



Revista
de la
Asociación
de Alumnos
de Postgrado
de Filosofía

TALES

Número 1 – Año 2008
ISSN: 2172-2587

Actas
I Congreso de Jóvenes
Investigadores en
Filosofía

Filosofía en el siglo XXI

Madrid 29-31 de Octubre 2008

Revista de la Asociación de
Alumnos de Postgrado de Filosofía

TALES

Número 1 – Año 2008

ISSN: 2172-2587

Actas

I Congreso de Jóvenes Investigadores en Filosofía

Filosofía en el siglo XXI

Madrid 27 y 28 de Octubre 2008



Vicedecanato de Estudios y Convergencia Europea
Facultad de Filosofía
Universidad Complutense de Madrid



TALES

Asociación de Alumnos
de Postgrado de Filosofía
Universidad Complutense
de Madrid

¿Existen los espacios de Hilbert de la mecánica cuántica? Matemáticas y realismo estructural

Carlos Madrid Casado
Universidad Complutense de Madrid

En nuestra disertación no consideraremos las matemáticas puras como rama separada del conocimiento, sino más bien como un refinamiento del lenguaje común, al que proporcionan los medios adecuados de enunciar relaciones para las cuales la expresión verbal ordinaria es imprecisa o embarazosa. (Niels Bohr)

El retraso en el desarrollo de las matemáticas ha producido un retraso de dos días en el avance de la física. (Richard Feynman)

Resumen

El propósito de este artículo es analizar la estructura y la ontología de los espacios de Hilbert de la Mecánica Cuántica. Se argumenta contra el *realismo estructural* el hecho de que los modelos matemáticos no representan la estructura del Mundo. Además, la estructura matemática no se conserva a través del cambio de teorías científicas, como demuestra la historia de los espacios de Hilbert.

Palabras clave

Espacio de Hilbert, Mecánica Cuántica, realismo estructural.

Abstract

The aim of this paper is to analyse the structure and the ontology of Hilbert spaces in Quantum Mechanics. I argue against *structural realism*: mathematical models do not represent the structure of the World. Moreover, there is not retention of mathematical structure across theory change, as the history of Hilbert spaces shows conspicuously.

Keywords

Hilbert space, Quantum Mechanics, structural realism.

1. Realismo ¿estructural?

A la vista del número de publicaciones en los últimos años, el *realismo estructural* (*structural realism*, SR) es una variedad de realismo científico que está muy en boga en el círculo de la filosofía internacional de la ciencia. La mayoría de realistas y antirrealistas lo considera como la versión de realismo científico más defendible, dado que se encuentra a medio camino entre el realismo clásico y el instrumentalismo. El realismo estructural intenta, a un mismo tiempo, acomodar la inferencia realista a la verdad como mejor explicación del éxito (*No-Miracle Argument*) y la tesis antirrealista que defiende la existencia de revoluciones científicas que han desencadenado cambios radicales en la esfera teórica (*Pessimistic Meta-Induction*). El realismo estructural se presenta, *a priori*, como el mejor de ambos mundos.

Dentro de la concepción semántica de la ciencia, que concibe las teorías científicas como conjuntos de modelos, el estructuralismo (sea realista o empirista) es la corriente que sostiene que las teorías y los modelos nos informan de la forma o estructura del mundo, y no necesariamente de su contenido o naturaleza. El estructuralismo realista añade, además, que llegan a informarnos de lo inobservable. El realista estructural sostiene, pues, que los modelos matemáticos de la física copian o imitan la estructura completa (observable e inobservable) de la realidad. El realismo estructural mantiene que nuestras mejores teorías representan el mundo de modo aproximadamente correcto.

La formulación original del «realismo estructural» se debe a John Worrall, a quien debemos la denominación.¹ Worrall sostiene que las estructuras matemáticas de la ciencia reflejan fielmente cómo se relacionan entre sí las entidades reales, por cuanto las teorías nuevas retienen la estructura matemática de las teorías antiguas. Con sus propias palabras: «las ecuaciones expresan relaciones y si las ecuaciones siguen siendo verdaderas es porque las relaciones siguen siendo reales»². A través del cambio científico, como ejemplifica en óptica la pervivencia de las ecuaciones desde Fresnel a Maxwell o en física la existencia de casos límite, se conserva la estructura matemática. En estos episodios «hay una continuidad o acumulación en el cambio, pero la continuidad es de la forma o estructura, no del contenido»³. La historia de la ciencia patentiza, según Worrall, que existe una continuidad matemática en la estructura, aunque no en la ontología.

Worrall nos ofrece «lo mejor de ambos mundos»⁴. Está de acuerdo con los antirrealistas en que la ontología no se conserva a través del cambio de teorías; pero, simultáneamente, da buenas noticias al realista: «El realismo estructural entresaca una

¹ Cf. J. Worrall, «Structural Realism: The Best of Both Worlds?».

² *Art. cit.*, p. 118.

³ *Art. cit.*, p. 117.

