

REVISTA  
DE LA  
**ACADEMIA DE CIENCIAS**  
EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES  
DE  
ZARAGOZA

SERIE 2.<sup>a</sup>

TOMO XXVII

Núm. 4



1972

## INDICE DE MATERIAS

- V. CAMARENA. — *Optimización de trayectorias y el efecto de trampolín lunar* ... .. 367
- J. BERNAL NIEVAS, J. AZNÁREZ ALDUAN, J. R. CASTILLO SUÁREZ. — *Determinación potenciométrica automática de plata y cobre con ditionamida* ... .. 455
- F. GÓMEZ BELTRÁN y L. PUEYO. — *Acetatos, monocloro, dicloro, tricloroacetatos y halogenuros de estilbendiamina níquel (II)* 465
- J. M. FORNIÉS MARQUINA. — *Donnees cristallographiques et resultats preliminaires sur la structure cristalline du methyl-2 phenyl-5 s-triazolo [3, 4-b] thiadiazole-1, 3, 4* ... .. 479
- E. BERNABÉU, R. CORBALÁN and M. QUINTANILLA. — *A method for chopping in very short times the radiation from electrodeless discharge lamps* ... .. 483

# OPTIMIZACION DE TRAYECTORIAS Y EL EFECTO DE TRAMPOLIN LUNAR

POR

V. CAMARENA

Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos.  
Universidad de Zaragoza

## Abstract

This paper is concerned with the development of analytical and numerical methods for to study the optimal «spring board» effect of the Moon.

Starting from a low orbit around the Earth, and by using the passage near the Moon, the Theory of Optimal Processes is applied to minimize the sum of the velocity impulses necessary to acquire a given velocity, at a great distance of the Earth-Moon system.

The assumption of the sphere of influence of the Moon permits, in this case, to decompose the mission into three phases: Earth-Moon transfer, hyperbolic passage near the Moon, and transfer to acquire a given velocity at infinite. The optimization of each of these three phases are discussed.

Finally, it has been proved that the global optimum is the simple case of the nonimpulse «grazing» passage, and that it leads to save 151,25 m/s as maximum, as compared with the direct launch.

## Introducción

En los últimos años, se ha despertado un gran interés por el desarrollo y aplicación de la *Teoría de Control*, y en especial, por los problemas de control optimal. Las aplicaciones han invadido numerosas ramas de la Ciencia, entre las que, aparte las Matemáticas, figuran: la Estadística, la Mecánica, la Ingeniería electrónica, el Control de tráfico, Mecánica de vuelo, Agronomía, etc... Así mismo, en el campo de la Astronomía y Mecánica Celeste los problemas de optimización han adquirido gran importancia, sobre todo en los lanzamientos de vehículos espaciales, optimización de trayectorias, en viajes interplanetarios, transferencia y cita espacial, etc.

Mientras los criterios de optimización o la función de costo varían de una disciplina a otra, las hipótesis fundamentales, y la formulación matemática de los problemas, son prácticamente las mismas en todos los campos. Sin embargo, se puede establecer una separación esencial entre los diferentes tipos de problemas de control de acuerdo con la distinta naturaleza de la información, estadística o determinista, acerca del estado del sistema. En nuestra memoria tan sólo abordaremos el problema de optimización de trayectorias de vehículos espaciales en el caso determinista.

La mayoría de los estudios realizados en este campo han sido de tipo numérico o semianalítico, debido a la no linealidad fuerte de la mayor parte de los problemas y a la urgencia de su resolución. No obstante, se han escrito trabajos completamente teóricos

que, más o menos, tienen relación con nuestro trabajo y cuyas citas bibliográficas figuran al final del texto.

Si queremos reducir nuestro propósito informativo, señalaremos que la resolución de estos problemas puede llevarse a cabo de formas muy diversas (Cálculo de variaciones (B-3), Principio del Máximo (B-20), Programa Dinámico (B-2), etc.), si bien el objeto que nos hemos propuesto, el Principio del Máximo de Pontryagin ha sido el más aplicado por nosotros. Tal es el comienzo de esta memoria en su Capítulo I, de carácter meramente expositivo, en el que, como hemos dicho, se recopilan los principales resultados de la *Teoría del Control Optimal* debidos a Pontryagin. Se formula el Principio del Máximo para sistemas autónomos, con duración fija o indiferente, se estudian los distintos casos de transferencia entre terminales puntuales fijas o pertenecientes a determinadas variedades (en cuyo caso se dan las condiciones de transversalidad) y se establece, por último, el Principio del Máximo para el caso de existencia de ligaduras en las variables de estado.

En el Capítulo II se ha desarrollado la Teoría de Perturbaciones, de forma parecida a la de Musen (B-19), atendiendo principalmente a escribir en la forma de Gauss las fórmulas de perturbación de los elementos orbitales, pero introduciendo un número superabundante de variables, lo que resulta conveniente para ulteriores desarrollos.

En el Capítulo III, con una descripción de los distintos tipos de motores, se deducen a partir del Principio del Máximo los principales resultados sobre la Optimización de trayectorias de cohetes, que en su mayoría fueron ya obtenidos por Lawden (B-8) aplicando el Cálculo de Variaciones (Problema de Mayer). Al mismo tiempo se ha dado una definición de trayectorias impulsivas, señalando las principales propiedades de las mismas.

En el Capítulo IV se deducen las integrales del movimiento optimal en forma sistemática y original basándonos en un teorema previo. También se introduce el concepto de orientación indiferente a partir de la integral de Breakwell.

En el Capítulo V deducimos la expresión general del vector «primer» de Lawden en forma distinta, es decir, sin realizar la integración del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que verifican las componentes del «primer» y apoyándonos en el Principio del Máximo para el caso de ligaduras en las variables de estado. Se estudian al mismo tiempo todas las formas del «primer» para los distintos tipos de órbitas keplerianas, insistiendo en su forma para órbitas hiperbólicas, llegando así a una expresión muy simple no conocida hasta la fecha.

En el Capítulo VI se analizan diversas maniobras de transferencia orbital, deduciendo aquellas ya conocidas (Hohmann, bipolarabólicas, etc.), como casos particulares.

En el Capítulo VII se expone el concepto de *superficie límite* y de *esfera de influencia*, que servirá de base a una hipótesis simplificadora para abordar el estudio del *Trampolín Lunar*.

En el Capítulo VIII se dan algunas propiedades balísticas de las órbitas keplerianas, deduciéndose las ecuaciones de las hodógrafas para distintos problemas de lanzamiento, que nos simplificarán el análisis del problema del Trampolín Lunar.

En el Capítulo IX se estudian las trayectorias espaciales optimales que a partir de una órbita base, en torno a la Tierra, transfieren al vehículo hasta un punto infinitamente alejado del sistema Tierra-Luna con velocidad residual dada, aprovechando a su paso por las proximidades de la Luna, el campo gravitatorio de la misma.

En la primera parte del capítulo se analizan las distintas fases de que consta el problema, obteniéndose todas las posibles transferencias optimales, según el tipo de velocidad de entrada en la esfera de influencia lunar. En la segunda parte, se hace el estudio global del Efecto de Trampolín Lunar, a partir de un método asintótico de conexión de las trayectorias y del vector «primer» en los puntos límites o de contorno.

## I. Principio del máximo de Pontryagin

### 1 Controles admisibles

Consideramos el comportamiento de un sistema dinámico que en cada instante está caracterizado por el  $n$ -vector estado  $q = (q^1, q^2, \dots, q^n)$  perteneciente a un espacio de estados  $\mathcal{E} \subset E^n$ .

Se supone que el movimiento del sistema está controlado, es decir que el sistema va dotado de ciertos *mandos de control* que afectan a las posiciones de las cuales depende el movimiento. Las distintas posiciones de los *mandos de control* vienen caracterizadas por los puntos  $u$  de un cierto *dominio de control*  $U$ , subconjunto de un cierto espacio euclídeo  $r$ -dimensional  $E^r$ . La especificación de cada punto  $u = (u^1, u^2, \dots, u^r) \in U$  es equivalente a dar un sistema de parámetros numéricos  $u^1, u^2, \dots, u^r$ . El caso en que  $U$  es un compacto de  $E^r$ , es el más importante en la práctica.

El significado físico de la acotación del dominio de control  $U$  es claro: los controles  $u$  pueden ser, en determinados sistemas dinámicos, la masa del combustible consumida por un cohete, la temperatura, el voltaje, etc., y en general no pueden tomar valores arbitrariamente elevados.

*Definición 1.1.* — Llamaremos función de control a cualquier  $r$ -vector  $u = u(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t))$ , cuyos parámetros de control  $u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t)$  toman valores pertenecientes a  $U$  en un cierto intervalo  $[t_0, t_f]$ .

Según la naturaleza del problema suelen imponerse a los controles ciertas condiciones que los hagan admisibles.

En este apartado consideraremos como control admisible toda función  $u = u(t) \in U \subset E^r$  continua a trozos. Es decir; un control admisible es una  $r$ -vectorial función  $u = u(t)$  continua  $\forall t \in [t_0, t_f]$  salvo en un número finito de instantes  $\tau_i \in (t_0, t_f)$  donde  $u(t)$  puede poseer discontinuidades de primeras especie, existiendo por tanto y siendo finitos

$$u(\tau_i + 0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} u(t) \quad ; \quad u(\tau_i - 0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} u(t) \quad (1.1)$$

En particular para todo punto de discontinuidad  $\tau$  asignaremos a  $u(\tau)$  el valor  $u(\tau - 0)$ .

Físicamente, el considerar como controles admisibles a las funciones  $u = u(t)$  continuas a trozos equivale a suponerlas carentes de inercia; ya que en un instante de discontinuidad  $u = u(t)$  puede saltar de un punto de  $U$  a otro.

### 2. Formulación del problema

Supongamos que la ley de evolución del sistema dinámico (junto con la ley de influencia de los mandos de control sobre el movimiento) viene dada por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dq^i}{dt} = f^i(q^1, q^2, \dots, q^n; u^1, u^2, \dots, u^r) = f^i(q, u) \quad (2.1)$$

que en notación vectorial se puede poner en la forma

$$\frac{dq}{dt} = f(q, u) \quad (2.2)$$

donde  $f(q, u)$  es una  $n$ -vectorial función de componentes  $f^1(q, u), f^2(q, u), \dots, f^n(q, u)$ . Las funciones  $f^i(q, u), \partial f^i / \partial q^j, i, j = 1, 2, \dots, n$ . Se suponen definidas y continuas en el conjunto  $\mathcal{E} \times U \subset E^n \times E^r$ .

Notemos que el sistema (2-1) es autónomo, es decir, que las funciones  $f^i(q, u)$  no dependen explícitamente de  $t$ .

Dado un cierto control admisible  $u(t)$  con puntos de discontinuidad de primera especie  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$  tales que

$$t_0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_p < t_f$$

y dadas unas condiciones iniciales  $(q_0, t_0)$ , de acuerdo con el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales: existe una solución de (2-1) definida en  $[t_0, \tau_1]$ . Si tomamos como condiciones iniciales  $(q_1, \tau_1)$  tal que  $q_1 = q(\tau_1)$  entonces tenemos una nueva solución de (2-1) definida en  $[\tau_1, \tau_2]$  ... y así sucesivamente. Con esto al control admisible  $u = u(t)$  le hemos asociado una trayectoria  $q = q(t)$ , continua y diferenciable a trozos, con condiciones iniciales  $(q_0, t_0)$ .

Sea ahora  $f^0(q, u)$  una función, definida y continua, junto con sus derivadas parciales  $\partial f^0 / \partial q^i, (i = 1, 2, \dots, n)$  en el conjunto  $\mathcal{E} \times U$ . Llamaremos *función de costo* a todo funcional  $S$  de la forma

$$S = \int_{t_0}^{t_f} f^0(q(t), u(t)) dt \quad (2.3)$$

Con todo ello se puede formular el siguiente *problema de control óptimo*: Dados dos puntos  $q_0, q_f \in E^n$  se trata de encontrar, entre todos los controles  $u = u(t)$  admisibles, aquel o aquellos que nos proporcionen una trayectoria  $q(t)$  que pase por  $q_0, q_f$  en los instantes  $t_0$  y  $t_f$  y hagan que la función de costo  $S$  tome un valor mínimo.

Notemos que, fijados  $q_0$  y  $q_f$  los límites  $t_0$  y  $t_f$  de la integral (2-3) dependen de la elección del control  $u(t)$ . Estos límites vienen dados por  $q(t_0) = q_0, q(t_f) = q_f$  como resultado de integrar el sistema (2-1). Hablaremos en este caso de un problema de transferencia del estado  $q(t)$  con extremos fijos  $q_0$  y  $q_f$ .

Al control  $u^*(t)$  y a la trayectoria  $q^*(t)$  que son soluciones del problema propuesto, se les llama control y trayectoria óptimal respectivamente.

Para formular las condiciones necesarias de optimización, es conveniente dar una nueva formulación al problema enunciado anteriormente. Para ello, al conjunto de variables de estado  $q^1, q^2, \dots, q^n$  añadiremos una nueva variable  $q^0$ , tal que

$$\frac{d q^0}{d t} = f^0(q, u) \quad (2.4)$$

donde  $f^0(q, u)$  es la función definida en (2.3). En otras palabras, consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d q^i}{d t} = f^i(q, u) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

donde las  $f^i(q, u)$  no dependen de  $q^0$ , e introduzcamos el nuevo vector estado

$$\tilde{q} = (q^0, q^1, \dots, q^n) = (q^0, q)$$

perteneciente al  $n + 1$  dimensional espacio,  $\tilde{\mathcal{E}} \subset E^{n+1}$ , de estados con lo cual el sistema (2-5) se puede poner en la forma

$$\frac{d \tilde{q}}{d t} = \tilde{f}(q, u) \quad (2.6)$$

donde  $\tilde{f}(q, u)$ , es una  $(n + 1)$ -vectorial función de componentes  $f^i(q, u)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Sea  $u(t)$  un control admisible que nos lleva de  $q_0$  a  $q_f$ , y  $q = q(t)$  la correspondiente solución de (2.2) con la condición inicial  $q(t_0) = q_0$ . Si denotamos por  $\tilde{q}_0$  el punto  $(0, q_0) \in \tilde{\mathcal{E}}$ , es claro que la solución de la ecuación (2.6) correspondiente al control  $u(t)$ , con la condición inicial  $q(t_0) = q_0$ , está definida en el intervalo  $[t_0, t_f]$  y tiene la forma

$$q^0 = \int_{t_0}^t f^0(q(t), u(t)) dt \quad , \quad q = q(t).$$

En particular, cuando  $t = t_f$  tenemos

$$q^0 = \int_{t_0}^{t_f} f^0(q(t), u(t)) dt \quad , \quad q_f = q(t_f).$$

Así, la solución  $q(t)$  de (2.6) con la condición inicial  $\tilde{q}(t_0) = \tilde{q}_0$ , pasa por el punto  $\tilde{q} = (S, q_f)$  para  $t = t_f$ . En otras palabras, si en el espacio  $\tilde{\mathcal{E}}$  trazamos la recta  $\pi$  que pasa por el punto  $\tilde{q} = (0, q_f)$  y es paralela al eje  $q^0$ , podemos afirmar que para  $t = t_f$  la solución  $q(t)$  pasa por un punto de  $\pi$  y tiene como coordenada  $q^0 = S$ . Recíprocamente, si  $u(t)$  es un control admisible, tal que, la correspondiente solución  $\tilde{q}(t)$  de (2.6) con las condiciones iniciales  $\tilde{q}(t_0) = \tilde{q}_0 = (0, q_0)$  pasa en algún instante  $t = t_f$  por el punto  $\tilde{q}_f \in \pi$  de coordenada  $q^0 = S$ , entonces el control  $u = u(t)$  nos hace pasar de  $q_0$  a  $q_f$ , mientras que el funcional (2.3) toma un valor  $S$ .

Estas consideraciones nos permiten formular el problema de optimización anterior en la siguiente fórmula equivalente.

### Problema de Optimización

Dados en un  $(n + 1)$ -dimensional espacio de estados  $\tilde{\mathcal{E}}$  el punto  $\tilde{q}_0 = (0, q_0)$  y la recta  $\pi$  que pasa por el punto  $(0, q_f)$ , y es paralela al  $q^0$ -eje, se trata de encontrar aquellos controles admisibles  $u = u(t)$  cuya correspondiente solución, de (2.6),  $q(t)$ , con la condición inicial  $\tilde{q}(t_0) = \tilde{q}_0$ , corte a la recta  $\pi$ , en un punto de coordenadas  $q^0$  mínima. (Figura 2.1).

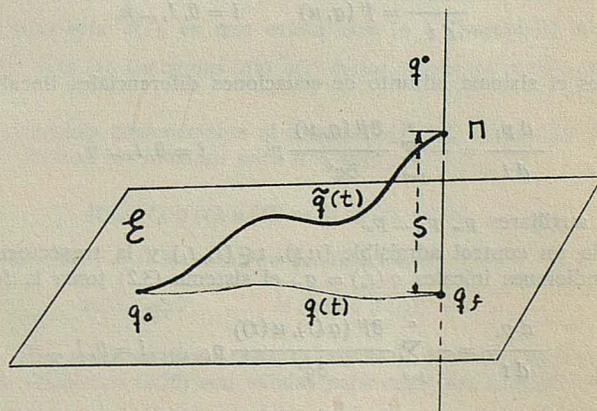


FIG. 2.1

El control  $u(t)$  y la trayectoria  $\tilde{q}(t)$  que cumplen las condiciones del enunciado anterior las denominaremos control óptimo y trayectoria óptima y los denotaremos por  $u^*(t)$  y  $q^*(t)$ .

### Consecuencias de la definición

1. Por la naturaleza autónoma del sistema dinámico de control (2.1) se deduce que las propiedades de los controles no cambian con una traslación a lo largo del  $t$ -eje (Fig. 2.2).

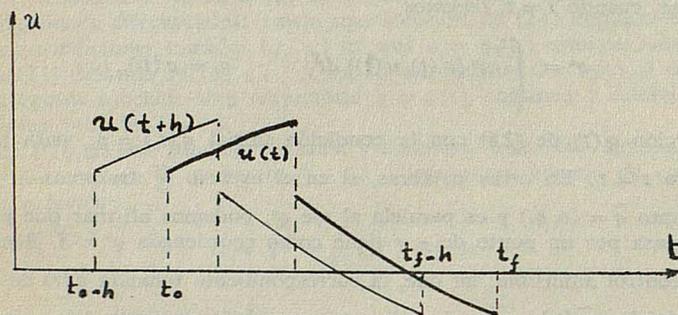


FIG. 2.2

Es decir, si el control  $u(t)$   $t \in [t_0, t_f]$  transfiere el sistema desde  $q_0$  a  $q_f$ , lo mismo le ocurre al control  $u(t+h)$  tal que  $t \in [t_0-h, t_f-h]$  con  $h = \Delta t$ , de ahí que tanto  $u(t)$  como  $u(t+h)$  dan el mismo valor a  $S$ .

2. Todo trozo de una trayectoria óptima  $q^*(t)$  es ella misma óptima (y análogamente para los controles  $u^*(t)$ ).

### 3. El principio del máximo para sistemas autónomos y duración indiferente

Para enunciar el teorema fundamental que resuelve el problema de optimización de trayectorias, consideremos previamente el sistema de ecuaciones diferenciales de estado

$$\frac{dq^i}{dt} = f^i(q, u) \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

al que agregamos el sistema adjunto de ecuaciones diferenciales lineales

$$\frac{dp_i}{dt} = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f^j(q, u)}{\partial q^i} p_j \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.2)$$

en las variables auxiliares  $p_0, p_1, \dots, p_n$ .

Entonces dado un control admisible  $(u, t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  y la trayectoria correspondiente  $q(t)$  con las condiciones iniciales  $q(t_0) = q_0$ , el sistema (3.2) toma la forma

$$\frac{dp_i}{dt} = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f^j(q(t), u(t))}{\partial q^i} p_j \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Este sistema es lineal y homogéneo; de ahí que, dadas unas condiciones finales para

los  $p_i$ , el (3.3) admitirá una solución única  $\tilde{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$  definida en  $[t_0, t_f]$  al que asignaremos las condiciones finales

$$p_i(t_f) = -c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

donde las  $c_i$  son constantes que prefijaremos según los casos.

Como vimos para la solución  $\tilde{q}(t)$  del sistema (3.1), la solución del sistema (3.3) está compuesta de funciones continuas  $p(t_i)$ , con derivadas continuas respecto a  $t$ , salvo en un número finito de puntos donde el control puede ser discontinuo.

Combinando (3.1) y (3.2) podemos definir la función escalar

$$H(p, q, u) = \sum_{i=0}^n p_i f^i(q, u) = \tilde{p} \cdot \dot{\tilde{q}} \quad (3.5)$$

llamada hamiltoniana variacional del problema debido a que los sistemas (3.1) y (3.2) se pueden poner en la forma hamiltoniana

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.6)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.7)$$

donde los  $p_i$  juegan el papel de momentos canónicos conjugados de las  $q^i$  respecto del hamiltoniano  $H$ .

Para cada  $\tilde{p}$  y  $\tilde{q}$ ,  $H$  es una función de  $u \in U$ ; entonces si denotamos por  $M(p, q)$  el máximo absoluto de  $H$

$$M(\tilde{p}, \tilde{q}) = \sup_{u \in U} H(\tilde{p}, \tilde{q}, u). \quad (3.8)$$

éste puede ser accesible para algún  $u \in U$ , pudiendo enunciarse el siguiente *principio del máximo de Pontryagin* que da las condiciones necesarias de optimalidad de un sistema de control.

*Teorema 1.* — Sea  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , un control admisible tal que la trayectoria correspondiente  $\tilde{q}(t)$ , partiendo en el instante  $t = t_0$  del punto  $\tilde{q}_0 \in \tilde{C}$ , pase en el instante  $t = t_f$  por un punto de la recta  $\pi$ . Entonces una condición necesaria para la optimalidad del control  $u(t)$  y la trayectoria  $\tilde{q}(t)$ , es que exista una  $(n+1)$ -vectorial función continua  $\tilde{p}(t)$ , solución de (3.3) para las funciones  $u(t)$   $\tilde{q}(t)$  dadas, y que se verifiquen las siguientes condiciones:

(1) Dado un  $t$  cualquiera perteneciente al intervalo  $[t_0, t_f]$ , la función  $H(\tilde{p}(t), q(t), u)$  de la variable  $u \in U$  alcanza un máximo para  $u = u(t)$

$$H(\tilde{p}(t), q(t), u(t)) = M(\tilde{p}(t), q(t)) \quad (3.9)$$

(2) En el instante final  $t = t_f$  se cumplen las relaciones

$$p_0(t_f) \leq 0, \quad M(\tilde{p}(t_f), q(t_f)) = 0 \quad (3.10)$$

Además si  $p(t)$ ,  $\tilde{q}(t)$ ,  $u(t)$  verifican (3.6), (3.7) y (3.9) entonces  $\tilde{p}_0(t)$  y  $M(p(t), q(t))$  son constantes y las relaciones (3.10) son válidas para cualquier instante  $t \in [t_0, t_f]$ . (\*)

(\*) La demostración de este teorema puede verse en (B-20), capítulo 2.

En resumen, admitida la existencia de la trayectoria óptima que une  $q_0$  con  $q_f$  en un tiempo  $t_f - t_0$  no fijado (lo que se conoce con el nombre de duración indiferente) la aplicación del principio del máximo consiste en lo siguiente:

1.º Se determina, por la condición de máximo de  $H$  en  $u$ , una función  $u = w(\tilde{p}, q)$  que llevamos al sistema (3.6), (3.7) resultando

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial M(\tilde{p}, q)}{\partial p_i} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.11)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial M(\tilde{p}, q)}{\partial q^i} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.12)$$

2.º Se resuelve el sistema anterior con las condiciones de contorno  $q_0 = q(t_0)$  y  $\tilde{p}_f = \tilde{p}(t_f) = -c = -(c_0, c_1, \dots, c_n)$ . Con lo que obtenemos las trayectorias óptimas.

3.º A partir de  $u = w(p, q)$  se determinan los controles óptimos.

### Problema de control óptimo con extremos móviles

Dadas dos variedades lisas  $\theta_0, \theta_f$  en  $E^n$ , de dimensiones  $d_0, d_f < n$ .

Encontrar los controles admisibles  $u(t)$ , que transfieren el estado  $q$  desde la posición  $q_0 \in \theta_0$  a alguna posición  $q_f \in \theta_f$  haciendo que el funcional  $S$  definido en (2.3) tome un valor mínimo (Fig. 4.1).

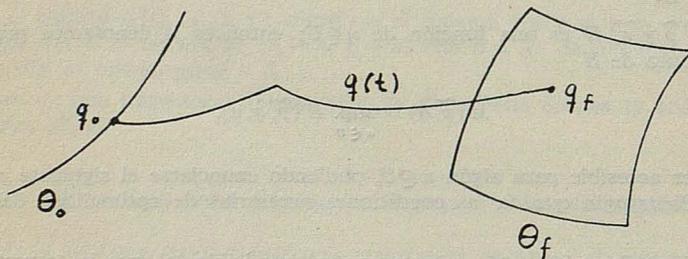


FIG. 3.1

Es claro que, si los puntos  $q_0, q_f$  son conocidos, obtenemos el problema con extremos fijos. Por tanto un control  $u(t)$ , óptimo en el sentido del problema con extremos libres, es también óptimo en el caso de puntos  $q_0, q_f$  considerados como fijos. Con lo que el Teorema-1 es válido para este caso aunque se deben precisar ciertas relaciones de transversalidad en los extremos móviles  $q_0, q_f$ .

### Condiciones de transversalidad

Sean  $q_0 \in \theta_0, q_f \in \theta_f$  dos puntos dados, y  $T_0, T_f$  los planos tangentes a  $\theta_0, \theta_f$  en dichos puntos, sean  $u(t), q(t), t \in [t_0, t_f]$  los vectores solución del problema con extremos fijos y  $\tilde{p}(t)$  el vector auxiliar cuya existencia se asegura en el Teorema 1.

Diremos que el vector  $\tilde{p}(t)$  verifica las condiciones de transversalidad en los extremos de la trayectoria  $q(t)$ , si:  $\tilde{p}(t_0)$  y  $\tilde{p}(t_f)$  son ortogonales a  $T_0$  y  $T_f$  respectivamente. Es decir, para todo vector  $\eta = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n) \cap \eta \in T_0$  (ó  $T_f$ ) se tiene

$$p(t_0) \cdot \eta = 0 \quad p(t_f) \cdot \eta = 0 \quad (3.13)$$

Con todo lo cual ya se puede enunciar el siguiente

*Teorema 2.* — Sea  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , un control admisible que transfiere el sistema de  $q_0 \in \theta_0$  a  $q_f \in \theta_f$ , siguiendo la trayectoria  $\tilde{q}(t)$ . Las condiciones necesarias para que  $u(t)$ ,  $q(t)$  nos den la solución del problema de control óptimo con extremos libres, son:

(1) Que exista una función vectorial no nula  $\tilde{p}(t)$ , que cumpla las condiciones indicadas en el Teorema 1.

(2) Que  $p(t)$  verifique las condiciones de transversalidad en ambos extremos de la trayectoria  $q(t)$  (\*).

#### 4. Principio del máximo para sistemas autónomos y duración fija

Supongamos el mismo problema de control optimal formulado en (2), con la salvedad de que la duración de transferencia ( $t_f - t_0$ ), entre los puntos terminales  $q_0$  y  $q_f$  (fijos o pertenecientes a sendas variedades  $\theta_0$  y  $\theta_f$ ) es fija.

Con esta hipótesis suplementaria, las condiciones (3.9) y (3.10) del Teorema 1 pasan a ser las siguientes:

$$H(\tilde{p}(t), q(t), u(t)) = M(\tilde{p}(t), p(t)) \quad (4.1)$$

$$p_0(t_0) \leq 0 \quad , \quad M(p(t), q(t)) + p_{n+1}(t) = 0 \quad (4.2)$$

#### 5. Principio del máximo en el caso de ligaduras entre las variables de estado

Hasta ahora hemos impuesto condiciones al dominio de control  $U$ ; pero ninguna restricción se ha impuesto sobre los estados  $q$ , con lo que  $q \in \mathcal{E} \subset E^n$  puede llenar por entero el espacio  $\mathcal{E}$ . Por el contrario, en este apartado deseamos formular el problema de control óptimo para los casos en que haya de restringirse el conjunto de controles  $u(t) \in U$  de forma que los estados correspondientes  $q(t)$  pertenezcan a un determinado conjunto

$B \subseteq \mathcal{E} \subset E^n$ , o el caso más probable en que  $q(t) \in \overset{\circ}{B}$  (interior de  $B$ ) para  $t \in [t_0, \tau_0]$  y  $(\tau_0, t_f]$  en tanto que  $q(t) \in \partial B$  (borde de  $B$ ) para  $t \in [\tau_0, \tau_1]$ . Los puntos  $q(\tau_0)$ ,  $q(\tau_1)$  reciben el nombre de puntos de empalme.

Notemos que si  $q(t) \in \overset{\circ}{B}$  el principio del máximo es equivalente al dado en el apartado 3. Por consiguiente vamos a abordar el caso en que  $q(t) \in \partial B \quad \forall t \in [\tau_0, \tau_1]$ , comenzando con la siguiente

*Definición 5.1.* — (Dominio de control con estructura regular).

Consideremos el dominio de control  $U$  como un subconjunto cualquier de  $E^r$  dotado de una estructura regular, en el entorno de un punto frontera  $u_j \in \partial U$  en el sentido siguiente:

Para cada  $u_j \in \partial U$ , existen  $s \geq 1$  funciones escalares de clase  $C^1$

$$\psi_j(u) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (5.1)$$

que cumplen las condiciones

$$\psi_j(u) \leq 0 \quad \forall u \in D(u_j) \text{ [entorno de } u_j] \quad (5.2)$$

$$\psi_j(u_j) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, s$$

(\*) La demostración puede verse en (R-1), capítulo 2.

y los

$$\text{grad } \psi_j(u_j) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (5.3)$$

son vectores linealmente independientes.

Por lo demás definiremos la clase de los controles admisibles  $u(t)$  en la misma forma que en el caso sin ligaduras, con la salvedad de que ahora  $u(t) \in U$  (dotado de estructura regular).

### Formulación del problema

Sea  $B$  un dominio cerrado, subconjunto de un espacio  $n$ -dimensional  $\mathcal{E}$ , cuyo borde liso  $\partial B$  viene definido por la igualdad

$$g(q) = 0$$

siendo  $g$  una función escalar de clase  $C^2$  que satisface la condición

$$\text{grad } g(q) \neq 0 \quad \forall q \in \partial B$$

Entonces todos los puntos del dominio  $B$  satisfacen la desigualdad

$$g(q) \geq 0 \quad , \quad q = (q^1, q^2, \dots, q^n)$$

Denotando por  $G$  el conjunto cerrado  $(n+1)$ -dimensional dado por el producto cartesiano de  $B$  por el  $q^0$  eje, cuyo borde liso  $\partial G$  viene dado por la igualdad

$$g(\tilde{q}) = g(q^0, q) = g(q) = 0$$

siendo

$$\text{grad } g(\tilde{q}) = (0, \text{grad } g(q)) \neq 0 \quad \forall q \in \partial G$$

Dicho conjunto estará definido por la desigualdad

$$g(\tilde{q}) \leq 0$$

Consideremos, en el espacio  $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \times \{q^0\}$ , el sistema evolutivo descrito por el vector estado  $\tilde{q} = (q^0, q)$  que verifica el sistema

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \tilde{f}(q, u), \quad u \in U \quad (\text{de estructura regular}) \quad (5.4)$$

para cada  $t \in [t_0, t_f]$ .

Se trata de dar condiciones necesarias para obtener la solución del siguiente problema:

### Problema de control óptimo

Hallar, entre los controles admisibles  $u(t) \in U$  aquel o aquellos que nos den trayectorias  $\tilde{q}(t) \in G$  con las condiciones iniciales  $\tilde{q}(t_0) = q_0$  y que en  $t = t_f$ ,  $\tilde{q}(t_f)$  pertenezca a la recta  $\pi$  que pasa por el punto  $(0, q_f)$  y es paralela al eje  $q^0$ . De tal forma que  $q^0(t_f)$  tome un valor lo menor posible.

A los controles y trayectorias que cumplan estas condiciones se les denomina óptimas y se les denota por  $u^*(t)$  y  $q^*(t)$ .

### Trayectorias óptimas pertenecientes al borde del dominio

El teorema 3 que vamos a formular en esta sección, da el sistema completo de condiciones necesarias que debe satisfacer toda trayectoria óptima regular que pertenece por entero al borde liso  $g(q) = 0$  del dominio  $G$ .

#### Definiciones básicas

Introduzcamos las notaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{q}, u) &= \sum_{j=0}^n \frac{\partial g(\tilde{q})}{\partial q_j} f^j(q, u) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(\tilde{q})}{\partial q^j} f^j(q, u) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{q}} &= \left( 0, \frac{\partial \Phi}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial q^n} \right) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u^r} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Evidentemente la condición necesaria y suficiente para que la trayectoria  $q(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , solución de (5.4), correspondiente al control  $u(t)$ , pertenezca por entero al borde  $g(q) = 0$  de  $G$  es que:

$$g(\tilde{q}(t)) = 0, \quad \Phi(\tilde{q}(t), u(t)) = 0 \quad t \in [t_0, t_f] \quad (5.6)$$

*Definición 5.2.* — Diremos que un punto  $\tilde{q} \in \tilde{G}$  es regular, respecto a  $u_i \in U$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

- (1)  $\Phi(\tilde{q}, u_i) = 0$ .
- (2)  $\partial \Phi(\tilde{q}, u_i) / \partial u \neq 0$ .
- (3) Si  $u_i \in U$  y  $\psi_j(u)$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  son las funciones (5.1) para el punto  $u_i$ , entonces los vectores

$$\frac{\partial \Phi(\tilde{q}, u_i)}{\partial u}, \quad \frac{\partial \psi_j(u_i)}{\partial u} \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (5.7)$$

son linealmente independientes.

Debe notarse que la regularidad del punto  $\tilde{q}$ , respecto a  $u_i$ , no depende de la elección de las funciones  $\psi_j$  para el punto  $u_i$ .

Denotemos por  $W(\tilde{q})$  el conjunto de todos los puntos  $u \in U$  respecto de los cuales  $q$  es regular. El conjunto  $W(\tilde{q}) \subset U$  puede ser vacío.

*Definición 5.3.* — (Trayectoria regular).

Dado un control  $u(t)$ , diremos que la trayectoria correspondiente  $\tilde{q}(t) \subseteq \partial G$  en  $t \in [t_0, t_f]$  es regular si:

- (1) Para todo  $t$ , donde  $u(t)$  es continua, se tiene que  $u(t) \in W(\tilde{q}(t))$ .
- (2) Para todo instante  $t$  de discontinuidad de  $u(t)$  se verifica

$$u(t-0) \in W(\tilde{q}(t)), \quad u(t+0) \in W(\tilde{q}(t)).$$

Poniendo

$$m(\tilde{p}, q) = \sup_{u \in W(q)} H(\tilde{p}, q, u) \quad (5.8)$$

donde  $H$  viene definido por la ecuación

$$H(\tilde{p}, q, u) = \sum_{j=0}^n p_j f^j(q, u) = \tilde{p} \cdot \tilde{f}(q, u) \quad (5.9)$$

la (5.8) define  $m(p, q)$  para puntos  $\tilde{q} \in \partial G$  supuesto que  $W(\tilde{q}) \neq \emptyset$ .

Si  $\tilde{q}$  es un punto regular del borde  $G$ , respecto de un  $u \in U$ , y el vector  $\tilde{p}$  satisface la ecuación

$$H(\tilde{p}, q, u) = m(\tilde{p}, q)$$

entonces existen, por la regla de los multiplicadores de Lagrange ( $s + 1$ ) números reales  $\rho$  y  $v_1, v_2, \dots, v_s$ , tales que

$$\frac{\partial H(\tilde{p}, q, u)}{\partial u} = \rho \frac{\partial \Phi(\tilde{q}, u)}{\partial u} + \sum_{j=1}^s v_j \frac{\partial \psi_j(u)}{\partial u} \quad (5.10)$$

donde las  $\psi_j(u)$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  son las funciones (5.1) para el punto  $u$ .

Utilizando las notaciones

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \left( \frac{\partial H}{\partial u^1}, \frac{\partial H}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial u^n} \right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{p}} = \left( \frac{\partial H}{\partial p_0}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}} = \left( 0, \frac{\partial H}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q^n} \right)$$

podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 3.** — Sea  $\tilde{q}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  una trayectoria regular óptima, solución de (5.4) para el control óptimo  $u^*(t)$ , y que pertenece por completo a  $\partial G$ . Entonces, existe una  $(n + 1)$ -vectorial función continua  $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ , y una función escalar  $\rho(t)$ , lisa y continua a trozos, tal que: para todo  $t \in [t_0, t_f]$ , se cumplen las ecuaciones

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}} = \tilde{f}(q, u) \quad (5.11)$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \tilde{q}} + \rho(t) \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{q}} \quad (5.12)$$

$$H(\tilde{p}(t), q(t), u(t)) = m(\tilde{p}(t), q(t)) \quad (5.13)$$

donde  $\rho(t)$  viene definida por la condición (5.13) de máximo de  $H$  como un multiplicador del vector  $\partial \Phi / \partial u$  en (5.10), siendo además

(a)  $p_o(t) = \text{cte.} \leq 0$ .

(b)  $\tilde{p}(t) \neq 0$  y toca a  $\partial G$  en el punto  $q(t_o)$ .

(c) el vector  $(d_\rho(t)/dt)$ . grad.  $g(\tilde{q}(t))$  está dirigido hacia dentro de  $G$  o se anula (es decir  $d_\rho(t)/dt \leq 0$ ) en todo punto en que  $\rho(t)$  es derivable.

### Algunas generalizaciones

1.<sup>a</sup> Dadas las  $m$  funciones  $\Phi_i(\tilde{q}, u)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  independientes de la coordenada  $q^o$ , se define un punto  $\tilde{q}$  regular, respecto a un  $u_o \in U$  que satisface el sistema,

$$\Phi_i(\tilde{q}, u) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

de la misma forma que en todo lo anterior, excepto que en el caso de existir  $m$  funciones  $\Phi_i(\tilde{q}, u_o) = 0$  tenemos que exigir ahora la independencia de los vectores

$$\frac{\partial \Phi_i(\tilde{q}, u)}{\partial u} \quad \frac{\partial \psi_j(u_o)}{\partial u} \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, s$$

en lugar de la independencia de los vectores (5.7).

Con ello podemos generalizar el Teorema 3 y dar el:

*Teorema 4.* — Sea  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_o, t_f]$ , un control óptimo, y  $\tilde{q}(t)$  la trayectoria regular óptima correspondiente, solución de (5.4) y supongamos que  $u^*(t)$  satisface en  $[t_o, t_f]$  el sistema de ecuaciones

$$\Phi_i(\tilde{q}(t), u(t)) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.14)$$

Entonces existe una  $(n + 1)$ -vectorsial función continua  $\tilde{p}_o(t) = (p(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ ,  $t \in [t_o, t_f]$ , tal que las funciones  $u(t)$ ,  $q(t)$ ,  $p(t)$  verifican en dicho intervalo el sistema de ecuaciones

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}} = \tilde{f}(q, u) \quad (5.15)$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}} + \sum_{i=1}^m \rho_i \frac{\partial \Phi_i(q, u)}{\partial \tilde{q}} \quad (5.16)$$

$$H(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), u(t)) = m(\tilde{p}(t), q(t)) = 0 \quad (5.17)$$

donde las  $m$  funciones escalares, lisas por trozos,  $\rho_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $t \in [t_o, t_f]$ , vienen definidas por la condición de máximo, como multiplicadores de Lagrange en la fórmula

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \sum_{i=1}^m \rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} + \sum_{j=1}^s \nu_j \frac{\partial \psi_j}{\partial u}$$

además

$$p_o = \text{cte.} \leq 0$$

Notemos que la solución del problema de control óptimo, en el caso en que se verifican las desigualdades

$$\Phi_i(\tilde{q}, u) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

se reduce fácilmente al contexto del Teorema-4. Basta introducir unos controles  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  tales que  $v_i \geq 0$  y además

$$\Phi_i(\tilde{q}, u) + v_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

(2) El teorema-2 puede generalizarse al caso en que el dominio  $G$  viene dado, en las proximidades de su borde  $\partial G$ , por más de una desigualdad, es decir por

$$g_1(\tilde{q}) \leq 0, \quad g_2(\tilde{q}) \leq 0 \quad (5.18)$$

mientras que la trayectoria regular optimal  $\tilde{q}(t)$  pertenece a una variedad (n-2)-dimensional, definida por las ecuaciones

$$g_1(\tilde{q}) = 0, \quad g_2(\tilde{q}) = 0 \quad (5.19)$$

Naturalmente supondremos que las hipersuperficies  $g_1(q) = 0$ ,  $g_2(q) = 0$  son tales que  $\text{grad } g_i(\tilde{q}) \neq 0$  ( $i = 1, 2$ ) son vectores linealmente independientes.

### Condiciones de empalme o salto

Una trayectoria óptima que pertenece a un conjunto cerrado  $G$ ; puede pertenecer en parte al interior de  $G$  ( $\overset{\circ}{G}$ ) y en parte a su frontera  $\partial G$ . La condición de máximo dada por el Teorema-3 no es suficiente para trazar una trayectoria de este tipo (Fig. 5.1).

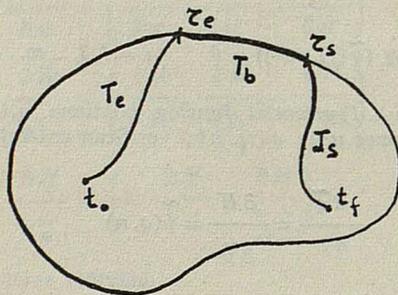


FIG. 5.1

El principio del máximo ha sido enunciado para todo trozo de trayectoria que pertenece al interior de  $G$  (teoremas-1,2) y para todo trozo de trayectoria que pertenece por entero a  $\partial G$  (teoremas-3,4). Nos falta pues por enunciar un teorema que nos defina las condiciones de empalme en los puntos  $\tau_e$  (de entrada) y  $\tau_s$  (de salida) entre trozos de trayectorias interiores y frontera (ver Fig. 5-1). Como veremos la conexión se traduce en que el vector  $p(t)$  es continuo en  $\tau_e$  y discontinuo en  $\tau_s$ , viniendo expresada la discontinuidad por la llamada condición de salto o empalme.

**Definición 5.4.** — Diremos que el punto  $\tilde{q}(\tau)$ , de la trayectoria  $\tilde{q}(t)$  perteneciente a  $\partial G$  es un punto de empalme, si  $t_0 < \tau < t_f$  y existe un  $\sigma > 0$  tal que  $\tilde{q}(t)$ , para  $\tau - \sigma < t < \tau$  o para  $\tau < t < \tau + \sigma$  pertenece al interior de  $G$ .

Nosotros supondremos que, a lo sumo, existe un número finito de puntos de empalme.

**Definición 5.5.** — Diremos que la trayectoria  $\tilde{q}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , que pertenece a un conjunto cerrado  $G$ , es regular si lo es todo trozo de  $q(t)$  que pertenece a  $\partial G$ .

