuevo, para la fuerza de ruptura experimental H , mediante simulaciones tridimensionales calculamos las tensiones sufridas por la probeta y el correspondiente MOR numérico, σ_{fn} (véase la cuarta columna de la Tabla 1).
- Finalmente, a partir del análisis asintótico del ensayo de flexión en tres puntos, calculamos dos nuevas aproximaciones para el MOR: un MOR numérico $\hat{\sigma}_{fn}$ a partir del problema límite unidimensional y un MOR teórico $\hat{\sigma}_{ft}$ utilizando la fórmula (2). El MOR numérico $\hat{\sigma}_{fn}$ tiene gran importancia para calcular el MOR de materiales frágiles ya que las simulaciones tridimensionales pueden ser poco precisas cuando la razón entre el área de la sección transversal y la longitud de la probeta es muy pequeña.

	H (N)	σ_{ft} (Pa)	σ_{fn} (Pa)	$\hat{\sigma}_{fn}$ (Pa)	$\hat{\sigma}_{ft}$ (Pa)
$2l_1 = 0.06$ m	240.1	3.52×10^7	3.27×10^7	3.45×10^7	3.37×10^7
$2l_2 = 0.1$ m	156.8	3.83×10^7	3.63×10^7	3.75×10^7	3.73×10^7

Tabla 1: Fuerza de ruptura y MOR para vigas rectangulares.

De la Tabla 1 podemos deducir que la fuerza de ruptura H depende enormemente de la distancia entre apoyos. Además, el valor $\hat{\sigma}_{ft}$, obtenido usando la nueva fórmula teórica (2), se aproxima más a σ_{fn} que el valor teórico clásico σ_{ft} . Por lo tanto, creemos que la fórmula (2) dará una mejor aproximación del MOR para materiales frágiles.

Bibliografía

- [1] N. Kikuchi, J.T. Oden; *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1988.
- [2] M.T. Sánchez. *De tres dimensiones a solo una!!!*, As matemáticas do veciño. Actas do SII, 2006.

Categoría L-S en Foliaciones

Carlos Meniño Cotón

Departamento de Xeometría e Topoloxía

27 de Febrero de 2007

Resumen

La categoría de Lusternik-Schnirelmann para espacios topológicos fue introducida en 1934 en el contexto del cálculo de variaciones. Se trata de un invariante de homotopía que pretende corregir ciertas deficiencias en la teoría de Morse, en relación con los puntos críticos de funciones suaves sobre variedades cerradas. Para comprender cual es la cuestión recordamos brevemente qué es una función de Morse y que son los grupos de Cohomología (de de Rham) asociados a una variedad diferenciable. Para una buena introducción a este tema remitimos a [3].

Definición 1 (Función de Morse). Sea M^n una variedad suave (es decir C^∞) y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Diremos que la función es de Morse si sus puntos críticos admiten un entorno donde la función f puede ser parametrizada de la forma:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2, \quad (1)$$

donde el punto origen representa al punto crítico en cuestión y el entero p puede variar dependiendo del punto. El índice de un punto crítico $x \in M$ se define por $\text{ind}(x) = n - p$.

Observación 2. Observamos que ésta no es la definición original de función de Morse pero es equivalente, la demostración de esta equivalencia constituye un bello teorema de topología diferencial. Se deduce de la definición que los puntos críticos de f están aislados, algo que no ocurre para funciones suaves en su contexto más general.

Definición 3 (Complejo de de Rham). De nuevo, sea M^n una variedad suave, el complejo de de Rham se define como la siguiente sucesión de espacios vectoriales.

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \longrightarrow \Omega^1(M) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega^n(M) \longrightarrow 0, \quad (2)$$

donde $\Omega^p(M)$ denota el espacio de las p -formas diferenciales sobre M y las flechas vienen representadas por la aplicación diferencial exterior (a esta aplicación la denotaremos por $d_p : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$).

Observación 4. Suponemos que estos conceptos son conocidos para el lector, sin embargo, para que tenga sentido la próxima definición sólo es preciso observar que $d_{p+1} \circ d_p = 0$ para todo p .

Definición 5 (Cohomología de de Rham). *Se define el p -ésimo grupo de Cohomología de M como*

$$H^p(M) = \frac{\text{Nuc}(d_p)}{\text{im}(d_{p-1})}. \quad (3)$$

El p -ésimo número de Betti b_p es la dimensión de $H^p(M)$.

Teorema 6 (Desigualdades de Morse). *Sea $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave sobre una variedad cerrada (es decir, compacta, conexa y sin borde) entonces para todo entero $0 \leq p \leq n$ se tiene:*

$$b_p \leq \text{número de puntos críticos de índice } p. \quad (4)$$

De manera que el sumatorio de los números de Betti es un invariante de la variedad que acota inferiormente el número de puntos críticos de cualquier función de Morse. Se podría pensar que esta cota es universal dentro del espacio de funciones suaves en M teniendo en cuenta que las funciones de Morse forman un subespacio denso, pero esto es falso.

La categoría L-S es un invariante que soluciona este defecto dando una cota universal para el número de puntos críticos de cualquier función suave.

Definición 7 (Abierto categórico). *Sea M una variedad y sea $U \subset M$ un abierto, donde i denotará a la aplicación inclusión. Se dice que U es categórico si existe una homotopía $H : U \times I \rightarrow M$ con $H(x, 0) = i(x)$ y $H(x, 1) = c$ (c constante).*

Observación 8. *Supondremos que las homotopías son también C^∞ aunque todo funciona bien con suponer sólo continuidad.*

También observamos la similitud de esta definición con la de espacio contráctil, pero remarcamos que son conceptos distintos. Un abierto contráctil siempre es categórico pero el inverso no siempre es cierto.

Definición 9 (Categoría L-S). *Sea M una variedad se define la categoría L-S de M , $\text{Cat}(M)$, como el menor número de abiertos categóricos necesarios para cubrir dicha variedad.*

Teorema 10 (Desigualdad general). *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave sobre una variedad cerrada, entonces:*

$$\text{Cat}(M) \leq \text{número de puntos críticos de } f. \quad (5)$$

Aunque la categoría L-S es un invariante sencillo de definir desgraciadamente es tremendamente difícil de calcular. Rápidamente se puede conocer la categoría L-S de cualquier esfera. Como no son contráctiles su categoría es mayor que 1 y tomando el hemisferio norte y sur (un poco ampliados) obtenemos que es menor o igual que 2.

El principal problema reside en conseguir buenas cotas inferiores. Las superiores pueden conseguirse a partir de cualquier recubrimiento categórico. Apuntamos que siempre tenemos una cota superior a partir de la dimensión de la variedad: $\text{Cat}(M) \leq \dim M + 1$.

Proponemos esta desigualdad como ejercicio dando como indicación que nuestras variedades son triangulables.

Para conseguir una cota inferior hay que recurrir a los grupos de cohomología. Recordamos que en formas diferenciales tenemos definido el producto exterior

$$\wedge : \Omega^p \times \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{p+q}(M).$$

Se tiene que $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau$ y es fácil a partir de esto probar que \wedge define un producto exterior en cohomología.

Definición 11 (Anillo de cohomologías). Para una variedad suave se define el anillo de cohomologías como el anillo graduado

$$H^*(M) = \left(\bigoplus_{i=0}^p H^i(M), \wedge \right).$$

El anillo de cohomologías reducido se define por

$$\tilde{H}^*(M) = \left(\bigoplus_{i=1}^p H^i(M), \wedge \right).$$

A partir de la propiedad de graduación es fácil comprobar que el anillo de cohomologías reducido es un anillo nilpotente, su orden de nilpotencia mide el número mínimo de veces que el anillo debe ser operado consigo mismo para obtener el anillo nulo.

Teorema 12 (Cota en cohomología). Sea M una variedad suave, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\text{Nil}(\tilde{H}^*(M)) \leq \text{Cat}(M).$$

En realidad el teorema funciona para los anillos de cohomología singular reducidos con coeficientes en cualquier anillo conmutativo. Estos anillos no tienen necesariamente el mismo orden de nilpotencia por tanto nos dan una familia de cotas inferiores para la categoría L-S.

La inmensa mayoría de los cálculos efectivos de categoría L-S se realizan mediante el uso de estas desigualdades.

Ejemplo 13. El toro generalizado de dimensión n , que denotamos T^n , es el producto de n copias de S^1 . Es una variedad compacta orientable, por tanto cualquier forma de volumen da en cohomología un elemento no trivial.

Una forma de volumen puede obtenerse a partir del producto exterior de las 1-formas inducidas por las formas de volumen de cada copia de S^1 . Por tanto $\text{Nil}(\tilde{H}^*(M)) = n + 1$.

Teniendo en cuenta la cota superior en la dimensión se obtiene de modo inmediato que $\text{Cat}(T^n) = n + 1$.

Técnicas similares muestran que la categoría L-S de cualquier superficie distinta de la esfera es 3. También que la categoría L-S del espacio proyectivo n -dimensional real ($\mathbb{R}P^n$) es $n + 1$.

Este interesante invariante admite distintas adaptaciones al contexto de foliaciones. Es de esperar que nos den información cualitativa sobre funciones suaves que respeten la estructura foliada. Localmente una variedad foliada se presenta como un producto cartesiano $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ y globalmente es una unión disjunta de variedades de dimensión p que se parametrizan localmente por las "placas" $\mathbb{R}^p \times \{y\}$. Es decir, las variedades localmente discurren paralelamente. En una foliación siempre hay dos formas distinguidas de "moverse". La forma tangente alude a un movimiento que decansa en una misma hoja, la forma transversa alude a un movimiento que corta a cada hoja de modo secante.

Atendiendo a estos posibles movimientos surgen de modo natural dos tipos de homotopías: la homotopía tangente y la homotopía transversa. De modo análogo al caso clásico se pueden definir abiertos tangencialmente categóricos y transversalmente categóricos. Recubrimientos minimales con abiertos con estas características sugieren la definición de categoría tangente y categoría transversa de una foliación.

Existen métodos en cohomología para obtener cotas inferiores de estas categorías (ver [1] y [2]). El problema más complicado (a parte de los cálculos explícitos) reside en adaptar el Teorema 10 de modo satisfactorio. En [2] se puede encontrar una solución a este problema para categoría transversa.

Bibliografía

- [1] E.Vogt y W.Singhoff, *Tangential category of foliations*, Topology **42** (2003), 603–627.
- [2] Hellen Colman Vale; *Categoría L-S en foliaciones*, Tesis, Departamento de Xeometría e Topoloxía, Universidad de Santiago de Compostela, 1998.
- [3] B.Dubrovin, S.Nóvikov, A.Fomenko; *Geometría Moderna, métodos de la teoría de cohomologías*, Mir Moscú, traducción al español 1987.

¿Cuánto debería costar un peaje?

Manuel A. Mosquera Rodríguez

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

12 de Marzo de 2007

Resumen

Nuestro objetivo será modelizar matemáticamente el problema de reparto de los costes que genera la construcción y el mantenimiento de una autopista utilizando la *teoría de juegos cooperativa*.

Un *juego de coste cooperativo con utilidad transferible* (TU) es un par (N, c) con $N = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, representando el conjunto de *jugadores* y $c : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ es la *función característica* del juego donde, para cada *coalición* $S \subseteq N$, $c(S)$ representa el coste que tendrían que pagar los jugadores de S si deciden cooperar entre ellos. Decimos que un juego de coste TU es *cóncavo* si el coste que aporta un jugador a una coalición es mayor cuanto menor sea la coalición. Formalmente, para todo jugador $i \in N$ y para todo par de coaliciones $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ se cumple

$$c(S \cup \{i\}) - c(S) \geq c(T \cup \{i\}) - c(T).$$

Así, los jugadores tendrán más incentivos a unirse a la coalición a la que menor coste aporten, es decir, la cooperación entre todos los jugadores será lo más beneficioso.

El objetivo principal de la teoría de juegos de coste cooperativos TU es repartir el coste total $c(N)$ generado por la cooperación de todos los jugadores de forma que se cumplan ciertas propiedades de estabilidad o justicia. Formalmente se puede describir el objetivo como: encontrar un vector de números no negativos $x \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $x(N) = \sum_{i=1}^n x_i = c(N)$. Decimos que un reparto es *coalicionalmente estable* si $x(S) \leq c(S)$ para todo $S \subseteq N$. Definimos el *núcleo* de un juego de coste TU como el conjunto de repartos coalicionalmente estables,

$$\mathcal{C}(N, c) = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid x(N) = c(N), x(S) \leq c(S) \text{ para cada } S \subset N\}.$$

Un resultado bastante importante nos dice que el núcleo de juegos de coste TU cóncavos es siempre no vacío y por tanto siempre podemos encontrar repartos coalicionalmente estables. Un reparto que siempre está en el núcleo cuando el juego es cóncavo es el *valor de Shapley*. Dado un juego de coste TU (N, c) , el valor de Shapley propone que el jugador $i \in N$ debe de asumir el coste:

$$\Phi_i(N, c) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} (c(S \cup \{i\}) - c(S)).$$

PALABRAS CLAVE: Juegos cooperativos, reparto de costes, juegos de autopista.

Una interpretación que se le puede dar al valor de Shapley es la siguiente: supongamos que los jugadores van llegando a un punto de encuentro en un orden determinado y a cada uno se le va asignando el coste que aporta a la coalición de jugadores que han llegado antes que él, si hacemos esto con todos los posibles órdenes de llegada y los consideramos todos equiprobables obtenemos el valor de Shapley. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 1 (El juego del guante modificado). *Tres jugadores quieren comprar un par de guantes que vale 10 euros. Los jugadores 2 y 3 realmente no tienen prisa por comprarlo pero el jugador 1 sí tiene prisa por comprarlo pero no puede hacerlo sin la presencia de alguno de los otros jugadores. El objetivo es comprar el par de guantes entre todos y repartirse el coste generado. El juego de coste TU asociado a este problema es el siguiente:*

S	\emptyset	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	N
$c(S)$	0	0	0	0	10	10	0	10

El cálculo del valor de Shapley está representado en la siguiente tabla donde en la primera columna está el orden de llegada y en las otras columnas está lo que tiene que pagar cada uno de los jugadores según el orden de llegada considerado.

Jugador Orden	1	2	3
123	0	10	0
132	0	0	10
213	10	0	0
231	10	0	0
312	10	0	0
321	10	0	0
Shapley	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$

Por ejemplo, para el orden de llegada 231, primero llega el jugador 2 y aporta coste 0, después llega el jugador 3 y aporta coste 0, y por último llega el jugador 1 y aporta coste 10. Por tanto se le asigna coste 10 a ese jugador y el reparto para ese orden es (10, 0, 0).

Es fácil comprobar que este juego no es cóncavo, $\mathcal{C}(N, c) = \emptyset$ y por lo tanto $\Phi(N, c) \notin \mathcal{C}(N, c)$.

El principal problema que tiene el valor de Shapley es que su coste computacional aumenta exponencialmente con el número de jugadores. Sin embargo, en muchas clases de juegos se puede encontrar una expresión para el valor de Shapley en la que su coste computacional no depende del número de jugadores.