⁴ *Art. cit.*, p. 99.

inducción optimista de la historia del cambio teórico en ciencia, pero es una inducción optimista con respecto al descubrimiento de la estructura matemática en vez de la ontología individual»⁵. El éxito de la ciencia se explica porque las sucesivas teorías retienen la estructura matemática, cuyas relaciones siguen siendo verdad, aunque la ontología asociada (los *relata*) deje de serlo. Worrall defiende una suerte de realismo de teorías (estructuras) sin realismo de entidades. Sólo conocemos las relaciones entre cosas, no las cosas mismas. En el fondo, esta idea estaba en germen en Poincaré, Duhem o Russell, entre otros.⁶

Mientras que el realismo de Worrall permanece encerrado en un plano *epistemológico* (*epistemic structural realism*, ESR), el realismo estructural de nuestro tiempo —encabezado por Steven French y James Ladyman— rebasa ese plano y toma una genuina posición *ontológica* y *metafísica* (*ontic structural realism*, OSR). Además, ESR transcurre por cauces sintácticos, mientras que OSR asume plenamente la visión semántica de las teorías científicas como conjuntos de modelos, que no de enunciados, que aspiran a representar más que corresponderse con la estructura de la realidad.⁷ En general, por decirlo con Psillos, el realista estructural del siglo XXI abraza un *estructuralismo óntico*, que consiste en afirmar que «todo lo que *hay* es estructura»⁸ y que «nuestras teorías científicas son capaces de capturar las estructuras *existentes* en el mundo»⁹. Para French o Ladyman, las estructuras son, por así decir, sustancias ontológicas primitivas. El mundo posee estructura (matemática, claro); y las relaciones y las estructuras son más reales que los objetos y las propiedades.

En cualquier caso, tanto ESR como OSR concuerdan en estas tres tesis, a saber: (i) las teorías científicas nos desvelan, por medio de su estructura matemática, la estructura de la realidad; (ii) las ecuaciones matemáticas que sobreviven al cambio de teorías expresan relaciones reales; y (iii) diferentes ontologías son compatibles con una misma estructura matemática.¹⁰

Nuestro propósito no es otro que formular un argumento contra el realismo estructural a partir de la consideración de la evolución histórica de las estructuras matemáticas de la Mecánica Cuántica (1925-1932). Nuestro argumento presenta dos puntos fuertes. En primer lugar, nuestro caso de estudio muestra que la distinción estructura/naturaleza (forma/contenido), tal y como la emplean los realistas estructurales, colapsa. La estructura y la ontología forman un continuo. No existe un corte limpio entre la estructura y el contenido

⁵ J. Worrall, «How to Remain (Reasonably) Optimistic: Scientific Realism and the “Luminiferous Ether”», p. 336.

⁶ Cf. J. Ladyman, «Structural Realism».

⁷ Cf. S. French & J. Ladyman, «Remodelling Structural Realism: Quantum Physics and the Metaphysics of Structure», p. 33.

⁸ S. Psillos, «The Structure, the *Whole* Structure, and Nothing *but* the Structure», p. 561.

⁹ N. da Costa & S. French, *Science and Partial Truth*, p. 189.

¹⁰ Cf. S. Psillos, «Is structural realism the best of both worlds?», p. 20.

de nuestras teorías, es decir, una distinción precisa entre las ecuaciones matemáticas y la interpretación física del formalismo. Y, en segundo lugar, nuestro caso de estudio también muestra que existen pérdidas de estructura en la historia de las ciencias.¹¹ En el fondo, el realista estructural no conjuga lo mejor de ambos mundos.

2. Las estructuras matemáticas de la Mecánica Cuántica

Fijémonos, pues, en el periodo fundacional de la Mecánica Cuántica. El objetivo de este apartado es ofrecer una panorámica de la construcción del formalismo canónico de la Mecánica Cuántica, estudiando su evolución desde 1925 hasta 1932, cuando queda definitivamente cerrado en sus líneas principales. Partiendo de la Mecánica Matricial de Heisenberg-Born-Jordan y de la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger, vamos a analizar cómo la cuestión de la equivalencia matemática entre ambas mecánicas cuánticas sirvió de acicate para el desarrollo de toda una serie de nuevas estructuras algebraicas y funcionales. P.A.M. Dirac y John von Neumann van a ser, desde luego, nuestros dos protagonistas.

El origen de la teoría de los cuanta se remonta al 14 de diciembre de 1900, cuando Planck dio a conocer su ley de radiación del cuerpo negro. Su hipótesis meramente formal de que la emisión y la absorción de energía sólo toman lugar en porciones discretas conmocionó la Física del momento. La Teoría Cuántica Antigua se apuntó éxitos importantes de manos de Einstein o Bohr (explicación del efecto fotoeléctrico y del espectro del átomo de hidrógeno). Pero, entre 1900 y 1925, la teoría de los cuantos consistió en un confuso batiburrillo de hipótesis, leyes, principios y recetas de cálculo. La Teoría Cuántica Antigua era momentánea y provisional, por cuanto fracasaba en presentar una axiomática coherente independiente de las teorías clásicas.

En 1925, Werner Heisenberg sentó las bases de la Mecánica Cuántica (MQ). Heisenberg insistía en que las órbitas de los electrones en el átomo no podían observarse; pero que, a partir de la radiación emitida por el átomo en un proceso de descarga, podían deducirse las frecuencias y las amplitudes de los electrones. Este conjunto de números observables podía considerarse como una descripción del estado del sistema dentro de la nueva mecánica, aunque no fuera posible interpretarlo en el sentido de una trayectoria clásica. De este modo, Heisenberg obtuvo la magnitud cuántica (Q ó P) que había que sustituir por cada magnitud clásica (q ó p). Además, comprobó que las magnitudes cuánticas generalmente no conmutaban, a diferencia de las clásicas ($QP \neq PQ$ pero $qp = pq$). Meses después, Max Born y

¹¹Un tercer punto fuerte de nuestro argumento podría ser incidir en que el realismo estructural precisa de una relación de representación fuerte –por ejemplo, isomorfismo– entre la estructura de los modelos teóricos y la de los sistemas reales para garantizar la inferencia realista («las teorías *capturan* la estructura del mundo»), pero que no es el caso. Hemos desarrollado esta clase de crítica en C. M. Madrid Casado, «Do mathematical models represent the World? The case of quantum mathematical models».

