

REVISTA
DE LA
ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES
DE
ZARAGOZA

SERIE 2.^a

TOMO XXIX

Núm. 1



1974

INDICE DE MATERIAS

M. ALFARO GARCÍA. — <i>Teoría paramétrica de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad</i>	5
V. CAMARENA. — <i>Caracterización de las transformaciones canónicas con un número superabundante de variables y relaciones de ligadura mediante el covariante bilineal</i> ...	81
M. SAN MIGUEL. — <i>Algunos resultados sobre la convergencia de la serie de Fourier de una función aleatoria periódica</i>	87
J. CASAS y J. APORTA. — « <i>Estudio de la esfericidad de la onda extraxial en un sistema óptico</i> » (II)	99
R. USÓN y F. IRANZO. — <i>Preparación y estudio de pentafluorofenil derivados del aluminio y sus compuestos de adición con éter etílico y trimetilamina</i>	107
R. USÓN y F. IBÁÑEZ. — <i>Preparación y estudio de isotiocianolanos y sus compuestos de adición con éteres y aminas</i>	113
F. G. HEGARDT and J. L. VICEDO. — <i>A simplified method of preparing pure lecithin</i>	119

TEORIA PARAMETRICA DE POLINOMIOS ORTOGONALES SOBRE LA CIRCUNFERENCIA UNIDAD

P O R

M. ALFARO GARCÍA

Departamento de Teoría de Funciones. Universidad de Zaragoza (España)

Abstract

«The parametric theory for polynomials orthogonal on the unit circle».

The point of departure, quite opposite to that of the classic theory, is the following: Given a Toeplitz hermitian positive definite matrix $m = (c_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$; the agreement $z^i \circ z^j = c_{ij}$ define an inner product with the characteristic property

$$z(P(z) \circ z Q(z) = P(z) \circ Q(z).$$

After a general introduction, chapters I and II are devoted to algebraic study of properties of the orthogonal polynomials and their roots. Some of these properties were already known.

In chapter III we establish the equivalence among recurrence formulas, Christoffel-Darboux formulas, characteristic property of inner product and the fact of being m a Toeplitz matrix.

In chapter IV, the $*n$ operators are introduced and their properties studied.

Chapters V and VI deal with the so called typical expansions, first in general, then in the particular case of Toeplitz matrices, and some new results on the location of the roots of the polynomials are obtained.

In chapter VII we introduce and study several parametric systems, that let us build the sequence of orthogonal polynomials. One of them seems to be definitive. We also obtain some new conclusions on the roots of the polynomials.

Finally different open problems on this topic are presented, some of which have been solved in later articles.

Introducción

La teoría de polinomios ortogonales (PO) sobre la circunferencia unidad (U) es hoy una teoría clásica como la de PO sobre R , aunque gravita sobre ella lo que Akhiezer [1], llama el «curioso fenómeno» que podríamos describir diciendo que en unos casos, el espacio pre Hilbert Π de polinomios sobre C tiene por clausura el espacio de Hilbert H de las funciones L_{σ}^2 determinado por una distribución $\sigma(e^{i\alpha})$ sobre U y en otros, dicha clausura es un subespacio de H . Por métodos teórico-funcionales (ver [5]) la «teoría de Szegő» da la condición necesaria y suficiente que ha de cumplir la distribución $\sigma(\alpha)$ para situarnos en uno o en otro caso.

La llamada «teoría paramétrica» de PO sobre U es debida a Geronimus (véase [7]) y nace como consecuencia de unos estudios de Krein (véase [3] o su artículo *Continuous analogs of propositions concerning polynomials orthogonal on the unit circle*) sobre el problema continuo análogo al que nos ocupa. Esto hace que Geronimus maneje unos parámetros peculiares $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ con la condición $|a_n| < 1$ que determinan unívocamente una sucesión de PO sobre U . Geronimus desarrolla su teoría a continuación de la de Szegő, supuesta conocida ésta.

El punto de vista de esta Memoria es radicalmente opuesto, en cuanto a su construcción, al de la teoría clásica. Se tratan los PO sobre U como un caso particular de la teoría iniciada en [16], que pretende estudiar los PO sobre cualquier curva algebraica construyendo matrices hermitianas definidas positivas (HDP), $(c_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$, donde $c_{ij} = z^i \cdot z^j$ doñadas de una relación lineal entre algunos de sus coeficientes, válida por traslación a toda la matriz. Dicha relación lineal es consecuencia de la ecuación algebraica de la curva de referencia. En nuestro caso $U: z\bar{z} - 1 = 0$ permite construir como matriz correspondiente la clásica de Toeplitz, la cual define un producto escalar sobre Π . La tarea consiste en completar el espacio de Hilbert H , cuya restricción a Π define éste, como el espacio normado euclídeo inicial.

Justifican esta inversión en el estudio de la teoría varios puntos de vista:

i) obtener directamente por método algebraico todas las propiedades conocidas de la teoría clásica que sean por naturaleza estrictamente algebraicas.

ii) establecer la equivalencia entre las propiedades clásicas de que la matriz sea de Toeplitz, propiedad característica del producto escalar, fórmula de recurrencia y fórmula del K_n -núcleo, demostrando que cualquiera de ellas permite construir autónomamente la teoría.

iii) ver qué forma peculiar toma en este caso la teoría de la extensión típica ([12], [13] y [15]).

iv) estudiar la familia de operadores $*n$, para n natural, estableciendo sus propiedades y algunas consecuencias.

v) introducir diversas familias equivalentes de parámetros (cuya utilidad y significación quedan justificadas) que definan una distribución $\sigma(\alpha)$ unívocamente, profundizando en la solución ya enunciada en [4].

vi) de paso, se introducen a lo largo de la memoria sucesivos perfeccionamientos a la localización de las raíces de los PO sobre las cuales la única información que da la teoría clásica es que están contenidas en el interior del círculo unidad.

Nota.—Vigil [11] siguiendo una idea de Krein [3] aplicada a un caso particular ha utilizado con frecuencia (y lo mismo haremos nosotros) la conocida propiedad de los determinantes de que, dada una menor de segundo orden

$$\begin{bmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{hj} & a_{hk} \end{bmatrix} \text{ de una matriz con determinante } \Delta, \text{ se tiene}$$

$$\Delta \cdot Adj \begin{bmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{hj} & a_{hk} \end{bmatrix} = Adj a_{ij} Adj a_{hk} - Adj a_{ik} Adj a_{hj}$$

con lo que se obtienen en el acto numerosas demostraciones de teoremas, conocidos o no, por método puramente algebraico. A lo largo de la memoria se designará abreviadamente esta propiedad con el nombre de propiedad A para evitar repeticiones.

Por la naturaleza de los métodos utilizados, el carácter de la Memoria es elemental, lo que consideramos como una ventaja al permitir llegar a conclusiones que requieren métodos teórico-funcionales sofisticados en la teoría clásica.

A modo de prólogo haremos un resumen sumario del contenido de los siete capítulos de que consta este trabajo.

Cap. I.—Matrices de Toeplitz

Supuesta dada una matriz HDP de Toeplitz se estipula que define un producto escalar en el espacio vectorial Π de los polinomios sobre C dotado de la propiedad característica

$$zP(z) \circ zQ(z) = P(z) \circ Q(z)$$

lo que equivale a decir que el operador multiplicación es isométrico. A pesar de su sencillez no encontramos mencionado el significado de esta propiedad en la bibliografía consultada. Se escriben en forma de determinante, los polinomios ortogonales $\{P_n(z)\}_0^\infty$, sus normalizados $\{P_n(z)\}_0^\infty$, los K_n -núcleos $K_n(z, y)|_0^\infty$ obtenidos directamente de la propiedad A (lo que mejora sensiblemente las demostraciones habituales; ver, p. ej. [7], pág. 2) y, como novedad, la expresión en forma de determinante del polinomio recíproco $P_n^*(z)$ y su generalización.

Se obtienen las cuatro fórmulas de recurrencia posibles, en lugar de las dos usadas en la teoría clásica, así como sus normalizadas y tras la obtención directa de algunas fórmulas conocidas, se estudian las llamadas «fórmulas simples de recurrencia y suma» la primera de las cuales ya obtenida por Geronimus [7], la segunda por Vigil [11].

Cap. II. Las raíces de $P_n(z)$ y $K_n(z, y)$

De carácter expositivo a partir del capítulo I, hace un estudio que estimamos completo, sobre la posición de las raíces de $P_n(z) = 0$ y $K_n(z, y) = 0$ respecto a U , señalando consecuencias sencillas que merece subrayar al no encontrar antecedente explícito de ellas. Son de resaltar la

Proposición 2.7. — «Las raíces α , de $P_n(z)$ son interiores al círculo unidad (por consiguiente $|\alpha| < 1$), y verifican la desigualdad de Schwarz:

$$|K_n(\alpha, 0)|^2 \leq K_n(\alpha, \alpha) K_n(0, 0).»$$

la nota siguiente a la proposición 2.9, por su significado intuitivo, y las proposiciones formales:

Proposición 2.10. — «Dado un número real $\Delta_n > 0$ y un polinomio en C de grado n , con coeficiente conductor positivo y raíces de módulo menor que la unidad, existe un segmento $\{P_h(z)\}_{h=0}^n$ de PO relativos a una matriz de Toeplitz cuyo n -ésimo polinomio es el dado.»

Proposición 2.11. — «Dados n números complejos $\{\alpha_{in}\}_{i=1}^n$ tales que $|\alpha_{in}| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, existen sucesiones de PO relativos a una matriz de Toeplitz, cuyo n -ésimo polinomio tiene como raíces los α_{in} dados.»

que consideramos nuevas, pese a su simplicidad.

Cap. III. Equivalencia entre la relaciones fundamentales

Vinuesa, ha demostrado [17] que en PO sobre R son propiedades características y por ello equivalentes entre sí, que la matriz de los momentos es de Hankel, que el operador multiplicación es simétrico, la fórmula de recurrencia de Christoffel-Darboux y la de sumación del mismo nombre. Tenía interés averiguar si esa situación es peculiar a R o se verifica en condiciones más generales y, en su caso, cuáles son éstas. En este Capítulo establecemos la solución afirmativa para U del caso homólogo al establecido

por Vinuesa para R , demostrando, después de establecer la equivalencia de las cuatro fórmulas de recurrencia obtenidas en el capítulo I, el esquema:

$$\begin{array}{c} [P] \\ \Downarrow \begin{array}{l} \Leftarrow \\ \Rightarrow \end{array} [R] \Leftrightarrow [S] \\ [T] \end{array}$$

que nos dice que definido un producto escalar en Π sobre C es equivalente afirmar:

[T]: que $(c_{ij})_{i,j=0}^{\infty} = (z^i \circ z^j)_{i,j=0}^{\infty}$ es una matriz de Toeplitz.

[P]: que el operador multiplicación es isométrico.

[R]: que la sucesión correspondiente $\{P_n(z)\}_0^{\infty}$ satisface cualquiera de las cuatro fórmulas de recurrencia, y

[S]: que cada $K_n(z, y)$ satisface cualquiera de las dos fórmulas de sumación.

Cap. IV. El operador $*n$

A partir de una idea mencionada sucintamente por Freud [5], se extiende la definición de $P_n(z)^{*n}$ a partir de $P_n(z)$ para todo n natural y cada polinomio $P(z)$ de grado $\leq n$; esta sucesión de operadores, goza de una colección de propiedades entre las cuales resaltaremos la involutiva; la semilineal; la del producto ordinario

$$z^{r+s} [P(z) Q(z)]^{*n} = z^n P(z)^{*r} Q(z)^{*s}$$

y sus consecuencias; conmutatividad con el endomorfismo de conjugación; propiedad del producto escalar

$$P(z)^{*n} \circ Q(z)^{*m} = z^{n-m} Q(z) \circ P(z), \text{ si } n \geq m;$$

propiedad de isometría:

$$\| P(z)^{*n} \| = \| P(z) \|;$$

de ortogonalidad y propiedad de la base:

si llamamos $B_n^{(0)} = \{P_h(z)\}_{h=0}^n$ a la base ortonormal conocida en Π_n , el conjunto $B_n^{(n)} = \{z^h P_{n-h}^*(z)\}_{h=0}^n$ es otra base ortonormal de Π_n .

Es de observar que el operador $*n$ proporciona a partir de cada teorema conocido otro dual, lo que no ha sido indicado ni por el mismo Freud; por ejemplo, su demostración del lema 1.9 de [5] es inútil pues se trata de la dual de un hecho elemental conocido.

Se estudian en este capítulo una colección de consecuencias de la dualidad mencionada; en particular, la definición del nuevo núcleo $K_n^*(z, y)$ así como la posición de sus ceros respecto a U .

Cap. V. Matrices hermitianas típicas

La teoría de las extensiones típicas de Vigil [12], [13], [15] no resulta exactamente aplicable a PO sobre U . Sin embargo, una idea de Akhiezer y Krein ([3], pág. 15 Teorema 7 y siguientes) utilizada de manera distinta al fin a que la destinan sus autores, permite

modificar la teoría de las extensiones típicas citadas para hacerla útil para U , con resultados sencillos aunque sorprendentes y eficaces.

En el capítulo V se recuerdan las propiedades de extensiones típicas ordinarias que se van a utilizar, sin demostración, para aplicarlas al caso particular de matrices de Toeplitz.

La idea fundamental perseguida consiste en dada una matriz HDP T_{n-1} de orden n de Toeplitz que define un producto escalar en Π_{n-1} , obtener orlándola con fila y columna n -ésima otra matriz T_n que sea a la vez extensión típica de la T_{n-1} dada y de Toeplitz. Esta última condición exige que fijemos exclusivamente el elemento c_n de la nueva matriz de forma que la extensión sea típica llegándose en definitiva al teorema 5.3 que dice:

Teorema 5.3. — «Definido un producto escalar en Π_{n-1} , a cada $\alpha \in C$ con $P_{n-1}(\alpha) \neq 0$, le corresponde una extensión típica cuyo $P_n'(z)$ viene dado por

$$P_n'(z, \alpha) = \frac{\Delta_{n-1}^2}{P_{n-1}(\alpha)} K_{n-1}(z, \alpha) (z - \alpha).$$

Las raíces de cada $P_n'(z, \alpha)$ forman una clase de equivalencia en C , mediante la relación $\alpha \equiv \beta$ si $\alpha = \beta$ o $K_{n-1}(\beta, \alpha) = 0$. El conjunto de las extensiones típicas posibles está en correspondencia biyectiva con el conjunto cociente del complementario en C de las raíces de $P_{n-1}(z) = 0$, respecto a dicha relación de equivalencia.»

y a los

Teorema 5.6. — «La extensión de una matriz HDP de Toeplitz T_{n-1} de orden n a otra T_n de orden $n + 1$ es a la vez típica y de Toeplitz sí y sólo si, T_n es una matriz singular es decir, sí y sólo si $\det T_n = 0$.»

Corolario 5.7. — Sea T_n una matriz hermitica definida no negativa de Toeplitz de orden $n + 1$, con sus menores principales positivos y $\det T_n = 0$. Entonces, las raíces del polinomio $P_n(z)$ asociado a T_n son simples.»

El hecho de ser las extensiones típicas de Toeplitz singulares y las raíces del $P_n(z)$ correspondientes, unimodulares quedando determinadas todas dada una de ellas, hace que llamemos a este caso terminal.

Cap. VI. Extensiones de Toeplitz definidas positivas

En el Capítulo V hemos estudiado las extensiones típicas de Toeplitz que hemos llamado terminales por ser $\Delta_n = \det T_n = 0$. Naturalmente las extensiones útiles son aquellas en que $\det T_n > 0$. Interesa pues determinar los valores de c_n que fijan la extensión de modo que se cumpla tal condición; corresponden éstos al círculo S_n cuya circunferencia frontera es $\det T_n = 0$ con centro que llamaremos ζ_n^c y radio e_{n-1} .

Cada elección de $c_n = \zeta_n^c + w_n$ con la condición $|w_n| < e_{n-1}$ (donde $e_{n-1} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}$), da una de las posibles extensiones de Toeplitz de Π_{n-1} a Π_n .

Es de advertir que el centro ζ_n^c de la circunferencia es función exclusivamente de c_0, c_1, \dots, c_{n-1} y está, por tanto, determinado de antemano. El parámetro w_n fija el $P_n(z)$ correspondiente que viene dado por la fórmula sin normalizar

$$P_n(z) = e_{n-1} z P_{n-1}(z) - w_n P_{n-1}^*(z)$$

ésta, nos proporciona una interpretación sugestiva y natural de la fórmula (R-1) de recurrencia.

Así pues, dada una matriz $(c_n)_{n=0}^\infty$ HDP de Toeplitz queda fijada la familia de círculos S_n con sus centros ζ_n^c y sus parámetros $\{w_n\}_1^\infty$, estos últimos bastan junto con c_0 ,

para determinar el producto escalar en Π relativo a la circunferencia unidad. La familia paramétrica $\{w_n\}$ tiene el inconveniente, que será salvado en el capítulo siguiente, de que no es practicable la condición (o no la hemos hallado hasta ahora en forma cómoda) para determinar cuándo $c_0 \cup \{w_n\}_1^\infty$ fija una matriz HDP de Toeplitz.

El estudio de $\{w_n\}_1^\infty$ conduce a propiedades interesantes que permiten penetrar en un terreno donde la teoría clásica de PO sobre U sólo da un resultado: el estudio de la localización de las raíces de los polinomios $\{P_n(z)\}_1^\infty$ de los cuales hasta ahora, únicamente se sabía que eran interiores al círculo unidad. Los resultados reseñados en cuanto a módulos y argumentos de dichas raíces, aunque significativos, no pretenden ser exhaustivos; de todos modos conducen a informaciones cuyo significado intuitivo estimamos es de interés.

Cap. VII. Las fórmulas paramétricas fundamentales y sus aplicaciones

La introducción, con su significado geométrico, de los parámetros $c_0 \cup \{w_n\}_1^\infty$ hace que planteemos la teoría paramétrica de un modo más sugestivo que mediante las $\{a_n\}_1^\infty$ ($|a_n| < 1$) de Geronimus, que es su autor; en todo caso, por el inconveniente antes indicado, no van a ser los $\{w_n\}_1^\infty$ nuestros parámetros definitivos. Pero antes de sustituirlos es importante estudiar sus propiedades, que nos van a llevar mediante recursos sencillos a una información que amplía considerablemente la de la teoría clásica.

Definido w_n como $w_n = -\frac{P_n(0)}{\Delta_{n-2}}$ o en forma de determinante dependiente de $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n$, se obtiene fácilmente la fórmula fundamental que enlaza $|w_n|$, e_{n-1} y e_n una de cuyas formas es

$$e_n = e_{n-1} \left(1 - \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} \right)$$

Se deduce que

$$|w_n| = 0 (\sqrt{e_{n-1}}) \text{ y que } \{w_n\}_1^\infty \in l^2.$$

Se estudian después acotaciones de w_n más precisas que la conocida en el capítulo anterior $|w_n| < e_{n-1}$, algunas de carácter geométrico.

A continuación, se establecen los parámetros definitivos $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$. Para plantear un tema distinto de los considerados en esta Memoria, introdujimos estos parámetros en [4]. Su estudio sistemático presenta muchas ventajas y hemos debido de extender considerablemente el trabajo citado.

Dados

$$e_0 \text{ y } \{\tau_n\}_1^\infty \in l^2$$

se definen

$$\begin{cases} e_n = e_{n-1} |\tau_n|^2 \\ w_n = \tau_n \sqrt{e_{n-1}} \end{cases}$$

que parametrizan la fórmula fundamental citada. Se distinguen de un modo natural los casos C y D de la teoría clásica mediante las expresiones

$$\begin{cases} \text{Caso C} & e_0 > \sum_1^\infty |\tau_n|^2 \\ \text{Caso D} & e_0 = \sum_1^\infty |\tau_n|^2 \end{cases}$$

Las consecuencias de esta clasificación, esperamos que sean notables. La teoría clásica, precisamente por ser teórico-funcional ha estudiado sistemáticamente el caso C en el que $\{P_n^*(z)\}_1^\infty$ es uniformemente convergente en el interior del círculo unidad y ha ignorado prácticamente el caso D . Ahora podemos poner pie en este terreno desconocido y esbozar, al menos, clasificaciones dentro de él, que abren esperanzas a un futuro prometedor.

Mencionamos el teorema fundamental, ya contenido en el trabajo citado [4].

Teorema 7.4. — «Existe una biyección entre la familia de las sucesiones de PO relativos a U y la familia de las sucesiones complejas $\{\tau_n\}$ de cuadrado sumable, para las cuales la suma $\sum |\tau_n|^2$ venga acotada por un número positivo e_0 previamente fijado.» así como la definición natural de τ_n en el espacio preHilbert Π

$$\tau_n = z P_{n-1}(z) \circ 1$$

que vuelve a poner de manifiesto la importancia del operador multiplicación. Se estudian por primera vez las diferentes situaciones, dejando e_0 variable al menos en un primer tratamiento.

La clasificación paramétrica clásica en los casos C o D se hace depender de la convergencia o divergencia de un producto infinito que en términos de τ_n es

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{|\tau_n|^2}{e_{n-1}} \right)$$

Al lado de este resultado se presenta en el apartado IV del capítulo un grupo de fórmulas equivalentes o alternativas cuyo desarrollo es resumido en el cuadro 1. En el cuadro 2, sin pretender una discusión completa del caso D , fuera del objeto de esta Memoria, pero que pensamos queda abierta con lo indicado, se exponen los casos extremos y uno intermedio parcial. Esperamos que los sencillos ejemplos 1, 2 y 3 aclaren un esbozo de la situación a desarrollar.

Los resultados citados, permiten, como en Capítulos anteriores, ampliar información sobre acotación de raíces, tanto en módulo como en argumento, que adquiere formas particularmente expresivas.

Finalmente el

Teorema 7.10. — «Existe una correspondencia biyectiva entre dos cualesquiera de los siguientes conjuntos:

- $\alpha)$ La familia de todas las sucesiones complejas que den lugar a una matriz HDP de Toeplitz.
- $\beta)$ El conjunto de todos los pares de sucesiones $(\{e_n\}, \{w_n\})$ relacionadas por la fórmula fundamental (7.7).
- $\gamma)$ El conjunto de los pares formados por cada sucesión $\{\tau_n\}_1^\infty \subseteq C$, de cuadrado sumable y un número positivo e_0 tal que $e_0 \geq \sum_1^\infty |\tau_n|^2$.
- $\delta)$ La familia de todas las sucesiones de PO sobre U , que satisfagan (1.10) (o cualquiera de sus expresiones equivalentes).
- $\eta)$ El conjunto de las matrices complejas HDP de Toeplitz.»

resume a grandes rasgos el argumento general de este capítulo.

CAPÍTULO I

MATRICES DE TOEPLITZ

Introducción

Dada una matriz hermitiana definida positiva (HDP)

$$m = (c_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$$

el convenio

$$z^i \circ z^j = c_{ij} \quad i, j = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

extendido por linealidad al espacio vectorial Π de los polinomios sobre C , define en Π unívocamente un producto escalar $P(z) \circ Q(z)$, con la condición $P(z) \circ P(z) = \|P(z)\|^2 > 0$ si $P(z) \neq 0$.

Se sabe que si en m tomamos la menor principal m_n de orden $n + 1$, el determinante Δ_n de esta matriz, $\Delta_n = |c_{ij}|_{i,j=0}^n$, es positivo, y que si sustituimos la última fila de Δ_n por las potencias sucesivas de z , z^i con $i = 0, 1, \dots, n$, el determinante que resulta

$$P_n(z) = \begin{vmatrix} c_{00} & \dots & c_{n0} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{0,n-1} & \dots & c_{n,n-1} \\ 1 & \dots & z^n \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

es el término n -ésimo de una sucesión $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortogonales (PO), no normalizados, que se normalizan poniendo

$$\begin{cases} P_n(z) = \frac{P_n(z)}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} & n = 1, 2, \dots \\ P_0(z) = \frac{P_0(z)}{c_{00} \sqrt{c_{00}}} = \frac{1}{\sqrt{c_{00}}} \end{cases} \quad (1.3)$$

Es evidente que las sucesiones definidas por (1.2) y por (1.3) forman, respectivamente, una base ortogonal y su correspondiente ortonormal en Π , que así resulta ser un espacio normado euclídeo (prehilbertiano).

Se denomina $K_n(z, y)$ (K_n -núcleo) al n -núcleo $\sum_{h=0}^n P_h(z) \overline{P_h(y)}$ que, como ya es sabido, puede también definirse mediante:

$$K_n(z, y) = \frac{Q_n(z, y)}{\Delta_n} \quad (1.4)$$

donde $Q_n(z, y)$ viene dado por el determinante

$$Q_n(z, y) = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{10} & \dots & c_{n0} & 1 \\ c_{01} & c_{11} & \dots & c_{n1} & \bar{y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{0h} & c_{1h} & \dots & c_{nh} & \bar{y}^h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{0n} & c_{1n} & \dots & c_{nn} & \bar{y}^n \\ 1 & z & \dots & z^n & 0 \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

(véase por ejemplo [11]).

Estudiaremos el caso particular en que la matriz HDP sea de Toeplitz, es decir, en que cada paralela a la diagonal principal, incluida ésta, tiene todos sus elementos iguales. Por consiguiente,

$$c_{n,m} = c_{n-m,0} \quad n, m = 0, 1, \dots, \quad n \geq m. \quad (1.6)$$

Designaremos dicha matriz simplemente por $T = (c_h)_{h=0}^\infty$; donde c_h representa el valor común a todos los términos de la paralela $(h+1)$ -ésima sobre la diagonal principal, para h natural, con $c_{-h} = \bar{c}_h$.

El producto escalar definido por T , goza de la propiedad

$$z^h \circ z^k = z^{h-k} \circ 1; \quad h \geq k, \quad h, k = 0, 1, \dots \quad (1.7)$$

la cual, por linealidad, se extiende a $z^h P(z) \circ z^k Q(z)$ (siendo $P(z), Q(z)$ dos polinomios cualesquiera) dando:

$$z^h P(z) \circ z^k Q(z) = z^{h-k} P(z) \circ Q(z) \quad \text{con } h \geq k, \quad (1.8)$$

que, para $h = k$, queda

$$z^h P(z) \circ z^h Q(z) = P(z) \circ Q(z) \quad (1.9)$$

expresión equivalente a la anterior, como ocurre con la que se obtiene en el caso particular $h = 1$:

$$z P(z) \circ z Q(z) = P(z) \circ Q(z) \quad (1.10)$$

Recíprocamente, si se cumple la propiedad (1.10), tomando $P(z) = z^h, Q(z) = z^k$ resulta

$$z^{h+1} \circ z^{k+1} = z^h \circ z^k = \dots = z^{h-k} \circ 1 \quad (h \geq k)$$

lo que implica

$$c_{h+1, k+1} = c_{h, k} = \dots = c_{h-k, 0}$$

por lo que la matriz correspondiente $m = (c_{ij})_{i, j=0}^\infty$ es de Toeplitz.

Podemos, pues, enunciar:

Proposición 1.1. — «La propiedad (1.10) es característica de los productos escalares definidos por matrices HDP de Toeplitz».

I. Polinomios recíprocos

Dada la matriz T , le asignamos la correspondiente sucesión de $PO, \{P_n(z)\}_0^\infty$, y su normalizada $\{P_n(z)\}_0^\infty$.

A cada $P_n(z)$ podemos asociarle el polinomio recíproco:

$$P_n^*(z) = z^n \bar{P}_n \left(\frac{1}{z} \right). \quad (1.11)$$

$P_n^*(z)$ es de grado n sí y sólo si, $P_n(0) \neq 0$, pero si $P_n(z)$ tiene una raíz nula de orden h , $P_n^*(z)$ es de grado $n-h$.

La expresión de $P_n^*(z)$ en forma de determinante es:

$$P_n^*(z) = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \dots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & \dots & c_{-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_{-1} \\ z^n & z^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

Por analogía llamaremos:

$$P_n^*(z) = \frac{P_n^*(z)}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} = z^n \bar{P}_n \left(\frac{1}{z} \right) \quad (1.13)$$

en donde la segunda igualdad quedará justificada más adelante. (Véase Cap. IV).

Proposición 1.2. — «Se verifica:

$$P_n^*(z) = -Adj \ c_{n+1} \text{ (en } P_{n+1}(z)\text{)}. \quad (1.14)$$

Demostración. — En efecto, si en (1.12) permutamos primeramente todas las columnas y luego, las n primeras filas se obtiene:

$$P_n^*(z) = (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \dots & c_{-1} & c_0 \\ 1 & z & \dots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n^2+n+1} \cdot Adj \ c_{n+1} \text{ (en } P_{n+1}(z)\text{)} = -Adj \ c_{n+1} \text{ (en } P_{n+1}(z)\text{)}. \quad \ddagger$$

La proposición anterior es un caso particular de la siguiente:

Proposición 1.3. — «Es válida la igualdad:

$$Adj \ c_{n-h} \text{ (en } P_n(z)\text{)} = -Adj \ c_{-h} \text{ (en } P_n^*(z)\text{)} \quad h = 0, 1, \dots, n \quad (1.15)$$

tomando c_{n-h} y c_{-h} precisamente en la primera fila de los respectivos determinantes».

Demostración. — Mediante un proceso análogo al de la demostración anterior:

$$Adj \ c_{n-h} \text{ (en } P_n(z)\text{)} = (-1)^{n-h+(n-1)^2} \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & \dots & c_{-h+2} & c_{-h} & \dots & c_{-n+2} & c_{-n+1} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_{n-h} & c_{n-h-2} & \dots & c_0 & c_{-1} \\ z^n & z^{n-1} & \dots & z^{n-h+1} & z^{n-h-1} & \dots & z & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+(n-1)^2} \cdot Adj \ c_{-h} \text{ (en } P_n^*(z)\text{)} = -Adj \ c_{-h} \text{ (en } P_n^*(z)\text{)}. \quad \ddagger$$

II. Fórmulas de recurrencia

Deducimos a continuación cuatro fórmulas de recurrencia que llamaremos mixtas, por figurar en ellas tanto polinomios $P_n(z)$ como polinomios recíprocos $P_n^*(z)$; tales fórmulas proporcionan el cuadro más completo posible en lo que a expresiones recurrentes de este tipo se refiere. No estudiaremos de momento, las previsibles relaciones de dependencia entre ellas, problema del que nos ocuparemos detalladamente más adelante. (Véase Cap. III).

Antes de pasar a la obtención de las fórmulas indicadas, conviene observar que, haciendo uso en Δ_n de la propiedad A de los adjuntos referida al menor $\begin{vmatrix} c_0 & c_n \\ c_{-n} & c_0 \end{vmatrix}$, se obtiene la relación:

$$|P_n(0)|^2 = \Delta_{n-1}^2 - \Delta_n \Delta_{n-2} \quad (1.16)$$

que utilizaremos con frecuencia en lo sucesivo, e inmediatamente en la deducción de fórmulas de recurrencia.

Apliquemos la citada propiedad A al menor $\begin{vmatrix} c_0 & c_n \\ 1 & z^n \end{vmatrix}$ del determinante (1-2), expresión de $P_n(z)$, se tiene:

$$\Delta_{n-2} P_n(z) = \Delta_{n-1} z P_{n-1}(z) + P_n(0) P_{n-1}^*(z) \quad (R-1)$$

Procediendo del mismo modo con $P_n^*(z)$ resulta,

$$\Delta_{n-2} P_n^*(z) = \Delta_{n-1} P_{n-1}^*(z) + \overline{P_n(0)} z P_{n-1}(z). \quad (R-2)$$

Eliminando $P_{n-1}(z)$ entre (R-1) y (R-2) y teniendo presente (1.16) se obtiene,

$$\Delta_{n-1} P_n^*(z) = \Delta_n P_{n-1}^*(z) + \overline{P_n(0)} P_n(z) \quad (R-3)$$

Finalmente, si eliminamos $P_{n-1}^*(z)$ entre las mismas (R-1) y (R-2) queda,

$$\Delta_{n-1} P_n(z) = \Delta_n z P_{n-1}(z) + P_n(0) P_n^*(z). \quad (R-4)$$

Estas fórmulas normalizadas conducen al siguiente cuadro:

$$\frac{1}{\sqrt{e_{n-1}}} P_n(z) = \frac{1}{\sqrt{e_n}} z P_{n-1}(z) + P_n(0) P_{n-1}^*(z) \quad (R_N-1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{e_{n-1}}} P_n^*(z) = \frac{1}{\sqrt{e_n}} P_{n-1}^*(z) + \overline{P_n(0)} z P_{n-1}(z) \quad (R_N-2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{e_n}} P_n^*(z) = \frac{1}{\sqrt{e_{n-1}}} P_{n-1}^*(z) + \overline{P_n(0)} P_n(z) \quad (R_N-3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{e_n}} P_n(z) = \frac{1}{\sqrt{e_{n-1}}} z P_{n-1}(z) + P_n(0) P_n^*(z) \quad (R_N-4)$$

en donde $e_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0$.

III. Fórmulas de sumación. El K_n -núcleo

Consideremos el determinante $Q_n(z, y)$, (1.5), cuando el menor principal de orden $n + 1$ corresponda a una matriz T de Toeplitz. Aplicando entonces la propiedad A de los adjuntos al menor $\begin{vmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, obtenemos:

$$\Delta_{n-1} Q_n(z, y) = \Delta_n \bar{z}\bar{y} Q_{n-1}(z, y) - P_n^*(z) \overline{P_n^*(y)} \quad (1.17)$$

fórmula, que en virtud de la relación (1.4) entre $Q_n(z, y)$ y $K_n(z, y)$, se transforma, una vez simplificada y normalizada, en

$$K_n(z, y) = \bar{z}\bar{y} K_{n-1}(z, y) + P_n^*(z) \overline{P_n^*(y)} \quad (S-0)$$

Como por definición $K_n(z, y) = K_{n-1}(z, y) + P_n(z) \overline{P_n(y)}$, si $\bar{z}\bar{y} \neq 1$, queda finalmente

$$K_{n-1}(z, y) = \frac{P_n^*(z) \overline{P_n^*(y)} - P_n(z) \overline{P_n(y)}}{1 - \bar{z}\bar{y}} \quad (S-1)$$

Añadiendo $P_n(z) \overline{P_n(y)}$ a los dos miembros de (S-1), resulta

$$K_n(z, y) = \frac{P_n^*(z) \overline{P_n^*(y)} - \bar{z}\bar{y} P_n(z) \overline{P_n(y)}}{1 - \bar{z}\bar{y}} \quad (S-2)$$

segunda expresión de la fórmula de sumación, válida igualmente para $\bar{z}\bar{y} \neq 1$.

Si $|z| \neq 1$, haciendo $y = z$ se tienen, respectivamente:

$$K_{n-1}(z, z) = \frac{|P_n^*(z)|^2 - |P_n(z)|^2}{1 - |z|^2} \quad (S'-1)$$

y

$$K_n(z, z) = \frac{|P_n^*(z)|^2 - |z|^2 |P_n(z)|^2}{1 - |z|^2} \quad (S'-2)$$

Análogamente a lo hecho en el apartado II y por el mismo motivo, llamaremos mixtas a las anteriores fórmulas de sumación. A partir de ellas pueden obtenerse, como casos particulares, algunas otras que tienen posterior interés. Así,

i) Si en (S-2) (ó en (S-0)) se toma $y = 0$ resulta:

$$K_n(z, 0) = \overline{P_n^*(0)} \cdot P_n^*(z) \quad (1.18)$$

o, lo que es lo mismo, según (1-14)

$$P_n^*(z) = \Delta_n K_n(z, 0). \quad (1.19)$$

ii) Por otra parte, si en (S-1) se hace $z = y = 0$ se tiene:

$$K_{n-1}(0, 0) = |P_n^*(0)|^2 - |P_n(0)|^2 \quad (1.20)$$

y, si en (1.18) hacemos $z = 0$, queda

$$K_n(0, 0) = |P_n^*(0)|^2 = \frac{1}{e_n} \quad (1.21)$$

De ambas expresiones se sigue, fácilmente, que:

$$|P_n(0)|^2 = \frac{1}{e_n} - \frac{1}{e_{n-1}} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} - \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}}, \quad (1.22)$$

que no es sino la (1.16) normalizada.

Finalizamos el estudio de estas cuestiones exponiendo algunas conclusiones, consecuencia directa de lo anterior, y de las que haremos uso en capítulos posteriores.

De la fórmula (1.22), se sigue que:

$$\frac{1}{e_n} - \frac{1}{e_{n-1}} = |P_n(0)|^2 \geq 0 \quad \forall n \in N,$$

es decir,

$$\frac{1}{e_n} \geq \frac{1}{e_{n-1}} \quad \forall n \in N$$

y, por consiguiente,

Proposición 1.4. — «La sucesión $\left\{ \frac{1}{e_n} \right\}_{n=0}^{\infty}$ es monótona no decreciente».

Dos consecuencias de esta proposición y del hecho de ser $e_n > 0 \forall n \in N$, surgen de manera inmediata:

Corolario 1.5. — «La sucesión $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ es monótona no creciente. Puesto que está acotada, dicha sucesión tiene límite no negativo».

Corolario 1.6. — «La sucesión de los coeficientes conductores de los polinomios normalizados $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ es monótona no decreciente».

Demostración. — En efecto, basta notar que el coeficiente conductor de $P_n(z)$ es $\frac{1}{\sqrt{e_n}}$. #

Nota a II y III. — En la introducción se ha exigido que la matriz inicial m fuese, además de hermitiana, definida positiva, es decir que todos sus menores principales Δ_n cumplieren la condición $\Delta_n > 0$. Ahora bien, en II y III al demostrar las fórmulas de recurrencia y sumación nos hemos basado únicamente en la propiedad A de los adjuntos de un determinante que es cierta siempre, independientemente del valor del mismo, y en el hecho de ser los menores principales, Δ_n , no nulos. Por consiguiente, las fórmulas que acabamos de probar seguirán siendo válidas aun cuando la matriz hermitiana dada m no sea definida positiva, siempre que los menores principales sean no nulos.

IV. Fórmulas simples de recurrencia

En el apartado II, hemos deducido cuatro fórmulas de recurrencia, llamadas mixtas. A continuación, obtendremos dos nuevas fórmulas de recurrencia, que denominaremos simples por relacionar, una de ellas sólo polinomios $P_n(z)$ y la otra, polinomios $P_n^*(z)$ exclusivamente.

Efectivamente, eliminando $P_{n-1}^*(z)$ entre $(R_N - 1)$ y $(R_N - 4)$ rebajada del orden n al $n - 1$, resulta

$$(R'_N - 1)$$

$$\sqrt{e_{n-2} e_n} P_{n-1}(0) P_n(z) - [\sqrt{e_{n-2} e_n} P_n(0) + \sqrt{e_{n-2} e_{n-1}} P_{n-1}(0) z] P_{n-1}(z) + \sqrt{e_{n-1} e_n} P_n(0) z P_{n-2}(z) = 0.$$

De forma análoga, si eliminamos $P_{n-1}(z)$ entre $(R_N - 2)$ y $(R_N - 3)$, rebajada esta última al orden $n - 1$, se tiene:

$(R'_N - 2)$

$$\sqrt{e_{n-2} e_n} \overline{P_{n-1}(0)} P_n^*(z) - [\sqrt{e_{n-2} e_{n-1}} \overline{P_{n-1}(0)} + \sqrt{e_{n-2} e_n} \overline{P_n(0)} z] P_{n-1}^*(z) + \sqrt{e_{n-1} e_n} \overline{P_n(0)} z P_{n-2}^*(z) = 0.$$

Las ecuaciones $(R'_N - 1)$ y $(R'_N - 2)$ relacionan en efecto $P_{n-2}(z)$, $P_{n-1}(z)$ y $P_n(z)$, la primera de ellas, y P_{n-2}^* , $P_{n-1}^*(z)$ y $P_n^*(z)$, la segunda.

V. Fórmulas simples de sumación

De manera similar, a partir de la fórmula de sumación mixta $(S - 1)$ y utilizando, respectivamente, las de recurrencia $(R_N - 4)$ y $(R_N - 3)$ se deducen dos fórmulas simples de sumación. En efecto, sustituyendo en $(S - 1)$ los valores de $P_n^*(z)$ y $\overline{P_n^*(y)}$ dados por $(R_N - 4)$, se tiene:

$$K_{n-1}(z, y) = \frac{\left(\frac{1}{e_n} - |P_n(0)|^2 \right) P_n(z) \overline{P_n(y)} - \frac{1}{\sqrt{e_{n-1} e_n}} [\overline{y} P_n(z) \overline{P_{n-1}(y)} + z P_{n-1}(z) \overline{P_n(y)}] + \frac{1}{e_{n-1}} z \overline{y} P_{n-1}(z) \overline{P_{n-1}(y)}}{|P_n(0)|^2 (1 - z \overline{y})}$$

Aplicando (1.22) y operando obtenemos finalmente la expresión buscada:

$(S_s - 1)$

$$K_{n-1}(z, y) = \frac{\sqrt{e_n} P_n(z) \overline{P_n(y)} - \sqrt{e_{n-1}} [\overline{y} P_n(z) \overline{P_{n-1}(y)} + z P_{n-1}(z) \overline{P_n(y)}] + \sqrt{e_n} z \overline{y} P_{n-1}(z) \overline{P_{n-1}(y)}}{e_{n-1} \sqrt{e_n} |P_n(0)|^2 (1 - z \overline{y})}$$

en la que, si $|z| \neq 1$, haciendo $y = z$ resulta:

$(S'_s - 1)$

$$K_{n-1}(z, z) = \frac{\sqrt{e_n} |P_n(z)|^2 - \sqrt{e_{n-1}} [\overline{z} P_n(z) \overline{P_{n-1}(z)} + z P_{n-1}(z) \overline{P_n(z)}] + \sqrt{e_n} |z|^2 |P_{n-1}(z)|^2}{e_{n-1} \sqrt{e_n} |P_n(0)|^2 (1 - |z|^2)}$$

Análogamente, si en $(S - 1)$ sustituimos $P_n(z)$ y $\overline{P_n(y)}$ por sus valores deducidos de $(R_N - 3)$, mediante un cálculo similar se obtiene:

$(S_s - 2)$

$$K_{n-1}(z, y) = \frac{\sqrt{e_n} P_n^*(z) \overline{P_n^*(y)} - \sqrt{e_{n-1}} [P_n^*(z) \overline{P_{n-1}^*(y)} + P_{n-1}^*(z) \overline{P_n^*(y)}] + \sqrt{e_n} P_{n-1}^*(z) \overline{P_{n-1}^*(y)}}{-e_{n-1} \sqrt{e_n} |P_n(0)|^2 (1 - z \overline{y})}$$

que, si $|z| \neq 1$ tomando $y = z$ se reduce a

$(S'_s - 2)$

$$K_{n-1}(z, z) = \frac{\sqrt{e_n} |P_n^*(z)|^2 - \sqrt{e_{n-1}} [P_n^*(z) \overline{P_{n-1}^*(z)} + P_{n-1}^*(z) \overline{P_n^*(z)}] + \sqrt{e_n} |P_{n-1}^*(z)|^2}{-e_{n-1} \sqrt{e_n} |P_n(0)|^2 (1 - |z|^2)}$$

CAPÍTULO II

LAS RAICES DE $P_n(z)$ y $K_n(z, y)$

Dedicamos este capítulo al estudio de algunas propiedades de las raíces de los polinomios $P_n(z)$, $P_n^*(z)$ y $K_n(z, y)$, todas ellas consecuencia más o menos inmediata de las fórmulas de recurrencia y de sumación. Nuevas propiedades serán obtenidas en capítulos posteriores, especialmente en el séptimo.