Otra regla de reparto interesante para juegos de coste TU y que cumple buenas propiedades es el *valor de compromiso*. Esta regla se define como el único reparto que está en la línea que une el vector de mínimos derechos y el vector de utopía. Para cada jugador $i \in N$ se define el *valor de utopía* como lo que el jugador aporta a la gran coalición

$$M_i(N, c) = c(N) - c(N \setminus \{i\}),$$

y se define el *mínimo derecho* como lo mejor que puede obtener el jugador si al resto de jugadores se les concede su valor de utopía

$$m_i(N, c) = \min_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \left\{ c(S \cup \{i\}) - \sum_{j \in S} M_j(N, c) \right\}.$$

El valor de compromiso (o τ -value) es el único reparto, si existe, que está en la recta que une los vectores $M(N, c)$ y $m(N, c)$, es decir

$$\tau(N, c) = \alpha M(N, c) + (1 - \alpha)m(N, c)$$

con $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\sum_{i \in N} \tau_i(N, c) = c(N)$. A continuación estudiaremos el valor de Shapley y el valor de compromiso en el contexto de los problemas de autopista.

El problema de las autopistas

Todos sabemos que una autopista está formada por distintos tramos. A cada tramo se le asigna un peaje con el objetivo de sufragar los distintos costes derivados de su construcción y mantenimiento. Uno de los muchos problemas a estudiar es cómo asignar los peajes a los distintos tramos. A continuación veremos cómo modelar matemáticamente este problema y cómo lo podemos resolver utilizando la teoría de juegos cooperativa.

Para simplificar el problema vamos a suponer que la autopista es lineal, es decir, existen dos puntos extremos unidos por la autopista y por el medio existen ciertos puntos de entrada y salida de la autopista, pero no existen ramificaciones. Tomemos por ejemplo el trozo de la autopista AP-9 que une A Coruña con Vigo, y por simplicidad tomemos los puntos de entrada y salida que se marcan en la siguiente figura.

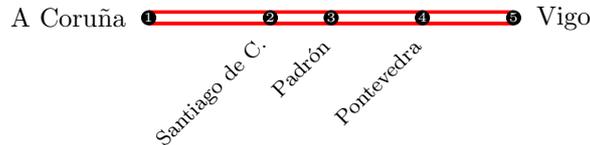


Figura 1: Autopista A Coruña-Vigo.

Un *problema de autopista* es una 4-tupla (N, M, C, T) dónde:

- (i) N es el conjunto de los distintos viajes que se realizan por la autopista,
- (ii) M es el conjunto de tramos de los que consta la autopista,
- (iii) $C : M \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ es una función que a cada tramo le asigna el coste, estrictamente positivo, de sufragar dicho tramo,
- (iv) $T : N \rightarrow 2^M$ es una función que a cada viaje le asigna los tramos de autopista que realiza, además debe cumplir que a cada viaje le asigne un conjunto de tramos consecutivos de autopista, es decir, para cada $i \in N$, existen $a_i, b_i \in M$ tales que $a_i \leq b_i$ y $T(i) = \{t \in M \mid a_i \leq t \leq b_i\}$.

Además, asumiremos que cada tramo de autopista es usado por al menos dos viajes. En otro caso, si el tramo no es usado se elimina del problema y si es usado por un único viaje, este será el que pague todo el tramo.

El problema del reparto de los coste totales se puede abordar de una forma directa, sin necesidad de la teoría de juegos. Dos formas bastante intuitivas de repartir los costes son:

1. el **reparto igualitario**: el coste de cada tramo se reparte igualmente entre el número de viajes que lo usan, p. ej. si un tramo tiene coste 8 y lo usan 4 viajes, entonces, cada viaje pagará una parte de este coste igual a 2,
2. el **reparto proporcional**: cada viaje tiene que pagar una parte del coste total que es proporcional al coste que tendría que pagar si ese fuese el único viaje de la autopista, p. ej., si el coste total es 24, hay cuatro posibles viajes y los costes individuales de cada viaje vienen dados por el vector $(12, 10, 12, 24)$, entonces el reparto que se propone es $(\frac{12}{58}24, \frac{10}{58}24, \frac{12}{58}24, \frac{24}{58}24)$.

Asociado a cada problema de autopista (N, M, C, T) se define el *juego de autopista* como el juego de coste cooperativo $TU(N, c)$ con

$$c(S) = \sum_{t \in T(S)} C(t) \quad \text{para cada } S \subseteq N,$$

dónde $T(S) = \{t \in M \mid t \in T(i) \text{ para algún } i \in S\}$. $c(S)$ representa el coste que la coalición de viajes S tiene que pagar si la autopista está formada sólo por los tramos de $T(S)$ y esos viajes son los únicos que se realizan sobre esa parte de la autopista.

Teorema 2. *Dado un problema de autopista (N, M, C, T) y su juego de autopista asociado (N, c) ,*

- (i) *el reparto igualitario de (N, M, C, T) coincide con el valor de Shapley de (N, c) ,*
- (ii) *el reparto proporcional de (N, M, C, T) coincide con el valor de compromiso de (N, c) .*

Este resultado nos indica que tanto el valor de Shapley como el valor de compromiso para la clase de juegos de autopista tienen interpretaciones intuitivas y sus expresiones son sencillas, evitando así su complejidad computacional.

Equilibrio de Nash aplicado a un problema de control medioambiental

Néstor García Chan

Departamento de Matemática Aplicada

20 de Marzo de 2007

Resumen

Introducción

La gestión, tratamiento y eliminación de aguas residuales es uno de los problemas ambientales más importantes en la actualidad. La solución más común es tratar las aguas residuales en plantas de depuración y posteriormente descargarlas a través de emisarios submarinos dentro de un dominio ocupado por aguas poco profundas (estuarios, ríos, lagos, etc.).

El objetivo de este trabajo es utilizar técnicas de control multiobjetivo para definir una estrategia de depuración óptima cuando en un dominio en el que existen una serie de zonas a proteger (playas, viveros, etc.), son varias las plantas depuradoras que vierten sus aguas residuales y además cada una de ellas está gestionada por un organismo diferente.

Elementos y planteamiento del problema de control óptimo.

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ acotado y ocupado con aguas poco profundas. Sean $P_j \in \Omega$, $j = 1, \dots, N_E$ donde las plantas realizan vertidos y sean $A_l \subset \Omega$, $l = 1, \dots, N_z$ zonas a proteger donde la concentración del contaminante debe ser inferior a un cierto valor σ_l .
2. Sistema de Estado: El contaminante considerado son las *coliformes fecales* (CF), cuyas concentraciones están dadas por el modelo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho - \beta \Delta \rho + \kappa \rho &= \\ \frac{1}{h} \left[\sum_{j=1}^{N_E} m_j(t) \delta(x - P_j) \right] &\quad \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) &\quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 &\quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

donde:

PALABRAS CLAVE: Equilibrio de Nash, problema de control, gestión de aguas residuales, sistema de optimalidad, condición de optimalidad

- ρ es la concentración de CF promediada en altura,
 - $h \in C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ es la altura del agua,
 - $\vec{u} \in [L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))]^2$ es la velocidad horizontal del agua promediada en altura,
 - $\beta > 0$ es un coeficiente de viscosidad horizontal,
 - $\kappa \in \mathbb{R}$ es un coeficiente experimental relacionado con la mortalidad de CF,
 - $m_j \in L^\infty(0, T)$ es el flujo másico de CF vertida en P_j ,
 - $\delta(x - P_j)$ representa la *medida de Dirac* en el punto P_j ,
 - $\rho_0 \in C(\bar{\Omega})$ es la concentración inicial de CF.
3. Controles: Cada planta puede controlar el flujo másico que vierte; el control de la planta j es la función $m_j(t)$.
4. Funciones objetivo: Para la planta j viene dada por

$$J_j(m_1, m_2, \dots, m_{N_E}) = \int_0^T f_j(m_j(t)) dt + \sum_{i=n_{(j-1)}+1}^{n_j} \frac{1}{\epsilon_i} \int_{A_i \times (0, T)} \psi(\rho(x, t) - \sigma_i) dx dt \quad (2)$$

El primer sumando representa el coste del proceso de depuración y el segundo indica una penalización impuesta cuando la depuración no ha sido suficiente.

5. Espacio de estrategias y problema de control óptimo: Razones tecnológicas exigen que, en cada planta, $\underline{m}_j \leq m_j(t) \leq \bar{m}_j$ siendo $0 \leq \underline{m}_j < \bar{m}_j$. Así, definimos $M_j = \{m \in L^\infty(0, T); 0 < \underline{m}_j \leq m(t) \leq \bar{m}_j, \text{ c.p.d. en } (0, T)\}$ como espacio de estrategias y consideramos el problema de control óptimo
- Problema (\mathcal{P}): Para $j = 1, \dots, N_E$, encontrar la función $m_j(t) \in M_j$ que minimice el funcional $J_j(m_1, m_2, \dots, m_{N_E})$ dado por (2), siendo $\rho(x, t)$ la solución del sistema (1).
6. Objetivo: Encontrar un *Equilibrio de Nash* para el problema (\mathcal{P}), esto es, un $m^* = (m_1^*, \dots, m_{N_E}^*) \in \prod_{j=1}^{N_E} M_j$ tal que, para $j = 1, 2, \dots, N_E$

$$J_j(m_1^*, \dots, m_{j-1}^*, m_j^*, m_{j+1}^*, \dots, m_{N_E}^*) = \min_{m_j \in M_j} J_j(m_1^*, \dots, m_{j-1}^*, m_j, m_{j+1}^*, \dots, m_{N_E}^*) \quad (3)$$

La existencia de por lo menos un punto de equilibrio $(m_1^*, \dots, m_{N_E}^*)$ esta garantizada dado que consideramos a $f_j \in C[\underline{m}_j, \bar{m}_j]$ y f_j es estrictamente convexa en $[\underline{m}_j, \bar{m}_j]$ para cada $j = 1, \dots, N_E$.

Sistema de optimalidad.

Introducimos el sistema adjunto con el objetivo de enunciar de forma simple las derivadas parciales $\frac{\partial J_j}{\partial m_j}(m)$. Además suponemos que el mínimo en (3) es alcanzado en puntos de M_j para todo $j = 1, \dots, N_E$, entonces se cumple la *condición de optimalidad* ($\frac{\partial J_j}{\partial m_j}(m) = 0$ para todo $j = 1, \dots, N_E$). Así pues para plantear un caso simple suponemos que $N_E = 2$ y $N_Z = 2$, con $n_1 = 1, n_2 = 2$, entonces enunciamos el problema adjunto como sigue

$$-\frac{\partial p_k}{\partial t} - \beta \Delta p_k - \operatorname{div}(p_k \vec{u}) + \kappa p_k = \frac{1}{\epsilon_k} \chi_{A_k} \psi'(\rho - \sigma_k) \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (4)$$

$$\beta \frac{\partial p_k}{\partial n} + p_k(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) \quad (5)$$

$$p_k(x, T) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (6)$$

para definir las condiciones de optimalidad

$$\frac{\partial J_j}{\partial m_j}(m^*) = f'_k(m_k^*) + \frac{1}{h(P_k, t)} p_k(P_k, t) = 0 \quad (7)$$

donde $k = 1, 2$. Por tanto el sistema que caracteriza las soluciones de nuestro problema está formado por el (enunciado con las suposiciones anteriores) problema de estado (1), el problema adjunto (4)-(6) y las condiciones de optimalidad (7); dicho sistema es el llamado *sistema de optimalidad* y es el que será resuelto.

Resolución numérica.

En la discretización del sistema de optimalidad así formado se emplea un método que combina características para la discretización en tiempo con elementos finitos de Lagrange P_1 para la discretización en espacio. Ello conduce al siguiente problema totalmente discreto: Dados $\hat{\rho}_h^0 = (\rho_{h0}(x_1), \rho_{h0}(x_2), \dots, \rho_{h0}(x_{N_v}))^t$ y $\hat{p}_{1h}^N = \hat{p}_{2h}^N = (0, 0, \dots, 0)^t$, para $k = 1, 2$ y $n = 0, 1, \dots, N - 1$, encontrar $m_k^{n+1} \in \mathbb{R}$, $\hat{\rho}_h^{n+1} \in \mathbb{R}^{N_v}$, $\hat{p}_{kh}^n \in \mathbb{R}^{N_v}$ que satisfaga:

$$A_{1h} \hat{\rho}_h^{n+1} - B_{1h}^n \hat{\rho}_h^n = \frac{m_1^{n+1}}{h^{n+1}(P_1)} b_{1h} + \frac{m_2^{n+1}}{h^{n+1}(P_2)} b_{2h}, \quad (8)$$

$$A_{2h}^n \hat{p}_{kh}^n - B_{2h}^{n+1} \hat{p}_{kh}^{n+1} = \beta_{kh}^n, \quad (9)$$

$$f'_k(m_k^{n+1}) = -\frac{1}{h^{n+1}(P_k)} C_{kh} \hat{p}_{kh}^{n+1}, \quad (10)$$

donde, para $i, j = 1, 2, \dots, N_v$:

- $\hat{\rho}_h^{n+1} = (\rho_h^{n+1}(x_1), \dots, \rho_h^{n+1}(x_{N_v}))^t$, $\hat{p}_{kh}^{n+1} = (p_{kh}^{n+1}(x_1), \dots, p_{kh}^{n+1}(x_{N_v}))^t$.

- $(A_{1h})_{ij}$, $(B_{1h}^n)_{ij}$ y $(A_{2h}^n)_{ij}$, $(B_{2h}^{n+1})_{ij}$ son las matrices propias de la discretización de elementos finitos y $(b_{kh})_i = \tilde{v}_i(P_k)$ es la “función de base” evaluada en P_k .
- $(\beta_{kh}^n)_i = \frac{1}{\epsilon_k} \int_{\Omega} \chi_{\bar{A}_k} \psi' \left(\sum_{l=1}^{N_v} (\hat{\rho}_h^n)_l \tilde{v}_l - \sigma_k \right) \tilde{v}_i$
- C_{kh} es la matriz de orden $1 \times N_v$ que extrae el valor $p_{kh}^{n+1}(P_k)$ a partir del vector \hat{p}_{kh}^{n+1} .

Este sistema discreto se escribe en forma compacta ($F(m) = 0$) como un sistema cuadrado, no lineal y en su resolución se empleó el comando FSOLVE de MATLAB.

Ejemplo: experimento numérico en un entorno real

Resultados sobre la ría de Vigo donde consideramos dos puntos de vertido y dos zonas a proteger, eligiendo como cotas de CF $\sigma_1 = 0.0003$ y $\sigma_2 = 0.0005$, $\delta = 0.00001$ y $\epsilon_2 < \epsilon_1$, es decir, mayor penalización para la planta responsable del vertido en P_2 .

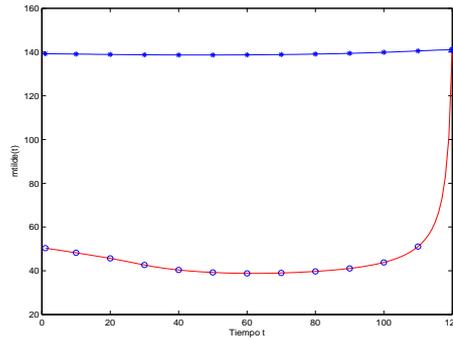


Figura 1: Vertidos óptimos $m_1(t)$ (***) y $m_2(t)$ (oo) para $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 10^{-3}$

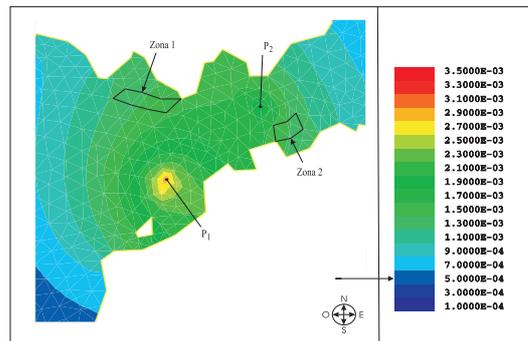


Figura 2: Concentraciones de CF en el último instante de la simulación para $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 10^{-3}$

Homología y GAP

Pablo Fernández Ascariz

Departamento de Álgebra

27 de Marzo de 2007

Resumen

La teoría de (co)homología es una de las ramas más importantes del álgebra. Para introducirla, y como ejemplo paradigmático, veremos cómo se calcula la homología en la categoría de R -módulos, así como el concepto dual de cohomología. Para esto, comenzaremos viendo algunas definiciones.

