

REVISTA
DE LA
ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES
DE
ZARAGOZA

SERIE 2.º

TOMO XV

FASCICULO 1.º



1960

INDICE

	<u>Págs.</u>
BALTASAR R.-SALINAS. — <i>Solución del problema de equivalencia de clases de funciones con desarrollo asintótico</i>	5
JOSÉ L. VIVIENTE. — <i>Sobre las componentes conexas del espacio funcional X^2</i>	9
A. SEGURA SANZ. — <i>Geometría métrica de las redes. Algunos conceptos primarios: paralelismo, alineación, compresión y comprobación de fórmulas trigonométricas</i>	15
LUIS GARCÍA DE VIEDMA ALONSO. — <i>Estructura de anillos con unidades parciales</i>	25
RAFAEL CID PALACIOS. — <i>Método de cálculo de órbitas elípticas en estrellas dobles visuales y aplicación al par ADS 13169</i>	37
A. T. GALINDO. — <i>Sobre un teorema de Albertoni, Bocchieri y Loinger concerniente al carácter aleatorio y débilmente uniforme de las densidades de Liouville</i>	51
L. M. GARRIDO, F. GASCÓN y F. J. SANCHO. — <i>Teoría general de perturbaciones en Mecánica Clásica</i>	57
FRANCISCO GASCÓN LATASA. — <i>Estudio dinámico del plasma termónuclear</i>	63

SOLUCION DEL PROBLEMA DE EQUIVALENCIA DE CLASES DE FUNCIONES CON DESARROLLO ASINTOTICO

p o r

BALTASAR R.-SALINAS

Dado un conjunto del plano completo Z (completado), un punto z_0 perteneciente a la clausura $\bar{\Omega}$ de Ω y una sucesión positiva $\{m_n\}$, designamos por $C_z \{m_n\}$ a la clase de funciones complejas $f(z)$, que admiten un desarrollo asintótico $\sum_{v=0}^{\infty} a_v (z - z_0)^v$ tal que

$$\left| f(z) - \sum_{v=0}^{n-1} a_v (z - z_0)^v \right| \leq Mq^n m_n |z - z_0|^n \quad (1)$$

para todo $z \in \Omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y dos constantes positivas M y q dependientes de f . En particular,

$$|a_n| \leq Mq^n m_n \quad (2)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$. Con objeto de simplificar la notación tomaremos $z_0 = 0$.

En esta comunicación vamos a determinar cuando $C_0 \{m_n\} = C_0 \{m'_n\}$. Para que se verifique esto es suficiente que

$$0 < \underline{\lim} \sqrt{\frac{m'_n}{m_n}} \leq \overline{\lim} \sqrt{\frac{m'_n}{m_n}} < + \infty \quad (3)$$

pero no necesario. Por ejemplo, si Ω es un ángulo $\{z \mid |\arg z| < \alpha\pi/2\}$ de amplitud $\alpha\pi < 2\pi$ y si

$$m_n = 1 \quad \text{y} \quad m'_n = \frac{1}{n^{(2-\alpha)n}} \quad (m'_0 = 1)$$

para n par y

$$m_n = \frac{1}{n^{(2-\alpha)n}} \quad \text{y} \quad m'_n = 1$$

para n impar, según hemos demostrado en [6] las clases $C_0 \{m_n\}$ y $C_0 \{m'_n\}$ son idénticas a $C_0 \{n^{(\alpha-2)n}\}$ y, sin embargo no satisfacen (3).

Visto esto, vamos a indicar cómo se resuelve este problema cuando Ω sea un conjunto conexo que verifique ciertas condiciones bastante amplias.

Supongamos Ω acotado y designemos por B la componente de $Z - \bar{\Omega}$ que contiene el punto ∞ . Entonces existe una función analítica

En particular, si $U(x, y, z) \equiv 1$, es $\frac{dU}{dn} \equiv 0$, y por consiguiente es válida la demostración citada es decir:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{dG}{dn} d\sigma = 1 \quad (a, b, c) \in V \quad (a, b, c) \notin \Sigma. \quad (2)$$

El motivo de la presente Nota es demostrar la validez de (1) en el caso que U no sea derivable².

La demostración se descompondrá en dos partes: a) Que (1) es función armónica de a, b, c en el interior de V . b) Que si

$$(a, b, c) \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$$

interiormente a V es $\lim U(a, b, c) = U(x_0, y_0, z_0)$.

Demostración de a)

(1) se puede escribir

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} U \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} U \frac{dg}{dn} d\sigma \quad (3)$$

donde la primera integral es un potencial de doble capa, y la segunda es evidentemente una función armónica en el interior de V (derivando bajo el signo integral respecto a a, b, c , resulta inmediatamente). Por tanto (1) es armónica de a, b, c en el interior de V . q. e. d.

Demostración de b)

La integral

$$\iint_{\Sigma} [U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)] \frac{dG}{dn} d\sigma \quad (4)$$

es uniformemente convergente en el dominio del punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Observemos ante todo que si en la función de Green el punto (a, b, c) es un punto fijo Σ ella es, como función de x, y, z , idénticamente nula. En efecto: Si $(x, y, z) \notin \Sigma$ es consecuencia inmediata de las propiedades 1.^a y 3.^a, para $(x, y, z) \in \Sigma$ y distinto de (a, b, c) , resulta de la 2.^a, y de la 4.^a se deduce que en este caso es

$$g(x, y, z; a, b, c) \equiv -\frac{1}{r} \text{ por tanto también es válida para}$$

$$(x, y, z) = (a, b, c) \in \Sigma.$$

De aquí se deduce que las integrales que aparecen en (1) y (2), tienen sentido y son nulas cuando $(a, b, c) \in \Sigma$.

Para demostrar que (4) es uniformemente convergente en el dominio del punto M_0 , consideremos una porción Σ' de Σ conteniendo M_0 , suficientemente pequeña para que sobre ella se verifique $|U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)| < \epsilon$.

² En el caso de dos variables independientes está demostrado en Goursat, loc. cit., párrafo 518, pág. 217 basándose en la representación conforme, no generalizable a tres variables.

y una esfera de centro M_0 y radio ρ conteniendo Σ' en su interior, tendremos para $|(a, b, c) - (x_0, y_0, z_0)| < \rho$

$$\left| \iint_{\Sigma'} [U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)] \frac{dG}{dn} d\sigma \right| < \varepsilon \iint_{\Sigma'} \left| \frac{dG}{dn} \right| d\sigma \quad (5)$$

la integral que aparece en el segundo miembro está, evidentemente acotada, y de aquí resulta la convergencia uniforme.

Mediante el razonamiento clásico resulta que la expresión (4) es continua de a, b, c , en M_0 y nula en este punto³.

Ahora bien, si $P(a, b, c)$ interior a V tiende a $M_0(x_0, y_0, z_0)$, y de la demostrada continuidad de (4), tendremos

$$\lim \iint_{\Sigma} U(x, y, z) \frac{dG}{dn} d\sigma = \lim \iint_{\Sigma} U(x_0, y_0, z_0) \frac{dG}{dn} d\sigma \quad (6)$$

y, en virtud de (1) y (2)

$$\lim U(a, b, c) = U(x_0, y_0, z_0) \quad (7)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Las mismas consideraciones pueden hacerse para el problema de Dirichlet exterior. La función de Green exterior debe verificar las propiedades indicadas para la interior, más la de ser nula para $P(a, b, c)$ en el infinito.

En (1) tomando como G la función de Green exterior, y $\frac{dG}{dn}$ la derivada según la dirección de la normal exterior, resuelve el problema exterior y es nula en el infinito, ya que lo es $\frac{dG}{dn}$ (por ser derivada de una constante)

La demostración es la misma que para el problema interior.

³ Cfr. Goursat, loc. cit., párrafo 504, pág. 174 y sgts.

SOBRE LAS COMPONENTES CONEXAS DEL ESPACIO FUNCIONAL X^X

p o r

JOSÉ L. VIVIENTE

“En las líneas que siguen determinamos, salvo un isomorfismo, las clases de aplicaciones del espacio funcional X^X , es decir $\pi_0(X^X)$, valiéndonos únicamente del invariante de Eilenberg-MacLane del espacio topológico separado y conexo por arcos X . El caso general demasiado ambicioso, nos limitamos a aquel en que X no posee más que dos grupos de homotopía no nulos”.

INTRODUCCIÓN Y NOTACIONES

Con X^X se designa siguiendo a Bourbaki el espacio funcional de las aplicaciones continuas de X en X ; este espacio funcional le suponemos provisto de la topología “compacto-abierto”.

Dados un entero $n \geq 1$ y un grupo abeliano π , un espacio conexo por arcos X se dice que es un complejo de Eilenberg-MacLane $K(\pi, n)$ [1], si $\pi_n(X) = \pi$, y $\pi_i(X) = 0$ para todo $i \geq 0$ e $i \neq n$. El tipo de homotopía de estos espacios es el mismo, y entre ellos existe un complejo simplicial.

Designaremos con $\pi = \pi_m(X)$ y $\bar{\pi} = \pi_n(X)$, $1 < m < n$, los dos únicos grupos de homotopía no nulos de nuestro espacio topológico X .

El trabajo se desarrolla en la categoría de los CW-complejos, es decir los espacios topológicos que intervienen son tales que, si designamos con $|S(X)|$ la realización geométrica del complejo singular total $S(X)$ del espacio X , la aplicación canónica $|S(X)| \rightarrow X$ induzca un isomorfismo entre los grupos de homotopía correspondientes.

Recordaremos que el tipo de homotopía del espacio en estudio X está caracterizado por el invariante de Eilenberg-MacLane $\xi \in H^{n+1}(\pi, m; \bar{\pi})$, pues si, por ejemplo asociamos al espacio X su sistema de Postnikov $\mathcal{C}(X) \{X^i, X^{i-1}, p_i\}$ [2], sucesión de espacios fibrados de Postnikov-Moore, que en nuestro caso son tales que, para todo $i < n$ los X^i pertenecen al mismo tipo de homotopía que el complejo de Eilenberg-MacLane $K(\pi, m)$ mientras que X^n es un espacio fibrado sobre X^m cuya fibra es $K(\bar{\pi}, n)$, (ξ es así la primera obstrucción no nula de nuestro espacio X), es claro pues que al darnos el invariante de Eilenberg-MacLane $\xi \in H^{n+1}(\pi, m; \bar{\pi})$ o lo que es

equivalente una clase de aplicaciones homótopas de $\text{Hom} (K (\pi, m); K (\bar{\pi}, n+1))$, como $K (\bar{\pi}, n+1)$ es el espacio clasificante [3] para el grupo $\bar{\pi}$ o mejor para $K (\bar{\pi}, n)$ se sigue que nuestro espacio fibrado (luego X en sentido functorial) pertenece al mismo tipo de homotopía que el espacio fibrado imagen recíproca del espacio fibrado universal $L (\bar{\pi}, n) = K (\bar{\pi}, n) \times \times_{\tau_0} K (\pi, m)$ es decir que el espacio $K (\bar{\pi}, n) \times_{\tau} K (\pi, m)$ en donde la función "torsora" τ [4] está dada por $\tau_0 \circ \eta$ siendo η un elemento de la clase correspondiente a ξ en $\text{Hom} (K (\pi, m); K (\bar{\pi}, n+1))$.

Dado el carácter functorial de los espacios $K (\pi, n)$ como funtores covariantes de la categoría de los grupos abelianos \mathcal{G}_a en la de los complejos simpliciales C. S. S. (antigua semi-simplicial) se puede asociar a cada $u \in \text{Aut.} (\pi)$ una bien determinada aplicación simplicial que designaremos también u (por abuso del lenguaje) perteneciente al espacio funcional simplicial $K (\pi, m)^{K(\pi, m)}$.

Se hace uso también del hecho bien conocido que se deduce del isomorfismo existente entre $W (K (\bar{\pi}, n))$ y $K (\bar{\pi}, n+1)$ y que consiste en asociar de un modo *natural* a todo automorfismo $v \in \text{Aut.} (\bar{\pi})$ una aplicación simplicial que, por abuso también del lenguaje, seguiremos designando v perteneciente al espacio funcional simplicial $K (\bar{\pi}, n+1)^{K(\bar{\pi}, n+1)}$.

1. Caracterización de los automorfismos de $\pi(X)$ realizables

En virtud de las hipótesis hechas sobre el espacio X en estudio es $\pi_i(X) = 0$ para todo $i \neq m, n$, luego $\text{Aut.} (\pi(X)) = \text{Aut.} (\bar{\pi}) \oplus \text{Aut.} (\pi)$.

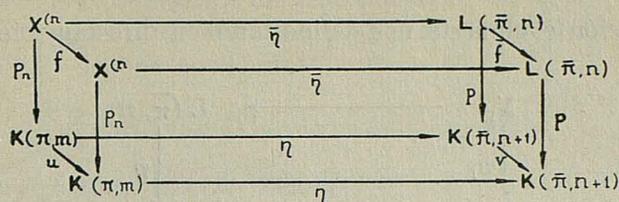
Si $f \in X^X$, designamos con $f_m \in \text{Aut.} (\pi)$ y $f_n \in \text{Aut.} (\bar{\pi})$ las aplicaciones canónicas inducidas en $\text{Aut.} (\pi(X))$.

PROPOSICIÓN 1. *Dados los automorfismos $u \in \text{Aut.} (\pi)$ y $v \in \text{Aut.} (\bar{\pi})$, la condición necesaria y suficiente para que exista (determinada salvo una homotopía) una aplicación continua f perteneciente al espacio funcional X^X tal que $f_m = u$, y $f_n = v$, es que $v \circ \eta = \eta \circ u$, en donde η pertenece a la clase correspondiente al invariante de Eilenberg-MacLane ξ en $\text{Hom.} (K (\pi, m); K (\bar{\pi}, n+1))$.*

Demostración:

Condición suficiente, supongamos que exista $f \in X^X$ que induce $f_m = u$, $f_n = v$, luego una $u \in K (\pi, m)^{K(\pi, m)}$ y una $v \in K (\bar{\pi}, n)^{K(\bar{\pi}, n)}$ por tanto un $K (\pi, m)$ -automorfismo de $X^n \simeq K (\bar{\pi}, n) \times_{\tau} K (\pi, m)$ y un $K (\pi, m)$ -isomorfismo entre los CW-complejos del mismo tipo de homotopía que nuestro espacio X .

Si consideramos las proyecciones de los espacios fibrados de Pottsikov-Moore $p_m: X^n \rightarrow K (\pi, m)$ y $p: L (\bar{\pi}, n) \rightarrow K (\bar{\pi}, n+1)$ se tiene el diagrama conmutativo



ya que trivialmente, $p_m \circ f = u \circ p_m$ y $p \circ \bar{f} = v \circ p$ (con \bar{f} se designa la aplicación simplicial del fibrado universal $L(\bar{\pi}, n)$ en sí mismo, prolongación de la aplicación v de su espacio base), como así mismo $\eta \circ p_m = p \circ \eta$ por ser el diagrama rectangular correspondiente cartesiano. Ello nos dice, mirando el diagrama rectangular inferior, que se tiene la relación $\eta \circ u = v \circ \eta$ como queríamos probar.

Condición necesaria, supongamos que dados $u \in \text{Aut.}(\pi)$, $v \in \text{Aut.}(\bar{\pi})$ y η perteneciente a la clase en $\text{Hom.}(K(\pi, m); K(\bar{\pi}, n+1))$ correspondiente al invariante de Eilenberg-MacLane ξ se verifique la relación $v \circ \eta = \eta \circ u$, veamos que entonces existe una $f \in X^X$ determinada salvo una homotopía.

Como se ha visto, la aplicación v nos determina el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L(\bar{\pi}, n) & \longrightarrow & L(\bar{\pi}, n) \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ K(\bar{\pi}, n+1) & \xrightarrow{v} & K(\bar{\pi}, n+1) \end{array}$$

análogamente η nos determina X (salvo una homotopía) en el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & L(\bar{\pi}, n) \\ \downarrow p_m & & \downarrow p \\ K(\pi, m) & \xrightarrow{\eta} & K(\bar{\pi}, n+1) \end{array} \tag{1}$$

de donde por composición se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v} & L(\bar{\pi}, n) \\ \downarrow p_m & & \downarrow p \\ K(\pi, m) & \xrightarrow{v \circ \eta} & K(\bar{\pi}, n+1) \end{array}$$

pero la aplicación compuesta nos define también directamente el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \longrightarrow & L(\bar{\pi}, n) \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow p \\
 K(\pi, m) & \longrightarrow & K(\bar{\pi}, n+1)
 \end{array} \quad (2)$$

de donde, teniendo en cuenta el carácter universal de la noción de espacio fibrado imagen recíproca, se deduce la existencia de una y una sola aplicación continua

$$\varphi: X \longrightarrow X_1 \quad (3)$$

determinada salvo una homotopía y tal que $p_m = \varphi \circ p_1$, $v = v_1 \circ \varphi$.

Asimismo la aplicación u nos determina el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc}
 X_2 & \xrightarrow{\mu} & X \\
 \downarrow p_2 & & \downarrow \xi p_m \\
 K(\pi, m) & \xrightarrow{u} & K(\pi, m)
 \end{array} \quad (4)$$

que compuesto con el diagrama (1) nos da el diagrama cartesiano correspondiente a la aplicación compuesta $\eta \circ u$

$$\begin{array}{ccc}
 X_2 & \longrightarrow & L(\bar{\pi}, n) \\
 \downarrow p_2 & & \downarrow p \\
 K(\pi, m) & \xrightarrow{\eta \circ u} & K(\bar{\pi}, n+1)
 \end{array}$$

que comparado con el diagrama (2) teniendo en cuenta que por hipótesis $v \circ \eta = \eta \circ u$ nos dice que X_1 y X_2 son $K(\pi, m)$ -isomorfos existiendo una única aplicación $i: X_1 \longrightarrow X_2$ representante de este isomorfismo.

Se sigue, pues, la existencia de una aplicación $f \in X^X$ definida como composición de las aplicaciones: φ de (3), μ de (4), e i , precisamente $f = \mu \circ i \circ \varphi$, que es determinada, por tanto, salvo una homotopía.

En lo sucesivo designaremos con $\text{Aut}_\xi(\pi(X))$ el subgrupo abeliano de los automorfismos de $\pi(X)$ que admiten una realización por una función continua, determinada salvo una homotopía, del espacio funcional de las aplicaciones continuas de un espacio topológico X , separado, en sí mismo.

Consideremos la aplicación natural

$$\psi: \pi_0(X^X) \longrightarrow \text{Aut}_\xi(\pi(X)) \quad (5)$$

que a la clase de $f \in X^X$ asocia los automorfismos $f_i \in \text{Aut}_\xi(\pi_i(X))$ para todo $i \geq 0$. La Proposición 1 nos ha caracterizado la imagen de ψ como con-

junto, en cuanto a la estructura de grupo abeliano se sigue [5] si observamos que la imagen de ψ , es decir $\text{Aut}_{\xi}(\pi(X))$, coincide con el núcleo del homomorfismo de grupos abelianos

$$\xi: \text{Aut.}(\pi(X)) \longrightarrow H^{n+1}(\pi, m; \bar{\pi})$$

aplicación que se define haciendo corresponder a todo par $u, v \in \text{Aut.}(\pi(X))$ el elemento $\xi \circ u - v \circ \xi$ de $H^{n+1}(\pi, m; \bar{\pi})$, y donde con $\bar{\xi}$ se designa como de costumbre el invariante de Eilenberg-MacLane.

2. Teorema fundamental

TEOREMA. *Dado un espacio topológico separado X , con sólo los grupos de homotopía para las dimensiones m y n ($m, n > 1$) distintos de cero, se verifica que el conjunto de las clases de aplicaciones homotopas del espacio funcional X^X es isomorfo, no canónicamente, al producto directo $H^n(\pi, m; \bar{\pi}) \times \text{Aut}_{\xi}(\pi(X))$.*

Demostración: Hemos visto que la proposición 1 nos ha caracterizado la imagen de ψ , es claro que el conjunto $\pi_0(X^X)$ quedará conocido salvo un isomorfismo si determinamos el núcleo de la aplicación ψ , ello resulta del siguiente

LEMA 1. *El conjunto $\pi_0(X^X)$ admite el grupo abeliano $H^n(\pi, m; \bar{\pi})$ como grupo de operadores por la izquierda.*

En efecto: Designemos con ξ el espacio fibrado de Postnikov-Moore X^n asociado a X , sean f, g representantes de dos clases distintas del conjunto $\pi_0(X^X)$, haciendo en el Lema 2 $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, y ser aquí la aplicación $h \in \text{Hom.}(B_1, G_2)$ perteneciente a $H^n(\pi, m; \bar{\pi})$ ya que este conjunto es, como se sabe, isomorfo al $\text{Hom.}(K(\pi, m), K(\bar{\pi}, n))$ el Lema 1 sigue sin más que asociar a la clase de f en $\pi_0(X^X)$ la clase de la aplicación $g \in X^X$ definida por $(h \circ p, f)$, donde con $p: X^n \longrightarrow X^{n-1}$ expresamos la proyección del espacio fibrado de Postnikov-Moore asociado a X .

Es inmediato que si $e \in H^n(\pi, m; \bar{\pi})$ es el elemento unidad se tiene $(e \circ p, f) = f$, y que para todo par $h, q \in H^n(\pi, m; \bar{\pi})$ se verifica

$$(h \circ p, (q \circ p, f)) = (h \cdot q \circ p, f).$$

La demostración del Teorema es ahora inmediata pues en la aplicación natural (5) como $H^n(\pi, m; \bar{\pi})$ no opera sobre el grupo de los automorfismos de $\pi(X)$, resulta que dos clases de aplicaciones f, g pertenecientes a $\pi_0(X^X)$ congruentes módulo $H^n(\pi, m; \bar{\pi})$ dan la misma imagen por ψ , luego el núcleo de ψ es isomorfo al grupo abeliano $H^n(\bar{\pi}, m; \pi)$, y por tanto que $\pi_0(X^X)$ es isomorfo, no canónicamente el conjunto $H^n(\bar{\pi}, m; \pi) \times \text{Aut.}(\pi(X))$.
C. q. d.

Lema utilizado en la demostración del lema 1:

LEMA 2. Sean $\xi_1 (E_1, B_1, p_1, G_1)$, $i = 1, 2$, dos espacios fibrados principales. Sean f y g dos aplicaciones continuas de ξ_1 en ξ_2 tales que sus restricciones al espacio base B_1 y a la fibra G_1 sean iguales. Entonces existe una y sólo una aplicación $h: B_1 \longrightarrow G_2$ tal que para todo $x \in E_1$ es

$$(h \circ p_1, f)(x) = g(x).$$

En efecto:

Designemos con $f = f|_{B_1}$ y $g = g|_{B_1}$ las respectivas restricciones del enunciado. Si $b_1 \in B_1$ sea $F_{b_1} = p_1^{-1}(b_1)$, a todo $x \in F_{b_1}$ le corresponde por f y g los elementos $f(x), g(x) \in F_{b_2}$ donde es $F_{b_2} = p_2^{-1}(b_2)$ y $b_2 = f(b_1) = g(b_1)$.

Por ser ξ_2 un espacio fibrado principal G_2 opera sobre E_2 de modo simplemente transitivo, es decir, existe un y un solo elemento $g_2 \in G_2$ tal que $g_2 \cdot f(x) = g(x)$; entonces la aplicación $h: B_1 \longrightarrow G_2$ queda definida por $h(b_1) = g_2$.

Es preciso demostrar aun, que este elemento $g_2 \in G_2$ así obtenido, es independiente del elemento $x \in F_{b_1}$ elegido para definirlo. Pero ello es inmediato, pues si $y \in F_{b_1}$ es otro elemento distinto de x , entonces también $f(y), g(y) \in F_{b_2}$ existiendo un y un sólo elemento $g_2' \in G_2$ tal que $g_2' \cdot f(y) = g(y)$, y como $f|_{G_1} = g|_{G_1}$ resulta es $g_2' = g_2$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Eilenberg and S. MacLane. Relations between homology and homotopy groups of spaces. I Ann. of Math., vol. 46, 1945, p. 480-509; II íd., vol. 51, 1950, p. 514-533.
- [2] M. M. Postnikov, Doklady A. N. S. S. S. R., 76, n.º 3, 1951, p. 359-362 y número 6, p. 789-791; 79, n.º 4, p. 573-576 (en ruso).
- [3] J. Milnor. Ann. Math., 63, n.º 3, 1956, p. 430-436.
- [4] H. Cartan. Sem. E. N. S. 1956-57 conf. 4. París, 1957.
- [5] J. L. Viviente Mateu. Sur la classification des applications continues d'un espace dans un autre. Comp. Rendus Ac. Sc. París, t. 252, p. 4.096-4097 (1961).

El autor agradece a M. Shih Weishu las discusiones sobre el tema.

GEOMETRIA METRICA DE LAS REDES ALGUNOS CONCEPTOS PRIMARIOS: PARALELISMO, ALINEACION, COMPRESION Y COMPROBACION DE FORMULAS TRIGONOMETRICAS

p o r

A. SEGURA SANZ

RESUMEN

Se obtienen las condiciones de paralelismo eléctrico que caracterizan un cuadripolo isomorfo con un trapecio.

Se define la transformación geométrica correspondiente a la proyección de una figura en una dirección integrada por una componente en el espacio de la figura y otra normal a ese espacio.

* * *

En un anterior trabajo (1), ya se hizo uso del isomorfismo (2) existente entre las redes eléctricas y las figuras geométricas, con objeto de haciendo uso de procedimientos eléctricos, demostrar ciertas propiedades geométricas conocidas, y generalizarlas a un espacio de n dimensiones.

A continuación se pretende dar algunos conceptos de inmediata aplicación en las redes, como isomorfos de otros geométricos de singular importancia, así como una muestra de la facilidad con que pueden manejarse, en el estudio de la teoría del cuadripolo.

Comenzaremos por el concepto de paralelismo, entre dos segmentos cuyos extremos son isomorfos de las cuatro bornas de un cuadripolo.

Sea el cuadripolo de la figura, en el que a la impedancia propia de las bornas (1, 1') la llamaremos Z_1 y lo mismo a la de las bornas (2, 2') Z_2 y llamemos así mismo Z_{12} a la impedancia de transferencia entre las bornas (1, 1') y (2, 2').

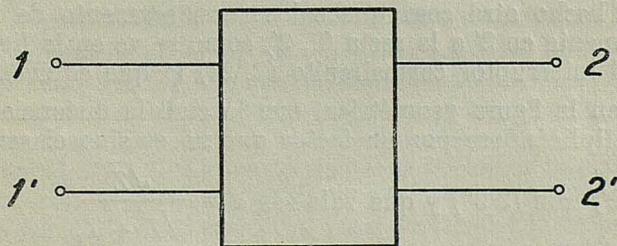


FIG. 1

Si en la figura isomorfa se verifica que las rectas correspondientes a los polos (1, 1') y (2, 2') son paralelas, su producto escalar será el producto de las distancias entre ellos, que son respectivamente, las raíces cua-

dradas de las impedancias propias Z_1 y Z_2 ; es decir, la condición de paralelismo se traduce a la red eléctrica en la condición:

$$Z_{12} = \sqrt{Z_1 Z_2} \rightarrow Z_{12}^2 = Z_1 \cdot Z_2$$

Queda pues entendido, que cuando en un cuadripolo se verifica dicha condición, podemos decir, que sus bornas de entrada y salida son paralelas.

Veamos ahora a qué nos lleva esta condición obtenida.

Si en este caso cortocircuitamos $(2, 2')$, por ser paralela a $(1, 1')$ también quedan cortocircuitadas las bornas $(1, 1')$. Esto nos hace pensar en el transformador perfecto que también cumple esta condición.

Vamos a ver qué es lo que sucede cuando en una red se actúa sobre un par de bornas shuntándolas con una cierta impedancia suponiendo que existen entre ellas y las demás ciertas relaciones de paralelismo según los casos.

Supongamos ahora que en el cuadripolo de la figura, se ha provisto la impedancia Z en la forma indicada, con un interruptor I ; con la notación de antes veamos cómo se reduce la impedancia Z_1 al conectar el shunt Z en $(2, 2')$ suponiendo que $(1, 1')$ y $(2, 2')$ sean paralelos, es decir, que:

$$Z_{12}^2 = Z_1 \cdot Z_2$$

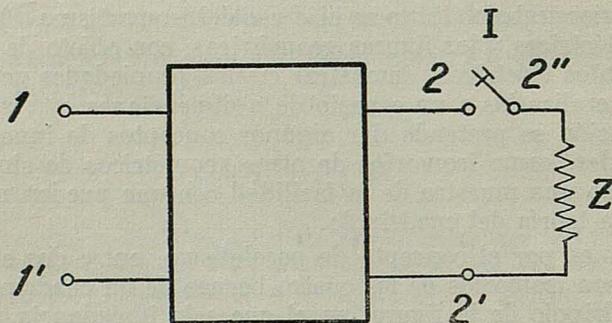


FIG. 2

Si pasamos a la figura geométrica veremos que con el interruptor abierto, no hemos hecho otra cosa que colocar un segmento de longitud \sqrt{Z} perpendicularmente en $2'$ a la recta $(2, 2')$ como se ve en la figura; por tanto al cerrar el interruptor cortocircuito $(2, 2'')$ lo que equivale a proyectar según $(2, 2'')$ en la figura geométrica, con lo cual la distancia $(2, 2') = \sqrt{Z_2}$ se reduce multiplicándose por un factor que no es sino el seno del ángulo

que forma $(2, 2')$ con $(2, 2'')$ y que vale $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{Z} + Z_2}$

$$\text{por tanto } \sqrt{Z_2'} = \sqrt{Z_2} \cdot \frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{Z} + Z_2}$$

elevando al cuadrado pasamos a la figura eléctrica: $Z_2' = Z_2 \frac{Z}{Z + Z_2}$.

El factor de reducción para las bornas (1 1') y (2 2') es el mismo por ser paralelas es decir:

$$Z_1' = Z_1 \frac{Z}{Z + Z_2}$$

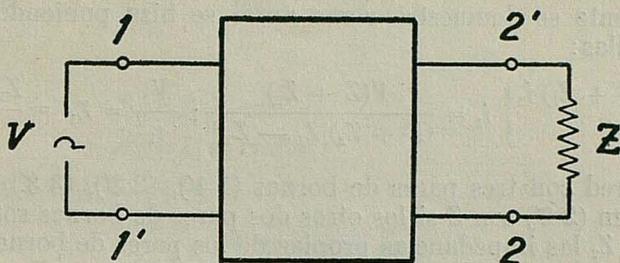


FIG. 3

Esto puede demostrarse eléctricamente de esta forma

$$\left. \begin{aligned} 0 &= Z_{12} i_1 + (Z + Z_2) i_2 \\ V &= Z_1 i_1 + Z_{12} i_2 \end{aligned} \right\} i_1 = \frac{V(Z + Z_2)}{(Z + Z_2) Z_1 - Z_{12}^2}; \quad Z_{12}^2 = Z_1 Z_2$$

$$i_1 = \frac{V(Z + Z_2)}{Z Z_1}; \quad \frac{V}{i_1} = Z_1' = \frac{Z}{Z + Z_2} : Z_1$$

Supongamos ahora un caso análogo, pero en el que ya no se cumple que $Z_{12}^2 = Z_1 Z_2$ es decir que (1 1') y (2 2') ya no son paralelas, y busquemos cuál es el factor por el que se reduce la impedancia propia de las bornas (1, 1') cuando comprimimos con una impedancia Z , esto es cuando shuntamos las bornas (2, 2') con Z . Lo haremos primero geoméricamente, y después lo comprobaremos eléctricamente.

Como hemos dicho al cerrar el interruptor I lo que hacemos es proyectar según (2 2'') en la figura geométrica siendo en cada caso (2' 2'') un segmento de longitud \sqrt{Z} perpendicular al hiperplano que determinan (11' 22').

Vamos a ver cuál es el factor de reducción para las bornas (1 1') que no es otro que el seno del ángulo que forman las rectas (1 1') y (2 2'') y que se puede encontrar por medio de la impedancia de transferencia entre los dos pares de bornas. Esta impedancia de transferencia es la misma que la que existe entre (1 1') y (2 2') puesto que al conectar la impedancia Z con el interruptor abierto; la corriente en (1 1') no varía y la tensión en (2 2'') es la misma que en (2 2') pues por Z no pasa corriente; la impedancia propia de (1 1') no varía, y sigue siendo Z_1 pero la propia de (2 2'') es $Z_2 + Z$ por tanto en el isomorfismo la impedancia de transferencia Z_{12} es el producto escalar:

$$\sqrt{Z_1} \sqrt{Z_2 + Z} \cos \alpha = Z_{12}; \quad \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \frac{Z_{12}^2}{Z_1(Z_2 + Z)}} = \sqrt{\frac{Z_1(Z_2 + Z) - Z_{12}^2}{Z_1(Z_2 + Z)}}$$

y entonces $\sqrt{Z_1'} = \sqrt{Z_1} \cdot \text{sen } \alpha$ pasando a la figura eléctrica

$$Z_1' = Z_1 \frac{Z_1(Z_2 + Z) - Z_{12}^2}{Z_1(Z_2 + Z)}$$

Eléctricamente se demuestra como antes se hizo poniendo las ecuaciones de las mallas:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= Z_{12} i_1 + (Z + Z_2) i_2 \\ V &= Z_1 i_1 + Z_{12} i_2 \end{aligned} \right\} i_1 = \frac{V(Z + Z_2)}{(Z + Z_2) Z_1 - Z_{12}^2}; \quad \frac{V}{i_1} = Z_1' = \frac{Z_1(Z_2 + Z) - Z_{12}^2}{Z_2 + Z}$$

Dada una red con tres pares de bornas (1 1'), (2 2'), (3 3') veamos cómo al comprimir en (2 2') con Z si los otros dos pares de bornas son paralelos es decir $Z_{13}^2 = Z_1 Z_3$ las impedancias propias de los pares de bornas (1 1'), (3 3') se reducen en la misma magnitud, esto es los factores de reducción son iguales.

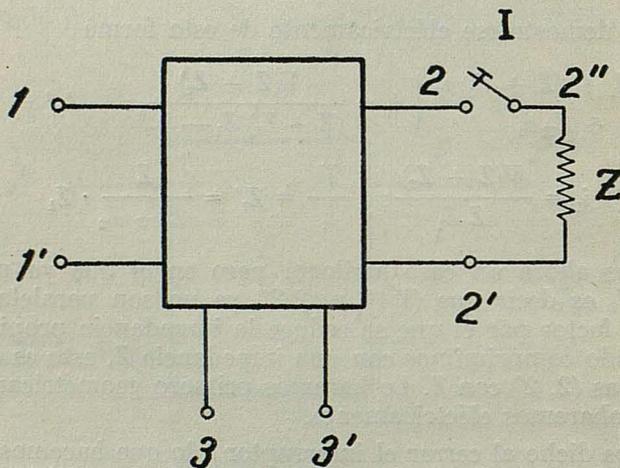


FIG. 4

El factor de reducción para (1 1') según se ha obtenido nos daba que:

$$Z_1' = \frac{Z_1(Z_2 + Z) - Z_{12}^2}{Z_1(Z_2 + Z)} \cdot Z_1$$

Análogamente para (3 3')

$$Z_3' = \frac{Z_3(Z_2 + Z) - Z_{32}^2}{(Z_2 + Z) Z_3} \cdot Z_3$$

igualando los factores se tiene:

$$\frac{Z_1(Z_2 + Z) - Z_{12}^2}{Z_1(Z_2 + Z)} = \frac{Z_3(Z_2 + Z) - Z_{32}^2}{(Z_2 + Z) Z_3}$$

simplificando :

$$1 - \frac{Z_{12}^2}{Z_1(Z_2 + Z)} = 1 - \frac{Z_{32}^2}{Z_3(Z_2 + Z)}$$

queda

$$\frac{Z_{12}^2}{Z_1} = \frac{Z_{32}^2}{Z_3}$$

como

$$\left. \begin{aligned} Z_{12}^2 &= Z_1 Z_2 \cos^2 \alpha_1 \\ Z_{32}^2 &= Z_3 Z_2 \cos^2 \alpha_2 \end{aligned} \right\} \text{con } \alpha_1 = \alpha_2$$

por ser paralelas (1 1') y (3 3')

$$\frac{Z_1 Z_2 \cos^2 \alpha}{Z_1} = \frac{Z_3 Z_2 \cos^2 \alpha}{Z_3}$$

que es una identidad.

Geoméricamente no hay necesidad de demostrarlo, pues basta con ver que (1 1') y (3 3') hemos dicho que son paralelas.

ALINEACIÓN DE PUNTOS

Veamos ahora cómo, como una consecuencia del paralelismo podemos llegar a la alineación de puntos eléctricamente considerados.