I. Ceros de $P_n(z)$ y $P_n^*(z)$

Proposición 2.1. — «Las raíces de $P_n^*(z)$ son inversas, respecto a la circunferencia unidad, de las raíces no nulas de $P_n(z)$, con los mismos órdenes de multiplicidad».

Demostración. — Es evidente, teniendo en cuenta (1.11). $\#\#$

Proposición 2.2. — «Los polinomios $P_n(z)$ y $P_n^*(z)$ no tienen raíces comunes».

Demostración. — Supongamos que existe α tal que $P_n(\alpha) = P_n^*(\alpha) = 0$. Entonces, dando a z el valor α en la fórmula (S-0) se tiene, para cualquier $y \in C$:

$$K_n(\alpha, y) = \overline{P_n(y)} P_n(\alpha) + K_{n-1}(\alpha, y) = \alpha \bar{y} K_{n-1}(\alpha, y) + P_n^*(\alpha) \overline{P_n^*(y)}$$

es decir,

$$K_{n-1}(\alpha, y) = \alpha \bar{y} K_{n-1}(\alpha, y).$$

Por consiguiente, se ha de verificar,

$$K_{n-1}(\alpha, y) = 0 \quad \forall y \in C \quad \text{ó} \quad 1 = \alpha \bar{y} \quad \forall y \in C.$$

y ambas situaciones son absurdas. $\#\#$

De estos dos resultados se sigue:

Corolario 2.3. — «Las raíces de $P_n(z)$, e igualmente las de $P_n^*(z)$, no pueden ser unimodulares».

Demostración. — Efectivamente, si fuese $P_n(\alpha) = 0$ con $|\alpha| = 1$, es decir $\alpha = \frac{1}{\bar{\alpha}}$, α sería también raíz de $P_n^*(z)$. $\#\#$

Corolario 2.4. — «Consideremos dos polinomios consecutivos $P_{n-1}(z)$ y $P_n(z)$ de la sucesión $\{P_n(z)\}_0^\infty$. Si el polinomio de mayor grado, $P_n(z)$, tiene una raíz nula, sus $n-1$ raíces restantes son las de $P_{n-1}(z)$. Caso contrario, es decir, si 0 no es raíz de $P_n(z)$, $P_n(z)$ y $P_{n-1}(z)$ no tienen ninguna raíz en común».

De otra manera,

$$P_n(0) = 0 \Rightarrow P_n(z) = e_{n-1} z P_{n-1}(z)$$

$$P_n(0) \neq 0 \Rightarrow \alpha \in C^* \text{ tal que } P_n(\alpha) = P_{n-1}(\alpha) = 0.$$

Demostración. — En efecto, si $P_n(0) = 0$, de (R-1) se sigue que

$$P_n(z) = e_{n-1} z P_{n-1}(z)$$

De lo contrario, supongamos que existe $\alpha \in C^*$ tal que $P_n(\alpha) = P_{n-1}(\alpha) = 0$. Haciendo $z = \alpha$ en (R-1), se tiene que $P_{n-1}^*(\alpha) = 0$, de donde, α es simultáneamente raíz de $P_{n-1}(z)$ y de $P_{n-1}^*(z)$ lo que contradice la proposición 2.2. $\#\#$

Un resultado similar se obtiene para los polinomios recíprocos:

Corolario 2.5. — «Dos polinomios consecutivos $P_{n-1}^*(z)$ y $P_n^*(z)$ de la sucesión $\{P_n^*(z)\}_0^\infty$, poseen las mismas raíces o no tienen ninguna en común, según que $P_n(z)$ posea o no la raíz nula, es decir, según que $P_n(0)$ sea igual o distinto de cero».

Demostración. — Si $P_n(0) = 0$, ya sabemos (Cap. I, Apartado I) que $P_n^*(z)$ es, a lo más, de grado $n-1$. Entonces, de $(R-2)$ ó $(R-3)$ se sigue que

$$P_n^*(z) = e_n P_{n-1}^*(z) = e_{n-1} P_{n-1}^*(z).$$

Si $P_n(0) \neq 0$, considerando $\alpha \in C$ de modo que se cumpla $P_n^*(\alpha) = P_{n-1}^*(\alpha) = 0$, para $z = \alpha$ se sigue de $(R-3)$, que $P_n(\alpha) = 0$, lo cual es absurdo. $\#$

Corolario 2.6. — «Si α es raíz de $P_n(z)$ entonces, $K_n(\alpha, 0) \neq 0$ ».

Demostración. — Basta, en efecto, tener presente la fórmula (1.19). $\#$

Proposición 2.7. — «Las raíces, α , de $P_n(z)$ son interiores al círculo unidad (por consiguiente $|\alpha| < 1$), y verifican la desigualdad de Schwarz:

$$|K_n(\alpha, 0)|^2 \leq K_n(\alpha, \alpha) \cdot K_n(0, 0). \quad (2.1)$$

Demostración. — Si en $(S'-2)$ tomamos $z = \alpha$, siendo $P_n(\alpha) = 0$, queda

$$K_n(\alpha, \alpha) = \frac{|P_n^*(\alpha)|^2}{1 - |\alpha|^2} \quad \text{o bien} \quad K_n(\alpha, \alpha) \Delta_n \Delta_{n-1} = \frac{|P_n^*(\alpha)|^2}{1 - |\alpha|^2}.$$

Teniendo presente (1.19) y (1.21) y operando se obtiene,

$$\frac{|K_n(\alpha, 0)|^2}{1 - |\alpha|^2} = K_n(\alpha, \alpha) \frac{1}{e_n} = K_n(\alpha, \alpha) K_n(0, 0)$$

es decir,

$$|\alpha|^2 = 1 - \frac{|K_n(\alpha, 0)|^2}{K_n(\alpha, \alpha) K_n(0, 0)} \quad (2.2)$$

siendo

$$\frac{|K_n(\alpha, 0)|^2}{K_n(\alpha, \alpha) K_n(0, 0)} > 0,$$

ya que $K_n(z, z) > 0 \forall z$ y $K_n(\alpha, 0) \neq 0$.

En consecuencia, tenemos

$$1 \geq \frac{|K_n(\alpha, 0)|^2}{K_n(\alpha, \alpha) K_n(0, 0)} > 0,$$

luego, hemos obtenido simultáneamente,

$$\begin{cases} 0 \leq |\alpha| < 1 \\ |K_n(\alpha, 0)|^2 \leq K_n(\alpha, \alpha) \cdot K_n(0, 0). \end{cases}$$

Además, se deduce de (2.2), que el signo igual es válido en la desigualdad de Schwarz sí y sólo si $\alpha = 0$. $\#$

La fórmula (2.2), escrita en la forma

$$|\alpha|^2 + \frac{|K_n(\alpha, 0)|^2}{K_n(\alpha, \alpha) K_n(0, 0)} = 1,$$

proporciona el significado de la desigualdad de Schwarz en relación con el módulo de cada raíz de $P_n(z)$, pues si hacemos $|\alpha| = \cos \varphi$,

$$\sqrt{\frac{|K_n(\alpha, 0)|^2}{K_n(\alpha, \alpha) K_n(0, 0)}} = \operatorname{sen} \varphi$$

Por otra parte, dado un número real ε con $0 < \varepsilon < 1$, si $|\alpha| > \varepsilon$ resulta

$$\frac{|K_n(\alpha, 0)|^2}{K_n(\alpha, \alpha) K_n(0, 0)} < 1 - \varepsilon^2$$

Su interpretación, utilizando lenguaje geométrico, es sencilla: el cociente

$$\frac{|K_n(\alpha, 0)|^2}{K_n(\alpha, \alpha) K_n(0, 0)}$$

es una medida de la distancia de α a U ; a valores decrecientes de dicho cociente, corresponden raíces que se aproximan a U .

Corolario 2.8. — «Las raíces de $P_n^*(z)$ son exteriores al círculo unidad».

Demostración. — Es consecuencia inmediata de las proposiciones (2-1) y (2-7). $\#\#$

Este resultado es equivalente al enunciado en la proposición 2.7 relativo a las raíces de $P_n(z)$, puesto que si $P_n(\alpha) = 0$, se tiene $P_n^*\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$.

Además, si llamamos α^* a la raíz de $P_n^*(z)$ inversa de α respecto de U ,

$$|\alpha^*|^2 = \left|\frac{1}{\alpha}\right|^2 = \frac{1}{|\alpha|^2} = \frac{1}{1 - \frac{|K_n(\alpha, 0)|^2}{K_n(\alpha, \alpha) K_n(0, 0)}}$$

y, como en el caso anterior, el cociente $\frac{|K_n(\alpha, 0)|^2}{K_n(\alpha, \alpha) K_n(0, 0)}$ mide, en cierto modo, la distancia de $|\alpha^*|$ a la circunferencia unidad, teniendo en cuenta ahora que, a valores decrecientes de $\frac{|K_n(\alpha, 0)|^2}{K_n(\alpha, \alpha) K_n(0, 0)}$, corresponden valores de $|\alpha^*|$ que se aproximan a 1.

Nota. — Son conocidas las demostraciones clásicas (véase Szegő [10], Geronimus [7], Freud [5]) de que si $P_n(\alpha) = 0$, se tiene $|\alpha| < 1$ y si $P_n^*(\alpha) = 0$ es $|\alpha| > 1$, que suelen obtenerse a partir de alguna de las fórmulas de sumación (habitualmente, de la designada por $(S'-1)$ en esta memoria), considerando alternativamente, α raíz de $P_n(z)$ o de $P_n^*(z)$.

El camino aquí seguido para el estudio de estas cuestiones es, evidentemente, otro. Hemos llegado a los resultados antes citados de la teoría clásica, con la ventaja de que la desigualdad de Schwarz permite precisar algo más, acerca de la situación de las raíces de $P_n(z)$ y de $P_n^*(z)$ respecto de la circunferencia unidad.

Teniendo en cuenta en $(S'-1)$ que $K_{n-1}(z, z) > 0 \forall z \in C$ se obtiene:

$$1) \text{ si } |z| < 1, \quad |P_n(z)| < |P_n^*(z)| \tag{2.3}$$

$$2) \text{ si } |z| > 1, \quad |P_n(z)| > |P_n^*(z)| \tag{2.4}$$

$$3) \text{ si } |z| = 1, \quad |P_n(z)| = |P_n^*(z)| \tag{2.5}$$

En el caso 3), en $(S' - 1)$ aparece una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Su estudio suministra alguna información adicional para valores de $|z|$ próximos a la unidad.

En efecto, descompuesto el núcleo en la forma

$$K_{n-1}(z, z) = \frac{|P_n^*(z)| + |P_n(z)|}{1 + |z|} \cdot \frac{|P_n^*(z)| - |P_n(z)|}{1 - |z|}, \quad (2.6)$$

si suponemos $|\beta| = 1$

$$\lim_{z \rightarrow \beta} K_{n-1}(z, z) = K_{n-1}(\beta, \beta) = |P_n(\beta)| \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{|P_n^*(z)| - |P_n(z)|}{1 - |z|},$$

resultando,

$$\lim_{z \rightarrow \beta} \frac{|P_n^*(z)| - |P_n(z)|}{1 - |z|} = \frac{K_{n-1}(\beta, \beta)}{|P_n(\beta)|}. \quad (2.7)$$

Utilizado la notación de Landau, podemos escribir

$$|P_n^*(z)| = |P_n(z)| + \frac{K_{n-1}(\beta, \beta)}{|P_n(\beta)|} \cdot (1 - |z|) + o(1) \cdot (1 - |z|) \quad (2.8)$$

cuando $z \rightarrow \beta$.

Esta fórmula, válida en general, expresa la diferencia entre $|P_n^*(z)|$ y $|P_n(z)|$ y es en especial importante, evidentemente, en el caso particular de valores de $|z|$ próximos a 1.

II. Ceros de $K_{n-1}(z, y)$

Fijado $y \in C$, sea α un cero de $K_{n-1}(z, y)$; evidentemente, será $\alpha \neq y$, puesto que $K_{n-1}(\alpha, \alpha) > 0$. El hecho de ser α un cero de $K_{n-1}(z, y)$, se traduce en $(S - 1)$ en que

$$P_n^*(\alpha) \cdot \overline{P_n^*(y)} = P_n(\alpha) \cdot \overline{P_n(y)}$$

Si y es raíz de $P_n^*(z) = 0$ (con lo que $|y| > 1$), forzosamente ha de ser $P_n(\alpha) = 0$, luego $|\alpha| < 1$.

Si $P_n^*(y) \neq 0$, podemos escribir

$$|P_n^*(\alpha)| = |P_n(\alpha)| \cdot \left| \frac{P_n(y)}{P_n^*(y)} \right|$$

de donde, según (2.3), (2.4) y (2.5):

- 1) $|y| < 1 \Rightarrow |P_n^*(y)| > |P_n(y)| \Rightarrow |P_n^*(\alpha)| < |P_n(\alpha)| \Rightarrow |\alpha| > 1$,
- 2) De forma similar, si $|y| > 1$ se tiene $|\alpha| < 1$, resultado que coincide con el obtenido cuando y es cero de $P_n^*(z)$.
- 3) Si $|y| = 1$ se tiene que $|\alpha| = 1$.

Se puede pues enunciar:

Proposición 2.9. — «Las raíces de $K_{n-1}(z, y) = 0$, supuesto $y \in C$ fijo, son todas exteriores al círculo unidad, si $|y| < 1$; cuando $|y| > 1$ son todas interiores y son unimodulares, si $|y| = 1$ ».

Ya sabemos que en el caso particular $y = 0$ resulta $K_{n-1}(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{e_{n-1}}} \cdot P_{n-1}^*(z)$

y entonces, las raíces de $K_{n-1}(z, y)$ son las de $P_{n-1}^*(z)$. Fácilmente se sigue de (S-2) que 0 es raíz de $K_n(z, y)$ si y sólo si y es raíz de $P_n^*(y)$, esto es, $K_n(0, y) = 0 \Leftrightarrow P_n^*(y) = 0$.

Nota. — Desde un punto de vista intuitivo, teniendo en cuenta el teorema clásico de la continuidad de las raíces, podría decirse que si $|y| = 0$ las raíces de $K_{n-1}(z, 0) = 0$ son las de $P_{n-1}^*(z)$, si $|y|$ crece de 0 a 1 las raíces se desplazan hasta situarse en la circunferencia unidad y si $|y|$ sigue creciendo, tendiendo a $+\infty$, las raíces de $K_{n-1}(z, y) = 0$ tienden a las de $P_{n-1}(z)$. (Obsérvese que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}(z, y)}{P_{n-1}(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sum_{h=0}^{n-2} P_h(z) \overline{P_h(y)}}{P_{n-1}(y)} + P_{n-1}(z) = P_{n-1}(z).$$

III. Segmento finito de polinomios ortogonales

Nos proponemos estudiar en qué condiciones, dado un polinomio de grado n en C , es posible construir una sucesión de *PO* sobre U cuyo término n -ésimo sea precisamente el polinomio dado. Nos limitaremos en este capítulo a abordar la primera parte del problema, concretamente, a la construcción de un segmento de *PO* $\{P_h(z)\}_{h=0}^n$, en el cual $P_n(z)$ es el polinomio dado inicialmente. Más adelante, veremos, que se puede prolongar el segmento obtenido de infinitas maneras, para construir la sucesión $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ citada en un principio.

Es conocido el hecho de que dada una sucesión cualquiera $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios en C , de grado igual a su subíndice y coeficiente conductor positivo, existe una única matriz infinita m , *HDP*, que define en Π un producto escalar respecto del cual $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ es la correspondiente sucesión de *PO* (véase [14]) y que de ella puede deducirse la sucesión $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortonormalizados asociada.

En particular, a cada segmento $\{P_h(z)\}_{h=0}^n$ de la sucesión dada, se podrá asociar de manera única una matriz $(n+1) \times (n+1)$, *HDP* (menor principal de orden $n+1$ de m). Queda entonces definido en Π_n un producto escalar (restricción del definido en Π) respecto del cual el segmento $\{P_h(z)\}_{h=0}^n$ es de polinomios ortogonales.

En el caso en que la matriz m sea además de Toeplitz, son válidas las fórmulas de recurrencia del cap. I, y la construcción de un segmento de *PO* relativos a dicha matriz, puede hacerse a partir de su término n -ésimo, de la manera siguiente:

Sea $P_n(z)$ un polinomio de grado n , con coeficiente conductor Δ_{n-1} positivo y raíces de módulo menor que la unidad. Puesto que se conocen $P_n(0)$ y $P_n^*(z)$, dado un $\Delta_n > 0$, de la fórmula (R-4) se obtiene inmediatamente $P_{n-1}(z)$; su coeficiente conductor es positivo, como se sigue de (R-4) comparando los términos en z^n y teniendo presente (1.16), y sus raíces son de módulo menor que la unidad ya que, si α es una de ellas, haciendo $z = \alpha$ en (R-4) resulta, $\Delta_{n-1} P_n(\alpha) = P_n(0) P_n^*(\alpha)$ de donde

$$\left| \frac{P_n(\alpha)}{P_n^*(\alpha)} \right| = \frac{|P_n(0)|}{\Delta_{n-1}} < 1$$

y según (2.3) se tiene $|\alpha| < 1$. Reiterando el proceso para n decreciente, resulta un segmento $\{P_h(z)\}_{h=0}^n$ de *PO* relativos a una matriz *HDP* de Toeplitz, en el cual el término n -ésimo es precisamente el polinomio dado. Podemos, pues enunciar:

Proposición 2.10. — «Dado un número real $\Delta_n > 0$ y un polinomio en C de grado n , con coeficiente conductor positivo y raíces de módulo menor que la unidad, existe un segmento $\{P_h(z)\}_{h=0}^n$ de *PO* relativos a una matriz de Toeplitz cuyo n -ésimo polinomio es el dado».

Más aún, en virtud de (R_n-4), todo polinomio de grado n con coeficiente conductor positivo y raíces de módulo menor que la unidad, puede considerarse como el n -ésimo

polinomio ortonormal de un segmento $\{P_n(z)\}_{n=0}^n$ pues conocido el $P_n(z)$ dado, se obtienen a partir de él: $\frac{1}{\sqrt{e_n}}$, que es su coeficiente conductor, $P_n(0)$, $P_n^*(z)$ e incluso $\frac{1}{\sqrt{e_{n-1}}}$, mediante la conocida relación (1.22).

En resumen,

Proposición 2.11.—«Dados n números complejos $\{\alpha_{in}\}_{i=1}^n$ tales que $|\alpha_{in}| < 1$, $i=1, 2, \dots, n$, existen sucesiones de *PO* relativas a una matriz de Toeplitz, cuyo n -ésimo polinomio tiene como raíces los α_{in} dados».

Obsérvese que, a diferencia de lo que ocurre en los *PO* relativos a R , en este caso las raíces no tienen por qué ser necesariamente simples.

CAPÍTULO III

EQUIVALENCIA ENTRE LAS RELACIONES FUNDAMENTALES

Recordemos de nuevo (véase [14]) que dada una sucesión $\{P_n(z)\}_0^\infty$ de polinomios de grado igual a su subíndice, y coeficiente conductor positivo siempre existe un producto escalar en el espacio vectorial Π respecto del cual la sucesión anterior sea de *PO*. Llamemos σ a $\{P_n(z)\}_0^\infty$ en estas condiciones.

Se pretende en este capítulo demostrar la equivalencia entre las fórmulas de sumación, las de recurrencia y la propiedad característica (1.10) de una sucesión de *PO* relativos a una matriz de Toeplitz. Previamente, establecemos algunas definiciones.

Definición 3.1. — «Se dirá que una sucesión σ pertenece a la clase $[T]$ si está definida por una matriz *HDP* de Toeplitz».

Definición 3.2. — «Llamaremos de clase $[P]$ a toda sucesión σ a partir de la cual se defina un producto escalar cumpliendo la propiedad:

$$z P(z) \circ z Q(z) = P(z) \circ Q(z)$$

para cada par $P(z)$, $Q(z)$ de Π ».

Definición 3.3. — «Denominaremos de clase $[R]$ a toda sucesión σ definida por recurrencia, que satisfaga las relaciones $(R-1)$, $(R-2)$, $(R-3)$ y $(R-4)$ (o sus equivalentes normalizadas (R_N-1) , (R_N-2) , (R_N-3) y (R_N-4))».

Definición 3.4. — «Diremos que una sucesión σ es de clase $[S]$ si sus n -núcleos satisfacen $(S-1)$ (o su equivalente $(S-2)$)».

Proposición 3.5. — «Las expresiones $(R-1)$, $(R-2)$, $(R-3)$ y $(R-4)$ son equivalentes».

Demostración. — En el apartado II del capítulo I se obtuvieron $(R-3)$ y $(R-4)$ a partir de $(R-1)$ y $(R-2)$. Es inmediato que, recíprocamente $(R-1)$ y $(R-2)$ son consecuencia de $(R-3)$ y $(R-4)$. Veamos además que $(R-2)$ puede deducirse de $(R-1)$ (de manera análoga resultaría $(R-1)$ de $(R-2)$). En efecto, si en $(R-1)$ sustituimos z por $\frac{1}{\bar{z}}$, posteriormente tomamos conjugados y, por último, multiplicamos por z^n , resulta:

$$\Delta_{n-2} z^n \bar{P}_n \left(\frac{1}{z} \right) = \Delta_{n-1} z^{n-1} \bar{P}_{n-1} \left(\frac{1}{z} \right) + \bar{P}_n(0) z^n \bar{P}_{n-1}^* \left(\frac{1}{z} \right).$$

Haciendo uso de la fórmula (1.11) y de $z^n \overline{P_n^*} \left(\frac{1}{z} \right) = P_n(z)$, consecuencia inmediata de ella, se tiene:

$$\Delta_{n-2} P_n^*(z) = \Delta_{n-1} P_{n-1}^*(z) + \overline{P_n(0)} z P_{n-1}(z)$$

que es precisamente $(R-2)$.

De la misma forma se prueba la equivalencia de $(R-3)$ y $(R-4)$. \ddagger

En conclusión, podemos sustituir la definición 3-3 por:

Definición 3.3 (bis). — «Denominaremos de clase $[R]$ a toda sucesión σ que cumpla $(R-1)$ o su equivalente normalizada (R_N-1) ».

Nota. — Ya se expuso en el prólogo, que en la literatura usual se obtienen, de ordinario, solamente dos de las fórmulas de recurrencia, así por ejemplo Szegő en [14], deduce las (R_N-1) , (R_N-4) e indirectamente la (R_N-2) , Geronimus en [7], las (R_N-1) y (R_N-2) y Freud en [5], las (R_N-3) y (R_N-4) ; sin embargo, ninguno de estos autores expone el cuadro completo formado por las cuatro, así como tampoco hacen referencia explícita a la equivalencia existente entre todas ellas. Respecto a este último punto, únicamente en [5] queda probada la equivalencia entre (R_N-3) y (R_N-4) , mientras que en [10], resulta (R_N-4) a partir de (R_N-1) y (R_N-2) .

Demostraremos a continuación:

Teorema 3.6. — «Las clases $[T]$, $[P]$, $[R]$ y $[S]$ son coincidentes en el sentido de que si una sucesión σ pertenece a una de las cuatro clases, pertenece a las otras tres».

Demostración:

i) En el capítulo I ya se ha demostrado que $[T] \equiv [P]$.

ii) En la obtención de las fórmulas de recurrencia y de sumación en el capítulo I, se han seguido procedimientos independientes, sin embargo, en la teoría clásica (véase [7], págs. 3 y 4) las segundas son consecuencia de las primeras. Es decir $[R] \Rightarrow [S]$. Veamos ahora que $[S] \Rightarrow [R]$.

Partimos de $(S-2)$ (análogamente se haría utilizando $(S-1)$), escrita para dos subíndices consecutivos n y $n-1$.

Restando y simplificando, se tiene:

$$P_n(z) \overline{P_n(y)} = P_n^*(z) \overline{P_n^*(y)} - P_{n-1}^*(z) \overline{P_{n-1}^*(y)} + z\overline{y} P_{n-1}(z) \overline{P_{n-1}(y)} \quad (3.1)$$

que para $y = 0$, da:

$$\overline{P_n(0)} P_n(z) = \overline{P_n^*(0)} P_n^*(z) - \overline{P_{n-1}^*(0)} P_{n-1}^*(z)$$

que es la fórmula (R_N-3) , si se tiene en cuenta que $P_n^*(0) = \frac{1}{\sqrt{e_n}}$.

Obsérvese que si en (3.1) igualamos los coeficientes de $\overline{y^n}$ se obtiene (R_N-4) .

(En [10], se deduce (R_N-4) directamente a partir de $(S-1)$, por identificación de los coeficientes de $\overline{y^n}$).

Así pues, por la equivalencia de (R_N-3) y (R_N-4) a (R_N-1) y (R_N-2) resulta que $[S] \Rightarrow [R]$ y queda establecido que

$$[S] \equiv [R]$$

iii) Del método empleado para obtener las fórmulas de recurrencia a partir de la matriz *HDP* de Toeplitz, resulta, evidentemente, que $[T] \Rightarrow [R]$.

iv) Veamos finalmente que $[R] \Rightarrow [P]$.

Sea $Q(z)$ un polinomio de grado menor o igual que n . Multiplicando escalarmente los dos miembros de (1.19) por $Q(z)$ resulta:

$$P_n^*(z) \circ Q(z) = \Delta_n K_n(z, 0) \circ Q(z) = \Delta_n \overline{Q(0)} \quad (3.2)$$

(véase [11], pág. 23).

(Incidentalmente, hemos obtenido que

$$P_n^*(z) \circ P_h^*(z) = \Delta_n K_n(z, 0) \circ P_h^*(z) = \Delta_n \overline{P_h^*(0)} = \Delta_n \Delta_{h-1}; \quad h \leq n).$$

Supongamos que grado $Q(z) < n$. Se tiene a partir de $(R-1)$

$$\Delta_{n-2} P_n(z) \circ Q(z) = 0 = \Delta_{n-1} z P_{n-1}(z) \circ Q(z) + P_n(0) \Delta_{n-1} K_{n-1}(z, 0) \circ Q(z),$$

es decir,

$$z P_{n-1}(z) \circ Q(z) = -P_n(0) \overline{Q(0)} \quad (3.3)$$

En particular, si $Q(0) = 0$

$$z P_{n-1}(z) \circ Q(z) = K_{n-1}(z, 0) \circ Q(z) = 0. \quad (3.4)$$

Tomemos $Q(z) = z P_h(z)$. Habrá que considerar por separado dos casos:

1.º Sea $h \leq n-2$.

De la fórmula (3.4) se obtiene:

$$z P_{n-1}(z) \circ z P_h(z) = 0 \quad (3.5)$$

luego

$$z P_{n-1}(z) \circ z P_h(z) = P_{n-1}(z) \circ P_h(z).$$

2.º Sea $h = n-1$.

En este caso no es válido el proceso anterior.

Calculando directamente:

$$\Delta_{n-2} P_n(z) \circ z P_{n-1}(z) = \Delta_{n-1} z P_{n-1}(z) \circ z P_{n-1}(z) + P_n(0) \Delta_{n-1} K_{n-1}(z, 0) \circ z P_{n-1}(z). \quad (3.6)$$

Ahora bien:

a) Es inmediato que, $P_n(z) \circ z P_{n-1}(z) = \Delta_n \Delta_{n-2}$

b) En [11], pág. 24 se establece que

$$K_{n-1}(z, y) \circ z^n = y^n - \frac{\overline{P_n(y)}}{\Delta_{n-1}}$$

que, para $y = 0$, da:

$$K_{n-1}(z, 0) \circ z^n = -\frac{\overline{P_n(0)}}{\Delta_{n-1}}.$$

Teniendo en cuenta a) y b) queda en (3.6)

$$\begin{aligned} \Delta_n \Delta_{n-2} &= \Delta_{n-1} z P_{n-1}(z) \circ z P_{n-1}(z) + P_n(0) \Delta_{n-1} \Delta_{n-2} \frac{-\overline{P_n(0)}}{\Delta_{n-1}} = \\ &= \Delta_{n-1} z P_{n-1}(z) \circ z P_{n-1}(z) - \Delta_{n-2} |P_n(0)|^2 \\ &= \Delta_{n-1} z P_{n-1}(z) \circ z P_{n-1}(z) - \Delta_{n-2} (\Delta_{n-1}^2 - \Delta_n \Delta_{n-2}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

puesto que, recordando (3.4),

$$K_{n-1}(z, 0) \circ z P_{n-1}(z) = K_{n-1}(z, 0) \circ \Delta_{n-2} z^n + K_{n-1}(z, 0) \circ z Q(z) = K_{n-1}(z, 0) \circ \Delta_{n-2} z^n$$

siendo $Q(z)$ un polinomio de grado $n-2$.

Finalmente, si en (3.7) sustituimos $|P_n(0)|^2$ por su valor dado por (1.16) se tiene:

$$\Delta_n \Delta_{n-2}^2 = \Delta_{n-1} z P_{n-1}(z) \circ z P_{n-1}(z) - \Delta_{n-2} (\Delta_{n-1}^2 - \Delta_n \Delta_{n-2})$$

o sea,

$$z P_{n-1}(z) \circ z P_{n-1}(z) = \Delta_{n-1} \Delta_{n-2};$$

ahora bien,

$$P_{n-1}(z) \circ P_{n-1}(z) = \Delta_{n-1} \Delta_{n-2}$$

y por tanto,

$$z P_{n-1}(z) \circ z P_{n-1}(z) = P_{n-1}(z) \circ P_{n-1}(z).$$

Así ha quedado establecida la propiedad [P] para los PO $\{P_n(z)\}$ de la base. La validez de tal propiedad para polinomios cualesquiera se prueba, fácilmente, basándose en las propiedades del producto escalar y la ortogonalidad de la familia $\{z P_n(z)\}$, ya demostrada (véase (3.5)).

Por consiguiente,

$$[R] \Rightarrow [P].$$

Podía haberse procedido análogamente, por ejemplo, a partir de $(R-2)$.

Hemos conseguido pues, completar el esquema

$$\begin{array}{c} [T] \\ \Downarrow \swarrow \\ \Downarrow \searrow \\ [R] \Leftrightarrow [S] \\ \Downarrow \swarrow \\ [P] \end{array}$$

con el que queda demostrado el teorema. $\#$

CAPÍTULO IV

EL OPERADOR $*n$

I. Definición y propiedades

En el espacio vectorial de dimensión $n+1$, Π_n , de los polinomios sobre C de grado menor o igual que n , definimos un operador que indicaremos con la notación $*n$.

$$*n : \Pi_n \rightarrow \Pi_n,$$

que hace corresponder a cada $P(z)$ un $P(z)^{*n}$ dado por:

$$P(z)^{*n} = z^n \bar{P} \left(\frac{1}{z} \right) \tag{4.1}$$

Si $P(z) = \sum_{h=0}^n a_h z^h$, resulta $P(z)^{*n} = \sum_{h=0}^n \overline{a_{n-h}} z^h$ por lo que si $\alpha \neq 0$ es raíz de $P(z)$, $\frac{1}{\alpha}$ lo es de $P(z)^{*n}$.

Obsérvese que, en particular, $P_n(z)^{*n}$ coincide con el polinomio recíproco $P_n^*(z)$ definido en (1.11), por lo que cuando el operador actúe sobre el polinomio de la sucesión $\{P_n(z)\}_0^\infty$ que tiene grado igual al índice del operador, suprimiremos el superíndice n , es decir, usaremos la notación $P_n^*(z)$ en vez de $P_n(z)^{*n}$. Análogamente y por la misma razón, hablaremos de $P_n^*(z)$ en vez de $P_n(z)^{*n}$.

Estudiaremos a continuación las propiedades más importantes del operador $*n$, alguna de las cuales son consecuencia inmediata de la definición.

i) El operador $*n$ es una biyección de Π_n sobre Π_n , que, transforma bases en bases.

ii) Sea $P(z)$ un polinomio de Π_n ; si $\text{grado } P(z) = m < n$, $P(z)^{*n}$ tiene la raíz nula múltiple de orden $n - m$. Recíprocamente, si $P(z)$ tiene la raíz cero múltiple de orden q , $P(z)^{*n}$ es de grado $n - q$, como se sigue fácilmente de la definición (4.1).

Como casos particulares interesantes, cabe citar:

$$1^{*n} = z^n \quad \forall n \in N, \quad (4.2)$$

$$(z^h)^{*n} = z^{n-h} \quad \text{con } n \geq h, \quad (4.3)$$

y

$$(z^n)^{*n} = 1 \quad \forall n \in N. \quad (4.4)$$

iii) *Propiedad involutiva.*

$$[P(z)^{*n}]^{*n} = P(z), \text{ evidentemente.} \quad (4.5)$$

iv) *Propiedad semilineal.* — El operador $*n$ es semilineal, es decir verifica

$$[\alpha P(z) + \beta Q(z)]^{*n} = \bar{\alpha} P(z)^{*n} + \bar{\beta} Q(z)^{*n} \quad (4.6)$$

donde $P(z)$, $Q(z)$ son elementos arbitrarios de Π_n y α , β números complejos cualesquiera.

v) *Propiedad del producto ordinario.* — Sean $P(z)$, $Q(z)$ dos polinomios con grados respectivos p y q y consideremos tres números naturales r , s , n tales que $r \geq p$, $s \geq q$, $n \geq p + q$. Entonces, se verifica

$$z^{r+s} [P(z) \cdot Q(z)]^{*n} = z^n P(z)^{*r} \cdot Q(z)^{*s}. \quad (4.7)$$

Efectivamente:

$$z^{r+s} [P(z) \cdot Q(z)]^{*n} = z^{r+s} z^n \bar{P} \left(\frac{1}{z} \right) \cdot \bar{Q} \left(\frac{1}{z} \right) = z^n P(z)^{*r} Q(z)^{*s}.$$

Si en particular, $r = s = n$ se tiene

$$z^n [P(z) \cdot Q(z)]^{*n} = P(z)^{*n} \cdot Q(z)^{*n}. \quad (4.8)$$

vi) *Relación entre operadores $*n$ y $*m$.* — Dados dos números naturales distintos n y m , y un polinomio $P(z)$ tal que $\text{grad } P(z) \leq \min(n, m)$ se cumple

$$P(z)^{*n} = z^{n-m} \cdot P(z)^{*m} \quad \text{si } n > m. \quad (4.9)$$

Este resultado se obtiene directamente del apartado anterior tomando $Q(z) = 1$; entonces, según (4.2),

$$z^{r+s} P(z)^{*n} = z^n P(z)^{*r} \cdot z^s$$

y haciendo $r = m$ se llega a la fórmula (4.9).

También se podía haber obtenido a partir de (4.1), considerando

$$P(z)^{*m} = z^m \bar{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$P(z)^{*n} = z^n \bar{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

de donde, se sigue

$$z^m P(z)^{*n} = z^n P(z)^{*m}. \quad (4.10)$$

vii) El endomorfismo de conjugación es conmutativo con el operador *n o sea,

$$\overline{P(z)^{*n}} = \overline{P(z)}^{\ast n} \quad (4.11)$$

En efecto:

$$\overline{P(z)^{*n}} = z^n \overline{\bar{P}\left(\frac{1}{z}\right)} = \bar{z}^n P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \overline{P(z)}^{\ast n}$$

viii) *Propiedad del producto escalar.* — Dados dos números naturales, n, m y dos polinomios $P(z), Q(z)$ tales que grado $P(z) \leq n$ y grado $Q(z) \leq m$, se verifica:

$$P(z)^{\ast n} \circ Q(z)^{\ast m} = z^{n-m} Q(z) \circ P(z) \quad \text{si } n \geq m \quad (4.12)$$

$$P(z)^{\ast n} \circ Q(z)^{\ast m} = Q(z) \circ z^{m-n} P(z) \quad \text{si } n \leq m. \quad (4.13)$$

Efectivamente, consideremos $n \geq m$ y sean $i \leq n, j \leq m$; entonces, por la fórmula (4.3) y la propiedad característica (1.7) del producto escalar,

$$(az^i)^{\ast n} \circ (bz^j)^{\ast m} = \bar{a}z^{n-i} \circ \bar{b}z^{m-j} = \bar{a}z^{n-m} z^i \circ \bar{b}z^j = z^{n-m} (bz^j) \circ (az^i)$$

para todo par de números complejos a, b .

Por (4.6) y la linealidad del producto escalar, podemos escribir

$$P(z)^{\ast n} \circ Q(z)^{\ast m} = z^{n-m} Q(z) \circ P(z)$$

Si $n \leq m$, puede repetirse el proceso anterior o bien directamente,

$$P(z)^{\ast n} \circ Q(z)^{\ast m} = \overline{Q(z)^{\ast m} \circ P(z)^{\ast n}} = \overline{z^{m-n} P(z) \circ Q(z)} = Q(z) \circ z^{m-n} P(z).$$

Mención especial merece el caso $m = n$ común a las expresiones (4.12) y (4.13) anteriores. Entonces, tenemos,

Corolario 4.1. — «Se verifica:

$$P(z)^{\ast n} \circ Q(z)^{\ast n} = Q(z) \circ P(z).» \quad (4.14)$$

Corolario 4.2. — «En las mismas condiciones de la propiedad viii) se tienen:

$$P(z)^{\ast n} \circ Q(z) = z^{n-m} Q(z)^{\ast m} \circ P(z) \quad \text{si } n \geq m \quad (4.15)$$

$$P(z)^{\ast n} \circ Q(z) = Q(z)^{\ast m} \circ z^{m-n} P(z) \quad \text{si } n \leq m.» \quad (4.16)$$

Demostración. — Son consecuencia inmediata de (4.12) y (4.13) al considerar que

$$[Q(z)^{\ast m}]^{\ast m} = Q(z). \quad \#$$

En el caso particular $n = m$, ambas expresiones se reducen a

$$P(z)^{*n} \circ Q(z) = Q(z)^{*n} \circ P(z), \quad (4.17)$$

que es equivalente a (4.14), según (4.5).

ix) *Propiedad de isometría.* — Si en (4.14) tomamos $Q(z) = P(z)$, resulta

$$P(z)^{*n} \circ P(z)^{*n} = P(z) \circ P(z) \quad (4.18)$$

o sea

$$\|P(z)^{*n}\| = \|P(z)\|. \quad (4.19)$$

Así pues, el operador $*n$ conserva las normas, es decir, es isométrico.

Un caso particular interesante se presenta cuando se considera el término n -ésimo de la sucesión de PO ; entonces, se tiene

$$\|P_n^*(z)\| = \|P_n(z)\| = \sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}} \quad (4.20)$$

y, por consiguiente, la sucesión $\{P_n^*(z)\}$ definida en (1.13) está normalizada, lo que justifica la notación allí utilizada.

x) *Propiedad de ortogonalidad.* — Si $P(z)$, $Q(z)$ pertenecen a Π_n se verifica

$$P(z) \circ Q(z) = 0 \Rightarrow P(z)^{*n} \circ Q(z)^{*n} = 0.$$

La importancia de esta propiedad radica en:

xi) *Propiedad de la base.* — Para cada número natural n , el segmento $\{P_i(z)\}_{i=0}^n$ de la sucesión definida por (1.2) es una base ortogonal del espacio correspondiente Π_n , que en lo sucesivo llamaremos base B_n . Aplicándole el operador $*n$ y teniendo en cuenta x) se tiene que

$$z^n P_0^*(z), z^{n-1} P_1^*(z), \dots, z P_{n-1}^*(z), P_n^*(z)$$

es otra base ortogonal de Π_n , que designaremos base B_n^* .

Además, el segmento $\{P_i(z)\}_{i=0}^n$ es una base ortonormal de Π_n (base $B_n^{(0)}$); luego también

$$z^n P_0^*(z), z^{n-1} P_1^*(z) \dots, z P_{n-1}^*(z), P_n^*(z)$$

será base ortonormal de Π_n (base $B_n^{(n)}$).

xiii) Consideremos un polinomio $P(z)$ de grado $q \leq n$, $P(z) = \sum_0^q a_h P_h(z)$, entonces por iv) y vi)

$$P(z)^{*n} = \sum_{h=0}^q \bar{a}_h P_h(z)^{*n} = \sum_{h=0}^q \bar{a}_h z^{n-h} P_h^*(z) \quad (4.21)$$

que es el desarrollo del polinomio $P(z)^{*n}$ en la base B_n^* .

Recíprocamente, dado un polinomio $Q(z)$ de grado $m \leq n$, desarrollado en la base B_n^*

$$Q(z) = \sum_{h=0}^m b_h z^{n-h} P_h^*(z),$$

el desarrollo de $Q(z)^{*n}$ en la base B_n será

$$Q(z)^{*n} = \sum_{h=0}^m \bar{b}_h P_h(z).$$

Como casos particulares interesantes de (4.21), pueden citarse:

$$P_n(z)^{*n} = P_n^*(z)$$

y

$$P_m(z)^{*n} = z^{n-m} P_m^*(z), \quad (4.22)$$

caso particular de (4.9).