Definición 1. *Un complejo cadena \mathbf{C} es una familia de R -módulos junto con una familia de morfismos de R -módulos $\mathbf{C} = \{C_n, d_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

donde $d_n \circ d_{n+1} = 0$, es decir, $\text{Im}(d_{n+1}) \subseteq \text{Ker}(d_n)$, para $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 2. *Una resolución del R -módulo C es un complejo cadena del tipo:*

$$\cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} C \longrightarrow 0$$

El primer paso para calcular la (co)homología del R -módulo C es construir una resolución de C que ha de ser exacta, es decir $\text{Im}(d_{n+1}) = \text{Ker}(d_n)$, y proyectiva (cada punto de la resolución debe ser proyectivo). El hecho de que se exija la exactitud implica que $C = \text{Coker}(C_1 \rightarrow C_0)$, y por tanto no se pierde información al suprimir C en la resolución. Se considera entonces la resolución exacta y proyectiva:

$$\cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

El siguiente paso es aplicar a esta resolución un funtor, al que se le conoce como los coeficientes de la teoría de (co)homología. En el caso de los R -módulos los funtores que se utilizan son:

$$- \otimes X : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod} \quad \text{Hom}(-, X) : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$$

los cuales proporcionan los complejos:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_2 \otimes X & \xrightarrow{\hat{d}_2} & C_1 \otimes X & \xrightarrow{\hat{d}_1} & C_0 \otimes X \xrightarrow{\hat{d}_0} 0 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(C_1, X) & \xrightarrow{\tilde{d}_0} & \text{Hom}(C_1, X) & \xrightarrow{\tilde{d}_1} & \text{Hom}(C_2, X) \xrightarrow{\tilde{d}_2} \cdots \end{array}$$

El segundo es un complejo cocadena, concepto dual al de cadena, que se obtiene por ser $\text{Hom}(-, X)$ un funtor contravariante. Se definen entonces la homología y cohomología de C con coeficientes en X de la siguiente manera [3]:

$$H_n(C, X) = \text{Ker}(\hat{d}_n) / \text{Im}(\hat{d}_{n+1})$$

$$H^n(C, X) = \text{Ker}(\tilde{d}_{n+1}) / \text{Im}(\tilde{d}_n)$$

donde $n \geq 0$.

Una vez introducido el concepto de (co)homología nos centraremos en la homología de ciertos grupos nilpotentes libres, con el objetivo de calcular ésta y proporcionar un método más rápido y efectivo que el que hasta ahora se venía utilizando. Para ello se ha usado GAP (Groups, algorithms, programming) [1], un programa de código libre orientado hacia el álgebra computacional. Proporciona un lenguaje de programación y librerías con algoritmos y objetos algebraicos. Este sistema y toda la documentación y manuales relacionados se pueden encontrar en:

<http://www.gap-system.org/gap.html>

Además, GAP cuenta con una extensa lista de paquetes, los cuales proporcionan funcionalidades específicas. Se usará en particular el paquete HAP (Homological algebra programming) que está especialmente enfocado hacia los cálculos relacionados con la (co)homología de grupos [2]. Veremos a continuación varias definiciones.

Definición 3. Dado un grupo G , se define su serie central descendente como sigue:

$$G_1 = G, \quad G_n = [G_{n-1}, G] = [[[G, G], G], \overset{n}{\cdots} G],$$

donde $[G_{n-1}, G]$ denota el subgrupo de G generado por los elementos de la forma $x^{-1}y^{-1}xy$, $x \in G_{n-1}$, $y \in G$.

Además, si existe un n tal que $G_{n+1} = \{e\}$, entonces se dice que G es nilpotente de clase a lo sumo n . Si m es el menor número natural que satisface dicha propiedad se dice que G es nilpotente de clase m .

Definición 4. Se dice que un grupo G es nilpotente libre de clase c y rango n si $G \cong F/F_c$, donde F es un grupo libre de rango n .

Dado un grupo G , a partir de él se puede construir un álgebra de Lie $L(G)$. Consideremos su serie central descendente; como G_{n+1} es normal en G_n , podemos tomar los cocientes $L_n(G) = G_n/G_{n+1}$ que resultan ser abelianos [3].

Tomando ahora la suma directa $L(G) = L_1(G) \oplus L_2(G) \oplus L_3(G) \oplus \dots$ la podemos considerar un álgebra de Lie ya que el conmutador de G induce funciones $L_i(G) \times L_j(G) \rightarrow L_{i+j}(G)$ que proporcionan una operación corchete bilineal $[\ , \] : L(G) \times L(G) \rightarrow L(G)$ que satisface la identidad de Jacobi.

Además, esta construcción induce un funtor:

$$L : \text{Grupos} \rightarrow \text{Álgebras de Lie sobre } \mathbb{Z}$$

Existe un resultado interesante sobre este funtor:

Teorema 5. *Sea G un grupo nilpotente libre de clase 2. Se tiene:*

$$H_n(G, \mathbb{Z}) \cong H_n(L(G), \mathbb{Z}).$$

Es decir, este resultado permite calcular la homología de ciertos grupos por medio de su álgebra de Lie asociada, y no directamente utilizando una resolución del grupo. Por esto, se han escrito varias funciones, siendo algunas de sus utilidades las siguientes:

- Computar el álgebra de Lie asociada a un grupo.
- Construir el complejo de Chevalley-Eilenberg asociado a un álgebra de Lie, necesario para calcular su homología.

La primera observación que se puede realizar es que calcular el álgebra de Lie asociada a un grupo y su homología es mucho más rápido y menos exigente computacionalmente que calcular la homología del grupo directamente.

Por ejemplo, si consideramos un grupo nilpotente libre de clase 2 y rango 4, calcular su cuarta homología directamente lleva más de cuarenta segundos. Sin embargo, hacerlo por medio del álgebra de Lie asociada supone menos de medio segundo.

Por otro lado, si tomamos un grupo G nilpotente libre de clase 2 y rango 6, no podremos calcular su sexta homología de manera directa, pues los cálculos implicados son demasiado grandes. Sin embargo, si utilizamos el álgebra de Lie, sí podremos obtener el resultado:

$$H_6(L(G), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_3 \oplus \overset{651}{\dots} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \overset{11984}{\dots} \oplus \mathbb{Z}.$$

Nos preguntamos ahora si se pueden debilitar las hipótesis del teorema. En cuanto a la hipótesis *nilpotente libre* parece que no puede ser debilitada. Por ejemplo, si tomamos como G el grupo de Heisenberg con 3 generadores, tenemos que G es un grupo nilpotente de clase 2 libre de torsión. Calculando su homología obtenemos:

$$H_3(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \overset{14}{\dots} \oplus \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, si calculamos la homología de su álgebra de Lie asociada $L(G)$ se comprueba que ésta no es isomorfa a $H_3(G, \mathbb{Z})$:

$$H_3(L(G), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{19}{\dots} \oplus \mathbb{Z}.$$

Sin embargo, teniendo en cuenta numerosos cálculos realizados con grupos nilpotentes libres de clase mayor que 2, parece que la hipótesis *de clase 2* podría ser eliminada. Como ejemplo, consideremos el grupo G nilpotente libre de clase 3 y rango 3. Usando HAP para realizar los cálculos, obtenemos:

- $H_1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- $H_2(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{18)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}$.
- $H_3(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \overset{73)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}$.
- $H_4(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \overset{171)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z}$.
- ...

Si tomamos el álgebra de Lie asociada y calculamos su homología, se obtienen los mismos resultados.

Esta conjetura puede ser probada para los dos primeros grupos de homología.

Proposición 6. *Sea G un grupo nilpotente libre. Entonces, se tienen isomorfismos:*

$$H_1(G, \mathbb{Z}) \cong H_1(L(G), \mathbb{Z}).$$

$$H_2(G, \mathbb{Z}) \cong H_2(L(G), \mathbb{Z}).$$

Bibliografía

- [1] The GAP Group; *GAP – Groups, Algorithms, and Programming*, (2006) <http://www.gap-system.org>.
- [2] The GAP Group; *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, package HAP 1.6*, (2006) <http://www.gap-system.org>.
- [3] P.J. Hilton, U. Stammbach; *A course in homological algebra*, Springer-Verlag, 1971.
- [4] Yu. V. Kuz'min, Yu. S. Semenov; *On the homology of a free nilpotent group of class 2*, Sbornik: Mathematics **189:4** (1998), 527–560.

Conxuntos de Cantor e dinámica

Pablo González Sequeiros

Departamento de Xeometría e Topoloxía

17 de Abril de 2007

Resumo

O conxunto de Cantor pode pensarse coma o chanzo intermedio entre o punto e a recta. É un conxunto “con moitos buracos”, non obstante ten tantos puntos como \mathbb{R} . Ten lonxitude nula, polo que podería dicirse que é “pequeno”, mais é non numerable, logo neste senso é “grande”. Trátase dun conxunto de gran utilidade en topoloxía, análise ou álgebra. En concreto, os conxuntos de Cantor xogan un importante papel no campo das foliacións e dos sistemas dinámicos.

Sobre os conxuntos de Cantor ^[4]

En 1875, H. J. S. Smith, catedrático da Universidade de Oxford, publica o artigo *On the integration of discontinuous functions*, J. London Math. Soc. **1**(6), 140-153, no que presenta, na parte final, un método para construír conxuntos “*nada-densos*”. Este parece ser o primeiro rexistro publicado no que aparece o que hoxe se coñece coma un conxunto de Cantor.

En 1882, Cantor envíalle a Dedekind unha carta na que lle presenta o seu *conxunto ternario* $\mathcal{C} = \{z \in [0, 1] : z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}, \alpha_i = 0, 2\}$ coma un conxunto perfecto, é dicir, que non posúe puntos illados, e de interior baleiro.



Esquema da construción do conxunto ternario de Cantor

Satisfai tamén outras importantes propiedades, como que é compacto, totalmente disconexo, autosemellante (i.e., é a unión disxunta de dúas copias de si mesmo) ou homoxéneo (i.e., para cada par de puntos, existe un homeomorfismo do conxunto en si mesmo que envía un no outro). Ademais, todos os espacios métricos non baleiros, *compactos*, *perfectos* e *totalmente disconexos* son homeomorfos ao conxunto ternario de Cantor, é dicir, este é un representante da súa clase de homeomorfía. Por este motivo, os espacios métricos que

PALABRAS CLAVE: Conxunto de Cantor, sistema dinámico clásico, máquina de sumar binaria, espazo foliado, dinámica transversa.

cumpren estas tres propiedades reciben o nome de *conxuntos de Cantor xeneralizados*, ou simplemente *conxuntos de Cantor*.

Sistemas dinámicos clásicos

Un *sistema dinámico* sobre un conxunto de Cantor \mathcal{C} é unha acción continua $\mathcal{G} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ dun grupo discreto \mathcal{G} sobre \mathcal{C} . Nos sistemas dinámicos clásicos, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$ (ou \mathbb{N}). Un coñecido exemplo de sistema dinámico clásico é o seguinte:

Sexa $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ o espazo das sucesións infinitas de 0's e 1's, que é un conxunto de Cantor coa topoloxía produto da topoloxía discreta sobre $\{0, 1\}$, xerada polos cilindros

$$C_{\beta_0 \dots \beta_n} = \{\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \alpha_0 = \beta_0, \dots, \alpha_n = \beta_n\}$$

determinados polas sucesións finitas $\beta_0 \dots \beta_n \in \{0, 1\}^n$. Chámase *máquina de sumar binaria* ao sistema dinámico xerado pola transformación $T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{cases} T(\alpha)_0 = 1, T(\alpha)_n = \alpha_n & \text{se } \alpha_0 = 0 \\ T(\alpha)_0 = 0, T(\alpha)_1 = T(\sigma(\alpha))_0 & \text{se } \alpha_0 = 1 \end{cases}$$

onde $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é a transformación tal que $\sigma(\alpha)_n = \alpha_{n+1}$, coñecida como *desprazamento de Bernoulli*. A denominación de máquina de sumar binaria débese a que a transformación T coincide coa suma de 1

$$S : x \in \mathbb{Z}_2 \mapsto x + 1 \in \mathbb{Z}_2$$

no anel \mathbb{Z}_2 dos enteiros 2-ádicos. Por outra banda, a órbita por T dunha sucesión α coincide coa súa clase de cofinalidade (dúas sucesións α, β dinse *cofinais* se os seus termos coinciden a partir dun certo índice, é dicir, se existe $m \geq 0$ tal que $\alpha_n = \beta_n, \forall n \geq m$), agás no caso das clases de cofinalidade de $000\dots$ e $111\dots$, contidas na mesma órbita. O que estamos dicindo é que a *dinámica* que definen estas dúas relacións de equivalencia é a mesma.

Dinámica transversa de espazos foliados transversalmente Cantor

O exemplo anterior representa a dinámica transversa (véxase [3]) de espazos foliados relativamente complexos coma o *espazo foliado de Ghys-Kenyon* [1] ou o *espazo dos mosaicos de Robinson* [2]. En xeral, a dinámica transversa de boa parte dos espazos foliados transversalmente Cantor está dada por unha acción de \mathbb{Z} .

Bibliografía

- [1] F. Alcalde Cuesta, A. Lozano Rojo e M. Macho Stadler, *Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon*. Por aparecer en Bull. Braz. Math. Soc.
- [2] P. González Sequeiros; *A dinámica dos mosaicos de Robinson*. Publicacións do Departamento de Xeometría e Topoloxía da USC **107**, 2006.

- [3] A. Lozano Rojo, *Hojas con mucho código*, As matemáticas do veciño 2006.
- [4] M. Macho Stadler, *Curiosidades sobre el conjunto de Cantor*, Un Paseo por la Geometría y la Topología (Dto. Matemáticas. UPV-EHU) **3** (1999/2000), 97–116. (<http://www.rsme.es/rec/paseo.htm>)

Número de ramificación de un árbol

María Pérez Fernández de Córdoba

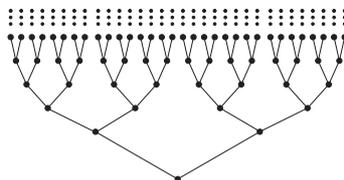
Departamento de Xeometría e Topoloxía

26 de Abril de 2007

Resumen

Un *grafo* es un par $G = (V, E)$ formado por un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas $E \subset V \times V$. Dos vértices v_1 y v_2 están unidos por una arista si y sólo si $(v_1, v_2) \in E$, en ese caso decimos que v_1 y v_2 son *vecinos*. Un *árbol* T es un grafo conexo sin ciclos (camino de aristas cerrados), sin lazos (aristas que salen y entran en un mismo vértice) y sin aristas múltiples (aristas diferentes con los mismos extremos). Un árbol es un espacio métrico, la distancia entre dos vértices se define como la longitud del único camino de aristas geodésico que los une.

En general, vamos a trabajar con árboles infinitos y enraizados, es decir, fijaremos un vértice 0 del árbol que llamaremos origen e imaginaremos el árbol como creciendo a medida que nos alejamos de la raíz 0 . En este contexto, los *hijos* de un vértice arbitrario $v \in T$ serán aquellos vértices vecinos que se encuentren más alejados de la raíz 0 .