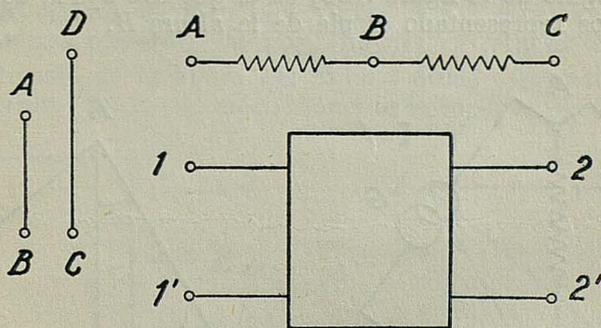


FIG. 5

Cuando queremos representar dos puntos eléctricamente, lo hacemos por los extremos de una resistencia AB , pero si pretendemos representar un tercer punto C alineado con los A y B , si colocamos una nueva resistencia BC veremos que lo que hemos hecho ha sido representar un triángulo ABC rectángulo en B , es decir que de este modo no podemos seguir los puntos de la recta AB . Para solucionar este problema vamos a recurrir a dos segmentos paralelos AB , CD y vamos a cortocircuitar C con B , con lo cual los nuevos puntos A' , B' , C' y D' quedarán alineados. En un tetrapolo en el que las bornas (1 1') y (2 2') sean paralelas y que no es otro que un transfor-

mador perfecto, cortocircuitamos $1'$ con $2'$; al hacer esto nos resulta que las bornas $(1\ 2)$ y $(1'\ 2')$ quedarán alineadas, quedando el transformador convertido en un autotransformador en el que una vez cargado, la impedancia entre las bornas 1 y $1'$ será proporcional al cuadrado del número de espiras que existen entre dichas bornas, n_1^2 , con lo cual en la figura geométrica la distancia entre los puntos correspondientes a 1 y $1'$ será proporcional al número de espiras n_1 . De este modo podemos representar cualquier número de puntos alineados mediante un autotransformador sin más que ir poniendo para cada dos puntos consecutivos un número de espiras proporcional a la distancia que queramos representar.

Si tenemos un autotransformador sin cargar, no nos representará lo que nos interesa. Para ello deberemos cargarlo; podemos hacerlo cargando una espira con una resistencia R^2 ; entonces, n espiras nos darán una resistencia $n^2 R^2$, es decir una longitud en la figura geométrica, $n R$ proporcional al número n de espiras tomadas. Si por simplificar lo cargamos con un ohmio, la longitud en la figura geométrica sería el número de espiras.

Eléctricamente, pues, decimos que tres o, en general, n puntos están alineados cuando cortocircuitados dos de ellos todos los demás quedan cortocircuitados con ellos.

Veamos un ejemplo del manejo de autotransformadores.

DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Sea el triángulo de la figura ABC , en el que con ayuda de un autotransformador hemos representado el pie de la altura H .

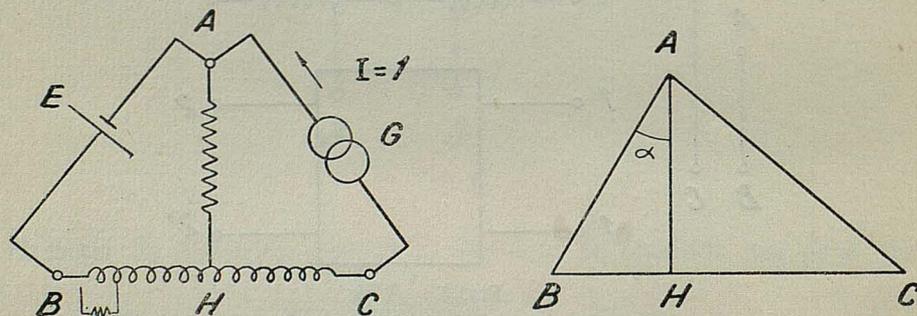


FIG. 6

Si cargamos el autotransformador por medio de una resistencia de un ohmio sobre una espira, tendremos la escala de la base BC correlativa con el número de espiras del autotransformador.

Conectemos ahora como se indica en la figura un generador de corriente unidad entre A y C , con lo cual me aparecerá entre A y B una tensión, y conectemos entre A y B un generador de tensión de f. e. m. la misma que me había aparecido entre A y B , con lo que a efectos de tensiones y

corrientes nada me ha variado. Apliquemos el teorema de superposición: veamos por dos caminos la tensión que tengo entre A y H ; directamente:

$$V_{AH} = \overline{AC} \cdot \overline{AH} \cdot \cos(A - \alpha)$$

Por el teorema de superposición será la suma de la que crea G cuando cortocircuito E y la que crea E cuando suprimo G :

$$V'_{AH} = \overline{AH} \operatorname{sen} \alpha \cdot \overline{AC} \cdot \operatorname{sen} A ;$$

$$V''_{AH} = \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos A \cdot \frac{1}{AB} AB \cdot AH \cdot \cos \alpha$$

como se verifica: $V_{AH} = V'_{AH} + V''_{AH}$

sustituyendo: $\overline{AC} \cdot \overline{AH} \cdot \cos(A - \alpha) = \overline{AC} \cdot \overline{AH} \cdot \cos \alpha \cdot \cos A +$
 $+ \overline{AC} \cdot \overline{AH} \cdot \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} A$

simplificando: $\cos(A - \alpha) = \cos A \cos \alpha + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} \alpha$

que es la fórmula que andábamos buscando.

Para demostrar la fórmula del coseno de la suma de dos ángulos no hay sino suponer que el pie de la altura H cae en un punto fuera del segmento BC .

El estudio de los cuadripolos puede hacerse por medio del isomorfismo entre ellos y las figuras geométricas. Vamos a ver como ejemplo algunas deducciones que nos muestran las posibilidades de estudio tan interesante.

Sea el cuadripolo de la figura, en el cual desde este momento suponemos que las bornas $1'$ y $2'$ son eléctricamente la misma.

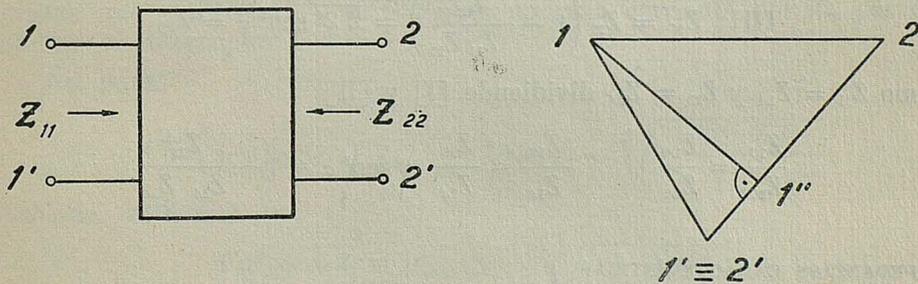


FIG. 7

Su figura geométrica isomorfa será el triángulo $(1, 1' \equiv 2', 2)$ en el que la impedancia de entrada en circuito abierto será $Z_{14} = Z_{11} = (\overline{11'})^2$ y lo mismo la de salida $Z_{24} = Z_{22} = (\overline{22'})^2$. Llamemos Z_{12} a la impedancia de transferencia entre los dos pares de bornas. Veamos lo que valen las impedancias de entrada y salida en circuito cerrado.

Cortocircuitar las bornas (2, 2') equivale a proyectar en la figura geométrica según (2 2'), y al hacerlo, la longitud (1 1') se transforma en la altura del triángulo sobre la base (2 2'), esto es, en (1 1'') que vale

(1 1'') $\text{sen } \widehat{(1 1', 2 2')}$. Calculemos pues el valor del seno de este ángulo que llamaremos α . Sabemos que en el isomorfismo la impedancia de transferencia Z_{12} es el producto escalar de los segmentos que determinan los dos pares de puntos isomorfos de los polos; por tanto,

$$Z_{12} = \overline{1 1'} \cdot \overline{2 2'} \cdot \cos \alpha$$

de donde

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \frac{Z_{12}^2}{\overline{1 1'}^2 \cdot \overline{2 2'}^2}}$$

sustituyendo tendremos

$$\sqrt{Z_{1c}} = \overline{1 1'} \sqrt{1 - \frac{Z_{12}^2}{\overline{1 1'}^2 \cdot \overline{2 2'}^2}}$$

y como

$$\overline{1 1'} = \sqrt{Z_{11}}$$

$$\overline{2 2'} = \sqrt{Z_{22}}$$

$$[\text{I}] \quad Z_{1c} = Z_{11} \left(1 - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11} Z_{22}}\right) = \overline{1 1'}^2 \text{sen}^2 \alpha = Z_{1c}$$

Análogamente se obtiene

$$[\text{II}] \quad Z_{2c} = Z_{22} \left(1 - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11} Z_{22}}\right) = \overline{2 2'}^2 \text{sen}^2 \alpha = Z_{2c}$$

como $Z_{11} = Z_{1A}$ y $Z_{22} = Z_{2A}$ dividiendo [I] y [II]

$$\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}} = \frac{Z_{1A}}{Z_{2A}} \quad \frac{Z_{1c}}{Z_{1A}} = \frac{Z_{2c}}{Z_{2A}} = \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{Z_{12}^2}{Z_{2A} Z_{1A}}$$

IMPEDANCIAS CARACTERÍSTICAS

Sea el cuadripolo de la figura 1 del que se supone se conoce Z_{11} , Z_{22} y Z_{12} , o lo que es lo mismo en la figura isomorfa los lados $\overline{1 1'}$, $\overline{2 2'}$ y el ángulo α que forman, ángulo que como sabemos verifica $Z_{12} = \overline{1 1'} \cdot \overline{2 2'} \cdot \cos \alpha$. Esto es, en vez de α podemos suponer conocido el producto escalar

$$\overline{1 1'} \cdot \overline{2 2'} \cdot \cos \alpha = Z_{12}$$

Al comprimir las bornas (2 2') con Z_{01} si la impedancia que medimos en (1 1') es también Z_{01} diremos que Z_{01} es la impedancia característica de entrada del cuadripolo. Lo mismo se haría para la salida.

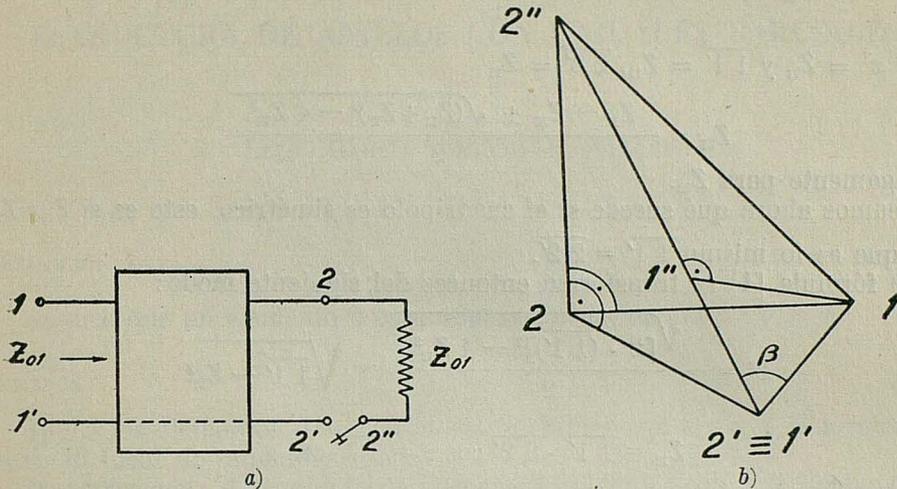


FIG. 8

La fig. b) es isomorfa del cuadripolo, y al conectar Z_{01} lo que hacemos es proyectar según $2' 2''$, con lo que $(\overline{1 1'})$ se convierte en $(\overline{1 1''})$ que deberá ser igual a $\overline{2 2''}$.

$$\text{Llamemos } \overline{2' 2''} = y \quad \overline{1 1''} = \overline{2 2''} = x$$

Sabemos que la impedancia de transferencia Z_{12} entre (1 1') y (2 2'') es la misma que entre (1 1') y (2' 2'') pues no pasa corriente por Z_{01} por estar abierto el interruptor I.

Así pues:

$$\overline{1 1'} \cdot y \cdot \cos \beta = Z_{12}; \quad \text{sen } \beta = \sqrt{1 - \frac{Z_{12}^2}{\overline{1 1'}^2 \cdot y^2}}$$

deberán verificarse

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + \overline{2 2'}^2 = y^2 \\ \frac{x^2}{\overline{1 1'} \cdot \text{sen } \beta} = x = \overline{1 1'} \sqrt{1 - \frac{Z_{12}^2}{\overline{1 1'}^2 \cdot y^2}} \end{array} \right\}$$

resolviendo el sistema despejando x^2 queda

$$x^2 = \overline{1 1'}^2 - \frac{Z_{12}^2}{x^2 + \overline{2 2'}^2}$$

ecuación bicuadrada que resuelta da para x^2 el valor

$$x^2 = \frac{\overline{1 1'}^2 - \overline{2 2'}^2 \pm \sqrt{(\overline{1 1'}^2 + \overline{2 2'}^2)^2 - 4 Z_{12}^2}}{2} \quad [1]$$

como $x^2 = Z_{01}$ y $\overline{1 1'}^2 = Z_{11}$, $\overline{2 2'}^2 = Z_{22}$

$$Z_{01} = \frac{Z_{11} - Z_{22} \pm \sqrt{(Z_{11} + Z_{22})^2 - 4 Z_{12}^2}}{2}$$

análogamente para Z_{02} .

Veamos ahora qué sucede si el cuadripolo es simétrico, esto es si $Z_{11} = Z_{22}$

o lo que es lo mismo $\overline{1 1'} = \overline{2 2'}$.

La fórmula [1] se transforma entonces del siguiente modo:

$$x^2 = \frac{\sqrt{[2 \cdot (\overline{1 1'})^2]^2 - 4 Z_{12}^2}}{2} = \sqrt{\overline{1 1'}^4 - Z_{12}^2}$$

como

$$Z_{12} = \overline{1 1'} \cdot \overline{2 2'} \cos \alpha = \overline{1 1'}^2 \cos \alpha$$

queda

$$x^2 = \sqrt{\overline{1 1'}^4 - \overline{1 1'}^4 \cos^2 \alpha} = \overline{1 1'}^2 \sin \alpha$$

es decir

$$Z_0 = Z_{11} \sin \alpha = Z_{22} \sin \alpha$$

ahora bien, como

$$Z_{10} = \overline{1 1'}^2 \sin^2 \alpha = Z_{11} \sin^2 \alpha \quad \text{y} \quad Z_{11} = Z_{14}$$

sustituyendo el valor de $\sin \alpha$ en la última,

$$Z_{10} = Z_{14} \cdot \frac{Z_0^2}{Z_{14}^2}$$

esto es

$$Z_0^2 = Z_{14} \cdot Z_{10}$$

BIBLIOGRAFIA

1. A. Segura Sanz: *Geometría métrica de las redes: obtención y generalización de las fórmulas de la trigonometría por métodos eléctricos*. Revista de Cálculo Automático y Cibernética. Núm. 22, 1960.
2. A. González del Valle: *Geometría métrica de las redes rígidas: Principios fundamentales*. Revista de Cálculo Automático y Cibernética. Núm. 5, 1953.
 —: *La síntesis de multipolos por Geometría métrica de las redes y teoremas previos*. Id. Núm. 10, 1955.
 —: *Filosofía de las redes. Los conceptos fisico-matemáticos más generales de volumen, separación y ángulo*. Id., Núm. 12, 1956.

Departamento de Cálculo Electrónico del Consejo Superior de Investigaciones Científicas

ESTRUCTURA DE ANILLOS CON UNIDADES PARCIALES

p o r

LUIS GARCÍA DE VIEDMA ALONSO

DEFINICIÓN I

Se dice que un elemento a es unidable con b cuando $a \cdot b = a$.

LEMA I

Todos los elementos de un anillo R unidables con e_1 ; $e_1 \in R$ forman un ideal. El ideal de unidables con e_1 .

Demostración: Al conjunto de elementos unidables con e_1 le llamamos T , veamos primero que T es sub-anillo de R .

$$\text{En efecto si } \begin{cases} a \in T \\ b \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a e' = a \\ b e' = b \end{cases}$$

entonces $(a - b) e' = a e' - b e' = a - b$ es decir $a - b \in T$ y $(a b) e' = a (b e') = a b$ luego $a b \in T$.

Luego T es sub-anillo de R .

Veamos ahora que si $a \in T$, $b \in R \Rightarrow a \cdot b \in T$.

En efecto $(a b) e' = a (b e') = a (e' b) = (a e') b = a b \Rightarrow a b \in T$, luego T es ideal de R .

LEMA II

Los elementos del sub-anillo T son divisores de cero en R .

DEMOSTRACIÓN

I. Sea R un anillo con elemento unidad $e \neq e_1$

$$\left. \begin{array}{l} a \in T, a e_1 = a \\ T \subset R, a \in R, a e = a \end{array} \right\} \Rightarrow a (e - e_1) = 0$$

siendo $e - e_1 \neq 0$.

II. Sea R un anillo sin elemento unidad.

Entonces tendrá que existir en R al menos un elemento d tal que $d \in T$ es decir tal que $d e_1 = c$; $c \neq d$.

Sea $b \in T$ entonces

$$\left. \begin{aligned} (d b) e' &= d (b e') = d b \\ (d : b) e' &= e' (d b) = (e' d) b = c b \end{aligned} \right\} \Rightarrow db - cb = (d - c) b = 0; d \neq c.$$

LEMA III

Un anillo R con elemento unidad y divisores de cero admite siempre al menos una unidad parcial. Diremos que e_1 es unidad parcial de R cuando el ideal de unidables con e_1 está propiamente contenido en R .

Demostración: Si R admite divisores de cero existirán al menos dos elementos $a, b \in R; a \neq 0, b \neq 0$ tales que $a \cdot b = 0$; como $a \in R$.

$$a \cdot e = a$$

$a b + a e = a (b + e) = a$, luego $b + e$ es unidad al menos para a , y no lo es para cualquier elemento de R pues entonces $b + e = e; b = 0$ contradicción, luego $b + e$ es unidad parcial de R . Lo mismo para $a + e$.

TEOREMA I

En todo anillo R con elementos unidad y divisores de cero puede definirse al menos un ideal de unidables.

Demostración: es consecuencia de los lemas I y III.

TEOREMA II

Sea e' una unidad parcial idempotente de R . La aplicación $R \rightarrow \varphi(R)$ definida de la forma $\varphi x = e' x$ es una proyección.

$$\text{Demostración: En efecto } \varphi^2 x = \varphi(\varphi x) = \varphi(e' x) = e'(e' x) = (e' e') x = e' x = x$$

$$\text{Veamos si } \varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y, \varphi(xy) = \varphi x \cdot \varphi y.$$

$$\text{En efecto: } \varphi(x + y) = e'(x + y) = e' x + e' y = \varphi x + \varphi y.$$

$$\varphi(xy) = e'(xy) = e'[e'(xy)] = (e' x) \cdot (e' y) = \varphi x \cdot \varphi y$$

Luego la aplicación φ es una proyección.

Consecuencia del teorema II:

$$R = N(\varphi) \oplus i m \varphi.$$

Veamos que $i m \varphi = T$.

En efecto sea

$$x \in R; \varphi x = e' x \in i m \varphi$$

pero $(e' x) e' = (e' e') x = e' x$ luego $e' x$ es unidable con e' luego $e' x \in T$ y por tanto $i m \varphi \subset T$.

Sea $y \in T \rightarrow y = e' y$, pero $e' y = \varphi y \in i m \varphi \Rightarrow y \in i m \varphi$ es decir $T \subset i m \varphi$.

luego

$$T = i m \varphi$$

Entonces

$$R = N(\varphi) \oplus T.$$

LEMA IV

Si $e'' \in T$, no existe ningún elemento $x \in N(\varphi)$, $x \neq 0$ tal que $x e'' = x$.

Demostración: En efecto, si $x e'' = x$ como $e'' \in T$, $e'' : e' = e''$,

luego

$$(x e'') e' = x (e'' e') = x e'$$

como

$$x \in N(\varphi) \quad x = x e' = 0,$$

luego

$$(x e'') e' = e' (x e'') = (e' x) e'' = 0 \cdot e'' = 0,$$

luego

$$x e'' = 0, \text{ pero } x e'' = x, x = 0, \text{ contradicción;}$$

luego

$$x e'' \neq x \text{ para cualquier } x \in N(\varphi).$$

LEMA V

Si $e'' \in N(\varphi)$ no existe ningún elemento $x \in T$ tal que $x e'' = x$.

Demostración: idéntica a la del lema IV.

LEMA VI

Cualquier elemento e^* unidad parcial de R , es igual a la suma de un elemento unidad parcial de $N(\varphi)$ y de un elemento, unidad parcial en T .

Demostración: En efecto, sea $x \in R$ tal que $x e^* = x$, como $x \in R$: $x = y + z$ siendo $y \in N(\varphi)$, $z \in T$; como $e^* \in R$,

$$e^* = e_1^* + e_2^*; \quad x \cdot e^* = (y+z)(e_1^* + e_2^*) = y e_1^* + z e_2^* + y e_2^* + z e_1^*$$

$$e_2^* = e_2^* e_1$$

pero

$$z = z e_1$$

luego

$$y e_2^* = y e_2^* e_1 = (y e_1) e_2^* = 0$$

$$z e_1^* = (z e_1) e_1^* = z (e_1 e_1^*) = z \cdot 0 = 0.$$

$$\text{Entonces } x e^* = y e_1^* + z e_2^* = x = y + z \Rightarrow y e_1^* = y; z e_2^* = z.$$

LEMA VII

El ideal de unidables con e^* en R es suma directa del ideal de unidables con e_1^* y el ideal de unidables con e_2^* .

Demostración: es trivial, basándose en el teorema I, Lema VI y def. de suma directa.

TEOREMA III

Sea R un anillo y e_1 una unidad parcial de R . Si R tiene un número finito de unidades parciales existe una unidad e^* de R , unidable con todos los elementos de R que lo son para e_1 , e idempotente.

Demostración: Si e_1 es unidad para T , las potencias de e_1 también lo son. En efecto si $x e_1 = x$, $x (e_1^n) = x (e_1 \dots e_1) = x e_1 (e_1 \dots e_1) = x$ mas como hemos admitido la hipótesis de que el número de unidades parciales de R era finito, entonces $(e_1)^m = (e_1)^t$; supongamos $m > t$, como m y t eran enteros positivos $m - t$ también lo será y por tanto e_1^{m-t} también será unidad parcial de R . Veamos que es idempotente.

En efecto

$$(e_1)^{m-t} \cdot (e_1)^{m-t} = (e_1)^{m-t} e_1^t e_1^{m-2t} = [e_1^{m-t}] e_1^t (e_1^{m-2t}) = e_1^m (e_1^{m-2t}) = e_1^t (e_1^{m-2t}) = e_1^{m-t} \quad \text{c. q. d.}$$

Para que esta demostración sea permisible es necesario que e_1^{m-2t} sea construible, supongamos no fuera así, es decir, $m < 2t$.

Veamos entonces que $(e_1)^{n(m-t)}$ es idempotente.

En efecto

$$\begin{aligned} e_1^{n(m-t)} \cdot e_1^{n(m-t)} &= e_1^{n(m-t)} [e_1^t \cdot e_1^{nm-(n+1)t}] = \\ &= (e_1^{n(m-t)} \cdot e_1^t) (e_1^{nm-(n+1)t}) = e_1^{n(m-t)+t} \cdot e_1^{nm-(n+1)t} = \\ &= e_1^{nm-(n-1)t} \cdot e_1^{nm-(n+1)t} = e_1^t e_1^{nm-(n+1)t} = e_1^{n(m-t)} \end{aligned}$$

pues si

$$\begin{aligned} e_1^t &= e_1^m \\ e_1^t \cdot e_1^{m-t} &= e_1^m \cdot e_1^{m-t} \Rightarrow e_1^m = e_1^{2m-t} \\ e_1^t &= e_1^m = e_1^{2m-t} = \dots = e_1^{nm-(n-1)t} \end{aligned}$$

Veamos que esta demostración es siempre factible pues $e_1^{nm-(n+1)t}$ es construible; para que lo fuera haría falta

$$nm - (n + 1)t > 0 \quad n = \text{núm. entero positivo.}$$

En efecto, supongamos el caso más desfavorable $t = m - 1$. Entonces

$$nm - (n + 1)t = nm - (n - 1)(m - 1) = nm - nm - m + n + 1 = n - m + 1$$

luego tomando $n > m - 1$ resulta evidente la licitud de la operación efectuada. Es decir, hemos demostrado la existencia, y construido, una potencia de e_1 , que es idempotente.

TEOREMA IV

Si R es un anillo con elemento unidad que contiene un número finito de unidades parciales admite una descomposición en suma directa de ideales no primos ni primarios, con elemento idempotente único.

Demostración: Sea R' el sub-anillo de R que admite un elemento unidad e' es decir, $R' = \{x; x \in R; xe' = x\}$.

Si $e' \in R'$, es decir $e' \cdot e' = e'$ por el teorema II y su consecuencia

$$R = N(\varphi) \oplus R'$$

Si $e' \in R'$ por el Teorema III existiría un superanillo T de R' tal que contendría un elemento e_1 unidad para todo T .

Entonces $R = N(\varphi) \oplus T$.

Evidentemente

$$(e - e_1) \in N(\varphi)$$

pues

$$(e - e_1) e_1 = e e_1 - e_1 e_1 = e_1 - e_1^2 = e_1 - e_1 = 0$$

y además es unidad para todo

$$x \in N(\varphi) \text{ pues } x(e - e_1) = xe - xe_1 = xe - 0 = xe = x,$$

y además es idempotente, pues

$$(e - e_1)(e - e_1) = e - e - e_1 - e_1 + e_1^2 = e - e_1 - e_1 + e_1 = e - e_1.$$

Luego $N(\varphi)$ cumple las hipótesis de este teorema, aplicando el mismo procedimiento a $N(\varphi)$ y a T suponiendo que $N(\varphi)$ y T no contuvieran más unidades parciales el teorema estaba demostrado. Supongamos que las contienen. Sea $e'' \in T$ tal que $e'' y = y$ para algunas $y \in T$, entonces por el Lema I esos elementos forman un subanillo T' de T . Si $e'' \in T$ volveríamos a aplicar el teorema II y su consecuencia. Si no fuera así, es decir, si $e'' \notin T'$ por el teorema III existiría un e_2 unidad para todos los elementos de un superanillo T_1 de T' al que pertenecería evidentemente $T_1 \subset T$ pues si $e_2 \in T$ ya que $e_2 = (e'')^n$ y $e'' \in T$, entonces $e_2 = 0 + e_2$ si existiera un elemento

$$x \in T_1, x \notin T$$

entonces

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow xe_2 = (x_1 + x_2)(0 + e_2) = x_2 e_2 = x$$

luego

$$x = 0 + x_2 e_2 \in T \text{ luego } T_1 \subset T.$$

Entonces como T contiene un subanillo T_1 , con elemento unidad idempotente, puede aplicarse el teorema II y su consecuencia.

$T = N(\varphi_2) \oplus T_1$. En donde T_1 es el ideal de unidades con el e_2 y $N(\varphi_2)$ el ideal de unidades con $(e_1 - e_2)$.

Aplicando el mismo procedimiento a $N(\varphi)$; $N(\varphi) = N(\psi_1) \oplus R_1$ entonces

$$R = N(\psi_1) \oplus R_1 \oplus N(\varphi_2) \oplus T_1.$$

Si estos ideales contuvieran aún unidades parciales idempotentes repetiríamos el proceso hasta llegar a un punto en que como por hipótesis, el

número de unidades parciales de R era finito también lo sería el número de los elementos idempotentes y llegaríamos así a una descomposición

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus \dots \oplus R_i \oplus \dots \oplus R_n$$

de ideales de R con único elemento idempotente el unidad del ideal.

Veamos que efectivamente R_i es un ideal. Nos bastará ver que R_i es el ideal de unidables con e_i :

En efecto; sea x un elemento de R tal que $x e_i = x$ si $x \notin R_i$

$$x = x_1 + \dots + x_i + \dots + x_n \text{ como } e_i \in R_i$$

$$e_i = 0 + \dots + e_i + \dots + 0$$

$$x e_i = 0 + \dots + x_i e_i + 0 = x_i e_i = x_i$$

pues

$$x_i \in R_i \text{ luego } x = x_i \in R_i$$

y entonces por el teorema I, R_i es ideal.

R_i no será primo, pues para que $a \cdot b \in R_i$ basta que:

I $a \cdot b$ tenga componente en R_i

II $a_j \cdot b_j = 0$ para $j \neq i$,

ahora bien, para que se cumpla II basta que a y b tengan sus j -componentes nulas, es decir:

$$a = 0 + a_2 + 0 + \dots + 0 + a_i + 0 + \dots$$

$$b = b_1 + 0 + b_3 + \dots + b_{i-1} + b_i + b_{i+1} + \dots$$

$$ab = 0 + 0 + 0 \dots + 0 + a_i b_i + 0 \dots \quad y$$

$$ab = a_i b_i \text{ que no exige } \begin{matrix} a = a_i \\ b = b_i \end{matrix}$$

R_i no sería primario excepto en el caso en que R_i fuera de la forma

$$\{x \in R_i; x^n = x\} \text{ y } R_j \text{ tal que } x \in R_j, j \neq i$$

entonces $x^n = 0$.

TEOREMA V

La unidad e_i^* fijada por las condiciones:

I. Es unidad para todos los elementos unidables con e_i .

II. Es idempotente y en el ideal de sus unidables no hay otro elemento idempotente, es única.

Demostración: Supongamos que no fuera así y que e_i^{**} fuera otro elemento de R que cumpliera las condiciones I y II, entonces como $e_i^{**} \in R$

$$e_i^{**} = a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots + a_n$$

Definimos $R_i' = \{x \in R_i \mid x e_i = x\}$ $R_i' \subset R_i$ luego los elementos $x \in R_i'$ verifican $x e_i^* = x$

$$\text{luego } \left\{ \begin{array}{l} x = 0 + 0 + \dots + x + 0 + \dots + 0 \\ e_i^{**} = a_1 + a_2 + \dots + a_i + a_{i+1} \dots + a_n \end{array} \right\} x e_i^{**} = a_i x = x$$

es decir a_i es unidad para todo $x \in R_i'$; por la condición II e_i^{**} es idempotente, luego

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_i^2 + \dots + a_n^2 = a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots + a_n$$

luego $a_1^2 = a_1, \dots, a_i^2 = a_i, \dots, a_n^2 = a_n$.

Es decir, a_i que era unidad parcial en R_i es idempotente, pero como R_i no admite otras unidades idempotentes que su elemento unidad, $a_i = e_i^*$.

Evidentemente cualquier elemento en R cuya i -componente fuera e_i^* sería unidad para todo R_i , mas para que fuera idempotente sería necesario que sus restantes componentes fueran *ceros* o que fueran unidades idempotentes.

Si sus restantes componentes fueran 0 entonces

$$e_i^{**} = 0 + 0 + \dots + 0 + e_i^* + 0 + \dots + 0$$

y entonces $e_i^{**} = e_i^*$.

Si sus restantes componentes no fueran todos nulos, es decir

$$e_i^{**} = 0 + \dots + e_j^* + \dots + e_i^* + 0 + \dots + 0$$

entonces e_i^{**} definiría un ideal de unidables con dos elementos idempotentes además del e_i^{**} contradicción, luego e_i^* es única.

Consecuencia: Entonces en R no hay más unidades idempotentes que las de la forma $e_1^* + 0 + \dots + e_a^* + \dots + e_e^* + \dots + 0$.

Entonces el número de elementos idempotentes sería

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1.$$

Si el número de unidades idempotentes fuera p entonces R admitiría una descomposición en suma directa de n anillos (ideales) sin más elementos idempotentes que la unidad del ideal, viniendo n dado por la expresión

$$p = 2^n - 1; 2^n = p + 1; n L 2 = L(p + 1)$$

$$n = \frac{L(p + 1)}{L(2)}$$

TEOREMA VI

La descomposición

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$$

en ideales unitarios con un solo elemento idempotente es única salvo el orden.

Demostración: Supongamos que no lo fuera.

Entonces R admitiría otra descomposición en anillos unitarios con único elemento idempotente de la forma $R = R_1' \oplus R_2' \oplus \dots \oplus R_n'$ y sea $e_1'^*$ la unidad de R_1' ; ahora bien $e_1'^*$ pertenece a R y es idempotente; mas como los elementos idempotentes de R o eran los de R_i o suma de éstos, entonces $e_1'^*$ o es de la forma $e_1'^* = e_e^*$ o de la forma

$$e_1'^* = 0 + e_2'^* + \dots + e_m'^* + \dots + e_p'^* + \dots + e_n'^*.$$

Si $e_1'^*$ es de la forma última entonces R_1' ideal de unidables con $e_1'^*$ sería el ideal de unidables con

$$0 + e_2'^* + \dots + e_m'^* + \dots + e_p'^* + \dots + e_n'^*$$

es decir

$$R_1' = R_2 \oplus \dots \oplus R_m \oplus \dots \oplus R_p \oplus \dots \oplus R_n$$

y entonces

$$R_2, R_m, R_p, R_n \subset R_1' \quad \text{y por tanto} \quad e_2'^*, e_m'^*, e_p'^*, e_n'^* \in R_1'$$

contradicción, pues R_1' sólo contenía un elemento idempotente entonces $e_1'^* = e_e^*$; pero entonces R_1' ideal de unidables con $e_1'^*$ sería el ideal de unidables con $e_e^* = R_e$ es decir $R_1'^* = R_e$ y como el número de componentes en las dos descomposiciones ha de ser el mismo por depender del número de los elementos idempotentes del anillo, la descomposición ha de ser evidentemente única excepto el orden.

DEFINICIÓN II

Llamaremos índice de un elemento $x \in R$ al menor número n tal que x^n sea idempotente.

LEMA VIII

El conjunto de los elementos que admiten índice, pertenecientes a un anillo R es un dominio multiplicativo D .

Demostración: Sea en efecto a, b dos elementos de R que admiten índices y sean éstos, m, n es decir $a^m \cdot a^m = a^m$; $b^n \cdot b^n = b^n$.

Entonces $(ab)^{m \cdot n} \cdot (ab)^{m \cdot n} = (a^m \cdot a^m)^n \cdot (b^n \cdot b^n)^m = a^{m \cdot n} \cdot b^{m \cdot n} = (ab)^{m \cdot n}$, luego $ab \in D$.

El índice de ab es evidentemente el m. c. m. de los índices de a y b .

LEMA IX

Todo anillo R con divisores de cero y elemento unidad, contiene un dominio multiplicativo D de unidades parciales que tiene la estructura de anillo respecto a las operaciones multiplicación del anillo y suma lógica.

Demostración: Como R contiene divisores de cero existirán al menos dos elementos $a, b, a \neq 0, b \neq 0$ tales que $a \cdot b = 0$.

entonces como

$$a \cdot e = a; \quad a(b + e) = a$$

luego $(b + e)$ es unidad parcial de R .

Supongamos que e_1, e_2 sean dos unidades parciales de R , x elemento unidable con e_1 , y elemento unidable con e_2 , entonces $(e_1 e_2)(x y) = (e_1 x)(e_2 y) = xy$ luego $e_1 e_2$ también es unidad parcial.

$$\begin{aligned} (e_1 + e_2 - e_1 e_2)(x + y) &= e_1(x + y) + e_2(x + y) - e_1 e_2(x + y) = 0 = \\ &= e_1 x + e_2 y + e_2 x + e_2 y - \\ &- e_1 e_2 x - e_1 e_2 y = x + e_1 y + e_2 x + y - e_2 x - e_1 y = x + y. \end{aligned}$$

luego $(e_1 + e_2 - e_1 e_2)$ es también unidad parcial de R , c. q. d.

LEMA X

Sea R un anillo con un número finito de unidades parciales y un único elemento idempotente, el unidad del anillo. Si e_1 es una unidad parcial de índice primo p , la cadena de potencias de e_1 , puede generarse a partir de cualquier potencia de e_1 , exceptuada e_1^p .

Demostración: Sea e_1 una unidad parcial de R de índice primo p .

Veamos si e_1^α me genera la cadena de potencias de e_1 .

Supongamos $\alpha < p$ pues si $\alpha > p$, $\alpha = \hat{p} + a$ siendo $a < p$ y entonces $e_1^\alpha = e_1^{\hat{p}} \cdot e_1^a = e_1^a$.

Supuesto entonces $\alpha < p$ el problema consiste en hallar un número natural x tal que $(e_1^\alpha)^x = e_1$ es decir $e_1^{x\alpha} = e_1$ ahora bien

$$e_1 = e_1 \cdot e = e_1 e_1^{\hat{p}} = e_1^{\hat{p}+1} \text{ es decir } x\alpha = \hat{p} + 1$$

$x = \frac{\hat{p} + 1}{\alpha}$ ecuación que por ser \hat{p} primo tiene siempre solución.

DEFINICIÓN III

Diremos que $\{e_1 e_2 \dots e_n\}$ forman una base de D si cualquier elemento $e' \in D$, es decir cualquier unidad parcial de R puede expresarse de la forma

$$e' = e_1^\alpha e_2^\beta \dots e_n^\gamma \dots e_n^\delta \text{ y las}$$

$$\{e_1 e_2 \dots e_n\} \text{ son tales que}$$

$$c_h \neq e_1^\alpha e_2^\beta \dots e_{h-1}^{\gamma_{h-1}} \hat{e}_h e_{h+1}^{\gamma_{h+1}} \dots e_n^\delta$$

para cualquier valor de $(\alpha, \beta, \dots, \delta)$ y para $h = 1, 2, \dots, n$.