Análogamente, se puede repetir el proceso con los desarrollos respecto de las bases $B_n^{(o)}$ y $B_n^{(n)}$.

xiii) Teniendo en cuenta que $\Delta_n K_n(z, 0) = P_n^*(z)$ (fórmula (1.19)) se puede escribir

$$P_n^*(z) = \Delta_n \sum_0^n \overline{P_h(0)} P_h(z)$$

o lo que es equivalente,

$$P_n^*(z) = \sqrt{e_n} \sum_0^n \overline{P_h(0)} P_h(z)$$

que son los desarrollos de $P_n^*(z)$ y $P_n^*(z)$ en la base $B_n^{(o)}$. Aplicando el operador *n , resulta como consecuencia de xii):

$$P_n(z) = \Delta_n \sum_{h=0}^n P_h(0) z^{n-h} P_h^*(z)$$

$$P_n(z) = \sqrt{e_n} \sum_{h=0}^n P_h(0) z^{n-h} P_h^*(z)$$

que son los desarrollos de $P_n(z)$ y $P_n(z)$ en la base $B_n^{(n)}$.

xiv) Partiendo de xii) se obtienen para las fórmulas de recurrencia, las relaciones siguientes:

$$(R-1) \stackrel{*n}{\Leftrightarrow} (R-2) \quad ; \quad (R-3) \stackrel{*n}{\Leftrightarrow} (R-4)$$

$$(R_N-1) \stackrel{*n}{\Leftrightarrow} (R_N-2) \quad y \quad (R_N-3) \stackrel{*n}{\Leftrightarrow} (R_N-4)$$

con notación evidente.

Análogamente,

$$(R'_N-1) \stackrel{*n}{\Leftrightarrow} (R'_N-2)$$

Más interés tiene aplicar el operador *n a la fórmula (S-1), considerando la indeterminada y fija y la z variable.

Comenzaremos calculando $K_{n-1}(z, y)^{*n}$

$$K_{n-1}(z, y)^{*n} = z^n \sum_{h=0}^{n-1} P_h(y) \overline{P_h} \left(\frac{1}{z} \right) = z \sum_{h=0}^{n-1} P_h(y) z^{n-1-h} P_h^*(z) = z K_{n-1}^*(z, y)$$

donde se ha escrito

$$K_n^*(z, y) = \sum_{h=0}^n P_h(y) z^{n-h} P_h^*(z). \tag{4.23}$$

Aplicando ahora el operador *n a (S-1) se tiene:

$$K_{n-1}(z, y)^{*n} = z K_{n-1}^*(z, y) = \frac{P_n^*(y) P_n(z) - P_n(y) P_n^*(z)}{1 - y \frac{1}{z}}$$

de donde

$$K_{n-1}^*(z, y) = \frac{P_n^*(y) P_n(z) - P_n(y) P_n^*(z)}{z - y} \tag{S^*-1}$$

A partir de (S-2) resulta igualmente:

$$K_n(z, y)^{*n} = \frac{z P_n^*(y) P_n(z) - y P_n(y) P_n^*(z)}{z - y} \quad (S^* - 2)$$

Análogamente se obtienen:

(S_i^{*} - 1)

$$K_{n-1}^*(z, y) = \frac{\sqrt{e_n} P_n^*(z) P_n(y) - \sqrt{e_{n-1}} [y P_n^*(z) P_{n-1}(y) + P_{n-1}^*(z) P_n(y)] + \sqrt{e_n} y P_{n-1}^*(z) P_{n-1}(y)}{e_{n-1} \sqrt{e_n} |P_n(0)|^2 (z - y)}$$

y

(S_i^{*} - 2)

$$K_{n-1}^*(z, y) = \frac{\sqrt{e_n} P_n(z) P_n^*(y) - \sqrt{e_{n-1}} [P_n(z) P_{n-1}^*(y) + z P_{n-1}(z) P_n^*(y)] + \sqrt{e_n} z P_{n-1}(z) P_{n-1}^*(y)}{-e_{n-1} \sqrt{e_n} |P_n(0)|^2 (z - y)}$$

xv) Si en la fórmula que define el *n*-núcleo (Cap. I), aplicamos el operador ^{*}*n*, considerando *y* como un parámetro fijo y recordando (4.6) y (4.9), se obtiene directamente:

$$\begin{aligned} K_n(z, y)^{*n} &= \left[\sum_{h=0}^n \overline{P_h(y)} P_h(z) \right]^{*n} = \sum_{h=0}^n P_h(y) [P_h(z)]^{*n} = \\ &= \sum_{h=0}^n P_h(y) z^{n-h} P_h^*(z) \end{aligned}$$

que es precisamente el valor de $K_n^*(z, y)$ introducido en (4.23), luego

$$K_n(z, y)^{*n} = K_n^*(z, y) \quad (4.24)$$

que justifica la notación y la definición dadas en el apartado anterior.

Sin embargo, la fórmula correspondiente a

$$K_n(z, y) = K_{n-1}(z, y) + P_n(z) \overline{P_n(y)}, \quad (4.25)$$

es, como se ve directamente,

$$K_n^*(z, y) = z K_{n-1}^*(z, y) + P_n(y) P_n^*(z). \quad (4.26)$$

(que nos indica otra manera de obtener (S^{*}-2), directamente de (S^{*}-1)).

Otra relación similar resulta de aplicar ^{*}*n* a (S-0), teniéndose

$$K_n^*(z, y) = y K_{n-1}^*(z, y) + P_n^*(y) P_n(z) \quad (4.27)$$

Conviene notar que

$$K_n^*(z, y) \neq \overline{K_n^*(y, z)}$$

de forma distinta a lo que ocurre para $K_n(z, y)$.

Por el contrario, se cumple

$$K_n^*(z, y) = K_n^*(y, z) \quad (4.28)$$

como resulta inmediatamente de (S^{*}-1) o de (S^{*}-2).

Esta igualdad prueba la equivalencia de (4.26) y (4.27), pues cada una de ellas se deduce de la otra sin más que intercambiar *z* con *y*.

Nota a xiv) y xv). — Denominaremos $Q_n^*(z, y)$ (véase en cap. I la definición de $Q_n(z, y)$) al determinante

$$Q_n^*(z, y) = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \dots & c_{-n} & 1 \\ c_1 & c_0 & \dots & c_{-n+1} & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_0 & y^n \\ z^n & z^{n-1} & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(que no es sino $Q_n(z, y)^{*n}$, con y como parámetro fijo). Desarrollando por la última columna se obtiene

$$Q_n^*(z, y) = \sum_{h=0}^n y^h (-1)^{n+h+1} A_h(z)$$

en donde

$$A_h(z) = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \dots & c_{-n+1} & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & \dots & c_{-n+2} & c_{-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{h-1} & c_{h-2} & \dots & c_{-n+h} & c_{-n+h-1} \\ c_{h+1} & c_h & \dots & c_{-n+h+2} & c_{-n+h+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_1 & c_0 \\ z^n & z^{n-1} & \dots & z & 1 \end{vmatrix} \quad h = 0, \dots, n.$$

Fácilmente se deduce que $A_h(z)$ es ortogonal a $1, z, \dots, z^{n-h-1}, z^{n-h+1}, \dots, z^n$ y que

$$A_h(z) \circ z^{n-h} = (-1)^{n-h} \Delta_n.$$

Para calcular el valor de $A_h(z)$, escribiremos su desarrollo en la base B_n^* :

$$A_h(z) = \sum_{i=0}^n c_i z^{n-i} P_i^*(z),$$

de donde, se hallará c_i multiplicando escalarmente por $z^{n-i} P_i^*(z)$.

Mediante un cálculo que omitimos, se tiene:

$$A_h(z) = \sum_{i=h}^n (-1)^{n-h} \frac{a_{hi}}{\Delta_i \Delta_{i-1}} \Delta_n z^{n-i} P_i^*(z)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} Q_n^*(z, y) &= \sum_{h=0}^n y^h (-1)^{n+h+1} \sum_{i=h}^n (-1)^{n-h} \frac{a_{hi}}{\Delta_i \Delta_{i-1}} \Delta_n z^{n-i} P_i^*(z) = \\ &= -\Delta_n \sum_{h=0}^n \sum_{i=h}^n \frac{a_{hi} y^h}{\Delta_i \Delta_{i-1}} z^{n-i} P_i^*(z) = -\Delta_n \sum_{i=0}^n \frac{z^{n-i} P_i^*(z)}{\Delta_i \Delta_{i-1}} P_i(y) = -\Delta_n K_n^*(z, y) \end{aligned}$$

luego

$$K_n^*(z, y) = -\frac{Q_n^*(z, y)}{\Delta_n} \tag{4.29}$$

fórmula dual de la (1.4).

Procediendo como en cap. I, apartado III, podíamos haber obtenido a partir del determinante $Q_n^*(z, y)$, las fórmulas de sumación para $K_{n-1}^*(z, y)$ y $K_n^*(z, y)$, ($S^* - 1$) y ($S^* - 2$), respectivamente.

Más interés tiene hacer notar que, siendo $Q_n^*(z, y) \circ z^h = -y^{n-h} \Delta_n$ para $h = 0, \dots, n$ resulta, si $R_m(z)$ es de grado $m \leq n$,

$$Q_n^*(z, y) \circ R_m(z) = -\Delta_n R_m(y)^{*m} = -\Delta_n y^{n-m} R_m^*(y)$$

esto es,

$$K_n^*(z, y) \circ z^h = y^{n-h} \quad h = 0, \dots, n \quad (4.30)$$

$$K_n^*(z, y) \circ R_m(z) = y^{n-m} R_m^*(y) \quad \text{para } m \leq n \quad (4.31)$$

fórmula dual, esta última, de la ya conocida

$$K_n(z, y) \circ R_m(z) = \overline{R_m(y)}$$

(véase [11], págs. 22 y 23).

También se puede obtener (no efectuamos los cálculos) la relación:

$$K_n^*(z, y) \circ z^{n+1} = \frac{1}{y} \left(1 - \frac{P_{n+1}^*(y)}{\Delta_n} \right) \quad (4.32)$$

dual de la

$$K_n(z, y) \circ z^{n+1} = \overline{y^{n+1}} - \frac{\overline{P_{n+1}(y)}}{\Delta_n}$$

(véase [11], págs. 23 y 24).

xvi) Ceros de $K_{n-1}^*(z, y)$.

Proposición 4.3. — «Fijado $y \in C$, si $\alpha \neq 0$ es raíz de $K_{n-1}(z, y)$, $\frac{1}{\alpha}$ es raíz de $K_{n-1}^*(z, y)$ ».

Demostración. — Basta tener presente las consideraciones del comienzo del capítulo IV, ya que, fijado y , $K_{n-1}(z, y)$ es un polinomio en z . \ddagger

El resultado siguiente relativo a la situación en el plano complejo de los ceros de $K_{n-1}^*(z, y)$, es similar al de la proposición 2.9.

Proposición 4.4. — «Supuesto $y \in C$, fijo, las raíces de $K_{n-1}^*(z, y) = 0$ son todas interiores al círculo unidad si $|y| < 1$, son todas exteriores si $|y| > 1$ y son unimodulares si $|y| = 1$.»

Demostración. — Suponiendo $K_{n-1}^*(\alpha, y) = 0$ en ($S^* - 1$) se obtiene

$$P_n^*(y) P_n(\alpha) - P_n^*(\alpha) P_n(y) = 0 \quad (4.33)$$

luego

$$|P_n^*(y)| |P_n(\alpha)| = |P_n^*(\alpha)| |P_n(y)|.$$

Entonces, según las fórmulas (2.3), (2.4) y (2.5)

$$\text{Si } |y| < 1 \Rightarrow |P_n^*(y)| > |P_n(y)| \Rightarrow |P_n(\alpha)| < |P_n^*(\alpha)| \Rightarrow |\alpha| < 1 \quad (4.34)$$

Análogamente,

$$\text{Si } |y| > 1 \Rightarrow |\alpha| > 1 \quad (4.35)$$

$$\text{Si } |y| = 1 \Rightarrow |\alpha| = 1. \ddagger \quad (4.36)$$

(Podría pensarse, que este resultado es una consecuencia de las proposiciones 2.9 y 4.3 y que, por consiguiente, no precisa ser demostrado. Sin embargo, hay que observar que de hacerse así quedaría excluido el caso $\alpha = 0$, con lo que el cuadro formado por (4.34), (4.35) y (4.36) no sería completo).

Por otro lado, recordemos (1.19), que escribiremos en la forma

$$P_n^*(z) = \sqrt{e_n} K_n(z, 0). \tag{4.37}$$

Se puede obtener una fórmula correlativa, o bien haciendo $y = 0$ en $(S^* - 2)$, o bien aplicando el operador $*n$ a (4.37), resultando

$$K_n^*(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{e_n}} P_n(z) \tag{4.38}$$

Así pues, junto con (4.37) que asegura que los ceros de $K_n(z, 0)$ son los de $P_n^*(z)$, la fórmula (4.38) nos confirma, como tenía que ocurrir según la proposición 4.3, que los ceros de $K_n^*(z, 0)$ son los de $P_n(z)$, lo cual da un sentido preciso a la observación intuitiva de la nota de la proposición 2.9.

Nota. — Dado un polinomio en dos variables y, z y dos números naturales m, n se puede aplicar simultáneamente el operador $*m$ a la variable y y el $*n$ a la variable z , formando así un operador mixto que denominaremos $*m *n$. Tendrán especial interés los casos en que exista alguna forma de simetría en la variable y y en la variable z , y en que sea $n = m$. Vamos a utilizarlo por ejemplo, para el polinomio $K_n(z, y)$ en z e \bar{y} y para la fórmula $(S - 2)$. Tenemos, suponiendo $\bar{y}z \neq 0$,

$$[K_n(z, y)]^{*n *n} = \sum_{h=0}^n \bar{y}^n P_h \left(\frac{1}{\bar{y}} \right) z^n \bar{P}_h \left(\frac{1}{z} \right) = \sum_{h=0}^n z^{n-h} \bar{y}^{n-h} P_h^*(z) \bar{P}_h^*(\bar{y}).$$

Por otra parte,

$$[K_n(z, y)]^{*n *n} = z^n \bar{y}^n \left[\frac{\bar{P}_n^* \left(\frac{1}{z} \right) P_n^* \left(\frac{1}{\bar{y}} \right) - \frac{1}{\bar{y}} \frac{1}{z} P_n \left(\frac{1}{\bar{y}} \right) \bar{P}_n \left(\frac{1}{z} \right)}{1 - \frac{1}{\bar{y}} \frac{1}{z}} \right] = \frac{z \bar{y} \bar{P}_n^*(\bar{y}) P_n^*(z) - \bar{P}_n^*(z) P_n^*(\bar{y})}{\bar{y}z - 1} = K_n(z, y)$$

Por lo tanto,

$$K_n(z, y) = K_n(z, y)^{*n *n} \tag{4.39}$$

$$\sum_{h=0}^n \bar{P}_h^*(\bar{y}) P_h^*(z) = \sum_{h=0}^n z^{n-h} \bar{y}^{n-h} \bar{P}_h^*(\bar{y}) P_h^*(z) \tag{4.40}$$

$$\frac{K_n(z, y)}{z^n \bar{y}^n} = \sum_{h=0}^n \frac{P_h^*(z)}{z^h} \frac{\bar{P}_h^*(\bar{y})}{\bar{y}^h} = \sum_{h=0}^n \bar{P}_h \left(\frac{1}{z} \right) P_h \left(\frac{1}{\bar{y}} \right) = K_n \left(\frac{1}{\bar{y}}, \frac{1}{z} \right) \tag{4.41}$$

(ver [10], pág. 290).

Por continuidad, resulta de (4.40)

$$K_n(z, 0) = \bar{P}_n^*(0) P_n^*(z),$$

ya conocida y

$$K_n(z, z) = \sum_{h=0}^n |P_h(z)|^2 = \sum_{h=0}^n |z^{n-h} P_h^*(z)|^2. \tag{4.42}$$

Aplicando el mismo proceso a $(S - 1)$ se llega a:

$$K_{n-1}(z, y)^{*n *n} = \bar{z} \bar{y} K_{n-1}(z, y). \tag{4.43}$$

Un caso interesante de aplicación del operador ${}^*n {}^*n$ lo ofrece el cuadrado del módulo de un polinomio, considerado como un polinomio en las variables z, \bar{z} . Así, aplicando el citado operador a

$$|P(z)|^2 = \overline{P(z)} \cdot P(z)$$

se tiene:

$$(|P(z)|^2)^{{}^*n {}^*n} = z^n \bar{P} \left(\frac{1}{z} \right) \cdot \bar{z}^n P \left(\frac{1}{\bar{z}} \right) = |P(z)^{{}^*n}|^2$$

Además, el operador ${}^*n {}^*n$ permite probar la equivalencia entre distintas fórmulas. Por ejemplo:

$$(S-0) \xLeftrightarrow{{}^*n {}^*n} (4.25)$$

$$(S_s-1) \xLeftrightarrow{{}^*n {}^*n} (S_s-2) \quad (\text{luego } (S_s^*-1) \xLeftrightarrow{{}^*n {}^*n} (S_s^*-2)),$$

y

$$(4.26) \xLeftrightarrow{{}^*n {}^*n} (4.27) \quad (\text{esta última, ya demostrada}).$$

II. Bases en Π_n

Se observa que, dada en Π_n la base $B_n^{(0)} = \{P_h(z)\}_{h=0}^n$, si escribimos $\{z P_i(z)\}_{i=0}^{n-1}$ obtenemos un sistema de n polinomios ortonormales en Π_n los cuales no forman base puesto que $\dim \Pi_n = n + 1$.

Pero, para $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$P_n^*(z) \circ z P_i(z) = (z P_i(z))^{{}^*n} \circ P_n(z) = z^{n-1-i} P_i^*(z) \circ P_n(z) = 0 \quad (4.44)$$

y, por consiguiente,

$$z P_0(z), z P_1(z), \dots, z P_{n-1}(z), P_n^*(z)$$

forman un sistema ortonormal de $n + 1$ elementos en Π_n , luego constituyen una base ortonormal, que denominaremos base $B_n^{(1)}$.

Análogamente, $\{z^2 P_i(z)\}_{i=0}^{n-2}$ es un sistema ortonormal pero no es una base en Π_n , ahora bien,

$$z P_{n-1}^*(z) \circ z^2 P_i(z) = P_{n-1}^*(z) \circ z P_i(z) = 0$$

para $i = 0, 1, \dots, n-2$ (véase (4.44))

$$P_n^*(z) \circ z P_{n-1}^*(z) = P_n(z)^{{}^*n} \circ P_{n-1}(z)^{{}^*n} = 0$$

(véase propiedad x), pág. 30),

y, finalmente

$$P_n^*(z) \circ z^2 P_i(z) = 0 \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n-2$$

como se sigue de aplicar el corolario 4.1.

Por lo tanto

$$z^2 P_0(z), z^2 P_1(z), \dots, z^2 P_{n-2}(z), z P_{n-1}^*(z), P_n^*(z)$$

es otra base ortonormal en Π_n , que llamaremos base $B_n^{(2)}$.

En general se puede probar por inducción que:

Proposición 4.5. — «Para cada número natural $p \leq n$, el sistema

$$z^p P_0(z), z^p P_1(z), \dots, z^p P_{n-p}(z), z^{p-1} P_{n-p+1}^*(z), \dots, z P_{n-1}^*(z), P_n^*(z)$$

constituye una base ortonormal en Π_n que, en adelante, designaremos base $B_n^{(p)}$ ».

En el caso particular $p = n$, resulta la base $B_n^{(n)}$:

$$z^n P_0^*(z), z^{n-1} P_1^*(z), \dots, z P_{n-1}^*(z), P_n^*(z)$$

ya obtenida en la propiedad xi) de este mismo capítulo.

El otro caso extremo $p = 0$, da lugar a la base ortonormal $B_n^{(0)}$.

Nota. — Obsérvese que la existencia de la base $B_n^{(p)}$ indica que el espacio Π_n puede expresarse como suma directa de dos subespacios ortogonales entre sí, que denominaremos Π_n^p y Π_n^{*p} , es decir,

$$\Pi_n = \Pi_n^p \oplus \Pi_n^{*p}.$$

El primero de dichos subespacios, de dimensión $n - p + 1$, viene engendrado por la base

$$z^p P_0(z), \dots, z^p P_{n-p}(z)$$

y el segundo, de dimensión p , por

$$z^{p-1} P_{n-p+1}^*(z), z^{p-2} P_{n-p+2}^*(z), \dots, P_n^*(z);$$

además

$$\Pi_n^{*(p+1)} \supset \Pi_n^{*p} \quad p = 0, 1, \dots, n-1$$

siendo

$$\dim \Pi_n^{*(p+1)} = \dim \Pi_n^{*p} + 1$$

y, por consiguiente,

$$\Pi_n^{p+1} \subset \Pi_n^p \quad p = 0, 1, \dots, n-1$$

con

$$\dim \Pi_n^{p+1} + 1 = \dim \Pi_n^p.$$

La primera afirmación es trivial, pues la base de Π_n^{*p} es

$$z^{p-1} P_{n-p+1}^*(z), z^{p-2} P_{n-p+2}^*(z), \dots, P_n^*(z)$$

y la de $\Pi_n^{*(p+1)}$ es

$$z^p P_{n-p}^*(z), z^{p-1} P_{n-p+1}^*(z), \dots, P_n^*(z).$$

Respecto a la segunda, la base de Π_n^{p+1} es

$$z^{p+1} P_0(z), z^{p+1} P_1(z), \dots, z^{p+1} P_{n-p-1}(z)$$

y la de Π_n^p es

$$z^p P_0(z), z^p P_1(z), \dots, z^p P_{n-p}(z).$$

Obsérvese aún que si a la base Π_n^p le agregamos el término siguiente $z^{p-1} P_{n-p+1}^*(z)$ obtenemos un sistema que engendra Π_n^{p+1} .

Conviene notar que si a los elementos de una base $B_n^{(p)}$ ($0 \leq p \leq n$) se les aplica el operador *n , se obtiene una nueva base ortonormal de la forma

$$z^{n-p} P_0^*(z), z^{n-p-1} P_1^*(z), \dots, P_{n-p}^*(z), P_{n-p+1}(z), \dots, P_{n-1}(z), P_n(z)$$

a la que llamaremos base $(B_n^{(p)})^{*n}$. En el caso particular $p = n$ resulta ser $(B_n^{(n)})^{*n} = B_n^{(0)}$, es decir,

$$(B_n^{(n)})^{*n} = \{P_0(z), P_1(z), \dots, P_n(z)\}.$$

Fácilmente se comprueba que dado un polinomio cualquiera $P(z) \in \Pi_n$ de grado m , si $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$ son los coeficientes de su desarrollo en la base $B_n^{(p)}$, los coeficientes del desarrollo de $P(z)^{*n}$ en la base $(B_n^{(p)})^{*n}$ son precisamente $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_m$ y recíprocamente.

En particular, si $P(z) = z^m$ ($m \leq n$) los coeficientes del desarrollo de z^m en la base $B_n^{(p)}$ son, respectivamente, los conjugados de los coeficientes del desarrollo de z^{n-m} en la base $(B_n^{(p)})^{*n}$.

CAPÍTULO V

MATRICES HERMITIANAS TÍPICAS

Las llamadas extensiones típicas de un producto escalar definido en Π_{n-1} mediante una matriz HDP $m_{n-1} = (c_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$ obtenidas orlando m_{n-1} con fila y columna $(n+1)$ -ésimas, así como sus propiedades, han sido expuestas en general, en [12], [13] y [15]. El objeto de este capítulo es, dada una matriz HDP de Toeplitz de orden n que defina un producto escalar en Π_{n-1} , estudiar sus extensiones que sean típicas y de Toeplitz simultáneamente.

Para ello, introduciremos en primer lugar la definición de extensión típica de una matriz HDP m_{n-1} a otra m_n y reproduciremos los resultados ya conocidos relativos a ella, sin demostraciones, refiriéndonos para éstas a los citados trabajos; a continuación, estudiaremos la misma cuestión sobre la circunferencia unidad, es decir, cuando m_{n-1} sea HDP de Toeplitz pretendiendo que su extensión sea a la vez, de Toeplitz y típica, lo que crea una situación que ya no coincide con la tratada en [12], [13] y [15].

El contenido de este capítulo puede, pues, sintetizarse como sigue

I. Exposición de definiciones y enunciados de teoremas conocidos relativos a la extensión típica.

II. Se pretende en nuestro caso particular, justificar la existencia de soluciones y demostrar que la situación es característica; más precisamente, que toda extensión típica de una matriz HDP de Toeplitz de orden n a otra que sea HDP de Toeplitz de orden $n+1$, se define de la forma que se cita en I, dando lugar a un polinomio $P_n(z)$ que tiene por raíces precisamente, n complejos unimodulares distintos dos a dos.

III. Demostraremos que toda matriz T_n hermitiana, singular, de Toeplitz con la menor correspondiente T_{n-1} definida positiva, es una extensión típica de T_{n-1} .

I. El caso típico

Dado un producto escalar definido en Π_{n-1} mediante una matriz HDP $m_{n-1} = (c_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$ de orden n y su correspondiente segmento de PO, $\{P_h(z)\}_{h=0}^{n-1}$ (véase fórmula (1.2)), decimos que el polinomio $P_n(z, \alpha)$ es una extensión típica del citado segmento si viene definido por la fórmula

$$P_n(z, \alpha) = \frac{\Delta_{n-1}^2}{P_{n-1}(\alpha)} K_{n-1}(z, \alpha) (z - \alpha), \quad (5.1)$$

donde se supone $P_{n-1}(\alpha) \neq 0$.

i) Es sabido que $K_{n-1}(z, \alpha)$ tiene $n-1$ raíces distintas dos a dos y que si β es una de ellas, es decir, si $K_{n-1}(\beta, \alpha) = 0$ se tiene

$$P_n(z, \alpha) = P_n(z, \beta).$$

Por consiguiente, en cada extensión típica de $\{P_h(z)\}_{h=0}^{n-1}$, dada una raíz de $P_n(z, \alpha)$ quedan fijadas las $n-1$ restantes; estas n raíces $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ forman una clase de equivalencia en $C \setminus R_{n-1}$, siendo R_{n-1} el conjunto de las raíces de $P_{n-1}(z)$. Así pues, existe una biyección entre el conjunto de las extensiones típicas de $\{P_h(z)\}_{h=0}^{n-1}$ y el conjunto cociente de las clases de equivalencia antes citadas.

ii) Ya se ha demostrado:

Proposición 5.1. — «La condición necesaria y suficiente para que un polinomio $P_n(z)$ de grado n con raíces $\{\alpha_{in}\}_{i=1}^n$ distintas dos a dos, sea una extensión típica de $\{P_h(z)\}_{h=1}^{n-1}$ es que los coeficientes funcionales de Lagrange $\left\{ \frac{P_n(z)}{(z - \alpha_{in}) (P_n'(\alpha_{in}))} \right\}_{i=1}^n$, sean ortogonales dos a dos en el producto escalar inicialmente definido por m_{n-1} ».

iii) Está demostrado que, expresada una extensión típica $P_n(z)$ en forma de determinante (véase (1.2)), existen n números positivos $\{p_{in}\}_{i=1}^n$ (que por razones obvias llamaremos constantes de Christoffel) tales que

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^n p_{hn} \alpha_{hn}^i \bar{\alpha}_{hn}^j \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, n \\ j = 0, 1, \dots, n-1 \end{matrix} \quad (5.2)$$

fórmula que nos define c_{in} ($i = 0, 1, \dots, n-1$) como conjugado de c_{ni} . Los c_{ij} ($i, j = 0, \dots, n-1$) son los de la matriz inicial m_{n-1} ; además, escrita la extensión típica $P_n(z)$ en la forma dada por (1.2), los elementos de la última columna son los c_{nj} ($j=0, 1, \dots, n-1$) que obedecen a la misma fórmula (5.2).

Fácilmente se comprueba por linealidad la importante:

Proposición 5.2. — «Si $P(z)$ y $Q(z)$ son elementos de Π_{n-1} , se tiene

$$P(z) \circ Q(z) = \sum_{h=1}^n p_{hn} P(\alpha_{hn}) \overline{Q(\alpha_{hn})} \quad (5.3)$$

y, en particular,

$$P(z) \circ 1 = \sum_{h=1}^n p_{hn} P(\alpha_{hn}) \quad (5.4)$$

iv) Si para definir c_{nn} que es el elemento que falta para completar la orlada típica m_n de m_{n-1} , lo tomamos obedeciendo a (5.2), es decir,

$$c_{nn} = \sum_{h=1}^n p_{hn} \alpha_{hn}^n \bar{\alpha}_{hn}^n \quad (5.5)$$

entonces, m_n es singular o sea, $\Delta_n = 0$.

v) Se demuestra que todas las raíces de $P_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) están contenidas en la envoltura convexa del conjunto $\{\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{nn}\}$.

vi) Los valores p_{hn} vienen dados por cualquiera de las expresiones siguientes:

a) Si $\alpha_{hn} \neq 0$, para $h = 1, \dots, n$

$$p_{hn} = \frac{P_n(z)}{(z - \alpha_{hn}) P_n'(\alpha_{hn})} \circ \left(\frac{z}{\alpha_{hn}} \right)^k \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad (5.6)$$

y en todo caso, para $k = 0$

$$p_{hn} = \frac{P_n(z)}{(z - \alpha_{hn}) P_n'(\alpha_{hn})} \circ 1 = M \left(\frac{P_n(z)}{(z - \alpha_{hn}) P_n'(\alpha_{hn})} \right) \quad (5.7)$$

o sea, p_{hn} es el momento del h -ésimo coeficiente de interpolación de Lagrange.

b)

$$p_{hn} = \frac{P_n(z)}{(z - \alpha_{hn}) P_n'(\alpha_{hn})} \circ \frac{P_n(z)}{(z - \alpha_{hn}) P_n'(\alpha_{hn})} \quad (5.8)$$

es decir, p_{hn} es el cuadrado de la norma del h -ésimo coeficiente de Lagrange.

En general, se puede decir que

$$p_{hn} = \frac{P_n(z)}{(z - \alpha_{hn}) P_n'(\alpha_{hn})} \circ Q(z) \tag{5.9}$$

para todo polinomio $Q(z)$ de grado menor o igual que n , tal que $Q(\alpha_{hn}) = 1$, $h = 1, 2, \dots, n$.

c)

$$p_{hn} = \frac{1}{K_{n-1}(\alpha_{hn}, \alpha_{hn})} \tag{5.10}$$

d)

$$p_{hn} = \frac{\Delta_{n-1}^2}{P_n'(\alpha_{hn}) \overline{P_{n-1}(\alpha_{hn})}} \tag{5.11}$$

de donde

$$p_{hn} K_{n-1}(z, \alpha_{hn}) = \frac{P_n(z)}{(z - \alpha_{hn}) P_n'(\alpha_{hn})} \tag{5.12}$$

que equivale a decir

$$p_{hn} K_{n-1}(z, \alpha_{hn}) \circ 1 = M(p_{hn} K_{n-1}(z, \alpha_{hn})) = p_{hn} \tag{5.13}$$

vii) Recíprocamente, se puede partir de un polinomio $P_n(z)$ con n raíces distintas dos a dos $\{\alpha_{in}\}_{i=1}^n$ y de n números positivos arbitrarios $\{p_{in}\}_{i=1}^n$ y construir una matriz $m_n = (c_{ij})_0^n$ mediante (5.2). Se comprueba entonces, que m_n es una extensión típica de su menor m_{n-1} y por tanto, el $P_n(z)$ dado lo es del segmento $\{P_h(z)\}_{h=0}^{n-1}$ que queda definido a partir de la m_{n-1} así obtenida.

viii) En el caso particular en que las n raíces distintas dos a dos de $P_n(z)$ sean unimodulares, m_n y su menor m_{n-1} resultan ser matrices de Toeplitz.

En efecto, si $\{\alpha_{in}\}_{i=1}^n$ son unimodulares (5.2) toma la forma

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^n p_{hn} \alpha_{hn}^i \bar{\alpha}_{hn}^j = \sum_{h=1}^n p_{hn} \alpha_{hn}^{i-j} = c_{i-j, 0} \quad i, j = 0, 1, \dots, n \tag{5.14}$$

y haciendo uso de la notación

$$c_{i, j} = c_{i-j, 0} = c_{i-j} \quad i, j = 0, \dots, n \tag{5.15}$$

la matriz m_n se puede expresar

$$m_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_0 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

Evidentemente, m_n y cualquiera de sus menores principales m_h son entonces de Toeplitz, por lo que, de acuerdo con la notación del capítulo I las designaremos en lo sucesivo T_n y T_h , respectivamente.

Es de notar, que las raíces de $P_n(z)$ son unimodulares, contra la afirmación hecha en el corolario 2.3. Esta contradicción es sólo aparente, pues mientras allí la matriz m_n era definida positiva, ahora es singular, como hicimos ver en iv).

ix) Es conocido (véase [12]) que $\Delta_{n-1} = \det m_{n-1} = p_1 \dots p_n |V(\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{nn})|^2$ donde $V(\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{nn})$ es el determinante de Vandermonde relativo a $\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{nn}$. En nuestro caso:

$$V(\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{nn}) = \prod_{1 \leq j < h \leq n} (\alpha_{hn} - \alpha_{jn}) = \prod_{1 \leq j < h \leq n} (e^{i\phi_{hn}} - e^{i\phi_{jn}})$$

con $\alpha_{hn} = e^{i\phi_{hn}}$, $h = 1, 2, \dots, n$; operando, se tiene que

$$\alpha_{hn} - \alpha_{jn} = 2i \operatorname{sen} \frac{\phi_{hn} - \phi_{jn}}{2} \cdot e^{i \frac{\phi_{hn} + \phi_{jn}}{2}} ;$$

así pues,

$$V(\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{nn}) = (2i)^{\binom{n}{2}} e^{i \frac{n-1}{2} \sum_{j=1}^n \phi_{jn}} \cdot \prod_{1 \leq j < h \leq n} \operatorname{sen} \frac{\phi_{hn} - \phi_{jn}}{2}.$$

En definitiva,

$$\Delta_{n-1} = 2^{n(n-1)} \cdot p_1 \dots p_n \prod_{1 \leq j < h \leq n} \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\phi_{hn} - \phi_{jn}}{2} \right) \quad (5.17)$$

x) Siendo las raíces $\{\alpha_{in}\}_{i=1}^n$ unimodulares, el resultado de v) es equivalente a decir que las raíces de cada $P_i(z)$ ($1 \leq i < n$) son interiores al polígono convexo inscrito en U con vértices $\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{nn}$.

Posteriormente veremos que este resultado, que precisa más que el de la teoría clásica, es general y podrá ser mejorado todavía. (Cap. VI; teorema 6.5).

II. Extensiones típicas de Toeplitz

Examinemos la siguiente cuestión:

Supongamos dada una matriz $T = (c_h)_{h=0}^{\infty}$ HDP de Toeplitz que define un producto escalar en Π con su correspondiente sucesión de PO. La menor de orden n en T , o sea,

$$T_{n-1} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_0 \end{bmatrix}$$

define la restricción de dicho producto escalar a Π_{n-1} . Se trata de conseguir una extensión, a Π_n , del producto escalar dado en Π_{n-1} que, simultáneamente, sea típica y venga definida por una matriz de Toeplitz. Se observa, que para esto, basta determinar

$$c'_n = z^n \circ 1 \quad (5.18)$$

(que no tiene por qué coincidir con el elemento c_n de la matriz T de partida) de modo que la matriz

$$T'_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c'_n \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_0 & c_1 \\ c'_{-n} & c_{-n+1} & \dots & c_{-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

resulte una extensión típica de T_{n-1} . Veamos que el problema no sólo es resoluble, sino que es indeterminado y caractericemos el conjunto de sus soluciones.

Recordemos el teorema constructivo de las extensiones típicas en el caso general ([13]), al que ya hemos hecho referencia en I.

Teorema 5.3. — «Definido un producto escalar en Π_{n-1} , a cada $\alpha \in C$ con $P_{n-1}(\alpha) \neq 0$, le corresponde una extensión típica cuyo $P'_n(z)$ viene dado por

$$P'_n(z, \alpha) = \frac{\Delta_{n-1}^2}{P_{n-1}(\alpha)} K_{n-1}(z, \alpha) (z - \alpha). \tag{5.19}$$

Las raíces de cada $P'_n(z, \alpha)$ forman una clase de equivalencia en C , mediante la relación $\alpha \equiv \beta$ si $\alpha = \beta$ o $K_{n-1}(\beta, \alpha) = 0$. El conjunto de las extensiones típicas posibles está en correspondencia biyectiva con el conjunto cociente del complementario en C de las raíces de $P_{n-1}(z) = 0$, respecto a dicha relación de equivalencia.»

Al demostrar este teorema en [13], se probaba también que las raíces de $P'_n(z, \alpha)$ son simples.

A la vista de este resultado, lo que buscamos es caracterizar el subconjunto del conjunto de todas las extensiones típicas, definido por matrices de Toeplitz y comprobar que este subconjunto no es vacío.

Consideremos el polinomio $P'_n(z, \alpha)$ definido en (5.19); ya vimos en i) que es independiente de la raíz elegida.

Sea α una cualquiera de ellas. Al producto escalar en Π_n con polinomios ortogonales $P_0(z), \dots, P_{n-1}(z)$, $P'_n(z, \alpha)$ le corresponde, una matriz $T'_n(\alpha)$ (cuya menor T_{n-1} es la inicialmente dada),

$$T'_n(\alpha) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c_{n0} \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} & c_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_0 & c_{n, n-1} \\ \overline{c_{n, 0}} & \overline{c_{n, 1}} & \dots & \overline{c_{n, n-1}} & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$P'_n(z, \alpha)$ puede entonces definirse sustituyendo la última fila de $T'_n(\alpha)$ por las potencias sucesivas de z : z^i ($i = 0, 1, \dots, n$).

Así pues, si queremos conocer la expresión de $P'_n(z, \alpha)$ en forma de determinante debemos calcular $c_{n0}, c_{n1}, \dots, c_{n, n-1}$. Para ello tendremos presente que en el producto escalar particular definido en Π_n , se ha de cumplir

$$P'_n(z, \alpha) \circ z^i = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \tag{5.20}$$

es decir,

$$\frac{\Delta_{n-1}^2}{P_{n-1}(\alpha)} K_{n-1}(z, \alpha) (z - \alpha) \circ z^i = \frac{\Delta_{n-1}^2}{P_{n-1}(\alpha)} [z K_{n-1}(z, \alpha) - \alpha K_{n-1}(z, \alpha)] \circ z^i = 0$$

luego

$$z K_{n-1}(z, \alpha) \circ z^i - \alpha \bar{\alpha}^i = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \tag{5.21}$$

Escribiendo $z K_{n-1}(z, \alpha)$ como determinante, se obtiene:

$$z K_{n-1}(z, \alpha) \circ z^i = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & 1 \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} & \bar{\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_{-1} & c_0 & \bar{\alpha}^{n-1} \\ z & z^2 & \dots & z^{n-1} & z^n & 0 \end{vmatrix} \circ z^i = \tag{5.22}$$

$$= -\frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & \frac{1}{\bar{\alpha}} \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} & \bar{\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_{-1} & c_0 & \bar{\alpha}^{n-1} \\ c_{-i+1} & c_{-i+2} & \dots & c_{-i+n-1} & c_{n,i} & 0 \end{vmatrix}$$

en donde hemos puesto $c_{n,i} = z^n \cdot z^i$, siguiendo la notación habitual.

Por otra parte,

$$\alpha \bar{\alpha}^i = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & \frac{1}{\bar{\alpha}} \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} & \bar{\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_{-1} & c_0 & \bar{\alpha}^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \bar{\alpha}^i \end{vmatrix} \tag{5.23}$$

Llevando los valores de (5.22) y (5.23) a (5.21) y operando con los determinantes se llega a:

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & \frac{1}{\bar{\alpha}} \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} & \bar{\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_{-1} & c_0 & \bar{\alpha}^{n-1} \\ c_{-i+1} & c_{-i+2} & \dots & c_{-i+n-1} & c_{n,i} & \alpha \bar{\alpha}^i \end{vmatrix} = 0 \tag{5.24}$$

Si hacemos $i = 0$, $c_{n0} = c_n^i$ queda determinado despejando en (5.24):

$$c_n^i = \frac{1}{P_{n-1}(\alpha)} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & \frac{1}{\bar{\alpha}} \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} & \bar{\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_{-1} & c_0 & \bar{\alpha}^{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & 0 & \alpha \end{vmatrix} \tag{5.25}$$

Para los términos restantes c_{n1}, \dots, c_{nn-1} , si queremos que $T_n'(\alpha)$ sea de Toeplitz ha de verificarse que

$$c_{ni} = c_{n-i} \quad i = 1, \dots, n-1 \tag{5.26}$$

Por consiguiente, queda determinada $T_n'(\alpha)$, luego $P_n'(z, \alpha)$.

Siguiendo con el proceso anterior, si con las condiciones obtenidas restamos en (5.24), de la última fila la i -ésima (con $1 \leq i \leq n-1$) queda

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & \frac{1}{\bar{\alpha}} \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} & \bar{\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-i+1} & c_{-i+2} & \dots & c_{n-1} & \bar{\alpha}^{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_0 & \bar{\alpha}^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \bar{\alpha}^i - \bar{\alpha}^{i-1} \end{vmatrix} = 0$$

o sea

$$\bar{\alpha}^{i-1} (\alpha \bar{\alpha} - 1) \Delta_{n-1} = 0,$$

esto es,

$$|\alpha| = 1 \quad \text{ó} \quad \alpha = 0.$$

Ahora bien, si $\alpha = 0$ las restantes raíces de $P'_n(z, 0)$ son las de $K_{n-1}(z, 0)$ que, por la proposición 2.9, son exteriores al círculo unidad, en contradicción con el resultado que acabamos de obtener según el cual las raíces de $P'_n(z, \alpha)$ son unimodulares o nulas.