Pascual Jordan reconocerían que los conjuntos de números heisenbergianos Q y P se comportaban como matrices matemáticas, pese a que el propio Heisenberg no sabía lo que era una matriz según confesó: «ahora los ilustrados matemáticos de Gotinga hablan mucho de matrices hermíticas, pero yo ni siquiera sé lo que es una matriz»¹². Había nacido la Mecánica Matricial (MM). Al año siguiente, trabajando codo con codo junto a Heisenberg, los «Tres Hombres» darían con la llamada condición cuántica exacta: $PQ - QP = (h/2\pi i)I$. Esta ecuación era la única en que entraba en juego la constante de Planck h , y permitía recuperar las condiciones cuánticas de Bohr-Sommerfeld. Felizmente, a principios de 1926, Wolfgang Pauli consiguió reconstruir el espectro energético del átomo de hidrógeno dentro del marco matricial. Sin embargo, la labor de Heisenberg-Born-Jordan sufrió una fría acogida a causa de su abstracta aunque inspirada matemática.

Hacia finales del año 25, los pilares de la Mecánica Matricial ya estaban puestos. A diferencia de los jóvenes físicos y matemáticos de Gotinga y Copenhague, pero al igual que gran parte de la vieja escuela, Erwin Schrödinger no se sentía especialmente cómodo con la Mecánica Cuántica de Heisenberg. Guiado por la búsqueda de una teoría más intuitiva que sólo empleara las herramientas matemáticas de toda la vida (es decir, en lugar de las matrices, las ecuaciones diferenciales de siempre), Schrödinger descubrió su celebrada ecuación de ondas en la Navidad de ese año. Con los primeros meses de 1926, los cuatro artículos que constituyeron el núcleo de la Mecánica Ondulatoria (MO) vieron la luz. La idea feliz fue estudiar el movimiento del electrón como si se tratara de un movimiento ondulatorio, cuya función de onda Ψ sería la encargada de describir el estado del sistema. Con más precisión: Schrödinger reemplazó las ecuaciones fundamentales de la mecánica y las viejas condiciones cuánticas por una ecuación diferencial de ondas, de la que logró deducir los niveles energéticos del átomo de hidrógeno. A resultas de esto, Schrödinger hizo caso omiso de los prejuicios positivistas que vencieron a Heisenberg¹³, y se atrevió a ofrecer una interpretación física acorde con el formalismo matemático, que parecía bastante natural: la concepción de los electrones como ondas, siguiendo de cerca la idea del carácter ondulatorio de la materia del Príncipe Louis de Broglie (que sería verificada en los experimentos de difracción de electrones realizados por Davisson y Germer en 1927). Si hay una ecuación de ondas, tiene que haber ondas. Sin embargo, el comportamiento ondulatorio de los electrones no autorizaba a concebirllos plenamente como ondas materiales, como Bohr y Heisenberg le hicieron saber a Schrödinger: si los electrones fuesen ondas, se difundirían por todo el espacio, pero a James Franck siempre se le aparecían como puntos –partículas, corpúsculos- en las pantallas de

¹² F. Bombal, «Los modelos matemáticos de la Mecánica Cuántica», p. 125.

¹³ Y que éste había copiado de Einstein a la luz del buen resultado que habían dado en la formulación de la Teoría de la Relatividad: «sólo deben tomarse en cuenta magnitudes observables».

detección de los experimentos. De todos modos, los trabajos de Schrödinger tuvieron una acogida excepcional.

Así pues, el panorama que se les presentaba a los físicos cuánticos a comienzos de la primavera de 1926 difícilmente podía resultar más paradójico: disponían de dos mecánicas (matricial y ondulatoria) que *resolvían* los mismos fenómenos, pese a que cada una de ellas utilizaba enfoques muy diferentes (algebraico vs. analítico) y proyectaba una concepción muy distinta del microcosmos (discontinua vs. continua). En efecto, mientras que la Mecánica Matricial (MM) se constituía, según sus creadores, como una «verdadera teoría del discontinuo», que abrazaba una concepción corpuscular del átomo, la Mecánica Ondulatoria (MO) surgía como una «nueva física del continuo», que acentuaba una visión ondulatoria del átomo. No en vano, Paul Ehrenfest, tras su paso por Gotinga y Cambridge, llegó a exclamar con perplejidad que sufría una indigestión causada por la endiablada «Heisenberg-Born-Dirac-Schrödinger sausage-machine-physics-mill»¹⁴. Si Schrödinger calificaba la Mecánica de Matrices de «contraintuitiva»¹⁵, Heisenberg llegaba a escribir en carta a Pauli: «cuanto más pienso en los aspectos físicos de la teoría de Schrödinger, más repulsiva me parece [...] en otras palabras: es una mierda [*sic*]»¹⁶. Y, sin embargo, ambas mecánicas explicaban y predecían igual. De hecho, fue mérito de David Hilbert reconocer la profunda similitud entre ambas teorías, como ilustra el siguiente testimonio de Edward U. Condon, que visitó Gotinga en aquel tiempo:

Hilbert se rió mucho de Born y Heisenberg porque, cuando descubrieron la Mecánica de Matrices, se encontraron con el mismo tipo de dificultades que, por supuesto, todo el mundo encuentra al manipular y tratar de resolver problemas con matrices. Cuando fueron a pedir ayuda a Hilbert, les sugirió que si encontraban la ecuación diferencial que originaba esas matrices, probablemente obtendrían más información. Heisenberg y Born pensaron que era un comentario para salir del paso, y que Hilbert no sabía realmente de lo que estaba hablando. Así que más tarde Hilbert se divirtió mucho, indicándoles que podían haber descubierto la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger seis meses antes que éste, si le hubieran hecho caso.¹⁷

Sin saberlo, en su esclarecedor artículo sobre la relación entre ambas mecánicas cuánticas, publicado en mayo del 26, Schrödinger recogió el testigo de Hilbert, ya que intentó explicar las coincidencias entre MM y MO demostrando que ambas mecánicas eran equivalentes matemáticamente. La equivalencia matemática explicaría, desde luego, la equivalencia empírica. Con sus palabras:

¹⁴ J. Mehra & H. Reichenberg, *The Historical Development of Quantum Theory*. Dirac, p. 231.

¹⁵ E. Schrödinger, *Collected Papers on Wave Mechanics*, p. 46.

¹⁶ A. Fernández-Rañada, *Ciencia, incertidumbre y conciencia*. Heisenberg, p. 90.

¹⁷ M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, p. 280.

Considerando las extraordinarias diferencias entre los puntos de partida y los conceptos de la Mecánica Cuántica de Heisenberg y la teoría que ha sido designada como Mecánica “Ondulatoria” o “Física”, y ha sido descrita aquí, es muy extraño que estas dos teorías nuevas concuerden *cada una con la otra* con respecto a los hechos conocidos en que difieren de la teoría cuántica antigua. [...] En realidad, esto es muy remarcable, porque los puntos de partida, las presentaciones, los métodos y, de hecho, todo el aparato matemático parecen fundamentalmente diferentes. [...] En lo que sigue, la íntima *conexión interna* entre la Mecánica Cuántica de Heisenberg y mi Mecánica Ondulatoria será desvelada. Desde la base formal matemática, uno bien podría hablar de la *identidad* de las dos teorías.¹⁸

Por las mismas fechas, Eckart, Pauli e, inconscientemente, Lanczos idearon pruebas más o menos similares. Pero, pese a lo que comúnmente se admite, las demostraciones de Schrödinger y del resto no son del todo correctas. Prueban –y con dificultad– que $MO \rightarrow MM$, pero no logran probar que $MM \rightarrow MO$. En otras palabras, sólo prueban que MO está contenida en MM. En realidad, muestran cómo construir las matrices Q y P desde las funciones de onda Ψ ; pero son incapaces de recorrer el camino inverso, es decir, de recuperar las funciones de onda Ψ a partir de las matrices numéricas Q y P .¹⁹

Durante el otoño del 26, Paul Dirac y Pascual Jordan descubren que MM y MO no son sino dos casos particulares de una estructura formal mucho más general: la Teoría de las Transformaciones. Dirac prueba que MM y MO son dos representaciones o imágenes del álgebra cuántica, es decir, del álgebra no conmutativa de los *q-numbers*, según ésta se vea como matrices o como operadores de onda. Por decirlo en términos lógicos, MM y MO son dos modelos del álgebra cuántica: $MM \models MQ$ y $MO \models MQ$. Pero existen muchas más representaciones o imágenes posibles (por ejemplo, la representación de momentos o la representación de Dirac). ¿Son todas equivalentes entre sí? En particular, ¿lo son la representación matricial y la ondulatoria? Es decir, por decirlo otra vez en términos lógicos, ¿es el álgebra cuántica categórica, esto es, son todos sus modelos –en concreto, el matricial y el ondulatorio– equivalentes entre sí: $\models MM \leftrightarrow MO$? Dirac²⁰, al igual que Weyl²¹, lo conjetura; pero son Stone y, en rigor, Von Neumann quienes lo demostrarán años después: todas las soluciones de $PQ - QP = (h/2\pi i)I$ son, esencialmente, idénticas.²² Pero, aún más, Dirac, en su intento por unificar MM y MO, recurre a una ficción matemática conocida desde entonces

¹⁸ E. Schrödinger, *op. cit.*, p 45.

¹⁹ Cf. C. M. Madrid Casado, «Ochenta años de la equivalencia entre Mecánicas Cuánticas», «De la equivalencia matemática entre la Mecánica Matricial y la Mecánica Ondulatoria» y «A brief history of the mathematical equivalence between the two quantum mechanics».

²⁰ Cf. P. A. M. Dirac, «The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics» y *The Principles of Quantum Mechanics*.

²¹ Cf. H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.

²² Cf. M. H. Stone, «Linear transformations in Hilbert space. Operational methods and group theory», y J. von Neumann, «Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren».

como *función delta de Dirac*, un ubicuo ente cuyo triste sino fue tener que esperar hasta 1950 para encontrar una sólida base matemática dentro de la Teoría de las Distribuciones de Schwartz.

También desde finales del 26, Hilbert estaba estudiando en profundidad los fundamentos matemáticos de la teoría cuántica. Lothar von Nordheim y Gustav Heckmann le prepararon abundante documentación con la intención de que impartiera unas lecciones. Con la ayuda de Nordheim y un joven prodigio recién llegado a Gotinga, John von Neumann, Hilbert dio inicio a la tarea de estudiar la Mecánica Cuántica bajo el método axiomático. Fruto de ello es el artículo publicado a principios de 1927 completando sus notas de clase. Su objeto era construir un aparato matemático único para MM y MO tomando como base la Teoría de las Transformaciones de Dirac-Jordan. Hilbert apuntaba que la conexión entre MM y MO debía plantearse a través de la teoría de operadores y, por tanto, del floreciente Análisis Funcional. El problema es que la teoría que Hilbert introdujo sigue, explícitamente, a Dirac y hace uso de la esotérica función delta. Algo que a Von Neumann le resultaba totalmente insatisfactorio. De hecho, durante la primavera de 1927, con el artículo de Hilbert aún en prensa, Von Neumann comenzó su propia fundamentación y unificación de la Mecánica Cuántica, que presentó parcialmente en la sesión de la Sociedad de Ciencias de Gotinga del 20 de mayo de 1927.

