

#CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

## Dificultades de estudiantes del Grado de Magisterio en Educación Primaria en actividades de visualización espacial

Alberto Arnal-Bailera, Carmen Julve-Tiestos (Departamento de Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad de Zaragoza)

Resumen:

Presentamos los primeros resultados en el análisis de una serie de actividades de visualización llevadas a cabo con estudiantes de Magisterio de la Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza. Nuestros estudiantes se enfrentan a la labor de decidir si un hexamante (6 triángulos equiláteros iguales unidos entre sí por un lado) se corresponde con un desarrollo plano de la bipirámide o no sin la ayuda de material. Posteriormente se plantea la misma cuestión con material tipo polydron. Se realiza un análisis cuantitativo de la corrección de las respuestas y cualitativo de las explicaciones dadas a las mismas. Se identifican dificultades relacionadas con las representaciones estereotipadas de la bipirámide y con falta de capacidad de visualizar simultáneamente dos rotaciones, entre otras.

Palabras clave:

Visualización espacial, geometría, maestros en formación.

### **1. Objetivos o propósitos:**

---

Los objetivos de nuestro estudio son, primeramente, describir las dificultades experimentadas por nuestros alumnos a la hora de recomponer mentalmente poliedros a partir de supuestos desarrollos planos de los mismos sin disponer de material de apoyo. En segundo lugar, estudiar la capacidad de reflexión sobre sus propios procesos una vez que disponen de material para repetir la experiencia.

### **2. Marco teórico:**

---

La visualización espacial es un tópico que forma parte de los currículos de Primaria habitualmente (NCTM, 2000; MECD, 2014) y ha sido objeto de investigación en didáctica de las matemáticas (Gutiérrez, 1996).

Según Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996), "se entiende visualización como la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual o viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra".

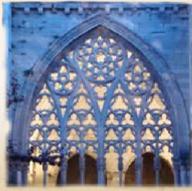
Duval (1998) distingue tres procesos de visualización:

- *Aprehensión perceptiva*: identificación simple de una configuración.
- *Aprehensión discursiva*: asociación de la configuración identificada con enunciados de tipo matemático.

---

Organizado por:





#CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

- *Aprehensión operativa*: modificación (física o mental) de la configuración inicial. Esta puede ser *de cambio figural*, añadiendo elementos geométricos o *de reconfiguración*, reordenando los elementos disponibles.

El razonamiento configural es el razonamiento caracterizado por la coordinación entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa (Clemente, Llinares y Torregrosa, 2017). Esta coordinación se refiere a las acciones del estudiante cuando razona –resuelve problemas– en Geometría. Los autores subrayan, desde el análisis del razonamiento configural, la importancia de la visualización en la resolución de problemas geométricos en los que se proporciona una configuración geométrica.

### 3. Metodología:

---

El estudio realizado es de carácter exploratorio con finalidad descriptiva. La investigación es de tipo mixto combinando un enfoque cuantitativo con el análisis de datos de tipo cualitativo.

En la tarea que deben llevar a cabo, nuestros estudiantes reciben la información en forma de supuestas representaciones planas de los desarrollos de una biperámide triangular y tienen que transformarlas en una representación tridimensional sin apoyo de ningún material, salvo las anotaciones que quieran realizar sobre sus hojas de trabajo. (Ver Imagen 1). Tras recogerles las respuestas anteriores, se les reparten triángulos de plástico (tipo polydron) para que se reafirmen o cambien sus respuestas iniciales. En ambos casos se les pide que expliquen sus respuestas.

Desde el marco teórico anteriormente expuesto, las actividades de transformación mental o física desde la representación plana a la representación tridimensional serían actividades de aprehensión operativa de reconfiguración y las actividades de explicación de lo realizado serían actividades de aprehensión discursiva.

Esta tarea forma parte de una secuencia más amplia que se llevó a cabo con 24 estudiantes de Magisterio de Educación Primaria matriculados en la asignatura "Didáctica de la Geometría" en mayo de 2015.

En relación con los objetivos señalados anteriormente, las variables que se han observado, y sobre las que se centrará principalmente nuestro análisis son las siguientes:

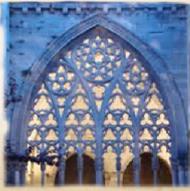
- Acierto a la hora de determinar si un hexamante es o no desarrollo plano de la biperámide, sin utilizar material.
- Explicación dada sobre el proceso que ha llevado a dar dicha respuesta.
- Acierto a la hora de determinar si un hexamante es o no desarrollo plano de la biperámide, utilizando material.
- Reflexión acerca de las diferencias entre ambos procesos.