Como consecuencia tenemos que todas las raíces de $P'_n(z, \alpha)$ son unimodulares.

Con todo lo anterior y los resultados enunciados en I queda demostrado el:

Teorema 5.4. — «La condición necesaria y suficiente para que la extensión de una matriz HDP de Toeplitz T_{n-1} de orden n a otra T_n de orden $n + 1$, sea a la vez, típica y de Toeplitz es que las n raíces del polinomio $P'_n(z, \alpha)$ sean unimodulares y distintas dos a dos».

Siendo típica por construcción la extensión efectuada, se verifica $p_{hm} = \frac{1}{K_{n-1}(\alpha_{hm}, \alpha_{hm})}$

($h = 1, 2, \dots, n$) donde $\{\alpha_{in}\}_{i=1}^n$ son las raíces de $P'_n(z, \alpha)$ y $c_h = \bar{c}_{-h}$ ($h = 0, \dots, n-1$) viene dado por

$$c_h = \sum_{i=1}^n p_i \alpha_{in}^h.$$

En dicha extensión típica

$$c_{nn} = \sum_{i=1}^n p_i \alpha_{in}^n \bar{\alpha}_{in}^n = \sum_{i=1}^n p_i = c_0;$$

entonces, $\det T_n = 0$. En este sentido diremos que esta extensión típica es una terminal.

En todo caso, dada la matriz HDP original m se ve que a cada $P_n(z)$ de la sucesión correspondiente de PO se le puede asociar una familia de extensiones típicas terminales para cada n -tupla de complejos unimodulares distintos dos a dos, que formen una clase respecto de la relación de equivalencia definida en el teorema 5.3.

Finalmente, conviene hacer observar que, elegido cualquier α con $|\alpha| = 1$, queda fijada una extensión típica de Toeplitz, como se sigue, inmediatamente, de los resultados anteriores.

III. Una caracterización de las extensiones típicas de Toeplitz

El objeto de este apartado es probar que las extensiones típicas de Toeplitz pueden también caracterizarse por ser singular la matriz T_n de orden $n + 1$ y positivas las menores T_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) citadas en II.

Comenzaremos demostrando un resultado que será necesario utilizar posteriormente.

Proposición 5.5. — «Sea T_n una matriz hermitiana definida no negativa de Toeplitz de orden $n + 1$, con sus menores principales positivas y $\det T_n = 0$. Entonces, el polinomio $P_n(z)$ correspondiente a T_n tiene sus raíces unimodulares».

Demostración. — Si en $\det T_n$ aplicamos la propiedad A al menor $\begin{vmatrix} c_0 & c_n \\ c_{-n} & c_0 \end{vmatrix}$ resulta en general,

$$\Delta_n \Delta_{n-2} = \Delta_{n-1}^2 - |P_n(0)|^2.$$

En nuestro caso, $\Delta_n = \det T_n = 0$, luego

$$\Delta_{n-1} = |P_n(0)| \tag{5.27}$$

Por otra parte, si en $(R-1)$ ponemos $z = \alpha$, siendo α una raíz cualquiera de $P_n(z)$, se tiene

$$\Delta_{n-1} \alpha P_{n-1}(\alpha) + P_n(0) P_{n-1}^*(\alpha) = 0$$

de donde, recordando (5.27), se sigue

$$|\alpha| |P_{n-1}(\alpha)| = |P_{n-1}^*(\alpha)|.$$

Si ocurriera $|\alpha| < 1$, se tendría $|P_{n-1}^*(\alpha)| < |P_{n-1}(\alpha)|$ en contra de lo obtenido en la fórmula (2.3). Análogamente, suponiendo $|\alpha| > 1$ se llega a una contradicción con la (2.4).

Por consiguiente, $|\alpha| = 1$. \ddagger

Veamos a continuación el

Teorema 5.6. — «La extensión de una matriz HDP de Toeplitz T_{n-1} de orden n a otra T_n de orden $n+1$ es a la vez típica y de Toeplitz sí y sólo si, T_n es una matriz singular es decir, sí y sólo si $\det T_n = 0$ ».

Demostración. — Ya hemos visto que si la extensión es típica se verifica

$$\det T_n = 0.$$

Recíprocamente, consideremos una matriz T hermitiana definida no negativa de Toeplitz con sus menores principales, hasta la de orden n inclusive, positivas y con la menor T_n de orden $n+1$:

$$T_n = \begin{bmatrix} c_0 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{-n} & \dots & c_0 \end{bmatrix},$$

singular.

Sea $P_n(z)$ el polinomio correspondiente a T_n :

$$P_n(z) = \begin{bmatrix} c_0 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & z^n \end{bmatrix};$$

según la proposición 5.5, las raíces de $P_n(z)$ son unimodulares.

Tomemos una cualquiera de ellas, α , y a partir de la menor T_{n-1} construyamos una extensión típica de Toeplitz relativa a α :

$$T'_n = \begin{bmatrix} c_0 & \dots & c'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ c'_{-n} & \dots & c_0 \end{bmatrix}$$

en la cual c_0, \dots, c_{n-1} están ya determinados por T_{n-1} .

El polinomio correspondiente a T'_n será:

$$P'_n(z) = \begin{bmatrix} c_0 & \dots & c'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & z^n \end{bmatrix};$$

de raíces, como ya sabemos, unimodulares y simples; siendo α una de ellas.

Supongamos $c_n \neq c'_n$. Si restamos ambos polinomios

$$P_n(z) - P'_n(z) = \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_{n-1} & c_n - c'_n \\ c_{-1} & \dots & c_{n-2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & z^{n-1} & 0 \end{vmatrix} = (c'_n - c_n) P_{n-1}^*(z)$$

Como α es raíz de $P_n(z)$ y $P'_n(z)$ también lo será de $P_{n-1}^*(z)$, en contradicción con el corolario 2.3, pues α es unimodular.

Por lo tanto

$$c_n = c'_n,$$

de donde se sigue que T_n es una extensión típica de T_{n-1} . \ddagger

Corolario 5.7. — «En las condiciones de la proposición 5.5, las raíces del polinomio $P_n(z)$ asociado a la matriz T_n , son simples.»

Demostración. — Es consecuencia inmediata de los teoremas 5.6 y 5.4. \ddagger

CAPÍTULO VI

EXTENSIONES DE TOEPLITZ DEFINIDAS POSITIVAS

Dada una matriz HDP de Toeplitz de orden n

$$T_{n-1} = \begin{bmatrix} c_0 & \dots & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & \dots & c_0 \end{bmatrix}$$

denominaremos extensión de Toeplitz de T_{n-1} , a una matriz T_n que se obtenga a partir de la dada orlándola con fila y columna $(n+1)$ -ésimas, de manera que siga siendo positiva y de Toeplitz; para esto, basta fijar c_n puesto que las restantes componentes de dichas fila y columna quedan determinadas por los elementos de T_{n-1} .

Elegido c_n arbitrariamente puede ocurrir que $\Delta_n = \det T_n$ sea negativo, nulo o positivo. El primer caso no será considerado puesto que entonces T_n ya no es definida positiva y el segundo ha sido tratado en el capítulo V, donde se ha visto que el hecho de que la extensión T_n sea singular es equivalente a que T_n sea a la vez de Toeplitz y típica. El objeto de este capítulo es el estudio del tercer caso citado. Nos planteamos, pues, el siguiente problema:

«Dada una matriz T_{n-1} hermitiana definida positiva de Toeplitz, determinar c_n de modo que su extensión T_n de Toeplitz sea también definida positiva».

A este respecto, sabemos que existen infinitas sucesiones de PO correspondientes a matrices T_{n-1} de Toeplitz hermitianas positivas que tienen el mismo segmento $\{P_h(z)\}_{h=0}^{n-1}$ y, por tanto, la misma menor de orden n , T_{n-1} , iniciales (véase [13]); como cada sucesión de PO define un producto escalar en Π , la afirmación anterior equivale a asegurar la existencia de infinitos productos escalares en Π cuya restricción a Π_{n-1} es la misma.

Puesto que T_{n-1} determina un segmento $\{P_h(z)\}_{h=0}^{n-1}$ de PO y su normalizado $\{P_h(z)\}_{h=0}^{n-1}$, el considerar todas las extensiones a otra matriz T_n de Toeplitz definida positiva equivale a dar todos los posibles $P_n(z)$, relativos a U , correspondientes y todas las posibles extensiones del producto escalar definido en Π_{n-1} por T_{n-1} , a Π_n que verifiquen la propiedad (1.10) o cualquiera de sus equivalentes.

I. Los círculos S_n

Sea

$$\Delta_n(\zeta_n) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & \zeta_n \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_0 & c_1 \\ \bar{\zeta}_n & c_{-n+1} & \dots & c_{-1} & c_0 \end{vmatrix}; \tag{6.1}$$

$\Delta_n(\zeta_n) = t$ ($t \in R$) es la ecuación de un paraboloides de revolución del cual únicamente interesan valores de ζ_n que hagan $\Delta_n(\zeta_n) \geq 0$, los cuales aparecen asociados a valores de ζ_n situados en un círculo S_n cuya circunferencia frontera viene dada por $\Delta_n(\zeta_n) = 0$ y en cuyo centro ζ_n^o , toma $\Delta_n(\zeta_n)$ el valor máximo por ser negativo el coeficiente $-\Delta_{n-2}$ de $\zeta_n \bar{\zeta}_n$.

La ecuación de la circunferencia $\Delta_n(\zeta_n) = 0$, se puede escribir desarrollando el determinante:

$$\begin{aligned} \Delta_n(\zeta_n) = \Delta_n(0) + (-1)^n & \begin{vmatrix} c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ c_{-2} & c_{-1} & \dots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_{-1} & c_0 \\ 0 & c_{-n+1} & \dots & c_{-2} & c_{-1} \end{vmatrix} \zeta_n + \tag{6.2} \\ & + (-1)^n \bar{\zeta}_n \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & 0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+3} & c_{-n+4} & \dots & c_1 & c_2 \\ c_{-n+2} & c_{-n+3} & \dots & c_0 & c_1 \end{vmatrix} - \Delta_{n-2} \zeta_n \bar{\zeta}_n = 0; \end{aligned}$$

el centro de dicha circunferencia es

$$\zeta_n^o = \frac{(-1)^n}{\Delta_{n-2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & 0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+3} & c_{-n+4} & \dots & c_1 & c_2 \\ c_{-n+2} & c_{-n+3} & \dots & c_0 & c_1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\Delta_{n-2}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+2} & c_{-n+3} & \dots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & 0 \end{vmatrix} \tag{6.3}$$

y su radio

$$\frac{1}{\Delta_{n-2}} \left[\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & 0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+3} & c_{-n+4} & \dots & c_1 & c_2 \\ c_{-n+2} & c_{-n+3} & \dots & c_0 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ c_{-2} & c_{-1} & \dots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_{-1} & c_0 \\ 0 & c_{-n+1} & \dots & c_{-2} & c_{-1} \end{vmatrix} + \Delta_n(0) \Delta_{n-2} \right]^{1/2} = e_{n-1},$$

(esta igualdad resulta de aplicar al determinante $\Delta_n(0)$ la propiedad A referida al menor

$$\begin{vmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & c_0 \end{vmatrix}$$

Si en (6.1) se sustituye la última fila por las potencias sucesivas de $z : z^i (i=0, 1, \dots, n)$, se obtiene para cada valor de ζ_n un polinomio que designaremos con la notación $P_n(z, \zeta_n)$.

Una cota superior del conjunto $E = \{\Delta_n(\zeta_n) \mid \zeta_n \in S_n\}$ se obtiene aplicando en (6.1) la propiedad A de los adjuntos referida al menor $\begin{vmatrix} c_0 & \zeta_n \\ \bar{c}_n & c_0 \end{vmatrix}$, obteniéndose

$$\Delta_n(\zeta_n) \cdot \Delta_{n-2} = \Delta_{n-1}^2 - |P_n(0; \zeta_n)|^2 \tag{6.4}$$

(que, fijado ζ_n , no es sino la fórmula (1.16)).

De ahí,

$$\Delta_n(\zeta_n) = \frac{\Delta_{n-1}^2 - |P_n(0, \zeta_n)|^2}{\Delta_{n-2}}; \tag{6.5}$$

luego el conjunto E admite a $\frac{\Delta_{n-1}^2}{\Delta_{n-2}}$ como cota superior, que será accesible si al punto ζ_n^c , centro del círculo S_n , le corresponde un $P_n(z, \zeta_n^c)$ con una raíz nula.

Más adelante comprobaremos que $\frac{\Delta_{n-1}^2}{\Delta_{n-2}}$ es efectivamente una cota superior accesible de E , es decir, que el polinomio $P_n(z, \zeta_n^c)$ correspondiente se anula en el origen.

También se sigue de (6.5) que, para todo ζ_n de S_n se cumple

$$0 \leq \Delta_n(\zeta_n) \leq \frac{\Delta_{n-1}^2}{\Delta_{n-2}}; \tag{6.6}$$

designando $e_n(\zeta_n) = \frac{\Delta_n(\zeta_n)}{\Delta_{n-1}}$, queda incidentalmente establecido que, siempre es

$$0 \leq e_n(\zeta_n) \leq e_{n-1} \quad \forall \zeta_n \in S_n. \tag{6.7}$$

El caso $e_n(\zeta_n) = 0$ corresponde a $\Delta_n(\zeta_n) = 0$, es decir, a una extensión típica terminal (véase capítulo V). El caso $e_n(\zeta_n) = e_{n-1}$ se verifica, como veremos, cuando $\Delta_n(\zeta_n)$ alcanza su valor máximo.

Podemos expresar cualquier punto ζ_n del círculo en la forma $\zeta_n = \zeta_n^c + w_n$ donde $0 \leq |w_n| \leq e_{n-1}$. El caso $w_n = 0$ corresponde al centro del círculo, en el cual $\Delta_n(\zeta_n)$ toma el valor máximo y los casos $|w_n| = e_{n-1}$ anulan $\Delta_n(\zeta_n)$, luego son las extensiones típicas terminales (véase apartado III del capítulo V).

Hay que observar que el centro del círculo ζ_n^c depende únicamente de c_0, c_1, \dots, c_{n-1} y por consiguiente está fijado, lo mismo que el radio $e_{n-1} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}$, antes de efectuar la extensión. Cada extensión queda pues determinada por w_n y a cada w_n contenido en el círculo le corresponde una extensión posible.

Dado un $w_n (|w_n| \leq e_{n-1})$ le podemos asociar un $\Delta_n(\zeta_n) = \Delta_n(\zeta_n^c + w_n)$ y un $P_n(z; \zeta_n^c + w_n)$ que designaremos, de ahora en adelante, simplemente $P_n(z; w_n)$, ya que ζ_n^c es conocido antes de efectuar la extensión.

Expresado como determinante es

$$P_n(z; w_n) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & \zeta_n^c + w_n \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_0 & c_1 \\ 1 & z & \dots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix},$$

que se puede escribir también en la forma

$$P_n(z; w_n) = P_n(z; 0) - w_n P_{n-1}^*(z). \tag{6.8}$$

Para calcular $P_n(z, 0)$ aplicaremos a $P_n(z, w_n)$ la propiedad A de los adjuntos referida al menor $\begin{vmatrix} c_0 & \zeta_n^c + w_n \\ 1 & z^n \end{vmatrix}$, lo que nos da

$$\begin{aligned} \Delta_{n-2} P_n(z, w_n) &= \Delta_{n-1} z P_{n-1}(z) + P_{n-1}^*(z) \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_{n-1} & \zeta_n^c + w_n \\ c_0 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+2} & \dots & c_0 & c_1 \end{vmatrix} = \\ &= \Delta_{n-1} z P_{n-1}(z) + (-1)^{n+1} P_{n-1}^*(z) [P_n(0, 0) + (-1)^n \Delta_{n-2} w_n] \end{aligned}$$

Ahora bien directamente de la expresión de $P_n(z, w_n)$ en forma de determinante resulta:

$$\begin{aligned} P_n(0, 0) &= (-1)^n \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_{n-1} & \zeta_n^c \\ c_0 & \dots & c_{n-2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+2} & \dots & c_0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^n \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_{n-1} & 0 \\ c_0 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+2} & \dots & c_0 & c_1 \end{vmatrix} = \\ &= -\Delta_{n-2} \zeta_n^c + \Delta_{n-2} \zeta_n^c = 0 \quad (\text{véase (6.3)}). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\Delta_{n-2} P_n(z, w_n) = \Delta_{n-1} z P_{n-1}(z) - \Delta_{n-2} w_n P_{n-1}^*(z)$$

o sea

$$P_n(z, w_n) = e_{n-1} z P_{n-1}(z) - w_n P_{n-1}^*(z) \tag{6.9}$$

que, para $w_n = 0$, se reduce a

$$P_n(z, 0) = e_{n-1} z P_{n-1}(z), \tag{6.10}$$

por consiguiente el polinomio $P_n(z, 0)$ correspondiente al centro de la circunferencia tiene una raíz nula, lo que asegura que la cota superior

$$\frac{\Delta_{n-1}^2}{\Delta_{n-2}} = e_{n-1} \Delta_{n-1}$$

hallada para $\Delta_n(\zeta_n)$ es accesible y, por tanto,

$$\Delta_n(\zeta_n^c) = e_{n-1} \Delta_{n-1}.$$

De (6.9) se deduce, trivialmente, que a valores distintos de w_n corresponden polinomios $P_n(z, w_n)$ distintos, según lo antes dicho.

Se observa que con (6.9) hemos encontrado la fórmula de recurrencia (R-1), dándole además su significado geométrico preciso. Si entre ambas identificamos el coeficiente de $P_{n-1}^*(z)$ tenemos:

$$w_n = -\frac{P_n(0, w_n)}{\Delta_{n-2}}$$

En los casos típicos $|w_n| = e_{n-1}$, es decir, $w_n = e_{n-1} e^{i\phi_n}$ y (6.9) resulta ser

$$P_n^i(z, e_{n-1} e^{i\phi_n}) = e_{n-1} [z P_{n-1}(z) - e^{i\phi_n} P_{n-1}^*(z)]; \tag{6.11}$$

al variar φ_n en el intervalo $[0, 2\pi)$ se obtienen todas las extensiones típicas de T_{n-1} , que como ya sabemos tienen sus raíces unimodulares. La expresión general de éstas es pues (6.11).

Como resumen de lo anterior podemos enunciar el

Teorema 6.1. — «Dada una matriz T_{n-1} definida positiva de Toeplitz, sus posibles extensiones definidas positivas de Toeplitz se obtienen eligiendo el elemento c_n que las determina, en la forma $c_n = \zeta_n^c + w_n$ en donde ζ_n^c viene dado por la fórmula (6.3) y $0 \leq |w_n| < e_{n-1}$. Recíprocamente elegido un número complejo w_n tal que $|w_n| < e_{n-1}$, tenemos una extensión de las buscadas.

Existe una biyección entre el conjunto de las extensiones de T_{n-1} , definidas positivas de Toeplitz y el círculo abierto S_n de centro ζ_n^c y radio e_{n-1} ».

Desde un punto de vista intuitivo geométrico, la situación descrita en el teorema 6.1, se traduce en que al centro de S_n le corresponde lo que llamaremos extensión crítica, en la cual $\Delta_n(0) = \Delta_{n-1} e_{n-1}$ y $P_n(z, 0) = e_{n-1} z P_{n-1}(z)$ y que a la frontera de S_n descrita por $|w_n| = e_{n-1}$, que es la circunferencia $\zeta_n = \zeta_n^c + e_{n-1} e^{i\varphi_n}$ con $0 \leq \varphi_n < 2\pi$, le corresponden todas las extensiones típicas (que hemos llamado terminales en el capítulo V), de las que existe una para cada valor de φ_n en el intervalo $[0, 2\pi)$. Los restantes casos $0 < |w_n| < e_{n-1}$ están pues situados entre la extensión crítica (centro de la circunferencia) y los casos típicos (sobre la circunferencia).

II. Sobre raíces de extensiones

A las situaciones que acabamos de exponer corresponden raíces de $P_n(z, w_n)$ interiores al círculo unidad sobre las que, intuitivamente aún y basándonos en el teorema de continuidad de las raíces, podemos obtener todavía alguna información adicional.

Recordemos que las raíces de cualquier extensión típica $P_n(z, e_{n-1} e^{i\varphi_n})$ con $0 \leq \varphi_n < 2\pi$ son unimodulares y asimismo simples y que, por otra parte, se verifica

$$w_n = \frac{e_{n-1} z P_{n-1}(z) - P_n(z, w_n)}{P_{n-1}^*(z)} \tag{6.12}$$

y, si consideramos que z es raíz de $P_n(z, w_n)$,

$$w_n = \frac{e_{n-1} z P_{n-1}(z)}{P_{n-1}^*(z)} \quad \forall z \ni P_n(z, w_n) = 0. \tag{6.13}$$

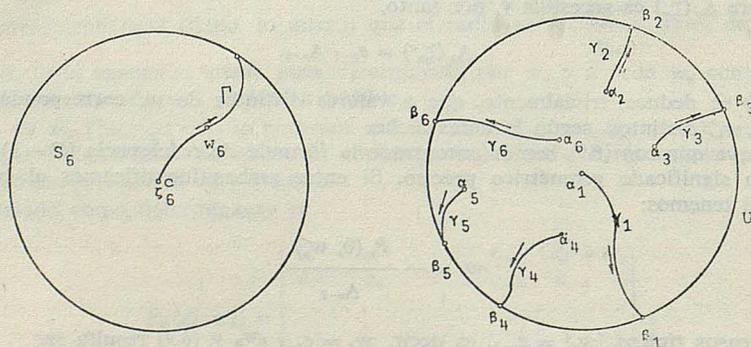


FIG. 1

Tracemos en el círculo S_n , un arco simple de Jordán cualquiera Γ , desde el origen a la circunferencia frontera; mientras w_n lo recorra, variando su módulo de forma continua de 0 a e_{n-1} , las raíces de $P_n(z, w_n)$ se desplazan en el interior del círculo unidad, describiendo n arcos simples de Jordán $\gamma_i \mid_{i=1}^n$ desde las raíces de la extensión crítica ($w_n = 0$) hasta las raíces de una extensión típica ($|w_n| = e_{n-1}$).

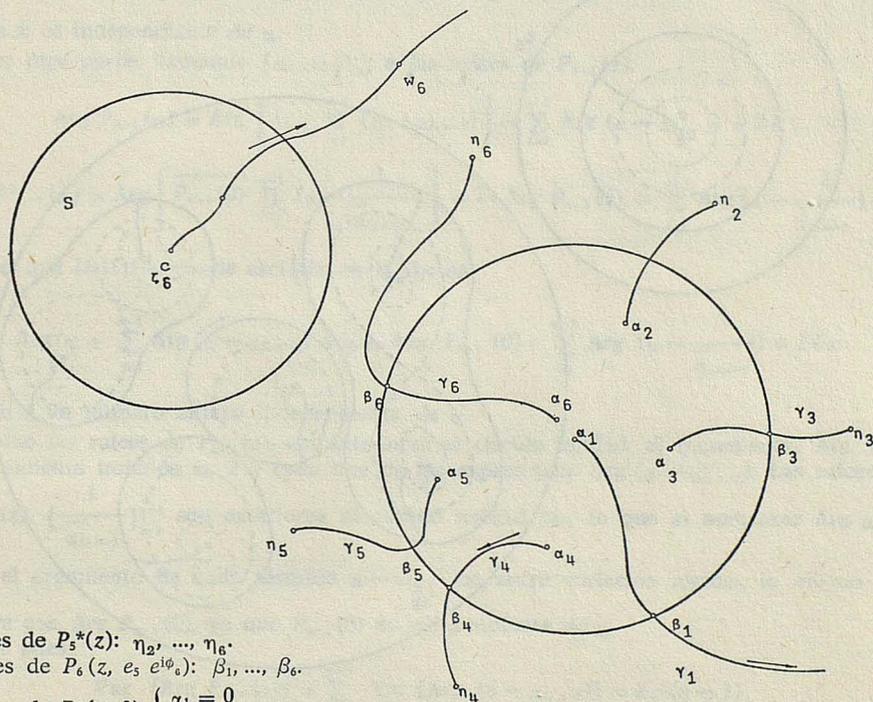
En el caso de que alguna raíz de $z P_{n-1}(z)$ sea múltiple, ésta es origen de tantos arcos como indique el orden de multiplicidad. (Ver figura 1, en la que se considera el caso particular $n = 6$, siendo:

$$\text{Raíces de } P_6(z, 0) \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \text{ raíces de } P_5(z) \end{cases}$$

$$\text{Raíces de } P_6(z, e_5 e^{i\phi_5}): \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6.$$

Siguiendo con este proceso, si prolongamos Γ hasta que forme un arco simple de Jordán en \bar{C} , desde el centro de S_n al infinito, a medida que w_n lo recorra creciendo su módulo de manera continua desde e_{n-1} hasta infinito, los n arcos γ_i se prolongan continuamente en el exterior del círculo unidad; uno de ellos, el correspondiente a la raíz nula inicial, formando un arco simple de Jordan en \bar{C} desde el origen al infinito, y los $n - 1$ restantes, hasta las raíces de $P_{n-1}^*(z)$ formando $n - 1$ arcos simples, de Jordan en C .

En el caso de que $z P_{n-1}(z)$ tenga alguna raíz múltiple α , van a parar a $\frac{1}{\alpha}$ tantos arcos como indique el orden de multiplicidad; en particular si cero es múltiple, van a terminar en ∞ . (Véase fórmula (6.13) y figura 2).



Raíces de $P_5^*(z)$: η_2, \dots, η_6 .

Raíces de $P_6(z, e_5 e^{i\phi_5})$: β_1, \dots, β_6 .

$$\text{Raíces de } P_6(z, 0) \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2, \dots, \alpha_6 \text{ raíces de } P_5(z). \end{cases}$$

FIG. 2

Observación. — Nótese que al considerar puntos w_n exteriores al círculo S_n , el determinante $\Delta_n(\zeta_n)$ definido en (6.1) es negativo y, por consiguiente, la matriz T_n no es definida positiva. A pesar de ello, la interpretación geométrica que acabamos de exponer sigue siendo correcta puesto que, como dijimos en la nota a II y III del capítulo I, las fórmulas de recurrencia $(R-1)$, $(R-2)$, $(R-3)$ y $(R-4)$ y, en particular, la fórmula (6.13) son válidas aunque la matriz no sea definida positiva.

Por otra parte, consideremos un punto cualquiera de Γ , $w_n = |w_n| e^{i\phi_n}$ con $0 < |w_n| < e_{n-1}$, $0 \leq \phi_n < 2\pi$. Si elegimos $|w_n|$ suficientemente pequeño y manteniéndolo fijo hacemos variar el argumento desde ϕ_n hasta $\phi_n + 2\pi$, es decir, si w_n recorre una circunferencia de centro ζ_n^c y radio $|w_n|$, las raíces de $P_n(z, w_n)$ describen en el interior del círculo unidad sendas curvas, que por continuidad serán cerradas; en el interior del recinto que limitan se encuentra situada la correspondiente raíz de $P_n(z, 0)$, y habrá tantas curvas como raíces distintas tenga $z P_{n-1}(z)$. Al crecer $|w_n|$ estas curvas llegan a encontrarse con un punto múltiple y su número se va reduciendo hasta que $|w_n|$ es tan próximo a e_{n-1} que dan lugar a una única curva próxima a la circunferencia unidad, que llega a confundirse con ésta al tender $|w_n|$ a e_{n-1} . (Obsérvese que de $w_n = -\frac{P_n(0)}{\Delta_{n-2}}$ se

deduce $\frac{w_n}{e_{n-1}} = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n \alpha_{in}(w_n)$, siendo $\alpha_{in}(w_n)$ las raíces de $P_n(z, w_n)$ y por tanto, al tender $|w_n|$ a e_{n-1} cada $|\alpha_{in}|$ tiende a 1). (Ver figura 3).

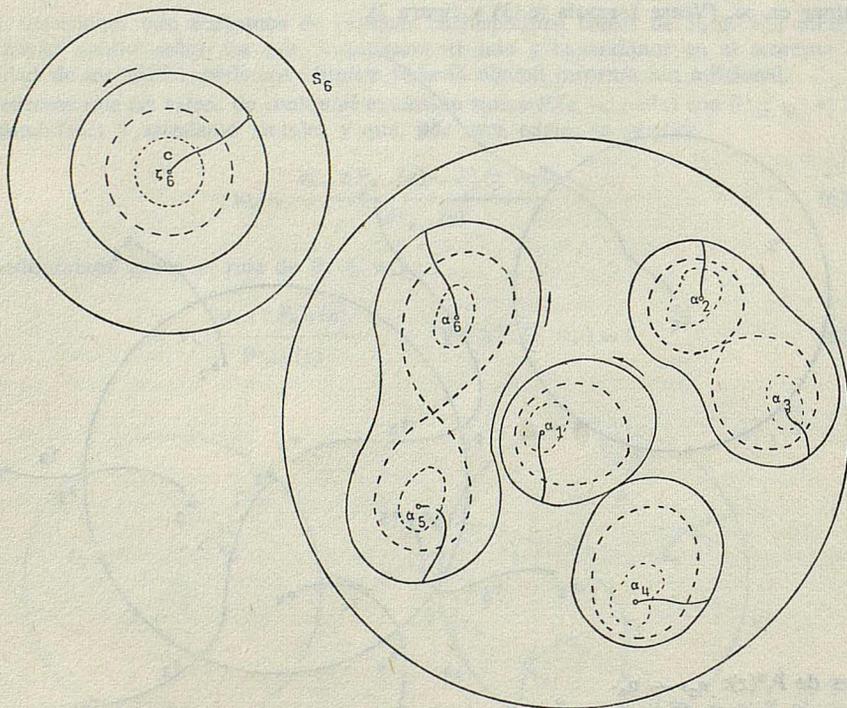


FIG. 3

Sin insistir en la cuestión indicamos:

Nota. — Los ceros de $\frac{dw_n}{dz}$ son puntos de ramificación de la función racional

$$w_n = \frac{e_{n-1} z P_{n-1}(z)}{P_{n-1}^*(z)}$$

salvo en estos puntos la representación es conforme, luego las curvas imágenes de $|w_n| = k$, $\arg w_n = k_1$, con k, k_1 constantes, que no pasen por ellos se cortan ortogonalmente.

Estas consideraciones intuitivas justifican pues, que examinemos, aunque sea someramente, qué puede decirse acerca de las raíces en cuestión.

En lo que sigue designaremos con α ($|\alpha| = 1$) una raíz cualquiera de la extensión típica $P_n(z, e_{n-1} e^{i\phi})$ ($0 \leq \phi < 2\pi$).

Asimismo en las consideraciones de tipo geométrico que hagamos supondremos, sin que se vuelva a advertir, que U o cualquier arco de U es recorrido siempre en sentido positivo.

Teorema 6.2. — «Si se incrementa $\arg \alpha$ en 2π , ϕ queda incrementado en $2\pi n$; es decir, mientras α recorre una vez la circunferencia U , $e^{i\phi}$ la recorre n veces».

Demostración. — Evidentemente se sigue de (6.11) que

$$\alpha P_{n-1}(\alpha) = e^{i\phi} P_{n-1}^*(\alpha) \tag{6.14}$$

luego se tiene

$$\arg \alpha + \arg P_{n-1}(\alpha) = \phi + \arg P_{n-1}^*(\alpha) + 2k\pi \tag{6.15}$$

donde k es independiente de α .

Por otra parte, llamando $\{\alpha_{i, n-1}\}_{i=1}^{n-1}$ a las raíces de $P_{n-1}(z)$:

$$\arg P_{n-1}(\alpha) = \arg \left[\Delta_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha - \alpha_{i, n-1}) \right] = \sum_{i=1}^{n-1} \arg (\alpha - \alpha_{i, n-1}) + 2h\pi$$

$$\arg P_{n-1}^*(\alpha) = \arg \left[\overline{P_{n-1}(0)} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha_{i, n-1}} \right) \right] = -\arg P_{n-1}(0) + \sum_{i=1}^{n-1} \arg \left(\alpha - \frac{1}{\alpha_{i, n-1}} \right) + 2j\pi$$

por lo que (6.15) se puede escribir en la forma

$$\arg \alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \arg (\alpha - \alpha_{i, n-1}) = \phi - \arg P_{n-1}(0) + \sum_{i=1}^{n-1} \arg \left(\alpha - \frac{1}{\alpha_{i, n-1}} \right) + 2l\pi$$

siendo l un número entero independiente de α .

Como las raíces de $P_{n-1}(z)$ son interiores al círculo unidad, al incrementar $\arg \alpha$ en 2π , aumenta también en 2π cada una de las expresiones $\arg (\alpha - \alpha_{i, n-1})$. Las raíces de

$P_{n-1}^*(z)$, $\left\{ \frac{1}{\alpha_{i, n-1}} \right\}_{i=1}^{n-1}$ son exteriores al círculo unidad por lo que al aumentar $\arg \alpha$ en

2π , el argumento de cada término $\alpha - \frac{1}{\alpha_{i, n-1}}$ no sufre variación alguna, lo mismo que ocurre con $\arg P_{n-1}(0)$, ya que $P_{n-1}(0)$ es independiente de α .

Así pues:

$$\text{Var} (\arg P_{n-1}(\alpha)) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Var} [\arg (\alpha - \alpha_{i, n-1})] = 2\pi(n-1)$$

$$\text{Var} (\arg P_{n-1}^*(\alpha)) = 0.$$

Por tanto,

$$(\text{Arg } \alpha + 2\pi) + (\text{Arg } P_{n-1}(\alpha) + 2\pi(n-1)) = (\varphi + \text{Var } \varphi) + \text{Arg } P_{n-1}^*(\alpha) + 2k\pi$$

de donde resulta

$$\text{Var } \varphi = 2\pi + 2\pi(n-1) = 2\pi n. \#$$

El recíproco de este teorema es cierto y se obtendrá como consecuencia del

Corolario 6.3. — «Sean α y β dos raíces consecutivas de $P_n(z, e_{n-1} e^{i\phi})$ tales que $\text{Arg } \beta = \text{Arg } \alpha + \rho$ con $\rho > 0$. Si se incrementa $\text{Arg } \alpha$ en ρ , φ queda incrementado en 2π y recíprocamente.

Geométricamente esto significa que mientras α se desplaza en U entre dos raíces consecutivas, $e^{i\phi}$ recorre U y que, recíprocamente, si $e^{i\phi}$ recorre una vez la circunferencia U , cada raíz de $P_n(z, e_{n-1} e^{i\phi})$ se desplaza hasta la siguiente».

Demostración. — Si tomamos una raíz de $P_n(z, e_{n-1} e^{i\phi})$ distinta de α , lo que equivale a considerar que α se ha desplazado sobre U hasta coincidir con dicha raíz, la ecuación (6.11) sigue siendo la misma, y por consiguiente φ sólo ha podido variar en $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, o sea,

$$\text{Var } \varphi = 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \quad (6.16)$$

Por otra parte, podemos escribir (6.14) en la forma

$$\alpha P_{n-1}(\alpha) = e^{i\phi} P_{n-1}^*(\alpha) = e^{i\phi} \alpha^{n-1} \overline{P_{n-1}(\frac{1}{\alpha})} = e^{i\phi} \alpha^{n-1} \overline{P_{n-1}(\bar{\alpha})},$$

es decir,

$$\frac{P_{n-1}(\alpha)}{\overline{P_{n-1}(\alpha)}} = e^{i\phi} \alpha^{n-2}, \quad (6.17)$$

de donde,

$$2 \sum_{i=1}^{n-1} \text{Arg}(\alpha - \alpha_{i, n-1}) = \varphi + (n-2) \text{Arg } \alpha + 2j\pi \quad (6.18)$$

siendo $j \in \mathbb{Z}$, independiente de α .

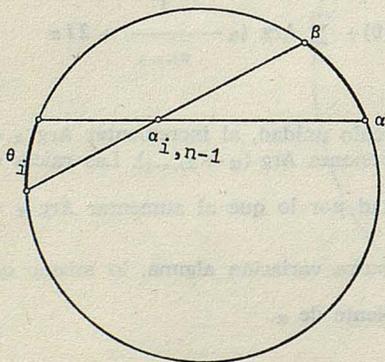


FIG. 4

Supongamos que el punto α se desplaza de α a β . Entonces, evidentemente, la variación de $\text{Arg}(\alpha - \alpha_{i, n-1})$ es el ángulo bajo el que se ve desde $\alpha_{i, n-1}$ el segmento rectilíneo que une los afijos de α y β (véase figura 4). Usando la notación indicada en la figura 4 podemos escribir:

$$\text{Var} [\text{Arg}(\alpha - \alpha_{i, n-1})] = \frac{\text{Var}(\text{Arg } \alpha) + \theta_i}{2}$$

siendo $\theta_i > 0$.

De (6.18) se sigue:

$$\text{Var } \varphi + (n-2) \text{Var} (\text{Arg } \alpha) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\text{Var} (\text{Arg } \alpha) + \theta_i}{2} = (n-1) \text{Var} (\text{Arg } \alpha) + \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i,$$

luego

$$\text{Var } \varphi > 0$$

pudiendo pues, expresar (6.16) en la forma más precisa:

$$\text{Var } \varphi = 2 k \pi \quad \text{con } k \in N. \tag{6.19}$$

De (6.19) y del teorema (6.2) se deduce que cuando α se traslada hasta la raíz consecutiva β , φ se incrementa en 2π , es decir $e^{i\varphi}$ recorre U .

Recíprocamente, si φ aumenta en 2π , la ecuación (6.11) no varía y sus raíces siguen siendo las mismas si bien cada una se ha desplazado hasta la inmediata consecutiva, pues en caso contrario se contradiría el resultado que acabamos de probar. \ddagger

El recíproco del teorema 6.2 es ahora inmediato:

Teorema 6.4. — «Si se incrementa φ en $2\pi n$, $\text{Arg } \alpha$ queda incrementado en $2\pi n$ ».

Teorema 6.5. — *Separación de las raíces de dos extensiones típicas.*

«Las raíces de dos extensiones típicas distintas de $\{P_i(z)\}_{i=0}^{n-1}$ se separan mutuamente, es decir, dadas dos raíces consecutivas de una de ellas existe una única raíz de la otra extensión cuyo argumento principal está comprendido entre los argumentos principales de las dos raíces consideradas».

Demostración. — Sean dos extensiones típicas distintas $P_n(z, e_{n-1} e^{i\varphi_1})$, $P_n(z, e_{n-1} e^{i\varphi_2})$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ siendo, por ejemplo, $\varphi_1 < \varphi_2$. Si no se verifica la separación de las raíces podemos considerar, sin que ello suponga restricción alguna, que si $\alpha = e^{i\varphi_1}$, β son raíces consecutivas de $P_n(z, e_{n-1} e^{i\varphi_1})$ y $a = e^{i\varphi_2}$, b son raíces consecutivas de $P_n(z, e_{n-1} e^{i\varphi_2})$, a y b están comprendidas entre α y β , en el sentido de que

$$\text{Arg } \alpha < \text{Arg } a < \text{Arg } b < \text{Arg } \beta. \tag{6.20}$$

(véase figura 5).

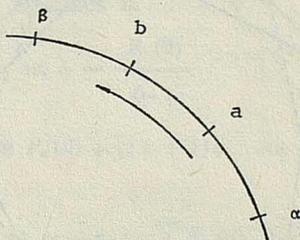


FIG. 5

Supongamos que $\zeta = e^{i\varphi}$ recorre U . Entonces, en virtud del corolario 6.3 es válido el siguiente cuadro:

Para	$\zeta = \alpha$	$\varphi = \varphi_1$
»	$\zeta = a$	$\varphi = \varphi_2$
»	$\zeta = b$	$\varphi = \varphi_2 + 2\pi$
»	$\zeta = \beta$	$\varphi = \varphi_1 + 2\pi$

según el cual, se puede escribir (6.20) en la forma

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_2 + 2\pi < \varphi_1 + 2\pi$$

claramente contradictoria. Ello prueba la tesis. $\#$

Nota. — Para cada w_n ($0 < |w_n| \leq e_{n-1}$) sabemos que

$$\text{Arg } w_n = \sum_{i=1}^n \text{Arg } \alpha_{in}(w_n) + \arg(-1)^{n+1} + 2k\pi = \sum_{i=1}^n \text{Arg } \alpha_{in}(w_n) + l\pi$$

donde l es un número entero cuya paridad depende de la de n .

Se observa que esta igualdad es independiente de $|w_n|$. En el caso particular en que $|w_n| = e_{n-1}$ (típico), cuando hacemos variar $\arg w_n$ de 0 a 2π , la suma de los argumentos de las raíces se incrementa en 2π y como cada raíz se desplaza hasta la consecutiva, puede deducirse de aquí el resultado del teorema anterior. No insistiremos en este punto.

Ya hemos citado que por ser unimodulares y distintas las raíces de cualquier extensión típica terminal $P'_n(z, e_{n-1} e^{i\phi})$ de $\{P_i(z)\}_0^{n-1}$, su envoltura convexa es un polígono convexo inscrito en U , con vértices las citadas raíces. Recordando la fórmula (6.11) al variar ϕ en el intervalo $[0, 2\pi)$ obtendremos todas las envolturas convexas de las raíces de dichas extensiones típicas terminales; en el interior de cada una de ellas se encuentran todas las raíces de $P_i(z)$, $i = 1, \dots, n-1$. De todo ello se concluye el

Teorema 6.6. — «Todas las raíces de los polinomios $P_i(z)$ ($i = 1, \dots, n-1$) pertenecen al interior del conjunto convexo K , intersección de las envolturas convexas (polígonos convexos) de las raíces de todas las extensiones típicas posibles de $\{P_i(z)\}_{i=0}^{n-1}$ ».

(Véase figura 6).

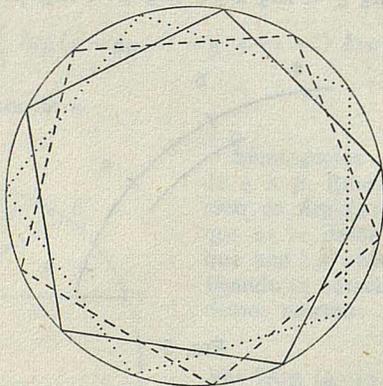


FIG. 6

Este resultado mejora evidentemente, el expuesto en el capítulo V, tal que hemos hecho referencia anteriormente.