Cinco años después, 1932, en su magistral *Fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica*, Von Neumann ofrece la primera prueba de equivalencia completamente rigurosa, unificando MM y MO en una Mecánica Cuántica más universal, general y abstracta, cuyo marco matemático no es sino las importantes aportaciones al Análisis Funcional de Hilbert, Friedrich Riesz y Ernst Fischer. Von Neumann introduce paso a paso la definición axiomática del *espacio de Hilbert* –llamado así en honor a su maestro- y reformula MM y MO como sendos cálculos de operadores sobre espacios de Hilbert. Respectivamente, sobre el espacio de las sucesiones de cuadrado sumable –las columnas de las matrices- y sobre el espacio de las funciones de cuadrado integrable –las funciones de onda-. Y, a continuación, demuestra que la Mecánica de Heisenberg –centrada en matrices y sumas- y la Mecánica de Schrödinger –centrada en funciones e integrales- son matemáticamente equivalentes al no ser más que dos cálculos de operadores sobre dos espacios de Hilbert que son isomorfos (isométricos). La estructura de la Mecánica Cuántica era, por ende, solidaria de la del espacio de Hilbert. La gran meta de este brillante matemático fue, precisamente, alcanzar esta unificación canónica largo tiempo buscada y no encontrada (Schrödinger, Eckart, Jordan, Dirac...).

3. Estructura y ontología de los espacios de Hilbert de la Mecánica Cuántica

La Mecánica Matricial de Heisenberg-Born-Jordan y la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger son, como conjeturaron Schrödinger, Eckart y Pauli, y demostró con rigor Von Neumann, *matemáticamente equivalentes*. La Mecánica de Matrices (MM) y la Mecánica de Ondas (MO) no son sino dos realizaciones isomorfas de la misma estructura abstracta (el espacio de Hilbert).

Sin embargo, como fue dicho, a pesar de la relación sintáctica de isomorfismo que media entre sus estructuras matemáticas, cuando miramos al mundo alternativamente desde MM o MO aparecen diferencias semánticas irreconciliables (discontinuidad / continuidad, corpúsculos / ondas, &c.). Las estructuras que MM y MO prescriben a la realidad no son, ni mucho menos, equivalentes (isomorfas). En efecto, MM proyecta sobre el mundo una estructura discreta, dado que su realización del espacio de Hilbert –el espacio de las sucesiones de cuadrado sumable– posee a los números naturales $\mathbb{N}$ como dominio, lo que se interpreta como una visión corpuscular del mundo atómico; por el contrario, MO proyecta sobre la realidad una estructura continua, dado que su realización del espacio de Hilbert –el espacio de las funciones de cuadrado integrable– posee a los números reales $\mathbb{R}$ como dominio, lo que se asocia con una concepción ondulatoria del microcosmos. En suma, las estructuras matemáticas de MM y MO son isomorfas, pero las estructuras que MM y MO proyectan sobre la realidad no son ni pueden ser isomorfas, porque no tienen la misma cardinalidad. Una es discreta (numerable); otra es continua (no numerable). A pesar de su equivalencia matemática, MM y MO prescriben estructuras ónticas incompatibles. MM y MO no son *estructuralmente equivalentes*.

Aunque tanto Worrall como Ladyman sostienen que, de acuerdo con el realismo estructural, las teorías científicas capturan la estructura del mundo, pero que capturar la estructura del mundo es compatible con introducir ontologías radicalmente distintas, porque una misma estructura puede ser instanciada de diferentes maneras, nuestra argumentación funciona tanto contra los realistas estructurales que aceptan los compromisos ontológicos (y, en este caso, han de reconocer que las ontologías de MM y MO no casan: partículas *adversus* ondas) como contra aquellos que se resisten a aceptarlos (y, en este caso, basta con que reconozcan que las estructuras ónticas de MM y MO no son isomorfas, porque una es discreta y otra es continua). Las estructuras matemáticas de MM y MO son equivalentes, pero sus estructuras ónticas e, incluso, sus ontologías no lo son, es más, son incompatibles.

Además, nosotros mantenemos, es cierto, que no se puede ser realista con respecto a las estructuras y, al tiempo, antirrealista con respecto a los objetos que contienen. El

«semirrealismo», como lo denomina Chakravartty²³, es altamente inestable; porque el realismo acerca de las estructuras teóricas (*structural realism, theory-realism*) implica, como es natural, el realismo acerca de las entidades (*entity-realism*). Por decirlo en términos escolásticos: la forma es inseparable de la materia. En efecto, uno no puede creer que ciertas relaciones estructurales son reales a menos que también acepte que ciertas cosas están relacionadas: si una relación es cierta, los elementos de que se predica han de existir. No es posible que las estructuras se mantengan y, simultáneamente, las entidades vengán y vayan con total libertad. La distinción entre la verdad de las relaciones y la verdad acerca de los *relata* no marcha: «si dos teorías poseen la misma estructura, o la estructura de una teoría se preserva en una segunda, las entidades teóricas invocadas por la primera pueden ser transportadas en contrapartidas de la segunda»²⁴. Correctamente entendidos, el realismo de estructuras y el realismo de entidades se implican mutuamente.²⁵