Las denominaciones en castellano de los hexamantes (Grupo Alquerque, 2001) son: Barra, corona, esfinge, mariposa, murciélago, palo, pistola, serpiente,

---

Organizado por:





#CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

hexágono, langosta, yate y zapato. Los ocho primeros son desarrollos planos de la bipirámide mientras que los cuatro últimos no lo son.

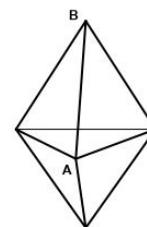
**TAREA**

Las siguientes figuras están formadas mediante la unión de seis triángulos equiláteros, se les denomina hexamantes.

Barra	Corona	Esfinge
Hexágono	Langosta	Mariposa
Murciélago	Palo de golf	Pistola
Serpiente	Yate	Zapato

Algunas de ellas, mediante plegado, pueden transformarse en una bipirámide triangular como esta.

En general, una bipirámide es un poliedro que puedes imaginar como dos pirámides iguales unidas por su base.



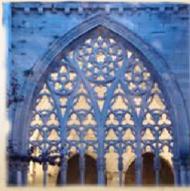
A-Sin material – Hoja de respuestas 1: Determina cuáles de los 12 hexamantes son desarrollos planos de la bipirámide triangular. Debes dar una explicación por escrito del proceso que sigas. Para ello te puedes apoyar en la propia figura. Rellena la hoja de respuestas 1.

B-Con material– Hoja de respuestas 2: Coge triángulos de la caja de material y trata de construir los que no hayas podido responder antes o no estuvieras seguro. Explica lo que observes ahora que sin material no podías ver. Comprueba aquellos que creías estar seguro, si observas algo nuevo anótalo en la hoja de respuestas 2.

Imagen 1. Tarea realizada por los estudiantes de Magisterio.

Organizado por:





#CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

#### 4. Discusión de los datos, evidencias, objetos o materiales:

---

Vemos en la Tabla 1 los resultados obtenidos a la hora de identificar como desarrollos planos o no los 12 hexamantes sin y con la ayuda del material.

	SIN MATERIAL	CON MATERIAL
BARRA	33%	92%
CORONA	42%	67%
ESFINGE	83%	92%
HEXÁGONO	83%	100%
LANGOSTA	83%	92%
MARIPOSA	100%	100%
MURCIÉLAGO	67%	92%
PALO	25%	50%
PISTOLA	42%	100%
SERPIENTE	83%	83%
YATE	25%	83%
ZAPATO	58%	83%

Tabla 1. Tasas de éxito en las actividades sin y con material. (Sombreados los hexamantes que son desarrollos planos de la bipirámide)

En la actividad que se realizaba sin material los resultados han sido muy dispares. Destacando en la parte negativa los hexamantes "barra", "palo" y "yate" con tasas de éxito por debajo del 35%. En la parte positiva, destacamos que el hexamante "mariposa" fue correctamente identificado como desarrollo plano de la bipirámide por el 100% de las parejas.

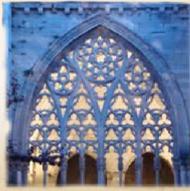
Cuando se proveyó a los alumnos de material los resultados, lógicamente, fueron mucho mejores. No obstante, el hexamante "palo" solo fue correctamente identificado por el 50% de ellos. También es reseñable que el hexamante "corona" solo fue correctamente identificado por un 67%.

En la Tabla 2 podemos apreciar las parejas que cambiaron sus respuestas cuando pudieron utilizar material. Es reseñable que 7 parejas cambiaron de "no es un desarrollo plano" a "sí es un desarrollo plano" en los hexamantes "barra" y "pistola", lo que nos hará analizar posteriormente por qué esas dos figuras parecían inicialmente que no podían ser desarrollos planos. Por otra parte, otras 7 parejas cambiaron en sentido contrario su respuesta sobre el hexamante "yate", pasando de considerar que era un desarrollo plano a que no lo era. Este error también es curioso, ya que supone que algunas parejas "inventaron" una forma de plegar ese hexamante que no se podía realizar. Consideramos errores distintos no encontrar la solución a una cuestión de este tipo y creer haberla encontrado cuando no existe.