CAPÍTULO VII

LAS FORMULAS PARAMETRICAS FUNDAMENTALES
Y SUS APLICACIONES

La teoría paramétrica de los *PO* sobre la circunferencia unidad ha sido elaborada principalmente por Geronimus (véase [6] y el capítulo VIII de [7]), usando como parámetros una sucesión de constantes $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ con la restricción $|a_n| < 1$.

En este capítulo, consideraremos en primer lugar dos sucesiones de parámetros $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, que surgen de modo natural, y resultan de descomponer cada uno de los parámetros a_n de Geronimus en otros dos. Más adelante introduciremos una tercera sucesión de parámetros $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$, que permite construir las dos anteriores.

Nos ocuparemos también de las propiedades y relaciones entre dichos parámetros, así como de algunas de sus aplicaciones, especialmente al estudio de las raíces de los polinomios.

I. Las fórmulas paramétricas fundamentales

En el capítulo I, partiendo de una sucesión $\{P_n(z)\}_0^{\infty}$ de *PO* referida a una matriz m hermitiana, hemos deducido la fórmula de recurrencia

$$P_n(z) = e_{n-1} z P_{n-1}(z) + \frac{P_n(0)}{\Delta_{n-2}} P_{n-1}^*(z),$$

y otras tres equivalentes a ella.

En el capítulo VI se ha obtenido a su vez

$$P_n(z) = e_{n-1} z P_{n-1}(z) - w_n P_{n-1}^*(z)$$

que da una interpretación natural de la fórmula anterior.

Comparando ambas fórmulas teníamos la

$$w_n = - \frac{P_n(0)}{\Delta_{n-2}} \tag{7.1}$$

y por tanto,

$$\text{Arg } w_n = \text{Arg } P_n(0) + (2k + 1)\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \tag{7.2}$$

Si normalizamos (7.1) resulta:

$$w_n = - e_{n-1} \sqrt{e_n} P_n(0). \tag{7.3}$$

Recordando la expresión (6.3) del centro ζ_n^c de la circunferencia y que w_n fue introducido como $c_n = \zeta_n = w_n + \zeta_n^c$, podemos escribir:

$$w_n = c_n - \zeta_n^c = \frac{1}{\Delta_{n-2}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+2} & c_{-n+3} & \dots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & c_n \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_{n-2}} [z P_{n-1}(z)_0 1] \tag{7.4}$$

obteniendo simultáneamente la expresión de w_n en función de los parámetros c_i $|_{i=1}^n$ y su relación con el momento de $z P_{n-1}(z)$.

Si llamamos $\{\alpha_{in}\}_{i=1}^n$ a las raíces de $P_n(z)$, según las fórmulas de Cardano-Vieta,

$$w_n = (-1)^{n+1} e_{n-1} \alpha_{1n} \alpha_{2n} \dots \alpha_{nn} = (-1)^{n+1} e_{n-1} \prod_{i=1}^n \alpha_{in}; \quad (7.5)$$

como $|\alpha_{in}| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) resulta nuevamente $|w_n| \leq e_{n-1}$. (Igualmente, $|w_n| = e_{n-1}$ es terminal pues corresponde al caso $|\alpha_{in}| = 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$).

Por otra parte, ya vimos en el corolario 1.5 que la sucesión $\{e_n\}_0^\infty$ monótona no creciente, es convergente y que su límite es no negativo; pueden entonces presentarse dos casos que, siguiendo la notación de Szegő, llamaremos C y D:

$$\begin{cases} \text{Caso C: } \lim_n e_n = e > 0 \\ \text{Caso D: } \lim_n e_n = e = 0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Si sustituimos el valor de (7.1) en (1.16) resulta

$$|P_n(0)|^2 = \Delta_{n-2}^2 |w_n|^2 = \Delta_{n-1}^2 - \Delta_n \Delta_{n-2},$$

esto es

$$|w_n|^2 = e_{n-1}^2 - e_n e_{n-1} = e_{n-1} (e_{n-1} - e_n) \quad (7.7)$$

fórmula fundamental de la que nos ocupamos en este capítulo y que podemos expresar de varias formas equivalentes

$$1 = \frac{e_n}{e_{n-1}} + \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} = \frac{e_n}{e_{n-1}} + e_n |P_n(0)|^2 \quad (7.8)$$

$$e_n = e_{n-1} \left(1 - \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} \right) = e_{n-1} (1 - e_n |P_n(0)|^2) = e_{n-1} \left(1 - \prod_{i=1}^n |\alpha_{in}|^2 \right) \quad (7.9)$$

Obsérvese que (7.9) permite obtener, por recurrencia, la sucesión $\{e_n\}$ a partir de la $\{w_n\}$, fijado $e_0 > |w_1|$, pero no parece fácil encontrar una condición sencilla que deba cumplir $\{w_n\}$ ni aún $\{|w_n|^2\}$ para que $\{e_n\}$ sea no creciente. Recíprocamente, dada la sucesión decreciente $\{e_n\}$ se construye fácilmente la $\{|w_n|^2\}_1^\infty$, a partir de (7.7), pero no se puede obtener $\{w_n\}_1^\infty$.

Conviene también resaltar que a la familia de todos los $P_n(z, w_n)$ tales que $|w_n|$ sea constante corresponde el mismo e_n (luego el mismo Δ_n), definido por (7.9) y menor que e_{n-1} en cuanto sea $|w_n| < e_{n-1}$.

Consecuencias inmediatas de las fórmulas anteriores son los siguientes resultados:

Proposición 7.1. — «La sucesión $\{w_n\}_1^\infty$ es infinitésima».

Demostración. — Basta considerar (7.7), teniendo presente que $\{e_n\}$ es convergente. $\#$

Proposición 7.2. — «La sucesión $\{w_n\}_1^\infty$ es de cuadrado sumable, es decir, $\sum_1^\infty |w_n|^2$ es convergente».

Demostración. — Notemos que $\sum_1^\infty |w_n|^2 = \sum_1^\infty e_{n-1} (e_{n-1} - e_n)$. Entonces, como la sucesión $\{e_{n-1}\}_1^\infty$ es monótona no creciente, de términos no negativos y la serie $\sum_1^\infty (e_{n-1} - e_n)$ es convergente, del lema de Abel se sigue la tesis. $\#$

Incidentalmente se obtiene, a la vez, una consecuencia de la proposición anterior:

Corolario 7.3. — «La sucesión $\{e_{n-1} - e_n\}_1^\infty$ es de cuadrado sumable».

Demostración. — Acabamos de probar que $\sum_1^{\infty} e_{n-1} (e_{n-1} - e_n)$ es convergente; análogamente, haciendo uso del lema de Abel se prueba que asimismo lo es $\sum_1^{\infty} e_n (e_{n-1} - e_n)$. Por consiguiente,

$$\sum_1^{\infty} (e_{n-1} - e_n)^2 = \sum_1^{\infty} e_{n-1} (e_{n-1} - e_n) - \sum_1^{\infty} e_n (e_{n-1} - e_n)$$

es también convergente. \ddagger

La relación existente entre $|w_n|$ y e_n (con e_{n-1} , naturalmente, conocido) viene dada por la fórmula (7.7), en la que si escribimos $|w_n| = x$, $e_n = y$ obtenemos el arco de parábola $x^2 = e_{n-1} (e_{n-1} - y)$ con $0 \leq x \leq e_{n-1}$ o lo que es lo mismo $0 \leq y \leq e_{n-1}$. (Véase figura 1)

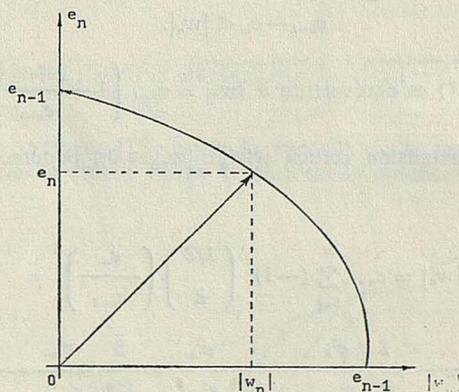


FIG. 1

para	$x = 0$	$y = e_{n-1}$	(extensión crítica)
para	$x = e_{n-1}$	$y = 0$	(caso terminal)

Nota. — Los parámetros a_n de Geronimus vienen relacionados con los nuevos parámetros w_n y e_{n-1} mediante la igualdad

$$a_n = \frac{\overline{w_{n+1}}}{e_n},$$

siendo la restricción $|a_n| < 1$ equivalente a nuestra $|w_{n+1}| < e_n$.

En términos de a_n , se clasifican los casos *C* y *D* según que el producto infinito $\prod_0^{\infty} (1 - |a_n|^2)$ sea, respectivamente convergente o divergente; ahora bien, de acuerdo con la relación anterior y (7.9)

$$\prod_0^{\infty} (1 - |a_n|^2) = \prod_0^{\infty} \left(1 - \frac{|w_{n+1}|^2}{e_n^2} \right) = \prod_0^{\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{e}{e_0},$$

donde es $e = 0$ en el caso *D* y $e > 0$ en el caso *C*, por lo que la clasificación de Geronimus coincide con la establecida en (7.6).

II. Acotaciones del parámetro w_n

Salvo en el caso terminal $|w_n| = e_{n-1}$, siempre se verifica la desigualdad $|w_n| < e_{n-1}$. Como $|w_n|$, e_{n-1} y e_n están ligados por la fórmula fundamental (o cualquiera de sus equivalentes) se puede, según los distintos casos, acotar superior e inferiormente $|w_n|$ en función de e_{n-1} y e_n de manera más exacta que la ya conocida

$$0 \leq |w_n| < e_{n-1}.$$

Si escribimos (7.7) en la forma $\frac{|w_n|}{e_{n-1}} = \frac{e_{n-1} - e_n}{|w_n|}$, se obtiene directamente

$$e_{n-1} - e_n < |w_n|.$$

La propia fórmula (7.7) es equivalente a $|w_n| = e_{n-1} \left(1 - \frac{e_n}{e_{n-1}}\right)^{1/2}$ y como es $\frac{e_n}{e_{n-1}} < 1$ (salvo en la extensión crítica trivial $|w_n| = 0$), podemos desarrollar en serie binómica, resultando

$$\begin{aligned} |w_n| &= e_{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} \left(\frac{e_n}{e_{n-1}}\right)^k = \\ &= e_{n-1} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{e_n}{e_{n-1}} - \frac{1}{8} \frac{e_n^2}{e_{n-1}^2} - \frac{1}{16} \frac{e_n^3}{e_{n-1}^3} - \frac{5}{128} \frac{e_n^4}{e_{n-1}^4} - \frac{7}{256} \frac{e_n^5}{e_{n-1}^5} - \dots \right] \end{aligned} \quad (7.10)$$

igualdad ésta, que nos suministra una sucesión de cotas superiores de $|w_n|$, cada una de ellas más precisa que la anterior:

$$1) \quad |w_n| < e_{n-1} \quad (7.11)$$

$$2) \quad |w_n| < e_{n-1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{e_n}{e_{n-1}}\right) = e_{n-1} - \frac{e_n}{2} \quad (7.11)$$

$$3) \quad |w_n| < e_{n-1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{e_n}{e_{n-1}} - \frac{1}{8} \frac{e_n^2}{e_{n-1}^2}\right) = e_{n-1} - \frac{e_n}{2} - \frac{e_n^2}{8 e_{n-1}} \quad (7.11)$$

y en general

$$|w_n| < e_{n-1} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{1/2}{k} \left(\frac{e_n}{e_{n-1}}\right)^k = e_{n-1} - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{1/2}{k} \frac{e_n^k}{e_{n-1}^{k-1}}, \quad (7.12)$$

donde $m \in N$.

Asimismo se encuentran nuevas cotas superiores e inferiores de $|w_n|$ mediante distintas interpretaciones geométricas de la fórmula fundamental. Por citar algún ejemplo, podemos considerar (7.7) como una expresión del teorema de Pitágoras (véase figura 2), obteniendo fácilmente

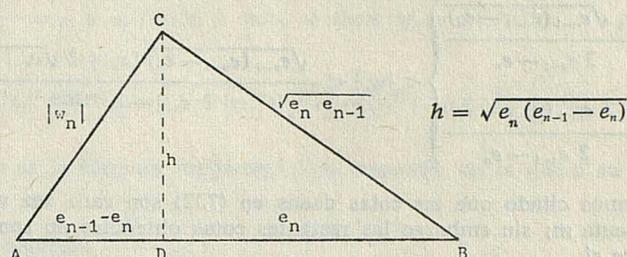


FIG. 2

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{e_n(e_{n-1} - e_n)} \\ e_{n-1} - e_n \end{array} \right\} < |w_n| < (e_{n-1} - e_n) + \sqrt{e_n(e_{n-1} - e_n)} = \sqrt{e_{n-1} - e_n} [\sqrt{e_{n-1} - e_n} + \sqrt{e_n}] \quad (7.13)$$

$$(7.14)$$

También puede interpretarse (7.7) como la fórmula de la potencia de un punto respecto de una circunferencia (véase figura 3), resultando entonces

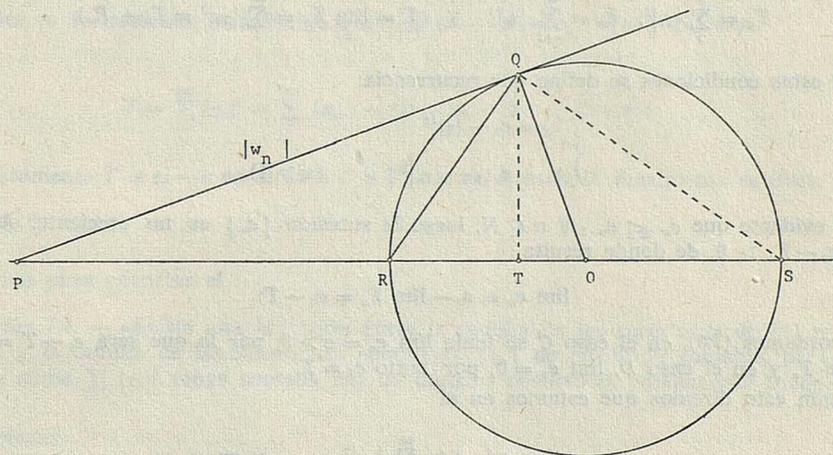


FIG. 3

$$\overline{PQ} = |w_n|$$

$$\overline{PS} = e_{n-1}$$

$$\overline{PR} = e_{n-1} - e_n$$

$$\overline{RO} = \overline{OS} = \overline{OO} = \frac{e_n}{2}$$

$$\overline{QT} = \frac{e_n \sqrt{e_{n-1}(e_{n-1} - e_n)}}{2 e_{n-1} - e_n}; \quad \overline{PT} = \frac{2 e_{n-1}(e_{n-1} - e_n)}{2 e_{n-1} - e_n}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{e_n \sqrt{e_{n-1}(e_{n-1} - e_n)}}{2 e_{n-1} - e_n} \\ & \frac{2 e_{n-1}(e_{n-1} - e_n)}{2 e_{n-1} - e_n} \end{aligned} \right\} < |w_n| < \frac{\sqrt{e_{n-1}(e_{n-1} - e_n)} [e_n + 2 \sqrt{e_{n-1}(e_{n-1} - e_n)}]}{2 e_{n-1} - e_n} \quad (7.15)$$

$$(7.16)$$

Ya hemos citado que las cotas dadas en (7.12) son cada vez más precisas a medida que aumenta m ; sin embargo las restantes cotas obtenidas no son, en general, comparables entre sí.

III. La familia de parámetros $\{\tau_n\}_1^\infty$

Consideremos una sucesión de números complejos $\{\tau_n\}_1^\infty \in l^2$, es decir tal que $\sum_1^\infty |\tau_n|^2 < \infty$, y un número positivo e_0 de manera que $e_0 \geq \sum_1^\infty |\tau_n|^2$. (Designaremos con T_n la suma parcial n -ésima de la serie $\sum_1^\infty |\tau_n|^2$, con R_n su resto n -ésimo y con T su suma, o sea,

$$T_n = \sum_1^n |\tau_i|^2, \quad R_n = \sum_{n+1}^\infty |\tau_i|^2 \quad \text{y} \quad T = \lim_n T_n = \sum_1^\infty |\tau_i|^2 = T_n + R_n.$$

En estas condiciones se define por recurrencia:

$$\begin{cases} e_1 = e_0 - |\tau_1|^2 \\ e_n = e_{n-1} - |\tau_n|^2 \end{cases} \quad (n > 1). \quad (7.17)$$

Es evidente que $e_n \leq e_{n-1} \forall n \in N$, luego la sucesión $\{e_n\}$ es no creciente. Además $e_n = e_0 - T_n > 0$, de donde resulta

$$\lim e_n = e_0 - \lim T_n = e_0 - T;$$

si recordamos (7.6), en el caso C se tenía $\lim e_n = e > 0$, por lo que será $e_0 - T = e > 0$ y, $e_0 > T$, y en el caso D , $\lim e_n = 0$, por tanto $e_0 = T$.

Según esto diremos que estamos en el

$$\begin{cases} \text{caso } C & \text{si } e_0 > \sum_1^\infty |\tau_n|^2 \\ \text{caso } D & \text{si } e_0 = \sum_1^\infty |\tau_n|^2. \end{cases} \quad \text{y en el} \quad (7.18)$$

Análogamente, se define

$$\begin{cases} w_1 = \tau_1 \sqrt{e_0} \\ w_n = \tau_n \sqrt{e_{n-1}} = \tau_n \sqrt{e_0 - T_{n-1}} \end{cases} \quad (n > 1). \quad (7.19)$$

Se observa que la sucesión $\{w_n\}$ así obtenida converge a 0 y que

$$|w_n|^2 = |\tau_n|^2 e_{n-1} = |\tau_n|^2 (e_0 - T_{n-1})$$

de donde se sigue que $\{w_n\}$ es de cuadrado sumable.

También como $\frac{w_n}{\sqrt{e_{n-1}}} = \tau_n$ y τ_n tiende a cero, se tiene $w_n = o(\sqrt{e_{n-1}})$.

Si ahora eliminamos $|\tau_n|^2$ entre $e_n = e_{n-1} - |\tau_n|^2$ y $|W_n|^2 = |\tau_n|^2 e_{n-1}$ resulte $e_n = e_{n-1} - \frac{|W_n|^2}{e_{n-1}} = e_{n-1} \left(1 - \frac{|W_n|^2}{e_{n-1}^2} \right)$ que es la fórmula fundamental ya conocida, de la que a su vez se

obtiene nuevamente la condición $\frac{|w_n|}{e_{n-1}} \leq 1$.

Así pues, hemos efectuado una parametrización, que nos da las sucesiones $\{w_n\}$ y $\{e_n\}$ en función de la sucesión $\{\tau_n\} \in l^2$, habiendo fijado de antemano e_0 , primer término de la sucesión $\{e_n\}$.

En otras palabras, dada una sucesión $\{\tau_n\}$ y un número e_0 con las propiedades antes especificadas, quedan definidas $\{w_n\}$ y $\{e_n\}$ en las condiciones requeridas y, como se conoce $P_0(z) = e_0$, mediante la fórmula de recurrencia $P_n(z) = e_{n-1} z P_{n-1}(z) - w_n P_{n-1}^*(z)$ se puede construir una sucesión de PO relativos a la circunferencia unidad.

Recíprocamente es trivial que, dada una sucesión $\{P_n(z)\}$ de PO relativos a U , se conocen $\{e_n\}_0^\infty$ y $\{w_n\}_1^\infty$, de donde se obtiene $\{\tau_n\}$. Es inmediato que la sucesión $\{\tau_n\}$ que así resulta es de cuadrado sumable ya que $|\tau_n|^2 = \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}} = e_{n-1} - e_n$ y entonces

$$T = \sum_1^\infty |\tau_n|^2 = \sum_1^\infty (e_{n-1} - e_n) = e_0 - \lim_n e_n < +\infty;$$

más exactamente $T = e_0 - e$ en el caso C y $T = e_0$ en el caso D. Finalmente es obvio que $\sum_1^\infty |\tau_n|^2 \leq e_0$.

Podemos pues enunciar el

Teorema 7.4. — «Existe una biyección entre la familia de las sucesiones de PO relativos a U y la familia de las sucesiones complejas $\{\tau_n\}$ de cuadrado sumable, para las cuales la suma $\sum |\tau_n|^2$ venga acotada por un número positivo e_0 previamente fijado».

Observaciones

i) La fórmula (7.4) nos permite dar una interpretación natural del parámetro τ_n . En efecto:

$$\begin{aligned} \tau_n = \frac{w_n}{\sqrt{e_{n-1}}} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1} \Delta_{n-2}}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+2} & c_{-n+3} & \dots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & c_n \end{vmatrix} = \quad (7.20) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1} \Delta_{n-2}}} [z P_{n-1}(z) \circ 1] = z P_{n-1}(z) \circ 1, \end{aligned}$$

por tanto, τ_n es el momento de $z P_{n-1}(z)$.

Además las igualdades anteriores permiten calcular τ_n directamente a partir de $\{c_h\}_{h=0}^n$.

ii) Si escribimos $|w_n|^2 = |\tau_n|^2 e_{n-1}$ en la forma $\frac{|w_n|}{e_{n-1}} = \frac{|\tau_n|^2}{|w_n|}$, al ser $\frac{|w_n|}{e_{n-1}} \leq 1$, se tiene

$$|\tau_n|^2 \leq |w_n| \leq e_{n-1} \quad (7.21)$$

Además, como $\frac{|w_n|}{|\tau_n|} = \sqrt{e_{n-1}}$, resulta

$$|w_n| = o(|\tau_n|) \text{ en el caso } D$$

$$|w_n| = O(|\tau_n|) \text{ en el caso } C.$$

También, si tomamos argumentos en (7.19) resulta

$$\arg w_n = \arg \tau_n + 2k\pi \quad \text{con } k \in Z$$

ó

$$\text{Arg } w_n = \text{Arg } \tau_n$$

iii) Dada la sucesión $\{e_n\}$ mediante (7.17) queda determinada la sucesión $\{|\tau_n|\}$, pero no la $\{\tau_n\}$ (situación análoga a la señalada en el apartado I).

iv) De manera semejante, dada $\{w_n\}$, por la fórmula (7.19) conoceremos la sucesión $\{\text{Arg } \tau_n\}$, pero no la $\{\tau_n\}$.

v) En términos del nuevo parámetro τ_n , la fórmula fundamental se puede escribir en las formas

$$1 = \frac{e_n}{e_{n-1}} + \frac{|\tau_n|^2}{e_{n-1}}$$

$$e_n = e_{n-1} \left(1 - \frac{|\tau_n|^2}{e_{n-1}} \right)$$

vi) La introducción de la sucesión paramétrica $\{\tau_n\}$ nos va a permitir relacionar de modo natural los casos *C* y *D* que, como ya es sabido, son los examinados por la literatura habitual. Para ello, como el caso *C* significa $e_0 > T$ y el caso *D* $e_0 = T$, elegiremos un caso *C* cualquiera por medio de $e_0 = T + e$, con $e > 0$. Seguiremos usando la notación $\{e_n\}$ y $\{w_n\}$ en el caso *D* y adoptaremos la $\{e_n^{(e)}\}$ y $\{w_n^{(e)}\}$ para el *C*, siendo la sucesión $\{\tau_n\}$ la misma para ambos.

Entonces,

$$\begin{cases} e_0 = T + e \\ e_0^{(e)} = T + e_n^{(e)} \end{cases}$$

de donde,

$$e_0^{(e)} - e_0 = e_n^{(e)} - e_n = e$$

que nos dice que

$$\{e_n^{(e)}\} = \{e_n + e\}. \quad (7.22)$$

Por otra parte,

$$\begin{cases} w_n = \sqrt{e_{n-1}} \tau_n \\ w_n^{(e)} = \sqrt{e_{n-1}^{(e)}} \tau_n \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} \arg w_n = \arg w_n^{e'} \\ |w_n^{e'}| = \sqrt{e + e_{n-1}} |\tau_n| = |w_n| \sqrt{1 + \frac{e}{e_{n-1}}} \end{cases} \quad (7.23)$$

En general,

$$\begin{aligned} w_n^{e'} &= w_n + \tau_n (\sqrt{e_{n-1}^{e'}} - \sqrt{e_{n-1}}) = w_n + \tau_n (\sqrt{e_{n-1} + e} - \sqrt{e_{n-1}}) = \\ &= w_n + \tau_n \frac{e}{\sqrt{e_{n-1} + e} + \sqrt{e_{n-1}}} = w_n + \frac{e \tau_n}{\sqrt{e_{n-1}} \left(\sqrt{1 + \frac{e}{e_{n-1}}} + 1 \right)}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Además, de

$$\begin{cases} |w_n|^2 = e_{n-1} |\tau_n|^2 \\ |w_n^{e'}|^2 = e_{n-1}^{e'} |\tau_n|^2 \end{cases}$$

resulta

$$|w_n^{e'}|^2 = |w_n|^2 + (e_{n-1}^{e'} - e_{n-1}) |\tau_n|^2 = |w_n|^2 + e |\tau_n|^2 \quad (7.25)$$

y

$$\sum_1^\infty |w_n^{e'}|^2 = \sum_1^\infty |w_n|^2 + e T. \quad (7.26)$$

vii) Si en la expresión $w_n^{e'} = \tau_n \sqrt{e_{n-1}^{e'}} = \tau_n \sqrt{e_{n-1} + e}$ dividimos por $e_{n-1}^{e'} = e_{n-1} + e$:

$$\frac{w_n^{e'}}{e_{n-1}^{e'}} = \frac{\tau_n}{\sqrt{e_{n-1} + e}} = \frac{\tau_n}{\sqrt{e_{n-1}} \left(1 + \frac{e}{e_{n-1}} \right)^{1/2}} = \frac{w_n}{e_{n-1}} \left(1 + \frac{e}{e_{n-1}} \right)^{-1/2} \quad (7.27)$$

y tomando módulos

$$\frac{|w_n^{e'}|}{e_{n-1}^{e'}} = \frac{|w_n|}{e_{n-1}} \left(1 + \frac{e}{e_{n-1}} \right)^{-1/2} \quad (7.28)$$

Como $\left(1 + \frac{e}{e_{n-1}} \right)^{-1/2}$ tiende a 0, (pues e es fijo y e_{n-1} tiende a 0), a partir de un cierto n_0 se tiene

$$\frac{|w_n^{e'}|}{e_{n-1}^{e'}} < \frac{|w_n|}{e_{n-1}}$$

pudiendo afirmarse que, para n suficientemente grande, cualquiera de los valores que toma $\frac{|w_n|}{e_{n-1}}$ en el caso C es menor que el que tiene en el caso D .

Estudiemos ahora la variación de $\frac{|w_n|}{e_{n-1}}$ en el caso C , al considerar otro valor de e .

Sea e' un número real positivo tal que $e' - e = h > 0$, entonces

$$\frac{w_n^{e'}}{e_{n-1}^{e'}} = \frac{w_n}{e_{n-1}} \left(1 + \frac{e'}{e_{n-1}} \right)^{-1/2} \quad \text{luego} \quad \left| \frac{w_n^{e'}}{e_{n-1}^{e'}} \right|^2 = \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} \left(1 + \frac{e'}{e_{n-1}} \right)^{-1};$$

restando esta última expresión de la (7.28), elevada al cuadrado, queda

$$\begin{aligned} \left| \frac{w_n^{(e)}}{e^{e_{n-1}}} \right|^2 - \left| \frac{w_n^{(e')}}{e^{e'_{n-1}}} \right|^2 &= \left| \frac{w_n}{e_{n-1}} \right|^2 \cdot \left[\left(1 + \frac{e}{e_{n-1}} \right)^{-1} \left(1 + \frac{e'}{e_{n-1}} \right)^{-1} \right] = \\ &= \left| \frac{w_n}{e_{n-1}} \right|^2 \cdot \frac{h e_{n-1}}{(e_{n-1} + e + h)(e_{n-1} + e)} > 0, \end{aligned} \quad (7.29)$$

luego $\left| \frac{w_n^{(e)}}{e^{e_{n-1}}} \right|^2$ y, por consiguiente, $\left| \frac{w_n^{(e)}}{e^{e_{n-1}}} \right|$ decrece al crecer el valor de e .

viii) Si en (7.29) tomamos límites para e' variable, permaneciendo fijos n y e , resulta

$$\lim_{e' \rightarrow e} \left| \frac{w_n^{(e')}}{e^{e'_{n-1}}} \right| = \left| \frac{w_n^{(e)}}{e^{e_{n-1}}} \right|.$$

Análogamente en (7.28)

$$\lim_{e \rightarrow 0} \left| \frac{w_n^{(e)}}{e^{e_{n-1}}} \right| = \left| \frac{w_n}{e_{n-1}} \right| \quad \text{ó} \quad \lim_{e \rightarrow 0} \left| \frac{w_n^{(e)}}{e^{e_{n-1}}} \right| = \left| \frac{w_n^{(0)}}{e^{e_{n-1}}} \right|$$

Así pues, queda probada la

Proposición 7.5. — «La expresión $\left| \frac{w_n^{(e)}}{e^{e_{n-1}}} \right|$ es una función continua de e en R^+ ».

IV. Estudio de algunas series y productos infinitos interesantes

Se ha citado ya en el apartado I que el producto infinito $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{|w_n|^2}{e^{2e_{n-1}}} \right)$ (que se puede escribir en cualquiera de las formas

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{|\tau_n|^2}{e_{n-1}} \right), \quad \prod_1^\infty (1 - e_n |P_n(0)|^2) \quad \text{ó} \quad \prod_1^\infty \frac{e_n}{e_{n-1}}$$

converge a $\frac{e}{e_0}$ o diverge a 0, según que se trate del caso C o del caso D , respectivamente.

Por tanto la serie

$$\sum_1^\infty \frac{|w_n|^2}{e^{2e_{n-1}}} = \sum_1^\infty \frac{|\tau_n|^2}{e_{n-1}} = \sum_1^\infty \left(1 - \frac{e_n}{e_{n-1}} \right)$$

será convergente en el caso C y divergente en el D . De este resultado se sigue, que $\sum_1^\infty \frac{|w_n|}{|e_{n-1}|}$ es igualmente divergente en el caso D .

También es sabido que las series

$$\sum_1^{\infty} |w_n|^2 \quad \text{y} \quad \sum_1^{\infty} |\tau_n|^2 = \sum_1^{\infty} \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}}$$

son siempre convergentes, siendo la suma de esta última, $e_0 - e$ en el caso *C* y e_0 en el caso *D*.

Precisando más, como $\{e_n\}$ es una sucesión no creciente de límite e (siendo $e = 0$ para el caso *D*),

$$e_0 |\tau_n|^2 \geq e_{n-1} |\tau_n|^2 = |w_n|^2 \geq e |\tau_n|^2$$

de donde resulta

$$e_0 \sum_1^{\infty} |\tau_n|^2 \geq \sum_1^{\infty} |w_n|^2 \geq e \sum_1^{\infty} |\tau_n|^2$$

que prueba la convergencia de $\sum |w_n|^2$, a partir de la de $\sum |\tau_n|^2$ y, simultáneamente, suministra una acotación para $\sum |w_n|^2$.

Recordando que $\sum_1^{\infty} |\tau_n|^2 = e_0 - e$ tenemos finalmente

$$e_0 (e_0 - e) \geq \sum_1^{\infty} |w_n|^2 \geq e (e_0 - e),$$

que en el caso *D* se reduce a

$$e_0^2 \geq \sum_1^{\infty} |w_n|^2 \geq 0.$$

Si en la fórmula (7.8) sumamos ordenadamente en h , desde $h = 1$ hasta $h = n$ resulta:

$$n = \sum_1^n \frac{e_h}{e_{h-1}} + \sum_1^n \frac{|w_h|^2}{e_{h-1}^2} \tag{7.30}$$

por lo que las series

$$\sum_1^{\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}} \quad \text{y} \quad \sum_1^{\infty} \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} = \sum_1^{\infty} \frac{|\tau_n|^2}{e_{n-1}} = \sum_1^{\infty} e_n |\mathbf{P}_n(0)|^2$$

no pueden converger simultáneamente, es decir,

$$1) \quad \text{Si } \sum_1^{\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}} \text{ converge, } \sum_1^{\infty} \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} = \sum_1^{\infty} \frac{|\tau_n|^2}{e_{n-1}} = \sum_1^{\infty} e_n |\mathbf{P}_n(0)|^2 = \infty$$

más aún

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{|w_h|^2}{e_{h-1}^2} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{|\tau_h|^2}{e_{h-1}} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_1^n e_h |\mathbf{P}_h(0)|^2 = 1.$$

Como $\lim_n \frac{e_n}{e_{n-1}} = 0$, de (7.8) se sigue que existe $\lim_n \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} = 1$. A este mismo resultado se hubiese llegado aplicando el criterio de la media aritmética a la relación anterior.

$$2) \quad \text{Si } \sum_1^{\infty} \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} = \sum_1^{\infty} \frac{|\tau_n|^2}{e_{n-1}} = \sum_1^{\infty} e_n |\mathbf{P}_n(0)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n |\alpha_{in}|^2 \right) < \infty$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}} = \infty$$

más aún

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \frac{e_h}{e_{h-1}} = 1.$$

Análogamente, como $\frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} \rightarrow 0$ de (7.8) se obtiene $\lim_n \frac{e_n}{e_{n-1}} = 1$, resultado al que también hubiésemos llegado aplicando el criterio de la media aritmética.

Nota. — La situación establecida en 1) corresponde a un caso particular del D , que denominaremos cuasitípico pues $\lim \frac{|w_n|}{e_{n-1}} = 1$ con lo que $|w_n| \approx e_{n-1}$; en tanto que 2)

es un caso particular del C , que llamaremos cuasicrítico pues $\lim \frac{e_n}{e_{n-1}} = 1$ y $e_n \approx e_{n-1}$.

Sin embargo estos casos 1) y 2) no son excluyentes, o sea, ambas series pueden diverger simultáneamente. Más adelante daremos ejemplos de esta situación que corresponde siempre al caso D .

Respecto de la serie $\sum \frac{e_n}{e_{n-1}}$ todavía se puede decir que según sea convergente o divergente, también lo serán los productos infinitos

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{e_n}{e_{n-1}}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|\tau_n|^2}{e_{n-1}} = \prod_{n=1}^{\infty} e_n |P_n(0)|^2.$$

Desde luego todos ellos serán divergentes si $\frac{e_n}{e_{n-1}}$ no tiende a 0 (en particular en el caso C , pues entonces $\frac{e_n}{e_{n-1}} \rightarrow 1$) lo que equivale a que $\frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2}$ no tienda a 1.

En otra dirección, tomando límites en (1.22) resulta para el caso C , $\lim_n |P_n(0)|^2 = 0$, luego $\lim_n P_n(0) = 0$.

Además

$$\sum_1^{\infty} |P_n(0)|^2 = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{e_n} - \frac{1}{e_{n-1}} \right) = \sum_1^{\infty} \frac{|\tau_n|^2}{e_n e_{n-1}} = \sum_1^{\infty} \frac{|w_n|^2}{e_n e_{n-1}^2} = \lim \frac{1}{e_n} - \frac{1}{e_0};$$

por tanto estas series convergen a $\frac{1}{e} - \frac{1}{e_0}$ en el caso C y divergen en el caso D .

De (7.7) y de la convergencia de $\sum |w_n|^2$ se sigue que las series $\sum e_{n-1}^2$ y $\sum e_{n-1} \cdot e_n$ tienen el mismo carácter. En el caso C se puede afirmar que ambas son divergentes.

A continuación, partiendo de distintas sucesiones $\{e_n\}$ construiremos a modo de ejemplo las restantes sucesiones paramétricas, estudiando el carácter de algunas de las series citadas en este apartado y calculando su suma, cuando sean convergentes.

Ejemplo 1. — Sea $e_n = \frac{1}{p^n}$, con p real y fijo, mayor que 1. Entonces:

1) $\lim e_n = 0$, con lo que estamos en el caso D.

$$2) |\tau_n|^2 = e_{n-1} - e_n = \frac{1}{p^{n-1}} - \frac{1}{p^n} = \frac{p-1}{p^n}.$$

$$3) |w_n|^2 = e_{n-1} |\tau_n|^2 = \frac{1}{p^{n-1}} \cdot \frac{p-1}{p^n} = \frac{p-1}{p^{2n-1}}$$

$$4) \sum_1^{\infty} |\tau_n|^2 = (p-1) \sum_1^{\infty} \frac{1}{p^n} = (p-1) \frac{1}{p-1} = 1$$

$$5) \sum_1^{\infty} |w_n|^2 = (p-1) \sum_1^{\infty} \frac{1}{p^{2n-1}} = (p-1) \frac{p}{p^2-1} = \frac{p}{p+1}$$

6) $\frac{e_n}{e_{n-1}} = \frac{1}{p} \quad \forall n \in N$, luego $\lim \frac{e_n}{e_{n-1}} = \frac{1}{p}$ y la serie $\sum_1^{\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}}$ es divergente.

7) $\frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} = \frac{p-1}{p} \quad \forall n \in N$, luego $\lim \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} = \frac{p-1}{p}$ y la serie $\sum_1^{\infty} \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2}$ es divergente.

$$8) \sum_0^{\infty} e_n = \sum_0^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{p}{p-1}$$

Obsérvese que este es uno de los casos anunciados en la página anterior, en los que las dos series $\sum \frac{e_n}{e_{n-1}}$ y $\sum \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2}$ son divergentes.

Ejemplo 2. — Sea $e_n = \frac{1}{n!}$ entonces:

1) $\lim e_n = 0$, caso D.

$$2) |\tau_n|^2 = e_{n-1} - e_n = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n-1}{n!}$$

$$3) |w_n|^2 = e_{n-1} |\tau_n|^2 = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-2)! n!}$$

(para $n = 1$, como $|\tau_1|^2 = 0$ resulta $|w_1|^2 = 0$).

$$4) \sum_1^{\infty} |\tau_n|^2 = \sum_1^{\infty} \frac{n-1}{n!} = e - (e-1) = 1$$

5) $\frac{e_n}{e_{n-1}} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$; $\sum \frac{e_n}{e_{n-1}}$ es divergente.

6) $\frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} = \frac{\frac{1}{n!(n-2)!}}{1} = \frac{n-1}{n} \rightarrow 1$, luego $\sum \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2}$ es divergente.

7) $\sum_0^{\infty} e_n = e$ (base de los logaritmos neperianos).

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_n|}{e_{n-1}} = 1$, estamos en un caso cuasitípico en el que también divergen simultáneamente las dos series citadas.

Ejemplo 3. — Sea $e_n = \frac{1}{n}$. Elijamos arbitrariamente $e_0 = 1$. Entonces:

1) $\lim e_n = 0$, caso D.

$$2) |\tau_n|^2 = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n > 1.$$

$$|\tau_1|^2 = e_0 - e_1 = 1 - 1 = 0.$$

$$3) |w_n|^2 = e_{n-1} |\tau_n|^2 = \frac{1}{n(n-1)^2} \quad \forall n > 1.$$

$$|w_1|^2 = 0.$$

$$4) \sum_2^{\infty} |\tau_n|^2 = \sum_2^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1.$$

$$5) \sum_2^{\infty} |w_n|^2 = \sum_2^{\infty} \frac{1}{n(n-1)^2} = \sum_2^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)^2} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) \right] =$$

$$= \sum_2^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} + \sum_2^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

$$6) \frac{e_n}{e_{n-1}} = \frac{n-1}{n} \rightarrow 1, \text{ luego } \sum \frac{e_n}{e_{n-1}} \text{ es divergente.}$$

$$7) \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} = \frac{\frac{1}{(n-1)^2 n}}{\frac{1}{(n-1)^2}} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ pero } \sum \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} \text{ es divergente.}$$

$$8) \sum e_n = \sum \frac{1}{n} \text{ divergente.}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_n}{e_{n-1}} = 1$, estamos en un caso casicrítico, en el que las series $\sum \frac{e_n}{e_{n-1}}$ y $\sum \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2}$ son ambas divergentes.

En el capítulo VI nos hemos referido a la extensión crítica, como aquella en la cual se verificaba $w_n = 0$ para algún valor de n . Precisamente para ese n , se tenía:

$$e_n = e_{n-1}$$

$$P_n(0) = P_{n-1}(0) = 0,$$

$$P_n(z) = e_{n-1} z P_{n-1}(z) \text{ y su normalizada } P_n(z) = z P_{n-1}(z).$$

Estudiaremos ahora una situación «extrema» de la anterior, que denominaremos:

Caso crítico — Diremos que estamos en un caso crítico si $\{w_n\}_0^\infty$ es la sucesión nula, es decir, si $w_n = 0 \forall n \in N$.

Con esta condición, resulta que $e_n = e_{n-1}$, para todo número natural n , por lo que $e_n = e_0$ y $\tau_n = 0, \forall n \in N$.

Como $\lim e_n = e = e_0 > 0$, nos encontramos en un caso particular del C.

Es obvio que $\sum |w_n|^2 = \sum |\tau_n|^2 = 0$.

Además $\frac{e_n}{e_{n-1}} = 1$ y $\frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2} = 0 \quad \forall n \in N$

que se traduce en que las correspondientes series $\sum \frac{e_n}{e_{n-1}}$ y $\sum \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2}$ son divergente y convergente con suma 0, respectivamente.

Por ser $\lim \frac{e_n}{e_{n-1}} = 1$, estamos en un caso particular «extremo» del caso cuasicrítico.

La igualdad $P_n(z) = z P_{n-1}(z)$ se verifica ahora para todo n ; por ello, si $e_0 = 1$, la sucesión de PO normalizada es $\{z^n\}_0^\infty$, siendo su matriz asociada la matriz unidad.