La idea de Worrall de que lo que se conserva a través del cambio científico es la estructura matemática –las ecuaciones se preservan o sobreviven como casos límite- y no su contenido, siendo diferentes ontologías compatibles con una misma estructura, dista de ser cierta, ya que toda estructura matemática conlleva aparejada una *carga ontológica*. No es lo mismo que los elementos estructurales de MM o MO sean matrices discretas –que remiten a una ontología discontinua o corpuscular- que sean funciones continuas –que remiten a una ontología continua u ondulatoria-; o, dicho de otra manera, que el espacio substrato sea $\mathbb{N}$ o sea $\mathbb{R}$.

Es más, la propia distinción estructura/ontología o, por decirlo en términos más físicos, formalismo/interpretación fue introducida por Heisenberg en el contexto de nuestro caso de estudio. Muller²⁶ especula que Heisenberg la introdujo para defender MM frente a MO. Cuando los mecánicos matriciales se sintieron atraídos por la más manejable MO, Heisenberg afirmó, para no dar su brazo a torcer y abandonar la compleja MM, que aceptaban el formalismo de Schrödinger pero no su interpretación ondulatoria, prefiriendo la interpretación estadística de Born. Pero la prueba de que no había ni hay un corte claro entre el formalismo y la interpretación, es que esta última no dejaba inalterado el formalismo, puesto que introducía espacios y medidas de probabilidad, esto es, nueva estructura matemática. De hecho, Muller concluye: «Distinción formalismo/interpretación, descansa en paz»²⁷.

²³ Cf. A. Chakravartty, «Semirealism».

²⁴ A. Chakravartty, *art. cit.*, pp. 401-2.

²⁵ Cf. A. Chakravartty, *art. cit.*, p. 407.

²⁶ Cf. F. A. Muller, «The Equivalence Myth of Quantum Mechanics (II)», pp. 242-3.

²⁷ *Art. cit.*, p. 244.

La distinción estructura vs. ontología no se sostiene, porque ambas forman un continuo.²⁸ Ladyman y French responden²⁹ a las críticas divorciando el realismo estructural de cualquier compromiso con ontologías de individuos; pero, entonces, ¿es el formalismo sin interpretar el entero responsable del éxito de las teorías científicas? ¿Cómo es esto posible?

De todos modos, empero que el «argumento de la cardinalidad» funciona sin necesidad de comprometer ontológicamente al realismo estructural. Cuestión que los propios French y Ladyman reconocen: «de hecho ocurre que la cardinalidad de los dominios de las subestructuras empíricas y de los modelos de los fenómenos no es generalmente la misma [...] llamamos a este argumento la objeción de la cardinalidad»³⁰. Resumiendo: *las estructuras matemáticas de MM y MO son equivalentes, pero sus estructuras ónticas no lo son, son incompatibles* (discreto vs. continuo, partículas vs. ondas).

Aún más: el estatus ontológico de los espacios de Hilbert está lejos de ser claro. ¿Por qué su utilidad debería ser un argumento para creer en la *existencia* de algo así como los espacios multidimensionales de Hilbert en la realidad? Sin embargo, el problema no es tanto si existen los espacios de Hilbert de la Mecánica Cuántica, sino sobre qué espacio de Hilbert (el discreto de la Mecánica Matricial o el continuo de la Mecánica Ondulatoria) somos realistas, porque cada uno de ellos conlleva –pese a ser matemáticamente equivalentes– una *carga ontológica* muy distinta (discreto/continuo, corpúsculos/ondas). Confiado en la realidad de la estructura abstracta del espacio de Hilbert, el realista estructural no tiene más opción que ser realista tanto con respecto a la realización discreta como con respecto a la continua; a la manera que el matemático formalista, que trabaja clausurado en su sistema axiomático, no tiene más que aceptar que los números reales poseen tanto modelos estándar como modelos numerables no estándar (paradoja de Skolem). Pero este paso entraña numerosas dificultades, porque no hay una única imagen o representación del mundo cuántico asociada con ambos tipos de estructura (dualidad onda-corpúsculo). El famoso argumento de la teoría de modelos *à la* Putnam funciona contra el realismo estructural. No basta con aferrarse al formalismo cuántico y afirmar que las estructuras que éste satisface son las únicas en que cree el realista estructural, porque el formalismo cuántico no establece qué interpretación es la correcta. Con más precisión, cada estructura que satisface el formalismo sugiere una determinada interpretación, conlleva una cierta subestructura óntica distinta. Afirmar con Worrall que «el

²⁸ Cf. S. Psillos, «Is structural realism the best of both worlds?», p. 31, y *Scientific Realism: How Science Tracks Truth*, p. 157.

²⁹ Cf. J. Ladyman, «What Is Structural Realism?», y S. French, «Models and Mathematics in Physics: The Role of Group Theory».

³⁰ O. Bueno, S. French & J. Ladyman, «On representing the relationship between the mathematical and the empirical», p. 503.

realista estructural simplemente asevera que la estructura del universo es (probablemente) alguna como la mecánico-cuántica»³¹ no es decir mucho.