---

Organizado por:





#CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

	CAMBIOS	DE NO A SÍ	DE SÍ A NO
BARRA	7	7	0
CORONA	5	4	1
ESFINGE	3	2	1
HEXÁGONO	1	0	1
LANGOSTA	0	0	0
MARIPOSA	0	0	0
MURCIÉLAGO	3	3	0
PALO	3	3	0
PISTOLA	7	7	0
SERPIENTE	2	1	1
YATE	7	0	7
ZAPATO	2	0	2

Tabla 2. Cambios de respuestas registrados entre las dos actividades. (Sombreados los hexamantes que son desarrollos planos de la bipirámide)

Si observamos el comportamiento de las 12 parejas en el conjunto de los reconocimientos (ver Tabla 3) podemos comprobar un desempeño mucho mejor cuando disponen de material. No obstante, muchas de las parejas parten de resultados discretos sin material (solo 4 parejas tuvieron 8 o más aciertos sin material).

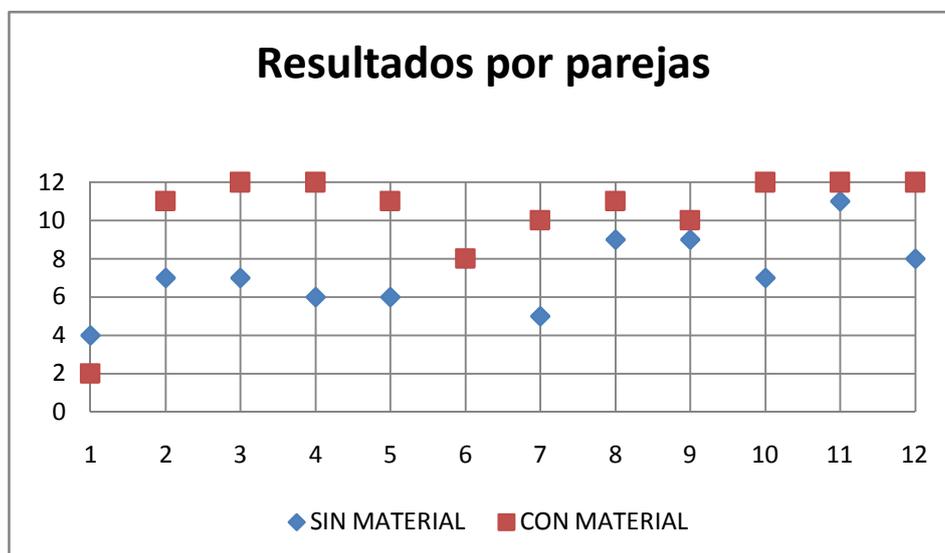
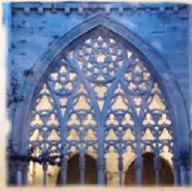


Gráfico 1. Resultados sin y con material de cada pareja.

Analizamos a continuación los comentarios o explicaciones a las respuestas dadas por algunas parejas.

Organizado por:





#CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

La pareja 12, respecto del hexamante "barra" (ver Imagen 2), corrige su error gracias al material y es capaz de generar un código gráfico para apoyar su segunda explicación (señala dos puntos en el dibujo que son "los" vértices). Cuando dan su respuesta sin material, dan una explicación algo imprecisa "porque al doblar mediante la técnica de plegado obtenemos que no se unen mediante sus bases". Sin embargo, el trabajo con material les permite mejorar su explicación, incluso se apoyan en el dibujo que se les proporciona marcando dos puntos que son los vértices de orden 3 de la bipirámide.

 <p>BARRA</p>	<p>NO</p>	<p>Porque al doblar mediante la técnica de plegado obtenemos que no se unen mediante sus bases.</p>
 <p>BARRA</p>	<p>SI</p>	<p>Los puntos señalados forman los vértices de las pirámides y sus bases se juntan.</p>

Imagen 2. Respuesta sin y con material, pareja 12 - barra.

La pareja 4 respecto del hexamante "yate" (ver Imagen 3) corrige su error gracias al material, pero además genera una respuesta de carácter más teórico, ya que habla del número de piezas que convergen en un vértice, cinco, y que impiden el plegado para formar la bipirámide. Podríamos decir que completa en esta segunda respuesta una actividad de aprehensión discursiva.