Como resumen de los resultados anteriores podemos escribir el siguiente:

CUADRO 1

$\lim e_n$	CASO D 0	CASO C $e > 0$
$\sum \frac{ w_n ^2}{e_{n-1}^2}$	Diverge ($\Rightarrow \sum \frac{ w_n }{e_{n-1}}$ diverge)	Converge
$\sum \tau_n ^2 = \sum \frac{ w_n ^2}{e_{n-1}}$	Converge (su suma es e_0)	Converge (su suma es $e_0 - e$)
$\lim \frac{e_n}{e_{n-1}}$	Variable ⁽¹⁾	1
$\lim \frac{ w_n }{e_{n-1}}$	Variable ⁽¹⁾	0
$\sum e_n$	Variable ⁽¹⁾	Diverge
$\sum \frac{e_n}{e_{n-1}}$	Variable ⁽¹⁾	Diverge
$\sum \frac{ \tau_n ^2}{e_{n-1} e_n}$	Diverge	Converge (su suma es $\frac{1}{e} - \frac{1}{e_0}$)
$\prod \left(1 - \frac{ w_n ^2}{e_{n-1}^2}\right)$	Diverge a 0	Converge a $\frac{e}{e_0}$
$\sum \frac{e_{n-1}^2}{e_{n-1} e_n}$	Variables ⁽¹⁾	Divergentes

(1) Con la palabra variable queremos indicar que no hay un resultado global en el apartado en cuestión. Los límites de la primera columna pueden, entonces, existir o no según los casos. (Para mayor detalle véase el cuadro 2).

En la literatura usual se estudia casi exclusivamente el caso C; sin embargo, el hecho de que en un primer estudio del caso D hayamos obtenido resultados que permiten una diferenciación más clara de ambos casos, indica que el caso D debe ser tratado con mayor detalle.

Tal estudio exige distinguir varios subcasos, tomando como punto de referencia para la clasificación, la convergencia o no convergencia de la sucesión $\left\{ \frac{|w_n|}{e_{n-1}} \right\}$ (igualmente se

podría hacer con la sucesión $\left\{ \frac{e_n}{e_{n-1}} \right\}$). Cuando dicha sucesión es convergente, caben tres posibilidades distintas según que su límite sea 0, sea 1 o sea un número α cumpliendo $0 < \alpha < 1$. Los resultados obtenidos para cada una de estas situaciones, relativos a las sucesiones y series del cuadro 1, aparecen ahora recopilados en el siguiente cuadro 2, omitiendo las demostraciones, por lo general, sencillas.

Nota. — No expondremos aquí los resultados que se obtienen cuando la sucesión $\left\{ \frac{|w_n|}{e_{n-1}} \right\}$ no es convergente. Este caso sólo será considerado, parcialmente, en el apartado V de este capítulo.

CUADRO 2

CASO D

	1	α	0
$\lim \frac{ w_n }{e_{n-1}}$	$ w_n \approx e_{n-1}$ (caso cuasitípico)	$(0 < \alpha < 1)$ $ w_n = O(e_{n-1})$	$ w_n = o(e_{n-1})$
$\lim \frac{e_n}{e_{n-1}}$	0 $e_n = o(e_{n-1})$	$1 - \alpha^2$ $e_n = O(e_{n-1})$	1 $e_n \approx e_{n-1}$ (caso cuasicrítico)
$\sum \frac{ w_n ^2}{e_{n-1}^2}$ $(\Rightarrow \sum \frac{ w_n }{e_{n-1}})$	Diverge	Diverge	Diverge
$\sum \tau_n ^2 = \sum \frac{ w_n ^2}{e_{n-1}}$	Converge (su suma es e_0)	Converge (su suma es e_0)	Converge (su suma es e_0)
$\sum e_n$	Converge	Converge	
$\sum \frac{e_n}{e_{n-1}}$		Diverge	Diverge
$\sum \frac{ \tau_n ^2}{e_{n-1} e_n}$	Diverge	Diverge	Diverge
$\sum \frac{e_{n-1}^2}{e_{n-1} e_n}$	Convergen	Convergen	

V. Acotaciones de las raíces

1) Una primera acotación de las raíces de los PO relativos a U , viene dada por el hecho, muy conocido, de que dichas raíces han de ser de módulo menor que la unidad (ya sabemos que las raíces son unimodulares en el caso típico, pero en este apartado no tendremos presente esta posibilidad). Un resultado más restrictivo se ha expuesto en [12], donde se ha probado que, dada la sucesión $\{P_n(z)\}_0^\infty$, todas las raíces de $P_1(z), \dots, P_{n-1}(z)$ son interiores a la envoltura convexa de las raíces de $P_n'(z)$; finalmente, en el capítulo anterior, se ha demostrado que las raíces de $P_1(z), \dots, P_{n-1}(z)$ son interiores al conjunto intersección de las envolturas convexas de las raíces de todas las extensiones típicas posibles de $\{P_i(z)\}_{i=0}^{n-1}$.

También es conocido que la existencia de una raíz nula caracteriza el caso crítico, en el cual $P_n(z) = e_{n-1} z P_{n-1}(z)$.

Además, si $\{\alpha_{in}\}_{i=1}^n$ son las raíces de $P_n(z)$.

$$\prod_{i=1}^n \alpha_{in} = (-1)^{n+1} \frac{w_n}{e_{n-1}} \tag{7.33}$$

por lo que son aplicables a $\prod_{i=1}^n |\alpha_{in}|$, todos los resultados del apartado anterior relacionados con $\frac{|w_n|}{e_{n-1}}$; en particular, como $\tau_n = \frac{w_n}{\sqrt{e_{n-1}}} = (-1)^{n+1} \sqrt{e_{n-1}} \prod_{i=1}^n \alpha_{in}$ converge a 0, se tiene

$$\prod_{i=1}^n |\alpha_{in}| = o\left(\frac{1}{\sqrt{e_{n-1}}}\right)$$

y en el caso $C (e_{n-1} \rightarrow e)$

$$\lim_n \prod_{i=1}^n \alpha_{in} = 0.$$

Si llamamos $\underline{\alpha}_n$ y $\bar{\alpha}_n$ al mínimo y al máximo, respectivamente, de los módulos de dichas raíces:

$$\underline{\alpha}_n \leq |\alpha_{in}| \leq \bar{\alpha}_n \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y

$$\underline{\alpha}_n^n \leq \prod_{i=1}^n |\alpha_{in}| = \frac{|w_n|}{e_{n-1}} \leq \bar{\alpha}_n^n$$

de donde

$$\underline{\alpha}_n \leq \sqrt[n]{\frac{|w_n|}{e_{n-1}}} \leq \bar{\alpha}_n.$$

Por tanto:

Proposición 7.6. — «La raíz n -ésima de $\frac{|w_n|}{e_{n-1}}$ es cota superior (inferior) del mínimo (máximo) de los módulos de las raíces de $P_n(z)$ ».

Además, considerando

$$\frac{|w_n|}{e_{n-1}} = \prod_{i=1}^n |\alpha_{in}| \leq |\alpha_{in}| \quad i = 1, 2, \dots, n$$

resulta

Proposición 7.7. — «Las raíces de $P_n(z)$ están situadas en la corona circular $\{z \mid \frac{|w_n|}{e_{n-1}} \leq |z| < 1\}$ ».

Corolario 7.8. — «Si $\sum \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2}$ es divergente (como ocurre en el caso D), toda serie cuyo término n -ésimo sea una raíz cualquiera de $P_n(z)$ es absolutamente divergente».

Demostración. — En efecto, basta considerar

$$\sum_{\substack{n=1 \\ 1 \leq i \leq n}}^{\infty} |\alpha_{in}| \gg \sum_{\substack{n=1 \\ 1 \leq i \leq n}}^{\infty} |\alpha_{in}|^2 \gg \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|w_n|^2}{e_{n-1}^2}. \#$$

Si denominamos R al conjunto de todas las raíces de los polinomios $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ y R' a su conjunto derivado y asimismo llamamos \underline{l} al límite inferior de $\{\frac{|w_n|}{e_{n-1}}\}$ o sea,

$\underline{l} = \underline{\lim}_{n=1} \frac{|w_n|}{e_{n-1}}$, de la proposición 7.6 resulta

$$\underline{\lim} R \supseteq \underline{\lim}_{n=1} \frac{|w_n|}{e_{n-1}} = \underline{l}$$

es decir,

Proposición 7.9. — «El conjunto R' está contenido en la corona circular

$$\{z \mid \underline{l} \leq |z| \leq 1\}.$$

Merecen citarse, como consecuencia inmediata, los casos particulares siguientes:

i) Si $\underline{\lim}_{n=1} \frac{|w_n|}{e_{n-1}} = 1$ (caso cuasitípico), $\underline{l} = 1$ y por tanto $R' \subseteq U$, de otra manera, $z \in R' \Rightarrow |z| = 1$.

ii) Si $\underline{\lim}_{n=1} \frac{|w_n|}{e_{n-1}} = \alpha$ con $0 < \alpha < 1$, $\underline{l} = \alpha$ y entonces

$$R' \subseteq \{z \mid \alpha \leq |z| \leq 1\}.$$

iii) Si $\underline{\lim}_{n=1} \frac{|w_n|}{e_{n-1}} = 0$ (comprende como casos particulares el C y el cuasicrítico) no se puede afirmar nada nuevo; R' está contenido en el círculo unidad cerrado como ya sabíamos.

2) Argumentos de las raíces.

Si en la fórmula (7.33)

$$\prod_{i=1}^n \alpha_{in} = (-1)^{n+1} \frac{w_n}{e_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{\tau_n}{\sqrt{e_{n-1}}}$$

tomamos argumentos se tiene:

$$\sum_{i=1}^n \arg \alpha_{in} = \arg (-1)^{n+1} + \arg \tau_n + 2h\pi \quad \text{con } h \in \mathbb{Z}.$$

Entonces,

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ es par: } \sum_{i=1}^n \arg \alpha_{in} = \arg \tau_n + (2k-1)\pi, & k \in Z \\ \text{Si } n \text{ es impar: } \sum_{i=1}^n \arg \alpha_{in} = \arg \tau_n + 2k\pi, & k \in Z. \end{cases} \quad (7.34)$$

Como casos particulares notables podemos considerar los siguientes:

i) Si $\tau_n \geq 0 \quad \forall n \in N$; se verifica:

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ es par, } \sum_{i=1}^n \arg \alpha_{in} = (2k-1)\pi & k \in Z \\ \text{Si } n \text{ es impar, } \sum_{i=1}^n \arg \alpha_{in} = 2k\pi & k \in Z. \end{cases}$$

ii) Si la sucesión $\{\tau_n\}$ es alternada y de términos reales es decir, si da lugar a una serie de Leibnitz, $\sum \tau_n = \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4 + \dots$ se cumple la igualdad $\sum_{i=1}^n \arg \alpha_{in} = \arg \tau_n + 2k\pi \quad k \in Z$ para todo valor natural de n .

iii) Si $\{\tau_n\}$ es tal que $\text{Arg } \tau_n = \Phi \quad \forall n \in N$ siendo $\Phi \in [-\pi, \pi)$ fijo, se satisface:

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ es par } \sum_{i=1}^n \arg \alpha_{in} = \Phi + (2k-1)\pi, & k \in Z \\ \text{Si } n \text{ es impar } \sum_{i=1}^n \arg \alpha_{in} = \Phi + 2k\pi, & k \in Z \end{cases}$$

3) Dada $\{\tau_n\}_1^\infty \in l^2$, hemos distinguidos los casos

$$C \left(\sum_1^\infty |\tau_n|^2 < e_0 \right) \quad \text{y} \quad D \left(\sum_1^\infty |\tau_n|^2 = e_0 \right)$$

A una tal sucesión queda asociada una familia de sucesiones de PO relativos a U , una de las cuales, la que se obtiene al tomar $e_0 = \sum |\tau_n|^2$, corresponde al caso D mientras que las infinitas restantes, obtenidas eligiendo $e_0 = e + \sum |\tau_n|^2$ con $e \in R^+$, corresponden al caso C . Se observa que, fijando n , el valor de $\sum_{i=1}^n \arg \alpha_{in}$ es el mismo para toda la familia, pues sólo depende de $\arg \tau_n$.

Respecto a los módulos la situación no es la misma. En el caso D $e_n \downarrow 0$ y en cada caso C , correspondiente a un $e > 0$, $e_n^{(e)} \downarrow e$ (con notación evidente), donde $e_n^{(e)} = e_n + e$ siendo válida la fórmula (7.27) que es equivalente a la

$$\prod_{i=1}^n \alpha_{in}^{(e)} = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_{in} \right) \cdot \left(1 + \frac{e}{e_{n-1}} \right)^{-1/2}$$

Si en la última tomamos argumentos, se confirma el hecho arriba citado y si tomamos módulos, resulta

$$\prod_{i=1}^n |\alpha_{in}^{(e)}| = \left(\prod_{i=1}^n |\alpha_{in}| \right) \left(1 + \frac{e}{e_{n-1}} \right)^{-1/2} = \left(\prod_{i=1}^n |\alpha_{in}| \right) \left(\frac{e_{n-1}}{e + e_{n-1}} \right)^{1/2}$$

que nos indica la existencia de una «contracción» de las raíces hacia el origen, al pasar del caso D a un caso C cualquiera.

Como la sucesión de término n -ésimo $\left(\frac{e_{n-1}}{e_{n-1} + e}\right)^{1/2}$ es monótona no creciente y converge a cero, $\prod_{i=1}^n |\alpha_{in}^{(e)}|$ está mayorado por $\prod_{i=1}^n |\alpha_{in}|$ de forma tal que

$$\lim_n \frac{\prod_{i=1}^n |\alpha_{in}^{(e)}|}{\prod_{i=1}^n |\alpha_{in}|} = 0.$$

Por otra parte, por ser $\left(\frac{e_{n-1}}{e_{n-1} + e}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{e_{n-1}}{e}\right)^{1/2}$, resulta

$$\prod_{i=1}^n |\alpha_{in}^{(e)}| = o\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \prod_{i=1}^n |\alpha_{in}|\right);$$

por consiguiente, la citada «contracción» es tanto más fuerte cuanto mayor sea e .

4) Por último tiene interés considerar, aunque sea brevemente, el caso particular en que la sucesión $\left\{\frac{|w_n|}{e_{n-1}}\right\}$ sea convergente a α con $0 < \alpha \leq 1$.

En estas condiciones, $\sqrt{\frac{|w_n|}{e_{n-1}}}$ tiende a 1, luego dado ε con $0 < \varepsilon < 1$, existirá $n_0(\varepsilon) \in N$ tal que

$$1 - \varepsilon < \sqrt{\frac{|w_n|}{e_{n-1}}} \quad \forall n \geq n_0.$$

Ahora bien, como $0 \leq \underline{\alpha}_n \leq \sqrt{\frac{|w_n|}{e_{n-1}}} \leq \overline{\alpha}_n < 1$ podemos afirmar que en cada corona circular $\{z \mid 1 - \varepsilon \leq |z| < 1\}$ existe al menos una raíz de cada polinomio $P_n(z)$, a partir de n_0 .

En otro sentido, la validez de $\underline{\alpha}_n \leq \sqrt{\frac{|w_n|}{e_{n-1}}}$, limita en cierto modo la rapidez con que la raíz de módulo mínimo podría aproximarse a la circunferencia unidad.

En lo referente a la teoría paramétrica, la situación a la que hemos llegado en este capítulo puede resumirse como sigue:

Disponemos de tres representaciones paramétricas completas, las formadas por:

a) Una sucesión $\{c_n\}_0^\infty \subset C$, que dé lugar a una matriz hermitiana de Toeplitz, definida positiva, es decir tal que

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \dots & c_0 \end{vmatrix} > 0 \quad \forall n \in N.$$

En particular, e_0 ha de ser real y positivo y $|c_n| < c_0, \forall n \in N$.

b) Dos sucesiones $\{e_n\}_0^\infty \subset R$ y $\{w_n\}_1^\infty \subset C$. La primera ha de ser de términos positivos y no creciente, mientras que la segunda ha de ser de cuadrado sumable. Ambas deben estar relacionadas por (7.7).

y c) Una sucesión $\{\tau_n\}_1^\infty \subseteq C$ de cuadrado sumable y un número positivo e_0 , de manera que

$$\sum |\tau_n|^2 \leq e_0.$$

Fue la representación a) la que utilizamos para la introducción y el estudio de una sucesión de *PO* relativos a U (capítulos I al V). A partir de ella se obtiene directamente, no sólo la sucesión $\{P_n(z)\}_{n=0}^\infty$ (fórmula (1.2) aplicada al caso particular de una matriz de Toeplitz) y $\{e_n\}_0^\infty$ sino también $\{w_n\}_1^\infty$, y $\{\tau_n\}_1^\infty$ ((7.4) y (7.20) respectivamente).

En el capítulo VI aparece por primera vez la sucesión $\{w_n\} \in l^2$ que, pudiéramos decir, tiene un origen geométrico y que con la $\{e_n\}$, constituye un sistema de parámetros.

Ahora (7.19) nos permite construir $\{\tau_n\}$ y de la fórmula de recurrencia (6.9), deducimos unívocamente la familia de *PO* $\{P_n(z)\}_0^\infty$, luego su matriz asociada T , es decir, la sucesión $\{c_n\}_0^\infty$.

Finalmente, en este capítulo, hemos introducido la sucesión $\{\tau_n\}$. Con ayuda de (7.17) y (7.19) y una vez fijado e_0 obtenemos $\{w_n\}$ y $\{e_n\}$ en las condiciones de b), y de ambas sucesiones la familia de polinomios y la correspondiente matriz.

Por consiguiente, partiendo de cualquiera de estas representaciones pueden obtenerse las otras dos, así como la sucesión de *PO* unívocamente determinada por ella y su matriz asociada.

Como consecuencia de todo ello podemos enunciar el

Teorema 7.10. — «Existe una correspondencia biyectiva entre dos cualesquiera de los siguientes conjuntos:

- α) La familia de todas las sucesiones complejas en las condiciones de a).
- β) El conjunto de todos los pares de sucesiones ($\{e_n\}$, $\{w_n\}$) que cumplan lo establecido en b).
- γ) El conjunto de los pares formados por cada sucesión $\{\tau_n\}_1^\infty \subset C$ de cuadrado sumable y un número positivo e_0 tal que $e_0 \geq \sum |\tau_n|^2$.
- δ) La familia de todas las sucesiones de *PO* sobre U , que satisfagan (1.10) (o cualquiera de sus expresiones equivalentes).
- η) El conjunto de las matrices complejas *HDP* de Toeplitz».

Nota. — Conviene recordar los siguientes resultados, ya conocidos, relacionados con lo que acabamos de exponer:

«Toda distribución $\alpha(z)$ sobre U , acotada, no decreciente y con infinitos puntos de crecimiento efectivo en $[0, 2\pi)$ define una sucesión $\{c_n\}$ en las condiciones de a) mediante:

$$c_n = \int_U z^n d\alpha(z) \quad \forall n \in N.$$

«Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de las distribuciones $\alpha(z)$ sobre U , con las propiedades que acabamos de citar, y el conjunto de pares definido en γ)». (Véase [4]).

Apéndice

Problemas abiertos

Existen memorias de esta naturaleza en las que se resuelve una cuestión abierta totalmente y quedan clausuradas en sí mismas, sin prolongación necesaria. La que antecede es de otro carácter y tiene más bien la pretensión de reconsiderar una teoría ya clásica, desde un nuevo punto de vista, en este caso elemental, con objeto de expresar mediante una técnica nueva resultados conocidos, ampliándolos y completándolos si esta técnica es fértil, como esperamos haberlo conseguido. En estas condiciones la memoria es un resumen, en el que se elude la demostración, más o menos engorrosa de numerosas propiedades, limitándonos a exponer aquellas que sean útiles para el desarrollo del trabajo mismo o que son expresivas por su significado, cuando no se espera que sean de aplicación inmediata para estudios posteriores. Ello hace, lo que no creemos que sea un defecto, que queden numerosas cuestiones abiertas, de las cuales pensamos procedente enumerar las que nos parecen más inmediatas como prolongación natural de la tarea realizada.

En nuestra técnica creemos poder puntualizar como novedades el uso de la propiedad A como método de demostración inmediata, el resultado del capítulo III, la introducción sistemática de los operadores $*n$ en el capítulo IV, la aplicación y explotación de las extensiones típicas que permiten abordar las cuasitípicas, que a su vez llevan a la introducción de los parámetros $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ y luego de los $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ que consideramos definitivos.

Como problemas abiertos, prolongación natural de lo aquí desarrollado citaremos:

i) Estudio de PO sobre lemniscatas, del que resulta como caso particular el aquí tratado. (Nota. Otro profesor está estudiando, como caso particular, los PO sobre la lemniscata de Bernoulli; la técnica resulta engorrosa y los resultados esperanzadores).

ii) La traducción a nuestra parametrización de la teoría de Geronimus (véase en [6], los dos primeros artículos) con la esperanza razonable de darle forma más natural y poder extenderla en estas condiciones más sencillas.

iii) El estudio del caso completo, prácticamente inexplorado, y del cual aquí hemos hecho ya anuncios prometedores.

iv) Estudio sistemático de la localización de raíces, que hemos ampliado en forma dispersa en varios capítulos; como consecuencia de los mismos, hay bastante información que añadir al único resultado citado por la teoría clásica: $P_n(\alpha) = 0 \Rightarrow |\alpha| < 1$.

v) Ya planteado en nuestro [4]: caracterización de las distribuciones $\sigma(\alpha)$ correspondientes a una misma parametrización $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ con e_0 variable, que consideramos especialmente sugestivo.

vi) Estudio de la familia de operadores $*n$ para n entero y su aplicación a pseudopolinomios.

vii) Desarrollo en serie de Fourier-Toeplitz (véase [4]) de $\frac{1}{z^h}$ con h natural. Estudio de la serie de Fourier-Toeplitz de $\frac{1}{z-\alpha}$, $|\alpha| < 1$.

viii) Utilizar la teoría de la extensión típica para interpolación y construcción de la integral

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha}) d\sigma(\alpha) \text{ que sirve de partida a la teoría clásica.}$$

ix) Estudio directo del operador multiplicación, cuyo interés aumenta notablemente a raíz del teorema 3.6.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AKHIEZER, N. I.: *The classical Moment Problem*. Univ. Math. Mon., Oliver & Boyd, Londres, 1965.
- [2] AKHIEZER, N. I. y GLAZMAN, I. M.: *Theory of linear operators in Hilbert Space*. Ungar, Nueva York, 1963.
- [3] AKHIEZER, N. I. y KREIN, M. G.: *Some problems of the theory of moments*. Am. Math. Soc., Trans. Math. Mon. Vol. 2, 1968.
- [4] ALFARO, M.: *Un teorema en la teoría paramétrica de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad*. Primeras Jornadas Matemáticas Luso-Españolas, Lisboa, 1972.
- [5] FREUD, G.: *Orthogonale Polynome*. Math. Reihe b. 33, Birkhauser Verlag, Basilea, 1969.
- [6] GERONIMUS, YA. L.: *Polynomials orthogonal on a circle and their applications*. Am. Math. Soc. Series and Approximation, Series One Vol. 3, 1968.
- [7] GERONIMUS, YA. L.: *Polynomials Orthogonal on a Circle and Interval*. Int. Ser. App. Math. Vol. 18, Pergamon Press, 1960.
- [8] RUDIN, W.: *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill Ser. High. Math., 1970.
- [9] SZEGÖ, G.: *Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der Komplexen Ebene gehören*. Math. Zeits. Vol. 9, 1921.
- [10] SZEGÖ, G.: *Orthogonal Polynomials*. Am. Math. Soc., Col. Pub. Vol. XXIII, Nueva York, rev. ed. 1959.
- [11] VIGIL, L.: *Sobre propiedades formales de polinomios ortogonales. Sumatoria y recurrencia*. Rev. Ac. Ciencias, tomo LXIII, Madrid, 1969.
- [12] VIGIL, L.: *Sobre propiedades formales de polinomios ortogonales. Ceros y constantes de Christoffel*. Rev. Ac. Ciencias, tomo LXIII, Madrid, 1969.
- [13] VIGIL, L.: *Sobre polinomios ortogonales. Caracterización de la extensión típica de un producto escalar*. R. M. H-A. 4.ª serie, tomo XXIX, Madrid, 1969.
- [14] VIGIL, L.: *Ortogonalización de una sucesión de polinomios*. Rev. Ac. Ciencias, tomo LXIX, Madrid, 1970.
- [15] VIGIL, L.: *Variaciones sobre la teoría general de polinomios ortogonales*. Actas de la X R.A.M.E. La Laguna, 1969.
- [16] VIGIL, L.: *Polinomios ortogonales sobre curvas algebraicas reales*. Actas de la XI R.A.M.E. Murcia 1970.
- [17] VINUESA, J.: *Fórmulas fundamentales para sucesiones reales de polinomios ortogonales*. Rev. Ac. Ciencias, tomo LXV, Madrid, 1971.

CARACTERIZACION DE LAS TRANSFORMACIONES CANONICAS CON UN NUMERO SUPERABUNDANTE DE VARIABLES Y RELACIONES DE LIGADURA MEDIANTE EL COVARIANTE BILINEAL

P O R

V. CAMARENA

Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos
Universidad de Zaragoza (España)

Abstract

One define the concepts of f-symplectic and g-symplectic transformations. By means of them, and the bilinear covariant, explicit conditions for a canonical transformation, increasing the number of variables, are given.

Introducción

Recordemos que, clásicamente, una transformación canónica representa un cambio de coordenadas, tal que la matriz jacobiana de la transformación es simpléctica. La teoría de las transformaciones canónicas se desarrolló pensando en el tipo de transformaciones que dejasen invariantes las ecuaciones canónicas del movimiento. Hasta la fecha, muchos han sido los resultados obtenidos y las caracterizaciones de tales transformaciones, aunque en todos los trabajos publicados sobre el particular, se insiste en un tipo de transformaciones canónicas que nos permiten pasar de un número determinado de coordenadas a otras con el mismo número. En el trabajo citado en la referencia (1) nos planteamos el problema de la definición y caracterización de un nuevo tipo de transformaciones canónicas, en las que figuraban un número superabundante de coordenadas, pero entre las que existían un determinado número de relaciones de ligadura. Tales transformaciones canónicas deberían dejar invariantes las ecuaciones del movimiento en su forma hamiltoniana, a partir de lo cual dimos diversas caracterizaciones de las mismas.

En el presente trabajo se pretende dar una nueva caracterización de las transformaciones canónicas, con un número superabundante de variables con relaciones de ligadura. Para ello hemos utilizado el concepto de covariante bilineal, así como distintos conceptos, dados por M. Langlois en la referencia (2).

1. Relaciones preliminares

Sean $x = (q, p)$ un elemento conjunto $X \subset E^{2n}$ (espacio euclídeo $2n$ -dimensional), $y = (Q, P) \in Y \subset E^{2m}$ ($m \geq n$) su imagen por la aplicación $f: X \rightarrow Y$ definida mediante la relación

$$y = y(x, t) \tag{1.1}$$

donde t denota el parámetro tiempo. Entonces, si suponemos que f es inyectiva existe una aplicación $g: Y \rightarrow X$, tal que

$$g \cdot f = 1_x \text{ (identidad en } X) \quad (1.2)$$

y recíprocamente. Si además suponemos que tanto f como g son diferenciables, podemos aplicar el teorema de derivación de las funciones compuestas y obtenemos

$$J_I J = I_{2n} \quad (1.3)$$

donde I_{2n} es la matriz unidad $2n$ -dimensional, $J = \partial y / \partial x = y_x$ y $J_I = J^{-1} = \partial x / \partial y = x_y$, son las respectivas matrices jacobianas de las transformaciones asociadas a f y g .

Denotemos por G_n y G_m las siguientes matrices simpléticas

$$G_n = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix} \quad G_m = \begin{pmatrix} O_m & I_m \\ -I_m & O_m \end{pmatrix}$$

donde O_n y O_m representan las matrices cero, de órdenes n y m , respectivamente.

1.1 Proposición. — De acuerdo con los supuestos y notaciones expuestas se verifican las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned} J G_n J^T = G_m &\implies J_I G_m J_I^T = G_n \\ &\Downarrow \\ J^T G_m J = G_n & \end{aligned}$$

donde J^T representa la matriz transpuesta de J .

Dem.: En efecto, si partimos de la relación $J G_n J^T = G_m$ resulta

$$J_I J G_n (J_I J)^T = J_I G_m J_I^T$$

Y si tenemos en cuenta la (1.3) se deduce finalmente

$$G_n = J_I G_m J_I^T$$

lo que completa la implicación horizontal.

Análogamente, partiendo de la misma relación inicial, deducimos

$$J_I J G_n J^T = J_I G_m \implies G_n J^T = J_I G_m$$

y como $G_n^2 = -I_{2n}$, despejando J^T resulta

$$J^T = -G_n J_I G_m$$

con lo cual

$$J^T G_m J = -G_n J_I G_m^2 J = G_n$$

relaciones que nos prueban la implicación vertical.

2. Transformaciones canónicas con variables superabundantes

2.1 Definición. — Diremos que la transformación $y = y(x, t)$ de $X \subseteq E^{2n}$ en $Y \subseteq E^{2m}$ ($m \geq n$), donde Y representa una variedad $2n$ -dimensional engendrada por las funciones $\phi_j(y, t) = 0$; $j = 1, 2, \dots, p = 2r$, es canónica si transforma el sistema canónico, de hamiltoniano H ,

$$\dot{x} = G_n \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.1)$$

en este otro sistema canónico

$$\dot{y} = G_m \frac{\partial K}{\partial y} \quad (2.2)$$

con $K = H(x, t) = K(y, t)$, como nuevo hamiltoniano.

2.2 *Proposición.* — Si la transformación $y = y(x, t)$ es canónica, en el sentido de la definición anterior, entonces se verifica:

$$J G_n J^T = G_m \quad (2.3)$$

Dem.: En efecto, si tenemos en cuenta que $\dot{y} = J \dot{x}$, y que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = y_x \frac{\partial K}{\partial y} = J^T \frac{\partial K}{\partial y}$$

resulta

$$J \dot{x} = J G_n J^T \frac{\partial K}{\partial y} = \dot{y} \Rightarrow J G_n J^T = G_m$$

si queremos que la transformación sea canónica, y por tanto que transforme el sistema (2.1) en el (2.2).

2.3 *Proposición.* — Si $x = x(y, t)$ es canónica, entonces se verifica la relación:

$$J_I G_m J_I^T = G_n \quad (2.4)$$

Dem.: Esto es consecuencia inmediata de la 1.1 Proposición.

2.4 *Definición.* — Diremos que una matriz J es f -simplética si verifica la relación

$$J G_n J^T = G_m \quad (2.5)$$

Análogamente, diremos que la matriz J_I es g -simplética si verifica la relación

$$J_I G_m J_I^T = G_n \quad (2.6)$$

3. Covariante bilineal y transformaciones canónicas

Consideremos el covariante bilineal $w(d, \delta)$ definido por la relación:

$$w(d, \delta) = \delta w_d - d w_\delta = \sum_{i=1}^n \delta p_i dq^i - dp_i \delta q^i \quad (3.1)$$

asociado a la 1-forma diferencial

$$w_d = \sum_{i=1}^n p_i dq^i \quad (3.2)$$

donde $(q, p) = x$ es un $2n$ -vector de $X \subseteq E^{2n}$.

Evidentemente $w(d, \delta)$ es una forma bilineal asociada a la 2-forma diferencial

$$dw_d = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i \quad (3.3)$$

Si utilizamos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} dx^T &= (dq^i, dp_i) & \delta x^T &= (\delta q^i, \delta p_i) \\ dx &= \begin{pmatrix} dq^i \\ dp_i \end{pmatrix} & \delta x &= \begin{pmatrix} \delta q^i \\ \delta p_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces (3.1) puede ponerse en la forma

$$w(d, \delta) = dx^T G_n \delta x \quad (3.4)$$

Consideremos ahora la transformación $x = x(y, t)$, definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} q = q(Q, P, t) \\ p = p(Q, P, t) \end{cases} \quad (3.5)$$

donde suponemos que $(Q, P) = y \in Y \subseteq E^{2m}$ ($m \geq n$), y las variables Q y P verifican p relaciones de ligadura de la forma

$$\varnothing_l(Q, P, t) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (3.6)$$

Supongamos que la matriz jacobiana J_l de dicha transformación sea de rango máximo $2n$, y expresemos el covariante bilineal en estas nuevas variables, es decir

$$w(d, \delta) = dx^T G_n \delta x = dy^T J_l^T G_n J_l \delta y$$

Calculemos $J_l^T G_n J_l$

$$J_l^T G_n J_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^T}{\partial Q^i} \cdot G_n \frac{\partial x}{\partial Q^k} & \frac{\partial x^T}{\partial Q^i} \cdot G_n \frac{\partial x}{\partial P_k} \\ \frac{\partial x^T}{\partial P_j} \cdot G_n \frac{\partial x}{\partial Q^k} & \frac{\partial x^T}{\partial P_j} \cdot G_n \frac{\partial x}{\partial P_k} \end{pmatrix} \quad j, k = 1, 2, \dots, m$$

Ahora bien, como el paréntesis de Lagrange (u, v) está definido por

$$(u, v) = \frac{\partial x^T}{\partial u} \cdot G_n \frac{\partial x}{\partial v}$$

resulta

$$J_l^T G_n J_l = \begin{pmatrix} (Q^i, Q^k) & (Q^i, P_k) \\ (P_j, Q^k) & (P_j, P_k) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Supongamos que la transformación $x = x(y, t)$ no depende de t , es decir que en la (3.5) no aparece el tiempo t en los segundos miembros. Y supongamos además, que dicha transformación sea canónica, lo cual implica que

$$J_l G_m J_l^T = G_n \quad (3.8)$$

Veamos si el que se verifique esta relación implica que se verifique también esta otra

$$J_l^T G_n J_l = G_m \quad (3.9)$$

3.1 Proposición. — Si se admite que $J J_l = I_{2m}$, entonces la relación (3.8) implica la (3.9).

Dem.: En efecto, si $J J_I = I_{2m}$ de la (3.8) se deduce

$$J J_I G_m J_I^T = G_m J_I^T = J G_n \Rightarrow J_I^T = -G_m J G_n$$

Con lo cual se tiene

$$J_I^T G_n J_I = -G_m J G_n^2 J_I = G_m J J_I = G_n$$

3.2 Proposición. — Si admitimos que se verifica la relación

$$J G_n J^T = G_m$$

lo cual equivale a suponer que la transformación $y = y(x)$ sea canónica, entonces también (3.8) implica (3.9).

Dem.: En efecto, con estas hipótesis se tiene

$$J^T = -G_n J_I G_m$$

de donde se deduce la relación

$$J = -G_m J_I^T G_n$$

lo que implica se verifique

$$J_I^T = -G_m J G_n$$

relación con la cual ya es fácil probar que $J_I^T G_n J_I = G_m$.

Resumiendo todo cuanto llevamos dicho en este párrafo tenemos:

(i) Si la transformación $x = x(y)$ es canónica y $J J_I = I_{2m}$, entonces

$$J_I G_m J_I^T = G_n \Rightarrow J_I^T G_n J_I = G_m$$

(ii) Si la transformación $x = x(y)$ es canónica, y también lo es su inversa $y = y(x)$, entonces

$$J_I G_m J_I^T = G_n \Rightarrow J_I^T G_n J_I = G_m$$

3.3 Teorema. — Si se cumple la relación $J_I^T G_n J_I = G_m$ entonces se verifica: $w(d, \delta) = \Omega(d, \delta)$ donde $\Omega(d, \delta)$ es el covariante bilineal asociado a la 2-forma diferencial

$$d\Omega_d = \sum_{j=1}^m dP_j \wedge dQ^j$$

Dem.: Es una consecuencia inmediata de la definición de covariante bilineal y de las dos proposiciones anteriores.

3.4 Consecuencia. — Con las mismas hipótesis del teorema anterior se verifica

$$d(w_d - \Omega_d) = 0$$

luego, por el teorema inverso del de Poincaré, se deduce la existencia de una función $S = S(q, Q)$ tal que

$$w_d - \Omega_d = dS \tag{3.10}$$

Así pues, tenemos la equivalencia siguiente

$$J_I^T G_n J_I = G_m \Leftrightarrow w_d - \Omega_d = dS$$

Notación. — La d , que precede a toda forma diferencial, representa la diferenciación exterior. Aunque, en general, suele utilizarse otro símbolo para no confundirlo con la diferencial normal, nosotros hemos preferido conservar la misma notación para ambas.

3.5 Teorema. — Si $w_d - \Omega_d = dS$, entonces la transformación $x = x(y)$ es canónica, Es decir, se verifica la siguiente implicación

$$J_I^T G_n J_I = G_m \Rightarrow J_I G_m J_I^T = G_n$$

Dem.: Si se cumple la relación $J_I^T G_n J_I = G_m$ y $J_I J = I_{2n}$, entonces se tiene

$$J^T J_I^T G_n I_I = J^T G_m \Rightarrow G_n J_I = J^T G_m$$

Luego, $J_I = -G_n J^T G_m$ con lo cual

$$J_I G_m J_I^T = -G_n J^T G_m^2 J_I^T = G_n \quad \text{c.q.d.}$$

Notemos que la condición de invariancia de los covariantes bilineales, expresada por la igualdad

$$dx^T G_n \delta x = dy^T G_m \delta y \quad (3.11)$$

equivale a que se cumpla la relación

$$J_I^T G_n J_I = G_m$$

es decir, que la matriz J_I pertenezca al grupo de transformaciones g-simpléticas, o lo que es lo mismo a que verifique la relación

$$J_I G_m J_I^T = G_n$$

3.6 Teorema. — Consideremos una transformación que conserva el producto escalar simplético

$$x \cdot G_n x' = y \cdot G_m y'$$

y cuya matriz asociada es A . Entonces se verifica

$$A^T G_n A = G_m$$

Dem.: En efecto, si $x = A y$, $x' = A y'$ por hipótesis tenemos

$$A y \cdot G_n A y' = y \cdot G_m y'$$

lo que implica se verifique la relación

$$A^T G_n A = G_m$$

3.7 Consecuencia. — La matriz jacobiana J_I de una transformación canónica $x = x(y)$ pertenece al grupo de transformaciones que conservan el producto escalar simplético $x \cdot G_n x' = y \cdot G_m y'$.

Conclusión. — A la vista de todo lo expuesto concluimos: que el concepto de transformación canónica, con variables superabundantes y relaciones de ligadura, tal como la hemos definido, guarda una estrecha relación con la invariancia del covariante bilineal, y con las transformaciones que dejan invariante un producto escalar simplético especial.

BIBLIOGRAFIA

- 1) V. CAMARENA: A publicar en las actas de las II jornadas matemáticas hispano-lusitanas, Madrid (1973).
- 2) M. LANGLOIS: Bull. Astron. 3.^a serie, III, fasc. 4, 443-451 (1968).

ALGUNOS RESULTADOS SOBRE LA CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER DE UNA FUNCION ALEATORIA PERIODICA

P O R

M. SAN MIGUEL

Departamento de Estadística Matemática y Cálculo de Probabilidades
Facultad de Ciencias, Zaragoza (España)

Abstract

The purpose of this work is to complete some convergence criterions for the Fourier series of a periodic random function measurable such that

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \|X(t)\| dt < \infty,$$

obtained in a previous paper of the author [1].

Theorems of Vitali, Dini and Vallée-Poussin for Fourier series of $f(x)$ have been extended to the $X(t)$'s.

En el presente trabajo utilizaremos la siguiente terminología*:

(i) $X = (X^1, \dots, X^p)$ e $Y = (Y^1, \dots, Y^p)$ son dos variables aleatorias vectoriales de p dimensiones cuyas componentes X^i e Y^i ($1 \leq i \leq p$) son variables aleatorias complejas,

(ii) $\bar{X} = (\bar{X}^1, \dots, \bar{X}^p)$ e $\bar{Y} = (\bar{Y}^1, \dots, \bar{Y}^p)$, las variables aleatorias vectoriales de p dimensiones cuyas componentes \bar{X}^i e \bar{Y}^i ($1 \leq i \leq p$) son, respectivamente, conjugadas de las componentes X^i e Y^i ($1 \leq i \leq p$) de X e Y ,

(iii) $\langle x, y \rangle = \sum x^i y^i$, el producto escalar de dos elementos $x = (x^1, \dots, x^p)$, $y = (y^1, \dots, y^p)$, de C^p . Evidentemente, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

(iv). $|x| = (\langle x, x \rangle)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^p |x^i|^2 \right)^{1/2}$ el módulo o norma de x .

Dada una media E ,

(i'). $L_{2,p}(E)$ es el conjunto de variables aleatorias vectoriales con p componentes complejas $X = (X^1, \dots, X^p)$ tales que $E[\langle X, X \rangle]$ es finita. En este conjunto tomamos $X = Y$ sí y sólo si $P\{X \neq Y\} = 0$,

(ii'). $\langle\langle X, Y \rangle\rangle = E[\langle X, Y \rangle]$, el producto escalar de dos variables aleatorias X, Y de $L_{2,p}(E)$. Evidentemente, $\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \overline{\langle\langle Y, X \rangle\rangle}$,

(iii'). $\|X\| = (\langle\langle X, X \rangle\rangle)^{1/2}$, la norma de la variable aleatoria X^{**} .

Entonces, según se sabe, $L_{2,p}(E)$ es un espacio de Hilbert.

* Véase [1].

** Evidentemente, $\|X\| = E(|X|^2) = 0$ sí y sólo si $P\{|X| \neq 0\} = 0$, lo que es equivalente a $X = 0$ según (i').

Finalmente,

(i''). R es la recta real,

(ii''). μ , la medida de Lebesgue definida sobre R ,

(iii''). $X(t)$ es una función aleatoria definida en R y con valores en C^p , finita, es decir, perteneciente a $L_{2,p}(E)$. Se entenderá que $X(t)$ es periódica de período $\omega = 2\pi$ cuando digamos simplemente que es periódica.

Omitimos, dada su extensión, los conceptos de función aleatoria periódica, medible, esencialmente separable, de clase nula, etc., remitiendo al lector, para reconocerlos, al trabajo *Funciones aleatorias periódicas* [1], del cual éste es prolongación.

Sin embargo, daremos a continuación algunos teoremas y definiciones que sirvan de nexo de unión entre ambos trabajos.

