

EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

A TECEDIRA OU DE CÓMO IMAXINAR OS IMAXINARIOS

LABRAÑA, Antón

"Na clase de matemáticas, Törles concibiu un súpeto pensamento. [.....]
Ó acabar xuntouse con Beineberg, porque era o único con quen podía
falar de semellante cousa.

- ¿Oiches?, ¿entendiches ben todo isto?

- ¿O que?

- Iso das cantidades imaxinarias.

- Si, non é tan difícil. O único que hai que ter presente é que a raíz
cadrada de menos un é a unidade de cálculo.

- Iso é precisamente; tal cousa non existe: todo número, ben sexa
positivo, ben sexa negativo, se o elevamos ó cadrado dá algo positivo.
Por iso non pode haber ningún número real que sexa a raíz cadrada de
algo negativo.

[.....] O curioso está, precisamente, en que se poidan facer cálculos
reais e se poida chegar a un resultado que teña sentido, empregando
semellantes valores imaxinarios, que de algunha maneira son imposibles.

- Si, e a ese efecto os factores imaxinarios deberan anularse
reciprocamente no curso da operación.

- Si, si. O que dis está moi ben; pero de tódolos xeitos, ¿non resulta moi
raro?. ¿Como cho poido dicir?: nunha desas operacións, ó primeiro hai
números, digámos que completamente sólidos (unha medida de lonxitude
ou de peso, ou algo que podemos representarnos dunha maneira
concreta); polo menos son números reais. Cando remata a operación son
tamén números reais; pero eses dous extremos: o comezo e o final están
ligados por algo que non existe. ¿Non é como unha ponte que soamente
ten os pilares das veiras e que, a pesares diso, pódese atravesar como se
se extendera en todo o percorrido?."

R. Musil, *Las tribulaciones del estudiante Törless* (1)

Nesta novela autobiográfica escrita en 1906, Musil reflicte algúns episodios da súa vida de estudante no instituto militar austríaco, colexio da élite social da época.

As evocacións deste fragmento son ineludibles para un profesor de matemáticas e as reflexións de Törless, vistas retrospectivamente e dende a nosa posición, na que os números imaxinarios son elementos comúns, poden parecer teimas dun agudo adolescente:

"para ser estritamente científico eu debería facerlle algunhas demostracións que vostede apenas podería comprender"

"aquí non cabe outra cousa que crer. Cando saibas dez veces máis matemáticas das que agora sabes, xa o entenderás"

foron as respostas que o profesor de matemáticas lle daría posteriormente a Törless.

NOTAS HISTÓRICAS.

Pero, ¿como verían isto os matemáticos renacentistas, que se atopaban por vez primeira cos números imaxinarios?

Consulto o "Boyer"(2) e lévame a Cardano (1501-1576), que tenta de desenvolver un método de resolución de ecuacións cúbicas. Vexamos un exemplo:

"Sexa o cubo e seis veces o lado igual a 19" ou, como agora escribiríamos,

$$x^3 + 6x = 19$$

Cardano idea un enxeñoso método, na liña da tradición diofántica, que lle vai permitir converter estas ecuacións en bicadradas:

facemos $x = u - v$ e, daquela,

$$(u - v)^3 + 6(u - v) = 19 \rightarrow u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 6u - 6v = 19$$

que se reduce a $u^3 - v^3 = 19$ cando $u.v = 2$.

(obviamente $x = u - v$ admite infinitas posibilidades, das que toma unicamente aquela que lle resulta simplificadora). Ten así un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} u^3 - v^3 = 19 \\ u.v = 2 \end{array} \right\} \rightarrow u^3 - \left(\frac{2}{u}\right)^3 = 19 \rightarrow (u^3)^2 - 19u^3 - 8 = 0$$

que dá como solucións

$$u^3 = \begin{cases} 9'5 + \sqrt{98'25} \\ 9'5 - \sqrt{98'25} \end{cases}, \text{ das que considera unicamente a positiva, pois}$$

pensa en termos de magnitudes.

E de ahí $v^3 = -9'5 + \sqrt{98'25}$, obtendo finalmente:

$$x = \sqrt[3]{9'5 + \sqrt{98'25}} - \sqrt[3]{-9'5 + \sqrt{98'25}}$$

Cardano consideraba as ecuacións concretas como representantes de tipos xerais ("o cubo e a cousa é igual a un número") e así dá un método xeral para estas ($x^3 + px = q$):

$$x = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}} - \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}}$$

O "Boyer" di que logo estudia outros casos (?), como "o cubo é igual á cousa e a un número", nos que fai a substitución $x = u + v$, como no seguinte exemplo:

$x^3 = 15x + 4$, que agora simplificaríase cando $u.v = 5$, dando como solucións

$$u^3 = \begin{cases} 2 + \sqrt{-121} \\ 2 - \sqrt{-121} \end{cases} \quad \text{E de ahí } v^3 = 2 - \sqrt{-121}, \text{ obtendo finalmente}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

aínda que isto pódese deducir por simple substitución na fórmula (o que non é casual, pois a ecuación cúbica sempre se simplifica para $u.v = -p/3$).

Pero se os números negativos non tiñan raíz cadrada, e sendo 4 é unha raíz de esa ecuación, que pode obterse por simple tanteo; ¿que sentido tiña este resultado?. Así calificou a estas raíces de negativos como "sofísticas" e ó seu resultado de "tan sutil como inútil".

Reproduzo completo o seguinte párrafo, pois non é menos fermoso que o de Musil co que introducía este artigo:

"Ós matemáticos posteriores corresponderíalles a tarefa de demostrar que tales manipulacións eran verdadeiramente sutís, pero que estaban moi lonxe de ser inútis. Hai que apuntar entre os méritos de Cardano que alomenos adicara certa atención a esta situación desconcertante".