R es un anillo con un número finito de unidades parciales y un único elemento idempotente.

Construcción de la base. En el dominio multiplicativo D fijémosnos en el conjunto M de todos los elementos de índice mínimo m . Es decir M está definido de la forma siguiente

$$M = \{x \mid x \in D, x^m \cdot x^m = x^m\}$$

y para cualquier

$$x \in D, x \in M$$

para cada r tal que

$$x^r \cdot x^r = x^r$$

ha de suceder $r > m$.

Evidentemente M es también dominio multiplicativo pues si

$$e_1 \dots, e_m \in M, e_1^{c_1} e_2^{c_2} \dots e_m^{c_m} \in M$$

ya que

$$(e_1^{c_1} \dots e_m^{c_m})^m = e$$

y no puede existir ningún $s < m$ tal que

$$(e_1^{c_1} \dots e_m^{c_m})^s = e.$$

Veamos que m es primo, supongamos no fuera así entonces $m = a.b \dots e$ y $e_1^m = e_1^{a.b \dots e}$ en donde $a, b, \dots, e < m$ y entonces $(e_1^{a.b \dots e}) = e$, contradicción pues $e^{a.b \dots e} \in D$ y existiría por lo tanto un elemento de índice menor que m . Definimos una base en M como el menor conjunto de elementos que genera M . Sean estos e_1, e_2, \dots, e_m . Veamos que estos elementos forman base según la definición III. Evidentemente cualquier elemento $x \in M$ será de la forma $x = e_1^{c_1} \dots e_m^{c_m}$ por ser $e_1 \dots, e_m$ sistema generador de M y además $e_h \neq e_1^{c_1} \dots e_{h-1}^{c_{h-1}} e_{h+1}^{c_{h+1}} \dots e_m^{c_m}$ pues si no fuese así $e_1 \dots e_{h-1}, e_{h+1} \dots e_m$ sería el menor sistema generador de M , contradicción; luego $e_1 \dots e_m$ será la base de M .

Consideremos ahora de todos los elementos de D de índice $> m$ los que tengan el mínimo y sea éste n y N el sistema multiplicativo formado por elementos de D tales que $x^n \cdot x^n = x^n$.

Por la misma razón que antes, n será número primo y de idéntica forma que antes definimos $\{e_{m+1}, \dots, e_{m+n}\}$ como base de N .

Procediendo con este método hasta agotar D hemos formado un conjunto de elementos de índices primos.

$$\{e_1, \dots, e_m; e_{m+1}, \dots, e_{m+n}; \dots; \dots e_t\}$$

que vamos a ver es base de D .

Evidentemente para un $e^* \in D$, $e^* = e_1^{\alpha_1} \dots e_t^{\alpha_t}$ ya que e^* tiene índice y por tanto ha de pertenecer a alguno de los dominios M, N, \dots, T de D .

Además $e_h \neq e_1^{c_1} \dots e_m^{c_m} \dots e_{h-1}^{c_{h-1}} e_{h+1}^{c_{h+1}} \dots e_t^{c_t}$ pues como $e_h \in D$ posee índice, sea éste s y S el dominio de los elementos de índice s , entonces e_h no podría venir generado por los elementos de $M, N \dots S \dots T$, pues e_h de índice s no podría desde luego depender de los de índice mayor que S , luego en todo caso tendría que depender de los anteriores; pero entonces si

$$e_h = e_1^{c_1} \dots e_m^{c_m} \dots e_p^{c_p}$$
 como $(e_1^{c_1} \dots e_m^{c_m})^m = e \dots (e_p^{c_p})^p = e$

entonces

$$e_h^{m \dots p} = e$$

pero e_h es de índice h , luego

$$e_h^{m \dots p} = e_h^h$$

es decir,

$$m \dots p = a \cdot h$$

ahora bien h no es divisor de ningún $m \dots p$ por ser todos números primos ni tampoco a por la misma razón, luego

$$e_h \neq e_1^{c_1} \dots e_t^{c_t}$$

luego

$$\{e_1 \dots e_m \dots e_h \dots e_t\}$$

es una base de D , siendo sus índices números primos y t constante en D .

TEOREMA VII

La potencia de ningún elemento de la base puede representarse como producto de potencias de los restantes elementos de la base.

Demostración: Es trivial basándose en la anterior construcción de base y en el lema X.

TEOREMA VIII

El dominio multiplicativo D de las unidades parciales de un anillo R con un sólo elemento idempotente y un número finito de unidades parciales admite una correspondencia unívoca entre sus elementos y un conjunto n -ario de números enteros. Si estos números los consideramos módulo su índice la correspondencia es biunívoca.

Demostración: Efectivamente, sea $e^* \in D$, entonces

$$e^* = e_1^{c_1} \dots e_t^{c_t}$$

veamos que $(c_1 \dots c_t)$ están unívocamente determinados por e^* . Supongamos no fuera así, entonces

$$e^* = e_1^{c'_1} \dots e_t^{c'_t}$$

sea

$$c'_t > c_t$$

entonces

$$c'_t = c_t + p$$

entonces

$$e_1^{c'_1} \dots e_{t-1}^{c'_{t-1}} = e_1^{c_1} \dots e_t^{c_t}$$

ahora bien, esta igualdad obliga

$$e_t^p = e_1^{c'_1} \dots e_{t-1}^{c'_{t-1}}$$

contradicción por el teorema anterior, luego la correspondencia es biunívoca.

La segunda parte del teorema es trivial.

METODO DE CALCULO DE ORBITAS ELIPTICAS EN ESTRELLAS DOBLES VISUALES Y APLICACION AL PAR ADS 13169

p o r

RAFAEL CID PALACIOS

1. INTRODUCCION

En nuestro artículo (1), se demostró la posibilidad de calcular la órbita elíptica de un par visual de estrellas, con tres observaciones completas (θ_i, ρ_i, t_i) y una incompleta (θ_i, t_i) , viéndose también que tal era el número necesario y suficiente de datos para efectuar dicho cálculo.

Desde la publicación de aquel trabajo, hemos seguido dedicando alguna atención al mismo problema, consiguiendo otros resultados que consideramos de interés, tanto desde un punto de vista teórico como práctico. Así, hemos transformado el sistema fundamental que servía para la resolución del caso elíptico, por otro que no exige la tabulación de ninguna función, comenzando el estudio sistemático de las posibles soluciones, sin que ello suponga, por ahora, un estudio exhaustivo del problema.

La determinación de órbitas en casos singulares, así como el número de soluciones del sistema fundamental y la aplicación a casos concretos, que permiten una gran abreviación, serán expuestos con detalle en algunos trabajos que tenemos pendientes de publicación.

Como aplicación de nuestros métodos, se incluye en este artículo el cálculo completo de la órbita del par ADS 13169 = A 606, que ha dado lugar a dos soluciones igualmente probables, con excentricidades de 0.497 y 0.843. Tales resultados no concuerdan con las conclusiones de W. H. van den Bos (2), de ser una de las excentricidades muy próxima a cero, si bien creemos con este autor, que el criterio de discriminación de Eggen (3), es sumamente inseguro.

Finalmente, rogamos al lector disculpe la repetición de algunos conceptos o fórmulas ya contenidas en otros trabajos, cuya inclusión en este nos ha sido imprescindible para darle unidad.

2. ECUACIONES FUNDAMENTALES: NOTACIONES

Como es bien sabido, en el movimiento kepleriano de un punto P_i (estrella secundaria), que se mueve respecto a otro P_o (estrella principal) según una elipse, se verifican las igualdades

$$r_i \cos v_i = a (\cos E_i - \text{sen } \varphi) \qquad r_i \text{ sen } v_i = a \cos \varphi \text{ sen } E_i \qquad (2.1)$$

donde $r_i = P_o P_i$ designa el radio vector, v_i la anomalía verdadera, E_i la anomalía excéntrica, $e = \text{sen } \varphi$ la excentricidad y a el semieje mayor de esta elipse u *órbita relativa*.

Para dos épocas distintas, t_i, t_k , tendremos los valores $r_i, r_k, v_i, v_k, E_i, E_k$, que llevados a las expresiones (2.1) nos dan

$$\frac{r_i r_k \text{sen } (v_k - v_i)}{a^2 \cos \varphi} = \text{sen } (E_k - E_i) - \text{sen } \varphi (\text{sen } E_k - \text{sen } E_i) \quad (2.2)$$

Por otra parte, si P es el período orbital, y T la época de paso por periaastro, la ecuación de Kepler se escribe en la forma

$$n (t - T) \equiv E - \text{sen } \varphi \text{sen } E \quad (2.3)$$

donde $n = 2\pi/P$ representa el movimiento medio.

Restando las ecuaciones (2.3) correspondientes a las épocas t_i, t_k , obtendremos la igualdad

$$n (t_k - t_i) = E_k - E_i - \text{sen } \varphi (\text{sen } E_k - \text{sen } E_i) \quad (2.4)$$

deduciéndose de esta y la fórmula (2.2), la ecuación

$$n (t_k - t_i) - \frac{r_i r_k \text{sen } (v_k - v_i)}{a^2 \cos \varphi} = E_k - E_i - \text{sen } (E_k - E_i) \quad (2.5)$$

Si $(\rho_i, \theta_i, t_i), (\rho_k, \theta_k, t_k)$ son datos de observación en la *órbita aparente*, es decir, si denotamos por ρ las distancias y por θ los ángulos de posición, en la fórmula (2.5) puede sustituirse el doble del área $r_i r_k \text{sen } (v_k - v_i)$, del triángulo $P_o P_i P_k$, por su correspondiente en la órbita aparente, ya que se tiene

$$\Delta_{ik} = \rho_i \rho_k \text{sen } (\theta_k - \theta_i) = r_i r_k \text{sen } (v_k - v_i) \cos i \quad (2.6)$$

siendo i la inclinación de la órbita aparente respecto a la relativa. Finalmente, denotando por C la constante

$$C = a^2 \cos \varphi \cos i \quad (2.7)$$

nos queda en definitiva la ecuación de Thiele

$$n (t_k - t_i) - \frac{\Delta_{ik}}{C} = E_k - E_i - \text{sen } (E_k - E_i) \quad (2.8)$$

que utilizaremos a continuación.

3. CALCULO DE ORBITAS ELIPTICAS: DATOS NECESARIOS Y SUFICIENTES

Los elementos a determinar en toda órbita elíptica de una estrella doble son siete, a saber: Ω (ángulo del nodo), ω (anomalía o ángulo desde el nodo al periastro), i (inclinación), e (excentricidad), a (semieje mayor), P (período) y T (época de paso por el periastro).

Cada observación completa (ρ_i, θ_i, t_i), nos proporciona dos ecuaciones del tipo

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho_i(\Omega, \omega, i, e, a, P, T, t_i) \\ \theta_i &= \theta_i(\Omega, \omega, i, e, a, P, T, t_i) \end{aligned}$$

y por tanto, serán necesarias siete ecuaciones cualesquiera de estas (un ángulo de posición o una distancia son siempre necesarias) para determinar los elementos de la órbita.

En este trabajo volveremos a demostrar que con cuatro observaciones tales como $(\theta_1, t_1), (\rho_2, \theta_2, t_2), (\rho_3, \theta_3, t_3), (\rho_4, \theta_4, t_4)$, se pueden determinar los elementos de la órbita, es decir que tales datos de observación son también suficientes.

Empecemos por escribir las ecuaciones (2-8) correspondientes a los pares de épocas $(t_1, t_2), (t_1, t_3), (t_1, t_4), (t_2, t_3), (t_2, t_4), (t_3, t_4)$. Tenemos el sistema

$$\begin{aligned} n(t_2 - t_1) - F(W - V) &= \frac{\Delta_{12}}{C} & n(t_3 - t_2) - F(V - U) &= \frac{\Delta_{23}}{C} \\ n(t_3 - t_1) - F(W - U) &= \frac{\Delta_{13}}{C} & n(t_4 - t_2) - F(V) &= \frac{\Delta_{24}}{C} \\ n(t_4 - t_1) - F(W) &= \frac{\Delta_{14}}{C} & n(t_4 - t_3) - F(U) &= \frac{\Delta_{34}}{C} \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde se han empleado las siguientes notaciones:

$$U = E_4 - E_3 \quad V = E_4 - E_2 \quad W = E_4 - E_1 \quad F(X) = X - \text{sen } X \quad (3.2)$$

y en las cuales se supone, de momento, que es $\Delta_{ik} \neq 0$, para todo par de índices (i, k) . Como ya indicamos en la introducción, estos casos singulares, con otros que pueden presentarse, serán estudiados en un trabajo posterior, que tenemos pendiente de publicación.

Para resolver el sistema (3-1), con las seis incógnitas U, V, W, n, C, ρ_1 , comencemos eliminando ρ_1 y C , para lo cual dividamos convenientemente las ecuaciones (3.1). Así resultará

$$\begin{aligned} \frac{n(t_2 - t_1) - F(W - V)}{n(t_4 - t_1) - F(W)} &= N & \frac{n(t_3 - t_2) - F(V - U)}{n(t_4 - t_2) - F(V)} &= S \\ \frac{n(t_3 - t_1) - F(W - U)}{n(t_4 - t_1) - F(W)} &= Q & \frac{n(t_3 - t_2) - F(V - U)}{n(t_4 - t_3) - F(U)} &= R \end{aligned} \quad (3.3)$$

Las cantidades N , Q , R , S , son indudablemente calculables a partir de los datos de observación, por medio de las expresiones

$$\begin{aligned} N &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{14}} = \frac{\rho_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{\rho_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_1)} & R &= \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{24}} = \frac{\rho_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{\rho_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_2)} \\ Q &= \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{14}} = \frac{\rho_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_1)}{\rho_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_1)} & S &= \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{34}} = \frac{\rho_2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{\rho_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

y son distintas de 0 e ∞ , en virtud de las hipótesis hechas respecto a las áreas Δ_{ik} .

Además, entre ellas existe siempre una relación, que viene determinada por la razón doble de los cuatro rayos. En efecto, escribiendo simbólicamente

$$(i j k h) = \frac{\operatorname{sen}(\theta_k - \theta_i)}{\operatorname{sen}(\theta_h - \theta_i)} : \frac{\operatorname{sen}(\theta_k - \theta_j)}{\operatorname{sen}(\theta_h - \theta_j)}$$

tendremos

$$\frac{Q}{N} = (1234) = 1 - (1324) = 1 + \frac{N}{S}$$

de donde se obtiene

$$QS = RS + RN \quad (3.5)$$

que es la relación que buscábamos.

Sustituyendo las expresiones (3-3) en esta igualdad, obtenemos, después de sencillas operaciones, la ecuación

$$\begin{aligned} &[n(t_2 - t_1) - F(W - V)] [n(t_4 - t_3) - F(U)] - \\ &- [n(t_3 - t_1) - F(W - U)] [n(t_4 - t_2) - F(V)] + \\ &[n(t_4 - t_1) - F(W)] [n(t_3 - t_2) - F(V - U)] = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para simplificarla, observemos previamente, que

$$\begin{aligned} F(X - Y) &= X - Y - \operatorname{sen}(X - Y) = F(X) - F(Y) + \\ &+ \operatorname{sen} X - \operatorname{sen} Y - \operatorname{sen}(X - Y) \end{aligned}$$

y haciendo

$$\Phi(XY) = -\operatorname{sen} X + \operatorname{sen} Y + \operatorname{sen}(X - Y) \quad (3.7)$$

resultará

$$F(X - Y) = F(X) - F(Y) - \Phi(XY) \quad (3.8)$$

Por tanto, si substituímos en (3-6) los valores de $F(W - V)$, $F(W - U)$, $F(V - U)$, según las expresiones (3-8), nos queda

$$\begin{aligned} &[n(t_4 - t_1) - F(W)] \Phi(VU) - [n(t_4 - t_2) - F(V)] \Phi(WU) + \\ &+ [n(t_4 - t_3) - F(U)] \Phi(WV) = 0 \end{aligned}$$

o bien recordando las fórmulas (3-1) y multiplicando toda la ecuación por C , tendremos

$$\Delta_{14} \Phi(VU) - \Delta_{24} \Phi(WU) + \Delta_{34} \Phi(WV) = 0. \quad (3.9)$$

Esta igualdad no es útil por contener la incógnita Δ_{14} ; pero puede ordenarse en otra forma asequible a los datos de observación, sumando y restando al primer miembro la expresión $C \Phi(WU) \Phi(WV)$, con lo cual se obtiene

$$\Delta_{14} \Phi(VU) - (\Delta_{14} - \Delta_{12}) \Phi(WU) + (\Delta_{14} - \Delta_{13}) \Phi(WV) = 0$$

y finalmente, dividiendo por Δ_{14} , nos resulta

$$\Phi(VU) - (1 - N) \Phi(WU) + (1 - Q) \Phi(WV) = 0 \quad (3.10)$$

que es una ecuación en las tres incógnitas U, V, W , que no contiene el movimiento medio n .

Esta ecuación, consecuencia de la existencia de una relación entre las constantes N, Q, R, S , nos demuestra que de las cuatro ecuaciones del sistema (3-3), solamente tres de ellas son independientes. Dicho sistema puede también escribirse en la forma siguiente

$$\begin{aligned} F(W - V) - NF(W) &= n [(t_2 - t_1) - N(t_4 - t_1)] \\ F(W - U) - QF(W) &= n [(t_3 - t_1) - Q(t_4 - t_1)] \\ F(V - U) - RF(V) &= n [(t_3 - t_2) - R(t_4 - t_2)] \\ F(V - U) - SF(U) &= n [(t_3 - t_2) - S(t_4 - t_3)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

obteniéndose otras dos ecuaciones que no contienen el movimiento medio sin más que eliminar n entre las dos primeras y las dos últimas

Así, eliminando n entre las dos primeras llegaremos a la ecuación

$$hF(W - V) - kF(W - U) + F(W) = 0 \quad (3.12)$$

en la que es

$$h = \frac{t_3 - t_1 - Q(t_4 - t_1)}{Q(t_2 - t_1) - N(t_3 - t_1)} \quad k = \frac{(t_2 - t_1) - N(t_4 - t_1)}{Q(t_2 - t_1) - N(t_3 - t_1)} \quad (3.13)$$

De igual modo, si eliminamos n entre las dos últimas, tendremos

$$F(V - U) - pF(V) + qF(U) = 0 \quad (3.14)$$

siendo

$$p = \frac{R(t_3 - t_2) - RS(t_4 - t_3)}{R(t_4 - t_2) - S(t_4 - t_3)} \quad q = \frac{S(t_3 - t_2) - RS(t_4 - t_2)}{R(t_4 - t_2) - S(t_4 - t_3)} \quad (3.15)$$

El sistema formado por las ecuaciones (3.10), (3.12), (3.14), le denominaremos *sistema fundamental*.

No hay duda alguna sobre la independencia de las tres ecuaciones del sistema fundamental. En efecto, designándolas con la misma numeración acentuada y teniendo en cuenta los datos y constantes que intervienen en cada una de ellas, podemos escribirlas simbólicamente en la forma

$$f_1(U, V, W, N, Q) = 0 \quad (3.10)$$

$$f_2(U, V, W, N, Q, t_i) = 0 \quad (3.12)$$

$$f_3(U, V, R, S, t_i) = 0 \quad (3.14)$$

Desde luego la ecuación (3.10) es independiente de las otras dos, por no contener ninguna época t_i ; en cuanto a las (3.12) y (3.14), basta recordar que entre las cuatro constantes N, Q, R, S , existen tres independientes.

Por otra parte, aunque no abordemos ahora el problema de las posibles soluciones del sistema fundamental, debemos notar que si se toma como primer ángulo de posición $\theta_1 = 180^\circ$, en lugar de θ_1 , las constantes del sistema fundamental permanecen inalteradas. Esto nos indica que entre las posibles soluciones, habrá que desechar éstas, aun cuando en algunos casos pueden ser útiles, como tendremos ocasión de comprobar en el par ADS 13169.

4. RESOLUCION DEL SISTEMA FUNDAMENTAL

Aunque la resolución del sistema fundamental, que es la cuestión que nos proponemos en este epígrafe, puede hacerse de diversas formas, damos a continuación uno de los métodos que consideramos más sencillo.

Tomemos en primer lugar la ecuación (3.14) y desarrollémosla, resultará

$$V - U - \text{sen}(V - U) - pF(V) + q(U - \text{sen} U) = 0$$

Dejando en el primer término los miembros de U , nos queda

$$(q - 1)U - (q - \cos V)\text{sen} U - \text{sen} V \cos U = (p - 1)V - p \text{sen} V$$

y si hacemos

$$\varepsilon \cos \Psi = \frac{\cos V - q}{1 - q} \quad \varepsilon \text{sen} \Psi = \frac{\text{sen} V}{1 - q} \quad (4.1)$$

la ecuación anterior se reduce a la siguiente

$$U - \varepsilon \text{sen}(U - \Psi) = \frac{1 - p}{1 - q} V + \frac{p}{1 - q} \text{sen} V \quad (4.2)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las expresiones (3.15), se deducen fácilmente las igualdades

$$1 - p = \frac{(t_4 - t_3)(R - S + RS)}{R(t_4 - t_2) - S(t_4 - t_3)} \quad 1 - q = \frac{(t_4 - t_2)(R - S + RS)}{R(t_4 - t_2) - S(t_4 - t_3)} \quad (4.3)$$

$$m = \frac{1 - p}{1 - q} = \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2} \quad (0 < m < 1) \quad (4.4)$$

Sustituyendo estas igualdades en la ecuación (4.2) y restando Ψ en ambos miembros, tendremos

$$U - \Psi - \varepsilon \operatorname{sen}(U - \Psi) = m F(V) - (\Psi - \varepsilon \operatorname{sen} \Psi) \quad (4.5)$$

que nos permite calcular U en función de V , por medio de una ecuación de Kepler, en la que $U - \Psi$ es la anomalía excéntrica, ε la excentricidad y $m F(V) - (\Psi - \varepsilon \operatorname{sen} \Psi)$ la anomalía media.

Lo mismo podríamos haber calculado V en función de U . Las ecuaciones correspondientes son estas

$$V - \Psi' - \varepsilon' \operatorname{sen}(V - \Psi') = \frac{1}{m} F(U) - (\Psi' - \varepsilon' \operatorname{sen} \Psi') \quad (4.6)$$

siendo ahora

$$\varepsilon' \cos \Psi' = \frac{\cos U - p}{1 - p} \quad \varepsilon' \operatorname{sen} \Psi' = \frac{\operatorname{sen} U}{1 - p} \quad (4.7)$$

Veamos ahora en que forma puede escribirse la ecuación (3.10) de manera que resulte útil a nuestros cálculos.

Definamos una cantidad positiva λ , y un ángulo χ por medio de las igualdades

$$\lambda \operatorname{sen} \chi = (1 - N)(1 - \cos U) - (1 - Q)(1 - \cos V) \quad (4.8)$$

$$\lambda \cos \chi = (1 - N) \operatorname{sen} U - (1 - Q) \operatorname{sen} V$$

Con estas notaciones la ecuación (3.10) adopta la forma

$$\cos(W - \chi) = \cos \chi - \frac{\Phi(V, U)}{\lambda} \quad (4.9)$$

que nos dará, en general, dos valores de W inferiores a 360° .

Finalmente, si designamos por Y el primer miembro de la ecuación (3.12), tendremos el sistema fundamental transformado en el siguiente

$$U - \Psi - \varepsilon \operatorname{sen}(U - \Psi) = m F(V) - (\Psi - \varepsilon \operatorname{sen} \Psi)$$

$$\cos(W - \chi) = \cos \chi - \frac{\Phi(V, U)}{\lambda}$$

$$Y = F(W) - K F(W - U) + h F(W - V)$$

Para cada valor V tomado arbitrariamente, la primera ecuación nos dará otro U , y llevando el par de valores V, U , a la segunda ecuación, tendremos otros dos W, W' . Las ternas $(U, V, W), (U, V, W')$, nos darán, por medio de la tercera ecuación otras cantidades Y, Y' , distintas de cero en general. Si construimos las curvas de ejes $(V, Y), (V, Y')$, las posibles soluciones del sistema fundamental están constituidas por los puntos en que estas curvas cortan al eje V .

Nuestra experiencia de cálculo nos ha hecho ver que con ángulos V de 10° en 10° se obtiene la solución con error inferior a un grado. Un segundo cálculo con valores de V de grado en grado, para dos o tres ángulos cercanos, permite obtener la solución con aproximación suficiente.

Este segundo cálculo puede en general sustituirse con ventaja por el método que describimos a continuación.

5. METODO DE APROXIMACION DEL SISTEMA FUNDAMENTAL

Cuando se conoce una solución aproximada U_0, V_0, W_0 , del sistema fundamental, podemos suponer que $U = U_0 + u, V = V_0 + v, W = W_0 + w$, son los verdaderos valores, representando u, v, w , errores bastante pequeños para poder tomar en ellos el seno por el arco y el coseno como unidad. Así, haciendo

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - \cos U_0 & A_4 &= 1 - \cos (V_0 - U_0) \\ A_2 &= 1 - \cos V_0 & A_5 &= 1 - \cos (W_0 - U_0) \\ A_3 &= 1 - \cos W_0 & A_6 &= 1 - \cos (W_0 - V_0) \end{aligned} \quad (5.1)$$

tendremos

$$\begin{aligned} F(U) &= F(U_0) + A_1 u & F(V-U) &= F(V_0-U_0) + A_4 (v-u) \\ F(V) &= F(V_0) + A_2 v & F(W-U) &= F(W_0-U_0) + A_5 (w-u) \\ E(W) &= F(W_0) + A_3 w & F(W-V) &= F(W_0-V_0) + A_6 (w-v) \end{aligned} \quad (5.2)$$

y de igual manera

$$\begin{aligned} \Phi(VU) &= \Phi(V_0 U_0) + v(A_2 - A_4) + u(A_4 - A_1) \\ \Phi(WU) &= \Phi(W_0 U_0) + w(A_3 - A_5) + u(A_5 - A_1) \\ \Phi(WV) &= \Phi(W_0 V_0) + w(A_3 - A_6) + v(A_6 - A_2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Sustituyendo estas expresiones en las fórmulas (3.14), (3.12), (3.10), llegaremos al sistema

$$\begin{aligned} (A_4 - qA_1)u + (pA_2 - A_4)v &= H_1 \\ -kA_5u + hA_6v + kA_5 - hA_6 - A_3w &= H_2 \\ [A_1 - A_4 + (1-N)(A_5 - A_1)]u + [A_4 - A_2 + (1-Q)(A_2 - A_6)]v + \\ + [1-N)(A_3 - A_5) + (1-Q)(A_6 - A_3)]w &= H_3 \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde sus segundos miembros tienen el siguiente significado:

$$\begin{aligned} H_1 &= F(V_0 - U_0) - pF(V_0) + qF(U_0) \\ H_2 &= F(W_0) - kF(W_0 - U_0) + hF(W_0 - V_0) \\ H_3 &= \Phi(V_0 U_0) - (1-N)\Phi(W_0 U_0) + (1-Q)\Phi(W_0 V_0) \end{aligned} \quad (5.5)$$

La resolución del sistema (5.4) respecto a u, v, w , nos dará las correcciones que debemos aplicar a los valores iniciales para obtener otros más aproximados. En el caso de que tratemos de mejorar una órbita, como es natural los cálculos se simplifican notablemente.

6. CALCULO DE LOS ELEMENTOS DE LA ORBITA

Supongamos resuelto el sistema fundamental y obtenidos los valores de U, V, W , que lo satisfacen.

En este caso, las ecuaciones (3.11) nos permitirán calcular el movimiento medio n y por tanto el período $P = 2\pi/n$, así como la constante C , en virtud de las tres últimas igualdades (3.1). La obtención de la excentricidad y una de las anomalías excéntricas, por ejemplo E_3 , puede conducirse de un modo análogo al seguido en el método de Thiele-Innes.

Son sobradamente conocidas las expresiones

$$e \operatorname{sen} E_j = \frac{\Delta_{jk} \operatorname{sen} (E_j - E_i) - \Delta_{ij} \operatorname{sen} (E_k - E_i)}{\Delta_{ij} + \Delta_{jk} - \Delta_{ik}}$$

$$e \operatorname{cos} E_j = \frac{\Delta_{ij} \operatorname{cos} (E_k - E_j) + \Delta_{jk} \operatorname{cos} (E_j - E_i) - \Delta_{ik}}{\Delta_{ij} + \Delta_{jk} - \Delta_{ik}}$$

de las que se deducen, para los índices $i = 2, j = 3, k = 4$, después de dividir ambos numeradores y denominadores por Δ_{23} , y simplificar

$$e \operatorname{sen} E_3 = \frac{R \operatorname{sen} (V - U) - RS \operatorname{sen} U}{RS + R - S} \tag{6.1}$$

$$e \operatorname{cos} E_3 = \frac{RS \operatorname{cos} U + R \operatorname{cos} (V - U) - S}{RS + R - S}$$

Estas igualdades sirven para calcular la excentricidad e , y la anomalía E_3 , sin ambigüedad, y por consiguiente $E_1 = E_3 - (W - U)$, $E_2 = E_3 - (V - U)$, $E_4 = E_3 + U$.

La obtención de la época de paso por periastro T es inmediata por medio de cualquiera de las ecuaciones

$$E_i - e \operatorname{sen} E_i = n (t_i - T)$$

Por otra parte, deducidos tres valores v_i , por la igualdad

$$\operatorname{tag} \frac{v_i}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tag} \frac{E_i}{2}$$

bastará aplicar el método descrito en nuestro trabajo (4) para obtener los elementos Ω, ω, i .

El formulario correspondiente, allí demostrado, es el siguiente: Consideremos dos ternas de valores correspondientes de ángulos de posición y anomalías verdaderas, y hagamos

$$\begin{aligned} p_i &= \text{tag } \theta_i & q_i &= \text{tag } v_i \\ p_j &= \text{tag } \theta_j & q_j &= \text{tag } v_j \\ p_k &= \text{tag } \theta_k & q_k &= \text{tag } v_k \end{aligned} \quad (6.2)$$

Si M_i , N_i , son los determinantes de segundo orden (siempre en el orden de la permutación ijk)

$$M_i = \begin{vmatrix} p_j + q_j & 1 - p_j q_j \\ p_k + q_k & 1 - p_k q_k \end{vmatrix} \quad N_i = \begin{vmatrix} p_j - q_j & 1 + p_j q_j \\ p_k - q_k & 1 + p_k q_k \end{vmatrix} \quad (6.3)$$

los elementos Ω , ω , i , vienen dados por las igualdades

$$\begin{aligned} \text{tag } (\omega + \Omega) &= - \frac{q_i M_i + q_j M_j + q_k M_k}{M_i + M_j + M_k} \\ \text{tag } (\omega - \Omega) &= - \frac{q_i N_i + q_j N_j + q_k N_k}{N_i + N_j + N_k} \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\text{tag}^2 \frac{i}{2} = \frac{(N_i + N_j + N_k) \cos (\omega + \Omega)}{(M_i + M_j + M_k) \cos (\omega - \Omega)}$$

Finalmente, el semieje mayor a , se calculará por la expresión

$$a^2 = \frac{C}{\cos i \cos \varphi} \quad (6.5)$$

7. ORBITA DE ADS 13169 (9754), A 606

Como aplicación del método de cálculo explicado en los epígrafes anteriores, nos hemos propuesto el de la órbita del par visual ADS 13169 (9754), A 606.

Los resultados obtenidos demuestran que, al menos con las observaciones de que se dispone, existen dos órbitas completamente distintas que las satisfacen igualmente bien, y a las que denominaremos Orbits I y Orbits II.

La única diferencia notable entre ellas corresponde a la primera observación, que para la órbita I nos da un ángulo de posición igual a $104^\circ.1$ y para la segunda órbita un ángulo de $285^\circ.5$, es decir, con una diferencia de $181^\circ.4$. Sin embargo, por tratarse de un par de estrellas de igual magnitud, se originan frecuentes cambios de cuadrante en las observaciones y por tanto no puede discriminarse la verdadera órbita.

Los datos que hemos utilizado para el cálculo de esta órbita se consiguen a continuación. Advertimos, sin embargo, que la observación núm. 18 fue recibida por nosotros con posterioridad al cálculo de la misma.

Par visual ADS 13169 (9754), A 606

$\alpha = 19^h 55^m.6$
8.8 — 8.8

$\delta = + 4^\circ 48'$
8.7 G5

<i>N</i>	<i>t</i>	θ	ρ	<i>Observador</i>
1	1903.51	105.9	0.28	3 A
2	15.15	146.1	0.31	4 A
3	18.60	153.6	0.30	2 A
4	21.08	167.0	0.29	4 A
5	23.64	171.7	0.26	3 A
6	24.67	176.1	0.25	1 A
7	39.94	233.8	0.28	4 VBs
8	43.77	246.3	0.29	1 VBs
9	44.36	250.5	0.33	3 V
10	48.66	261.0	0.26	2 VBs
11	48.71	261.2	0.29	2 Bos
12	50.64	257.0	0.24	2 Wilson (+180°)
13	51.76	265.3	0.35	4 Baize (+180°)
14	52.66	264.5	0.30	4 Bos
15	53.70	267.4	0.38	4 Baize
16	56.78	93.7	0.39	4 Baize
17	57.48	96.7	0.39	4 Bos
18	61.574	105.8	0.38	4 Bos

En primer lugar hemos representado gráficamente las observaciones en sistemas cartesianos (t, θ) y (t, ρ), eligiendo como básicos los siguientes valores:

<i>Dato núm.</i>	<i>t</i>	θ	ρ
1	1904	107°	—
2	1924	174°	0".257
3	1944	248°	0".310
4	1958	276°	0".393

Teniendo presentes las fórmulas (3.4), (3.13) y (3.15) se obtienen las constantes

$$\begin{aligned}
 N &= 3.154770 & R &= 0.775187 \\
 Q &= 2.601609 & S &= 1.338976 \\
 p &= 0.127761 & h &= 1.355026 \\
 q &= -1.118295 & k &= 2.027514 \\
 m &= 0.411765
 \end{aligned}$$

con ayuda de las cuales se procedió a un primer cálculo de las soluciones del sistema fundamental, que fue efectuado para valores de V de 10 en 10 grados, llegando a la conclusión de que existían soluciones para V entre 105° - 107° y entre 118° - 120° ; posteriormente se repitió el cálculo para estos intervalos, con objeto de llegar a resultados más precisos.

No repetiremos aquí nuestro primer cálculo, puesto que su forma de conducirlo es idéntica a la que veremos ahora para los intervalos señalados de 105° - 107° y 118° - 120° , con excepción del número de decimales utilizado en los cálculos:

	ORBITA I		ORBITA II	
V	$105^{\circ}.000$	$107^{\circ}.000$	$118^{\circ}.000$	$120^{\circ}.000$
$\text{tag } \Psi$	1.123855	1.157862	1.360846	1.400666
Ψ	$48^{\circ}.337$	$49^{\circ}.184$	$53^{\circ}.690$	$54^{\circ}.475$
ε	0.610377	0.596515	0.517259	0.502335
$\Psi - \varepsilon \text{ sen } \Psi$	0.387647	0.406972	0.520247	0.541937
$F(V)$	0.866669	0.911197	1.176540	1.228370
U	$43^{\circ}.817$	$44^{\circ}.679$	$49^{\circ}.446$	$50^{\circ}.320$
$\Phi(VU)$	0.602597	0.632392	0.807610	0.841366
$\lambda \text{ sen } \chi$	1.416140	1.447271	1.599693	1.623456
$\lambda \text{ cos } \chi$	0.055153	0.016537	-0.223052	-0.271331
χ	$87^{\circ}.770$	$89^{\circ}.345$	$97^{\circ}.938$	$99^{\circ}.490$
λ	1.417214	1.447365	1.615170	1.645983
W	$200^{\circ}.493$	$204^{\circ}.528$	$328^{\circ}.286$	$326^{\circ}.956$
$F(W)$	3.849362	3.984818	6.255351	6.251740
$F(W - U)$	2.338575	2.445392	5.851964	5.821499
$F(W - V)$	0.671263	0.710800	4.174512	4.065356
Y	0.017448	-0.010095	0.046987	-0.042765

Interpolando linealmente entre estos pares de valores y los correspondientes a los ángulos 106° y 119° llegamos a las siguientes soluciones del sistema fundamental

	U	V	W
ORBITA I	$44^{\circ}.3693$	$106^{\circ}.2828$	$203^{\circ}.0761$
ORBITA II	$49^{\circ}.8778$	$118^{\circ}.9888$	$327^{\circ}.6428$

Los residuos de las tres ecuaciones fundamentales para dichos ángulos, son:

	H_1	H_2	H_3
ORBITA I	0.000003	0.000064	-0.000016
ORBITA II	-0.000015	-0.000134	0.000017

En definitiva, los elementos obtenidos para ambas órbitas son los siguientes:

Elementos	ORBITA I	ORBITA II
Período	$P = 80.^{\circ}597$	$P = 60.^{\circ}53$
Epoca	$T = 1900.275$	$T = 1910.641$
Excentricidad	$e = 0.497275$	$e = 0.843113$
Semieje	$a = 0.381173$	$a = 0.552811$
Ang. nodo	$\Omega = 117^{\circ}.94$	$\Omega = 123^{\circ}.16$
Anomalía	$\omega = 284^{\circ}.63$	$\omega = 276^{\circ}.85$
Inclinación	$i = 63^{\circ}.49$	$i = 75^{\circ}.03$

Las diferencias observación-cálculo, para ambas órbitas son muy similares, como se comprobará inspeccionando el cuadro adjunto, donde los cambios de cuadrante se han indicado con un asterisco:

CUADRO DE DIFERENCIAS O — C

N	ORBITA I		ORBITA II	
	$\Delta\theta$	$\Delta\rho$	$\Delta\theta$	$\Delta\rho$
1	+ 1.8	+ 0.087	+ 0.4*	— 0.090
2	+ 1.1	+ 0.016	+ 3.5	+ 0.050
3	— 1.8	+ 0.019	— 1.0	+ 0.028
4	+ 4.1	+ 0.020	+ 4.7	+ 0.022
5	— 1.2	+ 0.008	— 0.8	0.000
6	— 0.7	— 0.004	— 0.3	— 0.007
7	— 2.5	+ 0.011	— 1.3	— 0.002
8	— 1.1	— 0.018	— 0.8	— 0.011
9	+ 1.6	+ 0.017	+ 2.7	+ 0.018
10	+ 2.1	— 0.083	+ 3.1	— 0.083
11	+ 2.2	— 0.065	+ 2.9	— 0.052
12	— 5.9	— 0.117	— 5.0	— 0.117
13	+ 0.2	— 0.024	+ 1.1	— 0.014
14	— 2.2	— 0.070	— 1.4	— 0.069
15	— 1.2	+ 0.030	— 0.4	+ 0.005
16	— 0.2*	+ 0.001	+ 0.6*	+ 0.009
17	+ 1.7*	0.000	+ 1.4*	+ 0.001
18	+ 4.0*	— 0.016	+ 4.6*	+ 0.008

BIBLIOGRAFIA

- (1) R. CID PALACIOS: *Astronomical Journal*, 63, núm. 9, 1958 (U. S. A.).
- (2) W. H. VAN DEN BOS: *Journal des Observateurs*, vol. 44, núm. 4, págs. 76-77, 1961.
- (3) O. EGGEN: *PASP*, 67, 169, 1955.
- (4) R. CID PALACIOS: *Urania*, 252, jul.-dic., págs. 129-137, 1960.