TEOREMA 1. — Sean:

(i). T un espacio topológico,

(ii). μ una medida definida sobre T ,

(iii). $X(t)$ una función aleatoria medible definida en T .

Entonces, si para cada $Y \in L_{2,p}(E)$ posee $\langle\langle X(t), Y \rangle\rangle$ una integral definida sobre S y existe un $m > 0$ tal que

$$\frac{1}{\|Y\|} \left| \int_S \langle\langle X(t), Y \rangle\rangle d\mu \right| < m, \quad (1)$$

hay un único elemento $X_s \in L_{2,p}(E)$ tal que

$$\langle\langle X_s, Y \rangle\rangle = \int_S \langle\langle X(t), Y \rangle\rangle d\mu. \quad (2)$$

DEMOSTRACIÓN. — Véase [1], teorema 5.7. $\#$

DEFINICIÓN 1. — Una función aleatoria $X(t)$ se dice *integrable* si verifica las condiciones del teorema 1. Entonces, se llama a X_s la integral definida de $X(t)$ sobre S y se escribe

$$X_s = \int_S X(t) d\mu. \quad (3)$$

DEFINICIÓN 2. — Una función aleatoria $X(t)$ se dice *absolutamente integrable* si para cada $Y \in L_{2,p}(E)$ posee $\langle\langle X(t), Y \rangle\rangle$ una integral definida sobre S y si la integral superior verifica

$$\int_S^* \|X(t)\| d\mu < \infty \quad (4)$$

para todo $t \in T$.

DEFINICIÓN 3. — Se llama *serie de Fourier* (de tipo exponencial) de una función aleatoria $X(t)$ periódica y absolutamente integrable a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{int} \quad (5)$$

con coeficientes

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(t) e^{-int} dt \quad (n \in Z). \quad (6)$$

TEOREMA 2. — Sean:

- (i). $X(t)$ una función aleatoria periódica absolutamente integrable.
- (ii). $S(t)$ una función aleatoria finita en $[-\pi, \pi]$
- (iii). $\Phi(t, u) = X(t + 2u) + X(t - 2u) - 2S(t)$ (7)

Entonces, una condición necesaria y suficiente para que la serie de Fourier de $X(t)$ sea convergente en t y tenga por suma $S(t)$ es que, para cada $\omega > 0$, existan un $\varepsilon = \varepsilon_\omega \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y un entero n_ω para los cuales se tenga

$$\left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\text{sen}(2n+1)u}{u} du \right\| < \omega \quad (8)$$

para todo $n > n_\omega$.

DEMOSTRACIÓN. — Véase [1], teorema 6.15. $\#\#$

COROLARIO 1. — Una condición necesaria y suficiente para que la serie de Fourier de $X(t)$ sea convergente en t y tenga por suma $S(t)$ es que, para cada $\omega > 0$, exista un $\varepsilon = \varepsilon_\omega \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y un número real $\alpha_\omega > 0$ tales que se tenga

$$\left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\text{sen } \alpha u}{u} du \right\| < \omega \quad (9)$$

para cada $\alpha > \alpha_\omega$.

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, si la serie es convergente, para todo $\omega > 0$ existe un $\varepsilon = \varepsilon_\omega \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y un entero positivo n_ω tales que

$$\left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\text{sen}(2n+1)u}{u} du \right\| < \frac{\omega}{2} \quad (10)$$

y

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \|\Phi(t, u)\| du < \frac{\omega}{4} \quad (11)$$

para cada $n > n_\omega$.

Además, llamando:

$$\alpha_\omega = 2n_\omega + 3,$$

α , a cualquier número $\alpha > \alpha_\omega$, $2n+1$, al mayor número impar que sea menor que α y δ al número que verifica $\alpha = 2n+1+2\delta$, se deduce que

$$n \geq n_\omega$$

siempre que

$$\alpha > \alpha_\omega.$$

Por tanto, como

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\operatorname{sen} \alpha u}{u} du \right\| \leq \\
 & \leq \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{1}{u} [\operatorname{sen} \alpha u - \operatorname{sen} (2n+1)u] du \right\| + \\
 & + \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\operatorname{sen} (2n+1)u}{u} du \right\| \leq \\
 & \leq \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) 2\delta \frac{\operatorname{sen} \delta u}{\delta u} \cos (2n+1+\delta)u du \right\| + \\
 & + \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\operatorname{sen} (2n+1)u}{u} du \right\| \leq \\
 & \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi\varepsilon} \|\Phi(t, u)\| du + \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\operatorname{sen} (2n+1)u}{u} du \right\|
 \end{aligned}$$

se obtiene de las expresiones (10) y (11) que, para cada $\omega > 0$ existe un $\varepsilon = \varepsilon_\omega \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y un número real $\alpha_\omega = 2n_\omega + 3$ tales que

$$\left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\operatorname{sen} \alpha u}{u} du \right\| < 2 \cdot \frac{\omega}{4} + \frac{\omega}{2} = \omega$$

para cada número real $\alpha > \alpha_\omega$.

La demostración de la condición suficiente es inmediata teniendo en cuenta el teorema 2. \ddagger

COROLARIO 2. — Sea

$$J(u) = \int_0^{*u} \|\Phi(t, u)\| du \quad (12)$$

tal que

$$J'(0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{J(u)}{u} = 0 \quad (13)$$

En tal caso, una condición necesaria y suficiente para que la serie de Fourier de $X(t)$ sea convergente en t y tenga por suma $S(t)$ es que, para cada $\omega > 0$, exista un $\varepsilon = \varepsilon_\omega \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y un $\delta_\omega \in (0, \varepsilon_\omega]$ tales que se tenga

$$\left\| \int_{\delta}^{\varepsilon} \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \cdot \frac{du}{u} \right\| < \omega \quad (14)$$

para cada $\delta \in (0, \delta_\omega)$.

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, haciendo el cambio $\alpha = \frac{\pi}{\delta} u$ se obtiene

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\operatorname{sen} \alpha u}{u} du = \frac{1}{\pi} \int_\delta^{\delta \varepsilon} \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \cdot \frac{du}{u}$$

Por consiguiente, como

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \frac{du}{u} = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \cdot \frac{du}{u} + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\varepsilon \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \cdot \frac{du}{u}$$

($\delta < \varepsilon$), se tiene

$$\left\| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\varepsilon \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \cdot \frac{du}{u} \right\| \leq \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta \varepsilon} \|\Phi(t, u)\| du + \left\| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\varepsilon \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \cdot \frac{du}{u} \right\| \quad (15)$$

y

$$\left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \frac{du}{u} \right\| \leq \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta \varepsilon} \|\Phi(t, u)\| du + \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \frac{du}{u} \right\| \quad (16)$$

Entonces, teniendo en cuenta el corolario 1 y la condición (13), se deduce de (15) que, si se verifica (14), la serie de Fourier de $X(t)$ es convergente en t y tiene por suma $S(t)$. Recíprocamente, si la serie de Fourier es convergente en t y tiene por suma $S(t)$ se deduce de (16) que es cierta la condición (14). \ddagger

COROLARIO 3. — Sea

$$J(u) = \int_0^{*u} \|\Phi(t, u)\| du$$

tal que

$$J'(0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{J(u)}{u} = 0$$

En tal caso, una condición necesaria y suficiente para que la serie de Fourier de $X(t)$ sea convergente en t y tenga por suma $S(t)$ es que, para cada $\omega > 0$, exista un $\varepsilon = \varepsilon_\omega \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y un $\delta_\omega \in (0, \varepsilon_\omega]$ tales que se tenga

$$\left\| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\varepsilon \frac{\Phi(t, u + \delta) - \Phi(t, u)}{u} \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du \right\| < \omega \quad (17)$$

para cada $\delta \in (0, \delta_\omega)$.

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, como

$$\frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\epsilon} \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \frac{du}{u} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\epsilon-\delta} \frac{\Phi(t, u + \delta)}{u + \delta} \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du$$

se deduce, descomponiendo el segundo miembro, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\epsilon} \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \frac{du}{u} &= -\frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\epsilon} \frac{\Phi(t, u + \delta)}{u + \delta} \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon-\delta}^{\epsilon} \frac{\Phi(t, u + \delta)}{u + \delta} \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du + \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\Phi(t, u + \delta)}{u + \delta} \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du \end{aligned}$$

y, puesto que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\epsilon-\delta}^{\epsilon} \frac{\Phi(t, u + \delta)}{u + \delta} \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du = 0$$

(véase [1], observación 6.1) y

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\delta} \left\| \frac{\Phi(t, u + \delta)}{u + \delta} \right\| du = 0,$$

según la hipótesis, se tiene

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\epsilon} \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \frac{du}{u} = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\epsilon} \frac{\Phi(t, u + \delta)}{u + \delta} \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du$$

o también

$$2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\epsilon} \Phi(t, u) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} \frac{du}{u} = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\epsilon} \left(\frac{\Phi(t, u + \delta)}{u + \delta} - \frac{\Phi(t, u)}{u} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du. \quad (18)$$

Por otra parte, como

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\epsilon} \frac{\Phi(t, u + \delta) - \Phi(t, u)}{u} \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du - \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\epsilon} \left(\frac{\Phi(t, u + \delta)}{u + \delta} - \frac{\Phi(t, u)}{u} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\epsilon} \frac{\delta \Phi(t, u + \delta)}{u(u + \delta)} \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du \right\| \leq \frac{\delta}{\pi} \int_{\delta}^{\epsilon} \|\Phi(t, u + \delta)\| \frac{du}{u(u + \delta)} \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\epsilon} \|\Phi(t, u + \delta)\| \frac{du}{u^2} \end{aligned}$$

o, integrando por partes,

$$\frac{\delta}{\pi} \int_{\delta}^{\epsilon} \|\Phi(t, u + \delta)\| \frac{du}{u^2} \leq \frac{\delta}{\pi} \frac{J(\epsilon + \delta)}{\epsilon^2} + \frac{2\delta}{\pi} \int_{\delta}^{\epsilon} J(u + \delta) \frac{du}{u^3}$$

y puesto que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\pi} \frac{J(\varepsilon + \delta)}{\varepsilon^2} = 0$$

y

$$\left| \frac{2\delta}{\pi} \int_{\delta}^{\varepsilon} J(u + \delta) \frac{du}{u^3} \right| \leq \frac{2\delta\omega}{\pi} \left| \int_{\delta}^{\varepsilon} 2u \frac{du}{u^3} \right| \leq \frac{4\omega}{\pi},$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{\Phi(t, u + \delta) - \Phi(t, u)}{u} \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du = \\ & = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\varepsilon} \left(\frac{\Phi(t, u + \delta)}{u + \delta} - \frac{\Phi(t, u)}{u} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi u}{\delta} du \end{aligned} \quad (19)$$

Entonces, teniendo en cuenta el corolario 2 y las igualdades (18) y (19), se deduce la tesis del corolario. $\#$

TEOREMA 3 (DINI). — Una condición suficiente para que la serie de Fourier de una función aleatoria periódica absolutamente integrable $X(t)$ sea convergente en t y tenga por suma $S(t)$ es que se pueda encontrar un $\varepsilon_0 > 0$ tal que la función $\Phi(u) = \frac{\Phi(t, u)}{u}$ sea integrable en el intervalo $[0, \varepsilon_0]$.

DEMOSTRACIÓN. — Véase [1], teorema 6.17. $\#$

COROLARIO 4. — Una condición suficiente para que la serie de Fourier de una función aleatoria periódica $X(t)$ absolutamente integrable, sea convergente en t y tenga por suma $S(t)$ es que se pueda encontrar un $\varepsilon_0 > 0$ tal que se verifique

$$\|\Phi(t, u)\| \leq Lu^r \quad (20)$$

para $u \in (0, \varepsilon_0]$, siendo $r > 0$ y L constantes.

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, basta tener en cuenta que, como

$$\frac{\|\Phi(u, u)\|}{u} \leq L \frac{1}{u^{1-r}}$$

para $u \in (0, \varepsilon_0]$, la función $\frac{\Phi(t, u)}{u}$ es integrable en el intervalo $[0, \varepsilon_0]$. $\#$

COROLARIO 5. — Una condición suficiente para que la serie de Fourier de una función aleatoria periódica $X(t)$, absolutamente integrable, sea convergente en t y tenga por suma $X(t)$ es que se pueda encontrar un $\varepsilon_0 > 0$ tal que la función

$$\frac{X(t + 2u) + X(t - 2u) - 2X(t)}{u}$$

sea integrable en el intervalo $[0, \varepsilon_0]$. En particular, es suficiente que se verifique

$$\|X(t + 2u) + X(t - 2u) - 2X(t)\| \leq Lu^r \quad (21)$$

para $u \in (0, \varepsilon_0]$, siendo $r > 0$ y L constantes.

DEMOSTRACIÓN. — Es evidente teniendo en cuenta el teorema 3 y el corolario 4. $\#$
 TEOREMA 4. — Sean

- (i). $X(t)$ una función aleatoria periódica absolutamente integrable,
 (ii). $X(t+0)$ y $X(t-0)$ los límites (en media) a derecha e izquierda, respectivamente, en un punto t de continuidad (en media) o de discontinuidad de primera especie* de $X(t)$.

Entonces, una condición suficiente para que la serie de Fourier de $X(t)$ converja en t hacia

$$\frac{X(t+0) + X(t-0)}{2}$$

es que se pueda encontrar un $\epsilon_0 > 0$ tal que la diferencia entre los cocientes incrementales

$$\frac{X(t+h) - X(t+0)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{X(t-h) - X(t-0)}{-h}$$

sea integrable en el intervalo $[0, \epsilon_0]$.

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, tomemos

$$S(t) = \frac{X(t+0) + X(t-0)}{2}$$

Entonces, si existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que la expresión

$$\begin{aligned} & \frac{X(t+h) - X(t-0)}{h} - \frac{X(t-h) - X(t-0)}{-h} = \\ & = \frac{X(t+h) - X(t-h) - X(t+0) + X(t-0)}{h} = \frac{X(t+h) + X(t-h) - 2S(t)}{h} \end{aligned}$$

es integrable en $[0, \epsilon_0]$, basta tener en cuenta el teorema 3 para deducir que la serie de Fourier de $X(t)$ converge en t hacia.

$$\frac{X(t+0) + X(t-0)}{2}. \quad \#$$

OBSERVACIÓN 1. — Evidentemente, si $X(t)$ es regular en t^* y se verifican las condiciones del teorema 4, la serie de Fourier de $X(t)$ converge en t hacia $X(t)$.

COROLARIO 6. — Una condición suficiente para que la serie de Fourier de una función aleatoria periódica $X(t)$, absolutamente integrable, converja en un punto t de continuidad o discontinuidad de primera especie de $X(t)$ hacia

$$\frac{X(t+0) + X(t-0)}{2}$$

es que se pueda encontrar un $\epsilon_0 > 0$ tal que se verifique

$$\|X(t+h) - X(t+0)\| \leq Lhr, \quad \|X(t-h) - X(t-0)\| \leq Lhr,$$

para $h \in (0, \epsilon_0)$, siendo $r > 0$ y L constantes.

* Véase VALLÉE-POUSSIN [2], pág. 147.

* Véase VALLÉE-POUSSIN [2], pág. 147.

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, como existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\left| \frac{X(t+h) - X(t+0)}{h} - \frac{X(t-h) - X(t-0)}{-h} \right| \leq 2Lh^{-1}$$

para $h \in (0, \varepsilon_0]$, resulta que, según el teorema 4, la serie de Fourier de $X(t)$ es convergente en t hacia

$$\frac{X(t+0) + X(t-0)}{2}. \quad \#$$

LEMA 1. — Sean

- (i). ε un número real positivo,
- (ii). $f(u)$ una función real de variación acotada en $[0, \varepsilon]$ tal que $f(0) = 0$,
- (iii). $V_0(\varepsilon)$ la variación total de $f(u)$ en $[0, \varepsilon]$,
- (iv).

$$K = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} u}{u} du \quad (22)$$

Entonces, se verifica

$$\left| \int_0^\varepsilon f(u) \frac{\operatorname{sen} \alpha u}{u} du \right| \leq K V_0(\varepsilon) \quad (23)$$

siendo α un número real.

DEMOSTRACIÓN. — Véase [1], lema 6.2. $\#$

TEOREMA 5. — Si $X(t)$ es una función aleatoria periódica absolutamente integrable y de variación acotada en $[-\pi, \pi]$, la serie de Fourier de $X(t)$ converge a

$$S(t) = \frac{1}{2} [X(t-0) + X(t+0)] \quad (24)$$

DEMOSTRACIÓN. — Véase [1], teorema 6.19. $\#$

COROLARIO 7 (DIRICHLET-JORDAN). — Si $X(t)$ es una función aleatoria periódica absolutamente integrable y de variación acotada en un intervalo (a, b) , la serie de Fourier de $X(t)$ converge a

$$S(t) = \frac{1}{2} [X(t-0) + X(t+0)]$$

en (a, b) . $\#$

OBSERVACIÓN 2. — Si $X(t)$ es una función aleatoria periódica, continua y de variación acotada en un intervalo (A, B) , la serie de Fourier de $X(t)$ converge uniformemente a $X(t)$ en cada intervalo cerrado interior a (A, B) .

LEMA 2. — Sean

- (i). ε un número real positivo,
- (ii). $f(u)$ una función real de variación acotada en $[0, \varepsilon]$ tal que $f(0) = 0$,
- (iii). $V_0(\varepsilon)$ la variación total de $f(u)$ en $[0, \varepsilon]$.

Entonces, se verifica

$$\left| \int_0^\varepsilon f(u) \cos \alpha u du \right| \leq V_0(\varepsilon) \quad (25)$$

para todo número real α .

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, si $g(u)$ es una función no decreciente en $[0, \varepsilon]$ con $g(0)=0$, se tiene

$$\left| \int_0^\varepsilon g(u) \cos \alpha u \, du \right| = \left| g(\varepsilon) \int_{\varepsilon'}^\varepsilon \cos \alpha u \, du \right| \leq |g(\varepsilon)| (0 < \varepsilon' < \varepsilon)$$

según el segundo teorema de la media. Entonces, como $f(u)$ es diferencia $\overline{V}(u) - \underline{V}(u)$ de las variaciones superior e inferior de $f(u)$ en $[0, u]$, resulta

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\varepsilon f(u) \cos \alpha u \, du \right| &\leq \left| \int_0^\varepsilon \overline{V}(u) \cos \alpha u \, du \right| + \left| \int_0^\varepsilon \underline{V}(u) \cos \alpha u \, du \right| \leq \\ &\leq \overline{V}(\varepsilon) + \underline{V}(\varepsilon) = V_o(\varepsilon)^*. \quad \# \end{aligned}$$

TEOREMA 6 (VALLÉE-POUSSIN). — Sean:

- (i). $X(t)$ una función aleatoria periódica absolutamente integrable,
- (ii). $G(u)$ la función

$$G(u) = \frac{1}{2u} \int_0^u [X(t+u) + X(t-u)] \, du \quad (26)$$

Entonces, la serie de Fourier de $X(t)$ converge a

$$\lim_{u \rightarrow 0} G(u)$$

en todo punto t para el que se pueda encontrar un $\delta > 0$ tal que $G(u)$ sea de variación acotada en $(0, \delta)$.

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, pongamos

$$S(t) = \lim_{u \rightarrow 0} G(u),$$

$$\Phi(u) = \Phi(t, u) = X(t+u) + X(t-u) - 2S(t)$$

y

$$J(u) = \frac{1}{u} \int_0^u \Phi(t, u) \, du$$

para $u \neq 0$, tal que $J(0) = 0$.

Entonces, integrando por partes se deduce

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\text{sen } \alpha u}{u} \, du &= \text{sen } \alpha \varepsilon J(\varepsilon) - \int_0^\varepsilon J(u) \frac{\alpha u \cos \alpha u - \text{sen } \alpha u}{u} \, du = \\ &= \text{sen } \alpha \varepsilon J(\varepsilon) - \alpha \int_0^\varepsilon J(u) \cos \alpha u \, du + \int_0^\varepsilon J(u) \frac{\text{sen } \alpha u}{u} \, du \end{aligned}$$

* Esta demostración es análoga a la del lema 2. Véase [1].

y, por tanto,

$$\left\| \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\text{sen } \alpha u}{u} du \right\| \leq |\text{sen } \alpha \varepsilon| \|J(\varepsilon)\| + |\alpha| \cdot \left\| \int_0^\varepsilon J(u) \cos \alpha u du \right\| + \left\| \int_0^\varepsilon J(u) \frac{\text{sen } \alpha u}{u} du \right\|$$

Puesto que si, para un punto t , $G(u)$ es de variación acotada en $[0, \varepsilon]$, también $J(u)$ es de variación acotada en $[0, \varepsilon]$, resulta, llamando $V_0(u)$ a su variación total, que

$$\left\| \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\text{sen } \alpha u}{u} du \right\| \leq |\text{sen } \alpha \varepsilon| \cdot V_0(\varepsilon) + |\alpha| \cdot V_0(\varepsilon) + K V_0(\varepsilon) \leq (|\text{sen } \alpha \varepsilon| + |\alpha| + K) V_0(\varepsilon)$$

Como $V_0(u)$ es una función continua en $u = 0$, para todo $\omega > 0$ existe un $\varepsilon = \varepsilon_\omega > 0$ tal que

$$\left\| \int_0^\varepsilon \Phi(t, u) \frac{\text{sen } \alpha u}{u} du \right\| \leq (|\text{sen } \alpha \varepsilon| + |\alpha| + K) V_0(\varepsilon) < \omega$$

Del corolario 4 se deduce entonces que la serie de Fourier de $X(t)$ converge a

$$S(t) = \lim_{u \rightarrow 0} G(u). \quad \#$$

TEOREMA 7 (LEBESGUE). — Una condición suficiente para que la serie de Fourier de $X(t)$ converja a $X(t)$ en todo punto en el que $X(t)$ sea continua es que, para cada

$\omega > 0$, exista un $\varepsilon = \varepsilon_\omega \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y un $\delta_\omega \in (0, \varepsilon_\omega]$ tales que se tenga

$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^{\varepsilon} \left\| \frac{\Phi(t, u + \delta) - \Phi(t, u)}{u} \right\| du < \omega \quad (27)$$

para $\delta \in (0, \delta_\omega)$.

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, basta tener en cuenta que

$$\left\| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\varepsilon \frac{\Phi(t, u + \delta) - \Phi(t, u)}{u} \text{sen } \frac{\pi u}{\delta} du \right\| \leq \frac{1}{\pi} \int_\delta^{\varepsilon} \left\| \frac{\Phi(t, u + \delta) - \Phi(t, u)}{u} \right\| du$$

para deducir que, si $X(t)$ es continua y se verifica (27), la serie de Fourier de $X(t)$ converge a $X(t)$, según el corolario 3. $\#$

TEOREMA 8 (DINI). Si $X(t)$ es continua en (A, B) , una condición suficiente para que la serie de Fourier de $X(t)$ converja uniformemente a $X(t)$ es que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Log } \delta \cdot \|\Phi(t, u + \delta) - \Phi(t, u)\| = 0 \quad (28)$$

uniformemente en todo intervalo interior a (A, B) .

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, puesto que para cada $\omega > 0$ existe un $\delta_\omega > 0$ tal que

$$|\text{Log } \delta| \cdot \|\Phi(t, u + \delta) - \Phi(t, u)\| < \omega$$

para todo $\delta \in (0, \delta_\omega)$, cualquiera que sea u , se deduce que, para cada $\omega > 0$, existe también un $\varepsilon = \varepsilon_\omega \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y un $\delta_\omega \in (0, \varepsilon_\omega]$ tales que

$$\frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\varepsilon} \left\| \frac{\Phi(t, u + \delta) - \Phi(t, u)}{u} \right\| du < \frac{\omega}{\pi |\text{Log } \delta|} \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{du}{u} < \frac{\omega}{\pi}$$

para todo $\delta \in (0, \delta_\omega)$, cualquiera que sea n . $\#$

BIBLIOGRAFIA

- [1] SAN MIGUEL, M.: *Fuciones aleatorias periódicas*. Rev. Acad. Ciencias; 2.^a, t. 26, 1, Zaragoza, 1971.
- [2] VALLÉE-POUSSIN, Ch. J. de la: *Cours d'Analyse Infinitésimale*, tomo II. Gauthiers-Villars. París, 1912.
- [3] VITALI, G. e G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni de variabile reale*. (2 vols.). Zanichelli. Bologna, 1935.
- [4] ZYGMUND, A.: *Trigonometric series*. (2 vols.). Cambridge University Press. New York, 1959.

«ESTUDIO DE LA ESFERICIDAD DE LA ONDA EXTRAXIAL EN UN SISTEMA OPTICO» (II)

P O R

J. CASAS y J. APORTA

Departamento de Física Fundamental. Cátedra de Optica.
Universidad de Zaragoza (España)

Abstract

The results obtained in previous papers about the symmetry which appears in the spot diagrams, when the height difference between the principal and the marginal sagittal rays spot on the paraxial plane are small, are justified from a serie developement (in the 3^{er} order approximation) of the autgoing wave surface. Another important effects are treated as well.

Introducción

Decimos que un sistema óptico se comporta como sistema perfecto para un punto objeto, cuando la superficie de onda emergente, correspondiente al haz que tiene su origen en el punto objeto, es una esfera cuyo centro es el punto imagen. Cuando el comportamiento no es el de un sistema perfecto, tendremos en el caso más general por imagen del punto una distribución determinada de luz en el plano imagen, dejando de ser la superficie de onda emergente una esfera. La calidad de la imagen puede pues estudiarse a partir de los diagramas de impacto o de la superficie de onda emergente ya que dichas formas están íntimamente relacionadas.

A la vista de los resultados obtenidos en trabajos anteriores (1, 2) se hace necesario un estudio teórico para justificar el origen de la gran simetría existente en las figuras de impacto en torno al rayo principal cuando hacemos mínimo DIF, así como la falta de simetría respecto del plano sagital observada en algún caso particulra como en el Triplete de Taylor cuando los valores de sus aberraciones de Seidel son muy grandes.

Este estudio teórico va a realizarse a partir de un desarrollo en serie, hasta el tercer orden, de la superficie de onda emergente, exigiendo que los rayos sagital y principal se corten en un punto, condición que extrapolada coincide con la de igualar las alturas de impacto de esos dos rayos, cosa que se hacía en los trabajos anteriormente citados.

II-1. Estudio teórico de la superficie de onda

En todo sistema óptico con simetría de revolución, la superficie de onda emergente correspondiente a un haz de campo cualquiera tiene la propiedad de ser simétrica con respecto al plano que determinan el rayo principal, que pasa por el centro de la PE, y el eje de revolución del sistema. Este plano se denomina «plano meridiano».

Lo único que se puede asegurar para la superficie de onda emergente de un sistema óptico, no perfecto, es que todos los rayos contenidos en el plano meridiano $AP'B$ (Figura II-1) cortan al eje $P'Z$, lo que no ocurría con los demás rayos de la congruencia

que en general, se cruzarán con el eje $p'Z$. Como puede verse en la Fig. IV-1, el eje $P'Z$ lo tomamos sobre el rayo principal emergente del sistema; el eje $P'X$ se toma de forma que el plano XZ sea el plano meridiano y el eje $P'Y$ perpendicular en P' al plano XZ .

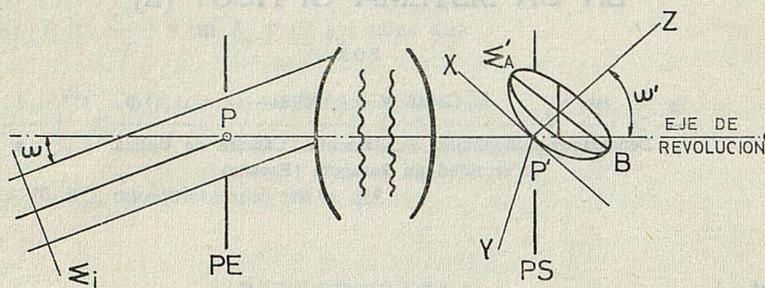


FIG. II-1

II-2. Desarrollo en serie de la superficie de onda en el origen de coordenadas

El desarrollo en serie en el origen de coordenadas de una superficie cuya ecuación supondremos dada en la forma

$$z = f(xy) \quad (\text{II-1})$$

es el caso más general de la forma

$$z = Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 + Fxy + Gx^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Jy^3 + \text{términos superiores de tercer orden} \quad (\text{II-2})$$

Si cortamos el desarrollo en serie por los términos de tercer orden e imponemos a la superficie de onda las condiciones de:

a) Simetría respecto al plano meridiano —que se cumple para cualquier haz de campo o de eje, según hemos visto, en todo sistema óptico con simetría de revolución.

b) Que el plano $z = 0$ sea tangente en el origen —condición impuesta por la elección de ejes y origen de referencia—, algunos de los términos del desarrollo II-2 desaparecerán, pues la primera condición exige que el valor de « z » sea independiente del signo de « y » por lo que esta variable sólo podrá aparecer en el desarrollo con exponentes de orden par, mientras que la segunda condición implica la desaparición de todos los términos de grado cero y de primer grado.

Bajo estos supuestos la ecuación II-2 tomará la forma

$$z = ax^2 + by^2 + cx^3 + dxy^2 \quad (\text{II-3})$$

desarrollo en serie de la superficie de onda emergente del sistema óptico correspondiente a un haz de campo, a la que vamos a imponer las condiciones de nuestro estudio.

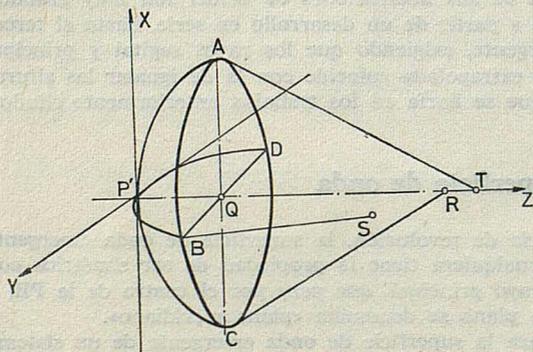


FIG. II-2

II-3. Cosenos directores de los rayos de la congruencia

Los rayos de la congruencia emergentes, como normales a la superficie de onda, tendrán sus cosenos directores proporcionales a los valores de las derivadas parciales de la ecuación de la superficie de onda, con respecto a las coordenadas, para los puntos en que los rayos cortan a la onda.

Las ecuaciones de la normal serán

$$\frac{x - x_i}{p} = \frac{y - y_i}{q} = \frac{z - z_i}{r} \quad (\text{II-4})$$

donde p, q, r son los valores de las derivadas de la ecuación en el punto (x_i, y_i, z_i) .

Para calcular los cosenos directores (L, M, N) del rayo que corta a la superficie en el punto (x_i, y_i, z_i) bastará con normalizar los tres valores p, q, r obtenidos para ellos

$$L = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad M = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad N = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \quad (\text{II-5})$$

que verifican la condición

$$L^2 + M^2 + N^2 = 1$$

Nuestra ecuación II-2 es de la forma

$$f(x, y) - z = 0 \equiv F(x, y, z) = 0$$

y a partir de ella podemos determinar los valores que toman en cada punto (p, q, r) ya que:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x_i, y_i, z_i)} = 2ax_i + 3cx_i^2 + dy_i^2 \\ p &= \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x_i, y_i, z_i)} = 2by_i + 2dx_i y_i \\ r &= \frac{\partial F}{\partial z} = -1 \end{aligned} \quad (\text{II-6})$$

conocidos los valores de p, q, r , estamos ya en condiciones de calcular la ecuación de cualquier rayo, así como sus cosenos directores.

II-4. Ecuaciones de los normales en los puntos A, B, y C

Punto A

El punto A en el plano meridiano se fija mediante su coordenada $x(x_A = \alpha)$ ya que $y_A = 0$ y de II-3 podemos obtener el valor de z_A

$$z_A = \gamma = a\alpha^2 + c\alpha^3 \quad (\text{II-7})$$

y los valores que toman (p, q, r) en el punto A serán

$$\begin{aligned} p_A &= 2a\alpha + 3c\alpha^2 \\ q_A &= 0 \\ r_A &= -1 \end{aligned} \quad (\text{II-8})$$

Las ecuaciones de la normal en A serán

$$\frac{x - \alpha}{2a\alpha + 3c\alpha^2} = \gamma - z \quad (\text{II-9})$$

Punto B

Como en el paso del haz por el sistema óptico han de conservarse los planos de incidencia, se conserva el plano meridiano y puede suponerse que, en primera aproximación, también se conserva el plano del haz sagital que siempre es normal al plano meridional. Tomaremos el punto B en el plano zx y en el plano normal al eje ox por A que cortará al eje en Q (Fig. II-2).

Las coordenadas de B en estos supuestos serán $(0, \beta, \gamma)$.

Siguiendo el mismo razonamiento que para el punto A, obtenemos para B de II-3

$$z_B = \gamma = b\beta^2 \quad (\text{II-10})$$

y para p, q, r de II-6 los valores

$$\begin{aligned} p_B &= d\beta^2 \\ q_B &= 2b\beta \\ r_B &= -1 \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

y para las ecuaciones de la normal en B

$$\frac{x}{d\beta^2} = \frac{y - \beta}{2b\beta} = \gamma - z \quad (\text{II-12})$$

Punto C

Por estar en el plano meridiano, tendrá su coordenada $z_c = z_A$, su coordenada $y_c = y_A = 0$ y su coordenada $x = x_c$ en el caso general, cumpliéndose que

$$\gamma = ar_c^2 + cx_c^3 \quad (\text{II-13})$$

obteniendo para p, q, r los valores

$$\begin{aligned} p_c &= 2ax_c + 3cx_c^2 \\ q_c &= 0 \\ r_c &= -1 \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$

y para las ecuaciones de la normal en C

$$\frac{x - x_c}{2ax_c + 3cx_c^2} = \gamma - z \quad (\text{II-15})$$

II-5. Intersección de las normales en A, B y C con los planos coordenados

Normal en A — Por estar A en el plano de simetría que contiene al eje z la normal a la superficie de onda por A siempre cortará al eje z en un punto $(0, 0, z_T)$ que satisfará a (II-9).

Haciendo $x = 0$ en II-9 obtenemos para z_T el valor

$$z_T = \gamma + \frac{1}{2a + 3c\alpha} \quad (\text{II-16})$$

Normal en B. — La normal en B como se deduce de su ecuación II-12 costará al plano xz en el caso más general en un punto como el $S(x_s, 0, z_s)$ como se indica en la Fig. II-2. Los valores x_s y z_s pueden obtenerse de II-12 sin más que calcular su intersección con el plano $y = 0$

$$\frac{x}{d\beta^2} = \frac{-\beta}{2b\beta} = \gamma - z$$

obteniéndose

$$x_s = -\frac{d\beta^2}{2b} \quad (II-17)$$

$$z_s = \gamma + \frac{1}{2b}$$

Normal en C. — El punto C, al igual que el A, por estar contenido en el plano meridiano, cortará al eje oz en un punto $R(0, 0, z_R)$.

Haciendo $z = 0$ en II-15 obtenemos para z_R el valor

$$z_R = \gamma + \frac{1}{2a + 3cx_c} \quad (II-18)$$

II-6. Configuración de la superficie de onda

Si dentro del desarrollo del tercer orden al que hemos limitado nuestro estudio hacemos que el punto A (fig. II-2) tienda a P' , z_T tiende a ser la *focal tangencial* del haz elemental en torno al eje z .

Si el punto B tiende a P' el punto S tendería a ser la *focal sagital* de dicho haz.

Si exigimos a la superficie de onda una configuración tal que el rayo sagital por B corte al eje oz deberá ser

$$x_s = 0 \quad (II-19)$$

lo que implica según II-17 que

$$\frac{d\beta^2}{2b} = 0 \Rightarrow d = 0 \quad (II-20)$$

pues en general $\beta \neq 0$ y $b \neq \infty$, tomando con esta nueva condición la superficie de onda la forma

$$z = ax^2 + by^2 + cx^3 \quad (II-21)$$

II-7. Interpretación

Por el hecho de exigir que el rayo sagital corte al eje z , que es lo que se hace al exigir igualdad de alturas de los rayos principal y sagital— en la superficie de onda desaparece el término « dxy^2 », que representaba en una disimetría. Si observamos la ecuación II-3 vemos que los dos primeros términos ax^2 y by^2 son términos de simetrías, puesto que el cambiar « x » por « $-x$ » ó « y » por « $-y$ » no se modificaría el valor de « z », en el supuesto de que solamente ellos formasen la ecuación II-3, sin embargo los términos « cx^3 » y « dxy^2 » son términos que representan una asimetría en « x », puesto que al cambiar « x » de signo, cambia « z » de valor.

Para asegurar un buen comportamiento en la onda emergente habrá que eliminar esos términos que representan disimetrías y que separan su comportamiento del que correspondiese a una esfera, superficie ideal para la onda emergente. Uno de esos términos ya lo hemos eliminado sin más que exigir a los rayos principal y sagital de la congruencia que estén contenidos en el mismo plano, con lo cual sólo nos queda el término de disimetría cx^3 en la ecuación de la superficie de onda emergente.

Significado del coeficiente C

Si cortamos la superficie de onda emergente por el plano xz , para darnos mejor idea de como van las cosas, quedaría de II-21 haciendo $y = 0$

$$z = ax^2 + cx^3 \quad (\text{II-22})$$

y si en ella hacemos que $c = 0$ nos quedaría

$$z = ax^2 \quad (\text{II-23})$$

que representa la ecuación de una parábola de eje z .

Construyendo la ecuación II-22 a partir de II-23 añadiéndole el término cx^3 , vemos que cuando « x » es positivo el valor de cx^3 se suma al valor de z dado por la ec. II-23, mientras que si x es negativo dicho valor se restaría con lo que la nueva superficie de onda tomaría una forma esencialmente comática.

Por lo tanto el término cx^3 representa un coma, es decir una disimetría que en este caso está contenida en el plano meridiano y que tiene que estar, por lo tanto, directamente relacionada con la aberración llamada coma tangencial.

Supresión del coeficiente C

Si el anterior razonamiento es correcto, la corrección del coma tangencial debe suprimir el coeficiente c , única forma de que el término cx^3 desaparezca del desarrollo.

Corregir el coma tangencial equivale a que las normales a la onda emergente por los puntos A y C (Fig. II-2) concurren en el mismo punto del eje z es decir que $R \rightarrow T$, lo que se puede expresar de la forma

$$z_R = z_T \quad (\text{II-24})$$

De las ecuaciones II-16 y II-17 obtendremos:

$$\gamma + \frac{1}{2a + 3cx_c} = \gamma + \frac{1}{2a + 3c} \quad (\text{II-25})$$

o bien que

$$2a + 3cx_c = 2a + 3c\alpha \\ c(x_c - \alpha) = 0$$

y como x_c y α físicamente no pueden ser iguales ya que ello equivaldría a que el punto A y el C estuviesen en el mismo plano yz se sigue que el coeficiente c tiene que ser nulo

$$c = 0 \quad (\text{II-26})$$

luego el razonamiento era correcto y basta con corregir la coma tangencial para eliminar la otra disimetría que nos quedaba.

Implicación de la corriente de astigmatismo

Corregir el astigmatismo del rayo principal cuando nos movemos sobre la onda en un entorno infinitesimal alrededor de P' equivaldría a llevar S a coincidir con T (Figura II-2).

Dando por supuesto que S esté contenido en oz , condición impuesta por la anulación del coeficiente d , la exigencia de hacer coincidir S con T se reduce a

$$z_s = z_r \quad (\text{II-27})$$

De las ecuaciones II-16 y II-17 obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma + \frac{1}{2b} &= \gamma + \frac{1}{2a + 3c\alpha} \\ 2b &= 2a + 3c\alpha \end{aligned} \quad (\text{II-28})$$

Si hemos corregido ya de coma tangencia $c = 0$ y de II-28 se sigue que

$$a = b \quad (\text{II-29})$$

tomando la superficie de onda la forma

$$z = a(x^2 + y^2) \quad (\text{II-30})$$

que es un paraboloide de revolución.

II-8. Corrección final

Suponiendo que por corrección de disimetrías hemos llevado la configuración de la onda emergente a la forma dada por II-30 ya no puede tener como aberración de campo otra aberración que no sea la esférica de campo. Sin embargo esta aberración esférica de campo si que está conectada con la aberración esférica de eje (3), de tal forma que si corregimos la de eje queda corregida la de campo y el paraboloide II-30 queda convertido en una esfera que es lo que tratábamos de buscar.

II-9. Análisis de resultados

El estudio teórico de la superficie de onda dentro de la aproximación del tercer orden nos conduce a resultados que justifican plenamente el comportamiento de los sistemas ópticos estudiados (2):

— La gran simetría existente en los impactos de los rayos, al hacer DIF muy pequeño, se debe a la supresión, en la ecuación II-3, del término dxy^2 que representaba una disimetría.

— El hecho de que en algunos casos como en el Triplete de Taylor dicha simetría no sea tan patente, se debe a la alta contribución del término cx^2 que también representa una disimetría y que según el estudio teórico corresponde al coma tangencial, grande en este caso del $T-T$. Al disminuir el coma tangencial, y hacer DIF pequeño daba como en los demás casos, a las figuras una gran simetría.

— Cuando pueden despreciarse estos dos términos que representan disimetrías y el astigmatismo del rayo principal es muy pequeño se observa que los impactos de los

rayos, que entraron por *PE* equidistantes del principal, en el plano imagen, para cualquier haz de campo, se encuentran prácticamente distribuidos sobre una circunferencia que tiene como centro el punto de impacto del rayo principal y cuyo radio depende únicamente de la distancia del plano paraxial al punto de corte de los rayos *S* e *I*; valor muy semejante, cuando la curvatura es muy pequeña, al que toma la *AEL* y es lo que llamamos *AEC* (aberración esférica de campo).

Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento al M.E.C. y al C.S.I.C. por sus ayudas económicas.

BIBLIOGRAFIA

1. J. CASAS y J. APORTA. — Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza 27, 5 (1972).
2. J. CASAS y J. APORTA. — Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza 28, (1973).
3. J. CASAS. — *Optica*. Pág. 80. Facultad de Ciencias. Zaragoza (1972).