En el árbol binario, todos los vértices tienen dos hijos.

La noción de *número de ramificación* de un árbol (dada por R. Lyons en [1] y [2]) mide el número medio de hijos por vértice. Conviene introducir previamente la interpretación geométrica de dicho concepto para que la definición se nos presente más comprensible:

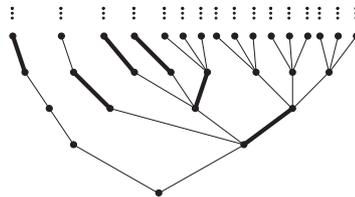
Sea T un árbol infinito y enraizado. Pensemos las aristas de T como tubos, a través de los cuales fluye el agua desde la raíz del árbol hasta el infinito, repartiéndose por las distintas ramas que nacen de cada vértice. Fijado $\lambda \geq 1$, añadimos la siguiente restricción: la cantidad de agua máxima que puede fluir a través de una arista a distancia n del origen, es λ^{-n} . Es decir, la capacidad de los tubos disminuye a medida que nos alejamos del origen.

Obsérvese que para un árbol fijado, cuanto más grande tomemos λ , la capacidad de las aristas se hará cada vez más pequeña, dificultando que el agua fluya a través de sus ramas. De hecho, existe un punto crítico $br(T)$ tal que para todo $\lambda < br(T)$ el agua fluye y para

PALABRAS CLAVE: Grafos, dimensión de Hausdorff

todo $\lambda > br(T)$ el agua se estanca. Es importante entender que cuando el árbol está muy ramificado, el punto crítico $br(T)$ es mayor que cuando está poco ramificado. Se define, por tanto, el *número de ramificación* $br(T)$ del árbol T como el supremo de aquellos λ que permiten fluir el agua a través de T , o equivalentemente, el ínfimo de los λ que no permiten fluir el agua.

Veamos ahora de manera explícita la definición de $br(T)$. Una *separatriz* Π de un árbol T es un conjunto de aristas de T que separan la raíz del infinito, es decir, si las eliminásemos, la raíz 0 y el infinito permanecerían en componentes conexas distintas, o equivalentemente, todo camino infinito cortaría a Π en al menos una arista.



Ejemplo de separatriz

Se define el *número de ramificación* de un árbol T como:

$$br(T) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\Pi} \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}$$

donde $d(0, e) = \max\{d(0, x), d(0, y)\}$ con $e = (x, y)$. El sumatorio $\sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)}$ es la capacidad de las aristas (pensadas como tubos) de una separatriz Π . El hecho de poder encontrar para un $\lambda \geq 1$ una separatriz con capacidad tan pequeña como queramos, significa que el agua no puede fluir para dicho λ . Obsérvese que la definición coincide con la idea intuitiva de identificar el número de ramificación con el ínfimo de los $\lambda \geq 1$ que no permiten fluir el agua.

Presentamos a continuación algunas de las características del número de ramificación:

- El número de ramificación no depende de la elección del origen.
- Si T' es un subárbol de T , entonces $br(T') \leq br(T)$.
- La *tasa de crecimiento inferior* definida como $gr(T) = \liminf_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}$ (donde $s(n)$ es el número de elementos del árbol que están a distancia n del origen) se relaciona con el número de ramificación de la siguiente manera: $br(T) \leq gr(T)$.
- El número de ramificación de un árbol T se relaciona con la dimensión de Hausdorff del espacio de finales ∂T del siguiente modo: $br(T) = e^{DH(\partial T)}$.

Además de la introducción del concepto de número de ramificación, el objetivo de la charla es explicar su relación con la dimensión de Hausdorff. En primer lugar recordaremos la definición de *espacio de finales* de un árbol:

Sea T un árbol enraizado y sea ∂T el conjunto de todos los caminos geodésicos infinitos (rayos) que parten de la raíz. Dicho espacio, llamado *borde* de T o *espacio de finales* de T , es un espacio métrico: si dos rayos $\xi, \eta \in \partial T$ tienen exactamente n aristas en común entonces $d(\xi, \eta) = e^{-n}$.

Una colección \mathcal{C} de subconjuntos de ∂T es un *recubrimiento* si $\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B = \partial T$ y por tanto, la *dimensión de Hausdorff* de ∂T se define como:

$$DH(\partial T) = \sup\{\alpha \mid \inf_{\mathcal{C}} \sum_{B \in \mathcal{C}} \text{diam}(B)^\alpha > 0\}$$

donde $\text{diam}(B) = \max\{d(\xi, \eta) \mid \xi, \eta \in B\}$. La definición de dimensión de Hausdorff nos resulta familiar, puesto que nos recuerda a la definición de número de ramificación. De hecho, como se anunció previamente, se tiene:

$$\text{br}(T) = e^{DH(\partial T)}.$$

Para probarlo, consideramos para cada vértice $x \in T$ el conjunto

$$B_x := \{\xi \in \partial T \mid \xi \text{ pasa por } x\}.$$

Obsérvese que $\text{diam}(B_x) \leq e^{-d(0,x)}$ (de hecho $\text{diam}(B_x) = e^{-d(0,x)}$ para todo $x \in T$ que tenga más de un hijo). La importancia de estos conjuntos es la siguiente: un conjunto de aristas Π es una separatriz si y sólo si $\{B_y \mid (x, y) \in \Pi\}$ es un recubrimiento de ∂T . Además, siempre podemos encontrar otra separatriz Π' de capacidad igual o menor que verifique $\text{diam}(B_y) = e^{-d(0,y)}$ para todo $(x, y) \in \Pi'$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{br}(T) &= \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\Pi} \sum_{(x,y) \in \Pi} \lambda^{-d(0,y)} = 0\} = \sup\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\Pi} \sum_{(x,y) \in \Pi} \lambda^{-d(0,y)} > 0\} = \\ &= \exp \sup\{\alpha \mid \inf_{\Pi} \sum_{(x,y) \in \Pi} e^{-d(0,y)\alpha} > 0\} = \exp \sup\{\alpha \mid \inf_{\Pi} \sum_{(x,y) \in \Pi} \text{diam}(B_y)^\alpha > 0\}. \end{aligned}$$

Puesto que para cada rayo geodésico ξ , la familia $\{B_y \mid \xi \text{ pasa por } y\}$ es un sistema fundamental de entornos de ξ , da igual que tomemos toda la familia de recubrimientos arbitrarios o que tomemos la familia de recubrimientos de la forma $\{B_y \mid (x, y) \in \Pi\}$ con Π una separatriz. Por ello, se obtiene finalmente el resultado buscado:

$$\begin{aligned} \text{br}(T) &= \exp \sup\{\alpha \mid \inf_{\Pi} \sum_{(x,y) \in \Pi} \text{diam}(B_y)^\alpha > 0\} = \\ &= \exp \sup\{\alpha \mid \inf_{\mathcal{C}} \sum_{B \in \mathcal{C}} \text{diam}(B)^\alpha > 0\} = e^{DH(\partial T)}. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] R. Lyons, Y. Peres. *Probability on trees and networks*. Draft, version of 22 November 2004.
- [2] R. Lyons, *Random walks and percolation on trees*. Ann. Probab. **18** (1990), 931-958.

O epitafio de Arquímedes

José Carlos Díaz Ramos

Department of Mathematics, University College Cork

30 de abril de 2007

Resumo

Arquímedes de Siracusa (287 A.C. - 212 A.C.) foi un matemático, físico e enxeñeiro da antiga Grecia. Considerado como un dos grandes xenios da historia, o seu legado científico non se limita soamente ós seus traballos matemáticos e físicos, se non tamén á produción de máquinas que estaban moi por diante do seu tempo.

Os descubrimentos científicos e sobre todo matemáticos de Arquímedes estiveron perdidos durante moitos anos. Os seus traballos sobreviviron en forma de copias feitas en latín e árabe, pero a maior parte deles foron destruídos como consecuencia dos incendios da biblioteca de Alexandría onde se cría que estaban ditas copias. Non obstante, en 1906 atopouse o chamado “palimpsesto de Arquímedes” que supuxo a recuperación de grande parte da súa obra. Un palimpsesto é unha peza de pergamino na que o texto orixinal foi borrado (neste caso unha copia dos traballos de Arquímedes feita no século X) e substituído por outro (unha serie de oracións escritas sobre o antigo texto no século XIII). Incluso hoxe en día séguese empregando diversos métodos para tratar de recuperar completamente o texto científico borrado.

Anque desde o punto de vista científico se coñece parte da obra de Arquímedes, os detalles da súa vida privada son bastante escuros. Por exemplo, non se sabe se estivo casado ou tivo fillos.

A anécdota máis coñecida sobre Arquímedes é o xeito no que descubriu o principio dos corpos flotantes. Segundo a historia, ó rei Hieron fixéronlle unha coroa supostamente de ouro, pero ante a desconfianza deste, encargóuselle a Arquímedes a tarefa de determinar, sen danala, se efectivamente a coroa era deste metal. Mentres tomaba un baño, Arquímedes deuse de conta de que o nivel da auga subía cando el se metía dentro e que podía empregar este efecto para determinar o volume da coroa, e por tanto a súa densidade, despois de pesala. A densidade da coroa sería menor cá do ouro puro se metais máis baratos e menos densos foran empregados na súa construción. Arquímedes saíu á rúa, tan contento desta idea que se esqueceu de que ía nu, berrando “Eureka” (atopeino). Esta historia non aparece nos traballos de Arquímedes, pero no seu tratado “Sobre os corpos flotantes” acuñou o que hoxe en día se coñece como o Principio de Arquímedes: todo corpo mergullado nun fluído experimenta un empuxe vertical cara arriba equivalente á masa do fluído desplazado.

PALABRAS CLAVE: Arquímedes, esferas xeodésicas, tubos, volume de obxectos xeométricos

Outra invención de Arquímedes e o “parafuso de Arquímedes”, unha máquina que podía ser accionada manualmente consistente nun helicoides colocado dentro dun cilindro e que servía, entre outras cousas, para subir auga desde un punto baixo a un máis elevado. Este artiluxio séguese empregando hoxe en día con ese propósito en países en fase de desenvolvemento e tamén ten aplicacións na industria alimenticia para a fabricación de embutidos.

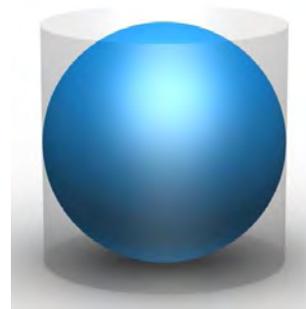
Anque non foi invento del, Arquímedes foi o primeiro en dar unha explicación rigurosa do principio da palanca. Segundo Pappus, o seu estudio sobre as palancas levouno a afirmar “dádeme un punto de apoio e moverei o mundo”. Esta lei establécese hoxe en día nos tratados de física como o enunciado máis xeral de “conservación do momento angular”.

Parte do traballo de Arquímedes baseábase nas necesidades da súa cidade de Siracusa. Outra fazaña que se lle atribúe é a de queimar barcos romanos durante a segunda guerra púnica, cando estes asediaron a cidade, por medio dunha serie de espellos que concentraban a luz solar nun punto. Hoxe chámase a esta idea o “raio mortal de Arquímedes” e aínda segue a controversia sobre a veracidade deste feito. Se ben teoricamente é posible, os medios dos que dispoñía Arquímedes eran escasos. Actualmente crese que, anque este experimento pode ser reproducido con tales medios, as condicións que se necesitan son tan ideais que se considera que é soamente un mito. Non obstante, é probable que empregase métodos similares para cegar ou confundir o inimigo.

Á marxe destes e outros descubrimentos científicos, o certo é que a razón pola que se considera a Arquímedes un dos grandes xenios da humanidade é pola súa obra matemática. Os seus métodos son moi similares ós do cálculo infinitesimal que coñecemos hoxe en día, se ben cómpre sinalar que a demostración dos seus resultados é máis rigurosa cá que empregarían, case dous milenios despois, Newton e Leibnitz.

Arquímedes morreu no 212 A.C. durante a segunda guerra púnica. Segundo di a tradición, Arquímedes estaba contemplando un diagrama matemático cando foi capturado. Un soldado madoulle deixar o que estaba facendo e Arquímedes respostoulle que tiña que acabar o seu problema e que non o molestase. Anque non hai evidencia destas palabras, dise que Arquímedes lle dixo ó soldado “non molestes os meus círculos”. O soldado romano, enfadado, matou a Arquímedes coa súa espada, o cal anoxou moito o xeneral romano a cargo da operación, habida conta do prestixio e do respecto que todo o mundo tiña por Arquímedes.

Na tumba de Arquímedes había unha inscrición co seu diagrama matemático favorito e do que se atopaba máis orgulloso. Este consistía nunha esfera inscrita nun cilindro do mesmo radio e con altura igual ó diámetro do cilindro. O diagrama viña a representar o feito demostrado por Arquímedes de que o volume da esfera inscrita é dous tercios o volume do cilindro. Esta charla pretende discutir como pode ser xeneralizado este resultado e ata que punto é importante.



A partir de agora traballaremos no contexto das variedades riemannianas. Para unha introducción intuitiva a este concepto, véxase [1].

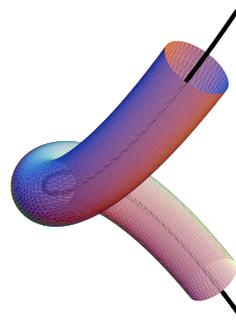
Sexa pois (M^n, g) unha variedade de Riemann, onde n é a dimensión e g denota a métrica da variedade. Recordemos que unha métrica é un produto interior que varía diferenciablemente co punto, de xeito que podemos definir non só lonxitudes e ángulos entre vectores senón tamén lonxitudes de curvas e volumes. Unha variedade de Riemann convértese pois nun espacio métrico onde a distancia entre dous puntos é o ínfimo das lonxitudes das curvas que unen ditos puntos. Para xeneralizar o teorema de Arquímedes o primeiro que debemos definir é o análogo a un cilindro e a unha esfera.

O concepto de esfera, de feito, xeneralízase de xeito moi natural: unha *bóla xeodésica* centrada no punto $m \in M$ e de radio $r > 0$, $S_m(r)$, é o conxunto dos puntos de M que distan menos ou igual ca r de m , é dicir, $S_m(r) = \{p \in M : d(m, p) \leq r\}$.

O análogo a un cilindro é tamén moi natural, se ben para a súa definición rigurosa cómpre certa preparación. Unha *xeodésica* é unha curva que ten aceleración cero. Xeometricamente, isto implica que a curva minimiza (localmente) a distancia entre os puntos que une, de modo que as xeodésicas nunha variedade de Riemann son a xeneralización natural das rectas no espacio euclidiano. É ben sabido que dado un punto m e un vector tanxente v en m existe unha única xeodésica (maximal) γ_v que pasa por m e ten por vector tanxente v . Dado un punto $m \in M$, podemos pois considerar todas as xeodésicas que saen de m con distintas velocidades iniciais. Así pois podemos definir a chamada *aplicación exponencial* centrada en m como a aplicación $\exp_m : v \in T_m M \mapsto \exp_m(v) = \gamma_v(1) \in M$ onde γ_v denota a xeodésica que pasa por m e é tanxente a v . É dicir, $\exp_m(v)$ consiste en percorrer unha distancia $\|v\|$ na dirección marcada por v desde o punto m . Por exemplo, está claro que con esta notación unha bóla xeodésica vén dada por $S_m(r) = \{\exp_m(rv) : v \in T_m M, \|v\| \leq 1\}$.