Teorema 5. — (Sobre la condición de salto)

Sea  $\tilde{q}(t)$  una trayectoria regular óptima, solución de (5.4) para un  $u^*(t)$  óptimo, que pertenece al dominio cerrado  $G$ , y que contiene un número finito de puntos de empalme. Entonces para cada punto de empalme  $\tau$ , se cumple una de las dos condiciones independientes.

$$\tilde{p}(\tau + 0) = \tilde{p}(\tau - 0) - \gamma \text{ grad } g(\tilde{q}(\tau)) \quad (5.20)$$

$$\tilde{p}(\tau - 0) + \gamma \text{ grad } g(\tilde{q}(\tau)) = 0 \quad , \quad \gamma \neq 0 \quad (5.21)$$

Si un trozo de trayectoria, comprendido entre  $\tau_e$  y  $\tau_s$ , pertenece a la frontera  $\partial G$ , la (5.20) se reduce a la igualdad

$$\tilde{p}(\tau_e + 0) = \tilde{p}(\tau_e - 0) = \tilde{p}(\tau_e)$$

Mientras que en el punto  $\tau_s$ , en que abandonamos  $\partial G$ , se verifica

$$\tilde{p}(\tau_s + 0) = \tilde{p}(\tau_s) - \gamma \text{ grad } g(\tilde{q}(\tau_s)) \quad (5.22)$$

Lo que equivale a afirmar que  $p$  es continua a la entrada de  $\partial G$  y discontinuo a la salida.

## II. Teoría de perturbaciones

### 6. Aspectos generales

Consideremos un punto móvil  $M$ , cuya posición viene dada por el vector  $\vec{r}$ , sometido a una aceleración

$$\vec{\Gamma} = \vec{g}(\vec{r}) + \vec{\gamma} \quad (6.1)$$

donde  $\vec{g}(\vec{r}) = -\mu \vec{r} / r^3$  es una aceleración newtoniana central y  $\vec{\gamma}$  una aceleración perturbadora.

Sabemos que el «problema de 2 cuerpos», correspondiente al caso  $\vec{\gamma} = 0$ , es completamente integrable. Parece pues interesante considerar el «problema perturbado», no como un problema nuevo, definido a partir de la aceleración  $\vec{\Gamma}$ , sino más bien intentar resolverlo utilizando al máximo la solución base del «problema de 2 cuerpos». Esta es la idea directriz de la «teoría de perturbaciones». El éxito del método reside, la mayoría de las veces, en el hecho de que  $\vec{\gamma}$  es pequeña frente a  $\vec{g}$  y el movimiento de dos cuerpos resulta una buena aproximación del movimiento perturbado. Pero puede tener interés aplicar el mismo criterio a dos aceleraciones  $\vec{\gamma}$  y  $\vec{g}$  comparables, como ocurre en el estudio de sistemas propulsados en un campo gravitatorio central.

### 7. Órbita kepleriana oscultriz

Con respecto a la órbita o trayectoria real perturbada de un móvil  $M$ , la órbita «oscultriz»  $O$ , en un instante  $t$  es la órbita kepleriana que describiría  $M$  si, a partir de este instante, la aceleración perturbadora  $\vec{\gamma}$  se suprimiera (fig. 7.1). Esta órbita oscultriz queda completamente definida al dar la posición  $\vec{r}$  y la velocidad  $\vec{v}$  de  $M$  en el instante  $t$ .

Para describir el movimiento de  $M$  a partir del instante  $t$  y durante un cierto tiempo  $dt$ , suficientemente corto, es equivalente y a veces preferible, dar, en lugar de los vectores  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{v}(t)$ , otros seis elementos orbitales osculadores  $q_i(t)$ , ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), canónicos o no, siempre y cuando sean independientes, o en número superabundante si al mismo tiempo se dan las relaciones que los ligan.

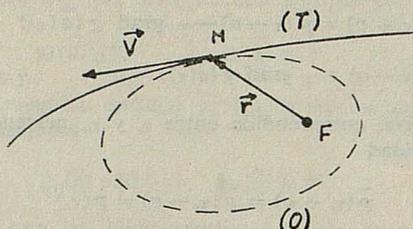


FIG. 7.1

En general supondremos que el conjunto de elementos osculadores  $q_i$  definen un vector  $\vec{q}$ , de componentes dichas  $q_i$ , expresable por medio de  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  y  $t$ . Esto es  $q = q(\vec{r}, \vec{v}, t)$ .

## 8. Fórmulas de perturbación

Nuestro objetivo es el de obtener las fórmulas de perturbación que expresen las derivadas  $\dot{q}_i = dq_i/dt$  de los elementos orbitales osculadores, en función de la aceleración perturbadora  $\vec{\gamma}$ .

Como hemos dicho antes los elementos orbitales osculadores, para un instante  $t$ , están bien definidos al dar la posición  $\vec{r}$  y la velocidad  $\vec{v}$

$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) \quad (8.1)$$

La variación de estos elementos en el intervalo de tiempo  $dt$  es:

$$d\vec{q} = \left( \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{r}} \vec{v} dt + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{v}} \vec{g} dt + \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} dt \right) + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{v}} \vec{\gamma} dt \quad (8.2)$$

Representando por  $d\vec{q}_k$  la variación kepleriana de dichos elementos, encerrada en el primer paréntesis, y por  $d\vec{q}_p$  la variación debida a la perturbación, podemos escribir

$$d\vec{q} = d\vec{q}_k + d\vec{q}_p = d\vec{q}_k + K d\vec{v}_p \quad (8.3)$$

donde  $K = \partial \vec{q} / \partial \vec{v}$  es un tensor  $6 \times 3$ .

Con ello vemos que la variación  $d\vec{q}$  de los elementos orbitales se descompone en su variación kepleriana  $d\vec{q}_k$  o variación que sufrirían si la órbita osculatriz estuviera fija, y en una variación  $d\vec{q}_p$  de perturbación donde la posición geométrica  $\vec{r}$  puede considerarse como fija y la velocidad  $\vec{v}$  sufre la variación

$$d\vec{v}_p = \vec{\gamma} dt \quad (8.4)$$

Cuando se eligen elementos orbitales constantes, por ejemplo  $\Omega, I, w, a, e, T$ , etc. u otros equivalentes, su variación kepleriana es nula, de ahí que interese elegir un conjunto de elementos orbitales que resulten ser constantes del movimiento, a fin de simplificar las expresiones de perturbación  $\dot{d}\vec{q}$ .

Con el fin de hacer aplicable la (8.3) en todos los casos de interés, haremos notar que puede ponerse en la siguiente forma equivalente:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \left( \frac{d\vec{q}}{dt} \right)_k + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{v}} \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{q}}_k + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{v}} \dot{\vec{v}} \quad (8.5)$$

Veamos las fórmulas de perturbación, para un conjunto de elementos orbitales constantes del movimiento kepleriano  $E, \vec{h}, \vec{e}, l_0$  definidos de la siguiente forma:

$E = v^2/2 - \mu/r$  integral de la energía o *energía de la órbita*.

$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{v}$  momento cinético o integral de las áreas.

$\vec{e} = (\vec{v} \wedge \vec{h})/\mu - \vec{r}/r$  vector periastro de módulo la excentricidad  $e$  y dirección la del periastro  $P$ .

$l_0 = -nT = l - nt$  anomalía de la época

donde con  $n, a, l$  y  $T$  denotamos las magnitudes: movimiento medio, semieje mayor, anomalía media y el instante de paso por el periastro, respectivamente.

Entre estos ocho parámetros existen las relaciones de dependencia

$$\vec{h} \cdot \vec{e} = 0 \quad , \quad e^2 - 2E h^2/\mu^2 = 1 \quad (8.6)$$

que reduce a seis el número de elementos orbitales independientes.

Si aplicamos la fórmula (8.5), al conjunto de elementos orbitales ( $E, \vec{h}, \vec{e}, l_0$ ) anteriormente definidos, obtenemos las siguientes fórmulas de perturbación:

$$\dot{E} = (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) \quad (8.7)$$

$$\dot{\vec{h}} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{v}} \quad (8.8)$$

$$\dot{\vec{e}} = \frac{1}{\mu} [\dot{\vec{v}} \wedge \vec{h} + \vec{v} \wedge (\dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{v}})] \quad (8.9)$$

$$\dot{l}_0 = \frac{1}{n a^2} (-2\dot{\vec{r}} + 3t\dot{\vec{v}}) \cdot \dot{\vec{v}} - \frac{b}{a p e} (\dot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{e}}) \quad (8.10)$$

Donde  $\vec{p}$  representa el vector parámetro, dado por la relación:

$$\vec{p} = p \frac{\vec{h} \wedge \vec{e}}{h e} \quad ; \quad p = |\vec{p}|$$

y  $b$  es el semieje menor de la órbita.

A partir de las fórmulas (8.7) y (8.9) pueden obtenerse las siguientes fórmulas de perturbación:

$$\dot{a} = 2(\dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}})/n^2 a \quad (8.11)$$

$$\dot{\vec{e}} = \frac{b}{n a^2} [\text{sen } f \dot{\gamma}_x + (\cos f + \cos u) \dot{\gamma}_y] \quad (8.12)$$

donde  $\gamma_r, \gamma_\theta$  representan las componentes radial y transversal de  $\vec{\gamma}$ , y con  $f$  y  $u$  denotamos las magnitudes: anomalía verdadera y anomalía excéntrica respectivamente.

### III. Trayectorias optimales de cohetes

#### 9. Sistemas de propulsión

En los problemas que se plantean aquí, un cohete es: un sistema físico de masa variable  $m$ , sometido a una aceleración gravitacional newtoniana  $\vec{g}$  y dotados de un sistema de propulsión de los tipos siguientes:

- Químico (propulsante líquido o sólido).
- Eléctrico.
- Iónico (por bombardeo de iones de Hg).
- Nuclear.

Como sabemos, cualquiera de estos sistemas proporciona una aceleración de empuje  $\vec{\gamma}$  en virtud del principio de acción y reacción.

Si designamos por  $q = -\dot{m}$  la variación de masa negativa, por  $W$  la velocidad de eyección de gases y por  $F$  la fuerza de empuje, la ecuación de propulsión es:

$$F = q W \quad (9.1)$$

o bien en forma vectorial

$$\vec{F} = \dot{m} \vec{\gamma} = m \vec{\gamma} \vec{D} \quad (9.2)$$

donde  $\vec{D}$  es el versor direccional de  $\vec{\gamma}$ . Asimismo la potencia del motor viene dada por

$$P = \frac{1}{2} (-\dot{m}) W^2 = \frac{F W}{2} = \frac{F^2}{2 q} \quad (9.3)$$

Se trata de definir un modelo matemático simple (modelo S) que describa todos los sistemas de propulsión, salvo pequeñas modificaciones de parámetros (modelos  $S_1$  y  $S_2$ ).

En el modelo (S) la elección del versor  $\vec{D}$  se considera completamente arbitraria eligiendo como parámetros de control  $F$  y  $q$ . Por otra parte se supone que  $P$ ,  $q$  y  $W$  están acotados de la siguiente forma

$$P \leq P_{max} \quad W_{min} \leq W \leq W_{max} \quad q \leq q_{max}$$

pudiendo ser  $W_{min} = 0$ .

Según esto, si en un sistema de ejes  $(q, F)$  representamos las curvas

$$F^2 = 2 P_{max} q \quad F = W_{max} q \quad F = W_{min} q \quad q = q_{max}$$

el dominio de control  $U$ , en cuyo interior deben elegirse los parámetros  $F$ ,  $q$ , vendrá especificado por la parte rayada de la (Fig. 9.1).

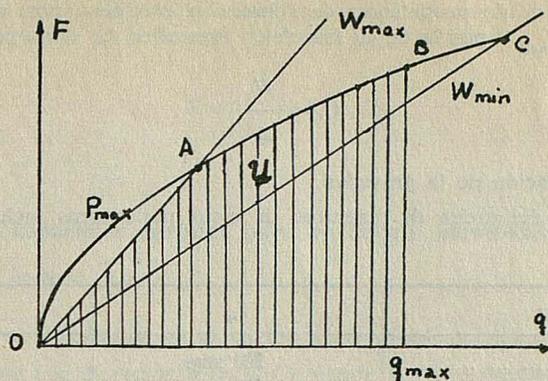


FIG. 9.1

El modelo (S) se adapta bien a los sistemas de propulsión eléctricos modificados, donde la potencia del motor está limitada por la potencia del generador eléctrico, o también, porque la velocidad de eyección  $W$ , modulable en una cierta medida, está acotada, como también ocurre en los cohetes donde el gasto de propulsante está limitado por el sistema de producción de iones (motores iónicos).

El modelo ( $S_2$ ) deriva del (S) haciendo

$$W_{max} \rightarrow \infty \quad q_{max} \rightarrow \infty \quad W_{min} \rightarrow 0$$

y corresponde al caso de un propulsor eléctrico ideal donde la única limitación estriba en que la potencia del motor se supone constante, con lo cual el dominio de control  $U$  es el recinto del plano limitado por la parábola  $F^2 = 2Pq$  y el eje  $q$  (Fig. 9.2).

Por último, el modelo ( $S_1$ ) que deriva del (S) haciendo  $W_{max} = W_{min} = W = cte.$

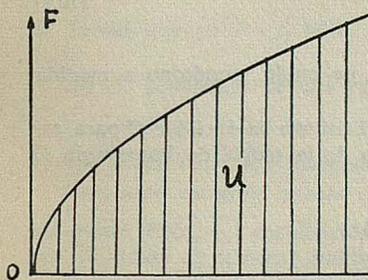


FIG. 9.2

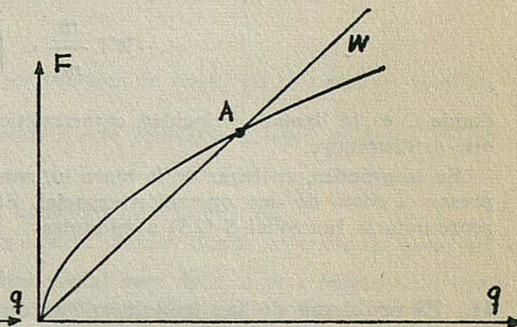


FIG. 9.3

En este modelo el punto A de funcionamiento debe pertenecer a la recta  $OA$  de ecuación  $F = qW$ , y a la parábola  $F^2 = 2Pq$ . (Fig. 9.3).

El modelo ( $S_1$ ) corresponde a la vez a propulsores eléctricos con velocidad de eyección no modulable, a los propulsores químicos clásicos, y a los cohetes nucleares.

Los diferentes tipos de propulsores de cohetes se clasifican por la magnitud de su impulsión máxima  $\gamma_{max}$  o por la de su impulsión específica  $I_{sp}$ , dada por la fórmula

$$I_{sp} = \frac{W}{g} \tag{9.4}$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad.

Para darnos idea del orden de magnitud de estos parámetros incluimos la siguiente tabla

Sistema	$I_{sp}$	
Pólvora ... ..	300 seg.	$\sim g$
Líquido ... ..	400 »	$ng \ (n > 1)$
Nuclear ... ..	800 »	—
Eléctrico ... ..	10.000 »	$10^{-4} g$

### 10. Concepto de velocidad característica

En los sistemas de propulsión ( $S_j$ ), la velocidad de eyección  $W$  es constante, por lo cual se puede integrar la ecuación diferencial

$$-W \frac{\dot{m}}{m} = \frac{F}{m} = \gamma$$

entre los instantes  $t_0$  y  $t$ , resultando

$$-W L \frac{m}{m_0} = \int_{t_0}^t \gamma dt = C \tag{10.1}$$

donde  $C$  es la llamada velocidad característica, que crece de modo monótono a medida que  $m$  disminuye.

En la práctica, en lugar de la masa  $m$ , resulta más fácil utilizar la variable  $C$  para expresar el costo de una operación espacial. En el contexto de la teoría de Pontryagin  $C$  representa la funcional  $S$  (2.3) a minimizar.

### 11. El problema de las transferencias óptimas

Dado un móvil  $M$  de masa  $m$  variable, sometido a un campo gravitacional  $\vec{g}(\vec{r})$  newtoniano y a una aceleración de empuje  $\vec{\gamma}$  debida al sistema de propulsión modelo ( $S_j$ ), se denomina en general transferencia (con cita) de este móvil, a todo cambio de la posición  $\vec{r}$  y velocidad  $\vec{v}$  entre dos instantes  $t_0, t_f$ . Cuando es  $\gamma = 0$ , la transferencia se dice de costo nulo y la trayectoria recorrida un arco balístico.

Una transferencia, es pues, el paso del estado  $q_0(m_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0)$  en  $t = t_0$  al estado  $q_f(m_f, \vec{r}_f, \vec{v}_f)$  en  $t = t_f$  (pudiendo quedar  $\vec{r}_f, \vec{v}_f$  parcialmente determinados).

Lo que interesa en una determinada misión espacial es realizar la transferencia con el mínimo costo, lo que es equivalente a realizarla de manera que

$$S = \int_{t_0}^{t_f} \gamma dt = C_f \quad (11.1)$$

sea mínimo.

## 12. Trayectorias espaciales óptimas para un cohete moviéndose en un campo gravitatorio central $\vec{g}(\vec{r})$

Sea  $M$  un cohete moviéndose en el campo gravitatorio  $\vec{g}(\vec{r})$  cuyo estado está definido en cada instante por el vector  $\vec{q}(\vec{r}, \vec{v}, C)$ , donde  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  especifican el estado cinemático del sistema en cada instante y  $C$  mide el consumo de combustible del cohete desde el instante inicial  $t_0$ .

Si elegimos como control la aceleración de empuje  $\vec{\gamma}$ , el problema de encontrar las trayectorias espaciales óptimas queda planteado así:

Dado el estado del cohete  $q_0(\vec{r}_0, \vec{v}_0, C_0)$  en  $t = t_0$ , se trata de hallar las trayectorias  $\vec{q} = \vec{q}(t, \vec{q}_0)$  que satisfacen al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{g}(\vec{r}) + \vec{\gamma} \\ \frac{dC}{dt} &= \gamma \end{aligned} \quad (12.1)$$

de forma que en  $t = t_f$  (fijo o arbitrario) la función de costo (11.1) tome su mínimo valor.

En los problemas de cita espacial, asociados a este problema general se dan a priori  $\vec{r}_f, \vec{v}_f$  y se desea hallar las trayectorias que en el tiempo  $(t_f - t_0)$  (fijo o indiferente) unen  $P_0(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$  con  $P_f(\vec{r}_f, \vec{v}_f)$ , haciendo mínimo el consumo de combustible.

Otro caso de gran interés es el de transferencia simple, donde se trata de pasar de un punto  $P_0(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$  perteneciente a una órbita inicial base dada, a otra órbita final fija, con duración de trayecto indiferente o no, de forma que  $C$  tome un valor mínimo.

Procedamos ahora a la aplicación del *principio del máximo* al caso de una transferencia de punto a punto, con duración de trayecto indiferente o no.

Si formamos el hamiltoniano  $H$  y consideramos un sistema de propulsión  $(S_f)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} H &= \vec{p}_r \cdot \vec{r} + \vec{p}_v \cdot \vec{v} + p_c \dot{C} \\ &= \vec{p}_r \cdot \vec{v} + \vec{p}_v \cdot \vec{g}(\vec{r}) + \vec{p}_v \cdot \vec{\gamma} + p_c \gamma \end{aligned} \quad (12.2)$$

donde  $\vec{p}_r, \vec{p}_v$  y  $p_c$  (elementos adjuntos de  $\vec{r}, \vec{v}$  y  $C$ ), son soluciones del sistema adjunto

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}_r &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -p_v \frac{\partial g(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \\ \dot{\vec{p}}_v &= -\vec{p}_r \\ \dot{p}_c &= -\frac{\partial H}{\partial C} \end{aligned} \quad (12.3)$$

Si lo que buscamos es el mínimo de  $C$ , por el Teorema-1 es preciso elegir en cada instante  $t \in [t_0, t_f]$  los controles  $\vec{D} = \vec{\gamma}/\gamma$  y  $\gamma$ , de forma que  $H$  sea máximo respecto a ellos. De acuerdo con la forma de  $H$ , esto implica que

$$\vec{\gamma} = \gamma \frac{\vec{p}_v}{|\vec{p}_v|} \Rightarrow \vec{D}^* = \frac{\vec{p}_v}{|\vec{p}_v|} \quad (12.4)$$

$$\gamma = 0 \text{ si } K = |\vec{p}_v| + p_c < 0 \quad \text{arco balístico (NT)} \quad (12.5)$$

$$\gamma = \gamma_{\max} \text{ si } K > 0 \quad \text{arco propulsado (MT)} \quad (12.6)$$

$$\gamma \text{ cualquiera si } K = 0 \quad \text{arco singular (IT)} \quad (12.7)$$

Lo que nos dice que todo arco óptimo de trayectoria solamente puede estar formado por arcos de los tres tipos (NT), (MT) e (IT).

Notemos que sobre un arco balístico o singular ( $K = 0$ ) resulta

$$\dot{p}_c = -\frac{\partial H}{\partial C} = 0$$

que implica  $p_c = \text{cte.}$ , constante que debe ser menor o igual que cero por la condición expresada en (3.10), y que puede tomarse igual a  $-1$  si se eligen en la condición de contorno (3.4) las  $c_i = 0$  para  $i \neq 0$  y  $c_0 = 1$ .

Veamos ahora que sobre arcos (MT),  $p_c$  verifica la ecuación diferencial

$$\dot{p}_c = -\frac{1}{W} (\vec{p}_v \cdot \vec{\gamma} + p_c \gamma) \quad (12.8)$$

En efecto, si hubiéramos tomado como vector estado el  $q'(\vec{r}, \vec{v}, m)$  tendríamos los sistemas de ecuaciones de estado y adjunto

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{v} & \dot{\vec{p}}_r &= -\frac{\partial H'}{\partial \vec{r}} \\ \dot{\vec{v}} &= g(\vec{r}) + \frac{F}{m} \vec{D} & \dot{\vec{p}}_v &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{v}} \\ \dot{m} &= -q & \dot{p}_m &= -\frac{\partial H'}{\partial m} = \frac{E}{m^2} (\vec{p}_v \cdot \vec{D}) \end{aligned} \quad (12.9)$$

donde  $H'$  viene dado por la expresión

$$H' = \vec{p}_r \cdot \vec{v} + \vec{p}_v \cdot \vec{g}(\vec{r}) + \frac{F}{m} (\vec{p}_v \cdot \vec{D}) - \vec{p}_m \vec{q} \quad (12.10)$$

Para encontrar la relación entre  $p_m$  y  $p_c$  basta realizar una transformación canónica tipo Mathieu del sistema

$$[\tilde{q}'(\vec{r}, \vec{v}, m); \vec{p}'(\vec{p}_r, \vec{p}_v, p_m); H']$$

al sistema

$$[\tilde{q}(\vec{r}, \vec{v}, C); \vec{p}(\vec{p}_r, \vec{p}_v, p_c); H]$$

para lo cual es suficiente que se cumpla la condición

$$\tilde{p} \cdot d\tilde{q} - \tilde{p}' \cdot d\tilde{q}' = 0$$

de donde se deduce

$$p_m d_m = p_c dC = -p_c W \frac{d_m}{m}$$

Ahora si tenemos en cuenta las igualdades

$$\dot{\vec{p}}_m = \frac{F}{m^2} (\vec{p}_v \cdot \vec{D}) \quad ; \quad F = W q$$

resulta

$$\dot{\vec{p}}_c = -\frac{F}{mW} (\vec{p}_v \cdot \vec{D} + p_c) = \frac{1}{W} (\vec{p}_v \cdot \vec{\gamma} + p_c \gamma) \quad c.q.d.$$

En los arcos singulares (IT) se tiene  $|\vec{p}_v| = -p_c = 1$ , luego dichos arcos se obtienen precisamente eligiendo  $\vec{\gamma}$  de forma que  $|\vec{p}_v| = 1$  durante el recorrido del arco. Se ha demostrado que las ecuaciones de estos arcos se pueden obtener a través de la anulación de las derivadas sucesivas de  $|\vec{p}_v|$  (B-15), (B-8).

El vector  $\vec{p}_v$  fue introducido por Lawden (B-8) bajo la denominación de *vector primer*; nombre que seguiremos utilizando en lo sucesivo por carecer de traducción apropiada. Su papel en el análisis de trayectorias espaciales es decisivo.

Según las ecuaciones (12.3),  $\vec{p}_v$  satisface a la ecuación diferencial

$$\ddot{\vec{p}}_v = \vec{p}_v \frac{\partial \vec{g}(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \quad (12.11)$$

Resumiendo; podemos decir que, por aplicación del principio del máximo, las trayectorias optimales de cohetes en un campo gravitatorio central  $\vec{g}(\vec{r})$  deben satisfacer las siguientes condiciones:

- (i) Cuando el motor del cohete actúa y  $|\vec{p}_v| \neq 0$  el impulso tiene la dirección y sentido del vector primer  $\vec{p}_v$ .
- (ii) Una trayectoria optimal de transferencia solamente puede estar formada por arcos de los tres tipos (NT), (MT), (IT).
- (iii) En los puntos de unión de dos arcos distintos, las funciones  $\vec{p}_v$ ,  $\vec{p}$ , y  $p_c$  deben ser continuas, toda vez que el Teorema 1 asegura la existencia de una solución continua del sistema adjunto (12.3).

(iv) En cualquier punto de unión de arcos ( $NT$ ), ( $MT$ ), ( $IT$ ), el hamiltoniano  $H$  debe ser continuo y si  $\gamma$  es discontinua debe verificarse  $|\vec{p}_v| + p_c = 0$ , o bien

$$|\vec{p}_v| = 1 \quad (12.12)$$

### 13. Trayectorias impulsivas

Si suponemos que la fuerza de impulsión  $F$  no está acotada, lo que equivale a suponer que  $F_{max} = \infty$ , ( $\gamma_{max} = \infty$ ); entonces se considera que una fase de impulso máximo ( $MT$ ) puede reemplazarse por un impulso  $\vec{I} = \Delta \vec{v}$  de duración  $\varepsilon$  despreciable, que sirva para modificar tan sólo la velocidad del vehículo, sin afectar a su posición. Tal aproximación está justificada en el caso de transferencias interplanetarias donde la duración de la fase de impulso máximo es siempre pequeña, en comparación con el tiempo total de tránsito entre las terminales planetarias.

#### Definición de fuerza impulsiva. Punto de impulsión

Denominaremos fuerza impulsiva a una fuerza  $F(T)$  que actúa sobre el móvil  $M$ , durante el intervalo de tiempo  $\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon$  tan pequeño, que durante el mismo el punto de aplicación permanece fijo, mientras que  $F(t)$  verifica las condiciones siguientes:

$$\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} F(t) dt = |\Delta \vec{v}| \quad (13.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) F(t - \tau) dt = f(\tau + \theta \varepsilon) |\Delta \vec{v}| \quad ; \quad 0 < \theta < 1$$

donde  $f(t)$  es una función continua en el intervalo  $\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon$ .

Puede probarse que toda función  $F(t)$  que cumpla las condiciones (13.1) representa una aproximación de la distribución  $\delta(t - \tau) |\Delta \vec{v}|$ .

A un punto en donde se aplica una fuerza impulsiva, le llamaremos punto de impulsión.

Por las hipótesis establecidas, es evidente que en un punto de impulsión  $\vec{r}$  y  $\partial \vec{g} / \partial \vec{r}$  son continuos, de donde se deduce que los vectores  $\vec{p}_v$ , y  $\vec{p}_r$  son continuos. Análogamente será continuo el vector  $\vec{p}_v$  ya que se tiene

$$\vec{p}_v = \frac{\mu}{\gamma^3} \left( \frac{3(\vec{p}_v \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{r} - \vec{p}_v \right)$$

Sin embargo no es continua, en general,  $\vec{p}_r$ , puesto que verifica la ecuación

$$\vec{p}_r = -\vec{p}_v \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{r}} + \vec{p}_v \left( \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial r^2} \vec{v} \right)$$

y  $\vec{v}$  no es continua en un punto de impulsión como sabemos.

Consideremos una fase de impulso (MT) precedida y seguida de una fase balística (NT) (Fig. 13.1).

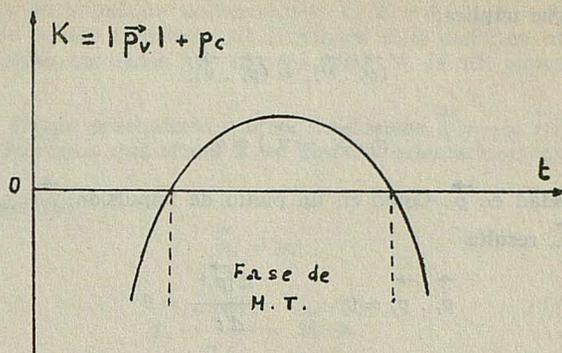


FIG. 13.1

Durante la fase de impulso máximo (MT), sabemos que la función

$$K = |\vec{p}_v| + p_c \quad (13.4)$$

llamada de conmutación, es positiva o nula; con lo que la función  $K = K(t)$  es de la forma de la (Fig. 13.1).

Si la magnitud del impulso se aumenta la duración de aplicación del mismo disminuye, nos aproximamos a la condición de impulsión, con lo que en el límite  $K = (t)$  será de cualquiera de las formas de la (Fig. 13.2).

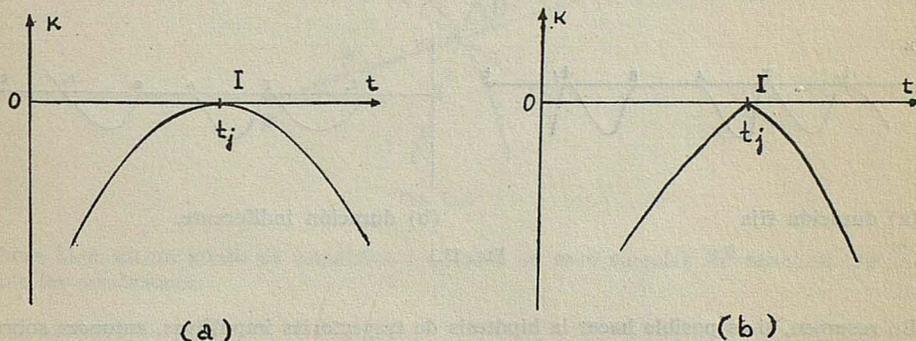


FIG. 13.2

Es decir, el punto I será un máximo relativo de  $K$  o un punto cuspidal. Veamos que esta segunda posibilidad no puede darse.

En efecto, sobre una trayectoria óptima, en un campo gravitatorio central  $\vec{g} = \vec{g}(r)$ , según lo que hemos visto el hamiltoniano  $H$  se puede escribir en la forma

$$H = \vec{p}_r \cdot \vec{v} + \vec{p}_v \cdot \vec{g}(r) + \gamma(|\vec{p}_v| + p_c) \quad (13.5)$$

o bien

$$H = \vec{p}_r \cdot \vec{v} + \vec{p}_v \cdot \vec{g}(r) \quad (13.5a)$$

caso de admitirse la hipótesis de fuerza impulsiva, ya que todo punto de discontinuidad de  $\gamma$ ,  $\vec{p}_v + p_c = 0$ . Y por la continuidad de  $H$  y de  $\vec{p}_r \cdot \vec{g}(r)$  se deduce la continuidad del producto  $\vec{p}_r \cdot \vec{v}$ , lo que implica:

$$(\vec{p}_r \cdot \vec{v})_+ = (\vec{p}_r \cdot \vec{v})_- \quad (13.6)$$

o bien

$$\vec{p}_r \cdot (\vec{v}_+ - \vec{v}_-) = 0 \quad (13.7)$$

debido a la continuidad de  $\vec{p}_r$ . Como en un punto de impulsión,  $\vec{I} = \Delta \vec{v}$ , tiene la dirección y sentido de  $\vec{p}_v$ , resulta

$$\vec{p}_r \cdot \vec{p}_v = 0 \quad \frac{d|\vec{p}_v|}{dt} = 0 \quad (13.8)$$

de donde

$$\dot{K} = \frac{d|\vec{p}_v|}{dt} + \frac{dp_c}{dt} = 0 \quad (13.9)$$

y el caso de punto cuspidal queda excluido.

La (13.9) sigue siendo válida, en el caso de duración indiferente, en los extremos del intervalo  $[t_0, t_f]$ . Mientras que si la duración de transferencia es fija  $t_0$  ó  $t_f$   $K = 0$  pero  $\dot{K} \neq 0$  en general.

Con ello deducimos que toda trayectoria optimal de transferencia consta de una sucesión de arcos balísticos (NT) separados por puntos de impulsión I, pudiendo entrar a formar parte de la misma arcos singulares (IT). Todo lo cual viene a decirnos que la función de conmutación es de uno de los dos tipos siguientes:

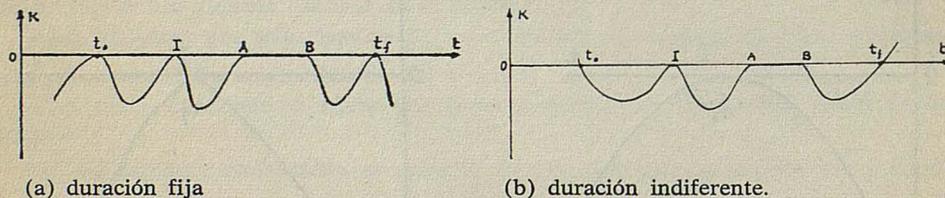


FIG. 13.3

En resumen, si es posible hacer la hipótesis de trayectorias impulsivas, entonces sobre una trayectoria optimal deben verificarse las condiciones siguientes:

- (i) Los vectores  $\vec{p}_r$  y  $\vec{p}_v = -\dot{\vec{p}}_v$  son continuos en todos los puntos de la trayectoria.
- (ii) Para sistemas autónomos con duración indiferente, una integral primera del movimiento, es

$$H = \vec{p}_r \cdot \vec{v} + \vec{p}_v \cdot \vec{g}(r)$$

Si la duración es fija  $H = cte$ . sigue dándonos una integral primera.

- (iii) Cuando actúa el motor, el impulso del cohete debe estar alineado con el vector  $\vec{p}_v$  de Lawden.

(iv) El módulo de  $\vec{p}_v$  no excede el valor 1, alcanzando dicho valor en los puntos de impulsión  $I$  sobre un arco singular  $AB$  (Fig. 13.3).

(v) En los puntos de impulsión no terminales es  $\dot{K} = 0$ ,  $\vec{p}_v \cdot \vec{p}_v = 0$ . Estas condiciones son válidas en los puntos terminales de impulsión si la duración es indiferente. Estas condiciones ya fueron obtenidas por Lawden (1953, 54, 59, 62) aunque en forma distinta (B-8).

En el caso de un campo gravitatorio central newtoniano  $\vec{g} = -\mu \vec{r}/r^3$  vamos a deducir una propiedad importante que afecta a las posibles orientaciones óptimas de aplicación de la impulsión.

Si derivamos la igualdad

$$\vec{p}_v^2 = p_v^2$$

resulta la identidad

$$p_v \frac{d|\vec{p}_v|}{dt} = \vec{p}_v \cdot \dot{\vec{p}}_v \quad (13.10)$$

Derivando la igualdad anterior y teniendo en cuenta la fórmula (13.2), se obtiene

$$p_v \frac{d^2|\vec{p}_v|}{dt^2} + \left( \frac{d|\vec{p}_v|}{dt} \right)^2 = \vec{p}_v \cdot \ddot{\vec{p}}_v + \dot{p}_v^2 = \frac{\mu p_v^2}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dot{p}_v^2 \quad (13.11)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forma  $\vec{p}_v$  con la dirección radical. (Fig. 13.4).

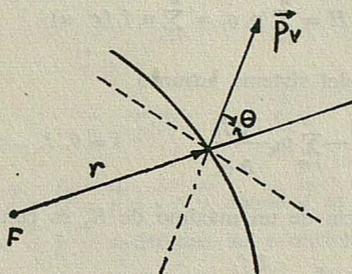


FIG. 13.4

Ahora bien, en un punto de impulsión  $I$  o sobre un arco singular  $\overline{AB}$  sabemos que  $\vec{p}_v$  cumple las condiciones:

$$|\vec{p}_v| = 1 \quad \frac{d|\vec{p}_v|}{dt} = 0 \quad \frac{d^2|\vec{p}_v|}{dt^2} \leq 0 \quad (0 = \text{caso de un arco singular})$$

Y teniendo en cuenta la (13.11) se tiene la desigualdad

$$|\vec{p}_v| \frac{d^2|\vec{p}_v|}{dt^2} = \mu \frac{p_v^2}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dot{p}_v^2 \leq 0 \quad (13.12)$$

Por tanto, una condición necesaria para que se cumpla la (13.12) es:

$$\cos^2 \theta \leq 1/3 \quad (13.13)$$

Así pues, podemos enunciar la propiedad

(vi) En un punto de impulsión  $I$ , o sobre un arco singular  $\overline{AB}$  el vector primer  $\vec{p}$ , se sitúa en el exterior del cono de revolución de eje, el vector de posición  $r$  y semiángulo en vértice

$$\theta_{min} = 54^\circ, 44' \quad (13.14)$$

Como consecuencia de esta propiedad resulta: que las impulsiones radiales o casi-radiales no son jamás optimales.

#### IV. Integrales primeras para trayectorias impulsivas

##### 14. Generalidades

Sea un sistema evolutivo de vector estado  $q$  que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales de estado

$$\dot{q}_i = f_i(q, u) \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (14.1)$$

donde  $u$  es el vector control, tal que  $u \in U \subset E^r$ .

En el caso de trayectorias impulsivas, el principio del máximo nos dice: que los controles optimales son los que hacen máxima a la función hamiltoniana

$$H = \sum_{i=0}^n p_i \dot{q}_i = \sum_{i=0}^n p_i f_i(q, u) \quad (14.2)$$

donde  $p_i$  son las soluciones del sistema adjunto

$$\dot{p}_i = - \sum_{k=0}^n p_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (14.3)$$

Por tanto, para la existencia de un máximo de  $H$ , es condición necesaria que

$$\frac{\partial H}{\partial u_h} = \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial u_h} = 0, \quad h = 1, 2, \dots, r \quad (14.4)$$

Sea  $T^*$  la trayectoria optimal de vector estado  $\tilde{q}^* = \tilde{q}^*(t)$  para el control optimal  $u^* = u^*(t)$  y las condiciones iniciales  $(t_0, q_0)$ . Y consideremos una segunda trayectoria  $T'$  especificada por el vector estado  $\tilde{q}' = \tilde{q}^*(t) + \partial \tilde{q}(t)$  y de vector control  $u' = u^*(t) + \partial u(t)$ . Si, en general, se toman  $\partial \tilde{q}$  y  $\partial u$  arbitrarios la trayectoria  $T'$  no satisface el sistema (14.1). Veamos las condiciones que tienen que cumplir  $\partial \tilde{q}$  y  $\partial u$  para que  $\tilde{q}'$  sea solución de dicho sistema (14.1).

Sustituyendo  $\tilde{q}'$  y  $u'$  en (14.1), en primer orden se tiene:

$$\dot{\delta q}_i = \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{h=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial u_h} \delta u_h, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14.5)$$

y que representan las condiciones exigidas a  $\delta \tilde{q}$  y  $\delta u$  para que  $q'$  sea solución de (14.1).

Vamos a probar que si  $\tilde{p} = \tilde{p}(t)$  es la solución de (14.3) correspondiente a la trayectoria optimal  $\tilde{q}^*(t)$ , para todo  $\delta q$  que verifique (14.5) se tiene, sobre  $T^*$ , la integral primera del movimiento

$$\tilde{p} \cdot \delta \tilde{q} = cte. \tag{14.6}$$

En efecto, derivando el primer miembro de la (14.6) respecto a  $t$ , se tiene

$$\sum_{i=0}^n \dot{p}_i \delta q_i + \sum_{i=0}^n p_i \delta \dot{q}_i = \sum_{k=0}^n \dot{p}_k \delta q_k + \sum_{k=0}^n p_k \left( \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{h=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial u_h} \delta u_h \right)$$

ordenando términos en la expresión anterior y teniendo en cuenta las (14.3) y (14.4) resulta

$$\frac{d}{dt} (\tilde{p} \cdot \delta \tilde{q}) = 0 \Rightarrow \tilde{p} \cdot \delta \tilde{q} = cte.$$

c.q.d.

### 15. Aplicaciones

(1) Si elegimos  $\delta \tilde{q} = \tilde{q}(t)$ , y derivamos la ecuación (14.1) con  $\tilde{q} = \tilde{q}^*(t)$  y  $u = u^*(t)$  se comprueba que  $\delta \tilde{q}$  y  $\delta u$  verifican la (14.5) pudiendo escribirse la integral (14.6) en la forma

$$H = \tilde{p} \cdot \dot{\tilde{q}} = cte. \tag{15.1}$$

(2) Para trayectorias impulsivas, con el vector estado,  $q = (\vec{r}, \vec{v})$ , las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} &= \vec{g}(\vec{r}) = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \end{aligned} \tag{15.2}$$

Tomemos  $\vec{r}' = \vec{r} + \varepsilon \wedge \vec{r}$  y  $\vec{v}' = \vec{v} + \varepsilon \wedge \vec{v}$  donde  $\vec{\varepsilon}$  es un vector arbitrario finito y constante. Es fácil ver que  $\vec{r}'$  y  $\vec{v}'$  satisfacen las ecuaciones del movimiento (15.2). En efecto,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}' &= \dot{\vec{r}} + \varepsilon \wedge \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} \\ \dot{\vec{v}}' &= \dot{\vec{v}} + \varepsilon \wedge \dot{\vec{v}} = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} + \varepsilon \wedge \vec{r}) = -\mu \frac{\vec{r}'}{r'^3} \end{aligned}$$

Aplicando la (14.6) se deduce la integral primera del movimiento

$$\vec{p}_r \cdot (\varepsilon \wedge \vec{r}) + \vec{p}_v \cdot (\varepsilon \wedge \vec{v}) = cte.$$

y eligiendo la constante del segundo miembro igual al producto escalar  $-\varepsilon \cdot \vec{B}$ , siendo  $\vec{B}$  un vector constante, se tiene

$$\varepsilon \cdot (\vec{p}_r \wedge \vec{r} + \vec{p}_v \wedge \vec{v}) = \varepsilon \cdot \vec{B}$$

y por la arbitrariedad de  $\vec{\varepsilon}$ , resulta

$$\vec{p}_r \wedge \vec{r} + \vec{p}_v \wedge \vec{v} = \vec{B} \tag{15.3}$$

Esta integral fue deducida por Breakwell, de ahí que denotemos la constante, por  $\vec{B}$ . Nosotros hemos obtenido la (15.3) de forma más simple y general.

*Definición 15.1.* — Si  $\vec{B} = 0$  diremos que la orientación sobre el plano orbital es indiferente. Es decir, la optimalidad de la trayectoria no depende de la orientación de  $(\vec{r}, \vec{v})$  en el punto de salida.

Con esta hipótesis particular se pueden obtener transferencias orbitales especiales de gran importancia. (La transferencia de Hohmann) p.e.

(3) Existe otra conocida integral del movimiento que no puede deducirse por aplicación de lo expuesto anteriormente y es la siguiente

$$C + 2(\vec{p}_r \cdot \vec{r}) - (\vec{p}_v \cdot \vec{v}) - 3Ht = A \quad (15.4)$$

donde  $C$  es la velocidad característica,  $H$  el hamiltoniano del sistema y  $A$  una constante.

En efecto, si derivamos el primer miembro de la (15.4) respecto a  $t$  y teniendo en cuenta la (13.2) resulta

$$\frac{d}{dt} (C + 2\vec{r} \cdot \vec{p}_r - \vec{v} \cdot \vec{p}_v - 3Ht) = 3 \left( \vec{v} \cdot \vec{p}_r - \mu \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p}_r)}{r^3} - H \right)$$

y como por la (13.5a), el segundo miembro de la igualdad anterior es nulo, tenemos: que la (15.4) se verifica sobre una trayectoria impulsiva optimal.