PREPARACION Y ESTUDIO DE PENTAFLUOROFENIL DERIVADOS DEL ALUMINIO Y SUS COMPUESTOS DE ADICION CON ETER ETILICO Y TRIMETILAMINA*

P O R

R. USÓN y F. IRANZO

Departamento de Química Inorgánica, Facultad de Ciencias, Zaragoza (España)

Abstract

The preparation and isolation of etherate and trimethylamate of $\text{Al}(\text{C}_6\text{F}_5)_3$, $\text{AlCl}(\text{C}_6\text{F}_5)_2$ and $\text{Li}[\text{Al}(\text{C}_6\text{F}_5)_4]$ are described, which were obtained by reactions of aluminium chloride and pentafluorophenyl-lithium in ether solution.

Introducción

En un trabajo anterior⁽¹⁾ hemos descrito la preparación de los productos $\text{AlH}_{3-x}(\text{C}_6\text{F}_5)_x \cdot n\text{L}$ (donde $x = 1$ y 2 ; $n = 1$ y 2 ; $\text{L} = \text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$ y $\text{N}(\text{CH}_3)_3$), continuando en este trabajo con la obtención del $\text{Al}(\text{C}_6\text{F}_5)_3$, compuesto que se puede englobar en la fórmula general anterior, en el caso particular de que $x = 3$.

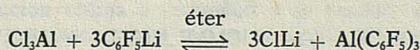
El $\text{Al}(\text{C}_6\text{F}_5)_3 \cdot \text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$ había sido descrito por Pohlman y Brinckman⁽²⁾ y obtenido a partir del magnesio. Nosotros lo obtenemos partiendo del pentafluoro fenil-litio, preparando su compuesto de coordinación con trimetilamina.

Hemos preparado también un complejo aniónico del aluminio, similar al alanato de litio, en el que los cuatro hidrógenos han sido sustituidos por grupos C_6F_5 .

Además de estos compuestos en los que el aluminio está unido solamente a grupos C_6F_5 , se ha preparado un pentafluorofenil cloro derivado del aluminio.

$\text{Al}(\text{C}_6\text{F}_5)_3 \cdot \text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$

Para la preparación de este compuesto hacemos uso de la reacción siguiente:



Esta reacción no se verifica totalmente ni después de cambiar el éter por benceno. En este disolvente no llegan a desaparecer los cloruros de la disolución, lo que nos indica, juntamente con la insolubilidad del Cl_3Al en benceno, que en solución tienen que existir mezclas de los derivados $\text{AlCl}_{3-x}(\text{C}_6\text{F}_5)_x$, (siendo $x = 1$ y 2), y $\text{Al}(\text{C}_6\text{F}_5)_3$.

Añadiendo disolución etérea de trimetilamina sobre la disolución bencénica, en relaciones molares mayores de 3:1, respecto del aluminio, se consigue precipitar pequeñas cantidades del monoaminato del tris pentafluorofenil aluminio.

Debido a las pequeñas cantidades obtenidas, no proponemos este procedimiento como método de obtención del $\text{Al}(\text{C}_6\text{F}_5)_3 \cdot \text{N}(\text{CH}_3)_3$.

* Este trabajo contiene parte de la Tesis Doctoral de F. Iranzo.

Al(C₆F₅)₃.N(CH₃)₃

Se acaba de exponer que la reacción entre el Cl₃Al y el C₆F₅Li en relación molar 1:3 no era total en éter ni en benceno, no consiguiéndose la total sustitución de los tres átomos de cloro por grupos C₆F₅.

Con objeto de desplazar esta reacción a la derecha la verificamos con exceso de uno de los reactivos, trabajando en relaciones molares Cl₃Al:C₆F₅Li = 1:4.

En éter la reacción tampoco es total en cuanto a la precipitación del ClLi, pero al cambiar este disolvente por benceno nos encontramos con una disolución exenta de cloruros.

Si a esta última disolución, que contiene el producto de reacción y el exceso de pentafluorofenil-litio, se le añade disolución etérea de trimetilamina en relación molar mayor de 3:1, respecto del aluminio, precipita un sólido blanco que se identifica como Al(C₆F₅)₃.N(CH₃)₃.

AlCl(C₆F₅)₂.nL

Hemos indicado anteriormente que cuando producíamos la reacción entre el Cl₃Al y el C₆F₅Li, en relación molar 1:3, en solución bencénica teníamos mezclas de los derivados AlCl_{3-x}(C₆F₅)_x.

Para estudiar el comportamiento y la facilidad de formación del bispentafluorofenil cloro aluminio, producimos la reacción siguiente:

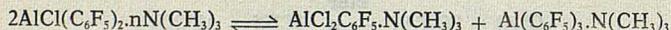


En éter, la reacción no llega a sobrepasar el 50 % de rendimiento en cuanto a la precipitación de ClLi. En benceno, a temperatura ambiente, progresa la reacción, obteniéndose en solución relaciones Cl:Al del orden de 1,4:1. Si bajamos la temperatura de estas disoluciones a 7° C, precipita un compuesto de aluminio, quedando en la nueva disolución relaciones Cl:Al = 1,7:1.

Estos datos parecen indicar que en solución hay un compuesto de aluminio exento de cloruros, y que es parcialmente soluble en benceno, junto con derivados clorados de aluminio.

Para resolver estas mezclas, añadimos disolución etérea de trimetilamina a la solución bencénica, precipitando un sólido blanco identificado como Al(C₆F₅)₃.N(CH₃)₃. En solución nos queda una relación Cl:Al = 2:1 o muy próxima a este valor, lo que nos indica que en solución tenemos formado el aminorato del AlCl₂(C₆F₅).

Estos resultados se interpretan satisfactoriamente, admitiendo la producción de la deproporción siguiente:

**[Al(C₆F₅)₄]Li.3O(C₂H₅)₂**

Cuando en medio etéreo, producimos la reacción entre el Cl₃Al y el C₆F₅Li en relación molar 1:6, se observa la aparición de un precipitado blanco y una solución amarillenta. El precipitado se identifica como ClLi, recogiendo el 90 % del total.

Si después de filtrar el ClLi, se enfría la solución, en las proximidades de -55° C aparecen unos cristales blancos que se adhieren a las paredes del matraz. Estos cristales se separan, se lavan y se someten a sucesivas recristalizaciones, para ser analizados a continuación, siendo identificados como [Al(C₆F₅)₄]Li.3O(C₂H₅)₂.

PREPARACION Y ESTUDIO DE PENTAFLUOROFENIL DERIVADOS DEL ALUMINIO

Este sólido es extremadamente higroscópico, como la mayoría de las sales que contienen el catión litio. Se han preparado disoluciones del sólido en nitrometano, comprobándose la conductividad de estas disoluciones. Los resultados de estas medidas nos indican que se trata de un electrolito uni-univalente, valor que concuerda con el previsto según los resultados analíticos obtenidos.

Discusión

En un trabajo anterior, habíamos comprobado la sustitución total de uno y dos átomos de cloro por grupos C_6F_5 , en los compuestos AlH_2Cl y $AlHCl_2$, cuando los hacíamos reaccionar con C_6F_5Li en relaciones molares 1:1 ó 1:2 respectivamente⁽¹⁾.

Por el contrario, como se ha descrito anteriormente en este mismo trabajo, no se consigue la sustitución total de dos átomos de cloro en el Cl_2Al cuando lo hacemos reaccionar con C_6F_5Li en relación molar 1:2. Si producimos esta misma reacción en relaciones molares 1:3 tampoco se consigue la sustitución total de los tres cloros, teniendo que trabajar con relaciones 1:6 para conseguir el 90 % de la sustitución total.

Esta diferencia de comportamiento se debe a que los enlaces Cl-Al, en el Cl_2Al , son especialmente estables por la simetría de la molécula y por no existir ninguna diferencia entre los tres enlaces del aluminio. En los cloroalanos correspondientes, la aparición de enlaces Al-H junto a los Cl-Al, en la misma molécula, labiliza estos últimos favoreciendo la sustitución de los cloros.

Se ha descrito también en nuestro anterior trabajo que el $AlH(C_6F_5)_2$ se desproporciona en $AlH_2(C_6F_5)$ y en $Al(C_6F_5)_3$ ⁽¹⁾. Se observa un comportamiento similar en el $AlCl(C_6F_5)_2$ en cuanto a su desproporción en $AlCl_2(C_6F_5)$ y en $Al(C_6F_5)_3$, por lo que deducimos la inestabilidad de los bis pentafluorofenil derivados de aluminio estudiados, respecto de sus productos de desproporción.

Parte experimental

En todas las reacciones, la adición se ha verificado a $-78^\circ C$ para impedir la descomposición del pentafluorofenil-litio⁽³⁾.

Debido a la gran reactividad de los enlaces Al-C, todo el trabajo experimental se ha llevado a cabo en las precauciones usuales, sobre todo en lo referente a la más completa exclusión de la humedad.

$Al(C_6F_5)_3 \cdot O(C_2H_5)_2$

Se han verificado las reacciones en el intervalo de -20 a $20^\circ C$. Una vez filtrado el $ClLi$, se avapora la disolución etérea a sequedad y se analiza. En la Tabla I se recogen los resultados obtenidos, juntamente con los procedentes del análisis de la solución bencénica derivada de la solución etérea.

TABLA I

Solución etérea Relación atómica	Solución bencénica		
	Cl n.º átomos	Al n.º átomos	Relación atómica
Cl : Al = 1,02 : 1	+	0,39	
Cl : Al = 1,01 : 1	0,47	2,07	Cl : Al = 0,16 : 1
Cl : Al = 1,55 : 1	0,43	0,57	Cl : Al = 0,80 : 1

Al(C₆F₅)₃.N(CH₃)₃

En éter el rendimiento de la reacción es del 70 %, en cuanto a la precipitación de cloruro de litio.

El sólido precipitado con trimetilamina presenta los resultados analíticos que se recogen en la Tabla II, junto a los valores esperados para el Al(C₆F₅)₃.N(CH₃)₃.

TABLA II

<i>Encontrado</i>		<i>Teórico</i>	
<i>Relación atómica</i>	<i>% Al</i>	<i>Relación atómica</i>	<i>% Al</i>
N(CH ₃) ₃ : Al = 0,97 : 1	4,71	N(CH ₃) ₃ : Al = 1,00 : 1	4,6

AlCl(C₆F₅)₂.nL

Estas reacciones se verifican a temperatura ambiente, siendo los tiempos máximos empleados de 1 hora. Al cambiar el éter por benceno se obtienen rendimientos del 75 %.

La solución bencénica es analizada, recogiendo los resultados obtenidos en la Tabla III, juntamente con los análisis de la solución resultante de añadirle trimetilamina.

TABLA III

<i>Solución bencénica</i> <i>Relación atómica</i>	<i>Solución bencénica + N(CH₃)₃</i> <i>Relación atómica</i>
Cl : Al = 1,7 : 1 Cl : Al = 1,4 : 1	Cl : Al = 2,08 : 1 Cl : Al = 2,10 : 1 N(CH ₃) ₃ : Al = 1,0 : 1

El precipitado obtenido al añadir trimetilamina a la disolución bencénica es analizado, recogiendo en la Tabla IV los resultados obtenidos, junto con los esperados para el Al(C₆F₅)₃.N(CH₃)₃.

TABLA IV

<i>Encontrado</i>		<i>Teórico</i>	
<i>Relación atómica</i>	<i>% Al</i>	<i>Relación atómica</i>	<i>% Al</i>
N(CH ₃) ₃ : Al = 0,95 : 1	4,7	N(CH ₃) ₃ : Al = 1,00 : 1	4,6

[Al(C₆F₅)₄]Li.3O(C₂H₅)₂

Una vez acabada la adición se mantiene agitando diez minutos a temperatura ambiente, poniendo a continuación el matraz de reacción en un baño a -30° C.

Una vez filtrado el ClLi, se enfría la disolución etérea a -55° C. y cristaliza un sólido que se analiza con los resultados que se recogen en la Tabla V.

TABLA V

<i>Encontrado</i>		<i>Teórico</i>	
<i>Relación atómica</i>	<i>% Al</i>	<i>Relación atómica</i>	<i>% Al</i>
Li : Al = 0,98 : 1	2,85	Li : Al = 1,00 : 1	2,92
Li : Al = 1,0 : 1	2,84		
Li : Al = 0,98 : 1	2,92		

Espectros IR

Los espectros IR se realizaron en dos espectrofotómetros, Infracord Perkin Elmer y Beckman 20 A, utilizando la técnica de suspensión en nujol, y de pastilla en BrK.

En todos los compuestos se ha identificado las bandas del grupo C_6F_5 ,⁴ y en los compuestos de coordinación con éter etílico la banda C-O-C⁵ característica del mismo.

También se ha determinado los espectros IR de los gases desprendidos en el calentamiento a vacío de los sólidos, lo que nos ha permitido determinar que no hay más ligando que el que se indica.

Agradecimientos

Uno de nosotros (F. I.) agradece a la Dirección General de Enseñanza e Investigación la concesión de una beca para la realización de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

1. R. USÓN y F. IRANZO. — Rev. Acad. Ciencias Zaragoza. En prensa.
2. J. L. W. POHLMAN y F. E. BRINCKMAN. — Z. Naturf., 206, (1), 5 (1965).
3. P. L. COL, R. STEPHENS and J. C. TATLOW. — J. Chem. Soc., 3327 (1962).
4. P. ROYO y R. USÓN. — Rev. Acad. Ciencias Zaragoza. XXIV, 122 (1969).
5. C. N. RAO. — Chemical Applications of infrared Spectroscopy. Academic Press. Inc. (1963). pág. 188.

PREPARACION Y ESTUDIO DE ISOTIOCIANOALANOS Y SUS COMPUESTOS DE ADICION CON ETERES Y AMINAS

P O R

R. USÓN y F. IBÁÑEZ

Departamento de Química Inorgánica. Facultad de Ciencias. Zaragoza

Abstract

Compounds of the general formula $AlH_{3-n}(NCS)_n \cdot mL$ (where $n=1,2$ and 3 ; $1 \leq m < 3$; $L = O(C_2H_5)_2$ and $N(CH_3)_3$) were prepared. The etherates were obtained by reactions of AlH_3 with $SCNH$ in ether solution; the reaction of trimethylamine with the etherates leads to the syntheses of the trimethylaminates.

The conductivities, molecular weights and IR spectra of the compounds were studied.

Introducción

La química de los pseudohalogenoalanos es poco conocida. Durante estos últimos años ha sido descrita la preparación de cianoalanos $AlH_{3-n}(CN)_n$ donde $n = 1, 2$ y 3 (1). Así mismo se conocen los derivados trisustituidos del aluminio con varios pseudohalógenos $Al(N_3)_3$ (2) y $Al(NCS)_3$, este último con varios ligandos coordinados tales como H_2O (3) y (4), NH_3 (5), y $(CH_3)_2SO$ (6) entre otros.

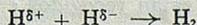
En este trabajo presentamos los resultados obtenidos en la preparación de los compuestos denominados de manera general «isotiocianoalanos», y tiene como objeto ampliar la química de los pseudohalogenoalanos por una parte y por la otra el poder disponer de una gama variada de agentes de reducción con objeto de poder realizar reducciones selectivas.

Debido a la gran reactividad de los enlaces $Al-N$ y $Al-H$ todo el trabajo experimental ha sido llevado a cabo bajo total exclusión de la humedad utilizando para ello técnicas de trabajo en atmósfera inerte y de alto vacío.

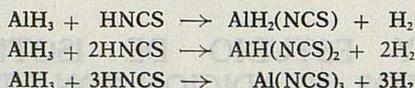
1. Discusión de los resultados

A) Reacción entre AlH_3 y $SCNH$ en disolución etérea

El hidruro de aluminio y el sulfocianuro de hidrógeno reaccionan, en disolución etérea, con desprendimiento de hidrógeno molecular según el esquema general



Eligiendo convenientemente las relaciones de reacción pueden obtenerse según los esquemas



disoluciones etéreas de monoisotiocianoalano, disotiocianolano e isotiocianuro de aluminio respectivamente.

Todas estas reacciones se realizaron a baja temperatura unos 80° C bajo cero y los datos analíticos revelan que transcurren totalmente. De estas disoluciones etéreas por evaporación del disolvente a vacío se pueden separar los aductos con éter de los isotiocianoalanos englobados en la fórmula general $\text{AlH}_{3-n}(\text{NCS})_n \cdot m\text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$ donde ($n = 1, m = 1$), ($n = 2, m = 1,7$), ($n = 3, m = 2$). Todos los aductos con éter son sólidos blancos, de aspecto pulverulento y muy sensibles a la humedad, pues bastan trazas de ella para notarse signos de descomposición. Químicamente se caracterizan por su gran reactividad frente al agua. La violencia de la reacción disminuye conforme aumenta el número de grupos sulfocianos unidos al aluminio, variando desde la ignición para el monosulfocianoalano hasta simple desprendimiento de calor para el isotiocianato de aluminio.

B) Compuestos de adición de los isotiocianoalanos con trimetilamina

La producción de los aductos con trimetilamina de los isotiocianoalanos se realiza mediante una reacción de desplazamiento del éter coordinado por trimetilamina, reacción que transcurre según el esquema



donde ($n = 1, p = 1$ y 2),

$$(n = 2, p = 2), (n = 3, p = 2'6)$$

y que se basa en la mayor capacidad donora del átomo de nitrógeno de la amina sobre el átomo de oxígeno del éter (7).

Por reacción entre disoluciones etéreas de los isotiocianoalanos con disoluciones etéreas de trimetilamina en las proporciones adecuadas se llega mediante evaporación del disolvente a vacío a la separación de los aductos sólidos con trimetilamina. Todos los aductos con trimetilamina son sólidos blancos de aspecto cristalino y al igual que sus homólogos con éter se caracterizan por su gran sensibilidad frente a trazas de humedad.

En todos los aductos con trimetilamina se comprueba el desplazamiento completo del ligando éter, por la amina, mediante espectroscopía infrarroja, en los aductos sólidos y en los gases desprendidos en el calentamiento de estos aductos en vacío.

2. Estudio estructural

A) Conductividad y peso molecular

Se han realizado determinaciones de conductividad molecular en nitrometano ($2'6 \cdot 10^{-3}$ M y $8'4 \cdot 10^{-4}$ M) y de pesos moleculares en benceno, de los productos que son estables en estos disolventes y que están recogidos en la tabla I.

TABLA I

Compuesto	$\lambda_M (\Omega^{-1} \text{ cm}^2 \text{ mol}^{-1})$	Peso molecular	
		Encontrado	Calculado
$\text{AlH}_2(\text{NCS}) \cdot 2\text{N}(\text{CH}_3)_3$		209	205
$\text{AlH}(\text{NCS})_2 \cdot 17 \text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$		273	270
$\text{AlH}(\text{NCS})_2 \cdot 2\text{N}(\text{CH}_3)_3$		265	262
$\text{Al}(\text{NCS})_3 \cdot 2\text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$ \nearrow 4 ($2.6 \cdot 10^{-3}$ M) ...		294	349
\searrow 7,5 ($8.7 \cdot 10^{-4}$ M) ...			

Como puede verse el $\text{Al}(\text{NCS})_3 \cdot 2\text{OR}_2$ es algo conductor en nitrometano aunque el valor está muy por debajo del umbral mínimo para electrolitos uniunivalentes (8) en este disolvente.

Se observa también que estos compuestos son monómeros en benceno, lo que excluye la ausencia de enlace puente por hidruro o por el grupo sulfociano.

B) Espectros I.R.

Sin considerar las bandas correspondientes a los ligandos, éter y trimetilamina todos los compuestos preparados presentan bandas de absorción en 2040 cm^{-1} (s) 800 cm^{-1} (w), atribuida la primera a la vibración ν (CN) (9) y la segunda a la ν (CS) (10) de los isotiocianatos lo que nos indica que en estos compuestos el grupo SCN se une al aluminio por el átomo de nitrógeno, siguiendo el mismo comportamiento general que el de los pseudohaluros del grupo (III b) pues con la excepción del tiocianato de In (III) (11) en el que el enlace se realiza a través del átomo de S todos los demás son isotiocianatos.

C) Variación del índice de coordinación del aluminio en los isotiocianoalanos

Como puede observarse en los valores de la Tabla II en la que se recogen el número máximo m, de moles del ligando L, que es capaz de coordinar a temperatura ambiente el compuesto $\text{AlH}_{3-n}(\text{NCS})_n$, $n = (1, 2 \text{ y } 3)$ el índice de coordinación del aluminio aumenta conforme aumenta el número de grupos SCN unidos a él, para las dos series, eteratos y aminos.

TABLA II
Moles de L/mol $\text{AlH}_{3-n}(\text{NCS})_n$

n	L	m
1	$\text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$	1
1	$\text{N}(\text{CH}_3)_3$	2
2	$\text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$	1,7
2	$\text{N}(\text{CH}_3)_3$	2
3	$\text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$	2
3	$\text{N}(\text{CH}_3)_3$	2,6

En el estudio comparativo de la relación molar ligando/metal de los aductos con éter y trimetilamina del isotiocianato de aluminio con los correspondientes aductos de los haluros de aluminio (12) se observa el mismo comportamiento general de los pseudohaluros de otros elementos del grupo IIIb, isotiocianato de Ga (III) y tiocianato en In (III), en

los que se presentan relaciones molares ligando/metal más altas que las de los correspondientes aductos con sus respectivos haluros (13), (14).

De la misma manera del estudio comparativo de los aductos con éter y trimetilamina del monoisotiocianoalano y diisotiocianoalano con los correspondientes aductos de los monohalogenalanos y dihalogenalanos se observa el mismo comportamiento general pues aquellos presentan relaciones molares ligando/metal más altas que estos últimos (15).

Todo esto parece indicar que la química de coordinación del aluminio para estos compuestos sigue un comportamiento similar a la de otros elementos del grupo IIIb.

3. Experimental

Los pesos moleculares se han medido por crioscopia en benceno utilizando un termómetro Beckman. Las conductividades, con un conductímetro Metrohm A-G, los espectros I.R. con un espectrofotómetro Beckman I.R. 20 A (rango; 4000-250 cm^{-1}) en suspensión en nujol. El éter se calculó por diferencia de peso ya que los intentos de determinación de C, H no dieron resultado debido a la gran sensibilidad de las muestras frente a trazas de humedad.

I $[\text{AlH}_2(\text{NCS}) \cdot \text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2]$. — A una disolución etérea de AlH_3 conteniendo 15,72 mmoles se añaden 15,72 mmoles de una disolución de SCNH . La reacción se mantiene a -80°C durante una hora. Se desprende H_2 que se recoge en reservorio y por evaporación de la disolución etérea se obtiene un sólido blanco pulverulento de (I). Encontrado: H_2 desprendido 16,3 mmoles; Al, 16,53 %; H^- , 1,17 %; SCN, 35,95 %; Eter 46,35 %. Teórico: H_2 desprendido 15,72 mmoles; Al, 16,77 %; H^- , 1,24 %; SCN, 36,03 %. Eter, 45,96 %.

II $[\text{AlH}_2(\text{NCS}) \cdot \text{N}(\text{CH}_3)_3]$. — A una disolución etérea de $\text{AlH}_2(\text{NCS})$ conteniendo 10,5 mmoles se le añade 12 mmoles de $\text{N}(\text{CH}_3)_3$ en éter y se tiene en agitación durante 1 hora a temperatura ambiente, al cabo de la cual se destila el éter a vacío, obteniéndose un residuo blanco cristalino de (II).

Encontrado: Al 17,62 %; H^- , 1,25 %; SCN, 36,56 %; $(\text{CH}_3)_3\text{N}$ 44,57 %. Teórico: Al, 18,49 %; H^- , 1,37 %; SCN, 39,72 %; $(\text{CH}_3)_3\text{N}$, 40,42 %.

III $[\text{AlH}_2(\text{NCS}) \cdot 2\text{H}(\text{CH}_2)_3]$. — A una disolución etérea $\text{AlH}_2(\text{NCS})$ conteniendo 12 milimoles se le añaden 26 mmoles de $\text{N}(\text{CH}_3)_3$ en éter y se agita magnéticamente durante 2 horas a temperatura ambiente. Se destila el éter y el exceso de amina a vacío obteniéndose un sólido blanco cristalino de (III).

Encontrado: Al 12,89 %; H^- , 0,94 %; SCN, 27,69 %; $(\text{CH}_3)_3\text{N}$, 58,48; P. M. 209. Teórico: Al, 13,17 %; H^- , 0,98; SCN, 28,29 %; $(\text{CH}_3)_3\text{N}$, 57,56 %; P. M. del monómero 205.

IV $[\text{AlH}(\text{NCS})_2 \cdot 1,7 \text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2]$. — A una disolución etérea de AlH_3 conteniendo 14,2 mmoles se añaden 28,4 mmoles de SCNH en éter. La temperatura de la reacción se mantiene a -80°C durante 1 hora. Se desprende H_2 que se almacena en un reservorio y se obtiene una solución incolora de la que por evaporación del disolvente a vacío se obtiene un sólido blanco pulverulento de (IV).

Encontrado H_2 desprendido 29 mmoles; Al, 10,00 %; H^- , 0,39 %. SCN, 43,09 %; Eter, 46,52 %; P. M. 273 gr. Teórico: H_2 desprendido 28,4 moles; Al, 10,00 %; H^- , 0,37 %; SCN, 42,96 %; Eter 46,67 %; P. M. del monómero 270 grs.

V $[\text{AlH}(\text{NCS})_2 \cdot 2\text{N}(\text{CH}_3)_3]$. — A una disolución etérea de $\text{AlH}(\text{NCS})_2$ conteniendo 10 mmoles se añaden 21 moles de $(\text{CH}_3)_3\text{N}$ en éter. La solución resultante se tiene en agitación durante 1 hora a temperatura ambiente y por destilación del disolvente de la misma a vacío se obtiene un sólido blanco cristalino de (V).

Encontrado: Al, 10,10 %; H^- , 0,35 %; SCN, 43,98 %; $(\text{CH}_3)_3\text{N}$, 45,57 %; P. M. 265 grs. Calculado: Al 10,35 %; H^- , 0,38 %; SCN, 44,27 %; $(\text{CH}_3)_3\text{N}$, 45,04 %; P. M. del monómero 262 grs.

PREPARACION Y ESTUDIO DE ISOTIOCIANOALANOS Y SUS COMPUESTOS

VI $[\text{Al}(\text{NCS})_3 \cdot 2\text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2]$. — A una disolución etérea de AlH_3 conteniendo 6,8 mmoles se añaden 20,4 mmoles de SCNH en éter. La temperatura de la reacción se mantiene a -80°C durante 1 hora y el H_2 desprendido se recoge en un dispositivo de almacenaje. Se produce un precipitado blanco pulverulento de (VI). Por evaporación de la solución etérea se obtiene un sólido blanco pulverulento que se torna amarillo con la humedad, también de (VI). Encontrado H_2 desprendido 21,2 mmoles. Al, 7,84 %; SCN, 50-58 %; Eter, 41,58 %; P. M. 294 gr. $\lambda_M \cdot 4 \Omega^{-1} \text{cm}^2 \text{mol}^{-1}$ (en nitrometano a $2,6 \cdot 10^{-3} \text{M}$) y $7,5 \Omega^{-1} \text{cm}^2 \text{mol}^{-1}$ (en nitrometano a $8,7 \cdot 10^{-4} \text{M}$). Teórico: Al, 7,73 %; SCN, 49,88 %; Eter 42,39 %; P. M. del monómero 349 grs.

VII $[\text{Al}(\text{NCS})_3 \cdot 2,6 \text{N}(\text{CH}_3)_3]$. — A una disolución etérea de $\text{Al}(\text{NCS})_3$ conteniendo 3 mmoles se añaden 12 mmoles de $(\text{CH}_3)_3\text{N}$ en éter. La reacción se tiene en agitación durante 1 hora a temperatura ambiente. Aparece un precipitado blanco que se filtra, se lava con una disolución de $(\text{CH}_3)_3\text{N}$ en éter y se seca a vacío dando un sólido blanco de aspecto cristalino de (VII).

Encontrado: Al 7,64 %; SCN, 49,24 %; $(\text{CH}_3)_3\text{N}$, 43,12 %. Teórico para el Al $(\text{NCS})_3 \cdot 2,5 \cdot \text{N}(\text{CH}_3)_3$: Al, 7,74 %; SCN, 49,92 %; $(\text{CH}_3)_3\text{N}$, 42,34 %.

BIBLIOGRAFIA

1. L. G. KORABLEVA LAURENT'EV, E. A. LAURENT'EVA, M. L. KHIDEKEL. — *Izv. Akad Nank. S.S.S.R. Serkim.* 12, 2826 (1968).
2. E. WIBERG, H. MICHAUD. — *A. Natur.* 96, 495 (1954).
3. H. E. WILLIAMS. — (Cyanogens Compounds) Edward Arnold (Publishers) Ltd. London (1948), pág. 267.
4. L. LEICHTI, W. SUIDA, W. P. BANGROFT. — *J. Phys. Chem.* 18, 406 (1914).
5. F. W. BERSTROM. — *J. Chem. Soc. (A)*, 48, 2322 (1926).
6. S. J. PATEL. — *J. Inorg. Nucl. Chem.* 33, 22 (1971).
7. V. GUTMAN. — *Coordination Chemistry in non Aqueous Solutions.* Springer Verlag (1968), pág. 19.
8. W. J. GEARY. — *Coord. Chem. Rews.* 7, 81 (1971).
9. K. NAKAMOTO. — *Infrared Spectra of Inorganic and Organic compounds* Wilwy Interscience (1970), pág. 187.
10. D. M. ADAMS. — *Metal-Ligand and Related Vibrations.* Edward Arnold (Publishers) Ltd. London, 1967, pág. 319.
11. S. J. PATEL, D. G. TUCK. — *Can. J. Chem.* 47, 229 (1969).
12. D. D. ELEY, H. WATTS. — *J. Chem. Soc.* 1914 (1952).
13. A. J. CARTY, D. G. TUCK. — *J. Chem. Soc. (A)* 1081 (1966).
14. N. N. GREENWOOD. — *Adv. Inorg. Chem. Radiochem.* 5, 91 (1963).
15. E. WIBERG, K. MOEDRITZER, R. USÓN. — *Rev. Acad. Cienc. Zaragoza*, IX, 100 (1954).

A SIMPLIFIED METHOD OF PREPARING PURE LECITHIN

by

F. G. HEGARDT* and J. L. VICEDO

Universidad de Valencia. Centro de Estudios Universitarios (Alicante)

Abstract

A simplified method to obtain pure and chromatographically homogeneous lecithin, is described. It involves simple techniques: Extraction of lipids from egg yolks as starting material, which is conducted in two steps: a preliminary extract with acetone and then a second with a chloroform-methanol mixture. They are followed by purification of it in a chromatographic column of aluminium oxide. Special emphasis is given to the fine gradation of the chloroform-methanol mixtures used up as eluting agents. A high yield of very pure lecithin is obtained.

In connection with studies «in vitro» on the interactions between different bile components (HEGARDT and DAM) (1), and their influence in gallstone formation in man and animals (DAM and HEGARDT) (2), a readily available supply of relatively big amounts of pure and homogeneous lecithin, was required. For this purpose we needed a simplified procedure applicable to raw materials, such as egg yolk which contain lecithin in large proportions.

Different procedures have been described by various authors interested in obtaining this phospholipid. The classical method of PANGBORN (3) was inadequate, since yields were relatively low. Improved versions were reported by HANAHAN et al. (4), and later by SINGLETON et al. (5), who in an interesting technique applied column chromatography to the separation of crude phospholipids. Careful application of the method frequently produces a highly coloured lecithin. SMALL et al. (6) in a study of associations between bile salt, cholesterol, lecithin and water, utilized a procedure which consisted of an ethanol extraction followed by a column chromatography with ethanol as moving phase; the yield of lecithin was higher than in the papers previously cited; but we believe it can be improved further.

In the present work, we expound a procedure in which a chromatographically homogeneous lecithin can be obtained, with higher yields than by earlier techniques. Basically, the method consists of two steps: First, extraction of phospholipids; and second, alumina column chromatography with a carefully lineal variation of solvents as moving phase.

* Present Address: Departamento de Bioquímica Facultad de Farmacia Universidad de Barcelona. Barcelona - 14.

Experimental procedure

Extraction

Six egg yolks, from which the membranous cuticle had been removed, were shaken with 200 ml of acetone (rendered water-free by calcium chloride); the whole mixture is left standing for three hours, then filtered through a glass plate filter. The extraction was repeated four times, which is enough to remove the greater part of the neutral fat, cholesterol, and carotenoids. However, the extraction cannot be continued, since increasing amounts of lecithin are also lost, as judged by the controls made by thin layer chromatography (TLC) on Silica Gel G, using chloroform: methanol: water (65:25:4) as moving phase (7). The acetonic solution was discarded.

The dry white powder obtained, was then extracted with 250 ml of a chloroform: methanol mixture 9:1 left standing overnight. The solution was filtered, and operation repeated three times more. TLC controls showed that the proportion of the extracted phospholipids in the last step, was insignificant.

All the filtered extracts were pooled and evaporated to dryness in a Buchi rotary evaporator at 37 °C under vacuum. The final traces of the solvent were eliminated in a desiccator connected under a vacuum of 0.1 mm Hg.

Chromatography

The fractionation of the crude extract of phosphatides was carried out in a chromatography column with an inner diameter of 3 cm and a height of 33 cm, which had been equipped with stop tap and a porcelain disk for the support of aluminium oxide. The estimated ratio between aluminium oxide and pure lecithin was 30:1. So, a slurry of 180 gm of alumina and 300 ml chloroform was prepared, and the column made. The chloroform washed the solid support at a rate of 8 ml/min approx. which was the flow maintained throughout the operation.

Twelve gm of crude phosphatides containing some neutral fat and cholesterol were dissolved in 36 ml of chloroform to make a proportion of 25 % w/v, and the solution added to the upper part of the column. When the level of the phosphatide solution was half cm above the solid phase, 200 ml of chloroform was added and the corresponding eluate numbered as number 1. Where the chloroform was exhausted, new solvents were added as follows: 50 ml of chloroform: methanol mixture 99:1, and subsequently the same amount of mixtures 49:1, 32:1, 25:1, 15:1, and finally 300 ml in the proportion 9:1. The eluates has a volume of 50 ml each, and were numbered from 2 to 12.

One ml of 12 eluates was evaporated by heating with hot air under a continuous flow of nitrogen. The dry matter was weighed and dissolved in an appropriate volume of chloroform: methanol mixture 2:1 to give a constant porportion of 20 $\mu\text{gm}/\mu\text{l}$. TLC of the samples were made by applying a spot of 200 μgm of solute (10 μl of the preceding solutions).

Results

Fraction number 1 contains a large proportion of neutral fat, cholesterol, other sterols and carotenoids; from fraction 2 to that at which the elution of lecithin begins, contain scanty dry matter composed of these substances and as well, phosphatidyl ethanol amine, demonstrated by their R_f (Fig. 1). The elution of lecithin could be detected by an increasing proportion of dry matter up to 29 mg/ml and also by TLC controls, which unequivocally showed its presence at the same R_f as standards.

If the chromatography was unduly prolonged with new additions of chloroform methanol mixture 9:1, or if the proportion of methanol was increased, relatively abundant amounts of sphingomyelin and lysolecithin were eluted.

All the fractions which contained pure, uncontaminated lecithin, were pooled and evaporated to dryness, as described before. The dry matter was again dissolved in chloroform and evaporated to ensure that no methanol remained. Finally, lecithin was dissolved in a sufficient volume of chloroform and sealed in ampoules under nitrogen.

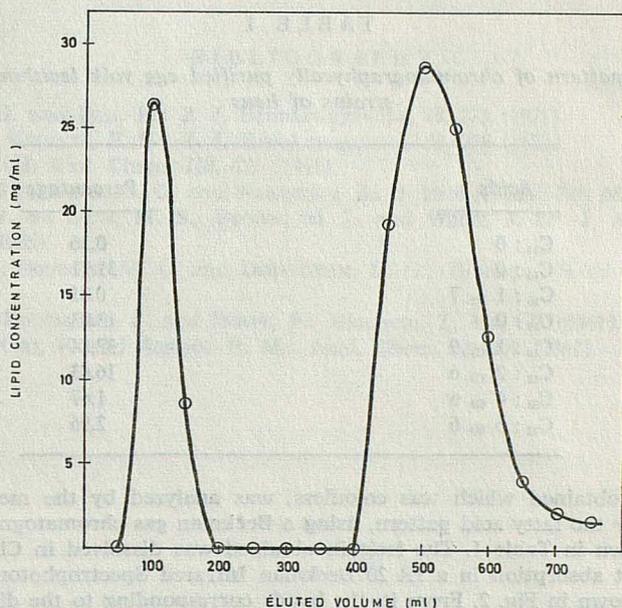


FIG. 1. — Chromatographic fractionation on a aluminium oxide column of a mixture of lipids extracted from egg yolk. (See the text). The first peak represents a mixture of sterols, neutral fats and free fatty acids. The second, is that of the pure lecithin. Solvent: Chloroform. A progressive increase in concentration of methanol is maintained along the chromatograph.

Discussion

Owing to the simplicity of this method, to the fact that the crude phosphatides go through the column only once, and to the high yield of pure lecithin obtained, this procedure affords a simple means of obtaining lecithin in considerable amounts.

A preliminary extraction with acetone is to be recommended since it removes the greater part of the normal contaminants of the lecithin contained in egg yolk; on the other hand, the chloroform methanol extraction is quick and almost complete, and dissolves the bulk of the phospholipids.

The aluminium oxide column produces a good separation of the different products extracted in the previous step, not only by choice of the adequate proportion between alumina and phospholipids but by the fine gradation of the methanol proportion. The papers in literature previously cited do not emphasize this gradation. Chloroform alone eluates many lipids but not lecithin; when a small proportion of methanol is allowed to cross the column, the different phospholipids separate cleanly and can be collected in different flasks. Gradation of 1%, 2%, 3%, 4%, 7% in the content in methanol produces refined separation, a eluate pure of lecithin resulting when a proportion of 10%

in methanol is introduced in the column. Neither sphingomyelin nor lysolecithin elutes unless the proportion of methanol reaches 20 % or higher.

The amount of lecithin obtained is 5.8 gm each 6 eggs, a yield of approximately 82 %, far higher than those formerly described in literature. The lecithin obtained had a R_f of 0.42 similar to that cited by WAGNER et al. (7). Lecithing was Dragendorff positive, ninhydrine negative. The P/N ratio was 0.97. The molecular weight estimated from our data was 750.

TABLE I

Fatty acid pattern of chromatographically purified egg yolk lecithin from local strains of hens

Acids	Percentage
C ₁₄ : 0	0.36
C ₁₆ : 0	31.91
C ₁₆ : 1 ω 7	0.81
C ₁₈ : 0	13.03
C ₁₈ : 1 ω 9	32.84
C ₁₈ : 2 ω 6	16.43
C ₂₀ : 4 ω 6	1.67
C ₂₂ : 6 ω 6	2.96

The lecithin obtained which was colourless, was analyzed by the method of STOFFEL et al (8) to know the fatty acid pattern, using a Beckman gas chromatographic apparatus. Results are shown in Table I. The lecithin obtained was dissolved in CCl₄ and analyzed by infrared light absorption in a IR 20 Beckman Infrared Spectrophotometer. It yielded the spectrum shown in Fig. 2. From it, the bands corresponding to the different chemical bonds which compose the lecithin molecule can be seen.

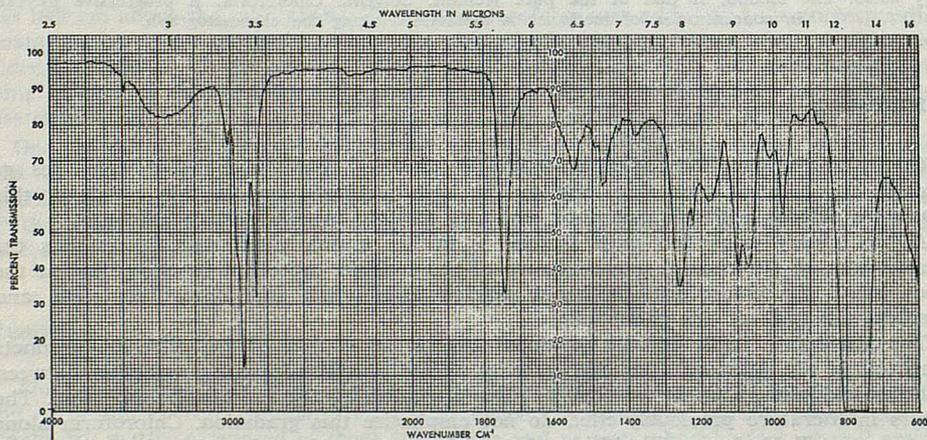


FIG. 2. — Infrared spectrum of the egg yolk lecithin obtained by the method described. (Solvent: CCl₄). The bands in the spectrum correspond to the chemical bonds of the lecithin molecule.

Acknowledgments

We wish to thank to Miss I. Prange and to Prof. H. Dam, Danmarks Tekniske Højskole, Copenhagen, Denmark, for their help in the analyses of fatty acids in the lecithin.

BIBLIOGRAPHY

1. HEGARDT, F. G. and DAM, H.: *Z. f. Ernährungswiss.* 10, 223 (1971).
2. DAM, H. and HEGARDT, F. G.: *Z. f. Ernährungswiss.* 10, 239 (1971).
3. PANGBORN, M.: *J. Biol. Chem.* 188, 471 (1951).
4. HANAHAN, D. J., DITTNER, J. G. and WARASHINA, E.: *J. Biol. Chem.* 288, 685 (1957).
5. SINGLETON, W. S., GRAY, M. S., BROWN, M. L. and WHITE, J. L.: *J. Amer. Oil Chem. Soc.* 42, 53 (1965).
6. SMALL, D. M., BOURGES, M. C. and DERVICHIAN, D. G.: *Biochem. Biophys. Acta* 125, 563 (1966).
7. WAGNER, H., HORHAMMER, L. and WOLFF, P.: *Biochem. Z.* 334, 175 (1961).
8. STOFFEL, W., CHU, F. and AHRENS, E. M.: *Anal. Chem.* 31, 307 (1961).