Sexa pois $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ unha xeodésica.

Un *tubo* arredor de γ de radio r é por definición $T_\gamma(r) = \{\exp_{\gamma(t)}(rv) : t \in [a, b], v \in T_{\gamma(t)}M, \|v\| \leq 1, v \perp \dot{\gamma}(t)\}$ (en rigor, o concepto de tubo pode definirse ó longo dunha curva arbitraria; non obstante, dado que pretendemos xeneralizar o concepto de cilindro só consideramos tubos arredor de xeodésicas). É dicir, un tubo de radio r arredor dunha xeodésica é o conxunto de puntos que están a unha distancia menor ou igual ca r partindo perpendicularmente de dita xeodésica. No espacio euclidiano as xeodésicas son as rectas e os tubos arredor delas coinciden exactamente cos cilindros. Así pois, o concepto de tubo arredor dunha xeodésica é a xeneralización inmediata de cilindro: só cómpre reescribir a definición euclidiana en termos de xeometría riemanniana.



Ó contrario que no espacio euclidiano, o volume dunha bóla xeodésica ou dun tubo non é coñecido en xeral. Sen embargo, pódese aproximar este mediante unha serie de potencias.

Os primeiros termos destes desenvolvementos son:

$$\begin{aligned} \text{vol}(S_m(r)) &= c_n r^n \left(1 - \frac{\tau(m)}{6(n+2)} r^2 + O(r^4) \right), \\ \text{vol}(T_\gamma(r)) &= c_{n-1} r^{n-1} \int_{-r}^r \left(1 - \frac{\tau(\gamma(t)) + \rho_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t)}{6(n+1)} r^2 + O(r^4) \right) dt. \end{aligned}$$

Aquí, c_n representa o volume dunha esfera (maciza) en \mathbb{R}^n de radio un. Dito volume é coñecido explicitamente para calquera dimensión e non é difícil ver que é $c_n = \pi^{\frac{n}{2}} / (\frac{n}{2})!$, onde $x! = \Gamma(x+1)$ e Γ é a función gamma $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$. Nas expresións anteriores ρ denota o tensor de Ricci e τ a curvatura escalar. Non discutiremos os obxectos ρ e τ ; tan só mencionamos que dependen da curvatura. Obviamente, no espazo euclidiano a curvatura é cero e por tanto os respectivos volumes son $c_n r^n$ e $2c_{n-1} r^n$.

De feito, da anterior discusión séguese unha xeneralización inmediata do teorema de Arquímedes para dimensións superiores: a relación entre o volume dunha esfera n -dimensional e o cilindro que a circunscribe é $\frac{c_n}{2c_{n-1}}$. Se tomamos $n = 3$ obtemos, despois de cálculos elementais que precisamente tal número é $2/3$.

En xeral, nunha variedade de Riemann a relación $\text{vol}(S_{\gamma(0)}(r))/\text{vol}(T_\gamma(r))$, onde $\gamma : [-r, r] \rightarrow M$ é unha xeodésica parametrizada por arco, depende do radio, do punto e da dirección do eixe do tubo (a xeodésica) ademais que da propia variedade. Asombrosamente, o número anterior caracteriza a xeometría euclidiana:

Teorema 1. [2] *Sexa (M^n, g) unha variedade tal que para calquera punto m e todas as xeodésicas γ pasando por m o número $\text{vol}(S_m(r))/\text{vol}(T_\gamma(r))$ é constantemente igual a $\frac{c_n}{2c_{n-1}}$ para calquera radio suficientemente pequeno. Entón, M é chá, ou o que é o mesmo, M é localmente isométrica a un espazo euclidiano.*

No caso particular en que $n = 3$ obtemos que o número $2/3$ caracteriza, polo menos localmente, a xeometría euclidiana tridimensional. A beleza desde resultado ponse de manifesto ó vela na perspectiva que lle corresponde ó resultado de Arquímedes. A relación $2/3$ obtida por este é un teorema difícil e fermoso que asombrou e asombra a varias xeracións de matemáticos. Ademais os seus métodos foron precursores das técnicas do cálculo infinitesimal que se desenvolveron séculos máis tarde. O propio Arquímedes foi consciente da súa transcendencia e fermosura. E sen embargo, a relación $2/3$ vai moito máis aló: Euclides podería ter empregado este número para *definir* a súa xeometría tridimensional.

Bibliografía

- [1] J. C. Díaz-Ramos, *Unha introducción á curvatura*, As Matemáticas do veciño **1** (2006), Instituto de matemáticas, USC, 3–4.
- [2] M. Djorić, L. Vanhecke, *A theorem of Archimedes about spheres and cylinders and two-point homogeneous spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **43** (1991), no. 2, 283–294.

Estadística y genética

Manuel García Magariños

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

8 de Mayo de 2007

Resumen

Motivación

En los últimos años la proliferación de tecnologías encaminadas al genotipado de muestras humanas ha dado como resultado cantidades masivas de datos que es necesario analizar. Partiendo de esto, y sumando a ello el 'boom' que ha sufrido la genética en los últimos tiempos, que se traduce en multimillonarias y crecientes inversiones con abaratamientos progresivos de los costes, se puede entender la creciente necesidad de que estos 'inputs' o datos de entrada den lugar a resultados de los que se pueda beneficiar la sociedad en su conjunto.

De entre los múltiples tipos de estudios que involucran variables genéticas nos interesan especialmente aquellos que buscan asociaciones de enfermedades humanas complejas con componentes del genoma. El calificativo 'complejas' aplicado a las enfermedades nos ayuda a diferenciarlas de las enfermedades 'mendelianas', que son aquellas en las que una posición génica única y generalmente conocida es responsable del desarrollo de la enfermedad si y solo si en ella se da una determinada variante. Por el contrario, en las enfermedades complejas, como la diabetes o algunos tipos de cáncer, se cree que incrementos en las probabilidades de sufrir la enfermedad pueden venir dados únicamente por intrincados patrones de variantes genéticas. Es por ello que las técnicas tradicionales usadas en el pasado para el estudio de las enfermedades 'mendelianas' han fracasado en el estudio de las enfermedades complejas.

En la especie humana, los individuos se diferencian unos de otros únicamente a través de un 1% del genoma, lo cual reduce ya de un modo significativo el campo de estudio. Este 1% comprende diferentes tipos de variantes, como por ejemplo los STRs, que son los marcadores comúnmente usados en los estudios de paternidad. Los estudios de asociación genotipo-enfermedad con que trabajamos de forma habitual usan SNPs (del inglés Single Nucleotide Polymorphisms), que son variantes de un único nucleótido en la secuencia del ADN. Si tenemos en cuenta que nuestro ADN está formado por un par de secuencias, cada una de un progenitor, entonces es trivial entender que cada SNP será, a efectos estadísticos, una variable categórica que toma 3 posibles valores, que se codifican de la siguiente manera:

PALABRAS CLAVE: Estadística; genética; clasificación; asociación; CART

- 1 = homocigoto en la variante más común (ej. AA)
- 2 = heterocigoto (ej. AT)
- 3 = homocigoto en la variante menos común (ej. TT)

Estos estudios de asociación enfermedad-genotipo toman generalmente decenas o incluso cientos de SNPs para su análisis sobre una muestra que incluye casos (enfermos) y controles (sanos) en una proporción generalmente de 1:1. El objetivo es detectar patrones diferenciales entre ambos grupos de individuos en el conjunto de SNPs. Para ello han sido usadas en la literatura científica diferentes técnicas estadísticas, tales como el MDR [3], los SVMs [4] o los Random Forests [2]. Nuestro interés se centrará aquí en el CART, un método de más fácil interpretación que los anteriores.

Árboles de clasificación (CART)

Los árboles de clasificación y regresión (CART, del inglés Classification and Regression Trees) fueron inicialmente desarrollados por [1], y son el resultado de un proceso inicial de partición recursiva y uno posterior de poda. Tal y como se puede apreciar en la figura 1, constan esencialmente de nodos, que se subdividen en ramas. El nodo al comienzo del árbol es llamado nodo raíz y contiene a la muestra completa de individuos, mientras que todos los demás están formados por subconjuntos de dicha muestra. Los nodos terminales son aquellos que no se dividen en ramas, por lo que también son llamados hojas.

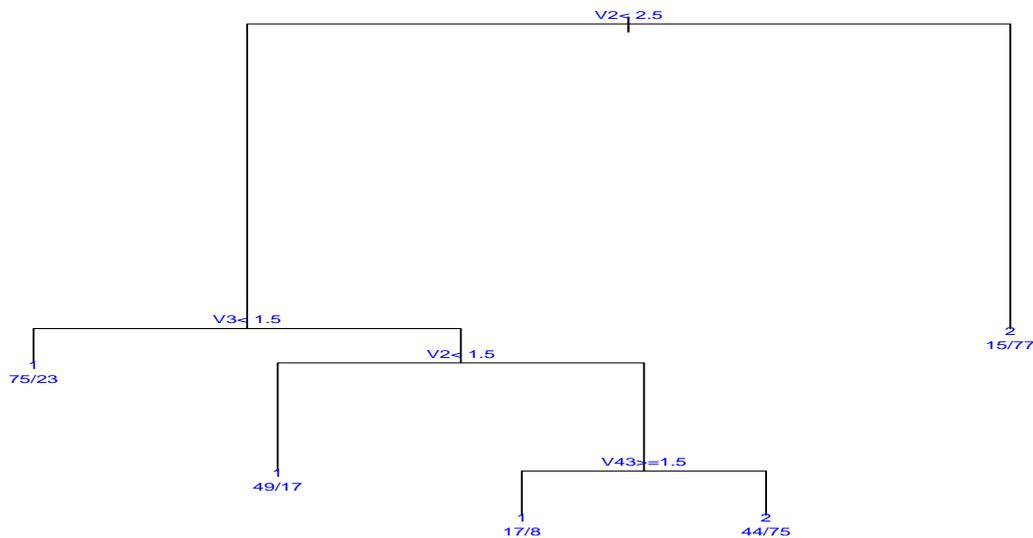


Figura 1: Árbol de clasificación

La fase inicial de construcción del árbol es la de crecimiento o partición recursiva. Dicha fase comienza ramificando el nodo raíz en dos nodos 'hijos' y repitiendo dicho proceso de forma recursiva sobre ellos. La ramificación de un nodo en dos nodos 'hijos' se lleva a cabo a partir de los valores de alguna de las covariables (SNPs). Esto se hace usando

algun tipo de medida de 'impureza' $i(t)$ de los nodos. La razón de que lo que se mida sea la 'impureza' es que, a través de la ramificación recursiva en los nodos, uno de los objetivos que se persigue con los árboles es construir subconjuntos o submuestras homogéneas ('puras') de individuos, al menos en los referente a aquellas covariables (SNPs) con un mayor poder discriminante. De ese modo, si una rama s en un nodo t envía una proporción p_r de los individuos a un nodo 'hijo' t_r y una proporción p_l a t_l , entonces la disminución en impureza de esa ramificación viene dada por

$$\Delta i(s, t) = i(t) - p_r i(t_r) - p_l i(t_l)$$

y tomaremos en un nodo t aquella rama s que maximice dicha disminución

$$s = \operatorname{argmax}_s \Delta i(s, t)$$

Así, cualquier árbol seguirá creciendo hasta que llegado un momento todos sus nodos estén formados por subconjuntos muestrales homogéneos (casos o controles).

La fase final de construcción del árbol es la de poda. Consiste, de forma resumida, en eliminar aquellas ramas cuyo efecto pudiera ser considerado superficial o cuya construcción en la fase de crecimiento estuviese basada en tamaños muestrales bajos.

Una de las principales ventajas de los árboles respecto a otros métodos de clasificación, además de su interpretabilidad, es que no es necesario imputar los datos perdidos previamente a la ejecución del método. Esto es debido a las 'ramas sustitutas' que los árboles construyen en la fase de crecimiento. La 'rama sustituta' \hat{s} de una rama s es aquella rama que, para un cierto subconjunto de individuos, imita de un modo más preciso la acción de s . Esta característica permite que los árboles se adapten mucho mejor que otras técnicas al campo de la genética, extremadamente proclive a la aparición de los datos perdidos o faltantes.

Bibliografía

- [1] L. Breiman, J. Friedman, C.J. Stone y R.A. Olshen; *Classification and Regression Trees*, Wadsworth cop., 1984.
- [2] A. Bureau, J. Dupuis, K. Falls, K.L. Lunetta, B. Hayward, T.P. Keith y P. Van Eerdewegh, *Identifying SNPs predictive of phenotype using random forests*, *Genet. Epidemiol.* **28** (2005), 171–182.
- [3] M.D. Ritchie, L.W. Hahn, N. Roodi, L.R. Bailey, W.D. Dupont, F.F. Parl y J.H. Moore, *Multifactor-dimensionality reduction reveals high-order interactions among estrogen-metabolism genes in sporadic breast cancer*, *Am. J. Hum. Genet.* **69** (2001), 138–147.
- [4] H. Schwender, M. Zucknick, K. Ickstadt, H.M. Bolt y The GENICA network, *A pilot study on the application of statistical classification procedures to molecular epidemiological data*, *Toxicol. Lett.* **151** (2004), 291–299.

Matemáticas y el protocolo de Kyoto

Laura Saavedra Lago

Departamento de Matemática Aplicada

15 de Mayo de 2007

Resumen

El protocolo de Kyoto sobre el cambio climático es un instrumento internacional que tiene por objeto reducir las emisiones de los gases que producen el calentamiento global como, por ejemplo, el CO_2 , el N_2O o el SO_2 . Estos gases junto con los compuestos NO_x son los que preocupan a las centrales térmicas en las que se quema carbón. En mayo de 2007, WWF/Adena presentó un informe que situaba a la central térmica de Endesa en As Pontes como la novena más contaminante de Europa. El trabajo que nosotros realizamos para esta central consiste en hacer simulaciones numéricas de la combustión de carbón pulverizado en el hogar de una nueva caldera, con distintos tipos de carbones y diferentes condiciones de funcionamiento de la caldera. Se pretende, por un lado, ver la concentración de contaminantes expulsados a la atmósfera y, por otro lado, analizar el funcionamiento de la caldera con los nuevos carbones de importación que se utilizan debido al agotamiento del carbón de la mina.

La nueva caldera es de tipo torre, con 6 molinos, y quemadores en disposición tangencial. Poseen 6 entradas de fuelóleo para el arranque y 6 entradas de aire secundario (OFA). Cada quemador se divide en cuatro niveles, cada uno de los cuales consta de dos entradas de gas/carbón intercaladas con tres entradas de aire.

Por otra parte, la caldera dispone en su parte inferior de una salida por la que se evacúan las partículas que caen hacia esa zona, procediéndose a su apagado. Así pues, cuando una partícula llega a esa zona, se elimina del dominio computacional perdiéndose toda su masa y energía.

De los 6 molinos existentes sólo 5 se encuentran en funcionamiento, haciéndose la selección del quemador que no está operativo de forma arbitraria. Que el quemador no esté operativo significa que no se introduce ni gas de recirculación ni carbón pero sí se sigue introduciendo aire. Un esquema de esta nueva caldera puede verse en la figura 1.

Las simulaciones se realizan utilizando el programa Fluent. En la figura 2 se muestra la concentración de CO_2 obtenida en una simulación.