4. La pérdida de la estructura de espacio de Hilbert en Mecánica Cuántica

Pero, con mucho, ésta no es la peor noticia para el realismo estructural. En la transición desde las Mecánicas Cuánticas de Heisenberg o Schrödinger a la Mecánica Cuántica de Von Neumann puede verse una continuidad en la pervivencia de la estructura matemática subyacente del espacio de Hilbert. Esta conservación de la estructura matemática, que tanto gusta al realista estructural, puede, incluso, hacerse extensible a las reformulaciones modernas de la Mecánica Cuántica de Dirac, llevadas a cabo empleando los espacios de Hilbert *aparejados* o *enjarciados*, que constituyen una ampliación o generalización de los espacios de Hilbert clásicos. En efecto, con el paso del tiempo, gracias a los trabajos de Schwartz y Grothendieck en Análisis Funcional allá por los años 50 y 60, las funciones delta adquirieron carta de naturaleza matemática al ser formalizadas como distribuciones. Así, el formalismo de Dirac logró adquirir sólida fundamentación matemática, dentro de los *espacios «enjarciados» o «aparejados» de Hilbert* o *tripletes de Gelfand* (*rigged Hilbert spaces / Gelfand triplets*), que fueron aplicados a la práctica cuántica por Arno Bohm, Roberts y Melsheimer entre otros.³² La idea fue ligar lo mejor del formalismo de Von Neumann (el riguroso espacio de Hilbert) y lo mejor del formalismo de Dirac (la útil función delta) dentro de una estructura matemática consistente. Con este fin, se procuró ir más allá del espacio de Hilbert de cara a incorporar objetos tan singulares como la función delta, pero sin perder al mismo tiempo la buena geometría del espacio de Hilbert. La solución consiste en considerar una estructura *alrededor* del espacio de Hilbert siguiendo el espíritu de la teoría de distribuciones: se toma el usual espacio de Hilbert y se lo *equipa* con otros dos espacios, uno más pequeño y otro más grande, que contienen respectivamente a todas las funciones *buenas* (funciones *test*) y a todas las funciones *malas* (funciones *singulares*, como la distribución δ de Dirac). Al conjunto de estos tres espacios es a lo que se denomina espacio «enjarciado» o «equipado» de Hilbert o triplete de Gelfand.³³

Sin embargo, esta continuidad matemática tan querida por el realista estructural salta por los aires cuando simplemente tomamos en consideración la Teoría Cuántica de Weyl,

³¹ J. Worrall, «Structural Realism: The Best of Both Worlds?», p. 123.

³² Cf. A. Bohm, «Rigged Hilbert Space and Mathematical Description of Physical Systems», J. Roberts, «Rigged Hilbert Space in Quantum Mechanics», y O. Melsheimer, «Rigged Hilbert Space Formalism as an Extended Mathematical Formalism for Quantum Systems».

³³ Cf. M. Gadella & F. Gómez, «A Unified Mathematical Formalism for the Dirac Formulation of Quantum Mechanics».

cuya estructura es la teoría de grupos, o las Teorías Cuánticas de Campos, en donde existen múltiples representaciones sobre espacios de Hilbert no equivalentes entre sí. En efecto, en la física de partículas elementales, los físicos emplean paralelamente las estructuras de la teoría de grupos que Weyl introdujo de espaldas a la teoría de espacios de Hilbert que postuló Von Neumann. Y en la Teoría Cuántica de Campos, aparecen –al existir infinitos grados de libertad- espacios de Hilbert no isomorfos entre sí, con propiedades estructuralmente incompatibles.³⁴ Nuestro caso de estudio muestra, de paso, que pueden existir pérdidas de estructura en la historia de la Física Cuántica.

5. Conclusión

Nuestra meta era decidir empíricamente las tesis del realismo estructural a partir de la consideración de la evolución histórica de las estructuras matemáticas de la Mecánica Cuántica. Nuestro estudio ha mostrado que la distinción estructura/ontología (forma/contenido), tal y como la emplean los realistas estructurales, colapsa. No existe un corte limpio entre el formalismo y la interpretación; porque, por ejemplo, la estructura matemática de la Mecánica Matricial de Heisenberg y la de la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger son equivalentes (los espacios de Hilbert subyacentes son isomorfos) y, sin embargo, ambas mecánicas prescriben estructuras ónticas incompatibles (discreta vs. continua, partículas vs. ondas)... ¿y con respecto a cuál de los dos espacios de Hilbert deberíamos ser realistas, si cada uno de ellos conlleva una carga ontológica muy distinta?

En resumidas cuentas, si se supone con el realista estructural que la ciencia captura la estructura *metafísica* del mundo, hay que concluir que la Naturaleza es «esquizofrénica»; puesto que las estructuras ónticas de MM y MO son incompatibles, pese a que sus estructuras teóricas son matemática y empíricamente equivalentes.

Bibliografía

- Bohm, A.: «Rigged Hilbert Space and Mathematical Description of Physical Systems» en *Lectures in Theoretical Physics*, nº 94, 1966, pp. 1-88.
- Bombal, F.: «Los modelos matemáticos de la Mecánica Cuántica», en *La Ciencia en el siglo XX. Seminario “Orotava” de Historia de la Ciencia*. Consejería de Educación del Gobierno de Canarias: Islas Canarias, 1999, pp. 115-146.
- Bueno, O., French, S. & Ladyman, J.: «On representing the relationship between the mathematical and the empirical» en *Philosophy of Science*, nº 69, 2002, pp. 497-518.

³⁴ Cf. S. J Summers, «On the Stone-Von Neumann uniqueness theorem and its ramifications».

