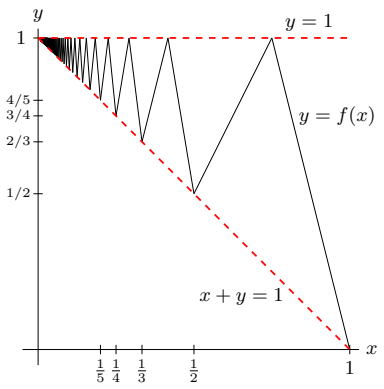
Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 24 (2021), Núm. 1, Pág. 110

Un cuerpo de revolución acotado de volumen finito y área lateral infinita

El cuerno de Gabriel es un paradójico objeto matemático descrito por Evangelista Torricelli en el siglo XVII. Se obtiene por rotación alrededor del eje OX de la curva $y = 1/x$, con $x \geq 1$. El cuerpo resultante tiene una superficie lateral infinita y su volumen es finito e igual a π. Esto da lugar a una aparente paradoja: podemos llenar de pintura dicho cuerpo, pero no podemos pintarlo. Desde un punto de vista físico y teniendo en cuenta que no es acotado, tampoco es posible llenarlo de pintura ya que necesitaríamos un tiempo infinito. Este *inconveniente* se evita construyendo objetos similares en dominios acotados. Así se hace en la nota *A paradoxical paint pail* de Mark Lynch (*College Math. J.* **36** (2005), 402–404). La función que allí se presenta está definida en $[0, 1]$ y genera, al girarla alrededor de OX, un sólido con las mismas características que el cuerno de Gabriel pero, desafortunadamente, no es posible dar el valor exacto del volumen del cuerpo. A continuación damos una construcción similar para la que sí podemos determinar el volumen de manera precisa.

Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ definida por $f(0) = 1$ y, para cada $n \geq 1$, por

$$f(x) = \begin{cases} 2nx - \frac{n}{n+1}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)}, \\ \frac{3n+1}{n} - 2(n+1)x, & \frac{2n+1}{2n(n+1)} < x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$



La imagen muestra la gráfica de $f(x)$.

Si llamamos S al sólido de revolución obtenido al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje OX en el intervalo $[0, 1]$, la superficie lateral de S está dada por

$$2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/(n+1)}^{1/n} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$
$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{1+4n^2}}{4n} \frac{2n+1}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{1+4(n+1)^2}}{4(n+1)} \frac{2n-1}{n^2} \right).$$

Resulta sencillo comprobar que esta serie se comporta como la armónica y, por tanto, es divergente. A su vez, el volumen de S es

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/(n+1)}^{1/n} f(x)^2\, dx = \frac{\pi}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+3n+1}{n(n+1)^3} + \frac{3n^2-3n+1}{n^3(n+1)} \right) = \frac{\pi(21-\pi^2)}{18}.$$

Óscar Ciaurri, Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja
Correo electrónico: oscar.ciaurri@unirioja.es