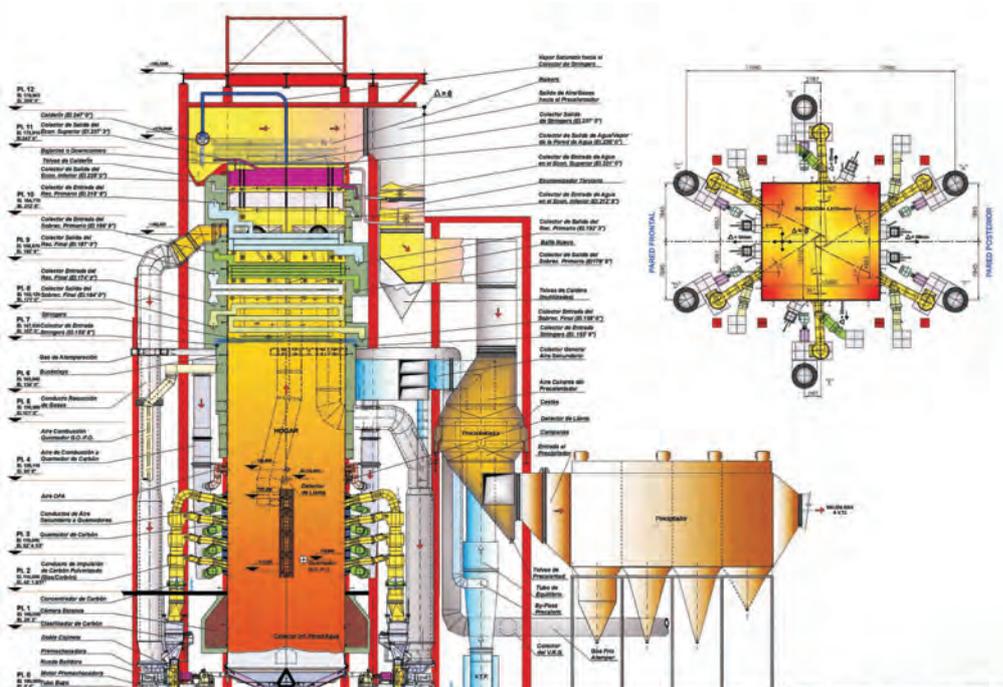


Figura 1: Esquema de la nueva caldera de Endesa

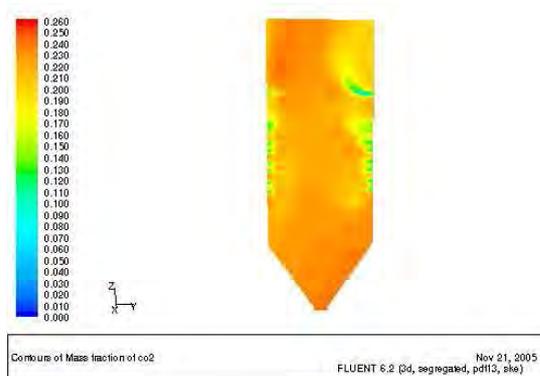


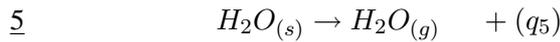
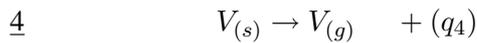
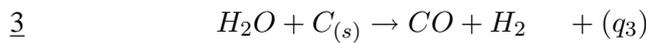
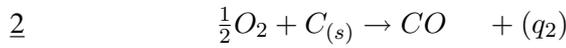
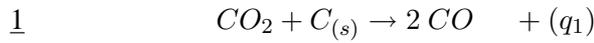
Figura 2: Concentración de CO_2

Actualmente trabajamos también en el estudio e implementación de nuevos modelos de combustión que se incorporarán a un programa desarrollado en el departamento llamado SC3D (Simulación de Calderas en 3 Dimensiones).

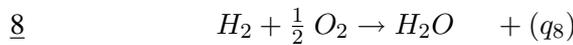
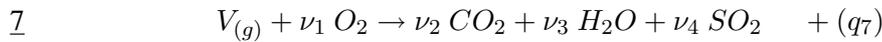
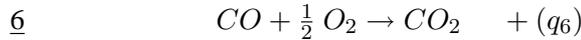
El modelo de combustión que usamos, que ha sido desarrollado en [2], trata los procesos simultáneos de evaporación de la humedad y la devolatilización, junto con las reacciones heterogéneas de gasificación del carbono fijo (“char”), que ocurren durante la combustión de una partícula de carbón. Este modelo presenta dos fases fuertemente acopladas. Este acoplamiento se debe, por un lado, a las fuentes que aporta la fase discreta a las ecuaciones de conservación de masa y energía del modelo para la fase gaseosa y, por otro lado, a que la fase gaseosa determina cómo se mueve y la atmósfera en la que se quema la partícula.

El modelo cinético simplificado que consideramos consiste en los siguientes procesos físico-químicos:

- en el interior de las partículas:



- en el gas que rodea las partículas:



La hipótesis fundamental de este modelo es la Hipótesis de Burke-Schumann, que dice que las reacciones en fase gaseosa o no ocurren o lo hacen con velocidad infinita en una llama de difusión. Encontramos de esta forma dos regiones en la fase gaseosa, Ω_O , donde no hay oxígeno, y Ω_F , donde no hay reactantes. Las reacciones en fase gaseosa se suponen controladas por la difusión y tienen lugar en una llama Γ_F que separa las dos regiones.

Se definen los números de Damköhler como

$$Da_i = (a^2/\mathcal{D}_e)B_i e^{-E_i/\mathcal{R}T_p}, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde a es el radio de la partícula, \mathcal{D}_e es el coeficiente de difusión a través de la partícula porosa, B_i y E_i son el prefactor de Arrhenius y la energía de activación de la reacción i , T_p es la temperatura de la partícula y \mathcal{R} es la constante universal de los gases. Estos números determinan la etapa de gasificación en la que se encuentra la partícula.

- Primera etapa: Reacciones de gasificación del char congeladas ($Da_i \ll 1$).
- Segunda etapa: Reacciones de gasificación del char infinitamente rápidas ($Da_i \gg 1$).
- Tercera etapa: Partícula inerte (la gasificación del char o bien no se ha iniciado o ha finalizado).

Según la etapa en la que nos encontremos debemos resolver distintos sistemas de ecuaciones no lineales, que combinaremos con la resolución de las ecuaciones de la fase gaseosa utilizando el método de los elementos finitos y características de orden 2.

El algoritmo de resolución consiste en lo siguiente:

1. Se leen los datos de la fase gaseosa y se calculan la velocidad y la posición de la partícula.
2. Se calculan las velocidades de volatilización y evaporación de la humedad.
3. Si todavía hay carbono fijo en la partícula ($r_c > 0$, siendo r_c el radio del núcleo de la partícula):
 - Si $Da_i < 1, i = 1, 2, 3$, se considera que las reacciones 1,2 y 3 no tienen lugar.
 - Si $Da_i > 1, i = 1, 2, 3$, las reacciones 1,2 y 3 se consideran infinitamente rápidas y se obtienen sus velocidades adimensionales y el radio r_c resolviendo sistemas de ecuaciones no lineales distintos según la región en la que se encuentre la partícula.
4. Se resuelve la ecuación de la energía para calcular T_p .
5. Se calculan las fuentes para la fase gaseosa según el caso.

Bibliografía

- [1] A. Bermúdez, *Continuum thermomechanics*. Birkhèauser, Verlag, Berlin, 2005.
- [2] A. Bermúdez, J. L. Ferrín y A. Liñán. *The modelling of the generation of volatiles, H_2 and CO , and their simultaneous diffusion controlled oxidation, in pulverised furnaces*. Pendiente de publicación.
- [3] S.P. Burke and T.E.W. Schumann, *textitDiffusion flames*. Ind. and Eng. Chemistry, 20:998-1004 (1928).
- [4] J. L. Ferrín. *Algunas contribuciones a la modelización matemática de procesos de combustión de carbón*. Tesis. Universidade de Santiago de Compostela, 1999.
- [5] L. Saavedra. *Simulación numérica de la combustión de partículas de carbón y simulación numérica en Mecánica de Fluidos*. Trabajo de Investigación Tutelado. Universidad de Santiago de Compostela, 2006.

Algunas curvas famosas

Silvia Vilariño Fernández

Departamento de Xeometría e Topoloxía

22 de Mayo de 2007

Resumen

En matemáticas, el concepto de curva intenta capturar la idea intuitiva de línea continua en una dimensión. Ejemplos sencillos y muy conocidos de curvas son la circunferencia, la elipse, la hipérbola o la parábola. Existen otros ejemplos de curvas de las que no se oye hablar con tanta frecuencia y que sin embargo tienen propiedades muy curiosas.

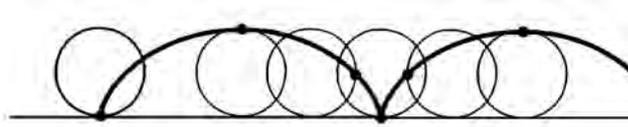
En este resumen se pretende dar una breve introducción sobre algunas de estas curvas. En concreto, se hablará de la familia de las cicloides. Las curvas de esta familia se caracterizan por estar descritas por las distintas posiciones que ocupa un punto de una circunferencia cuando rueda, sin deslizamiento, sobre otra curva (recta o circunferencia). Antes de describir alguna de las curvas de esta familia y sus propiedades vamos a recordar distintas maneras de definir curvas en el plano:

- En geometría, una curva \mathcal{C} es la imagen de un intervalo abierto I por una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, esto es, $\mathcal{C} = \{\alpha(t)/t \in I\}$. Se dice que α es una parametrización de \mathcal{C} .
- Una curva puede ser un lugar geométrico, esto es, el conjunto de los puntos del plano que cumplen una propiedad. Por ejemplo, la circunferencia se puede definir como el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro de la circunferencia.
- Una curva se puede definir por medio de una ecuación del tipo $f(x, y) = 0$, donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de dos variables. Por ejemplo, la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1 se puede definir mediante la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$ donde $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.
- En física, una curva se define como la trayectoria que sigue una partícula que se mueve en el plano. En esta descripción, en cada instante de tiempo t , la partícula se encuentra en un punto del plano que viene determinado por sus coordenadas (x, y) . Para indicar la dependencia del tiempo se representan por $(x(t), y(t))$.

PALABRAS CLAVE: cicloide, epicicloide, hipocicloide.

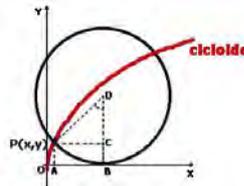
La cicloide

La cicloide es la curva plana que describe la trayectoria de un punto de una circunferencia (ruleta) cuando esta gira, sin deslizarse, sobre una recta.



Ecuaciones paramétricas

Para obtener las ecuaciones paramétricas de la cicloide, fijándonos en la siguiente figura, es suficiente tener en cuenta que, al no existir deslizamiento, el arco \widehat{PB} y la distancia rectilínea \overline{OB} coinciden.



Así, llamando R al radio de la circunferencia y α al ángulo en el centro, las coordenadas del punto P en nuestro sistema son:

$$\begin{aligned} x &= \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \widehat{PB} - \overline{PD} \cdot \text{sen } \alpha = R \cdot \alpha - R \cdot \text{sen } \alpha = R \cdot (\alpha - \text{sen } \alpha), \\ y &= \overline{PA} = \overline{DB} - \overline{DC} = \overline{DB} - \overline{PD} \cdot \text{cos } \alpha = R - R \cdot \text{cos } \alpha = R \cdot (1 - \text{cos } \alpha). \end{aligned}$$

Así se obtiene la ecuación en coordenadas paramétricas (parámetro α) de la cicloide:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot (\alpha - \text{sen } \alpha), \\ y &= R \cdot (1 - \text{cos } \alpha). \end{aligned}$$

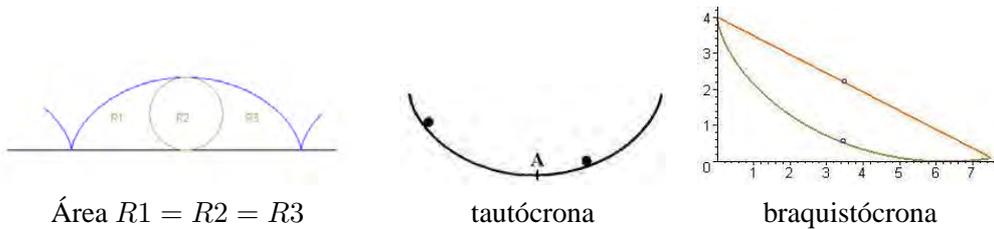
Propiedades de la cicloide

Esta curva fue estudiada por primera vez por Nicolás de Cusa y posteriormente por Mersenne (monje amigo de Descartes). En 1599 Galileo estudió esta curva y le dio el nombre con el cual se conoce hoy en día.

Algunas propiedades curiosas de esta curva son:

1. El área bajo un arco de cicloide es tres veces el de la ruleta. (G.P. de Roberval, 1634).
2. La longitud de un arco de cicloide es cuatro veces el diámetro de la ruleta. (Christopher Wren, 1658)
3. La cicloide tiene la propiedad de ser tautócrona, (Huygens, 1673), es decir, si un punto se desplaza a lo largo de la curva invertida, en caída libre, llegará al punto mínimo de la cicloide en un tiempo que no depende de la posición inicial del punto.

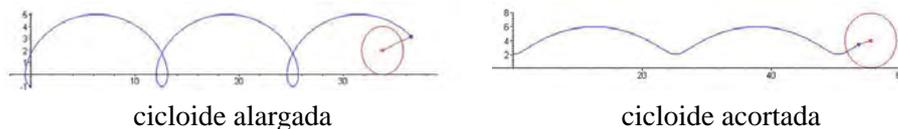
4. La cicloide tiene la propiedad de ser braquistócrona, es decir, es la curva de descenso más rápido en presencia de gravedad. Este problema fue planteado por Johann Bernoulli en el siglo XVII y resuelto por diferentes matemáticos de la época como Newton o Huygens.



Como aplicación de esta curva se puede decir que las cicloides se emplean en el diseño de los dientes de los engranajes (así lo propuso Gérard Desargues en el año 1630). También se puede comprobar en física que un péndulo que tenga por límites una curva cicloide es isócrona (período constante independiente de la amplitud) y el centro de gravedad del peso describe a su vez una cicloide.

Las trocoides

Las trocoides son una familia de curvas que se definen de modo análogo a la cicloide pero en esta ocasión el punto que describe la trayectoria no está sobre la ruleta sino a una distancia d del centro. Cuando la distancia d es mayor que el radio R de la ruleta se llama cicloide alargada y cuando es menor cicloide acortada. En la siguiente figura se observa la forma de estas curvas.



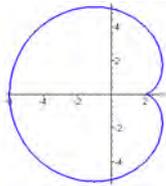
Epicloide e hipocicloide

La epicicloide es la curva generada por un punto P de una circunferencia de radio r cuando gira, sin deslizarse, por la cara exterior de otra circunferencia de radio R , con $r < R$. La curva resultante depende de la relación entre los radios de las dos circunferencias. Cuando $n = R/r$ es un número entero, la epicicloide se cierra al finalizar una vuelta. En este caso tenemos n cúspides (puntas o vértices).