- Chakravartty, A.: «Semirealism» en *Studies in History and Philosophy of Science*, nº 29/3, 1999, pp. 391-408.
- Da Costa, N. & French, S.: *Science and Partial Truth*. Oxford University Press: Nueva York, 2003.
- Dirac, P. A. M.: «The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics» en *Proc. R. Soc. London*, nº A113, 1927, pp. 621-641.
- Dirac, P. A. M.: *The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press: Oxford, 1930.
- Eckart, C.: «Operator Calculus and the Solution of the Equation of Quantum Dynamics» en *Physical Review*, nº 28, 1926, pp. 711-726.
- Fernández-Rañada, A.: *Ciencia, incertidumbre y conciencia. Heisenberg*. Editorial Nivola: Madrid, 2004.
- French, S.: «Models and Mathematics in Physics: The Role of Group Theory», en J. Butterfield & C. Pagonis (eds.), *From Physics to Philosophy*. Cambridge University Press: Cambridge, 1999, pp. 187-207.
- French, S. & Ladyman, J.: «Remodelling Structural Realism: Quantum Physics and the Metaphysics of Structure» en *Synthese*, nº 136, 2003, pp. 31-56.
- Gadella, M. & Gómez, F.: «A Unified Mathematical Formalism for the Dirac Formulation of Quantum Mechanics» en *Foundations of Physics*, nº 32/6, 2002, pp. 815-845.
- Hilbert, D., Nordheim, L. & Von Neumann, J.: «Über die Grundlagen der Quantenmechanik» en *Mathematische Annalen*, nº 98, 1927, pp. 1-30.
- Jammer, M.: *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. Tomash Publishers: American Institute of Physics, 1989.
- Jordan, P.: «Über eine neue Begründung der Quantenmechanik (I y II)» en *Z. Physik*, nº 40 y 44, 1927, pp. 809-838 y 1-25.
- Ladyman, J.: «What Is Structural Realism?» en *Studies in the History and Philosophy of Science*, nº 13, 1998, pp. 99-117.
- Ladyman, J.: «Structural Realism» en *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <http://plato.stanford.edu/entries/structural_realism/>, 2007.
- Lanczos, C.: «On a field theoretical representation of the new quantum mechanics» en *Z. Physik*, nº 35, 1926, pp. 812-830.
- Madrid Casado, C. M.: «Ochenta años de la equivalencia entre Mecánicas Cuánticas» en *Revista Española de Física*, nº 20/3, 2006, p. 57.
- Madrid Casado, C. M.: «De la equivalencia matemática entre la Mecánica Matricial y la Mecánica Ondulatoria» en *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, nº 10/1, 2007, pp. 103-128.

- Madrid Casado, C. M.: «A brief history of the mathematical equivalence between the two quantum mechanics», *Latin American Journal of Physics Education*, nº 2/2, 2008, pp. 104-108.
- Madrid Casado, C. M.: «Do mathematical models represent the World? The case of quantum mathematical models», en José L. González Recio (ed.), *Nature & Life. Philosophical Essays on Physics and Biology*. Georg Olms Verlag: Hildersheim, 2009 (en prensa).
- Mehra, J. & Rechenberg, H.: *The Historical Development of Quantum Theory. Dirac*. Springer Verlag: Nueva York, 1982.
- Melsheimer, O.: «Rigged Hilbert Space Formalism as an Extended Mathematical Formalism for Quantum Systems» en *Journal of Mathematical Physics*, nº 15, 1972, pp. 902-926.
- Muller, F. A.: «The Equivalence Myth of Quantum Mechanics (I & II)» en *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, nº 28/1 y 28/2, 1997, pp. 35-61 y 219-247.
- Psillos, S.: «Is structural realism the best of both worlds?» en *Dialéctica*, nº 49, 1995, pp. 15-46.
- Psillos, S.: *Scientific Realism: How Science Tracks Truth*. Routledge: London, 1999.
- Psillos, S.: «The Structure, the Whole Structure, and Nothing but the Structure» en *Philosophy of Science*, nº 73, 2006, pp. 560-570.
- Roberts, J.: «Rigged Hilbert Space in Quantum Mechanics» en *Communications in Mathematical Physics*, nº 3, 1966, pp. 98-119.
- Schrödinger, E.: *Collected Papers on Wave Mechanics*. Chelsea Publishing Company: Nueva York, 1982.
- Stone, M. H.: «Linear transformations in Hilbert space. Operational methods and group theory» en *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, nº 16, 1930, pp. 172-175.
- Summers, S. J.: «On the Stone-Von Neumann uniqueness theorem and its ramifications», en M. Redéi (ed.), *John von Neumann and the Foundations of Quantum Mechanics*. Kluwer: Dordrecht, 2006, pp. 135-152.
- Van der Waerden, B. L. (ed.): *Sources of Quantum Mechanics*. Dover: Nueva York, 1966.
- Von Neumann, J.: «Mathematische Begründung der Quantenmechanik» en *Nachrichten Göttingen*, 1927, pp. 1-57.
- Von Neumann, J.: «Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren» en *Mathematische Annalen*, nº 104, 1931, pp. 570-578.
- Von Neumann, J.: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer: Berlín, 1932.
- Weyl, H.: *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Hirzel: Leipzig, 1928.

- Worrall, J.: «Structural Realism: The Best of Both Worlds?» en *Dialectica*, nº 43, 1989, pp. 9-124.
- Worrall, J.: «How to Remain (Reasonably) Optimistic: Scientific Realism and the “Luminiferous Ether”», en D. Hull, M. Forbes & R. M. Burian (eds.), *PSA 1994 Vol. 1*. Philosophy of Science Association: East Lansing, 1994, pp. 334-342.