## V. El vector de Lawden para campos newtonianos

### 16. Sobre arcos propulsados ( $\gamma \neq 0$ )

Sabemos que para trayectorias optimales de cohetes moviéndose en un campo newtoniano, el vector primer  $\vec{p}_v$  verifica la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{\vec{p}}_v = \frac{\mu}{r^3} \left( 3 \frac{(\vec{p}_v \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{p}_v \right) \quad (16.1)$$

Veamos si es posible encontrar la expresión general de  $\vec{p}_v$  que sea solución de la ecuación (16.1).

Tomemos para cada instante  $t \in [t_0, t_f]$  el vector  $\tilde{Q}(E, \vec{h}, \vec{e}, l_0, C)$  para definir el estado del sistema evolutivo  $M$ , siendo  $E, \vec{h}, \vec{e}$  y  $l_0$  los elementos orbitales osculadores, en cada instante  $t$ , a la trayectoria  $(T)$  y  $C$  la velocidad característica de la transferencia.

Denotemos por  $g_1(\tilde{Q}) = 0$  y  $g_2(\tilde{Q}) = 0$  las relaciones de dependencia (8.6), que existen entre los elementos orbitales osculadores  $E, \vec{h}, \vec{e}$ , y por  $\Phi_1, \Phi_2$  las funciones escalares definidas por las relaciones

$$\Phi_i = \Phi_i(Q, \gamma) = \frac{\partial g_i}{\partial \tilde{Q}}, \quad i = 1, 2 \quad (16.2)$$

donde  $\vec{Q}$  es el vector de componentes,  $E$ ,  $\vec{h}$ ,  $e$ ,  $l_o$  y  $C$ , dados por las fórmulas de perturbación y ecuación de consumo siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= (\vec{v} \cdot \vec{\gamma}) \\ \dot{\vec{h}} &= (\vec{r} \wedge \vec{\gamma}) \\ \dot{e} &= \frac{1}{\mu} [\vec{\gamma} \wedge \vec{h} + \vec{v} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{\gamma})] \\ \dot{l}_o &= \frac{1}{n a^2} (-2 \vec{r} + 3 t \vec{v}) \cdot \vec{\gamma} - \frac{b}{a p e} (\vec{p} \cdot \dot{e}) \\ \dot{C} &= \gamma \end{aligned} \tag{16.3}$$

que representan las ecuaciones diferenciales de estado del sistema.

Con todo lo expuesto, podemos escribir el nuevo hamiltoniano  $H'$ , en la forma

$$H' = p_E \dot{E} + \vec{p}_h \cdot \dot{\vec{h}} + \vec{p}_e \cdot \dot{e} + p_{l_o} \dot{l}_o + p_C \dot{C} \tag{16.4}$$

donde  $p_E$ ,  $\vec{p}_h$ ,  $\vec{p}_e$ ,  $p_{l_o}$  y  $p_C$  (elementos adjuntos de  $E$ ,  $\vec{h}$ ,  $e$ ,  $l_o$  y  $C$ ), son soluciones del sistema adjunto

$$\begin{aligned} \dot{p}_E &= -\frac{\partial H'}{\partial E} + \sum_{i=1}^2 \rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial E} \\ \dot{\vec{p}}_h &= -\frac{\partial H'}{\partial \vec{h}} + \sum_{i=1}^2 \rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial \vec{h}} \\ \dot{\vec{p}}_e &= -\frac{\partial H'}{\partial \vec{e}} + \sum_{i=1}^2 \rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial \vec{e}} \\ \dot{p}_{l_o} &= -\frac{\partial H'}{\partial l_o} + \sum_{i=1}^2 \rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial l_o} \\ \dot{p}_C &= -\frac{\partial H'}{\partial C} \end{aligned} \tag{16.5}$$

y ha de tenerse en cuenta lo establecido en el Teorema 4 (I).

A partir de las (16.3), (16.4), es fácil ver que  $H'$  puede ponerse en la forma

$$H' = [p_E \vec{v} + \vec{p}_h \wedge \vec{r} + \vec{h} \wedge \vec{\lambda} + \vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{\lambda}) + \frac{p_{l_o}}{n a^2} (-2 \vec{r} + 3 t \vec{v}) \cdot \vec{\gamma} + p_C \gamma] \tag{16.6}$$

con  $\vec{\lambda}$  el vector

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{p}_e}{\mu} - \frac{p_{l_o}}{p e} \vec{p} \tag{16.7}$$

Y designando por  $\vec{Z}$  el vector, entre corchetes, de la expresión (16.6), resulta

$$H' = \vec{Z} \cdot \vec{\gamma} + p_e \gamma \quad (16.8)$$

Aplicando la condición de máximo de  $H'$ , respecto a los controles  $\vec{D}$  y  $\gamma$ , se deducen las relaciones siguientes

$$\vec{D}^* = \frac{\vec{Z}}{Z}, \quad \gamma^* = \max [0, \text{sig}(Z + p_e)] \gamma_{\max} \quad (16.9)$$

para la dirección y módulo de la impulsión, optimales. Ahora bien, en el supuesto de que el vector estado del sistema sea el  $\vec{q}(\vec{r}, \vec{v}, C)$  vimos en el párrafo (12) que los controles optimales debían elegirse, en cada instante  $t$ , de forma que se verificasen las ecuaciones

$$\vec{D}^* = \frac{\vec{p}_v}{p_v}, \quad \gamma^* = \max [0, \text{sig}(p_v + p_e)] \gamma_{\max} \quad (16.10)$$

de donde se deduce, teniendo presente la (16.9), que existe una función  $k(t)$  de clase  $C^2$ , tal que

$$\vec{p}_v = k(t) \vec{Z}, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (16.11)$$

Por lo tanto  $\vec{p}_v$  viene dado por la relación

$$\vec{p}_v = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{r} + \vec{h} \wedge \lambda_3 + \vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge \lambda_3) - \lambda_4 (-2\vec{r} + 3t\vec{v}) \quad (16.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= p_E k(t) & \lambda_2 &= \vec{p}_h k(t) \\ \lambda_3 &= \vec{\lambda} k(t) & \lambda_4 &= -\frac{p l_0}{n a^2} k(t) \end{aligned}$$

Derivando dos veces la (16.12) respecto a  $t$ , resulta

$$\dot{\vec{p}}_v = k(t) \dot{\vec{Z}} + \dot{k}(t) \vec{Z} = -\vec{p}_r + \dot{k}(t) \vec{Z} \quad (16.13)$$

$$\ddot{\vec{p}}_v = k(t) \ddot{\vec{Z}} + 2\dot{k}(t) \dot{\vec{Z}} + \ddot{k}(t) \vec{Z} \quad (16.14)$$

siendo  $\vec{p}_r$  el vector

$$\begin{aligned} \vec{p}_r &= \lambda_1 \frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{v} \wedge \lambda_2 + \vec{v} \wedge (\lambda_3 \wedge \vec{v}) + \\ &+ \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \lambda_3) + \lambda_4 \left( \vec{v} - 3 \frac{\mu t}{r^3} \vec{r} \right) \end{aligned} \quad (16.15)$$

17. Sobre arcos impulsivos

Debido a que las componentes del vector estado  $\vec{Q}$  son integrales del movimiento kepleriano, resulta el siguiente

*Teorema 6.* — Para trayectorias optimales impulsivas que no contienen arcos singulares, el vector primer  $\vec{p}_v$  viene dado por la expresión (16.12), donde los parámetros  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  son constantes sobre cada arco balístico que compone la trayectoria y el vector  $\vec{p}_r$  coincide con el  $-\dot{\vec{p}}_v$ .

*Demostración.* — En efecto, debido a que sobre trayectorias impulsivas  $H'$  es nulo, las funciones  $p_{E1}, p_{h1}, p_e$  y  $p_l$  son constantes. Por tanto  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  serán también constantes, cuando la función  $k(t)$  sea a su vez una constante, y el teorema quedará demostrado si conseguimos probar: que el vector  $\vec{p}_v$  dado por (16.12), verifica la ecuación diferencial (16.1) si y sólo si  $k(t) = cte$ .

Si  $k(t)$  es constante se tiene la igualdad

$$\vec{p}_r = -\dot{\vec{p}}_v$$

que derivándola respecto a  $t$  nos da

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}_r = -\dot{\vec{p}}_v = \lambda_1 \frac{\mu}{r^3} \left[ \vec{v} - 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^2} \vec{r} \right] - \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \wedge \lambda_2) - \\ - \lambda_4 \frac{\mu}{r^3} \left[ 4\vec{r} + 3t \left( \vec{v} - 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^2} \vec{r} \right) \right] - \frac{2\mu}{r^3} [\vec{r} \wedge (\lambda_3 \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\lambda_3 \wedge \vec{r})] \\ - \frac{3\mu}{r^5} (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \lambda_3) \end{aligned}$$

Por otra parte, denotando por  $U$  el segundo miembro de la (16.1) con signo menos, resulta

$$\begin{aligned} \vec{U} = \frac{\mu}{r^3} [\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \wedge \vec{r} + \lambda_4 (2\vec{r} - 3t\vec{v}) + \vec{h} \wedge \lambda_3 + \vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge \lambda_3) - \\ - \frac{3}{r^2} \{ \lambda_1 (\vec{v} \cdot \vec{r}) \vec{r} + \lambda_4 (2r^2 - 3t(\vec{v} \cdot \vec{r})) \vec{r} + [\vec{r} \vec{h} \lambda_3] \vec{r} \}] \end{aligned}$$

donde  $[\vec{r} \vec{h} \lambda_3]$  indica el producto mixto de los vectores  $\vec{r}, \vec{h}$  y  $\lambda_3$ .

Si tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} \vec{h} \wedge \lambda_3 + \vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge \lambda_3) - \frac{3}{r^2} [\vec{r} \vec{h} \lambda_3] \vec{r} = -2 [\vec{r} \wedge (\lambda_3 \wedge \vec{v}) + \\ + \vec{v} \wedge (\lambda_3 \wedge \vec{r})] - \frac{3}{r^2} (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \lambda_3) \end{aligned}$$

nos queda la identidad

$$\dot{\vec{p}}_r = \vec{U}$$

que nos asegura que  $\vec{p}_v$  dado por (16.12) con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  constantes cumple (16.1).

Recíprocamente, para que  $\vec{p}_v = k(t)\vec{Z}$  sea solución (16.1) debe verificarse la ecuación diferencial

$$\ddot{\vec{p}}_v = k(t)\ddot{\vec{Z}} + 2\dot{k}(t)\dot{\vec{Z}} + \ddot{k}(t)\vec{Z} = -\vec{U}$$

y como  $k(t)\ddot{\vec{Z}} = -\vec{U}$  resulta, que la función  $k(t)$  es solución de la ecuación

$$\ddot{k}(t)\vec{Z} + 2\dot{k}(t)\dot{\vec{Z}} = 0$$

que admite como soluciones:  $k = \text{cte.}$  ( $\vec{Z}$  y  $\dot{\vec{Z}}$  linealmente independientes) y  $k = \text{cte.}$   $(t + \text{cte})^{-1}$  ( $\vec{Z}$  y  $\dot{\vec{Z}}$  linealmente dependientes).

Ahora bien, si  $k \neq \text{cte.}$ , puede probarse, que el vector primer es un vector constante de módulo unidad y por tanto la trayectoria tendría que ser restilínea y propulsada, caso límite que excluimos en este estudio.

Notemos que por ser  $\vec{p}_v$  solución de una ecuación diferencial vectorial de segundo orden, debería depender de 6 constantes arbitrarias  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ), mientras que por las conclusiones del Teorema anterior vemos que depende de 8. Para reducir el número de las mismas a 6 independientes, basta tener presente que si se eligen

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = e, \quad \lambda_3 = \frac{\vec{h}}{\mu}, \quad \lambda_4 = 0 \quad (17.1)$$

o bien

$$\lambda_1 = -p, \quad \lambda_2 = \pm \frac{\vec{h}}{a}, \quad \lambda_3 = e, \quad \lambda_4 = 0 \quad (17.2)$$

resultan ser idénticamente nulos los vectores  $\vec{p}_v$  y  $\vec{p}_r$ .

Si denotamos por  $\vec{p}_{va}$  y  $\vec{p}_{vb}$  las expresiones del vector primer  $\vec{p}_v$ , en el supuesto de elegir el conjunto (17.1) de constantes o el (17.2), es claro que  $\vec{p}_v$  puede escribirse en la forma

$$\vec{p}_v = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \wedge \vec{r} + \vec{h} \wedge \lambda_3 + \vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge \lambda_3) + \lambda_4 (2\vec{r} - 3t\vec{v}) + k_1 \vec{p}_{va} + k_2 \vec{p}_{vb}$$

con  $k_1$  y  $k_2$ , dos parámetros arbitrarios a elegir, de manera, que tan solo figuren en la expresión del primer 6 constantes. Reagrupando términos en la igualdad anterior queda

$$\vec{p}_v = \Lambda_1 \vec{v} + \Lambda_2 \wedge \vec{r} + \vec{h} \wedge \Lambda_3 + \vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge \Lambda_3) + \Lambda_4 (2\vec{r} - 3t\vec{v}) \quad (17.3)$$

habiéndose definido las constantes  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  y  $\Lambda_4$  mediante las relaciones siguientes

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \lambda_1 - k_2 p \\ \Lambda_2 &= \lambda_2 + k_1 e \mp k_2 \frac{\vec{h}}{a} \\ \Lambda_3 &= \lambda_3 + k_1 \frac{\vec{h}}{\mu} + k_2 e \\ \Lambda_4 &= \lambda_4 \end{aligned} \quad (17.4)$$

En los próximos apartados veremos las distintas formas de elegir  $k_1$  y  $k_2$ , para poner la expresión de  $\vec{p}_v$  de la manera más idónea, según el problema.

*Teorema 7.* — Para arcos balísticos (NT) y singulares (IT) el hamiltoniano  $H'$  viene relacionado con la energía de la órbita  $E$ , mediante expresión

$$H' = 2 E \lambda_A \quad (17.5)$$

*Demostración.* — En efecto, para arcos (NT) o (IT) el hamiltoniano  $H'$  viene dado por

$$H' = \vec{p}_r \cdot \vec{v} - \frac{\mu}{r^3} (\vec{p}_v \cdot \vec{r}) \quad (17.6)$$

y teniendo en cuenta las (16.2) y (16.13) nos queda

$$\begin{aligned} (\vec{p}_r \cdot \vec{v}) &= \frac{\mu \lambda_A}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{v}) + \frac{\mu}{r^3} [(r \cdot \lambda_3) (\vec{r} \cdot \vec{v}) - r^2 (\lambda_3 \cdot \vec{v})] + \lambda_A \left[ \frac{3\mu}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{v}) t - v^2 \right] \\ \frac{\mu}{r^3} (\vec{p}_v \cdot \vec{r}) &= \mu \frac{\lambda_A}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{v}) - \frac{\mu}{r} (\lambda_3 \cdot \vec{v}) + \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{v}) (\lambda_3 \cdot \vec{r}) + \\ &+ \frac{\mu}{r^3} \lambda_A [3 (\vec{r} \cdot \vec{v}) t - 2 r^2] \end{aligned}$$

de ahí que restando las expresiones de  $(\vec{p}_r \cdot \vec{v})$  y  $\frac{\mu}{r^3} (\vec{p}_v \cdot \vec{r})$  se tenga

$$H' = \lambda_A \left( v^2 - \frac{2\mu}{r} \right) = 2 E \lambda_A \quad \text{c. q. d.}$$

*Consecuencia 17.1.* — Si la duración de recorrido de la trayectoria es indiferente, entonces  $H' = 0$ , por lo tanto:  $\lambda_A = 0$ , siempre y cuando  $E \neq 0$  (arcos parabólicos).

### 18. Formas especiales del vector primer. Propiedades

(a) *Para arcos balísticos en el espacio.*

Si elegimos el sistema de coordenadas  $(\vec{e}, \vec{h} \wedge \vec{e}, \vec{h})$  (Fig. 18.1).

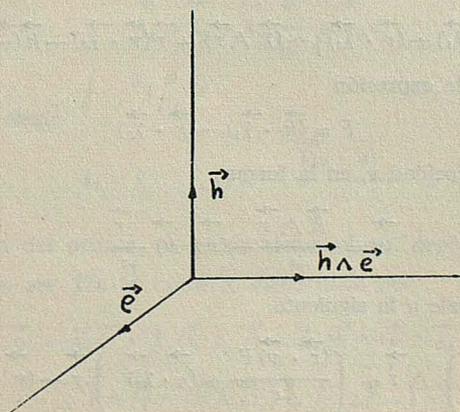


FIG. 18.1  
— 401 —

es claro, que los vectores  $\vec{\lambda}_j$  ( $j = 2, 3$ ) pueden descomponerse en la forma

$$\vec{\lambda}_j = (\vec{e} \cdot \vec{\lambda}_j) \frac{\vec{e}}{e^2} + (\vec{h} \cdot \vec{\lambda}_j) \frac{\vec{h}}{h^2} + [\vec{e} \wedge \vec{h} \cdot \vec{\lambda}_j] \frac{(\vec{h} \wedge \vec{e})}{h^2 e^2}$$

Con lo que las distintas formas de elegir las constantes  $k_1$  y  $k_2$  en (17.4), para que la expresión del primer (17.3) no contenga más que 6 parámetros, son las siguientes:

$$k_1 + \frac{(\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{e})}{e^2} = 0, \quad k_2 + \frac{(\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{e})}{e^2} = 0 \quad (18.2)$$

$$\pm \frac{k_2}{a} + \frac{(\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{h})}{h^2} = 0, \quad \frac{k_1}{\mu} + \frac{(\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{h})}{h^2} = 0 \quad (18.3)$$

$$k_1 + \frac{(\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{e})}{e^2} = 0, \quad \pm \frac{k_2}{a} + \frac{(\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{h})}{h^2} = 0 \quad (18.4)$$

$$\frac{k_1}{\mu} + \frac{(\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{h})}{h^2} = 0, \quad k_2 + \frac{(\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{e})}{e^2} = 0 \quad (18.5)$$

Veamos un teorema que nos permitirá simplificar el número de elecciones posibles de las constantes  $k_1$  y  $k_2$ .

*Teorema 8.* — Las condiciones necesarias y suficientes, para que la orientación sea indiferente ( $\vec{B} = 0$ ), son:  $\vec{\lambda}_3 = 0$  y  $\vec{\lambda}_2 \uparrow \vec{h}$ .

*Demostración.* — Partiendo de la expresión de la integral  $\vec{B}$  (15.3) y sustituyendo  $\vec{p}_i$  y  $\vec{p}_r$  por las relaciones (16.12) y (16.13), resulta: que la condición  $\vec{B} = 0$  es equivalente a

$$\begin{aligned} & \vec{r} \wedge (\vec{\lambda}_2 \wedge \vec{v}) + \vec{r} \wedge [\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{\lambda}_3)] - \vec{\lambda}_3 \wedge \vec{r} + \\ & + (\vec{r} \cdot \vec{v}) (\vec{v} \wedge \vec{\lambda}_3) - \vec{v} \wedge (\vec{\lambda}_2 \wedge \vec{r}) - \vec{v} \wedge (\vec{h} \wedge \vec{\lambda}_3) = 0 \end{aligned}$$

de cuya simplificación se deduce

$$\vec{v} \{ [\vec{r} \cdot \vec{v} \wedge \vec{\lambda}_3] - (\vec{r} \cdot \vec{\lambda}_2) \} - (\vec{\lambda}_3 \wedge \vec{r}) + \vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{\lambda}_2) - \vec{h} (\vec{v} \cdot \vec{\lambda}_3) = 0 \quad (18.6)$$

Si denotamos por  $F$  la expresión

$$F = (\vec{h} \cdot \vec{\lambda}_3) - (\vec{r} \cdot \vec{\lambda}_2)$$

y descomponemos la velocidad  $\vec{v}$ , en la forma

$$\vec{v} = \frac{\vec{h} \wedge \vec{r}}{r^2} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (18.7)$$

la condición (18.6) equivale a la siguiente

$$\left( \frac{F}{r^2} \vec{h} - \vec{\lambda}_3 \right) \wedge \vec{r} + \left( \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v}) F}{r^2} + (\vec{v} \cdot \vec{\lambda}_2) \right) \vec{r} - (\vec{v} \cdot \vec{\lambda}_3) \vec{h} = 0 \quad (18.8)$$

que se cumple, si y sólo si, se verifica el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 & (\vec{v} \cdot \vec{\lambda}_3) = 0 \\
 & \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^2} \{ (\vec{h} \cdot \vec{\lambda}_3) - (\vec{r} \cdot \vec{\lambda}_2) \} + (\vec{v} \cdot \vec{\lambda}_2) = 0 \\
 & \left\{ [(\vec{h} \cdot \vec{\lambda}_3) - (\vec{r} \cdot \vec{\lambda}_2)] \frac{\vec{h}}{r^2} - \vec{\lambda}_3 \right\} \wedge \vec{r} = 0
 \end{aligned}
 \tag{18.9}$$

Sistema que resulta ser compatible, y cuyas soluciones son, como resulta inmediato comprobar, las siguientes:

$$\vec{\lambda}_3 = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\lambda}_2 \uparrow \uparrow \vec{h} \quad \text{c. q. d.}$$

(b) Para arcos balísticos en el plano problema plano.

El problema plano de trayectorias optimales consiste, en que los arcos balísticos que componen una trayectoria impulsiva, carente de arcos singulares (IT) son coplanarios. De ahí que  $\vec{p}_v$  es un vector de dicho plano orbital, ya que en caso contrario la componente perpendicular nos haría cambiar de plano, al efectuar una impulsión.

Si  $\vec{p}_v$  debe ser un vector del plano orbital entonces  $\vec{\lambda}_2$  tiene la dirección de  $\vec{h}$  y  $\vec{\lambda}_3$  es un vector perpendicular a  $\vec{h}$ . Es decir

$$\vec{\lambda}_2 = \frac{(\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{h}) \vec{h}}{h^2}, \quad \vec{\lambda}_3 = \frac{(\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{e}) \vec{e}}{e^2} + \frac{[\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{h} \vec{e}]}{h^2 e^2} (\vec{h} \wedge \vec{e})
 \tag{18.10}$$

Y llevando dichas expresiones al sistema (17.4) resulta

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1 &= \lambda_1 - k_2 p \\
 \Lambda_2 &= (\lambda_2 \cdot \vec{h}) \frac{\vec{h}}{h^2} + k_1 \vec{e} \\
 \Lambda_3 &= \lambda_3 + k_1 \frac{\vec{h}}{\mu} + k_2 \vec{e} \\
 \Lambda_4 &= \lambda_4
 \end{aligned}
 \tag{18.11}$$

con lo que podemos elegir

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{(\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{e})}{e^2}
 \tag{18.12}$$

para que la expresión del primer, en el problema plano, dependa de cuatro constantes arbitrarias, como debe ser. Por lo tanto  $\vec{p}_v$  viene dado por

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_v &= \tilde{\Lambda}_1 \vec{v} + \tilde{\Lambda}_2 (\vec{h} \wedge \vec{r}) + \tilde{\Lambda}_3 [\vec{h} \wedge (\vec{h} \wedge \vec{e}) + \\
 &+ \vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge (\vec{h} \wedge \vec{e}))] + \tilde{\Lambda}_4 (2\vec{r} - 3t\vec{v})
 \end{aligned}
 \tag{18.13}$$

donde las constantes  $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2, \tilde{\Lambda}_3$  y  $\tilde{\Lambda}_4$  vienen dadas por el sistema

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_1 &= \lambda_1 + \frac{(\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{e})}{e^2} p = \Lambda_1 \\ \tilde{\Lambda}_2 &= \frac{(\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{h})}{h^2} \pm \frac{(\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{e})}{a e^2} = \frac{(\vec{\Lambda}_2 \cdot \vec{h})}{h^2} \\ \tilde{\Lambda}_3 &= \frac{[\vec{\lambda}_3 \vec{h} \vec{e}]}{h^2 e^2} = \frac{[\vec{\Lambda}_3 \vec{h} \vec{e}]}{h^2 e^2} \\ \tilde{\Lambda}_4 &= \Lambda_4 = \lambda_4\end{aligned}$$

Por último simplificando la (18.13) obtenemos la siguiente expresión del primer

$$\vec{p}_v = \Lambda_1 \vec{v} - \Lambda_3 h^2 \vec{e} + [\Lambda_2 - \Lambda_3 (\vec{v} \cdot \vec{e})] (\vec{h} \wedge \vec{e}) + \lambda_4 (2\vec{r} - 3t\vec{v}) \quad (18.14)$$

válida para el problema plano de transferencias impulsivas, y donde hemos suprimido las tildes en las constantes a fin de simplificar la notación.

*Consecuencia 18.1.* — Si la duración de recorrido se supone indiferente, entonces el primer queda reducido a la forma

$$\vec{p}_v = \Lambda_1 \vec{v} - \Lambda_3 h^2 \vec{e} + [\Lambda_2 - \Lambda_3 (\vec{v} \cdot \vec{e})] (\vec{h} \wedge \vec{r}) \quad (18.15)$$

En efecto, por la consecuencia 17.1 en este caso  $\lambda_4 = 0$ , de lo que se deduce, a partir de (18.13), la (18.15).

*Consecuencia 18.2.* — En el supuesto de que la orientación y la duración sean indiferentes ( $\lambda_4 = 0, \vec{\lambda}_3 = 0$  y  $\vec{\lambda}_2 \uparrow \vec{h}$ ) el vector primer viene dado por

$$\vec{p}_v = \lambda_1 \vec{v} + (\vec{\lambda}_2 \wedge \vec{r})$$

o bien

$$\vec{p}_v = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 (\vec{h} \wedge \vec{r}) \quad (18.16)$$

donde hemos denotado por  $\lambda_2$  el cociente  $|\vec{\lambda}_2|/h$ .

*Teorema 9.* — Para transferencias orbitales planas con duración indiferente el vector  $\vec{p}_v$  puede ponerse en la forma

$$\vec{p}_v = \lambda \vec{v} + \vec{w} + \vec{\alpha} \quad (18.17)$$

siendo  $\vec{w}$  un vector constante y  $\vec{\alpha}$  un vector perpendicular a  $\vec{r}$ . Además el vector  $\vec{w}$  admite la descomposición

$$\vec{w} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

donde  $\vec{\beta}$  es un vector perpendicular a  $\vec{v}$ .

*Demostración.* — Cabe distinguir los dos casos siguientes:

(a) para  $\vec{\lambda}_2 = 0$ .

Con este presupuesto el vector  $\vec{p}_v$  queda en la forma

$$\vec{p}_v = \lambda_1 \vec{v} + \vec{h} \wedge \vec{\lambda}_3 + \vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{\lambda}_3)$$

que como vemos ya cumple los requisitos del enunciado del teorema, ya que eligiendo como vector constante  $\vec{w}$  el término  $\vec{h} \wedge \vec{\lambda}_3$  y como vector  $\vec{\alpha}$  el tercer sumando,  $\vec{\alpha} = \vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{\lambda}_3)$ , resulta

$$\vec{\beta} = \vec{w} - \vec{\alpha} = \vec{v} \wedge (\vec{\lambda}_3 \wedge \vec{r})$$

que es un vector perpendicular a la velocidad  $\vec{V}$ . Con todo ello vemos que  $\vec{p}_v$ , en este caso, admite la descomposición (18.17) c. q. d.

(b) si  $\vec{\lambda}_2 \neq 0$ .

Es preciso restringirse al problema plano ( $\vec{\lambda}_2 \uparrow \vec{h}$ ) para poder realizar la demostración. Con estos supuestos el término  $\vec{\lambda}_2 \wedge \vec{r}$  admite una descomposición de la forma

$$(\vec{\lambda}_2 \wedge \vec{r}) = \mp a \frac{(\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{h})}{h^2} [p \vec{v} - (\vec{h} \wedge \vec{e}) - \vec{r} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{e})] \quad (18.18)$$

En efecto, si con  $(X, Y)$  designamos las componentes del vector velocidad  $\vec{V}$ , en las direcciones radial y transversal, y con  $(e_x, e_y)$  las componentes del vector periastro  $\vec{e}$ , según las mismas direcciones. Entonces la (18.18) equivale al sistema de ecuaciones

$$pX + h e_y = 0$$

$$\mp \frac{a}{h} [pY - h e_x - r(X e_y + Y e_x)] = r$$

que resultan ser un par de identidades, si tenemos en cuenta las relaciones siguientes del movimiento kepleriano

$$h^2 = \mu p \qquad h = r Y$$

$$X = \frac{h}{p} e \operatorname{sen} f \qquad Y = \frac{h}{p} (1 + e \cos f)$$

$$e_x = e \cos f \qquad e_y = -e \operatorname{sen} f$$

$$X^2 + Y^2 - 2 \frac{\mu}{r} = \pm \frac{\mu}{a}$$

Si llevamos la (18.18) a (16.12), teniendo en cuenta que  $\lambda_4 = 0$ , si la duración es indiferente, el vector primer vendrá dado por

$$\vec{p}_v = \left( \lambda_1 \mp p a \frac{(\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{h})}{h^2} \right) \vec{v} + \vec{h} \wedge \vec{\lambda}_3 \pm a \frac{(\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{h})}{h^2} (\vec{h} \wedge \vec{e})$$

$$+ \vec{r} \wedge [(\vec{v} \wedge \vec{\lambda}_3) \pm a \frac{(\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{h})}{h^2} (\vec{v} \wedge \vec{e})] \quad (18.19)$$

expresión equivalente a la

$$\vec{p}_v = \lambda \vec{v} + \vec{w} + \vec{\alpha}$$

siempre y cuando se tomen

$$\lambda = \lambda_1 \mp p a \frac{(\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{h})}{h^2}$$

$$\vec{w} = \vec{h} \wedge \vec{\lambda}_3 \pm a \frac{|\vec{\lambda}_2|}{h} (\vec{h} \wedge \vec{e})$$

$$\vec{\alpha} = \vec{r} \wedge [\vec{v} \wedge \vec{\lambda}_3 \pm a \frac{|\vec{\lambda}_2|}{h} (\vec{v} \wedge \vec{e})]$$

Para que el teorema quede completamente demostrado, nos falta por ver que el vector  $\vec{\beta} = \vec{w} - \vec{\alpha}$  es ortogonal a  $\vec{v}$ . Ahora bien por las relaciones anteriores se tiene

$$\begin{aligned} (\vec{\beta} \cdot \vec{v}) &= [\vec{v} \vec{h} \vec{\lambda}_3] \pm a \lambda_2 [\vec{v} \vec{h} \vec{e}] - [\vec{v} \vec{r} (\vec{v} \wedge \vec{\lambda}_3)] \mp \\ & a \lambda_2 [\vec{v} \vec{r} (\vec{v} \wedge \vec{e})] = 0 \end{aligned}$$

ya que se cumplen las identidades siguientes:

$$[\vec{v} \vec{h} \vec{\lambda}_3] = [\vec{v} \vec{r} (\vec{v} \wedge \vec{\lambda}_3)]$$

$$[\vec{v} \vec{h} \vec{e}] = [\vec{v} \vec{r} (\vec{v} \wedge \vec{e})]$$

(c) *El vector primer sobre una órbita hiperbólica.*

Sea  $H$  una hipérbola (trayectoria balística), de foco  $S$  y velocidades residuales en el infinito  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ . Entonces si denotamos por  $\emptyset$  el ángulo obtuso entre  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ , para un punto cualquiera de  $H$  (Fig. 18.2) las expresiones de los vectores  $p_v$  y  $p_r$  sobre  $H$  son las siguientes:

$$p_v = \Lambda_1 \vec{v} - \Lambda_3 h^2 \vec{e} + \Lambda_3 [V_1 - v \cos \emptyset] (\vec{h} \wedge \vec{r}) \quad (18.20)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_r &= \Lambda_1 \frac{\mu \vec{r}}{r^3} - \Lambda_3 \frac{\mu}{r^3} \left( \frac{h^2}{\mu} - r \right) (\vec{h} \wedge \vec{r}) - \\ & - \Lambda_3 [V_1 - v \cos \emptyset] (\vec{h} \wedge \vec{v}) \end{aligned} \quad (18.21)$$

Además, en el infinito de la trayectoria,  $\vec{p}_r = \vec{0}$ . Es decir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{p}_r = \vec{0} \quad (18.22)$$

En efecto, es conocido que sobre un arco balístico,  $|\vec{p}_v| \leq 1$  y en el supuesto de que  $\Lambda_2 \neq v_1$ ,  $\Lambda_3$  se tendría

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\vec{p}_v| = \infty$$

que contradice la mencionada acotación de  $|\vec{p}_v|$ . Por lo tanto, sobre una hipérbola  $H$  se tiene que verificar la relación

$$\Lambda_2 = V_1 \Lambda_3 \quad (18.23)$$

entre los parámetros  $\Lambda_2$  y  $\Lambda_3$ . Y de ésta se deduce, pasando al límite en la (18.21), la (18.22).

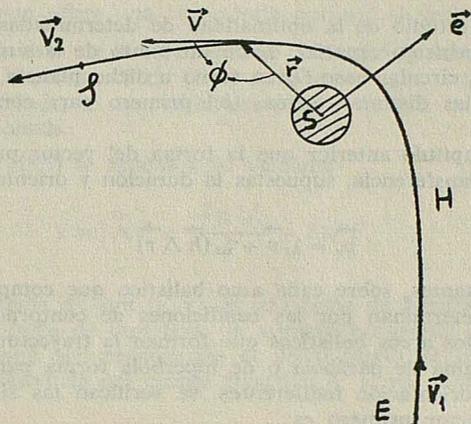


FIG. 18.2

**Teorema 10.** — En el infinito de una hipérbola  $H$  el vector primero es de una de las dos formas siguientes:

$$(\vec{p}_v)_E = \Lambda_1 - \Lambda_3 h^2 \vec{e} + \Lambda_3 \frac{\mu}{v_1^2} (\vec{h} \wedge \vec{v}_1) \quad (18.24)$$

$$(\vec{p}_v)_S = \Lambda_1 - \Lambda_3 h^2 \vec{e} + \Lambda_3 \frac{\mu}{v_2^2} (\vec{h} \wedge \vec{v}_2) \quad (18.25)$$

**Demostración.** — Si pasamos al límite en la expresión (18.20) resulta

$$(\vec{p}_v)_E = \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{p}_v = \Lambda_1 - \Lambda_3 h^2 \vec{e} + \Lambda_3 \vec{P} \quad (18.26)$$

donde  $\vec{P}$  es el límite siguiente

$$\vec{P} = \lim_{r \rightarrow \infty} (V_1 - v) \cos \phi (\vec{h} \wedge \vec{r}) = \frac{\mu}{V_1^2} (\vec{h} \wedge \vec{v}_1)$$

cuyo valor sustituido en la (18.26) nos permite obtener la expresión (18.24).

La (18.25) se deduce, por consideraciones parecidas, sustituyendo la velocidad residual en  $E$  por la velocidad residual en  $S$ , y notando que en este caso la (18.23) se convierte en la

$$\Lambda_2 = -V_2 \Lambda_3 \quad (18.27)$$

## VI. Maniobras de transferencia orbital a duración y orientación indiferentes

### 19 Formas especiales del vector primer para condiciones de contorno particulares

Antes de abordar el estudio de la optimalidad de determinadas maniobras de transferencia orbital de un vehículo espacial, desde un punto de la superficie de un planeta o bien desde una órbita circular base  $O_B$  en torno a dicho planeta, a otro punto u órbita de llegada, veamos las distintas formas del primero para condiciones de contorno particulares.

Hemos visto en el capítulo anterior que la forma del vector primero sobre una trayectoria impulsiva de transferencia, supuestas la duración y orientación indiferentes, era la siguiente:

$$\vec{p}_v = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 (\vec{h} \wedge \vec{r}) \quad (19.1)$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son constantes, sobre cada arco balístico que compone la trayectoria de transferencia, que se determinan por las condiciones de contorno de la transferencia, o por la naturaleza de los arcos balísticos que forman la trayectoria.

*Lema 1.* — Si una rama de parábola o de hipérbola forma parte de una trayectoria optimal, a duración y orientación indiferentes, se verifican las siguientes propiedades:

- (1) La forma del vector primero es:

$$\vec{p}_v = \lambda_1 \vec{v} \quad (19.2)$$

- (2) El periastro  $P$  es un punto de impulsión, con lo que  $\lambda_1$  vendrá dada por una de las expresiones

$$\lambda_1 = \frac{1}{L} \quad (19.3)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{L^2 + V_r^2}} \quad (19.4)$$

donde  $L$  es la velocidad de liberación, del planeta o satélite, en el punto  $P$ , y  $V_r$  representa la velocidad residual en el infinito de la rama de hipérbola (Fig. 19.1).

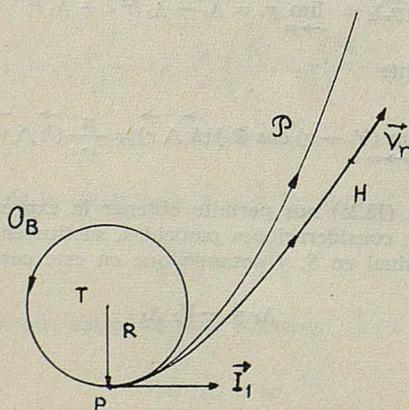


FIG. 19.1

*Demostración.* — En efecto, a partir de la expresión de  $\vec{p}_v$  (19.1) podemos calcular  $|\vec{p}_v|^2$  que vendrá dado por

$$|\vec{p}_v|^2 = \frac{2\mu\lambda_1^2}{r} + \lambda_2^2 h^2 r^2 + 2\lambda_1(\lambda_1 E + \lambda_2 h^2) \quad (19.5)$$

y teniendo en cuenta que sobre una trayectoria optimal el vector primer está acotado ( $|\vec{p}_v| \leq 1$ ), resulta a la vista de la (19.5) que la constante  $\lambda_2$  debe ser nula para que se cumpla este requisito. Y por tanto de (19.1) deducimos: que si  $\lambda_2 = 0$ , sobre una rama de parábola o de hipérbola, la expresión del primer vendrá dada por la (19.2), y la propiedad (1) queda probada.

Si  $\lambda_2 = 0$  la función (19.5) se reduce a la siguiente

$$y = |\vec{p}_v|^2 = \frac{2\mu\lambda_1^2}{r} + 2\lambda_1^2 E \quad (19.6)$$

cuya gráfica, en un sistema de ejes  $(r, y)$ , es una rama de hipérbola equilátera si  $E = 0$  (parábola), o bien una rama de hipérbola de asíntota horizontal la recta  $y = 2\lambda_1^2 E$  (hipérbola) (fig. 19.2) lo que nos prueba que el único punto de impulsión es aquel que está situado a menor distancia del centro atractivo  $A$ , y por tanto dicho punto será el periastro  $P$ .

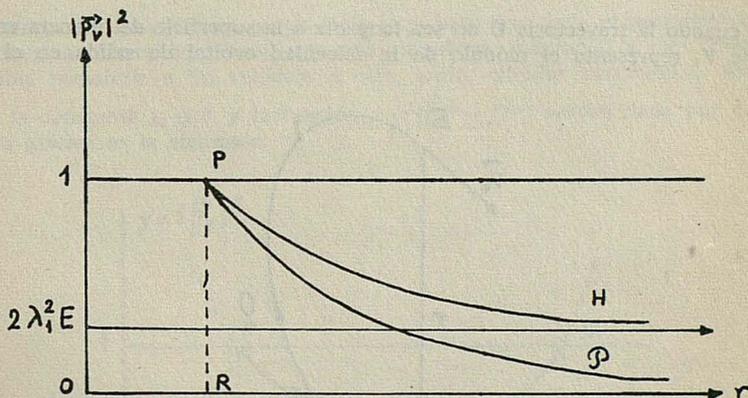


FIG. 19.2

Si el periastro  $P$  es un punto de impulsión, en dicho punto el módulo del vector primer debe ser la unidad con lo que la constante  $\lambda_1$  vendrá dada por

$$\lambda_1 = \frac{1}{V_p}$$

siendo  $V_p$  la velocidad en el periastro, que coincide con la velocidad de liberación en el punto  $P$  en el caso de una parábola, y con  $U = \sqrt{L^2 + V_r^2}$  si es una hipérbola.

*Observación.* — Si la duración y la orientación son diferentes veamos que las impulsiones en el infinito de una hipérbola no son jamás optimales, por verificarse  $2\lambda_1^2 E < 1$ .

En efecto, si se tiene en cuenta el valor de  $\lambda_1$  obtenido anteriormente resulta:

$$2\lambda_1^2 E = \frac{V_r^2}{L^2 + V_r^2} < 1$$

que nos prueba la imposibilidad de una segunda impulsión en el infinito. En consecuencia una transferencia optimal entre dos puntos  $P$  y  $S$  situados a las distancias  $R$  y  $r$  del centro atractivo  $T$  puede realizarse mediante un par de ramas de parábola, siendo los puntos de impulsión  $P$  y  $S$  respectivamente, pero nunca mediante dos ramas de hipérbola, ya que en este caso para cambiar de hipérbola deberíamos realizar una impulsión en el infinito, y como hemos visto esto es imposible.

Además de los dos casos citados en el Lema 1, existe uno en el que la constante  $\lambda_2$  es también nula, y corresponde a una maniobra de transferencia que se analiza en el siguiente teorema.

*Teorema 11.* — Supongamos una maniobra de transferencia orbital a duración y orientación indiferentes, que desde un punto  $A$ , perteneciente a la superficie de un planeta  $T$  de radio  $R$ , nos permita llegar a un punto  $S$  situado a una distancia  $r > R$  con una velocidad  $V_E$  dada. Entonces el vector primer sobre la órbita  $O$  de transferencia es de la forma

$$p_v = \frac{\vec{V}}{V_0} \quad (19.7)$$

siempre y cuando la trayectoria  $O$  no sea tangente a la superficie del planeta en el punto  $A$ , y donde  $V_0$  representa el módulo de la velocidad orbital de salida en el punto  $A$ , (fig. 19.3).

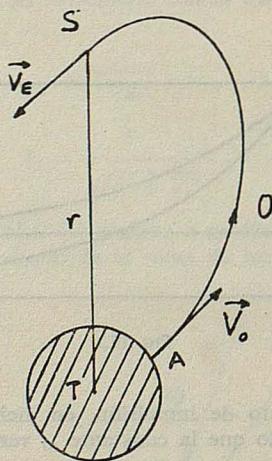


FIG. 19.3

*Demostración.* — En efecto, si el punto  $A$  está en reposo, es claro, que para poder alcanzar el punto  $S$  se debe efectuar una impulsión en el punto  $A$  de salida. Por lo tanto en dicho se verificarán las siguientes condiciones:

$$|\vec{p}_v| = 1 \quad \vec{p}_v \uparrow \vec{V}_0$$

y como excluida la posibilidad de una órbita  $O$  tangencial el producto escalar  $(\vec{V}_0 \cdot \vec{R})$  es

nulo, para que se cumplan las condiciones necesarias de optimalidad, las constantes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen que tomar los siguientes valores

$$\lambda_1 = \frac{1}{V_0} \quad \lambda_2 = 0$$

con lo que queda probado el teorema.

*Teorema 12.* — Toda transferencia optimal, a duración y orientación indiferentes, entre dos órbitas circulares de centro  $T$  y radios  $R$  y  $r > R$  es biimpulsional. Además si la órbita de transferencia consta de un solo trozo de trayectoria kepleriana, entre las constantes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  existe una relación de la forma

$$\frac{\lambda_2 h}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{2\mu}{rR(r+R)}} \quad (19.8)$$

*Demostración.* — Se pueden distinguir dos partes:

1.<sup>a</sup> La trayectoria de transferencia consta de un arco kepleriano.