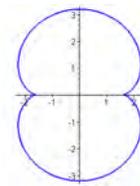
Las ecuaciones paramétricas de la epicicloide son:

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \alpha - r \cos \left(\frac{R+r}{r} \right) \alpha, \\ y = (R + r) \sin \alpha - r \sin \left(\frac{R+r}{r} \right) \alpha. \end{cases}$$

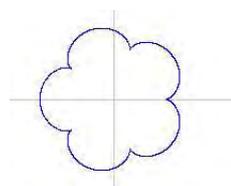
Algunos ejemplos de estas curvas se muestran en la siguiente figura:

**Cardioide**

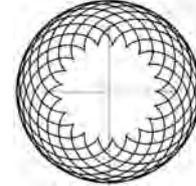
$$R=r$$

**Nefroide**

$$R=2r$$

**Ranunculus**

$$R=5r$$

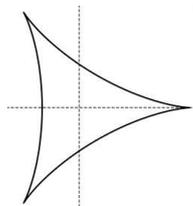


$$R=2.1r$$

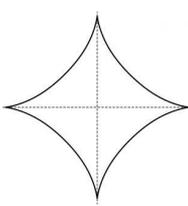
La hipocicloide se define de modo análogo a la epicicloide pero en esta ocasión la circunferencia ruleta se desplaza por el interior de la circunferencia base. Las ecuaciones paramétricas en esta ocasión están dadas por:

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos \alpha + r \cos \left(\frac{R-r}{r} \alpha \right), \\ y = (R - r) \sin \alpha - r \sin \left(\frac{R-r}{r} \alpha \right). \end{cases}$$

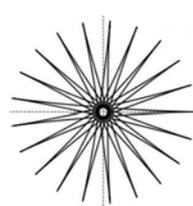
Algunos ejemplos de hipocicloides son :

**deltoide**

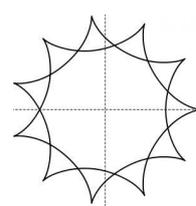
$$R=3r$$

**astroide**

$$R=4r$$



$$R=2.1r$$



$$R=5.5r$$

Por último, se puede decir que, al igual que en la cicloide, también se puede hablar de epicicloide (resp., hipocicloide) alargada y acortada, cuando el punto que describe la trayectoria no es de la ruleta sino exterior o interior a la misma, respectivamente. En este caso reciben el nombre de epitrocoides e hipotrocoides. Un instrumento de gran utilidad para dibujar estas curvas es el espirografo, que consta de una serie de ruedas de diversos tamaños, cada una de las cuales tiene distintos orificios para pasar la punta de un lápiz y dibujar distintas curvas. Una versión para computador de este aparato puede encontrarse en la página

<http://temasmaticos.uniandes.edu.co/Trocoides/paginas/espirografo.htm>

Bibliografía

- [1] C.S. China; *La cicloide. Una curva de mucho empaque.*
<http://personales.ya.com/casanchi/mat/cicloide01.pdf>
- [2] M. de Guzmán; *Aventuras Matemáticas. Unha ventana hacia el caos y otros episodios.* Ed. Pirámide.(2000)
- [3] M. de Guzmán; *Ecuaciones y demostraciones de las propiedades de la cicloide.*
<http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/GeometLab/ecua.htm>

Categorías en xeometría

Carlos Soneira Calvo

Departamento de Álgebra

24 de Maio de 2007

Resumo

Motivazóns

En xeometría alxébrica faise fincapé nos morfismos entre esquemas, que podemos entender coma figuras, porque tendo un esquema base as figuras poden interpretarse coma morfismos. Un morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ non só leva puntos en puntos, senón que tamén translada as correspondentes estruturas xeométricas dos esquemas, mediante os funtores imaxe directa e imaxe recíproca.

Imaxe directa: sexa $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_X$ Módulo e $U \in Y$ un aberto, defínese

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

que é un \mathcal{O}_Y Módulo.

Imaxe recíproca: sexa $\mathcal{G} \in \mathcal{O}_Y$ Módulo e $V \in X$ un aberto, defínese

$$f^*\mathcal{G}(V) = f^{-1}\mathcal{G}(V) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_X(V)$$

que é un \mathcal{O}_X Módulo.

Verifícase que f^* é adxunto pola esquerda de f_* . Estes funtores presentan a eiva de non seren exactos, en concreto a imaxe directa é exacta á dereita e a inversa exacta á esquerda, polo que hai unha perda de información cando lle aplicamos un destes funtores a unha sucesión exacta. A información recupérase achando sucesións exactas tales que nos seus extremos coincidan coas dadas, pra poder dar conta dos conúcleos e os núcleos que perdemos na sucesión de partida: A sucesión exacta longa asociada a unha sucesión exacta curta dada. Clasicamente, a solución á cuestión dou-se mediante resolucións flasgas (res. chás) de feixes de módulos, construíndo os chamados funtores derivados n -ésimos. Isto fai que aparezan en escea, e sexan esenciais, os complexos de feixes e os morfismos entre complexos. O enfoque moderno da cuestión soluciona o problema establecendo unhas categorías onde viven os obxectos e morfismos a estudar, e onde a información relevante pra o noso problema sexa a que se ten en conta, é dicir, unhas categorías que criben a información e fagan fincapé nas estruturas. Estas son as categorías derivadas.

Construción da categoría derivada

Faremos a construción en varios pasos. Partimos dunha categoría abelián \mathcal{A} , e denotamos por $\mathbb{K} = \mathbb{K}(\mathcal{A})$ a categoría homotópica de \mathcal{A} , isto é, a que ten coma obxectos os complexos de obxectos de \mathcal{A} e coma morfismos as clases de homotopía de morfismos de complexos. Xa que logo, as igualdades considéran-se agás homotopía e as conmutatividades dos diagramas tamén.

Dado un complexo C^\cdot , posto que por definición de complexo de cocadeias as diferenciais verifican $d^n d^{n-1} = 0$, ten-se que d^{n-1} induce:

$$C^{n-1} \longrightarrow \ker d^n,$$

que ten coma conúcleo a cohomoloxía $H^n(C^\cdot)$. Un morfismo de complexos $u : A^\cdot \longrightarrow B^\cdot$ induce aplicacións:

$$H^n(u) : H^n(A^\cdot) \longrightarrow H^n(B^\cdot), \quad n \in \mathbb{Z}$$

de tal xeito que estas aplicacións só dependen da clase de homotopía de u , xa que se dous complexos son homótopos daquela as súas homoloxías son isomorfas. Isto define unha familia de funtores

$$H^n : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{A}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Diremos que u é un quasi-isomorfismo se a aplicación $H^n(u)$ é un isomorfismo pra todo $n \in \mathbb{Z}$.

Estamos agora en condicións de definir a categoría derivada de \mathcal{A} , notándoa $\mathbb{D}(\mathcal{A})$ ou \mathbb{D} , coma aquela que ten por obxectos os mesmos ca \mathbb{K} , mais na que cada morfismos $A^\cdot \longrightarrow B^\cdot$ é a clase de equivalencia f/s dun par (s, f)

$$A \longleftarrow^s C^\cdot \longrightarrow^f B^\cdot$$

de morfismos en \mathbb{K} , con s un quasi-isomorfismo, isto é, un morfismo de cocadeias que induce un isomorfismo en cohomoloxía, onde dous pares (s, f) e (s', f') son equivalentes se existe un terceiro par (s'', f'') e un diagrama conmutativo en \mathbb{K}

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C^\cdot & & \\
 & \swarrow s & \uparrow & \searrow f & \\
 A^\cdot & \xleftarrow{s''} & C''^\cdot & \xrightarrow{f''} & B^\cdot \\
 & \swarrow s' & \downarrow & \searrow f' & \\
 & & C'^\cdot & &
 \end{array}$$

A composición de dous morfismos $f/s : A^\cdot \longrightarrow B^\cdot$ e $f'/s' : B^\cdot \longrightarrow B'^\cdot$ é $f'g/st$, onde (t, g) é un par tal que $ft = s'g$. Cando sempre existen un par (g, t) verificando a

igualdade $ft = s'g$ dise que a categoría ten cálculo de fraccións. No noso caso, a categoría \mathbb{K} ten cálculo de fraccións, feito que se deduce de que \mathbb{K} verifica os axiomas de categoría triangulada.

Nótese que se s é un quasi-isomorfismo, daquela $(s/1)$ pasa a ser un isomorfismo en \mathbb{D} , pois $(s/1)(1/s) = 1 = (1/s)(s/1)$; logo en \mathbb{D} estamos a invertir formalmente os quasi-isomorfismos. Existe un funtor natural $Q : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{D}$ con $Q(A^\cdot) = A^\cdot$ pra todo obxecto de \mathbb{K} , e $Q(f) = f/1_{A^\cdot}$ pra todo $f \in \mathbb{K}(A^\cdot \rightarrow B^\cdot)$. Se f é un quasi-isomorfismo daquela $Q(f) = f/1_{A^\cdot}$ é un isomorfismo con inverso $1_{A^\cdot}/f$, e neste senso Q é universal: calquera funtor $Q' : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{E}$ que leve quasi-isomorfismos en isomorfismos factorízase de xeito único vía Q , é dicir, existe un único funtor $\tilde{Q}' : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{E}$ con $Q' = \tilde{Q}'Q$ tal que $\tilde{Q}'(A^\cdot) = Q'(A^\cdot)$ e $\tilde{Q}'(f/s) = Q'(f)Q'(s)^{-1}$. O par (\mathbb{D}, Q) está xa que logo determinado agás isomorfismo canónico. Ademais, calquera morfismo $Q'_1 \rightarrow Q'_2$ de funtores nesas condicións esténdese de xeito único a un morfismo $\tilde{Q}'_1 \rightarrow \tilde{Q}'_2$. Daquela, a composición con Q dá, pra calquera categoría \mathbb{E} un isomorfismo da categoría de funtores $\text{Hom}(\mathbb{D}, \mathbb{E})$ na subcategoría chea de $\text{Hom}(\mathbb{K}, \mathbb{E})$ que ten por obxectos os funtores que transforman quasi-isomorfismos en \mathbb{K} en isomorfismos en \mathbb{E} . Véxase a analoxía cos aneis de fraccións da álgebra conmutativa.

Pra rematar, nótese-se que hai un isomorfismo da categoría de partida \mathcal{A} na subcategoría chea de $\mathbb{D}(\mathcal{A})$ que leva calquera obxecto X de \mathcal{A} no complexo X^\cdot que é X en degraos cero e 0 nos outros degraos, e que leva o morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{A} en $d/1_X$ onde $f^\cdot : X^\cdot \rightarrow Y^\cdot$ é a clase de homotopía que é f en degraos cero e cero nos outros. Posto que hai un isomorfismo funtorial natural $Z \simeq H^0(Z^\cdot)$ con $Z \in \mathcal{A}$, acádase unha bixección entre os morfismos entre X e Y pensados en \mathcal{A} e os morfismos entre X^\cdot e Y^\cdot pensados en $\mathbb{D}(\mathcal{A})$.

Bibliografía

- [1] J. A. Dieudonné A. Grothendieck, *Eléments de Géométrie Algébrique*, Springer-Verlag *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen* **166** (1971).
- [2] J. Lipman; *Notes on derived functors and Grothendieck duality*, na rede.
- [3] C. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press *Cambridge studies in advanced mathematics* **38** (1994).

Regresión non paramétrica funcional

Adela Martínez Calvo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

5 de Xuño de 2007

Resumo

Cando se fala de estimación en Estatística, o primeiro que se lle vén a un á cabeza é estimar a media dunha poboación, a súa varianza, os seus cuantiles..., é dicir, estimar algo de natureza real ou como moito vectorial. Sen embargo, ás veces o que nos interesa é estimar unha curva f pertencente a un espazo de dimensión infinita, como a función de densidade ou a función de regresión. Na estimación de curvas, como na estimación de parámetros finitodimensionais, preséntansenos dúas vías:

Estimación paramétrica: Suponse que $f \equiv f_{\theta_0} \in F_{\theta} = \{f_{\theta}, \theta \in \Theta\}$ con $\Theta \in \mathbb{R}^p$ e límitase o problema a estimar unicamente o parámetro θ_0 . Isto é o que se fai cando, para estimar a densidade dunha poboación descoñecida, supoñemos que é normal e simplemente estimamos a media e a varianza.

Estimación non paramétrica: Non se esixe que f pertenza a ningunha familia paramétrica, senón que só se lle pide que verifique certas condicións de regularidade. Por exemplo, cando intentamos aproximar a densidade mediante un histograma.

Unha ventaxa clara da estimación paramétrica é que pasamos de estimar unha curva (dimensión infinita) a estimar un parámetro en Θ (dimensión finita). Sen embargo, este enfoque pode ser moi restrictivo e resultar nefasto se $f \notin F_{\theta}$. Por isto, aínda que máis complexa, a estimación non paramétrica é a mellor opción cando non temos información que nos garanta que a curva pertence a unha familia paramétrica dada. Centrarémonos pois nos estimadores non paramétricos de curvas, en concreto nos estimadores tipo núcleo.

Estimación non paramétrica da densidade

Sexa X unha variable aleatoria real (v.a.r.), con función de densidade f , e sexa $\{X_i\}_{i=1}^n$ unha mostra aleatoria simple de X . O estimador non paramétrico máis sinxelo de f , e quizais o máis popular, é o *histograma*. Para a súa construción, elíxese un punto inicial x_0 , divídese o soporte en intervalos (*bins*) de lonxitude h , $B_j = [x_0 + (j-1)h, x_0 + jh)$ con $j \in \mathbb{Z}$, e asígnaselle a cada bin o valor $\frac{n_j}{nh}$, denotando por n_j ao número de observacións

que hai no bin j . De xeito máis formal, estaríamos a estimar a densidade por

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} I(X_i \in B_j) I(x \in B_j)$$

onde $I(y \in Y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in Y \\ 0 & \text{noutro caso} \end{cases}$. A pesar de ser un estimador moi “intuitivo”, o histograma presenta varios problemas: non é unha función continua, asigna o mesmo valor a todos os x do mesmo bin e precisa dunha elección previa dos valores de x_0 e h .

Para tratar de superar estes defectos tomemos bins de lonxitude $2h$ e recordemos que o histograma xurde da idea de estimar a densidade nun punto x por

$$\frac{\#\{\text{Observacións que caen nun intervalo pequeno que contén a } x\}}{2nh}.$$

Polo tanto poderíamos evitar a elección dun x_0 sen máis que

$$\frac{\#\{\text{Observacións que caen nun intervalo pequeno centrado en } x\}}{2nh}$$

e, sendo $K(u) = \frac{1}{2}I(|u| \leq 1)$, estimar f por

$$\hat{f}_h(x) = \frac{\#\{X_i \in [x-h, x+h]\}}{2nh} = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h}\right).$$

Deste xeito, K asígnalle peso $\frac{1}{2}$ a cada X_i observado que diste de x menos de h . Se o que queremos é que se lle asigne maior peso ás observacións máis próximas a x e menos ás máis apartadas, habería que considerar outro tipo de funcións K , como por exemplo:

- $K(u) = (1 - |u|)I(|u| \leq 1)$ (triangular),
- $K(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2)I(|u| \leq 1)$ (Epanechnikov),
- $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}u^2)$ (gausiano),...

Xurde así o *estimador tipo núcleo*, que adopta a forma xeral

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x-X_i)$$

sendo $K_h(u) = \frac{1}{h}K\left(\frac{u}{h}\right)$. K , que acostuma ser unha función de densidade, recibe o nome de *función núcleo*, e h o de parámetro de suavizado ou *bandwidth*. O estimador tipo núcleo mellora os resultados obtidos co histograma xa que é unha función continua e non precisa dun punto inicial x_0 . Sen embargo, mantense o problema da elección do h (como se pode ver en [3], a elección do parámetro de suavizado adecuado é unha cuestión sumamente complexa posto que o sesgo do estimador crece segundo se incrementa h e a varianza aumenta conforme decrece h).