Seminario Matemático
Sección de Astronomía y Geodesia
ZARAGOZA

SOBRE UN TEOREMA DE ALBERTONI, BOCCHIERI
Y LOINGER CONCERNIENTE AL CARACTER ALEATORIO
Y DÉBILMENTE UNIFORME DE LAS DENSIDADES
DE LIOUVILLE

p o r

A. T. GALINDO*

Introducción

Con el fin de justificar el uso de las ensambladas microcanónicas de Gibbs a partir de los principios de la dinámica general, Albertoni et al.¹ han introducido un método de cálculo de promedios $E(F)$ de funcionales F sobre el espacio de las densidades microcanónicas de Liouville, que permite a sus autores asegurar que la "inmensa mayoría" de estas densidades son débilmente uniformes en el sentido de Hopf². Sin embargo, aunque en ¹ se "afirma" que E da el *mismo peso* a todas las densidades (consecuencia ésta falsamente inferida del proceso de límite tras el cual se define su método), los mencionados autores no analizan (ni siquiera formalmente) sus propiedades, a saber, si existe o no un conjunto suficientemente grande de funcionales que sean promediables E , y si su cálculo induce o no una medida sobre el espacio de densidades. Estas cuestiones son de suma importancia, si se desea que las consecuencias de orden físico deducidas de su teorema sean significativas.

Un doble análisis de este problema nos va a permitir, empero, el afirmar rigurosamente que el teorema de Albertoni et al. es totalmente trivial e inútil para justificar los métodos de la mecánica estadística, pues demostramos que E lleva asociada de forma natural una medida cuyo soporte es la única densidad débilmente uniforme con relación a cualquier flujo.

En la sección I probamos que todas las funcionales continuas y polinómicamente acotadas pertenecen al dominio de definición de E ; denotando por C el conjunto de tales funcionales, demostramos que E es una integral de Daniell sobre C , tal que *i/* todo boreliano de L (\equiv espacio métrico de densidades) es sumable con relación a la extensión de E a las funcionales de Baire, y *ii/* la medida asociada a esta extensión está concentrada en un único elemento de L .

* Dirección actual: Institute of Mathematical Sciences, Nueva York.

1 S. Albertoni, P. Bocchieri y A. Loinger, *J. of Math. Phys.* 1, 244 (1960).

2 E. Hopf, *Ergodentheorie*, Berlín, 1937.

En la sección II presentamos, finalmente, un enfoque de estas cuestiones dentro del marco de la teoría de la medida en espacios topológicos lineales, y probamos una vez más que E induce una medida en los cilindros borelianos de L cuya extensión natural al σ -cuerpo mínimo está concentrada en un punto de L .

I

I.1) Sea (Ω, Σ, μ) un espacio con medida de probabilidad, separable y sin átomos. Si $\mathcal{H} \equiv L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$, denotemos por L el subconjunto cerrado y convexo de \mathcal{H} formado por aquellos $f \in \mathcal{H}$ tales que $f \geq 0$, y $(e, f) = 1$, donde $e (\in L)$ es la función idénticamente igual a uno sobre Ω . Estos elementos f son las llamadas densidades de Liouville. Diremos que una funcional F , definida y continua sobre L , es polinómicamente acotada, si y sólo si existen dos números $K \geq 0$, n (entero) ≥ 0 , tales que

$$|F[f]| \leq K \|f\|^n \quad \text{para} \quad \forall f \in L.$$

(Puesto que $\|f\| \geq 1$ para cada $f \in L$ es obvio que toda funcional continua y acotada, esto es, tal que $|F[f]| \leq M$ para $\forall f \in L$, es también polinómicamente acotada).

Denotemos por C el conjunto de todas estas funcionales continuas y polinómicamente acotadas, y por C_0 el subconjunto de C formado por aquellas que son simplemente acotadas. Es evidente que

- 1.a) C_0 y C son álgebras de funcionales continuas.
- 1.b) C_0 y C separan fuertemente los puntos de L .
- 1.c) La topología más débil en el conjunto L que hace que los elementos de C_0 sean funcionales continuas coincide con la topología original de L . (Obsérvese que L , por ser métrico, es también normal, y por tanto el lema de Uryshon le es aplicable).
- 1.d) C_0 y C son espacios de Riesz.
- 1.e) La funcional característica de cualquier cerrado de L pertenece a la mínima familia de Baire que contiene a C_0 .

De estas propiedades se deduce en seguida que si sobre C (o C_0) hay definida una integral de Daniell, con respecto a la cual el conjunto L sea sumable, entonces el σ -cuerpo de conjuntos sumables bajo la extensión de esta integral contiene a todos los borelianos de L .

I.2) Sea $\pi: \Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ una equipartición arbitraria y finita de Ω en elementos disjuntos de Σ , y escribamos $|\pi| \equiv 1/n$. Sea $\varphi(A_i)$ la función característica de A_i , y consideremos la aplicación continua T_π de L en R_n así definida:

$$T_\pi f \equiv ((\varphi(A_1), f), (\varphi(A_2), f), \dots, (\varphi(A_n), f))$$

donde $(.,.)$ denota el producto escalar en \mathcal{H} .

La imagen $T_\pi L$ de L es el simplex de vértices $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, 1)$; si ρ_π es la medida de probabilidad inducida (tras su opor-

tuna normalización) sobre $T_\pi L$ por la medida de Lebesgue en R_n , definamos (según Albertoni et al.) el promedio $E(F)$ de una funcional F sobre L , de la siguiente forma:

$$E(F) \equiv \lim_{|\pi| \rightarrow 0} E_\pi(F) \equiv \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \int_{T_\pi L} \Phi_\pi(x_1, \dots, x_n) d\rho_\pi$$

donde

$$\Phi_\pi(x_1, \dots, x_n) \equiv F[n x_1 \varphi(A_1) + \dots + n x_n \varphi(A_n)].$$

Sea \mathcal{F} el conjunto de funcionales a las que es aplicable E ; \mathcal{F} es claramente un espacio lineal. Es cuestión de simple cálculo (que omitimos por brevedad) demostrar que si F es una funcional polinómica (esto es, combinación lineal de funcionales del tipo

$$\int_{\Omega x \dots x \Omega} P_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) f(\lambda_1) \dots f(\lambda_m) d\mu(\lambda_1) \dots d\mu(\lambda_m)$$

donde $P_m(\lambda_1 \dots \lambda_m) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$) entonces $F \in \mathcal{F}$, y además $E(F) = F[e]$.

Sea ahora F un elemento de C que se anula en un entorno de e ; existe pues un $\delta > 0$, tal que $F[f] = 0$ si $\|f - e\| < \delta$. Por tanto, es siempre posible encontrar dos números $M \geq 0$, y n (entero) ≥ 0 , tales que

$$|F[f]| \leq P[f] \equiv M(\|f\|^2 - 1)^n \quad \text{para} \quad \forall f \in L.$$

Como $P[f]$ es polinómica, $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} E_\pi(P)$ existe y es igual a $P[e]$; pero $P[e] = 0$, luego $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} E_\pi(F) = 0$, es decir, $F \in \mathcal{F}$ y $E(F) = F[e] = 0$.

Consideremos finalmente una funcional $F \in C$ tal que $F[e] = 0$; dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $|F[f]| < \epsilon$ para $\forall f \in V_\delta \equiv \{f \in L: \|f - e\| < \delta\}$.

Sea $G_\delta[f]$ una funcional continua, con valores en $[0, 1]$, y tal que

$$G_\delta[f] = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in L - V_\delta \\ 0 & \text{si } f \in \bar{V}_{\delta/2} \end{cases}$$

(la existencia de G_δ está asegurada por el lema de Uryshon).

Entonces $|F[f] - F[f] G_\delta[f]| < \epsilon$ para $\forall f \in L$; pero según lo anterior, $E(F G_\delta) = 0$, luego $|E_\pi(F)| < 2\epsilon$ para $|\pi| < \delta_1(\epsilon)$. De aquí que $E(F)$ existe y es igual a $F[e]$ ($= 0$).

Por tanto, dada una $F \in C$ arbitraria, $F - F[e] \in \mathcal{F}$ y como toda funcional constante pertenece a \mathcal{F} , y \mathcal{F} es lineal, queda así demostrado que $C \subset \mathcal{F}$. Además, del carácter lineal de E resulta $E(F) = F[e]$ para $\forall F \in C$.

I.3) En vista de los resultados de I.1) y I.2) es obvio el comprobar que E es una integral de Daniell³ sobre C , pues si $\{F_n\}_1^\infty \subset C$ y $F_n \downarrow 0$, entonces

3. L. H. Loomis An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, New York, 1953.

$E(F_n) = F_n[e] \downarrow 0$. Por otro lado, el boreliano $\{e\}$ es sumable (pues según 1.e), la funcional característica de $\{e\}$ es de Baire, y además está mayorada por la de L , que es sumable); como dicha funcional característica de $\{e\}$ es límite de una sucesión $\{G_n\}_{1}^{\infty}$ monótona decreciente, de elementos de C_0 , tales que $G_n[e] = 1$, resulta así que, si ν es la medida (de probabilidad, pues $\nu(L) = 1$) inducida sobre los subconjuntos de Baire en L por la extensión de E a las funcionales de Baire sumables, entonces $\nu(\{e\}) = 1$. Luego ν está concentrada en $\{e\}$, c. q. d.

II. 1) Sea \mathcal{H}_r el espacio real de Hilbert formado por las funciones reales de $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$. A todo subconjunto finito $\Psi \equiv \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \subset \mathcal{H}_r$ se le puede asociar una aplicación T_Ψ , continua y lineal de \mathcal{H}_r en R_n , así definida:

$$T_\Psi \varphi \equiv ((\varphi_1, \varphi), \dots, (\varphi_n, \varphi)) \text{ para } \forall \varphi \in \mathcal{H}_r.$$

Dada una función Φ definida en R_n , continua y con soporte compacto, la funcional $\Phi'(\varphi) \equiv \Phi(T_\Psi \varphi)$ definida sobre \mathcal{H}_r , es continua, y acotada. Su restricción a L ($\subset \mathcal{H}_r$) es pues, un elemento de C_0 . La funcional Φ' se denomina una funcional cilíndrica con respecto a Ψ , y la denotaremos por \bar{F}_Ψ ; su restricción a L escribiremos F_Ψ .

Definamos $\bar{E}(\bar{F}_\Psi) \equiv E(F_\Psi)$; según I, tenemos:

$$\bar{E}(\bar{F}_\Psi) = F_\Psi[e] = \bar{F}_\Psi[e]$$

Por consiguiente, E induce una medida de probabilidad $\bar{\nu}$ en los cilindros borelianos^{4,5} de \mathcal{H}_r (esto es, en los subconjuntos de \mathcal{H}_r cuya funcional característica es cilíndrica con relación a algún Ψ , y cuya Φ asociada es característica de algún boreliano de R_n).

Sea $\{\varphi_i\}_{1}^{\infty}$ un subconjunto numerable y denso en \mathcal{H}_r (nótese que \mathcal{H}_r es separable, por serlo (Ω, Σ, μ)); entonces $\mathcal{H}_r - \{e\} = \bigcup_i T_{\Psi_n}^{-1} X_n$, donde $\Psi_n \equiv \{\varphi_n\}$, y $X_n \equiv T_{\Psi_n} \mathcal{H}_r - T_{\Psi_n} \{e\}$. Por tanto $\{e\}$ pertenece al σ -cuerpo mínimo Σ' que contiene a los borelianos cilíndricos; como $\bar{\nu}(\mathcal{H}_r - \{e\}) = 0$, pues $T_{\Psi_n}^{-1} X_n$ no contiene a e para ningún n , resulta $\bar{\nu}(\{e\}) = 1$ aquí $\bar{\nu}$ denota, evidentemente, la extensión de $\bar{\nu}$ a Σ' .

Demostremos, finalmente, que $L \in \Sigma'$, con el fin de asegurar que la restricción de $\bar{\nu}$ al σ -cuerpo en L formado por las intersecciones de elementos de Σ' con L , tiene sentido: sea $\{A_n\}_{1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de Σ densa en la pseudométrica de (Ω, Σ, μ) ; consideremos la sucesión $\{e, \varphi(A_1), \varphi(A_2), \dots, \varphi(A_n) \dots\}$ de elementos de \mathcal{H}_r ($\varphi(A_i)$ denota la fun-

4 I. M. Gel'fand y N. Ya. Vilyenkin, Obobshchyennyye Funktsii, Vol. 4. Moscú, 1961.

5 K. O. Friedrichs, H. N. Shapiro et al., Integration of Functionals, Lecture notes, N. Y. U., 1957.

ción característica de A_i). Sea $\psi_0 \equiv \{e\}$, $\psi_n \equiv \{\varphi(A_n)\}$ ($n \geq 1$). Demostremos que

$$L = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_{\psi_n}^{-1} T_{\psi_n} L$$

En efecto, supongamos que $\varphi \in \bigcap_0^{\infty} T_{\psi_n}^{-1} T_{\psi_n} L$; entonces $(e, \varphi) = 1$; y $\varphi \geq 0$, pues de lo contrario $\exists n: (\varphi(A_n), \varphi) < 0$, y por tanto $\varphi \notin T_{\psi_n}^{-1} T_{\psi_n} L$. Luego $\varphi \in L$; la relación de inclusión inversa es obvia. Observando que $T_{\psi_n} L$ es un intervalo en R_1 (imagen continua de un conexo), se deduce de la expresión anterior que L es intersección de cilindros borelianos; por ende $L \in \Sigma'$, c. q. d.

TEORIA GENERAL DE PERTURBACIONES EN MECANICA CLASICA

por

L. M. GARRIDO, F. GASCÓN y F. J. SANCHO

RESUMEN

Presentamos aquí un método operacional para estudiar el efecto de las perturbaciones en mecánica clásica. El método es semejante al que se utilizaba en mecánica cuántica.

Utilizamos pues el formulismo hamiltoniano. Se desarrolla en este trabajo el caso más general en que tanto la hamiltoniana no perturbada como la perturbación dependen explícitamente del tiempo. Se ilustra la teoría con un ejemplo.

En un trabajo anterior (1), presentaba Garrido un método operacional para las perturbaciones en mecánica clásica, siguiendo una formulación hamiltoniana y utilizando frecuentemente la invariancia de los paréntesis de Poisson bajo transformaciones canónicas. Pero en él se consideraba que tanto la hamiltoniana no perturbada como la perturbación, no dependían explícitamente del tiempo.

Vamos ahora a generalizar la teoría desarrollada en (1) para el caso de sistemas no conservativos, con lo cual además se extiende la validez del principio de acción dada por Garrido en un trabajo posterior (2).

El operador $\frac{\partial}{\partial x}$

Definimos este operador por la propiedad de ser lineal y que su conmutador con x sea igual a la unidad. Su campo de aplicación es toda función analítica de x en un cierto dominio, considerando x como un punto interior al mismo.

Con estas propiedades, el conmutador $\left[\frac{\partial}{\partial x}, f(x) \right] = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$, siendo $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ la derivada de la función, y podremos representar el desarrollo de una función $f(x)$ así:

$$f(x + h) = e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x) e^{-h \frac{\partial}{\partial x}} \quad (1)$$

Aplicaciones a la mecánica

Sea $F(q_i, p_i, t)$ una función de las variables canónicas q_i, p_i y de t : Supongamos que pertenece al campo de aplicación de los operadores $\frac{\partial}{\partial q_i}$ y $\frac{\partial}{\partial p_i}$. Si definimos el operador de Liouville por

$$\Omega = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad (2)$$

y tenemos en cuenta las ecuaciones de Hamilton $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$; $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$;

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [\Omega F] \quad (3)$$

donde $[\Omega F]$ representa el conmutador de Ω y F ; $[\Omega F] \equiv \Omega F - F \Omega$; en general, si F no depende explícitamente del tiempo,

$$\frac{d^n F}{dt^n} = \underbrace{[\Omega, \Omega \dots, [\Omega, F]]}_{n \text{ veces}}$$

Limitémonos por simplicidad al caso de dos variables canónicas conjugadas. Entonces, a partir del valor de $F(q(0), p(0)) = F(q_0, p_0)$ en el instante inicial $t = 0$, hallaríamos su valor para un tiempo posterior t , es decir, su evolución temporal

$$F(q(t), p(t)) = e^{t\Omega} F(q(0), p(0)) e^{-t\Omega} \quad (5)$$

mediante la aplicación del operador Ω tal como figura en (4).

El operador $S(t)$

Sea el caso más general en que la hamiltoniana del sistema dependa explícitamente del tiempo, $H = \bar{H}(q(t), p(t), t)$ y sea $F(q(t), p(t), t)$ una función del grupo de variables canónicas $q(t)$ y $p(t)$. El operador Ω tendrá en este caso una doble dependencia temporal; la dependencia explícita del tiempo, a través de H y la dependencia dinámica a través de las variables $q(t)$ y $p(t)$.

Sea $S(t)$ el operador que genera la evolución dinámica del sistema. Entonces podremos expresar, tanto F como Ω en el instante t en función de sus valores antes de la evolución dinámica.

$$\begin{aligned} F(q(t), p(t)) &= S(t) F(q(0), p(0)) S^{-1}(t) \\ \Omega(q(t), p(t)) &= S(t) \Omega(q(0), p(0), t) S^{-1}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

$\Omega(q(0), p(0), t)$ es el valor de $\Omega(q(0), p(0), 0)$ después de sufrir la evolución cinemática debida a su dependencia explícita del tiempo.

Derivando la primera de las ecuaciones (6) respecto al tiempo, teniendo en cuenta el carácter unitario de $S(t)$, se obtiene

$$\frac{dF(q(t), p(t))}{dt} = \left[\frac{dS(t)}{dt} S^{-1}(t), F(q(t), p(t)) \right] \quad (7)$$

que comparándola con (3) nos da

$$\frac{dS(t)}{dt} S^{-1}(t) = \Omega(q(t), p(t), t) \quad (8)$$

pero por la segunda de las ecuaciones (6) $\Omega(q(t), p(t), t) = S(t) \Omega(q_0, p_0, t) S^{-1}(t)$ por tanto obtendremos en (8) después de multiplicar por $S(t)$ por la derecha los dos miembros,

$$\frac{dS(t)}{dt} = S(t) \Omega(q_0, p_0, t) \quad (9)$$

Si como caso particular la hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo, la integración de (9) nos da para $S(t)$ la expresión

$$S(t) = e^{t\Omega}$$

Perturbaciones

Supongamos que la hamiltoniana de un sistema puede descomponerse en dos partes $H = H_0 + H_1$ y que el problema de la evolución engendrada por H_0 ha sido resuelto exactamente, esto es, conocemos $q_0(t)$ y $p_0(t)$.

Admitimos también que la perturbación H_1 comienza a actuar en $t = 0$, de modo que en este instante las $q(0)$ y $p(0)$ del movimiento perturbado coincide con $q_0(0)$ y $p_0(0)$ respectivamente.

Si representamos por $S(t)$ y $S_0(t)$ los operadores de evolución del movimiento perturbado y sin perturbar respectivamente

$$F(q_0(t), p_0(t)) = S_0(t) F(q_0, p_0) S_0^{-1}(t) \quad (10)$$

y

$$F(q(t), p(t)) = S(t) F(q_0, p_0) S^{-1}(t) \quad (11)$$

de donde obtenemos que

$$F(q(t), p(t)) = S_1(t) F(q_0(t), p_0(t)) S_1^{-1}(t) \quad (12)$$

llamando $S_1(t)$ al operador unitario

$$S_1(t) = S(t) S_0^{-1}(t) \quad (13)$$

Derivando (13) respecto a t y teniendo en cuenta las fórmulas análogas a (9) para $\frac{dS}{dt}$ y $\frac{dS_0}{dt}$, tendremos

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = S_1(t) \Omega_1(q_0(t), p_0(t), t) \quad (14)$$

siendo

$$\Omega_1(q_0(t), p_0(t), t) = S_0(t) [\Omega(q_0, p_0, t) - \Omega_0(q_0, p_0, t)] S_0^{-1}(t)$$

y

$$\Omega(q_0, p_0, t); \Omega_0(q_0, p_0, t),$$

los operadores de Liouville correspondientes a H y H_0 en función de los valores iniciales de q_0 y p_0 .

La ecuación (14) podemos integrarla, teniendo en cuenta la condición $S_1(0) = 1$ y obtenemos la ecuación

$$S_1(t) = 1 + \int_0^t dt' S_1(t') \Omega_1(q_0(t') p_0(t'), t') \quad (15)$$

que puede resolverse por iteración obteniendo las sucesivas aproximaciones en potencias de $\Omega_1(q_0(t), p_0(t), t)$ que no depende sino de las variables q_0, p_0 del movimiento no perturbado.

Al aplicar $\Omega_1(q_0(t), p_0(t), t)$ a la función $F(q_0(t), p_0(t))$ nos encontraremos con expresiones como $\frac{\partial q_0(t)}{\partial q_0(t)}$ o sea derivadas de una función respecto a la misma función en otro instante de tiempo. El problema puede resolverse tomando como condiciones iniciales de $q_0(t)$ y $p_0(t)$, los valores que toman en el tiempo $t = t'$. De modo que,

$$\begin{aligned} q_0(t) &= q_0(q_0(t'), p_0(t'), t - t') \\ p_0(t) &= p_0(q_0(t'), p_0(t'), t - t') \end{aligned}$$

y podemos realizar el cálculo deseado.

Ejemplo

Consideremos un oscilador armónico unidimensional al que se le aplica una fuerza periódica en la dirección del movimiento $f = k' \sin \gamma t$.

Para este caso, tendremos

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k q^2}{2} - k' q \sin \gamma t$$

siendo $p = m\dot{q}$ el momento conjugado a q .

Consideremos como hamiltoniana no perturbada $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$ la del oscilador armónico lineal, cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} q_0(t) &= q_0 \cos \omega_0 t + \frac{p_0}{m \omega_0} \sin \omega_0 t \\ p_0(t) &= - \dots m q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + p_0 \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

siendo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Llamando $\omega^2 = \frac{k'}{m}$ nos queda para el hamiltoniano perturbador H_1 la expresión

$$H_1 = H - H_0 = -m \omega^2 q \text{ sen } \gamma t$$

y el operador de Liouville correspondiente será

$$\Omega_1(q_0(t), p_0(t), t) = \frac{\partial[-m \omega^2 q_0(t) \text{ sen } \gamma t]}{\partial p_0(t)} \frac{\partial}{\partial q_0(t)} - \frac{\partial[-m \omega^2 q_0(t) \text{ sen } \gamma t]}{\partial q_0(t)} \frac{\partial}{\partial p_0} = m \omega^2 \text{ sen } \gamma t \frac{\partial}{\partial p_0(t)}$$

y el operador de evolución, en primer orden de perturbación

$$S_1^{(1)} = 1 + \int_0^t dt' m \omega^2 \text{ sen } \gamma t' \frac{\partial}{\partial p_0(t')}$$

con lo cual obtenemos para la primera perturbación

$$q^{(1)}(t) = q_0(t) + \frac{\omega^2}{\omega_0} \int_0^t \text{sen } \gamma t' \text{ sen } \omega_0(t-t') dt'$$

$$= q_0 \cos \omega_0 t + \frac{p_0}{m \omega_0} \text{ sen } \omega_0 t - \frac{\omega^2 \gamma}{\omega_0(\omega_0^2 - \gamma^2)} \text{ sen } \omega_0 t + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \gamma^2} \text{ sen } \gamma t$$

las siguientes perturbaciones son nulas, por tanto esta solución en primer orden de la perturbación será la solución correcta.

Análogamente podríamos calcular la expresión de $p(t)$, o bien a partir de la identidad $p = m\dot{q}$

$$p(t) = -m q_0 \omega_0 \text{ sen } \omega_0 t + p_0 \cos \omega_0 t - \frac{m \omega^2 \gamma}{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \omega_0 t + \frac{m \omega^2 \gamma}{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \gamma t.$$

ESTUDIO DINAMICO DEL PLASMA TERMONUCLEAR

p o r

FRANCISCO GASCÓN LATASA*

INTRODUCCION

El gran desarrollo industrial conseguido en la primera mitad del siglo xx, tenía como base la utilización de combustibles fósiles: carbón, petróleo y derivados. Sin embargo, es bien conocida la desigual distribución de estas materias primas en la superficie terrestre. Hay muchas naciones que carecen de estos elementos básicos, y las restantes ven como sus reservas disminuyen rápidamente.

El descubrimiento de la fisión nuclear y posterior control de las reacciones, vino a poner remedio a esta situación. Hoy en día, naciones como Inglaterra, están explotando esta nueva fuente de energía en escala industrial. España deberá tener en marcha sus reactores antes de diez años.

Las reservas de combustibles nucleares son relativamente grandes y el precio de la energía producida por este procedimiento va tendiendo a igualarse a la de la energía hidráulica. Sin embargo, estos reactores de fisión tienen un inconveniente extraordinario: las cenizas radioactivas; éstas representan un verdadero peligro para la humanidad, teniendo en cuenta que todavía no se ha resuelto el problema de deshacerse de ellas.

Todo esto nos obliga a emprender una rápida carrera que han comenzado todas las naciones para lograr una nueva forma de obtener energía: el aprovechamiento de la enorme cantidad de energía desarrollada en la bomba de hidrógeno, mediante un aparato que denominamos, por analogía con la fisión nuclear, reactor de fusión controlada o reactor termónuclear, que produzca energía barata, controlada y sin peligro. La realización de este aparato lleva consigo un gran número de dificultades técnicas y teóricas [1].

La elevada temperatura requerida produce la ionización total de los átomos del combustible, encontrándose la materia en el denominado cuarto estado o plasma, compuesto por electrones y átomos totalmente ionizados.

W. Crookes (1878) intuyó este nuevo estado de la materia en sus experimentos con descargas eléctricas en gases. I. Langmuir desarrolló una teoría para estos gases ionizados denominándolos "plasma". Los trabajos

* En la actualidad en el Estudio General de Navarra, Pamplona.

de Rutherford y Oliphant (1934) y otros investigadores y astrofísicos contribuyeron de manera notable en el desarrollo de esta ciencia nueva. Sin embargo, hasta 1951 no se vio la importancia de la fusión y entonces pasó a ser investigación secreta. Empezaron a publicarse algunos trabajos en 1957 y el número de físicos y publicaciones dedicados a este problema creció exponencialmente. Hoy en día, aunque los libros aún escasean, los trabajos publicados en revistas son muy numerosos, particularmente después de la Conferencia de Ginebra para usos pacíficos de la energía atómica.

Los problemas encontrados en el estudio de los gases ionizados son de varios tipos. Difieren del estudio de los gases ordinarios por estar sometidos a campos electromagnéticos que les obligan a realizar complicados movimientos.

Debido a su reciente desenvolvimiento, la mayoría de los problemas del plasma están desarrollados cualitativamente y solamente se han encontrado soluciones cuantitativas en algunos casos ideales.

La investigación sobre la puesta a punto de reactores es un problema fascinante, difícil y potencialmente muy importante. Esperamos que la predicción del físico indio H. J. Bhabha, en 1955 en la Conferencia de Ginebra, de que el problema estaría resuelto antes de 20 años, se confirme para bien de la humanidad.

Este trabajo que presentamos, esperamos sea un jalón para la solución del problema planteado. En el primer capítulo damos un método operacional que nos permite resolver el problema general de perturbaciones en la Mecánica Clásica, teoría que aplicamos en el capítulo segundo al estudio de la dinámica del plasma en campos electromagnéticos y al estudio fundamental de los invariantes adiabáticos que pueden permitirnos calcular tiempos de confinamiento en los reactores, validez de la aproximación del centro guía, etc.

Creemos que el método de perturbaciones tan importante en los problemas que se plantea la física moderna, nos permitirá atacar problemas capitales tales como el de estabilidad de las descargas en reactores, movimiento de satélites artificiales, etc.

CAPÍTULO I

TEORIA GENERAL DE PERTURBACIONES EN MECANICA CLASICA

INTRODUCCIÓN

En un trabajo anterior [2], se ha presentado un método operacional para el cálculo de perturbaciones en mecánica clásica siguiendo la formulación hamiltoniana y utilizando frecuentemente la invariancia de los paréntesis de Poisson bajo transformaciones canónicas. Pero en él, se limitaba el estudio al caso en que tanto la hamiltoniana no perturbada como la que presentaba la perturbación, no dependían explícitamente del tiempo.

Poco después [3], Garrido presentó un principio de acción que daba las variaciones de las variables canónicas conjugadas mediante las derivadas de la acción del sistema. Se escribía así

$$\delta q_i = - \frac{\partial \delta W}{\partial p_i} \quad \delta p_i = \frac{\partial \delta W}{\partial q_i} \quad (1)$$

donde W era la acción del sistema y δ representa variaciones respecto a un parámetro cualquiera. Si las variaciones eran calculadas con relación al tiempo, se obtenían las ecuaciones de Hamilton del movimiento. Pero también se puede variar el parámetro de acoplamiento λ entre un movimiento no perturbado de acción W_0 y el perturbado cuya acción es:

$$W = W_0 + \lambda W_1$$

De esta forma se desarrolla la imagen de interacción en la mecánica clásica y se obtiene un método para calcular perturbaciones basado en la utilización de lagrangianas. Sin embargo, la validez del principio de acción (1) fue demostrada basándose en el trabajo [2] lo cual limita la generalidad de (1) a sistemas conservativos.

Vamos ahora a generalizar la teoría estudiada en [2] para el caso en que tanto la hamiltoniana no perturbada como la de perturbación, dependen explícitamente del tiempo. Obtenemos esencialmente las mismas expresiones, para el cálculo de perturbaciones, que las deducidas para el caso en que ambas hamiltonianas eran constantes.

La importancia de este trabajo no estriba únicamente en ser una generalización de [2] sino en que, además, mediante los resultados aquí obtenidos y la demostración de equivalencia desarrollada en [3], es posible afirmar que el principio de acción (1) es válido para todo sistema, conservativo o no conservativo.

EL OPERADOR $\frac{\partial}{\partial x}$

Sabemos que una función analítica en un cierto dominio y en la frontera del mismo, puede desarrollarse en serie de Taylor alrededor de un punto cualquiera de este dominio. La serie resultante es convergente y tiene por suma la función.

Definimos el operador $\frac{\partial}{\partial x}$ por las siguientes propiedades:

- a) Ser un operador lineal.
- b) El conmutador $\left[\frac{\partial}{\partial x}, (x) \right] = I$; donde representamos la variable (x) entre paréntesis para distinguirla de cuando actúa como operador e $I =$ operador identidad.
- c) El campo de aplicación de dicho operador es toda función de la variable x , que sea analítica en un cierto dominio, cuando consideramos que x es un punto interior al mismo.

Por ser $\frac{\partial}{\partial x}$ un operador lineal, tendremos

$$\frac{\partial}{\partial x} (c x) = c \frac{\partial}{\partial x} (x)$$

siendo c una constante cualquiera. Entonces

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, c x \right] = \frac{\partial}{\partial x} (c x) - (c x) \frac{\partial}{\partial x} = c \left(\frac{\partial}{\partial x} (x) - (x) \frac{\partial}{\partial x} \right) = c \left[\frac{\partial}{\partial x}, x \right] = c$$

Estudiamos ahora la acción del operador $\frac{\partial}{\partial x}$ sobre x^2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (x^2) &= \frac{\partial}{\partial x} (x \cdot x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} x \right) x + x \left(\frac{\partial}{\partial x} x \right) = x + x \frac{\partial}{\partial x} x = \\ &= x + x \left(1 + x \frac{\partial}{\partial x} \right) = 2x + x^2 \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

Por tanto, generalizando el resultado para una potencia n de x tendremos

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^n) = n x^{n-1} + x^n \frac{\partial}{\partial x}$$

y puesto que $n x^{n-1}$ es la derivada de x^n respecto a x , podemos escribir

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^n) = \frac{\partial x^n}{\partial x} + x^n \frac{\partial}{\partial x}$$

luego

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, x^n \right] = \frac{\partial}{\partial x} x^n - x^n \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x^n}{\partial x}$$

En general, si $f(x)$ es una función que pertenece al campo de aplicación del operador $\frac{\partial}{\partial x}$, o sea, es desarrollable en serie de potencias de x , por las propiedades dichas, tendremos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + f(x) \frac{\partial}{\partial x} \quad (2)$$

De donde deducimos que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f(x) \right] = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (3)$$

luego el conmutador del operador $\frac{\partial}{\partial x}$ con una función $f(x)$ de su campo de aplicación nos da la derivada de la función con respecto a x .

Sea Δx un incremento infinitesimal de la variable x y supongamos que $x + \Delta x$ es un punto interior del dominio donde $f(x)$ es analítica.

Teniendo en cuenta solamente los términos lineales en Δx podemos escribir

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \quad (4)$$

Relación rigurosamente cierta para el límite en que $\Delta x \rightarrow 0$.

Teniendo en cuenta la relación (2) que nos da el valor $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ en términos del operador $\frac{\partial}{\partial x}$; la expresión (4) nos queda

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x) - f(x) \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

que considerando solamente los términos lineales en Δx podemos escribir

$$f(x + \Delta x) \simeq \left(1 + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x) \left(1 - \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (5)$$

y con esta misma aproximación, evidentemente

$$f(x + \Delta x) \simeq e^{\Delta x \frac{\partial}{\partial x}} f(x) e^{-\Delta x \frac{\partial}{\partial x}} \quad (6)$$

según el criterio establecido para definir funciones de un operador.

Repetiendo el proceso efectuando tomando como función $f(x)$ la $f(x + \Delta x)$, tendremos,

$$f(x + 2 \Delta x) \simeq f(x + \Delta x) + \Delta x \frac{\partial f(x + \Delta x)}{\partial x} \quad (7)$$

donde $\frac{\partial f(x + \Delta x)}{\partial x}$ representa la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x + \Delta x$.

Puesto que

$$\frac{\partial f(x + \Delta x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, f(x + \Delta x) \right] = \frac{\partial}{\partial x} f(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \frac{\partial}{\partial x}$$

sustituyendo en (7) nos queda

$$\begin{aligned} f(x + 2 \Delta x) &\simeq f(x + \Delta x) + \Delta x \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \simeq \\ &\simeq \left(1 + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x + \Delta x) \left(1 - \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \right) = \left(1 + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 f(x) \left(1 - \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= e^{2 \Delta x \frac{\partial}{\partial x}} f(x) e^{-2 \Delta x \frac{\partial}{\partial x}} \end{aligned}$$

Repetiendo la operación n veces de modo que $n \Delta x = h$ y tomando n suficientemente grande para que $\Delta x = \frac{h}{n} \rightarrow 0$, tendremos

$$f(x + h) = e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x) e^{-h \frac{\partial}{\partial x}} \quad (8)$$

que es la expresión del desarrollo de Taylor en función del operador $\frac{\partial}{\partial x}$.

Vamos a ver que la expresión $e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x) e^{-h \frac{\partial}{\partial x}}$ nos da realmente el desarrollo del Taylor. Para ello desarrollamos los operadores $e^{h \frac{\partial}{\partial x}}$ y $e^{-h \frac{\partial}{\partial x}}$ en serie de potencias y apliquémoslos a la función $f(x)$

$$\begin{aligned} e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x) e^{-h \frac{\partial}{\partial x}} &= f(x) + \frac{h}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x) - f(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) - 2 \frac{\partial}{\partial x} f(x) \frac{\partial}{\partial x} + f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \\ &+ \dots \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x) - n \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} f(x) \frac{\partial}{\partial x} + \dots (-1)^n f(x) \frac{\partial^n}{\partial x^n} + \dots = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{\partial^{n-m}}{\partial x^{n-m}} f(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \quad (9)$$

donde entendemos que el operador $\frac{\partial^0}{\partial x^0}$ es el operador unidad.

Calculemos ahora los sucesivos conmutadores del operador $\frac{\partial}{\partial x}$ con $f(x)$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f(x) \right] = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \left[\frac{\partial}{\partial x}, f(x) \right] \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$$

pero por otra parte este doble conmutador es

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \left[\frac{\partial}{\partial x}, f(x) \right] \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x) - f(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) - 2 \frac{\partial}{\partial x} f(x) \frac{\partial}{\partial x} + f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Para el conmutador triple tenemos

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \left[\frac{\partial}{\partial x}, \left[\frac{\partial}{\partial x}, f(x) \right] \right] \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) - 2 \frac{\partial}{\partial x} f(x) \frac{\partial}{\partial x} + f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]$$

$$= \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x) - 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \frac{\partial}{\partial x} + 3 \frac{\partial}{\partial x} f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - f(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3}$$

y además $\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right] = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}$

En general, pues

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \left[\frac{\partial}{\partial x}, \dots \left[\frac{\partial}{\partial x}, f(x) \right] \dots \right] \right]_{n \text{ veces}} = \sum (-1)^m \binom{n}{m} \frac{\partial^{n-m}}{\partial x^{n-m}} f(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \quad (10)$$

y que según sabemos es la derivada n-esima de $f(x)$.

Comparando esta expresión con la (9), vemos que ésta es realmente el desarrollo de Taylor de $f(x)$.

Si llamamos D_x al operador que aplicado a una función nos da su derivada, el desarrollo de Taylor de un función $f(x)$ lo podemos representar

$$f(x+h) = e^{h D_x} f(x) \quad (11)$$

La ventaja de la expresión (8) sobre la (11), es que la (8) nos da una completa equivalencia entre $f(x+h)$ y su expresión simbólica

$$e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x) e^{-h \frac{\partial}{\partial x}}$$

de tal modo que al operar, lo mismo podemos hacerlo con una que con otra. No ocurre así con la expresión (11), pues tomando, por ejemplo, el caso sencillo de multiplicar $f(x+h)$ por la variable x , la expresión $f(x+h) \cdot x$ no es la misma que $e^{h D_x} \cdot f(x) \cdot x$. Basta fijarnos que la desarrollar $e^{h D_x}$ en serie de potencias del operador D_x , tendremos una serie de operadores derivada, actuando sobre un producto de funciones, y que habrá que derivar según las reglas conocidas.

En cambio la expresión (8) nos da el mismo resultado $f(x+h) \cdot x$ que $e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x) e^{-h \frac{\partial}{\partial x}} x$. En efecto.

$$f(x+h)x = \left(f(x) + \frac{h}{1!} \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \dots \right) x = f(x)x + \frac{h}{1!} \frac{\partial f(x)}{\partial x} x + \dots \quad (12)$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x) e^{-h \frac{\partial}{\partial x}} x &= e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x) \left(x - \frac{h}{1!} \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x \right. \\ &+ \dots (-1)^n \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} x \left. \right) = e^{h \frac{\partial}{\partial x}} \left(f(x)x - \frac{h}{1!} f(x) \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{h^2}{2!} f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} x \right. \\ &+ \dots (-1)^n \frac{h^n}{n!} f(x) \frac{\partial^n}{\partial x^n} x \left. \right) = \left(1 + \frac{h}{1!} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} + \dots \right) \\ &\left(f(x)x - \frac{h}{1!} f(x) \frac{\partial}{\partial x} x + \dots (-1)^n \frac{h^n}{n!} f(x) \frac{\partial^n}{\partial x^n} x \right) \end{aligned}$$

Agrupando ahora los productos por las sucesivas potencias de h , tendremos

$$\begin{aligned} f(x)x + \frac{h}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x)x - f(x) \frac{\partial}{\partial x} x \right) \\ + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)x - 2 \frac{\partial}{\partial x} f(x) \frac{\partial}{\partial x} x + f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} x \right) + \dots \end{aligned}$$

y en cada uno de los paréntesis de esta expresión, como x siempre figura a la derecha del operador, podemos sacarlo factor común y nos quedará

$$f(x) x + \frac{h}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x) - f(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) x + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) - 2 \frac{\partial}{\partial x} f(x) \frac{\partial}{\partial x} + f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) x + \dots$$

Como cada uno de los paréntesis representan las sucesivas derivadas de $f(x)$, vemos la equivalencia de esta expresión con la (12).

Así pues las expresiones

$$f(x + h) = e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x) e^{-h \frac{\partial}{\partial x}}$$

$$f(x + h) = e^{h D_x} f(x)$$

son equivalentes numéricamente en el sentido de que ambas dan correctamente el valor de $f(x + h)$, pero no lo son operacionalmente pues si intentamos multiplicar por la derecha ambos miembros de estas ecuaciones por funciones arbitrarias de x , la primera daría una igualdad mientras que el resultado que se obtendría de la segunda sería falso.

De aquí podemos deducir la norma general a seguir con estas expresiones. Siempre que tengamos que realizar operaciones algebraicas con $f(x + h)$ manejaremos la primera expresión en que entra $\frac{\partial}{\partial x}$; pero una vez terminadas todas las manipulaciones algebraicas, si queremos hallar el valor numérico del resultado, bastará suprimir $e^{-h \frac{\partial}{\partial x}}$ y escribir $e^{h D_x}$

en lugar del $e^{h \frac{\partial}{\partial x}}$ que queda, interpretando D_x como el operador derivada, lo cual simplifica mucho la aplicación del método que vamos a presentar.

Esta regla práctica para calcular los valores numéricos puede probarse directamente. En efecto, como es fácil de demostrar sencillamente deshaciendo muchos de los pasos verificados más arriba

$$f(x + h) = e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x) e^{-h \frac{\partial}{\partial x}}$$

$$= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} h^n \left[\frac{\partial}{\partial x}; \left[\frac{\partial}{\partial x}; \dots \left[\frac{\partial}{\partial x}; f(x) \right] \dots \right] \right]$$

n veces

donde la notación indica n conmutadores. Pero

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \left[\frac{\partial}{\partial x}, \dots \left[\frac{\partial}{\partial x}; f(x) \right] \dots \right] \right] = D_x^n f(x)$$

igualdad que es válida sólo numéricamente pero no operacionalmente. Y por consiguiente, para obtener el valor de $f(x + h)$ es suficiente calcular

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} D_x^n f(x) = e^{h D_x} f(x)$$

como queríamos probar.

APLICACIONES A LA MECÁNICA CLÁSICA

En el párrafo anterior hemos definido el operador $\frac{\partial}{\partial x}$ y sus propiedades más importantes. De la misma manera definiríamos ahora los operadores $\frac{\partial}{\partial q_i}$ y $\frac{\partial}{\partial p_i}$, cuando queramos estudiar sistemas mecánicos cuyo estado quede definido por el conjunto de variables canónicas conjugadas q_i y p_i . Aunque la formulación y consecuencias son aplicables a cualquier número de coordenadas, con frecuencia prescindiremos del subíndice "i" para simplificar los cálculos y notaciones.

Si tenemos una función del grupo de variables canónicas conjugadas $F(q_i, p_i, t)$, esta función dependerá, en general, explícitamente del tiempo, e implícitamente del tiempo a través de q_i y p_i que son funciones de él. Supondremos que esta función $F(q_i(t), p_i(t), t)$ pertenece al campo de aplicación de los operadores $\frac{\partial}{\partial q_i}$ y $\frac{\partial}{\partial p_i}$.

Si definimos el operador de Liouville por

$$\Omega = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad (13)$$

teniendo en cuenta las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

la derivada total de $F(q_i(t), p_i(t), t)$ respecto al tiempo tomará la forma operacional

$$\begin{aligned} \frac{dF(q_i(t), p_i(t), t)}{dt} &= \frac{\partial F(q_i(t), p_i(t), t)}{\partial t} + \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial F(q_i(t), p_i(t), t)}{\partial q_i(t)} + \right. \\ &+ \dot{p}_i \frac{\partial F(q_i(t), p_i(t), t)}{\partial p_i(t)} \left. \right) = \frac{\partial F(q_i(t), p_i(t), t)}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i(t)} \frac{\partial F(q_i(t), p_i(t), t)}{\partial q_i(t)} \right. \\ &\left. - \frac{\partial H}{\partial q_i(t)} \frac{\partial F(q_i(t), p_i(t), t)}{\partial p_i(t)} \right) = \frac{\partial F(q_i(t), p_i(t), t)}{\partial t} + [\Omega, F] \end{aligned}$$

Supondremos en todo lo que sigue que la función $F(q_i(t), p_i(t), t)$ no depende explícitamente del tiempo; entonces

$$\frac{dF(q_i(t), p_i(t), t)}{dt} = [\Omega, F(q_i(t), p_i(t), t)] \quad (14)$$

luego el conmutador del operador de Liouville con una función, que no depende explícitamente del tiempo, es la derivada total de la función respecto al tiempo.

Igualmente

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dF}{dt} \right) = \left[\Omega; \frac{dF}{dt} \right] = [\Omega, [\Omega, F]]$$

y en general

$$\frac{d^n F}{dt^n} = \left[\Omega, \dots \left[\Omega, [\Omega, F] \right] \dots \right]_{n \text{ veces}}$$

Debe notarse que el conmutador $[\Omega, F]$ no es otra cosa que el paréntesis de Poisson $[H, F]_{q_i, p_i}$ de la hamiltoniana del sistema con la función dada.

A partir del valor $F(q(0), p(0)) = F(q_0, p_0)$ de F en un instante inicial $t = 0$, podemos calcular el valor de esta función en un instante infinitamente próximo, mediante el teorema de Taylor, para cuya aplicación debemos tener presente que, puesto que calculamos el valor de la función F en un instante de tiempo próximo al inicial, de modo que $dt \rightarrow 0$, podemos desprestigiar infinitésimos de segundo orden y escribir el desarrollo de Taylor en la forma

$$\begin{aligned} F(q(dt), p(dt)) &= F(q(0), p(0)) + dt [\Omega, F]_{t=0} = \\ &= (1 + dt \Omega) F(q(0), p(0)) (1 - dt \Omega) = e^{dt \Omega} F(q(0), p(0)) e^{-dt \Omega} \quad (15) \end{aligned}$$

Análogamente hallaríamos el valor de F en un instante infinitamente próximo al que acabamos de calcular, es decir, al cabo de un lapso de tiempo dt después del anterior; o lo que es lo mismo, el valor de F después de transcurrir un tiempo $2 dt$ desde el momento inicial

$$F(q(2dt), p(2dt)) = e^{2dt \Omega} F(q(dt), p(dt)) e^{-2dt \Omega} \quad (16)$$

de esta forma, por saltos, podremos calcular el valor de F en un tiempo cualquiera, a partir del valor que tuviera en un instante inicial.

Si la hamiltoniana, H , fuese función explícita del tiempo, evidentemente el Ω que figura en (16) sería el operador Liouville después de transcurrir el tiempo dt , mientras que el que figura en (15) lo sería en el instante $dt = 0$, siendo por tanto diferentes. En cambio, si H no fuese función explícita del tiempo, Ω , según (13), tampoco lo sería. Además, de la propiedad de invariancia del paréntesis de Poisson, respecto a la evolución temporal

que es una transformación canónica, se deduce que Ω es independiente del tiempo.

Así pues, si $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ el operador Ω que figura en (16) es el mismo que que el de (15), por lo que la (16) podrá escribirse en la forma

$$F(q(2dt), p(2dt)) = e^{2dt \Omega} F(q(0), p(0)) e^{-2dt \Omega}$$

y si por sucesivos intervalos infinitesimales de tiempos alcanzamos un tiempo finito t , tendremos como expresión del valor de F en el tiempo t , si H no depende explícitamente del tiempo, la siguiente

$$F(q(t), p(t)) = e^{t \Omega} F(q(0), p(0)) e^{-t \Omega} \quad (17)$$

El operador Ω aplicado como indica la (17), da la evolución temporal de la función $F(q, p)$ a partir de su valor en un intento inicial.

EL OPERADOR $S(t)$

Supongamos, como caso completamente general, que la hamiltoniana de un sistema es función explícita del tiempo, $H = H(q(t), p(t), t)$.

Sea F una función del grupo canónico de variables conjugadas, $F = F(q(t), p(t))$, que no depende explícitamente del tiempo.

El operador de Liouville, será en general función explícita del tiempo, $\Omega = \Omega(q(t), p(t), t)$, por serlo H , y además por contener las $q(t)$ y $p(t)$, tendrá, igual que F , respecto al tiempo dependencia dinámica.

Llamemos $S(t)$ al operador que genera la evolución dinámica del sistema. Entonces, podremos expresar, tanto la función F como el operador Ω en el instante t en función de sus valores, antes de la evolución dinámica, en la forma

$$F(q(t), p(t)) = S(t) F(q_0, p_0) S^{-1}(t) \quad (18)$$

$$\Omega(q(t), p(t), t) = S(t) \Omega(q_0, p_0, t) S^{-1}(t) \quad (19)$$

siendo q_0 y p_0 los valores de $q(t)$ y $p(t)$ en el instante inicial de la evolución, $t = 0$. El operador $\Omega(q_0, p_0, t)$ es el valor del operador $\Omega(q_0, p_0, 0)$ después de haber sufrido la evolución cinemática. Por tanto, el operador $S(t)$ al aplicarlo al $\Omega(q_0, p_0, t)$ lo único que hace es producirle la evolución dinámica, con lo que obtendremos la evolución completa. Como la F no es función explícita del tiempo, no tiene que sufrir la evolución cinemática previa.

Derivando la (18) con respecto al tiempo tenemos

$$\frac{dF(q(t), p(t))}{dt} = \frac{dS(t)}{dt} F(q_0, p_0) S^{-1}(t) + S(t) F(q_0, p_0) \frac{dS^{-1}(t)}{dt} \quad (20)$$

teniendo en cuenta la identidad

$$S(t) S^{-1}(t) = 1$$

obtenemos al derivar respecto al tiempo

$$\frac{dS}{dt} S^{-1}(t) + S(t) \frac{dS^{-1}(t)}{dt} = 0$$

luego

$$S^{-1}(t) \frac{dS}{dt} S^{-1}(t) + S^{-1}(t) S(t) \frac{dS^{-1}(t)}{dt} = 0$$

de donde

$$\frac{dS^{-1}(t)}{dt} = -S^{-1}(t) \frac{dS(t)}{dt} S^{-1}(t)$$

valor que sustituido en la (20), y llamando para abreviar

$$F(q(t), p(t)), = F(t), \quad y, \quad F(q_0, p_0) = F(0),$$

nos da

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \frac{dS(t)}{dt} F(0) S^{-1}(t) - S(t) F(0) S^{-1}(t) \frac{dS(t)}{dt} S^{-1}(t) = \\ &= \frac{dS(t)}{dt} S^{-1}(t) S(t) F(0) S^{-1}(t) - S(t) F(0) S^{-1}(t) \frac{dS(t)}{dt} S^{-1}(t) = \\ &= \frac{dS(t)}{dt} S^{-1}(t) F(t) - F(t) \frac{dS(t)}{dt} S^{-1}(t) = \left[\frac{dS(t)}{dt} S^{-1}(t), F(t) \right] \end{aligned}$$

que comparado con la (14), válida incluso para sistemas no conservativos, conduce a

$$\left[\frac{dS(t)}{dt} S^{-1}(t), F(t) \right] = [\Omega(t), F(t)]$$

o sea

$$\frac{dS(t)}{dt} S^{-1}(t) = \Omega(t)$$

y sustituyendo el valor de $\Omega(t)$ dado por la (19)

$$\frac{dS(t)}{dt} S^{-1}(t) = S(t) \Omega(q_0, p_0, t) S^{-1}(t)$$

luego

$$\frac{dS(t)}{dt} = S(t) \Omega(q_0, p_0, t) \quad (21)$$

Si como caso particular suponemos que la hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo, Ω tampoco depende, y la última ecuación tiene por solución inmediata

$$S(t) = e^{t\Omega}$$

APLICACIÓN A PERTURBACIONES

Supongamos que la hamiltoniana de un sistema puede descomponerse en dos partes

$$H = H_0 + H_1 \quad (22)$$

donde tanto H_0 como H_1 dependen explícitamente del tiempo y que la ecuación de la evolución temporal engendrada por H_0 , hamiltoniana no perturbada, ha sido resuelta exactamente, es decir, se han hallado los valores $q_0(t)$, $p_0(t)$ para el movimiento de un sistema cuya hamiltoniana es H_0 , mediante las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_0(t) = \frac{\partial H_0}{\partial p_0(t)} \quad \dot{p}_0(t) = -\frac{\partial H_0}{\partial q_0(t)}$$

Admitamos que las condiciones iniciales para el movimiento no perturbado coincidan con las del movimiento total. Este requerimiento se satisface sin más que suponer que en el instante, $t = 0$, $H = H_0$, es decir, la perturbación y por tanto la hamiltoniana perturbadora H_1 empieza a actuar a partir de $t = 0$.

La solución del movimiento no perturbado la escribiremos operacionalmente en la forma

$$F(q_0(t), p_0(t)) = S_0(t) F(q_0, p_0) S_0^{-1}(t) \quad (23)$$

Puesto que decimos que la hemos resuelto exactamente, esto equivale a decir que conocemos el operador $S_0(t)$, que naturalmente satisface a la ecuación $\frac{dS_0(t)}{dt} = S_0(t) \Omega_0(q_0, p_0, t)$, donde Ω_0 es el operador de Liouville correspondiente a H_0 .

Si $S(t)$ es el operador de la evolución total, o sea el que engendra la evolución del sistema perturbado cuya hamiltoniana es H , la ecuación de la evolución será

$$\begin{aligned} F(q(t), p(t)) &= S(t) F(q_0, p_0) S^{-1}(t) = \\ &= S(t) S_0^{-1}(t) S_0(t) F(q_0, p_0) S_0^{-1}(t) S_0(t) S^{-1}(t) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la (23) queda

$$\begin{aligned} F(t) &= S(t) S_0^{-1}(t) F(q_0(t), p_0(t)) S_0(t) S^{-1}(t) = \\ &= S_1(t) F(q_0(t), p_0(t)) S_1^{-1}(t) \end{aligned} \quad (24)$$

donde

$$S_1(t) = S(t) S_0^{-1}(t)$$

Derivando respecto al tiempo esta expresión, tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{d S_1(t)}{dt} &= \frac{d S(t)}{dt} S_0^{-1}(t) - S(t) S_0^{-1}(t) \frac{d S_0(t)}{dt} S_0^{-1}(t) = \\ &= S(t) \Omega(q_0, p_0, t) S_0^{-1}(t) - S(t) S_0^{-1}(t) S_0(t) \Omega_0(q_0, p_0, t) S_0^{-1}(t) = \\ &= S(t) (\Omega(q_0, p_0, t) - \Omega_0(q_0, p_0, t)) S_0^{-1}(t) = S_1(t) S_0(t) \Omega_1(q_0, p_0, t) S_0^{-1} \end{aligned}$$

donde $\Omega_1(q_0, p_0, t) = \Omega(q_0, p_0, t) - \Omega_0(q_0, p_0, t)$ y puesto que $S_0(t)$ genera la evolución dinámica para el movimiento no perturbado

$$\frac{d S_1(t)}{dt} = S_1(t) \Omega_1(q_0(t), p_0(t), t)$$

Integrando la ecuación diferencial obtenida desde el instante inicial, $t = 0$, hasta el instante en que nos interesa y teniendo presente que $S_1(0) = 1$, tendremos

$$S_1(t) = 1 + \int_0^t dt_1 S_1(t_1) \Omega_1(q_0(t_1), p_0(t_1), t_1) \quad (25)$$

donde el subíndice 1 en la t lo hemos puesto únicamente para evitar confusión con el límite superior de la integral.

La (25) podemos resolverla por aproximaciones sucesivas en potencias de $\Omega_1(q_0(t_1), p_0(t_1), t_1)$ pues éste es pequeño y tendremos:

Aproximación cero:

$$S_1^{(0)}(t) = 1$$

Aproximación uno: Sustituimos el valor de $S_1(t)$ de la aproximación cero en la (25) y tendremos

$$S_1^{(1)}(t) = 1 + \int_0^t dt_1 S_1^{(0)}(t_1) \Omega_1(q_0(t_1), p_0(t_1), t_1) = 1 + \int_0^t dt_1 \Omega_1(q_0(t_1), p_0(t_1), t_1)$$

Aproximación dos: Sustituimos en la (25) el $S_1(t)$ de la aproximación uno y queda

$$\begin{aligned} S_1^{(2)}(t) &= 1 + \int_0^t dt_1 S_1^{(1)}(t_1) \Omega_1(q_0(t_1), p_0(t_1), t_1) = 1 + \int_0^t dt_1 \Omega_1(q_0(t_1), p_0(t_1), t_1) + \\ &+ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \Omega_1(q_0(t_2), p_0(t_2), t_2) \Omega_1(q_0(t_1), p_0(t_1), t_1) \end{aligned}$$

y para la enésima aproximación, análogamente tendríamos:

$$S_1^{(n)}(t) = 1 + \int_0^t dt_1 \Omega_1(q_0(t_1), p_0(t_1), t_1) + \dots$$

$$\dots + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \Omega_1(q_0(t_n), p_0(t_n), t_n) \dots \Omega_1(q_0(t_1), p_0(t_1), t_1) \quad (26)$$

fórmula que nos permite calcular el operador $S_1(t)$ hasta el orden de aproximación que deseemos.

Calculado $S_1(t)$ únicamente nos resta aplicarlo en la forma indicada en la (24) a la función calculada previamente para el movimiento no perturbado $F(q_0(t), p_0(t))$ y obtendremos la función buscada $F(q(t), p(t))$.

Al aplicar el operador $\Omega_1(q_0(t_n), p_0(t_n), t_n)$ a la función $F(q_0(t), p_0(t))$ nos encontramos con expresiones del tipo $\frac{\partial q_0(t)}{\partial q_0(t_n)}$ o sea derivadas de una función respecto a la misma función en otro instante de tiempo. Para resolver este problema escribiremos las soluciones del movimiento no perturbado como función de las condiciones iniciales en el instante $t = 0$:

$$q_0(t) = q_0(q_0, p_0, t) \qquad p_0(t) = p_0(q_0, p_0, t)$$

de las que podemos calcular $q_0(t_n)$ y $p_0(t_n)$. Podremos ahora expresar $q_0(t)$ y $p_0(t)$ en función de los nuevos valores iniciales $q_0(t_n)$ y $p_0(t_n)$ en el instante $t = t_n$ del siguiente modo:

$$q_0(t) = q_0(q_0(t_n), p_0(t_n), t - t_n)$$

$$p_0(t) = p_0(q_0(t_n), p_0(t_n), t - t_n)$$

que nos permiten el cálculo deseado.

Consideremos, por ejemplo, como movimiento no perturbado el correspondiente a un oscilador armónico cuya hamiltoniana es $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$. Según sabemos las soluciones que obtendremos para $q_0(t)$ y $p_0(t)$ serán

$$q_0(t) = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{p_0}{m\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$p_0(t) = -m\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t + p_0 \cos \omega_0 t$$

donde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. De estas expresiones obtenemos

$$q_0(t) = q_0(t_n) \cos \omega_0 (t - t_n) + \frac{p_0(t_n)}{m\omega_0} \sin \omega_0 (t - t_n)$$

$$p_0(t) = -m\omega_0 q_0(t_n) \sin \omega_0 (t - t_n) + p_0(t_n) \cos \omega_0 (t - t_n)$$

luego

$$\frac{\partial q_0(t)}{\partial q_0(t_n)} = \cos w_0(t - t_n) \quad \frac{\partial p_0(t)}{\partial q_0(t_n)} = -mw_0 \operatorname{sen} w_0(t - t_n)$$

$$\frac{\partial q_0(t)}{\partial p_0(t_n)} = \frac{1}{mw_0} \operatorname{sen} w_0(t - t_n) \quad \frac{\partial p_0(t)}{\partial p_0(t_n)} = \cos w_0(t - t_n)$$

Con todo lo expuesto anteriormente, el problema del estudio de un movimiento perturbado queda completamente resuelto. Es útil, no obstante, dar una interpretación gráfica del procedimiento seguido. Para ello, tomaremos unos ejes coordenados en los que se representa el tiempo en abscisas y en ordenadas los valores de la función $F(q(t), p(t))$.

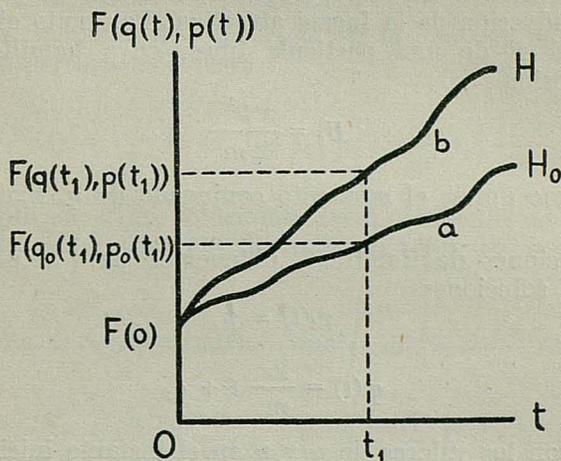


FIG. 1

En el instante inicial $t = 0$, la función es $F(0)$. Si a esta función le aplico la hamiltoniana no perturbada H_0 , el sistema evolucionará siguiendo la línea de evolución a . En un instante determinado t_1 , la función tiene el valor $F(q_0(t_1), p_0(t_1))$, correspondiente al movimiento no perturbado.

Si desde el instante inicial $t = 0$ hubiese aplicado la hamiltoniana total o perturbada H , el sistema hubiese evolucionado según una línea b , y en el instante t_1 tendría el valor $F(q(t_1), p(t_1))$, correspondiente al movimiento perturbado.

Ahora bien, hemos resuelto el movimiento no perturbado, o lo que es lo mismo, conocemos la línea a , pero no la b . Entonces, el método de perturbaciones nos indica el salto que debemos dar para pasar de $F(q_0(t), p_0(t))$ a $F(q(t), p(t))$ con lo que conoceremos el valor de todos los puntos de b , a partir de los de a , en definitiva, el movimiento total.

EJEMPLO I

Sea un punto material de masa m con unas ligaduras tales que sólo le permiten el movimiento en una dirección, y sometido a una fuerza proporcional a su distancia a un punto fijo (oscilador lineal armónico).

La función hamiltoniana para este sistema es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

donde q es la distancia de la partícula al punto o centro de atracción, $p = m\dot{q}$ su momento conjugado y k la constante de proporcionalidad entre la fuerza y la distancia.

Para hallar las ecuaciones del movimiento de la partícula por el método de perturbaciones expuesto, supondremos que la perturbación consiste en la introducción de la fuerza atractiva. Por tanto el movimiento no perturbado será el de una partícula libre, cuya hamiltoniana sabemos tiene por expresión

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}$$

donde p es, como antes, el momento conjugado de q , ligados por la relación $p = m\dot{q}$.

De las ecuaciones de Hamilton, obtenemos para este movimiento no perturbado, las soluciones

$$p_0(t) = p_0$$

$$q_0(t) = \frac{p_0}{m} t + q_0$$

donde q_0 y p_0 son los valores de q y p en el instante inicial, $t=0$.

Si realizamos una traslación del origen de tiempos desde $t=0$ hasta $t=t_1$, las ecuaciones del movimiento no perturbado podrán escribirse en función de las nuevas condiciones iniciales $q(t_1)$ y $p(t_1)$ de la siguiente forma

$$p_0(t) = p_0(t_1) = p_0$$

$$q_0(t) = \frac{p_0(t_1)}{m} (t - t_1) + q_0(t_1)$$

luego

$$\frac{\partial q_0(t)}{\partial p_0(t_1)} = \frac{t - t_1}{m}$$

Llamando $\omega^2 = \frac{k}{m}$ tendremos para la hamiltoniana perturbadora

$$H_1 = H - H_0 = \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

que puesta en función de las soluciones del movimiento no perturbado, en el instante t_1 dará la expresión

$$H_1(q_0(t_1), p_0(t_1)) = \frac{m \omega^2}{2} q_0(t_1)^2$$

El operador de Liouville correspondiente será

$$\begin{aligned} \Omega_1(q_0(t_1), p_0(t_1), t_1) &= \frac{\partial \left\{ \frac{m \omega^2}{2} q_0(t_1)^2 \right\}}{\partial p_0(t_1)} \frac{\partial}{\partial q_0(t_1)} - \frac{\partial \left\{ \frac{m \omega^2}{2} q_0(t_1)^2 \right\}}{\partial q_0(t_1)} \frac{\partial}{\partial p_0(t_1)} = \\ &= -m \omega^2 \left(\frac{p_0}{m} t_1 + q_0 \right) \frac{\partial}{\partial p_0(t_1)} \end{aligned}$$

Por tanto el operador de evolución en la imagen de interacción, en primer orden de perturbación, será:

$$S_1^{(1)}(t) = 1 - m \omega^2 \int_0^{t_1} dt_1 \left(q_0 + \frac{p_0}{m} t_1 \right) \frac{\partial}{\partial p_0(t_1)}$$

operador que aplicado a las soluciones del movimiento no perturbado permiten obtener las soluciones del movimiento total, en primera aproximación

$$\begin{aligned} q^{(1)}(t) &= S_1(t) q_0(t) S_1^{-1}(t) = q_0(t) - m \omega^2 \int_0^t dt_1 \left(q_0 + \frac{p_0}{m} t_1 \right) \frac{\partial q_0(t)}{\partial p_0(t_1)} = \\ &= q_0(t) - \omega^2 q_0 \frac{t^2}{2} - \frac{\omega^2 p_0}{m} \frac{t^3}{3!} = q_0 \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} \right) + \frac{p_0}{m \omega} \left(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} \right) \end{aligned}$$

Para la perturbación de segundo orden el operador de evolución toma la forma

$$S_1^{(2)}(t) = 1 + \int_0^t \Omega_1(t) dt_1 + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \Omega_1(t_2) \Omega_1(t_1)$$

y al aplicarlo sobre $q_0(t)$, puesto que ya hemos obtenido el resultado de aplicar los dos primeros sumandos, nos limitaremos a aplicar el último, resultando

$$\begin{aligned} &-m \omega^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 q_0(t_2) \frac{\partial \left\{ -m \omega^2 q_0(t_1) \frac{t-t_1}{m} \right\}}{\partial p_0(t_2)} = \\ &= \omega^4 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left(q_0 + \frac{p_0}{m} t_2 \right) (t_1 - t_2) (t - t_1) = q_0 \frac{\omega^4 t^4}{4!} + \frac{p_0}{m} \frac{\omega^4 t^5}{5!} \end{aligned}$$

Luego el valor de la coordenada en la perturbación de segundo orden será:

$$q^{(2)}(t) = q_0 \left(1 - \frac{\omega^2 t^4}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} \right) + \frac{p_0}{m\omega} \left(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} \right)$$

Como vemos, cada nueva perturbación nos da un término del desarrollo en serie del seno y coseno de ωt , luego efectuando infinitas perturbaciones llegaremos a

$$q(t) = q_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t$$

que es la solución completa de la ecuación de la evolución de la coordenada para el oscilador lineal armónico.

El valor del momento conjugado $p(t)$ podíamos obtenerlo de una forma análoga, o teniendo en cuenta la relación $p = m\dot{q}$

$$p(t) = -m q_0 \omega \sin \omega t + p_0 \cos \omega t$$

EJEMPLO II

Sea el oscilador lineal armónico del ejemplo anterior al que se le aplica una fuerza periódica en el tiempo y en la dirección del movimiento $f = k' \sin \gamma t$.

La función hamiltoniana para este sistema, oscilador lineal armónico perturbado en el tiempo es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} - k' q \sin \gamma t$$

donde el momento conjugado de la coordenada q viene dado por $p = m\dot{q}$.

Para resolver este problema por el método de perturbaciones, suponemos que el movimiento no perturbado es el del oscilador armónico, cuya hamiltoniana y ecuaciones del movimiento según hemos visto en el ejemplo I son

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

$$q_0(t) = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{p_0}{m\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$p_0(t) = -m q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + p_0 \cos \omega_0 t$$

donde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Llamando $\omega^2 = \frac{k'}{m}$ nos queda para hamiltoniana perturbadora

$$H_1 = H - H_0 = -m\omega^2 q \sin \gamma t$$

hamiltoniana que depende explícitamente de tiempo, El operador de Liouville correspondiente será

$$\Omega_1(q_0(t_1), p_0(t_1), t_1) = \frac{\partial[-mw^2 q_0(t_1) \text{sen } \gamma t_1]}{\partial p_0(t_1)} \frac{\partial}{\partial p_0(t_1)} - \frac{\partial[-mw^2 q_0(t_1) \text{sen } \gamma t_1]}{\partial q_0(t_1)} \frac{\partial}{\partial p_0(t_1)} = mw^2 \text{sen } \gamma t_1 \frac{\partial}{\partial p_0(t_1)}$$

y el operador de evolución en primer orden de la perturbación

$$S^{(1)}(t) = 1 + \int_0^t dt_1 mw^2 \text{sen } \gamma t_1 \frac{\partial}{\partial p_0(t_1)}$$

Al aplicar $S^{(1)}(t)$ sobre la $q_0(t)$ del movimiento no perturbado, nos dará en primera aproximación.

$$q^{(1)}(t) = q_0(t) + \frac{w^2}{w_0} \int_0^t \text{sen } \gamma t_1 \text{sen } w_0(t - t_1) dt_1 = q_0 \cos w_0 t + \frac{p_0}{mw_0} \text{sen } w_0 t - \frac{w^2 \gamma}{w_0(w_0^2 - \gamma^2)} \text{sen } w_0 t + \frac{w^2}{w_0^2 - \gamma^2} \text{sen } \gamma t$$

puesto que

$$q_0(t) = q_0(t_1) \cos w_0(t - t_1) + \frac{p_0(t_1)}{mw_0} \text{sen } w_0(t - t_1)$$

La segunda y siguientes perturbaciones son nulas, por lo que la solución encontrada para la $q(t)$ en primer orden de la perturbación será la ecuación de la evolución completa para la coordenada de posición.

Análogamente podemos calcular la ecuación de la evolución para el momento conjugado, o bien a partir de la identidad $p = m\dot{q}$

$$p(t) = -mq_0 w_0 \text{sen } w_0 t + p_0 \cos w_0 t - \frac{mw^2 \gamma}{w_0^2 - \gamma^2} \cos w_0 t + \frac{mw^2 \gamma}{w_0^2 - \gamma^2} \cos \gamma t$$

EJEMPLO III

Supongamos que al oscilador lineal armónico perturbado en el tiempo del ejemplo II, le aplicamos una fuerza complementaria $f' = \delta k' \text{sen } \gamma t$ o sea, la fuerza f sufre una alteración debida a que el coeficiente k' ha sufrido un incremento $\delta k'$.

La hamiltoniana de este sistema será

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} - (k' + \delta k') q \text{sen } \gamma t$$

Antes de sufrir la alteración, es decir en el movimiento que consideramos como no perturbado, la hamiltoniana tenía por expresión

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} - k'q \operatorname{sen} \gamma t$$

función que dependen explícitamente del tiempo y cuyas ecuaciones del movimiento hemos visto son

$$q_0(t) = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{p_0}{m \omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t - \frac{\omega^2 \gamma}{\omega_0(\omega_0^2 - \gamma^2)} \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t$$

$$p_0(t) = -m q_0 \omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + p_0 \cos \omega_0 t - \frac{m \omega^2 \gamma}{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \omega_0 t + \\ + \frac{m \omega^2 \gamma}{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \gamma t$$

Como hemos definido $\omega^2 = \frac{k'}{m}$, tendremos $\delta k' = 2 m w \delta w$, luego la hamiltoniana perturbadora tendrá la forma

$$H_1 = H - H_0 = -2 m w \delta w q \operatorname{sen} \gamma t$$

dependiente explícitamente del tiempo. El operador de Liouville será

$$\Omega_1(q_0(t_1), p_0(t_1), t_1) = \frac{\partial [-2 m w \delta w q_0(t_1) \operatorname{sen} \gamma t_1]}{\partial p_0(t_1)} \frac{\partial}{\partial p_0(t_1)} - \\ - \frac{\partial [-2 m w \delta w q_0(t_1) \operatorname{sen} \gamma t_1]}{\partial q_0(t_1)} \frac{\partial}{\partial p_0(t_1)} = 2 m w \delta w \operatorname{sen} \gamma t_1 \frac{\partial}{\partial p_0(t_1)}$$

por tanto

$$S_1^{(1)}(t) = 1 + 2 m w \delta w \int_0^t dt_1 \operatorname{sen} \gamma t_1 \frac{\partial}{\partial p_0(t_1)}$$

de donde obtenemos

$$q(t) = q_0(t) + 2 m w \delta w \int_0^t \operatorname{sen} \gamma t_1 \frac{1}{m \omega_0} \operatorname{sen} \omega_0(t - t_1) dt_1 = \\ = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{p_0}{m \omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t - (\omega^2 + 2 w \delta w) \frac{\gamma}{\omega_0(\omega_0^2 - \gamma^2)} \operatorname{sen} \omega_0 t + \\ + (\omega^2 + 2 w \delta w) \frac{1}{\omega_0^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t$$

que es la solución completa para la coordenada de posición por anularse las sucesivas perturbaciones. Para el momento conjugado, análogamente tendremos

$$p(t) = -m q_0 \omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + p_0 \cos \omega_0 t - (\omega^2 + 2 w \delta w) \frac{m \gamma}{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \omega_0 t + \\ + (\omega^2 + 2 w \delta w) \frac{m \gamma}{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \gamma t$$

CAPÍTULO II

TEORIA DE ORBITAS EN PRIMER ORDEN

El estudio de la dinámica del plasma termonuclear suele hacerse [4] bien por procedimientos estadísticos, bien por el estudio de la dinámica de las partículas individuales.

En el método estadístico, mediante aplicación de la ecuación de Boltzman, se llega a obtener la función de distribución en el espacio de las fases. No obstante, este procedimiento sólo es apropiado si las fluctuaciones de la función de distribución son mucho menores que la propia función tanto en el espacio de velocidades como en el de configuración. Es decir, la ecuación de Boltzman no es aplicable ni a regiones del espacio de velocidades en las que la velocidad media es varias veces la velocidad media térmica, ni a regiones del espacio con configuración demasiado pequeñas. Este procedimiento será valioso en el caso de plasmas densos, donde el número de colisiones sea lo suficientemente grande para mantener la distribución de velocidades próxima a la distribución de equilibrio.

Sin embargo, si la densidad de partículas y el número de choques son pequeños y los campos fuertes, será mucho más conveniente emplear el segundo método, o sea, el estudio del movimiento de las partículas individuales [5] que es lo que vamos a realizar.

ECUACIONES DE MAXWELL Y DE MAGNETISMO

Recordemos algunas ecuaciones que vamos a utilizar. Usaremos el sistema de unidades de Gauss, o sea, mientras no se advierta lo contrario, unidades electrostáticas (u. e. e.) para las magnitudes eléctricas y unidades electromagnéticas (u. e. m.) para las magnéticas.

Las ecuaciones del campo electromagnético en el vacío ($\epsilon_0=1$, $\mu=1$) son:

$$\nabla \cdot \bar{E} = 4 \pi \rho \quad (\text{II-1})$$

$$\nabla \times \bar{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (\text{II-2})$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (\text{II-3})$$

$$\nabla \times \bar{B} = 4 \pi \bar{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (\text{II-4})$$

donde \bar{E} es la intensidad del campo eléctrico en u.e.e. (1 uee = 300 vol/cm), \bar{B} es la inducción magnética en gauss, ρ es la densidad de carga en u.e.e., \bar{J} la densidad de corriente en u.e.m. y c la velocidad de la luz en unidades c.g.s.

Multiplicando escalarmente los dos miembros de la (II-4) por ∇ y sustituyendo el valor de $\nabla \cdot \bar{E}$ de la (II-1), tendremos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{B}) = 4 \pi \nabla \cdot \bar{J} + \frac{1}{c} \nabla \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 4 \pi \nabla \cdot \bar{J}$$

$$+ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{E} = 4 \pi \nabla \cdot \bar{J} + \frac{4 \pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

luego

$$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II-5})$$

que es la ecuación de la conservación de las cargas, que como la hemos deducido de (II-1) y (II-4) no es independiente.

Consideremos también la ecuación que da la fuerza ejercitada por un campo electromagnético sobre una partícula de carga e y velocidad \bar{v} :

$$\bar{F} = e \left[\bar{E} + \frac{\bar{v} \times \bar{B}}{c} \right]$$

de la que obtendremos la hamiltoniana de la partícula.

Añadiendo a estas ecuaciones, las de definición de ρ y \bar{J}

$$\rho = Ne \quad \bar{J} = \frac{Ne v}{c}$$

donde N es el número de partículas por cm^3 , deducimos inmediatamente de la (II-5) que se conserva el número de partículas.

Sabemos que si una corriente de intensidad I recorre un pequeño circuito cerrado de área A , equivale a un dipolo magnético de momento:

$$\bar{\mu} = \bar{n} I A$$

donde \bar{n} es el vector unidad, normal a la superficie que encierra el circuito y cuyo sentido viene ligado al de I por la regla del sacacorchos.

Ordinariamente los materiales magnéticos se comportan como si estuvieran formados por muchos dipolos magnéticos siempre que consideremos un volumen finito. El momento magnético total será la suma vectorial de ellos, y si consideramos la unidad de volumen, el momento magnético por unidad de volumen, también llamado magnetización e imantación, será:

$$\bar{M} = \sum_i N_i \bar{n}_i I_i A_i$$

siendo N_i el número de dipolos por cm^3 y \bar{n}_i , I_i , A_i sus magnitudes individuales características.

Si un trozo de material magnético se coloca en un campo magnético exterior, los dipolos tienden a orientarse contribuyendo a la intensidad del campo. Esta contribución la obtendremos más fácilmente calculando en primer lugar la corriente producida por la distribución de estos pequeños circuitos.

Consideremos una superficie de área S , limitada por una curva cerrada c , como indica la fig. 2. Vamos a calcular la intensidad de corriente que atraviesa esta superficie, como consecuencia de la que recorre los circuitos. Es natural que los circuitos tal como el 2, producen un efecto nulo

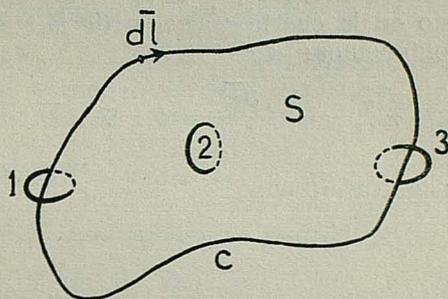


FIG. 2

de corriente, pues la corriente que circula por ellos atraviesa la superficie dos veces y en sentido contrario. Solamente aquellos circuitos que rodean la curva c , como los 1 y 3 contribuyen a formar la intensidad total que atraviesa la superficie.

El número promedio de circuitos del tipo i que rodean al elemento diferencial de longitud, $d\bar{l}$, de c , será: $N_i A_i d\bar{l} \cdot \bar{n}_i$ y siendo I_i la corriente aportada por cada uno, la corriente total que atravesará la superficie S será:

$$I_s = \int_c \sum_i I_i N_i A_i d\bar{l} \cdot \bar{n}_i = \int_c d\bar{l} \cdot \bar{M} = \int_s (\nabla \times \bar{M}) \cdot d\bar{s} \quad (\text{II-6})$$

habiendo aplicado el teorema de Stokes y siendo $d\bar{s}$ el vector diferencial de área.

Si definimos la densidad de corriente media, \bar{J}_m , por:

$$I_s = \int_s \bar{J}_m \cdot d\bar{s}$$

comparándola con la (II-6) resulta:

$$\int_s \bar{J}_m \cdot d\bar{s} = \int_s (\nabla \cdot \bar{M}) \cdot d\bar{s}$$

y puesto que la superficie S se ha elegido de una forma completamente arbitraria, queda:

$$\bar{J}_m = \nabla \times \bar{M} \quad (\text{II-7})$$

Esta es pues la densidad media de corriente asociada con la magnetización; si los circuitos considerados los suprimimos y los reemplazamos por esta densidad de corriente media, la inducción magnética permanecerá inalterable.

La ecuación (II-7) es la base de partida para el tratamiento clásico de los medios magnéticos. Dividamos la corriente total en dos partes: la \bar{J}_m , cuya interpretación acabamos de ver y la \bar{J}_e de los circuitos externos. Poniéndolo de manifiesto en la cuarta ecuación de Maxwell (II-4) y teniendo en cuenta la (II-7), obtenemos:

$$\nabla \times \bar{B} = 4 \pi \bar{J}_m + 4 \pi \bar{J}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 4 \pi \nabla \times \bar{M} + 4 \pi \bar{J}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

y si definimos una magnitud \bar{H} por:

$$\bar{H} \equiv \bar{B} - 4 \pi \bar{M} \quad (\text{II-8})$$

tomará la forma

$$\nabla \times \bar{H} = 4 \pi \bar{J}_e = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

La ecuación $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ y la expresión de la fuerza de Lorentz son, de suyo, inmutables. Puesto que es \bar{B} y no \bar{H} , la que aparece en la fórmula de Lorentz, \bar{H} no puede medirse directamente, y es por tanto una cantidad puramente matemática.

Físicamente la magnetización \bar{M} es función de \bar{B} y la (II-8) define \bar{H} en función de \bar{B} . En algunos casos esta relación funcional puede escribirse aproximadamente por la simple relación lineal, $\bar{H} = \frac{1}{\mu} \bar{B}$, donde μ es una constante para cada medio.

Si \bar{M} es paralelo a \bar{B} (paramagnetismo) que es el caso de los dipolos magnéticos permanentes (en ellos el momento magnético está asociado con el giro del electrón), entonces $\mu > 1$. La alineación de los dipolos la dificulta la agitación térmica; la teoría de Langevin del paramagnetismo contrapone la agitación térmica a la fuerza ejercida por el campo para alinear los dipolos. A la temperatura ambiente y con campos ordinarios la alineación es pequeña y $\mu - 1 \approx 10^{-6}$ para materia condensada. En los materiales ferromagnéticos la alineación es mucho mayor y μ llega a valer varias decenas de millar.

Cuando \bar{M} es antiparalelo a \bar{B} (diamagnetismo), $\mu < 1$; esto sucede en los átomos con capas electrónicas completas o casi completas, en los

que existe uniformidad en la distribución de las órbitas electrónicas, siendo nulo, por tanto, su momento magnético total y en cambio aparece un momento magnético (igual que en las sustancias paramagnéticas, aunque en éstas quede velado por el momento magnético orbital resultante) debido a la inducción de sentido contrario a \bar{B} . Sin embargo, el ejemplo más interesante para nosotros es el de una partícula cargada libre en un campo magnético, cuyo estudio vamos a realizar.

MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

Estudiamos el movimiento no relativista de una partícula de carga e y masa m en un campo magnético, cuya inducción \bar{B} será, en general, función del tiempo y de las coordenadas, y al que pueden superponerse, otros campos de fuerzas tales como eléctricos, gravitatorios, etc.

Usaremos el método de perturbaciones para la Mecánica Clásica, desarrollado por Garrido [2] y generalizado por nosotros en el capítulo primero, limitándonos a la teoría de órbitas en primer orden [6] si bien la extensión a otro orden cualquiera, se puede realizar sin aparente dificultad.

Como supondremos que las variaciones de los campos van a ser pequeñas durante un período de Larmor, causarán una pequeña perturbación en la velocidad angular y radio de giro durante una rotación. Es pues, conveniente estudiar el movimiento del centro de giro, o centro guía, llamado deriva. Tal deriva nos indicará el movimiento promedio de las cargas que en el caso de que sea dependiente del signo de la carga, originará una densidad de corriente.

Como suponemos el plasma de poca densidad, las interacciones entre las partículas serán despreciables frente a las acciones de los campos exteriores, por lo cual estudiaremos el movimiento de una partícula aislada y el efecto microscópico será la suma de los efectos sobre cada partícula individual.

Para simplificar el problema general, estudiaremos por separado las diferentes causas que originan el movimiento de la partícula en campos cualesquiera. Primeramente supondremos un campo magnético uniforme en el espacio, variable o no con el tiempo, al que se le superponen otros campos de fuerzas. En segundo lugar veremos el efecto producido por un campo cuya inducción es función de las coordenadas.

CAMPO ELÉCTRICO CONSTANTE

Como introducción y por ser el caso más sencillo, vamos a estudiar el movimiento de una partícula en un campo eléctrico constante y uniforme. Por comodidad, elijamos unos ejes coordenados de tal modo que el vector \bar{E} tenga la dirección del eje Z . Supongamos que en el momento inicial,

$t = 0$, la partícula se encuentre en el punto x_0, y_0, z_0 , con una velocidad v_0 cuyas componentes son v_{x0}, v_{y0}, v_{z0} .

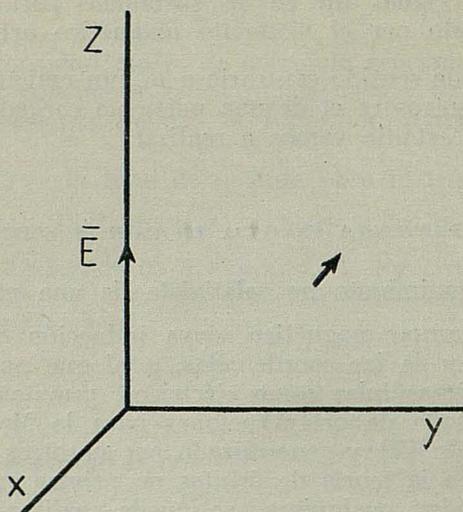


FIG. 3

La energía cinética de la partícula es:

$$T = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i^2$$

y la potencial:

$$V = - \int \bar{F} \cdot \vec{ds} = - e E z$$

luego la Lagrangiana será:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i^2 + e E z$$

y los momentos conjugados:

$$p_{x_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i$$

Por tanto la Hamiltoniana tendrá la forma:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_i p_{x_i}^2 - e E z$$

Para resolver el problema por el método de perturbaciones supondremos que en un principio, movimiento no perturbador, no actúa el campo eléc-

trico, por tanto la partícula se mueve libremente. Al ser $\bar{E} = 0$, la Hamiltoniana no perturbada será:

$$H^0 = \frac{1}{2m} \sum p_{x_i}^2$$

de la que, por aplicación de las ecuaciones canónicas, obtenemos fácilmente las ecuaciones del movimiento no perturbado:

$$\dot{p}_{x_{i0}}(t) = -\frac{\partial H^0}{\partial x_i} \begin{cases} \dot{p}_{x_0}(t) = 0 & p_{x_0}(t) = p_{x_0} \\ \dot{p}_{y_0}(t) = 0 & p_{y_0}(t) = p_{y_0} \\ \dot{p}_{z_0}(t) = 0 & p_{z_0}(t) = p_{z_0} \end{cases}$$

$$\dot{x}_i(t) = \frac{\partial H^0}{\partial p_{x_i}} \begin{cases} \dot{x}_0(t) = \frac{p_x}{m} = \frac{p_{x_0}}{m} & x_0(t) = \frac{p_{x_0}}{m} t + x_0 \\ \dot{y}_0(t) = \frac{p_y}{m} = \frac{p_{y_0}}{m} & y_0(t) = \frac{p_{y_0}}{m} t + y_0 \\ \dot{z}_0(t) = \frac{p_z}{m} = \frac{p_{z_0}}{m} & z_0(t) = \frac{p_{z_0}}{m} t + z_0 \end{cases}$$

A este movimiento no perturbado le añadimos el campo eléctrico, luego la Hamiltoniana perturbadora será:

$$H' = H - H^0 = -e E z$$

pudiendo ya calcular el operador,

$$\Omega'(t) = e E \frac{\partial}{\partial p_{z_0}(t)}$$

y obtener la solución completa o aproximada hasta el orden deseado.

Perturbación de primer orden: Calculemos el operador de evolución en primer orden:

$$S(t) = 1 + \int_0^t dt' . 1 . e E \frac{\partial}{\partial p_{z_0}(t')} = 1 + e E \int_0^t dt' \frac{\partial}{\partial p_{z_0}(t')}$$

y aplicándolo sucesivamente a cada coordenada o momento, del movimiento no perturbado, obtenemos las ecuaciones del movimiento en esta primera aproximación para la perturbación:

$$x(t) = x_0(t) + e E \int_0^t dt' \frac{\partial \left[\frac{p_{x_0}(t')}{m} (t-t') + x_0(t') \right]}{\partial p_{z_0}(t')} = x_0(t) = \frac{p_{x_0}}{m} t + x_0$$

$$y(t) = y_0(t) + e E \int_0^t dt' \frac{\partial \left[\frac{p_{y_0}(t')}{m} (t-t') + y_0(t') \right]}{\partial p_{y_0}(t')} = y_0(t) = \frac{p_{y_0}}{m} t + y_0$$

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0(t) + e E \int_0^t dt' \frac{\partial \left[\frac{p_{z_0}(t')}{m} (t-t') + z_0(t') \right]}{\partial p_{z_0}(t')} = z_0(t) + \frac{e E}{m} \int_0^t (t-t') dt' = \\ &= z_0 + \frac{p_{z_0}}{m} t + \frac{1}{2} \frac{e E}{m} t^2 \end{aligned}$$

$$p_x(t) = p_{x_0}(t) + e E \int_0^t dt' \frac{\partial [p_{x_0}(t')]}{\partial p_{x_0}(t')} = p_{x_0}(t) = p_{x_0}$$

$$p_y(t) = p_{y_0}(t) + e E \int_0^t dt' \frac{\partial [p_{y_0}(t')]}{\partial p_{y_0}(t')} = p_{y_0}(t) = p_{y_0}$$

$$p_z(t) = p_{z_0}(t) + e E \int_0^t dt' \frac{\partial [p_{z_0}(t')]}{\partial p_{z_0}(t')} = p_{z_0}(t) + e E \int_0^t dt' = p_{z_0} + e E t$$

Los términos hallados en primer orden de la perturbación no dependen de p_{z_0} , luego las perturbaciones de segundo orden y sucesivas son cero para todas las coordenadas y momentos; por tanto, la solución encontrada en primer orden de la perturbación corresponde a la solución exacta del problema propuesto, como es bien conocido.

Una partícula cargada en un campo eléctrico constante, describirá una trayectoria parabólica. En un plasma producirá una separación de cargas por depender el sentido de la fuerza del signo de la carga; dará origen pues, a una densidad de corriente creciente con el tiempo.

CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE

Supongamos un campo magnético uniforme, constante y cuya dirección coincide con el eje Z :

$$\bar{B} = \bar{k} B$$

La Lagrangiana de una partícula en este campo es:

$$L = \sum_i \frac{m \dot{q}_i^2}{2} + \frac{e}{c} \bar{A} \cdot \bar{\dot{q}}_i$$

donde \bar{A} es el potencial vector, que teniendo en cuenta la identidad, $\text{rot } \bar{A} = \bar{B}$, obtenemos, en este caso, como una solución:

$$\bar{A} = -i B y$$

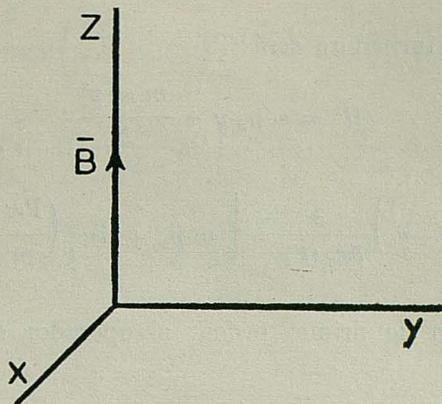


FIG. 4

y si hacemos

$$\frac{e B}{m c} = \omega$$

obtenemos los momentos conjugados,

$$p_x = m\dot{x} - m\omega y$$

$$p_y = m\dot{y}$$

$$p_z = m\dot{z}$$

La hamiltoniana del sistema, será pues:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x + m\omega y)^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2m} p_z^2$$

Aplicaremos el método de perturbaciones, suponiendo que la perturbación consiste en la introducción del campo magnético. La Hamiltoniana no perturbada por tanto es:

$$H^0 = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2m} p_z^2$$

cuyas soluciones, según hemos visto en el apartado anterior son:

$$x_0(t) = \frac{p_{x_0}}{m} t + x_0 \quad p_{x_0}(t) = p_{x_0}$$

$$y_0(t) = \frac{p_{y_0}}{m} t + y_0 \quad p_{y_0}(t) = p_{y_0}$$

$$z_0(t) = \frac{p_{z_0}}{m} t + z_0 \quad p_{z_0}(t) = p_{z_0}$$

La Hamiltoniana perturbadora será:

$$H^1 = \omega p_x y + \frac{m \omega^2 y^2}{2}$$

y

$$\Omega'(t) = \omega \left(\frac{p_{y_0}}{m} t' + y_0 \right) \frac{\partial}{\partial x_0(t')} - \left[\omega p_{x_0} + m \omega^2 \left(\frac{p_{y_0}}{m} t' + y_0 \right) \right] \frac{\partial}{\partial p_{y_0}(t')}$$

Para la perturbación de primer orden, el operador de evolución vendrá dado por:

$$S(t) = 1 + \omega \int_0^t dt' \left(\frac{p_{y_0}}{m} t' + y_0 \right) \frac{\partial}{\partial x_0(t')} - \int_0^t dt' \left[\omega p_{x_0} + m \omega^2 \left(\frac{p_{y_0}}{m} t' + y_0 \right) \right] \frac{\partial}{\partial p_{y_0}(t')}$$

con el cual obtenemos para las coordenadas del movimiento perturbado, en este primer orden, las expresiones:

$$x(t) = x_0(t) + \omega \int_0^t dt' \left(\frac{p_{y_0}}{m} t' + y_0 \right) = x_0 + \left(\frac{p_{x_0}}{m} + \omega y_0 \right) t + \frac{\omega p_{y_0}}{m} \frac{t^2}{2!}$$

$$y(t) = y_0(t) + \frac{\omega p_{x_0}}{m} \int_0^t (t-t') dt' - \frac{\omega^2 p_{y_0}}{m} \int_0^t t'(t-t') dt' - \omega^2 y_0 \int_0^t (t-t') dt' =$$

$$= y_0 - \left(\frac{p_{x_0}}{m\omega} + y_0 \right) + \left(\frac{p_{x_0}}{m\omega} + y_0 \right) \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} \right) + \frac{p_{y_0}}{m\omega} \left(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} \right)$$

$$z(t) = z_0(t) = z_0 + \frac{p_{z_0}}{m} t$$

En la perturbación de segundo orden, tendremos para las distintas coordenadas:

Para la $x(t)$:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t dt' \left[w p_{x_0} + m w^2 \left(\frac{p_{y_0}}{m} t' + y_0 \right) \right] \frac{\partial \left[w y_0 (t') (t-t') + w \frac{p_{y_0}(t')}{m} \frac{(t-t')^2}{2!} \right]}{\partial p_{y_0}(t')} = \\
 & = - \int_0^t dt' \left[w p_{x_0} + m w^2 \left(\frac{p_{y_0}}{m} t' + y_0 \right) \right] \frac{w (t-t')^2}{m \cdot 2} = - \frac{w^2}{2} \left(\frac{p_{x_0}}{m} + w y_0 \right) t^2 \int_0^t dt' - \\
 & \quad - \frac{w^3}{2m} p_{y_0} t^2 \int_0^t t' dt' - \frac{w^2}{2m} p_{x_0} \int_0^t t'^2 dt' - \frac{w^3}{2m} p_{y_0} \int_0^t t'^3 dt' = \\
 & \quad = - w^2 \left(\frac{p_{x_0}}{m} + w y_0 \right) \frac{t^3}{3!} - \frac{w^3 p_{y_0}}{m} \frac{t^4}{4!}
 \end{aligned}$$

luego

$$x(t) = x_0 + \frac{p_{y_0}}{m w} - \frac{p_{y_0}}{m w} \left(1 - \frac{w^2 t^2}{2!} + \frac{w^4 t^4}{4!} \right) + \left(\frac{p_{x_0}}{m w} + y_0 \right) \left(w t - \frac{w^3 t^3}{3!} \right)$$

Para la $y(t)$:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t [w p_{x_0} + m w^2 \left(\frac{p_{y_0}}{m} t' + y_0 \right)] \cdot \\
 & \frac{\partial \left[- \frac{p_{x_0}(t') w}{2 m} (t-t')^2 - \frac{p_{y_0}(t') w}{3! m} (t-t')^3 - w^2 y_0(t') \frac{(t-t')^2}{2} \right]}{\partial p_{y_0}(t')} = \\
 & = \left(\frac{p_{x_0}}{m w} + y_0 \right) \frac{w^4}{3!} \int_0^t (t-t')^3 dt' + \frac{p_{y_0}}{m} \frac{w^4}{3!} \int_0^t t' (t-t') dt' = \\
 & = \left(\frac{p_{x_0}}{m w} + y_0 \right) \frac{w^4 t^4}{4!} + \frac{p_{y_0}}{m w} \frac{w^5 t^5}{5!}
 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
 y(t) = y_0 - \left(\frac{p_{x_0}}{m w} + y_0 \right) + \left(\frac{p_{x_0}}{m w} + y_0 \right) \left(1 - \frac{w^2 t^2}{2!} + \frac{w^4 t^4}{4!} \right) \\
 + \frac{p_{y_0}}{m w} \left(w t - \frac{w^3 t^3}{3!} + \frac{w^5 t^5}{5!} \right)
 \end{aligned}$$

Para la $z(t)$:

$$z(t) = z_0 + \frac{p_{z_0}}{m} t$$

Tanto para la $x(t)$ como para la $y(t)$, pueden calcularse las sucesivas perturbaciones viéndose que cada nueva perturbación añade un nuevo término del desarrollo del seno y del coseno de ωt , mientras que para la $z(t)$ todas las sucesivas perturbaciones son nulas, luego la solución completa será:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + \frac{p_{y_0}}{m\omega} - \frac{p_{x_0}}{m\omega} \cos \omega t + \left(\frac{p_{x_0}}{m\omega} + y_0 \right) \sin \omega t \\y(t) &= -\frac{p_{x_0}}{m\omega} + \left(\frac{p_{x_0}}{m\omega} + y_0 \right) \cos \omega t + \frac{p_{y_0}}{m\omega} \sin \omega t \\z(t) &= z_0 + \frac{p_{z_0}}{m} t\end{aligned}$$

Por el mismo procedimiento obtenemos para los momentos conjugados:

$$\begin{aligned}p_x &= p_{x_0} \\p_y &= p_{y_0} \cos \omega t - (p_{x_0} + m\omega y_0) \sin \omega t \\p_z &= p_{z_0}\end{aligned}$$

La trayectoria es pues una hélice, o sea una circunferencia de plano normal al campo, radio $r = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{mc}{eB} v_{\perp}$ (radio de Larmor), descrita con la frecuencia $\omega = \frac{eB}{mc}$ (frecuencia de Larmor) y cuyo centro se mueve en la dirección del campo con la velocidad constante \dot{z}_0 .

La partícula en su rotación es equivalente a una corriente de intensidad

$$I = \frac{e}{c} \frac{v_{\perp}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2 B}{mc^2} v_{\perp}$$

luego el módulo del momento magnético será:

$$\mu = \pi r^2 I = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B} = \frac{W_{\perp}}{B}$$

donde W_{\perp} es la energía cinética asociada con la componente de la velocidad perpendicular al campo.

El signo de la carga no influye en el de la intensidad, pues si la carga es positiva (fig. 5a) gira en sentido contrario al de las agujas de un reloj, y éste será el sentido de la corriente, y si es negativa (fig. 5b) gira en el sentido de las agujas de un reloj, por tanto el sentido de la corriente será el opuesto.

El campo magnético producido por una partícula cargada en un campo magnético exterior, será igual al de un dipolo magnético de momento μ .

antiparalelo a \vec{B} . Vemos pues, que una carga moviéndose en un campo magnético se comporta como una substancia diamagnética, siendo este resultado independiente de la carga.

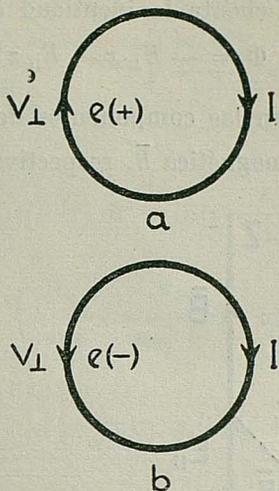


FIG. 5

Si suponemos que hay N partículas por unidad de volumen, la magnetización será:

$$\vec{M} = - \frac{NW_{\perp}}{B^2} \vec{B}$$

Este resultado conduce a una relación algo extraña entre \vec{B} y \vec{H} si \vec{H} se define por la (II-8). No obstante, en este trabajo no emplearemos la cantidad \vec{H} , pero la densidad de corriente \vec{J}_m la usaremos explícitamente teniendo en cuenta que $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$, pues aparecen otras corrientes diferentes en un plasma de partículas libres.

Estas otras corrientes aparecen como consecuencia del movimiento del centro guía. La corriente antes indicada \vec{J}_m aparece siempre que el antedicho centro se considere fijo; de hecho, nosotros hemos supuesto que se mantenía inmóvil.

Vamos a estudiar varias causas que originan estas corrientes adicionales.

SUPEPOSICIÓN DE UN CAMPO ELÉCTRICO CONSTANTE

Hemos visto que una partícula sometida a la acción de un campo magnético uniforme y constante describe una hélice a lo largo de una línea de fuerza. El centro guía se mueve a lo largo de una línea de fuerza con la velocidad constante $v_{||}$.

Si a este campo \bar{B} , le superponemos un campo eléctrico \bar{E} y elegimos los ejes coordenados de modo que \bar{E} sea perpendicular al eje Y (fig. 6), el potencial eléctrico, teniendo en cuenta la identidad $\bar{E} = -\text{grad } \Phi$, será:

$$\Phi = -E_{\perp} x - E_{\parallel} z$$

Donde E_{\perp} y E_{\parallel} , representan las componentes de \bar{E} en la dirección normal y paralela a la inducción magnética \bar{B} , respectivamente.

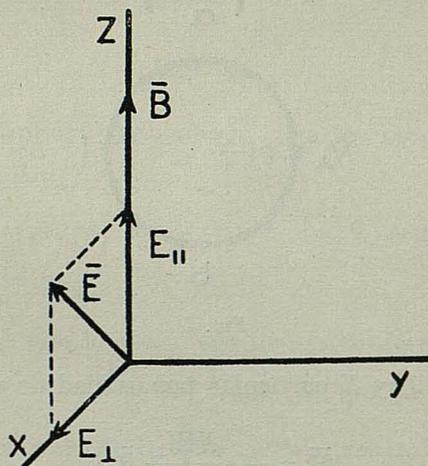


FIG. 6

Con esta expresión para el potencial eléctrico, la hamiltoniana de la partícula será:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right)^2 - e E_{\perp} x - e E_{\parallel} z$$

Si suponemos que la perturbación es la introducción del campo eléctrico, la Hamiltoniana perturbadora será:

$$H' = H - H^0 = -e E_{\perp} x - e E_{\parallel} z$$

y las ecuaciones del movimiento no perturbado serán las (II-9). Ahora, podemos calcular las sucesivas perturbaciones, a partir del operador

$$\Omega'(t) = e E_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{x_0}(t)} + e E_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{z_0}(t)}$$

Primera perturbación

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0(t) + e E_{\perp} \int_0^t dt' \frac{\partial \left\{ x_0(t') + \frac{p_{y_0}(t')}{m\omega} - \frac{p_{y_0}(t')}{m\omega} \cos \omega(t-t') + \left[\frac{p_{x_0}(t')}{m\omega} + y_0(t') \right] \sin \omega(t-t') \right\}}{\partial p_{x_0}(t')} = \\
 &= x_0(t) + \frac{e E_{\perp}}{m\omega} \int_0^t \sin \omega(t-t') dt' = x_0(t) + \frac{e E_{\perp}}{m\omega^2} - \frac{e E_{\perp}}{m\omega^2} \cos \omega t = \\
 &= x_0 + \frac{p_{y_0}}{m\omega} + \frac{e E_{\perp}}{m\omega^2} - \left(\frac{p_{y_0}}{m\omega} + \frac{e E_{\perp}}{m\omega^2} \right) \cos \omega t + \left(\frac{p_{x_0}}{m\omega} + y_0 \right) \sin \omega t \\
 y(t) &= y_0(t) + e E_{\perp} \int_0^t dt' \frac{\partial \left\{ \frac{p_{x_0}(t')}{m\omega} + \left[\frac{p_{x_0}(t')}{m\omega} + y_0(t') \right] \cos \omega(t-t') + \frac{p_{y_0}(t')}{m\omega} \sin \omega(t-t') \right\}}{\partial p_{x_0}(t')} = \\
 &= y_0(t) + \frac{e E_{\perp}}{m\omega} \int_0^t dt' + \frac{e E_{\perp}}{m\omega} \int_0^t \cos \omega(t-t') dt' = y_0(t) + \frac{e E_{\perp}}{m\omega} t + \frac{e E_{\perp}}{m\omega^2} \sin \omega t = \\
 &= \frac{p_{x_0}}{m\omega} + \left(\frac{p_{x_0}}{m\omega} + y_0 \right) \cos \omega t + \left(\frac{p_{y_0}}{m\omega} + \frac{e E_{\perp}}{m\omega^2} \right) \sin \omega t + \frac{e E_{\perp}}{m\omega} t \\
 z(t) &= z_0(t) + e E_{\parallel} \int_0^t dt' \frac{\partial \left\{ z_0(t') + \frac{p_{z_0}(t')}{m} (t-t') \right\}}{\partial p_{z_0}(t')} = z_0(t) + \frac{e E_{\parallel}}{m} \int_0^t (t-t') dt' = \\
 &= z_0 + \frac{p_{z_0}}{m} t + \frac{1}{2} \frac{e E_{\parallel}}{m} t^2
 \end{aligned}$$

Las sucesivas perturbaciones son todas nulas, luego las ecuaciones obtenidas corresponden exactamente a las del movimiento de la partícula. Así pues, la trayectoria es una hélice cuyo paso de rosca aumenta con el tiempo y cuyo centro de giro se desplaza con la velocidad constante \bar{v}_E que llamaremos velocidad de deriva, cuya expresión es:

$$\bar{v}_E = \bar{j} \frac{e E_{\perp}}{m\omega} = \bar{j} \frac{c E_{\perp}}{B} = c \frac{\bar{E} \times \bar{B}}{B^2} \quad (\text{II-10})$$

La fórmula (II-10) es válida si $|\bar{E}| < |\bar{B}|$, pues en caso contrario carece de sentido.

La deriva originada, es pues independiente del signo de la carga, o sea que en un plasma neutro la corriente total es nula, mientras que en uno cuya densidad de partículas positivas y negativas sea diferentes, es decir en un plasma cargado, la corriente es perpendicular a \bar{E} y \bar{B} .

La forma de la trayectoria en los diversos casos particulares, es más sencilla de estudiar, refiriendo las ecuaciones del movimiento a unos ejes móviles A' que se desplazan con relación a los fijos A con la velocidad:

$$\bar{v}_E = c \frac{\bar{E} \times \bar{B}}{B^2}$$

pues en estos ejes A' , la trocoide que resultaba referida a los ejes A , se nos transforma en una circunferencia. Si llamamos v' a la velocidad de la partícula respecto a A' y la descomponemos en la dirección perpendicular, v'_\perp y paralela, $v'_{||}$, al \bar{B} , podemos ver fácilmente la trayectoria, tanto de la partícula como la del centro guía en los distintos casos. Por ejemplo, consideremos una partícula negativa, si:

1.º. — $E_{||} = 0$. Es decir, el campo eléctrico es perpendicular a \bar{B} . Entonces el paso de rosca de la hélice es constante, moviéndose el centro guía con movimiento uniforme a lo largo de las líneas de fuerza. En este caso

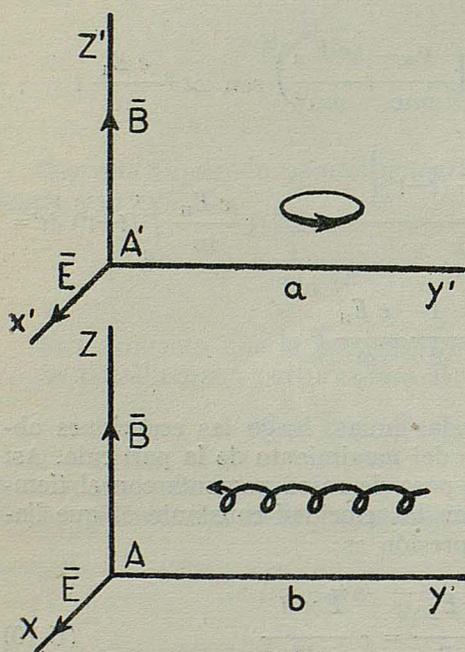


FIG. 7

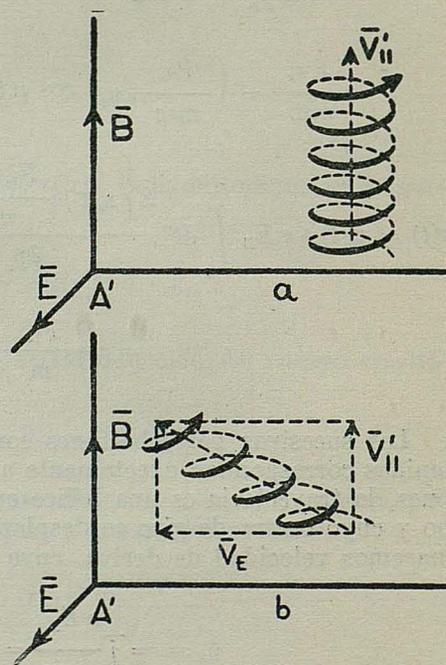


FIG. 8

a). Si $v'_{||} = 0$, la trayectoria referida a los ejes A' será una circunferencia contenida en un plano paralelo al XOY . Respecto a los ejes A , el movimiento será una trocoide, como indican las figuras 7a y 7b.

b). Si $v'_{||} = 0$, la trayectoria en A' será una hélice, o sea una circunferencia cuyo centro se desplaza normalmente a su plano (XOY) con la velocidad constante $v'_{||}$. Respecto al A el movimiento será igualmente una circunferencia cuyo centro se desplaza con la velocidad constante $\bar{v}_a = \bar{v}'_{||} + \bar{v}_E$ paralela al plano YOZ (fig. 8, a y b).

2.º). — $E_{||} \neq 0$. Es decir, el campo eléctrico no es perpendicular a \bar{B} . Las ecuaciones del movimiento tendrán la forma completa calculada. En este caso

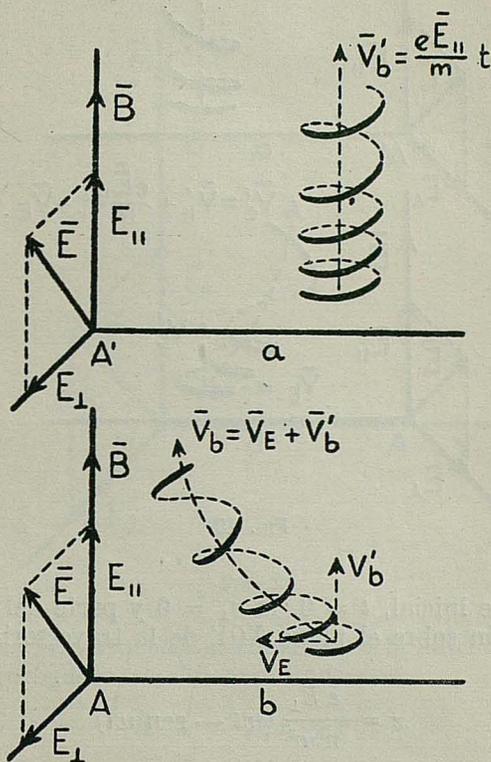


FIG. 9

a). Si $v'_{||} = 0$, respecto de A' , la trayectoria será una circunferencia cuyo centro se desplaza en la dirección de \bar{B} con la velocidad $\bar{v}'_b = \frac{e E_{||}}{m} t$ o sea, con la aceleración $\frac{e \bar{E}_{||}}{m}$; tratándose de una hélice cuyo paso de rosca aumenta con el tiempo. En el sistema A la trayectoria del centro guía es una parábola contenida en el plano YOZ (fig. 9 a y b).

b). Si $v'_{||} \neq 0$, con relación a A' será igual que en el apartado anterior, pero aquí el paso de rosca, en un instante dado, es mayor, pues a la velocidad $v'_b = \frac{e E_{||}}{m} t$ hay que sumarle la cantidad constante $v'_{||}$. En el A , el centro guía describirá una curva semejante a una parábola, pero con más pendiente (fig. 10, a y b).

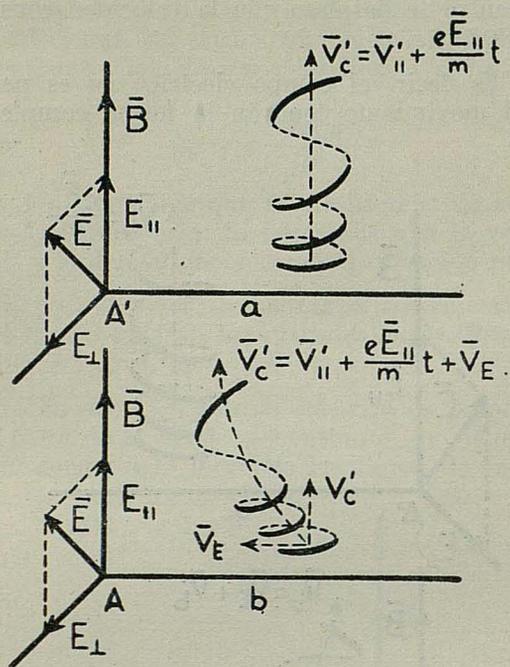


FIG. 10

Si en el instante inicial, $t = 0$, la $v_{\perp} = 0$ y parte del origen de coordenadas, la proyección sobre el plano XOY de la trayectoria es:

$$x = \frac{e E_{\perp}}{m \omega^2} (\omega t - \text{sen } \omega t)$$

$$y = \frac{e E_{\perp}}{m \omega^2} (l - \text{cos } \omega t)$$

correspondiendo pues a una cicloide.

SUPERPOSICIÓN DE FUERZAS EXTERIORES

Si a una partícula cargada situada en un campo magnético uniforme se le aplica una fuerza exterior, \bar{F} , constante y uniforme de componentes F_{\parallel} y F_{\perp} paralela y perpendicular respectivamente a \bar{B} , el potencial de este campo de fuerzas es:

$$V = -F_{\perp}x - F_{\parallel}z$$

luego la Hamiltoniana de la partícula será:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right)^2 - F_{\perp}x - F_{\parallel}z$$

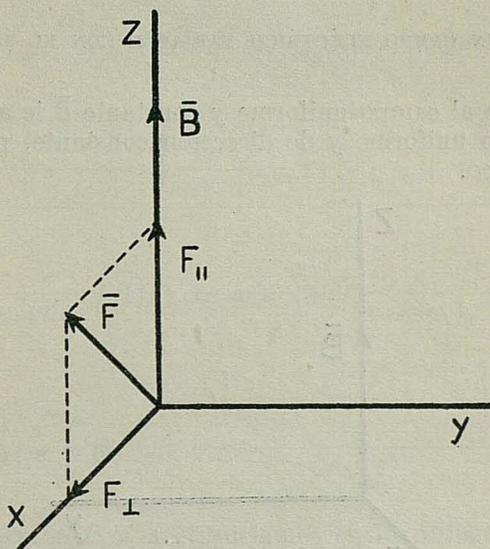


FIG. 11

y si suponemos que la perturbación consiste en la adición de esta fuerza, la Hamiltoniana perturbadora vendrá expresada por:

$$H' = -F_{\perp}x - F_{\parallel}z$$

completamente análoga a la del apartado anterior si sustituimos

$$\bar{F} = e \bar{E}$$

Por tanto, la componente F_{\parallel} , originará, como antes una aceleración en la dirección de las líneas de fuerza del campo magnético y la componente perpendicular una velocidad de deriva de valor

$$v_F = \frac{c}{e} \frac{\bar{F} \times \bar{B}}{B^2} \quad (\text{II-11})$$

En el caso particular en que la fuerza exterior sea la gravedad, $\bar{F} = m g$, tendremos:

$$\bar{v}_g = \frac{mc}{c} \frac{\bar{q} \times \bar{B}}{B^2}$$

cuya dirección depende del signo de la carga, dando pues origen en un plasma neutro a una corriente de densidad:

$$\bar{J}_g = Ne \bar{v}_g$$

donde N es como siempre el número de partículas cargadas por cm^3 .

SUPERPOSICIÓN DE UN CAMPO ELÉCTRICO VARIABLE CON EL TIEMPO

Supongamos que al campo uniforme y constante \bar{B} le añadimos un campo eléctrico también uniforme y de dirección constante, pero cuyo módulo es función del tiempo.

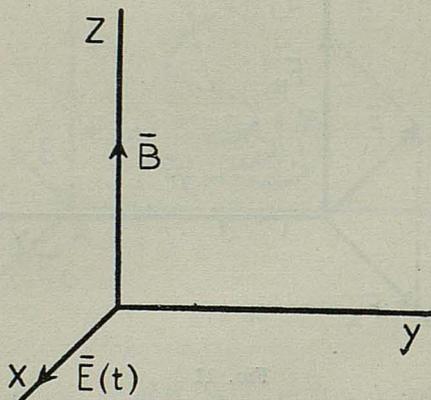


FIG. 12

Por comodidad de cálculo, ya que no pierde generalidad, supongamos que el $\bar{E}(t)$ tenga la dirección del eje x .

La Hamiltoniana de la partícula será:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right)^2 - e E(t) x$$

y considerando como siempre que la perturbación es la adición del campo eléctrico, la Hamiltoniana perturbadora será:

$$H' = - e E(t)x$$

y por tanto

$$\Omega'(t) = e E(t) \frac{\partial}{\partial p_{x_0}(t)}$$

y las coordenadas en primera perturbación:

$$x(t) = x_0(t) + e \int_0^t E(t') dt' \frac{\partial \left\{ x_0(t') + \frac{p_{y_0}(t')}{mw} - \frac{p_{y_0}(t')}{mw} \cos w(t-t') + \left[\frac{p_{x_0}(t')}{mw} + y_0(t') \right] \operatorname{sen} w(t-t') \right\}}{\partial y_{x_0}(t')} =$$

$$= x_0(t) + \frac{e}{mw} \int_0^t E(t') \operatorname{sen} w(t-t') dt' \quad (\text{II-12})$$

$$y(t) = y_0(t) + e \int_0^t E(t') dt' \frac{\partial \left\{ -\frac{p_{x_0}(t')}{mw} + \left[\frac{p_{x_0}(t')}{mw} + y_0(t') \right] \cos w(t-t') + \frac{p_{y_0}(t')}{mw} \operatorname{sen} w(t-t') \right\}}{\partial p_{x_0}(t')} =$$

$$= y_0(t) + \frac{e}{mw} \int_0^t E(t') \cos w(t-t') dt' - \frac{e}{mw} \int_0^t E(t') dt' \quad (\text{II-13})$$

$$z(t) = z_0(t) + e \int_0^t E(t') dt' \frac{\partial \left\{ z_0(t') + \frac{p_{z_0}(t')}{m} (t-t') \right\}}{\partial p_{x_0}(t')} = z_0(t) \quad (\text{II-14})$$

si nos diesen la función $E(t)$, sustituiríamos en los integrandos anteriores y calcularíamos las coordenadas en las sucesivas perturbaciones.

Como caso particular interesante, estudiemos el efecto producido por un campo eléctrico de dirección \bar{i} y cuyo módulo es función periódica del tiempo o sea un campo de la forma:

$$\bar{E} = i E_0 \cos(\nu t + \varphi)$$

siendo E_0 la amplitud, ν la frecuencia y φ la corrección de fase. La Hamiltoniana perturbadora será:

$$H' = -e E_0 x \cos(\nu t + \varphi)$$

luego

$$\Omega'(t) = e E_0 \cos(\nu t + \varphi) \frac{\partial}{\partial p_{x_0}(t)}$$

Primera perturbación:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0(t) + \frac{e E_0}{mw} \int_0^t \cos(\nu t' + \varphi) \operatorname{sen} w(t-t') dt' = \\
 &= x_0(t) + \frac{1}{-\nu + w} \frac{e E_0}{mw} \operatorname{sen} \frac{(w + \nu)t + 2\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{(w - \nu)t}{2} - \\
 &\quad - \frac{1}{\nu + w} \frac{e E_0}{mw} \operatorname{sen} \frac{(w + \nu)t}{2} \operatorname{sen} \frac{(\nu - w)t + 2\varphi}{2} \quad (\text{II-15})
 \end{aligned}$$

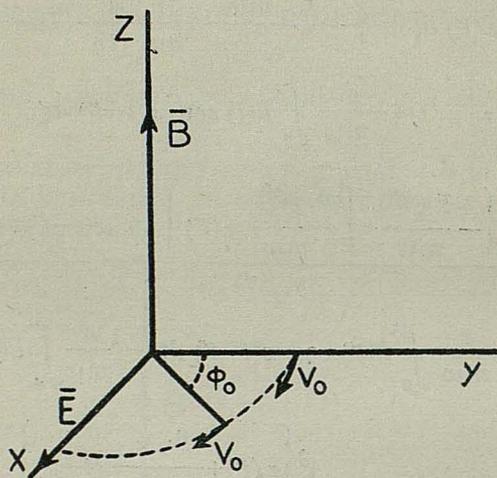


FIG. 13

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y_0(t) - \frac{e E_0}{mw} \int_0^t \cos(\nu t' + \varphi) dt' + \frac{e E_0}{mw} \int_0^t \cos(\nu t' + \varphi) \cos w(t-t') dt' = \\
 &= y_0(t) - 2 \frac{e E_0}{mw \nu} \operatorname{sen} \frac{\nu t}{2} \cos \frac{\nu t + 2\varphi}{2} + \\
 &\quad + \frac{1}{\nu - w} \frac{e E_0}{mw} \operatorname{sen} \frac{(\nu - w)t}{2} \cos \frac{(\nu + w)t + 2\varphi}{2} \\
 &\quad - \frac{1}{\nu + w} \frac{e E_0}{mw} \operatorname{sen} \frac{(\nu + w)t}{2} \cos \frac{(\nu - w)t + 2\varphi}{2} \quad (\text{II-16})
 \end{aligned}$$

$$z(t) = z_0(t) \quad (\text{II-17})$$

Las sucesivas perturbaciones son todas nulas, luego las ecuaciones anteriores son las que describen exactamente el movimiento de la partícula. Estudiaremos los dos casos particulares más importantes [7].

a) Si suponemos, por ejemplo, que la frecuencia del campo eléctrico ν y la de Larmor w son iguales (resonancia) las (II-15), (II-16) y (II-17) quedan reducidas, poniendo ya de manifiesto los valores de los momentos en función de las coordenadas a :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + \frac{\dot{y}_0}{w} - \frac{\dot{y}_0}{w} \cos wt + \frac{\dot{x}_0}{w} \sin wt + \\
 &+ \frac{e E_0}{mw} \frac{t}{2} \sin (wt + \varphi) - \frac{e E_0}{2mw^2} \sin wt \sin \varphi \\
 y(t) &= y_0 - \frac{\dot{x}_0}{w} + \frac{\dot{x}_0}{w} \cos wt + \\
 &+ \frac{\dot{y}_0}{w} \sin wt - \frac{e E_0}{mw} \frac{t}{2} \sin \frac{wt}{2} \cos \frac{wt + 2\varphi}{2} + \\
 &+ \frac{e E_0}{mw} \frac{t}{2} \cos (wt + \varphi) + \frac{e E_0}{2mw^2} \sin wt \cos \varphi
 \end{aligned}$$

y si la corrección de fase es nula, $\varphi = 0$, o sea $E = E_0$ para $t = 0$, las fórmulas anteriores se nos reducen a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + \frac{\dot{y}_0}{w} - \frac{\dot{y}_0}{w} \cos wt + \frac{\dot{x}_0}{w} \sin wt + \frac{e E_0}{mw} \frac{t}{2} \sin wt \\
 y(t) &= y_0 - \frac{\dot{x}_0}{w} + \frac{\dot{x}_0}{w} \cos wt + \\
 &+ \frac{\dot{y}_0}{w} \sin wt - \frac{e E_0}{2mw^2} \sin wt + \frac{e E_0}{2mw^2} wt \cos wt
 \end{aligned}$$

Si la partícula parte del punto $x_0 = 0$, $y_0 = r_0 = \frac{v_0}{w}$ con la velocidad inicial $\dot{x}_0 = v_0$, $\dot{y}_0 = 0$ y se introduce el campo eléctrico cuando la partícula se encuentra en $x_0 = r_0 \sin \Phi_0 = \frac{v_0}{w} \sin \Phi_0$, $y_0 = \frac{v_0}{w} \cos \Phi_0$ con la velocidad $\dot{x}_0 = v_0 \cos \Phi_0$, $\dot{y}_0 = -v_0 \sin \Phi_0$, puesto que iba con movimiento circular uniforme con centro en el origen de coordenadas, las ecuaciones del movimiento se reducen a

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{v_0}{w} \sin (wt + \Phi_0) + \frac{1}{2} \frac{e E_0}{mw} t \sin wt \\
 y(t) &= \frac{v_0}{w} \cos (wt + \Phi_0) - \frac{1}{2} \frac{e E_0}{mw^2} (\sin wt - wt \cos wt)
 \end{aligned}$$

donde hemos tomado como origen de tiempos, el instante en que comienza a actuar el campo eléctrico.

La energía cinética de la partícula, supuesto $\Phi_0 = 0$ tiene el valor

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} E_0 e v_0 t + \\
 &+ \frac{1}{8} \frac{e^2}{m} E_0^2 t^2 + \frac{1}{8} \frac{e^2}{m} \frac{E_0^2}{\omega^2} \text{sen}^2 \omega t + \\
 &+ \frac{1}{4} v_0 \frac{e E_0}{\omega} \text{sen } 2\omega t + \frac{1}{8} \frac{e^2}{m} \frac{E_0^2}{\omega} t \text{sen } 2\omega t
 \end{aligned}$$

los tres últimos términos por ser oscilatorios tienen poca importancia; el segundo y tercero son iguales para $t_1 = \frac{4mv_0}{eE_0}$ tiempo en el que el impulso dado por el campo a la partícula $eE_0 t_1$ es 4 veces el momento inicial mv_0 . Como este tiempo t_1 es corto y el tercer término aumenta con el cuadrado del tiempo, este término determina prácticamente la absorción de la energía de la radiofrecuencia por la partícula.

b) Si la frecuencia del campo eléctrico es muy pequeña respecto a la frecuencia de Larmor, entonces

$$\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \ll 1$$

y las (II-15), (II-16) y (II-17) tomarán respectivamente la forma

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0(t) - \frac{1}{\omega - v} \frac{e E_0}{m\omega} \frac{1}{2} \cos(\omega t + \varphi) + \\
 &+ \frac{1}{\omega - v} \frac{e E_0}{m\omega} \frac{1}{2} \cos(vt + \varphi) + \\
 &+ \frac{1}{\omega + v} \frac{e E_0}{m\omega} \frac{1}{2} \cos(vt + \varphi) - \frac{1}{\omega + v} \frac{e E_0}{m\omega} \frac{1}{2} \cos(\omega t - \varphi) \simeq \\
 &\simeq x_0(t) + \frac{e E_0}{m\omega^3} v \text{sen } \varphi \cos \omega t - \frac{e E_0}{m\omega^2} \cos \varphi \cos \omega t + \\
 &+ \frac{e E_0}{m\omega^2} \cos(vt + \varphi) = x_0 + \frac{p_{v_0}}{m\omega} - \left(\frac{p_{v_0}}{m\omega} + \frac{e E_0}{m\omega^2} \cos \varphi \right) \cos \omega t + \\
 &+ \left(\frac{P_{x_0}}{m\omega} + y_0 + \frac{e E_0}{m\omega^3} v \text{sen } \varphi \right) \text{sen } \omega t + \frac{e E_0}{m\omega^2} \cos(vt + \varphi) \\
 y(t) &= y_0(t) - \frac{e E_0}{m\omega v} \text{sen}(vt + \varphi) - \frac{e E_0}{m\omega v} \text{sen}(-\varphi) + \\
 &+ \frac{1}{v - \omega} \frac{e E_0}{m\omega} \frac{1}{2} \text{sen}(vt + \varphi) - \frac{1}{v - \omega} \frac{e E_0}{\omega m} \frac{1}{2} \text{sen}(\omega t + \varphi) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\nu + \omega} \frac{e E_0}{m\omega} \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\nu t + \varphi) + \frac{1}{\nu + \omega} \frac{e E_0}{m\omega} \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) \simeq \\
 & \simeq y_0(t) + \frac{e E_0}{m\omega\nu} \operatorname{sen} \varphi + \frac{e E_0}{m\omega^2} \cos \varphi \operatorname{sen} \omega t + \\
 & + \frac{e E_0\nu}{m\omega^3} \operatorname{sen} \varphi \cos \omega t - \frac{e E_0}{m\omega\nu} \operatorname{sen}(\nu t + \varphi) = -\frac{p_{x_0}}{m\omega} + \frac{e E_0}{m\omega\nu} \operatorname{sen} \varphi + \\
 & \left(\frac{p_{x_0}}{m\omega} + y_0 \right) + \left(\frac{e E_0\nu}{m\omega^3} \operatorname{sen} \varphi \right) \cos \omega t + \left(\frac{p_{y_0}}{m\omega} + \frac{e E_0}{m\omega^3} \right) \operatorname{sen} \omega t - \frac{e E_0}{m\omega\nu} \operatorname{sen}(\nu t + \varphi) \\
 & z(t) = z_0(t) = z_0 + \frac{p_{z_0}}{m} t
 \end{aligned}$$

para cuya deducción hemos admitido que

$$\omega^2 - \nu^2 = \omega^2 \quad \text{y} \quad \frac{\nu}{\omega^3} = 0$$

El movimiento resultante es pues un movimiento en espiral al que hay que añadirle las velocidades

$$\begin{aligned}
 v_p = \dot{x}' &= \frac{e}{m\omega^2} \frac{\partial [E_0 \cos(\nu t + \varphi)]}{\partial t} = \frac{e}{m\omega^2} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{m c^2}{e B^2} \frac{\partial E}{\partial t} \\
 v_E = \dot{y}' &= -\frac{e E_0}{m\omega} \cos(\nu t + \varphi) = -\frac{e E}{m\omega} = -c \frac{E}{B}
 \end{aligned}$$

que en general tendrán la forma

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_E &= c \frac{\bar{E} \times \bar{B}}{B^2} \\
 \bar{v}_p &= \frac{m c^2}{e B^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

La primera es la deriva originada por la introducción del campo eléctrico y la segunda es la llamada deriva de polarización. Esta última depende del signo de la carga por lo que dará origen a una densidad de corriente, en un plasma neutro de densidad ρ , dada por

$$\bar{J}_p = \sum_{+-} N e \bar{v}_p = \frac{\rho c^2}{e B^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Donde \sum_{+-} especifica los sumandos correspondientes a las cargas de distintos signos.

CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE CON EL TIEMPO

Estudiaremos el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme en el espacio y de dirección constante, \bar{k} , pero cuyo módulo es función del tiempo. Sea pues

$$\bar{B} = B(t) \bar{K}$$

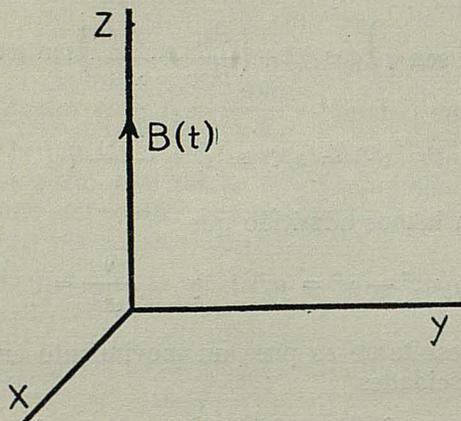


FIG. 14

Por la segunda ecuación de Maxwell sabemos que un campo magnético variable con el tiempo, origina un campo eléctrico, cuya intensidad obedece a la ecuación

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\frac{\dot{B}}{c} \bar{k}$$

En el caso de un campo magnético con cierta simetría, producido, por ejemplo, por un solenoide largo cuyo eje coincide con el eje OZ , una solución apropiada de esta ecuación es:

$$E_x = \frac{\dot{B}}{2c} y \quad E_y = -\frac{\dot{B}}{2c} x \quad E_z = 0$$

componentes del vector:

$$\bar{E} = \frac{\dot{B}}{2c} (\bar{i} y - \bar{j} x)$$

El efecto de la variación temporal del \bar{B} es pues equivalente al del campo eléctrico \bar{E} , y si suponemos que \dot{B} es constante, podemos aplicar la (II-10), obteniendo para la velocidad de deriva:

$$\bar{v}_D = \frac{c}{B^2} \bar{E} \times \bar{B} = -\frac{B}{2B} (\bar{i} x + \bar{j} y)$$

y si llamamos \bar{R} a la proyección, del vector de posición del centro guía, sobre el plano $X O Y$, tendremos finalmente:

$$\bar{v}_D = -\frac{\dot{B}}{2B} \bar{R} \quad (\text{II-18})$$

Luego el centro guía deriva en el plano perpendicular a la dirección del campo magnético, hacia el eje OZ , con una velocidad directamente proporcional a la distancia y a la velocidad de variación del campo. Esta deriva es independiente de la carga de la partícula, luego no produce corriente en un plasma neutro.

La (II-18) podemos también escribirla en la forma

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\dot{B}}{2B} R$$

ecuación que integrada conduce a

$$\pi R^2 B = \text{constante}$$

luego el movimiento en dirección al eje de simetría del centro guía, preserva el flujo magnético entre ambos, o sea, el centro guía se mantiene sobre la superficie del tubo de fuerza primitivo aunque éste se contraiga.

CAMPOS MAGNÉTICOS NO HOMOGÉNEOS

Hasta ahora, hemos estudiado el movimiento de una partícula cargada en campos electromagnéticos uniformes, constantes o variables con el tiempo. Consideremos, ahora, un campo magnético constante, pero cuya inducción \bar{B} es función de las coordenadas. La variación de \bar{B} en función de las coordenadas, en una región pequeña alrededor de un punto, vendrá dada por el tensor $\nabla \bar{B}$ de nueve componentes

$$\nabla \bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Por tanto, para quedar determinada la falta de uniformidad, se precisan nueve números, que son los componentes del tensor antedicho. Ahora bien, los nueve componentes no son independientes, pues tres de ellos es-

tán ligados por la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \bar{B} = 0$, luego el número de componentes independientes para especificar el campo son ocho.

Para simplificar la obtención de la solución, supondremos sucesivamente nulas algunas de las componentes y estudiaremos el efecto producido por las otras.

Los componentes $\frac{\partial B_x}{\partial y}$ y $\frac{\partial B_y}{\partial x}$, refieren el virage o torsión del haz próximo a la línea central. Estos términos producen ligeras variaciones en la forma de la órbita, pero no producen deriva en primer orden, por lo que no los estudiaremos.

CAMPO CURVO

Si las componentes del tensor $\nabla \bar{B}$, $\frac{\partial B_x}{z \partial}$ y $\frac{\partial B_y}{\partial z}$ no son nulas, las líneas de campo presentan una cierta curvatura. Si una partícula se mueve, arrollándose, a lo largo de una de tales líneas, experimentará una fuerza centrífuga

$$\bar{F} = -\frac{m v_{||}^2}{R} \bar{e}_2$$

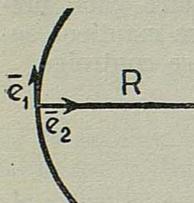


FIG. 15

donde R es el radio de curvatura de la línea, \bar{e}_2 el vector unidad en la dirección de la normal principal, \bar{e}_1 en la dirección del campo y $v_{||}$ la componente de la velocidad paralela al campo. Esta fuerza originará de acuerdo con la (II-11) una deriva en la dirección de la binormal a la línea de campo, cuya velocidad vendrá dada por:

$$\bar{v}_{curv.} = \frac{c}{e} \frac{\bar{F} \times \bar{B}}{B^2} = -\frac{mc v_{||}^2}{e R B^2} \bar{e}_2 \times \bar{B} = \frac{mc v_{||}^2}{e B} \frac{\bar{e}_3}{R}$$

Como esta velocidad depende del signo de la carga, originará una corriente eléctrica dentro del plasma, aunque fuese neutro.

Llamando s a la longitud sobre la línea del campo y teniendo presente que

$$\frac{\bar{e}_2}{R} = \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial s}$$

la velocidad de deriva puede escribirse

$$\bar{v}_{curv.} = 2c \frac{W_{||}}{e B^2} \bar{B} \times (\bar{n} \cdot \nabla) \bar{n}$$

donde \bar{n} es el vector unidad en la dirección del campo magnético.

La densidad de corriente debida a esta curvatura de las líneas de campo en un plasma neutro será pues:

$$\bar{J}_{curv.} = \frac{2 W_{11}}{B^2} \frac{\bar{e}_2 \times \bar{B}}{R} = 2c \frac{W_{11}}{B^2} \bar{B} \times (\bar{n} \cdot \nabla) \bar{n}$$

CAMPO CON GRADIENTES PARALELO A \bar{B}

Veamos el efecto producido sobre una partícula por un campo con un gradiente paralelo a \bar{B} . En este caso

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial B_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

no son nulas y por estar ligadas por la ecuación $\nabla \cdot \bar{B} = 0$, tendremos:

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y}$$

El haz de líneas de campo será divergente. Supongamos que la línea central del haz sea recta. Una partícula que describa una órbita de Larmor en torno a la línea central se encontrará en cada punto de su trayectoria con

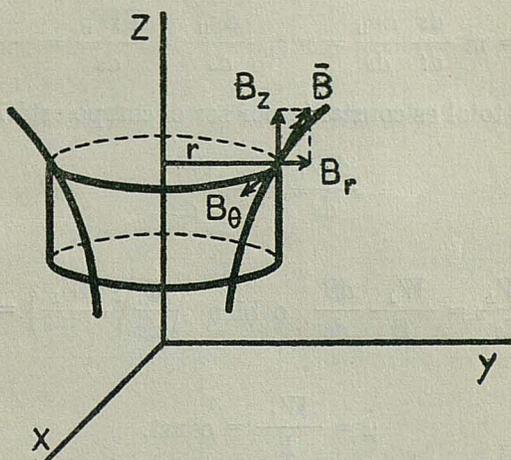


FIG. 16

una inducción que dependerá de las coordenadas x e y . Esta inducción tendrá una componente B_z paralela al eje Z , una componente radial B_r y una tangencial B_θ . Si llamamos $\{Br\}$ al valor promedio de Br en un círculo de Larmor, teniendo en cuenta que el flujo de inducción que sale por la super-

ficie lateral de un cilindro centrado de radio r , es igual al flujo neto a través de las bases, tendremos:

$$2\pi r \{Br\} = -\pi r^2 \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

luego

$$\{Br\} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Una partícula que describiría una órbita de Larmor de radio r si sólo actuase la componente B_z , se encuentra sometida a una fuerza adicional:

$$F_{||} = \frac{e v_{\perp}}{c} Br = \frac{e v_{\perp}}{c} \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{m v_{\perp}^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

que en general tendrá la forma:

$$F_{||} = -\frac{1}{2} \frac{m v_{\perp}^2}{B^2} (\bar{B} \cdot \nabla) B = -\frac{\mu}{B} (\bar{B} \cdot \nabla) B = (\bar{\mu} \cdot \nabla) B \quad (\text{II-19})$$

puesto que como la variación del campo es lenta $\frac{\partial B_z}{\partial z} \simeq \frac{\partial B}{\partial z}$.

La ecuación del movimiento a lo largo de una línea de campo, siendo s la distancia contada sobre ella será:

$$m \frac{dv_{||}}{dt} = m \frac{ds}{dt} \frac{dv_{||}}{ds} = m v_{||} \frac{dv_{||}}{ds} = \frac{dW_{||}}{ds} = -\frac{W_{\perp}}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \quad (\text{II-20})$$

y como la energía total es constante por ser el campo estático, $W = W_{||} + W_{\perp}$:

$$\frac{dW_{||}}{ds} = -\frac{dW_{\perp}}{ds}$$

luego

$$\frac{dW_{\perp}}{ds} = \frac{W_{\perp}}{B} \frac{dB}{ds} \quad \text{o bien} \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{W_{\perp}}{B} \right) = 0$$

de donde

$$\mu = \frac{W_{\perp}}{B} = \text{const.}$$

y la (II-19) tomará la forma:

$$F_{||} = -\nabla_{||} (\bar{\mu} \cdot \bar{B})$$

el efecto es el mismo que si hubiese un potencial μB . Al acercarse la partícula a un campo fuerte, disminuye su velocidad y si es lo suficientemente fuerte puede llegar a reflejarse, como le ocurre a toda materia diamagnética.

Un ejemplo típico es la desviación de los rayos cósmicos por el campo magnético terrestre. Así mismo, el denominado método de espejos magnéticos para el confinamiento del plasma en reactores termonucleares.

CAMPO CON GRADIENTE PERPENDICULAR A \bar{B}

Queremos estudiar el efecto producido sobre una partícula cargada por un campo magnético no uniforme de tal forma que los únicos elementos del tensor $\nabla \bar{B}$ no nulos son $\frac{\partial B_z}{\partial x}$ y $\frac{\partial B_z}{\partial y}$. Por tanto B_z varía en una dirección perpendicular al eje Z , luego $B_z = B_z(x, y)$. Elijamos un sistema de coordenadas de tal forma que se verifique

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} \neq 0 \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$$

y supongamos así mismo que las otras dos componentes del campo se anulen, $B_x = B_y = 0$, entonces, $B = B_z = B(x)$. Además, la variación del campo es tan pequeña que podemos escribir

$$B(x) = B(0) + x \frac{dB}{dx} = B_0 + x B'_0$$

o bien

$$w = w_0 + x w'_0$$

De $\text{rot } \bar{A} = B(x)\bar{k}$ obtenemos las componentes del vector potencial que nos permite el cálculo de la lagrangiana, momentos conjugados y hamiltoniana, resultando para estas últimas

$$p_x = m\dot{x} - mw y \quad p_y = m\dot{y} \quad p_z = m\dot{z}$$

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m}{2} w^2 y^2 + w y p_x$$

Si elegimos como movimiento no perturbado el producido por el campo magnético uniforme B_0 , la hamiltoniana perturbadora y el operador de Liouville tomarán la forma

$$H_1 = \frac{m}{2} w'_0{}^2 x^2 y^2 + m w_0 w'_0 x y^2 + w'_0 x y p_x$$

$$\begin{aligned} \Omega_1[t'] &= w'_0 x_0(t') y_0(t') \frac{\partial}{\partial x_0(t')} - \\ &- m w'_0{}^2 x_0(t') y_0(t')^2 \frac{\partial}{\partial p_{x_0}(t')} - m w_0 w'_0 y_0(t')^2 \frac{\partial}{\partial p_{x_0}(t')} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - w'_0 p_{x_0}(t) y_0(t) \frac{\partial}{\partial p_{x_0}(t)} - m w'^0_0 x_0(t)^2 y_0(t) \frac{\partial}{\partial p_{x_0}(t)} - \\
 & - 2m w_0 w'_0 x_0(t) y_0(t) \frac{\partial}{\partial p_{y_0}(t)} - w'_0 p_{x_0}(t) x_0(t) \frac{\partial}{\partial p_{y_0}(t)}
 \end{aligned}$$

que aplicado a las ecuaciones del movimiento no perturbado y considerando la evolución en un período de Larmor no perturbado, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, conducen en primera aproximación a

$$x(T) = x_0$$

$$y(T) = y_0 + \pi \frac{w'_0}{\omega_0} \left(\frac{p_{x_0}}{m\omega_0} + y_0 \right)^2 + \pi \frac{w'_0}{\omega_0^3} \frac{p_{y_0}^2}{m^2} = y_0 + \pi \frac{w'_0}{\omega_0^3} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)$$

luego la velocidad media será

$$\dot{\bar{x}} = 0$$

$$\dot{\bar{y}} = \frac{y(T) - y_0}{T} = \frac{1}{2} \frac{w'_0}{\omega_0^2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) = \frac{1}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) \frac{mc}{e} \frac{\nabla B}{B_0^2}$$

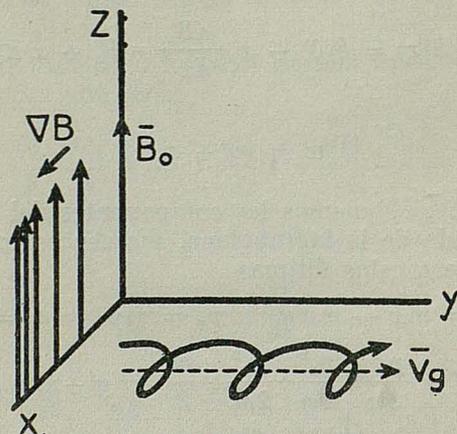


FIG. 17

La trayectoria de la partícula es como indica la fig. 17; al acercarse a regiones de campo intenso, el radio de curvatura disminuye, derivando la partícula en dirección perpendicular a B y al gradiente del campo, con la velocidad

$$\bar{v}_g = \frac{c W_{\perp}}{e B^2} \bar{n} \times \nabla B$$

dando lugar a una densidad de corriente, llamada de gradiente:

$$\bar{J}_g = \frac{W_{\perp}}{B^2} \bar{n} \times \nabla B$$

CAPÍTULO III

INVARIANTES ADIABATICOS

INTRODUCCIÓN

En la física del plasma la llamada aproximación del centro guía, considera el movimiento de las partículas cargadas en un campo electromagnético variable, como un giro alrededor de un centro —del centro guía— que a su vez se mueve en el espacio. La separación de los dos movimientos, el del centro guía y el de giro de la partícula alrededor del mismo, solamente es válido si las variaciones del campo magnético en el espacio y en el tiempo son pequeñas.

Para estudiar estos movimientos es muy importante el concepto de invariante adiabática. Se ha dado una formulación precisa de la noción de invariantes adiabáticas por Chandrasekhar [8] y Leonard [9]. Kurlrud [10] cree que hay muchas magnitudes que son invariantes adiabáticas de altos órdenes, aunque sólo conozcamos su invariación para órdenes bajos.

En la aproximación del centro guía el invariante adiabático de giro se supone constante. Es interesante conocer el error cometido cuando se hace este supuesto. Por esto, intentaremos estudiar la constancia aproximada de invariantes adiabáticos. Los invariantes adiabáticos son estrictamente constantes del movimiento si los campos son constantes.

Lenard probó la invariancia adiabática de la integral de acción de un oscilador unidimensional no lineal para todos los órdenes. Su trabajo es una generalización del de Kulsrud quien estudió el mismo concepto para el oscilador armónico. En el trabajo de Lenard la hamiltoniana dependiente del tiempo corresponde, para un tiempo fijo, a un movimiento periódico.

En este trabajo generalizaremos los resultados obtenidos por otros autores en varios puntos. Introducida la representación de interacción desarrollada en el capítulo I para la Mecánica Clásica, vamos a establecer criterios generales que deben satisfacer las hamiltonianas dependientes lentamente del tiempo para poseer invariantes adiabáticos de orden m , y presentamos un método general basado en técnicas similares a las usadas para evaluar perturbaciones dependientes del tiempo en Mecánica Cuántica, para calcular el grado de constancia aproximada de tales invariantes adiabáticos para hamiltonianas que dependen lentamente, pero de una forma finita, del tiempo. Finalmente aplicamos estos métodos a los invariantes adiabáticos que aparecen en el plasma termonuclear, evaluando el error cometido en la aproximación del centro guía.

INVARIANTES ADIABÁTICOS

Supongamos que la hamiltoniana del sistema, $\mathcal{H}(t)$, depende explícitamente del tiempo. De hecho, tal hamiltoniana, $\mathcal{H}(t)$, varía continuamente con el tiempo desde un valor inicial H_0 en el instante t_0 , hasta un cierto valor final H_1 en el instante t_1 . Hagamos

$$T = t_1 - t_0 \quad \tau = \frac{t - t_0}{T} \quad (\text{III-1})$$

y designemos por $H(\tau)$ el valor de la hamiltoniana $\mathcal{H}(t)$ en el instante $t = t_0 + \tau T$. $H(\tau)$ es una función continua de τ que supondremos dada. La evolución sufrida por el sistema desde el tiempo t_0 hasta el tiempo t_1 , depende únicamente del parámetro T .

Si definimos el parámetro $\varepsilon = \frac{1}{T}$; el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ implica el decrecimiento indefinido en la velocidad de cambio del parámetro externo. Mientras el tiempo físico t va de t_0 hasta t_1 , el tiempo ficticio τ lo hace desde $\tau = 0$ hasta $\tau = 1$. Así pues

$$H(0) = H_0 \quad H(1) = H_1 \quad (\text{III-2})$$

Vamos a estudiar la evolución del sistema bajo la acción de la hamiltoniana $H(\tau)$ cuando τ va desde $\tau = 0$ hasta $\tau = 1$. Desarrollaremos el operador de evolución correspondiente en potencias de T^{-1} .

Una cantidad R es un invariante adiabático de orden m si puede encontrarse una constante positiva M tal que durante el intervalo de tiempo $T(T \rightarrow \infty)$ la variación de R satisface a

$$|\Delta R| < \frac{1}{T^m} R \quad (\text{III-3})$$

IMAGEN DE INTERACCIÓN

Aunque ya hemos estudiado en el capítulo primero la imagen de interacción para la Mecánica Clásica, volveremos a hacerlo brevemente para poder describir las ecuaciones correspondientes en términos del tiempo ficticio τ y de la hamiltoniana ficticia $H(\tau)$.

La evolución dinámica temporal de una función $A = A(q, p)$ del grupo de variables canónicas conjugadas, es decir, la evolución temporal total si la función A no depende explícitamente del tiempo, está dada por

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) \quad (\text{III-4})$$

donde $H = H(q, p, t)$ es la hamiltoniana del sistema referido al tiempo físico t . La misma ecuación escrita en términos de la nueva variable tiempo τ y de la hamiltoniana $H(\tau)$ es

$$\frac{dA}{d\tau} = T [\Omega(\tau), A] \quad (\text{III-5})$$

donde el paréntesis cuadrado indica el conmutador de las cantidades que contiene. El operador Ω es el operador diferencial de Liouville definido por

$$\Omega(\tau) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad (\text{III-6})$$

La evolución temporal puede obtenerse introduciendo el operador diferencial $S(\tau)$ escrito como una función del operador de Liouville Ω . Tal operador $S(\tau)$ está definido por

$$A(q(t), p(t)) = S(\tau) A(q_0, p_0) S^{-1}(\tau) \quad (\text{III-7})$$

donde q_0 y p_0 son los valores de las variables del grupo canónico en el origen de tiempos ($\tau = 0$), es decir

$$q_0 = q(0) \quad p_0 = p(0) \quad (\text{III-8})$$

La condición de contorno que debe satisfacer $S(\tau)$ es evidentemente

$$S(0) = 1 \quad (\text{III-9})$$

De la (III-7) teniendo en cuenta la (III-5) obtenemos la ecuación diferencial a que satisface el operador de evolución

$$\frac{dS(\tau)}{d\tau} = T S(\tau) \Omega(q_0, p_0, \tau)$$

La ecuación diferencial y la condición de contorno pueden incluirse ambas en la siguiente ecuación integral

$$S(\tau) = 1 + T \int_0^\tau d\tau' S(\tau') \Omega(q_0, p_0, \tau') \quad (\text{III-10})$$

Consideremos $H_0 = H(0)$ como la hamiltoniana no perturbada y $S_0(\tau)$ como el operador de evolución engendrado por H_0 . Definimos el operador de evolución en la imagen de interacción $S_1(\tau)$ por

$$A(q(\tau), p(\tau)) = S_1(\tau) S_0(\tau) A(q_0, p_0) S_0^{-1}(\tau) S_1^{-1}(\tau) \quad (\text{III-11})$$

La hamiltoniana perturbadora está definida por

$$H'(\tau) = H(\tau) - H_0 \quad (\text{III-12})$$

hamiltoniana que depende explícitamente del tiempo. De ella podemos construir otro operador diferencial de Liouville que llamaremos $\Omega'(q_0, p_0, \tau)$.

De la (III-11) teniendo en cuenta la (III-5) obtenemos la ecuación integral a que satisface $S_1(\tau)$.

$$S_1(\tau) = 1 + T \int_0^\tau d\tau' S_1(\tau') \Omega'[\tau'] \quad (\text{III-13})$$

donde

$$\Omega' [\tau'] \equiv S_0(\tau) \Omega' (q_0, p_0, \tau) S_0^{-1}(\tau) \quad (\text{III-14})$$

es el operador de Liouville en la imagen de interacción. Tal operador depende del tiempo de dos maneras: Primeramente porque $H'(\tau)$ tiene una dependencia temporal explícita; en segundo lugar, porque el operador de evolución no perturbado $S_0(\tau)$ actuando sobre el grupo de variables canónicas conjugadas que entran en la definición $\Omega' (q_0, p_0, \tau)$ inducirá en el mismo la dependencia temporal del movimiento no perturbado.

MOVIMIENTO PERIÓDICO

Supondremos que el movimiento no perturbado engendrado por H_0 es periódico. Hay dos clases de movimiento periódico. Consideremos un sistema con un solo grado de libertad. Para tal sistema, el espacio de las fases es un plano bidimensional. El primer tipo de movimiento periódico, designado con el nombre de libración, se realiza siempre que q y p son funciones periódicas del tiempo con la misma frecuencia. Sus órbitas en el espacio de las fases son cerradas. En el segundo tipo, la coordenada q no es propiamente periódica, sin embargo, cuando q se incrementa en una cierta cantidad, la configuración del sistema permanece esencialmente inmutable. Este movimiento se denomina simplemente rotación. Los valores de la coordenada de posición, que en este tipo de periodicidad es invariablemente el ángulo de rotación, no están acotados, sino que crecen indefinidamente. En el caso de tratarse de sistemas con más de un grado de libertad, el movimiento del sistema se llama periódico si la proyección de la órbita del sistema en el espacio de las fases sobre cada plano (q_i, p_i) es simplemente periódico en el sentido definido para movimientos de un solo grado de libertad. Supondremos que la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable al menos en un grupo de variables canónicas. Entonces los movimientos proyectados son independientes entre sí y su naturaleza puede ser examinada fácilmente.

Es bien conocido, que para movimientos periódicos cuando el valor de la coordenada de ángulo cambia en una unidad, la correspondiente coordenada canónica conjugada describe un ciclo completo. Para el caso de la libración, la coordenada vuelve a su valor original; mientras que para la rotación el comportamiento es más complicado. En general es pues posible expresar un movimiento periódico de coordenadas separables como una serie de Fourier. Lo mismo puede decirse de una función de las coordenadas separables tal como, por ejemplo, la hamiltoniana perturbadora. Nos limitaremos a los casos en que así ocurra.

Suponemos, ahora, que se satisfacen las condiciones necesarias para que el movimiento periódico no perturbado introduzca una dependencia temporal en $H' (q_0(\tau), p_0(\tau), \tau)$ tal que, esta función pueda representarse como una suma de términos armónicos simples conteniendo coeficientes variables que aparecen debido a la dependencia temporal de H' . Así pues podemos escribir

$$H' (q_0(\tau), p_0(\tau), \tau) = \sum_j h_j(\tau) e^{iw_j\tau T} \quad (\text{III-15})$$

Los coeficientes $h_j(\tau)$ no dependerían del tiempo si la hamiltoniana perturbadora no tuviera dependencia explícita respecto al tiempo. Las constantes ω_j representan las frecuencias fundamentales y todos sus armónicos del movimiento periódico no perturbado.

CONSTANCIA APROXIMADA DE INVARIANTES ADIABÁTICOS

Supongamos que la función $A(q, p)$ es una constante del movimiento no perturbado. Por serlo, verificará

$$S_0(\tau) A(q_0, p_0) S_0^{-1}(\tau) = A(q_0, p_0) \quad (\text{III-16})$$

y, por tanto, su evolución temporal estará dada por $S_1(\tau) A(q_0, p_0) S_1^{-1}(\tau)$. Como es usual, la ecuación integral para $S_1(\tau)$ se resuelve por iteración. Por este procedimiento encontramos para $S_1(\tau)$ el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} S_1(\tau) = & 1 + T \int_0^\tau d\tau' \Omega'[\tau'] + T^2 \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \Omega'[\tau''] \Omega'[\tau'] + \dots \\ & \dots + T^n \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \dots \int_0^{\tau^{(n-1)}} d\tau^{(n)} \Omega'[\tau^{(n)}] \dots \Omega'[\tau'] + \dots \end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

El término general de esta serie es igual a una integral múltiple de un producto cronológico ordenado de operadores de Liouville $\Omega'(\tau)$. Este hecho es un teorema bien conocido de Mecánica Cuántica, que ha sido extendido recientemente a la Mecánica Clásica [3]. Así pues, el término enésimo de la serie (III-17) satisface la relación

$$\begin{aligned} & T^n \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \dots \int_0^{\tau^{(n-1)}} d\tau^{(n)} \Omega'[\tau^{(n)}] \dots \Omega'[\tau'] = \\ & = \frac{T^n}{n!} \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \dots \int_0^{\tau^{(n-1)}} d\tau^{(n)} \{ \Omega'[\tau'] \Omega'[\tau''] \dots \Omega'[\tau^{(n)}] \}_- \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

donde el símbolo $\{ \}_-$ indica una ordenación cronológica, esto es, vuelve a poner en orden el producto de los operadores Ω , ordenándolos por tiempos de tal forma que en el producto los operadores aparecerán de izquierda a derecha según los valores crecientes del tiempo.

Estudemos ahora el valor de una integral cuyo integrando es un operador periódico que varía rápidamente con el tiempo, es decir, tiene una frecuencia elevada; esta integral es

$$R_j(\tau) = \int_0^\tau \Omega_j'(\tau) e^{i\omega_j \tau T} d\tau$$

donde $\Omega_j'(\tau)$ es el operador de Liouville correspondiente al coeficiente $h_j(\tau)$ de la (III-15). Este integrando es de alta frecuencia porque consideramos que

T es muy grande. Integrando $R_j(\tau)$ n veces por partes y supuestos $\Omega_j'(\tau)$ y sus m primeras derivadas, nulas en los instantes $\tau = 0$ y $\tau = \tau$ tendremos

$$R_j(\tau) = \frac{(-1)^{m+1}}{(i\omega_j T)^{m+1}} \int_0^\tau e^{i\omega_j \tau T} \frac{d^{m+1} \Omega_j'(\tau)}{d\tau^{m+1}} d\tau \quad (\text{III-19})$$

integral que es muy pequeña para T grande. El operador $\frac{d^{m+1} \Omega_j'(\tau)}{d\tau^{m+1}}$ es el operador de Liouville de $\frac{d^{m+1} h_j(\tau)}{d\tau^{m+1}}$:

Luego, con las hipótesis hechas, el segundo sumando de (III-17) podrá escribirse en la siguiente forma

$$\begin{aligned} T \int_0^\tau d\tau' \Omega'[\tau'] &= \sum_j T \int_0^\tau d\tau' \Omega_j'(\tau') e^{i\omega_j \tau' T} = \\ &= \sum_j \frac{T (-1)^{m+1}}{(i\omega_j T)^{m+1}} \int_0^\tau e^{i\omega_j \tau' T} \frac{d^{m+1} \Omega_j'(\tau')}{d\tau'^{m+1}} d\tau' = \\ &= \frac{1}{T^m} \sum_j \frac{(-1)^{m+1}}{(i\omega_j)^{m+1}} \int_0^\tau e^{i\omega_j \tau' T} \frac{d^{m+1} \Omega_j'(\tau')}{d\tau'^{m+1}} d\tau' \end{aligned}$$

o sea, que es del orden $\frac{1}{T^m}$. Aplicando idéntico procedimiento de integración por partes a cada una de las n integrales del término general (III-18) de (III-17) encontraremos que, para T grande, tal término es del orden

$$\frac{1}{T^{mn}} \quad (\text{III-20})$$

supuesto que $H'(\tau)$ y sus m primeras derivadas son cero para $\tau = 0$ y $\tau = \tau$, puesto que en cada una de las integraciones que realizamos el coeficiente de la integral resultante queda multiplicado por $\frac{1}{T^m}$.

Por simple inspección del desarrollo en serie obtenido para $S_1(\tau)$ y posterior integración por partes m veces de cada una de las integrales contenidas en cada uno de los términos de la serie (III-17), deducimos que el movimiento engendrado por $H = H_0 + H'(\tau)$ cuando las condiciones mencionadas anteriormente se satisfacen, es equivalente al movimiento periódico generado por H_0 perturbado por una hamiltoniana del orden $\frac{1}{T^{m+1}}$. Para ver esto es suficiente imaginar que una vez que hemos llegado a una expresión similar a (III-19) para los términos del desarrollo de $S_1(\tau)$, deshacemos las transformaciones que inicialmente nos condu-

cían desde la imagen de Heisemberg (III-17) a la imagen de interacción, es decir, partiendo de (III-19) que pertenece a la imagen de interacción deduciremos la hamiltoniana de la correspondiente imagen de Heisemberg: esta última hamiltoniana es igual a H_0 más una perturbación que se comporta como $\frac{1}{T^{m+1}}$.

Así pues, deducimos que todas las constantes del movimiento de la hamiltoniana inicial H_0 son invariantes adiabáticas de orden $m + 1$ de la hamiltoniana $H(t)$ dependiente lentamente del tiempo, supuesto que $H(t)$ y sus m primeras derivadas son cero en el principio y final del intervalo $t_1 - t_0 = T$ que suponemos muy grande.

La exposición precedente incluye como ejemplo particular el caso de invariancia adiabática para todos los órdenes, cuando $H(t)$ y todas sus derivadas son nulas en los extremos del intervalo temporal grande. Podemos deducir para este caso que la diferencia entre $S_1(t)$ y 1 es más pequeña que cualquier potencia de $\frac{1}{T}$. Sabemos que en ciertos casos [11] tal diferencia se comporta como e^{-T} .

Las condiciones anteriores pueden simplificarse si T es grande, pero finito. Entonces, las constantes del movimiento periódico son invariantes adiabáticos de orden $m + 1$ de la hamiltoniana $\mathcal{H}(t)$, si esta hamiltoniana y sus m primeras derivadas son cero en el principio y final del intervalo de tiempo.

La técnica presente proporciona un método de evaluación de la constancia aproximada de los invariantes adiabáticos para T grande pero finito. En efecto, si despreciamos los términos de orden $\frac{1}{T^{2m}}, \frac{1}{T^{3m}}, \dots$ frente a $\frac{1}{T^m}$, la (III-17) podrá escribirse en la siguiente forma

$$S_1(1) = 1 + \frac{1}{T^m} \sum_j \left(\frac{i}{w_j} \right)^{m+1} \int_0^1 e^{iw_j \tau T} \frac{d^{m+1} \Omega_j'(\tau'')}{d\tau'^{m+1}} d\tau' \quad \text{(III-21)}$$

y puesto que A es constante del movimiento no perturbado

$$\begin{aligned} A(q(\tau), p(\tau)) &= S_1(\tau) A(q(0), p(0)) S_1^{-1}(\tau) = \\ &\simeq \left\{ 1 + \frac{1}{T^m} \sum_j \left(\frac{i}{w_j} \right)^{m+1} \int_0^1 e^{iw_j \tau T} \frac{d^{m+1} \Omega_j'(\tau)}{d\tau^{m+1}} d\tau \right\} \cdot A(q(0), p(0)) \cdot \\ &\cdot \left\{ 1 - \frac{1}{T^m} \sum_j \left(\frac{i}{w_j} \right)^{m+1} \int_0^1 e^{iw_j \tau T} \frac{d^{m+1} \Omega_j'(\tau)}{d\tau^{m+1}} d\tau \right\} \simeq \\ &\simeq A(q(0), p(0)) + \left\{ \frac{1}{T^m} \sum_j \left(\frac{i}{w_j} \right)^{m+1} \int_0^1 e^{iw_j \tau T} \frac{d^{m+1} \Omega_j'(\tau)}{d\tau^{m+1}} d\tau \right\} A(q(0), p(0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - A(q(0), p(0)) \left\{ \frac{1}{T^m} \sum_j \left(\frac{i}{w_j} \right)^{m+1} \int_0^1 e^{i w_j \tau T} \frac{d^{m+1} \Omega_j'(\tau)}{d\tau^{m+1}} d\tau \right\} = \\
 & = A(q(0), p(0)) + \left[\sum_j \frac{T}{(i w_j T)^{m+1}} \int_0^1 e^{i w_j \tau T} \frac{d^{m+1} \Omega_j'(\tau)}{d\tau^{m+1}} d\tau, A(q(0), p(0)) \right]
 \end{aligned}
 \tag{III-22}$$

luego este conmutador nos permite calcular el error cometido al tomar la magnitud A como constante del movimiento.

Debe notarse que en todo lo precedente no hemos requerido que H_1 fuera pequeño. Ha sido suficiente suponer que el desarrollo no tenga términos constantes.

FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE HAMILTON DEPENDIENTE DEL TIEMPO

Hasta aquí hemos estudiado la invariancia adiabática de las constantes del movimiento de movimientos periódicos engendrados por una hamiltoniana no perturbada H_0 , cuando la perturbación H_1 satisface ciertas condiciones. No obstante, en la mayoría de las aplicaciones al plasma termonuclear, la hamiltoniana total no puede dividirse en dos partes con las condiciones requeridas. En su lugar tenemos una hamiltoniana total que la llamaremos $H = H(\tau)$ que es una función lenta del tiempo.

Consideremos primeramente la hamiltoniana obtenida fijando el valor de τ en $H(\tau)$ y la evolución engendada por el mismo. Fijemos, por ejemplo, el parámetro tiempo en el origen de tiempos $\tau = 0$. La hamiltoniana $H(0) \equiv H^0$ engendrará un movimiento periódico.

Estamos interesados en las constantes del movimiento de H^0 y particularmente en las variables de acción de tal movimiento periódico. Resolvamos en primer lugar el problema instantáneo realizando una transformación canónica tal que los nuevos momentos sean todos cíclicos. Seguimos la teoría de Hamilton-Jacobi y consideramos la transformación engendada por la función característica de Hamilton, transformación que reduce automáticamente los nuevos momentos a constantes en el tiempo, puesto que la hamiltoniana es cíclica en todas las coordenadas. Los nuevos momentos no están especificados excepto en el sentido de que deben ser constantes del movimiento. No obstante, la naturaleza de la solución indica cómo deben seleccionarse los momentos.

Por razones de simplicidad nos limitaremos a estudiar un solo grupo de variables canónicas conjugadas. Sean q y p la coordenada y momento antiguos y Q y P los nuevos. La función característica de Hamilton se toma como función de las coordenadas antiguas q y los momentos nuevos P .

$$W = W(q, P)$$

y satisface la siguiente ecuación diferencial

$$H^0 \left(q, \frac{\partial W}{\partial q} \right) = P \quad (\text{III-23})$$

donde la constante P es el valor instantáneo de la energía aunque no es preciso que así ocurra. La función característica de Hamilton engendra una transformación de contacto y las ecuaciones de la transformación son

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} \quad Q = \frac{\partial W}{\partial P} \quad (\text{III-24})$$

Los nuevos momentos constantes P pueden elegirse de modo que sean funciones independientes de las variables de acción J que también son constantes del movimiento.

Las variables de acción se definen por

$$J = \oint \frac{\partial W(q, P)}{\partial q} dq \quad (\text{III-25})$$

donde la integración está extendida a un período completo de movimiento. De la (III-25) podemos deducir la expresión de P en función de J , y con su ayuda escribir la función característica en la forma

$$W = W(q, J) \quad (\text{III-26})$$

Llamaremos θ a la coordenada canónica conjugada de la variable de acción.

Consideremos, como ejemplo el movimiento de una partícula cargada de masa m en un potencial dependiente del tiempo $V(q, \tau)$. Presentemos ahora el movimiento instantáneo engendrado por el potencial en el tiempo $\tau = 0$. Las hamiltonianas son

$$H(\tau) = \frac{p^2}{2m} + V(q, \tau)$$

$$H^0 = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad V(q) \equiv V(q, 0) \quad (\text{III-27})$$

y así la función característica de Hamilton para H^0 satisface a

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + V(q) = P \quad (\text{III-28})$$

que puede integrarse inmediatamente

$$W(q, P) = \sqrt{2m} \int \sqrt{P - V(q)} dq \quad (\text{III-29})$$

Para el oscilador armónico tenemos que $V(q) = \frac{m\omega^2}{2} q^2$. En este caso $P = w J$. No obstante podemos realizar un tipo diferente de transformación que se produce cuando escribimos

$$J = \frac{m w}{2} \frac{q^2}{\sin^2 \theta} \quad (\text{III-30})$$

relación obtenida de

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial J} \text{ arc sen } \sqrt{\frac{m w}{2J}} q \quad (\text{III-31})$$

y de considerar en la integral (III-29) que θ y q son variables independientes.

$$W(q, \theta) = m w \text{ ctg } \theta \int q dq = \frac{m w}{2} q^2 \text{ ctg } \theta \quad (\text{III-32})$$

que es la función generatriz, bien conocida, para realizar una transformación canónica a las variables angulares de acción para el oscilador armónico [12].

Hasta aquí hemos aplicado la bien conocida teoría de Hamilton-Jacobi a la hamiltoniana instantánea. Nada nuevo hemos hecho. No obstante nuestra hamiltoniana $H(\tau)$ es una función que depende lentamente del tiempo. La técnica seguida en esta parte del trabajo consiste en realizar formalmente la misma transformación canónica engendrada por la función característica de Hamilton aún en el caso de que la hamiltoniana dependa explícitamente del tiempo [13].

En el plasma termonuclear nos interesa la invariancia adiabática de las variables de acción definidas por (III-25) donde la integral está extendida a un ciclo completo del movimiento periódico realizado por la partícula. No obstante, si el potencial depende del tiempo el movimiento del sistema no es claramente periódico y el contorno de integración no está determinado de una manera precisa. Por tanto, las variables de acción no están definidas propiamente en este caso. No obstante, podemos considerar las variables de acción instantánea que son las únicas que tienen un sentido claro.

La ambigüedad en la definición de las variables de acción nos permite establecer diferentes tipos de conexión entre P y J cuando la hamiltoniana es dependiente del tiempo. Todos estos caminos diferentes indican que J es invariable adiabático, pero conducen a diferentes valores para el error cometido al tomar J como constante del movimiento, cuando se consideran intervalos de tiempo T finitos.

Por ejemplo, podemos estudiar el procedimiento usado por Vandervoort [14] que llega al resultado de Hertwick y Schlüter para el cambio en el invariante adiabático de una partícula cargada girando en un campo magnético dependiente del tiempo. Por medio de la relación (III-29)

vemos que J es una función de P y una funcional de V para el movimiento instantáneo. Por tanto escribimos

$$J = J(P, [V]) \quad (\text{III-33})$$

Ahora admitimos que esta relación es válida aun cuando el potencial es una función explícita del tiempo.

$$J = J(P, [V(\tau)]) \quad (\text{III-34})$$

En el caso del oscilador armónico

$$P = w J \quad (\text{III-35})$$

Este método implica definir J de tal forma que se reduce a la variable de acción angular para el movimiento instantáneo. Este método termina eliminando J entre la generalización de (III-29) y (III-34) y considerando la transformación canónica engendrada por la función característica de Hamilton, expresada en función de q y J , que resulta.

Así pues, podemos encontrar la función generatriz de la transformación $W(q, J, \tau)$ a las nuevas variables de acción angular para este caso, siguiendo formalmente el mismo camino seguido para el movimiento instantáneo y así tenemos en el ejemplo del oscilador armónico, la relación

La variable canónica conjugada de J será

$$\theta = \frac{\partial W(q, J, \tau)}{\partial J} \quad (\text{III-36})$$

La hamiltoniana transformada es

$$H' = H(\theta, J, \tau) = H(J, \tau) + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (\text{III-37})$$

donde $H(J, \tau) = H(\tau) \equiv H(q, p, \tau)$. Dada la forma como se ha definido la función generatriz W , es fácil ver que la hamiltoniana $H(J, \tau)$ es cíclica en todas las coordenadas.

La función generatriz W depende explícitamente del tiempo a través del tiempo ficticio τ . Por tanto $\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial W}{\partial \tau}$ es pequeño si T es grande.

Ahora es cuando definimos la hamiltoniana no perturbada por $H_0' = H(J, \tau)$ y por tanto la perturbadora será $H_1'(\tau) \equiv \frac{\partial W}{\partial t}$ que debe ahora supondremos escrita en función de θ y J . Como ya hemos visto $H_1'(\tau)$ es pequeña, condición que no es necesaria para obtener invariables adiabáticas en el caso general como hemos indicado en la primera parte de este capítulo. La pequeñez de $H_1'(\tau)$ nos permite aproximar el desarrollo del operador de evolución $S_1(\tau)$ en la imagen de interacción dada por la (III-13) por el primer término, aunque el operador de Liouville $\Omega_1[\tau]$ no admita un desarrollo en funciones oscilatorias rápidas sin términos constantes.

Estudiemos el movimiento no perturbado que evoluciona bajo la acción de H_0' . La frecuencia asociada con el movimiento periódico es

$$w_0 = w_0(J, \tau) = \frac{\partial H_0'}{\partial J} \quad (\text{III-38})$$

que será en general función del tiempo. La variable de acción J es constante del movimiento no perturbado.

Las soluciones para este movimiento no perturbado son

$$J_0(t) = J_0 \quad \theta_0(t) = \int_0^t dt w_0(J, t) + \theta_0 \quad (\text{III-39})$$

donde J_0 y θ_0 son los valores iniciales de estas variables. Recordemos que $t = \tau T$ y que el intervalo de variación de τ es de 0 a 1.

El mayor término de la variación de J , $\Delta J \equiv J(1) - J_0$, está dado por la acción de

$$S_1(t) - 1 \simeq T \int_0^1 d\tau' \Omega_1[\tau'] \quad (\text{III-40})$$

actuando sobre J_0 . Este es el error cometido cuando consideramos los invariantes adiabáticos como constantes.

Evaluamos $\Omega_1[\tau] J_0$. Para ello, debemos calcular el paréntesis de Poisson entre $\frac{1}{T} W(\theta_0(\tau), J_0, \tau)$ y J_0 , y entonces obtener sus derivadas con respecto a la aparición explícita de τ en W . Tendremos pues:

$$\Omega_1[\tau] J_0 = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial W}{\partial \theta_0} \quad (\text{III-41})$$

donde $\frac{\partial}{\partial \tau}$ actúa sobre la aparición explícita de τ .

Desearíamos saber si esta expresión es oscilatoria rápida en el tiempo para grandes valores de T . Veamos en primer lugar que no tiene términos constantes. En efecto, de la ecuación de definición para J se deduce que cuando q realiza un ciclo completo, es decir, cuando θ cambia en una unidad, la función característica aumenta en J . Luego

$$S \equiv W - \theta J \quad (\text{III-42})$$

permanece inmutable cuando θ aumenta es una unidad; por tanto, representa una función periódica que puede desarrollarse respecto a θ en serie de Fourier. De aquí deducimos que $\frac{\partial W}{\partial \theta}$ es igual a J más una serie de Fourier en w sin términos constantes, y que $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial \theta}$ es una serie de Fourier sin términos constantes, puesto que J no depende explícitamente del tiempo.

Una vez llegado a este punto, es inmediato deducir integrando por partes sucesivamente, como hemos hecho en la primera parte de este capítulo que J es un invariante adiabático de orden m si las $m - 1$ primeras derivadas de $H(\tau)$ son cero en $\tau = 0$ y en $\tau = 1$, es decir, en los instantes inicial y final

Igualmente las expresiones (III-27) y (III-28) nos permiten evaluar inmediatamente las variaciones del invariante adiabático en el intervalo $t = 0, t = T$.

MOMENTO MAGNÉTICO E INVARIANTE LONGITUDINAL

Sea un campo magnético uniforme, en la dirección del eje q_3 , cuyo módulo varía con el tiempo $\vec{B} = \vec{k} \cdot B(t)$. Si no hay espacio-carga, el campo eléctrico engendrado \vec{E} , según hemos visto en el capítulo II, es

$$\vec{E} = \frac{\dot{B}}{2C} (\vec{i} q_2 - \vec{j} q_1) \quad (\text{III-43})$$

El potencial escalar obtenido de la relación $\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi$ es

$$\Phi = \frac{B(t)}{2c} q_1 q_2 \quad (\text{III-44})$$

luego la hamiltoniana de una partícula de carga e en este campo será

$$H = \frac{1}{2m} [(p_1 + m \omega q_2)^2 + p_2^2] + \frac{m \dot{\omega}}{2} q_1 q_2 \quad (3-45)$$

donde $p_1 = m\dot{q}_1 - m\omega q_2$, y, $p_2 = m\dot{q}_2$.

La función característica de Hamilton para la hamiltoniana instantánea, o sea, independiente del tiempo

$$H = \frac{1}{2m} [(p_1 + m\omega q_2)^2 + p_2^2] \quad (\text{III-46})$$

en función de las variables de acción es

$$W = \frac{q_1 J_1}{2\pi} + \frac{J_2}{2\pi} \arcsen \frac{J_1 + 2\pi m\omega q_2}{\sqrt{4\pi m\omega J_2}} + \frac{J_1 + 2\pi m\omega q_2}{8\pi^2 m\omega} \sqrt{4\pi m\omega J_2 - (J_1 + 2\pi m\omega q_2)^2} \quad (\text{III-47})$$

y realizando la transformación canónica engendrada por esta función, la hamiltoniana total, poniendo ya de manifiesto la pequeñez de la variación del campo magnético con el tiempo, tiene la forma

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{w(\tau) J_2}{2 \pi} + \frac{m \dot{w} \theta_1}{T} \sqrt{\frac{\pi J_2}{m w}} \operatorname{sen} 2 \pi \theta_2 - \\
 & - \frac{w}{2 T} \frac{\theta_1 J_1}{w} - \frac{\dot{w}}{4 T \pi w} \sqrt{\frac{J_2}{\pi m w}} \cos 2 \pi \theta_2
 \end{aligned} \quad (\text{III-48})$$

Tomando como hamiltoniana no perturbada

$$H^0 = \frac{w(\tau) J_2}{2 \pi} - \frac{\dot{w}(\tau) \theta_1 J_1}{2 T w} \quad (\text{III-49})$$

que engendra las ecuaciones del movimiento

$$\begin{aligned}
 J_{02}(t) &= J_{02} \\
 \theta_{02}(t) &= \theta_{02} + \frac{1}{2 \pi} \int_0^t w(\tau') d\tau' = \theta_{02} + \frac{T}{2 \pi} \int_0^\tau w(\tau') d\tau'
 \end{aligned} \quad (\text{III-50})$$

$$\begin{aligned}
 J_{01}(t) &= J_{01} w_0^{-\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} \\
 \theta_{01}(t) &= \theta_{01} w_0^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \quad (\text{III-51})$$

y considerando la hamiltoniana perturbadora $H_1 = H - H^0$, obtenemos para la variación del momento magnético en el intervalo $t = 0, t = T$:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mu = & - \frac{\pi e \theta_{01} w_0^{\frac{1}{2}}}{c} \sqrt{\frac{J_{02}}{\pi m}} \int_0^1 d\tau' \frac{\dot{w}}{w} \cos \left(\tau \pi \theta_{02} + T \int_0^{\tau'} w(\tau'') d\tau'' \right) \\
 & - \frac{e J_{01} w_0^{-\frac{1}{2}}}{4 \pi m c} \sqrt{\frac{J_{02}}{\pi m}} \int_0^1 d\tau' \frac{\dot{w}}{w} \operatorname{sen} \left(2 \pi \theta_{02} + T \int_0^{\tau'} w(\tau'') d\tau'' \right)
 \end{aligned} \quad (\text{III-52})$$

puesto que

$$\mu = \frac{\frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)}{B} = \frac{e J_2}{2 \pi m c}$$

La constancia aproximada del momento magnético nos permite deducir la existencia del "invariante adiabático longitudinal". Consideremos una partícula moviéndose entre dos espejos magnéticos. La partícula se encuentra atrapada entre las dos regiones de campo relativamente fuerte. En adición al giro alrededor del centro guía, la partícula oscila entre los espejos. En ausencia de campos eléctricos paralelos, la componente paralela al campo de la velocidad del centro guía obedece a la ecuación de movimiento cuya hamiltoniana es

$$H = \frac{p^2}{2 m} + \mu B(q, \tau) \quad (\text{III-53})$$

donde μ es el momento magnético, q la distancia a lo largo de la línea de fuerza y $B(q, \tau)$ el campo magnético dependiente de la distancia y del tiempo. Tal hamiltoniana es del tipo general (III-27).

Supongamos que el campo magnético varía lentamente con respecto al período de oscilación entre los puntos de reflexión de los espejos magnéticos. Puesto que el período de Larmor es mucho más corto que el de oscilación, el momento magnético μ puede tomarse para estas oscilaciones como una rigurosa constante del movimiento.

Para el cálculo real de la función característica de Hamilton, necesitamos conocer la expresión de B en función de q . Una vez conocida esta función es bastante fácil, siguiendo la teoría general presentada anteriormente, evaluar el error cometido considerando el invariante longitudinal como constante del movimiento cuando el campo magnético varía en el tiempo en una cantidad finita aunque lenta.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. GASCÓN: *Reactores termonucleares*. Rev. Acad. Ciencias de Zaragoza. 14, 73 (1959).
- [2] L. M. GARRIDO: *Proc. Phys. Soc.* 76, 33 (1960).
- [3] L. M. GARRIDO: *Jour Math, Analysis and Applications*, 3, 295 (1961).
- [4] S. CHANDRASEKHAR: *Plasma Physics*. The University of Chicago Press (1960).
- [5] R. F. POST: *Controlled Fusión Research*, Proc. of the IRE, vol. 45, núm. 2 (1957).
- [6] C. LONGMIRE T-698 y K. M. Watson T-693, *Series of Lectures on Physics of Ionized Gases*, Los Alamos Scientific Laboratory, Washington (1960).
- [7] J. G. LINHART: *Plasma Physios, Nort-Holland P. C.*, Amsterdam (1960).
- [8] S. CHANDRASSKHAR: *The Plasma in a Magnetic Field*, R. K. Landshoff, Ed. (1958).
- [9] A. LENHARD: *Annals of Physics*, 6,261 (1959).
- [10] R. M. KULSRUD: *Phys. Rev.* 106, 205 (1957).
- [11] F. HERTWICK and A. SHLUTER: *Z. Naturforsch* 12a, 844 (1957).
- [12] H. GOLDSTEIN: *Classical Mechanics*, Chap. 8, Addison-Wesley Press (1956).
- [13] H. GOLDSTEIN: *Classical Mechanics*, Chap. 9, Addison-Wesley Press (1956).
- [14] P. VANDERVOORT, *Ann. of Phys.* 12, 436 (1961).

*Cátedra de Física Matemática
Facultad de Ciencias de Zaragoza*