En este caso la constante  $\lambda_2 \neq 0$ , pues de lo contrario, el primer sobre el arco transferencia sería

$$\vec{p}_v = \lambda_1 \vec{v}$$

y por lo tanto sólo existiría un punto  $P$  de impulsión que sería el periastro de la órbita de transferencia. Ahora bien, mediante una impulsión tangencial a una órbita circular es imposible transferir a un vehículo a otra órbita circular concéntrica. Así pues, en este caso la constante  $\lambda_2 \neq 0$ , y la función  $y = |\vec{p}_v|^2 = f(r)$  vendrá dada por la expresión (19.5) cuya gráfica es la siguiente:

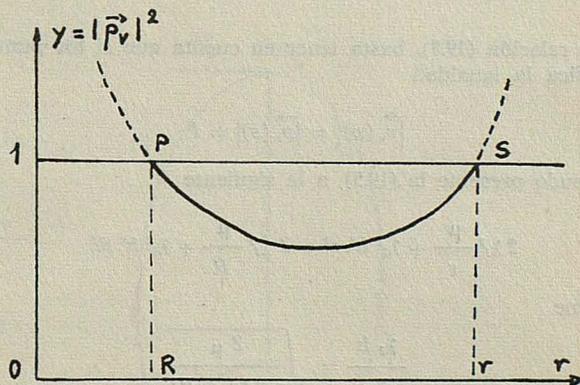


FIG. 19.4

y como vemos corta a la recta  $y = 1$  en dos puntos  $P$  y  $S$  pertenecientes a las órbitas circulares de salida y llegada, que deben ser dos puntos de impulsión, puesto que en ellos el primer es de módulo unidad.

Por otra parte, aplicando las condiciones de transversalidad (3.13) a los puntos  $P, S$  de impulsión, se deduce: que el vector primer  $\vec{p}_v$  debe ser tangente a las órbitas circu-

lares y a la trayectoria de transferencia en los puntos de impulsión. De donde resulta, que  $P$  y  $S$  son los ápsides de la trayectoria de transferencia, (fig. 19.5).

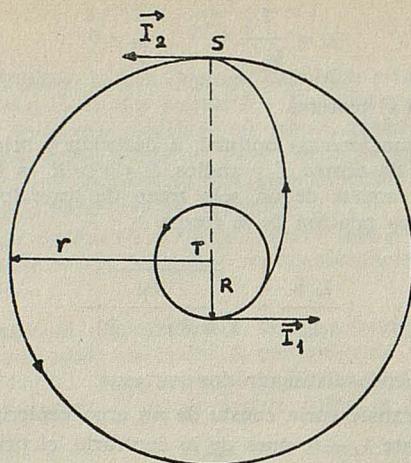


FIG. 19.5

A una transferencia de este tipo, mediante una semielipse bitangente, se la llama transferencia de Hohmann (1925), y cuyo costo  $C_H$  viene dado por

$$C_H = \sqrt{\frac{\mu(I + \rho)}{R\rho}} (\sqrt{2} - \sqrt{I + \rho}) \quad (19.9)$$

donde  $\rho = r/R$ .

Para deducir la relación (19.8), basta tener en cuenta que si los puntos  $P$  y  $S$  son de impulsión se verifica la igualdad

$$|\vec{p}_v(p)| = |\vec{p}_v(s)| = 1$$

que equivale, teniendo presente la (19.5), a la siguiente

$$2\lambda_1^2 \frac{\mu}{r} + \lambda_2^2 h^2 r^2 = 2\lambda_1^2 \frac{\mu}{R} + \lambda_2^2 h^2 R^2$$

de la que se obtiene

$$\frac{\lambda_2 h}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{2\mu}{rR(r+R)}}$$

2.<sup>a</sup> La trayectoria de transferencia consta de más de un arco kepleriano.

En principio, a la vista de que las órbitas circulares dadas, se representan en el plano  $(r, y)$  mediante un par de puntos  $P, S$  de coordenadas  $(R, 1), (r, 1)$  (fig. 19.4), resulta: para que una trayectoria optimal de transferencia entre órbitas circulares dadas cumpla las condiciones necesarias de optimalidad, el gráfico de la curva  $y = |\vec{p}_v|^2 = f(r)$  debe situarse por debajo de la recta  $y = 1$ , salvo para un conjunto finito de puntos de impulsión en que corta a dicha recta.

OPTIMIZACION DE TRAYECTORIAS Y EL EFECTO DE TRAMPOLIN LUNAR

Por otra parte, si se supone que la trayectoria de transferencia consta de un arco kepleriano entonces, el gráfico de la función  $y = f(r)$  será uno de los tipos de la (figura 19.6).

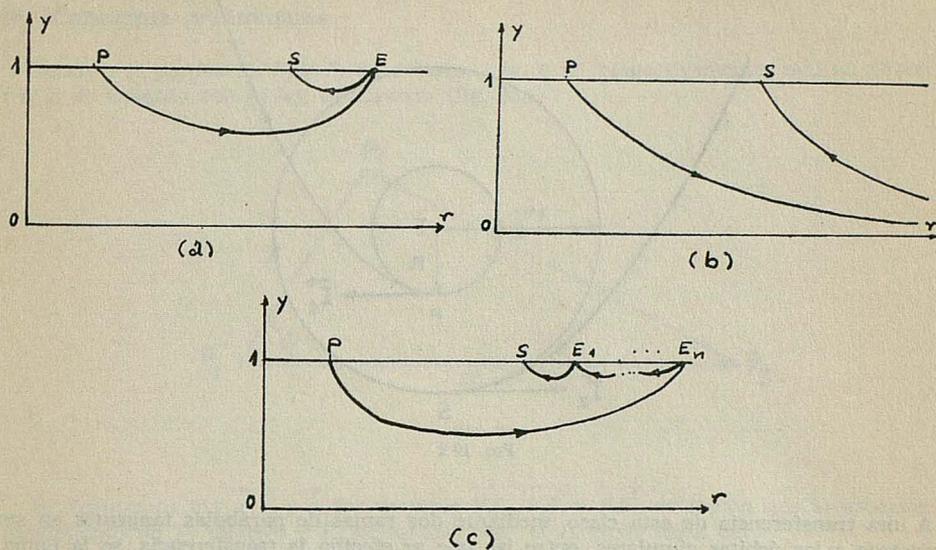


FIG. 19.6

El (a) representa una transferencia biéptica (fig. 19.7), con tres puntos de impulsión  $P$ ,  $S$  y  $E$ , siendo en  $P$  y  $E$  las impulsiones aceleratrices, mientras que en  $S$  la impulsión es deceleratriz.

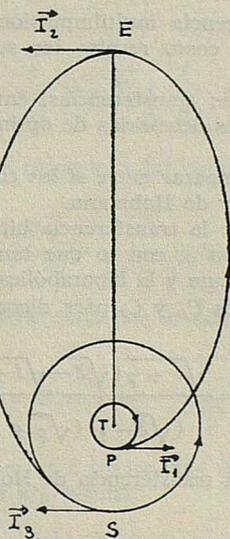


FIG. 19.7

El (b) representa un caso límite del anterior, cuando el punto de impulsión  $E$  se aleja indefinidamente (fig. 19.8), y la impulsión en dicho punto tiende a ser nula, con lo que las elipses tienden a ser parábolas.

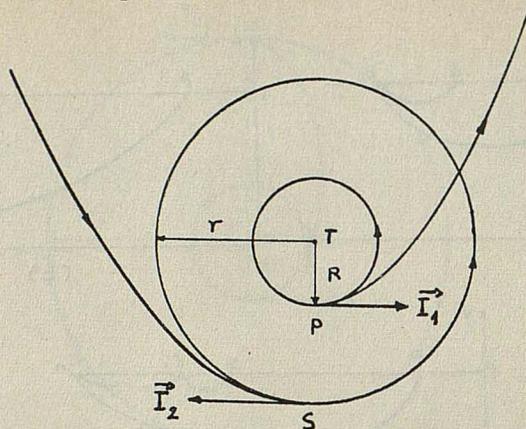


FIG. 19.8

A una transferencia de esta clase, mediante dos ramas de parábolas tangentes en sus periastrós a las órbitas circulares, entre las que se efectúa la transferencia, se la llama: transferencia bipolarbólica y puede verse que su costo  $C_p$  es

$$C_p = (\sqrt{2}-1) \sqrt{\frac{\mu}{R\rho}} (1 + \sqrt{\rho}) \quad (19.10)$$

El (c) representa una transferencia multiimpulsional, generalización del caso (a), y que estudiaremos puesto que su costo resulta ser superior al de los dos tipos anteriores.

Una vez analizadas las distintas transferencias, entre dos órbitas circulares concéntricas, que cumplen las condiciones necesarias de optimalidad, queda por ver cuál de entre ellas es la optimal global.

Para probarlo tenemos que comparar entre sí los consumos de cada una de las transferencias, bielíptica, bipolarbólica y de Hohmann.

Puede verse que el consumo de la transferencia bipolarbólica es inferior al de la bielíptica cualquiera que sea la razón  $\rho$ , con lo que tan sólo quedan dos tipos de transferencias a comparar, la de Hohmann y la bipolarbólica. Ahora bien, si se tienen en cuenta las expresiones de los consumos  $C_H$  y  $C_p$  para dichas transferencias se tiene:

$$\frac{C_H}{C_p} = \frac{\sqrt{1+\rho}(\sqrt{2}-\sqrt{1+\rho})}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{\rho}+1)} \quad (19.11)$$

de forma, que si  $1 < \rho \leq 11.938$ , la transferencia de Hohmann es la optimal, en caso contrario lo es la bipolarbólica.

## VII. Esfera de influencia

### 20. Conceptos preliminares

Dados tres puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  de masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  respectivamente, que se atraen entre sí de acuerdo con la ley de Newton (fig. 20.1).

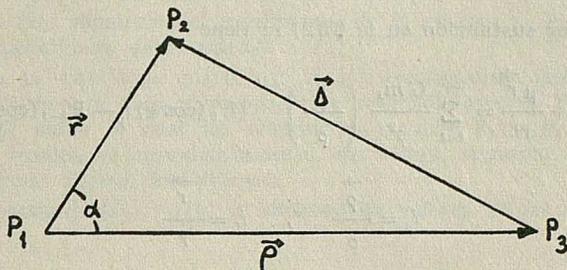


FIG. 20.1

Si denotamos por  $\vec{r}$ ,  $\vec{\rho}$  y  $\vec{\Delta}$  los vectores  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $\overrightarrow{P_1P_3}$  y  $\overrightarrow{P_2P_3}$ , es sabido que la ecuación del movimiento de  $P_2$  relativo a  $P_1$  perturbado por el  $P_3$  viene dada por

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} - G \left( m_3 \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} + m_3 \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right) \quad (20.1)$$

$$\mu = G(m_1 + m_2)$$

y si se tiene en cuenta que

$$\frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} + \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} = -\vec{\nabla} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{\rho})}{\rho^3} \right)$$

donde  $\vec{\nabla}$  es el operador gradiente respecto a las componentes del vector  $\vec{r}$ , la (20.1) puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{\nabla} R \quad (20.2)$$

donde  $R$  es la función perturbadora dada por la ecuación

$$R = G m_3 \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{\rho})}{\rho^3} \right)$$

Aun se puede poner la (20.2) en otra forma más interesante. En efecto, si desarrollamos  $1/\Delta$  en serie de potencias de  $r/\rho$  resulta

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{r}{\rho} \right)^k P_k(\cos \alpha) \quad (20.4)$$

donde  $P_k(\cos \alpha)$  son los polinomios de Legendre en  $\cos \alpha$ , y  $\alpha$  el ángulo que forman los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{\rho}$ , tal que

$$\cos \alpha = (\vec{r} \cdot \vec{\rho}) / r \rho$$

Con todo ello, la función  $R$  queda en la forma

$$R = \frac{G m_3}{\rho} \left[ 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{r}{\rho} \right)^k P_k(\cos \alpha) \right] \quad (20.5)$$

Y finalmente, por sustitución en la (20.2) se tiene

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu \vec{r}}{r^3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{G m_3}{\rho^2} \left( \frac{r}{\rho} \right)^{k-1} [P'_k(\cos \alpha) i_p - P'_{k-1}(\cos \alpha) i_r] \quad (20.6)$$

donde

$$i_p = \frac{\vec{\rho}}{\rho}, \quad i_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

y con  $P'_k(\cos \alpha)$  denotamos la derivada del polinomio de Legendre  $P_k$  respecto a  $\cos \alpha$ .

## 21. Superficie límite. Esfera de influencia

Cuando se considera el movimiento perturbado de un cuerpo  $P_2$  respecto a otro  $P_1$ , puede tener interés conocer el conjunto de valores de  $r$  para los cuales la aceleración de perturbación debida a  $P_3$  resulta ser aproximadamente igual a la aceleración debida a  $P_1$ .

Si en la ecuación (20.6) consideramos el cociente  $r/\rho$  muy pequeño, es decir, despreciamos los términos de orden superior al primero, dicha ecuación se convierte en

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu \vec{r}}{r^2} = \frac{G m_3}{\rho} \frac{r}{\rho} (3 \cos \alpha i_p - i_r) \quad (21.1)$$

Y si igualamos los módulos de las aceleraciones principal y de perturbación nos queda, para el cociente  $r/\rho$ , la expresión

$$\frac{r}{\rho} = (1 + 3 \cos^2 \alpha)^{-1/6} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_3} \right)^{1/3} \quad (21.2)$$

válida, tan sólo en el supuesto de que  $(m_1 + m_2) \ll m_3$ .

La ecuación (21.2) define una superficie  $\Sigma$  alrededor de  $P_1$ , en cuyos puntos la aceleración de perturbación de  $P_3$  es igual a la aceleración principal. A la superficie  $\Sigma$  en cuestión se la llama: superficie límite o separatriz.

Veamos, a continuación, otro concepto introducido por Laplace que recibe el nombre de: Esfera de influencia o de actividad.

### Definición de esfera de influencia

Cuando se considera el movimiento de un cuerpo  $P_2$  en presencia de otros dos  $P_1$  y  $P_3$ , es importante, en el cálculo de trayectorias, seleccionar el origen respecto al cual se va a considerar el movimiento de  $P_2$ . De manera más precisa, se trata de discernir cuál de las descripciones siguientes

$$(D_1) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{G(m_1 + m_2) \vec{r}}{r^3} = -G m_3 \left( \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} + \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right)$$

$$(D_3) \quad \frac{d^2 \vec{\Delta}}{dt^2} + \frac{G(m_2 + m_3) \vec{\Delta}}{\Delta^3} = -G m_1 \left( \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \right)$$

es preferible, y en qué instante se debe realizar el cambio de origen.

La descripción (D<sub>1</sub>) representa el movimiento de P<sub>2</sub> relativo a P<sub>1</sub>, mientras que la (D<sub>3</sub>) expresa el movimiento de P<sub>2</sub> relativo a P<sub>3</sub>.

Según Laplace, la ventaja de una u otra de las descripciones depende de la razón R de la fuerza perturbadora a la correspondiente atracción central. Y resulta que la superficie límite Σ sobre la cual las respectivas razones R<sub>1</sub> y R<sub>3</sub>, correspondiente a (D<sub>1</sub>) o (D<sub>3</sub>), son iguales, es aproximadamente una esfera, supuesto que r < ρ. A tal esfera se la denomina: *Esfera de influencia*.

En efecto, a partir de (D<sub>1</sub>) y (D<sub>3</sub>) se obtienen los valores de las razones R<sub>1</sub> y R<sub>3</sub> por las expresiones:

$$R_1 = \frac{m_3}{m_1 + m_2} \left( \frac{r}{\Delta} \right)^2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{\Delta}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{r}{\rho} \cos \alpha \right) + \left( \frac{\Delta}{\rho} \right)^4 \right]^{1/2}$$

donde

$$\frac{\Delta}{\rho} = \left[ 1 - 2 \frac{r}{\rho} \cos \alpha + \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 \right]^{1/2}$$

y

$$R_3 = \frac{m_1}{(m_2 + m_3)} \left( \frac{r}{\rho} \right)^{-2} \left( \frac{\Delta}{\rho} \right)^2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{\rho} \right) \cos \alpha + \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 \right]^{1/2}$$

La superficie límite Σ queda definida por el lugar geométrico de los puntos que verifican R<sub>1</sub> = R<sub>3</sub>, lo que es equivalente a que la razón r/ρ verifique la ecuación

$$\left( \frac{r}{\rho} \right)^4 = \frac{m_1 (m_1 + m_2)}{m_3 (m_2 + m_3)} \left( \frac{\Delta}{\rho} \right)^4 \left( \frac{1 - 2 (r/\rho)^2 \cos \alpha + (r/\rho)^4}{1 - 2 \Delta/\rho [1 - r/\rho \cos \alpha] + (\Delta/\rho)^4} \right)^{1/2} \quad (21.3)$$

o también

$$\frac{r}{\rho} = \left[ \left( \frac{m_1 (m_1 + m_2)}{m_3 (m_2 + m_3)} \right)^{1/5} (1 + 3 \cos^2 \alpha)^{1/10} - \frac{2}{5} \cos \alpha A \right] \quad (21.4)$$

$$A = (1 + 6 \cos^2 \alpha) / (1 + 3 \cos^2 \alpha)$$

después de despreciar los términos de r/ρ de órdenes superiores al primero.

La (21.4) admite una simplificación notoria, en el caso de ser m<sub>2</sub> despreciable frente a m<sub>1</sub> y m<sub>3</sub>, pero el caso más interesante en la práctica es aquel en que m<sub>2</sub> ≈ 0 y m<sub>3</sub> « m<sub>1</sub>. Con lo que la (21.4) queda reducida a la igualdad

$$\frac{r}{\rho} = \left( \frac{m_1}{m_3} \right)^{2/5} \quad (21.5)$$

que representa una esfera  $\Sigma_r(P_1)$  de centro  $P_1$  y radio  $r = \rho (m_1/m_3)^{2/3}$ , llamada esfera de influencia de  $P_1$  respecto a  $P_3$ .

De todo lo expuesto se deduce la siguiente conclusión: Dentro de la esfera de influencia  $\Sigma_r(P_1)$  es apropiado referir el movimiento de  $P_2$  a  $P_1$  tomado como origen, mientras que en el exterior de la misma debemos utilizar  $P_3$  como origen de coordenadas para estudiar el movimiento de  $P_2$ . El empalme de los trozos de trayectoria interior y exterior a  $\Sigma_r(P_1)$  se realiza en un punto de dicha superficie. Con ello es posible aproximar la trayectoria real de  $P_2$ , moviéndose en el campo de  $P_1$  y  $P_3$ , mediante trozos de órbitas keplerianas  $T_I$  y  $T_E$  del punto  $P_2$  atraído por  $P_1$  o  $P_3$ , respectivamente, y conectadas en un punto  $S$  de la esfera de influencia.

Los resultados anteriores son aplicables al problema del movimiento de un vehículo espacial en el sistema Tierra-Luna, con lo cual la esfera de influencia de la Luna respecto a la Tierra posee un radio  $r_\Sigma$  de 64.066 km. aproximadamente. Es decir un sexto de la distancia Tierra-Luna.

## 22. «La hipótesis de esfera de influencia»

La noción de esfera de influencia, que se introduce cuando se trata de elegir el sistema de referencia adecuado par integrar un movimiento de dos cuerpos perturbado, constituye la base de una hipótesis simplificadora, muy útil, que permite analizar una misión espacial de manera aproximada.

«La hipótesis de esfera de influencia» en el sistema solar consiste en descomponer el movimiento de un vehículo espacial  $M$ , en varios movimientos keplerianos puros, tomando como centro atractivo el Sol, cuando está fuera de la esfera de influencia de un planeta, o bien como centro el propio planeta si  $M$  está en el interior de dicha esfera. Hipótesis que resulta aplicable también al sistema Tierra-Luna.

El emplame entre los distintos movimientos keplerianos puros se hace mediante composición de velocidades en los puntos de entrada y salida de la esfera de influencia respectiva.

Una ilustración sencilla se encuentra en la (fig. 22.1).

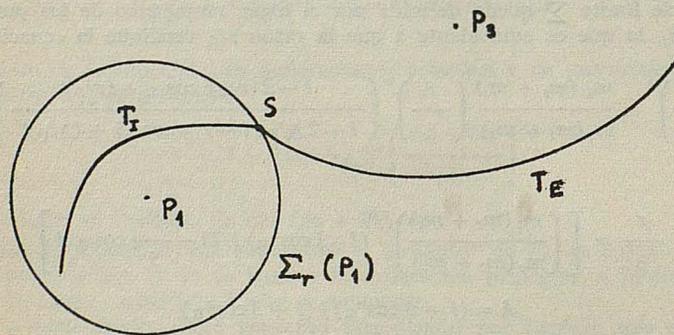


FIG. 22.1

### VIII. Algunas propiedades balísticas de las órbitas keplerianas

#### 23. Hodógrafa de las velocidades de lanzamiento con duración indiferente, para órbitas que pasan por dos puntos fijos

Consideremos un vehículo espacial  $M$ , que se mueve en un campo gravitatorio central newtoniano de centro atractivo  $F$ , y sean  $M_0$  y  $M_1$  dos puntos fijos. Entonces: la hodógrafa de las velocidades  $\vec{V}_0$  de lanzamiento en el punto  $M_0$ , que nos conducen, en un tiempo arbitrario, al punto  $M_1$ , mediante órbitas keplerianas de foco  $F$ , es una hipérbola  $H$  de centro  $M_0$  y asíntotas las rectas  $\overline{M_0F}$  y  $\overline{M_0M_1}$  (fig. 23.1).

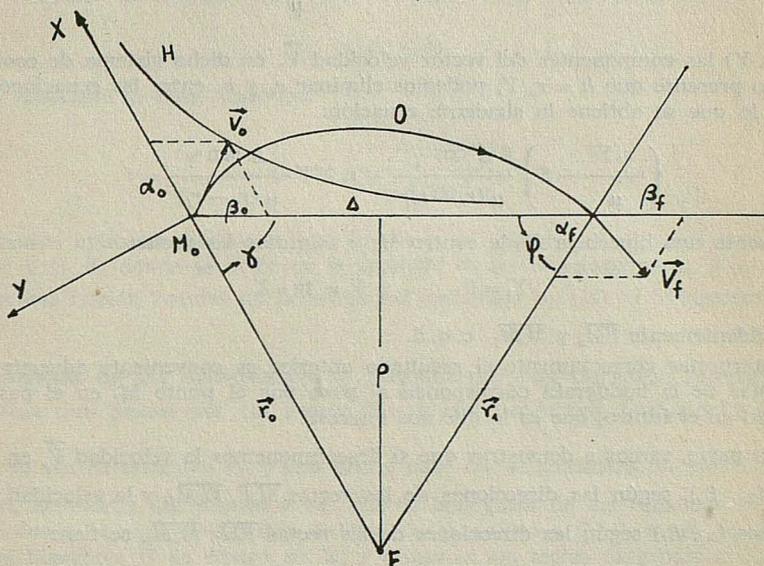


FIG. 23.1

En efecto, sea  $O$  una órbita kepleriana cualquiera, que une los puntos  $M_0$  y  $M_1$ , cuya ecuación polar es

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos f} \quad (23.1)$$

entonces, si  $(r_0, f_0)$  y  $(r_1, f_1)$  son las coordenadas polares de  $M_0$  y  $M_1$ , de la (23.1) se deduce:

$$r_0(1 + e \cos f_0) = r_1(1 + e \cos f_1) \quad (23.2)$$

siendo  $e$  la excentricidad de la órbita  $O$ , dada por la ecuación

$$e = \frac{r_0 - r_1}{r_1 \cos f - r_0 \cos f_0} \quad (23.3)$$

que representa una recta en coordenadas polares  $(e, \theta)$ , con  $\theta = f_1 - f_0$ .

A partir de sencillas relaciones geométricas, es fácil ver, que la ecuación (23.3) puede ponerse en la forma

$$e = \frac{d/\Delta}{\cos(f_0 - \gamma)} \quad (23.4)$$

donde:  $d = r_0 - r_1$ ,  $\Delta = \overline{M_0 M_1}$  y  $\gamma$  es el ángulo que forman las rectas  $\overline{M_0 M_1}$  y  $\overline{M_0 F}$ .

Si denotamos por  $(e_x, e_y)$  las componentes del vector periastro  $e$ , respecto al sistema de coordenadas  $M_0 XY$  resulta:

$$e_x = e \cos f_0 = \frac{Y h}{\mu} - 1 \quad (23.5)$$

$$e_y = e \cos f_0 = \frac{X h}{\mu}$$

siendo  $(X, Y)$  las componentes del vector velocidad  $\vec{V}_0$  en dicho sistema de coordenadas. Y teniendo presente que  $h = r_0 Y$ , podemos eliminar  $e_x$  y  $e_y$  entre las ecuaciones (23.4) y (23.5) con lo que se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left( \frac{r_0 Y^2}{\mu} - 1 \right) \frac{\Delta \cos \gamma}{\mu (r_1 - r_0)} + r_0 X Y \frac{\Delta \sin \gamma}{\mu (r_0 - r_1)} = 1 \quad (23.6)$$

que representa una hipérbola  $H$  de centro  $M_0$  y asíntotas las rectas

$$Y = 0 \quad Y = \operatorname{tg} \gamma X$$

que son evidentemente  $\overline{FM_0}$  y  $\overline{M_0 M_1}$  c. q. d.

Para interpretar correctamente el resultado anterior es conveniente advertir que una de las ramas de la hodógrafa corresponde al paso por el punto  $M_1$  en el pasado y la otra al paso en el futuro, que es la que nos interesa.

Por otra parte, vamos a demostrar que si descomponemos la velocidad  $\vec{V}_0$  en sus componentes  $(\alpha_0, \beta_0)$ , según las direcciones de las rectas  $\overline{M_0 F}$ ,  $\overline{M_0 M_1}$ , y la velocidad  $\vec{V}_1$  en sus componentes  $(\alpha_1, \beta_1)$  según las direcciones de las rectas  $\overline{FM_1}$ ,  $\overline{M_0 M_1}$ , se tiene

$$\alpha_0 = \alpha_1 \quad \beta_0 = \beta_1 \quad (23.7)$$

En efecto, la ecuación de la hodógrafa (23.6) puede ponerse en la forma

$$\lambda Y^2 + \nu X Y = \frac{1 + \lambda \mu}{r_0} \quad (23.8)$$

donde las constantes  $\lambda$  y  $\nu$  vienen dadas por las siguientes relaciones:

$$\lambda = \frac{\Delta \cos \gamma}{\mu (r_1 - r_0)} \quad \nu = \frac{\Delta \sin \gamma}{\mu (r_0 - r_1)} \quad (23.9)$$

Por tanto, si realizamos un cambio de coordenadas dado por las fórmulas

$$X = X' - Y' \cos \gamma$$

$$Y = Y' \operatorname{sen} \gamma$$

la ecuación de la hodógrafa (23.8) se transforma en la siguiente:

$$Y' Y' = k_0 \quad (23.10)$$

siendo  $k_0$  una constante, cuyo valor es

$$k_0 = \frac{1 + \lambda \mu}{r_0 \nu \operatorname{sen} \gamma} = \mu \frac{(r_0 - r_1) - \Delta \cos \gamma}{r_0 \Delta \operatorname{sen}^2 \gamma} \quad (23.11)$$

Aplicando el teorema del momento cinético a los puntos  $M_0$  y  $M_f$  resulta

$$\beta_0 \rho = \beta_f \rho \Rightarrow \beta_0 = \beta_f$$

Además como las componentes  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  deben verificar la ecuación (23.10) tenemos

$$\alpha_0 \beta_0 = k_0$$

y por el principio de retorno inverso las componentes  $\alpha_f$  y  $\beta_f$  verificarán la relación

$$\alpha_f \beta_f = k_f$$

donde la constante  $k_f$  viene dada por

$$k_f = \mu \frac{r_f - r_0 - \Delta \cos \varphi}{r_f \Delta \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

Finalmente, aplicando el teorema de los senos al triángulo  $M_0FM_f$  se prueba la igualdad de  $k_0$  y  $k_f$ , de donde se obtienen la igualdad de las componentes  $\alpha_0$  y  $\alpha_f$ .

Una generalización natural de la propiedad estudiada en (23) es la siguiente:

#### 24. Hodógrafa de las velocidades de lanzamiento con duración indiferente, para órbitas que pasan por un punto fijo y son tangentes a una órbita dada

Dado un centro atractivo  $F_1$ , y una órbita base  $O_B$ , se considera un punto  $M_0$  del mismo plano, exterior a  $O_B$ . Vamos a ver que la hodógrafa de las velocidades  $\vec{V}_0$ , de lanzamiento desde  $M_0$ , que determinan órbitas  $O_T$  tangentes a  $O_B$ , (con un foco en  $F_1$ ), es una rama hipérbola  $H$  de centro en  $M_0$  y asíntotas las rectas tangentes a  $O_B$  desde  $M_0$ .

En efecto, sean  $F_2, F_3$  los focos vacíos de  $O_B$  y  $O_T$  respectivamente,  $M_f$  el punto de tangencia de ambas órbitas y  $a_0$  el semieje mayor de la órbita  $O_T$ . Entonces, teniendo en cuenta conocidas propiedades de las cónicas, se deducen las identidades:

$$\overline{F_1M_0} + \overline{M_0F_3} = \overline{F_1M_f} + \overline{M_fF_3} = 2a_0 \quad (24.1)$$

$$\overline{F_1M_f} + \overline{M_fF_2} = 2a_b \quad (24.2)$$

$$\overline{F_1F_2} = 2a_b e_b \quad (24.3)$$

$$\overline{F_3M_0} - \overline{F_3F_2} = 2a_b - r_0 \quad (24.4)$$

donde  $a_b, e_b$  son el semieje mayor y la excentricidad de  $O_B$ , y  $r_0$  el radio vector de  $M_0$ .

De la igualdad (24.4) se deduce: que el foco vacío  $F_3$  describe una hipérbola  $H'$  de focos  $M_0$  y  $F_2$ , (fig. 24.1).

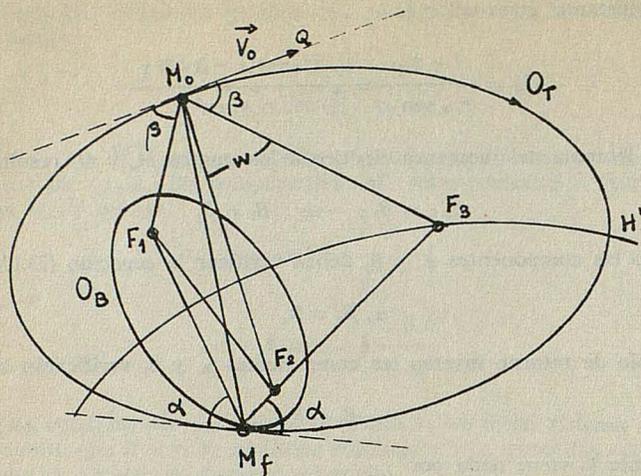


FIG. 24.1

por tanto su ecuación polar será

$$\overline{M_o F_3} = \frac{p'}{1 - e' \cos w} \quad (24.5)$$

donde  $p'$ ,  $e'$  y  $w$  denotan el parámetro, la excentricidad y el ángulo de las rectas  $\overline{M_o F_3}$ ,  $\overline{M_o F_2}$ .

Aplicando el teorema de la energía resulta

$$V_o^2 = \frac{2\mu}{r_o} - \frac{2\mu}{\overline{M_o F_3} + \overline{M_o F_1}} \quad (24.6)$$

de la que, teniendo en cuenta la (24.5), se deduce

$$V_o^2 = \frac{2\mu p'}{r_o [r_o (1 - e' \cos w) + p']} \quad (24.7)$$

que representa la ecuación de la hodógrafa de velocidades de lanzamiento.

Notemos que la (24.7) no es más que la ecuación de una hipérbola de coordenadas polares ( $V_o$ ,  $w/2$ ), ya que esta ecuación puede escribirse en la forma

$$V_o^2 [(r_o + p') - r_o e' \cos^2 \frac{w}{2} + r_o e' \operatorname{sen}^2 \frac{w}{2}] = \frac{2\mu p'}{r_o}$$

que como sabemos es la ecuación polar de una hipérbola  $H$  de centro  $M_o$  y asíntotas las rectas tangentes a la órbita base  $O_B$  trazadas desde el punto  $M_o$ , c. q. d.

En el supuesto de que la órbita dada  $O_B$  sea circular, la propiedad anterior sigue siendo aplicable, si bien en este caso particular vamos a enunciarla en forma algo distinta, y dar una demostración que nos permita el adecuado análisis de un problema posterior.

**25. Hodógrafa de las velocidades de llegada a un punto S mediante órbitas  $O_T$  tangentes a una órbita base  $O_B$  dada**

Sean  $S$  y  $T$  dos puntos fijos, a distancia finita  $r$ , y  $O_B$  una órbita circular base de centro  $T$  y radio  $R < r$ . Si  $(O_T)$  es el conjunto de las órbitas de foco en  $T$  y tangentes a  $O_B$  en el perigeo  $P$ . La hodógrafa de las velocidades  $\vec{V}_E$  de llegada al punto  $S$ , mediante órbitas  $O_T$ , es una hipérbola  $H$  de centro  $S$  y asíntotas las rectas tangentes a  $O_B$  trazadas desde  $S$ .

La ilustración de la propiedad puede verse en la (fig. 25.1).

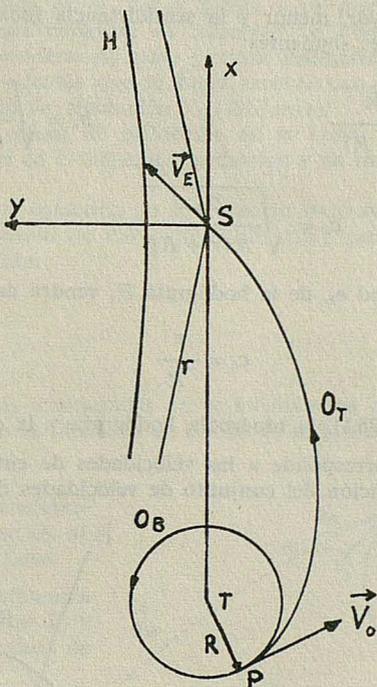


FIG. 25.1

*Demostración.* — Si denotamos por  $X, Y$  las componentes de  $V_E$ , en el sistema  $Sx$  y dibujado en la figura, la condición de tangencia de las órbitas  $O_T$  y  $O_B$  en el perigeo  $P$  nos da

$$\frac{h^2}{\mu} = R(1 + e) \quad (25.1)$$

donde  $e$  representa la excentricidad de la órbita  $O_T$ .

Si se tiene en cuenta las componentes del vector perigeo  $e$  (23.6) y el teorema del momento cinético aplicado a este caso, o sea

$$h = rY \quad (25.2)$$

se obtiene la igualdad

$$\mu^2 e^2 = r^2 X^2 Y^2 + r^2 Y^4 - 2\mu r Y^2 + \mu^2 \quad (25.3)$$

Finalmente, eliminando  $h$  y  $e$  entre las ecuaciones (25.1) y (25.3) se obtiene

$$(r^2 - R^2) Y^2 - R^2 X^2 = 2\mu \frac{R(r-R)}{r}$$

que representa la ecuación de una hipérbola  $H$ , de centro  $S$  y asíntotas las rectas de ecuaciones

$$X = \pm \left( \frac{r^2}{R^2} - 1 \right)^{1/2} Y \quad (25.5)$$

que son las rectas tangentes a  $O_B$  trazadas desde  $S$ .

Además, los semiejes mayor, menor y la semidistancia focal de la hodógrafa  $H$ , vienen dados por las expresiones siguientes:

$$a_h = \sqrt{\frac{2\mu R}{r(r+R)}} \quad b_h = \sqrt{\frac{2\mu r}{R(r+R)}} \quad (25.6)$$

$$c_h = \sqrt{\frac{2\mu r}{R(r+R)}}$$

Con lo que la excentricidad  $e_h$ , de la hodógrafa  $H$ , vendrá dada por

$$e_h = \frac{r}{R} \quad (25.7)$$

Considerando en la (fig. 25.1), la hipérbola hodógrafa y la circunferencia de centro  $S$  y radio  $L_s$  ( $\sqrt{2\mu/r}$ ), que corresponde a las velocidades de entrada parabólicas, es posible obtener la siguiente partición del conjunto de velocidades de entrada  $V_E$  (fig. 25.2).

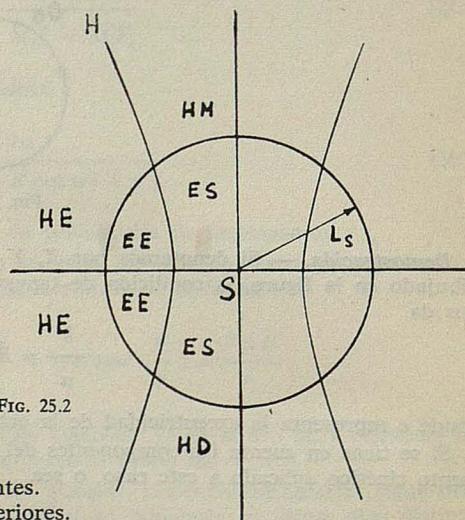


FIG. 25.2

- ES:** zona de velocidades  $V_E$  elípticas secantes.
- EE:** zona de velocidades  $V_E$  elípticas exteriores.
- HM:** zona de velocidades  $V_E$  hiperbólicas montantes secantes.
- HD:** zona de velocidades  $V_E$  hiperbólicas descendentes secantes.
- HE:** zona de velocidades  $V_E$  hiperbólicas exteriores.

## IX. El efecto de trampolín lunar

### 26. Formulación del problema. Fases del mismo

El problema del *efecto de trampolín lunar* consiste en: Encontrar las trayectorias óptimas que partiendo de un punto  $P$ , sobre una órbita base  $O_B$  en torno a la Tierra  $T$  y aprovechando, a su paso por la Luna  $S$ , el campo gravitacional de la misma, van hasta el infinito del sistema Tierra-Luna con velocidad residual  $V_\infty$  dada a priori.

Vemos pues, que el problema del trampolín lunar es un caso particular del problema de tres cuerpos y es, por lo tanto, de difícil análisis. Por esto, abordaremos el estudio de un problema más simplificado, en el cual la Tierra es un planeta de forma esférica de masa y radio dados, y la Luna conserva su velocidad de liberación a nivel del suelo ( $L' = 2372 \text{ m/s}$ ) aunque se considera su radio y masa infinitamente pequeños en el sistema terrestre. Supondremos además que la Luna recorre una órbita circular alrededor de la Tierra, con una velocidad de revolución  $V_L$  ( $1017 \text{ m/s}$ ).

Bajo estas condiciones la esfera de influencia de la Luna, respecto a la Tierra, se puede considerar de radio nulo en el sistema geocéntrico y de radio infinito en el sistema selenocéntrico.

Con estas hipótesis, el error cometido en la duración de trayectos es importante (parámetro sin interés en el supuesto de duración indiferente), pero carece de importancia en lo que a consumos se refiere.

### Fases del problema

De acuerdo con las hipótesis enumeradas en la formulación del problema de trampolín lunar, y admitida por tanto la hipótesis de esfera de influencia (22) el problema consta de las tres fases siguientes:

Fase I (Terrestre): De transferencia de una órbita circular base  $O_B$  alrededor de la Tierra hasta la Luna.

Fase II (Lunar): De transferencia entre las velocidades hiperbólicas  $V_1$  y  $V_2$  de entrada y salida de la esfera de influencia lunar:

Fase III (Terrestre): De transferencia desde la salida lunar, a la velocidad residual en el infinito  $V_\infty$  dada a priori.

La ilustración de las distintas fases de que consta el problema pueden verse en la (fig. 26.1).

En lo que sigue vamos a estudiar, por separado, la optimalidad de cada fase, y al final trataremos de encontrar la trayectoria óptima en sentido global.

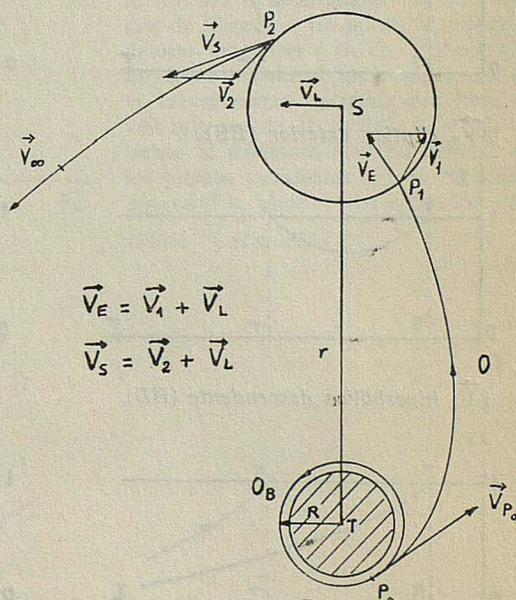


FIG. 26.1

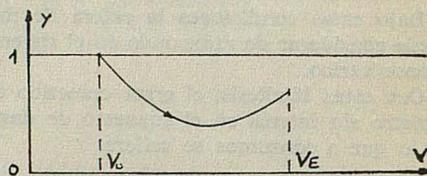
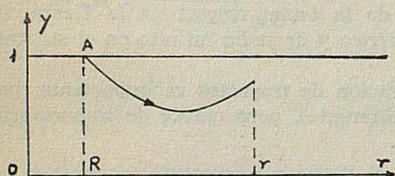
### 27. Fase I de transferencia de la órbita base a la luna

Es claro que, los distintos tipos de transferencias posibles dependen de la clase de velocidad  $\vec{V}_E$  que se tenga a la entrada de la esfera de influencia lunar, aunque cualquiera que sea dicha velocidad las transferencias optimales, son a lo sumo biimpulsionales como veremos.

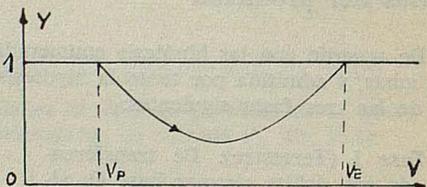
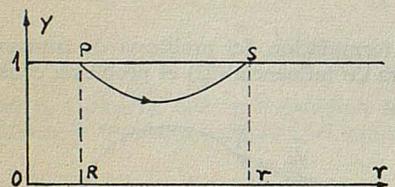
En efecto, si tenemos en cuenta las expresiones (19.1), (19.2) del primer, y la clasificación de velocidades  $\vec{V}_E$  de entrada (25), los gráficos (19) de las curvas  $y = |\vec{p}_v|^2 = f(r)$ ,  $y = |\vec{p}_v|^2 = g(v)$ , que llamaremos *diagramas de conmutación*, se pueden clasificar de la siguiente forma:

1- $\vec{V}_E$  *elíptica secante (ES) o hiperbólica secante montante.*

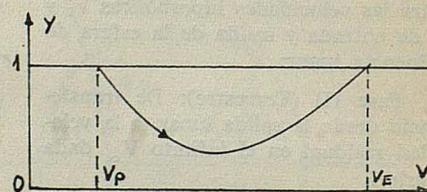
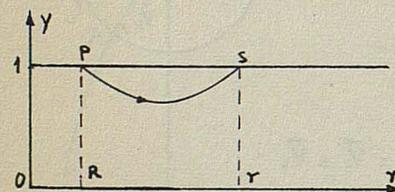
(a) salida del suelo terrestre.



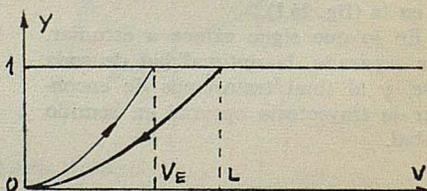
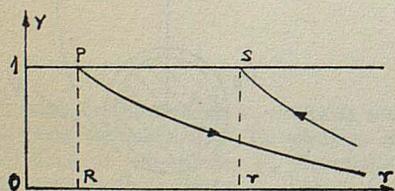
(b) salida de una órbita circular base  $O_B$  terrestre.



2- $\vec{V}_E$  *elíptica exterior (EE).*

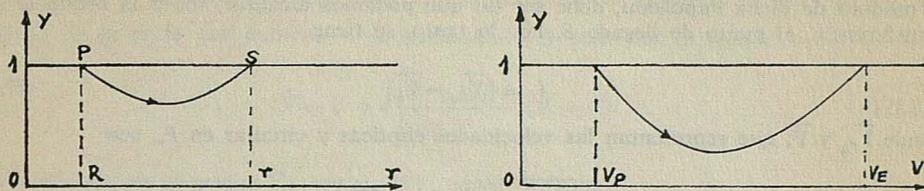


3- $\vec{V}_E$  *hiperbólica descendente (HD).*

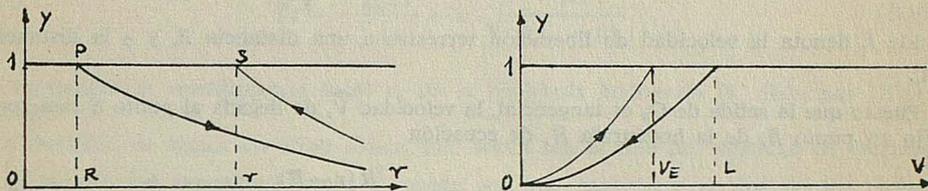


$4\vec{V}_E$  hiperbólica exterior montante (HE).

(a) salida con una velocidad elíptica, parabólica o hiperbólica sin paso por el infinito.



(b) salida con velocidad parabólica y paso por el infinito.



Observando todos estos diagramas vemos que: el número de puntos de impulsión ( $|\vec{p}_v| = 1$ ) es a lo sumo dos, c. q. d.

Para poder sistematizar el estudio de las distintas transferencias optimales, atendiendo a la clase de velocidades de entrada  $\vec{V}_E$ , planteemos el siguiente

**Problema de transferencia.** — Dada una órbita base  $O_B$ , de centro  $T$  y radio  $R$ , sea  $H$  la hodógrafa de velocidades de llegada a un punto  $S$  mediante órbitas tangentes a  $O_B$  en el perigeo  $P$ . Se desea encontrar las condiciones de la transferencia optimal, que lleva al vehículo desde la órbita base  $O_B$  al punto  $S$ , mediante dos impulsiones en los puntos terminales ( $P_0, S$ ), de modo que en  $S$  se alcance una velocidad pre-fijada  $\vec{V}_E$  (fig. 27.1).

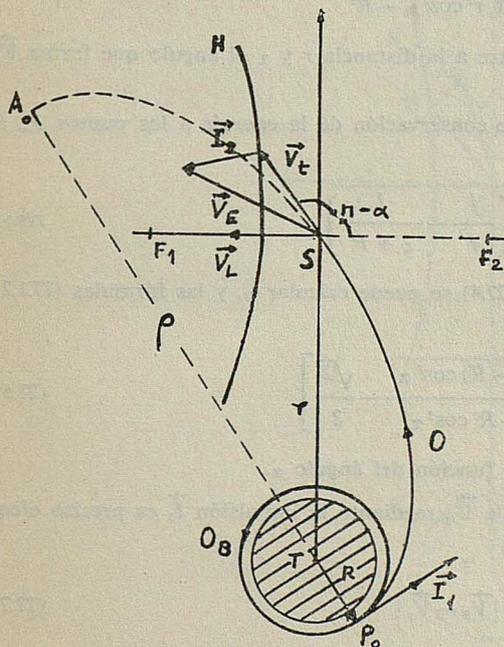


FIG. 27.1

*Solución.* — Teniendo en cuenta las condiciones de transversalidad (3.13) del vector adjunto  $\vec{p}$ , resulta que el vector primero  $\vec{p}_0$  en el punto  $P_0$  de salida, es tangente a  $O_B$  y, por tanto, la dirección optimal de la primera impulsión  $\vec{I}_1$ , es la tangencial. En cuando al módulo de dicha impulsión, debe ser tal que podamos alcanzar, sobre la órbita  $O$  de transferencia, el punto de llegada  $S$ . Por lo tanto, se tiene

$$I_1 = |\vec{V}_{P_0} - \vec{V}_c| \quad (27.1)$$

donde  $\vec{V}_{P_0}$  y  $\vec{V}_c$  que representan las velocidades elípticas y circular en  $P_0$ , son

$$|\vec{V}_{P_0}| = L \sqrt{\frac{\rho}{\rho + R}} \quad |\vec{V}_c| = \frac{L}{\sqrt{2}} \quad (27.2)$$

donde  $L$  denota la velocidad de liberación terrestre a una distancia  $R$ , y  $\rho$  la distancia  $\overline{TA_0}$ .

Puesto que la salida de  $O_B$  es tangencial, la velocidad  $\vec{V}_i$ , de llegada al punto  $S$  tiene por afijo un punto  $B$ , de la hodógrafa  $H$ , de ecuación

$$(r^2 - R^2) Y^2 - R^2 X^2 = 2\mu \frac{R(r - R)}{r} \quad (27.3)$$

de donde resulta, que el módulo de  $\vec{V}_i$ , vendrá dado por la relación

$$V_i = L_s \sqrt{\frac{R(r - R)}{r^2 \cos^2 \alpha - R^2}} \quad (27.4)$$

siendo  $L_s$  la velocidad de liberación terrestre a la distancia  $r$  y  $\alpha$  el ángulo que forma  $\vec{V}_i$ , con la velocidad lunar  $\vec{V}_L$ .

Por otra parte, aplicando el teorema de conservación de la energía a los puntos  $P_0$ ,  $S$  y  $A_0$ , se tiene

$$V_i = \sqrt{2\mu \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho + R} \right)} \quad \text{JTS.LI}$$

de donde eliminando  $V_i$ , con la ecuación (27.4) se puede calcular  $\rho$ , y las fórmulas (27.1,2) nos permite obtener la función

$$I_1 = L \left[ \sqrt{\frac{R(r - R) \cos^2 \alpha}{r^2 - R^2 \cos^2 \alpha}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad (27.6)$$

que nos da la magnitud del impulso  $I_1$ , en función del ángulo  $\alpha$ .

Una vez obtenida la velocidad de llegada  $\vec{V}_i$ , mediante la impulsión  $\vec{I}_1$ , es preciso efectuar una segunda impulsión  $\vec{I}_2$  de módulo

$$I_2 = |\vec{V}_E - \vec{V}_i| \quad (27.7)$$

para poder obtener una velocidad de entrada  $\vec{V}_E$ , dada de antemano.

En cuanto a la dirección de esta segunda impulsión  $\vec{I}_2$ , vamos a ver que es la de la recta  $\overline{BF}$ , donde  $F$  denota una cualquiera de los focos  $F_1$  o  $F_2$  de la hipérbola hodógrafa  $H$ .

En efecto, si las componentes radial y transversal de la velocidad  $\vec{V}_i$  son  $X$ ,  $Y$ , la ecuación de la recta que contiene a la impulsión  $\vec{I}_2$  y pasa por el punto  $B$ , es:

$$\bar{Y} - Y = \frac{\lambda_1 Y + \lambda_2 h r}{\lambda_1 X} (\bar{X} - X) \quad (27.8)$$

cuya ordenada en el origen  $\bar{Y}_s$ , según (19.9), viene dada por

$$\bar{Y}_s = -\frac{\lambda_2 h r}{\lambda_1} = \pm \sqrt{\frac{2\mu r}{R(r+R)}} \quad (27.9)$$

que representa la semidistancia focal  $c_h$  de la hipérbola hodógrafa  $H$ , dada por (25.6), c. d. q.

La dualidad de signos en (27.9) indica que, según sea el tipo de velocidad de entrada  $\vec{V}_E$ , el sentido del segundo impulso  $\vec{I}_2$  puede ser uno cualquiera de los de las rectas  $\overline{BF}_1$  o  $\overline{BF}_2$ .

Los distintos casos de transferencias a los cuales son aplicables estas conclusiones, son: 1— $\vec{V}_B$  *elíptica secante* (ES) o *hiperbólica secante montante* (HM) y salida de una órbita circular base (Fig. 27.2).

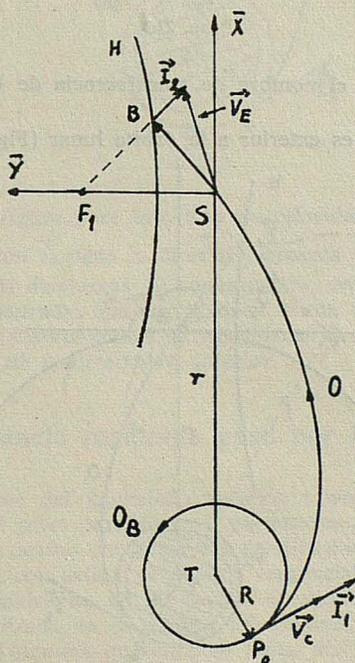


FIG. 27.2

En este caso, como vemos,  $\vec{I}_2$  tiene la dirección opuesta a  $\overline{BF}_1$ .

2-  $\vec{V}_E$  elíptica exterior (EE)

En la que se pueden distinguir dos casos:

(a) cuando el apogeo  $A_o$ , de la órbita de subida, coincide con el punto S (Fig. 27.3), lo que es equivalente a que  $\vec{V}_t$  sea horizontal y, por lo tanto,  $\alpha = 0^\circ$ .

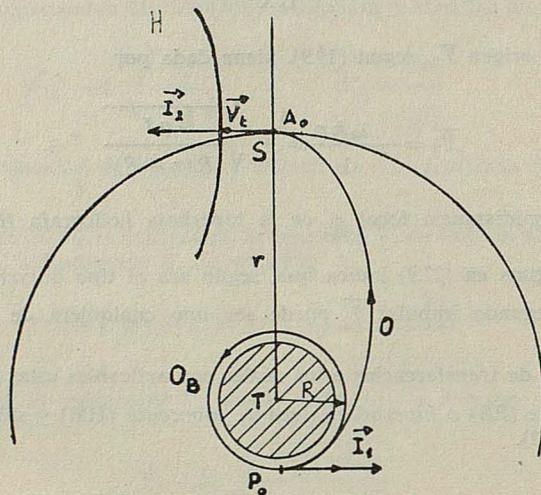


FIG. 27.3

Esta transferencia recibe el nombre de transferencia de Hohmann, y ya ha sido estudiada en (19).

(b) cuando el apogeo  $A_o$  es exterior a la órbita lunar (Fig. 27.4).

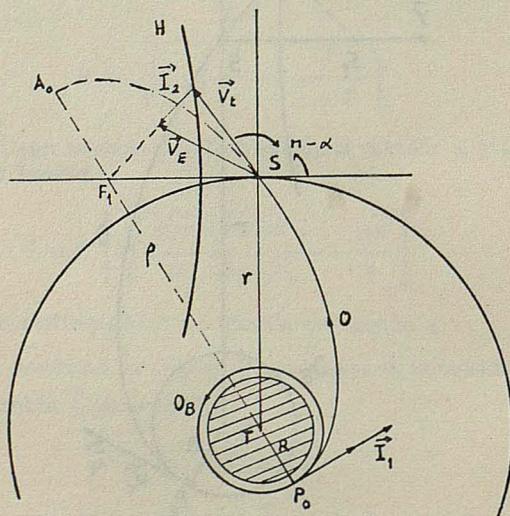


FIG. 27.4

La salida de la órbita base, sigue siendo tangencial, mientras que la segunda impulsión  $\vec{I}_2$  debe dirigirse hacia el foco  $F_1$ , de  $H$ , para que podamos obtener una velocidad exterior.

3— $\vec{V}_E$  hiperbólica exterior montante (HE)

Es el caso de una salida de la órbita base, mediante una velocidad tangencial (Fig. 27.5).

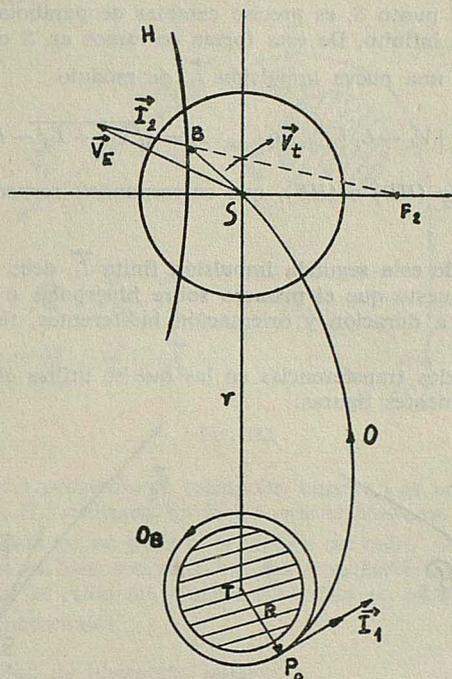


Fig. 27.5

Como se observa en la figura para este tipo de velocidad de entrada en la esfera de influencia lunar, la impulsión  $\vec{I}_2$  tiene la dirección opuesta a  $\overline{BF_2}$ .

Como vimos al tratar los diagramas de conmutación, existe otra posible transferencia para estas velocidades de entrada, que corresponde a una transferencia bipolarbólica. Su estudio se realizará conjuntamente con el de velocidades de entrada del tipo (HD), dando una variante al problema de transferencia anterior.

**Problema de transferencia mediante paso por el nivel parabólico**

Con las mismas hipótesis del enunciado anterior salvo: que las velocidades  $\vec{V}_i$  de llegada al punto S son del nivel parabólico, y pertenecen por tanto a la circunferencia de centro S y radio  $L_s$ , se desean encontrar las condiciones de la transferencia optimal, que transfiera al vehículo, con salida parabólica tangencial, desde la órbita base  $O_B$  al punto S, mediante dos impulsiones en los puntos terminales ( $P_o$ , S), y una tercera impulsión de costo nulo, realizada en el infinito del sistema Tierra-Luna, para realizar el cambio de parábola, de tal manera que en S se tenga una velocidad hiperbólica de uno de los tipos (HE) o (HD).

*Solución.* — En primer lugar se tiene, por el Lema-1 (VI) que la impulsión  $\vec{I}_1$  de salida debe realizarse en el perigeo  $P$  de la parábola de salida, y en la dirección de la velocidad. El módulo de esta primera impulsión viene dado por

$$I_1 = L - V_0 \quad (27.10)$$

que representa el mínimo necesario para alcanzar el nivel parabólico.

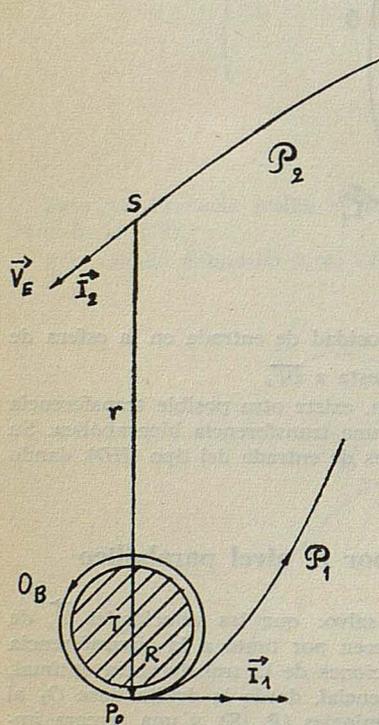
Para poder alcanzar el punto  $S$ , es preciso cambiar de parábola, mediante una impulsión de costo nulo, en el infinito. De esta forma entramos en  $S$  con velocidad parabólica  $L_s$ , donde efectuamos una nueva impulsión  $\vec{I}_2$ , de módulo

$$I_2 = |V_E - L_s| \quad \text{ó} \quad I_2 = \sqrt{V_E^2 + L_s^2} - L_s \quad (27.11)$$

según que  $\vec{V}_E$  sea de tipo  $(HD)$  o  $(HE)$ , que corresponden respectivamente a los casos  $|\vec{V}_E| < L_s$ ,  $|\vec{V}_E| > L_s$ .

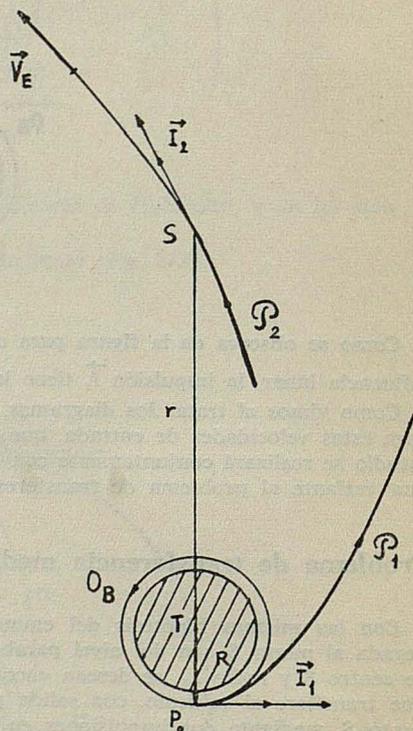
La dirección óptima de esta segunda impulsión finita  $\vec{I}_2$ , debe ser la de la velocidad de llegada al punto  $S$ , puesto que el primero sobre hipérbolas o parábolas, en un problema de transferencias a duración y orientación indiferentes, tiene la dirección de la velocidad orbital.

La descripción de las dos transferencias en las que se utiliza el paso por el nivel parabólico se da en las siguientes figuras:



$V_E$  hiperbólica descendente (HD)

FIG. 27.6



$V_E$  hiperbólica exterior montante (HEM)

FIG. 27.7

## 28. Fase II de transferencia entre hipérbolas

De acuerdo con la hipótesis de esfera de influencia lunar, las velocidades hiperbólicas  $\vec{V}_1$  y  $\vec{V}_2$  de entrada y salida de la esfera de influencia, referidas al sistema selenocéntrico  $S$ , pueden considerarse como velocidades residuales en el infinito de las hipérbolas  $H_1$  y  $H_2$  (Fig. 28.1).

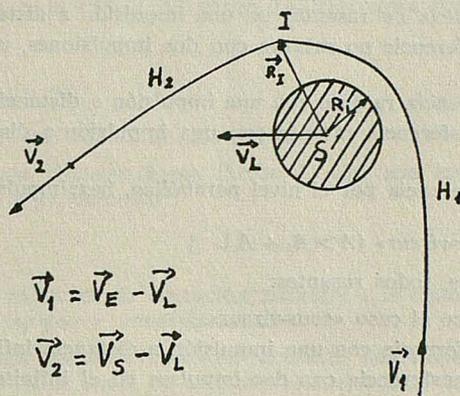


FIG. 28.1

Así pues, la Fase-II del problema de trampolín lunar no es más que una transferencia entre las hipérbolas  $H_1$ ,  $H_2$ , realizada de forma que el consumo sea mínimo.

Aunque en el caso ideal de un planeta o satélite de radio nulo, la transferencia óptima de seis impulsiones es bien conocida, resulta irrealizable en la práctica, de ahí que tengamos que considerar el radio del planeta o satélite no nulo.

Si introducimos las notaciones:

$L' = \sqrt{2\mu/R_L}$  (velocidad de liberación lunar).

$A = \text{ángulo } (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \quad 0^\circ \leq A \leq 180^\circ$ .

$U_1 = \sqrt{V_1^2 + L'^2}$  (velocidad en el periselenio de  $H_1$ )

$U_2 = \sqrt{V_2^2 + L'^2}$ .

$A_1 = \text{arc sen } \frac{L'^2}{L'^2 + V_1^2}$  (semiángulo de desviación para una hipérbola rasante).

$A_2 = \text{arc sen } \frac{L'^2}{L'^2 + 2V_2^2}$ .

$C = \text{costo de la transferencia.}$

los distintos tipos de transferencia óptimas se clasifican de la forma siguiente (B-15), (B-22):

0 - Transferencia gratuita ( $V_1 = V_2$  y  $A \leq 2A_1$ ).

Es una transferencia libre en la que  $\vec{V}_1$  y  $\vec{V}_2$  son las velocidades asintóticas de una misma hipérbola, que no corta la superficie del planeta o satélite. Por lo tanto el costo de una transferencia de este tipo es:  $C = 0$ .

1. Transferencia «juste-vireur» ( $A = A_1 + A_2$ ).

Se obtiene esta transferencia mediante dos ramas de hipérbolas rasantes en el perigeo común, donde se efectúa una impulsión de costo:  $C = |U_2 - U_1|$ .

2. Transferencias «sous-vireur» ( $A < A_1 + A_2$ ).

Estos pertenecen a cinco tipos diferentes:

- Tipo F: transferencia no rasante con una impulsión a distancia finita.
- Tipo  $F \infty$ : transferencia no rasante con dos impulsiones, una a distancia finita y otra en el infinito.
- Tipo RF: transferencia rasante con una impulsión a distancia finita.
- Tipo  $RF \infty$ : transferencia rasante con una impulsión a distancia finita y otra en el infinito.
- Tipo PNP: transferencia por el nivel parabólico, hexaimpulsional.

3. Transferencia «sur-vireur» ( $A > A_1 + A_2$ ).

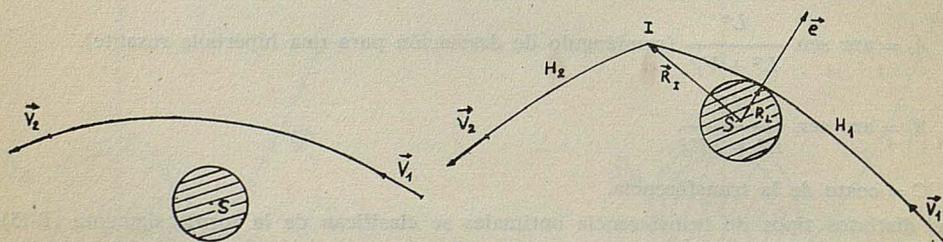
De seis tipos distintos, todos rasantes:

- Tipo PNP: idéntico al caso «sous-vireur».
- Tipo  $R \infty$ : transferencia con una impulsión a distancia infinita.
- Tipo  $\infty R \infty$ : transferencia con dos impulsiones en el infinito, uno a cada lado del paso rasante.
- Tipo  $RF \infty$ : transferencia con dos impulsiones tras el paso rasante, uno a distancia finita y otro en el infinito.
- Tipo  $\infty RF$ : transferencia con dos impulsiones, uno en el infinito antes del paso rasante y otro a distancia finita tras el paso rasante.

En general, en las transferencias «sous-vireur» se supone que  $V_2 \leq V_1$ , aunque puede darse el caso de que  $V_2 \geq V_1$ , pero entonces los tipos de transferencia  $F \infty RF$ , y  $RF \infty$  pasan a ser los:  $\infty F$ ,  $FR$  y  $\infty FR$ . Análogamente sucede con las transferencias «sur-vireur», en las que suele suponerse  $V_2 \geq V_1$ , pues en el caso  $V_2 \leq V_1$  los tipos de transferencias  $R \infty$ ,  $RF$ ,  $RF \infty$  y  $\infty RF$  se convierten en los:  $\infty R$ ,  $FR$ ,  $\infty FR$  y  $FR \infty$  respectivamente.

En el problema del efecto de trampolín lunar, considerado globalmente, tan sólo tienen importancia las transferencias entre hipérbolas de los tipos gratuitos y RF, a fin de determinar la optimalidad de las trayectorias que resultan de empalmar trozos y trayectorias optimales de cada fase.

La descripción de las transferencias libre y RF se dan en las siguientes figuras:



29. Fase III de transferencia entre  $\vec{V}_s$  y  $\vec{V}_\infty$

El estudio de la optimización de esta fase es muy parecido al que hemos hecho en la fase I; puesto que es una transferencia entre las velocidades  $\vec{V}_s$  de salida de la esfera

de influencia, referida al sistema geocéntrico  $T$ , y la vlocidad hiperbólica  $\vec{V}_\infty$  en el infinito del sistema Tierra-Luna (Fig. 26.1).

En esta fase podemos considerar la hodógrafa de las velocidades de salida  $\vec{V}_s$  como base de una partición del plano hodógrafo análoga a la vista en (Fig. 25.2) y que nos permite analizar cada tipo de transferencia, según la clase de velocidad de salida que tengamos.

De manera análoga a la fase I se tienen los siguientes tipos de transferencias optimales:

1-  $\vec{V}_s$  *elíptica exterior (EE)*.

La transferencia optimal consta de dos partes:

1.<sup>a</sup> Una transferencia elipse-parábola (Lema 1) con una impulsión tangencial en el perigeo común  $P$  (Fig. 29-1), de costo

$$I_1 = L_p - V_p \tag{29.1}$$

donde  $L_p$  y  $V_p$  son la velocidad de liberación terrestre a la distancia del punto  $P$  y la velocidad elíptica en el perigeo  $P$ , respectivamente.

2.<sup>a</sup> Una transferencia parábola-hipérbola mediante una impulsión tangencial  $I_2$  (figura 29-2) cuyo consumo viene dado, en el caso rasante, por la expresión siguiente

$$I_2 = \sqrt{L_s^2 + V_\infty^2} - L_s \tag{29.2}$$

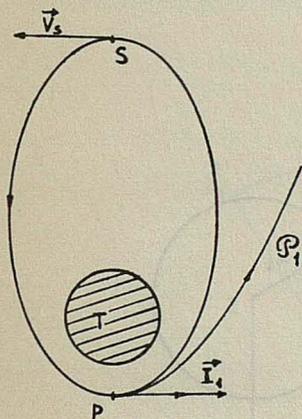


FIG. 29.1

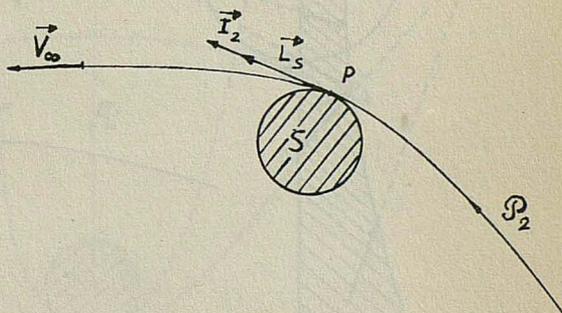


FIG. 29.2

2-  $\vec{V}_s$  *descendente secante (HD) y (ES)*.

La zona de velocidades hiperbólicas descendentes o elípticas secantes (parte rayada de la fig. 29.3), no admite un estudio genérico completo; es por lo cual ha de realizarse el estudio de las distintas partes que componen esta zona del a hodógrafa por separado.

a) En la zona de velocidades  $ABDE$  la transferencia optimal es biimpulsional, es decir compuesta de una impulsión opuesta al foco  $F_2$  de la hodógrafa  $H$ , que transfiere el móvil a una órbita tangente a la órbita base terrestre  $O_B$  y una impulsión aceleratriz rasante en el perigeo común que permite pasar a una hipérbola con velocidad residual dada  $V_\infty$ .

b) En la zona  $ABC$  de velocidades de salida, basta efectuar una impulsión de magnitud adecuada en la dirección del punto  $A$ , para obtener una velocidad hiperbólica residual  $V_\infty$ .

c) En la zona  $FACG$  la transferencia óptimal es también biimpulsional, con una primera impulsión en la dirección del foco  $F_1$  que permite pasar a una órbita rasante a  $O_B$ , y una impulsión deceleratriz, en la dirección tangencial a la hipérbola de transferencia, que nos da la  $V_\infty$  deseada.

3 —  $\vec{V}_s$  hiperbólica montante (HM).

Caben dos posibilidades de transferencias óptimas

a) Efectuar una impulsión tangencial, a la salida, de costo

$$C = \sqrt{L_s^2 + V_\infty^2} - V_s \quad (29.3)$$

para tener en el infinito la velocidad  $V_\infty$  requerida.

b) Realizar una primera impulsión  $\vec{I}_1$  de frenado, en el instante de salida de la esfera de influencia lunar, de módulo

$$I_1 = |V_s - L_s| \quad (29.4)$$

con lo cual se alcanza el nivel parabólico  $L_s$  (Fig. 29.4) y salimos mediante la parábola  $P_1$ .

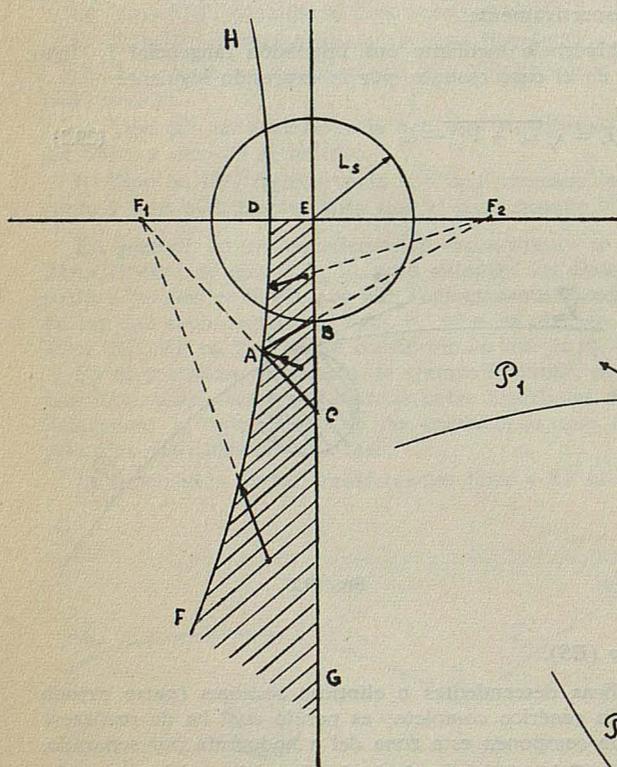


FIG. 29.3

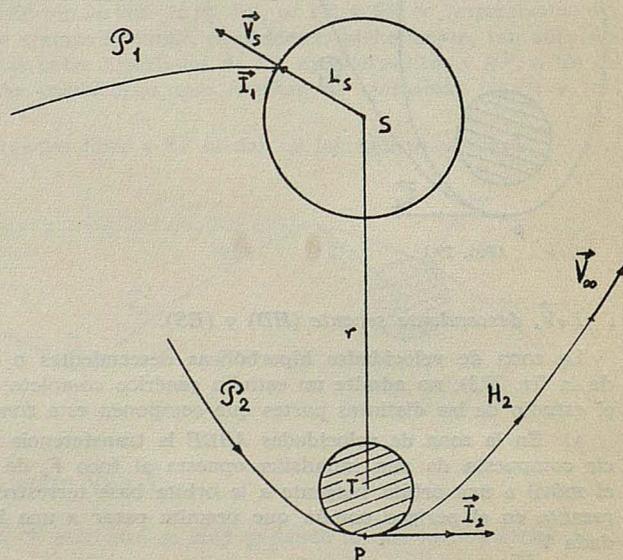


FIG. 29.4

A continuación, mediante una impulsión  $\vec{I}_2$ , tangente en el perigeo  $P$ , transferimos el móvil a la hipérbola  $H_2$ , de velocidad residual, dada  $V_\infty$ .

El costo de esta segunda impulsión viene dado por la expresión

$$I_2 = \sqrt{L^2 + V_\infty^2} - L \quad (29.5)$$

análoga a la (29.2), donde  $L$ , se ha sustituido por  $L$ , ya que el paso rasante es ahora terrestre.

4 —  $\vec{V}_s$ , hiperbólica descendentes exterior (HDE).

También en este caso existen dos posibles transferencias optimales, aunque la primera de ellas es irrealizable en la práctica.

a) Utilizando el nivel parabólico (PNP).

Esta transferencia es hexaimpulsional aunque tan sólo dos de las impulsiones son de costo apreciable (Fig. 29.5), las otras cuatro sirven para realizar el cambio de parábola o el de dirección asintótica.

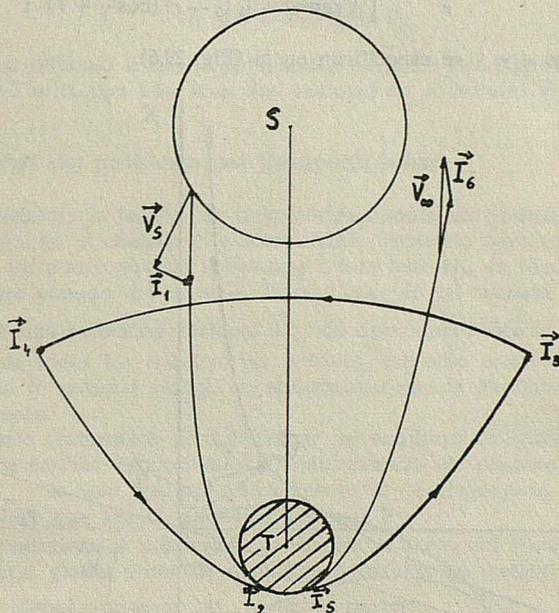


FIG. 29.5

b) Esta segunda posibilidad es la misma que la del caso (3) b. Se efectúa una impulsión deceleratriz a la salida que nos pasa al nivel parabólico  $L_s$ . A continuación mediante una impulsión tangente en el perigeo  $P$  se transfiere al vehículo a una órbita hiperbólica de velocidad residual  $\vec{V}_\infty$ .

5 —  $\vec{V}_s$ , elíptica montante secante.

Este es el caso de estudio más difícil y comporta tres impulsiones.



2.<sup>a</sup> Una impulsión en el apogeo  $A$ , de dirección tangencial y módulo:

$$I_2 = |\vec{V}_{A1} - \vec{V}_{A2}| \quad (29.9)$$

siendo  $\vec{V}_{A1}$  y  $\vec{V}_{A2}$  las velocidades orbitales, en el apogeo  $A$ , sobre  $O_1$  y  $O_2$ , respectivamente, que no se permite llegar al perigeo  $P$  de  $O_2$  con una velocidad  $\vec{V}_p$ .

Notemos que por ser la transferencia entre los puntos  $S$  y  $P$  biimpulsional es aplicable la relación (19.9) entre los parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  del vector primer  $\vec{p}_v$ , sobre la órbita  $O_1$ . Por tanto, mediante un razonamiento similar al desarrollado en el estudio de la transferencia (27-1), podemos afirmar que la impulsión  $\vec{I}_1$  está contenida en una recta que pasa por el punto  $F_2$  de coordenadas:

$$X = 0 \quad Y = -\sqrt{\frac{2\mu r}{\rho(r + \rho)}}$$

3.<sup>a</sup> una impulsión tangencial en perigeo  $P$  y de costo:

$$I_3 = \sqrt{L^2 + V_\infty^2} - V_p \quad (29.10)$$

nos transferiere al vehículo a una hipérbola  $H_3$ , tangente en el punto  $P$  a la órbita base  $O_B$  en torno a la Tierra, con una velocidad residual en el infinito  $V_\infty$ .

### 30. Estudio global del problema del trampolín lunar

Se trata de encontrar la familia de trayectorias impulsivas optimales, con carácter global, que hacen mínimo el consumo de combustible necesario para transferir a un vehículo espacial desde un punto situado sobre una órbita base  $O_B$ , en torno a la Tierra, a otro punto infinitamente alejado del sistema Tierra-Luna, de tal manera que en dicho punto el vehículo posea una velocidad residual  $\vec{V}_\infty$  de tipo hiperbólico y de módulo dado.

Veremos que de todas las trayectorias posibles, tan sólo una monoimpulsional puede considerarse como la optimal global, en el supuesto que la duración de transferencia se considere indiferente.

Para demostrarlo trataremos de determinar un conjunto de trayectorias que cumplan las condiciones necesarias de optimalidad, determinado el consumo de cada trayectoria en función de  $V_\infty$ , lo que nos permitirá encontrar la trayectoria que hace mínimo el consumo, cualquiera que sea la velocidad residual  $V_\infty$ .

El estudio lo realizaremos analizando el comportamiento del vector primer  $\vec{p}_v$ , a lo largo de la trayectoria global obtenida mediante empalme, en ciertos puntos de contorno.

La trayectoria global consta de las siguientes partes:

1.<sup>a</sup> una órbita  $O$  de subida desde la órbita base  $O_B$ , con salida tangencial, mediante una impulsión  $\vec{I}_1$  hasta la Luna.

2.<sup>a</sup> un par de ramas de hipérbola  $H_1$  y  $H_2$  con velocidades residuales  $\vec{V}_1$  y  $\vec{V}_2$ , en el infinito del sistema selenocéntrico, y que se cortan en un punto de impulsión  $I_2$  situado tras el paso rasante que efectúa  $H_1$  en el periselenio  $Q$ .

3.<sup>a</sup> una rama de hipérbola  $H_3$  sin impulsiones y con velocidad residual en el infinito  $\vec{V}_\infty$ .

Los puntos de contorno son: el perigeo  $P$  de salida, donde se efectúa la primera impulsión  $\vec{I}_1$ , el punto  $S$  de entrada en la esfera de influencia lunar con velocidad  $\vec{V}_E$ , per-

teneciente a la hipérbola hodógrafa  $H$ , el periselenio  $Q$  donde tiene lugar el paso rasante lunar (que como veremos introduce una discontinuidad en  $\vec{p}_r$ ), el punto de impulsión lunar  $\vec{I}_2$  y por último el punto  $E$  de salida.

Los puntos  $S$  y  $E$  de entrada y salida de la esfera de influencia lunar se confunden, ya que suponemos que en el sistema geocéntrico, el radio de la esfera de actividad de la Luna es nulo. No ocurre lo mismo en el sistema selenocéntrico, en el que se considera la esfera de influencia de radio infinito, con lo que  $S$  y  $E$  son los puntos del infinito de las ramas de hipérbola  $H_1$  y  $H_2$ .

Notemos que la trayectoria interior a la esfera de influencia lunar, no puede atravesar la superficie de la Luna, por lo cual, es preciso imponer entre las variables de estado la ligadura.

$$|\vec{r}| - R_L \geq 0 \quad (30.1)$$

donde  $R_L$  es el radio de la Luna.

Con esto, las trayectorias optimales están compuestas por puntos interiores al dominio  $G$ , definido por

$$G = [\tilde{q} | R_L - |\vec{r}| \leq 0] \quad (30.2)$$

$$\tilde{q} = (\vec{r}, \vec{v}, C)$$

salvo el periselenio  $Q$ , que debe pertenecer al borde de dicho dominio cerrado, de acuerdo con el principio del máximo en el caso de existencia de ligaduras en las variables de estado (5), y resultará ser un punto en el que deben verificarse las condiciones de empalme (5.22).

Si se tiene en cuenta que  $\partial G$  está definido en nuestro problema mediante la función  $g$ , tal que

$$g = R_L - |\vec{r}| = 0$$

resulta inmediato comprobar: que las condiciones de empalme en el punto  $Q$ , vienen dadas por las relaciones

$$\vec{p}_v(Q+0) = \vec{p}_v(Q-0) \quad (30.3)$$

$$\vec{p}_r(Q+0) = \vec{p}_r(Q-0) - \gamma \vec{R}_L \quad (30.4)$$

que expresan la continuidad del vector primer  $\vec{p}_v$  y la discontinuidad radial de su derivada.

*Expresiones de  $\vec{p}_v$  y  $\vec{p}_r$  en las distintas partes de la trayectoria.*

Supuesto plano el problema de transferencias y la duración de trayecto indiferente, es posible conocer la forma de los vectores  $\vec{p}_v$  y  $\vec{p}_r$ , para las distintas partes de que consta la trayectoria global.

En la primera fase con salida tangencial desde una órbita circular base, la orientación se considera indiferente, de ahí que, por la Consecuencia 18.2, resulten para  $\vec{p}_v$  y  $\vec{p}_r$  las siguientes expresiones

$$\vec{p}_v = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 (\vec{h}_o \wedge \vec{r}) \quad (30.5)$$

$$\vec{p}_r = \lambda_1 \frac{\mu \vec{r}}{r^3} - \lambda_2 (\vec{h}_o \wedge \vec{v}) \quad (30.6)$$

donde  $\vec{h}_0$  representa el momento cinético sobre la órbita  $O$  de transferencia, entre los terminales ( $P, S$ ).

En la segunda fase, de transferencia entre hipérbolas, y de acuerdo con las condiciones de contorno establecidas, pueden distinguirse las tres partes siguientes: la primera entre el punto  $S$  de entrada y el periselenio  $Q$ , la segunda entre el periselenio y la segunda impulsión  $\vec{I}_2$ , y la tercera entre ésta y el punto  $E$  de salida.

Veamos las expresiones de  $\vec{p}_v$  y  $\vec{p}_r$  en cada una de las subfases que componen la fase II, y que por ser la orientación no indiferente serán distintas de las (30.5) y (30.6) para la fase I.

La primera subfase consta de una rama de hipérbola  $H_1$ , rasante a la superficie lunar en el periselenio  $Q$ , con velocidad residual  $\vec{V}_1$  en el infinito. Por tanto  $\vec{p}_v$  y  $\vec{p}_r$  vendrán dados por las expresiones (18.20) y (18.21), que en nuestro caso resultan ser

$$\vec{p}_v = \Lambda_1 \vec{v} - \Lambda_3 h_1^2 \vec{e}_1 + \Lambda_3 [V_1 - v \cos \Phi] (\vec{h}_1 \wedge \vec{r}) \quad (30.7)$$

$$\vec{p}_r = \Lambda_1 \mu \frac{\vec{r}}{r^3} - \Lambda_3 \frac{\mu}{r^3} \left( \frac{h_1^2}{\mu} - r \right) (\vec{h}_1 \wedge \vec{r}) - \Lambda_3 [V_1 - v \cos \Phi] (\vec{h}_1 \wedge \vec{V}) \quad (30.8)$$

donde  $\vec{h}_1$  y  $\vec{e}_1$  representan el momento cinético y el vector periselenio de la rama de hipérbola rasante  $H_1$ .

En la segunda subfase, entre el periselenio  $Q$  y la impulsión  $\vec{I}_2$ , la forma de los vectores  $\vec{p}_v$  y  $\vec{p}_r$  es algo distinta a las anteriores, debido a la condición (30.4) y a que el trozo de hipérbola  $H_1$  situado entre los puntos  $Q$  e  $I_2$  es acotado, con lo que carece de puntos en el infinito y la condición (18.23) no es aplicable. Todo esto determina al par de vectores  $\vec{p}_v$ ,  $\vec{p}_r$  en la forma

$$\vec{p}_v = T_1 \vec{v} - T_3 h_1^2 \vec{e}_1 + [T_2 - T_3 v \cos \Phi] (\vec{h}_1 \wedge \vec{r}) \quad (30.9)$$

$$\vec{p}_r = T_1 \mu \frac{\vec{r}}{r^3} - T_3 \frac{\mu}{r^3} \left( \frac{h_1^2}{\mu} - r \right) (\vec{h}_1 \wedge \vec{r}) - [T_2 - T_3 v \cos \Phi] (\vec{h}_1 \wedge \vec{v}) \quad (30.10)$$

donde  $\Phi$  en (30.7, 8, 9, 10) representa el ángulo obtuso entre  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ .

Para la tercera subfase, las expresiones de  $\vec{p}_v$  y  $\vec{p}_r$  son análogas a las de la primera subfase, con la salvedad de que por la existencia de una segunda impulsión  $\vec{I}_2$  y una velocidad residual  $\vec{V}_2$  en el infinito, los vectores momento cinético  $\vec{h}_2$  y periselenio  $\vec{e}_2$ , serán distintos a los anteriores. Con todo ello resultan las siguientes expresiones para  $\vec{p}_v$  y  $\vec{p}_r$

$$\vec{p}_v = \pi_1 \vec{v} - \pi_3 h_2 \vec{e}_2 - \pi_3 [V_2 + v \cos \Phi] (\vec{h}_2 \wedge \vec{r}) \quad (30.11)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_r = \pi_1 \mu \frac{\vec{r}}{r^3} - \pi_3 \frac{\mu}{r^3} \left( \frac{h_2^2}{\mu} - r \right) (\vec{h}_2 \wedge \vec{r}) + \\ + \pi_3 [V_2 + v \cos \Phi] (\vec{h}_2 \wedge \vec{v}) \end{aligned} \quad (30.12)$$

Por último, de acuerdo con las expresiones del vector primer en el infinito de una hipérbola (Teorema 10) resultan para los puntos S y E de entrada y salida de la esfera de influencia lunar, las siguientes expresiones del vector primer

$$\vec{p}_v(S) = \Lambda_1 \vec{V}_1 - \Lambda_3 h_1^2 \vec{e}_1 + \Lambda_3 \frac{\mu}{V_1^2} (\vec{h}_1 \wedge \vec{V}_1) \quad (30.13)$$

$$\vec{p}_v(E) = \pi_1 \vec{V}_2 - \pi_3 h_2^2 \vec{e}_2 + \pi_3 \frac{\mu}{V_2^2} (\vec{h}_2 \wedge \vec{V}_2) \quad (30.14)$$

La fase III es hiperbólica geocéntrica, y por tanto de duración y orientación indiferentes, de ahí que sobre este trozo de trayectoria (Lema 1, VI)  $\vec{p}_v$  viene dado por la expresión:

$$\vec{p}_v = \Lambda_1 \vec{v} \quad (30.14')$$

Relaciones entre  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$ .

Para determinar las relaciones de dependencia entre los parámetros  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  tengamos en cuenta que por las condiciones de contorno de la trayectoria global, resultan para la fase I las siguientes condiciones en los límites (R-13):

$$\vec{p}_v^2(P) = 1 \quad (30.15)$$

$$\vec{p}_v(S+0) = \vec{p}_v(S-0) \quad (30.16)$$

por efectuar en el perigeo P una impulsión  $\vec{I}_1$  cuyo costo viene dado por la expresión (27.6), y por la continuidad del vector primer a la entrada de la esfera de influencia lunar.

Sea  $\vec{V}_E$  la velocidad de entrada, referida al sistema geocéntrico, que forma un ángulo  $\alpha$  con la velocidad lunar  $\vec{V}_L$ , entonces, la velocidad de entrada  $\vec{V}_1$  en el sistema selenocéntrico, será

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_E - \vec{V}_L \quad (30.17)$$

formando un ángulo  $\varphi$  con  $-\vec{V}_L$ .

De la condición (30.15) se deduce la siguiente relación entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ,

$$\lambda_1 V_0 + \lambda_2 V_0 R^2 = 1 \quad (30.18)$$

donde  $\vec{V}_0$  es la velocidad orbital en el punto P, tras la impulsión  $\vec{I}_1$ , y R el radio de la órbita base  $O_B$ .

Por otra parte, de (30.16) se obtienen las dos relaciones de dependencia siguientes

$$\lambda_1 V_E \cos \alpha + \lambda_2 h_0 r = -\Lambda_1 V_1 \cos \varphi + \Lambda_3 A \quad (30.19)$$

$$\lambda_1 V_E \sin \alpha = \Lambda_1 V_1 \sin \varphi + \Lambda_3 B \quad (30.20)$$

con A y B dados por las relaciones

$$A = \frac{h_1^3}{\mu} V_1 \sin \varphi + h_1^2 \cos \varphi + \mu \frac{h_1}{V_1} \sin \varphi \quad (30.21)$$

$$B = \frac{h_1^3 V_1}{\mu} \cos \varphi - h_1^2 \sin \varphi + \mu \frac{h_1}{V_1} \cos \varphi \quad (30.22)$$

Si se eliminan  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  entre las ecuaciones (30.18, 19, 20) resulta

$$\Lambda_1 = f(\alpha) - \Lambda_3 g(\alpha) \quad (30.23)$$

donde las funciones  $f$  y  $g$  están definidas por las igualdades

$$f(\alpha) = \frac{h_o r V_E \operatorname{sen} \alpha}{D_f R^2 V_o} \quad (30.24)$$

$$g(\alpha) = \frac{(A \operatorname{sen} \alpha - B \operatorname{cos} \alpha) V_E R^2 + B h_o r}{D_f R^2} \quad (30.25)$$

$$D_f = \frac{V_1 h_o r}{R^2} \operatorname{sen} \varphi - V_E V_1 \operatorname{sen}(\alpha + \varphi) \quad (30.26)$$

Notemos que para una velocidad de entrada  $V_E$  horizontal ( $\alpha = 0^\circ$ ), las funciones  $f$  y  $g$  toman los siguientes valores

$$f(0) = \frac{h_o r (V_L - V_E)}{V_o V_1 (h_o r - R^2 V_L)} \quad (30.27)$$

$$g(0) = \infty \quad (30.28)$$

En resumen, vemos que el vector primer sobre el trozo de trayectoria comprendido entre el perigeo  $P$  y el periselenio  $Q$ , queda determinado en función de los parámetros  $\alpha$  y  $\lambda$  ( $= \Lambda_3$ ), pues  $V_o$ ,  $V_E$ ,  $V_1$ ,  $\varphi$ ,  $h_o$ ,  $h_1$  y  $e_1$  pueden expresarse en función de éstos, a partir de las relaciones siguientes:

$$V_o = L \operatorname{cos} \alpha \sqrt{\frac{r - R}{r^2 \operatorname{cos}^2 \alpha - R^2}} \quad (30.29)$$

$$V_E = L \sqrt{\frac{R(r - R)}{r^2 \operatorname{cos}^2 \alpha - R^2}} \quad (30.30)$$

$$V_1 = \sqrt{V_E^2 + V_L^2 - 2 V_E V_L \operatorname{cos} \alpha} \quad (30.31)$$

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{V_E \operatorname{sen} \alpha}{V_L - V_E \operatorname{cos} \alpha} \right] \quad (30.32)$$

$$h_o = R V_o \quad (30.33)$$

$$h_1 = R_L U_1 \quad (30.34)$$

$$e_1 = 1 + 2 V_1^2 / L^2 \quad (30.35)$$

donde  $U_1$  es la velocidad en el periselenio  $Q$  y  $L'$  la velocidad de liberación lunar a nivel del suelo.

La fórmula que nos da la excentricidad  $e_1$  de la hipérbola  $H_1$ , se ha obtenido a partir de la expresión

$$\operatorname{sen} A_1 = 1/e_1 \quad (30.36)$$

donde  $A_1$  es el semiángulo de desviación para una hipérbola rasante  $H_1$ , de velocidad residual en el infinito  $V_1$ , que viene dado por la ecuación

$$\operatorname{sen} A_1 = \frac{L'^2}{L'^2 + 2 V_1^2} \quad (30.37)$$

Determinación de los parámetros  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  en función de  $\lambda$ ,  $\alpha$  y  $\gamma$  a partir de la condición de empalme.

Aplicando las condiciones de empalme en el punto  $Q$  (periselenio de  $H_1$ ) y teniendo en cuenta que  $\vec{p}_v(Q-0)$ ,  $\vec{p}_r(Q-0)$ ,  $\vec{p}_v(Q+0)$  y  $\vec{p}_r(Q+0)$  no son más que las expresiones (30.7, 8, 9, 10) se tienen las relaciones siguientes:

$$T_1 = \Lambda_1 - \Gamma R_L^2 = f(\alpha) - \lambda g(\alpha) - \Gamma R_L^2 \quad (30.38)$$

$$T_2 = \lambda V_1 + \Gamma \quad (30.39)$$

$$T_3 = \lambda \stackrel{\Delta}{=} \Lambda_3 \quad (30.40)$$

con

$$\Gamma = \gamma \frac{R_L}{\mu - R_L U^2} \quad (30.41)$$

que nos expresan  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) en función de los parámetros  $\alpha$ ,  $\lambda$  y  $\Gamma$ .

Expresiones de  $\vec{p}_v$  y  $\vec{p}_r$  antes de la segunda impulsión.

Para expresar los vectores  $\vec{p}_v$  y  $\vec{p}_r$  en el trozo de trayectoria comprendida entre el periselenio  $Q$  y la impulsión  $\vec{I}_2$  en la forma

$$\vec{p}_v = p_1 \vec{v} + p_2 (\vec{h}_1 \wedge \vec{v}), \quad (30.42)$$

$$\vec{p}_r = p_3 \vec{v} + p_4 (\vec{h}_1 \wedge \vec{v}) \quad (30.43)$$

expresemos los vectores  $\vec{r}$ ,  $(\vec{h}_1 \wedge \vec{r})$  y  $e_1$  en la base  $\vec{v}$ ,  $(\vec{h}_1 \wedge \vec{v})$ . Resultan así las siguientes expresiones:

$$\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\cos \Phi}{v} \vec{v} - \frac{\text{sen } \Phi}{h_1 v} (\vec{h}_1 \wedge \vec{v}) \quad (30.44)$$

$$(\vec{h}_1 \wedge \vec{v}) = \frac{r h_1 \text{sen } \Phi}{v} \vec{v} - \frac{r \cos \Phi}{v} (\vec{h}_1 \wedge \vec{v}) \quad (30.44)$$

$$-e_1 = -\frac{\cos \Phi}{v} \vec{v} + \left( \frac{1}{\mu} - \frac{\text{sen } \Phi}{h_1 v} \right) (\vec{h}_1 \wedge \vec{v}) \quad (30.46)$$

Sustituyendo en (30.9) y (30.10), tendremos  $\vec{p}_v$  y  $\vec{p}_r$  en la forma deseada, obteniendo para las componentes  $P_i$  las relaciones

$$P_1 = p_{11} + \lambda p_{12} + \Gamma p_{13} \quad (30.47)$$

$$P_2 = p_{21} + \lambda p_{22} + \Gamma p_{23} \quad (30.48)$$

$$P_3 = p_{31} + \lambda p_{32} + \Gamma p_{33} \quad (30.49)$$

$$P_4 = p_{41} + \lambda p_{42} + \Gamma p_{43} \quad (30.50)$$

donde los elementos  $p_{ij}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ;  $j = 1, \dots, 3$ ) son los siguientes

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= f(\alpha) \\
 p_{12} &= -g(\alpha) - \frac{h_1^2}{v} \cos \Phi + (V_1 - v \cos \Phi) \frac{r h_1}{v} \sin \Phi \\
 p_{13} &= r^2 \sin^2 \Phi - R_L^2 \\
 p_{21} &= 0 \\
 p_{22} &= \left( \frac{h_1^2}{\mu} - r \right) - (V_1 - v \cos \Phi) \frac{r \cos \Phi}{v} \\
 p_{23} &= -\frac{r \cos \Phi}{v} \\
 p_{31} &= -\frac{\mu}{r^2 v} f(\alpha) \cos \Phi \\
 p_{32} &= \frac{\mu}{r^2 v} \left[ g(\alpha) \cos \Phi - h_1 \left( \frac{h_1^2}{\mu} - r \right) \sin \Phi \right] \\
 p_{33} &= \frac{\mu}{r^2 v} R_L^2 \cos \Phi \\
 p_{41} &= \frac{\mu}{r^2 h_1 v} f(\alpha) \sin \Phi \\
 p_{42} &= \frac{\mu}{r^2 h_1 v} \left[ g(\alpha) \sin \Phi + h_1 \left( \frac{h_1^2}{\mu} - r \right) \cos \Phi \right] - (V_1 - v \cos \Phi) \\
 p_{43} &= \frac{\mu}{r^2 h_1 v} R_L^2 \sin \Phi - 1
 \end{aligned} \tag{30.51}$$

Si  $\alpha = 0^\circ$ ,  $p_{12} = -\infty$ , y  $p_{32} = p_{42} = \infty$ , mientras que los demás elementos  $p_{ij}$  toman valores finitos.

*Estudio de las formas cuadráticas*  $|\vec{p}_v| = 1$  y  $(\vec{p}_v \cdot \vec{p}_r) = 0$ .

Sea  $R_r$  el radio vector de posición del punto donde se efectúa la segunda impulsión  $\vec{I}_2$ , entonces aplicando las condiciones necesarias de optimalidad de la trayectoria, en el punto de impulsión deben verificarse las siguientes condiciones

$$\vec{p}_v \uparrow \uparrow \vec{I}_2 \tag{30.52}$$

$$|\vec{p}_v| = 1 \tag{30.53}$$

$$(\vec{p}_v \cdot \vec{p}_r) = 0 \tag{30.54}$$

Una vez fijados los valores de  $\alpha$ ,  $R_r$  e  $I_2$  (costo de la segunda impulsión) tendremos determinados los parámetros  $\lambda$  y  $\Gamma$ , y con ello la posibilidad de conocer la evolución de  $\vec{p}_v$  a lo largo de la trayectoria total.

Para obtener los valores de  $\lambda$  y  $\Gamma$  tenemos que resolver el sistema de ecuaciones formado por (30.53, 54). Ahora bien, si se sustituyen las expresiones (30.42) y (30.43) en dicho sistema y se efectúan operaciones resulta que  $\lambda$  y  $\Gamma$  vendrán determinados como coordenadas de los puntos de intersección del par de cónicas  $Q_1$  y  $Q_2$ , de ecuaciones

$$(Q_1): (\lambda \Gamma 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \Gamma \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (30.55)$$

$$(Q_2): (\lambda \Gamma 1) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \Gamma \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (30.56)$$

donde los elementos  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) de las matrices de las cónicas, vienen dados por el sistema de igualdades

$$\begin{aligned} a_{11} &= (p_{12})^2 + (p_{22} h_1)^2 \\ a_{22} &= (R_1^2 \operatorname{sen}^2 \Phi_1 - R_L^2)^2 + \frac{R_1^2 h_1^2}{V_1^2} \cos^2 \Phi_1 \end{aligned} \quad (30.57)$$

$$\begin{aligned} a_{33} &= f^2(\alpha) - \frac{1}{V_1^2} \\ a_{12} &= p_{12} (R_1^2 \operatorname{sen}^2 \Phi_1 - R_L^2) - \frac{p_{22} R_1 h_1^2 \cos \Phi_1}{V_1} \Phi_1 \\ a_{13} &= p_{12} f(\alpha) \end{aligned} \quad (30.57)$$

$$\begin{aligned} a_{23} &= f(\alpha) (R_1^2 \operatorname{sen}^2 \Phi_1 - R_L^2) \\ b_{11} &= p_{32} p_{12} + p_{42} p_{22} h_1^2 \\ b_{22} &= p_{33} (R_1^2 \operatorname{sen}^2 \Phi_1 - R_L^2) - p_{43} R_1 \frac{h_1^2}{V_1} \cos \Phi_1 \end{aligned} \quad (30.58)$$

$$\begin{aligned} b_{12} &= \frac{1}{2} \left[ p_{32} (R_1^2 \operatorname{sen}^2 \Phi_1 - R_L^2) + p_{33} p_{12} - p_{42} R_1 \frac{h_1^2}{V_1} \cos \Phi_1 + p_{43} p_{22} h_1^2 \right] \\ b_{13} &= b_{23} = b_{33} = 0 \end{aligned}$$

siendo  $V_1$  el módulo de la velocidad de entrada en el punto de impulsión, y  $\Phi_1$  el ángulo obtuso que forman  $\vec{V}_1$  y  $\vec{R}_1$  (fig. 30.1).

La naturaleza de las cónicas  $Q_1$  y  $Q_2$  puede determinarse mediante un programa de cálculo numérico, y los resultados que se obtienen acerca de su clasificación son los siguientes:

$Q_1$ : Elipse ordinaria con centro en un punto del cuarto cuadrante del plano  $(\lambda, \Gamma)$ .

$Q_2$ : Hipérbola degenerada en un par de rectas que se cortan en el origen de coordenadas.

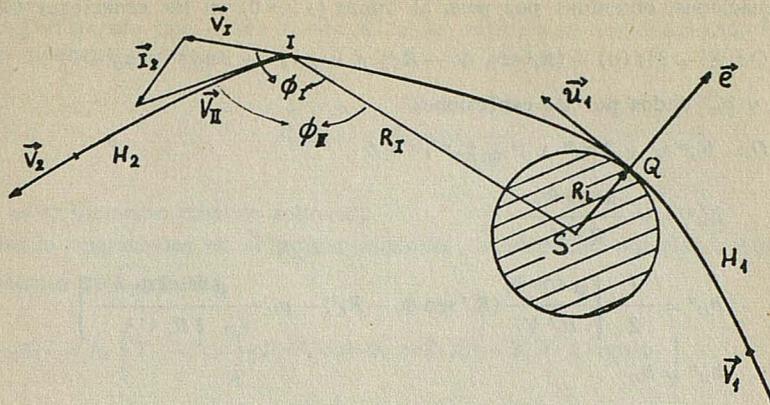


FIG. 30.1

Una vez clasificadas las cónicas  $Q_1$  y  $Q_2$  es fácil obtener los valores de  $\lambda$  y  $\Gamma$ . En efecto, de la ecuación  $Q_2$ , se puede despejar la razón  $\lambda/\Gamma$ , ya que es homogénea de segundo orden en  $\lambda, \Gamma$ . Los valores de dicha razón son:

$$\frac{\lambda}{\Gamma} = m_1 = \frac{-b_{12} + \sqrt{|B_{33}|}}{b_{11}} \quad (30.59)$$

$$\frac{\lambda}{\Gamma} = m_2 = \frac{-b_{12} - \sqrt{|B_{33}|}}{b_{11}} \quad (30.60)$$

donde  $B_{33}$  es el adjunto de  $b_{33}$ .

Si se sustituyen los valores de  $\lambda$  dados por (30.59, 60) en la ecuación  $Q_1$  resultan los siguientes valores de

$$\Gamma = \frac{-M_2 \pm \sqrt{(M_2)^2 - a_{33} M_1}}{M_1} \quad (30.61)$$

$$\Gamma = \frac{-M_4 \pm \sqrt{(M_4)^2 - a_{33} M_3}}{M_3} \quad (30.62)$$

donde los  $M_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} M_1 &= a_{11}(m_2)^2 + 2a_{12}m_2 + a_{22} \\ M_2 &= a_{13}m_2 + a_{23} \\ M_3 &= a_{11}(m_1)^2 + 2a_{12}m_1 + a_{22} \\ M_4 &= a_{13}m_1 + a_{23} \end{aligned} \quad (30.63)$$

Si  $\alpha = 0^\circ$  se tiene  $\lambda = 0$ , con lo que las cónicas  $Q_1$  y  $Q_2$  se convierten en el par de cónicas  $Q_3$  y  $Q_4$  del plano  $(\Lambda, \Gamma)$ , donde  $\Lambda$  está definida por la igualdad

$$\Lambda = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\lambda g(\alpha)) \quad (30.64)$$

y cuyas ecuaciones, obtenidas por paso al limite ( $\alpha \rightarrow 0$ ) en las ecuaciones (30.55, 56), son:

$$Q_3: \Lambda^2 - 2 [f(o) + (R_I^2 \operatorname{sen}^2 \Phi_I - R_L^2)] \Lambda + a_{22} \Gamma^2 + 2 a_{23} \Gamma + a_{33} = 0 \quad (30.65)$$

con  $b_{11}$ ,  $b_{12}$  y  $b_{22}^*$  dados por las expresiones

$$Q_4: b_{11}^* \Lambda^2 + 2 b_{22}^* \Lambda \Gamma + b_{22}^* \Gamma^2 = 0 \quad (30.66)$$

$$b_{11}^* = - \frac{\mu \cos \Phi_I}{R_I^2 V_I}$$

$$b_{12}^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu \cos \Phi_I}{R_I^2 V_I} (R_I^2 \operatorname{sen} \Phi_I - R_L^2) - p_{33} - \frac{\mu \operatorname{sen} 2 \Phi_I h_I}{2 R_I V_I^2} \right]$$

$$b_{22}^* = b_{22}$$

Una vez calculados los valores de  $\Lambda$  y  $\Gamma$ , de forma análoga al caso  $\alpha \neq 0$ , se pueden conocer los valores de los parámetros  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\Gamma$ . Resulta inmediato comprobar, que sus valores son los siguientes:

$$T_1 = f(o) - \Lambda - R_L^2 \Gamma$$

$$T_2 = \Gamma$$

$$T_3 = 0$$

$$\Lambda_1 = f(o) - \Lambda$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{V_I}{V_L - V_E} \Lambda_1 + \frac{B^2 (V_L - V_E)}{V_I V_E}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{R^2 V_0} - \frac{\lambda_1}{R^2}$$

Cálculo de  $\vec{V}_2$  y  $|\vec{V}_\infty|$  en función de  $R_I$ ,  $I_2$  y  $\alpha$ .

Si denotamos por  $\varepsilon$  el ángulo que forma la impulsión  $\vec{I}_2$  con la velocidad  $\vec{V}_I$  de entrada en dicha impulsión (fig. 30.1) resulta la identidad

$$\frac{(\vec{I}_2 \cdot \vec{V}_I)}{I_2} = \frac{\vec{p}_v \cdot \vec{V}_I}{(p_v \cdot V_I)} = -V_I \cos \varepsilon$$

que es equivalente a

$$-V_I \cos \varepsilon = T_1 V_I^2 - T_3 h_I^2 V_I \cos \Phi_I + (T_2 - T_3 V_I \cos \Phi_I) h_I^2 \quad (30.67)$$

Una vez conocida la expresión de  $V_I \cos \varepsilon$  se puede calcular el módulo de  $V_2$ . En efecto, aplicando el teorema del coseno al triángulo de lados  $\vec{V}_I$ ,  $\vec{I}_2$  y  $\vec{V}_{II}$ , donde  $\vec{V}_{II}$  es la velocidad de salida de la segunda impulsión (fig. 30.1), se tiene

o bien

$$\begin{aligned} V_{II}^2 &= V_I^2 + I_2^2 - 2 V_I I_2 \cos \varepsilon \\ V_2^2 &= V_I^2 + I_2^2 - 2 V_I I_2 \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (30.68)$$

por verificarse la igualdad

$$V_{II}^2 - V_I^2 = V_2^2 - V_I^2 \quad (30.69)$$

Siendo  $I$  el ángulo que forma  $\vec{I}_2$  con  $\vec{R}_1$ , si se multiplican vectorialmente  $\vec{R}_1$  y  $\vec{p}_v$ , se obtiene la siguiente identidad

$$\vec{R}_1 \wedge \vec{p}_v = R_1 \operatorname{sen} I \frac{\vec{h}_1}{h_1}$$

donde  $\vec{h}_1$  es el momento cinético sobre  $H_1$ .

Efectuando operaciones en el primer miembro de identidad anterior e identificando los coeficientes de  $\vec{h}_1$ , resulta

$$R_1 \operatorname{sen} I = h_1 \left( T_1 - T_3 \frac{h_1^2}{\mu} R_1 V_1 \cos \Phi_1 + T_2 R_1^2 - T_3 V_1 R_1^2 \cos \Phi_1 \right) \quad (30.70)$$

Una vez conocida la expresión de  $R_1 \operatorname{sen} I$ , se puede calcular el módulo del momento cinético  $\vec{h}_2$ , a partir de la expresión

$$h_2 = R_1 U_1 + I_2 R_1 |\operatorname{sen} I| \quad (30.71)$$

y con ello determinar la excentricidad  $e_2$  y el semiángulo  $A_2$  de desviación, para la hipérbola  $H_2$ , que serán

$$e_2 = \sqrt{1 + \frac{(h_2 V_2)^2}{\mu^2}} \quad (30.72)$$

$$A_2 = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \frac{L^2}{L^2 + 2 V_2^2} \right) \quad (30.73)$$

Supongamos ahora que se sale de la esfera de influencia lunar con una velocidad  $\vec{V}_s$ , referida al sistema terrestre. Entonces si no se efectúa ninguna impulsión suplementaria en la fase III, se tiene

$$V_s^2 = V_\infty^2 + L_s^2 \quad (30.74)$$

expresión que nos da la velocidad residual  $V_\infty$ , en el infinito del sistema Tierra-Luna, en función de la velocidad de salida  $V_s$ . Por otra parte, como  $\vec{V}_s = \vec{V}_2 + \vec{V}_L$  resulta:

$$V_s^2 = V_2^2 + V_L^2 + 2 V_2 V_L \cos \beta \quad (30.75)$$

siendo

$$\beta = f_I - f_{II} + A_1 + A_2 + \varphi - \pi \quad (30.76)$$

el ángulo que forma  $\vec{V}_2$  con la velocidad lunar  $\vec{V}_L$  y  $f_I, f_{II}$  los ángulos que forma el vector  $\vec{R}_1$  con los vectores  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$ , respectivamente.

Igualando los segundos miembros de las expresiones (30.75, 76) resulta la fórmula

$$V_\infty^2 = V_2^2 + V_L^2 - L_s^2 + 2 V_2 V_L \cos \beta \quad (30.77)$$

que junto con la (30.68) nos permite conocer el costo  $I_2$  de la segunda impulsión en función de  $V_\infty$ . Relación de gran interés en el estudio de la optimalidad de la trayectoria global.

**Determinación de los parámetros  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  y  $\pi_3$** 

Para calcular los valores de  $\pi_1$  y  $\pi_3$  tengamos presente que, en el punto  $E$  de salida de la esfera de influencia lunar, se verifica la siguiente condición límite (R-13)

$$\vec{p}_v(E+0) = \vec{p}_v(E-0) \quad (30.78)$$

Por otra parte, como  $\vec{p}_v(E-0)$  y  $\vec{p}_v(E+0)$  vienen dados por las expresiones siguientes

$$\vec{p}_v(E-0) = \pi_1 \vec{V}_2 - \pi_3 h_2^2 e_2 + \pi_3 \frac{\mu}{V_2^2} (h_2 \wedge V_2) \quad (6L'0E)$$

$$\vec{p}_v(E+0) = \Delta_1 \vec{V}_s = |\vec{p}_v(E-0)| \frac{\vec{V}_s}{V_s} \quad (30.80)$$

resulta que la condición (30.78) es equivalente a esta otra:

$$\pi_1 \vec{V}_2 - \pi_3 h_2^2 e_2 + \pi_3 \frac{\mu}{V_2^2} (h_2 \wedge V_2) = |\vec{p}_v(E-0)| \frac{\vec{V}_s}{V_s} \quad (30.81)$$

que, por ser una identidad entre vectores planos, nos dará dos condiciones escalares para determinar  $\pi_1$  y  $\pi_3$ , en tanto que el cálculo de  $\pi_2$  se realiza mediante la fórmula (18.27) aplicada a este caso, o sea

$$\pi_2 = -V_2 \pi_3 \quad (30.82)$$

El estudio precedente nos permite construir una familia de trayectorias biimpulsionales que cumplen las condiciones necesarias de optimalidad, para lo cual bastará estudiar la evolución del vector primer sobre la trayectoria global y ver para qué valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $R_1$ ,  $I_2$ , es  $|\vec{p}_v| \leq 1$ , a lo largo de toda la trayectoria.

Construidas las trayectorias globales que verifican las condiciones necesarias de optimalidad, es preciso estudiar el costo total  $C = I_1 + I_2$  en función de  $V_\infty$ , para seleccionar la trayectoria optimal, es decir aquella que hace que el consumo  $C$  sea lo menor posible.

Pues bien, mediante el estudio numérico realizado con ayuda de un programa de cálculo se ha llegado a la siguiente

**Conclusión:** Entre todas las trayectorias impulsivas, que a partir de una órbita circular dada a gran distancia del sistema Tierra-Luna, utilizando el efecto de trampolín lunar (paso en las proximidades de la Luna), la que cumple las condiciones necesarias de optimalidad y hace mínimo el consumo de combustible  $C$  es de uno de los tipos de la (fig. 30.2), según el valor de  $V_\infty$  dado.

Como vemos la trayectoria optimal es monoimpulsional, con una impulsión tangencial  $I_1$ , en el punto  $P$  de salida y su costo, en función de la inclinación de la velocidad de entrada en la esfera de influencia lunar, es:

$$I_1 = L \left[ \sqrt{\frac{R(r-R) \cos^2 \alpha}{r^2 - R^2 \cos^2 \alpha}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad (30.83)$$

A la vista de este resultado, podría pensarse que existirían transferencias monoimpulsionales, tales como la subida directa (fig. 30.3).

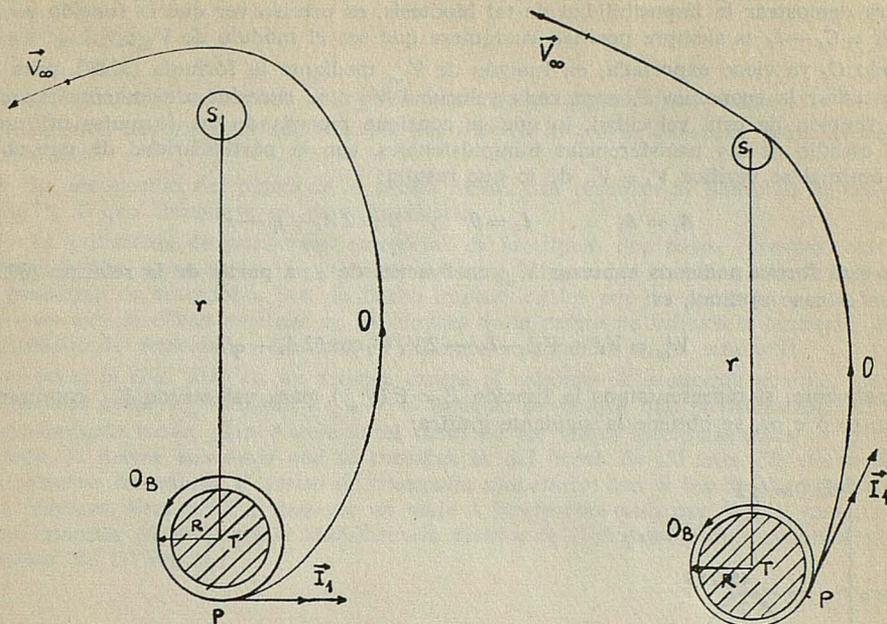


FIG. 30.2

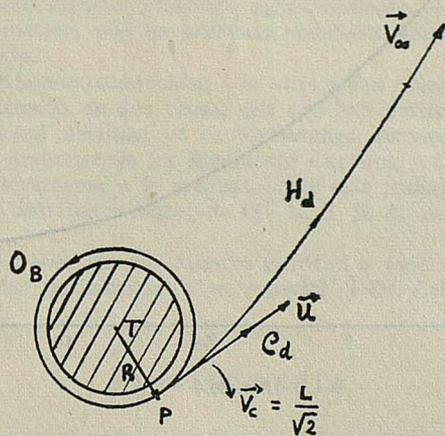


FIG. 30.3

que mediante una impulsión tangencial en el punto  $P$  de salida, de costo  $C_d$ , dado en función de  $V_\infty$ , por la expresión

$$C_d = |\vec{u} - \vec{V}_c| = \sqrt{L^2 + V_\infty^2} - L/\sqrt{2} \quad (30.84)$$

y sin necesidad de aprovechar el efecto de trampolín lunar, nos proporcionarán una velocidad  $V_\infty$ ; en el infinito del sistema Tierra-Luna, con consumo menor.

Para demostrar la imposibilidad de tal hipótesis, es preciso ver que la función economía  $E = C_d - I_1$  es siempre positiva cualquiera que sea el módulo de  $V_\infty$ .

Codo  $C_d$  ya viene expresada, en función de  $V_\infty$  mediante la fórmula (30.84), para poder estudiar la economía  $E$ , para cada velocidad  $V_\infty$ , se necesita previamente expresar  $I_1$  en función de esta velocidad, lo que se consigue recordando las fórmulas utilizadas en el estudio de las transferencias biimpulsionales, con la particularidad de que en el caso optimal se verifica  $V_1 = V_2$ , de lo que resulta:

$$A_1 = A_2 \quad , \quad I_2 = 0 \quad , \quad \beta = 2 A_1 + \varphi - \pi$$

De esta forma podemos expresar  $V_\infty$  en función de  $\alpha$ , a partir de la relación (30.77), que en el caso optimal, es:

$$V_\infty^2 = V_I^2 + V_L^2 - L_s^2 - 2 V_I V_L \cos(2 A_1 + \varphi)$$

Finalmente, si representamos la función  $E = E(V_\infty)$ , para valores de  $V_\infty$  comprendidos entre 0 e  $\infty$ , se obtiene la siguiente gráfica:

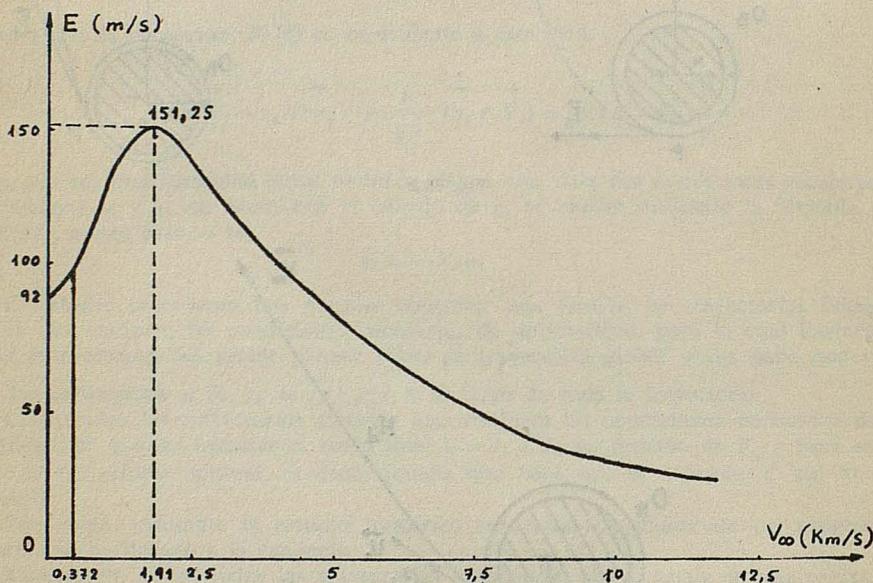


FIG. 30.4

que nos demuestra que  $E$  es una función positiva, y por tanto el consumo de la subida directa es superior al de la subida monoimpulsional con paso por la Luna, c. q. d.

EJEMPLO. — Caso de un lanzamiento hacia Venus.

El cálculo de la órbita de transferencia de Hohmann hacia el planeta Venus prueba, que en este caso, la velocidad  $V_\infty$  necesaria es de 2.5 km./s. Con lo que si se efectúa la transferencia pasando por la Luna, la gráfica que nos dé la economía, indica un ahorro de 138 m/s en lo que a consumo se refiere.

## Observaciones

La utilización del efecto de trampolín lunar posee algunos inconvenientes:

1. La luna no está más que una vez por mes en la buena dirección, para efectuar el lanzamiento.
2. La inclinación del plano de la órbita lunar, con respecto al plano de la eclíptica, es de  $5^\circ$ , lo que disminuye un poco la eficacia.
3. La utilización de maniobras complejas de los tipos: dos pasos sucesivos cerca de la Luna, o bien cerca de la Tierra, tales como los imaginados en el estudio de cada fase del problema de trampolín, son de hecho impracticables por su duración y por las impulsiones que se deben efectuar en los límites de la esfera de influencia terrestre, donde la hipótesis de velocidades elípticas infinitamente pequeñas no es aceptable.

Así pues, la (fig. 30.4) da de manera exacta el máximo de economía posible, máximo que decrece como  $V_\infty^{-2}$  cuando  $V_\infty \rightarrow \infty$ . Además se deduce que la utilización del campo gravitatorio lunar, para disminuir el costo de los viajes interplanetarios es bastante limitado, la mayor economía que se consigue es del orden de 151 m/s. No obstante podría pensarse en utilizar el efecto de trampolín planetario, con el fin de conseguir economías mayores. Este sería el caso de un viaje a Marte con paso por Venus, que con duración superior en 70 días a la transferencia directa de Hohmann podría conseguirse una economía de 1.4 km./s.

## Agradecimientos

Deseamos expresar aquí nuestro profundo agradecimiento al Dr. D. Rafael Cid Palacios, que a parte su dirección, nos ha prestado constante ayuda y estímulo durante la realización de este trabajo.

Al mismo tiempo, quedamos reconocidos a la «European Space Research Organization» (E. S. R. O.) por la concesión de dos becas, que nos han permitido desarrollar trabajos previos en l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (O. N. E. R. A.), gracias a las oportunas gestiones de los Profesores Castaing y Contensou.

Han contribuido decisivamente a la realización de este trabajo las discusiones mantenidas con los Profesores Marchal y Marec de l'O. N. E. R. A., a quienes agradecemos sus inestimables consejos.

Finalmente, deseamos hacer patente nuestra gratitud a todo el equipo de Astronomía de la Facultad de Ciencias de Zaragoza y en especial al Dr. Calvo Pinilla por sus valiosas críticas.

## BIBLIOGRAFIA

1. R. BATTIN: *Astronautical Guidance*. McGraw-Hill Book Company (1964).
2. R. E. BELLMAN: *Dynamic Programming*. Princeton University Press (1957).
3. G. A. BLISS: *Lectures on the Calculus of Variations*. The University of Chicago Press (1963).
4. J. V. BREAKWELL: *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 7, 215 (1959).
5. P. CONTENSOU: *Astronáutica Acta*, 8, 134 (1962).
6. D. R. GLANDORF: *A.I.A.A. J.* 8, 155 (1970).
7. F. W. GOBETZ: *A.I.A.A. J.* 1, 2034 (1963).
8. J. L. LAWDEN: *Optimal Trajectories for Space Navigation*. Butterworths (1963).
9. G. LEITMANN: *An Introduction to Optimal Control*. McGraw-Hill Book Company (1966).

10. A. I. LURIE: *Tropics in Optimization*. Academic Press Inc. (1967), pág. 103.
11. Ch. MARCHAL: *Extraits de la Recherche Aérospatiale* Nos. 116, 118 (1967) y 122 (1968).
12. — O.N.E.R.A. publicación núm. 124 (1968).
13. — O.N.E.R.A., T.P. núm. 391 (1966). Comunicación presentada al 17<sup>e</sup> Congrès International d'Aéronautique. Dunod (1966).
14. — Comunicación presentada al: *Colloquium on Advanced Problems and Methods for Space Flight Optimization*. Pergamon Press (1969), pág. 91.
15. — *Extrait de la Recherche Aérospatiale* núm. 123 (1968) O.N.E.R.A., T.P. núm. 582.
16. J. P. MAREC: Publicación O.N.E.R.A., núm. 121 (1967).
17. — *Cours de Dynamique Spatiale. Ecole Supérieure d'Aéronautique* (París).
18. — O.N.E.R.A., T.P. núm. 729 (1969). Comunicación presentada al III<sup>e</sup> Colloque sur l'Optimization, Nice (1969).
19. P. MUSEN: *Astron. J.* 59, 262 (1954).
20. L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOL'TANSKII, R. S. GAMKRELIDZE and E. F. MISCHENKO: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. The Macmillan Company (1964).
21. A. E. ROY: *The Foundations of Astrodynamics*. The Macmillan Company (1965).
22. J. M. WALTON, Ch. MARCHAL and R. D. CULP: University of Colorado Paper, núm. XVIIJ2. Comunicación presentada al Joint National Meeting A.A.S. & ORS, Denver Colorado (1969).

# DETERMINACION POTENCIOMETRICA AUTOMATICA DE PLATA Y COBRE CON DITIOXAMIDA

POR

J. BERNAL NIEVAS, J. AZNÁREZ ALDUAN, J. R. CASTILLO SUÁREZ

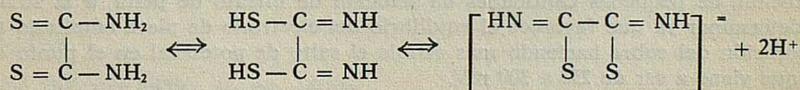
Departamento de Química Analítica. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza

## Abstract

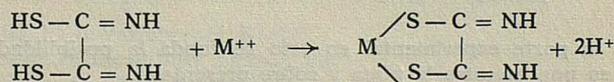
The possibility of using dithiooxamide for the potentiometric determination of silver and copper by means of an automatic drop-measurer was studied. Kalbus's method being thus modified and improved by employing a mercury-sulphate mercurious electrode as reference electrode and a silver one as indicator electrode, as well as the adequate buffer and masquer solutions. The results showed the possibility of carrying out this potentiometric determination of silver and copper by means of an automatic drop-measurer for concentrations ranging from 1 to 50 p. p. m. of silver and 1 to 10 p. p. m. of copper, in the presence of other ions such as Fe (III) up to 500 p. p. m., Ni up to 500 p. p. m., Hg up to 500 p. p. m., and Zn up to 100 p. p. m., within an error of less than 1 %.

## I. — Introducción

Ray y Ray (1) fueron los primeros en emplear ditionxamida como agente de precipitación y Feigl (2) estableció que este reactivo en solución estaba en equilibrio con su forma tautómera:



La ditionxamida o ácido rubeanhídrico forma complejos quelatos 1:1, con cinc, paladio, cobalto y níquel, estables a temperatura ambiente:



Por el contrario, con hierro, plata, mercurio y cadmio forma compuestos inestables que se descomponen fácilmente produciendo sulfuros; cinc, cadmio, cobalto y níquel tan sólo reaccionan con la ditionxamida en medio neutro o amoniacal, pero no en soluciones ácidas. Mediante agentes enmascarantes como fluoruros, EDTA o cualquier complexona se puede conseguir que el reactivo sea más selectivo, de esta forma el cobre, plomo, hierro y mercurio se enmascaran mediante la adición de EDTA.

Kalbus ha empleado la ditioamida para determinar potenciométricamente plata (3), cobre (4) y mercurio (5) encontrando que mediante el uso de un electrodo indicador de plata se pueden valorar potenciométricamente muy pequeñas cantidades de plata que por otros procedimientos, según dicho autor, tendrían algunos inconvenientes (3).

No obstante, en el referido trabajo de Kalbus encontramos algunas objeciones, así como la posibilidad de mejorar la técnica empleada, que será la finalidad de este trabajo.

Kalbus (3) prepara las soluciones de ditioamida exactamente por pesada, pero a lo largo de las valoraciones realizadas no coincide la molaridad de la solución de ditioamida con los resultados obtenidos al valorar soluciones de 1 a 50 p. p. m. de plata. Encontrando que la molaridad es un 4,50 % mayor que la que le correspondería al hallado por pesada. Atribuye la causa de esta diferencia a distintas posibilidades como son: la presencia de trazas de metales pesados en el agua o reactivos, a la descomposición de la ditioamida y finalmente a la absorción de iones plata por el sulfuro de plata formado. Sin embargo en otro momento establece que el reactivo parece ser estable al menos un mes.

Por otra parte usa como electrodo de referencia un electrodo de vidrio y solución de ftalato ácido de potasio como solución amortiguadora, a pesar del poco poder amortiguador que presenta esta solución, teniendo en cuenta además que la reacción de la ditioamida con los correspondientes cationes libera iones hidrógeno; como electrodo de referencia nosotros emplearemos uno de mercurio-sulfato mercurioso (6), evitando la introducción de cloruros que sucedería si empleáramos calomelanos. La finalidad del presente trabajo es ver la forma de corregir los inconvenientes en los siguientes aspectos:

- a) Estabilidad de la solución de ditioamida y su frecuente valoración frente a soluciones conocidas de plata.
- b) Empleo de otros electrodos de referencia cuyo potencial de contacto sea estable y no susceptible a las variaciones de acidez del medio.
- c) El uso de otras soluciones tampón con un mayor poder amortiguador, dado que la reacción de la ditioamida con plata y cobre viene influida por la acidez del medio.

Como ya hemos mencionado anteriormente la ditioamida reacciona con el cobre en medio débilmente ácido.

Meloche y Kalbus (4) han determinado cobre con ditioamida, con un método totalmente análogo al de Kalbus (3) y el cual presenta los mismos inconvenientes.

Nosotros hemos observado que los saltos de potencial obtenidos por Meloche y Kalbus (4) en la valoración potenciométrica de cobre con ditioamida pueden ser mejorados con la adición, de pequeñas cantidades de solución de nitrato de plata, a la solución de cobre a determinar ya que favorece el equilibrio del electrodo de plata empleado también en la valoración del cobre haciendo más visible el salto de potencial en el punto de equivalencia que viene a ser de 250 a 300 mV.

El pH más adecuado para esta valoración corresponde al del tampón acético-acetato.

En presencia de cobre y plata, la ditioamida reacciona inicialmente con el cobre, una vez alcanzado el punto de equivalencia un ligero exceso de ditioamida reduce bruscamente la concentración de plata presente provocando el salto de potencial en el electrodo de plata.

Como se verá la parte experimental en esto se funda la posibilidad de determinar simultáneamente en una muestra la plata y cobre presentes.

Los resultados obtenidos en la valoración de cobre se exponen en la Tabla II.

Posteriormente se procedió a la valoración simultánea de plata y cobre con ditioamida (7), en soluciones en las que las concentraciones de ambos cationes son análogas, apareciendo a lo largo de la valoración dos saltos de potencial amplios y bien definidos correspondientes el primero a la cantidad de plata presente y el segundo a la de cobre. En la tabla III se exponen los resultados obtenidos y en la figura I las curvas potenciométricas.

## II. — Preparación de reactivos

### *Solución de nitrato de plata*

Se pesan 315,00 mgrs. de nitrato de plata Merck, previamente desecado en una estufa a 150°C durante dos horas. Se disuelve y se afora a un litro.

A partir de esta solución y por dilución apropiada se obtienen las distintas soluciones de concentración de 1 a 50 p. p. m. de plata.

### *Solución de cobre*

Se pesan 100,30 mgrs. de hoja electrolítica de cobre Merck, disolviendo en la menor cantidad posible de ácido nítrico concentrado y diluyendo a 1 litro con agua destilada.

A partir de esta solución y por dilución apropiada se obtienen las distintas soluciones de concentración 1 a 10 p. p. m. en cobre.

### *Solución de ditioxamida*

Se disuelven 60,30 mgrs. de ditioxamida en 300 mls. de agua destilada, calentando y agitando continuamente hasta disolución total.

La ditioxamida se disuelve lentamente en frío.

Por los resultados obtenidos en la parte experimental se observa contrariamente a Kalbus que la solución de ditioxamida se descompone apreciablemente a los diez días. Por lo que consideramos imprescindible la valoración simultáneamente de la solución de ditioxamida con solución valorada de nitrato de plata siguiendo la misma técnica que con la muestra desconocida.

### *Solución tampón acético-acetato*

Se preparó una solución tampón acético-acetato a pH = 4,60 comprobado con electrodo de vidrio y pH metro Beckman modelo 1019.

### *Solución de EDTA*

Se preparó por pesada directa solución 0,1 M de EDTA.

### *Fluoruro sódico*

Se añadió fluoruro sódico Merck, sólido.

## A P A R A T O S

Bureta automática LKB Varioperpex S-16125.

Registrador Hitachi Perkins-Elmer modelo 165.

Electrodo indicador de plata, Beckman.

Electrodo de referencia de mercurio-sulfato mercurioso, Beckman.

Después de cada determinación el electrodo de plata ha de frotarse con un paño limpio y sumergirlo en una solución 0,1 molar de cianuro potásico para eliminar la película de sulfuro de plata que se forma durante la valoración y finalmente lavado con agua destilada.

### III. — Método

#### Determinación de plata

A 25 mls. de la solución muestra preparada por dilución apropiada de la solución original se añadieron 10 mls. de solución tampón acético-acetato, 0,50 grs. de fluoruro sódico y 10 mls. de solución 0,1 M de EDTA.

En estas condiciones se introducen en la solución los electrodos y se añade solución de ditioamida. Se observa que el sistema se estabiliza rápidamente y la fuerza electromotriz observada es estable, por lo que nos permite realizar la determinación mediante bureta automática y registrador, de tal forma que obtenemos directamente las curvas potenciométricas.

Los mejores resultados se obtuvieron con una velocidad de caída de agente valorante en la bureta automática de 0,08 ml./minuto a 1,75 ml./minuto en la determinación de plata.

TABLA I

<i>Plata p. p. m.</i>	<i>Plata p. p. m. halladas (a)</i>	<i>Desviación</i>	<i>% Error</i>
1,00	1,01	+ 0,01	+ 1,00
2,00	2,01	+ 0,01	+ 0,50
4,00	4,02	+ 0,02	+ 0,50
7,00	7,00	0,00	0,00
10,00	10,00	0,00	0,00
20,00	20,01	+ 0,01	+ 0,05
30,00	29,93	- 0,07	- 0,23
40,00	40,17	+ 0,17	+ 0,42
50,00	50,10	+ 0,10	+ 0,20

(a) Valor medio de seis determinaciones.

La precisión y seguridad del método pueden observarse en la Tabla I, donde se dan los resultados obtenidos en la valoración de plata en concentraciones de 1 a 50 p. p. m. El salto de potencial en las proximidades del punto de equivalencia es del orden de 350 a 400 mV y perfectamente reproducible.

#### Interferencias

Como ya se ha indicado, el cobre al pH mencionado también reacciona con la ditioamida. Posteriormente veremos la posibilidad de la determinación simultánea de plata y cobre.

Se ha estudiado la interferencia de algunos cationes que pueden acompañar frecuentemente a la plata como son el Fe (III), Cu, Ni y Hg.

De los resultados experimentales dados a continuación, hemos encontrado que la adición de EDTA elimina la interferencia de estos iones, hasta una concentración de cada uno de 500 p. p. m.; en la Tabla II pueden observarse los resultados obtenidos.

TABLA II

<i>Composición p. p. m.</i>	<i>Determinación experimental (b)</i>	<i>Desviación p. p. m.</i>	<i>% Error</i>
Cu 500 ... ..	10,04	+ 0,04	+ 0,40
Ag 10,00 ... ..			
Cu 20 ... ..	20,26	+ 0,06	+ 0,30
Ag 20,00 ... ..			
Cu 200 ... ..	29,97	- 0,03	- 0,10
Ag 30,00 ... ..			
Fe (III) 500 ... ..	10,03	+ 0,03	+ 0,30
Ag 10,00 ... ..			
Fe (III) 20 ... ..	19,93	- 0,07	- 0,35
Ag 20,00 ... ..			
Fe (III) ... ..	30,08	+ 0,08	+ 0,26
Ag 30,00 ... ..			
Ni 500 ... ..	10,07	+ 0,07	+ 0,70
Ag 10,00 ... ..			
Ni 20 ... ..	19,98	- 0,02	+ 0,10
Ag 20,00 ... ..			
Ni 200 ... ..	30,01	+ 0,01	+ 0,03
Ag 30,00 ... ..			
Hg 500 ... ..	10,04	+ 0,04	+ 0,40
Ag 10,00 ... ..			
Hg 20 ... ..	20,04	+ 0,04	+ 0,20
Ag 20,00 ... ..			
Hg 200 ... ..	30,16	+ 0,16	+ 0,52
Ag 30,00 ... ..			

(b) Valor medio de cuatro determinaciones.

**Determinación de cobre**

A 25 mls. de la solución muestra, preparada por dilución apropiada de la solución original, se añadieron 10 mls. de solución tampón acético-acetato, 0,05 mls. de solución de nitrato de plata de concentración 100 p. p. m. en plata y 0,50 grs. de fluoruro sódico, sólido.

Posteriormente se introducen en la solución los electrodos y se añade solución de ditio-xamida. El sistema se estabiliza rápidamente, lo que nos permite realizar la valoración mediante bureta automática y registrador, obteniendo directamente las curvas potencio-métricas.

TABLA III

Cobre p. p. m.	Cobre p. p. m. halladas (c)	Desviación p. p. m.	% Error
1,00	1,01	+ 0,01	+ 1,00
2,00	2,01	+ 0,01	+ 0,50
3,00	3,02	+ 0,02	+ 0,66
4,00	4,02	+ 0,02	+ 0,50
5,00	4,99	- 0,01	- 0,20
6,00	6,05	+ 0,05	+ 0,83
7,00	6,97	- 0,03	- 0,42
8,00	8,06	+ 0,06	+ 0,75
9,00	9,04	+ 0,04	+ 0,44
10,00	9,93	- 0,07	- 0,70

(c) Valor medio de seis determinaciones.

La precisión y seguridad del método pueden observarse en la Tabla III donde se dan los resultados obtenidos en la valoración de soluciones de cobre, en concentraciones de 1 a 10 p. p. m.

El salto de potencial en las proximidades del punto de equivalencia es del orden de 300 a 350 mV y perfectamente reproducible.

### Interferencias

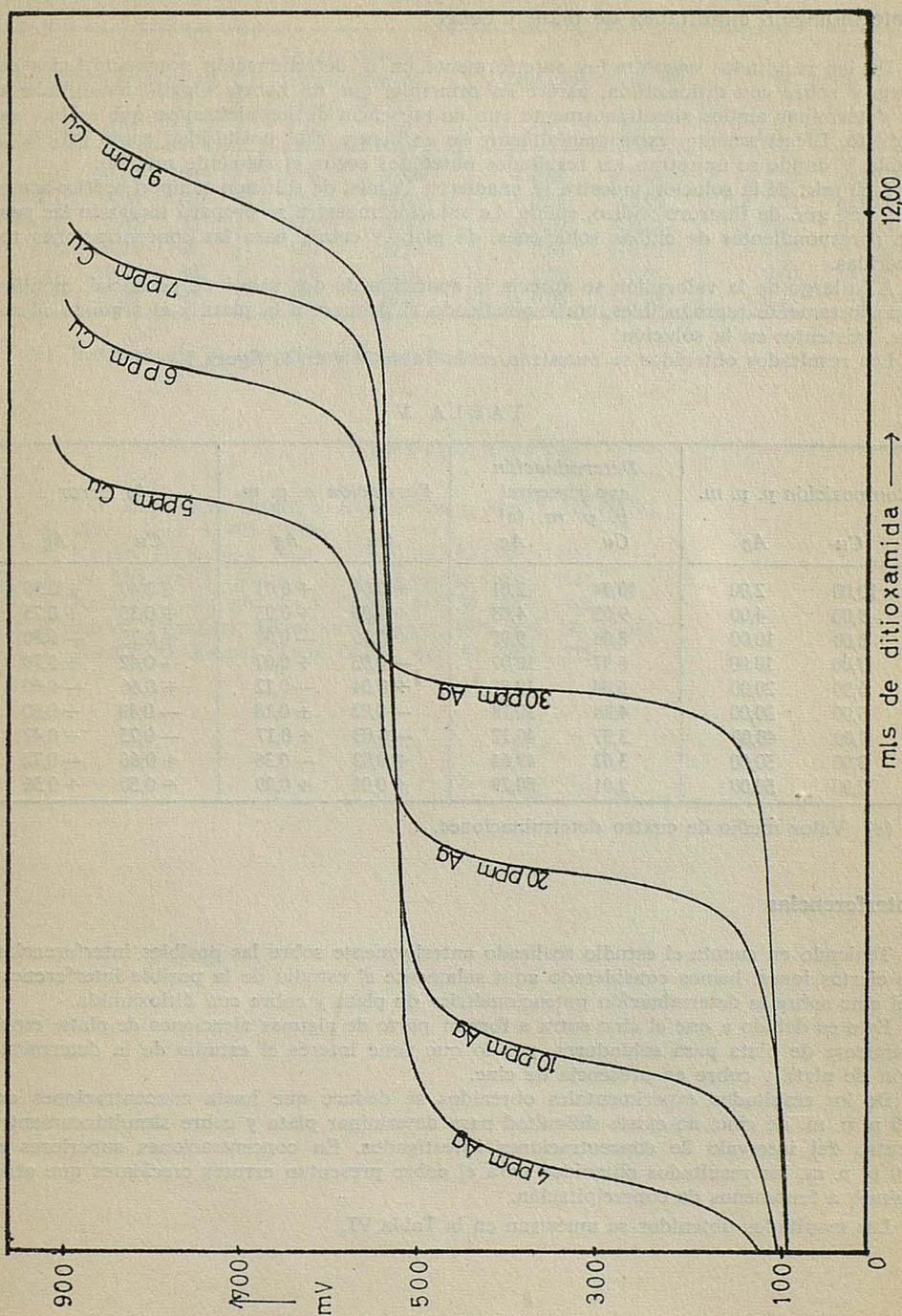
Se estudió el efecto de diferentes concentraciones de hierro III en la determinación de Cu con ditionamida.

Los resultados fueron totalmente satisfactorios, tal como se muestra en la Tabla IV, sin aparecer errores debido a la presencia de hierro III.

TABLA IV

Composición p. p. m.	Determinación experimental p. p. m.	Desviación p. p. m.	% Error
Cu 5,00 ... .. Fe (III) 50 ... ..	5,02	+ 0,02	+ 0,40
Cu 6,00 ... .. Fe (III) 100 ... ..	6,01	+ 0,01	+ 0,16
Cu 7,00 ... .. Fe (III) 200 ... ..	6,96	- 0,04	- 0,57
Cu 8,00 ... .. Fe (II) 300 ... ..	8,03	+ 0,03	+ 0,37
Cu 9,00 ... .. Fe (III) 500 ... ..	9,06	+ 0,06	+ 0,66
Cu 10,00 ... .. Fe (III) 750 ... ..	9,92	- 0,08	- 0,80

(d) Valor medio de cuatro determinaciones.



mls de ditionamida →

FIG. 1

**Determinación simultánea de plata y cobre**

De los resultados encontrados anteriormente en la determinación potenciométrica de plata y cobre con ditioxamida, parece en principio, que no habría ningún inconveniente en determinar ambos simultáneamente aun en presencia de los elementos que se han estudiado. Efectivamente, experimentalmente se encuentra esta posibilidad como refleja la Tabla V donde se muestran los resultados obtenidos según el siguiente método:

A 50 mls. de la solución muestra se añadieron 15 mls. de solución tampón acético-acetato y 0,50 grs. de fluoruro sódico, sólido. La solución muestra se preparó tomando las partes correspondientes de ambas soluciones, de plata y cobre, para las concentraciones requeridas.

A lo largo de la valoración se aprecia la aparición de dos saltos de potencial, amplios y perfectamente reproducibles, correspondiendo el primero a la plata y el segundo al cobre, existentes en la solución.

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla V y en la figura I.

TABLA V

Composición p. p. m.		Determinación experimental p. p. m. (e)		Desviación p. p. m.		% Error	
Cu	Ag	Cu	Ag	Cu	Ag	Cu	Ag
10,00	2,00	10,04	2,01	+ 0,04	+ 0,01	+ 0,40	+ 0,50
9,00	4,00	9,05	4,03	+ 0,05	+ 0,03	+ 0,35	+ 0,75
8,00	10,00	8,06	9,92	+ 0,06	- 0,08	+ 0,75	- 0,80
7,00	10,00	6,97	10,07	- 0,03	+ 0,07	- 0,42	+ 0,70
6,00	20,00	6,04	19,88	+ 0,04	- 0,12	+ 0,66	- 0,60
5,00	30,00	4,98	30,18	- 0,02	+ 0,18	- 0,40	+ 0,60
4,00	40,00	3,97	40,17	- 0,03	+ 0,17	- 0,75	+ 0,42
3,00	50,00	3,02	49,64	+ 0,02	- 0,36	+ 0,66	- 0,72
2,00	50,00	2,01	50,29	+ 0,01	+ 0,29	+ 0,50	+ 0,58

(e) Valor medio de cuatro determinaciones.

**Interferencias**

Teniendo en cuenta el estudio realizado anteriormente sobre las posibles interferencias de ciertos iones, hemos considerado aquí solamente el estudio de la posible interferencia del cinc sobre la determinación potenciométrica de plata y cobre con ditioxamida.

Esto es debido a que el cinc entra a formar parte de algunas aleaciones de plata, especialmente de plata para soldaduras, por lo que tiene interés el estudio de la determinación de plata y cobre en presencia de cinc.

De los resultados experimentales obtenidos se deduce que hasta concentraciones de 100 p. p. m. de cinc, no existe dificultad para determinar plata y cobre simultáneamente, dentro del intervalo de concentraciones investigados. En concentraciones superiores a 100 p. p. m. los resultados obtenidos para el cobre presentan errores crecientes que atribuimos a fenómenos de coprecipitación.

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla VI.

TABLA VI

Composición p. p. m.			Determinación experimental p. p. m. (f)		Desviación p. p. m.		% Error	
Cu	Ag	Zn	Cu	Ag	Cu	Ag	Cu	Ag
5,00	30,00	100	5,06	30,04	+ 0,06	+ 0,04	+ 1,20	+ 0,13
50,00	3,00	80	5,05	29,95	+ 0,05	- 0,05	+ 1,00	- 0,16
4,00	20,00	70	4,02	20,02	+ 0,02	+ 0,02	+ 0,50	+ 0,10
4,00	20,00	60	4,01	20,22	+ 0,01	+ 0,02	+ 0,25	+ 0,10
3,00	10,00	50	3,00	10,04	0,00	+ 0,04	0,00	+ 0,40
3,00	10,00	40	3,01	10,03	+ 0,01	+ 0,03	+ 0,33	+ 0,30

(f) Valor medio de cuatro determinaciones.

BIBLIOGRAFIA

- (1) P. RAY, R. M. RAY, QUART, J. Indian Chem. Soc. 3, 118 (1926).
- (2) F. FEIGL. Ibid. 8, 405 (1936).
- (3) L. KALBUS, G. KALBUS. Anal. Chim., Act. 39 (1967), 335.
- (4) V. W. MELOCHE, L. KALBUS, Anal. Chem. 28 (1956), 1047.
- (5) L. KALBUS, G. KALBUS. Anal. Chim., Act. 39 (1967), 335.
- (6) WILLIAMS, PIEKARSKY, MANNING. Talanta, 1971, vol. 18, p. 951.
- (7) L. KALBUS, G. KALBUS. Anal. Chim., Act. 53 (1971), 225.

# ACETATOS, MONOCLORO, DICLORO, TRICLOROACETATOS Y HALOGENUROS DE ESTILBENDIAMINA NIQUEL (II)

## I. — PREPARACION Y PROPIEDADES ESTRUCTURALES DE SUS DIFERENTES FORMAS

POR

F. GÓMEZ BELTRÁN y L. PUEYO

Departamento de Química Inorgánica. Cátedra de Química Inorgánica Estructural.  
Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza

### Abstract

Several stable stilbendiamine (stien) complexes of Nickel (II) were prepared in order to study the tendency of this ligand to form square-planar chomophores.

From the interconversion properties of the different forms in which several of these complexes appear we could obtain qualitative data on strength gradual variation of the apical bond in the Ni (stien), pseudo-octahedric acetate and chloroacetate series. Such a variation relates directly to the ionic character of the nickel-acetate bond.

### Introducción

Los complejos de níquel con estilbendiamina (1, 2 y 3) ofrecen un notable interés desde el punto de vista estructural por diversas razones. En primer lugar, destaca la posibilidad de obtenerlos en diferentes formas isómeras con propiedades químico-físicas muy diferentes. La posibilidad de interconversión entre estas formas es elevada y de ejecución sencilla. En la obtención de una u otra forma juegan papel, tanto el anión y el disolvente empleados como la forma de llevar a cabo el proceso de síntesis. Resulta especialmente sugestivo observar como un suave cambio en las condiciones de preparación da lugar a formas muy diferentes en sus propiedades. Estos complejos son fácilmente solubles en distintos medios lo que, además de facilitar su estudio físico-químico, permite utilizar la variación de concentración de sus disoluciones como un método de estudio más. Por añadidura, los complejos pseudo-octaédricos de esta familia presentan en su estructura molecular una distorsión tetragonal tan notable que la rotura de degeneración del sistema de términos calculado para el caso octaédrico puro es lo bastante acusada para poder ser medida y, así, la separación entre las bandas de sus espectros de absorción visibles-UV realizados en disoluciones de cloroformo a diferentes concentraciones es muy satisfactoria. Esto hace de ellos un conjunto adecuado para comprobar los resultados espectroscópicos que los estudios teóricos preconizan para la evolución  $O_h \rightarrow D_{4h}$  en la simetría del poliedro de coordinación.

Como elementos representativos de este grupo de complejos de Lifschitz hemos preparado los compuestos que figuran en el título de este artículo.

Nuestro trabajo se divide en dos partes. En la primera estudiamos el número de formas estables de cada uno de estos complejos así como las posibilidades de interconver-

Este trabajo es parte de la Tesis Doctoral del Dr. L. Pueyo que se leyó el 15 de marzo de 1972, en la Facultad de Ciencias de Zaragoza, obteniendo la calificación de «Sobresaliente cum laude».

sión mutua. Analizamos la tendencia en cada caso hacia una u otra configuración en relación con el anión y el disolvente. Se investiga la identidad de los compuestos apicales en el pseudo-octaedro de coordinación en caso de ambigüedad y discutimos, por último, alguno de los resultados notables de los espectros IR.

En la segunda parte, centramos la atención en el análisis de los espectros visible-UV. El estudio se realiza utilizando un modelo de campo cristalino debido a C. J. Ballhausen (4) y ajustamos sus parámetros a nuestros datos experimentales. Los resultados se comparan con un ajuste análogo realizado con otros complejos de níquel muy conocidos en la química de coordinación, aportando esta comparación una información sobre las características de la estilbendiamina como molécula formadora de complejos. Este resultado concuerda, cualitativamente, con las consecuencias que cabe inferir del trabajo desarrollado en esta primera parte. La segunda parte constituirá un artículo posterior.

## Resultados y discusión

### A. Complejos del grupo del ácido acético

En este grupo puede observarse, como norma general, la preferencia por isómeros pseudo-octaédricos en disolventes no polares y por formas planocuadradas en disolventes polares. Así, todos los compuestos estudiados han resultado ser solubles en agua, dando disoluciones amarillas, y en cloroformo, disoluciones azules. Espectroscópicamente puede analizarse el paso de una a otra configuración de modo cuantitativo variando las proporciones relativas de dos disolventes antagónicos (5).

En este resultado vemos una manifestación del carácter iónico de los complejos que nos lleva a pensar, según una primera hipótesis, en una tendencia a la unión de los aniones con el catión paralela a la que tiene lugar entre el oxígeno y el hidrógeno del ácido correspondiente. En este sentido, la tendencia por la planocuaridad debe incrementarse con la acidez del ácido empleado y simultáneamente, debe esperarse la aparición de formas pseudo-octaédricas en la medida en que el ácido sea más débil. Los hechos observados parecen confirmar esta suposición pues, en efecto, en la serie acetato  $\rightarrow$  tricloroacetato la forma amarilla se ve progresivamente favorecida, hasta el punto de que en el tricloroacetato la situación puede decirse que es la inversa de la del acetato en lo que respecta al papel que representan las formas amarillas y azul. Así, la forma azul del tricloroacetato se vuelve espontáneamente amarilla si se la deja al aire mientras que en el acetato hemos podido observar la conversión de cristales amarillos en azules en el seno de una disolución acuosa en estado de cristalización.

Junto a esto hay que decir, que la forma amarilla del tricloroacetato es muy estable al aire y que aparece de nuevo de las disoluciones de cloroformo azules de este complejo. Análogamente, en el acetato, la forma azul es a todas luces la forma preferida y la más estable pues no sólo las disoluciones azules conducen a ella sino que las disoluciones acuosas amarillas la producen en una gran mayoría junto con una pequeña fracción de compuesto amarillo. Esta forma azul es muy resistente a la agresión térmica, pues tras un tratamiento a 130°C y vacío durante tres horas reproduce idénticamente todas las pruebas de control, como análisis, espectros IR y visible-UV, diagrama de difracción de rayos X, etc. Por todo ello es por lo que creemos que puede decirse que entre estos dos complejos el papel representado por la forma azul y la amarilla se intercambia.

Avanzando en la hipótesis anterior pensamos que la evolución de la preferencia por una u otra configuración debía progresar en el intervalo de acideces establecido entre el acetato y el tricloroacetato.

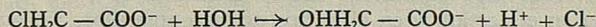
Todas las observaciones realizadas encajan en este esquema. Así por ejemplo: el hecho de precipitar el dicloroacetato en forma amarilla cuando se mezclan disoluciones acuosas de la sal de níquel con disoluciones alcohólicas de estilbendiamina; esta precipitación no se da de ningún modo, según nuestros ensayos, en el caso del acetato

ni del monocloroacetato, en los que deben llevarse a sequedad las disoluciones mezcla para obtener las especies correspondientes.

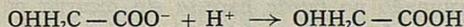
Tampoco responden el monocloroacetato y el dicloroacetato al tratamiento térmico con la estabilidad del acetato aunque realmente, aquí se sobrepone a la posible debilidad del complejo una debilidad intrínseca del propio anión pues, como es sabido, el enlace Cl-C hace a estas sustancias bastante propensas a la hidrólisis, especialmente en el caso de disustitución (6). En efecto, un tratamiento idéntico al soportado por el acetato produce, en el caso del monocloroacetato, la rotura de los aniones con la aparición de Ni (stien)<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub> como producto final estable. Debemos decir que, si bien ese proceso es, en principio, independiente del problema del enlace axial ligando-ión, también es cierto que este enlace se rompe pues el producto final es amarillo y por tanto, la clororustitución aniónica implica, en definitiva, una menor resistencia del enlace anión-níquel a la alta temperatura.

Es interesante señalar que, si bien todo lo referente al enlace axial se modifica por completo en el tratamiento térmico de estos complejos azules mono y diclorados, el enlace ecuatorial permanece inalterado, como lo demuestra la naturaleza del producto final. De nuestras experiencias, consistentes en recoger el producto una vez calentado a 130°C y vacío y disolverlo en agua, se deduce que tal producto es de un color amarillo-marrón pero los cristales que resultan de la disolución acuosa son de un color amarillo puro. En nuestra opinión estos cristales son cloruro de estilbendiamina níquel (II). Las razones que encontramos para apoyar esta opinión son: en primer lugar, el análisis del compuesto y en segundo, la identidad de su espectro IR y su diagrama de difracción de rayos X con los obtenidos del halogenuro complejo preparado directamente. Además, no nos ha sido posible convertir estos cristales amarillos en azules utilizando las técnicas que resultan fructíferas en los casos de las especies amarillas de los cloroacetatos obtenidos en frío a partir de las disoluciones acuosas amarillas. Esta conducta, corresponde a los halogenuros complejos, como hemos constatado repetidas veces, y constituye un apoyo más a nuestras asignaciones.

El mecanismo de la reacción que destruye la unión axial no podemos establecerlo de un modo indudable. El dato más valioso que observamos con este propósito es, tal vez, la banda infrarroja en 1750 cm<sup>-1</sup> en el compuesto amarillo marrón procedente del calentamiento, banda que desaparece por completo tras la recristalización de agua. Esta banda podría corresponder a un ácido carboxílico no disociado y para ser compatible con la aparición posterior de ión cloruro podría pensarse en una reacción del tipo.



seguida de un desplazamiento en el sentido:



con lo que la carga negativa del ión cloruro neutralizaría la del níquel y el ácido glicólico aparecido daría la banda en 1750 cm<sup>-1</sup>. En la recristalización posterior, el ácido debería quedar en las aguas madres. Este ácido no disociado debería ser incapaz de unirse al níquel en presencia de iones Cl<sup>-</sup> con lo que el compuesto no dispondría de ligando axial. El cloruro nunca se coordina con el níquel en coexistencia con la estilbendiamina, según hemos podido observar. De esta manera el compuesto resultante debería ser planoc cuadrado, como efectivamente se observa en su color y en su espectro visible-UV.

Sea como fuere, creemos que no es arriesgado concluir que la estilbendiamina se une con el níquel de un modo muy robusto y que la configuración Ni (stien)<sub>2</sub><sup>++</sup> planoc cuadrada y amarilla resiste acciones diversas que, sin embargo, implican la destrucción de los enlaces apicales y que, entre estas acciones podemos contar la agresión térmica y la disolución de las especies azules en agua. En este último caso se obtiene una disolución amarilla que informa, a juzgar por su color y por su espectro visible-UV, de la presencia de una forma planoc cuadrada, con las consiguientes separación entre los aniones y el catión central y persistencia del enlace stien-níquel.

Una consecuencia lógica de nuestra hipótesis sería el establecimiento de una situación en la que las tendencias hacia la pseudo-octaedricidad y hacia la planocuaridad se neutralizaran o, por lo menos, fueran de grado comparable. Una neutralización de esta especie puede entenderse de distintas maneras implicando cada una de ellas fenómenos diferentes. Obviamente, una manera lógica de entenderla puede ser admitiendo una capacidad por parte del complejo para dar indistintamente ambas formas con estabilidades análogas. Aquí debemos precisar que por forma amarilla habría que esperar, en rigor, una forma «pura», en el sentido en que ello se entiende en el grupo de los halogenuros. Sin embargo, las cosas no transcurren de esta manera según hemos podido observar. Nosotros pensamos que esta neutralidad de intensidad en las tendencias existe efectivamente, pero su traducción a los hechos debe encontrarse en la capacidad —verdaderamente interesante— de coexistencia de moléculas azules puras y moléculas amarillas puras en un mismo cristal, con lo que el producto resultante presenta características comunes a ambas estirpes. Estos son los hechos observados que, por otra parte, han despertado la atención durante cierto tiempo por estos compuestos (7, 8, 9). Curiosamente, entre los cuatro derivados del ácido acético, solamente en el acetato y en el tricloroacetato hemos observado formas amarillas puras, diamagnéticas. En los otros dos se obtienen formas amarillas pero, en ellas, junto a las propiedades asociadas a las amarillas puras aparecen algunas otras correspondientes a las azules. Esta mezcla de características se puede registrar en tres tipos de medidas:

a) En primer lugar, los compuestos amarillos no son diamagnéticos y presentan un momento anormal con valores que oscilan entre cero y tres magnetones de Bohr. Estas medidas magnéticas suscitaron muchas discusiones en torno a estos complejos pero, en la actualidad, parece bien establecido que la interpretación correcta ha de buscarse en la mezcla de moléculas mencionadas. En efecto, medidas roentgenográficas de compuestos de este tipo (8) han demostrado claramente la mezcla comentada, permitiendo los datos de rayos X calcular un momento magnético que está en buen acuerdo con el experimental (8). Nosotros hemos preparado una forma amarilla de dicloroacetato que ha presentado un momento magnético de  $1,93 \mu_B$  a  $300^\circ K$  y  $70^\circ K$  y pensamos que puede interpretarse en la línea que venimos describiendo.

b) El segundo tipo de medidas que atestiguan esta mezcla es el procedente de la espectroscopia IR. En la zona del espectro entre  $2,5$  y  $16 \mu$  hemos podido identificar una banda fuerte en  $1000 \text{ cm}^{-1}$  coincidente con la propiedad de pseudo-octaedricidad. Esta banda aparece en todos los compuestos azules estudiados y falta en los halogenuros amarillos así como en el acetato y en el tricloroacetato amarillos. Sin embargo, está presente en el monocloroacetato amarillo que hemos preparado y en la especie paramagnética y amarilla del dicloroacetato de  $\mu = 1,83 \mu_B$ . La asignación de esta banda a un fenómeno molecular determinado no puede hacerse sin incurrir en discrepancias con las asignaciones habituales, pero lo que está fuera de dudas es que se presenta en todos los casos de pseudo-octaedricidad y su aparición en los cloroacetatos intermedios puede tomarse como prueba de la presencia de moléculas paramagnéticas en los cristales amarillos.

c) También en los espectros visible-UV de los monocloroacetato y dicloroacetato amarillos aparecen pequeñas bandas en las zonas de  $10.000 \text{ cm}^{-1}$  y  $17.000 \text{ cm}^{-1}$  que no pueden achacarse a las moléculas diamagnéticas y que deben por ello corresponder a una contribución pseudo-octaédrica.

Creemos pues admisible concluir que la confrontación de tendencias hacia las dos configuraciones citadas: plana y pseudo-octaédrica, se resuelve a favor de la pseudo-octaedricidad en el caso del acetato  $\varphi$  a favor de la planocuaridad en el caso del acetato y a favor de la planocuaridad en el caso del tricloroacetato, mientras que en los dos aniones intermedios hay una cierta equivalencia entre ambas que se traduce en la aparición de cristales constituidos por mezclas de moléculas de las dos configuraciones. Puede añadirse todavía que, lógicamente, en los complejos de dicloroacetato la tendencia a la formación de especies planas debe sobrepasar a la contraria. Así parece indicarlo

el hecho comprobado röntgenográficamente de que en sus cristales mezcla la proporción de moléculas planas/seudo-octaédricas sea de 2/1 (8). Esta relación será posiblemente la responsable del color amarillo. En el caso del monocloroacetato cabría esperar una situación inversa, con dominio de la forma azul. En efecto nosotros hemos obtenido formas verdes de este compuesto al evaporar disoluciones acuo-alcohólicas de la sal normal de níquel con stien. Interesante es recordar que Kircheiss (10) ha realizado una serie de medidas magnéticas sobre una forma verde de monocloroacetato y ha obtenido un momento magnético independiente de la temperatura y de valor  $2,26 \mu_B$  que revela elocuentemente la preferencia hacia la pseudo-octaedricidad.

Otro problema de interés relacionado con la identidad del ligando axial en los complejos pseudo-octaédricos es la capacidad de solvatación del ión  $Ni(stien)_2^{++}$ . Hemos podido constatar en él una facilidad decreciente para tomar moléculas de agua en la línea acetato  $\rightarrow$  tricloroacetato. Las sales de éste último han resultado anhidras en todas nuestras experiencias y lo mismo han hallado los autores consultados que aparecen en toda la literatura a nuestro alcance. Nuestras especies de dicloroacetato también resultaron siempre anhidras si bien se han descrito casos de dicloroacetatos hidratados (1,8). En estas especies anhidras no aparece ambigüedad alguna en la identificación del ligando axial puesto que debe ser el aión en todos los casos.

En el caso del acetato y el monocloroacetato se pueden obtener sales dihidratadas y anhidras indistintamente, siendo en las primeras donde se plantea el problema de la determinación del ligando axial. En los casos que hemos observado de complejos dihidratados, el ligando axial resulta ser en todos ellos, según nuestra opinión, el anión correspondiente, y por tanto, las moléculas de agua que acompañan al compuesto son, sin duda, de agua de red. La razón para esta afirmación la encontramos en dos argumentos independientes. En primer lugar, observamos que las bandas d-d en las especies anhidras coinciden plenamente en su posición, con las que aparecen en las dihidratadas, tanto si las anhidras se obtienen directamente como si para obtenerlas se parte de las dihidratadas y se secan mediante la acción del pentóxido de fósforo y vacío. Esto indica, que en ambos casos, el níquel está sometido a la acción del mismo campo cristalino y, por tanto, en ambos casos debe de producirlo el mismo tipo de ligando apical pues se ha indicado repetidas veces desde los trabajos de Maki (9) y Ballhausen (4, 7, 11), la sensibilidad de la conducta espectroscópica V-UV a las alteraciones del campo axial. La segunda razón la encontramos en la posición de las bandas de vibración de valencia del grupo O-H en los complejos dihidratados. En el acetato, esta banda aparece en  $3545 \text{ cm}^{-1}$  y en el monocloroacetato en  $3530 \text{ cm}^{-1}$ . Este rango de energía pensamos que corresponde a vibraciones O-H en moléculas de agua en las que el oxígeno no está unido a catión alguno pues en el caso de que esta unión tenga lugar, la energía de la banda comentada debe disminuir en un cierto valor que Sartori y Furlani (12) han calculado ser de unos  $400 \text{ cm}^{-1}$ . En nuestro laboratorio se ha podido comprobar que tal desplazamiento tiene lugar en muchos complejos de níquel y cobalto con ligandos alifáticos y aromáticos, aunque los desplazamientos son algo menores ( $300 \text{ cm}^{-1}$ ). En acuerdo estrecho con todo esto encontramos que en la especie  $Ni(stien)_2Cl_2 \cdot 2H_2O$  amarilla y diamagnética la banda de vibración de valencia del grupo O-H aparece en  $3500 \text{ cm}^{-1}$  y en este caso, debe de tratarse inequívocamente de agua libre. Podría añadirse a toda esta argumentación la facilidad con la que estas moléculas de agua se desprenden del complejo ( $P_2O_5$  y vacío a  $25^\circ C$ ), frente a las duras condiciones necesarias para conseguirlo en el caso de moléculas que intervienen en la primera esfera de coordinación (13).

En conclusión, podemos afirmar que las moléculas de agua de estos complejos aparecen siempre como moléculas de solvatación, jugando un papel prácticamente nulo en el establecimiento de los niveles de energía de los electrones del níquel. Posiblemente estas moléculas de agua permanecen en el cristal unidas por enlaces de hidrógeno a los aniones. Si esto es así, la posibilidad de que ocurra tal unión decrece a medida que aumenta la clorosustitución y por tanto la acidez de los aniones. Podría concluirse de todo lo anterior que tanto en la solvatación como en la determinación de la configuración final de las especies sólidas, es el anión el responsable fundamental.

Es un hecho a resaltar la notoria incapacidad de las moléculas de agua para formar parte de un poliedro de coordinación en compañía de la estilbendiamina pues en todas las síntesis de los derivados del ácido acético, la posibilidad de que esta coexistencia tuviera lugar ha sido clara y, sin embargo, siempre ha sido el anión el que se ha unido al níquel. En los casos de los halogenuros, como veremos, tampoco parece posible esta unión aunque los complejos puedan, a veces, tomar agua de cristalización. Esta hidrofobia del catión  $Ni(stien)_2^{++}$  podría achacarse a la existencia de los grupos metilenos pero tal argumento es incompatible con la facilidad de formación de pseudo-octaedros con dos moléculas de agua por parte de la etilendiamina y otros derivados. Hay que buscar pues la incapacidad en la presencia de los cuatro grupos fenilo que entran a formar parte del complejo o por lo menos en el hecho de la doble sustitución simétrica en los carbonos de la etilendiamina que conduce a la estildebendiamina, pues en el caso de monosustitución (fenen), esta hidrofobia parece que no se manifiesta (1).

## B. Halogenuros

Los cuatro halogenuros de estilbendiamina níquel (II) son compuestos amarillos estables, insolubles en la mayoría de los medios orgánicos y, salvo el cloruro, precipitan todos anhidros cuando se utiliza en método de síntesis de Lifschitz. El cloruro aparece dihidratado como ya hemos dicho. Los cuatro complejos son diamagnéticos y presentan un espectro de absorción visible-UV idéntico en los cuatro casos con una única banda en  $22.750\text{ cm}^{-1}$  que debe corresponder a una transición  $singlete \rightarrow singlete$  y que pone de manifiesto su estructura molecular planocuadrada. Los cuatro compuestos, a excepción del fluoruro, resultaron solubles en dimetilsulfóxido (D. M. S. O.) dando disoluciones amarillas con espectros visibles-UV muy parecidos a los correspondientes a los de los sólidos. En el caso del yoduro se puede medir una banda intensa en  $27.800\text{ cm}^{-1}$ , sin duda debida a una transferencia de carga entre el ión yoduro y el níquel. Esta banda es apreciable sólo en el yoduro debido, posiblemente, al bajo valor del potencial del sistema iodo-yoduro que, al ser de menor cuantía que el de los restantes halógenos hace que la transición aparezca en una zona de menor energía ya frontera con el visible.

Sin embargo, el interés de los espectros de las disoluciones en D. M. S. O. de los halogenuros está en la presencia de débiles bandas en las zonas de  $10.000\text{ cm}^{-1}$  y  $16.500\text{ cm}^{-1}$  bandas que interpretamos como un indicio de coordinación del D. M. S. O. con el níquel. Posiblemente esta coordinación sólo tenga lugar en una fracción muy reducida de moléculas dado que estas bandas pseudo-octaédricas coexisten con una banda muy acusada en  $22.750\text{ cm}^{-1}$ . Esto puede ser un indicio de la débil capacidad de coordinación del D. M. S. O.

Es muy interesante el fenómeno que sufre la disolución de  $Ni(stien)_2Cl_2$  en D. M. S. O. cuando se le añade piridina. La banda planocuadrada desaparece por completo y en su lugar aparecen tres bandas muy nítidas en  $10.000$ ,  $16.500$  y  $25.000\text{ cm}^{-1}$ , indicando que todas las moléculas han pasado a la configuración pseudo-octaédrica. Es digno de mención que este fenómeno no lo experimenta ni el bromuro ni el yoduro. Debemos pensar en un impedimento, por parte del anión, a la coordinación de cualquier molécula debido en parte a su volumen y también a sus propias características como ligando. Aquí se puede ver como el anión menos polarizable —fluoruro— ni siquiera permite la disolución y de los aniones restantes sólo uno permite la coordinación ulterior. Esta, además, tiene lugar en grado proporcional a la capacidad de la molécula en presencia y así el D.M.S.O. la realiza en pequeña escala mientras que una molécula de gran capacidad ligante como la piridina la realiza al cien por cien.

Esta experiencia la relacionamos estrechamente con la información obtenida sobre los complejos del grupo del ácido acético en el sentido de que parece que puede concluirse que el anión, además de ser el primer responsable de la estructura final en el estado sólido, determina en ciertos casos la configuración incluso en fase líquida. Podría-

mos decir que el anión, si es posible, es el preferido para la coordinación axial en estos complejos de níquel, y en caso de que esto no pueda ocurrir o bien no hay coordinación alguna o de haberla se utiliza una molécula, presente en el medio, no sólo de la capacidad ligante adecuada sino además compatible con el anión. Esta compatibilidad hace referencia a los hechos observados según los cuales, aunque el anión no entre a formar parte del complejo parece actuar como un selector del ligando axial desde el exterior.

Nuestra conclusión final es pues que cuando el níquel se rodea del cinturón ecuatorial de dos moléculas de stien, la tendencia fundamental de este sistema es la permanencia como tal, cosa que se puede deducir de su elevada estabilidad y resistencia. La adición posterior de un quinto y sexto ligando tendrá lugar solamente en aquellos casos en los que el anión tenga la suficiente capacidad de unión con el níquel y, en menor cuantía, cuando alguna molécula neutra sea capaz de coordinarse, pero esto último, si el anión presenta características adecuadas. Esto es lo mismo que exigir la saturación de carga del eje z del complejo preferentemente por especies cargadas negativamente. La razón de ello la encontramos en la opinión de que un poliedro de coordinación totalmente neutro en torno al catión debe ser una configuración poco estable a la vista del gran volumen de la estilbendiamina. Efectivamente, las disoluciones de Ni (stien)<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub> en D. M. S. O. a las que se les añade piridina producen, al evaporar a sequedad, cristales amarillos diamagnéticos que presentan espectros visibles-UV idénticos a los de los productos de partida, sin la menor muestra de pseudo-octaedricidad, lo que confirma la poca estabilidad de los poliedros Ni (stien)<sub>2</sub>X<sub>2</sub><sup>++</sup>.

### C Espectros IR

En los complejos derivados del ácido acético la información infrarroja de más interés la encontramos en las relaciones que se observan cuando se comparan los valores de la diferencia de energía entre las vibraciones simétrica y antisimétrica correspondientes al grupo carboxílico en los diferentes complejos. Es sabido (14) que cuando un ácido carboxílico se une a diferentes cationes el valor del término  $\Delta\bar{\nu} = |\bar{\nu}_{\text{sim}} - \bar{\nu}_{\text{antis}}|$  puede servir para indicar el grado de covalencia del enlace Me-O. Nuestro caso, que viene a ser el contrario, pues se trata de un catión unido a diferentes ácidos carboxílicos, lo tratamos según una idea propuesta por J. Zink (15). Se trata de comparar el valor de este término  $\Delta\bar{\nu}$  en el complejo y en el ácido libre —J. Zink realiza los espectros en disolución de cloroformo y nosotros aplicamos la idea a los espectros de los complejos en fase sólida, utilizando la técnica de nujol. El resultado de la comparación para los cuatro complejos de ácidos carboxílicos puede verse en la Tabla 1:

T A B L A 1

	Acido	Complejo	Acido	Complejo	Acido	Complejo
	$\bar{\nu}_{\text{sim}} (\text{cm}^{-1})$		$\bar{\nu}_{\text{antis}} (\text{cm}^{-1})$		$\Delta\bar{\nu} (\text{cm}^{-1})$	
Acetato ... ..	1435	1400	1721	1535	286	135
Monocloroacetato ... ..	1433	1385	1736	1607	303	222
Dicloroacetato ... ..	1428	1345	1751	1652	323	307
Tricloroacetato ... ..	1416	1324	1764	1666	348	342

El valor creciente de  $\Delta\bar{\nu}$  en el ácido libre, desde el acetato hasta el tricloroacetato puede asociarse al valor simultáneamente creciente de la fortaleza del ácido y consiguientemente con la labilidad del enlace O-H del mismo. Lo interesante de la comparación está, en que este ritmo creciente se mantiene también en los complejos y además con diferencias más acusadas. En este resultado puede verse una indicación de que la robustez del enlace O-Me en estos complejos es paralela a la que exhiben sus ácidos cons-

titutivos entre sí, en su enlace O-H. En esta información encontramos un apoyo a las argumentaciones que hemos desarrollado en torno al carácter del enlace axial en estos complejos. Indudablemente el valor tan bajo de  $\Delta \bar{\nu}$  que aparece para el acetato corresponde a la gran estabilidad de este enlace, del mismo modo que el valor alto que se calcula para el tricloroacetato, comprable al del propio ácido, corresponde a la inestabilidad de esta molécula.

Otra información importante de la espectroscopia IR se encuentra en las frecuencias de vibración de valencia del enlace N-H correspondiente a los grupos amínicos del stien. En los complejos pseudo-octaédricos las dos vibraciones de valencia de este enlace aparecen en la zona de  $3300 \text{ cm}^{-1}$  mientras que en los complejos planocuadrados aparece en  $3200 \text{ cm}^{-1}$ . Interpretamos esta diferencia como consecuencia de una mayor densidad de carga en el enlace N-Me que lleva consigo una disminución en el correspondiente enlace N-H. Esto debiera implicar que el enlace N-Me fuera más energético en los complejos planocuadrados que en los pseudo octaédricos. Tal interpretación se ve apoyada por los datos de rayos X realizados en especies que contienen ambas configuraciones (8). En efecto, en los complejos planocuadrados la distancia N-Me es de  $1,90 \text{ \AA}$  mientras que en los pseudo-octaédricos es de  $2,05 \text{ \AA}$ . De nuevo, una información IR apoya la conclusión que hemos establecido al final del epígrafe anterior acerca del anillo ecuatorial de estos complejos. En este sentido no hemos apreciado diferencias en las energías de vibración de valencia N-H en los complejos pseudo-octaédricos entre sí, que hubieran podido ser comparadas con la progresiva variación de robustez del enlace axial.

Por último, queremos añadir las observaciones sobre la existencia de una banda fuerte en  $1000 \text{ cm}^{-1}$  en todas las especies pseudo-octaédricas, y de un trío de bandas de intensidad media en  $1025$ ,  $1050$  y  $1075 \text{ cm}^{-1}$  en todas las especies planocuadradas. Los compuestos mezcla que hemos discutido presentan en su espectro los dos conjunto de bandas. Para estas observaciones no hemos encontrado una explicación satisfactoria.

## Parte experimental

### Estilbenodiamina

La estilbendiamina se preparó en parte según el método de Feist (16) y en una pequeña fracción según el método de Irving y Parkin (17).

Análisis: calculado para  $\text{C}_{14}\text{H}_{16}\text{N}_2$ : C, 79,24 %; H, 7,54 %; N, 13,20 %. Experimental: C, 79,39 %; H, 7,66 %; N, 13,40 %.

El acetato se preparó según el método de Lifschitz (1). La especie anhidra se obtuvo llevando a sequedad el medio de reacción mediante baño maría a  $100^\circ\text{C}$  y ulterior cristalización del producto en cloroformo anhidro: Análisis: calculado para  $\text{C}_{32}\text{H}_{38}\text{O}_4\text{N}_4\text{Ni}$ : C, 63,90 %; H, 6,39 %. Experimental: C, 63,45 %; H, 6,47 %. La especie azul dihidratada se obtuvo, juntamente con una pequeña fracción de especie amarilla, al permitir la cristalización de una disolución acuosa amarilla de la especie azul anhidra. Análisis de la especie azul dihidratada: calculado para  $\text{C}_{32}\text{H}_{42}\text{O}_6\text{N}_4\text{Ni}$ : C, 60,24 %; H, 6,59 %; experimental, 6,11 %; H, 6,64 %.

El cuadro siguiente ofrece en forma esquemática las distintas operaciones a que se ha sometido este complejo y sus correspondientes resultados:

ACETATOS, MONOCLORO, DICLORO, TRICLOROACETATOS Y HALOGENUROS

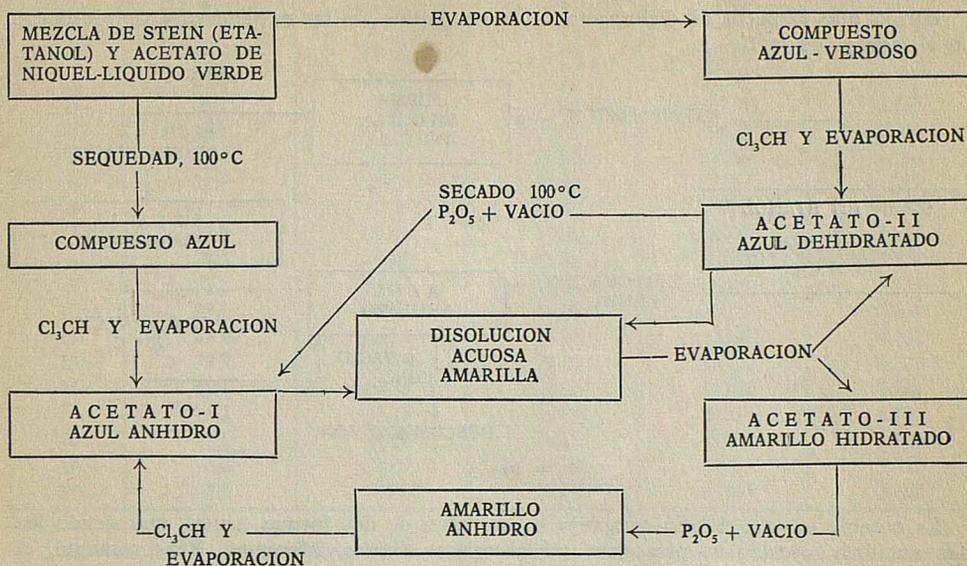
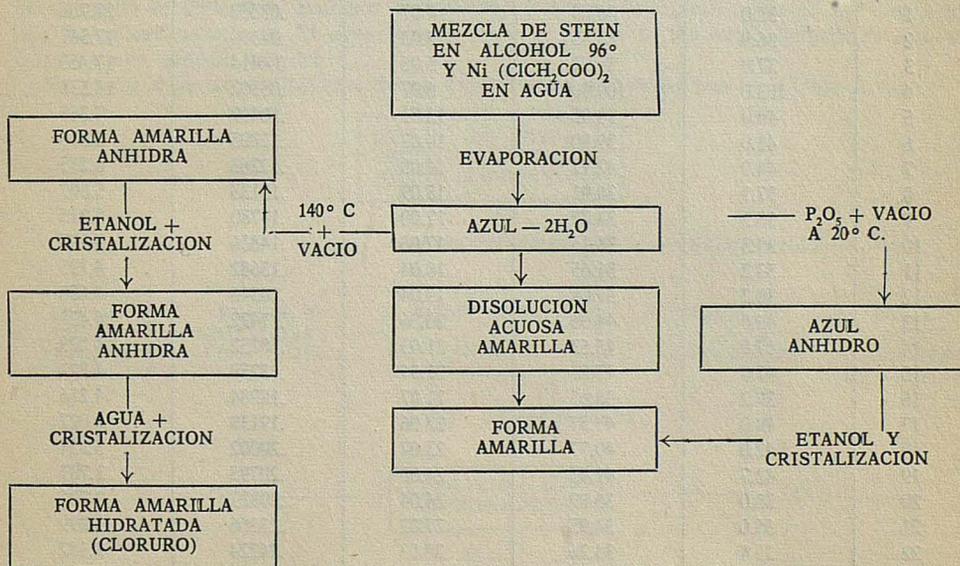


Fig. 1

En el caso del monocloroacetato, la evaporación lenta, a temperatura ambiente y en presencia de  $P_2O_5$ , de la mezcla de reacción conduce a un polvo verde que cristalizado en cloroformo se transforma en una especie azul que contiene dos moléculas de agua. Análisis calculado para esta forma azul dihidratada:  $C_{32}H_{40}O_6N_4Cl_2Ni$ : C, 54,73 %; H, 5,74 %. Experimental: C, 54,55 %; H, 5,66 %. La pérdida de agua de esta especie azul, que conduce a una forma anhidra, se realizó a temperatura ambiente en presencia de  $P_2O_5$  y vacío, confirmándose tal pérdida mediante los espectros IR. Como en el acetato, el cuadro de la figura 2 resume los ensayos realizados con monocloroacetato.



Por lo que respecta al dicloracetato los resultados de las experiencias se presentan en el cuadro de la fig. 3.

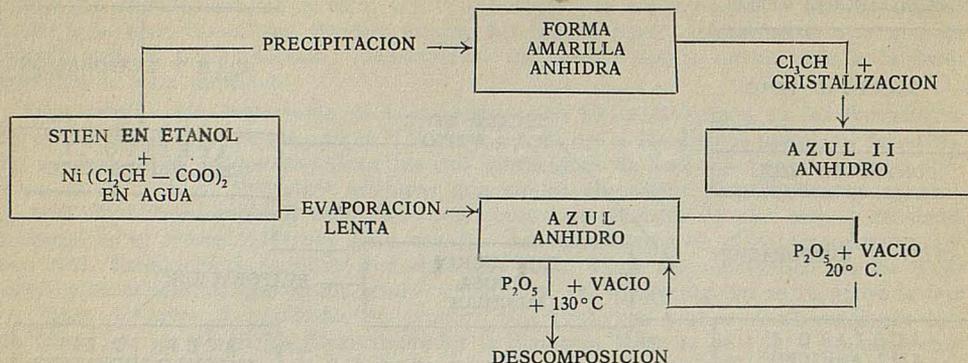


FIG. 3

Es notable en este último complejo la aparición de dos formas azules, que siendo las dos anhidras y estables, presentan características físicas diferentes. Efectivamente, el espectro visible-UV del que nosotros llamamos azul-I, presenta, en fase sólida, tres bandas nítidas en 9700, 12660 y 18180  $\text{cm}^{-1}$ . El azul-II obtenido de la disolución de cloroformo produce un espectro en fase sólida muy difuso en la zona comprendida entre 9090 y 14280  $\text{cm}^{-1}$ , sin posibilidad de asignarle bandas de un modo fidedigno y la única banda nítida e inequívoca resultó en 17100  $\text{cm}^{-1}$ . Junto a esto, ambos compuestos presentaron diagramas de difracción de rayos X notablemente diferentes, como puede verse a continuación:

$\text{Ni}(\text{STIEN})_2(\text{Cl}_2\text{CH}-\text{COO})_2$ , AZUL ANHIDRO ( $\text{Cl}_2-\text{CH}$ )

<i>N</i>	<i>I</i>	<i>I/I</i> (0)	$2\theta$	<i>Seno</i> $\theta$	<i>D</i>
1	38.0	36.89	4.07	.03552	21.701
2	36.9	35.82	5.03	.04394	17.541
3	37.0	35.92	5.06	0.4414	17.463
4	103.0	100.00	6.07	.05302	14.538
5	40.0	38.83	12.01	.10469	7.363
6	41.0	39.80	14.02	.12205	6.316
7	44.0	42.71	14.08	.12263	6.285
8	37.1	36.01	15.09	.13133	5.869
9	35.3	34.27	17.00	.14780	5.215
10	39.3	38.15	17.06	.14836	5.195
11	53.2	51.65	18.04	.15682	4.195
12	38.2	37.08	19.04	.16546	4.658
13	46.0	44.66	20.06	.17422	4.424
14	47.0	45.63	21.03	.18252	4.223
15	47.0	45.63	21.04	.18259	4.222
16	39.2	38.05	21.07	.18284	4.216
17	49.0	47.57	22.06	.19138	4.027
18	42.0	40.77	23.07	.20002	3.854
19	42.7	41.45	24.00	.20795	3.707
20	38.0	36.89	24.04	.20827	3.701
21	36.0	34.95	27.02	.23366	3.299
22	35.4	34.36	28.03	.24224	3.182

NI (STIEN)<sub>2</sub> (CL<sub>2</sub>CH - COO)<sub>2</sub> AZUL ANHIDRO (DISOL. H<sub>2</sub>O)

N	I	I/I(O)	2 θ	Senο θ	D
1	66.0	100.00	6.09	.05312	14.511
2	25.0	37.87	8.06	.07034	10.958
3	28.7	43.48	10.01	.08724	8.835
4	30.1	45.60	10.04	.08758	8.802
4	24.4	36.96	13.05	.11369	6.780
5	24.4	36.96	14.08	.12256	6.289
6	27.0	40.90	16.01	.13930	5.533
7	43.0	65.15	16.06	.13975	5.515
8	27.1	41.06	17.07	.14848	5.191
9	35.2	53.33	18.03	.15669	4.919
10	25.2	38.18	19.00	.16504	4.670
11	45.0	68.18	20.03	.17390	4.432
13	28.7	43.48	21.01	.18235	4.227
14	45.1	68.33	21.07	.18284	4.216
15	25.2	38.18	24.01	.20803	3.705
16	22.6	34.24	24.05	.20840	3.699
17	26.0	39.39	26.00	.22501	3.425
18	23.5	35.60	27.00	.23344	3.302

Este fenómeno puede interpretarse como consecuencia de una diferencia en la ordenación cristalina entre el azul-I y el azul-II, otorgando a la forma azul-II la mayor estabilidad por haberse obtenido en una evaporación muy lenta (unos 30 días). Esta forma podría corresponder a la especie azul-III de Higginson et alia (5) si bien estos autores obtienen la forma más estable de las disoluciones acetónicas. A nuestro juicio es de interés que este polimorfismo tenga lugar preferentemente en el dicloroacetato, dando a entender que es en este anión, entre los derivados del ácido acético que estudiamos, donde más posibilidades se presentan en lo que a formación de cristales estables se refiere. Esto enlaza con la opinión mantenida en la discusión de los resultados.

El tricloroacetato condujo a una especie amarilla anhidra en el seno de la mezcla reaccional, siguiendo las ideas de Lifschitz. Su análisis fue: calculado para C<sub>32</sub>H<sub>32</sub>O<sub>4</sub>N<sub>4</sub>Cl<sub>4</sub>Ni: C, 47,56 %; H, 3,99 %. Experimental: C, 47,13 %; H, 3,97 %. De esta forma amarilla se obtiene la azul por congelación y posterior cristalización de las disoluciones etanólicas amarillas. El espectro IR de esta nueva forma azul, demuestra que se trata de una especie anhidra.

En la fig. 4 se da el diagrama de las experiencias realizadas con el tricloroacetato:

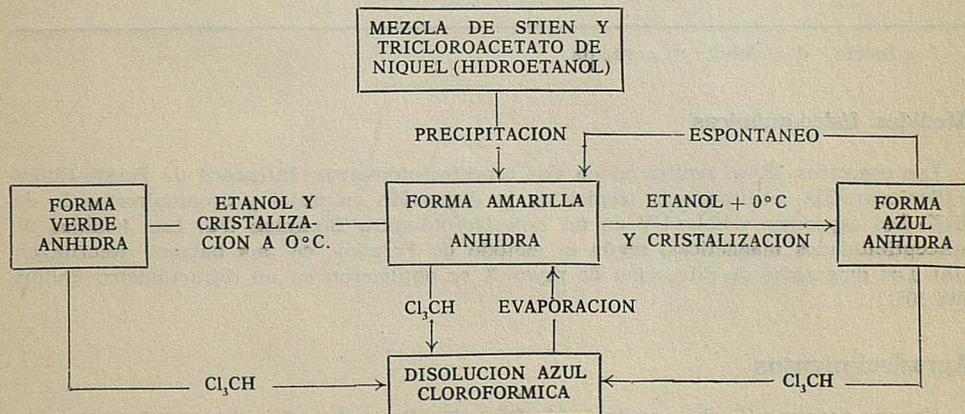


FIG. 4

La forma verde señalada debe corresponder a una mezcla de moléculas análoga a la descrita en el caso del dicloroacetato. Si bien esta especie es más estable que la azul original, al cabo del tiempo evoluciona también hacia la forma amarilla anhidra.

Los cuatro halogenuros se obtuvieron por el mismo método. Se mezclaron disoluciones acuosas de la sal de níquel con las cantidades de estilbendiamina correspondientes a la relación molar  $Ni^{++}/stien = 1/2$  disueltas en el ácido correspondiente. Se añadía a esta disolución NaOH hasta un pH final comprendido entre 5,60 y 5,80. En estas condiciones precipitó en los cuatro casos una sustancia amarilla (el yoduro algo anaranjada) de aspecto cristalino. Se mantuvo el precipitado en la disolución a 40-50°C. durante una hora con agitación. Se filtró en frío, se lavó con agua caliente y con agua fría y se dejó secar al aire. Salvo el cloruro, que apareció con dos moléculas de agua, todos los halogenuros resultaron anhidros. El análisis de estos compuestos se da en la Tabla 3.

T A B L A 3

	Carbono		Hidrógeno	
	Teórico	Calculado	Teórico	Calculado
Ni(stien) <sub>2</sub> F <sub>2</sub> ... ..	64,51	69,58	6,18	6,67
Ni(stien) <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub> ·2H <sub>2</sub> O ...	56,97	56,58	6,15	6,20
Ni(stien) <sub>2</sub> Br <sub>2</sub> ... ..	52,29	51,99	5,01	5,15
Ni(stien) <sub>2</sub> I <sub>2</sub> ... ..	45,62	45,57	4,39	4,53

Un espectro IR genuino de estos halogenuros es el que aparece en la Tabla 4.

TABLA 4

 Ni(stien)<sub>2</sub>F<sub>2</sub> — ESPECTRO IR (cm<sup>-1</sup>)

3236 (f)	1250 (d)	910 (d)
3125 (f)	1200 (d)	860 (d)
1600 (f)	1170 (d)	845 (d)
1490 (d)	1080 (d)	805 (d)
1450 (f)	1050 (m)	765 (f)
1390 (d)	1025 (d)	750 (f)
1310 (d)	920 (d)	700 (f)

f = fuerte, d = débil, m = media.

### Medidas físico-químicas

Los espectros IR se realizaron en dos espectrofotómetros, Infracord de Perkin-Elmer y Beckman 20A, utilizando la técnica de la dispersión en nujol y eventualmente la de BrK. Los espectros visibles-UV en un espectrofotómetro Beckman DU. Las medidas de susceptibilidades magnéticas, según el método de Faraday, en una balanza descrita en (18). Los diagramas de difracción de rayos X se obtuvieron en un difractor Philips PW 1051.

### Agradecimientos

Uno de nosotros (L. P.) agradece a la Dirección General de Enseñanza e Investigación la concesión de una beca para la realización de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

- (1) I. LIFSCHITZ, J. G. BOS y K. M. DIJKEMA. — *J. Anorg. Allg. Chem.* 242, 97 (1939).
- (2) I. LIFSCHITZ, J. G. BOS. — *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 59, 407 (1940).
- (3) F. HEIN, M. MÜLLER. — *Z. Anorg. Allg. Chem.* 283, 172 (1956).
- (4) C. J. BALLHAUSEN. — *Dan. Mat-Fys. Medd.* 29, 8,3 (1955).
- (5) W. C. E. HIGGINSON, S. C. NYBURG, J. S. WOOD. — *Proc. Chem. Soc.* 297 (1961).
- (6) F. KLAGES. — *Tratado de Química Orgánica*. Reverté. Barcelona (1960).
- (7) C. J. BALLHAUSEN, A. D. LIEHR. — *J. Amer. Chem. Soc.* 81, 538 (1954).
- (8) W. C. E. HIGGINSON, S. C. NYBURG, J. S. WOOD. — *Inorg. Chem.* 3, 468 (1964).
- (9) G. MAKI. — Thesis Univ. California (1957).
- (10) A. KIRCHEISS. — *Z. Chem.* 1, 34 (1969).
- (11) C. J. BALLHAUSEN, C. J. JORGENSEN. — *Dann. Mat-Fys. Medd.* 29, 14 (1955).
- (12) G. SARTORI, C. FURLANI, A. DAMIANI. — *J. Inorg. Nucl. Chem.* 119 (1958).
- (13) A. ROY YARZA. — Tesis Univ. Zaragoza (1969).
- (14) K. NAKAMOTO. — «Infrared Spectre of Inorganic and Coordinations Compounds» Wiley-Interscience N. Y. (1970).
- (15) J. I. ZINK, R. S. DRAGO. — *J. Amer. Chem. Soc.*, 92 (18), 5339 (1970).
- (16) FEIST. — *Berichte Deutch. Chem. Gessel.* 27, 273 (1894).
- (17) M. N. H. IRVING, R. M. PARKINS. — *J. Inorg. Nucl. Chem.* 27, 270 (1965).
- (18) F. GÓMEZ BELTRÁN, S. ALVAREZ PÉREZ. — *Rev. Acad. Ciencias Zaragoza*. XXII, 151 (1967).

# DONNEES CRISTALLOGRAPHIQUES ET RESULTATS PRELIMINAIRES SUR LA STRUCTURE CRISTALLINE DU METHYL-2 PHENYL-5 s-TRIAZOLO [3, 4-b] THIADIAZOLE-1, 3, 4

PAR

J. M. FORNIÉS MARQUINA

Departamento de Electricidad y Electrónica, Facultad de Ciencias,  
Universidad de Zaragoza (Espagne)

ET

J. ELGUERO

Laboratoire de synthèse et d'étude physicochimique d'hétérocycles azotés,  
Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 34060 Montpellier Cedex (France)

## Abstract

Crystals of 2-methyl 5-phenyl s-triazolo [3,4-b] thiadiazole-1, 3, 4 are triclinic, space group  $P\bar{1}$ , with two molecules in the unit cell. The Debye-Scherrer diagram indexes, which allow the identification of the compound, are assigned. A projection (xOy) of a reasonable structural hypothesis is also given.

## Introduction

Dans le but de déterminer des données géométriques précises, nécessaires aux calculs par les méthodes semi-empiriques de la chimie théorique (1) d'un ensemble d'hétérocycles de structure *1a* ou *1b* (figure 1), dérivés de l'aza-3a pentalène (\*), nous avons entrepris l'étude par rayons X du méthyl-2 phényl-5 s-triazolo [3,4-b] thiadiazole-1, 3, 4 *1c*. En effet, malgré la relative simplicité de ces noyaux et l'évident intérêt de ces structures à 10 électrons  $\pi$ , on ne trouve dans la littérature aucune étude radiocristallographique\*\*.

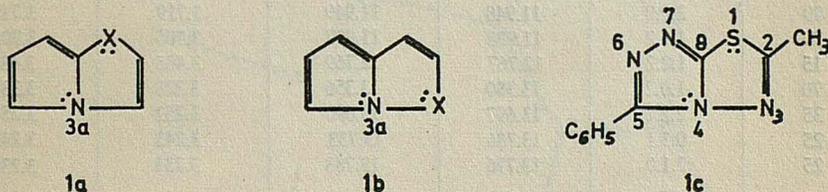
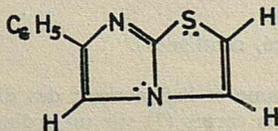


FIG. 1

\* La présente publication est la quatrième de la série «Systèmes aromatiques à 10 électrons  $\pi$  dérivés de l'aza-3a pentalène»; mémoires précédents: références (2, 3, 4).

\*\* Quand ce travail était déjà est apparu une courte Note de Cavaica, Domiano et Musatti [Cryst. Struct. Comm., 1, 345 (1972)] sur la structure d'un dérivé analogue à celui décrit dans la présente publication, le phényl-6 imidazo [2,1-b] thiazole:



**Résultats et discussion**

Le méthyl-2 phényl-5 s-triazolo [3, 4-b] thiadiazole 1c,  $C_{10}H_8N_4S$ , a été préparé par A. J. H. Summers avec l'un de nous (J. E.) (2) suivant la méthode décrite par Kanaoka (5). Par évaporation lente solution éthanolique, on obtient le produit sous forme d'aiguilles incolores.

TABLEAU I. — Paramètres de la maille

$a = 8.572 \pm 0.003 \text{ \AA}$	$\alpha = 64.46 \pm 0.10^\circ$
$b = 9.738 \pm 0.003 \text{ \AA}$	$\beta = 62.05 \pm 0.10^\circ$
$c = 7.434 \pm 0.003 \text{ \AA}$	$\gamma = 85.95 \pm 0.10^\circ$
Volume de la maille: $V = 487.82 \text{ \AA}^3$	
Groupe spatial: $P\bar{1}$	
Nombre de molécules par maille: $Z = 2$	
Densité calculée: $1.449 \text{ g.cm}^{-3}$ .	

TABLEAU II. — Diagramme de Debye-Scherrer

$I/I_1$	$h. k. l$	$\theta_c$	$\theta_c$	$d_c$	$d_c$
80	0.1.0	5.054	5.070	8.751	8.715
75	1.0.0	5.934	5.942	7.454	7.442
25	0.1.1	6.926	6.963	6.356	6.356
100	1.1.0	7.148	7.148	6.190	6.190
25	0.0.1	7.562	7.558	5.853	5.858
25	1.1.0	8.462	8.445	5.234	5.245
15	0.2.1	9.599	9.583	4.619	4.624
75	1.2.1	10.146	10.165	4.373	4.364
15	2.0.1	10.535	10.534	4.214	4.213
15	0.1.1	10.851	10.864	4.091	4.086
20	1.2.0	10.989	10.996	4.040	4.038
20	2.0.0	11.948	11.949	3.719	3.719
20	1.1.2	11.998	11.997	3.705	3.705
15	1.2.2	12.767	12.769	3.485	3.485
70	1.0.2	13.380	13.356	3.328	3.334
35	2.2.1	13.697	13.690	3.252	3.254
25	0.3.1	13.736	13.733	3.243	3.245
25	2.1.0	13.776	13.783	3.234	3.233
15	2.2.0	14.408	14.411	3.095	3.094
20	0.2.1	15.276	15.271	2.922	2.924
10	1.3.1	15.484	15.489	2.885	2.884
15	2.2.1	15.715	15.712	2.843	2.844

$I/I_1$  Intensités relatives.

$h. k. l$  Indices de Miller.

$\theta$  Angle de diffraction (degré, centièmes).

$d$  Distance réticulaire ( $\text{\AA}$ ).

L'indexation du diffractogramme et l'affinement des distances réticulaires ont été réalisés par la méthode de moindres carrés (7) sur un ordinateur IBM 360/44.

res et transparentes allongées dans la direction de l'axe  $c$ . Une détermination précise du point de fusion, en utilisant un appareil d'analyse thermique différentielle, donne  $181^\circ$ , au lieu de  $183-186^\circ$  (2).

On a utilisé les diagrammes de Bragg, Weissenberg et De Jong, avec une radiation  $K_{\alpha} \text{Cu} = 1.5418 \text{ \AA}$ . L'absence d'extinctions systématiques indique que le composé cristallise dans le système triclinique et on déduit de la détermination de la structure (6) qu'il appartient au groupe  $\text{P}\bar{1}$ . Dans le Tableau I figurent les paramètres de la maille.

### Diagramme de Debye-Scherrer

Nous avons effectué plusieurs expériences sur un diffractomètre automatique type SECASI à balayage horizontal, muni d'un compteur à scintillations. Pour améliorer la précision des mesures on a employé comme étalon interne le silicium et on a utilisé comme raie de référence la réflexion (1.1.1) correspondant à  $K_{\alpha 1} \text{Cu} = 1.5405 \text{ \AA}$ . D'autre part nous avons effectué des corrections de position grâce à la méthode de Rachinger, afin d'obtenir un cliché «monochromatique»: les résultats obtenus figurent dans le Tableau II.

### Structure cristalline

Les intensités ont été mesurées avec un diffractomètre automatique SIEMENS sur un monocristal, en utilisant la méthode de cinq valeurs.

L'analyse de la fonction de Patterson a permis de trouver une hypothèse structurale acceptable (on n'a pas tenu compte des atomes d'hydrogène). La figure 2 est une projection de la molécule selon le plan (xOy).

Avec les résultats de la géométrie moléculaire, nous avons calculé le coefficient de compacité  $K$  de Kitaigorodskii (8). La valeur trouvée,  $K = 0.70$ , est tout a fait raison-

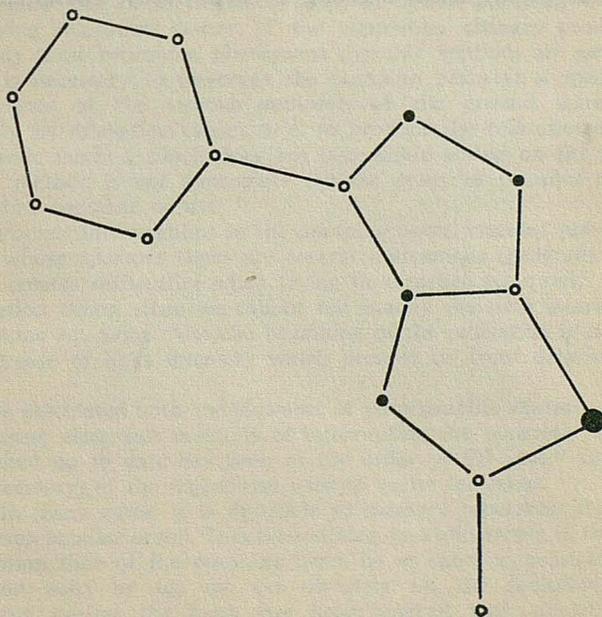


FIG. 2

ble. Si l'on tient compte également de la densité, la valeur relativement peu élevée de  $K$  semble indiquer qu'il n'existe pas de fortes liaisons intermoléculaires dans le composé étudié.

Le noyau du *s*-triazolo [3,4-*b*] thiadiazole est pratiquement plan, ce qui confirme le caractère de ce type de substances à 10 électrons  $\pi$  et va simplifier considérablement les calculs théoriques (1); le plan moyen du groupement phényle en position 5 forme un angle dièdre de  $4.98^\circ$  avec le plan moyen du noyau hétérocyclique: ceci est parfaitement cohérent avec le résultat qualitatif obtenu par résonance magnétique nucléaire (2); d'après l'apparence du signal du phényle (deux multiplets bien séparés correspondant respectivement à 3 et 2 protons) on pouvait s'attendre que les deux noyaux, aromatique et hétérocyclique, soient coplanaires.

### Remerciements

Nous voulons remercier MM. les Professeurs Gay (Université de Bordeaux) et Jacquier (Université de Montpellier) dans les Laboratoires desquels ce travail a été réalisé.

### BIBLIOGRAPHIE

1. R. FAURE et E. J. VINCENT, *Travaux en cours*, Laboratoire de Chimie Organique Physique, Université de Provence, Marseille.
2. J. ELGUERO, R. JACQUIER et A. J. H. SUMMERS, *Bull. Soc. Chim. Fr.*, 3968 (1972).
3. A. J. H. SUMMERS et J. ELGUERO, *Bull. Soc. Chim. Fr.*, 3974 (1972).
4. J. ELGUERO, R. JACQUIER et S. MIGNOGAC-MONDON, *J. Het. Chem.*, sous presse (1973).
5. M. KANAOKA, *J. Pharm. Soc. Japan*, 76, 1133 (1956) [*Chem. Abstr.*, 51, 3579 (1957)].
6. J. M. FORNIES MARQUINA et J. ELGUERO, Résultats non publiés.
7. G. COMBERTON, Laboratoire de Cristallographie, Université de Bordeaux I.
8. A. I. KITAIGORODSKII, *Organical Chemical Crystallography*, Consultants Bureau, New York (1961).

# A METHOD FOR CHOPPING IN VERY SHORT TIMES THE RADIATION FROM ELECTRODELESS DISCHARGE LAMPS

BY

E. BERNABÉU, R. CORBALÁN

Departamento de Física Fundamental, Cátedra de Óptica.  
Universidad de Zaragoza (España)

AND

M. QUINTANILLA

Departamento de Óptica. Universidad de Valladolid (España)

## Abstract

A method for chopping in very short times the radiation from electrodeless discharge Cesium lamps is presented.

Interruption times shorter than 10  $\mu$ secs or less are reached by acting directly on the radiofrequency oscillator that excites the lamp.

Electrodeless discharge lamps are the spectral sources most commonly used in optical pumping experiments. One of the areas of study of optical pumping is the evolution in time, under varying relaxation causes, of the population changes produced by optical pumping. To study these relaxation phenomena dynamic methods are generally used<sup>1)</sup>. In this methods it is necessary to interrupt the pumping beam at a specific moment, so that the populations of the various sublevels of the ground state of the atoms involve exclusively by relaxation causes, i. e. to produce the relaxation transients. There is only one dynamic method which does not necessitate acting on the pumping beam<sup>2)</sup>, nevertheless this method is not appropriate for the study of complex relaxations when more than one time constant occurs<sup>3) 4)</sup>.

Normally to produce interruptions in the pumping beam, inverted photographic shutter have been used, whose aperture times are several milliseconds (generally between 4<sup>5)</sup> and 25<sup>6)</sup> msec.). This creates difficulties when trying to measure accurately phenomena with very short relaxation times, since we cannot tell exactly the time interval during which the relaxation causes act alone. Also the beginning of the relaxation is accompanied with a significant decrease of light intensity which prevent us from determining the origin of time.

The drawbacks associated with the slowness of photographic shutters can be overcome in principle by using electronic methods of interrupting the pumping beam. The fastest interruption reached up to date has been of the order of 500  $\mu$ sec.<sup>5)</sup> acting on the feed (primary and secondary) of the magnetron used to excite the lamp.

Nevertheless, in many cases, it is desirable to measure relaxation times of the order of 10 msec. and even smaller ones<sup>4)</sup>. This necessitates, to avoid errors in the measurements, that the interruption time of the pumping beam be as short as possible.

In the method used by us, we act directly on the radiofrequency oscillator ( $\sim 80$  MHz) which excites the lamp (we have worked with electrodeless discharge Cesium lamps of the kind described by Arditi and Carver<sup>7)</sup>). Points (1) and (2) of the lamp oscillator (Fig. 1) are joined to points (1) and (2) of the switch system (Fig. 2); the

MF 178 transistor is saturated permanently, thus keeping the Cesium lamp burning, as long as the potential difference between the base and the emitter of the MF 178 transistor does not exceed  $-20$  V. To study the switching off of the lamp, under these conditions, we have used a RCA 7102 photomultiplier sensitive to near infrared and a TEKTRONIX Mod. 564 B storage oscilloscope a Mod. 3A6 amplifier and Mod. 3B4 time base with a gate out of 20 V. during sweep time. Using the oscilloscope on single sweep mode, we can record a single switch off transient of the Cesium lamp by merely connecting the 20 V. output to the MF 178 transistor, as far as the oscilloscope sweep and the switching off of the Cesium lamp are synchronized.

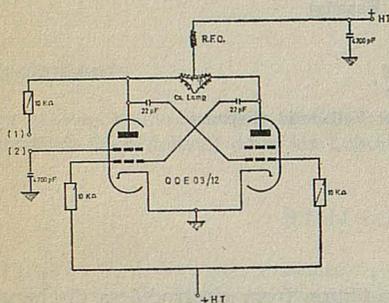


FIG. 1

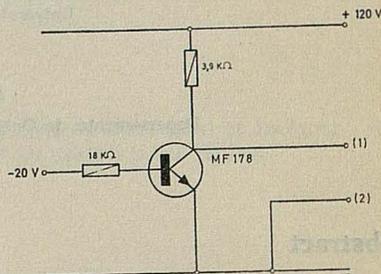


FIG. 2

It is evident that in the transient observed, the time constant of the detection system and the characteristic time of switching off of the lamp will intervene, and since in principle both times are unknown we cannot draw any conclusion on their characteristic. To determine the characteristic switching off time of the lamp we have to reduce the time constant characteristic of the detection system until this could be considered negligible. As far as the time constant of detection depends linearly on the charge resistor of the photomultiplier,  $R_c$ , we progressively reduced its value until the shape of the transient becomes unaltered. In this situation, we could assert that the transient depends exclusively on the switching off of the lamp.

In Fig. 3 a) we can see good fitting of the switching off transient of the lamp, to an exponential function of time constant  $\tau_1 = 1.5 (0) \mu\text{sec}$ .

We note that such a small interruption time constant allow us, in principle, to determine very short relaxation times such as those of the second mode of diffusion (low pressure region) or of electronic orientation (high pressure region) in alkaline-buffer gas cells<sup>4</sup>). This may be advantageous in the cases of relaxation in  $\text{Cs-Kr}$  or  $\text{Cs-Xe}$ , where very short relaxation times are expected, even for the first mode of diffusion and for nuclear orientation.

Once the interruption time constant of the pumping beam has been experimentally determined, it is necessary to find the parameters which determine the time constant of the detection. To this end we followed this process. If we increase  $R_c$ , and call  $\tau_2 = R_c C$  the detection time constant, it is easy to see that the transient of the switching off of the lamp,  $V_0 e^{-t/\tau_1}$ , will now be represented

$$V(t) = \frac{V_0}{\tau_1 - \tau_2} (\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2})$$

In Fig. 3b the transient for  $R_c = 56.2 \text{ K}\Omega$  together with  $V(t)$  (dotted line) for an adjusted  $\tau_2$  value are represented. When different values of  $R_c$  are used, the obtained values for  $C$  in the transients are coincident under the margins of experimental error. The order of magnitude of the equivalent capacity of the detection is  $0.10 (8) \text{ pF}$ . This capacity is mainly caused by the wire carrying the signal from the photomultiplier. Since

A METHOD FOR CHOPPING IN VERY SHORT TIMES

this produces a maximum current output of  $10 \mu\text{A}$ , it is necessary to reduce as much as possible the capacity in the detection in order to use charge resistors of the order of  $1 \text{ M}\Omega$  which will give us sufficiently high signals without appreciably towering the response capacity of the detection chain. This is done by placing a preamplifier as near as possible to the photomultiplier. Thus we have managed to adjust the detection system to the measurement of relaxation times into satisfactory conditions.

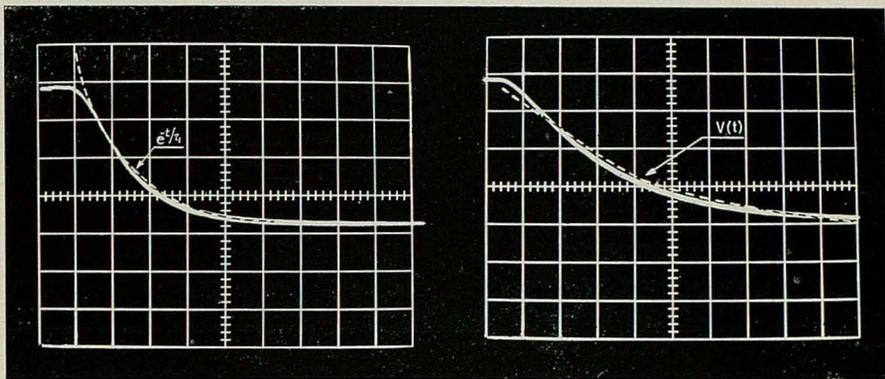


FIG. 3. — a) Switch off transient of the Cesium lamp.  $R_c = 5.3 \text{ K}\Omega$ ; Sensibility  $0.01 \text{ V/div.}$ ; time base  $1 \mu\text{sec/div.}$ ;  $\tau_1 = 1.5(0) \mu\text{sec.}$  b) Transient with  $R_c = 56.2 \text{ K}\Omega$ ; sensibility  $0.01 \text{ V/div.}$ ; time base  $2 \mu\text{sec/div.}$ ;  $\tau_1 = 1.5(0) \mu\text{sec.}$   $\tau_2 = 6.2(7) \mu\text{sec.}$

Fig. 4 shows the transient with preamplifier and  $R_c = 1 \text{ M}\Omega$ . Working in such conditions, the signal vanishes in a time smaller than  $10 \mu\text{seg.}$

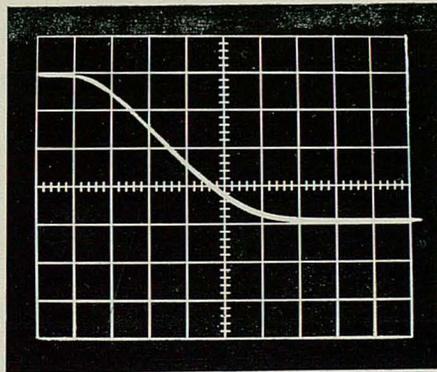


FIG. 4. — Transient with preamplifier and  $R_c = 1 \text{ M}\Omega$ ; sensibility  $0.05 \text{ V/div.}$ ; time base  $1 \mu\text{sec/div.}$

### Acknowledgements

The authors wish to thank Prof. J. Casas for his continuous interest and encouragement through this work. Also to the *Ministerio de Educación y Ciencia*, the *Instituto de Estudios Nucleares* and the *C. S. I. C.* for their economic help.

REFERENCES

- (1) W. FRANZEN: Phys. Rev., *115*, 850 (1959).  
 A. GOZZINI: Compt. Rend. 255, 1905 (1962). *Quantum Electronics. Proc. III. Int. Congress.* Ed. P. Grivet and N. Bloembergen. Paris (1964), p. 217.  
 M. A. BOUCHIAT and F. GROSSETÊTE: Journ. Phys., *27*, 353 (1966).
- (2) H. G. DEHMELT: Phys. Rev., *105*, 1487 (1957). J. Opt. Soc. Am., *55*, 335 (1965).  
 T. KANDA and T. MINEMOTO\*: J. Phys. Soc. Japan, *21*, 1990 (1966).  
 T. MINEMOTO and T. KANDA\*: J. Phys. Soc. Japan, *31*, 1174 (1971).
- (3) M. A. BOUCHIAT: Journ. Phys. *24*, 379 and 611 (1963).  
 M. A. BOUCHIAT and J. BROSSEL: Phys. Rev., *147*, 41 (1966).  
 P. VIOLINO: Suppl. Nuovo Cimento, *16*, 355 (1968).  
 N. BEVERINI, P. MINGUZZI and F. STRUMIA: Phys. Rev., *A4*, 550 (1971).
- (4) R. CORBALÁN: Doctoral Thesis. University of Zaragoza (España). 1972. (To be published).
- (5) L. POTTIER: Thesis. E. N. S. (Paris), 1968.
- (6) L. W. ANDERSON and A. T. RAMSEY: Phys. Rev., *123*, 712 (1963).
- (7) M. ARDITI and T. R. CARVER: Phys. Rev., *124*, 800 (1961).

---

\* In this method, the static magnetic field surrounding the problem sample (cell) is brusquely inverted and the evolution of the population under the action of the pumping beam and the causes of relaxation are studied. A variation of this method consists of applying to the atomic system under study a pulse in  $\pi$  of resonant radiofrequency, thus creating the same effect as inverting the static magnetic field.