Estimación non paramétrica da regresión

Supoñamos agora que temos dúas v.a.r. X e Y con funcións de densidade f_X e f_Y , respectivamente. Se consideramos estas dúas variables como un vector aleatorio (X, Y) , podemos traballar coa función de densidade bidimensional asociada f (nótese que empregaremos a notación f para a densidade conxunta e f con subíndice X ou Y para as correspondentes marxinais).

Unha cuestión de grande interese en moitos campos da ciencia é establecer a relación existente entre X e Y , isto é, atopar unha función m , chamada función de *regresión*, tal que $Y = m(X) + \epsilon$. Neste caso, X denomínase variable *independente, explicativa* ou *regresora*, Y recibe o nome de variable *dependente* e ϵ é unha v.a.r, habitualmente con media 0 e varianza σ^2 , chamada *erro*. Ademais, sábese que $m(x) = \mathbb{E}(Y|X = x) = \int y \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy = \frac{\int y f(x,y) dy}{f_X(x)}$.

Sendo $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ independentes e idénticamente distribuídos a (X, Y) , f e f_X poden estimarse cos estimadores tipo núcleo $(\hat{f}_X)_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_h(x - X_j)$ e $\hat{f}_{h,g}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i) K_g(y - Y_i)$. Entón, se K é simétrico respecto a orixe, $\int y \hat{f}_{h,g}(x, y) dy = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i) \int y K_g(y - Y_i) dy = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i) Y_i$, e obtemos o estimador de *Nadaraya-Watson* (1964)

$$\hat{m}_h(x) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i) Y_i}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_h(x - X_j)}$$

(nótese que $\hat{m}_h(x) = \sum_{i=1}^n W_{hi}(x) Y_i$ con $W_{hi}(x) = \frac{K_h(x - X_i)}{\sum_{j=1}^n K_h(x - X_j)}$, polo que este estimador vén sendo unha media ponderada dos valores de Y observados). Como no caso da densidade, a selección dunha h que equilibre a relación sesgo-varianza volve a ser crucial na construción deste estimador.

Estimación non paramétrica da regresión funcional

Na actualidade en diferentes campos das ciencias aplicadas (enxeñería medioambiental, química, medicina, econometría,...) é habitual atoparnos con variables aleatorias observadas en continuo, polo que se pode considerar que o que se observa é realmente a realización discretizada dunha variable funcional (en [2] pódense ver exemplos de datos funcionais no campo financeiro, biométrico,...). Sexa entón $X = \{X(t), t \in T\}$ unha variable aleatoria funcional nun espazo de Hilbert H e Y unha v.a.r. tales que

$$Y = m(X) + \epsilon$$

con $m : H \rightarrow \mathbb{R}$ un operador funcional e ϵ unha v.a.r. con media 0 e varianza σ^2 . Sendo d unha semimétrica en H , en [1] proponse estimar m mediante a extensión natural do estimador de Nadaraya-Watson

$$\hat{m}_h(x) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(d(x, X_i)) Y_i}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_h(d(x, X_j))}$$

con K núcleo asimétrico e $h > 0$ real. Neste novo contexto non só xurde o problema de elixir h , senón que tamén teríamos que elixir a semimétrica d . En [1] amósase o comportamento deste estimador co seguinte exemplo.

Exemplo 1. Téñense 215 pezas moi finas de carne e obsérvanse cadansúa curva espectrométrica correspondente ás medidas de absorbancia en 100 lonxitudes de onda entre 850nm e 1050nm (X_i) representadas na primeira gráfica da Figura 1 (Nota: en espectroscopía, a absorbancia vén dada por $-\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ onde I_0 é a intensidade da luz antes de atravesar a mostra e I é a intensidade da luz unha vez que pasou por ela). Para cada peza de carne calcúlase o seu contido en graxa (Y_i) mediante un proceso analítico químico. Como este proceso é complexo, interesa atopar a relación entre a curva espectrométrica e o contido en graxa que nos permita obter Y en función de X sen ter que analizar cada peza de carne. Para isto, constrúese unha mostra de entrenamiento (learning sample) coas curvas e os contidos en graxa de 160 unidades de carne, e con elas o estimador $\hat{\eta}_h$, e déixanse as outras 55 unidades para testar o procedemento (testing sample). Na segunda gráfica da Figura 1 represéntanse os valores Y_i destas 55 pezas de carne fronte os valores $\hat{\eta}_h(X_i)$ que devolve o estimador.

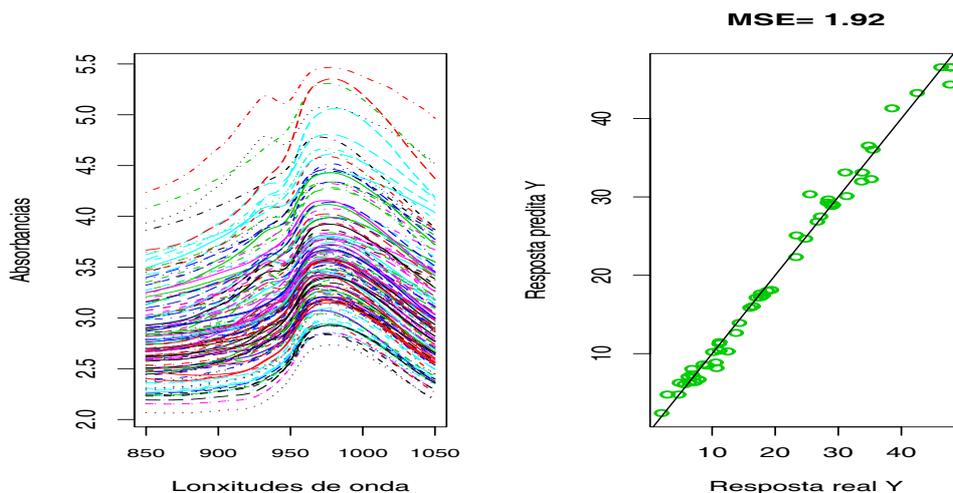


Figura 1: Curvas espectrométricas e resultados

Bibliografía

- [1] F. Ferraty, P. Vieu; *Nonparametric Functional Data Analysis: Theory and Practice*, Springer, 2006.
- [2] J.O. Ramsay, B.W. Silverman; *Functional Data Analysis*, Springer, 2005.
- [3] M.P. Wand, M.C. Jones; *Kernel Smoothing*, Chapman and Hall, 1995.

Curvatura e Relatividade

Miguel Brozos Vázquez

Departamento de Xeometría e Topoloxía

12 de Xuño de 2007

Resumo

O obxectivo desta charla e, en consecuencia, do presente resumo é achegármolos de xeito intuitivo á noción de curvatura en dimensión superior a dous. Como aplicación directa estudamos o significado das Ecuacións de Campo de Einstein.

A curvatura dende un punto de vista xeométrico.

O contexto no que nos situamos é unha variedade Riemanniana (M, g) de dimensión n , con n en principio maior ou igual que 2. Isto é dicir que temos unha variedade M dotada en cada punto p , dun produto interior g_p para o seu espazo tanxente T_pM . Deste xeito, g é un tensor métrico que permite medir lonxitudes de curvas na variedade ou calcular o ángulo que forman dúas curvas ó cortarse. Falando de curvas, recordemos que a curvatura dunha curva no espazo euclídeo vén dada pola aceleración dunha parametrización por lonxitude de arco. Esta noción correspóndese coa idea intuitiva que temos: unha liña recta non ten curvatura ningunha e terá máis curvatura canto máis *vire con respecto a sí mesma*.

Cando analizamos o concepto de curvatura en dimensión 2, máis concretamente en superficies embebidas no espazo euclídeo, podemos empregar a idea anterior de curvatura dunha curva e ver a curvatura de Gauss como o produto das curvaturas principais. Outro achegamento á curvatura en superficies é o dado pola relación entre a área de discos xeodésicos. É claro que unha superficie dicimos que é chá se a súa xeometría é a dun plano no espazo. Un xeito moi sinxelo de visualizar a diferenza entre curvatura positiva e negativa é o seguinte exemplo: se collemos un casquete esférico (por exemplo media pela de laranxa) e o aplastamos, vemos que este rompe, o cal da idea de que a súa área é menor que a dun disco no plano que teña o mesmo radio. Isto corresponde á idea de curvatura positiva que ten a esfera. Análogamente, se collemos unha saia con voo e a estiramos sobre unha mesa, vemos que aquela ten máis área que esta; correspondéndose este feito coa noción de curvatura negativa.

Unha das dificultades que afrontamos ao considerarmos o concepto de curvatura en dimensión superior (maior que dous), é a perda de intuición. Sen embargo, de xeito similar a como un pode definir a curvatura de Gauss de superficies en termos da curvatura nas direccións principais en cada punto da superficie, en dimensión superior empregaremos a curvatura de Gauss. Farémolo como segue: sexa p un punto de M e T_pM o espazo tanxente

en p . Tomemos dous vectores x e y en T_pM que xeneran un plano. Definimos a curvatura seccional K_{xy} en función da curvatura de Gauss da superficie que é subvariedade de M e ten por plano tanxente o xenerado por x e y . A curvatura seccional K definida deste modo, asocia unha curvatura a cada plano do espazo tanxente. Por conveniencia, en vez de traballar con esta idea de curvatura seccional, linearizamos esta aplicación K para obter un tensor R de tipo $(0, 4)$, é dicir,

$$R : T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

é unha aplicación linear, que ademais se define en función de K como

$$R(x, y, x, y) = K_{xy}$$

para calesquera vectores unitarios x e y . Este tensor curvatura R contén a información de todas as curvaturas seccionais e é o que coñecemos como *tensor curvatura*. Ademais o tensor R proporciona a comodidade das aplicacións lineares pero, como contrapartida, por ter 4 argumentos distintos faise pouco manexable.

A mencionada complexidade do tensor curvatura xustifica que en moitas ocasións se traballe con outros tensores ou operadores máis sinxelos que se obteñen de R . A forma máis habitual de obter tensores máis sinxelos é contraendo, de modo similar a como se calcula a traza dunha matrix linear, pero en temos da métrica g . A seguinte contracción de R dá lugar ó tensor de Ricci ρ , e a contracción desta á curvatura escalar:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n R(e_i, x, e_i, y), \quad \tau = \sum_{i=1}^n \rho(e_i, e_i),$$

onde $\{e_i\}$ é unha base ortonormal con respecto a g .

Tanto o tensor de Ricci como a curvatura escalar encerran certa información da curvatura da variedade, se ben, como é natural, non toda, pois ó contraermos obtemos un tensor máis simple a costa de sacrificar certa información. A continuación veremos a descomposición do tensor curvatura, isto permitirá ver máis concretamente o tipo de información codificada nestes dous tensores. Para dar esta descomposición faremos uso do chamado produto de Kulkarni-Nomizu, que se define para dous tensores A e B de tipo $(0, 2)$ como:

$$A \bullet B(x, y, z, w) = A(x, z)B(y, w) + A(y, w)B(x, z) - A(x, w)B(y, z) - A(y, z)B(x, w).$$

Temos pois que a curvatura se descompón como $R = U \oplus Z \oplus W$, onde

$$U = \frac{\tau}{n(n-1)} g \bullet g, \quad Z = \frac{1}{n-2} \left(\rho - \frac{\tau}{n} g \right) \bullet g, \quad W = R - U - Z.$$

Estas tres compoñentes teñen un significado xeométrico claro. A compoñente U é, como vemos, é un múltiplo da curvatura escalar. Ademais U ten curvatura seccional constante, é dicir, para calquera x e y tense que $K_{xy} = k$ para unha certa constante k .

A compoñente Z non ten un significado tan claro a simple vista, pero encerra a información da parte sen traza do tensor de Ricci. O feito máis importante é que $Z = 0$ se e

só se o tensor de Ricci é un múltiplo da métrica; o que é equivalente a que $\rho = \frac{\tau}{n}g$. As variedades que cumpren esta condición denomínanse *variedades Einstein* e xogan, como veremos, un papel fundamental en cosmoloxía.

Por último, a compoñente W defínese como a parte restante do tensor curvatura. A pesar da súa complexa expresión se a escribimos explícitamente, o seu significado xeométrico é relativamente sinxelo para dimensión maior ou igual que catro, pois $W = 0$ se e só se a variedade é localmente conformemente equivalente ao espazo euclídeo (curvatura cero).

A curvatura en cosmoloxía: a ecuación de Einstein

Centrémonos agora nos modelos cosmolóxicos que describen o Universo. Neste caso tratamos con espazo-tempos, que son variedades de Lorentz (a métrica da variedade ten signatura $(1, n - 1)$, é dicir, unha dirección ten norma negativa e no seu espazo ortogonal a métrica é definida positiva) de dimensión catro. Nesta situación aplícase do mesmo modo a descrición que demos anteriormente do tensor curvatura.

Unha das grandes proezas de Albert Einstein consistiu en comprender o feito de que a xeometría do Universo determina fenómenos físicos como pode ser a gravidade. Por este motivo temos oído, probablemente en numerosas ocasións, que a gravidade non é máis que a curvatura do espazo-tempo. En 1915 Einstein presentou as que se coñecen como *ecuacións de campo de Einstein*, que relacionan a xeometría coa enerxía e o momento da materia e que se expresan como:

$$\rho - \frac{1}{2}g = \frac{8\pi G}{c^4}T, \quad (1)$$

onde G é a constante de gravitación, c é a velocidade da luz no baleiro e T é un tensor tipo $(0, 2)$ que se denomina tensor enerxía-momento. Así, vemos que o termo da esquerda da ecuación encerra a información relativa á xeometría da variedade en termos do tensor de Ricci, a curvatura escalar e a métrica, mentres que a parte dereita contén información física a través do tensor enerxía-momento T .

Entre as propiedades que cumpre o tensor T , e que permitiron atopar a expresión anterior da ecuación, están as seguintes:

- $T(x, x) \geq 0$ para todo vector x temporal, ou
- $div T = 0$,

entre outras, que teñen un significado físico concreto e que non entraremos a analizar aquí. Observemos que o tensor T dado pola ecuación (1) é un múltiplo da métrica g se e só se ρ é un múltiplo da métrica. Esta situación correspóndese coa descrita anteriormente para as variedades Einstein, que teñen unha importancia relevante á hora de buscar a solución da ecuación de campo por supoñer unha simplificación considerable das mesmas. Isto xustifica que naquela ocasión denominásemos por Einstein a este tipo de variedades.

Resultou que as ecuacións dadas anteriormente non admiten solucións estáticas e espacialmente homoxéneas e isotrópicas. Dito doutro xeito, se asumimos as ecuacións anteriores, non é posible que o Universo sexa estático cun espazo que ten a mesma aparencia

en todo punto. Calquera destas dúas condicións se entendía natural naquela época, o que levou a Einstein a modificar a ecuación (1) introducindo a chamada *constante cosmolóxica*, que transformaba (1) en:

$$\rho - \frac{1}{2}g + \Lambda g = \frac{8\pi G}{c^4}T. \quad (2)$$

Isto supuxo un novo cambio relevante, pero a verdade é que, como sucede tantas veces na historia da Ciencia, tivo que vir alguén que botara por terra os feitos asumidos sen proba algunha e, neste caso, mostrar que o Universo non ten por que ser estático. Así, numerosas solucións xorderon das ecuacións de Einstein con constante cosmolóxica cero e, aínda hoxe en día non está claro se debe ou non debe ser cero. Noutras verbas, o debate segue aberto sobre se as ecuación adecuadas son (1) ou (2).

Bibliografía

- [1] J. M. Senovilla, *La Cosmología y los matemáticos*, Gaceta de la RSME **8** (2005), 597–636.