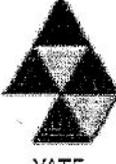
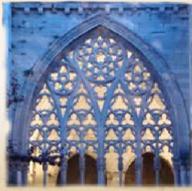
 <p>YATE</p>	<p>SI</p>	<p>Volteando la figura 45° a la izquierda, observamos que tenemos dos alturas y en cada una de ellas tres piezas</p>
 <p>YATE</p>	<p>No</p>	<p>Hay un vértice en el que convergen 5 caras y e impiden la flexibilidad</p>

Imagen 3. Respuesta sin y con material, pareja 4 - yate

Organizado por:





#CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

## 5. Resultados y/o conclusiones:

---

En base a los resultados obtenidos en la actividad, podemos afirmar que las mayores dificultades se encuentran en las figuras barra, corona, palo, pistola y yate que son aquellas que tuvieron una tasa de acierto menor del 50%.

De las que no fueron capaces de ver que sí eran desarrollos planos, identificamos algunas dificultades:

- Para plegar la barra hay que hacer dos rotaciones de sentidos opuestos.
- Para plegar la corona hay que poner la atención en dos de los vértices de orden cuatro que parecen llamar menos la atención que los de orden 3. La figura está definida como una bipirámide y eso hace que intenten formar las dos pirámides por separado.
- Nuevamente, para plegar la pistola hay que poner la atención en el vértice de orden cuatro que se observa a la derecha del desarrollo y montar la bipirámide desde ahí. Este aspecto vuelve a actuar como distractor.

El caso del yate es diferente, ya que se trata de uno de los no-desarrollos que había que justificar por qué no lo era.

- Para realizar la justificación bastaba decir que, plegaras como plegaras, se obtenía un vértice de orden 5, incompatible con la construcción pedida. La mayor parte de las parejas fijaron su atención en que hay dos grupos de tres triángulos que les pareció que formarían dos pirámides.

Consideramos que la visualización se ha trabajado poco en general durante las etapas de educación primaria y secundaria y las explicaciones que se obtienen hacen referencia a lo que supuestamente ocurre al girar piezas (encaja o no encaja...) y no aparecen argumentos matemáticos apenas, es decir no se profundiza en los aspectos de aprehensión discursiva.

La representación prototípica de la bipirámide que nuestros estudiantes realizan la interpreta únicamente como dos pirámides juntas y no se piensa en la posible rotación de la misma, por ejemplo, para focalizar la atención en los vértices de orden cuatro. Nos encontramos aquí con que una configuración visualmente predominante dificulta la identificación de la subconfiguración más adecuada para la resolución de la actividad (Torregrosa, 2010).

Como posible mejora en la tarea, podríamos considerar una ayuda intermedia como sería dejar accesible un modelo ya construido para que pudieran manipularlo, tal vez esto les ayudara a repartir la atención en todos los vértices y no solo en los de orden tres.

## 6. Contribuciones y significación científica de este trabajo:

---

Este trabajo se concibe como una primera aproximación al análisis de las dificultades de visualización de nuestros estudiantes de Magisterio. A partir del

---

Organizado por:





#CIMIE19

Lleida, 4 y 5 Julio 2019

VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa

**Educación: La puerta a toda mejora social**

estudio de la secuencia completa, se profundizará en la discusión y conclusiones, se refinarán y ajustarán las tareas y se iniciará un nuevo ciclo de actuación con estudiantes.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo (S36\_17D Investigación en Educación Matemática) así como por el Ministerio de Economía y Competitividad (Proyecto EDU2015-65378-P).

## 7. Bibliografía:

---

Clemente, F., Llinares, S. y Torregrosa, G. (2017). Visualización y razonamiento configural. *Boletim de Educaçã Matemática*, 31(57), 497-516.

Duval R. (1998). Geometry from a cognitive point of view, en Mammana, C. y Villani, V. (eds.). *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century*, pp. 37-52. Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Herskowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and Shape, en Bishop, A. J., Clements, M. K., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. (eds.), *International handbook of Mathematics Education*, pp. 161-204 (1). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Godino, J.D., Gonzato, M., Contreras, A., Estepa, A. y Díaz-Batanero, C. (2016). Evaluación de Conocimientos Didáctico-Matemáticos sobre Visualización de Objetos Tridimensionales en Futuros Profesores de Educación Primaria. *REDIMAT*, 5(3), 235-262. doi: 10.4471/redimat.2016.1984

Grupo Alquerque (2001). Juegos Hexamantes. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (38), 103-106.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3-19. Valencia: Universidad de Valencia.

MECD (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado (BOE) 52, de 1 de marzo, 19349-19420.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y estándares 2000*. Reston VA: NCTM. Traducción, M. Fernández (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales), 2003.

Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva, M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 0327-340.

---

Organizado por:

