

REVISTA
DE LA
ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES
DE
ZARAGOZA

SERIE 2.^a

TOMO XVI

FASCICULO 1.^o



1961

INDICE

	<i>Páginas</i>
RAFAEL AGUILÓ FUSTER: <i>Nota sobre la resolución del problema de Dirichlet conociendo la función de Green</i>	5
F. SUNYER BALAGUER: <i>Generalización del método de Wiman-Valiron a una clase de series de Dirichlet</i>	9
PEDRO ABELLANAS: <i>Variedad de Riemann triangulable de un espacio proyectivo</i>	15
J. SANCHO SAN ROMÁN: <i>Contribución al estudio de las valoraciones no triviales subordinadas de una valoración dada</i>	23
BARTOLOMÉ FRONTERA MARQUÉS: <i>Una función numérica en los retículos finitos que se anula para los retículos reducibles</i>	27
L. M. GARRIDO y F. J. SANCHO: <i>Validez aproximada del teorema adiabático de la mecánica cuántica</i>	31
BALTASAR R.-SALINAS: <i>Solución del problema de equivalencia de clases de funciones de desarrollo asintótico</i>	47
G. SANSONE: <i>L'equazione differenziale del Dini</i>	53
G. SANSONE: <i>Sopra un'equazione che si presenta nella determinazione delle orbite di un sincrotone</i>	55
MIGUEL LISO PUENTE: <i>Métodos de cálculo y mejora de órbitas</i>	57
FRANCISCO BÁSCONES PEÑA: <i>Estudio teórico y experimental de la difusión en coloides de oro</i>	101

NOTA SOBRE LA RESOLUCION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET CONOCIENDO LA FUNCION DE GREEN

P O R

RAFAEL AGUILÓ FUSTER

Sean en el espacio euclídeo de tres dimensiones tres ejes cartesianos rectangulares Ox , Oy , Oz , y un volumen V limitado por una superficie cerrada Σ , de la cual haremos la siguiente hipótesis: Que en cada punto de ella, excepción hecha de un número finito de curvas (de área superficial nula) y de puntos de ella, hay una normal determinada.

Sea $G(x, y, z; a, b, c)$ la función de Green relativa a este contorno; tiene las siguientes propiedades:

$$1.^a \quad G(x, y, z; a, b, c) = G(a, b, c; x, y, z).$$

2.^a Es función armónica de x, y, z (y de a, b, c) excepto para $x = a$, $y = b$, $b = c$.

$$3.^a \quad G(x, y, z; a, b, c) = 0 \quad \text{si} \quad (x, y, z) \in \Sigma \quad \text{y} \quad (a, b, c) \notin \Sigma.$$

$$4.^a \quad G(x, y, z; a, b, c) = 1/r + g(x, y, z; a, b, c)$$

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

y $g(x, y, z; a, b, c)$ función armónica de x, y, z excepto sólo si los puntos (x, y, z) y (a, b, c) coinciden en un punto de Σ .

El problema de Dirichlet consiste en determinar la función armónica en el interior de V , que al tender, interiormente a V , hacia un punto $(x, y, z) \in \Sigma$ el límite sea $U(x, y, z)$, siendo U una función arbitraria continua sobre Σ .

Mediante la función de Green se resuelve este problema, y la solución es:

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} U(x, y, z) \frac{dG}{dn} d\sigma \quad (1)$$

$\left(\frac{d}{dn}\right)$ indica la derivada según la dirección de la normal a Σ interior a V).

La demostración clásica que dan los tratados de Análisis, suponen que $\frac{dU}{dn}$ existe sobre Σ (salvo en un conjunto de medida superficial nula)¹

$\left(\frac{dG}{dn}\right)$ existen en virtud de la condición 3.^a).

1 La demostración puede verse, p. ej., en Goursat: *Cours d'Analyse Mathématique*, III tomo, 5.^a edición, párrafo 534, pág. 270.

En particular, si $U(x, y, z) \equiv 1$, es $\frac{dU}{dn} \equiv 0$, y por consiguiente es válida la demostración citada es decir:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{dG}{dn} d\sigma = 1 \quad (a, b, c) \in V \quad (a, b, c) \notin \Sigma. \quad (2)$$

El motivo de la presente Nota es demostrar la validez de (1) en el caso que U no sea derivable².

La demostración se descompondrá en dos partes: a) Que (1) es función armónica de a, b, c en el interior de V . b) Que si

$$(a, b, c) \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$$

interiormente a V es $\lim U(a, b, c) = U(x_0, y_0, z_0)$.

Demostración de a)

(1) se puede escribir

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} U \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} U \frac{dg}{dn} d\sigma \quad (3)$$

donde la primera integral es un potencial de doble capa, y la segunda es evidentemente una función armónica en el interior de V (derivando bajo el signo integral respecto a a, b, c , resulta inmediatamente). Por tanto (1) es armónica de a, b, c en el interior de V . q. e. d.

Demostración de b)

La integral

$$\iint_{\Sigma} [U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)] \frac{dG}{dn} d\sigma \quad (4)$$

es uniformemente convergente en el dominio del punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Observemos ante todo que si en la función de Green el punto (a, b, c) es un punto fijo Σ ella es, como función de x, y, z , idénticamente nula. En efecto: Si $(x, y, z) \notin \Sigma$ es consecuencia inmediata de las propiedades 1.^a y 3.^a, para $(x, y, z) \in \Sigma$ y distinto de (a, b, c) , resulta de la 2.^a, y de la 4.^a se deduce que en este caso es

$$g(x, y, z; a, b, c) \equiv -\frac{1}{r} \text{ por tanto también es válida para}$$

$$(x, y, z) = (a, b, c) \in \Sigma.$$

De aquí se deduce que las integrales que aparecen en (1) y (2), tienen sentido y son nulas cuando $(a, b, c) \in \Sigma$.

Para demostrar que (4) es uniformemente convergente en el dominio del punto M_0 consideremos una porción Σ' de Σ conteniendo M_0 , suficientemen-

2 En el caso de dos variables independientes está demostrado en Goursat, loc. cit., párrafo 518, pág. 217 basándose en la representación conforme, no generalizable a tres variables.

te pequeña para que sobre ella se verifique $|U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)| < \varepsilon$ y una esfera de centro M_0 y radio ρ conteniendo Σ' en su interior, tendremos para $|(a, b, c) - (x_0, y_0, z_0)| < \rho$

$$\left| \iint_{\Sigma'} [U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)] \frac{dG}{dn} d\sigma \right| < \varepsilon \iint_{\Sigma'} \left| \frac{dG}{dn} \right| d\sigma \quad (5)$$

la integral que aparece en el segundo miembro está, evidentemente acotada, y de aquí resulta la convergencia uniforme.

Mediante el razonamiento clásico resulta que la expresión (4) es continua de a, b, c , en M_0 y nula en este punto³.

Ahora bien, si $P(a, b, c)$ interior a V tiende a $M_0(x_0, y_0, z_0)$, y de la demostrada continuidad de (4), tendremos

$$\lim \iint_{\Sigma} U(x, y, z) \frac{dG}{dn} d\sigma = \lim \iint_{\Sigma} U(x_0, y_0, z_0) \frac{dG}{dn} d\sigma \quad (6)$$

y, en virtud de (1) y (2)

$$\lim U(a, b, c) = U(x_0, y_0, z_0) \quad (7)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Las mismas consideraciones pueden hacerse para el problema de Dirichlet exterior. La función de Green exterior debe verificar las propiedades indicadas para la interior, más la de ser nula para $P(a, b, c)$ en el infinito.

En (1) tomando como G la función de Green exterior, y $\frac{dG}{dn}$ la derivada según la dirección de la normal exterior, resuelve el problema exterior y es nula en el infinito, ya que lo es $\frac{dG}{dn}$ (por ser derivada de una constante).

La demostración es la misma que para el problema interior

3 Cfr. Goursat, loc. cit., párrafo 504, pág. 174 y sgts.

GENERALIZACION DEL METODO DE WIMAN-VALIRON A UNA CLASE DE SERIES DE DIRICHLET

p o r

F. SUNYER BALAGUER

INTRODUCCION

No es necesario señalar la importancia del método de Wiman-Valiron en el estudio de las funciones enteras cuando se las representa por medio de una serie de potencias. En este trabajo nos proponemos desarrollar un método semejante cuando la función entera $f(s)$ puede representarse por una serie de Dirichlet perteneciente a una clase muy empleada, sobre todo después de los trabajos de Mandelbrojt, Schwartz y otros.

Como es bien sabido el método empleado por Wiman-Valiron es la comparación de la serie que representa la función entera con una serie tipo, convergente tan sólo en el círculo unidad. Por lo tanto, nuestro objetivo será la construcción de una clase de series de Dirichlet convergentes únicamente en un semiplano, y que puedan servir de series de comparación, núm. 1, y luego comparar una de estas series con la que representa la función $f(s)$ núm. 2. El primer paso, o sea la construcción de la serie de comparación no ofrece ninguna dificultad, y tampoco resulta difícil la comparación entre esta serie y la que representa $f(s)$, no obstante este segundo paso requiere una mayor atención y el empleo de algunos razonamientos que creo interesantes.

Esta generalización, además del interés de todas las generalizaciones, tiene el siguiente: Entre los muchos resultados que se pueden demostrar por este método, y que quedan incluidos por lo tanto en una misma teoría, existen algunos demostrados por varios autores, cada uno por un procedimiento diferente, y que quedaban sin relación entre ellos.

Además entre otros resultados nuestra generalización permite un estudio de las propiedades de la función $f(s)$ en las proximidades de un punto s_0 tal que la expresión $|f(s_0)|/M(\sigma_0, f)$ no sea *muy pequeña*, donde $s_0 = \sigma_0 + it_0$ y $M(\sigma, f) = \max_{-\infty < t < +\infty} |f(\sigma + it)|$.

Finalmente me interesa señalar que la casi totalidad de los resultados que se pueden obtener por la teoría de Wiman-Valiron pueden trasladarse a la clase de series de Dirichlet que estudiaremos, pero, para no hacer interminable este trabajo, la inmensa mayoría de ellos no serán ni tan sólo enunciados. De todos modos, una vez obtenida la generalización, los resultados se demuestran sin dificultad.

1. Sea

$$f(s) = \sum_0^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s} \quad (1)$$

una función entera representada por una serie de Dirichlet convergente en la totalidad del plano, en la que supondremos que la sucesión $\{\lambda_n\}$ satisface a

$$0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1} \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0.$$

Puesto que con estas condiciones la densidad superior de la sucesión $\{\lambda_n\}$ es finita, la serie (1) será no solamente convergente, sino absolutamente convergente en la totalidad del plano.

En este trabajo representaremos por $\mu(\sigma)$ al término máximo de (1), o sea

$$\mu(\sigma) = \max_{n \geq 0} (|c_n| e^{-\lambda_n \sigma})$$

por $N = N(\sigma)$ el máximo entero que verifica

$$\mu(\sigma) = |c_N| e^{-\lambda_N \sigma}$$

y finalmente pondremos $\lambda(\sigma) = \lambda_{N(\sigma)}$.

Si tomamos como serie de comparación la

$$F(s) = \sum_0^{\infty} e^{H(\lambda_n)} e^{-\lambda_n s} \quad (2)$$

donde $H(\lambda) \rightarrow \infty$ y $H(\lambda)/\lambda \rightarrow 0$, cuando $\lambda \rightarrow \infty$, entonces puede repetirse casi palabra por palabra, la comparación entre los polígonos de Newton de las funciones (1) y (2) que habitualmente se hacen en las series de potencias. De modo que, si suponemos que $H(\lambda)$ tiene una derivada decreciente que tiende a cero cuando $\lambda \rightarrow \infty$, podremos enunciar el siguiente resultado:

TEOREMA A. — Dado un valor σ , en general será posible hallar dos números k y q tales que

$$\sigma = q + H'(\lambda(\sigma))$$

y que los términos máximos de $f(\sigma)$ y de $k F(\sigma - q)$ son iguales y corresponden a un mismo λ_n , mientras que los otros términos son mayores en la segunda que en la primera. Los valores de σ superiores a un valor v dado, por los cuales no se cumple la propiedad anterior, están comprendidos en conjunto formado por menos de $N(v)$ segmentos, y la longitud total de estos segmentos es acotada por una cantidad independiente de v .

A los valores de σ que cumplen la propiedad indicada al principio del teorema anterior los llamaremos valores ordinarios respecto a F , o simplemente valores ordinarios; mientras que los comprendidos en los intervalos señalados al final del mismo teorema serán llamados excepcionales.

En adelante, y para obtener resultados más concretos supondremos en la serie de comparación (2)

$$H(\lambda) = \lambda^{\alpha} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Por otra parte, como suponemos que $\lim (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$ y $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, es evidente que será posible hallar un número positivo h tal que se cumpla siempre la desigualdad

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > h.$$

Es evidente que, mediante la intercalación de nuevos términos en la sucesión $\{\lambda_n\}$ es posible obtener una sucesión que, además de las propiedades que acabamos de señalar, verifique

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \leq 2h.$$

En adelante supondremos que la sucesión ha sido ya modificada de manera que cumpla esta última condición, y continuaremos representándola por $\{\lambda_n\}$. Esta modificación no disminuirá la generalidad de los resultados que obtendremos sobre las propiedades de la función $f(s)$, puesto que basta suponer nulos los c_n correspondientes a valores de n para los cuales λ_n son términos añadidos, para que la $f(s)$ quede inalterada.

2. Evidentemente son válidas las siguientes igualdades

$$\left. \begin{aligned} f(s) &= \sum_0^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{-N}^{\infty} c_{N+n} e^{-\lambda_{N+n} s} = \\ &= e^{-\lambda_N (s-s_0)} \sum_{-N}^{\infty} c_{N+n} e^{-\lambda_{N+n} s_0} e^{-(\lambda_{N+n} - \lambda_N) (s-s_0)} \\ &= e^{-\lambda_N (s-s_0)} \left[\sum_{-N}^{\infty} c_{N+n} e^{-\lambda_{N+n} s_0} - \right. \\ &\quad \left. - (s-s_0) \sum_{-N}^{\infty} (\lambda_{N+n} - \lambda_N) c_{N+n} e^{-\lambda_{N+n} s_0} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{-N}^{\infty} c_{N+n} e^{-\lambda_{N+n} s_0} \left(e^{-(\lambda_{N+n} - \lambda_N) (s-s_0)} - 1 + (\lambda_{N+n} - \lambda_N) (s-s_0) \right) \right] \\ &= e^{-\lambda_N (s-s_0)} [f(s_0) + (s-s_0)g(s_0) + (s-s_0)^2 \chi(s, s_0)] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

donde $N = N(\sigma_0)$ ($s_0 = \sigma_0 + it_0$),

$$g(s) = f'(s) + \lambda_N f(s) \quad (4)$$

y

$$|\chi(s, s_0)| < \sum_{-N}^{\infty} |c_{N+n}| e^{-\lambda_{N+n} \sigma_0} \frac{(\lambda_{N+n} - \lambda_N)^2}{2} e^{|\lambda_{N+n} - \lambda_N| |\sigma - \sigma_0|}$$

De esta desigualdad, aplicando el teorema A y suponiendo que σ_0 es un valor ordinario, resulta

$$|\chi(s, s_0)| < \mu(\sigma_0) \sum_{-N}^{\infty} \frac{(\lambda_{N+n} - \lambda_N)^2}{2} e^{\lambda_{N+n}^a \lambda_N^a - (\lambda_{N+n} - \lambda_N)(\sigma_0 - q) + |\lambda_{N+n} - \lambda_N| |\sigma - \sigma_0|} \quad (5)$$

En primer lugar vamos a acotar el valor de la parte del segundo miembro de esta última desigualdad correspondiente a la suma de los términos en los cuales $n \geq 0$. A fin de simplificar las fórmulas representaremos por d_n a la expresión

$$\frac{(\lambda_{N+n} - \lambda_N)^2}{2} e^{\lambda_{N+n}^a - \lambda_N^a - (\lambda_{N+n} - \lambda_N)(\sigma_0 - q) + |\lambda_{N+n} - \lambda_N||\sigma - \sigma_0|}$$

es decir, a los términos del segundo miembro de (5) divididos por $\mu(\sigma_0)$. Entonces, si N_1 representa el máximo entero menor que

$$BN^{1-\frac{\alpha}{2}},$$

donde B es un número que determinaremos posteriormente, tendremos, puesto que $\sigma_0 - q = \alpha \lambda_N^{\alpha-1}$,

$$\begin{aligned} \log \frac{d_{2N_1+i}}{d_{N_1+i}} &= 2 \log \frac{\lambda_{N+2N_1+i} - \lambda_N}{\lambda_{N+N_1+i} - \lambda_N} + |\sigma - \sigma_0|(\lambda_{N+2N_1+i} - \lambda_{N+N_1+i}) - \\ &- \alpha \lambda_N^{\alpha-1}(\lambda_{N+2N_1+i} - \lambda_{N+N_1+i}) + \lambda_{N+2N_1+i}^a - \lambda_{N+N_1+i}^a \end{aligned}$$

Ahora, si suponemos que $|\sigma - \sigma_0| > K \lambda_N^{\frac{\alpha}{2}-1}$, teniendo en cuenta las desigualdades $h < \lambda_{m+1} - \lambda_n \leq 2h$, resultará finalmente

$$\log \frac{d_{2N_1+i}}{d_{N_1+i}} < 2 \log 4 + K_1 B - \alpha (1 - \alpha) K_2 B^2 \beta$$

donde K_1 y K_2 son dos constantes que dependen de la sucesión $\{\lambda_n\}$ y $\beta \rightarrow 1$ cuando $N \rightarrow \infty$. Por lo tanto, eligiendo convenientemente B , resulta cuando N es suficientemente grande,

$$\log \frac{d_{2N_1+i}}{d_{N_1+i}} < -1.$$

Por consiguiente, mediante un razonamiento sumamente conocido, resulta

$$\sum_0^\infty d_n < \frac{e}{e-1} \sum_0^{2N_1} d_n.$$

Como quiera que para los términos del segundo miembro de (5) en los cuales $n < 0$, puede obtenerse un resultado igual, se seguirá, mediante fáciles deducciones que, si $|\sigma - \sigma_0| < K \lambda_N^{\frac{\alpha}{2}-1}$,

$$|\chi(s, s_0)| < K_3 \lambda_N^{3(1-\frac{\alpha}{2})} \mu(\sigma_0).$$

Por otra parte puesto que la serie (1) es absolutamente convergente en la totalidad del plano, poniendo

$$M(\sigma, f) = \max_{-\infty < t < +\infty} |f(\sigma + it)|,$$

se sigue

$$\mu(\sigma) \leq M(\sigma, f),$$

y por lo tanto, suponiendo como siempre que $|\sigma - \sigma_0| < K \lambda_N^{\frac{\alpha}{2}-1}$,

$$|\chi(s, s_0)| < K_3 [\lambda(\sigma_0)]^{3(1-\frac{\alpha}{2})} M(\sigma_0, f). \quad (6)$$

donde, según dijimos, $\lambda(\sigma_0) = \lambda_N = \lambda_{N(\sigma_0)}$.

Finalmente, de (3) y (6) se deduce

$$|g(s_0)| < K_4 M(\sigma_0, f) [\lambda(\sigma_0)]^{\frac{3}{2}(1-\frac{\alpha}{2})}.$$

3. Según hemos dicho en la introducción, de estos resultados se sigue que casi todos los teoremas de la teoría de Wiman-Valiron pueden trasladarse a esta clase de series de Dirichlet. En particular podríamos enunciar y demostrar toda una serie de resultados sobre el comportamiento de $f(s)$ en las proximidades de los puntos en que toma valores cuyo módulo es comparable a $M(\sigma, f)$. Pero como su enunciado requeriría mucho espacio y la definición de nuevas notaciones, nos limitaremos a enunciar tres resultados de otra clase pero que nos parecen suficientemente representativas e interesantes

TEOREMA 1. — Considerando únicamente valores ordinarios de σ se cumple

$$\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{A(\sigma, f)}{M(\sigma, f)} = 1$$

donde $A(\sigma, f)$ es el máximo de la parte real de $f(\sigma + it)$ cuando t varía de $-\infty$ a $+\infty$.

TEOREMA 2. — Considerando únicamente valores ordinarios de σ se cumple

$$\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{M(\sigma, f)}{\lambda(\sigma) M(\sigma, f)} = 1.$$

TEOREMA 3. — Dado un número ε positivo arbitrariamente pequeño, las desigualdades

$$\begin{aligned} M(\sigma, f) &< [\lambda(\sigma)]^{1/2+\varepsilon} \mu(\sigma) \\ M(\sigma, f) &< [\log \mu(\sigma)]^{1/2+\varepsilon} \mu(\sigma) \end{aligned}$$

son satisfechas para todos los valores de σ suficientemente "próximos" a $-\infty$, excepto en un conjunto en el cual la variación total de σ es acotada.

VARIEDAD DE RIEMANN TRIANGULABLE DE UN ESPACIO PROYECTIVO

p o r

PEDRO ABELIANAS

1. HIPÓTESIS Y NOTACIONES

- a) k_0 es un cuerpo real cerrado.
- b) k es el cierre algebraico de k_0 . Por consiguiente: $k = k_0(i)$, siendo $i^2 + 1 = 0$ [2]*.
- c) $x_1, \dots, x_n$ son indeterminadas independientes sobre k .
- d) $A_0 = k[x_1, \dots, x_n]$, $A_i = k\left[\frac{1}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right]$, $i = 1, \dots, n$.
- e) $K = k(x_1, \dots, x_n)$.
- f) Representaremos por X_i , $i = 0, \dots, n$, al espectro de A_i [1]. En particular, representaremos por X_i^0 al espectro de A_i formado únicamente por los ideales primos de dimensión cero. A los elementos de X_i los representaremos por letras negras: $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \dots$, con el subíndice i .
- g) Al anillo local de $\mathbf{x}_i$ respecto de A_i lo representaremos por $A_{i, \mathbf{x}_i}$ y a su ideal máximo por $M_i(\mathbf{x}_i)$.
- h) Si $f \in A_i$, a la clase de restos $f + \mathbf{x}_i$ la representaremos por $f(\mathbf{x}_i)$.

2. VARIEDAD DE RIEMANN DE UN ESPACIO PROYECTIVO N-DIMENSIONAL SOBRE K

DEFINICIÓN 1. Llamaremos espacio X , obtenido por recolección de los espacios X_i , al conjunto de todos los elementos, que representaremos por $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$, obtenidos a partir de los puntos de los espacios X_i , $i = 0, \dots, n$, mediante la siguiente definición de igualdad:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j \Leftrightarrow A_{i, \mathbf{x}_i} = A_{j, \mathbf{x}_j} \quad (1)$$

En particular representamos por X^0 al espacio obtenido por recolección de los espacios X_i^0 , $i = 0, \dots, n$, mediante la definición (1).

DEFINICIÓN 2. Si $\mathbf{x}$ está formado por los puntos $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \dots)$ siendo $\mathbf{x}_i \in X_i, \dots$, diremos que $\mathbf{x}_i$ es la *proyección* de $\mathbf{x}$ sobre X_i y escribiremos:

$$\mathbf{x}_i = \text{proy}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x})$$

* Los números entre corchetes se refieren a la literatura citada al final del artículo.

El conjunto formado por las funciones $S_i = \left(\frac{1}{x_i}; \frac{x_1}{x_i}; \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$ forma un sistema de coordenadas de uniformización para X_i . Si existe $x_i = \text{proy}_{X_i}(\mathbf{x})$ llamaremos coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de S_i a los números de k :

$$\left(\frac{1}{x_i}(\mathbf{x}), \frac{x_1}{x_i}(\mathbf{x}), \dots, \frac{x_n}{x_i}(\mathbf{x}) \right)$$

Sea $\mathbf{x}$ un punto de X^0 y sean

$$\frac{x_j}{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{x_j}{x_i}(\mathbf{x}_i) = a_{ji} = a_{ji}' + ia_{ji}''; \frac{1}{x_i}(\mathbf{x}) = a_{0i} = a_{0i}' + ia_{0i}''; \\ a_{ji}, a_{0i} \in k; a_{ji}', a_{ji}'', a_{0i}', a_{0i}'' \in k_0; i, j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de S_i .

La aplicación

$$\omega_i: \quad \mathbf{x} \rightarrow (a_{0i}', a_{0i}'', a_{1i}', a_{1i}'', \dots, a_{ni}', a_{ni}'')$$

establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de X^0 que poseen proyección sobre X_i^0 y los puntos del espacio afin $2n$ -dimensional, R_i , sobre k_0 .

Se puede obtener una recolección de los espacios R_i mediante la siguiente definición: dos puntos:

$$A_i = (a_{0i}', a_{0i}'', a_{1i}', a_{1i}'', \dots, a_{ni}', a_{ni}'') \\ A_j = (b_{0j}', b_{0j}'', b_{1j}', b_{1j}'', \dots, b_{nj}', b_{nj}'')$$

de R_i y R_j , respectivamente, se consideran como iguales cuando existe un punto $\mathbf{x}$ de X^0 tal que

$$\omega_i(\mathbf{x}) = A_i, \quad \omega_j(\mathbf{x}) = A_j \quad (3)$$

El espacio R obtenido por recolección de los espacios R_i , $i = 0, \dots, n$, mediante la definición (3) se llama variedad de Riemann del espacio proyectivo n -dimensional sobre k , respecto del subcuerpo real cerrado k_0 . Si A es un punto de R formado por recolección de los puntos $A_i = A_j = \dots$, de $R_i, R_j \dots$, diremos que A_i es la proyección de A sobre R_i , y escribiremos:

$$A_i = \text{proy}_{R_i} A.$$

De las definiciones (1) y (3) resulta el siguiente:

LEMA 1. *La correspondencia:*

$$\omega: \quad \mathbf{x} \rightarrow A \quad (4)$$

entre X^0 y R definida por

$$\omega_i(\text{proy}_{X_i} \mathbf{x}) = \text{proy}_{R_i} A, \quad (5)$$

(siendo X_i un espacio cualquiera, de los $i = 0, \dots, n$, sobre el que existe la proyección de x) es una correspondencia biunívoca.

De la definición (1) se deduce que a cada $x \in X$ le corresponde un anillo local de K , que representaremos por A_x . Al ideal máximo de A_x lo representaremos por M_x .

LEMA 2. Si $x, y \in X^0$, una condición suficiente para que ambos puntos posean proyección sobre un mismo X_i^0 es que exista una indeterminada x_i , tal que $x_i \in A_x$, y :

$$x_i \neq 0 (M_x), \quad x_i \neq 0 (M_y)$$

3. TRIANGULACIÓN DE LA VARIEDAD DE RIEMANN

DEFINICIÓN 3. Si x e y son dos puntos de X^0 tales que existan las proyecciones de ambos sobre X_i^0 y no existan las proyecciones de ambos sobre X_j^0 , para $j < i$; $i, j = 0, 1, \dots, n$, se llama *simplex unidimensional* de vértices A y B , siendo $A = \omega(x)$ y $B = \omega(y)$, y se representa por $[A, B]$, al conjunto de todos los puntos C , de R tales que:

$$\text{proy}_{Ri} C = \lambda \text{proy}_{Ri} A + \mu \text{proy}_{Ri} B, \quad \lambda + \mu = 1; \quad \lambda, \mu \in k_0; \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (6)$$

Si no existe ningún espacio X_i^0 sobre el que posean proyecciones x e y , no existe ningún simplex de vértices A y B .

LEMA 3. Si x e y poseen proyecciones sobre X_i^0 todos los puntos del simplex $[x, y]$ poseen también proyección sobre X_i^0 , salvo en el caso en que: $1 < b_i'/a_i' = b_i''/a_i'' < 0$.

DEMOSTRACIÓN. — Si i es el menor de los números $0, \dots, n$ tal que x e y posean proyección sobre X_i^0 el lema es consecuencia inmediata de la definición anterior. Supongamos, por tanto, que no sea éste el caso y que exista un X_l^0 , $l < i$, sobre el que tengan proyección x e y . Siempre podemos suponer que $l = 0$, pues, en otro caso bastaría efectuar un cambio de variables evidente. Sea, por tanto,

$$x_j(x) = a_j = a_j' + ia_j'', \quad x_j(y) = b_j = b_j' + ib_j'', \quad j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

de donde,

$$\text{proy}_{R0} A = (a_1', a_1'', a_2', a_2'', \dots, a_n', a_n''); \quad a_i', a_i'' \in k_0, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\text{proy}_{R0} B = (b_1', b_1'', b_2', b_2'', \dots, b_n', b_n''); \quad b_i', b_i'' \in k_0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sea C un punto arbitrario de $[A, B]$ y

$$\text{proy}_{R0} C = (c_1', c_1'', c_2', c_2'', \dots, c_n', c_n'')$$

En virtud de la definición 3 será:

$$c_j' = \lambda a_j' + \mu b_j'; \quad c_j'' = \lambda a_j'' + \mu b_j''; \quad \lambda + \mu = 1, \quad \lambda, \mu \in k_0; \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (8)$$

Sean:

$$\frac{1}{x_i}(x) = a_0^* = a_0^{*'} + ia_0^{*''}, \quad \frac{1}{x_i}(y) = b_0^* = b_0^{*'} + ib_0^{*''}; \quad a_0^{*'}, a_0^{*''}, b_0^{*'}, b_0^{*''} \in k_0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\frac{x_j}{x_i}(x) &= a_j^* = a_j^{*'} + i a_j^{*''}; \quad \frac{x_j}{x_i}(y) = b_j^* \\ &= b_j^{*'} + i b_j^{*''}; \quad a_j^{*'}, a_j^{*''}, b_j^{*'}, b_j^{*''} \in k_0\end{aligned}\quad (10)$$

Por consiguiente será:

$$\begin{aligned}\text{proy}_{R_i} A &= (a_0^{*'}, a_0^{*''}, a_1^{*'}, a_1^{*''}, \dots, a_n^{*'}, a_n^{*''}) \\ \text{proy}_{R_i} B &= (b_0^{*'}, b_0^{*''}, b_1^{*'}, b_1^{*''}, \dots, b_n^{*'}, b_n^{*''})\end{aligned}$$

Vamos a calcular las coordenadas de la proyección de C sobre R_i . Para ello sea $z = \omega^{-1}(C)$, $z \in X^0$. Esto significa que:

$$x_j(z) = c_j' + i c_j'', \quad (11)$$

en donde las c_j' , c_j'' vienen dadas por las (8). Sean:

$$\frac{1}{x_i}(z) = c_0^* = c_0^{*'} + i c_0^{*''}, \quad \frac{x_j}{x_i}(z) = c_j^* = c_j^{*'} + i c_j^{*''} \quad (11')$$

Entonces será:

$$\text{proy}_{R_i} C = (c_0^{*'}, c_0^{*''}, c_1^{*'}, c_1^{*''}, \dots, c_n^{*'}, c_n^{*''}). \quad (12)$$

Todo se reduce a probar que, para todo $C \in [A, B]$, todas las coordenadas de (12) son números de k_0 . Ahora bien, de (11) se deduce:

$$\frac{1}{x_i}(z) = \frac{1}{x_i(z)} = \frac{1}{c_i' + i c_i''} = \frac{c_i'}{c_i'^2 + c_i''^2} - \frac{c_i''}{c_i'^2 + c_i''^2} i$$

de donde:

$$c_0^{*'} = \frac{c_i'}{\|c_i\|}, \quad c_0^{*''} = -\frac{c_i''}{\|c_i\|}. \quad (12')$$

De (12') resulta: $\|c_0^*\| = \frac{1}{\|c_i\|}$ y, análogamente, $\|a_0^*\| = \frac{1}{\|a_i\|}$, $\|b_0^*\| = \frac{1}{\|b_i\|}$.

De (9) y de estas últimas relaciones y de (8) se obtiene:

$$\|c_0^*\| = \|a_0^*\| \cdot \|b_0^*\| : [\lambda^2 \|b_0^*\| + \mu^2 \|a_0^*\| + 2 \lambda \mu (a_0^{*'} b_0^{*'} + a_0^{*''} b_0^{*''})],$$

con lo que (12') se puede escribir del siguiente modo:

$$c_0^{*'} = \frac{\lambda a_0^{*'} \|b_0^*\| + \mu b_0^{*'} \|a_0^*\|}{\lambda^2 \|b_0^*\| + \mu^2 \|a_0^*\| + 2 \lambda \mu (a_0^{*'} b_0^{*'} + a_0^{*''} b_0^{*''})} \quad (13)$$

$$c_0^{*''} = \frac{\lambda a_0^{*''} \|b_0^*\| + \mu b_0^{*''} \|a_0^*\|}{\lambda^2 \|b_0^*\| + \mu^2 \|a_0^*\| + 2 \lambda \mu (a_0^{*'} b_0^{*'} + a_0^{*''} b_0^{*''})} \quad (13')$$

Por otra parte de (10) y (7) se obtienen:

$$a_j' = \frac{a_j^{*'} a_0^{*'} + a_0^{*''} a_j^{*''}}{\|a_0^*\|}; \quad a_j'' = \frac{a_0^{*'} a_j^{*''} - a_0^{*''} a_j^{*'}}{\|a_0^*\|}; \quad (14)$$

$$y \quad b_j' = \frac{b_j^{*'} b_0^{*'} + b_0^{*''} b_j^{*''}}{\|b_0^{*'}\|}; \quad b_j'' = \frac{b_0^{*'} b_j^{*''} - b_0^{*''} b_j^{*'}}{\|b_0^{*'}\|}; \quad (15)$$

y teniendo en cuenta (11) y (11') resulta:

$$\begin{aligned} c_j^{*'} &= d [\lambda^2 a_j^{*'} \|b_0^{*'}\| + \lambda \mu [(a_0^{*''} b_0^{*'} - a_0^{*'} b_0^{*''}) (a_j^{*''} - b_j^{*''}) \\ &\quad + (a_0^{*'} b_0^{*'} + a_0^{*''} b_0^{*''}) (a_j^{*'} + b_j^{*'})] + \mu^2 b_j^{*'} \|a_0^{*'}\|] \\ c_j^{*''} &= d [\lambda^2 a_j^{*''} \|b_0^{*'}\| + \lambda \mu [(a_0^{*'} b_0^{*''} - a_0^{*''} b_0^{*'}) (a_j^{*'} - b_j^{*'}) \\ &\quad + (a_0^{*'} b_0^{*'} + a_0^{*''} b_0^{*''}) (a_j^{*''} + b_j^{*''})] + \mu^2 b_j^{*''} \|a_0^{*'}\|] \end{aligned} \quad (16)$$

siendo

$$d = 1 : [\lambda^2 \|b_0^{*'}\| + \mu^2 \|a_0^{*'}\| + 2 \lambda \mu (a_0^{*'} b_0^{*'} + a_0^{*''} b_0^{*''})]. \quad (17)$$

Por poseer A y B proyecciones sobre R_0 no puede ser $\|a_0^{*'}\| = 0$, ni $\|b_0^{*'}\| = 0$, por consiguiente (17) prueba que para todo (λ, μ) tal que $(\lambda + \mu = 1)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, el denominador de d es distinto de cero. luego (16) representan números de k_0 , con la salvedad indicada en el enunciado del Lema.

DEFINICIÓN 4 Los puntos $A_1, \dots, A_n$ de R se llaman *vértices linealmente independientes*, cuando verifican las dos condiciones siguientes:

1.º Existe un i tal que todos ellos poseen proyección sobre R_i . 2.º Las proyecciones de $A_1, \dots, A_n$ sobre R_i son linealmente independientes en R_i , siendo i el menor índice tal que todos los puntos $A_1, \dots, A_n$ posean proyección sobre R_i .

DEFINICIÓN 5. Si $A_0, \dots, A_n$ son vértices linealmente independientes, se llama *simplex n-dimensional de vértices* $A_0, \dots, A_n$, y se representa por $s_n = [A_0, \dots, A_n]$, al conjunto de todos los puntos P de X^0 tales que $P \in [A_i, Q]$ siendo Q un punto que recorre el simplex $s_{n-1} = [A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_n]$.

De las definiciones 4 y 5 inmediato el siguiente corolario del Lema 3:

COROLARIO 1. Si $A_0, \dots, A_n$ poseen proyección sobre R_i , todos los puntos P del simplex $[A_0, \dots, A_n]$ poseen también proyección sobre R_i .

COROLARIO 2. Si $P \in [A_0, \dots, A_m]$ y j es el menor índice para el que $A_0, \dots, A_m$ poseen proyección sobre R_j , se verifica que

$$\text{Proy}_{R_j} P = \lambda_0 \text{Proy}_{R_j} A_0 + \dots + \lambda_m \text{Proy}_{R_j} A_m, \quad \lambda_0 + \dots + \lambda_m = 1, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1.$$

4. DESCOMPOSICIÓN SIMPLICIAL DE LA VARIEDAD DE RIEMANN R .

Sean: a_i y a_i' , $i = 1, \dots, 2n$, dos puntos de R tales que $\text{Proy}_{R_0} a_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ y $\text{Proy}_{R_0} a_i' = (0, \dots, -1, \dots, 0)$, en donde las coordenadas son todas nulas excepto la i -ésima, que es 1 en el primer caso y -1 en el segundo.

Consideremos los $N = 2^{2n}$ simplices $(2n - 1)$ -dimensionales:

$$s_1 = (a_1, \dots, a_{2n}), \dots, s_N = (a_1', \dots, a_{2n}').$$

La unión de los símplexes $2n$ -dimensionales:

$$S_i = (0, s_i); \quad i = 1, 2, \dots, N$$

siendo $\text{Proy}_{R_0} 0 = (0, \dots, 0)$, es un entorno del punto 0 de R .

Sea c un punto genérico de s_1 :

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{R_0} c &= (c_1, c'_1, \dots, c_n, c'_n); \quad c_1 + c'_1 + \dots + c_n + c'_n = 1, \\ 0 &\leq c_i \leq 1, \quad 0 \leq c'_i \leq 1. \end{aligned}$$

Sea x un punto de R tal que

$$\text{Proy}_{R_0} x = (\lambda c_1, \lambda c'_1, \dots, \lambda c_n, \lambda c'_n), \quad 1 \leq \lambda < \infty, \quad \lambda \in k_0$$

Se verifica que

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{R_0} x &= \left(\frac{c_i}{\lambda(c_i^2 + c_i'^2)}, -\frac{c'_i}{\lambda(c_i^2 + c_i'^2)}, \frac{c_1 c_i + c'_1 c'_i}{c_i^2 + c_i'^2}, \frac{-c_1 c'_i + c'_1 c_i}{c_i^2 + c_i'^2}, \dots \right) \\ &= \left(\lambda^* \frac{c_i}{c_i^2 + c_i'^2}, -\lambda^* \frac{c'_i}{c_i^2 + c_i'^2}, \frac{c_1 c_i + c'_1 c'_i}{c_i^2 + c_i'^2}, \frac{-c_1 c'_i + c'_1 c_i}{c_i^2 + c_i'^2}, \dots \right) \\ &\quad 0 < \lambda^* \leq 1 \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 6. Llamaremos *simplex 2 n-dimensional de segunda especie*, T , al conjunto de todos los puntos p de R tales que

$$\text{Proy}_{R_0} p = \left(\lambda^* \frac{c_i}{c_i^2 + c_i'^2}, -\lambda^* \frac{c'_i}{c_i^2 + c_i'^2}, \frac{c_1 c_i + c'_1 c'_i}{c_i^2 + c_i'^2}, \frac{-c_1 c'_i + c'_1 c_i}{c_i^2 + c_i'^2}, \dots \right) \quad (18)$$

$$i=1, \dots, n, \quad 0 \leq \lambda^* \leq 1, \quad c_i^2 + c_i'^2 \neq 0, \quad \text{Proy}_{R_0} c = (c_1, c'_1, \dots) \in s,$$

siendo s un simplex $(2n-1)$ -dimensional de R_0 . En particular, si tomamos como simplex s el simplex s_i anterior, al simplex definido por (18) lo representaremos por T_i .

TEOREMA. El conjunto formado por los símplexes $S_1, \dots, S_N$, juntamente con los símplexes de segunda especie $T_1, \dots, T_N$, es una descomposición simplicial de R .

DEMOSTRACIÓN. Sea q un punto arbitrario de R . Pueden ocurrir dos cosas:

1.º Sea $\text{Proy}_{R_0} q = (q, q'_1, \dots, q_n, q'_n)$.

2.º No existe $\text{Proy}_{R_0} q$.

1.º Sea $\lambda = |q_1| + |q'_1| + \dots + |q_n|$. Si $\lambda < 1$ el punto q pertenece a uno de los símplexes S_i , $i = 1, \dots, N$, y sólo a uno si no pertenece a una de sus caras. Si $\lambda > 1$, q pertenece a un simplex T_i , y sólo a uno si no pertenece a una de sus caras. Finalmente, si $\lambda = 1$, q pertenece a la cara común a un simplex S_i y un simplex T_i .

2.º Supongamos que exista $\text{Proy}_{R_0} q = (0, 0, q_2, q'_2, \dots, q_n, q'_n)$. Las dos primeras coordenadas deben ser nulas, puesto que no existe $\text{Proy}_{R_0} q$.

Vamos a determinar un punto c de R tal que

$$\text{Proy}_{R_0} c = (c_1, c_1', c_2, c_2', \dots, c_n, c_n')$$

y que se verifique:

$$\frac{c_1 c_i + c_1' c_i'}{c_i^2 + c_i'^2} = q_2, \quad \frac{-c_1 c_i' + c_1' c_i}{c_i^2 + c_i'^2} = q_2', \dots \quad (19)$$

El sistema (19) es equivalente al siguiente:

$$c_1 = q_2 c_i - q_2' c_i', \quad c_1' = c_i q_2' + c_i' q_2, \dots \quad (20)$$

Poniendo

$$\begin{aligned} \overline{q} &= (q_2, q_2' q_3, q_3', \dots, 1, 0, \dots, q_n, q_n') \\ \overline{q}' &= (-q_2', q_2, -q_3', q_3, \dots, 0, 1, \dots, -q_n', q_n) \\ \overline{c} &= (c_1, c_1', \dots, c_i, c_i', \dots, c_n, c_n') \end{aligned}$$

el sistema (20) se puede escribir en la siguiente forma:

$$\overline{c} = c_i \overline{q} + c_i' \overline{q}' + (1 - c_i - c_i') \overline{0},$$

siendo $\overline{0} = (0, \dots, 0)$, lo que prueba que c pertenece al plano bidimensional de R_0 determinado por los puntos $\overline{q}$, $\overline{q}'$, y $\overline{0}$. Si este plano corta a las caras $S_{\alpha_1}, \dots, S_{\alpha_r}$, de los símplexes $T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_r}$ el punto q pertenecerá a los bordes de todos estos símplexes $T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_r}$ c. q. d.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Grothendieck. Le langage des schémas. Publications Mathématiques núm. 4. Institut des Hautes Études Scientifiques. París.
- [2] B. L. van der Waerden. Moderne Algebra. I. Springer Verlag.

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LAS VALORACIONES NO TRIVIALES SUBORDINADAS DE UNA VALORACION DADA

p o r

J. SANCHO SAN ROMÁN

1. — En un trabajo anterior*, hemos considerado la cuestión siguiente:

Sea Σ un cuerpo conmutativo, $\square$ un anillo para el cual es Σ cuerpo de fracciones, y p un ideal primo de $\square$. Entonces, una valoración v dada de Σ , define otra valoración v' del cuerpo Σ' de fracciones del anillo cociente $\square/p$, usando este criterio: el anillo $R_{v'}$ de valoración de Σ' , es el conjunto de elementos $(\alpha + p \square_p)$ de Σ' con $\alpha \in R_v$ anillo de valoración de v . Llamamos a v' , valoración subordinada de v .

Como principales resultados que utilizaremos ahora, se obtuvieron los siguientes:

A) Si v' no es trivial, el ideal $m = p \square_p$ está contenido en el ideal P_v máximo de R_v (Teor. 2 de *).

B) La condición anterior $m \subset P_v$, se cumple si y sólo si el ideal p yace en un ideal primo de R_v (Teor. 5).

C) Aunque se cumpla $m \subset P_v$, la valoración v' es trivial si y sólo si el anillo local $\square_p \subset R_v$ (Teor. 6).

D) Si se cumple $m \subset P_v$, existe un subgrupo aislado S del grupo de valores, que contiene los valores de las unidades de $\square_p$, y cualquier elemento de S es menor que cualquier valor de las no unidades de $\square_p$.

2. — Pues bien, comenzamos ahora considerando una cuestión recíproca del resultado B), consistente en buscar las condiciones que ha de cumplir el anillo $\square$, para que dado un ideal primo P_i de R_v , la intersección $\square \cap P_i$ sea un ideal de $\square$. A lo cual contesta el teorema siguiente:

Teorema 1.: Para que la intersección $\square \cap P_i$ sea un ideal de $\square$, es condición necesaria y suficiente que los valores de los elementos de $\square$ estén contenidos en $(\Gamma_i + \Omega_i)$, donde Ω_i y Γ_i son respectivamente, la superclase de valores de los elementos de P_i y el subgrupo aislado correspondiente.

En efecto, es necesaria, pues si $\square \cap P_i = p_i$ es ideal de $\square$, es primo evidentemente; entonces, por el resultado B) anterior, se deduce: $p_i \square_{v_i} \subset P_v$, y por el D) se tiene que: $\square_{v_i} \subset \Gamma_i + \Omega_i$, luego a fortiori: $\square \subset \Gamma_i + \Omega_i$.

* J. Sancho San Román: *Sobre valoraciones subordinadas de una valoración de un cuerpo, en las especializaciones de éste*. Rev. Mat. Hispano-Americana, 4.^a ser., XVIII, núms. 5-6, 1958.

Para ver que es suficiente, sea $q \in \square \cap P_i$ y $a \in \square$. Como $v(a) \in \Gamma_i + \Omega_i$, el valor $v(aq) = v(a) + v(q)$ puede presentar dos casos: 1) $v(a) \geq 0$, y entonces $v(aq) \geq v(q)$ luego $v(aq) \in \Omega_i$; 2) $v(a) < 0$, luego $\pm v(a) \in \Gamma_i$ y $-v(a) > 0$, de donde: $v(q) - [-v(a)] \in \Omega_i$. En ambos casos se concluye: $aq \in P_i$, luego: $aq \in \square \cap P_i$ c. q. d.

La condición precedente se cumplirá para todos los ideales primos P_i de R_v , si y sólo si: $\square \subset R_v$, pues para $P_i = P_v$ es $\Gamma_i + \Omega_i = (0) + (> 0)$.

Por esta razón, supondremos en lo sucesivo que se cumple: $\square \subset R_v$.

Esta hipótesis es corriente cuando Σ representa el cuerpo de una variedad algebraica afín.

3. Sea v valoración de rango finito k , e indiquemos con p_i los ideales primos de $\square$ que yacen en los P_i de R_v , y con Σ_i los cuerpos de fracciones $F(\square/p_i)$.

La situación queda manifestada en el cuadro siguiente:

$$\begin{aligned}(0) &= \Gamma_k \subset \Gamma_{k-1} \subset \dots \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_0 \\ P_v &= P_k \supset P_{k-1} \supset \dots \supset P_1 \supset (0) \\ p_v &= p_k \supset p_{k-1} \supset \dots \supset p_1 \supset (0)\end{aligned}$$

Teorema 2: Las valoraciones subordinadas de v en los cuerpos Σ_i no son triviales, excepto si $\Sigma_i = \Sigma_k$.

En efecto, si $p_v = p_k \supset p_i$ en sentido estricto, entonces $\square - p_i \not\subset R_v - P_v$, luego: $\square_{p_i} \not\subset R_v$ y en virtud del resultado C) anterior, se sigue que v_i' es no trivial. Por el contrario, si $p_i = p_v$, $\square_{p_i} \subset R_v$ y v_i' es trivial.

La intersección geométrica de este teorema es clara. Cuando $\square$ es el anillo de una variedad algebraica afín D_0 , cada p_i define una subvariedad D_i , de modo que se tiene una cadena de subvariedades: $D_k \subset D_{k-1} \subset \dots \subset D_1$, y las valoraciones subordinadas de v en los cuerpos de éstas, son no triviales excepto si D_i es el centro de v sobre D_0 .

4. — Demostremos ahora la siguiente proposición:

Teorema 3: La valoración v_i' de Σ_i , subordina en cualquier Σ_j inferior ($j > i$) una v_j'' que es la misma v_j' subordinada de v .

En vez de realizar una comprobación directa de este aserto, vamos a probarlo estableciendo previamente las relaciones que ligán a v_i' con las conocidas valoraciones asociadas a v y P_i . Escribiendo R en vez de R_v , éstas son: la valoración de Σ de anillo R_{P_i} , y la valoración w_i' de Σ_i' (cuerpo de residuos de R_{P_i}) de anillo R/P_i ; la v se dice compuesta de ambas.

Pues bien, Σ_i se puede considerar subcuerpo de Σ_i' . En efecto, $\Sigma_i' = R_{P_i}/P_i R_{P_i}$ y $\Sigma_i = \square_{p_i}/p_i \square_{p_i}$; pero $\square_{p_i} \subset R_{P_i}$ y $p_i \square_{p_i} = \square_{p_i} \cap P_i R_{P_i}$ (ya que: $P_i R_{P_i} \cap \square = P_i R_{P_i} \cap R \cap \square = P_i \cap \square = p_i$), luego: $\Sigma_i \simeq \square_{p_i}/P_i R_{P_i} \subset \Sigma_i'$. Ahora, es evidente que v_i' es la valoración inducida por w_i' en Σ_i , ya que el anillo de v_i' es:

$$R \cap \square_{p_i}/p_i \square_{p_i} = R \cap \square_{p_i}/P_i R_{P_i} = R \cap \square_{p_i}/P_i.$$

Por las mismas razones, la valoración v_j'' de Σ_j subordinada de v_i' , viene inducida por la valoración w_j'' del cuerpo de residuos de $(R/P_i)_{P_j/P_i}$ cuyo anillo sea $R/P_i/P_j/P_i$. Pero dicho cuerpo es isomorfo al de residuos de R_{P_j} (ya que es $(R/P_i)_{P_j/P_i} \simeq R_{P_j}/P_i R_{P_j}$) y dicho anillo lo es a R/P_j . Es decir, w_j'' es isomorfa a w_j' , luego v_j'' es la misma v_j' subordinada de v , c. q. d.

Notemos en fin, que v_i' tendrá por grupo de valores un subgrupo, propio o no, de Γ_i .

Desde un punto de vista geométrico, D_j es el centro de la valoración de Σ , de anillo R_{P_j} , sobre la variedad D_0 , y el teorema anterior indica que D_j es también el centro de la valoración de Σ_i , de anillo $(R/P_i)_{P_j/P_i}$.

Como en este caso, el grupo de valores Γ_0 es suma directa de k grupos discretos, se tiene una situación particular cuyo estudio detallado es una de las cuestiones pendientes sobre este asunto.

UNA FUNCION NUMERICA EN LOS RETICULOS FINITOS QUE SE ANULA PARA LOS RETICULOS REDUCIBLES

p o r

BARTOLOMÉ FRONTERA MARQUÉS

INTRODUCCION:

Suponemos conocidos los fundamentos de la teoría de semiordenaciones y de la teoría de retículos. Haremos por lo tanto uso de expresiones del tipo $a \in M$ (a pertenece a M), $a \subseteq b$ (a anterior o igual a b , a inferior o igual a b , o a contenido en b), $a \cap b$ (a intersección b), $a \cup b$ (a reunión b), $\bigcap_{i \in I} a_i$, $\bigcup_{i \in I} a_i$, etc., que se interpretarán de la manera usual. Designaremos distintamente un retículo por $(R, \cap, \cup)$ o simplemente por R según que nos interese o no destacar las operaciones $\cap$, $\cup$. En un retículo que posea elemento mínimo o elemento máximo, llamaremos a tales elementos respectivamente *elemento cero* y *elemento unidad*, representándolos por 0 y por 1. Las siguientes definiciones servirán para dejar establecida la significación que se ha de dar a los demás términos empleados en este trabajo. Expondremos además algunas propiedades elementales que interesa tener presentes y cuya demostración puede encontrarse en cualquier tratado sobre la materia ⁽¹⁾ [1], [2], [3].

Diremos que un subconjunto C de elementos de un retículo R constituye una *cadena*, cuando para todo a y b pertenecientes a C , es $a \subseteq b$ o $b \subseteq a$. Una cadena que tenga un elemento mínimo a y un elemento máximo b se dice que es *maximal*, cuando no existe ninguna cadena de a a b que contenga todos los elementos de C y además otros. Una cadena se dice que es *finita* cuando contiene un número finito de elementos. Recibe el nombre de *longitud* de una cadena el número de sus elementos disminuido en una unidad. Un retículo R se dice que es de *longitud finita* cuando para todo par de elementos $a, b \in R$ con $a \subseteq b$, todas las cadenas que unen a con b son finitas y están acotadas por un cierto número N . El retículo formado por los números naturales con la relación de orden definida por:

$$a \subseteq b \Leftrightarrow a \text{ es divisor de } b$$

(1) Los números encerrados entre paréntesis angulares remiten a la reseña bibliográfica.

es un retículo de longitud finita aunque existen en él cadenas infinitas. Por el contrario, el retículo representado en la fig. 1 no es de longitud finita, a pesar de que todas sus cadenas son finitas. Las longitudes de las cadenas maximales que unen 0 con 1 forman, en este ejemplo, una sucesión no acotada. El retículo de los números naturales carece de elemento unidad. Si se adjunta a este retículo el número 0 considerado como múltiplo de todos los números, se obtiene un retículo con elemento unidad que deja de ser de longitud finita.

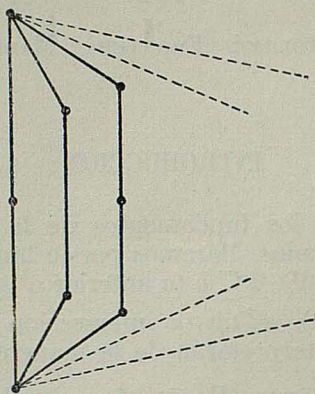


FIG. 1

Dos elementos distintos a, b de un retículo que están en la relación $a \subset b$ y para los que no existe ningún elemento x tal que sea $a \subset x \subset b$, se dice que son contiguos. Se dice también que a es *contiguo inferior* de b y que b es *contiguo superior* de a . En particular en un retículo con elemento 0, los elementos contiguos de 0 reciben el nombre de *átomos* y en un retículo con elemento 1, los contiguos de este elemento reciben el nombre de *antiátomos*.

Un subconjunto M de elementos de un retículo R con la propiedad de que para todo par de elementos $x, y \in M$ es $x \cap y \in M$, $x \cup y \in M$, se dice que es un *subretículo* de R . Si a y b son dos elementos de R que están en la relación $a \subseteq b$, es fácil ver que el conjunto de los x tales que $a \subseteq x \subseteq b$ constituye un subretículo el cual recibe el nombre de intervalo a/b .

En un retículo de longitud finita con elemento 0 se da el nombre de *dimensión* $d(x)$ de un elemento x , al máximo de las longitudes de las cadenas que unen 0 con x . Si un retículo R de longitud finita posee elemento unidad, se dice que $d(1)$ es la *dimensión* de R .

Un retículo R se dice que es *modular*, cuando para todo $a, b, c \in R$ se verifica:

$$\text{Si es } a \subseteq c, \text{ entonces es } a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c.$$

Los retículos modulares de longitud finita gozan de la propiedad de que todas las cadenas maximales que unen dos elementos a, b ($a \subseteq b$) tienen la misma longitud. Si un retículo modular de longitud finita posee

elemento 0, se podrá definir entonces la dimensión $d(x)$ de un elemento x como la longitud de una cadena maximal (y por lo tanto de todas las cadenas maximales) que unen 0 con x .

Un retículo R se dice que es *complementario* cuando contiene elemento 0 y elemento unidad y además para todo elemento $a \in R$, existe por lo menos un elemento $b \in R$ tal que $a \cap b = 0$, $a \cup b = 1$.

Dados dos retículos $(R_1, \cap_1, \cup_1)$, $(R_2, \cap_2, \cup_2)$, el conjunto formado por todos los pares (n_1, n_2) , siendo $n_1 \in R_1$, $n_2 \in R_2$, junto con las operaciones $\cap$, $\cup$ definidas por:

$$\begin{aligned}(m_1, m_2) \cap (n_1, n_2) &= (m_1 \cap_1 n_1, m_2 \cap_2 n_2) \\ (m_1, m_2) \cup (n_1, n_2) &= (m_1 \cup_1 n_1, m_2 \cup_2 n_2),\end{aligned}$$

constituye un retículo que recibe el nombre de producto directo de R_1 y R_2 y se designa por $R_1 \times R_2$.

Un retículo R se dice que es *reducible* cuando es isomorfo a un producto directo de dos retículos, cada uno de los cuales consta de más de un elemento. En caso contrario se dice que es *irreducible*.

Función de Möbius generalizada. Damos en este apartado un resumen de los resultados obtenidos por Weisner [1], cuyo conocimiento es indispensable para el fin que nos proponemos.

Sea R un retículo de longitud finita, que goce además de la propiedad de que todo intervalo x/y de R es finito. En adelante nos referiremos solamente a retículos de este tipo, llamados por Weisner "*Jerarquías*".

Consideremos el conjunto de todos los intervalos x/y de R . En este conjunto vamos a definir las funciones $P(x/y)$, $Q_k(x/y)$ (para todo entero $k \geq 1$) y $\mu(x/y)$ de la siguiente manera:

$P(x/y)$ = número de contiguos inferiores de y pertenecientes al intervalo x/y .

$Q_k(x/y)$ = número de veces que x es intersección de k elementos distintos, contiguos inferiores de y .

$$\mu(x/y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k Q_k(x/y) & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Como consecuencia inmediata de las definiciones dadas se observa que es $P(x/y) = 0$ si es $x = y$, $P(x/y) \neq 0$ si es $x \neq y$. Para todo $k > P(x/y)$ es $Q_k(x/y) = 0$, de donde la suma $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k Q_k(x/y)$ consta de un número finito de términos.

Se puede comprobar que entre las funciones acabadas de definir se cumplen las siguientes identidades:

$$\sum_{r \in x/y} Q_k(r/y) = \binom{P(x/y)}{k}, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

$$\sum_{r \in x/y} \mu(r/y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases} \quad (2)$$

Consideremos ahora funciones unívocas cualesquiera, $f, g, \dots$ definidas, ya sea para todo intervalo x/y de R , o bien solamente para los intervalos de la forma a/x , siendo a un elemento fijo de R . Se demuestra fácilmente que si f_1, f_2 , son tales que para todo x se cumpla $\sum_{r \in a/x} f_1(a/r) = \sum_{r \in a/x} f_2(a/r)$, entonces es $f_1(a/x) = f_2(a/x)$ para todo $x \supseteq a$.

La propiedad más interesante de la función μ es la siguiente:

Si f y g son dos funciones ligadas entre sí por: (3)

$$g(a/x) = \sum_{r \in a/x} f(a/r), \text{ entonces es} \quad (3a)$$

$$f(a/x) = \sum_{r \in a/x} g(a/r) \mu(r/x). \quad (3b)$$

Esto permite obtener para toda función definida para los intervalos del tipo a/x (a fijo), otra función definida en el mismo dominio y ligada con g por (3a). Esta función es única y sus valores se obtienen mediante (3b).

El principio de dualidad es aplicable a todo lo dicho en este apartado, de manera que a cada función corresponde una función dual, y a cada propiedad de las funciones corresponde una propiedad dual. A modo de ejemplo damos las definiciones de $P'(x/y)$, $Q_k'(x/y)$ y $\mu'(x/y)$, funciones duales respectivamente de $P(x/y)$, $Q_k(x/y)$ y $\mu(x/y)$.

$P'(x/y)$ = número de contiguos superiores de x pertenecientes al intervalo x/y .

$Q_k'(x/y)$ = número de veces que y es reunión de k contiguos superiores de x , distintos, en el intervalo x/y .

$$\mu'(x/y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k Q_k'(x/y) & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Se demuestra que para todo intervalo x/y es $\mu(x/y) = \mu'(x/y)$, o, dicho de otro modo, que la función μ es dual de sí misma.

Si consideramos el retículo formado por todos los enteros positivos con la relación $\subseteq$ definida por

$$a \subseteq b \Leftrightarrow a \text{ es divisor de } b,$$

un intervalo x/y está formado por todos aquellos números que son múltiplos de x y divisores de y . Se comprueba fácilmente que en este retículo los valores que toma la función μ para los intervalos x/y dependen solamente

del cociente $\frac{y}{x}$, y son los siguientes:

$\mu(x/y) = (-1)^r$ si $\frac{y}{x} = p_1 \dots p_r$, siendo $p_1, \dots, p_r$ números primos distintos entre sí y distintos de la unidad.

$\mu(x/y) = 0$ en los demás casos.

La función μ se reduce en este caso a la función de Möbius de los números naturales que se define de la manera indicada. Esto justifica el nombre de función de Möbius generalizada, dado a la función μ introducida por Weisner.

La función F. — Lo expuesto en el apartado anterior se refería a retículos de longitud finita en los que todo intervalo era finito. Para lo que aquí digamos será necesario particularizar más y considerar solamente los retículos de estas características que poseen elemento 0 y elemento 1. Inmediatamente se ve que al imponer estas condiciones nos quedamos con los retículos finitos y solamente con éstos.

Teniendo presente que todo intervalo x/y es un retículo cuyos elementos 0 y 1 son x, y respectivamente, y habiendo definido para todo retículo de longitud finita con elemento 0 la dimensión de un elemento cualquiera, podemos definir una función d para todos los intervalos de un retículo finito de la siguiente manera:

$$d(x/y) = \text{dimensión de } y \text{ en el intervalo } x/y.$$

Según esta definición, en todo retículo R con elemento 0 es $d(0/r) = \text{dimensión de } r \text{ en } R$.

Aplicando a esta función la propiedad (3) vemos que tiene que existir una función F única ligada con d por (3a) y (3b), es decir:

$$d(a/x) = \sum_{r \in a/x} F(a/r)$$

$$F(a/x) = \sum_{r \in a/x} d(a/r) \mu(r/x).$$

Para un retículo finito R podemos definir $F(R) = F(0/1)$, siendo 0 y 1 los elementos cero y unidad de R . Más explícitamente definimos:

$$F(R) = \sum_{r \in R} d(0/r) \mu(r/1), \text{ y poniendo } d(r) \text{ en vez de } d(0/r)$$

$$F(R) = \sum_{r \in R} d(r) \mu(r/1).$$

El objeto del presente trabajo es demostrar que, si R es reducible, entonces es $F(R) = 0$. La demostración será muy fácil una vez que hayamos probado los siguientes lemas.

Lema 1. — En todo retículo finito R se cumple:

$$\sum_{r \in R} \mu(r/1) = 1 \text{ si } R \text{ es el retículo de un solo elemento,}$$

$$\sum_{r \in R} \mu(r/1) = 0 \text{ si } R \text{ tiene más de un elemento.}$$

Este lema es una consecuencia de la propiedad (2), de la cual se deduce haciendo $x = 0, y = 1$, y teniendo en cuenta que es $0/1 = R$.

Lema 2. Si el retículo R es un producto directo de dos retículos finitos R_1, R_2 y es $r = (r_1, r_2) \in R, r_1 \in R_1, r_2 \in R_2$, entonces es

$$\mu(r/1) = \mu_1(r_1/1_1) \mu_2(r_2/1_2),$$

siendo μ , μ_1 , μ_2 , las funciones de Möbius generalizadas, y 1 , 1_1 , 1_2 , los elementos unidad de R , R_1 , R_2 , respectivamente.

De acuerdo con las definiciones dadas en el apartado anterior, designaremos por $Q_k(r/1)$ (y respectivamente por $Q_k^1(r_1/1_1)$, $Q_k^2(r_2/1_2)$), el número de veces que r (resp. r_1 , r_2) es intersección de k antiátomos de R (respectivamente R_1 , R_2). Será pues

$$\mu(r/1) = \sum_1^{\infty} (-1)^k Q_k(r/1), \quad \mu_1(r_1/1_1) = \sum_1^{\infty} (-1)^k Q_k^1(r_1/1_1),$$

$$\mu_2(r_2/1_2) = \sum_1^{\infty} (-1)^k Q_k^2(r_2/1_2).$$

Para la demostración de este lema distinguiremos tres casos:

1.º $r = 1 = (1_1, 1_2)$.

Por definición es $\mu(1/1) = 1$, $\mu_1(1_1/1_1) = 1$, $\mu_2(1_2/1_2) = 1$, de donde $\mu(1/1) = \mu_1(1_1/1_1) \cdot \mu_2(1_2/1_2)$.

2.º $r = (r_1/1_2)$, $r_1 \neq 1_1$, o bien $r = (1_1/r_2)$, $r_2 \neq 1_2$.

Para estudiar este caso y el siguiente, hace falta tener en cuenta el hecho evidente de que los antiátomos de R son precisamente los elementos de una de las dos formas $(a_1, 1_2)$, $(1_1, a_2)$, siendo a_1 , a_2 , antiátomos de R_1 , R_2 , respectivamente.

Supongamos por ejemplo que sea $r = (r_1, 1_2)$, $r_1 \neq 1_1$. Se comprueba fácilmente que si r es intersección de antiátomos de R , éstos pueden ser solamente de la forma $(a_1, 1_2)$ y que decir que r es intersección de k antiátomos de R es equivalente a decir que r_1 es intersección de k antiátomos de R_1 .

Por lo tanto, $Q_k(r/1) = Q_k^1(r_1/1_1)$, y

$$\mu(r/1) = \sum_1^{\infty} (-1)^k Q_k(r/1) = \sum_1^{\infty} (-1)^k Q_k^1(r_1/1_1) = \mu_1(r_1/1_1)$$

Cómo es $\mu_2(1_2, 1_2) = 1$, tenemos:

$$\mu(r/1) = \mu_1(r_1/1_1) = \mu_1(r_1/1_1) \cdot 1 = \mu_1(r_1/1_1) \mu_2(r_2/1_2)$$

3.º $r = (r_1, r_2)$, $r_1 \neq 1_1$, $r_2 \neq 1_2$.

En este caso, si r es intersección de k antiátomos ($k \geq 1$), tiene que haber entre éstos, por lo menos, uno de cada clase, ya que, de lo contrario sería $r_1 = 1_1$ ó $r_2 = 1_2$. Para calcular $Q_k(r/1)$ tendremos que considerar todas las descomposiciones posibles de k de la forma $k = k_1 + k_2$, ($k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$) y contar para cada una de ellas el número $Q_{k_1, k_2}(r/1)$ de veces que r es intersección de k antiátomos, de los cuales hay k_1 de la forma $(a_1, 1_2)$ y k_2 de la forma $(1_1, a_2)$. Poniendo $r = (r_1, 1_2) \cap (1_1, r_2)$, es fácil ver que lo antes dicho ocurre cuándo y solamente cuándo r_1 es intersección de k_1 antiátomos de R_1 y r_2 es intersección de k_2 antiátomos de R_2 , de modo que $Q_{k_1, k_2}(r/1) = Q_{k_1}^1(r_1/1_1) \cdot Q_{k_2}^2(r_2/1_2)$ y por lo tanto

$$Q_k(r/1) = \sum_{k_1+k_2=k} Q_{k_1, k_2}(r/1) = \sum_{k_1+k_2=k} Q_{k_1}^1(r_1/1_1) \cdot Q_{k_2}^2(r_2/1_2),$$

$$\begin{aligned}
 \mu(r/1) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k Q_k(r/1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sum_{k_1+k_2=k} Q_{k_1}^1(r_1/1_1) \cdot Q_{k_2}^2(r_2/1_2) = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=k} (-1)^{k_1+k_2} Q_{k_1}^1(r_1/1_1) \cdot Q_{k_2}^2(r_2/1_2) = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=k} (-1)^{k_1} Q_{k_1}^1(r_1/1_1) \cdot (-1)^{k_2} Q_{k_2}^2(r_2/1_2) = \\
 &= \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} (-1)^{k_1} Q_{k_1}^1(r_1/1_1) \cdot (-1)^{k_2} Q_{k_2}^2(r_2/1_2) = \\
 &= \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} (-1)^{k_1} Q_{k_1}^1(r_1/1_1) \right) \cdot \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} (-1)^{k_2} Q_{k_2}^2(r_2/1_2) \right) = \\
 &= \mu_1(r_1/1_1) \cdot \mu_2(r_2/1_2) \text{ c. q. d.}
 \end{aligned}$$

Lema 3. Si el retículo R es un producto directo de dos retículos R_1, R_2 y es $r = (r_1, r_2) \in R$, $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$, entonces es $d(r) = d_1(r_1) + d_2(r_2)$, siendo d, d_1, d_2 , las dimensiones en R, R_1, R_2 , respectivamente.

Demostración: Sea C una cadena maximal de longitud máxima de $0 = (0_1, 0_2)$ a $r = (r_1, r_2)$. Si (q_1, q_2) y (s_1, s_2) son elementos consecutivos de C y es $(q_1, q_2) \subset (s_1, s_2)$, debido a la maximalidad de C , tendrá que ser (q_1, q_2) contiguo inferior de (s_1, s_2) , y por lo tanto, o bien q_1 contiguo inferior de s_1 y $q_2 = s_2$, o bien q_2 contiguo inferior de s_2 y $q_1 = s_1$. Las primeras y las segundas componentes de los elementos de C constituyen pues cadenas maximales C_1 y C_2 en R_1 y R_2 respectivamente, y como el paso de un elemento al contiguo en C se hace variando una sola de las componentes, la longitud de C será igual a la suma de las longitudes de C_1 y C_2 . Ahora bien, si C es de longitud máxima en R , C_1 y C_2 son de longitud máxima en R_1 y R_2 respectivamente, ya que si por ejemplo C_1' es una cadena maximal de 0_1 a r_1 más larga que C_1 , a partir de C_1' y C_2 se puede formar una cadena maximal de $(0_1, 0_2)$ a (r_1, r_2) de longitud mayor que la de C , contrariamente a lo supuesto. Las longitudes de C_1 y C_2 son pues, por definición, iguales respectivamente a $d_1(r_1)$ y $d_2(r_2)$, y como por la misma razón la longitud de C es $d(r)$, será $d(r) = d_1(r_1) + d_2(r_2)$ como queríamos demostrar.

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema que nos proponemos.

Teorema. Si para todo retículo finito R definimos la función $F(R) = \sum_{r \in R} d(r) \cdot \mu(r/1)$, se verifica que es $F(R) = 0$ siempre que R sea reducible.

En efecto: Si R es reducible podemos poner $R \simeq R_1 \times R_2$, siendo R_1 y R_2 retículos finitos, cada uno de ellos con más de un elemento. Para el cálculo de $F(R)$ podemos sustituir R por $R_1 \times R_2$, y por aplicación de los lemas 2 y 3 tendremos:

$$F(R) = \sum_{r \in R} d(r) \mu(r/1) = \sum_{\substack{r_1 \in R_1 \\ r_2 \in R_2}} d(r_1, r_2) \mu[(r_1, r_2)/(1_1, 1_2)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{r_1 \in R_1 \\ r_2 \in R_2}} [d_1(r_1) + d_2(r_2)] \mu_1(r_1/1) \mu_2(r_2/1_2) = \sum_{\substack{r_1 \in R_1 \\ r_2 \in R_2}} d_1(r_1) \mu_1(r_1/1) \mu_2(r_2/1_2) + \\
 &+ \sum_{r_1 \in R_1} d_2(r_2) \mu_1(r_1/1) \mu_2(r_2/1_2) = \sum_{r_2 \in R_2} \mu_2(r_2/1_2) \sum_{r_1 \in R_1} d_1(r_1) \mu_1(r_1/1) + \\
 &+ \sum_{r_1 \in R_1} \mu_1(r_1/1) \sum_{r_2 \in R_2} d_2(r_2) \mu_2(r_2/1_2).
 \end{aligned}$$

Al ser, por el lema 1, $\sum \mu_1(r_1/1) = 0$, $\sum_{r_2 \in R_2} \mu_2(r_2/1_2) = 0$, cada uno de los sumandos anteriores se reducirá a 0 y será $F(R) = 0$, c. q. d.

Conclusión: Acabamos de dar una condición necesaria para la reducibilidad de un retículo finito. Que esta condición no es suficiente lo demuestran los dos ejemplos siguientes:

Ejemplo núm. 1. Sea el retículo R_1 representado por el diagrama de la figura 2. Se comprueba fácilmente que las funciones μ y d , toman los valores dados en la siguiente tabla:

r	0	a	b	c	1
$d(r)$	0	1	2	2	3
$\mu(r/1)$	0	1	-1	-1	1
$d(r) \mu(r/1)$	0	1	-2	-2	3

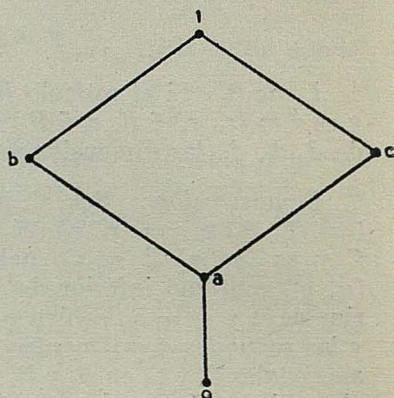


FIG. 2

$$\sum_{r \in R_1} d(r) \mu(r/1) = 0.$$

Es como vemos $F(R_1) = 0$ y, sin embargo, el retículo es irreducible por ser primo el número de sus elementos.

Ejemplo núm. 2. Consideremos el retículo R_2 representado por:

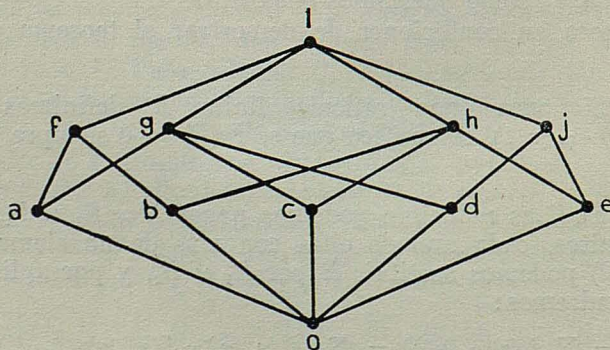


FIG. 3

r	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	1
$d(r)$	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
$\mu(r/1)$	-2	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
$d(r)\mu(r/1)$	0	1	1	1	1	1	-2	-2	-2	-2	3

Vemos igualmente que es $F(R_2) = 0$ y sin embargo R_2 es irreducible puesto que tiene 11 elementos, y 11 es número primo.

Observemos que el retículo del ejemplo núm. 1 es modular, pero no complementario, ya que los elementos a, b, c (fig. 2) carecen de complemento.

El retículo del ejemplo núm. 2 es, contrariamente al anterior, complementario, pero no modular. Que es complementario se comprueba en seguida observando la siguiente lista de pares de elementos complementarios, en la que cada elemento del retículo aparece por lo menos una vez.

$$\{0, 1\}, \{a, i\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{d, h\}, \{e, j\}.$$

Que no es modular se comprueba por ejemplo de la siguiente manera:

Consideremos los elementos b, c y g (fig. 3). Observando el diagrama, comprobamos inmediatamente que es $b \subseteq c$ y que, sin embargo,

$$\begin{aligned} b \cup (g \cap c) &= b \cup c = h, \\ (b \cup g) \cap c &= 1 \cap c = c \neq h. \end{aligned}$$

No hemos podido encontrar hasta ahora ningún ejemplo de retículo modular y complementario (tipo proyectivo), para el cual se anule la función F y sea al mismo tiempo irreducible, lo cual nos lleva a la conjetura de que la anulación de dicha función sea condición suficiente para la reducibilidad en este tipo de retículos. Queda pendiente de solución el problema de demostrar tal conjetura* o, por el contrario, encontrar el contraejemplo conveniente.

BIBLIOGRAFIA

- [1]. Garret Birkhoff, *Lattice theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications. Vol. XXV, 1948.
- [2]. Hans Hermes, *Einführung in die Verbandstheorie*, Springer Verlag, Berlín, 1955.
- [3]. M. L. Dubreil-Jacotin et al., *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*. Gauthier-Villars, París, 1953.
- [4]. Louis Weisner, *Inversion of finite series*, Trans. Am. Math. Soc. 38, pp. 474-484, 1935.

* Con posterioridad a la presentación del original de este trabajo, el autor ha demostrado que la anulación de la función F es condición necesaria y suficiente para la reducibilidad en los retículos modulares y complementarios.

VALIDEZ APROXIMADA DEL TEOREMA ADIABATICO DE LA MECANICA CUANTICA

por

L. M. GARRIDO Y F. J. SANCHO

S U M M A R Y

In this paper we study the conditions that make the quantum mechanical adiabatic theorem valid to m -th order and the degree of approximate validity of the same when time depending Hamiltonian varies at slow though finite rate.

INTRODUCCIÓN

A. Lenard (1) demostró la invariancia en todos los órdenes para el oscilador clásico unidimensional y no lineal y para el teorema adiabático de la mecánica cuántica.

En su trabajo original, Born y Fock (2) habían demostrado la invariancia adiabática en primer orden solamente.

Para una formulación precisa del concepto de invariante adiabático, se ha de introducir un parámetro T , tal que cuando $T \rightarrow \infty$, el hamiltoniano del sistema físico experimenta una variación muy lenta. Generalmente T suele ser el intervalo de tiempo, muy grande, en el cual se considera la evolución del sistema.

El teorema adiabático de la mecánica cuántica establece que un sistema que inicialmente está en un estado propio del hamiltoniano que tiene una lenta dependencia del tiempo, pertenecerá al final de la evolución en el estado propio del hamiltoniano instantáneo que se deduce por continuidad.

El propósito de este trabajo es doble. Por una parte, establecer las condiciones de validez del teorema hasta el orden $m + 1$ en potencias de $\frac{1}{T}$.

Llegaremos a demostrar que esto tiene lugar cuando las m primeras derivadas del hamiltoniano son nulas en los instantes inicial y final de la evolución. Este resultado incluye el de Lenard como caso particular, puesto que si el número de derivadas del hamiltoniano que son nulas, es infinito, tendremos invariancia adiabática en todos los órdenes.

En segundo lugar, calcular el grado de aproximación en el cual es válido el teorema adiabático para el orden m , cuando T es grande pero finito. La expresión que obtenemos nos permite calcular el error que se comete al considerar que el teorema es válido, puesto que en la práctica T es siempre

finito. Para llegar a esto, estudiaremos una serie infinita y veremos que el primero de sus términos es el mayor, en las circunstancias que hacen válido el teorema hasta el m -ésimo orden.

TEOREMA ADIABÁTICO DE LA MECÁNICA CUÁNTICA EN m -ÉNÉSIMO ORDEN

Supongamos que el hamiltoniano $H(t)$ del sistema, pasa de un modo continuo desde un valor H_0 en el instante inicial t_0 hasta un valor H_1 correspondiente al tiempo t_1 .

Si $T = t_1 - t_0$ es el intervalo de tiempo en que tiene lugar la evolución, introducimos un tiempo ficticio τ que resulta de medir el tiempo físico t , tomando por unidad el parámetro T . Sea $H(\tau)$ el valor del hamiltoniano en el tiempo $t = t_0 + \tau T$, que será una función continua de τ y tal que

$$H(0) \equiv H_0 \quad H(1) \equiv H_1 \quad (1)$$

La evolución del sistema dependerá del parámetro T que nos mide la velocidad de variación del hamiltoniano.

Vamos a suponer, por simplicidad, que para todo valor de τ el espectro del hamiltoniano sea un espectro discreto de valores propios $E_1(\tau), E_2(\tau) \dots$. Sean $P_0(\tau), P_2(\tau) \dots P_j(\tau)$ los proyectores sobre los subespacios correspondientes a las funciones propias instantáneas, que por hipótesis los consideraremos como funciones continuas del tiempo ficticio τ . Admitimos también que el conjunto de valores propios instantáneos $E_i(\tau)$, se mantienen no degenerados durante todo el período de variación, es decir $E_i(\tau) - E_j(\tau) \neq 0$ para $i \neq j$ y que los $P_j(\tau)$ tienen derivadas continuas y definidas en todo el intervalo de variación de τ .

Para dar una visión más completa incluiremos la demostración del teorema adiabático como suele aparecer en la literatura (3). Sea $V(\tau)$ el operador de evolución correspondiente al hamiltoniano $H(\tau)$, expresados ya como función del parámetro τ . La ecuación diferencial a que satisface $V(\tau)$ es:

$$i \hbar \frac{d V(\tau)}{d \tau} = T H(\tau) V(\tau) \quad (2)$$

El hamiltoniano $H(\tau)$, podemos representarlo en función de sus valores propios instantáneos y de los respectivos proyectores, por la expresión

$$H(\tau) = \sum E_j(\tau) P_j(\tau) \quad (3)$$

En el caso trivial de que los subespacios correspondientes a los distintos valores propios de H , no varíen con el tiempo, el teorema es inmediato, pues entonces, los proyectores P_j son constantes del movimiento, por tanto

$$P_j(\tau) = P_j(0) \equiv P_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots$$

y $P_j = V^{-1}(\tau) P_j V(\tau)$. La ecuación (2) puede integrarse directamente obteniendo para $V(\tau)$ la expresión:

$$V(\tau) = \sum_j \exp(-i/\hbar T \varphi_j(\tau)) P_j \quad (4)$$

donde $\varphi_j(\tau) = \int_0^\tau E_j(\tau') d\tau'$ y se ha hecho uso de la propiedad de ortogonalidad de los proyectores.

En el caso general de que los subespacios correspondientes a los estados propios de $H(\tau)$ varíen con el tiempo, la ecuación (2) no puede integrarse de la misma manera para obtener el operador de evolución. En este caso, sea $A(\tau)$ el operador unitario que nos da la evolución en el tiempo de los proyectores $P_j(\tau)$.

$$P_j(\tau) = A(\tau) P_j(0) A^{-1}(\tau) \quad (5)$$

Mediante la transformación unitaria $A(\tau)$, los estados propios del hamiltoniano inicial H_0 , se transforman en los estados propios instantáneos de $H(\tau)$ que se deducen por continuidad.

El operador unitario $A(\tau)$ está definido sin ambigüedad por la condición inicial $A(0) = 1$ y por la ecuación diferencial

$$i \hbar \frac{d A(\tau)}{d \tau} = K(\tau) A(\tau) \quad (6)$$

Siendo $K(\tau)$ un operador hermitico apropiado.

Derivando (5) respecto a τ , y comparando el resultado con la ecuación (6), obtenemos la ecuación a que satisface $K(\tau)$.

$$i \hbar \frac{d P_j(\tau)}{d \tau} = [K(\tau), P_j(\tau)] \quad (7)$$

donde $[K(\tau), P_j(\tau)]$ representa el conmutador, entre $K(\tau)$ y $P_j(\tau)$ del modo usual con el que se define.

La expresión (7) no define $K(\tau)$ de una manera unívoca pues seguiría siendo válida sumando a $K(\tau)$ el operador $\sum_k P_k(\tau) f_k(\tau) P_k(\tau)$ donde las $f_k(\tau)$ representan operadores arbitrarios. La arbitrariedad que nos aparece al definir $K(\tau)$ la eliminamos, imponiéndole la condición suplementaria

$$P_j(\tau) K(\tau) P_j(\tau) = 0 \quad (8)$$

para todo j y todo valor de τ .

Con esta restricción y teniendo en cuenta (7), nos queda para $K(\tau)$ la expresión

$$K(\tau) = i \hbar \sum \frac{d P_j(\tau)}{d \tau} P_j(\tau) \quad (9)$$

Efectuemos ahora la transformación unitaria $A^{-1}(\tau)$ sobre estados y observables de la imagen de Schrödinger, y obtendremos los estados y observables correspondientes a una nueva representación. En esta nueva representación, el operador $H(\tau)$ y $K(\tau)$ se transformarán en

$$H^{(A)}(\tau) = A^{-1}(\tau) H(\tau) A(\tau) = \sum_j E_j(\tau) P_j(0); \quad K^{(A)}(\tau) = A^{-1}(\tau) K(\tau) A(\tau) \quad (10)$$

La primera de estas relaciones nos dice que las constantes del movimiento correspondientes a H_0 también lo serán $H^{(A)}(\tau)$.

El transformado del operador de evolución $V(\tau)$ será

$$V^{(A)}(\tau) = A^{-1}(\tau) V(\tau) \quad (11)$$

Si derivamos (11) respecto a τ , teniendo en cuenta (2) y (6), obtenemos

$$i\hbar \frac{dV^{(A)}(\tau)}{d\tau} = (TH^{(A)}(\tau) - K^{(A)}(\tau)) V^{(A)}(\tau) \quad (12)$$

Esta ecuación diferencial, junto a la condición inicial $V^{(A)}(0) = 1$, nos define el operador $V^{(A)}(\tau)$; la ecuación (12) podemos interpretarla como la de definición de un operador de evolución del movimiento generado por un hamiltoniano $TH^{(A)}(\tau) - K^{(A)}(\tau)$ constituido por dos partes; una parte correspondiente al hamiltoniano no perturbado $H^0 \equiv TH^{(A)}(\tau)$ y una perturbación $H^1 \equiv -K^{(A)}(\tau)$.

Introduzcamos ahora la imagen de interacción en esta representación de ejes móviles y sean $V_0(\tau)$ y $V_1(\tau)$ las dos partes en que descomponemos $V^{(A)}(\tau)$.

$$V^{(A)}(\tau) = V_0(\tau) V_1(\tau) \quad (13)$$

donde $V_0(\tau)$ es el operador de evolución del movimiento no perturbado, correspondiente al hamiltoniano no perturbado $H^0(\tau)$

$$i\hbar \frac{dV_0(\tau)}{d\tau} = TH^{(A)}(\tau) V_0(\tau), \quad V_0(0) = 1 \quad (14)$$

Puesto que el espacio de vectores propios de $H^{(A)}(\tau)$ permanece constante en el tiempo, podemos integrar (14) directamente y obtendremos para $V_0(\tau)$ la expresión

$$V_0(\tau) = \sum_j e^{-i/\hbar T \varphi_j(\tau)} P_j(0) \quad (15)$$

Para hallar la ecuación a que satisface $V_1(\tau)$, derivando (13) respecto a τ tenemos

$$i\hbar \frac{dV^{(A)}}{d\tau} = i\hbar \left(\frac{dV_0}{d\tau} V_1 + V_0 \frac{dV_1}{d\tau} \right) \quad (16)$$

que multiplicada por la izquierda por $V_0^{-1}(\tau)$ y teniendo en cuenta (13) nos da:

$$i\hbar \frac{dV_1(\tau)}{d\tau} = -K[\tau] V_1(\tau)$$

$$\text{donde } K[\tau] = V_0^{-1}(\tau) K^{(A)}(\tau) V_0(\tau) \quad (17)$$

La ecuación diferencial (17), junto con la condición inicial $V_1(0) = 1$, equivale a la ecuación integral

$$V_1(\tau) = 1 + \frac{i}{\hbar} \int_0^\tau K[\tau'] V_1(\tau') d\tau' \quad (18)$$

que podemos resolver por iteración y obtener

$$\begin{aligned} V_1(\tau) = & 1 + \frac{i}{\hbar} \int_0^\tau K[\tau'] d\tau' + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} K[\tau'] K[\tau''] d\tau'' + \dots \\ & + \dots \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \dots \int_0^{\tau^{(n-1)}} d\tau^{(n)} K[\tau'] K[\tau''] \dots K[\tau^{(n)}] + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Introduciendo en cada una de las integrales múltiples que aquí nos aparecen, el operador cronológico $\{ \dots \}_+$, podemos escribir (19) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_1(\tau) = & 1 + \frac{i}{\hbar} \int_0^\tau K[\tau'] d\tau' + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \{ K[\tau'] K[\tau''] \}_+ + \dots \\ & + \dots \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^\tau d\tau' \dots \int_0^{\tau^{(n-1)}} d\tau^{(n)} \{ K[\tau'] K[\tau''] \dots K[\tau^{(n)}] \}_+ + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

donde se entiende que la acción del operador cronológico aplicado a un producto de operadores que dependen del tiempo $\{ K[\tau'] K[\tau''] \dots \}_+$ los ordena en un producto en el cual los factores aparecen de derecha a izquierda en orden creciente del tiempo, esto es $\tau' > \tau'' > \dots$

Teniendo en cuenta (15) para el operador $V_0(\tau)$, tendremos para $K[\tau]$ la expresión

$$K[\tau] = \sum_{j \neq k} e^{i/\hbar (\varphi_j(\tau) - \varphi_k(\tau))^T} A^{-1}(\tau) P_j(\tau) K(\tau) P_k(\tau) A(\tau)$$

En virtud de la condición (8) impuesta al operador $K(\tau)$, si representamos por $K_{jk}(\tau) \equiv P_j(\tau) K(\tau) P_k(\tau)$, la ecuación (21) nos dice que $K_{jj}(\tau) = 0$. Por tanto obtendremos para $V_1(\tau)$ la expresión

$$\begin{aligned} V_1(\tau) = & 1 + \frac{i}{\hbar} \sum_{j \neq k} \int_0^\tau e^{iT \alpha_{jk}(\tau')} K_{jk}^{(A)}(\tau') d\tau' + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \{ \\ & \left(\sum_{j \neq k} e^{i \alpha_{jk}(\tau')^T} K_{jk}^{(A)}(\tau') \right) \left(\sum_{l \neq m} e^{i \alpha_{lm}(\tau'')^T} K_{lm}^{(A)}(\tau'') \right) \}_+ + \dots \\ & + \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^\tau d\tau' \dots \int_0^{\tau^{(n-1)}} d\tau^{(n)} \left\{ \left(\sum_{j \neq k} e^{i \alpha_{jk}(\tau')^T} K_{jk}^{(A)}(\tau') \right) \right. \\ & \left. \dots \left(\sum_{r \neq s} e^{i \alpha_{rs}(\tau^{(n)})^T} K_{rs}^{(A)}(\tau^{(n)}) \right) \right\}_+ + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

donde $\alpha_{jk}(\tau) = \frac{\varphi_j(\tau) - \varphi_k(\tau)}{\hbar}$;

Supongamos ahora que el hamiltoniano $H(\tau)$ que varía lentamente en el tiempo, sea tal que sus m primeras derivadas se anulen para $\tau = 0$ y $\tau = 1$. Entonces según se demuestra en el apéndice, $K(\tau)$ y sus $m - 1$ primeras derivadas, también se anularán para dichos valores de τ y lo mismo le ocurrirá a $K_{jk}^{(A)}(\tau)$.

Consideremos una de las integrales que aparecen en la expresión (21) del operador $V_1(\tau)$, y efectuemos m integraciones por partes, tomando el intervalo total de variación de τ , de 0 a 1. El hecho de anularse $K_{jk}^{(A)}(\tau)$ y sus $m - 1$ primeras derivadas, nos conduce a:

$$\int_0^1 e^{i\alpha_{jk}(\tau)T} K_{jk}^{(A)}(\tau) d\tau = \left(\frac{-1}{iT}\right)^m \int_0^1 e^{i\alpha_{jk}(\tau)T} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\omega_{jk}(\tau)} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\omega_{jk}(\tau)} \cdots \frac{d}{d\tau} \left(\frac{K_{jk}^{(A)}(\tau)}{\omega_{jk}(\tau)} \right) \right) \right) d\tau \quad (23)$$

donde $\omega_{jk}(\tau) = \frac{E_j(\tau) - E_k(\tau)}{\hbar} = \frac{d}{d\tau} \alpha_{jk}(\tau)$ que por la hipótesis hecha acerca de los valores propios instantáneos, será distinto de cero para todo valor de τ .

El segundo término de (22) se compone de suma de integrales del tipo (23) donde por ser $K_{jj}^{(A)}(\tau) = 0$ en todas ellas aparece el término exponencial y al efectuar las m integraciones por partes en cada una de ellas, obtendremos términos del orden de T^{-m} . Si repetimos el razonamiento de efectuar m integraciones por partes en cada una de las integrales dobles que aparecen en el tercer término de (21), obtendríamos un término de orden T^{-2m} y en general, para el n -ésimo sumando una contribución a $V_1(1)$ del orden $T^{-m \cdot n}$.

$$V_1(1) = 1 +$$

$$\left(\frac{-1}{iT}\right)^m \frac{i}{\hbar} \int_0^1 F(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left(\frac{-1}{iT}\right)^{2m} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^1 d\tau' \int_0^1 d\tau'' \{F(\tau') F(\tau'')\}_+ + \dots$$

$$+ \dots \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{iT}\right)^{m \cdot n} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^1 d\tau' \dots \int_0^1 d\tau^{(n)} \{F(\tau') \dots F(\tau^{(n)})\}_+ + \dots \quad (24)$$

donde $F(\tau)$ representa

$$F(\tau) = \sum_{j \neq k} e^{i\alpha_{jk}(\tau)T} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\omega_{jk}(\tau)} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\omega_{jk}(\tau)} \cdots \frac{d}{d\tau} \left(\frac{K_{jk}^{(A)}(\tau)}{\omega_{jk}(\tau)} \right) \right) \right)$$

Para T muy grande, podemos despreciar las sucesivas potencias T^{-2m} , T^{-3m} ... frente a T^{-m} , con lo cual nos quedará para $V_1(1)$ la expresión

$$V_1(1) = 1 + T^{-m-1} G$$

$$\text{siendo } G = \left(\frac{-1}{i}\right)^m \frac{1}{\hbar} \sum_{j \neq k} \left\{ \left[e^{i\alpha_{jk}(\tau)T} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\omega_{jk}(\tau)} \frac{d}{d\tau} \left(\cdots \frac{d}{d\tau} \left(\frac{K_{jk}^{(A)}(\tau)}{\omega_{jk}(\tau)} \right) \right) \right) \right]_0^1 \right\} \quad (25)$$

El operador de evolución total $V^{(A)}(\tau)$ en la representación de ejes móviles será, teniendo en cuenta (13), (15) y (25)

$$\begin{aligned} V^{(A)}(\tau) &= V_0(\tau) V_1(\tau) \simeq V_0(\tau) + T^{-m-1} V_0 G = \\ &= \sum_j e^{-i/\hbar T \varphi_j(\tau)} P_j(0) + T^{-m-1} \sum_j e^{-i/\hbar T \varphi_j(\tau)} P_j(0) G \end{aligned} \quad (26)$$

y teniendo en cuenta (11) nos queda para el operador $V(1)$ la expresión

$$V(1) = A(1) V^{(A)}(1) \simeq \sum_j e^{-i/\hbar T \varphi_j(1)} A(1) P_j(0) + T^{-m-1} \sum_j e^{-i/\hbar T \varphi_j(1)} A(1) P_j(0) G \quad (27)$$

Para $T \rightarrow \infty$, solamente queda el primer término del segundo miembro para la expresión de $V(1)$ de lo cual se deduce el teorema adiabático de la mecánica cuántica: Un sistema que inicialmente se encuentra en el estado proyectado por $P_j(1)$. La expresión (27) nos dice que esta invariancia adiabática es de orden $m+1$, cuando las m primeras derivadas de $H(\tau)$, en los instantes inicial y final, son nulos.

APENDICE I

Vamos a ver aquí, como la anulación de las m primeras derivadas de H en un instante determinado $\tau = \tau_1$ supone la anulación de $K(\tau)$ y de sus $m-1$ primeras derivadas para ese mismo instante:

Consideremos en primer lugar que $\frac{dH}{d\tau} = 0$ para $\tau = \tau_1$

De la expresión del hamiltoniano $H(\tau) = \sum_K E_K(\tau) P_K(\tau)$ derivando respecto a τ y tomando los valores correspondientes a $\tau = \tau_1$ obtendremos

$$0 = \left(\frac{dH(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_1} = \sum_K \left(\frac{dE_K(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_1} P_K(\tau_1) + \sum_K E_K(\tau_1) \left(\frac{dP_K(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_1} \quad (A-1)$$

Si ahora derivamos respecto a τ , y tomamos los valores correspondientes a $\tau = \tau_1$, la identidad

$$\delta_{jK} |\varphi_j \tau_1^t \phi| (2)^x D = \gg \quad (A-2)$$

donde $|\varphi_j \tau$ es el estado propio de $H(\tau)$ correspondiente al valor propio $E_j(\tau)$. Obtendremos la siguiente expresión:

$$(\delta_{jK} - P_K(\tau_1)) \left(\frac{d|\varphi_j \tau\rangle}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_1} = \left(\frac{dP_K(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_1} |\varphi_j \tau_1\rangle \quad (A-3)$$

La relación (A-3) nos dice que el estado $\left(\frac{dP_j(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1} |\varphi_j \tau_1\rangle$ se encuentra en el subespacio complementario al cubierto por $|\varphi_j \tau_1\rangle$ y que el resultado de aplicar $\left(\frac{dP_K(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1}$ a un estado $|\varphi_j \tau_1\rangle$ nos da un estado contenido en el subespacio cubierto por $|\varphi_K, \tau_1\rangle$ siempre que $k \neq j$.

Si ahora proyectamos la ecuación (A-1) para $\left(\frac{dH}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1}$ sobre un estado propio arbitrario $|\varphi_j \tau_1\rangle$, tendremos

$$\left(\frac{dE_j(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1} |\varphi_j \tau_1\rangle + \sum E_K(\tau_1) \left(\frac{dP_K(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1} |\varphi_j \tau_1\rangle = 0 \quad (\text{A-4})$$

La suma que aparece en (A-4) podemos descomponerla en la correspondiente a los valores $k \neq j$ y al término cuyo subíndice es j ; y así quedará

$$\left(\frac{dE_j(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1} |\varphi_j \tau_1\rangle + \sum_{K \neq j} E_K(\tau_1) \left(\frac{dP_K(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1} |\varphi_j \tau_1\rangle + E_j(\tau_1) \left(\frac{dP_j(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1} |\varphi_j \tau_1\rangle = 0 \quad (\text{A-5})$$

Derivando respecto a τ y tomando los valores correspondientes a $\tau=\tau_1$ la identidad $\sum_K P_K(\tau)=1$, nos queda $\sum_K \left(\frac{dP_K(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1} = 0$ de la cual podemos despejar el término correspondiente al subíndice j .

$$\left(\frac{dP_j(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1} = - \sum_{K \neq j} \left(\frac{dP_K(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1} \quad (\text{A-6})$$

Sustituyendo la expresión así obtenida para $\left(\frac{dP_j(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1}$ en (A-5), llegamos a la siguiente relación:

$$\left(\frac{dE_j(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1} |\varphi_j \tau_1\rangle + \sum_{K \neq j} (E_K(\tau_1) - E_j(\tau_1)) \left(\frac{dP_K(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_1} |\varphi_j \tau_1\rangle = 0 \quad (\text{A-7})$$

Como por hipótesis, el espectro de H es discreto y no degenerado, para cualquier instante de tiempo, $E_K(\tau) - E_j(\tau) \neq 0$ para todo $k \neq j$.

Tenemos pues en (A-7) una suma de estados que son mutuamente ortogonales, puesto que lo son los distintos subespacios $|\varphi_j \tau_1\rangle$, $j = 1, 2 \dots$ en los cuales se encuentran. Por tanto para que (A-7) se cumpla, ha de ser

$$\left(\frac{dE_j(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_1} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{dP_k(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_1} = 0 \quad \text{para } k \neq j.$$

Pero por (A-6) estas relaciones pueden extenderse a

$$\left(\frac{dE_j(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_1} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{dP_j(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_1} = 0 \quad \text{para todo } j. \quad (\text{A-8})$$

Si esto es así, teniendo en cuenta la expresión (12) de $K(\tau)$ en función de los proyectores y sus derivadas tendremos que

$$K(\tau_1) = 0$$

Supongamos ahora que para el tiempo $\tau = \tau_1$, se anulen la primera y segunda derivada del hamiltoniano H .

Teniendo en cuenta la expresión del hamiltoniano $H = \sum_K E_K P_K$ y los resultados obtenidos en (A-18), tendremos la expresión de la segunda derivada de H para $\tau = \tau_1$, reducida así:

$$0 = \left(\frac{d^2 H}{d\tau^2} \right)_{\tau=\tau_1} = \sum_K \left(\frac{d^2 E_K}{d\tau^2} \right)_{\tau=\tau_1} P_K(\tau_1) + \sum_K E_K(\tau_1) \left(\frac{d^2 P_K}{d\tau^2} \right)_{\tau=\tau_1} \quad (\text{A-9})$$

y al derivar dos veces respecto a τ , tomando los valores correspondientes a $\tau = \tau_1$, la identidad (A-2) llegamos a la relación

$$(\delta_{jk} - P_K(\tau_1)) \left(\frac{d^2 |\varphi_j \tau_1\rangle}{d\tau^2} \right)_{\tau=\tau_1} = \left(\frac{d^2 P_K(\tau)}{d\tau^2} \right)_{\tau=\tau_1} |\varphi_j \tau_1\rangle \quad (\text{A-10})$$

Las relaciones (A-9) y (A-10) son análogas a las (A-1) y (A-2) que nos han servido de punto de partida para llegar a que la anulación de la primera derivada de H en $\tau = \tau_1$ supone la anulación de $\left(\frac{dE_j}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_1}$ y $\left(\frac{dP_j}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_1}$ para todo j . Por tanto siguiendo el mismo razonamiento llegamos a la anulación de

$$\left(\frac{d^2 E_j}{d\tau^2} \right)_{\tau=\tau_1} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{d^2 P_j}{d\tau^2} \right)_{\tau=\tau_1} = 0 \quad \text{para todo } j \quad (\text{A-11})$$

La primera derivada de $K(\tau)$ correspondiente a $\tau = \tau_1$ teniendo presente (A-8) y calculada a partir de (9) se ve inmediatamente que es nula. Por tanto en este caso, tanto $K(\tau_1)$ como $\left(\frac{dK(\tau)}{d\tau^3}\right)_{\tau=\tau_1}$ se anulan.

Siguiendo el mismo razonamiento demostraríamos que la anulación de las m primeras derivadas de $H(\tau)$ para un tiempo determinado, lleva consigo la anulación de $K(\tau)$ y de sus $m - 1$ primeras derivadas en ese instante. Con esto queda justificado el razonamiento seguido para demostrar la invariancia aproximada del operador de evolución correspondiente a H_0 .

BIBLIOGRAFIA

- (1) A. Lenard. Ann. of Phys. 6, 261 (1959).
- (2) M. Born, V. Fock. Z. Phys. 51, 165, (1928).
- (3) A. Messiah. Mécanique Quantique. Dunod (1960).

SOLUCION DEL PROBLEMA DE EQUIVALENCIA DE CLASES DE FUNCIONES DE DESARROLLO ASINTOTICO

p o r

BALTASAR R.-SALINAS

Dado un conjunto del plano complejo Z (completado), un punto z_0 perteneciente a la clausura $\bar{\Omega}$ de Ω y una sucesión positiva $\{m_n\}$, designamos por $C_{z_0}\{m_n\}$ a la clase de funciones complejas $f(z)$, que admiten un desarrollo asintótico $\sum_{v=0}^{\infty} a_v (z - z_0)^v$ tal que

$$\left| f(z) - \sum_{v=0}^{n-1} a_v (z - z_0)^v \right| \leq M q^n m_n |z - z_0|^n \quad (1)$$

para todo $z \in \Omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y dos constantes positivas M y q dependientes de f . En particular,

$$|a_n| \leq M q^n m_n \quad (2)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$. Con objeto de simplificar la notación tomaremos $z_0 = 0$.

En esta comunicación vamos a determinar cuando $C_0\{m_n\} = C_0\{m'_n\}$. Para que se verifique esto es suficiente que

$$0 < \liminf \sqrt[n]{\frac{m'_n}{m_n}} \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{m'_n}{m_n}} < +\infty \quad (3)$$

pero no necesaria. Por ejemplo, si Ω es un ángulo $\{z \mid |\arg z| < \alpha\pi/2\}$ de amplitud $\alpha\pi < 2\pi$ y si

$$m_n = 1 \quad \text{y} \quad m'_n = \frac{1}{n^{(2-\alpha)n}} \quad (m'_0 = 1)$$

para n par y

$$m_n = \frac{1}{n^{(2-\alpha)n}} \quad \text{y} \quad m'_n = 1$$

para n impar, según hemos demostrado en [6] las clases $C_0\{m_n\}$ y $C_0\{m'_n\}$ son idénticas a $C_0\{n^{(\alpha-2)n}\}$ y, sin embargo no satisfacen (3).

Visto esto, vamos a indicar cómo se resuelve este problema cuando Ω sea un conjunto conexo que verifique ciertas condiciones bastante amplias.

Supongamos Ω acotado y designemos por B la componente de $Z - \bar{\Omega}$ que contiene el punto ∞ . Entonces existe una función analítica

$w(z)$ que aplica conformemente B sobre $\{w||w| > 1\}$ con $w(\infty) = \infty$. Si 0 es un punto frontera de Ω , a partir de las funciones

$$\sigma(r) = \sup \{ \log |w(z)| \mid |z| = r, z \in B \} \quad (4)$$

y

$$\varphi(t) = \inf_{r>0} \frac{e^{t\sigma(r)}}{r}; \quad (5)$$

regularizamos la sucesión $\{m_n\}$ poniendo

$$S(t) = \sup_{n \leq t} \frac{\varphi(t/n)^n}{m_n} \quad (6)$$

$$\overline{m}_n = \sup_{t \geq n} \frac{\varphi(t/n)^n}{S(t)} \quad (7)$$

Entonces, $C_0\{m_n\} \subset C_0\{m'_n\}$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\overline{m}_n}{m'_n}} < +\infty. \quad (8)$$

En el caso que Ω sea un conjunto conexo no acotado llegamos a resultados análogos cuando $Z - \overline{\Omega}$ posee una sola componente no acotada B y $z = \infty$ es un punto frontera simple de B . Entonces, existe una función analítica $w(z)$ tal que $s(z) = \log w(z)$ aplica conformemente B sobre el semiplano $\{s | \operatorname{Re} s > 0\}$, haciendo corresponderse los puntos fronteras ∞ de ambas regiones. Si 0 es un punto frontera de Ω a partir de las funciones $\sigma(r)$ y $\varphi(t)$, definidas por (4) y (5), regularizamos la sucesión $\{m_n\}$ poniendo

$$S(t) = \sup_{n \geq 0} \frac{\varphi(t/n)^n}{m_n} \quad (9)$$

$$\overline{m}_n = \sup_{t \geq 0} \frac{\varphi(t/n)^n}{S(t)} \quad (10)$$

Así una condición necesaria y suficiente para que $C_0\{m_n\} \subset C_0\{m'_n\}$ viene expresada, como antes, por (8); pero en este caso se presentan las dos novedades siguientes:

1. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\frac{1}{m_n}} = +\infty, \quad (11)$$

se tiene $S(t) = +\infty$, $\overline{m}_n = 0$ y la clase $C_0\{m_n\}$ contiene solamente funciones constantes.

2. Si

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\frac{1}{m_n}} < +\infty. \quad (12)$$

la clase $C_0\{m_n\} = C_0\{\varphi(1/n)^n\}$.

En general, no es fácil de calcular $w(z)$ y $\sigma(r)$ pero en el caso que 0 sea un punto angularmente accesible de B y la frontera de esta región sea una curva Γ formada por los arcos

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{z = re^{i\theta_1} \mid \theta_1 = \theta_1(r), \quad r \leq \rho_0\} \\ \Gamma_2 &= \{z = re^{i\theta_2} \mid \theta_2 = \theta_2(r), \quad r \leq \rho_0\}\end{aligned}$$

con $0 < \theta_2(r) - \theta_1(r) \leq 2\pi$, $\rho_0 = \sup \{|z| \mid z \in \Gamma\}$, y $\theta_1(r)$ y $\theta_2(r)$ funciones de variación acotada, se puede efectuar la regularización de $\{m_n\}$ sustituyendo $\sigma(r)$ para $r \leq \rho_0$ por la función $\sigma^*(r)$ definida por

$$\log \sigma^*(r) = \pi \int_{\rho_0}^r \frac{dr}{r\theta(r)} \quad (13)$$

siendo

$$\theta(r) = \theta_2(r) - \theta_1(r).$$

Para llegar a estos resultados nos ha sido preciso:

I Obtener una desigualdad entre las cotas mínimas

$$M_n = \sup \left| \frac{1}{z^n} \left[f(z) - \sum_{v=0}^{n-1} a_v z^v \right] \right|$$

del desarrollo asintótico $\sum_0^\infty a_v z^v$ de una función compleja $f(z)$.

Con este fin hemos establecido la desigualdad

$$\sigma_\rho(r) = \lambda_0 \frac{\sigma(r)}{\sigma(\rho)} \quad (14)$$

para $r \leq \rho \leq \rho_0$ y una consonante λ_0 , dependiente de Ω , entre la función $\sigma(r)$ y la análoga $\sigma_\rho(r)$ para la componente Ω_ρ que contiene 0, de la intersección de Ω y $\{z \mid |z| \leq \rho\}$.

II. Hacer un estudio sobre la sucesión de polinomios de FABER $P_n(z)$ asociada a Ω , cuando este conjunto es acotado, de la forma siguiente:

Si

$$w(z) = z \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{z^v}$$

y

$$w(z)^n = z^n \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v^{(n)}}{z^v}$$

en un entorno de ∞ , ponemos

$$P_n(z) = \sum_{v=0}^n c_v^{(n)} z^v$$

Estos polinomios tienen propiedades muy notables que recuerdan a las de los polinomios de Tchebycheff para $\Omega = [-1, 1]$. Si la frontera de B es una curva cerrada Γ , $a \in A = Z - B$ y

$$\theta_a(z) = \arg \frac{w(z) - w(a)}{z - a}$$

es una función continua para $z \neq a$ y de variación acotada sobre Γ se puede expresar $P_n(a)$ mediante

$$P_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} w(z)^n d\theta_a(z)$$

en donde esta integral en el caso que $a \in \Gamma$ se debe tomar igual a

$$\sum_v \beta_v + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma^*} w(z)^n d\theta_a(z)$$

si designamos por Γ^* la suma de los arcos de Γ que tienen ambos extremos en a y no pasan por este punto, y por $\beta_v \pi$ los ángulos exteriores formados por las tangentes en a de Γ .

De esto resulta, si a es un punto frontera múltiple formado por los elementos frontera a_1^* , a_2^* , ..., a_m^* y $\beta_1 \pi$, $\beta_2 \pi$, ..., $\beta_m \pi$ ($\leq 2\pi$) son los ángulos exteriores de las tangentes de en ellos, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[P_n(a) - \sum_{k=1}^m \beta_k w(a_k^*)^n \right] = 0. \quad (16)$$

Otro resultado que también hemos obtenido, bajo hipótesis que no detallamos, es el siguiente: Si a es un punto frontera simple de B y $\beta\pi$ ($0 < \beta \leq 2$) es el ángulo exterior que forman las tangentes de la curva $\Gamma = \text{Front. } B$ en a , resulta

$$\left| \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} \right| \sim \frac{\varphi(n/k)}{\sqrt{2\pi\beta^{-1}k\gamma(\beta k)}} \quad (k \geq 1) \quad (17)$$

para $n/k \rightarrow \infty$ y uniformemente respecto de k , siendo

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x x^x e^{-x}}}.$$

En el caso de que Ω no sea acotado en lugar de estos polinomios hemos empleado unas funciones enteras $E_k(z)$ análogas a las funciones de MITTAG-LEFFLER.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CARTAN, H.: *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leur dérivées succesives*. Paris, "Act. Sc. et Ind. n.º 867", 1940.
 - [2] GORNY, A.: *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle*, "Acta Math.", t. 71 (1939), pág. 317.
 - [3] MANDLBROJT, S.: *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications*. Paris, Gauthier Villars, 1952.
 - [4] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Una desigualdad entre las cotas de las derivadas de una función analítica en un ángulo*, "Rev. Las Ciencias" de Madrid, año XXIII (1958), pág. 533.
 - [5] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Disuguaglianze tra limiti e coefficienti dello sviluppo asintotico di una funzione in un angolo*, "Annali di Mat. Pura ed Appl", t. 48 (1959), páginas 147-159.
 - [6] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Equivalenza di classi di funzioni con sviluppo asintotico in un angolo. Funzioni caratteristiche*, "Bol. U. M. I.", vol. 14 (1959), págs. 525-531.
- UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA.

L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL DINI

$$x y'' + y' = \sin y$$

p o r

G. SANSONE

Riassunto di due conferenze tenute a Zaragoza, al Seminario Matematico del C.S.I.C. in collaborazione con C.P.E. ed A.S., nei giorni 5 e 7 maggio 1962*.

1. L'equazione

$$x y'' + y' = \sin y, \quad (y' = dy/dx) \quad (1)$$

ammette un solo integrale $y(x)$ che soddisfa la condizione $y(0) = a_0$, olomorfo in un cerchio con centro nell'origine e di raggio

$$R = \min [2/|\sin a_0|, 2/|\cos a_0|].$$

2. Sono integrali particolari dell'equazione (1), $y = k\pi$ con k intero.

Se $y(x)$ è un integrale della (1) anche $y(x) + 2k\pi$ e $\overline{y}(x) = y(-x) - \pi$ sono integrali della (1).

Queste proprietà consentono nel caso reale di studiare gli integrali della (1) per $x > 0$.

3. Restando sempre nel campo reale, la soluzione dell'equazione (1) che soddisfa le condizioni $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, ($x_0 > 0$), soddisfa l'equazione integrale

$$y(x) = y_0 + x_0 y'_0 \log \frac{x}{x_0} + \int_{x_0}^x \left(\log \frac{x}{s} \right) \sin y(s) ds,$$

che si integra col metodo delle approssimazione successive.

Vale la limitazione

$$|y(x)| < A + B |\log x| + |I_0(2\sqrt{x}) - 1|, \quad (A, B \text{ costanti}),$$

dove $I_0(z)$ rappresenta la funzione di Bessel

$$I_0(z) = 1 + \frac{z^2}{(1!)^2} + \frac{z^4}{(2!)^2} + \dots$$

* La materia di queste due conferenze è apparsa in due lavori di G. SANSONE:
a) *Sopra l'equazione differenziale del secondo ordine del Dini $x y'' + y' = \sin y$, comportamento degli integrali per $x \rightarrow \infty$* ; Ann. di Mat. pura ed appl., (4), 50(1960), 439-466;
b) *Les intégrales de l'équation de M. Dini $x y'' + y' = \sin y$ pour $x \rightarrow 0$* ; Ann. Univ. Sc. Budapestinsis, Sec. Math., T. III-IV (1960-61), 281-290.

4. Per gli integrali della (1) sussiste la formula fondamentale

$$x y'^2(x) + \int_{x_0}^x y'^2(s) ds + 2 \cos y(x) = x_0 y'^2(x_0) + 2 \cos y(x_0).$$

5. Limitandoci agli integrali $y(x)$, $x > 0$; $0 < y(x) < 2\pi$, se essi sono oscillanti, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = p\pi, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = (2-p)\pi, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

6. Fissato $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, $x_0 > 0$, $0 < y_0 < 2\pi$, se $y(x)$ è un integrale della (1) uscente da P_0 , se esso è non oscillante, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 2l\pi, \quad l \text{ intero.} \quad (2)$$

Fissato P_0 ad ogni intero l corrisponde almeno un integrale per P_0 che soddisfa la (2).

7. Per $l = 1$, l'integrale $y(x)$ che soddisfa la (2) è unico.

8. Gli integrali non oscillanti per P_0 , che soddisfano le condizioni $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 2\pi$, $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$, limitano gli integrali oscillanti uscenti da P_0 e per i quali è $0 < y(x) < 2\pi$.

9. Se $y(x)$ è un integrale della (1) si hanno tre possibilità:

$$\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y(x) = y_0 \text{ (finito)}.$$

10. Se $y(x)$ è un integrale della (1), e $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = y_0$, valgono per $y(x)$ le equazioni integrali:

$$y(x) = y_0 + \int_0^x \left(\log \frac{x}{s} \right) y(s) ds,$$

$$n y'^2(x) + \int_0^x y'^2(s) ds = 2 [\cos y_0 - \cos y(x)].$$

11. Se $y(x)$ è un integrale della (1), e per due valori x_1, x_2 di x , $0 < x_1 < x_2$ si ha $|y(x_1) - y(x_2)| > 2\pi$, allora $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = \infty$.

12. Esiste un numero positivo δ tale che dal punto (x_0, π) , $0 < x_0 \leq \delta$ parte un solo integrale limitato, $y(x) = \pi$. Se $x_0 > \delta$ da (x_0, π) oltre l'integrale $y(x) = \pi$ partono due integrali $y(x)$ tali che il $\lim_{x \rightarrow +0} y(x)$ è finito.

SOPRA UN'EQUAZIONE CHE SI PRESENTA NELLA DETERMINAZIONE DELLE ORBITE DI UN SINCROTONE

p o r

G. SANSONE

Riassunto di due conferenze tenute a Zaragoza, al Seminario Matematico del C.S.I.C. in collaborazione con C.P.E. ed A.S., nei giorni 7 e 8 maggio 1962*.

1. Il problema del sincrotrone è un caso particolare del seguente problema. Sono date l'equazione

$$\ddot{x} + \varphi(x)x = p(t), \quad (\dot{x} = dx/dt), \quad (1.0)$$

una costante positiva ω , e quattro costanti positive a, b, c, d tali che $ad - bc \neq 0$.

Fissata una coppia (x_0, y_0) si consideri la soluzione $x = x(t)$ dell'equazione (1.0) che soddisfa le condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = y_0,$$

e sui valori $x(t_0 + \omega), \dot{x}(t_0 + \omega)$ si eseguisca la trasformazione lineare:

$$\mathcal{E}: x_1 = ax(t_0 + \omega) + b\dot{x}(t_0 + \omega), \quad y_1 = cx(t_0 + \omega) + d\dot{x}(t_0 + \omega). \quad (1.1)$$

Si consideri la soluzione $x = x(t)$ della (1.0) che soddisfa le condizioni iniziali

$$x(t_0 + \omega) = x_1, \quad \dot{x}(t_0 + \omega) = y_1,$$

e sui valori $x(t_0 + 2\omega), \dot{x}(t_0 + 2\omega)$ si eseguisca la trasformazione

$$\mathcal{E}: x_2 = ax(t_0 + 2\omega) + b\dot{x}(t_0 + 2\omega), \quad y_2 = cx(t_0 + 2\omega) + d\dot{x}(t_0 + 2\omega). \quad (1.2)$$

Si iteri il procedimento: sia $x = x(t)$ la soluzione dell'equazione (1) che soddisfa le condizioni iniziali

$$x(t_0 + (n-1)\omega) = x_{n-1}, \quad \dot{x}(t_0 + (n-1)\omega) = y_{n-1}$$

e sui valori $x(t_0 + n\omega), \dot{x}(t_0 + n\omega)$ si eseguisca la trasformazione

$$\mathcal{E}: x_n = ax(t_0 + n\omega) + b\dot{x}(t_0 + n\omega), \quad y_n = cx(t_0 + n\omega) + d\dot{x}(t_0 + n\omega) \quad (1.n)$$

* La materia di queste due conferenze è apparsa in una memoria di G. SANSONE: *Sopra un'equazione che si presenta nella determinazione delle orbite di un sincrotrone*, Mem. Ace. Naz. dei XL, Roma, (4), 8(1957), 1-74.

Si chiede di determinare le terne x_0, y_0, t_0 tali che le soluzioni considerate restino tutte limitate.

Nel caso del sincrotrone è $a = 1, c = 0, d = 1$ e diremo che in questo caso si vuol risolvere il problema (P).

2. Giova considerare il problema (P) per l'equazione

$$\ddot{x} + \varphi(x)x = p, \quad (2.1)$$

con p costante, nelle seguenti ipotesi:

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$;
- 2) $\varphi(x) < 0$ se $x < \alpha, \varphi(x) > 0$ se $x > \alpha, \varphi(\alpha) = 0, \alpha < 0$;
- 3) $\varphi(x)$ lipschitziana in qualunque intervallo finito;
- 4) $x\varphi(x)$ decrescente in $(-\infty, \beta]$, crescente in $[\beta, \infty), \alpha < \beta < 0$;
- 5) $m x \geq \varphi(x) \geq M x$ per $x \leq -L, m > 0, M > 0$;
- 6) $\varphi(x)$ è derivabile in $(-\infty, \beta]$; $\varphi(x)$ è pure derivabile in $[\beta, \infty)$, salvo al più un numero finito di punti in ogni intervallo finito.

All'equazione (2.1) si può associare il sistema:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = p - x\varphi(x), \quad (2.2)$$

e posto $\beta\varphi(\beta) = -H$, secondoché $p < -H, p = -H, p > -H$ il sistema (2.2) non ha punti singolari, ha un sol punto singolare, ha due punti singolari.

Lo studio geometrico delle curve integrali del sistema (2.2) è fatto in maniera completa e si determinano delle regioni negative per il problema (P), e dei punti che risolvono invece il problema (P).

3. Si dàmo dei risultati di natura topologica per l'equazione (1.0) con $|p(t)| \leq p_0$, e si determina una regione negativa per il problema (P).

4. Supposto $p(t)$ periodica, $p(t + 2\omega) = p(t), \omega > 0$, se $x(t)$ è una soluzione dell'equazione (1.0), essa è anche soluzione dell'equazione integrale:

$$x(t) = \frac{1}{2\lambda \sin \lambda \omega} \int_0^{2\omega} k(t, \theta) x(\theta) \{\lambda^2 - \varphi(x(\theta))\} d\theta + P(t); \quad (4.1)$$

$$k(t, \theta) = \cos \lambda(\theta + \omega - t) \text{ se } 0 \leq \theta \leq t; \quad k(t, \theta) = \cos \lambda(\theta - \omega - t) \text{ se } t \leq \theta \leq 2\omega;$$

$$\lambda \text{ costante, } \lambda \omega \neq \pm \pi, \pm 2\pi, \dots;$$

$$P(t) = \frac{1}{2\lambda \sin \lambda \omega} \int_0^{2\omega} p(\theta) \cos \lambda(\theta - \omega - t) d\theta + \frac{1}{\lambda} \int_0^t p(\theta) \sin \lambda(t - \theta) d\theta.$$

Sotto opportune ipotesi per $|\lambda^2 - \varphi(x)|$ e per $P(t)$ si prova l'esistenza di una e una sola soluzione dell'equazione (4.1).

5. Nel caso di $p(t)$ periodica, di periodo $2\omega, p(t) = p(-t), \int_0^{2\omega} p(t) dt = 0$, se $m x > \varphi(x) > M x$ per $x < -L < 0$, fissato un intero $N > 0$ e arbitrario si può determinare un numero p_0 tale che se $|p(t)| < p_0$ l'equazione (1.0) ammette almeno N soluzioni periodiche di periodo 2ω .

MÉTODOS DE CÁLCULO Y MEJORA DE ÓRBITAS DE BINARIAS VISUALES

p o r

MIGUEL LISO PUENTE

INTRODUCCION

1. GENERALIDADES

Una estrella doble visual, binaria visual o par visual es el conjunto de dos estrellas que se proyectan muy próximas en la bóveda celeste, pero no solamente por un efecto de perspectiva, si no por que están lo suficientemente próximas para formar un sistema físico perfectamente definido, en virtud de lo cual, ambas describen sendas órbitas alrededor del centro de gravedad del sistema. Por regla general, se toma a la más brillante como "estrella principal" y punto de referencia del sistema, y entonces la estrella "satélite", o secundaria, describe en torno de la principal la llamada *órbita relativa*.

La proyección de esta órbita sobre el plano tangente a la esfera celeste en el punto ocupado por la estrella principal, se denomina *órbita aparente*; esta proyección puede considerarse como cilíndrica dada la distancia a que se encuentran los pares visuales y las magnitudes de las distancias entre las estrellas componentes.

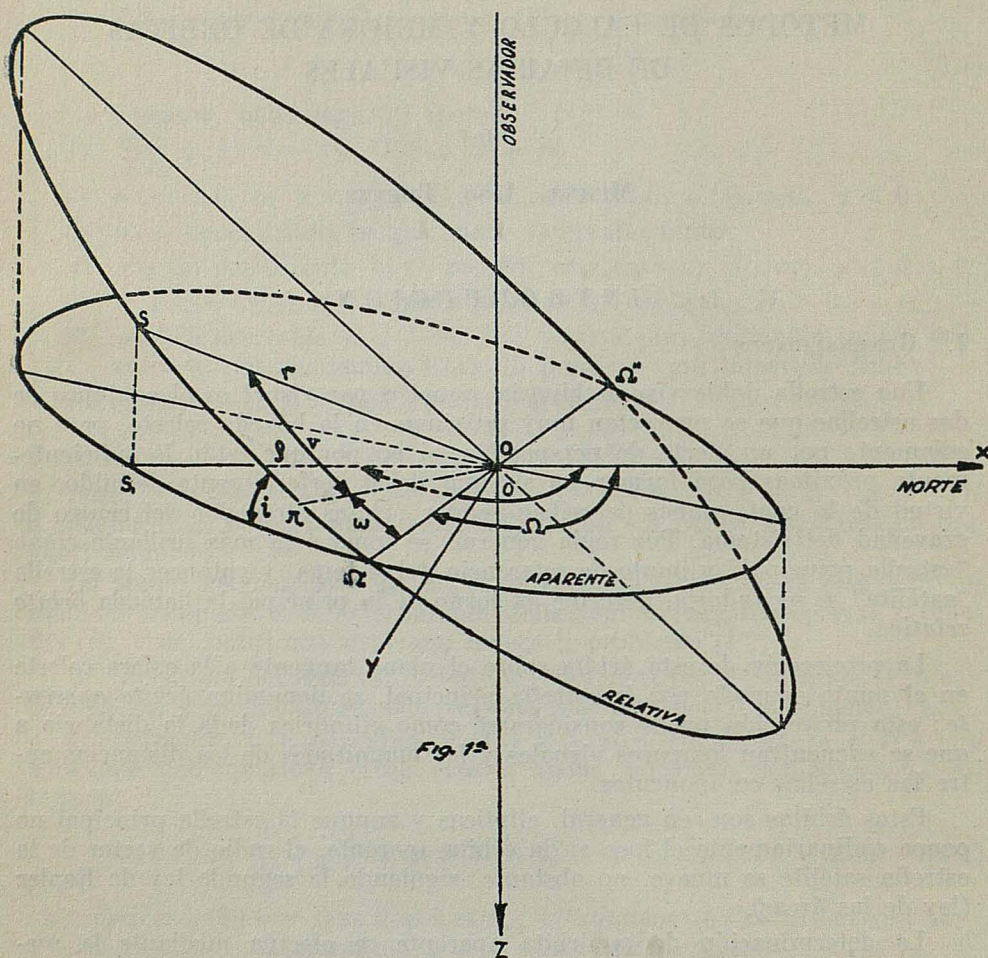
Estas órbitas son, en general, elípticas y aunque la estrella principal no ocupa ordinariamente el foco en la órbita aparente, el radio de vector de la estrella satélite se mueve, no obstante, siguiendo la segunda ley de Kepler (ley de las áreas).

La determinación de la órbita aparente se efectúa mediante la medida de ángulos de posición θ , y distancias aparentes ρ ; las primeras se miden a partir de la dirección Norte (fig. 1) como origen, en sentido norteeeste como positivo. Por tanto, en una época t , dada, la posición de la estrella satélite queda fijada, respecto de la principal, por este valor de t y los de θ y ρ medidos en esa época; así pues, una observación completa viene definida por la terna de valores θ , ρ , t , simultáneos.

Se dice que una estrella satélite tiene movimiento directo cuando se mueve en el sentido de los ángulos de posición crecientes; si va en sentido contrario, el movimiento se denomina retrógrado.

Conocida una serie de observaciones completas, se pueden trazar las curvas $\theta = \theta(t)$ y $\rho = \rho(t)$ que mejor pasen por el conjunto de puntos re-

presentativos de las distintas observaciones, trazado que debe ser muy cuidadoso y que, en cierto modo, requiere alguna habilidad personal; sobre estas curvas (fig. 2), mejor que sobre la elipse que pudiera construirse, se



puede comprobar el cumplimiento de la ley de las áreas por los datos de la observación. En este supuesto, los datos tomados sobre las propias curvas sirven mejor para el trazado de la elipse aparente, que los propios datos directos de observación, afectados de errores, mucho más notorios en la medida de distancias aparentes ρ , que en las de los ángulos de posición θ , ya que es mucho mayor la precisión de estas medidas que las de las distancias, debiendo, en consecuencia, evitarse cuanto sea posible, la introducción de éstas en el cálculo de órbitas; en el presente trabajo, como luego veremos en uno de los métodos, se hace uso solamente de las distancias para el cálculo del semi-eje mayor de la órbita.

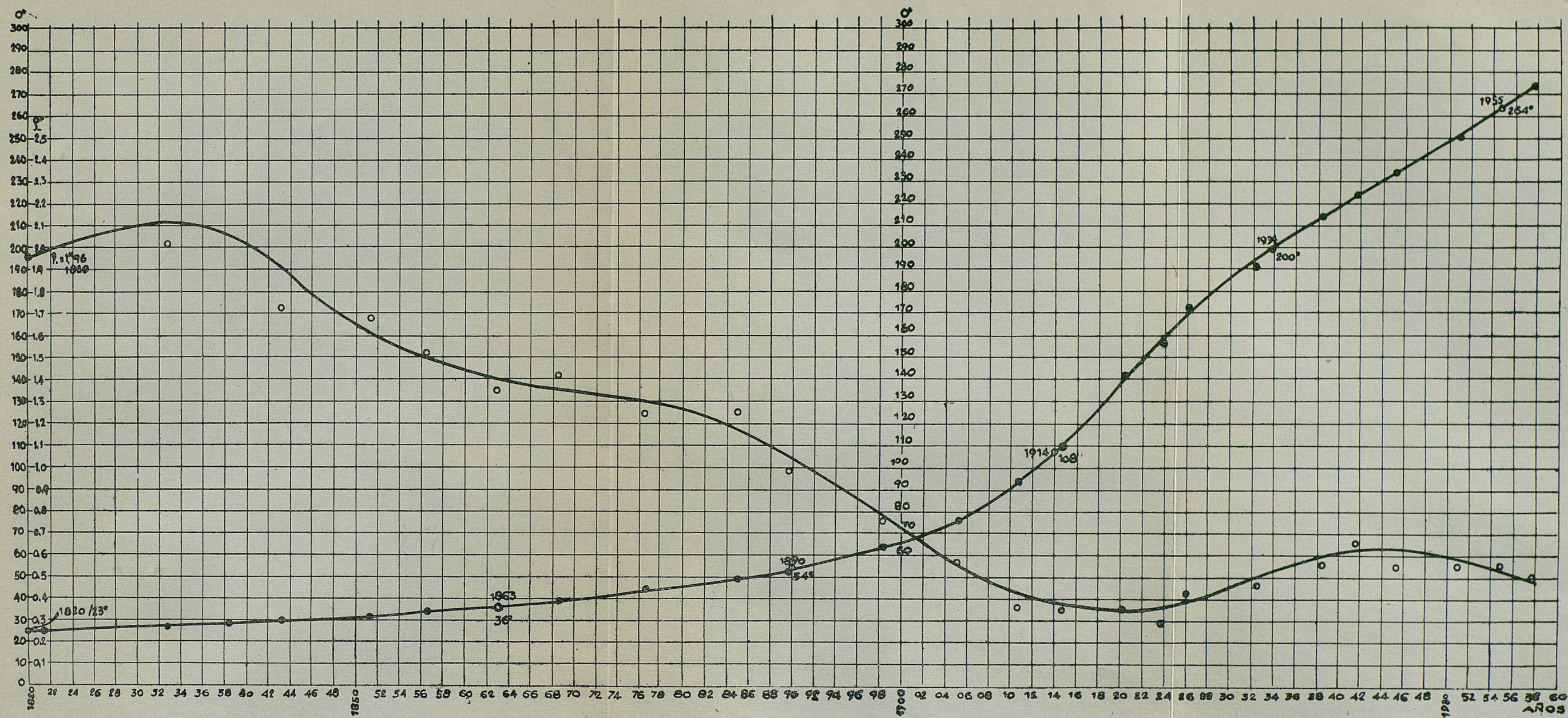


FIG. 2

Para fijar la posición de la órbita relativa, podemos tomar un triedro con el plano XOY en el plano de la aparente (tangente a la esfera celeste en el punto ocupado por la estrella principal) el eje Ox en dirección norte (fig. 1) y el OY en la dirección Este. La dirección positiva del eje OZ será la visual observador-estrella. En estas condiciones, se definen:

- a) Elementos estáticos de la cónica relativa, que fijan su posición y forma.
- b) Elementos dinámicos, que definen el movimiento de la estrella satélite en la cónica relativa.

Estos elementos son:

a) Estáticos:

I) Angulo de posición del nodo (Ω), determinado por la dirección norte y la recta de intersección de los planos de ambas órbitas.

II) La inclinación (i), ángulo del plano de la órbita relativa con el XOY .

III) La anomalía (ω), ángulo que forma la línea de los nodos, con el semieje mayor de la cónica relativa.

IV) Excentricidad ($e \equiv \sin \varphi$)

V) semieje mayor (a)

Los elementos I) y II) fijan la posición del plano de la órbita relativa respecto del plano XOY , quedando indeterminado, en el problema de las binarias visuales, el signo de la inclinación, mientras no se conozca una velocidad radial. La anomalía ω , determina la posición del eje mayor de la cónica relativa en su propio plano, respecto de la recta de los nodos, y finalmente, esta cónica queda definida por el semieje mayor a , y su excentricidad e .

b) Dinámicos:

I) Epoca de paso por el periastro (T), que fija el origen de los tiempos en el movimiento elíptico.

II) Periodo, duración de una revolución completa (P), o movimiento medio (n , en grados; μ , en radianes) que es el desplazamiento angular anual, y cuyo producto por el periodo es, naturalmente igual a 360° o 2π radianes, respectivamente.

El problema que, en general, se plantea es el de determinar los siete elementos Ω , i , ω , e , a , T , P , de la cónica relativa, a partir de un número adecuado de observaciones del tipo (θ, ρ, t) realizadas en la órbita aparente.

Esta cuestión fundamental tiene dos aspectos perfectamente definidos: El cálculo inicial de una órbita, u órbita provisional, y otro, el de mejora de una órbita provisional calculada por cualquier método.

La calidad de una órbita calculada queda definida por la magnitud y reparto de las diferencias observación-cálculo entre las θ y ρ observadas y las correspondientes calculadas, como efemérides, para las mismas épocas de las observaciones, utilizando los valores de los elementos de la órbita calculados.

Así pues, el problema de mejorar una órbita provisional, más o menos satisfactoria, es fundamental para lograr una órbita buena. En este sentido, creemos que nuestro trabajo presenta grandes ventajas sobre los laboriosos métodos en uso, especialmente porque prescinde del uso de las distancias medidas en la órbita aparente, excepto para el cálculo del semieje y además presenta una nueva ventaja en cuanto a la verificación de los valores de las funciones necesarias para el cálculo de los elementos de la órbita, ya que disponemos de unas ecuaciones que permiten saber, antes de llegar al cálculo de los elementos y al de las diferencias observación-cálculo en qué grado de exactitud estamos respecto de la órbita que pasa por los puntos prefijados.

2. RESEÑA DE MÉTODOS DE CÁLCULO Y MEJORA DE ÓRBITAS.

Son numerosos los métodos existentes para efectuar el cálculo de órbitas de estrellas dobles visuales pasando de la órbita aparente a la relativa; entre ellos deben citarse, el método analítico de Kowalsky, del que el Dr. Vidal Abascal (1) da una nueva deducción, distinta de la de Smart. Para este método, el Dr. Cid Palacios (2) expuso otra deducción de gran sencillez. Basado en la aplicación de series de Fourier el mismo Dr. Cid ha dado otro método para el cálculo de órbitas.

El Dr. Rabe (3) ha dado un método para el cálculo de órbitas prescindiendo de introducir las derivadas de orden superior de las coordenadas, y mediante la introducción de órbita auxiliar. Zagar (4) y Picart (5), han desarrollado sendos métodos analíticos. El método de E. Martín (6) es un método de paso de la órbita aparente a la relativa, y el de Zelmannow (7) es análogo al de Zwiers.

El método de Thiele-Innes (1), abre las puertas a un nuevo modo del cálculo de órbitas, tomando tres observaciones completas del tipo (x, y, t) , y la constante de las áreas, pero la inseguridad de este dato hace que la bondad de este método desmerezca un tanto.

El método del Dr. Cid Palacios (8) es el primero que establece el número necesario y suficiente de datos para la obtención de órbitas, y supone gran avance en la resolución del problema, pues permite el cálculo de la órbita relativa conociendo tres observaciones completas (θ, ρ, t) y una incompleta (θ, t) , presentando, no obstante, el inconveniente de tener que introducir tres distancias en el cálculo, que, como ya hemos dicho, son magnitudes medidas con menor precisión que los ángulos de posición.

Cualquiera que sea el método aplicado para obtener los elementos de una órbita, ocurre que esta, en general, no es plenamente satisfactoria, por lo que es necesario mejorar la órbita obtenida hasta llegar a un grado de bondad tan alto como sea posible; para ello se utilizan métodos gene-

ralmente muy laboriosos, con numerosos tanteos, atendiendo a la marcha de las diferencias observación-cálculo y dependiendo en parte de la intuición del calculador, ajustando y rectificando los elementos de la órbita de acuerdo con las variaciones de dichas diferencias, lo que obliga a su cálculo cada vez que se dan nuevos valores a los elementos.

Entre los numerosos métodos para la mejora de órbitas, podemos citar el de Klinkerfues (9); la variante de este expuesta por el Dr. Vidal Abascal (1), así como el del Dr. Cid (10), de mejora de su propio método; los de Rabe, Comstock, Thiele, etc., etc.

3. MÉTODO DE CÁLCULO Y MEJORA OBJETO DEL PRESENTE TRABAJO

Lo expuesto anteriormente indujo al Dr. Cid a proponernos el estudio del cálculo de órbitas utilizando el menor número posible de distancias, bien entendido que una al menos, es necesaria para el cálculo del semieje, si bien este se conduce en la práctica, como ya veremos, en forma tal, que se hace uso de toda la lista de ρ_i disponibles para su cálculo y en el presente método, se prescinde totalmente de las distancias para el cálculo de los otros seis elementos.

Por todo ello, hemos abordado el problema de cálculo de órbitas conocidos:

a) Una observación completa (θ, ρ, t) y cinco incompletas de la forma (θ, t); es decir, conociendo seis ángulos de posición y una distancia.

b) Dos observaciones completas y tres incompletas, o bien cinco ángulos y dos distancias.

Es decir, en ambos casos disponemos de tantos datos como elementos hay que determinar en la órbita, y las respectivas épocas de observación. Por tanto, con las incógnitas $P, e, T, \Omega, \omega, i, a$, comunes para ambos casos, disponemos de los datos:

$$\begin{array}{ll} a) & \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \rho_1, \\ b) & \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \rho_1, \rho_5, \end{array}$$

y en ambos casos, las épocas de las observaciones.

Teniendo en cuenta la estructura de la ecuación de Thiele-Innes (4.1) y de las magnitudes que en su método de cálculo de órbitas (1) intervienen, van a ser las incógnitas principales en nuestro método, el movimiento medio en radianes (μ) y las diferencias de anomalías excéntricas en la cónica relativa, $E_i - E_1$ ($i = 2, 3, 4, 5, 6$), que llamaremos respectivamente U, V, W, X, Y .

Valiéndonos de la ecuación de Thiele podemos establecer un grupo de quince ecuaciones de condición (4.3), en las que cada $F(Z)$ es $Z - \sin Z$, lo que nos liga a todos los datos disponibles en el problema con las que hemos llamados incógnitas fundamentales y además con las

magnitudes desconocidas c , ρ_2 , ρ_3 , ρ_4 , ρ_5 y ρ_6 . Para poder llegar a ligar las seis incógnitas μ , U , V , W , X e Y , con las magnitudes conocidas exclusivamente, tenemos que eliminar inexcusablemente todas las citadas como desconocidas, cosa que haremos sistemáticamente a través del paso (4.5), hasta obtener un grupo de ecuaciones (4.6), que ligan directamente a nuestras incógnitas principales con razones dobles de rayos perfectamente conocidos en nuestra hipótesis. Claro está, que al obrar así, nos ha desaparecido ciertamente la única distancia ρ_1 conocida, pero esto carece de trascendencia, pues al llegar a los elementos orbitales, salvo el semieje, éstos serán comunes a la órbita objeto de estudio y a todas sus homotéticas.

De todo el conjunto de ecuaciones (4.6) solamente son independientes entre sí las tres primeras de la primera columna, y las que se obtienen de ellas y de sus correspondientes en la segunda columna, al expresar que entre los primeros miembros de cada pareja existe la misma relación que entre las razones dobles de sus segundos miembros; a saber, si λ_i es el valor de un segundo miembro en la primera columna, $\lambda_i - 1$, es el valor del correspondiente en la segunda columna.

En virtud de ello, se puede plantear el sistema de ecuaciones fundamentales que, expuesto en forma simbólica en (5.2) hemos desarrollado en (5.3) y con éste, la cuestión astronómica queda resuelta, pues mediante este último citado sistema quedan determinadas las incógnitas μ , U , V , W , X e Y , mediante las cuales podemos calcular los elementos de la órbita, sin intervención de las distancias, excepto para el semieje.

Para el caso de cinco ángulos y dos distancias, el cálculo se conduce prácticamente lo mismo, y como ahora no existe E_6 , desaparecen todas las ecuaciones que contienen Y , bien sola, bien en diferencia con otra, y en el sistema (5.3) no figuran las ecuaciones tercera y sexta; entonces, para determinar también en este caso el problema, sí será necesario hacer intervenir las dos distancias conocidas, pues la quinta ecuación necesaria para determinar en este caso, el problema, la obtendremos de cualquiera de las ecuaciones de la cuarta fila de (4.5), de cuyos segundos miembros conocemos ahora todas sus magnitudes; por ello creemos más efectivo el método en el caso de conocerse seis ángulos de posición y una distancia.

Como indicaremos más adelante, es conveniente hacer constar que estos métodos, junto con el expuesto por el Dr. Cid (8), para el caso de cuatro ángulos y tres distancias, agotan la posibilidad de combinaciones en los datos, ángulos y distancias, para el estudio de esta cuestión.

También hemos tratado de obtener una simplificación substancial en las tres ecuaciones últimas del sistema fundamental, y a través de la forma (5.8) obtenida anteriormente por el Dr. Cid, hemos llegado a la más simple de (5.10), muy útil, y de carácter universal, por ser independientes de los ángulos de posición.

Sea cualquiera el método de resolución del sistema fundamental, conviene insistir en que sus propias ecuaciones, o bien sus tres primeras y las de (5.10), permiten conocer la aproximación con que se entra con unos

valores aproximados, o la calidad de sucesivas aproximaciones, sin necesidad de llegar a calcular los elementos orbitales y las diferencias observación-cálculo.

Estos sistemas fundamentales que determinan las incógnitas de nuestra cuestión, no son de fácil solución directa, al menos de momento, y por ello, y pensando en adoptar el método para mejora de órbitas, hemos abordado su solución partiendo de unos datos provisionales o primarios obtenidos por un método cualquiera, operando por aproximaciones sucesivas, admitiendo que los valores exactos son iguales a sus respectivos aproximados más una corrección, de tal forma, que el orden de magnitud de esta es tal, que nos permite sustituir el seno de las correcciones por el arco, y su coseno por la unidad; mediante estas hipótesis llegamos a obtener un sistema de ecuaciones, de no gravoso cálculo, que define las seis correcciones de las incógnitas (7.6), y que además, se puede reducir muy fácilmente a un sistema de tres ecuaciones en tres de las correcciones; además, tiene unos coeficientes cuyos elementos son necesarios calcular para conocer el orden de aproximación de los datos primarios, o de los iniciales en cada entrada.

Para el cálculo de los elementos de la órbita, una vez conocidos μ , U , V , W , X e Y , hemos seguido inicialmente el método de Thiele-Innes (1), para inmediatamente eliminar las distancias en las ecuaciones que nos han de servir para el cálculo de las anomalías excéntricas de la órbita relativa, obteniéndolas en función, exclusivamente, de las incógnitas del sistema fundamental. A expresiones análogas se ha llegado para el cálculo de la excentricidad, si bien en éstas intervienen ya las anomalías excéntricas calculadas.

Una vez conocidos P , e y T , y para eludir nuevamente la intervención de las distancias, hemos seguido el método expuesto por el Dr. Cid en su trabajo sobre "Cálculo y mejora de órbitas parabólicas en los pares visuales" (12), de gran comodidad y velocidad de trabajo.

Finalmente, ha sido ya ineludible la intervención de ρ_1 para el cálculo del semieje por las bien conocidas fórmulas (6.17), si bien esto carece de importancia, pues en las aplicaciones prácticas, lo que se hace es calcular unas ρ_i' para la órbita de semieje $a = 1$, homotética de la dada, comparándolos con los de la observación de la misma época, y el promedio de los cocientes $\rho_i/\rho_i' = k_i$, es el valor del semieje de la órbita en cuestión.

Hemos aplicado primeramente nuestro método al par visual ADS.1631 = Σ 208, que ha sido muy cuidadosamente estudiado por Baize (11) el cual ha obtenido una órbita de difícil mejora, y por ello la hemos tomado como prueba de contrastación del método que nos ocupa, no para obtener una órbita mejor que la muy buena dada por Baize, si no para ver si el método daba directamente una comparable con ella. Hemos detallado, creemos que suficientemente, el método operativo y creemos que una de las cosas sobre las cuales conviene llamar la atención es el cuadro (8.8) comparativo de los sucesivos residuos que en las ecuaciones fundamentales (5.3) van dejando los valores iniciales y los pos-

teriormente obtenidos en las dos entradas realizadas. Claramente se ve en este cuadro la firme marcha hacia una mayor precisión de los sucesivos valores de las incógnitas encontrados, con substanciales disminuciones en el orden de magnitud. También pueden servir de verificación de la bondad en la marcha de los cálculos, la concordancia entre los cuatro valores de E_1 encontrados, con una diferencia máxima de algo más de 18 centésimas de grado, y en la no menos notoria en los valores de la excentricidad, con diferencia máxima de 0.0048, y en los de $(\mu T)_i$ cuya máxima oscilación es de 0.002435.

El paso de la órbita obtenida por los puntos iniciales tomados como datos, es plenamente correcto como lo demuestran las diferencias O-C de los cuadros (8.11), (8.13), y (8.15), observándose perfectamente en los primeros la corrección del cálculo por el paso exacto de la órbita por las ternas de puntos determinantes de los elementos angulares.

Finalmente, la distribución de las diferencias a lo largo de toda la órbita es correcta y perfectamente comparable con la mejorada por Baize.

Con el fin de contrastar su capacidad para la mejora, también hemos aplicado nuestro método al par visual ADS.5159 que, con el número cinco de "nuevas órbitas" publica el Dr. Baize (11), entendiéndose que se trata de unos datos primarios de sus elementos.

Sobre la curva $\theta(t)$ (fig. 3) se ha hecho la elección de los datos

$$\begin{array}{cccccc} t_i = 1915 & 1922 & 1930 & 1942 & 1946 & 1954 \\ \theta_i = 274^\circ & 42^\circ & 162^\circ & 225^\circ & 280^\circ & 57^\circ \end{array} \quad (3.1)$$

entrando en nuestro método con el valor de $\mu = 0.198828$ que se deduce de los elementos de Baize, y con U_0 , V_0 , W_0 , X_0 e Y_0 calculados para las épocas fijadas a partir de dichos elementos.

Los sucesivos residuos que en el sistema (5.3) dan los datos iniciales y los obtenidos en las tres entradas efectuadas (vid. parágrafo 9), han sido

$$\begin{array}{cccc} \text{iniciales} & \text{entrada 1} & \text{entrada 2} & \text{entrada 3} \\ + 0.063369 & + 0.002791 & - 0.014094 & + 0.000873 \\ + 1.364952 & - 0.511994 & - 0.029923 & - 0.000755 \\ + 0.121947 & + 0.085170 & + 0.027615 & + 0.000093 \\ - 0.001022 & + 0.013432 & + 0.003218 & - 0.000853 \\ + 0.000035 & + 0.060939 & - 0.002554 & + 0.000189 \\ + 0.000220 & - 0.114955 & - 0.005953 & + 0.000391 \end{array} \quad (3.2)$$

Con los últimos datos (9.15) que han dado tan pequeños y uniformes residuos en las ecuaciones fundamentales, hemos procedido al cálculo de los elementos angulares, adoptando finalmente para estos los valores promedios. A continuación exponemos el cuadro completo de valores, y las diferencias O-C en ángulos de posición, para los puntos (3.1) tomados como datos:

Elementos de la órbita:

$P = 30^{\circ} 76$	$e = 0.2577$	$T = 1949,93$
<i>Terna</i> 1.2.3	<i>Terna</i> 2.3.5	<i>Orbita I</i> (medias)
$\omega = 333^{\circ}68$	$334^{\circ}31$	$333^{\circ}99$
$\Omega = 25^{\circ}73$	$25^{\circ}21$	$25^{\circ}47$
$i = 56^{\circ}82$	$56^{\circ}55$	$56^{\circ}68$

diferencias O-C para las θ_i tomadas como datos

1	0.00	— 0.67	— 0.33
2	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00
4	— 0.17	— 0.22	— 0.19
5	+ 0.69	0.00	+ 0.36
6	+ 0.19	— 0.04	+ 0.07

(3.3)

Calculadas las diferencias O-C par todos los datos de observaciones disponibles (bien escasas por cierto) se han encontrado valores que representan una mejora respecto de los de la órbita inicial obtenida por Baize, y que expondremos en el cuadro comparativo a continuación; pero la índole de las diferencias nos ha inducido a buscar una mayor mejora, no solamente realizando una cuarta entrada de aproximación, si no también rectificando, al propio tiempo, la elección de los puntos datos, tomando ahora los ángulos de posición (fig. 4)

$$\theta_i = 276^{\circ}0 \quad 41^{\circ}5 \quad 162^{\circ}0 \quad 225^{\circ}5 \quad 282^{\circ}0 \quad \text{y} \quad 55^{\circ}0$$

correspondiendo, respectivamente, a las mismas épocas para los que se tomaron los iniciales.

En estas circunstancias, hemos llegado a obtener los elementos siguientes:

Orbita II.

$$P = 30^{\circ}77 \quad e = 0.246 \quad T = 1949,80 \quad \omega = 331^{\circ}16 \quad \Omega = 26^{\circ}67$$

$$i = 58^{\circ}57$$

que dan las diferencias O-C siguientes para valores de θ_i en los datos:

1	0.00
2	0.00
3	0.00
4	+ 0.09
5	— 0.20
6	— 0.04

habiendo utilizado para la determinación de los elementos angulares de la órbita, la terna 1.2.3, como claramente se ve en las diferencias expuestas.

A continuación expresamos, en cuadro comparativo, las diferencias 0-C para todas las observaciones disponibles de ángulos de posición:

	<i>Iniciales</i> (<i>Baize</i>)	<i>Orbita</i> <i>I</i>	<i>Orbita</i> <i>II</i>	
1	+ 4°7	+ 4°3	+ 2°8	
2	— 6.2	— 1.1	— 0.7	
3	— 4.7	— 8.1	— 6.9	
4	+ 9.9	+ 4.1	+ 4.8	
5	+ 5.6	+ 4.2	+ 3.3	
6	— 5.2	— 0.4	— 1.2	
7	— 9.1	— 0.8	— 1.0	
8	+ 3.0	+ 7.6	+ 7.4	
9	254.1	255.8	256.4	(no hay medida)
10	+ 4.2	— 5.6	— 5.1	
11	— 3.5	— 4.8	— 2.8	

y cuyo examen habla claramente de la mejora obtenida en este aspecto.

Realizado el cálculo del semieje, que resulta ser $a = 0''24$, hemos calculado las diferencias 0-C para las distancias aparentes, y encontramos los siguientes residuos que comparamos también con los obtenidos por el Doctor Baize:

Diferencias 0-C para las ρ_i :

	<i>Baize</i>	<i>Orbita</i> <i>II</i>	
1	+ 0''01	+ 0''06	
2	+ 0.06	+ 0.01	
3	0.00	+ 0.02	
4	+ 0.01	+ 0.02	
5	— 0.02	— 0.06	
6	— 0.06	— 0.10	
7	+ 0.02	+ 0.03	
8	— 0.01	+ 0.03	
9	0''199	0''14	(no hay medida)
10	— 0.03	— 0.08	
11	— 0.02	— 0.03	

La comparación de estas diferencias 0-C para nuestra órbita II permite comprobar una sistemática disposición de signos en estos residuos. Después de detenido estudio de éstos, creemos es bastante evidente la existencia de un tercer cuerpo que perturba el movimiento, dando lugar a disminuciones y aumentos de la distancia con una periodicidad que, en principio, puede evaluarse aproximadamente en 16.5 años.

La presencia de este tercer cuerpo explicaría también que en la época 1944.87 la distancia aparente entre las dos estrellas observadas fuese menor que 0"1, de acuerdo con la observación realizada por Van Biesbroeck, desapareciendo así la irregularidad señalada por el Dr. Baize para la citada observación.

DESARROLLO DEL METODO

4. ECUACIONES DE RELACIÓN

La conocida ecuación de Thiele-Innes, se puede escribir en la forma:

$$\mu (t_j - t_i) - [(E_j - E_i) - \sin (E_j - E_i)] = \frac{\rho_i \rho_j}{c} \sin (\theta_j - \theta_i) \quad (4.1)$$

en donde ρ_i , θ_i , E_i son respectivamente la distancia y el ángulo de posición en la órbita aparente, y la anomalía excéntrica en la cónica relativa, correspondientes todas ellas a la época t_i , y en donde $c = a^2 \cdot \cos i \cdot \cos \varphi$, poniendo, como ya se ha dicho, $e \equiv \sin \varphi$ y expresando el movimiento medio μ , en radianes.

Vamos a suponer, inicialmente, que conocemos los datos

$$\begin{array}{cccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ \rho_1 & & & & & \end{array} \quad (4.2)$$

es decir, los ángulos de posición en la órbita aparente correspondientes a seis épocas conocidas, y el radio, en dicha órbita, correspondiente a una cualquiera de ellas, que, para fijar ideas, supondremos pertenece a la primera observación.

Llamemos U , V , W , X , Y , a las diferencias $E_2 - E_1$, $E_3 - E_1$, $E_4 - E_1$, $E_5 - E_1$ y $E_6 - E_1$ respectivamente, con lo cual serán: $V - U = E_3 - E_2$, $W - U = E_4 - E_2$, $X - U = E_5 - E_2$, $Y - U = E_6 - E_2$, $W - V = E_4 - E_3$, $X - V = E_5 - E_3$, $Y - V = E_6 - E_3$, $X - W = E_5 - E_4$, $Y - W = E_6 - E_4$ e $Y - X = E_6 - E_5$.

A estas diferencias entre anomalías excéntricas corresponden, en la ecuación de Thiele, valores de $(t_j - t_i)$ y de $(\theta_j - \theta_i)$, de los mismos subíndices; poniendo, para abreviar, $t_j - t_i = T_{ji}$, y $\theta_j - \theta_i = \theta_{ji}$ y haciendo $F(Z) = Z - \sin Z$ ($Z = U, V, W, \dots V - U, \dots W - V \dots X - W \dots Y - X$),

aplicando sucesivamente estas diferencias a la ecuación (4.1), podremos escribir el siguiente sistema de ecuaciones de relación:

$$\begin{aligned}
 \mu T_{21} - F(U) &= \frac{\rho_1 \rho_2}{c} \operatorname{sen} \theta_{21} & \mu T_{43} - F(W - V) &= \frac{\rho_3 \rho_4}{c} \operatorname{sen} \theta_{43} \\
 \mu T_{31} - F(V) &= \frac{\rho_1 \rho_3}{c} \operatorname{sen} \theta_{31} & \mu T_{53} - F(X - V) &= \frac{\rho_3 \rho_5}{c} \operatorname{sen} \theta_{53} \\
 \mu T_{41} - F(W) &= \frac{\rho_1 \rho_4}{c} \operatorname{sen} \theta_{41} & \mu T_{63} - F(Y - V) &= \frac{\rho_3 \rho_6}{c} \operatorname{sen} \theta_{63} \\
 \mu T_{51} - F(X) &= \frac{\rho_1 \rho_5}{c} \operatorname{sen} \theta_{51} & \mu T_{54} - F(X - W) &= \frac{\rho_4 \rho_5}{c} \operatorname{sen} \theta_{54} \\
 \mu T_{61} - F(Y) &= \frac{\rho_1 \rho_6}{c} \operatorname{sen} \theta_{61} & \mu T_{64} - F(Y - W) &= \frac{\rho_4 \rho_6}{c} \operatorname{sen} \theta_{64} \quad (4.3) \\
 \mu T_{32} - F(V - U) &= \frac{\rho_2 \rho_3}{c} \operatorname{sen} \theta_{32} & \mu T_{65} - F(Y - X) &= \frac{\rho_5 \rho_6}{c} \operatorname{sen} \theta_{65} \\
 \mu T_{42} - F(W - U) &= \frac{\rho_2 \rho_4}{c} \operatorname{sen} \theta_{42} \\
 \mu T_{52} - F(X - U) &= \frac{\rho_2 \rho_5}{c} \operatorname{sen} \theta_{52} \\
 \mu T_{62} - F(Y - U) &= \frac{\rho_2 \rho_6}{c} \operatorname{sen} \theta_{62}
 \end{aligned}$$

En estas ecuaciones son conocidas las diferencias de tiempos T_{ji} , y los senos de las diferencias θ_{ji} , en todas ellas, y en nuestro supuesto, la distancia ρ_1 que figura en las cinco primeras ecuaciones. Es necesario ahora eliminar todas las distancias desconocidas, pero al propio tiempo se nos eliminará la conocida ρ_1 , cosa esta que carece de importancia, pues entonces, los resultados que obtengamos serán comunes a la órbita objeto de estudio y a todas sus homotéticas, y la fijación de la que nos interesa se hará al final del cálculo, introduciendo adecuadamente el valor de la distancia conocida.

Para facilitar la mecánica operativa vamos a hacer

$$\mu T_{21} - F(U) \equiv [U],$$

y utilizaremos símbolos análogos para todas las demás. En estas condiciones, el sistema (4.3) toma la forma simbólica siguiente:

$$\begin{aligned}
 [U] &= \frac{\rho_1 \rho_2}{c} \operatorname{sen} \theta_{21} & [V-U] &= \frac{\rho_2 \rho_3}{c} \operatorname{sen} \theta_{32} & [W-V] &= \frac{\rho_3 \rho_4}{c} \operatorname{sen} \theta_{43} \\
 [V] &= \frac{\rho_1 \rho_3}{c} \operatorname{sen} \theta_{31} & [W-U] &= \frac{\rho_2 \rho_4}{c} \operatorname{sen} \theta_{42} & [X-V] &= \frac{\rho_3 \rho_5}{c} \operatorname{sen} \theta_{53} \\
 [W] &= \frac{\rho_1 \rho_4}{c} \operatorname{sen} \theta_{41} & [X-U] &= \frac{\rho_2 \rho_5}{c} \operatorname{sen} \theta_{52} & [Y-V] &= \frac{\rho_3 \rho_6}{c} \operatorname{sen} \theta_{63} \\
 [X] &= \frac{\rho_1 \rho_5}{c} \operatorname{sen} \theta_{51} & [Y-U] &= \frac{\rho_2 \rho_6}{c} \operatorname{sen} \theta_{62} & [X-W] &= \frac{\rho_4 \rho_5}{c} \operatorname{sen} \theta_{54} \\
 [Y] &= \frac{\rho_1 \rho_6}{c} \operatorname{sen} \theta_{61} & & & [Y-W] &= \frac{\rho_4 \rho_6}{c} \operatorname{sen} \theta_{64} \\
 & & & & [Y-X] &= \frac{\rho_5 \rho_6}{c} \operatorname{sen} \theta_{65}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Para ordenar el proceso de eliminación de las ρ_i , dividiremos cada una de las ecuaciones de la primera columna de (4.4) por las de las demás columnas que tengan común con ellas una $\rho_i \neq \rho_1$. Es decir, por ejemplo, la primera ecuación $[U]$, la dividiremos por cada una de las ecuaciones de la segunda columna, con lo cual en estos cocientes no figurará la distancia ρ_2 . Operando análogamente con las restantes de la primera columna y ordenando los resultados por filas cuyas ecuaciones contengan cada razón ρ_i/ρ_i ($i = 2, 3, 4, 5, 6$) común, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{[V]}{[V-U]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{31}}{\rho_2 \operatorname{sen} \theta_{32}} & \frac{[W]}{[W-U]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{41}}{\rho_2 \operatorname{sen} \theta_{42}} & \frac{[X]}{[X-U]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{51}}{\rho_2 \operatorname{sen} \theta_{52}} & \frac{[Y]}{[Y-U]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{61}}{\rho_2 \operatorname{sen} \theta_{62}} \\
 \frac{[U]}{[V-U]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{21}}{\rho_3 \operatorname{sen} \theta_{32}} & \frac{[W]}{[W-V]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{41}}{\rho_3 \operatorname{sen} \theta_{43}} & \frac{[X]}{[X-V]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{51}}{\rho_3 \operatorname{sen} \theta_{53}} & \frac{[Y]}{[Y-V]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{61}}{\rho_3 \operatorname{sen} \theta_{63}} \\
 \frac{[U]}{[W-U]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{21}}{\rho_4 \operatorname{sen} \theta_{42}} & \frac{[V]}{[W-V]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{31}}{\rho_4 \operatorname{sen} \theta_{43}} & \frac{[X]}{[X-W]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{51}}{\rho_4 \operatorname{sen} \theta_{54}} & \frac{[Y]}{[Y-W]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{61}}{\rho_4 \operatorname{sen} \theta_{64}} \\
 \frac{[U]}{[X-U]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{21}}{\rho_5 \operatorname{sen} \theta_{52}} & \frac{[V]}{[X-V]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{31}}{\rho_5 \operatorname{sen} \theta_{53}} & \frac{[W]}{[X-W]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{41}}{\rho_5 \operatorname{sen} \theta_{54}} & \frac{[Y]}{[Y-X]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{61}}{\rho_5 \operatorname{sen} \theta_{65}} \\
 \frac{[U]}{[Y-U]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{21}}{\rho_6 \operatorname{sen} \theta_{62}} & \frac{[V]}{[Y-V]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{31}}{\rho_6 \operatorname{sen} \theta_{63}} & \frac{[W]}{[Y-W]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{41}}{\rho_6 \operatorname{sen} \theta_{64}} & \frac{[X]}{[Y-X]} &= \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \theta_{51}}{\rho_6 \operatorname{sen} \theta_{65}}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dividiendo ahora cada ecuación de estas por cada una de las siguientes de su misma fila, se eliminan todas las distancias, incluso la dato en el problema, y en los segundos miembros aparecen razones dobles de cuatro de los seis rayos fijados por las θ_i conocidas en el caso que nos ocupa.

Su ordenación la hacemos por filas, de tal forma, que los segundos miembros de las ecuaciones de una misma fila, contengan los mismos rayos. Como se trata de seis elementos tomados cuatro a cuatro, las quince razones dobles distintas que pueden aparecer, servirán también para la ordenación total, y no hacemos intervenir las que no contienen θ_1 , que son precisamente las que tienen factores de la forma $[V-U]$, $[W-V]$, etc. exclusivamente, por ser inmediata combinación lineal de las que vamos a consignar. Efectuando las divisiones en la forma dicha, obtenemos las treinta ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 \frac{[V][W-U]}{[W][V-U]} = \frac{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{42}}{\text{sen } \theta_{32} \text{ sen } \theta_{41}} & \frac{[U][W-V]}{[W][V-U]} = -\frac{\text{sen } \theta_{21} \text{ sen } \theta_{43}}{\text{sen } \theta_{23} \text{ sen } \theta_{41}} & \frac{[U][W-V]}{[V][W-U]} = \frac{\text{sen } \theta_{21} \text{ sen } \theta_{43}}{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{42}} \\
 \frac{[V][X-U]}{[X][V-U]} = \frac{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{52}}{\text{sen } \theta_{32} \text{ sen } \theta_{51}} & \frac{[U][X-V]}{[X][V-U]} = -\frac{\text{sen } \theta_{21} \text{ sen } \theta_{53}}{\text{sen } \theta_{23} \text{ sen } \theta_{51}} & \frac{[U][X-V]}{[V][X-U]} = \frac{\text{sen } \theta_{21} \text{ sen } \theta_{53}}{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{52}} \\
 \frac{[V][Y-U]}{[Y][V-U]} = \frac{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{62}}{\text{sen } \theta_{32} \text{ sen } \theta_{61}} & \frac{[U][Y-V]}{[Y][V-U]} = -\frac{\text{sen } \theta_{21} \text{ sen } \theta_{63}}{\text{sen } \theta_{23} \text{ sen } \theta_{61}} & \frac{[U][Y-V]}{[V][Y-U]} = \frac{\text{sen } \theta_{21} \text{ sen } \theta_{63}}{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{62}} \\
 \frac{[W][X-U]}{[X][W-U]} = \frac{\text{sen } \theta_{41} \text{ sen } \theta_{52}}{\text{sen } \theta_{42} \text{ sen } \theta_{51}} & \frac{[U][X-W]}{[X][W-U]} = -\frac{\text{sen } \theta_{21} \text{ sen } \theta_{54}}{\text{sen } \theta_{24} \text{ sen } \theta_{51}} & \frac{[U][X-W]}{[W][X-U]} = \frac{\text{sen } \theta_{21} \text{ sen } \theta_{54}}{\text{sen } \theta_{41} \text{ sen } \theta_{52}} \\
 \frac{[W][Y-U]}{[Y][W-U]} = \frac{\text{sen } \theta_{41} \text{ sen } \theta_{62}}{\text{sen } \theta_{42} \text{ sen } \theta_{61}} & \frac{[U][Y-W]}{[Y][W-U]} = -\frac{\text{sen } \theta_{21} \text{ sen } \theta_{64}}{\text{sen } \theta_{24} \text{ sen } \theta_{61}} & \frac{[U][Y-W]}{[W][Y-U]} = \frac{\text{sen } \theta_{21} \text{ sen } \theta_{64}}{\text{sen } \theta_{41} \text{ sen } \theta_{62}} \\
 \frac{[X][Y-U]}{[Y][X-U]} = \frac{\text{sen } \theta_{51} \text{ sen } \theta_{62}}{\text{sen } \theta_{52} \text{ sen } \theta_{61}} & \frac{[U][Y-X]}{[Y][X-U]} = -\frac{\text{sen } \theta_{21} \text{ sen } \theta_{65}}{\text{sen } \theta_{25} \text{ sen } \theta_{61}} & \frac{[U][Y-X]}{[X][Y-U]} = \frac{\text{sen } \theta_{21} \text{ sen } \theta_{65}}{\text{sen } \theta_{51} \text{ sen } \theta_{62}} \\
 \frac{[W][X-V]}{[X][W-V]} = \frac{\text{sen } \theta_{41} \text{ sen } \theta_{53}}{\text{sen } \theta_{43} \text{ sen } \theta_{51}} & \frac{[V][X-W]}{[X][W-V]} = -\frac{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{54}}{\text{sen } \theta_{34} \text{ sen } \theta_{51}} & \frac{[V][X-W]}{[W][X-V]} = \frac{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{54}}{\text{sen } \theta_{41} \text{ sen } \theta_{53}} \\
 \frac{[W][Y-V]}{[Y][W-V]} = \frac{\text{sen } \theta_{41} \text{ sen } \theta_{63}}{\text{sen } \theta_{43} \text{ sen } \theta_{61}} & \frac{[V][Y-W]}{[Y][W-V]} = -\frac{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{64}}{\text{sen } \theta_{34} \text{ sen } \theta_{61}} & \frac{[V][Y-W]}{[W][Y-V]} = \frac{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{64}}{\text{sen } \theta_{41} \text{ sen } \theta_{63}} \\
 \frac{[X][Y-V]}{[Y][X-V]} = \frac{\text{sen } \theta_{51} \text{ sen } \theta_{63}}{\text{sen } \theta_{53} \text{ sen } \theta_{61}} & \frac{[V][Y-X]}{[Y][X-V]} = -\frac{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{65}}{\text{sen } \theta_{35} \text{ sen } \theta_{61}} & \frac{[V][Y-X]}{[X][Y-V]} = \frac{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{65}}{\text{sen } \theta_{51} \text{ sen } \theta_{63}} \\
 \frac{[X][Y-W]}{[Y][X-W]} = \frac{\text{sen } \theta_{51} \text{ sen } \theta_{64}}{\text{sen } \theta_{54} \text{ sen } \theta_{61}} & \frac{[W][Y-X]}{[Y][X-W]} = -\frac{\text{sen } \theta_{41} \text{ sen } \theta_{65}}{\text{sen } \theta_{45} \text{ sen } \theta_{61}} & \frac{[W][Y-X]}{[X][Y-W]} = \frac{\text{sen } \theta_{41} \text{ sen } \theta_{65}}{\text{sen } \theta_{51} \text{ sen } \theta_{64}}
 \end{array} \quad (4.6)$$

Inmediatamente se observa que cada ecuación de la tercera columna es el cociente de las otras dos de su fila. También es fácil comprobar que las siete últimas ecuaciones de las dos primeras columnas son combinaciones lineales de las tres primeras de su correspondiente columna.

Ahora bien, en las ecuaciones de la segunda columna se ha hecho un cambio de signo en sus segundos miembros, compensando esta variación cambiando el orden de los arcos en la diferencia del primer factor del de-

nominador, quedando así invariable el valor de la fracción. Si ahora llamamos λ_i al valor de cada razón doble de las ecuaciones de la primera columna, el valor de la razón doble en su correspondiente de la segunda es $1 - \lambda_i$; pero como se ha hecho el cambio de signo aludido, dicho valor es, en definitiva, $\lambda_i - 1$.

5. ECUACIONES FUNDAMENTALES

Por todo lo anterior, podemos establecer un sistema de seis ecuaciones independientes, con las incógnitas μ , U , V , W , X , Y , compuesto por las tres primeras ecuaciones de la primera columna de (4.6), y las tres que resultan de expresar que entre los primeros miembros de la tres primeras parejas de ecuaciones existe la misma relación que entre las razones dobles de sus segundos miembros.

Poniendo para abreviar,

$$\alpha_{34} = \frac{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{42}}{\text{sen } \theta_{32} \text{ sen } \theta_{41}} \quad \alpha_{35} = \frac{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{52}}{\text{sen } \theta_{32} \text{ sen } \theta_{51}} \quad \alpha_{36} = \frac{\text{sen } \theta_{31} \text{ sen } \theta_{62}}{\text{sen } \theta_{32} \text{ sen } \theta_{61}} \quad (5.1)$$

se puede escribir el sistema fundamental para el caso de conocer seis ángulos de posición, en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} [V] [W-U] - \alpha_{34} [W] [V-U] &= 0 & \frac{[V] [W-U]}{[W] [V-U]} - 1 &= \frac{[U] [W-V]}{[W] [V-U]} \\ [V] [X-U] - \alpha_{35} [X] [V-U] &= 0 & \frac{[V] [X-U]}{[X] [V-U]} - 1 &= \frac{[U] [X-V]}{[X] [V-U]} \\ [V] [Y-U] - \alpha_{36} [Y] [V-U] &= 0 & \frac{[V] [Y-U]}{[Y] [V-U]} - 1 &= \frac{[U] [Y-V]}{[Y] [V-U]} \end{aligned}$$

o bien en forma desarrollada,

$$\begin{aligned} (\mu T_{31} - F(V)) (\mu T_{42} - F(W - U)) - \alpha_{34} (\mu T_{41} - F(W)) (\mu T_{32} - F(V - U)) &= 0 \\ (\mu T_{31} - F(V)) (\mu T_{52} - F(X - U)) - \alpha_{35} (\mu T_{51} - F(X)) (\mu T_{32} - F(V - U)) &= 0 \\ (\mu T_{31} - F(V)) (\mu T_{62} - F(Y - U)) - \alpha_{36} (\mu T_{61} - F(Y)) (\mu T_{32} - F(V - U)) &= 0 \\ (\mu T_{21} - F(U)) (\mu T_{43} - F(W - V)) - (\mu T_{31} - F(V)) (\mu T_{42} - F(W - U)) + \\ &+ (\mu T_{41} - F(W)) (\mu T_{32} - F(V - U)) = 0 \quad (5.3) \\ (\mu T_{21} - F(U)) (\mu T_{53} - F(X - V)) - (\mu T_{31} - F(V)) (\mu T_{52} - F(X - U)) + \\ &+ (\mu T_{51} - F(X)) (\mu T_{32} - F(V - U)) = 0 \\ (\mu T_{21} - F(U)) (\mu T_{63} - F(Y - V)) - (\mu T_{31} - F(V)) (\mu T_{62} - F(Y - U)) + \\ &+ (\mu T_{61} - F(Y)) (\mu T_{32} - F(V - U)) = 0 \end{aligned}$$

En el caso de conocerse tres observaciones incompletas y dos completas, es decir, conociendo cinco valores de θ_i y dos distancias correspondientes a

dos de algunas de las cinco citadas, y que para fijar ideas supondremos corresponden a la primera y a la última observaciones, en el conjunto de ecuaciones (4.4) no existen las que contienen Y , pues en este caso no existe el valor E_6 ; en el grupo de ecuaciones (4.5) se suprimen todas las de la última fila y por tanto, en el sistema (5.3), habrán de segregarse las ecuaciones tercera y sexta; para obtener la quinta ecuación que nos hace falta para determinar en este caso, el problema, basta considerar que ahora se conocen todas las magnitudes de los segundos miembros de las ecuaciones de la cuarta fila de (4.5). Tomando, por ejemplo, la primera ecuación de esta fila del aludido conjunto de ecuaciones y poniendo,

$$\beta = \frac{\rho_1}{\rho_5} \frac{\text{sen } \theta_{21}}{\text{sen } \theta_{52}} \quad (5.4)$$

el sistema fundamental para el caso de conocerse cinco ángulos y dos distancias, está formado por la ecuación

$$(\mu T_{21} - F(U)) - \beta (\mu T_{52} - F(X - U)) = 0 \quad (5.5)$$

y las ecuaciones primera, segunda, cuarta y quinta del sistema fundamental (5.3).

Así pues, se han establecido los sistemas de ecuaciones fundamentales que resuelven el problema de cálculo de órbita conocidos

- a) seis ángulos de posición y una distancia, y
- b) cinco ángulos de posición y dos distancias

ya que todos los elementos orbitales pueden calcularse a partir de las incógnitas μ , U , V , W , X , e Y , o bien μ , U , V , W , X , respectivamente.

Es interesante hacer constar aquí, que el método expuesto por el Doctor Cid (8) para el caso de cuatro ángulos y tres distancias, junto con los aquí desarrollados para cinco ángulos y dos distancias y seis ángulos y una distancia agotan las posibilidades de desarrollo de estos temas, toda vez que no parece lógico desarrollar métodos con datos en los que intervengan menos ángulos que distancias, ya que la intervención de éstas, por la dificultad de su exacta medida, pueden introducir importantes errores en los cálculos.

Antes de proceder a desarrollar el cálculo de los elementos de una órbita, interesa estudiar la posibilidad de dar otra forma a las tres últimas ecuaciones de (5.3), sino para su aplicación al proceso resolutivo del sistema, si para su utilización en la comprobación de resultados y para algunas simplificaciones en los cálculos de los elementos de la órbita.

Teniendo en cuenta las relaciones encontradas por el Dr. Cid (8), que ligan a una $F(Z)$, para Z diferencia de dos de ellas, con estas mismas en la forma

$$F(V - U) = F(V) - F(U) - \Phi(U, V)$$

podemos sustituir las funciones diferencias que aparecen en los segundos factores de los términos de las tres últimas ecuaciones del sistema (5.3). Para operar en la cuarta ecuación de este sistema, tendremos en cuenta que se verifican

$$\begin{aligned} F(W - V) &= F(W) - F(V) - \Phi(V, W) \\ F(W - U) &= F(W) - F(U) - \Phi(U, W) \\ F(V - U) &= F(V) - F(U) - \Phi(U, V) \end{aligned} \quad (5.6)$$

siendo

$$\begin{aligned} \Phi(U, V) &= 4 \operatorname{sen} \frac{U}{2} \operatorname{sen} \frac{V}{2} \operatorname{sen} \frac{V-U}{2} = \operatorname{sen} U - \operatorname{sen} V + \operatorname{sen}(V - U) \\ \Phi(U, W) &= 4 \operatorname{sen} \frac{U}{2} \operatorname{sen} \frac{W}{2} \operatorname{sen} \frac{W-U}{2} = \operatorname{sen} U - \operatorname{sen} W + \operatorname{sen}(W - U) \\ \Phi(V, W) &= 4 \operatorname{sen} \frac{V}{2} \operatorname{sen} \frac{W}{2} \operatorname{sen} \frac{W-V}{2} = \operatorname{sen} V - \operatorname{sen} W + \operatorname{sen}(W - V) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Operando ahora en la antedicha ecuación, sale

$$\begin{aligned} &(\mu T_{21} - F(U)) (\mu T_{43} - F(W) + F(V) + \Phi(V, W)) - \\ & - (\mu T_{31} - F(V)) (\mu T_{42} - F(W) + F(U) + \Phi(U, W)) + \\ & + (\mu T_{41} - F(W)) (\mu T_{32} - F(V) + F(U) + \Phi(U, V)) = 0 \end{aligned}$$

Desarrollando y ordenando respecto de μ , los coeficientes del polinomio que resulta son:

Coeficiente de μ^2 :

$$\begin{aligned} T_{21}T_{43} - T_{31}T_{42} + T_{41}T_{32} &= (t_2 - t_1)(t_4 - t_3) - (t_3 - t_1)(t_4 - t_2) + \\ & + (t_4 - t_1)(t_3 - t_2) = 0 \end{aligned}$$

coeficiente de μ :

$$\begin{aligned} &F(U) (-T_{43} - T_{31} + T_{41}) + F(V) (T_{21} + T_{42} - T_{41}) + F(W) (-T_{21} + T_{31} - T_{32}) + \\ & + T_{21}\Phi(V, W) - T_{31}\Phi(U, W) + T_{41}\Phi(U, V) = \\ & = T_{21}\Phi(V, W) - T_{31}\Phi(U, W) + T_{41}\Phi(U, V). \end{aligned}$$

pues son nulos los paréntesis que multiplican a $F(U)$, $F(V)$ y $F(W)$; término independiente de μ :

$$\begin{aligned} &F(U)F(W) - F(U)F(V) - F(U)\Phi(V, W) - F(V)F(W) + F(V)F(U) + \\ & + F(V)\Phi(U, W) + F(V)F(W) - F(U)F(W) - F(W)\Phi(U, V) = \\ & = -F(U)\Phi(V, W) + F(V)\Phi(U, W) - F(W)\Phi(U, V). \end{aligned}$$

con lo cual, la cuarta ecuación de (5.3) toma la forma

$$\begin{aligned} &\Phi(V, W) (\mu T_{21} - F(U)) - \Phi(U, W) (\mu T_{31} - F(V)) + \\ & + \Phi(U, V) (\mu T_{41} - F(W)) = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ecuaciones de este tipo han sido obtenidas por el Dr. Cid en un trabajo, en vías de publicación, para mejorar la resolución del caso de determinación de una órbita conocidas tres observaciones completas y una incompleta.

Naturalmente, las ecuaciones quinta y sexta de (5.3) dan origen a sendas ecuaciones análogas a la (5.8) y en el caso de conocerse cinco ángulos y un par de distancias, estas ecuaciones se reducen a dos.

Reconsideremos ahora la ecuación (5.8) y sustituyamos en ella las $F(Z)$ por su igual $Z - \text{sen } Z$ ($Z = U, V, W$) y las funciones Φ por sus expresiones en forma de producto reseñadas en (5.7), con lo cual la ecuación (5.8), después de agrupar convenientemente sus términos, toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & \Phi(V, W) (\mu T_{21} - U) - \Phi(U, W) (\mu T_{31} - V) + \Phi(U, V) (\mu T_{41} - W) + \\ & + 4 \left(\text{sen } \frac{V}{2} \text{sen } \frac{W}{2} \text{sen } \frac{W-V}{2} \text{sen } U - \text{sen } \frac{U}{2} \text{sen } \frac{W}{2} \text{sen } \frac{W-U}{2} \text{sen } V + \right. \\ & \left. + \text{sen } \frac{U}{2} \text{sen } \frac{V}{2} \text{sen } \frac{V-U}{2} \text{sen } W \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Sustituyendo ahora $\text{sen } U$, $\text{sen } V$ y $\text{sen } W$ por sus valores en función del arco mitad, el último sumando de la expresión anterior (5.9) se puede escribir en la forma

$$8 \text{sen } \frac{U}{2} \text{sen } \frac{V}{2} \text{sen } \frac{W}{2} \left(\text{sen } \frac{W-V}{2} \cos \frac{U}{2} - \text{sen } \frac{W-U}{2} \cos \frac{V}{2} + \text{sen } \frac{V-U}{2} \cos \frac{W}{2} \right)$$

y fácilmente se ve, al desarrollar los senos de las semi-diferencias y operar, que el paréntesis de esta última expresión es idénticamente nulo, y en este caso, la ecuación (5.8) se simplifica, quedando así:

$$(\mu T_{21} - U) \Phi(V, W) - (\mu T_{31} - V) \Phi(U, W) + (\mu T_{41} - W) \Phi(U, V) = 0 \quad (5.10)$$

y análogamente

$$\begin{aligned} & (\mu T_{21} - U) \Phi(V, X) - (\mu T_{31} - V) \Phi(U, X) + (\mu T_{51} - X) \Phi(U, V) = 0 \\ & (\mu T_{21} - U) \Phi(V, Y) - (\mu T_{31} - V) \Phi(U, Y) + (\mu T_{61} - Y) \Phi(U, V) = 0 \end{aligned}$$

Estas últimas ecuaciones, de fácil manejo, son universales, toda vez que en ellas no entran los datos θ_i , y entendemos no han sido obtenidas hasta ahora, o por lo menos, no hemos podido comprobar su anterior existencia.

El sistema (5.10) carece de su tercera ecuación en el caso de estudiarse el problema tomando conocidos cinco ángulos y dos distancias.

6. CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE LA ÓRBITA

Vamos a referirnos detalladamente al caso de conocer seis ángulos de posición, pues la cuestión se resuelve prácticamente lo mismo para el caso de conocer cinco ángulos y dos distancias.

El sistema (5.3) nos permite conocer los valores de las incógnitas μ , U , V , W , X e Y .

Una vez conocido μ , por simple transformación de unidades conocemos el movimiento medio n , en grados y el período viene dado inmediatamente por

$$P = \frac{2\pi}{\mu} \quad \text{o bien por} \quad P = \frac{360^\circ}{n} \quad (6.1)$$

Las ecuaciones (4.5) nos permitirían conocer inmediatamente los cinco radios ρ_2 , ρ_3 , ρ_4 , ρ_5 y ρ_6 , y de aquí, por las relaciones (4.3) obtendríamos c que como hemos dicho es igual $a^2 \cos i \cdot \cos \varphi$; pero vamos a dejar este camino para no introducir los valores de las distancias, bien sea de la conocida, bien sea de las calculadas, en evitación de errores inherentes a la menor precisión con que se obtienen las distancias.

Seguindo inicialmente el método de Thiele-Innes, podemos establecer la ecuación de Kepler para los siguientes valores:

$$\begin{aligned} E_2 - \sin \varphi \sin E_2 &= \mu (t_2 - T) & E_3 - \sin \varphi \sin E_3 &= \mu (t_3 - T) \\ E_1 - \sin \varphi \sin E_1 &= \mu (t_1 - T) & E_1 - \sin \varphi \sin E_1 &= \mu (t_1 - T) \\ E_3 - \sin \varphi \sin E_3 &= \mu (t_3 - T) \\ E_2 - \sin \varphi \sin E_2 &= \mu (t_2 - T) \end{aligned}$$

restando miembro a miembro estas tres parejas de ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} U - \sin \varphi (\sin E_2 - \sin E_1) &= \mu T_{21} & V - \sin \varphi (\sin E_3 - \sin E_1) &= \mu T_{31} \\ (V - U) - \sin \varphi (\sin E_3 - \sin E_2) &= \mu T_{32} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ahora bien, las ecuaciones primera, segunda y sexta de (4.3) se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} U - \sin U &= \mu T_{21} - \frac{\Delta_{12}}{c} & V - \sin V &= \mu T_{31} - \frac{\Delta_{13}}{c} \\ (V - U) - \sin (V - U) &= \mu T_{32} - \frac{\Delta_{23}}{c} \end{aligned} \quad (6.3)$$

siendo

$$\Delta_{ij} = \rho_i \rho_j \sin \theta_{ji}$$

Restando ahora de cada una de las (6.2) su correspondiente en (6.3), obtenemos:

$$\operatorname{sen} U - \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} E_2 - \operatorname{sen} E_1) = \frac{\Delta_{12}}{c}$$

$$\operatorname{sen} V - \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} E_3 - \operatorname{sen} E_1) = \frac{\Delta_{13}}{c}$$

$$\operatorname{sen} (V - U) - \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} E_3 - \operatorname{sen} E_2) = \frac{\Delta_{23}}{c}$$

pero los segundos miembros de estas expresiones son, según (4.4) respectivamente iguales a $[U]$, $[V]$ y $[V - U]$, y por tanto podemos establecer el siguiente sistema, independiente de las distancias:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} U - \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} E_2 - \operatorname{sen} E_1) &= [U] \\ \operatorname{sen} V - \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} E_3 - \operatorname{sen} E_1) &= [V] \\ \operatorname{sen} (V - U) - \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} E_3 - \operatorname{sen} E_2) &= [V - U]\end{aligned}\quad (6.4)$$

sumando la primera y la tercera de éstas, y restando de su suma la segunda, se obtiene la relación

$$[U] + [V - U] - [V] = \operatorname{sen} U + \operatorname{sen} (V - U) - \operatorname{sen} V = \Phi(U, V) \quad (6.5)$$

de acuerdo con lo expresado en la primera de (5.7)

Multiplicando ahora la tercera de (6.4) por $\operatorname{sen} U$, y restándole la primera multiplicada por $\operatorname{sen} (V - U)$, sale

$$[V - U] \operatorname{sen} U - [U] \operatorname{sen} (V - U) = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} E_2 (\operatorname{sen} U + \operatorname{sen} (V - U) - \operatorname{sen} V)$$

es decir

$$[V - U] \operatorname{sen} U - [U] \operatorname{sen} (V - U) = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} E_2 \Phi(U, V) \quad (6.6)$$

Y, finalmente, multiplicando la tercera de (6.4) por $\cos U$, sumándole el producto de la primera multiplicada por $\cos (V - U)$ y restando a esta suma la segunda, se obtiene análogamente.

$$[V - U] \cos U + [U] \cos (V - U) - [V] = \operatorname{sen} \varphi \cos E_2 \Phi(U, V) \quad (6.7)$$

dividiendo ahora la ecuación (6.6) por la (6.7), nos da

$$\operatorname{tg} E_2 = \frac{[V - U] \operatorname{sen} U - [U] \operatorname{sen} (V - U)}{[V - U] \cos U + [U] \cos (V - U) - [V]} \quad (6.8)$$

que nos permite calcular E_2 . Análogamente se obtienen

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} E_3 &= \frac{[W - V] \operatorname{sen} V - [V] \operatorname{sen} (W - V)}{[W - V] \cos V + [V] \cos (W - V) - [W]} \\ \operatorname{tg} E_4 &= \frac{[X - W] \operatorname{sen} W - [W] \operatorname{sen} (X - W)}{[X - W] \cos W + [W] \cos (X - W) - [X]} \\ \operatorname{tg} E_5 &= \frac{[Y - X] \operatorname{sen} X - [X] \operatorname{sen} (Y - X)}{[Y - X] \cos X + [X] \cos (Y - X) - [Y]} \end{aligned} \quad (6.9)$$

ahora se puede obtener E_1 por cualquiera de los cuatro valores

$$E_1 = E_2 - U \quad E_1 = E_3 - V \quad E_1 = E_4 - W \quad E_1 = E_5 - X$$

y

$$E_6 = E_1 - Y \quad (6.10)$$

En la práctica ocurre que, dada la aproximación con que se conducen los cálculos, los cuatro valores obtenidos para E_1 difieren algo, por lo que resulta más práctico tomar un promedio de los resultados.

Conocidas las anomalías excéntricas, de las (6.6) y (6.7) se obtienen los siguientes valores de la excentricidad e :

$$\begin{aligned} e \equiv \operatorname{sen} \varphi &= \frac{[V - U] \operatorname{sen} U - [U] \operatorname{sen} (V - U)}{\operatorname{sen} E_2 \Phi(U, V)} = \\ &= \frac{[V - U] \cos U + [U] \cos (V - U) - [V]}{\cos E_2 \Phi(U, V)} \end{aligned} \quad (6.11)$$

y sus análogas para los pares de valores W, V ; X, W ; e Y, X , que permiten también calcular un valor medio de la excentricidad.

La aplicación de la ecuación de Kepler a las épocas datos del problema, sirve para obtener seis relaciones de la forma

$$T = \frac{\mu t_i + e \operatorname{sen} E_i - E_i}{\mu} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (6.12)$$

de las que se deduce un valor medio de la época de paso por el periastro.

A partir de aquí, y para evitar nuevamente la intervención de las distancias en los cálculos, vamos a utilizar el método expuesto por el Doctor Cid (12) y cuyas primicias debo agradecerle públicamente, ya que ha dado una nueva orientación a este trabajo, y una vez más sus directrices han sido tan valiosas como decisivas.

Siguiendo pues, el método citado, si llamamos como es costumbre A , B , F , G , a las constantes de Innes, para la órbita homotética con la dada y de semieje $a = 1$, tendremos:

$$\begin{aligned} A &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ B &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ F &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\ G &= -\sin \omega \sin \Omega - \cos \omega \cos \Omega \cos i \end{aligned}$$

sumando al producto de la segunda por $\cos v$ el de la cuarta por $\sin v$ y sumando a la primera por $\cos v$, la tercera por $\sin v$ obtenemos

$$\begin{aligned} B \cos v + G \sin v &= \sin \Omega \cos (\omega + v) + \cos \Omega \sin (\omega + v) \cos i \\ A \cos v + F \sin v &= \cos \Omega \sin (\omega + v) - \sin \Omega \cos (\omega + v) \cos i \end{aligned}$$

Siendo r el radio vector en la órbita relativa, y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \rho \cos (\theta - \Omega) &= r \cos (\omega + v) \\ \rho \sin (\theta - \Omega) &= r \sin (\omega + v) \cos i \end{aligned}$$

se tiene

$$B \cos v + G \sin v = \frac{\rho}{r} \sin \theta$$

$$A \cos v + F \sin v = \frac{\rho}{r} \cos \theta$$

y de aquí, inmediatamente,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{B + G \operatorname{tg} v}{A + F \operatorname{tg} v} \quad \text{o bien} \quad pA + pqF - qG = B \quad (6.15)$$

siendo

$$p = \operatorname{tg} \theta, \quad \text{y} \quad q = \operatorname{tg} v.$$

Conociendo tres partes de valores de θ_i y v_i correspondientes, aplicados a la expresión (6.15), se puede plantear un sistema de tres ecuaciones que definen las incógnitas A/B , F/B y G/B , cuyos valores llevados a las conocidas fórmulas

$$\operatorname{tg} (\omega + \Omega) = \frac{B - F}{A + G} \quad \operatorname{tg} (\omega - \Omega) = \frac{-B - F}{A - G}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} = \frac{(A - G) \cos (\omega + \Omega)}{(A + G) \cos (\omega - \Omega)}$$

dan, en definitiva, los valores

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\omega + \Omega) &= -\frac{q_i M_i + q_j M_j + q_k M_k}{M_i + M_j + M_k} \\ \operatorname{tg}(\omega - \Omega) &= -\frac{q_i N_i + q_j N_j + q_k N_k}{N_i + N_j + N_k} \\ \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} &= \frac{(N_i + N_j + N_k) \cos(\omega + \Omega)}{(M_i + M_j + M_k) \cos(\omega - \Omega)} \end{aligned} \quad (6.16)$$

que definen ω , Ω , e i , siendo

$$M_i = \begin{vmatrix} (p_j + q_j) & (1 - p_j q_j) \\ (p_k + q_k) & (1 - p_k q_k) \end{vmatrix} \quad N_i = \begin{vmatrix} (p_j - q_j) & (1 + p_j q_j) \\ (p_k - q_k) & (1 + p_k q_k) \end{vmatrix}$$

utilizando siempre para su cálculo el orden i, j, k .

Hemos obtenido todos los elementos de la órbita, excepto el semieje, sin la intervención de la única ρ conocida (en el caso de seis ángulos) o de las ρ_i , para el caso de cinco ángulos. Para el cálculo de a , tanto en uno como en otro caso, bastaría utilizar las fórmulas

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad \text{y} \quad \rho = r \frac{\cos(\omega + v)}{\cos(\theta - \Omega)} \quad (6.17)$$

para obtener de ellas el valor de a , sustituyendo el valor de r dado por la segunda, en la primera, y de aquí, despejar el valor del semieje a .

En la práctica, teniendo en cuenta que de cada par visual que se estudie se conocerá una serie más o menos larga de observaciones, el método operativo, de acuerdo con el citado por el Dr. Cid en su trabajo (12), será el siguiente:

Con las expresiones (6.17) se calcularán los ρ_i' para el valor $a = 1$, que corresponderán a la órbita homotética con la dada y de semieje unidad. Comparando estos resultados con los ρ_i de la órbita objeto de estudio, se establecerán los cocientes

$$-\frac{\rho_i}{\rho_i'} = k_i \quad (6.18)$$

posibles; el promedio K de los diversos k_i obtenidos es, precisamente, el valor del semieje en la órbita estudiada, y las distancias se calculan directamente mediante la expresión

$$\rho_i = K \rho_i'$$

7. RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS FUNDAMENTALES

Hemos intentado la resolución de estos sistemas fundamentales, pero la estructura de sus ecuaciones, en donde además de intervenir el movimiento medio figuran las funciones U , V , W , X e Y , sus diferencias y los senos de todas ellas, ha impedido obtener resultados satisfactorios de estos intentos, y ante ello, y pensando en que el método expuesto sirva inicialmente, no para el cálculo de órbitas, si no para su mejora, hemos optado por la introducción de unos primeros valores aproximados, obtenidos por cualquier método, y calcular sus correcciones, teniendo en cuenta que como estos valores aproximados no verifican, en general, las ecuaciones de los sistemas fundamentales, el orden de magnitud de los segundos miembros, distintos de cero en este caso, nos dará idea sobre el grado de aproximación con que se entra en el cálculo de las correcciones.

Para este, y llamando m , u , v , w , x e y , a las correcciones que habrán de calcularse para los valores iniciales aproximados, μ_0 , U_0 , V_0 , W_0 , X_0 , Y_0 , respectivamente, supondremos que, en los desarrollos donde entren las primeras, son suficientemente pequeñas para poder sustituir el seno por el arco y el coseno por la unidad.

Supongamos por todo lo anterior que

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 + m & W &= W_0 + w \\ U &= U_0 + p & X &= X_0 + x \\ V &= V_0 + v & Y &= Y_0 + y \end{aligned} \quad (7.1)$$

y que podemos hacer

$$\begin{aligned} \text{sen } u &= u & \cos u &= 1 \\ \text{sen } v &= v & \cos v &= 1 \\ \text{sen } w &= w & \cos w &= 1 \\ \text{sen } x &= x & \cos x &= 1 \\ \text{sen } y &= y & \cos y &= 1 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Teniendo en cuenta, por ejemplo, la segunda de (7.1), podemos escribir

$$\begin{aligned} [U] &= (\mu T_{21} - F(U)) = (\mu_0 + m) T_{21} - U + \text{sen } U = \\ &= (\mu_0 + m) T_{21} - (U_0 + u) + \text{sen } (U_0 + u) \simeq \\ &\simeq [U_0] + m T_{21} - u (1 - \cos U_0) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Efectuando desarrollos análogos para todas las Z_i y $Z_j - Z_k$ y llamando

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - \cos U_0 \\ A_2 &= 1 - \cos V_0 & B_2 &= 1 - \cos (V_0 - U_0) \\ A_3 &= 1 - \cos W_0 & B_3 &= 1 - \cos (W_0 - U_0) & C_3 &= 1 - \cos (W_0 - V_0) \\ A_4 &= 1 - \cos X_0 & B_4 &= 1 - \cos (X_0 - U_0) & C_4 &= 1 - \cos (X_0 - V_0) \\ A_5 &= 1 - \cos Y_0 & B_5 &= 1 - \cos (Y_0 - U_0) & C_5 &= 1 - \cos (Y_0 - V_0) \end{aligned} \quad (7.4)$$

los valores de las distintas expresiones $\mu T_{ij} - F(Z)$ toman los valores aproximados siguientes:

$$\begin{aligned}
 [U] &\simeq [U_0] + mT_{21} - A_1u & [V - U] &\simeq [V_0 - U_0] + mT_{32} - B_2v + B_2u \\
 [V] &\simeq [V_0] + mT_{31} - A_2v & [W - U] &\simeq [W_0 - U_0] + mT_{42} - B_3w + B_3u \\
 [W] &\simeq [W_0] + mT_{41} - A_3w & [X - U] &\simeq [X_0 - U_0] + mT_{52} - B_4x + B_4u \\
 [X] &\simeq [X_0] + mT_{51} - A_4x & [Y - U] &\simeq [Y_0 - U_0] + mT_{62} - B_5y + B_5u \\
 [Y] &\simeq [Y_0] + mT_{61} - A_5y & & \\
 & & [W - V] &\simeq [W_0 - V_0] + mT_{43} - C_3w + C_3v \\
 & & [X - V] &\simeq [X_0 - V_0] + mT_{53} - C_4x + C_4v \\
 & & [Y - V] &\simeq [Y_0 - V_0] + mT_{63} - C_5y + C_5v
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Llevando ahora estos valores aproximados a las ecuaciones del sistema fundamental (5.3), y despreciando al operar, como infinitésimos de orden superior, los productos donde figuren dos o más factores de las correcciones tendremos, para la primera ecuación por ejemplo,

$$([V_0] + mT_{31} - A_2v) ([W_0 - U_0] + mT_{42} - B_3w + B_3u) - \alpha_{34} ([W_0] + mT_{41} - A_3w) ([V_0 - U_0] + mT_{32} - B_2v + B_2u) = 0$$

desarrollando ahora en las antes citadas condiciones, y ordenando los términos en m, u, v, w, x, y , se obtiene, y por analogía, para todas las ecuaciones de (5.3), el sistema siguiente:

$$\begin{aligned}
 m (T_{42}[V_0] + T_{31}[W_0 - U_0] - \alpha_{34}(T_{32}[W_0] + T_{41}[V_0 - U_0])) + \\
 + u (B_3[V_0] - \alpha_{34}B_2[W_0]) - v (A_2[W_0 - U_0] - \alpha_{34}B_2[W_0]) - \\
 - w (B_3[V_0] - \alpha_{34}A_3[V_0 - U_0]) = \alpha_{34}[W_0][V_0 - U_0] - [V_0][W_0 - U_0]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m (T_{52}[V_0] + T_{31}[X_0 - U_0] - \alpha_{35}(T_{32}[X_0] + T_{51}[V_0 - U_0])) + \\
 + u (B_4[V_0] - \alpha_{35}B_2[X_0]) - v (A_2[X_0 - U_0] - \alpha_{35}B_2[X_0]) - \\
 - x (B_4[V_0] - \alpha_{35}A_4[V_0 - U_0]) = \alpha_{35}[X_0][V_0 - U_0] - [V_0][X_0 - U_0]
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}
 m (T_{62}[V_0] + T_{31}[Y_0 - U_0] - \alpha_{36}(T_{32}[Y_0] + T_{61}[V_0 - U_0])) + \\
 + u (B_5[V_0] - \alpha_{36}B_2[Y_0]) - v (A_2[Y_0 - U_0] - \alpha_{36}B_2[Y_0]) - \\
 - y (B_5[V_0] - \alpha_{36}A_5[V_0 - U_0]) = \alpha_{36}[Y_0][V_0 - U_0] - [V_0][Y_0 - U_0]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m (T_{43}[U_0] + T_{32}[W_0] - T_{42}[V_0] + T_{21}[W_0 - V_0] + T_{41}[V_0 - U_0] - T_{31}[W_0 - U_0]) + \\
 + u (B_2[W_0] - B_3[V_0] - A_1[W_0 - V_0]) + v (C_3[U_0] + A_2[W_0 - U_0] - B_2[W_0]) + \\
 + w (B_3[V_0] - C_3[U_0] - A_3[V_0 - U_0]) = [V_0][W_0 - U_0] - [U_0][W_0 - V_0] - [W_0][V_0 - U_0]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m (T_{53}[U_0] + T_{32}[X_0] - T_{52}[V_0] + T_{21}[X_0 - V_0] + T_{51}[V_0 - U_0] - T_{31}[X_0 - U_0]) + \\
 + u (B_2[X_0] - B_4[V_0] - A_1[X_0 - V_0]) + v (C_4[U_0] + A_2[X_0 - U_0] - B_2[X_0]) + \\
 + x (B_4[V_0] - C_4[U_0] - A_4[V_0 - U_0]) = [V_0][X_0 - U_0] - [U_0][X_0 - V_0] - [X_0][V_0 - U_0]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m (T_{63}[U_0] + T_{32}[Y_0] - T_{62}[V_0] + T_{21}[Y_0 - V_0] + T_{61}[V_0 - U_0] - T_{31}[Y_0 - U_0]) + \\
 + u (B_2[Y_0] - B_5[V_0] - A_1[Y_0 - V_0]) + v (C_5[U_0] + A_2[Y_0 - U_0] - B_2[Y_0]) + \\
 + y (B_5[V_0] - C_5[U_0] - A_5[V_0 - U_0]) = [V_0][Y_0 - U_0] - [U_0][Y_0 - V_0] - [Y_0][V_0 - U_0]
 \end{aligned}$$

En este sistema debe observarse:

1.° Los términos independientes son los valores distintos de cero que toman las ecuaciones del sistema (5.3) para los valores aproximados, de entrada, de las incógnitas μ , U , V , W , X , Y .

2.° Los pares de ecuaciones 1-4, 2-5, y 3-6, contienen respectivamente, y sólo en cada par, las incógnitas (correcciones) w , x , y , lo que permite eliminarlas y reducir el sistema a otro de tres ecuaciones con las incógnitas μ , u , v , facilitándose con ello la resolución del sistema general.

Una vez calculadas las correcciones m , u , v , w , x , y , mediante las expresiones (7.1) se calculan los nuevos valores de μ , U , V , W , X e Y , y entonces se comprueba el orden de magnitud que se obtiene al sustituir estos valores en las ecuaciones (5.3); si la reducción obtenida no es suficiente, se vuelve a entrar con los nuevos valores obtenidos en el sistema (7.6), cuya resolución nos dará unas nuevas correcciones y subsiguientes nuevos valores del movimiento medio y de las diferencias de anomalías excéntricas, con suficiente aproximación, en general, para permitir su utilización en el cálculo de la órbita desarrollado en el parágrafo sexto.

En el caso de conocerse cinco ángulos de posición y dos distancias, el sistema para el cálculo de correcciones está constituido por las ecuaciones primera, segunda, cuarta y quinta de (7.6) y la que, en forma análoga a la expuesta se obtiene de la ecuación (5.5), y que es la siguiente:

$$m (T_{21} - \beta T_{52}) - u (A_1 - \beta B_1) - x \beta B_1 = \beta [X_0 - U_0] - [U_0]$$

operando con este sistema en la misma forma que se ha dicho en el caso anterior.

APLICACION DEL METODO

8. ORBITA DEL PAR VISUAL ADS: 1631 = Σ . 208:

Se ha tomado como órbita experimental la correspondiente al par visual que se cita estudiada muy cuidadosamente por Baize (11) con muy buenos resultados en las diferencias observación-cálculo y de la que el citado autor da los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} P &= 391^{\circ}30 \\ T &= 1930.58 \\ e &= 0.64 \\ a &= 1^{\circ}41 \\ i &= 50^{\circ}2 \\ \omega &= 160^{\circ}2 \\ \Omega &= 20^{\circ}0 \\ n &= 0^{\circ}9200 \end{aligned}$$

Como datos para resolver el problema y como valores iniciales aproximados, obtenidos éstos aproximadamente, y aquellos tomados de las curvas $\theta(t)$ y $\rho(t)$ (fig. 2), se han tomado los siguientes:

Datos en la órbita aparente

Valores iniciales aproximados

i	t_i	θ_i	ρ_i
1	1820	23°	1."96
2	1863	36°	
3	1890	54°	
4	1914	108°	
5	1934	200°	
6	1955	264°	

$$\mu_0 = 1^\circ = 0.017453$$

$$U_0 = 30^\circ$$

$$V_0 = 55^\circ$$

$$W_0 = 90^\circ$$

$$X_0 = 135^\circ$$

$$Y_0 = 180^\circ$$

I. Valores de las razones dobles (5.1)

$\theta_{31} = 31^\circ$	$\text{sen } \theta_{31} = 0.515038$	$\alpha_{34} = 1.591178$
$\theta_{32} = 18^\circ$	$\text{sen } \theta_{32} = 0.309017$	
$\theta_{41} = 85^\circ$	$\text{sen } \theta_{41} = 0.996195$	$\alpha_{35} = 8.777965$
$\theta_{42} = 72^\circ$	$\text{sen } \theta_{42} = 0.951057$	
$\theta_{51} = 177^\circ$	$\text{sen } \theta_{51} = 0.053326$	$\alpha_{36} = 1.416155$
$\theta_{52} = 164^\circ$	$\text{sen } \theta_{52} = 0.275637$	
$\theta_{61} = 241^\circ$	$\text{sen } \theta_{61} = -0.874620$	
$\theta_{62} = 228^\circ$	$\text{sen } \theta_{62} = -0.743145$	

 II. Valores de las expresiones $\mu T_{ij} - F(Z) \equiv [Z]$.

	μT_{ij}	rad.°	$[Z]$
$T_{21} = 43$	0.750491	$U_0 = 30^\circ = 0.523599$	0.726893
$T_{31} = 70$	1.221730	$V_0 = 55^\circ = 0.959931$	1.080952
$T_{41} = 94$	1.640609	$W_0 = 90^\circ = 1.570796$	1.069813
$T_{51} = 114$	1.989675	$X_0 = 135^\circ = 2.356194$	0.340587
$T_{61} = 135$	2.356194	$Y_0 = 180^\circ = 3.141593$	-0.785398
$T_{32} = 27$	0.471239	$V_0 - U_0 = 25^\circ = 0.436332$	0.457525
$T_{42} = 51$	0.890118	$W_0 - U_0 = 60^\circ = 1.047198$	0.708946
$T_{52} = 71$	1.239184	$X_0 - U_0 = 105^\circ = 1.832596$	0.372514
$T_{62} = 92$	1.605703	$Y_0 - U_0 = 150^\circ = 2.617994$	-0.512291
$T_{43} = 24$	0.418879	$W_0 - V_0 = 35^\circ = 0.610865$	0.381590
$T_{53} = 44$	0.767945	$X_0 - V_0 = 80^\circ = 1.396233$	0.356490
$T_{63} = 65$	1.134464	$Y_0 - V_0 = 125^\circ = 2.181662$	-0.228044

III. Valores de las magnitudes (7.4)

$A_1 = 0.133975$	$B_2 = 0.093692$	$C_3 = 0.180848$
$A_2 = 0.426424$	$B_3 = 0.500000$	$C_4 = 0.826352$
$A_3 = 1.000000$	$B_4 = 1.258819$	$C_5 = 1.573576$
$A_4 = 1.707107$	$B_5 = 1.866025$	
$A_5 = 2.000000$		

Estos valores llevados a las ecuaciones fundamentales (5.3) dan los siguientes valores para sus segundos miembros, que debieran ser nulos si se tratase de los valores exactos de la órbita:

$$\begin{array}{lll} 1.^a \dots & - 0.012491 & 2.^a \dots & - 0.965185 & 3.^a \dots & - 0.044882 \\ 4.^a \dots & 0.000413 & 5.^a \dots & 0.012287 & 6.^a \dots & 0.028659 \end{array} \quad (8.1)$$

Esto nos dice que, especialmente la diferencia $E_5 - E_1 = X$, que entra en las ecuaciones segunda y quinta, necesita una estimable corrección, y deben ser de menor entidad las correcciones de las otras variables.

Los valores de los cuadros I), II), III), llevados a las ecuaciones del sistema de resolución de correcciones, nos da las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} & - 9.638676 m + 0.380988 u - 0.141824 v + 0.187528 w = + 0.012491 \\ & + 0.991331 m - 0.491367 u + 0.333536 v - 0.048506 w = - 0.000413 \\ & - 435.739531 m + 1.080614 u + 0.121260 v + 5.495284 x = + 0.965185 \\ & + 5.842489 m - 1.376574 u + 0.727608 v - 0.020990 x = - 0.012287 \quad (8.2) \\ & + 6.147887 m + 2.121294 u + 0.114245 v - 0.721234 y = + 0.044882 \\ & - 14.415068 m + 2.060117 u - 0.998940 v + 0.041788 y = + 0.028659 \end{aligned}$$

eliminando en cada pareja las incógnitas w, x, y , se llega al sistema de tres ecuaciones con las incógnitas m, u, v , siguiente:

$$\begin{aligned} & - 0.281632 m - 0.073665 u + 0.055619 v = + 0.000529 \\ & + 22.959964 m - 7.541983 u + 4.000958 v = - 0.047262 \quad (8.3) \\ & - 10.139729 m + 1.574461 u - 0.715695 v = + 0.022546 \end{aligned}$$

que resuelto, nos da los valores

$$m = - 0.003266 \quad u = - 0.024888 \quad v = - 0.039984$$

y substituyendo estos valores en (8.2) tenemos

$$w = - 0.081106 \quad x = - 0.077559 \quad y = - 0.169646$$

y teniendo en cuenta las expresiones (7.1), tenemos, para valores de las μ, U, V, W, X, Y , los siguientes:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0.014187 & U_1 &= 0.498711 & V_1 &= 0.919947 & W_1 &= 1.489690 \\ X_1 &= 2.278635 & Y_1 &= 2.971947 \end{aligned}$$

Operando ahora con estos valores en la misma forma que han sido tratados los valores iniciales, se obtiene un cuadro análogo al II), del que extraemos los valores de $\mu_1 T_{ij}$ y de $\mu_1 T_{ij} - F(Z)$,

$$\begin{array}{lll} \text{IV)} \quad \mu_1 T_{21} = 0.610041 & \mu_1 T_{32} = 0.383049 & \mu_1 T_{43} = 0.340488 \\ \mu_1 T_{31} = 0.993090 & \mu_1 T_{42} = 0.723537 & \mu_1 T_{53} = 0.624228 \\ \mu_1 T_{41} = 1.333578 & \mu_1 T_{52} = 1.007277 & \mu_1 T_{63} = 0.922155 \\ \mu_1 T_{51} = 1.617318 & \mu_1 T_{62} = 1.305204 & \\ \mu_1 T_{61} = 1.915245 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 [U_1] &= 0.589623 & [V_1 - U_1] &= 0.370703 & [W_1 - V_1] &= 0.310160 \\
 [V_1] &= 0.868712 & [W_1 - U_1] &= 0.569120 & [X_1 - V_1] &= 0.243129 \\
 [W_1] &= 0.840607 & [X_1 - U_1] &= 0.205565 & [Y_1 - V_1] &= -0.243406 \\
 [X_1] &= 0.098451 & [Y_1 - U_1] &= -0.548335 & & \\
 [Y_1] &= -0.887869 & & & &
 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (5.3), nos encontramos con nuevos valores en los segundos miembros, y que a continuación comparamos con los reseñados en (8.1)

Ecuación	Residuos con valores	
	iniciales	nuevos
1	— 0.012491	— 0.001434
2	— 0.965185	— 0.141758
3	— 0.044882	— 0.010238
4	+ 0.000413	+ 0.000092
5	+ 0.012287	+ 0.001273
6	+ 0.028659	+ 0.003691

(8.5)

Claramente se ve que los nuevos valores de las incógnitas se aproximan más a los verdaderos que los iniciales, pues se han reducido considerablemente los residuos. Teniendo en cuenta que ahora las magnitudes (7.4) son

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0.121796 & B_2 &= 0.087417 & C_3 &= 0.157960 \\
 A_2 &= 0.394137 & B_3 &= 0.452129 & C_4 &= 0.789478 \\
 A_3 &= 0.918982 & B_4 &= 1.207608 & C_5 &= 1.462846 \\
 A_4 &= 1.650194 & B_5 &= 1.784842 & & \\
 A_5 &= 1.985645 & & & &
 \end{aligned}$$

Llevados estos valores y los del cuadro IV) al sistema (7.6) para calcular las nuevas correcciones, obtenemos las siguientes ecuaciones, análogas a las obtenidas anteriormente en (8.2)

$$\begin{aligned}
 & -7.417602 \, m + 0.275845 \, u - 0.107386 \, v + 0.149296 \, w = +0.001434 \\
 & + 0.887591 \, m - 0.357063 \, u + 0.243965 \, v - 0.041036 \, w = -0.000092 \\
 & -318.223330 \, m + 0.973517 \, u - 0.005475 \, v + 4.320699 \, x = +0.141758 \\
 & + 5.248176 \, m - 1.070069 \, u + 0.537909 \, v - 0.028163 \, x = -0.001273 \\
 & + 4.615435 \, m + 1.660429 \, u + 0.106204 \, v - 0.508104 \, y = +0.010238 \\
 & -12.393425 \, m + 1.598483 \, u - 0.724024 \, v + 0.048098 \, y = +0.003691
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

eliminando como antes las incógnitas w , v , y , se llega al siguiente sistema de tres ecuaciones en m , u , v :

$$\begin{aligned}
 & -0.171875 \, m - 0.041989 \, u + 0.032016 \, v = +0.000045 \\
 & + 13.713666 \, m - 4.596029 \, u + 2.323989 \, v = -0.001508 \\
 & -6.075156 \, m + 0.892058 \, u - 0.362771 \, v = +0.002367
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

que, resuelto, da para las nuevas correcciones, los valores

$$m = -0.001645 \quad u = -0.024845 \quad v = -0.040052$$

y éstos en las (8.6) dan

$$w = -0.055150 \quad x = -0.082553 \quad y = -0.124429$$

de todos los cuales, aplicando (7.1) salen los nuevos valores de las incógnitas fundamentales

$$\begin{array}{lll} \mu = 0.012542 & U = 0.473866 & V = 0.879895 \\ W = 1.434540 & X = 2.196082 & Y = 2.847518 \end{array}$$

Formando ahora con estos nuevos valores los ya reiterados cuadros análogos a los II) y IV) tenemos:

V)	$\mu T_{21} = 0.539306$	$\mu T_{32} = 0.338634$	$\mu T_{43} = 0.301008$
	$\mu T_{31} = 0.877940$	$\mu T_{42} = 0.639642$	$\mu T_{53} = 0.551848$
	$\mu T_{41} = 1.178948$	$\mu T_{52} = 0.890482$	$\mu T_{63} = 0.815230$
	$\mu T_{51} = 1.429788$	$\mu T_{62} = 1.153864$	$\mu T_{54} = 0.250840$
	$\mu T_{61} = 1.693170$		$\mu T_{65} = 0.263382$
	$U = 0.473866$	$[U] = +0.521771$	$\Phi(U, V) = 0.080624$
	$V = 0.879895$	$[V] = +0.768716$	$\Phi(U, W) = 0.285177$
	$W = 1.434540$	$[W] = +0.735139$	$\Phi(U, X) = 0.634093$
	$X = 2.196082$	$[X] = +0.044502$	$\Phi(U, Y) = 0.861142$
	$Y = 2.847518$	$[Y] = -0.864493$	
	$V - U = 0.406029$	$[V - U] = +0.327569$	$\Phi(V, W) = 0.306581$
	$W - U = 0.960674$	$[W - U] = +0.498545$	$\Phi(V, X) = 0.927636$
	$X - U = 1.722216$	$[X - U] = +0.156824$	$\Phi(V, Y) = 1.403108$
	$Y - U = 2.373652$	$[Y - U] = -0.525122$	
	$W - V = 0.554645$	$[W - V] = +0.273004$	$\Phi(W, X) = 0.869973$
	$X - V = 1.316187$	$[X - V] = +0.203422$	
	$Y - V = 1.967623$	$[Y - V] = -0.230101$	$\Phi(X, Y) = 1.127270$
	$X - W = 0.761542$	$[X - W] = +0.179336$	
	$Y - X = 0.651436$	$[Y - X] = +0.218275$	

Comprobando ahora los residuos que dejan estos valores en las ecuaciones fundamentales (5.3), los comparamos con los antes obtenidos (8.5), cambiando la denominación de aquellos que titulamos "nuevos", por la de "intermedios",

Ecuación	Residuos con valores			
	iniciales	intermedios	nuevos	
1	-0.012491	-0.001434	+0.000070	(8.8)
2	-0.965185	-0.141758	-0.007408	
3	-0.044882	-0.010238	-0.002642	
4	+0.000413	+0.000092	+0.000023	
5	+0.012287	+0.001273	+0.000187	
6	+0.028659	+0.003691	+0.000469	

y a la vista de la reducción sufrida por los residuos y la homogeneidad relativa de su orden de magnitud, los tomamos como aceptables para el cálculo de la órbita por el método expuesto en el párrafo sexto, de la forma siguiente:

Mediante las fórmulas (6.8) y (6.9) calculamos las tangentes de las anomalías excéntricas correspondientes a las épocas datos del problema, y se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} E_2 &= \frac{-0.056601}{+0.002107} = -26.863312 & \operatorname{tg} E_3 &= \frac{-0.194441}{+0.092304} = -2.106528 \\ \operatorname{tg} E_4 &= \frac{-0.329600}{+0.511932} = -0.643835 & \operatorname{tg} E_5 &= \frac{0.149993}{0.772118} = +0.194262 \end{aligned}$$

y de estos valores, se obtienen

$$\begin{aligned} E_2 &= 272^\circ.1319 = 4.749597 \text{ rad. (sup. a } 2\pi = 1.533588) \\ E_3 &= 295^\circ.3944 = 5.155607 \text{ rad. (sup. a } 2\pi = 1.127578) \\ E_4 &= 327^\circ.2252 = 5.711156 \text{ rad. (sup. a } 2\pi = 0.572029) \\ E_5 &= 10^\circ.9934 = 0.191871 \text{ rad.} \end{aligned}$$

y con las (6.10) obtenemos:

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 - U &= 244^\circ.9813 & \text{Lo que nos permite adoptar los valores} \\ E_1 = E_3 - V &= 244^\circ.9802 & E_1 = 245^\circ.0402 = 4.276758 \text{ rad. (sup. } 2\pi =) \\ E_1 = E_4 - W &= 245^\circ.0322 & E_6 = 48^\circ.1909 = 0.841090 \text{ rad. } [= 2.006427] \\ E_1 = E_5 - X &= 245^\circ.1672 \end{aligned}$$

El período se obtienen inmediatamente a partir de

$$\mu = 0.012542 \text{ rad.} \quad n = 0^\circ.7186 \quad P = 500^a.97$$

Para el cálculo de la excentricidad, las fórmulas (6.11) y sus análogas nos permiten obtener

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{0.056601}{0.080568} = 0.7025 & e_3 &= \frac{0.194441}{0.276958} = 0.7020 \\ e_4 &= \frac{0.329600}{0.470950} = 0.6998 & e_5 &= \frac{0.149993}{0.214966} = 0.6977 \end{aligned}$$

y el valor medio de la excentricidad es $e = 0.7005$

Las seis ecuaciones de la forma (6.12) que podemos plantear nos dan

$$\begin{aligned} (\mu T)_1 &= 24.198244 & (\mu T)_2 &= 24.199818 & (\mu T)_3 &= 24.199594 \\ (\mu T)_4 &= 24.198480 & (\mu T)_5 &= 24.197844 & (\mu T)_6 &= 24.200279 \end{aligned}$$

que permiten obtener el valor medio $(\mu T) = 24.199043$, y de aquí el paso por el periastro,

$$T = 1929.44$$

Conduciendo ahora el cálculo por el método del Dr. Cid (12), ya reseñado, tenemos sucesivamente,

i	$p_i = \operatorname{tg} \theta_i$	$\operatorname{tg} E_i/2$	$\operatorname{tg} v_i/2$	v_i	$q_i = \operatorname{tg} v_i$
1	+ 0.424475	— 1.568474	— 3.733715	209°.9874	+ 0.577057
2	+ 0.726543	— 0.963471	— 2.293520	227°.1150	+ 1.076713
3	+ 1.376380	— 0.632242	— 1.505036	247°.2030	+ 2.379258
4	— 3.077680	— 0.294077	— 0.700043	290°.0128	— 2.745573
5	+ 0.363970	+ 0.096231	+ 0.229076	25°.8048	+ 0.483522
6	+ 9.514360	+ 0.447225	+ 1.064608	93°.5846	— 15.963038

De aquí se pasa inmediatamente al siguiente cuadro de valores a utilizar en el cálculo ω , Ω , e i :

i	$p_i + q_i$	$p_i - q_i$	$p_i q_i$	$1 - p_i q_i$	$1 + p_i q_i$
1	+1.001532	— 0.152582	+ 0.244946	+ 0.755054	+ 1.244946
2	+1.803256	— 0.350170	+ 0.782278	+ 0.217722	+ 1.782278
3	+3.755638	— 1.002878	+ 3.274763	— 2.274763	+ 4.274763 (8.9)
4	—5.823253	— 0.332107	+ 8.449995	— 7.449995	+ 9.449995
5	+0.847492	— 0.119552	+ 0.175987	+ 0.824013	+ 1.175987
6	—6.448678	+25.477398	—151.878090	+152.878090	—150.878090

Como para el cálculo de los elementos ω , Ω , i , solamente es necesario utilizar tres pares de valores de p_i y q_i , vamos a calcular dichos elementos con la terna de puntos 1-3-5 primeramente, y para ellos tenemos

$$\begin{aligned} M_1 &= + 5.022537 & N_1 &= - 0.668315 \\ M_3 &= - 0.185373 & N_3 &= + 0.030598 \\ M_5 &= - 5.113957 & N_5 &= + 0.596277 \\ \Sigma M &= - 0.276793 & \Sigma N &= - 0.041440 \end{aligned}$$

con estos valores y los de p_i y q_i obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (\omega + \Omega) &= - 0.055894 & \operatorname{tg} (\omega - \Omega) &= - 0.592253 & \text{que nos dan} \\ (\omega + \Omega) &= 176°.8009 & (\omega - \Omega) &= 148°.9415 & i/2 = 22°.6715 \end{aligned}$$

y de aquí:

$$\omega = 162°.8712 \quad \Omega = 13°.9297 \quad i = 45°.3430 \quad (8.10)$$

con $\cos i = 0.702861$.

Calculando ahora con estos elementos los ángulos de posición de los puntos-dato, de partida, encontramos las siguientes diferencias observación-cálculo:

i	$\omega + v_i$	$\text{tg} (\omega + v_i)$	$\text{tg} (\theta_i - \Omega)$	$\theta_i - \Omega$	θ_i	O-C
1	372°.8586	+ 0.228270	+ 0.160442	9.1149	23.0	0.0
2	389°.9862	+ 0.577029	+ 0.405571	22.0760	36.0	0.0
3	410°.0742	+ 1.194891	+ 0.839842	40.0266	54.0	0.0
4	452°.8840	— 19.8500	— 13.951791	94.0997	108.0	0.0(8.11)
5	188°.6760	+ 0.152595	+ 0.107253	186.1217	200.0	0.0
6	256°.4558	+ 4.14934	+ 2.917709	251.07	265.0	— 1.0

Estas diferencias observación-cálculo muestran patentemente que la órbita calculada pasa correctamente por los puntos prefijados, excepto por el último, y concretamente por los tres que han servido para calcular sus elementos.

Vamos a tomar ahora como puntos definidores los de la terna 2-4-6 y para ellos tenemos análogamente:

$$\begin{aligned}
 M_2 &= -938.290415 & N_2 &= -190.653614 \\
 M_4 &= -277.082352 & N_4 &= -7.425175 \\
 M_6 &= -12.166398 & M_6 &= -2.717198 \\
 \Sigma M &= -1227.539165 & \Sigma N &= -200.795987
 \end{aligned}$$

y estos valores junto a los de p_i y q_i nos dan

$$\begin{aligned}
 \text{tg} (\omega + \Omega) &= -0.045055 & (\omega + \Omega) &= 177°.4203 & \cos (\omega + \Omega) &= -0.998986 \\
 \text{tg} (\omega - \Omega) &= -0.704785 & (\omega - \Omega) &= 144°.8244 & \cos (\omega - \Omega) &= -0.817390
 \end{aligned}$$

$$\text{tg}^2 \frac{i}{2} = 0.199917 \quad i/2 = 24°.0903$$

y de estos,

$$\omega = 161°.1223 \quad \Omega = 16°.2979 \quad i = 48°.1806 \quad (8.12)$$

siendo en este caso $\cos i = 0.666785$, y las diferencias observación-cálculo son:

i	$\omega + v_i$	$\text{tg} (\omega + v_i)$	$\text{tg} (\theta_i - \Omega)$	$\theta_i - \Omega$	θ_i	O-C
1	11.1097	+ 0.196367	+ 0.130935	7°.4596	23°.7	— 0.7
2	28.2373	+ 0.537033	+ 0.358085	19.7016	36.0	0.0
3	48.3253	+ 1.123372	+ 0.749048	36.8349	53.1	+ 0.9
4	91.1351	— 50.4708	— 33.6532	91.7021	108.0	0.0 (8.13)
5	186.9271	+ 0.111493	+ 0.074342	184.2516	200.5	— 0.5
6	254.7069	+ 3.657112	+ 2.438507	247.7021	264.0	0.0

Vemos en este caso que la órbita obtenida pasa exactamente por los tres puntos definidores de sus elementos, y reparte aceptablemente los errores en los otros puntos.

A la vista de los errores obtenidos en (8.11) y (8.13) vamos a aceptar como definitiva la órbita que tenga como elementos los promedios de los (8.10) y (8.12) que son

$$\omega = 162^{\circ}.08 \quad \Omega = 15^{\circ}0 \quad i = 46.77 \quad (8.14)$$

con $\cos i = 0.684937$.

Para estos valores, las diferencias observación-cálculo son:

i	$\omega + v_i$	$\text{tg } (\omega + v_i)$	$\text{tg } (\theta_i - \Omega)$	$\theta_i - \Omega$	θ_i	0-C
1	12.06	+ 0.213651	0.146337	8.3	23.3	— 0.3
2	29.19	+ 0.558652	0.382641	20.9	35.9	+ 0.1
3	49.28	+ 1.161790	0.795753	38.6	53.6	+ 0.4
4	92.09	— 27.4021	— 18.7687	93.0	108.0	0.0 (8.15)
5	187.88	+ 0.138406	0.094799	185.4	200.4	— 0.4
6	255.66	+ 3.911740	2.67929	249.5	264.5	— 0.5

Vemos que con estos elementos se reduce a su mitad la sexta diferencia observación-cálculo de (8.11) y la distribución de los errores puede ser aceptada sin reparos.

Nos queda finalmente, el cálculo del semieje a , de la órbita para el cual, en este caso solamente disponemos de una observación de distancia, y el valor que este único cálculo nos dé, debe ser aceptado con reservas, pero al calcular todas las diferencias 0-C para toda la lista de puntos observados (11) utilizaremos cuanto se ha dicho al final del apárrafo sexto, a este respecto.

De las fórmulas (6.17) se obtiene

$$a = \rho_1 \frac{\cos (\theta_1 - \Omega)}{\cos (\omega + v_1)} \frac{1 + e \cos v_1}{1 - e^2}$$

Como en este caso son

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1''.96 \\ \theta_1 - \Omega &= 8^{\circ}.35 & \cos (\theta_1 - \Omega) &= + 0.989399 \\ \omega + v_1 &= 12^{\circ}.06 & \cos (\omega + v_1) &= + 0.977229 \\ v_1 &= 209^{\circ}.99 & \cos v_1 &= - 0.866113 \\ 1 - e^2 &= 0.51 \end{aligned}$$

se obtiene

$$a = 1''.51 \quad (8.16)$$

Para completar el estudio, vamos a calcular todas las diferencias 0-C, de los datos disponibles (11) de esta órbita para lo cual disponemos los usuales cuadros de valores:

Para θ_i

t_i	M_i	$\omega + v_i$	$\theta_i - \Omega$	θ_i	0-C
1821.39	282.35	12.47	8.6	23.6	0.0
32.73	290.50	16.20	11.3	26.3	+ 0.2
38.66	294.76	18.34	12.7	27.7	- 0.7
43.16	297.99	20.08	14.0	29.0	+ 0.7
51.37	303.89	23.53	16.6	31.6	- 0.6
1856.54	307.61	25.92	18.4	33.4	0.0
63.00	312.25	29.24	20.9	35.9	- 0.8
68.50	316.20	32.38	23.5	38.5	+ 0.5
76.52	321.97	37.38	27.7	42.7	+ 0.6
83.00	326.62	42.73	32.3	47.3	+ 0.9
1889.61	331.37	48.93	38.2	53.2	+ 0.4
98.33	337.64	59.47	49.3	64.3	- 0.3
1905.16	342.55	70.68	62.8	77.8	- 2.0 (8.17)
10.70	346.33	82.83	79.5	94.5	- 0.7
14.79	349.47	94.40	96.4	111.4	- 1.4
1920.27	353.41	114.69	123.9	138.9	+ 3.9
23.78	355.91	131.08	141.9	156.9	+ 1.0
26.25	357.70	144.18	153.7	168.7	+ 5.1
32.50	2.20	179.33	179.5	194.5	- 2.3
38.45	6.47	208.75	200.6	215.6	- 0.9
1941.71	8.82	221.40	211.1	226.1	- 2.7
45.48	11.52	233.96	223.2	238.2	- 4.2
51.53	15.87	249.06	240.8	255.8	- 5.3
54.98	18.07	255.08	248.7	263.7	- 0.3
57.72	20.32	260.43	256.2	271.2	+ 2.9

 Para ρ_i

 (Con las mismas épocas que para θ_i)

para $a=1$		ρ_i	
ρ_i'	ρ_i/ρ_i'	calcu.	0-C
1.271	1.573	2.02	- 0.02
1.187	1.692	1.89	+ 0.12
1.139	1.930	1.81	+ 0.39
1.101	1.561	1.75	- 0.03
1.026	1.636	1.64	+ 0.04

0.976	1.556	1.56	— 0.04	(8.18)
0.909	1.495	1.45	— 0.09	
0.849	1.671	1.35	+ 0.07	
0.760	1.643	1.21	+ 0.04	
0.674	1.867	1.07	+ 0.19	
0.588	1.683	0.94	+ 0.05	
0.468	1.642	0.75	+ 0.02	
0.376	1.539	0.60	— 0.02	
0.311	1.187	0.49	— 0.12	
0.276	1.300	0.44	— 0.08	
0.259	1.388	0.41	— 0.05	
0.266	1.126	0.43	— 0.13	
0.277	1.552	0.44	— 0.01	
0.305	1.537	0.49	— 0.02	
0.322	1.766	0.51	+ 0.06	
0.329	2.004	0.52	+ 0.14	
0.338	1.654	0.54	+ 0.02	
0.360	1.554	0.57	— 0.01	
0.375	1.490	0.60	— 0.04	
0.394	1.266	0.62	— 0.12	

$$K = \text{promedio de } \frac{\rho_i}{\rho_i'} = \text{semieje adoptado} = 1''.59$$

Finalmente, los elementos definitivos de la órbita y las efemérides calculadas son:

<i>Elementos</i>	<i>E f e m é r i d e s</i>		
	<i>Epoca</i>	θ_i	ρ_i
$P = 500^a.97$			
$e = 0.70$			
$T = 1929.44$	1962.0	280°1	0''674
$\omega = 162^\circ.08$	1964.0	283.9	0.696
$\Omega = 15^\circ.0$	1966.0	287.5	0.725
$i = 46^\circ.77$	1968.0	290.7	0.752
$a = 1''.59$			
$n = 0^\circ.7186$			

9. ORBITA DEL PAR VISUAL ADS. 5159 = A. 2817:

a) Órbita I.

De este par da Baize (11) una "nueva órbita", quinta de las que publica en la referencia citada, en la que aparecen unas fuertes diferencias observación-cálculo en los ángulos de posición. Para experimentar la capacidad

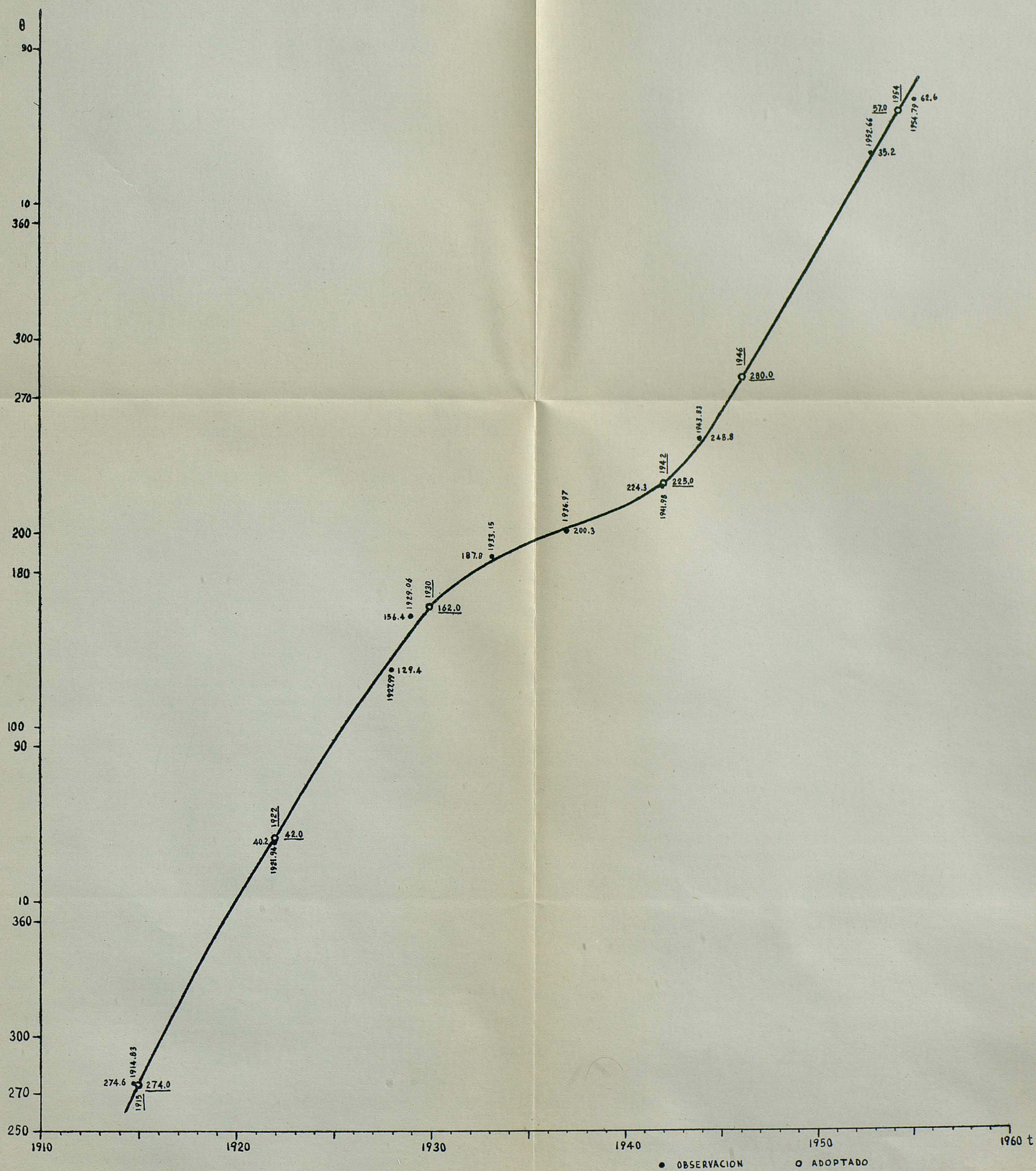


FIG. 3

de mejora de nuestro método, objeto del presente trabajo, no hemos dudado en aplicarlo al citado par visual, tomando como datos iniciales los obtenidos a partir de los propios elementos del Dr. Baize, para las épocas.

$$\begin{array}{ccccccc} t_i = 1915 & 1922 & 1930 & 1942 & 1946 & 1954 & \text{siendo} \\ \theta_i = 274^\circ & 42 & 162 & 225 & 280 & 57 & \end{array} \quad (9.1)$$

los respectivos ángulos de posición adoptados de la curva $\theta(t)$, de acuerdo con el trazado de la fig. 3.^a

Las razones dobles (5.1) toman los valores

$$\alpha_{34} = -0.074243 \quad \alpha_{35} = +8.686065 \quad \alpha_{36} = -0.460435$$

En estas condiciones, los valores iniciales calculados para realizar la primera entrada, son:

$$\begin{array}{lll} \mu_0 = 0.198828 & U_0 = 103^\circ 31 & V_0 = 202^\circ 47 \\ W_0 = 311^\circ 30 & X_0 = 352^\circ 94 & Y_0 = 469^\circ 53 \end{array} \quad (9.2)$$

que llevados a las ecuaciones fundamentales (5.3) dan los siguientes residuos

$$\begin{array}{lll} 1.^a \text{ ecua. } \dots + 0.063369 & 2.^a \text{ ecua. } \dots + 1.364952 & 3.^a \text{ ecua. } \dots + 0.121947 \\ 4.^a \text{ " } \dots - 0.001022 & 5.^a \text{ " } \dots + 0.000035 & 5.^a \text{ " } \dots + 0.000220 \end{array} \quad (9.3)$$

y nos permiten escribir el siguiente sistema de ecuaciones para el cálculo de las primeras correcciones de los valores (9.2)

$$\begin{array}{l} -19.300423m - 1.828136u + 0.306643v + 1.736514w = -0.063369 \\ + 53.632367m - 0.951012u + 1.452805v - 2.789121w = +0.001022 \\ -250.083298m - 0.058248u - 0.195001v + 1.314293x = -1.364952 \\ + 71.876553m - 0.168869u + 0.183620v - 2.315609x = -0.000035 \\ -11.625074m + 0.262393u - 0.420080v - 0.514990y = -0.121947 \\ -73.012166m - 1.679609u - 0.161027v + 1.726572y = +0.000220 \end{array} \quad (9.4)$$

Eliminando en este sistema las incógnitas w, x, y , entre cada par de ecuaciones que las contienen obtenemos

$$\begin{array}{l} + 14.091196m - 2.420238u + 1.211162v = -0.062733 \\ -209.287676m - 0.154094u - 0.090782v = -1.364972 \\ -33.402632m - 0.238589u - 0.468110v = -0.121881 \end{array} \quad (9.5)$$

La resolución de estos dos últimos sistemas conduce a las primeras correcciones, que expresamos en radianes,

$$\begin{array}{lll} m = +0.006631 & u = -0.033442 & v = -0.195780 \\ w = +0.036578 & x = +0.192764 & y = +0.229763 \end{array} \quad (9.6)$$

y a los nuevos valores de las incógnitas fundamentales

$$\begin{array}{llll} \mu_1 = 0.205459 & U_1 = 101^\circ 39 & V_1 = 191^\circ 25 & W_1 = 313^\circ 40 \\ & X_1 = 363^\circ 98 & Y_1 = 482^\circ 69 & \end{array} \quad (9.7)$$

Para comprobar la marcha de la mejora, llevamos estos valores a las ecuaciones fundamentales (5.3) obteniendo los residuos

$$\begin{array}{llll} 1.^a \text{ ecua.} & \dots + 0.002791 & 2.^a \text{ ecua.} & \dots - 0.511994 & 3.^a \text{ ecua.} & \dots + 0.085170 \\ 4.^a \text{ " } & \dots + 0.013432 & 5.^a \text{ " } & \dots + 0.060939 & 6.^a \text{ " } & \dots - 0.114955 \end{array} \quad (9.8)$$

que comparados con los primarios (9.3) nos hacen ver que, si bien han empeorado los de las tres últimas ecuaciones, han mejorado substancialmente los de las tres primeras, y en consecuencia, con los valores (9.7) planteamos un nuevo sistema para el cálculo de unas segundas correcciones, y que es el siguiente:

$$\begin{array}{l} -9.068986m - 0.881849u + 0.287769v + 0.808803w = -0.002791 \\ + 50.730402m - 1.227072u + 1.401821v - 2.164417w = -0.013432 \\ -316.008010m - 1.253771u + 2.019427v + 0.531913x = +0.511994 \\ + 67.682777m + 0.117107u - 0.068230v - 1.804485x = -0.060939 \\ + 10.700009m - 0.166636u - 0.757999v - 0.731715y = -0.085170 \\ -63.538575m - 1.760623u - 0.543377v + 2.098627y = -0.114955 \end{array} \quad (9.9)$$

Su resolución conduce a las nuevas correcciones

$$\begin{array}{lll} m = -0.001230 & u = +0.057247 & v = +0.099905 \\ w = +0.009631 & x = -0.012418 & y = -0.018116 \end{array} \quad (9.10)$$

y éstas a los valores en segunda aproximación siguientes:

$$\begin{array}{llll} \mu_2 = 0.204229 & U_2 = 104^\circ 67' & V_2 = 196^\circ 98' & W_2 = 313^\circ 95' \\ & X_2 = 363^\circ 27' & Y_2 = 481^\circ 66' & \end{array} \quad (9.11)$$

Llevados éstos, como en el caso de los (9.7) a las ecuaciones fundamentales dejan los residuos siguientes:

$$\begin{array}{llll} 1.^a \dots & -0.014094 & 2.^a \dots & -0.029923 & 3.^a \dots & +0.027615 \\ 4.^a \dots & +0.003218 & 5.^a \dots & -0.002554 & 6.^a \dots & -0.005953 \end{array} \quad (9.12)$$

que representan una mejora muy uniforme respecto de los (9.8). Esta firme marcha de los residuos, nos induce a realizar una tercera aproximación, preparando el nuevo sistema para el cálculo de terceras correcciones con los datos (9.11), y que ahora toma la forma

$$\begin{array}{l} -12.541044m - 1.300809u + 0.164153v + 1.224680w = +0.014094 \\ + 52.240828m - 1.094595u + 1.430091v - 2.389263w = -0.003218 \\ -303.404129m - 1.230362u + 1.590675v + 0.812687x = +0.029923 \\ + 70.280585m + 0.093420u - 0.084319v - 1.923876x = +0.002554 \\ + 2.250334m + 0.167117u - 0.680931v - 0.688525y = -0.027615 \\ -67.188744m - 1.751548u - 0.484326v + 2.013162y = -0.005953 \end{array} \quad (9.13)$$

y su resolución nos lleva a las terceras correcciones siguientes

$$\begin{array}{lll} m = + 0.000024 & u = + 0.008103 & v = + 0.030311 \\ w = + 0.016294 & x = - 0.001398 & y = + 0.012174 \end{array} \quad (9.14)$$

que permiten obtener los valores de las incógnitas fundamentales

$$\begin{array}{llll} \mu_3 = 0.204253 & U_3 = 105^\circ 14 & V_3 = 198^\circ 71 & W_3 = 314^\circ 88 \\ & X_3 = 363^\circ 19 & Y_3 = 482^\circ 15 & \end{array} \quad (9.15)$$

y llevados, como siempre, a las ecuaciones fundamentales, dan los siguientes residuos

$$\begin{array}{lll} 1.^a \dots + 0.000873 & 2.^a \dots - 0.000755 & 3.^a \dots + 0.000093 \\ 4.^a \dots - 0.000353 & 5.^a \dots + 0.000189 & 6.^a \dots + 0.000391 \end{array} \quad (9.16)$$

La homogeneidad y el orden de magnitud de estos residuos, así como la marcha de las sucesivas correcciones (9.6), (9.10) y (9.14), nos inducen ya a realizar el cálculo de la órbita, en forma igual al realizado para el par anterior (vid. parágrafo 3), y por lo cual no detallamos su operativa.

El período es

$$P = 30^a 76.$$

Para las anomalías excéntricas encontramos los siguientes valores

$$E_2 = 403^\circ 35 \quad E_3 = 496^\circ 81 \quad E_4 = 613^\circ 2 \quad \text{y} \quad E_5 = 661^\circ 02$$

que nos llevan a los de E_1

$$298^\circ 21 \quad 298^\circ 10 \quad 298^\circ 15 \quad \text{y} \quad 297^\circ 83,$$

por lo cual adoptamos el valor medio $E_1 = 298^\circ 07$, y consecuentemente,

$$E_6 = 780^\circ 42$$

Para la excentricidad obtenemos, independientemente, los valores

$$0.2577 \quad 0.2581 \quad 0.2560 \quad \text{y} \quad 0.2584,$$

cuya media nos da

$$e = 0.2577.$$

El paso por el periastro es (valor medio)

$$T = 1949.93$$

Para calcular los valores de ω , Ω , i , hemos tomado primeramente la terna de puntos dato 1.2.3, cuyos valores auxiliares (vid. parágrafo 6), son

$$\begin{array}{lll} p_1 = -14.300700 & p_2 = +0.900404 & p_3 = -0.324920 \\ q_1 = -4.005127 & q_2 = +1.396478 & q_3 = -0.672041 \end{array}$$

de los cuales se obtienen

$$\begin{array}{lll} M_1 = +1.538723 & M_2 = +70.413664 & M_3 = +133.971417 \\ N_1 = -1.387986 & N_2 = +32.772579 & N_3 = +5.668103 \end{array}$$

De todos ellos se obtienen inmediata y sucesivamente

$$\begin{array}{lll} \operatorname{tg}(\omega + \Omega) = -0.010363 & \omega + \Omega = 359^\circ 41' & \cos(\omega + \Omega) = +0.999947 \\ \operatorname{tg}(\omega - \Omega) = -1.282391 & \omega - \Omega = 307^\circ 95' & \cos(\omega - \Omega) = +0.614933 \\ \operatorname{tg}^2 i/2 = 0.292591 & \operatorname{tg} i/2 = 0.540917 & i/2 = 28^\circ 41' \end{array}$$

de todos los cuales se obtienen los elementos

$$\omega = 333^\circ 68' \quad \Omega = 25^\circ 73' \quad i = 56^\circ 82' \quad (9.17)$$

Con estos elementos, las diferencias 0-C en ángulos de posición para los puntos datos, son las siguientes:

$v_i + \omega$	$\operatorname{tg}(v_i + \omega)$	$\operatorname{tg}(\theta_i - \Omega)$	$\theta_i - \Omega$	θ_i	0-C
257° 70'	+ 4.586410	+ 2.510050	248° 2 7'	274° 00'	0.00
28.07	+ 0.533278	+ 0.291852	16.27	42.00	0.00
119.78	- 1.747510	- 0.956377	136.27	162.00	0.00
212.83	+ 0.644950	+ 0.352968	199.44	225.17	- 0.17
260.84	+ 6.201620	+ 3.394023	253.58	279.31	+ 0.69
47.77	+ 1.101690	+ 0.602933	31.09	56.81	+ 0.19

y nos demuestran la bondad del cálculo por el exacto paso por los puntos 1.2.3 tomados como definidores y vemos que la órbita calculada pasa ligeramente mal por los otros tres, pero especialmente por el quinto punto. En vista de ello definimos ahora los elementos angulares de la órbita con los puntos 2.3.5 ($p_5 = -5.671812$, $q_5 = -3.237680$), y encontramos los valores

$$\omega = 334^\circ 31' \quad \Omega = 25^\circ 21' \quad e \quad i = 56^\circ 55' \quad (9.19)$$

y para ellos, las diferencias 0-C en las θ_i datos resultan

Punto	0-C
1	- 0.67
2	0.00
3	0.00
4	- 0.22
5	0.00
6	- 0.04

(9.20)

A su vista y comparándolas con las obtenidas en (9.18) adoptamos la órbita con los elementos comunes a ambas,

$$P = 30^{\text{a}}76 \quad e = 0.2577 \quad T = 1949.93 \quad (9.21)$$

y los promedios de los sereñados en (9.17) y (9.19), que son:

$$\omega = 333^{\circ}99 \quad \Omega = 25^{\circ}47 \quad i = 56^{\circ}68 \quad (9.21)$$

Estos elementos permiten obtener las diferencias 0-C, (θ_i — datos) siguientes:

$v_i + \omega$	$\text{tg}(v_i + \omega)$	$\text{tg}(\theta_i - \Omega)$	$\theta_i - \Omega$	θ_i	0-C
258°01	+ 4.708670	+ 2.586312	248°86	274°33	— 0.33
28.38	+ 0.540247	+ 0.296739	16.53	42.00	0.00
120.09	— 1.725780	— 0.947912	136.53	162.00	0.00
213.13	+ 0.652638	+ 0.358472	199.72	225.19	— 0.19
261.15	+ 6.422530	+ 3.527677	254.17	279.64	+ 0.36
48.08	+ 1.113740	+ 0.611749	31.46	56.93	+ 0.07

En vista de la magnitud y buena distribución de las diferencias obtenidas aplicamos los elementos (9.21) a todas las observaciones disponibles, obteniendo las diferencias 0-C en θ_i , que se relacionan:

N.º	$t_i - T'$	M_i	$v_i + \omega$	$\theta_i - \Omega$	θ_i	0-C
1	26.42	309°11	255°56	244°88	270°35	+ 4°25
2	33.53	32.30	27.35	15.86	41.33	— 1.13
3	39.58	103.09	102.99	112.79	138.26	— 8.14
4	40.65	115.61	112.36	126.83	152.30	+ 4.10
5	44.74	163.46	143.86	158.14	183.61	+ 4.19
6	48.55	208.04	171.30	175.20	200.67	— 0.37
7	53.57	266.77	212.94	199.59	225.06	— 0.76
8	55.42	288.41	232.64	215.73	241.20	+ 7.60
9	56.46	300.58	245.53	230.35	(255.82)	
10	64.26	31.72	26.51	15.32	40.79	— 5.59
11	66.38	56.65	58.51	41.88	67.35	— 4.75

Estas diferencias son todas de menor valor absoluto, en general, que ha obtenido Baize (11), y si bien su distribución hacia el final (puntos 10 y 11), no sigue la mejora obtenida en el conjunto, hay que pensar que, por ser un par de escaso número de observaciones, y éstas de no mucha confianza por la igualdad de ambas estrellas, la falta de mejores resultados puede provenir de la elección de los puntos sobre la curva, siendo ésta un tanto incierta por la apuntada razón.

Por ello, hemos decidido hacer una cuarta entrada, partiendo de la órbita definida por los elementos (9.21), que hemos visto es más aproximada que la inicial, pero modificando los valores de las θ_i datos, para las mismas épocas que se reseñen en (9.1).

b) Órbita II.

Hemos tomado para esta nueva entrada (fig. 4) los valores de los ángulos de posición.

$$\theta_i = 276^\circ 0 \quad 41.5 \quad 162.0 \quad 225.5 \quad 282.0 \quad y \quad 55.0$$

tomando como valores iniciales de las incógnitas fundamentales los obtenidos en (9.15), siendo ahora los valores de las razones dobles, los siguientes:

$$\alpha_{34} = -0.095848 \quad \alpha_{35} = +8.828232 \quad \alpha_{36} = -0.377269$$

Partiendo de todos estos datos se establece el sistema que define las nuevas correcciones

$$\begin{aligned} & -13.523075m - 1.425066u + 0.209840v + 1.326672w = +0.014007 \\ & + 53.001085m - 1.043701u + 1.399948v - 2.455960w = +0.000853 \\ & -302.905242m - 1.330977u + 1.585283v + 0.889000x = +0.007652 \\ & + 71.075863m + 0.088378u - 0.081571v - 1.976579x = -0.000192 \quad (9.24) \\ & -3.598721m + 0.124617u - 0.640952v - 0.545985y = +0.032472 \\ & -67.870957m - 1.735616u - 0.495336v + 1.993853y = +0.000389 \end{aligned}$$

La resolución de este sistema permite obtener las nuevas correcciones

$$\begin{aligned} m &= -0.000090 & u &= -0.022214 & v &= -0.029352 & w &= -0.009576 \\ & & x &= -0.002916 & y &= -0.029493 \end{aligned}$$

que conducen a los nuevos valores de las incógnitas principales

$$\begin{aligned} \mu &= 0.204163 & U &= 103^\circ 87 & V &= 197^\circ 03 & W &= 314^\circ 33 \\ & & X &= 363^\circ 03 & Y &= 480^\circ 66 \end{aligned}$$

cuyos residuos en las ecuaciones (5.3) del sistema fundamental son

$$\begin{aligned} 1.^a \dots & -0.001490 & 2.^a \dots & -0.002463 & 3.^a \dots & -0.000004 \\ 4.^a \dots & +0.000293 & 5.^a \dots & -0.000034 & 6.^a \dots & -0.000067 \end{aligned}$$

y en virtud de su orden de magnitud procedemos al cálculo de los elementos de la órbita II, utilizando la terna 1.2.3 para el cálculo de los angulares, obteniendo:

$$\begin{aligned} P &= 30^a 77 & e &= 0.246 & T &= 1949.80 & \omega &= 331^\circ 16 \\ & & & & \Omega &= 26^\circ 75 & i &= 58^\circ 57 \end{aligned}$$

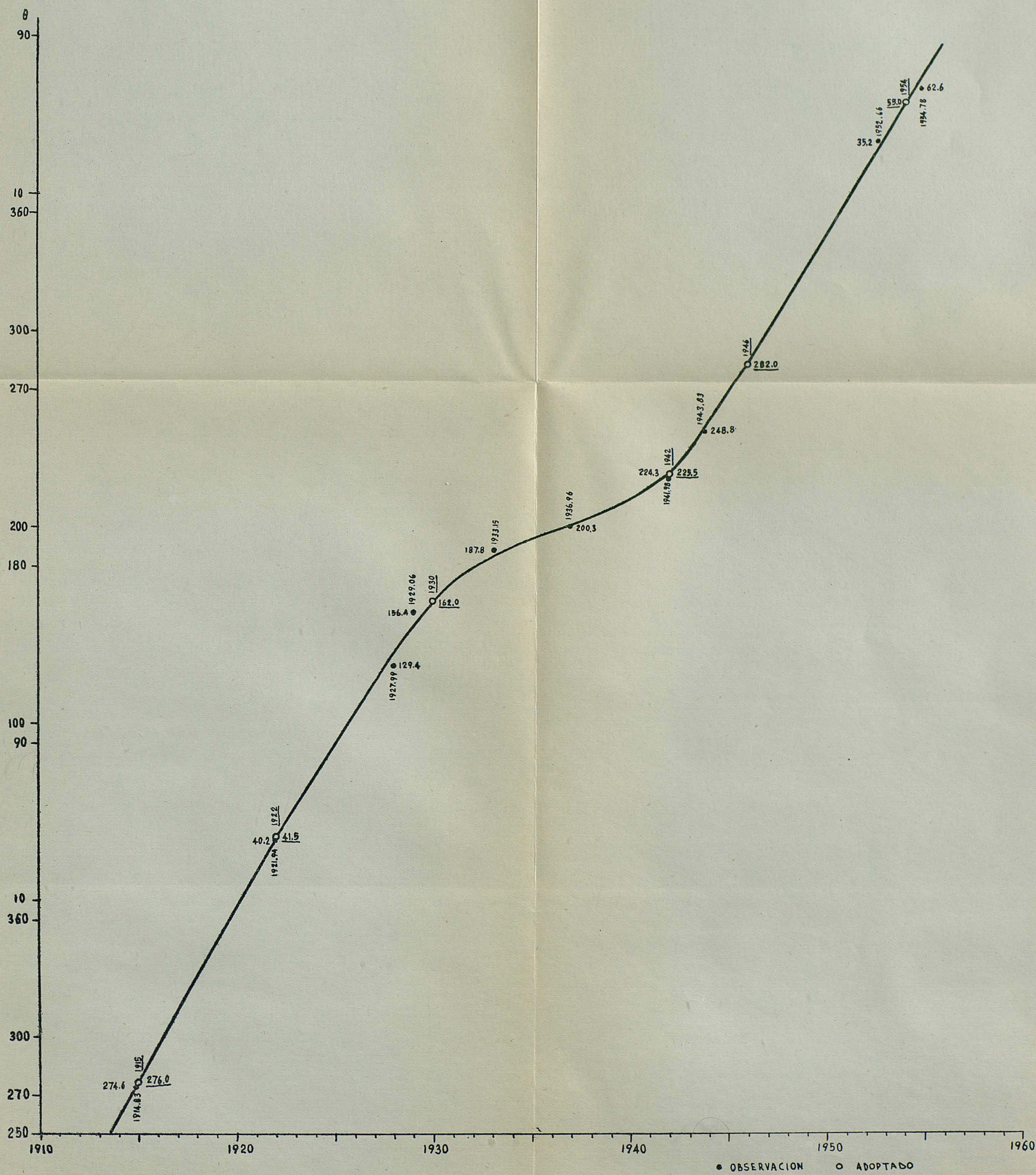


FIG. 4

Calculadas con ellos las diferencias 0-C para los nuevos valores θ_i datos, encontramos las siguientes:

Punto	0-C
1	0.00
2	0.00
3	0.00
4	+ 0.09
5	— 0.20
6	— 0.04

que mejoran muy substancialmente los obtenidos con la órbita I, y que han sido reseñados en (9.22)

El promedio de los cocientes ρ_i/ρ'_i , y que adoptamos como semieje es 0.243.

En definitiva, los elementos que adoptamos para la órbita del par visual ADS. 5159 = A. 2817 son los siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 P = 30^{\text{a}}77 & \omega = 331^{\circ}16 \\
 e = 0.246 & \Omega = 26^{\circ}75 \\
 T = 1949.80 & i = 58^{\circ}57 \\
 (n = 11^{\circ}689) & a = 0''24
 \end{array}$$

con los siguientes resultados finales:

Observaciones				0-C	
1914.83	274°6	0"18	A 2 n	+ 2°8	+ 0"06
31.94	40.2	0.20	A 2	— 0.7	+ 0.01
27.99	129.4	0.17	VBs 1	— 6.9	+ 0.02
29.06	156.4	0.19	VBs 1	+ 4.8	+ 0.02
33.15	187.8	0.20	φ 1	+ 3.3	— 0.06
1936.96	200.3	0.19	VBs 1	— 1.2	— 0.10
41.98	224.3	0.26	VBs 2	— 1.0	+ 0.03
43.83	248.8	0.20	VBs 1	+ 7.4	+ 0.03
44.87	$\leq 0''1$		VBs 1	(256.4	0"14)
52.66	35.2	0.11	VBs 2	— 5.1	— 0.08
1954.79	62.6	0.13	VBs 3	— 2.8	— 0.03

La comparación de las diferencias 0-C en θ_i , con las obtenidas en (9.23) habla claramente de la mejora obtenida con esta nueva aproximación, previa la rectificación de los ángulos de posición que han servido de nuevos datos. Los comentarios a la sistemática de signos en los residuos para las distancias aparentes han quedado consignados en la introducción.

Seminario Matemático
Sección de Astronomía y Geodesia.
Zaragoza, marzo de 1962

NOTA BIBLIOGRAFICA

- (1) VIDAL ABASCAL: *Cálculo de órbitas de estrellas dobles visuales*. Santiago, 1953.
- (2) CID PALACIOS: *Contribución al estudio de estrellas dobles visuales*. Mem. Obs. Santiago. Rev. Geofísica núm. 35-36.
- (3) BAUSCHINGER: *Die Bhanbestimmung der Himmelskörper*, 2 aufl. Leipzig, 1928.
- (4) ZAGAR: *Sopra un nuovo metodo analitico per il calcolo delle doppie visualo*. R. Ac. de Palermo, 1, 1938.
- (5) PICART: *Sur le calcul des orbites des étoiles doubles visuelles*. C. R. 198. 1934.
- (6) MARTÍN: *Metodo "I" per il calcolo d'orbita di una binaria visuale*. Lincei Rend. (6). 1932. Padova. Publ. 1932.
- (7) ZELMANOW: *A Method for the Computation of the Orbits of Visual Binaries*. Astr. J. of Soviet Union. 16. 4. 1939.
- (8) CID PALACIOS: *On the necessary and sufficient observations for determination of elliptic orbits in double star*. As. Jour. 63, october, 1958.
- (9) SEELIGER: *Fortgesetzte Untersuchungen über der mehrfache Ster-system ξ Cancri*. München, 1888.
- (10) CID PALACIOS: *Método de mejora de órbitas de estrellas dobles visuales*. Urania. A. XXXVII. p. 201 a 223.
- (11) BAIZE: *Eléments orbitaux de 30 étoiles doubles*. Jour. Observateurs. Nov. Dic. 1958.
- (12) CID PALACIOS: *Cálculo y mejora de órbitas parabólicas en pares visuales*. Urania. Núm. 252. 1960.

ESTUDIO TEORICO Y EXPERIMENTAL DE LA DIFUSION EN COLOIDES DE ORO

p o r

FRANCISCO BÁSCONES PEÑA

Laboratorio de Química inorgánica de la Facultad de Ciencias de Zaragoza

INTRODUCCION

A partir de los estudios de Fourier acerca de la propagación del calor, muchos otros investigadores han trabajado en resolver los problemas que la difusión plantea en el campo científico, con proyección en muchas ocasiones en el terreno de la técnica.

Figuras tan relevantes y conocidas como Graham, Fick, Smoluchowsky, Einstein, etc., han arrojado luz sobre este tan sugestivo tema, al que modestamente hemos consagrado, si bien con todo interés, nuestro esfuerzo intelectual.

En este trabajo, distinguiremos tres partes principales: en la primera, que podríamos llamar *histórica*, repasaremos brevemente las ideas que sobre difusión se han tenido a lo largo de estos últimos cien años, señalando las más valiosas contribuciones para el esclarecimiento del problema, e indicando cuál es el estado actual de la cuestión.

En la segunda, o *teórica*, dejaremos sentados los puntos que en el cálculo de probabilidades hacen relación con este asunto, llegando a su aplicación al problema que nos ocupa.

Por fin, en la parte tercera, la *experimental*, mostraremos la técnica empleada en el laboratorio para la obtención de coloides, para el logro de una difusión de los mismos en condiciones adecuadas, para el estudio de concentraciones coloidales en condiciones variables de tiempo y distancias; analizando los resultados obtenidos y contrastándolos con los teóricos, extraeremos finalmente las conclusiones a que haya lugar.

PARTE HISTÓRICA

Podemos situar el momento inicial del estudio de la difusión, en los trabajos matemáticos de Fourier, mediante los cuales se resolvieron los problemas teóricos que planteaba la propagación del calor (1) a través de paredes y de sólidos en general (2).

Graham y Fick, intuyeron la analogía entre la propagación del calor a través de cuerpos sólidos y el paso de materia por difusión a través de sólidos, líquidos y gases, en los que la concentración correspondiente a dicha materia no es uniforme.

Fruto de los estudios en estos dos científicos fue el establecimiento de las llamadas "leyes de la difusión" tan conocidas entre los científicos.

Einstein, en la primera década de este siglo, dio un paso más, interpretando el mecanismo de la difusión y dando un método experimental muy acertado y práctico para la determinación del coeficiente de difusión que siempre se presenta en las fórmulas de Fick. Anteriormente a Einstein, Van T'Hoff, V. Henry y algunos más, prepararon el camino para el logro que el famoso padre de la relatividad alcanzó en este tema de la difusión.

La naturaleza estadística de los fenómenos de la difusión nos ha sugerido su estudio aplicándole el cálculo de probabilidades.

Veamos, aunque rápidamente, estas aportaciones que, por cierto sería muy conveniente darles una forma concordante y exponerlas con un criterio y nomenclatura uniformes. Al menos, se nos permitirá insistir sobre el pensamiento de los autores que se citan, pero uniformando su lenguaje y expresiones escritas, así como acoplando sus conceptos, mediante una notación que no todos ellos emplearon.

VELOCIDAD INSTANTÁNEA Y VELOCIDAD UNITARIA

Las disoluciones y los coloides, que en fin de cuentas son los que más a nosotros nos interesan, pueden considerarse como moléculas o agrupaciones moleculares que se hallan animadas incesantemente de movimiento dentro del disolvente o del medio de dispersión.

Considerando a la velocidad como espacio recorrido partido por tiempo empleado, las velocidades a estudiar en los sistemas coloidales son variables con los tiempos de observación, por lo cual para los cálculos que precisamos, hemos de tomar velocidades correspondientes a tiempos iguales.

En casos análogos suelen utilizarse velocidades instantáneas; pero siéndonos éstas desconocidas, usaremos velocidades unitarias (o desplazamientos en unidad de tiempo), siguiendo así el criterio de todos los autores.

VELOCIDAD GEOMÉTRICA Y VELOCIDAD MATERIAL

El vector representativo de la velocidad que en cada punto y a cada instante posee una molécula o una micela, dentro del medio de dispersión, mide su *velocidad geométrica* (3).

Para nuestras deducciones y cálculos supondremos que todas las moléculas o micelas existentes en cada unidad o elemento de volumen, se hallan animadas de la misma velocidad geométrica unitaria, cuyo módulo coincide con la velocidad media aritmética. A esta velocidad la representaremos por D .

Si se define como *velocidad material* (3) al producto de la velocidad geométrica por la concentración c , será

$$\text{Velocidad material} = D \cdot c$$

En el caso de que las concentraciones sean distintas en los diversos planos del medio estudiado, la velocidad material también variará con la situación, y mediante su conocimiento tendremos una medida de la cantidad de materia que se desplaza en el sentido del vector D . en la unidad de tiempo.

CAUDAL MATERIAL

Cuando consideremos una sección de área q , el producto

$$D \cdot c \cdot q.$$

nos dará la caudal material (4) que la atraviesa, pues fácilmente se ve que dicho producto corresponde a la materia que pasa a través de q . en la unidad de tiempo.

A su vez

$$D \cdot c \cdot q \cdot t.$$

será el *caudal material* es el tiempo t .

EXPRESIÓN DE LA CONCENTRACIÓN

Conviene también hacer notar que, pudiendo darse la concentración como cantidad de soluto o de coloide en unidad de volumen, expresada, ya por masa, ya por el conteo de partículas y siendo este último método el que nos parece más práctico, a él nos atendremos de ordinario.

Cuando se hable pues, de concentración en un plano, entendemos que es el valor medio resultante al considerar las concentraciones en los diversos puntos que componen el plano. En realidad, allí donde hay micela, la concentración es máxima, mientras que será 0 la concentración en los puntos donde no existe partícula coloidal.

GRADIENTE DE CONCENTRACIÓN

Para que se efectúe el transporte de materia por difusión a lo largo de un medio de dispersión, es necesaria una diferencia de concentración en los diversos planos del medio.

Pues bien, a la variación de esta concentración a lo largo del medio lo llamados *gradiente de concentración*, que se representa por el cociente diferencial: $\frac{dc}{dx}$.

El sentido en el que se efectúa la difusión es siempre aquel según el que decrece la concentración, debido a la tendencia natural a igualarse la distribución material en todo el medio.

Por tanto, el signo del gradiente será + si las variaciones de concentración y de x son cocrecientes, o sea si a $\Delta c \geq 0$, corresponde $\Delta x \geq 0$, y será — si ambas variaciones son contracrecientes, es decir si a $\Delta c \geq 0$, corresponde $\Delta x \leq 0$.

Conviene tener esto en cuenta para interpretar fácilmente el signo menos que suele aparecer en las ecuaciones de difusión.

Tras estas aclaraciones, entramos de lleno en nuestro tema de la difusión.

MECANISMO DE LA DIFUSIÓN

Por cuanto llevamos dicho resulta fácil comprender que, de no existir condiciones exteriores que mantengan fija la distribución inicial de las concentraciones materiales —supuesta variable con la situación dentro del medio de difusión— la materia tiende por sí (5) a repartirse de tal modo que su concentración llegue a igualarse en todo el medio, siempre que disponga de tiempo suficiente para que la difusión se efectúe.

Esta tendencia se efectúa gracias y mediante el proceso de la difusión.

Supongamos un cilindro lleno de una disolución, o de un coloide, de tal forma que la concentración inicialmente vaya disminuyendo de izquierda a derecha, o sea $c_A > c_B > c_C$.

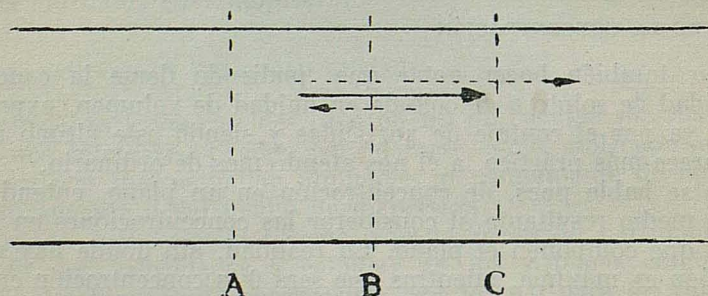


FIG. 1

Después de un tiempo suficiente, por efecto de la difusión, se puede apreciar una distribución de concentraciones que supera en valor al inicial, en la parte derecha del cilindro, mientras que es inferior en la región izquierda del mismo.

El fenómeno de la difusión se efectúa, pues, por el paso de la materia desde los puntos en que es mayor la concentración, a aquellos en que lo es menor. Pero esto no quiere decir que no haya transferencia de materia de puntos menor a otros de mayor concentración sino, que la cantidad de materia que pasa durante un mismo tiempo a través de la misma superficie, siempre es mayor en el sentido de las concentraciones decrecientes que en el contrario. Además la difusión será tanto más intensa, en dicho sentido cuanto mayor sea el gradiente de concentración, supuestas iguales todas las demás circunstancias. Esto se ha querido indicar en la anterior figura, significando los vectores punteados el paso de materia a través de D en ambos sentidos, y el vector definitivo la suma algebraica de ambos vectores, equivalente a la materia difundida.

VARIACIONES TEMPORALES DE LA CONCENTRACIÓN. PRIMERA LEY DE FICK

Consideremos el cilindro antedicho, cuya sección es q unidades cuadradas

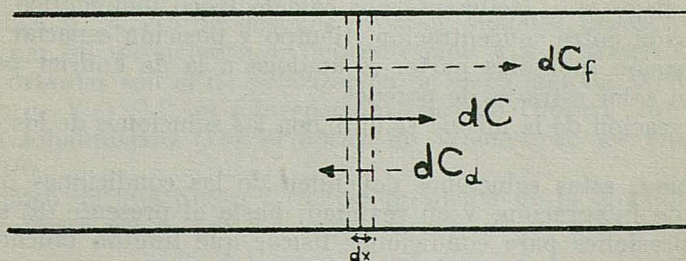


FIG. 2

Sea $\vec{D}$ la velocidad geométrica, que suponemos invariable con el tiempo, supongamos que todas las moléculas de un elemento de volumen están animadas con la velocidad D .

Sean c y $c + \frac{dc}{dx}$ las concentraciones micelares en los planos infinitesimalmente próximos X y $X + dx$, situados a izquierda y derecha del plano en el que se estudia la difusión.

El caudal material favorable a la difusión, que atraviesa durante dt el plano será:

$$dC_f = D \cdot c \cdot q \cdot dt$$

El caudal material desfavorable a la difusión, en ese mismo tiempo y a través del mismo plano será:

$$dC_a = D \left(c + \frac{dc}{dx} \right) \cdot q \cdot dt$$

Por tanto, el caudal material que, en fin de cuentas, trasládase por difusión en el sentido en el que ésta se efectúa, o por así decir el caudal-saldo,

será la diferencia entre el favorable y el desfavorable a la misma difusión, o sea:

$$dC = dC_f - dC_a = -D \cdot q \cdot \frac{dc}{dx} \cdot dt$$

que es la expresión conocida, de la primera ley de Fick (6).

VARIACIONES ESPECIALES DE LA CONCENTRACIÓN. SEGUNDA LEY DE FICK

La primera Ley de Fick que nos hemos permitido repasar, sólo nos dice la cantidad de materia —caudal— que difunde a través de q en el tiempo dt , pero nada nos indica sobre la forma de distribución de la concentración micelar a lo largo del cilindro. Esto es lo que intenta la segunda Ley de Fick, lográndolo en forma diferencial (7).

La expresión diferencial de esta ley sabemos que es:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \frac{d^2 c}{dx^2}$$

a la que se llega muy fácilmente por cálculo físico matemático, y que nos dice la relación entre concentración, tiempo y posición espacial.

Esta ecuación, por otra parte, es análoga a la de Fourier para la propagación del calor a través de paredes.

Por integración de la misma se obtienen las soluciones de los casos prácticos (8).

Ahora bien, estas soluciones dependen de las condiciones impuestas a los límites de integración, y en realidad, hasta el presente (9) sólo se han logrado expresiones para condiciones físicas que limitan mucho el campo de la experiencia.

Así, por ejemplo, si un tubo, prácticamente indefinido, en el que se considera fija la concentración en uno de sus extremos, A , que es en el que se pone el problema, y en cambio es nula en el otro extremo, B , por existir sólo en el medio de difusión, suponiendo asimismo que D sea constante, se tendrá, según Krampf (10) en un punto separado de la sección de contacto inicial entre el problema y medio de dispersión, una distancia X después del tiempo t , la fórmula:

$$c = c_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-y^2} dy \right)$$

en donde $y = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$; y c_0 es la concentración inicial en el punto considerado como el origen de la difusión, o sea $c_0 = c_A$, o lo que es lo mismo la concentración del problema antes de que tenga lugar la difusión.

Actualmente sigue empleándose esta misma ecuación de Fick, integrándola para ciertos casos especiales, utilizando para ello diversos procedimientos, como el empleo de operadores (11) etc.

Otra manera de enfocar la cuestión nos parece que podría resolver el problema de forma sencilla y más general. Esta es la finalidad de nuestro trabajo, como más adelante se verá.

ESTUDIO DEL COEFICIENTE D

Vistas ya las dos leyes fundamentales de la difusión, vamos a ocuparnos de la constante D , revisando con criterio coordinador las ideas, métodos de cálculo y consecuencias que en torno a la misma han expresado, usado y deducido los autores más destacados en este terreno (12).

Graham, Henri, Einstein y Langevin, sobre todo, nos interesan. Graham por haber sido el iniciador experimental de dicho estudio; Henri por relacionar D con la fuerza debida a la presión osmótica, causa, según él, de la difusión; Einstein, por aplicar a su estudio la teórica cinética y fuerzas de rozamiento que, dando una nueva visión del movimiento browniano, encaminó por nuevos derroteros el problema de la difusión; y, por fin, Langevin por su deducción sencilla y elegante, aplicando un proceso físico-matemático.

Graham, aunque con muy escasos medios, tiene el mérito de haber marcado el camino en la experimentación de la difusión, empleando sustancias solubles en el agua. Dispuso dos métodos distintos, basados en el análisis químico (13).

A su imitación, se usaron después diversos métodos físicos y químicos para determinar las variaciones de concentración y a su través deducir D . Los más importantes son el de polarización de electrodos de Weber (14), el polarimétrico de Voit (14), el fotospectométrico de Thovert (15), el refractométrico de Johannisz (14), el óptico de Wiene (14), los fotolorimétricos, etc. (16).

HENRY enfocó de una nueva forma el problema de la difusión, al relacionar este proceso con la presión osmótica del soluto en el medio de dispersión (17).

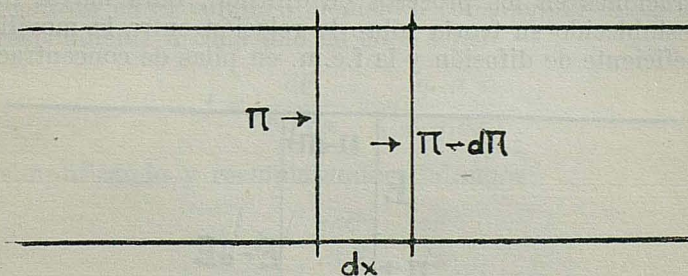


FIG. 3

Este nuevo enfoque marca, a su vez, el camino al tratamiento cinético-molecular de la difusión, llegando a la conclusión de que

$$D = \frac{RT}{F}$$

en donde vemos a D relacionado con valores perfectamente conocidos: R , constante de los gases, T , temperatura absoluta del líquido y F fuerza necesaria para desplazar un mol de sustancia disuelta con una velocidad límite de un centímetro por segundo en el seno del disolvente.

CONTRIBUCIÓN DE EINSTEIN A ESTE CAPÍTULO CIENTÍFICO

El genial A. Einstein, tuvo en esta materia también un resonante triunfo. He aquí cómo trata este asunto (18).

Considera una vasija cilíndrica llena de una disolución diluida. En el interior puede considerarse un émbolo movable constituido por una membrana semipermeable que divide al cilindro en dos partes *A* y *B*. Supone que la concentración de la disolución en *A* es mayor que en *B*, de tal modo que si se quiere que el émbolo permanezca fijo, tendrá que hacerse desde fuera una fuerza hacia *A* que sea igual a la diferencia de las presiones osmóticas en *A* y *B*, multiplicada por la superficie del émbolo.

Ahora bien, como esa fuerza exterior no hay posibilidad de ejercerla, el émbolo se moverá bajo el influjo de la mayor presión osmótica en *A* que en *B*.

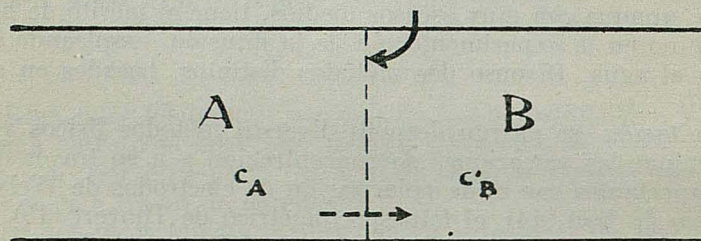


FIG. 4

De estas consideraciones, ya propuestas por Henri, se sigue que las fuerzas debidas a la presión osmótica son las responsables de la igualación de las concentraciones en los procesos de difusión. Para mayor abundancia, Nernst ha establecido su teoría sobre la relación entre la movilidad de los iones, el coeficiente de difusión y la f.e.m. en pilas de concentración.

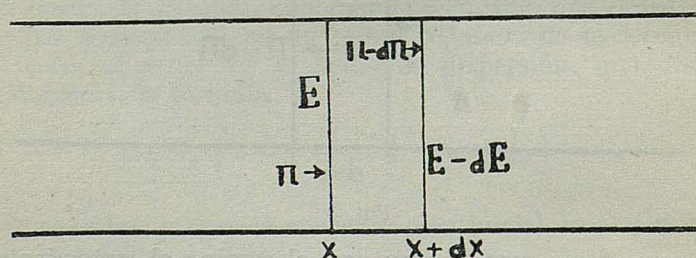


FIG. 5

En el cilindro horizontal de sección *q*, que contiene una suspensión coloidal, supone Einstein que hay en un plano dado, situado a distancia *x* del origen, *E* gránulos o micelas por unidad de volumen, mientras que en otro plano, *x* + *dx*, la concentración es *E* - *dE*.

$$E = c \cdot N \quad N = N^\circ \text{ de Avogadro} \quad c = \text{concentración molar}$$

Aplicando a las partículas en suspensión el tratamiento de la teoría cinética de los gases, la presión debida a los impactos sobre el plano primero será

$$\pi = \frac{mE\bar{c}^2}{3}$$

siendo m la masa de un gránulo y $\bar{c}^2$ la velocidad cuadrática media.

En el plano $x + dx$ la presión será:

$$\pi - d\pi = \frac{m(E - dE)\bar{c}^2}{3}$$

de las dos últimas expresiones se obtiene:

$$d\pi = \frac{mdE\bar{c}^2}{3}$$

y derivando respecto de x :

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{1}{3} m\bar{c}^2 \frac{dE}{dx}$$

Ahora bien, el gradiente de presión, multiplicado por la sección transversal del cilindro, será el gradiente de fuerza al que se debe la difusión,

$$q \frac{d\pi}{dx} = \frac{dF}{dx}:$$

Pero la fuerza dF es la que actúa sobre todas las moléculas o gránulos que se encuentran en el volumen elemental considerado, $E \cdot q \cdot dx$, luego la fuerza correspondiente a cada uno de ellos será:

$$f = \frac{dF}{Eq \, dx} = \frac{q \cdot d\pi}{E \cdot q \cdot dx}$$

en donde simplificando y reemplazando tendremos:

$$f = \frac{m\bar{c}^2}{3E} \cdot \frac{dE}{dx}$$

Pero según la hidro-dinámica, siempre que sobre una molécula o partícula material en el seno de un medio resistente o viscoso, actúa una fuerza, dicha molécula o partícula adquiere en el seno del líquido una velocidad con arreglo a la expresión siguiente:

$$v = \frac{f}{R_r}$$

siendo R_r una constante típica del medio viscoso y de la forma de la partícula, a la que se llama resistencia por rozamiento (19), y que no está todavía teóricamente calculada de una manera general.

Para casos como el nuestro, en que se consideran partículas muy aproximadamente esféricas y de tamaño muy grande en comparación con el de las moléculas del disolvente, la resistencia por rozamiento se rige por la fórmula de Stokes:

$$R_f = 6 \pi \eta \rho$$

siendo η el coeficiente de viscosidad del líquido disolvente y ρ el radio de la esfera móvil.

Así pues, la velocidad de cada partícula de las existentes en el volumen considerado será

$$v = \frac{m \bar{c}^2 dE}{3 E R_f dx} = \frac{m \bar{c}^2 dE}{3 E \cdot 6 \pi \eta \rho dx}$$

esta velocidad media será con la que se difunden los gránulos en sentido de la concentración decreciente.

La cantidad de sustancia, por otra parte, que difundirá en el tiempo diferencial dt , se obtendrá con sólo multiplicar dicha velocidad por el área de difusión por la concentración y el tiempo, o sea:

$$dC = v \cdot E \cdot q \cdot dt = - q \frac{m \bar{c}^2}{3 R_f} \cdot \frac{dE}{dx} \cdot dt$$

que comparada con la expresión de la primera Ley de Fick nos dice:

$$D = \frac{m \bar{c}^2}{3 R_f}$$

Pero, según la hipótesis de Perrin (20), la energía cinética de un gránulo o partícula en suspensión: $1/2 m \bar{c}^2$, es igual a la determinada por la teoría cinética para una molécula gaseosa: $\frac{E_k}{N}$, donde $E_k = 3/2 RT$ y N es el número de Avogadro.

Por lo tanto,

$$\frac{m \bar{c}^2}{3 R_f} = \frac{2 E_k}{3 N R_f} = \frac{R T}{N R_f}$$

expresión, junto con todas las anteriores, muy interesante y conveniente para determinar teóricamente D .

Por fin, nos es grato dejar consignada en esta reseña histórica, la deducción por la que Langevin llega a la misma conclusión que Einstein acerca de D , si bien, por un camino puramente físico-matemático (21).

Si una partícula se mueve con una velocidad cuyo componente horizontal $V_x = \frac{dx}{dt}$, gracias a una fuerza F , debida a los choques moleculares del disolvente, sufrirá una resistencia $R_f = 6 \pi \eta \rho$, en el caso de ser esférica.

La ecuación del movimiento de dicha partícula, será:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = F - R, v_x$$

es decir, la fuerza real de la partícula se obtendrá como diferencia entre la fuerza total impulsora menos la fuerza de resistencia del medio viscoso.

Teniendo en cuenta que F es variable e indiferentemente puede ser positiva o negativa, y usando el cálculo diferencial e integral, así como aplicando la teoría cinética a este problema se llega a que

$$D = \frac{RT}{NR,}$$

Más adelante tendremos ocasión de ver más clara aún la coincidencia entre las fórmulas de Einstein y Langevin al comprobar que los desplazamientos micelares debidos al movimiento browniano se nos dan por fórmulas muy afines a las anteriormente deducidas pero en las que interviene el tiempo.

APLICACIÓN A LOS SISTEMAS COLOIDALES

La contribución de Einstein al estudio de la difusión no ha quedado aún del todo reflejada en las anteriores líneas, ni siquiera en su parte más importante, cual es la que relaciona los desplazamientos brownianos con D . Ahora, por exigirlo así la conveniencia, nos dedicaremos a justificar que cuanto llevamos dicho puede perfectamente aplicarse a los sistemas coloidales, que son objeto de nuestro estudio.

En realidad, cuanto llevamos dicho hasta aquí, se refiere a difusión de sustancias disueltas en el seno de un disolvente. Pero también puede aplicarse a los sistemas coloidales en los que el tamaño de las partículas en suspensión, como muy bien se sabe, es mucho mayor siempre que el tamaño molecular (22).

En efecto, la anterior afirmación será válida siempre que el tamaño de las micelas no sea tan grande que el efecto de la sedimentación supere al de dispersión que efectúa la agitación browniana.

Conocida por otra parte, es la ley de sedimentación de Perrín (23); "En una suspensión en equilibrio la concentración crece en progresión geométrica, cuando la altura del nivel disminuye en progresión aritmética."

Ahora bien, coloides de grano conveniente y en los que la agitación browniana supere notablemente al efecto de la sedimentación, éste puede despreciarse prácticamente, como lo dice Bary Paul en "Les atomes", con las siguientes palabras: "el reparto de régimen permanente de difusión entre dos capas líquidas superpuestas, está regulado por el equilibrio entre las dos acciones antagonistas del peso que tiende a llevar los gránulos al fondo y de los movimientos brownianos, que tienden a dispersarlos".

En nuestro trabajo, hemos comprobado, en efecto, que para los coloides de oro al formol empleados, puede despreciarse el efecto de sedimentación, una vez tomadas ciertas precauciones.

Además, los efectos de sedimentación y agitación browniano, dependen, en sentido totalmente contrario, de la dimensión o tamaño micelar. Por esta razón hemos escogido dichos coloides de oro en los que las protonas, cuando el coloide es rojo rubí, tienen un tamaño que entra en límites más adecuados dentro de la Coloide Química.

OTRAS VENTAJAS DEL TRABAJO CON COLOIDES

Además, el trabajo con coloides para el estudio de la difusión, ofrece una serie de grandes ventajas, cuales son:

1.^a Pueden seguirse las concentraciones micelares de una manera facilísima y segura si se posee un ultramicroscopio, con sólo efectuar contajes de partículas e intervalos de tiempo, en lugar de practicar largos y pesados análisis de muestras extraídas del problema.

2.^a Las cantidades precisadas para estos contajes son tan pequeñas, con la técnica que hemos seguido, que es suficiente una pequeña gota.

3.^a Como esta gota extraída no altera, prácticamente, la cantidad del medio de difusión, puede considerarse constante la distancia de las diversas muestras analizadas a la interfase, por lo que la única variable afectada para un mismo problema es el tiempo.

4.^a Utilizando esta técnica en diversos tubos de alturas distintas (de contenido en problema, se entiende), podrá estudiarse la difusión en su caso más complejo, es decir, cuando el tiempo y distancia varían.

MOVIMIENTO BROWNIANO Y DIFUSIÓN

Seguimos las ideas einstenianas relativas (24) a la difusión, en cuanto de más original tienen por su explicación y deducciones, empleando el movimiento browniano, que muy especialmente se aprecia en los sistemas coloidales. Por esta razón, nos hemos permitido una quizá excesiva amplitud en las páginas anteriores.

El movimiento caótico en zig-zag que muestran las partículas coloidales al observarlas mediante el ultramicroscopio, es el llamado movimiento browniano, por haber sido el botánico inglés Brown, quien en 1827 lo advirtió por vez primera con los granos de polen.

Aunque ya en 1874 Carbonelle y Thirion (25), fundándose en la teoría cinética atribuyeron tal movimiento a los impactos de las moléculas circundantes de disolvente sobre las partículas coloidales, fueron muchas las teorías que los científicos emitieron para explicarlo, como puede verse en la literatura de coloide-química correspondiente al pasado siglo y a la primera decena de años del actual.

Por fin, Einstein y Smoluchowski, aunque independientemente, demostraron que Carbonelle y Thirion tenían toda la razón y por tanto, que el desplazamiento de una sustancia disuelta en otra, de una región a otra del disolvente, representa el tipo más sencillo de cinética química y se le puede aplicar la teoría cinética.

En los coloides se observa perfectísimamente el dicho movimiento cuando el grado de división micelar es adecuada, pero aun existen coloides con óptimas condiciones para ello, razón por la cual hemos efectuado las experiencias con los coloides de oro de color rojo rubí (26), que son los de tamaño de protona más reducido posible. Estas experiencias las hemos efectuado con el ultramicroscopio de rendija.

El mismo Einstein asoció este movimiento con el proceso de la difusión, mediante estas palabras: "La teoría cinético-molecular abre ante nosotros un segundo punto de vista para el estudio de la difusión. (Recuérdese que el primero es el de la presión osmótica). El proceso del movimiento caótico al que hemos hecho depender del contenido calorífico de la sustancia disolvente, hará que las moléculas aisladas en el seno de un líquido, varíen en su posición de una manera totalmente imprevisible. Este error o, por así decir, moverse sin rumbo fijo de las moléculas en el líquido, tendrá por resultado una distribución de concentraciones tal que hará uniforme en todos los puntos a una disolución que inicialmente no lo era".

DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES DE DIFUSIÓN MIDIENDO TRAYECTORIAS MICELARES

Tras la larga cita anterior, proseguimos el pensamiento del famoso científico alemán, hasta establecer su famosa ecuación del movimiento browniano.

Si en un tiempo dado, t , conocemos la situación de cada una de las moléculas disueltas o de las micelas de un volumen dado, quedando dicha situación representada por unos valores de x para un tiempo $t + \tau$, siendo τ un tiempo muy corto, podremos suponer que la relación de concentraciones en el mismo volumen habrá variado muy poco en dicho intervalo τ .

Llamemos $\Delta_1, \Delta_2 \dots$ los desplazamientos de la primera, segunda... micelas durante el tiempo τ . Estos desplazamientos los consideraremos negativos hacia la izquierda y positivos a la derecha.

Como quiera que la disolución es diluida, los desplazamientos de las micelas están condicionados por el disolvente, y nunca por las demás partículas. Aunque individualmente cada desplazamiento micelar tendrá distinta magnitud que los demás, puede considerarse, que, por término medio, en lugares de la disolución con distinta concentración, los desplazamientos medios vendrán a ser iguales en valor absoluto, puesto que son igualmente posibles en todas direcciones.

Veamos ahora qué cantidad de sustancia difundida es la que pasa a través de la sección q durante el tiempo τ (fig. 6).

Suponemos conocido el desplazamiento medio, Δ , de las micelas en el sentido del eje del cilindro. Como, por otra parte no deben existir preferencias para el movimiento de las micelas en ninguna dirección, para simplificar supondremos que todas ellas experimentan el desplazamiento Δ , pero que la mitad lo hace hacia la derecha y la otra mitad hacia la izquierda.

Tomemos el plano F del cilindro como plano de difusión.

Teniendo en cuenta las antedichas suposiciones, y que las concentraciones medias en los volúmenes comprendidos entre los planos P y los Q_1 y Q_2 , separados cada uno de ellos del P por una distancia Δ a izquierda y derecha, respectivamente, son c_1 y c_2 , podremos hallar las micelas que pasan en ambos sentidos a través del plano P durante el lapso de tiempo τ .

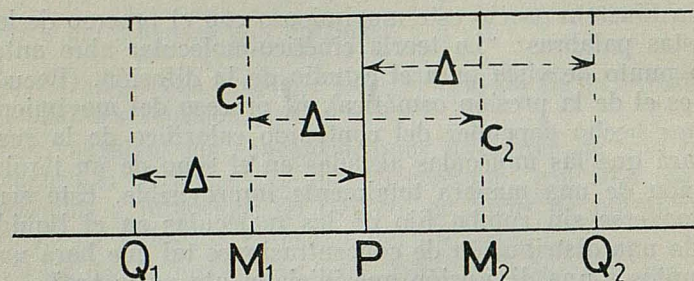


FIG. 6

En efecto, la mitad de las micelas que se hallen entre los planos Q_1 y P , que serán:

$$\frac{1}{2} c_1 \cdot \Delta \cdot q$$

atravesarán el plano de difusión hacia la derecha, debido a la probabilidad igual de que se desplacen en uno u otro sentido.

Igualmente la cantidad de micelas que pasarán a través de P de derecha a izquierda durante el mismo tiempo τ , será también la mitad de las que se hallen en el elemento de volumen limitado por los planos P y Q_2 , que será igual a la concentración media, o la que corresponde al plano medio M_2 , por el volumen $q \cdot \Delta$, o sea:

$$\frac{1}{2} c_2 \cdot q \cdot \Delta$$

Las micelas que se hallen fuera del volumen comprendido entre los planos Q_1 y Q_2 , se hallarán a distancias del plano P que superan el desplazamiento Δ , y por tanto, no lo alcanzarán.

Por consiguiente, el caudal-saldo que durante el tiempo τ pasará por P y al que se deberá la difusión, será igual a la diferencia de los caudales que en sentidos opuestos atraviesan el dicho plano en ese mismo tiempo, o sea:

$$C = \frac{1}{2} q (c_1 - c_2) \cdot \Delta \quad (a)$$

Cumplíndose que el gradiente de concentración sea constante, podremos hallarlo mediante la siguiente expresión:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{c_2 - c_1}{\Delta}$$

de donde,

$$c_1 - c_2 = -\Delta \frac{dc}{dx}$$

valor que reemplazado en (a) nos dará:

$$C = -\frac{1}{2} q \Delta^2 \cdot \frac{dc}{dx}$$

cantidad de sustancia difundida a través de P durante el tiempo τ . Por tanto, si queremos la expresión general del número de micelas difundidas durante el tiempo dt , lo conseguiríamos, con sólo dividir la anterior expresión por τ multiplicando después por dt .

En una palabra,

$$dC = -\frac{1}{2} q \frac{\Delta^2}{\tau} \cdot \frac{dc}{dx} dt$$

que es la expresión dada por Einstein de la primera ley de Fick, y de la que puede deducirse el valor de D con respecto a los desplazamientos micelares que efectúan el movimiento browniano, durante un tiempo τ proyectados sobre el eje horizontal del cilindro de difusión considerado:

$$D = \frac{1}{2} \frac{\Delta_x^2}{\tau}$$

que es la famosa fórmula de Einstein del movimiento browniano, si bien ordinariamente suele expresarse de la forma siguiente:

$$\Delta_x = \sqrt{\frac{RT}{3N\pi\eta\rho}} \cdot \tau$$

resultante de despejar Δ y reemplazar D por el valor que en párrafos anteriores quedó considerado como deducido para D por el mismo Einstein.

De las anteriores expresiones puede deducirse que el camino o desplazamiento medio recorrido por una micela no es proporcional al tiempo, sino a la raíz cuadrada del tiempo. Se sigue de éste que los caminos efectuados en dos unidades de tiempo sucesivas no siempre se sumarán, sino que por el contrario, en muchas ocasiones se contrarrestarán.

Para justificar nuevamente la aplicación de estas deducciones a los coloides, insistiremos con las propias palabras del sabio relativista: "Según la interpretación cinético-molecular no existe diferencia alguna esencial entre una molécula disuelta y un corpúsculo suspendido".

Según anteriormente se dijo, Langevin llegó por una elegante deducción físico-matemática de la ecuación del movimiento de las partículas coloidales en un medio viscoso-resistente:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F - R_f v_x$$

a la fórmula:

$$\Delta_x^2 = \frac{R}{N} \frac{T \cdot \tau}{3 \pi \rho}$$

que es la misma fórmula de Einstein para el movimiento browniano, como muy fácilmente puede comprobarse (27).

COMPROBACIÓN DE LA FÓRMULA DE EINSTEIN EN NUESTROS COLOIDES

Varios autores han comprobado experimentalmente que la fórmula de Einstein para moléculas disueltas, que resulta ser:

$$\Delta_x^2 = 1,26 \cdot 10^{-17} \frac{T \cdot \tau}{\eta \rho}$$

una vez sustituidas las constantes por sus valores numéricos, se cumple con cierta aproximación para los coloides.

Burton presenta unas tablas de valores a este respecto, en las cuales se cotejan los valores observados experimentalmente con los teóricos calculados (28)

Nosotros hemos hecho también la comprobación para los coloides de oro al formol con los que hemos trabajado, y nuestros valores experimentales y teóricos no difieren más que los de los autores citados.

En efecto, como muestra damos dos ejemplos correspondientes a dos problemas con los cuales hemos trabajado.

El primero, cuyos granos de oro tenían un radio micelar $\rho = 1,55 \cdot 10^{-6}$ cm. trabajando a 27°C . y empleando el agua bidestilada como medio de difusión, por lo que $\eta = 8,554 \cdot 10^{-3}$ poises y determinando recorridos micelares correspondientes a un tiempo $\tau = 1$ segundo, nos resultaba un valor calculado:

$$\Delta_{(\text{Calc.})} = 5,3 \cdot 10^{-4} \text{ cm./seg.}$$

mientras que el experimental resulta ser:

$$\Delta_{(\text{Obsr.})} = 10,2 \cdot 10^{-4} \text{ cm./seg.}$$

El segundo, para 20°C ., $\eta = 10,087 \cdot 10^{-3}$ poises, y $\rho = 1,69 \cdot 10^{-6}$ cm. y un segundo de tiempo resulta:

$$\Delta_{(\text{Calc.})} = 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ cm./seg.}$$

$$\Delta_{(\text{Obsr.})} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm./seg.}$$

Valores, que teniendo en cuenta que los de Burton suelen ser los observados tres o más veces superiores a los calculados, nos han dado gran confianza para la experimentación.

AGITACIÓN BROWNIANA Y COEFICIENTES DE DIFUSIÓN

Es lógico pensar que el mayor desplazamiento medio de las micelas sea debido a choques más enérgicos con el medio de dispersión, por efecto de la denominada agitación browniana (29)

Ahora bien, un mayor recorrido medio, lleva consigo una difusión más rápida, y, en efecto, si la agitación browniana es,

$$A = \frac{\Delta^2}{\tau}$$

fácilmente se deduce la relación entre D y dicha agitación; pues, si como ya se vio:

$$D = \frac{A}{2}$$

De aquí que podamos considerar a la agitación browniana como una constante para cada sistema estudiado, pues siempre hemos supuesto que también D lo es.

Inmediata consecuencia práctica será poder determinar el desplazamiento medio micelar para cualquier lapso de tiempo si se conoce el recorrido medio para un tiempo determinado.

Como, por otra parte, este recorrido medio lo podemos hallar experimentalmente siguiendo las trayectorias de las partículas en intervalos de tiempo perfectamente iguales, se cumplirá:

$$\frac{\Delta^2}{\tau} = \frac{\Delta'^2}{\tau'}$$

de donde se despeja Δ'^2 . Es decir, que la determinación de un recorrido medio es suficiente para las series de análisis de un mismo coloide.

Disponiendo de un ultramicroscopio y de un cronómetro, tenemos, pues, resuelto el problema de determinar coeficientes de difusión. Problema que, de no tratarse de coloides, tantos han intentado resolver por diversos procedimientos químicos, colorimétricos, eléctricos, etc. con mucha dificultad siempre y con poca fortuna y precisión las más de las veces, tenida cuenta la dificultad de la experimentación.

APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES AL ESTUDIO DE LA DIFUSIÓN

Según se ha visto, por efecto del movimiento browniano es imprevisible la fijación de la posición alcanzada después de un tiempo por una determinada partícula.

Pero siendo igualmente probables o posibles todas las direcciones del espacio dentro del medio de difusión que pueden tomar las innumerables micelas que constituyen el coloide y estando sujetos sus desplazamientos medios, en cualquier dirección, a las fórmulas antedichas en relación con los tiempos, es lícito suponer que la distribución de dichas micelas es de

carácter estocástico, es decir, que a ella se le puede aplicar perfectamente el cálculo de probabilidades.

Por tanto, podrá estudiarse el fenómeno de la difusión aplicándole las teorías probabilísticas, como ya algunos autores han apuntado en alguno de sus trabajos (30).

ESTADO ACTUAL DE LA CUESTIÓN

Con lo dicho nos parece haber expuesto suficientemente las líneas generales por las que, hoy día, discurre el problema de la difusión, que, en resumen, se ha querido resolver en los casos prácticos integrando la segunda ecuación diferencial de Fick, siempre que, previamente se conozca el coeficiente D . Pero en realidad, sólo en algunos casos con muchas restricciones, es esto posible.

Por otra parte, en los últimos años se ha esbozado la posible y más general solución, mediante aplicación de la teoría matemática del cálculo de probabilidades, pero sin haber llevado adelante, y hasta sus últimas consecuencias, esta idea.

Esta es la finalidad fundamental del presente trabajo.

PARTE TEORICA

INTRODUCCIÓN

Aunque en las precedentes páginas no pretendamos, ni mucho menos, haber recogido de una manera exhaustiva cuanto sobre difusión se ha escrito, creemos que las bases y las mejores aportaciones relativas a este tema están suficientemente examinadas en relación con este trabajo.

Acordes con el propósito de sacar partido al cálculo de probabilidades, trataremos en esta segunda parte de explicar, en forma sencilla, aquellos capítulos de estocástica relacionados con las funciones de probabilidad, con las leyes de distribución normal en una, dos y tres dimensiones, con la interpretación de los parámetros estadísticos, con las relaciones que ligán a dichos parámetros y mediante los cuales nos es de suma facilidad pasar de unos a otros, etc. etc.

Esta tarea, al parecer innecesaria, nos llevará como de la mano a la más importante meta de nuestro trabajo, que es establecer los criterios y las fórmulas para el cálculo teórico de las concentraciones coloidales en los diversos puntos del medio de dispersión, logradas gracias al proceso de la difusión coloidal.

Consideraremos dos casos distintos: el primero, en el que la difusión se considera producida mediante *ondas esféricas*: el segundo, más interesante en la práctica, trata a la difusión como realizada mediante *ondas planas*, y tiene en cuenta los efectos que la presencia de fondos, paredes laterales y superficie de separación entre coloide y agua, así como de la superficie libre del medio de dispersión —agua— pueden introducir en la difusión.

LEY DE DISTRIBUCIÓN NORMAL DE FLUCTUACIONES MONODIMENSIONALES

Basándose en los postulados de Haage (31), según los cuales: "Las perturbaciones o errores de magnitudes cualesquiera que pueden ser consideradas debidas a perturbaciones elementales, iguales en magnitud e indiferentes en signo, que se asocian de forma indefinida, pudiendo llegar ésta hasta ser en número infinito" se llega a obtener la famosa función de Gauss:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (1)$$

en la que y es llamada comúnmente FACILIDAD de una perturbación de valor x , y que representa el valor de la ordenada que en la curva de campana (figura 7) corresponde al punto de abscisa x .

Como es bien sabido, h es una constante que depende de la precisión de las medidas, por lo que suele llamarse ordinariamente, parámetro de precisión (32).

Ahora bien, la función de Gauss nada nos dice, por sí misma de la probabilidad con la que la perturbación o error de la magnitud considerada se halle comprendida entre dos valores extremos x y $x + dx$, es decir, la probabilidad correspondiente al intervalo dx .

TABLA 1

X	Y	$Y/Y_{\text{Máx.}}$
0	$\frac{h}{\sqrt{\pi}}$	1
$\pm \frac{1}{2h}$	$\frac{h}{\sqrt{\pi} e^{1/4}}$	0,8
$\pm \frac{1}{h\sqrt{2}}$	$\frac{h}{\sqrt{\pi} e^{1/2}}$	0,62 (Inf.)
$\pm \frac{1}{h}$	$\frac{h}{\sqrt{\pi} e}$	0,37
$\pm \frac{3}{2h}$	$\frac{h}{\sqrt{\pi} e^{9/4}}$	0,12
$\pm \frac{7}{4h}$	$\frac{h}{\sqrt{\pi} e^{49/16}}$	0,08
$\pm \frac{2}{h}$	$\frac{h}{\sqrt{\pi} e^4}$	0,047

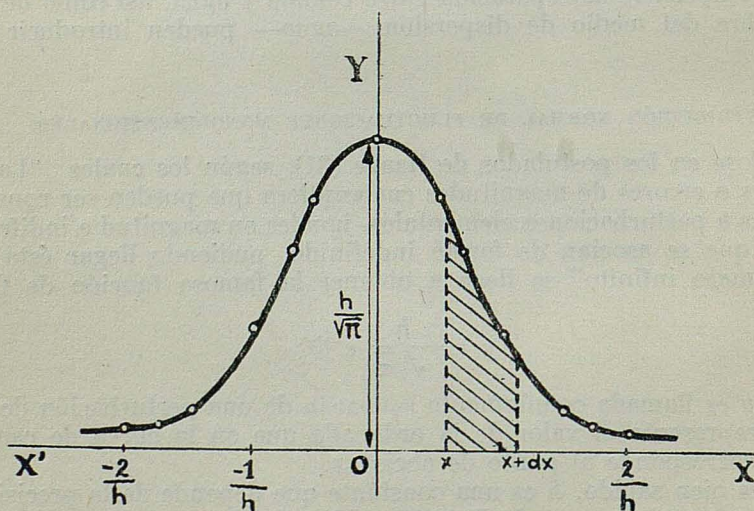


FIG. 7

Fácilmente se comprende que el producto $y \cdot dx$, siempre que dx sea un infinitésimo, sumado a lo largo de las x , equivaldrá al valor de la función integral de la curva de Gauss, entre los límites a que se extienda dicha suma. Llamando Φ a dicha función integral, se cumplirá siempre:

$$d\Phi = y \cdot dx$$

y también

$$\Phi_x^{x+dx} = \int_x^{x+dx} y \, dx = \int_x^{x+dx} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \, dx$$

Esta función que nos da la probabilidad antedicha es la que realmente nos interesa considerar aquí.

PROBABILIDAD DE UNA PERTURBACIÓN MENOR QUE UN VALOR FIJADO

Si en (2), los límites se hacen x_1 y x_2 respectivamente, la probabilidad de tener una perturbación cuyo valor se halle comprendido en el intervalo (x_1, x_2) (33) vendrá expresado por:

$$\Phi_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \, dx$$

que, en el caso de que el límite interior fuera 0, nos daría la expresión:

$$\Phi_0^{x_2} = \int_0^{x_2} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \, dx$$

que nos dice que la probabilidad de perturbaciones menores que un valor ε en un sentido, será:

$$\Phi_0^\varepsilon = \int_0^\varepsilon \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \, dx$$

Si se quiere la probabilidad de perturbaciones cuyo valor absoluto sea inferior a ε , como quiera que el intervalo sería el correspondiente $(-\varepsilon, \varepsilon)$ sería:

$$\Phi_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \, dx = 2 \int_0^\varepsilon \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \, dx$$

Concretándonos a nuestro caso, o sea, a que tomamos los desplazamientos micelares, previamente proyectados sobre un eje, y medidos a partir de un punto fijo —origen— la fórmula que nos dará la probabilidad de desplazamientos menores que r_x en cualquiera de las dos direcciones, será:

$$\Phi_0^{r_x} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r_x} e^{-h^2 x^2} \, dx$$

Para el caso de que r_x valiera infinito, se tendría la certeza de que todas las micelas cayeran en el intervalo, y por tanto, la probabilidad sería igual a 1. En efecto, la función (6) toma el valor 1 cuando r_x es igual a infinito, pues la serie a la que dicha función integral equivale tiene como límite la unidad.

LEY DE DISTRIBUCIÓN DE FLUCTUACIONES BIDIMENSIONALES

Así como la ley de distribución normal monodimensional suele aplicarse en el cálculo de errores fortuitos, como en su caso más típico, cuando se trata del estudio de la distribución normal en dos dimensiones, se suele acudir al ejemplo de la distribución de impactos alrededor de la diana en el tiro al blanco, para sensibilizarla y hacerla más intuitiva.

Aunque siempre se dispara con el fin de dar en el centro de la diana, se desvían las trayectorias de los proyectiles, dando una distribución de impactos en la que se aprecia mayor densidad en las proximidades de la diana.

Esta separación de impactos respecto del centro de tiro (supuestas siempre idénticas las condiciones personales del tirador) podemos considerarla como consecuencia de unas perturbaciones elementales, iguales en valor absoluto e indiferentes en dirección, que pueden actuar en número muy grande, dando una resultante totalmente imprecisable en cada caso particular, pero que, estadísticamente, siguen la distribución normal que estudiamos a continuación.

Al proyectar sobre una línea recta las desviaciones bidimensionales tendremos una distribución lineal en la que las desviaciones con respecto a la diana pueden considerarse producidas por perturbaciones elementales, iguales a la media de las proyecciones de las perturbaciones elementales a que nos referimos en la ley de distribución monodimensional.

Una distribución que cumple estos supuestos la denominamos distribución normal bidimensional.

Debido a la conveniencia de su establecimiento, por su relación con la tridimensional así como para la investigación de los parámetros y medias estadísticas en desviación bidimensionales, vamos a tratar ahora mismo de ella (34).

LEY DE DISTRIBUCIÓN NORMAL BIDIMENSIONAL

Supongamos los ejes coordenados X, X' e Y, Y' y en su plano un valor r que mide el desplazamiento correspondiente a un impacto, cuyas proyecciones sobre ejes coordenados son r_x, r_y respectivamente.

Según se vio en el capítulo de la distribución normal en una dimensión, la facilidad de un desplazamiento cuya proyección sobre el eje OX sea r_x será

$$F_{r_x} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 r_x^2}$$

y la de un desplazamiento de proyección r_y sobre OY :

$$F_{r_y} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 r_y^2}$$

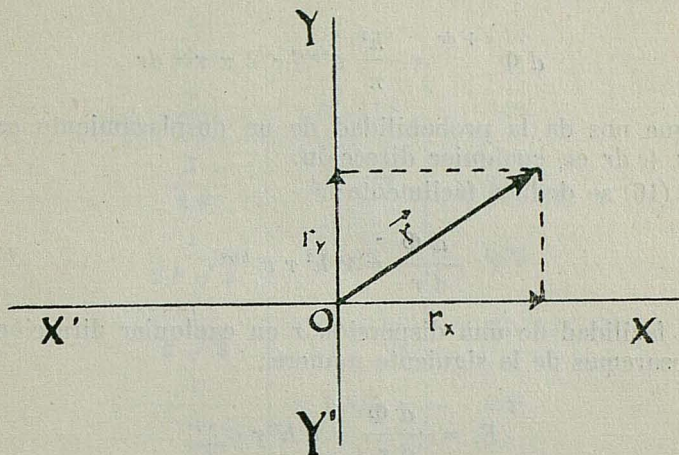


FIG. 8

La facilidad de un desplazamiento cuyas dos proyecciones sean r_x y r_y , y por tanto de un desplazamiento dado, incluso en dirección, se obtendrá multiplicando las facilidades de las proyecciones componentes, según el conocido principio de facilidades compuestas:

$$F_r \rightarrow = F_{r_x} \cdot F_{r_y} = \frac{h^2}{\pi} e^{-h^2(r_x^2 + r_y^2)} = \frac{h^2}{\pi} e^{-h^2 r^2} \quad (7)$$

queriendo significar con el símbolo r el vector según el cual se expresa el desplazamiento dirigido.

A esta facilidad la llamaremos *facilidad superficial* y equivaldrá a la derivada de la función probabilidad con respecto a la superficie.

Escribiendo de esta forma diferencial tendremos:

$$F_r = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{h^2}{\pi} e^{-h^2 r^2}$$

de donde se deduce inmediatamente:

$$d\Phi = \frac{h^2}{\pi} e^{-h^2 r^2} \cdot dS \quad (8)$$

que es la probabilidad de que al desplazarse superficialmente una partícula llegue a caer en un área dS , separada del centro una distancia r .

Esta dS será el área de una corona circular de anchura dr . Su valor en función del radio es:

$$dS = 2 \pi r \cdot dr \quad (9)$$

que reemplazando en (8) tendremos:

$$d\Phi_r^{r+dr} = \frac{h^2}{\pi} e^{-h^2 r^2} \cdot 2 \pi r \cdot dr \quad (10)$$

expresión que nos da la probabilidad de un desplazamiento comprendido entre r y $r + dr$ en cualquier dirección.

Pero de (10) se deduce fácilmente:

$$\frac{d\Phi}{dr} = 2 h^2 r e^{-h^2 r^2}$$

que será la facilidad de una dispersión r en cualquier dirección del plano y que expresaremos de la siguiente manera:

$$F_r = \frac{d\Phi}{dr} = 2 h^2 r e^{-h^2 r^2} \quad (11)$$

en donde, la no existencia del vector superpuesto a la r , indica que el desplazamiento puede ser en cualquier dirección.

ESTUDIO ANALÍTICO DE LA FUNCIÓN NORMAL DE DISTRIBUCIÓN EN DOS DIMENSIONES

Así como la función de Gauss tiene su representación analítica en la típica curva de campana, (fig. 7) la función (11) podremos representarla gráficamente estudiando sus puntos importantes.

Desde luego, dicha función no tiene sentido físico para valores en que r sea negativa, por lo cual prescindimos de la rama correspondiente.

Además, cuando r es igual a 0, F también se anula.

Hallamos los valores en que F' es igual a 0 que nos darán los puntos en que la función pasa por el máximo o mínimo.

$$F' = 2 h^2 e^{-h^2 r^2} \cdot (1 - 2 h^2 r^2) = 0 \quad \begin{cases} 1.^a \text{ sol. } r = \infty \text{ asíntota.} \\ 2.^a \text{ sol. } r - 2 h^2 r^2 = 0 \quad r = \pm \frac{1}{h \sqrt{2}} \end{cases}$$

Para $r = \frac{1}{h \sqrt{2}}$ tendremos un máximo de la función cuyo valor será:

$$F_{max} = \sqrt{2} \cdot h e^{-1/2} = \frac{h \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{e}}$$

Asimismo determinamos los puntos en los que la curva tiene infle-

r	$y = 2h^2 r e^{-h^2 r^2}$	$y/y_{\text{Máx.}}$
0	0	0
$\frac{1}{16h}$	$h/8 e^{1/16^2}$	0,14
$\frac{1}{8h}$	$h/4 \cdot e^{1/8^2}$	0,28
$\frac{1}{4h}$	$h/2 e^{1/16}$	0,57
$\frac{1}{2h\sqrt{2}}$	$h/e^{1/8}$	0,73
$\frac{1}{h\sqrt{2}}$	$\sqrt{2} h/e^{1/2}$	1-Máx.°
$\frac{1}{h}$	$2 h/e$	0,88
$\frac{\sqrt{3}}{h\sqrt{2}}$	$\sqrt{6} h/e^{3/2}$	0,6 Inflex
$\frac{2}{h\sqrt{2}}$	$2 \sqrt{2} h/e^2$	0,37
$\frac{5}{2h}$	$5 h/\sqrt{2} e^{25/8}$	0,16

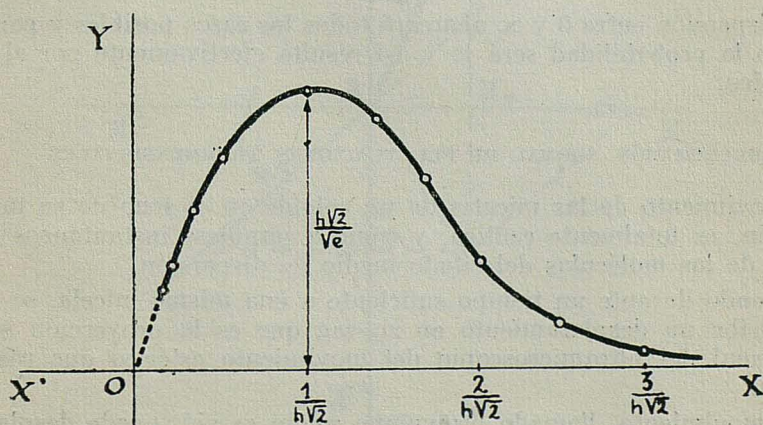


FIG. 9

xiones, que resulta ser exclusivamente el valor $r = \frac{\sqrt{3}}{h \sqrt{2}}$ para el cual el valor de la función es:

$$F_{\text{inflex.}} = h \sqrt{6} e^{-3/2} = \frac{F_{\text{max.}} \sqrt{3}}{e} < F \text{ máx.}$$

Se dan otra serie de puntos para representar gráficamente esta función. Corresponden a los que se hallan consignados en el cuadro (Tabl. 2).

La curva de facilidad bidimensional es asimismo la representada en la página (fig. 9).

PROBABILIDAD DE DISPERSIONES BIDIMENSIONALES

A partir de (11) podremos deducir muy fácilmente la expresión que nos da las probabilidades de dispersiones comprendidas entre el origen de coordenadas y un círculo de radio r , es decir, de dispersiones que queden dentro del círculo dicho.

En efecto, esa probabilidad será igual a la suma de las que corresponden a las coronas infinitesimales en que podríamos considerar dividida el área del círculo, o sea:

$$\Phi_0^r = \int_0^r 2 h^2 r \cdot e^{-h^2 r^2} dr$$

Esta función integral se resuelve directamente por ser inmediata y de valor:

$$\Phi_0^r = 1 - e^{-h^2 r^2} \quad (13)$$

La dispersión entre 0 y ∞ abarcará todos los casos posibles y para dicho intervalo la probabilidad será 1, y así resulta efectivamente por el cálculo matemático.

LEY DE DISTRIBUCIÓN NORMAL DE FLUCTUACIONES TRIDIMENSIONALES

El movimiento de las micelas de un coloide en el seno de su medio de dispersión, es totalmente caótico, y como a impulsos instantáneos que recibieran de las moléculas del citado medio de dispersión.

Siguiendo durante un tiempo suficiente a una misma micela, se aprecia que describe un desplazamiento en zig-zag que es la proyección sobre el plano visual del ultramicroscopio del movimiento estérico que realmente la anima.

Este movimiento, llamado browniano según se vió, puede desplazar las partículas en cualquier dirección espacial, sin que haya direcciones privilegiadas.

Sin embargo, al igual que en las distribuciones anteriormente estudiadas, estos desplazamientos espaciales pueden considerarse como consecuencias de unas perturbaciones elementales, iguales en valor absoluto e indiferentes en dirección y sentido y que pueden asociarse hasta en número infinito. Asimismo, por efecto de estas perturbaciones elementales, las micelas adquieren un desplazamiento que es su resultante, pero que resulta imprevisible en cada caso particular, aunque quedando sujetos estadísticamente a una distribución normal en tres direcciones alrededor del punto en que inicialmente se hallaban concentradas las micelas.

Supongamos, pues, el caso siguiente: en un momento dado tenemos una cantidad muy grande de micelas concentradas en un elemento de volumen al que rodea totalmente un medio de dispersión conveniente.

Después de cierto tiempo, por efecto del movimiento browniano se tendrá una distribución de las micelas en el espacio que rodea al elemento de volumen considerado que corresponde a lo que llamamos distribución normal en el espacio, o en tres dimensiones.

Conviene puntualizar que esta distribución normal será tal, siempre que las proyecciones de los desplazamientos espaciales sobre una dirección lineal rectilínea cualquiera, o sobre un plano cualquiera, sigan las normas fijadas a las faciliades lineales o superficiales en las fórmulas establecidas al tratar de las distribuciones mono-y bidimensionales.

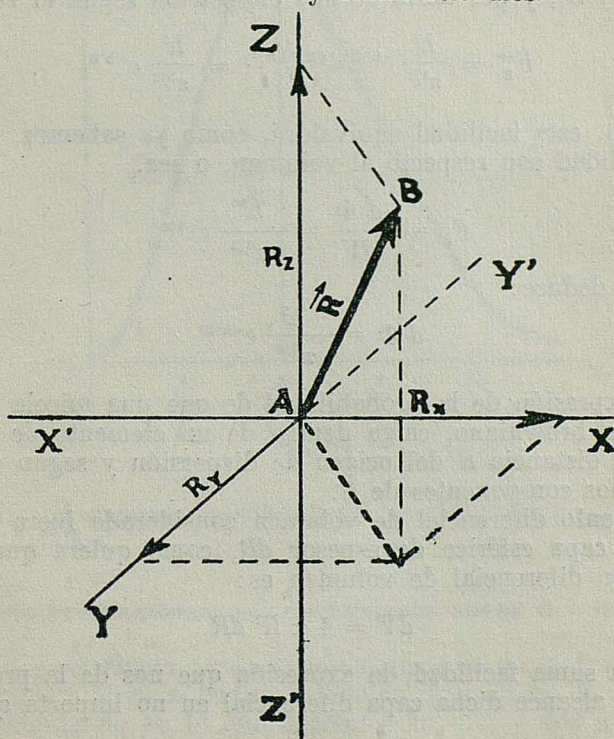


FIG. 10

Supongamos que la partícula B (figura 10) ha alcanzado la separación con respecto al elemento de volumen A , en el que se hallaba antes de comenzar la difusión.

Esta separación $\vec{R}$ queda fijada por las proyecciones sobre los tres ejes coordenados R_x , R_y y R_z .

Según lo expuesto en distribución normal monodimensional, la facilidad de una elongación con proyección R_x será:

$$\frac{d\Phi}{dR_x} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 R_x^2}$$

y las de elongación de proyecciones R_x y P_y serán, respectivamente:

$$\frac{d\Phi}{dR_y} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 R_y^2}$$

y

$$\frac{d\Phi}{dR_z} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 R_z^2}$$

La facilidad de una elongación que tenga simultáneamente las proyecciones R_x , R_y y R_z , y por tanto de una elongación según el vector $\vec{R}$, será:

$$F_{\vec{R}} = \frac{h^3}{\pi^{3/2}} e^{-h^2(R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)} = \frac{h^3}{\pi^{3/2}} e^{-h^2 R^2} \quad (14)$$

Ahora bien, esta facilidad equivaldrá, como ya sabemos, a la derivada de la probabilidad con respecto al volumen, o sea,

$$F_R = \frac{d\Phi}{dV} = \frac{h^3}{\pi^{3/2}} e^{-h^2 R^2} \quad (15)$$

De (15) se deduce:

$$d\Phi = \frac{h^3}{\pi^{3/2}} e^{-h^2 R^2} \quad (16)$$

que será la expresión de la probabilidad de que una micela por efecto de su movimiento browniano, caiga dentro de un elemento de volumen dV , situado a una distancia R del origen de dispersión y según una dirección marcada por los componentes de R .

Si el elemento diferencial de volumen considerado fuera el correspondiente a una capa esférica de espesor dR , como quiera que el valor de dicho elemento diferencial de volumen es:

$$dV = 4\pi R^2 dR$$

se tendrá, con suma facilidad, la expresión que nos da la probabilidad de que la micela alcance dicha capa diferencial en no importa qué dirección, ya que

$$d\Phi_R^{R+dR} = \frac{h^3}{\pi^{3/2}} e^{-h^2 R^2} \cdot 4\pi R^2 dR \quad (17)$$

De la expresión (17) que acabamos de deducir, podemos extraer la función que nos da la ley de distribución normal en tres dimensiones.

En efecto, aplicando aquello de que "la facilidad es la derivada de la probabilidad con respecto al intervalo" tendremos:

$$F_R = \frac{d\Phi}{dR}$$

y como fácilmente se comprende y deduce de (17)

$$F_R = 4 \frac{h^3}{\sqrt{\pi}} R^2 \cdot e^{-h^2 R^2} \quad (18)$$

ESTUDIO ANALÍTICO DE LA FUNCIÓN (18)

También esta función (18) la hemos estudiado analíticamente, y representado gráficamente (figura 11).

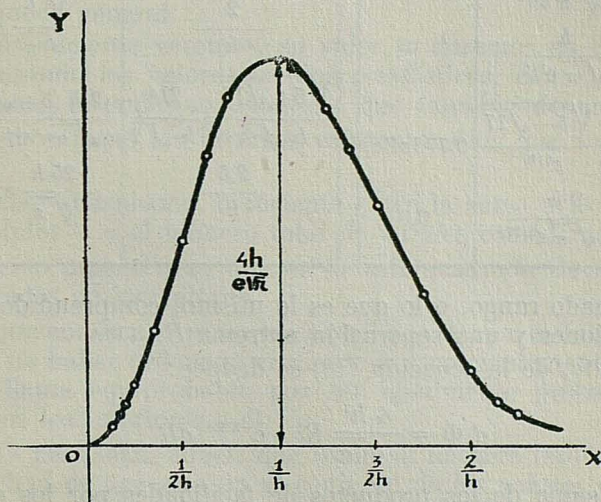


FIG. 11

La gráfica y el cuadro de valores de la página siguiente nos relevan de entrar en detalles.

PROBABILIDAD DE DESPLAZAMIENTOS COMPRENDIDOS ENTRE 0 Y R

Establecida y estudiada ya la fórmula que nos da la función de la facilidad de desplazamientos tridimensionales, hemos de dar cima a estas condiciones abundando en lo que decíamos en una y dos dimensiones, es decir, que la curva o función establecida no tiene sino el valor de medio, pues a su través nos será posible hallar la probabilidad de desplazamientos

TABLA 3

R	$Y = \frac{4 h^3}{\sqrt{\pi}} R^2 e^{-h^2 R^2}$	$Y/Y_{Máx.}$	R	Y	$Y/Y_{Máx.}$
0	0	0	1	$\frac{4 h}{\sqrt{\pi} e}$	1 — Máx.
1	h	0,04	5	$\frac{25 h}{4 \sqrt{\pi}} e^{-95/16}$	0,87
8 h	$16 \sqrt{\pi} e^{1/64}$	0,087	4 h	$\frac{121 h}{16 \sqrt{\pi}} e^{-121/64}$	0,77
1	h	0,11	3	$\frac{9 h}{\sqrt{\pi}} e^{-9/4}$	0,64
6 h	$9 \sqrt{\pi} e^{1/36}$	0,16	2 h	$\frac{49 h}{\sqrt{\pi}} e^{-49/16}$	0,39
1	$4 \cdot h$	0,3	4 h	$\frac{16 h}{\sqrt{\pi}} e^{-4}$	0,2
5 h	$25 \sqrt{\pi} e^{1/25}$				
1	h				
4 h	$4 \sqrt{\pi} e^{1/16}$				
1	$4 h$				
3 h	$9 \sqrt{\pi} e^{1/9}$				
1	h				
2 h	$\sqrt{\pi} e^{1/4}$				
0,63	$\frac{2 h \sqrt{5 - \sqrt{17}}}{\sqrt{\pi} e^{0/45}}$	0,77 Infle.	$\frac{\sqrt{5 + \sqrt{17}}}{h \sqrt{2}} = \frac{214}{h \sqrt{2}}$	$\frac{2 h (5 + \sqrt{17})}{\sqrt{\pi} e^{5 + \sqrt{17}/2}}$	0,115 Inf.
h	$\frac{9 h}{4 \sqrt{\pi} e^{9/16}}$	0,9	2,5	$\frac{25 h}{\sqrt{\pi}} e^{-25/4}$	0,09
3			h		
4 h					

de un determinado rango, o lo que es lo mismo, comprendidos entre el origen de dispersiones y una separación extrema R .

Efectivamente, de la ecuación (18) se deduce:

$$d\Phi = \frac{4 h^3}{\sqrt{\pi}} R^2 \cdot e^{-h^2 R^2} dR \quad (19)$$

y haciendo la suma de los productos de facilidades por los espesores infinitesimales correspondientes a todas las zonas esféricas concéntricas existentes entre 0 y R , tendremos la expresión matemática siguiente:

$$\Phi_0^R = \frac{4 h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^R R^2 \cdot e^{-h^2 R^2} dR \quad (20)$$

que nos da la probabilidad buscada.

Extendiendo esta integral (20) entre los límites 0 e ∞ , abarcaremos todas las posibles dispersiones y la probabilidad debe ser igual a la unidad. En efecto, así es en la realidad pues, como según el cálculo integral:

$$\int_0^\infty R^2 e^{-h^2 R^2} dR = \frac{\sqrt{\pi}}{4 h^3}$$

reemplazando en

$$\Phi_0 \frac{4 h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty R^2 \cdot e^{-h^2 R^2} dR$$

resulta:

$$\Phi_0^\infty = 1$$

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS Y VALORES MEDIOS

En las fórmulas hasta aquí establecidas aparece, junto con unas constantes, la letra h , de la que dijimos solía llamarse parámetro de precisión de las medidas, pues su valor depende de la precisión con que éstas se han hecho.

Su valor está, pues íntimamente relacionado con el cuidado puesto en tomar los valores de la experiencia y con el número de éstos que se tomen.

Realmente h es algo experimental, pero que por comodidad expresamos así de modo general.

Como más adelante veremos, su valor lo daremos en cada serie de experiencias, usando los valores medios estadísticos, con los cuales se halla ligado por unas fórmulas matemáticas que también deduciremos.

Estudiaremos pues, los diversos valores medios que suele usar la estadística (35):

VALOR MEDIO ALGEBRAICO, o cociente entre la suma aritmética —o de los valores absolutos— y el número total de valores considerados.

VALOR MEDIO CUADRÁTICO, que es la raíz cuadrada de media aritmética de los cuadrados de los valores.

VALOR EQUIPROBABLE O MEDIANO, aquel que ocupa el lugar medio o central después de haber ordenado creciente o decrecientemente los valores absolutos. Se llama equiprobable por ser igualmente probables los valores superiores que los inferiores a él.

VALOR MÁS PROBABLE, aquel, que como su nombre indica, tiene la máxima probabilidad de aparecer en el conjunto de los valores obtenidos.

Tomando suficiente número de medidas hechas cuidadosamente y desprovistas de errores personales, el valor medio algebraico es siempre cero, por lo cual prescindiremos de él. En cambio, todos los demás y muy especialmente los cuadráticos y equiprobables, suelen emplearse muchísimo (36).

Para evitar confusiones y pérdida de tiempo, estableceremos las siguientes notaciones para lo sucesivo:

$\varepsilon_a, r_a, R_a \dots$ valor medio aritmético para 1, 2, 3 dimensiones.

$\varepsilon_p, r_p, R_p \dots$	"	"	cuadrático	"	"	"	"
$\varepsilon_c, r_c, R_c \dots$	"	"	mediano	"	"	"	"
$\varepsilon_M, r_M, R_M \dots$	"	"	más probable	"	"	"	"

CÁLCULO DE LAS MEDIAS ESTADÍSTICAS EN FUNCIÓN DE h

Como quiera que estas medias estadísticas deben determinarse siempre con datos experimentales de cada serie de observaciones, y por otra parte, debe existir una relación fija entre cada par de estos valores medios, vamos ahora a tratar de hallar estas relaciones con el fin de poder emplear el parámetro estadístico que nos resulte más fácil de tener en cada caso práctico.

Si hallamos las expresiones que ligan a cada uno de los valores medios con h , podremos, despejando h en cada igualdad, e igualando a continuación los segundos miembros tener todas las relaciones paramétricas posibles, o sea, no sólo las que se establecen entre valores medios equidimensionales, sino incluso las que nos relacionan los de distintas dimensiones entre sí.

I. MEDIAS CORRESPONDIENTES A UNA DIMENSIÓN

El valor medio aritmético se obtendrá multiplicando cada valor absoluto posible por el número de veces que se presenta y dividiéndolo por el número total de casos, que es lo mismo que la suma de los productos de cada valor por su probabilidad. Esto extendido a todo el campo de existencia de valores posibles ($-\infty$, $+\infty$) se tendrá la expresión

$$\varepsilon_a = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} |\varepsilon| \cdot e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \quad (21)$$

que a su vez equivale a

$$\varepsilon_a = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} |\varepsilon| \cdot e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \quad (22)$$

A su vez (22) es una integral inmediata cuando se la transforma en su equivalente.

$$\begin{aligned} \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-h^2 \varepsilon^2} d(h^2 \varepsilon^2)}{h^2} &= \\ &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{h^2} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (23)$$

El valor medio cuadrático, lo hallaremos siguiendo un método muy parecido, pero multiplicando previamente el cuadrado de cada valor por su probabilidad y extendiendo la suma entre $-\infty$ y $+\infty$, o sea:

$$\varepsilon_c^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \cdot e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \quad (24)$$

y como según el calculo integral.

$$2 \int_0^{\infty} \varepsilon^2 \cdot e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{h^3} \quad (24)$$

será

$$\varepsilon_c^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3} = \frac{1}{2h^2} \quad (25)$$

y extrayendo la raíz cuadrada, tendremos para media cuadrática la expresión:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{h\sqrt{2}} \quad (26)$$

El valor mediano o equiprobable, lo calcularemos recordando que la probabilidad de los valores comprendidos entre $-\varepsilon_p$ y ε_p ha de ser $\frac{1}{2}$, por lo que resolviendo la ecuación:

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\varepsilon_p}^{\varepsilon_p} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon_p} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \quad (27)$$

cuya solución resulta ser la expresión:

$$\varepsilon_p = \frac{0,47694...}{h}$$

Por fin, el valor más probable para una sola dimensión se calcula muy fácilmente, pues, por ser aquél cuya facilidad es máxima, corresponderá al valor 0 según se vio en la curva de Gauss.

II. MEDIAS CORRESPONDIENTES A DOS DIMENSIONES

$$r_a = \int_0^{\infty} r \cdot 2h^2 r e^{-h^2 r^2} dr \quad (29)$$

y como

$$2 \int_0^{\infty} r^2 e^{-h^2 r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3}$$

será

$$r_a = h^2 : \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3} = \frac{\sqrt{\pi}}{2h} \quad (31)$$

$$r_c^2 = 2h^2 \int_0^{\infty} r^2 \cdot r e^{-h^2 r^2} dr \quad (32)$$

pero

$$2 \int_0^{\infty} r^3 e^{-h^2 r^2} dr = \frac{1}{h^4} \quad (33)$$

será

$$r_c^2 = h^2 \cdot \frac{1}{h^4} = \frac{1}{h^2} \quad (34)$$

y por tanto

$$r_c = \frac{1}{h} \quad (35)$$

Para hallar la dispersión equiprobable, resolvamos la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{2} = \int_0^{r_p} 2h^2 r e^{-h^2 r^2} dr = 1 - e^{-h^2 r_p^2} \quad (36)$$

o sea

$$e^{-h^2 r_p^2} = \frac{1}{2} \quad (37)$$

en donde, tomando $\ln$:

$$h^2 r_p^2 = \ln 2$$

en donde

$$r_p = \frac{\sqrt{\ln 2}}{h} \quad (38)$$

La desviación más probable será

$$r_M = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

como podrá comprobarse en la gráfica (9)

Esta última conclusión parece paradójica cuando la referimos al caso de la diana, ya que parece sería más probable dar en la misma diana, o lo que es lo mismo, tener una desviación 0, pero debe tenerse en cuenta que por ser sólo un punto o una superficie muy pequeña, aunque en ella se dé la mayor densidad de impactos, sin embargo, la mayor probabilidad corresponderá a la desviación dada ya que para ella se da una mayor superficie de corona circular en la que será lo más probable que caigan los impactos.

III. ELONGACIONES MEDIAS EN TRES DIMENSIONES

$$R_a = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} R \cdot R^2 e^{-h^2 R^2} dR \quad (40)$$

en donde

$$\int_0^{\infty} R^3 e^{-h^2 R^2} dR = \frac{1}{2h^4} \quad (41)$$

por lo que

$$R_a = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2h^4} = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \quad (42)$$

$$R_c^2 = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty R^2 \cdot R^2 e^{-h^2 R^2} dR \quad (43)$$

y como quiera que

$$\int_0^\infty R^4 \cdot e^{-h^2 R^2} dR = \frac{3\sqrt{\pi}}{8h^5} \quad (44)$$

de la que extrayendo la raíz cuadrada tendremos:

$$R_c = \frac{\sqrt{3}}{h\sqrt{2}} \quad (46)$$

Resolviendo la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4h^3} \int_0^{R_p} R^2 \cdot e^{-h^2 R^2} dR \quad (47)$$

en primera aproximación tendremos para

$$R_p = \frac{1,1}{h} \quad (48)$$

Por fin, retrocediendo al estudio analítico de la función facilidad en el caso de tres dimensiones, cuya representación gráfica se dio, tendremos el valor de la elongación más probable, expresado por

$$R_M = \frac{1}{h} \quad (49)$$

RELACIONES ENTRE EL PARAMETRO DE PRECISIÓN Y LAS MEDIAS

Despejando h en las diversas fórmulas anteriormente establecidas tendremos las siguientes expresiones:

$$h = \frac{1}{\varepsilon_a \sqrt{\pi}} \quad (50)$$

$$h = \frac{1}{\varepsilon_c \sqrt{2}} \quad (51)$$

$$h = \frac{0,47694}{\varepsilon_p} \quad (52)$$

$$h = \frac{\sqrt{\pi}}{2r_a} \quad (53)$$

$$h = \frac{1}{r_c} \quad (54)$$

$$h = \frac{\sqrt{\ln 2}}{r_p} \quad (55)$$

$$h = \frac{1}{r_M \sqrt{2}} \quad (56)$$

$$h = \frac{2}{\sqrt{\pi} R_a} \quad (57)$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} R_c} \quad (58)$$

$$h = \frac{1,1}{R_p} \quad (59)$$

$$h = \frac{1}{R_M} \quad (60)$$

A partir de estas igualdades, podemos establecer las relaciones que ligan entre sí a todas las medias estadísticas y en todas las dimensiones. (37)

$$h = \frac{1}{\varepsilon_a \sqrt{\pi}} = \frac{1}{\varepsilon_c \sqrt{2}} = \frac{0,47694}{\varepsilon_p} = \frac{1}{2\sqrt{Dt}}$$

$$h = \frac{\sqrt{\pi}}{2r_a} = \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_M \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\ln 2}}{r_p}$$

$$h = \frac{2}{R_a \sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} R_c} = \frac{1,1}{R_p} = \frac{1}{R_M}$$

Fórmulas que nos permiten la aplicación de las deducciones estadísticas a las circunstancias más favorables de nuestras medidas e investigaciones.

Es decir, que sin necesidad de proyectar, pongamos por ejemplo, los desplazamiento de partículas (que nosotros apreciamos y medimos ya proyectadas sobre un plano) sobre una recta, tan sólo con despejar las r_a , r_c , en la relación conveniente con ε_a , ε_c , etc., podemos tener la certeza de que nuestros cálculos son correctos.

La expresión

$$h = \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \quad (61)$$

que pusimos en la serie de fórmulas arriba escritas, nos da h en función de D y del tiempo que duró la difusión.

Como dicha expresión no la hemos justificado aún, lo haremos ahora teniendo presente que en la práctica ha sido hasta el presente de las más usadas.

Se recordará, sin duda, la expresión establecida en la primera parte de este trabajo y debida a Einstein:

$$\Delta_x = \sqrt{2Dt}$$

en donde Δ_x es el desplazamiento medio cuadrático de las proyecciones sobre un eje, que nosotros hemos expresado por ε_c .

Por tanto, podemos poner

$$\varepsilon_c \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2Dt} = 2\sqrt{Dt} \quad (62)$$

y como, según (51)

$$h = \frac{1}{\epsilon_c \sqrt{2}}$$

también se cumplirá:

$$h = \frac{1}{2 \sqrt{Dt}}$$

como queríamos demostrar.

CONCENTRACIONES MICELARES DEBIDAS A LA DIFUSIÓN

I. *Por ondas esféricas.*

Llegamos al punto más interesante de este trabajo, tras haber puesto las indispensables bases teóricas. Trataremos de hallar las fórmulas que nos darán el valor de las concentraciones micelares en los diversos puntos de un medio de dispersión.

El movimiento browniano desplaza a las micelas en todos los sentidos, produciendo el fenómeno de la difusión, según se vio en la primera parte. Pero esta difusión se rige por las leyes estadísticas de la distribución normal en tres dimensiones por cuanto se dijo en esta segunda parte.

Supongamos pues, una micela en una determinada unidad de volumen A , según la figura adjunta (38).

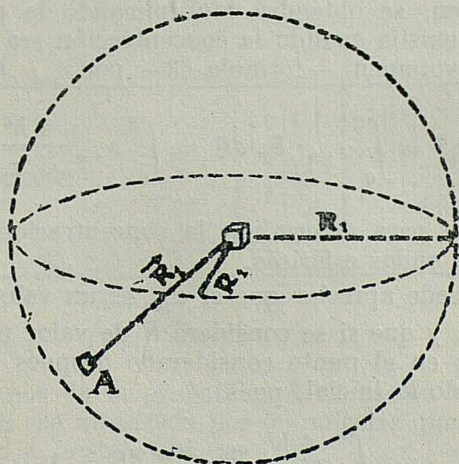


FIG. 12

La facilidad de que dicha micela alcance un punto situado a una distancia R_1 , en una determinada dirección y sentido, o sea, la facilidad de un desplazamiento representado por el vector $\vec{R}_1$, será

$$F_{\vec{R}_1} = \frac{h^3}{\pi^{3/2}} e^{-h^2 R_1^2}$$

Imaginemos ahora que cada unidad de volumen situada a la misma distancia R_1 del elemento de volumen 0, tiene también una micela, es decir, que la capa de espesor dR , cuyo volumen será $4 \pi R_1^2 dR$, contiene un número de micelas igual a dicho volumen. La facilidad de que cada una de dichas micelas llegue a 0 será:

$$F_R = 4 \pi R_1^2 \frac{h^3}{\pi^{3/2}} e^{-h^2 R^2} = \frac{4 h^3}{\sqrt{\pi}} R_1^2 e^{-h^2 R^2}$$

sumando las facilidades de las diversas capas, variables como es lógico con la separación del elemento de volumen, tendremos la probabilidad de que las micelas lleguen a 0:

$$\Phi_0^R = \int_0^R F_R \cdot dR \quad (63)$$

Ahora bien, si la concentración micelar en el volumen coloidal considerado, es inicialmente $c_{t=0}$, o sea que en cada unidad de volumen se tiene un número de micelas correspondientes al valor de la función $c_{t=0}$ que es la función de distribución de concentraciones con la situación, entonces la concentración micelar en el elemento de volumen 0, o lo que es lo mismo el número de micelas que llegarán por efecto de la difusión a dicho elemento de volumen, se obtendrá multiplicando la probabilidad correspondiente a la que existía cuando la concentración era la unidad (una micela por unidad de volumen) —fórmula 63— por $c_{t=0}$. O sea,

$$c_R = c_{t=0} \cdot \Phi_0^R = \int_0^R c_{t=0} \cdot F_R dR = \int_0^R c_{t=0} \frac{4 h^3}{\sqrt{\pi}} R^2 e^{-h^2 R^2} dR \quad (64)$$

fórmula fundamental para determinar la concentración micelar cuando la difusión es debida a ondas esféricas.

Fácilmente se puede apreciar que si $c_{t=0}$ es un valor constante en todo el volumen coloidal, y que si se considera R de valor prácticamente infinito, la concentración en el punto considerado después de un tiempo cualquiera, seguirá siendo la inicial, pues,

$$\int_0^\infty \frac{4 h^3}{\sqrt{\pi}} R^2 e^{-h^2 R^2} dR = 1$$

Y en efecto, dentro de la masa coloidal, por efecto del movimiento browniano tantas son las micelas que se escapan como las que llegan, puesto que no hay gradiente de concentración.

II. Por ondas planas.

El caso que hace un momento hemos considerado, no es sino un caso ideal, que nos ha servido para ver la aplicación de las fórmulas estadísti-

cas a este problema de la difusión. Pero, la realidad es que no se puede dar fácilmente un caso experimental con sujeción a las condiciones impuestas.

En cambio, supongamos un tubo de ensayo en cuyo fondo depositemos un volumen de coloide y sobre éste, un medio de dispersión en el que puedan libremente difundirse las micelas, tal como agua bidestilada, por ejemplo.

Supongamos que la separación entre coloide y agua es perfecta en el momento inicial de la experiencia.

La difusión micelar se efectúa entonces de tal manera que, prácticamente, la concentración después de un tiempo será la misma en todos los puntos de una misma capa horizontal, ya que todos sus puntos se hallan igualmente distantes de cada una de las capas coloidales que van enviando —valga la expresión— oleadas de micelas. Es como si el coloide se difundiera por ondas planas. Y ésta es la realidad total.

Prácticamente para que una micela alcance una determinada capa del medio de dispersión, debe recorrer el camino que separa el coloide de dicha capa, con sujeción a las fórmulas estadísticas de una dimensión.

O sea, si es x_1 la distancia que separa el coloide del plano en el que se estudia la concentración, y si se supone que existe mucho coloide, se tendrá que la facilidad para que llegue la micela x_1 , será:

$$F_{x_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

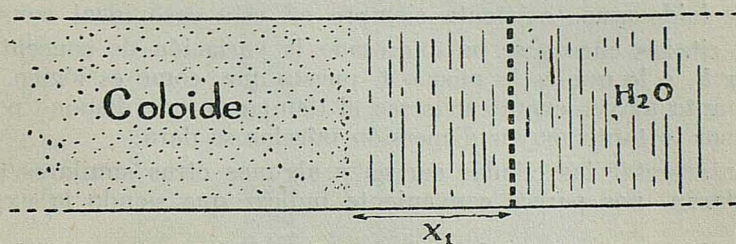


FIG. 13

La expresión que nos da la probabilidad de que la capa del medio de dispersión considerada sea alcanzada por las micelas que ocupan el coloide situado desde el plano x_1 hasta $-\infty$, será:

$$\int_{x_1}^{\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \quad (65)$$

El valor de esta probabilidad multiplicado por la función que expresa la concentración coloidal en el momento inicial a lo largo del tubo de ensayo, nos dará la concentración existente en el plano x_1 , ya que a él pueden llegar todas las micelas de todos los diversos planos según dicha posibilidad.

Por tanto, si la concentración inicial era c_0 y la suponemos constante entre x_1 e ∞ (ponemos el origen de coordenadas en la superficie que se estudia) tendremos

$$c = c_0 \cdot \int_{x_1}^{\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \quad (66)$$

que puede descomponerse en estas dos expresiones:

$$c = c_0 \cdot \left(\int_0^{\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx - \int_0^{x_1} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \right) \quad (67)$$

$$= c_0 \cdot \left(\frac{1}{2} - \int_0^{x_1} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \right) \quad (68)$$

fórmula esta última, que nos daría la concentración micelar en el plano origen por efecto de la difusión mediante ondas planas del coloide, que con la concentración inicial c_0 ocupara el tubo de ensayo desde la distancia x_1 hasta el infinito en uno de los sentidos, siempre que el agua bidestilada se prolongara también hacia el infinito en el otro sentido, evitando así la influencia que las superficies libres entre colodios, agua y atmósfera pudieran introducir. Esta influencia la estudiaremos en su momento.

En páginas posteriores se incluyen unas curvas correspondientes a la función (68), que nos dicen la perfecta simetría respecto del plano de separación coloide-agua, existente siempre en este caso ideal considerado.

En las citadas curvas se ha expresado la variación de concentraciones al cambiar h , o lo que es lo mismo t , puesto que, como es lógico, la difusión será tanto mayor cuanto más sea el tiempo de que dispone para efectuarse, y por lo tanto mayor dispersión micelar se dará.

Para interpretar las citadas curvas y algunas otras similares que más tarde se darán, nos parece conveniente indicar que siendo la expresión:

$$\int_0^{x_1} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \quad (a)$$

la misma que nos da la probabilidad, y hallándose los valores de esta función tabulados para una expresión que sin ser aparentemente la misma, (puesto que las tablas responden a expresiones en la que no interviene h en la función exponencial), sin embargo coinciden como ahora veremos.

TABLA 4

$t = t_1 \rightarrow h = 3$		$t = t_2 \rightarrow h = 1,5$	
X	$c/c_0 = \Phi(X)$	X	$c/c_0 = \Phi(X)$
— 0,05	0,584	— 1,0	0,983
— 0,1	0,664	— 0,9	0,972
— 0,2	0,802	— 0,7	0,931
— 0,3	0,898	— 0,5	0,855
— 0,4	0,955	— 0,3	0,738
— 0,6	0,994	— 0,1	0,584
0	0,5	0	0,5
0,05	0,416	0,05	0,455
0,1	0,336	0,2	0,335
0,2	0,197	0,4	0,198
0,3	0,102	0,5	0,145
0,4	0,044	0,6	0,102
0,5	0,016	0,7	0,069
0,6	0,006	0,8	0,045
		1,0	0,017

X	$c/c_0 = \Phi(X)$	X	$c/c_0 = \Phi(X)$
— 1,5	0,983	— 2,0	0,921
— 1,0	0,921	— 1,5	0,955
— 0,8	0,871	— 1,2	0,802
— 0,6	0,802	— 1,0	0,760
— 0,4	0,714	— 0,6	0,664
— 0,2	0,611	— 0,2	0,566
— 0,1	0,562	— 0,1	0,528
0	0,5	0	0,5
0,05	0,472	0,05	0,486
0,3		0,3	0,416
0,5	0,240	0,5	0,362
0,7	0,162	0,7	0,311
0,9	0,102	1,0	0,260
1,3	0,033	1,5	0,145
1,5	0,017	2,0	0,079

 $t = t_3 \rightarrow h = 1$ $t = t_4 \rightarrow h = 1/2$

h es variable en el sentido de que para observaciones hechas en tiempos distintos es también distinta, por tanto, resultaría que para calcular la concentración micelar en un mismo punto y después de tiempos diversos la función (a) tomaría series de valores distintos para cada observación, con lo que su tabulación resultaría imposible, o por mejor decir antipráctica.

Por ello, los autores han buscado transformarla en otra que permita dar los valores de la probabilidad, teniendo en cuenta el producto hx como si fuera la variable independiente.

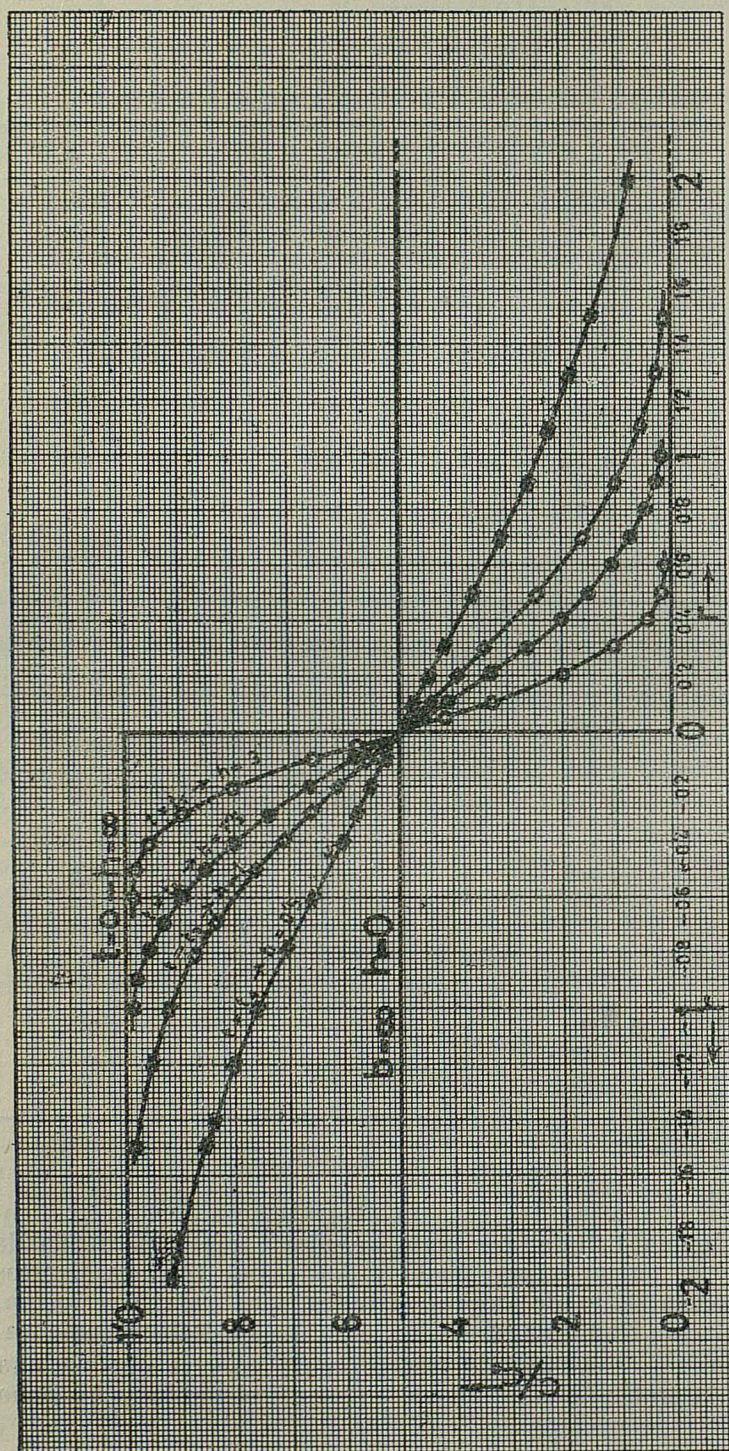


FIG. 14

Esta transformación (39) puede darse en función de hx o de cualquiera de las expresiones que resulten al reemplazar la h por los diversos valores medios que se han estudiado y que siempre tienen una definida relación con h según quedó fijado.

Para no hacernos pesados daremos aquí la que corresponde al primero de los modos dichos, o sea, en función de hx .

Llamando a $hx = \epsilon$, será $d\epsilon = h dx$ y reemplazando en la función (a):

$$\Phi_{0x_1} = \int_0^{x_1} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx_1} e^{-\epsilon^2} d\epsilon \quad (69)$$

De interesarnos, pues, calcular la concentración para la distancia x_1 , habremos de efectuar primeramente el producto de x_1 por el valor de h calculado a partir de una de las medias estadísticas. Después, en la tabla que dé las probabilidades con respecto al valor de hx , se mirará la que corresponde al valor hx_1 que interesa. Multiplicado el valor del paréntesis que aparece en (68) por la concentración inicial se tendrá la concentración buscada.

INFLUENCIAS SOBRE LA DIFUSIÓN DE DIVERSOS PLANOS

I. PLANO DE FONDO.

El caso de la difusión antes considerado es un caso ideal, pero en la práctica hemos de usar tubos de ensayo de vidrios duros de Jena. Se precisa suficiente cantidad de coloide, para que se cumpla la condición anteriormente supuesta de tener coloide hasta el infinito. Podemos así aplicar la ecuación (68).

Supongamos, pues, un tubo de ensayo como el de la figura (15) en el que ponemos coloide sobre un fondo hasta unos centímetros de altura. Encima del coloide hemos de depositar agua bidestilada mediante una técnica conveniente para que no se mezclen entre sí el coloide y el agua.

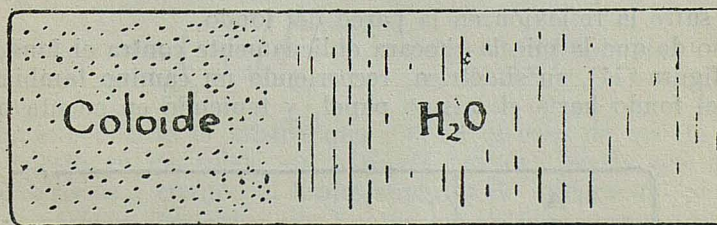


FIG. 15

Supongamos que la cantidad de agua depositada es suficientemente grande para que, prácticamente, su altura sea infinita.

Naturalmente, habrá difusión en el agua por parte del coloide, puesto que el gradiente de concentraciones cumple la condición de disminuir del coloide el agua.

Ahora bien, las micelas coloidales por efecto del movimiento browniano, se agitan en todas direcciones y por tanto, no sólo las que se hallan próximas al fondo del tubo sino las que ocupan cualquier posición, pueden llegar hasta dicho fondo.

El choque contra la superficie que constituye el fondo del tubo, produce la reflexión micelar, de tal modo que la presencia de dicho fondo surtirá los mismos efectos en la distribución de las concentraciones que si de la otra parte del fondo llegaran micelas situadas simétricamente con respecto a él, o sea, como si hubiera otro tanto de coloide tras el fondo como el que se encuentra encima de él.

El fondo actúa, por consiguiente, como de espejo que duplica la cantidad de coloide a considerar.

Se comprende esto fácilmente, pues, la facilidad de desplazamientos iguales en sentido opuesto, es la misma, A y A' de la figura (16) tendrán la misma facilidad de llegar a F .

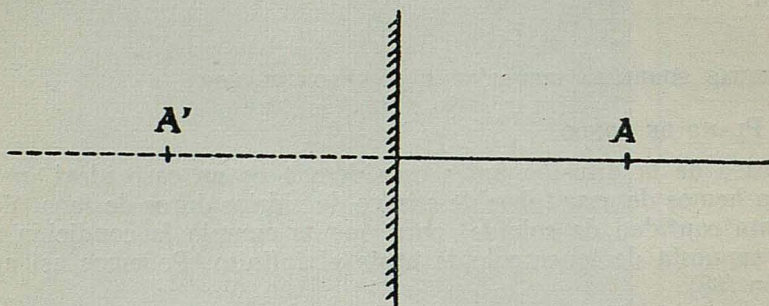


FIG. 16

Si en A' hubiera una micela y no existiera fondo, seguirían las cosas, para ella, lo mismo que ocurre cuando una micela situada en A , por efecto del choque, sufre la reflexión en la pared del fondo.

En el caso de que la micela chocara oblicuamente contra el fondo, como la A de la figura (17), su simétrica, recorriendo un camino también simétrico hacia el fondo haría el mismo papel, y teniendo en cuenta que este

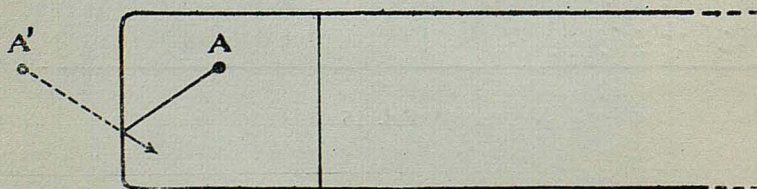


FIG. 17

fenómeno es estadístico, no se dará variación real de la concentración en puntos de una misma superficie, por lo que la difusión sigue realizándose por ondas planas.

Tratemos ahora de interpretar la fórmula que nos da la concentración micelar en los puntos de un determinado plano del cilindro, siempre que se den las circunstancias antedichas: o sea, el coloide se deposita sobre un fondo, y el agua que sobre él hay se extiende indefinidamente.

Sea el plano P del cilindro de difusión, situado a una distancia r_1 de la superficie de separación entre el coloide y el agua; r_2 es la distancia entre el fondo del tubo y la superficie considerada. (figura 18).

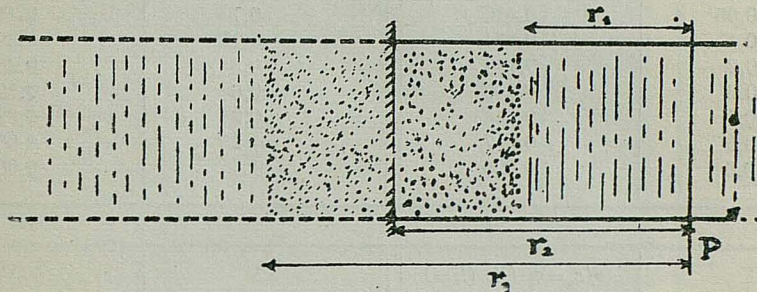


FIG. 18

Como el fondo hace el mismo efecto que un espejo por lo que se dijo, duplica para los efectos de la difusión, la cantidad de coloide.

Empleando un rozamiento análogo al del caso ya estudiado —tanto coloide como agua se extendían indefinidamente— se llega a la fórmula:

$$c = c_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{hr_1}^{hr_3} e^{-x^2} dx \quad (70)$$

pero como quiera que $r_3 = 2(r_2 - r_1) + r_1 = 2r_2 - r_1$ la expresión (70) tendrá la forma definitiva siguiente:

$$c = c_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2-r_1)} e^{-x^2} dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx \right) \quad (71)$$

que es prácticamente la misma que (68) en el caso de que la cantidad de coloide puesto en los tubos sea bastante grande, puesto que el minuendo del paréntesis es $\frac{1}{2}$ cuando el límite superior de integración pasa de 2.

En las páginas siguientes se adjuntan las gráficas correspondientes a una difusión teniendo en cuenta la presencia del fondo de los tubos y para distintas h .

Podrá apreciarse que para h grande (poco tiempo de difusión) apenas hay influencias del fondo (curvas totalmente simétricas con respecto al plano de separación coloide-agua) lo cual es lógico, por no ser fácil que los desplazamientos micelares hayan hecho alcanzar el fondo a las micelas.

TABLA 5

X	$c/c_0 = \Phi(X) (h=1/2)$	X	$c/c_0 = \Phi(X) (h=3)$
— 0,6	0,944	— 1,5	0,998
— 0,5	0,983	— 1,25	0,994
— 0,4	0,955	— 1,0	0,982
— 0,3	0,898	— 0,8	0,957
— 0,2	0,802	— 0,5	0,854
— 0,1	0,664	— 0,2	0,663
— 0,05	0,584	— 0,05	0,541
0	0,5	0	0,5
0,05	0,416	0,1	0,415
0,1	0,334	0,15	0,395
0,2	0,198	0,3	0,262
0,3	0,102	0,6	0,101
0,4	0,045	0,9	0,027
0,5	0,017	1,25	0,003
0,6	0,006	1,5	0,001

X	$c/c_0 = \Phi(X) (h=1)$	X	$c/c_0 = \Phi(X) (h=1,5)$
— 1,5	0,966	— 1,5	0,710
— 1,25	0,954	— 1,25	0,703
— 1	0,918	— 1	0,670
— 0,75	0,854	— 0,75	0,641
— 0,5	0,759	— 0,5	0,599
— 0,25	0,637	— 0,15	0,519
0	0,5	0	0,488
0,25	0,486	0,05	0,470
0,1	0,444	0,15	0,445
0,4	0,286	0,3	0,406
0,5	0,240	0,5	0,355
0,9	0,102	0,7	0,306
1,0	0,079	1,0	2,237
1,25	0,039	1,5	0,144
2	0,002	2	0,078
2,50	0,001	4	0,002

II. PLANOS DE PAREDES LATERALES

Visto el notable influjo que corresponde al fondo de los tubos en la difusión de los coloides, nos proponemos ahora examinar la acción de las paredes laterales sobre el proceso de la difusión coloidal.

Suponiendo uniforme la concentración micelar en todos los puntos de una misma capa, al chocar una micela contra la pared lateral sufrirá una reflexión, que la desviará de tal manera que su recorrido proyectado sobre un eje horizontal, por ejemplo, será el mismo que el que tendría otra micela que desde el mismo plano y situada simétricamente con respecto

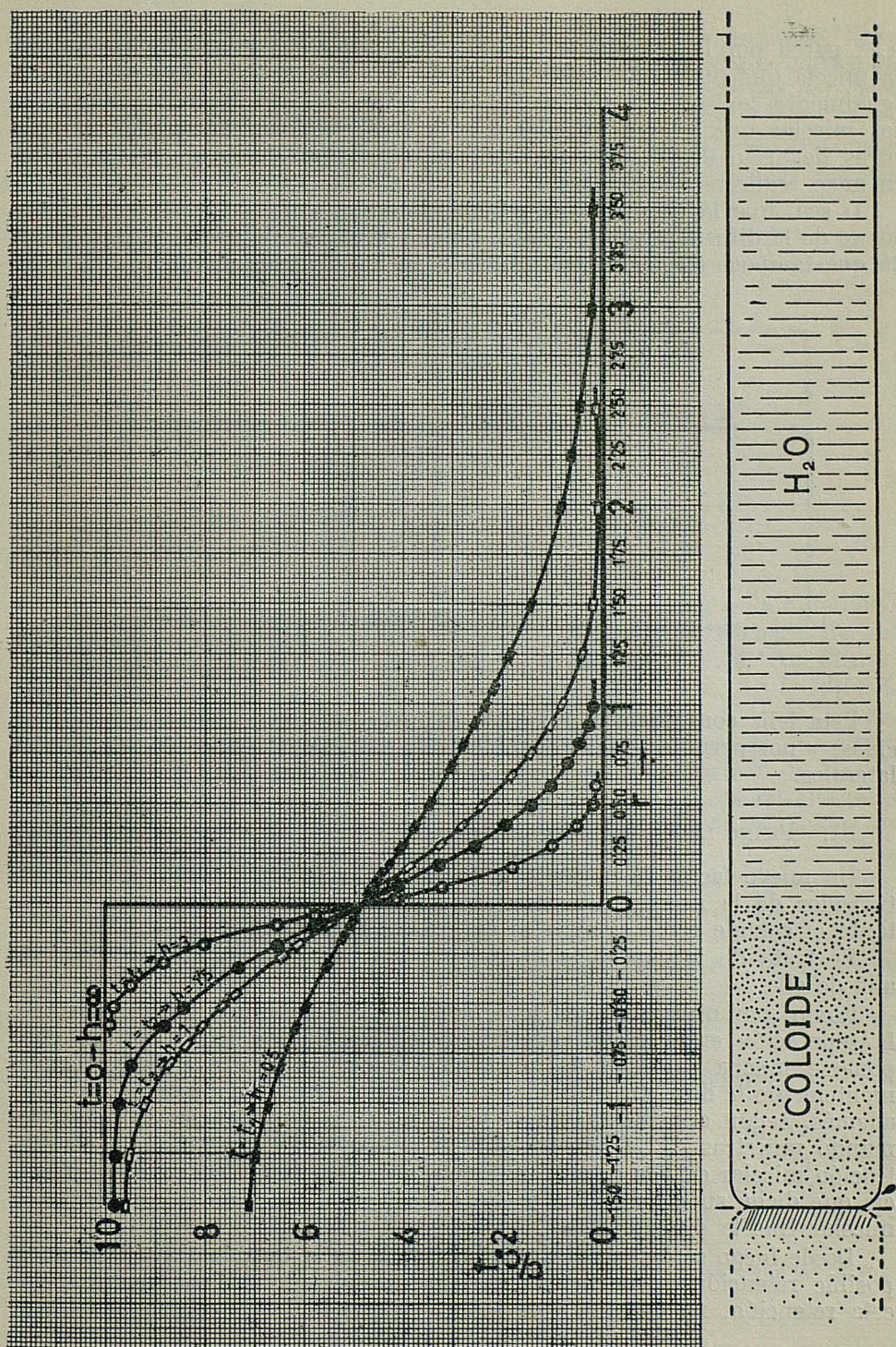


Fig. 19

a la pared por la parte exterior del tubo, llegara al punto en que rebota la micela que realmente existe. Es decir, si en el exterior hubiera coloide igualmente concentrado que el del tubo y no existieran paredes laterales, las micelas que se ven forzadas a reflejarse seguirían hacia afuera, pero otras llegarían desde fuera produciendo el mismo efecto que el que ellas mismas realizan reflejándose.

O sea, que la presencia de paredes laterales parece no alterar el fenómeno de la difusión cuando ésta se realiza en virtud de ondas planas, puesto que tampoco altera la concentración en los diversos planos.

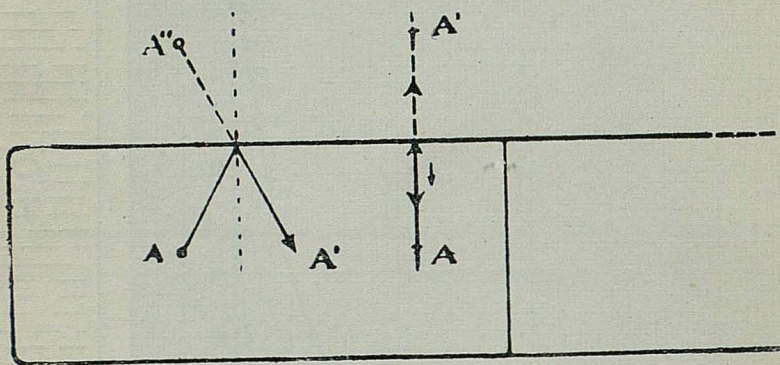


FIG. 20

Esta feliz consecuencia nos evita la modificación de fórmulas ya deducidas, y nos permite tratar el problema haciendo caso omiso de las paredes laterales.

III. PLANO LIBRE DEL MEDIO DE DIFUSIÓN

Un nuevo factor se presenta a nuestra consideración como posible perturbador de la normal difusión (40) estudiada para el caso ideal de que tanto el coloide como el agua se extiendan indefinidamente.

Se trata de la superficie libre del medio de difusión del coloide más allá de ella.

Como, por otra parte, en la práctica es indispensable limitar bastante la separación entre dicha superficie y el coloide, es decir, que no debe ponerse mucha cantidad de agua bidestilada, se quiere apreciar convenientemente la difusión en tiempos del orden de tres o cuatro meses y como además, según oportunamente se verá, nuestras experiencias se hacen tomando muestras en la superficie libre del agua para analizar la concentración micelar en ella misma, nos resulta indispensable conocer la influencia que dicha superficie libre pueda ejercer en el valor de la concentración micelar tras la difusión.

Desde luego se ha estudiado la influencia de la tensión superficial en la posible retención de partículas micelares, pudiendo decirse que si existe esta retención, no es muy apreciable, ya que teniendo cuidado de tomar

muestras con un cuentagotas, exactamente aplicado en la superficie libre, se han obtenido concentraciones muy parecidas a aquellas que corresponden a muestras extraídas introduciendo ligeramente el extremo del cuentagotas en el medio de dispersión.

El efecto óptico del menisco que se produce en dicha superficie libre con los tubos ordinarios, parece como si allí se acumularan más micelas. Este efecto es el que nos ha sugerido esta posible influencia.

Supongamos primeramente, mucho coloide —hasta el infinito— y medio de dispersión limitado por la superficie libre a no mucha distancia del coloide primitivo, según la figura (21).

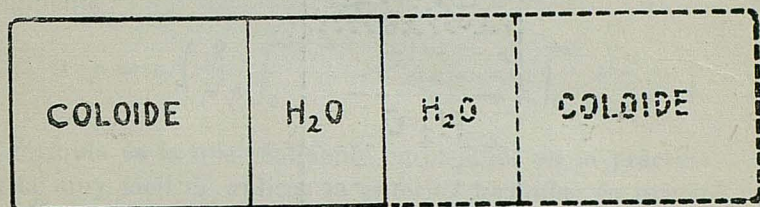


FIG. 21

Al llegar las micelas a la superficie libre L , no pueden seguir, teniendo que reflejarse o quedarse en la superficie misma. Su distribución después de un tiempo suficiente será el resultado de dos acciones: 1.^a La difusión normal por parte de las micelas que aun no llegaron a L . 2.^a La difusión de las que se reflejan en L y difunden hacia el interior.

Ahora bien, esta segunda distribución será la misma que la que correspondería a la existencia en la parte derecha de la superficie L de las condiciones simétricas a las que se dan a la izquierda. Así, cada micela que se refleja produce el mismo efecto que otra que llegara a L con la misma probabilidad, o sea, de su simétrica por la parte derecha.

Por tanto, la superficie libre produce el mismo efecto práctico que si existieran por ambos semiespacios las mismas condiciones que se dan al semiespacio realmente coloidal.

La concentración micelar debida a difusión por ondas planas cuando existe superficie libre de separación entre el medio de difusión y la atmósfera, parece que debe ser el doble de la calculada suponiendo que este medio de dispersión se extendiera hasta el infinito.

En segundo lugar nos vamos a referir al caso más interesante en la práctica.

Es el de una difusión en tubo de ensayo y en el que, tanto la cantidad de coloide puesto en la parte inferior del tubo con fondo, como la de agua bidestilada superpuesta, son cantidades limitadas. Existiendo también la superficie libre del medio de dispersión de la que se ha de tener en cuenta la influencia.

Gráficamente hacemos visible este caso en el esquema que se adjunta en la página siguiente.

Llamemos r_1 a la distancia entre la superficie libre y la separación inicial coloide-agua; r_2 a la distancia entre el fondo del tubo y la superficie libre de agua bidestilada.

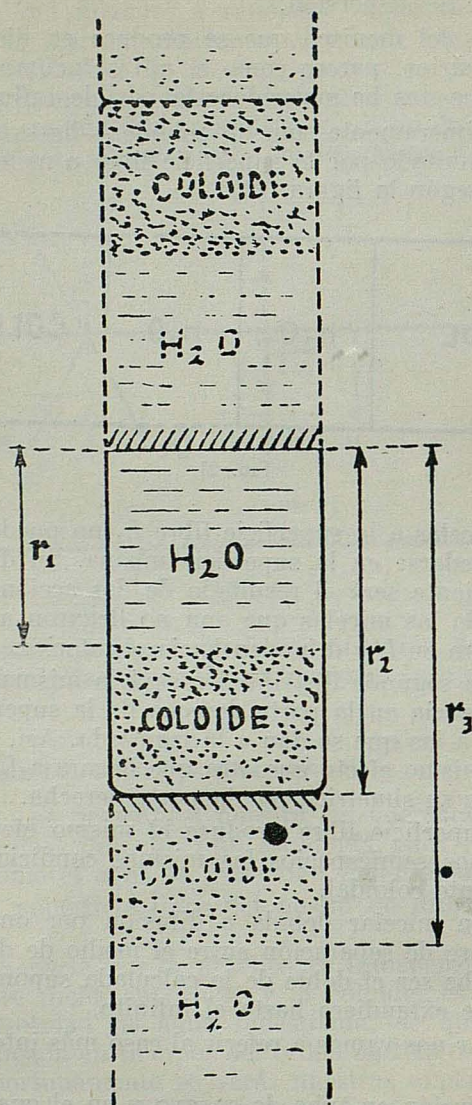


FIG. 22

La existencia de este fondo obliga a hacer los cálculos como si hubiera doble altura de coloide, según se vio o sea, a considerar la integración entre los límites r_1 , y r_3 .

El hecho de la existencia de superficie libre nos impone multiplicar por dos la concentración teórica hallada en nuestras deducciones y expresada por las fórmulas (69), (70) y (71).

Por tanto, la fórmula que nos dará la concentración micelar en el plano de separación del agua bidestilada y de la atmósfera será:

$$c = \frac{2 c_0}{\sqrt{\pi}} \int_{hr_1}^{hr_2} e^{-x^2} dx \quad (72)$$

fórmula que desarrollada y expresada en función de r_1 y r_2 toma la definitiva forma siguiente

$$c = c_0 \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2-r_1)} e^{-x^2} dx - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx \right) \quad (73)$$

Esta fórmula es la que realmente empleamos en la práctica.

Resulta muy fácil de aplicar la anterior fórmula, ya que los valores de las integrales se hallan tabulados.

También se aprecia muy fácilmente que la primera de las integrales de la diferencia que va en el paréntesis, para los valores de las r que suelen usarse ordinariamente en la práctica, tiene siempre un valor muy próximo a la unidad, por lo que podríamos expresar la anterior ecuación de la manera siguiente:

$$c = c_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx \right) \quad (74)$$

que se apreciará coincide con la forma más ordinariamente usada por los autores, y que ya se vio en la primera parte de este trabajo con sólo sustituir h por su valor en función de D y de t .

Puede apreciarse por tanto, que por un camino puramente estadístico y teniendo en cuenta las circunstancias reales de nuestras experiencias hemos llegado a una expresión consagrada por los científicos.

PARTE EXPERIMENTAL

Consultando revistas y diversas publicaciones científicas, en las que los pacientes investigadores han ido plasmando en números, sus esfuerzos por reducir a fórmulas, las leyes que el Creador impuso a los seres y a las que éstos obedecen inflexiblemente, hemos apreciado que este problema de la difusión ha merecido detenido examen experimental ya desde los comienzos de su estudio teórico.

Las citadas experiencias se llevan siempre a cabo, unas veces estudiando la variación de concentraciones con el tiempo, en un mismo punto del medio de difusión; otras veces, se estudia la variación de concentración con respecto a la situación, pero para un mismo tiempo.

Para hallar estas variaciones de concentración se utilizan diversas técnicas analíticas, que van desde el típico análisis cuantitativo hasta el polarográfico y fotocolorimétrico.

La naturaleza típica de los coloides, cuyas micelas adquieren gracias a la iluminación lateral (efecto Tyndall) el vivísimo resplandor que las individualiza perfectamente, haciéndolas cual nítidas estrellas fácilmente contables en el, a modo de firmamente maravilloso, que observa quien se asoma al ocular del ultramicroscopio; la naturaleza de los coloides, digo, nos ofrece un modo sencillísimo de estudiar la variación de concentraciones de coloide por conteo de partículas, y por tanto, de estudiar la difusión.

Si resulta fácil este estudio de concentraciones micelares, la parte experimental de este trabajo lleva consigo otros problemas técnicos, no tan sencillos de resolver, y de los cuales, en gran parte, puede depender el éxito de nuestras experiencias.

Estos problemas son: la preparación de los aurosoles al formol, el llenado de los tubos de difusión, de tal modo que el depósito del agua bidestilada sea sin agitación ni mezcla, el cálculo de los desplazamientos micelares, etc.

Todos estos problemas nos parece haberlos resuelto de modo bastante satisfactorio, gracias a la magistral dirección del Dr. Juan Martín Sauras y a la afable y desinteresada ayuda de los compañeros del Laboratorio, que colaboraron en más de una ocasión para efectuar operaciones que exigían la presencia de más de una persona.

El Laboratorio de Coloidequímica de la Facultad de Ciencias de Zaragoza posee un ultramicroscopio Zsygmondy, y en él se han realizado ya notables estudios sobre coloides (29), (37). Informados sobre las cualidades que presentan los coloides de Au, sobre todo si se les obtiene por el método del formol, hemos creído muy a propósito trabajar con ellos y realizar las experiencias de difusión coloidal en agua bidestilada como medio de dispersión, siempre siguiendo las directrices del Dr. Martín Sauras.

PREPARACIÓN DE LOS AUROSOLES AL FORMOL

El método seguido para la preparación de los coloides de oro han sido el de Zsygmondy, consignando en "Das Kolloide Gold" (26).

Hemos apreciado que da excelente resultado la sustitución de algunos de los detalles traídos por Zsygmondy, por otra parte muy costosos. Nos referimos, concretamente, a que el refrigerante empleado en la bidestilación del agua y que Zsygmondy exige sea de oro o plata, puede ser sencillamente de vidrio de Jena. En efecto, toda el agua bidestilada que hemos usado, condensó en un refrigerante en espiral, de vidrio de la casa Schott de Jena. Los coloides con ella preparados pueden considerarse, no obstante como ideales, pues han durado más de un año en perfecto estado sin haberse notado ni coagulación ni pérdida del típico color rojo rubí.

Muy prevenidos de la influencia nociva que cualquier pequeña suciedad ejerce en la marcha para la obtención de estos coloides de oro, nuestro esfuerzo por limpieza absoluta fue realmente notable, completando y comprobando dicha limpieza mediante la corriente de vapor de agua a que se somete a todo el material empleado.

Obtención del agua bidestilada. — Respecto de ello, se ha de hacer constar que, a más de unas gotas de disolución 0,1 N de MnO_4K añadidas al agua destilada para destruir la posible materia orgánica, y de unos trocitos de vidrio Pirex bien limpio, para regularizar la ebullición, como quiera que ésta era muy tumultuosa, añadimos trocitos de porcelana junto con una cucharadita de CO_3Ca en polvo, logrando que así fuera totalmente tranquila.

Disolución del formaldehído. — Para preparar esta disolución partimos de un producto, que por hallarse polimerizado nos fue preciso destilar previamente. El formol despolimerizado, con garantía de ser un buen reductor, lo recogimos sobre una pequeña cantidad de agua bidestilada.

Después disolvimos 0,4 cc. del formaldehído en 100 cc. de agua bidestilada, puesto que un exceso de reductor no es perjudicial en la obtención del oro coloidal.

Disolución para neutralización del ácido cloroáurico. — Hemos usado con esta finalidad tanto el CO_3K_2 como el CO_3HK en disolución 0,18 N. Ambas sales son de la casa Merck aunque nos parece aún más conveniente el bicarbonato que la sal neutra.

Disolución del ácido cloroáurico. — Zsygmondy indica que esta disolución se logra disolviendo 6 gramos de $Cl_4AuH \cdot 4H_2O$ en agua bidestilada hasta un litro. Nosotros disponemos de un gramo de cloroáurico cristalizado, que disolvemos hasta 167 cc. de agua bidestilada.

Todos estos reactivos precisados para la obtención de los coloides, los guardamos en matrascos o erlenmeyers cuyas bocas tapamos con el llamado papel de plata, con el fin de evitar la introducción de sustancias orgánicas y el almacenamiento de polvo en los bordes de los recipientes, que haría imposible la obtención de coloides en estado conveniente.

Tampoco queremos omitir que cuantas pipetas, agitadores, envases, cuenlagotas, etc., hemos usado son de vidrio Jena, pues el vidrio blando ordinario introduciría iones que actuando como núcleos de asociación de protonas coloidales nos darían coloides de oro formados por racimos de protonas (polionas) cuyo color sería violeta e incluso azul en lugar de rojo rubí. Con estas polionas resultaría imposible prácticamente el conteo de micelas, y sería totalmente equivocada la determinación de desplazamientos micelares, en el caso de que fuera practicable.

Algunos otros detalles podríamos aquí consignar, pero en honor a la brevedad nos parece conveniente omitirlos.

CARACTERÍSTICAS DE LOS COLOIDES OBTENIDOS

Con la escrupulosidad que estos detalles hacen suponer y siguiendo la receta de Zsigmondy, hemos logrado preparar siempre coloides rojo rubí de perfecta transparencia, y si alguna vez se ha notado algo de turbidez al observarlos por reflexión los hemos desechado.

Para tener una idea aproximada de las dimensiones de las micelas constitutivas de estos coloides de oro que han sido el sujeto de nuestra investigación, basta saber que, determinado el tamaño medio de su lado —recuérdese que el oro cristaliza en cubos del sistema regular en uno de los primeros coloides obtenidos, resultó ser

$$l = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ cm.}$$

y teniendo en cuenta que, siendo la concentración en oro:

$$c = 1,72 \cdot 10^{12} \text{ micelas/cm.}^3$$

fácilmente se deduce que tan sólo $2,6 \cdot 10^{-5}$ del volumen coloidal es de metal precioso, o sea que puede suponerse que cada partícula dispone de un volumen de agua aproximadamente 40.000 veces mayor que el suyo propio, en el que puede moverse libremente.

Aún haremos una salvedad referente a que el tamaño de las micelas con las que realmente hemos hecho las experiencias de difusión que damos como válidas, es bastante inferior a lo antedicho, debido a que para ellas se empleó el coloide que después de varios meses queda en la zona superior de los tubos de difusión. En dicho coloide el efecto de sedimentación es totalmente despreciable, pues de lo contrario las micelas hubieran ido al fondo de los tubos.

No podemos, sin embargo, dar las dimensiones de estas micelas, como fácilmente se comprenderá.

TÉCNICA OPERATORIA DEL LLENADO DE LOS TUBOS

Tratándose de estudiar la difusión de sustancias líquidas no miscibles entre sí, resulta muy sencillo depositar el medio de dispersión sobre la sustancia que difunde, pues basta dejar caer lentamente dicho medio de dis-

persión sobre la superficie libre de la sustancia problema, previamente depositada en el fondo del tubo con suficiente cuidado para que no haya quedado por las paredes del mismo.

Cuando se estudia la difusión de hidrosoles de oro en agua bidestilada totalmente miscibles entre sí en todas proporciones, y con suma facilidad a la menor agitación, el problema de llenado de los tubos de tal modo que las dos capas coloide y agua, queden perfectamente diferenciadas inicialmente, no resulta tan sencillo.

Como, por otra parte, del logro de esta perfecta separación depende que pueda o no estudiarse el problema de la difusión, hemos puesto todo el empeño en resolver este problema lo más satisfactoriamente que nos ha sido posible.

Véase cómo hemos procedido.

I. Depósito de coloide en los tubos

En un tubo de ensayo, perfectamente limpio y seco para que no se altera la concentración inicial de coloide, depositamos con sumo cuidado una cantidad de coloide. En un principio lográbamos este depósito mediante una pipeta en la que tomábamos el coloide. Con cuidado, para no tocar con la pipeta las paredes del tubo, y para que, en el momento de introducirla no caiga ninguna gota en las mismas paredes, introduciendo coloide más arriba de la altura que realmente éste debe alcanzar.

Más tarde en la boca del tubo de ensayo pusimos un dispositivo de cristal en forma de tapón con agujero, por el cual fácilmente penetra la pipeta, a la que sirve de guía, resultando prácticamente imposible que éste toque a las paredes del tubo y que las gotas que se desprenden de la misma alcancen las paredes.

II. Depósito del agua bidestilada sobre el coloide

Resulta fundamental para este depósito, y por tanto, para que pueda estudiarse la difusión en forma conveniente, que haya total ausencia de la agitación que lleva consigo la caída de gotas sobre el coloide. También ha de evitarse el deslizamiento del agua por las paredes del tubo, pues, en este caso, deslizándose el agua por debajo de la superficie libre del coloide, produce remolinos que agitan el coloide además de diluirlo.

Si se logra depositar lentamente las gotas de agua sobre la capa superficial del coloide, sin que se rompa el equilibrio que las fuerzas de tensión superficial mantienen entre las moléculas de agua y las micelas de oro dichas gotas se esparcirán totalmente sobre el coloide, logrando esta perfecta separación entre las dos capas o fases.

La primera idea que se nos ocurrió para lograr esta superposición fue utilizar un tubo en U provisto de llave.

Poniendo coloide en la rama sin llave y agua bidestilada en la otra, de modo que en la superficie libre de ésta alcance menor altura que la del coloide en la otra, y abriendo con mucho cuidado la llave, el coloide empujará

hacia arriba la columna de agua bidestilada. Así además se evitará el arrastre de micelas, que ocurriría en caso de dar paso al agua por la llave.

Pero este procedimiento tiene el grave inconveniente de que el paso del coloide por vidrios esmerilados lleva consigo la coagulación con suma facilidad, por lo cual debimos desechar tal procedimiento.

Ideamos a continuación una técnica que nos da al mismo tiempo la posibilidad de formación de gotas muy lentamente y que las deposita sin ninguna agitación sobre el coloide.

Esta técnica se basa en el empleo del frasco de Mariotte, y en el principio de Arquímedes, mediante el cual el descenso del tubo de ensayo se logra con gran suavidad, como luego veremos.

En el matraz *A*, figura (23), se pone agua bidestilada y mediante el tubito *L* doblado y estrechado en su parte interior se mantiene en *R*, continuamente, la presión atmosférica.

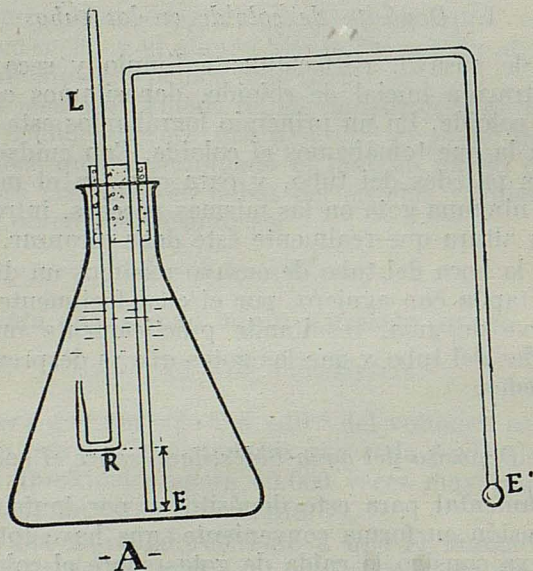


FIG. 23

El sifón al que equivale el otro tubo, lleva un estrechamiento en la rama que se introduce en el matraz, con la finalidad de que el gasto del líquido sea el mínimo posible. En el extremo exterior del sifón conviene que el corte sea lo más circular posible y, desde luego, sin estrechamiento. Así se formen gotas perfectamente esféricas y su salida se efectúa lentamente.

Regulando la diferencia de niveles entre *R* y el sifón, o sea, aprovechando la pequeña diferencia correspondiente a la presión de la columna de agua *RE*, se logra que una gota iniciada en *E'* quede suspendida perfectamente durante bastante tiempo por efecto del equilibrio entre las fuerzas de la tensión superficial y las correspondientes a la diferencia de nive-

les *RE*. Una gota salida del Mariotte deja un vacío en el frasco que es reemplazado por una burbuja de aire que penetra por *R*. Este burbujear nos da una media sencilla de la velocidad del llenado del tubo de difusión. El frasco de Mariotte actúa como tal, mientras el nivel del agua del matraz es superior a *R*, pues al alcanzar este nivel se convierte en simple sifón.

Pero la dificultad mayor viene ahora. Se trata de recoger estas gotas formadas en el frasco de Mariotte, sobre el coloide sin que haya mezcla con él.

Los primeros intentos fueron de hacerlo a pulso. Es decir colocado el frasco de Mariotte a altura conveniente, introducíamos la rama exterior del sifón, con gota ya iniciada, en el tubo provisto de coloide. Se cuidaba de no establecer contacto entre paredes del tubo de ensayo y rama del sifón, para evitar que el agua se deslizara por las paredes. Con muchísimo cuidado se acercaba a la superficie libre del coloide la gota iniciada y pendiente, evitando siempre que el vidrio de la rama del sifón tocara el coloide. La gota se deformaba y, por fin, se esparcía sobre el coloide, sin mezclarse con él. Así el extremo *E'* quedaba rozando el agua depositada y, descendiendo lentamente el tubo, al mismo tiempo fluía agua bidestilada sobre el coloide.

De esta manera llegamos a llenar algún que otro tubo, pero resultaba pesadísimo y muy dificultoso por el factor personal del cansancio y nerviosismo.

En vista de esto se idearon algunos métodos que querían evitar las dificultades inherentes al trabajo a pulso.

Se pensó primeramente, en deslizar el tubo sobre una guía de madera, luego, moviendo el tubo mediante una rosca, a la que va solidario.

Estas modificaciones y algunas más que omitimos, no dieron resultado, pues el líquido de los tubos se agitaba, con la consiguiente mezcla de las dos fases.

Por fin, con la ayuda del Licenciado Sr. Felipe de León † (q.e.p.d.), resolvimos el problema por un método hidráulico, que tras varias modificaciones, queda como a continuación se expone.

Es un vaso de precipitados de dos litros, en cuyo interior va un cilindro de vidrio perfectamente vertical y sujeto. Al tubo con el coloide se le provee de dos corchos, perfectamente parafinados en toda su superficie, y en los que se han practicado agujeros para que por su parte inferior entre holgadamente el tubo de coloide.

Los corchos son de diámetro ligeramente menor que el del cilindro antedicho. Estos corchos actúan como flotadores del tubo de ensayo que trata de llenarse.

Situado el frasco de Mariotte convenientemente, se pone su rama externa perfectamente encima del tubo de ensayo y en la misma línea que el eje vertical de éste. Echando agua en el vaso de precipitados sube el tubo de ensayo a la par que el nivel del agua. La rama externa tiene formada la gota, que pende. Cuando se hallan próximos el coloide y la gota pendiente de Mariotte, se abre una llave de poco gasto, para desagüe del gran vaso. Se regula la llegada de agua al vaso para que la gota se desparrame cuidadosamente sobre el coloide y quede establecido contacto entre esta gota

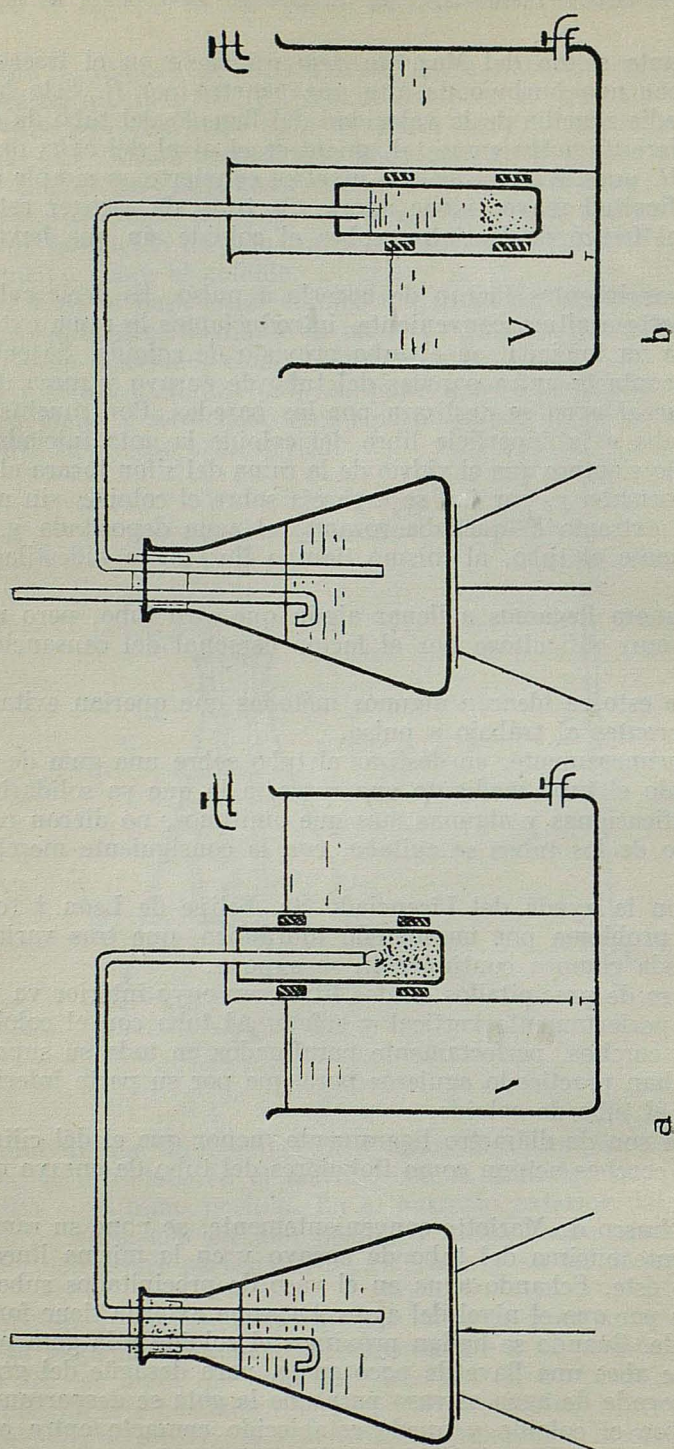


FIG. 24

depositada y la rama del frasco, que no debe entrar jamás en el coloide, para evitar así arrastre de micelas.

El lentísimo descenso del nivel del vaso regula la salida de agua bides-tilada del frasco de Mariotte, de tal manera que siempre el extremo del sifón enrasa perfectamente con la superficie libre en el tubo de ensayo.

Cuando quiere darse por acabado el depósito de agua, basta hacer descender súbitamente el nivel del vaso, y la rama del Mariotte se desprende, por sí misma, del agua depositada.

En los esquemas puestos en la página anterior hemos querido expresar dos momentos interesantes de esta técnica del depósito de agua en el tubo en el que estudiaremos la difusión: el correspondiente a la primera gota (a) y el momento final del llenado (b).

Para extraer el tubo se vuelve a llenar el vaso hasta poder tomar con los dedos el tubo por su parte superior.

Todo este procedimiento tiene la ventaja, además, de no necesitar la presencia continua del investigador.

Con todo, se ha de cuidar uno para que en el momento de sacar el tubo y despegar los corchos flotadores se evite todo movimiento rápido que llevaría consigo la mezcla de las dos fases.

Si el coloide con el que se trabaja es bastante concentrado, la separación de las dos fases es perfectamente apreciable de manera directa. De todos modos, y más especialmente cuando el coloide es muy diluido, hemos comprobado la neta separación y la ausencia de micelas en la fase acuosa, mirando los tubos al haz de luz del arco voltaico, para ver si se da el efecto Tyndall en la fase de dispersión.

En aquellos casos en que hubo agitación a la salida de los tubos o en el que el llenado no fue bien, hemos notado que la separación coloide-agua no es netamente superficial y que, pocos minutos después de extraídos los tubos se apreciaba sobre el coloide la presencia de partículas de oro a gran altura.

En estos casos, como es natural, hemos despreciado la preparación.

DISPOSICIÓN DE LAS EXPERIENCIAS DE DIFUSIÓN DE LOS COLOIDES

Vista la manera como quedan llenos los tubos en los que la difusión se va a efectuar, indicaremos la forma de disponer las series de tubos en los que dicha difusión se va a estudiar.

Teniendo en cuenta que la difusión es un proceso lento, y que, por lo tanto, han de mantenerse los coloides mucho tiempo en los tubos de ensayo, se impone que éstos sean de vidrio duro.

Los tubos empleados son de 20 cm. de largos por 2,7 de diámetro interior.

Cada serie de tubos suele constar de seis, que se colocan en una gradilla de madera, una vez llenos.

Se les tapa con papel de plata.

La gradilla se guarda en lugar seguro, para evitar trepidaciones y descuidos que impidan la marcha normal de la difusión, así como para lograr una temperatura prácticamente invariable.

Generalmente se ha usado una altura de coloide inicialmente de 4 cm. y la altura de agua bidestilada, añadida por la técnica descrita, varía entre los tres y los diez cm. sobre el coloide.

Para cada tubo se anotan cuidadosamente estas dos alturas, la fecha y hora en que comenzó el llenado con agua, que equivaldrá al comienzo del fenómeno de la difusión.

También se anota la concentración coloidal del coloide del que se parte. Cada tubo se numera convenientemente.

El cuadro de la página recoge los datos correspondientes a unas series de tubos.

Inmediatamente después del llenado con agua, hacemos siempre análisis del estado de la capa superior libre del medio de difusión. Así nos aseguramos de la inexistencia de micelas en ella. En algún que otro caso, sobre todo al principio, hemos debido desechar algunos tubos porque, debido al llenado inconveniente, habían sido arrastradas micelas que aparecían excesivamente pronto en la superficie libre de los tubos.

TUBO	CONCT. COLOIDE $c_0/308 \mu^3$	FECHA-HORA LLENADO	ALT. COLOIDE	ALT. H_2O
A-1	50,66 mic.	24-XII-55-13 h.	4 cm.	12 cm.
B-1	" "	26-XII-55-19 h.	4 "	9,3 "
C-1	50 "	26-XII-55-20 h.	5 "	7,5 "
D-1	" "	24-XII-55-17 $\frac{1}{2}$	3,8 "	11 "
A-2	9 "	26-III-56-19 h.	4 "	6,5 "
B-2	10 "	27-III-56-16 $\frac{1}{2}$	3 "	5 "
C-2	" "	27-III-56-18 $\frac{1}{2}$	2,7 "	6,5 "
D-2	" "	27-III-56-18 $\frac{1}{2}$	2,5 "	5,5 "
A-3	8 "	28-VIII-56-10 h.	2,5 "	6,2 "
B-3	5 "	29-VIII-56-19 $\frac{1}{2}$	3,5 "	7 "
C-3	" "	29-VIII-56-18 h.	3,5 "	6 "
D-3	" "	29-VIII-56-18 $\frac{1}{2}$	3,2 "	7,1 "

MEDIDAS DE LAS CONCENTRACIONES MICELARES

Ya dijimos en la primera parte de este trabajo que, tratándose de un problema en el que la variación de concentraciones puede estudiarse por el método de conteo de micelas, gracias a poseer un ultramicroscopio, éste ha sido el procedimiento que hemos seguido por ser el más sencillo en nuestro caso.

Uno de nuestros propósitos era lograr bastantes análisis de un mismo tubo de ensayo, en tiempos diversos.

Siempre que el nivel del plano en el que se toma la muestra no altere prácticamente de valor, podremos seguir la difusión en él como una función de tiempo.

Por otra parte, disponiendo de varias series de tubos en los que la altura de la superficie libre del medio de difusión varía de unos a otros, podremos también estudiar la difusión con respecto a la distancia y en tiempos distintos:

Veamos la técnica empleada:

I. TOMA DE MUESTRA

Zsygmondy empleaba una técnica que para nuestro caso resulta prohibida, pues el análisis micelar lo efectuaba empleando cantidades de coloide de al menos 50 cm.³, que fluían a través del tubo de que va provisto el ultramicroscopio, y cuando el problema había arrastrado el agua del lavado, y la cubeta se suponía en las condiciones propias del problema mismo, lograba fijar, mediante unas pinzas, que cierran la llegada del coloide, una gota del problema en el campo visual del ultramicroscopio. En ella efectuaba el contaje.

Nosotros hemos empleados la siguiente técnica: mediante un cuentagotas perfectamente limpio y seco, tomamos una muestra de una o, cuando más dos gotas, del tubo que se analiza. En caso de que se presuma, debido al mucho tiempo transcurrido desde el comienzo de la difusión, o debido al aspecto que presenta el tubo, que la concentración micelar será grande, se hace una dilución del coloide extraído al doble, triple, etc. Esta dilución la efectuaremos en una placa de porcelana de las que se usan en los ensayos a la gota.

La toma de muestra la hacemos en la misma superficie libre del tubo.

Teniendo perfectamente lavada la cubeta del ultramicroscopio y habiéndola secado muy cuidadosamente, tras los tres lavados de rigor, mediante el mismo cuentagotas usado para la toma de muestra, depositamos una gota del problema en dicha cubeta. La disposición de éste permite apresar la gota de coloide cuando se baja el ocular del ultramicroscopio.

Por tanto, bloqueando el tubo de llegada de problema usado por Zsygmondy, y con una sola gota podemos resolver el problema de calcular las concentraciones micelares.

La gota problema, por otra parte, puede permanecer el tiempo suficiente para hacer varias series de contajes de los que deducir la concentración.

II. CONTAJES DE MICELAS

Ninguna manera se ve más cómoda y segura, a la vez, que expresar la concentración micelar en número de micelas en un determinado volumen de problema.

El ultramicroscopio lleva en su ocular un retículo formado por nueve cuadritos iguales, cuya equivalencia en el plano de observación corresponde a 10,4 micras de lado.

Entre el arco voltaico y el objeto se interpone una rendija cuya imagen en el dicho plano de observación corresponde al valor de la profundidad de coloide iluminado en el centro visual del ultramicroscopio.

Mediante dos coordenadas variables a voluntad, se logra que, bajo la imagen del retículo antes dicho, caiga exactamente la de la rendija, cuya profundidad corresponde a 2,85 micras.

Por consiguiente el volumen de coloide iluminado bajo cada cuadrado del retículo será:

$$V = 10,4^2 \cdot 2,85 = 308 \text{ micras cúbicas.}$$

Toda micela que llegue a este volumen quedará perfectamente iluminada por la luz del arco voltaico mientras en el citado volumen permanezca. Luego será posible hallar el valor medio del número de micelas que hay en ese volumen, haciendo muchos contajes en tiempos elegidos al azar.

Este valor medio será, por consiguiente, la concentración micelar, siempre que se tome como volumen de referencia las 308 micras cúbicas.

La determinación de esta concentración puede venir afectada por el fenómeno subjetivo que lleva a tomar los momentos en que se den valores ya máximos, ya mínimos de micelas existentes en el cuadrado. Esto se evita, por ejemplo teniendo que contar el número de micelas en momentos que impone una persona ajena al que observa el ultramicroscopio, tras intervalos de tiempo que él fija a capricho, o contando hasta cinco, u otra cifra.

Para que los valores de estos contajes tengan mayor fidelidad ha de procurarse:

1.º Que el retículo caiga exactamente sobre la imagen de la rendija con perfecto enfoque, logrando esto mediante el tornillo micrométrico de que va provisto el ocular.

2.º Que el número de micelas no pase ordinariamente de tres por cuadrado. En el caso de ser mayor este número debe diluirse el coloide y tenerse en cuenta dicha dilución en el cálculo de las concentraciones.

3.º Que el observador tenga la mayor rapidez posible en sus reflejos y se acostumbre previamente a reaccionar ante el contaje y a dar, sin prevenciones y honestamente el número justo de las micelas que ve.

Hacemos al menos tres series de contajes con 30 lecturas en cada serie, disponiendo los resultados según se aprecia en el cuadro de la página siguiente.

En dicho cuadro, según se apreciará, se consigna también una cantidad de detalles de gran interés para los resultados experimentales de la difusión en los coloides con los que trabajamos.

En los cuadros de "Resultados Experimentales" nos excusaremos de poner los resultados de cada una de las lecturas del número de micelas, dando los valores medios y a continuación las concentraciones correspondientes después de haber tenido en cuenta la dilución.

ESTUDIO TEORICO Y EXPERIMENTAL DE LA DIFUSION EN COLOIDES DE ORO

COLOIDE A-2

Concentración inicial: $C_0 = 9$ micelas/308 micras³

DÍA	31 marzo 56	19 abril 56	24 mayo 56
HORA	17	17,30	18,30
DILUCIÓN	nula	nula	al triple
1	0 0 1	2 1 3	1 0 2
2	1 2 1	1 2 2	1 1 2
3	0 2 1	2 1 3	0 1 1
4	0 0 0	2 2 1	0 1 2
5	2 0 0	3 2 2	0 1 1
6	0 1 1	2 2 2	2 0 0
7	1 0 0	2 2 2	2 2 1
8	1 1 1	1 1 1	0 2 1
9	1 1 2	2 1 1	2 2 1
10	0 3 2	2 2 1	1 2 1
11	0 0 0	3 1 0	1 1 0
12	1 1 1	1 2 3	0 1 1
13	2 1 0	2 2 1	3 1 1
14	0 1 2	3 2 1	1 0 1
15	1 0 2	2 1 1	1 1 1
16	2 1 0	2 1 3	1 0 1
17	0 0 0	2 3 2	1 1 0
18	1 0 1	1 2 2	0 0 0
19	0 1 1	3 3 2	1 1 0
20	1 1 1	1 2 2	2 1 1
21	1 0 0	0 1 1	1 1 1
22	2 2 2	2 1 1	1 0 1
23	2 0 2	3 1 3	0 1 1
24	0 0 1	1 1 2	0 1 1
25	0 0 1	1 3 1	1 1 0
26	1 1 1	0 1 1	0 1 1
27	1 0 2	2 1 3	0 2 1
28	0 1 2	2 3 2	1 2 2
29	2 0 0	1 2 3	1 1 1
30	0 1 0	2 2 1	1 1 1
TOTALES	23 22 28	52 51 58	26 30 28

Concentraciones	0,8	1,7	2,79
Media por lectura	0,8	1,7	0,93
Concent. relativa $\frac{c}{C_0}$	0,09	0,19	0,31

MEDIDA DE LA AGITACIÓN BROWNIANA

I. *Finalidad de esta determinación.*

En la primera parte de este trabajo se vio la relación existente entre los desplazamientos micelares y el tiempo empleado para su determinación.

Recordemos ahora que, según Einstein (24), la relación entre el cuadrado del desplazamiento medio (media de las proyecciones sobre un eje de los desplazamientos micelares) y el tiempo, es una constante, que mide el estado de agitación del coloide. Trabajando a una temperatura constante, el valor de esta relación sólo depende del tamaño de la micela y de la viscosidad del medio de dispersión usado:

Es decir:

$$A = \frac{\Delta_x^2}{t}$$

También el coeficiente de difusión D , es igual a la mitad de la agitación browniana

$$D = \frac{A}{2}$$

En la segunda parte, examinamos asimismo las relaciones que ligaban el parámetro de precisión h con D y con cualesquiera de los valores medios de los desplazamientos micelares.

Para poder aplicar la fórmula que nos da la concentración micelar en el plano superior de los tubos en los que se estudia la difusión, después de un tiempo determinado, es decir, —la fórmula (73), a la que llegamos en la parte final de la deducción teórica, necesitamos conocer el valor de h .

Este valor, variable con el tiempo para un mismo coloide, se obtiene sencillamente determinando la agitación browniana de una vez para siempre.

Conocida dicha agitación browniana se podrán calcular desplazamientos medios para tiempos distintos. Conocidas las relaciones de estos desplazamientos medios con h , podremos interesar la (73), pues los límites son también conocidos y ya indicamos cómo se manejan las tablas de probabilidad.

II. *Técnica empleada en la determinación de los desplazamientos medios, o sea, la agitación browniana.*

Para esta determinación experimental, seguimos la técnica de Don Juan Martín Sauras (29).

Consiste en medir las proyecciones sobre el plano de observación de los desplazamientos de muchas micelas durante tiempo iguales. Esto permite calcular el valor de la relación:

$$\frac{\text{desplazamiento}^2}{\text{tiempo}} = \frac{\Delta^2}{t} = A$$

Mediante esta constante, determinada para un tiempo conveniente, se puede calcular cuál será el desplazamiento para otro tiempo cualquiera, que es lo que nos interesa.

Los desplazamientos de las micelas proyectados sobre un plano, se obtienen señalando en el plano del dibujo utilizando la cámara clara, las posiciones de la micela en los momentos inicial y final de la agitación browniana. Este intervalo de tiempo suele ser de pocos segundos, controlándose mediante un cronómetro.

Unidas las posiciones extremas y señalando el sentido del desplazamiento, hemos hecho alrededor de 120 recorridos en cada coloide de los empleados.

Hemos, asimismo, tenido la curiosidad de hallar la media de las proyecciones de estos desplazamientos sobre un eje cualquiera —que es lo que hacía Einstein— y si se tiene en cuenta el signo correspondiente a las proyecciones, nos resultan valores para estas medias prácticamente iguales a 0. Esto nos dice que todas las direcciones son igualmente probables y que, por tanto, estamos en un caso en que puede perfectamente aplicarse la estadística, al mismo tiempo que se nos garantiza que no hay arrastre de las micelas.

Para poder determinar el verdadero valor de los desplazamientos, dibujamos cuidadosamente el retículo que nos sirvió para los contajes. Teniendo en cuenta que el valor real de la imagen del lado del cuadradito interior que constituye cada uno de los nueve cuadros del retículo en el plano en que se halla el coloide es de 10,4 micras y que su imagen dibujada con la cámara clara es de 11,5 mm. resulta ya muy fácil hallar la equivalencia real de los desplazamientos dibujados en el papel.

Hallada la media aritmética de los trazos sobre el papel y reducido su valor al desplazamiento medio real de las micelas, tendremos la media aritmética de las proyecciones sobre un plano, correspondiente a los desplazamientos que en el espacio efectúan las micelas durante el tiempo considerado.

$$\frac{r'_a}{\sqrt{t'}} = \frac{r_a}{\sqrt{t}}$$

en donde se ponen r'_a y t' en el primer miembro indicando los desplazamientos en los intervalos temporales usados en la determinación experimental de la agitación browniana.

Según esto:

$$r_a = r'_a \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t'}}$$

será la fórmula que nos permite calcular el desplazamiento medio sobre un plano después de cualquier tiempo considerado.

Como, por otra parte, y según se vio:

$$h = \frac{\sqrt{\pi}}{2 r_a}$$

sustituyendo r_a tendremos:

$$h = \frac{\sqrt{\pi l'}}{2 r_a' \sqrt{t}}$$

valor que sustituido en (73) nos resuelve los problemas de cálculo teórico de concentraciones micelares por difusión.

PRECAUCIONES EN ESTA TÉCNICA DE LOS DESPLAZAMIENTOS

I. Iluminación en la cámara clara.

El prisma de reflexión total y el espejo que constituye la cámara clara, trasladan el campo visible del ultramicroscopio sobre un papel claro.. Esta imagen del campo debe ser perfectamente visible al mismo tiempo que el papel. Así podrán seguirse perfectamente los desplazamientos micelares y los dibujos de estos desplazamientos serán totalmente fieles.

Ahora bien, esta fidelidad exige una conjugación perfecta de las iluminaciones del coloide por un lado y del plano del dibujo por otro.

La iluminación del coloide la realiza el arco voltaico y la del plano del dibujo la efectúa una bombilla auxiliar. Un exceso de iluminación por esta bombilla enmascara las micelas. Pero el exceso de iluminación se puede corregir de varias maneras: ya alejando el foco luminoso, ya usando los filtros de luz que pueden colocarse entre el prisma y el espejo o, por fin, combinando ambas cosas.

Como la iluminación del coloide no podemos en modo alguno modificarla, nuestras posibilidades son exclusivamente las citadas en el párrafo anterior.

III. Enfoque del campo ultramicroscópico.

Ante todo se ha de tener en cuenta que en esta operación conviene que las micelas puedan ser vistas durante el mayor tiempo posible, o lo que es lo mismo, ha de procurarse que el espacio en el que son visibles sea el máximo posible. Por esta razón prescindimos del retículo y de la rendija cuando se trata de determinar recorridos micelares.

Quitando el retículo no perderemos las micelas que quedarían ocultas tras los trazos negros del mismo. Al suprimir la rendija será mucho mayor la profundidad del campo observado y, por tanto, de coloide.

Además, para que pueda seguirse fácilmente la micela escogida, conviene que la concentración sea más bien pequeña, por lo cual es obligado trabajar con coloide muy diluido en el que se pueda apreciar los recorridos de las micelas, una a una, sin interferencias con las que las circundan.

Observemos también que siendo tridimensional el movimiento micelar, pero apreciando nosotros tan sólo la proyección sobre un plano, las micelas que se pierdan a nuestra vista, desaparecerán, en su inmensa mayoría, por salirse fuera de la profundidad de foco del objetivo. Esto es lógico, teniendo presente que la distancia entre los dos planos extremos de esta profundidad es bastante menor que el diámetro del campo visual.

Por tanto, si se logra encontrar el plano medio entre los planos extremos de enfoque, tendremos la posición óptima para los recorridos. Una micela situada en tal plano tendrá el máximo recorrido que realizar tanto hacia arriba como hacia abajo antes de perderse y podrá, en consecuencia, ser seguida durante el tiempo mayor posible.

Prácticamente, nos ha resultado fácil resolver este problema. Hemos procedido de la siguiente forma: trabajamos con la rendija puesta en el camino del rayo luminoso que ha de recorrer la luz del arco voltaico. Movemos el ocular hasta que aparezca el campo con las micelas iluminadas. Entonces mediante giro cuidadoso del micrómetro de profundidad buscamos el plano en que desaparecen las micelas, anotando la lectura correspondiente en el tornillo micrométrico.

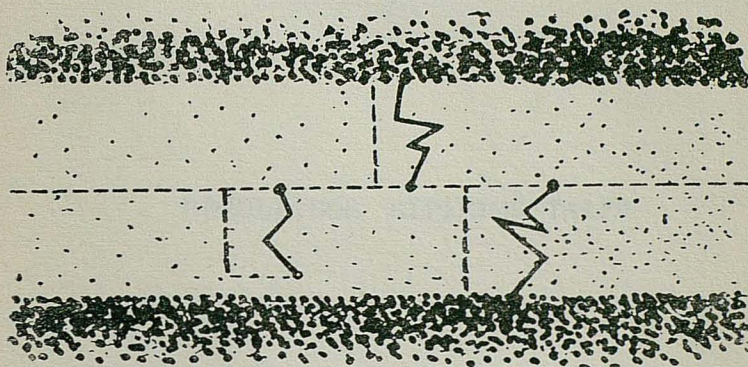


FIG. 25

A continuación, giramos el tornillo en sentido inverso al anterior, con lo cual aparecerá el coloide. Seguimos girando hasta que desaparezca nuevamente. Así habremos hallado el otro plano extremo de la imagen de la rendija. Hacemos igualmente la lectura correspondiente a esta última posición del tambor micrométrico.

Situamos el tornillo en posición media de las dos lecturas extremas antedichas y ésta será la de máximo enfoque.

Separemos a continuación la rendija y nos disponemos a anotar los recorridos según ya se dijo.

III. INFLUENCIA DE LA PARED DE LA CÁMARA

Siguiendo la precaución anotada en el apartado II y disponiendo del ultramicroscopio Zsigmondy, de cámara amplia y profunda, limitando la elección de las micelas seguidas, a las que aparecen en el centro del campo, se evita el efecto de enfrenamiento, producido sobre el movimiento de las micelas, en la proximidad de la pared de la cámara. Este enfrenamiento es debido a la viscosidad del medio, que se halla influida por la proximidad de paredes según hace notar Constantín (41).

IV. MODO DE PROCEDER

Consecuencia de las anteriores observaciones es el modo de proceder, tomando micelas que estén en el centro del campo visual y que se hallen enfocadas, observándolas durante un tiempo tal que no las permita alejarse hasta alcanzar los bordes del campo.

Se pueden seguir sus caminos aún en el caso de que se desenfocuen, lo que por otra parte, no influye en el valor de la media de los recorridos; pues ésta depende de la componente horizontal tan sólo, y para nada de la vertical.

RESULTADOS EXPERIMENTALES

A 1

Concentración micelar: $c_0 = 50,66$ micelas en 308 micras cúb.

Fecha y hora llenado (comienzo difusión): 24-XII-1955, 13 h.

Altura de coloide: $r = 4$ cm.

" agua $r_2 = 12$ cm. $2r_2 - r_1 = 16$
 $r_1 = 8$ cm.

Recorridos micelares:

Tiempo $t' = 2$ seg.

Núm. de recorridos: 117

Recorrido medio $r_a' = 7,7 \cdot 10^{-4}$ cm.

Día-hora de la determin.	Tiempo difusión (segundos)	Media contaje	Dilución	Conc. (c)	$\sqrt{t}$	r_a	h	$h(2r_2 - r_1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2 - r_1)} e^{-x^2} dx$	hr_1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx$	c/c_0 calc.	c/c_0 exper.
30-XII-12	143.3600	0,092	0	0,092	720	0,406	2,3	36,2	0,9999	18,4	0,9999	—	$1,8 \cdot 10^{-3}$
4-I-17 $\frac{1}{2}$	269 $\frac{1}{2}$ "	0,41	0	0,41	984	0,54	1,7	27,2	0,9999	13,6	0,9999	—	$8 \cdot 10^{-3}$
7-I-12	336 "	0,98	0	0,98	1098	0,59	1,5	24	0,99999	12	0,9999	—	$1,9 \cdot 10^{-2}$
19-I-18	630 "	1,05	0	1,05	1506	0,81	1,0	17,2	0,99999	8,6	0,9999	—	$2,1 \cdot 10^{-2}$
9-II-18	134 "	0,85	2	1,7	2016	1,08	0,8	12,9	0,9999	6,48	0,9999	—	$3,4 \cdot 10^{-2}$
2-III-17	685 "	1,05	2	2,1	2460	1,31	0,6	10,5	0,9999	5,25	0,9999	—	$8,2 \cdot 10^{-2}$

B 1

Concentración micelar: $c_0 = 50,6$ micelas en 308 micras cúb.

Fecha y hora llenado (comienzo difusión): 26-XII-55, 19 h.

Altura de coloide: $r = 4$ cm.

" agua $r_2 = 9,8$ cm. $2r_2 - r_1 = 13,3$ cm.
 $r_1 = 5,3$ cm.

Recorridos micelares:

Tiempo $t' = 2$ seg.

Núm. de recorridos: 117

Recorrido medio $r_a' = 7,7 \cdot 10^{-4}$ cm.

Día-hora de la determin.	Tiempo difusión (segundos)	Media contaje	Dilución	Conc. (c)	$\sqrt{t}$	r_a	h	$h(2r_2 - r_1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2 - r_1)} e^{-x^2} dx$	hr_1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx$	c/c_0 calc.	c/c_0 exper.
29 di. 12 $\frac{1}{2}$	65,5.3600	0,6	0	0,6	486	0,263	3,4	45,2	0,99999	18,6	0,9999	—	$1,2 \cdot 10^{-2}$
5-I-17	238 "	0,725	0	0,725	924	0,48	1,8	23,9	0,99999	9,54	0,9999	—	1,4 "
19-I-19	576 "	1,18	0	1,18	1440	0,77	1	13,3	0,9999	5,3	0,9999	—	2,3 "
16-II-18	743 "	1,9	0	1,9	1632	0,88	0,88	11,7	0,9999	4,6	0,9999	—	3,9 "
26-I-18	1247 "	1,65	2	3,3	2118	1,14	0,76	10,1	0,9999	4,02	0,9991	$9 \cdot 10^{-5}$	6,6 "
2-III-18	1607 "	0,99	4	3,9	2400	1,29	0,69	9,1	0,9999	3,55	0,9995	5 "	7,8 "

C 1

Concentración micelar: $c_0 = 50$ mic. en 308 micras cúb.
 Fecha y hora de llenado (comienzo dif.): 26-XII-55, 20 h.
 Altura de coloide $r = 5$ cm.
 " agua $r_2 = 7,5$ cm. $2r_2 = r_1 = 12,5$ cm.
 $r_1 = 2,5$ cm.

Recorridos micelares:

Tiempo $t' = 2$ seg.
 Núm. de recorridos: 117
 Recorrido medio $r_a' = 8,5 \cdot 10^{-4}$ cm.

Día-hora de la determin.	Tiempo difusión (segundos)	Media contaje	Dilución	Conc. (c)	$\sqrt{t}$	r_a	h	$h(2r_2 - r_1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2 - r_1)} e^{-x^2} dx$	hr_1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx$	c/c_0 calc.	c/c_0 exper.
30-XII-19½	95½.3600	0,53	0	0,53	586,2	0,35	2,53	31,2	0,9999	6,3	0,9999	—	$1,06 \cdot 10^{-2}$
5-I-18	238 "	0,92	0	0,92	924	0,55	1,55	20	0,9999	4	0,9999	—	1,8 "
19-I-18	574 "	1,9	0	1,9	1434	0,86	1,02	12,7	0,9999	2,5	0,9995	$5 \cdot 10^{-4}$	3,8 "
26-I-18 ½	742½ "	1,2	2	2,4	1632	0,98	0,9	11,2	0,9999	2,25	0,9985	$1,4 \cdot 10^{-3}$	4,8 "
16-II-18 ½		1,3	3	3,9	2118	1,27	0,69	8,7	0,9999	1,7	0,9838	$1,6 \cdot 10^{-2}$	7,9 "

D 1

Concentración micelar: $c_0 = 50$ mic. en 308 micras cúb.
 Fecha y hora de llenado (comienzo dif.): 24-XII-55, 17 ½ h.
 Altura de coloide $r = 3,8$ cm.
 " agua $r_2 = 11$ cm. $2r_2 - r_1 = 14,8$ cm.
 $r_1 = 7,2$ cm.

Recorridos micelares:

Tiempo $t' = 2$ seg.
 Núm. de recorridos: 117
 Recorrido medio $r_a' = 8,5 \cdot 10^{-4}$ cm.

Día-hora de la determin.	Tiempo difusión (segundos)	Media contaje	Dilución	Conc. (c)	$\sqrt{t}$	r_a	h	$h(2r_2 - r_1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2 - r_1)} e^{-x^2} dx$	hr_1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx$	c/c_0 calc.	c/c_0 exper.
2-I-56-18½	217.3600	0,16	0	0,16	882	0,53		23,6	0,99999	12	0,99999	—	$3,2 \cdot 10^{-3}$
4-I-18	264 ½ "	0,28	0	0,28	972	0,58		22	0,99999	11	0,9999	—	5,6 "
19-I-18	624 ½ "	0,32	0	0,32	1500	0,9		14	0,9999	6,5	0,9999	—	6,5 "
9-II-18	1128½ "	0,57	0	0,57	2016	1,2		12,6	0,9999	5,3	0,9999	—	$1,1 \cdot 10^{-2}$
23-II-19 ½	1466 "	0,8	0	0,8	2298	1,38		9,3	0,9999	4,7	0,9999	—	1,6 "
2-III-18	1656½ "	0,8	2	1,6	2842	1,46		8,8	0,9999	4,2	0,9999	—	3,2 "

RESULTADOS EXPERIMENTALES

Según las experiencias correspondientes a los datos que preceden, observaremos que la difusión parece mucho más rápida en la práctica de lo que la teoría nos indica.

Tratemos de interpretar esta anomalía: La primera razón a la que se nos ocurrió, en primera instancia, hacer responsable de esta discordancia, es que la superficie de separación entre coloide y agua no hubiera sido neta.

Despreciadas unas series de experiencias hechas y repetidas con el mismo coloide, pero poniendo especial cuidado en el llenado, a pesar de todo, seguía la diferencia aunque atenuada.

A primera vista, parece que nuestra fórmula para calcular la concentración micelar sea inadecuada, pues, a pesar de haber trabajado con un coloide rojo-rubí Zsimongdy obtenido en magníficas condiciones, los valores experimentales se separan bastante de los teóricos dados por ella.

El hecho, sin embargo, de apreciarse en dicho coloide, después de unas semanas de su preparación, indicios de sedimentación micelar, nos hizo suponer que se trata de un sistema aún muy polidisperso, para el que el recorrido medio hallado y usado en los cálculos, se distancie mucho el recorrido medio correspondiente a un sistema monodisperso, formado ya por las micelas del tamaño mayor, ya por las del menor. En el sistema polidisperso, las mayores micelas lógicamente sedimentarán, en cambio las más pequeñas alcanzarán la superficie libre del tubo de difusión mucho antes de que lo haría el conjunto coloidal monodisperso de tamaño intermedio.

Esta interpretación nos llevó a buscar los medios de obtener sistemas monodispersos.

Tres procedimientos se nos ocurren para ello a primera vista: 1.^a Obtener, mediante una ultrafiltración selectiva, el coloide de tamaños comprendidos entre los de los poros de dos filtros empleados en la selección.

2.^a Una ultracentrifugación de coloide que acelere el efecto de separación por tamaños de las micelas a lo alto del tubo, si bien la ultracentrifugación de los coloides de oro presenta serias dificultades, por la pequeñez del grano micelar. 3.^a Esperar a que el coloide, dispuesto en una probeta de poco diámetro y mucha altura, alcance el equilibrio de sedimentación, después de lo cual tomando el coloide existente en una capa conveniente de la probeta, nos dará un sistema con tamaño de micela uniforme.

Por ser este último el procedimiento más sencillo nos dispusimos a emplearlo. Así, después de cuatro meses de sedimentación del coloide de las experiencias correspondientes a la serie 1, extrajimos de las zonas altas de

los tubos en los que el efecto de sedimentación nos aconsejaba no proseguir los contajes, y lo usamos como coloide inicial de una serie de experiencias, a las que corresponde, entre otras muchas, el encasillado de la serie 2 que va a continuación.

La atenta observación de los resultados correspondientes a las series 2 y 3, nos indica que nos hallamos en presencia de un coloide que responde bastante bien, aunque no matemáticamente, a nuestras deducciones teóricas.

La determinación de r_a' nos indicó ya que el sistema empleado en la serie 1 era mucho menos homogéneo que el de las 2 y 3. En efecto, para $t' = 2$ segundos, resultará $r_a' = 7,7 \cdot 10^{-4}$ seg., en la serie 1, mientras que para $t' = 1$ seg. resulta $r_a' = 12,42 \cdot 10^{-4}$ cm. en la serie 2.

Recordando que el cociente entre los recorridos medios y las raíces cuadradas de los tiempos debe ser una constante, para un mismo coloide monodisperso, y por sencilla deducción matemática se apreciará una separación del 230 por ciento del valor experimental con respecto al teórico; razón por la cual los valores c/C_0 calculados en 1 no se aprecian mientras sí los de c/C_0 experimental, que corresponde a la difusión de las micelas para las que el recorrido medio es el correspondiente a $12,42 \cdot 10^{-4}$ cm. es decir, a las micelas recogidas para formar el sistema monodisperso de las series 2 y 3.

Los valores de las tablas correspondientes a las series 2 nos dicen que la difusión con el coloide usado se ajustan bastante bien a la fórmula después de un tiempo suficiente. En efecto, la primera determinación puesta, si está realizada después de poco tiempo, nos da una diferencia notable entre el cálculo y la experiencia mientras que en las sucesivas determinaciones, al transcurso de unos 15 días aproximadamente, resultan valores experimentales casi nunca superiores al doble de los teóricos.

Consultando los resultados que dan los autores, apreciamos en Burton, por ejemplo, que los valores experimentales que Wiener, Exner, Henri, etc., dan para los cuadrados de los recorridos medios, son superiores en más de cuatro veces a los calculados teóricamente por ellos mismos. Esto indica que nuestros valores y la bondad de nuestra técnica son muy aceptables, así como que el sistema coloidal empleado en las determinaciones de las que las series 2 y 3 no son más que unas muestras, puede darse como monodisperso.

Respecto a la separación que presenta la primera determinación, nos parece una buena interpretación la siguiente. No resulta tan fácil una perfecta separación inicial entre las fases coloide y agua, y es muy factible que, a pesar del sumo cuidado puesto en el llenado y traslado de los tubos, se nos desplace el coloide de la zona de separación —aunque sin percibirlo— con lo que su llegada a la superficie libre sea adelantada, pero a costa de dejar una zona con menos concentración micelar. Los dos efectos son contrapuestos para la difusión, y así, después de un tiempo conveniente la difusión sigue su marcha normal perfectamente acusada en las demás determinaciones.

Por fin, el coloide empleado en la serie 3 es también el extraído de la zona superior de los tubos de la serie 2. Si el coloide de la serie 2 era prácticamente monodisperso, el que usamos en la 3 lo será con mayor motivo. Así lo parece, en efecto, pues, de la determinación de recorridos micelares para un segundo nos resulta en este caso $r_a' = 12,03 \cdot 10^{-4}$ cm. casi igual a $12,42 \cdot 10^{-4}$ cm. que es el de 2, con una diferencia que no llega al 3 por ciento.

Como quiera que los resultados obtenidos empleando este método de separación por tamaños del sistema coloidal, son muy satisfactorios, nos parece innecesario emplear la técnica de la ultrafiltración, que, aparte de las dificultades de su realización, difícilmente nos daría más apreciables resultados.

A 2

Concentración micelar: $c_0 = 9$ micelas en 308 micras cúb.

Fecha y hora de llenado (comienzo dif.): 26-III-56, 19 h.

Altura de coloide $r = 4$ cm.

" agua $r_2 = 6,5$ cm. $2r_2 - r_1 = 10,5$ cm.
 $r_1 = 2,5$ cm.

Recorridos micelares:

Tiempo $t' = 1$ seg.

Núm. de recorridos: 111

Recorrido medio $r'_a = 12,42 \cdot 10^{-4}$ cm.

Día-hora de la determin.	Tiempo difusión (segundos)	Media contaje	Dilución	Conc. (c)	$\sqrt{t}$	r_a	h	$h(2r_2 - r_1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2 - r_1)} e^{-x^2} dx$	hr_1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx$	c/c_0 calc.	c/c_0 exper.
31-3-17	118.3600	0,8	0	0,8	654	0,81	1,09	11,42	0,9999	2,7	0,99987	$2,10^{-4}$	$9,10^{-2}$
19-4-17½	574½ "	1,7	0	1,7	1434	1,78	0,49	5,1	0,99999	1,2	0,918	0,819	0,19
26-4-20	745 "	2,5	0	2,5	1638	2,03	0,43	4,5	0,9999	1,07	0,7538	0,1302	0,27
17-5-18	1247 "	1,4	2	2,18	2118	2,63	0,33	3,5	0,9999	0,82	0,7238	0,246	0,3
24-5-18½	1415½ "	0,93	3	2,79	2256	0,31	0,31	3,2	0,9999	0,77	0,7238	0,276	0,31
14-8-10	3375 "	0,66	7	4,62	3486	4,33	0,20	2,1	0,997	0,5	0,5205	0,4765	0,5

B 2

Concentración micelar: $c_0 = 10$ mic. en 308 micras cúb.

Fecha y hora de llenado (comienzo dif.): 27 marzo 56, 16 ½ h.

Altura de coloide $r = 3$ cm.

" agua $r_2 = 5$ cm. $2r_2 - r_1 = 8$ cm.
 $r_1 = 2$ cm.

Recorridos micelares:

Tiempo $t' = 1$ seg.

Núm. de recorridos: 111

Recorrido medio $r'_a = 12,42 \cdot 10^{-4}$ cm.

Día-hora de la determin.	Tiempo difusión (segundos)	Media contaje	Dilución	Conc. (c)	$\sqrt{t}$	r_a	h	$h(2r_2 - r_1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2 - r_1)} e^{-x^2} dx$	hr_1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx$	c/c_0 calc.	c/c_0 exper.
31-III-17	96½.3600	0,33	0	0,33	588	0,73	1,2	9,6	0,99999	2,4	0,99932	$6,8 \cdot 10^{-3}$	0,033
19-IV-18	453½ "	2,8	0	2,8	1410	1,75	0,5	4	0,99990	1	0,8427	0,157	0,28
26-IV-19½	722 "	3	0	3	1608	2	0,44	3,52	0,9999	0,88	0,7866	0,213	0,3
17-V-18½	1225 "	2,1	2	4,2	2100	2,6	0,34	2,72	0,9998	0,68	0,6637	0,336	0,42
24-V-18½	1393 "	1,5	3	4,5	2238	2,8	0,32	2,48	0,99955	0,62	0,6194	0,391	0,45

C 2

Concentración micelar: $c_0 = 10$ mic. en 308 micras cúb.
 Fecha y hora de llenado (comienzo dif.): 27 marzo 56, 18,15 h.
 Altura de coloide: $h = 2,7$ cm.
 " agua $r_2 = 6,5$ cm. $2 r_2 - r_1 = 9,2$ cm.
 $r_1 = 3,8$ cm.

Recorridos micelares:

Tiempo $t' = 1$ seg.
 Núm. de recorridos: 111
 Recorrido medio $r_a' = 12,42 \cdot 10^{-4}$ cm.

Día-hora de la determin.	Tiempo difusión (segundos)	Media contaje	Dilución	Conc. (c)	$\sqrt{t}$	r_a	h	$h(2r_2 - r_1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2 - r_1)} e^{-x^2} dx$	hr_1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx$	c/c_0 calc.	c/c_0 exper.
31-3-17,15	95.3600	0,22	0	0,22	582	0,72	1,2	11	0,99999	4,56	0,9999		0,027
19-4-18,15	552 "	1	0	1	1410	1,75	0,5	4,6	0,9999	1,9	0,992	0,008	0,1
26-4-19,45	721 "	1,6	0	1,6	1620	2,01	0,44	4,0	0,9999	1,4	0,9553	0,047	0,16
17-5-18,45	1224½ "	1,1	2	2,2	2100	2,6	0,34	3,0	0,99	1,2	0,931	0,08	0,22
14-5-19	1293 "	1,1	3	2,3	2238	2,8	0,31	2,8	0,9994	1,1	0,899	0,1	0,33

D 2

Concentración micelar: $c_0 = 10$ mic. en 308 micras cúb.
 Fecha y hora de llenado (comienzo dif.): 27 marzo 56, 18½ h.
 Altura de coloide $r = 2,5$ cm.
 " agua $r_2 = 5,5$ cm. $2 r_2 - r_1 = 8$ cm.
 $r_1 = 3$ cm.

Recorridos micelares:

Tiempo $t' = 1$ seg.
 Núm. de recorridos: 111
 Recorrido medio $r_a' = 12,42 \cdot 10^{-4}$ cm.

Día-hora de la determin.	Tiempo difusión (segundos)	Media contaje	Dilución	Conc. (c)	$\sqrt{t}$	r_a	h	$h(2r_2 - r_1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2 - r_1)} e^{-x^2} dx$	hr_1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx$	c/c_0 calc.	c/c_0 exper.
31-3-17 ½	95.3600	0,13	0	0,13	582	0,72	1,2	9,6	0,99999	3,6	0,99990	$9 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
19-4-18 ½	552 "	1,1	2	2,2	1410	1,75	0,5	4	0,99996	1,6	0,9661	0,034	0,22
26-4-20	721 ½ "	1	3	3	1620	2,01	0,44	3,3	0,99995	1,32	0,938	0,072	0,3
17-5-19	1224½ "	1,3	3	3,9	2100	2,6	0,34	2,7	0,9998	1,02	0,85	0,15	0,39
24-5-19,15	1392 "	1	4	4	2238	2,8	0,31	2,48	0,99945	0,93	0,811	0,189	0,4

A 3

Concentración micelar: $c_0 = 8$ micelas en 308 micras cúb.
 Fecha y hora de llenado (comienzo de dif.): 28 agosto 56, 10 h.
 Altura de coloide $r = 3,5$ cm.
 " agua $r_2 = 6,2$ cm. $2r_2 - r_1 = 9,7$ cm.
 $r_1 = 2,7$ cm.

Recorrido micelar:

Tiempo $t' = 1$ seg.
 Núm. de recorridos: 160
 Recorrido medio $r_a' = 12,03 \cdot 10^{-4}$ cm.

Día-hora de la determin.	Tiempo difusión (segundos)	Media contaje	Dilución	Conc. (c)	$\sqrt{t}$	r_a	h	$h(2r_2 - r_1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2 - r_1)} e^{-x^2} dx$	hr_1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx$	c/c_0 calc.	c/c_0 exper.
25-10-18 $\frac{1}{2}$	751 $\frac{1}{2}$.3600	1,2	0	1,2	1644	1,9	0,43	4,17	0,9999	1,16	0,8991	0,1009	0,17
28-9-17 $\frac{1}{2}$	1400 $\frac{1}{2}$ "	2,3	2	2,6	2244	2,7	0,32	3,1	0,9999	0,86	0,7761	0,2238	0,32
29-11-17	2239 "	1,1	3	3,3	2838	3,4	0,26	2,52	0,99963	0,7	0,6778	0,3218	0,41

B 3

Concentración micelar: $c_0 = 5$ mic. en 308 micras cúb.
 Fecha y hora de llenado (comienzo dif.): 29 agosto 56, 17 $\frac{1}{2}$ h.
 Altura de coloide $r = 3,5$ cm.
 " agua $r_2 = 1$ cm. $2r_2 - r_1 = 10,5$ cm.
 $r_1 = 3,5$ cm.

Recorrido micelar:

Tiempo $t' = 1$ seg.
 Núm. de recorridos: 160
 Recorrido medio $r_a' = 12,03 \cdot 10^{-4}$ cm.

Día-hora de la determin.	Tiempo difusión (segundos)	Media contaje	Dilución	Conc. (c)	$\sqrt{t}$	r_a	h	$h(2r_2 - r_1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2 - r_1)} e^{-x^2} dx$	hr_1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx$	c/c_0 calc.	c/c_0 exper.
28-9-17 $\frac{1}{2}$	720.3600	1,1	0	1,1	1608	1,93	0,45	4,72	0,99999	1,57	0,973	0,0263	0,22
25-10-18 $\frac{1}{2}$	1369 "	1,4	0	1,4	2220	2,67	0,33	3,46	0,99993	1,15	0,8961	0,104	0,28
29-11-17 $\frac{1}{2}$	2208 "	0,6	3	1,8	2820	3,39	0,26	2,73	0,9998	0,91	0,8018	0,198	0,36

C 3

Concentración micelar: $c_0 = 5$ mic. en 308 micras cúb.

Fecha y hora de llenado (comienzo dif.): 29 agosto 56, 18 h.

Altura de coloide $r = 3,5$ cm.

" agua $r_2 = 6$ cm. $2r_2 - r_1 = 9,5$ cm.
 $r_1 = 2,5$ cm.

Recorrido micelar:

Tiempo $t' = 1$ seg.

Núm. de recorridos: 160

Recorrido medio $r_a' = 12,03 \cdot 10^{-4}$ cm.

Día-hora de la determin.	Tiempo difusión (segundos)	Media contaje	Dilución	Conc. (c)	$\sqrt{t}$	r_a	h	$h(2r_2 - r_1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2 - r_1)} e^{-x^2} dx$	hr_1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx$	c/c_0 calc.	c/c_0 exper.
25-10-19	720.3600	1,35	0	1,35	1608	1,93	0,45	4,27	0,99999	1,12	0,88679	0,1132	0,27
28-9-18	1369 "	0,9	2	1,8	2220	2,67	0,33	3,17	0,9999	0,82	0,75381	0,2462	0,36
29-11-117½	2208½ "	0,77	3	2,31	2820	3,29	0,26	2,47	0,99953	0,69	0,64203	0,3575	0,46

D 3

Concentración micelar: $c_0 = 5$ mic. en 308 micras cúb.

Fecha y hora de llenado (comienzo dif.): 29 agosto 56, 18 ½ h.

Altura de coloide $r = 3,2$ cm.

" agua $r_2 = 7,1$ cm. $2r_2 - r_1 = 10,3$ cm.
 $r_1 = 3,9$ cm.

Recorrido micelar:

Tiempo $t' = 1$ seg.

Núm. de recorridos: 160

Recorrido medio $r_a' = 12,03 \cdot 10^{-4}$ cm.

Día-hora de la determin.	Tiempo difusión (segundos)	Media contaje	Dilución	Conc. (c)	$\sqrt{t}$	r_a	h	$h(2r_2 - r_1)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(2r_2 - r_1)} e^{-x^2} dx$	hr_1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr_1} e^{-x^2} dx$	c/c_0 calc.	c/c_0 exper.
28-9-18 ½	720.3600	1	0	1	1608	1,93	0,45	4,63	0,99999	1,75	0,9866	0,0133	0,2
25-X-19,15	1369-3600	1,2	1½	1,8	2220	2,67	0,33	3,44	0,99999	1,34	0,9340	0,0659	0,3
29-11-17 ½	2208 "	1,1	2	2,2	2820	3,39	0,26	2,67	0,99984	1,01	0,8468	0,1530	0,4

CONCLUSIONES

1.^a Se deducen directamente los valores de la concentración en los procesos de difusión, sin necesidad de integrar la función de Fick, aplicando el cálculo de probabilidades.

2.^a Para aplicar las leyes de Gauss —tanto en una dimensión como generalizada a dos o tres dimensiones— calculamos los parámetros de las mismas en función de la agitación browniana.

3.^a Esta forma de tratar la difusión, permite estudiar la influencia que ejerce la presencia de superficies límites —fondos, paredes laterales y superficies libres— en la marcha normal de la difusión.

4.^a Se perfecciona la técnica de medida de concentraciones micelares. Para ello: a) se logra un llenado adecuado de los tubos mediante el uso del frasco Mariotte y de un procedimiento hidráulico. b) Se introduce una técnica de microanálisis que nos dá, por contaje sencillo y posible de repetir cuantas veces nos interese, un mismo problema, sin que varíe prácticamente en sus condiciones experimentales.

5.^a Se consigue asimismo un perfeccionamiento de la técnica empleada en la medida de la agitación browniana, mediante la determinación previa del plano óptimo de enfoque del volumen coloidal en que se determinan recorridos micelares.

6.^a Utilizando un coloide rojo rubí Zsigmondy y empleando las técnicas perfeccionadas anteriores, se corrobora experimentalmente la fórmula de Einstein relativa al movimiento browniano, y se logra una mejora respecto de los valores obtenidos anteriormente por otros experimentadores.

7.^a Se interpreta el hecho de no alcanzar aún una mayor exactitud en las primeras experiencias con coloide, como nosotros esperábamos, por tratarse de un sistema coloidal todavía polidisperso.

8.^a Seleccionando un coloide Zsigmondy para obtener un sistema coloidal todavía polidisperso se logra tener resultados satisfactorios.

BIBLIOGRAFIA

- (1) WHITTAKER Y WATSON: *Modern Analysis*, 160 (1915).
- (2) CARSLAW Y JAEGER: *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, 1947.
- (3) BOAUSE: *Cours de Mathématiques générales*, 593, París.
- (4) LÓPEZ MARTÍNEZ: *Boletín de Metrología*, T. I. com. 13. Madrid, 1954.
- (5) MC BAIN: *Ciencia de los coloides*, 137. Barcelona, 1956.
- (6) GLASSTONE: *Química Física*, 1131 (1950).
- (7) LEWIS WILLIAM: *Traité de Chimie Physique*, 314.
VIDAL TERCEÑO: *Rev. Química e Industria*. Julio-Agosto (1954).
EUCKEN: *Tratado de Química Física*, 348.
- (8) OLIVER RUIZ Y GALBIS MUÑOZ: *Anales R.S.E.* Serie B. Junio (1950).
- (9) ALEXANDRE, J.: *Colloid Chemistry*, 840, N. York, 1936.
- (10) EUCKEN: O. c. pág. 349.
LEWIS: O. c. pág. 315.
- (11) RIUS, LLOPIS, POLO: *Anales R.S.E. de Física y Química*, XLV, B 471 (1949).
- (12) MC BAIN: O. c. 221-232.
- (13) BARY PAUL: *Les coloides*, 102, París (1921).
- (14) VOIT JOHANNISJANZ WEBER: Citado por Bary Paul, o. c. pág. 104.
- (15) THOVERT, M. J.: *Annales de Physique*, T. II, 9.^a serie, pág. 369-428. Nov.-Dic. (1914).
- (16) PROCOPIU, M.: *Annales de Physique*, T. IX, 9.^a serie, págs. 96-113. Enero-Febrero, 1918.
- (17) HENRI V.: *Cours de chimie-Physique*, 154, París.
- (18) GLASSTONE: O. c., pág. 239.
- (19) EINSTEIN: *Annalen der Physik*, T. 17 (1905).
- (20) GETMAN-DANIELS: *Química-Física*, 238-242.
- (21) LANGEVIN: *Complets Rondues* 146, pág. 530 (1908).
- (22) MC BAIN: O. c., pág. 221.
- (23) PERRIN: *Les Atomes*. Citado por Bary Paul, pág. 121.
- (24) EINSTEIN: *Zeitschrift für Elektrochemie*, 237 (1908).
- (25) MC BAIN: O. c., pág. 126.
GLASSTONE: O. c., pág. 237 y siguientes.
- (26) ZSIGMONDY Y THIESSEN: *Das Kolloide Gold*, 33 Leipzig (1923).
- (27) BURTON: *Colloidal Solutions*, 74, Londres (1921).
- (28) BURTON: *Colloidal Solutions*, 75, Londres (1921).
- (29) MARTÍN SAURAS: *Trabajos del Laboratorio de Investigaciones Bioquímicas*, 56, Zaragoza (1921-22).
- (30) GÁLVEZ LAGUARTA: *Anales R.S.E. de Física y Química*, T. XXXVIII, pág. 102 (1942).
VIDAL TERCEÑO: *Rev. citada*, Julio-Agosto (1954).
MC BAIN, o. c., pág. 128.
- (31) GARCÍA ALVAREZ, AYUSO OREJANA: *Estadística Saeta*, 152. Madrid (1946).
- (32) G. GALÁN: *Cálculo de Probabilidades*. 245. Madrid (1923).
FERNÁNDEZ BAÑOS: *Tratado de Estadística*, 91.
- (33) GARCÍA ALVAREZ, AYUSO OREJANA: cit. 153.
RÍOS SIXTO: *Métodos de la Estadística*, Madrid (1952).
- (34) BERTRAND: *Cálculo de Probabilidades*, 29, París (1888).
- (35) DAVIS NELSON: *Estadística*, Trad. por Olegario Fernández Baños, 69 a 102 Dossat Madrid.
- (36) ALCAYDE Y CARVAJAL: *Cálculo de Probabilidades*, 72 y ss. Dossat, Madrid (1942).
- (37) GALVEZ LAGUARTA: *Método de compensación...*, 35, Zaragoza (1940).
- (38) POLO: *Difusión esférica y cilíndrica*, *Anales R. S. E.*, 45 B (1949).
- (39) G. GALÁN: O. c. pág. 246.
- (40) SCOTT: *Diffusion through in interfase*, sacado de *Bulletin Analytique*, XIII, n.º 4 (1952).
- (41) CONSTANTIN: *Ann. de Phy*, 9) 3 101 (1915).