Outro matemático da época, Bombelli, pensou que, quizais, se as raíces cúbicas se relacionasen entre si do mesmo xeito que os radicandos:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \dots\dots\dots \text{ e } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \dots\dots\dots$$

ó sumalas obteríamo-la solución $x = 4$.

Pero tamén a el todo isto parecíalle "sofística".

¿COMO IMAXINA-LOS IMAXINARIOS?

¿Non é como unha ponte que soamente ten os pilares das veiras e que, a pesares diso, pódese atravesar como se se extendera en todo o percorrido?.

Non poido deixar de pensar no extraordinario paralelismo, con catrocentos anos de diferenza, entre a teima de Törless, estudante de instituto que remataría adicándose ó xornalismo e á novela, e a perplexidade de Cardano, un dos grandes matemáticos renacentistas.

Revisando a xustificación actual que se proporciona para introduci-los números complexos (resolve-la ecuación $x^2 + 1 = 0$), e comparándoa co problema de Cardano, este último parécese moito máis "de verdade": sicoloxicamente coherente e non artificioso. Explícome:

Da ecuación $x^2 + 1 = 0$ saberíamos, obviamente, que todo número ó cadrado é positivo e ó sumarlle 1 non nos pode dar 0. Polo tanto prantexa-la súa resolución a pesares diso sería artificioso, agás nunha situación meta-alxébrica na que a ecuación xa non é un instrumento para resolver problemas, se non un obxeto puro (isto pertence a un posicionamento sicolóxico diferente, posterior¹).

Propoñer, como fan algúns textos de bacharelato, que se busquen os puntos de corte dunha circunferencia e dunha recta *que non se cortan*, para que así, ó intentar resolve-la ecuación de 2º grao nos aparezan raíces cadradas de negativos, non supón ningún cambio sustantivo respecto do anterior, soamente circunstancial, recreativo, de posta en escea, o que en calquera caso pode ser de agradecer.

Pero Cardano sabía que a súa ecuación si tiña solución!, e sabía como buscala.Quizais haxa que impoñer unha introducción sinxela ós imaxinarios, se o facemos a unha idade temperán, ou quizais haxa que pospoñer esa introducción ata que estemos en condicións de imaxinalos.

¹No século seguinte, Girard admitiría as raíces imaxinarias para dar consistencia á teoría de ecuacións: unha ecuación ten tantas raíces como indica o seu grao.

RESPONDEMOS EN FORMA POLAR

En calquera caso, situados xa nun nivel suficiente (3º BUP), coas notacións polar e trigonométrica podemos responde-la conxectura de Bombelli e obter tódalas solucións:

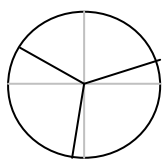
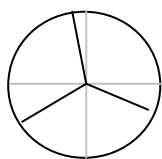
$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} = \sqrt[3]{r_\varphi} + \sqrt[3]{r'_\varphi}$$

$$r = r' = \sqrt{125} \quad ; \quad \varphi = -\varphi' = \arctan \frac{11}{2} = 79'695...^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{\sqrt{125}} = 2'236 \\ \varphi/3 = 26'565^\circ \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{2+11i} = 2'236(\cos 26'565^\circ + i \sin 26'565^\circ) = 2 + i \\ \sqrt[3]{2-11i} = 2'236(\cos - 26'565^\circ + i \sin - 26'565^\circ) = 2 - i \end{array} \right\} \rightarrow x = 4$$

As outras solucións da raíz cúbica obtémolas para $\frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{3}$ e $\frac{-\varphi + k \cdot 360^\circ}{3}$, $k = 1, 2$ que, como era de esperar, son conxugadas dúas a dúas; aída que, xirando no mesmo xeito, non aparecen na mesma orde. Isto é importante, pois non calquer par de raíces respectivas proporciona unha solución á ecuación. (Nótese que de ser así teríamos nove solucións e non tres).

 φ  $-\varphi$

$$2 + i \quad \leftrightarrow \quad 2 - i \quad \rightarrow x = 4$$

$$-1'866 + 1'232 i \leftrightarrow -1'866 - 1'232 i \rightarrow x = -3'732$$

$$-0'134 - 2'232 i \leftrightarrow -0'134 + 2'232 i \rightarrow x = -0'268$$

A xeneralización (as raíces de números imaxinarios conxugados son tamén números conxugados) é trivial con esta notación, podendo facerse antes ou despois do exemplo concreto, xa que para todo ángulo:

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha) \quad e \quad \sin \alpha = -\sin(-\alpha)$$

Faltaría probar que as raíces n -ésimas de dous conxugados proporcionan ángulos opostos, o que é moi doado:

Se $\alpha = \frac{\varphi + k.360^\circ}{3}$, xirando dende $-\varphi$ en senso contrario temos:

$$\frac{-\varphi - k.360^\circ}{3} = -\frac{\varphi + k.360^\circ}{3} = -\alpha,$$

¿PODERIAMOS RESPONDER EN FORMA BINÓMICA?

Pregúntome se poderíamos tamén aborda-lo problema dende a notación binómica. Aínda que, igual que antes, a orden do proceso pode variarse, expóño así:

1.- Caso xeral para a raíz cúbica de conxugados.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{a+bi} &= p+qi \\ \sqrt[3]{a-bi} &= x+yi \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} a+bi &= (p+qi)^3 = p^3 + 3p^2qi - 3pq^2 - q^3i = (p^3 - 3pq^2) + (3p^2q - q^3)i \\ a-bi &= (x+yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = (x^3 - 3xy^2) - (-3x^2y + y^3)i \end{aligned} \right.$$

$$a = p^3 - 3pq^2 = x^3 - 3xy^2 \quad e \quad b = 3p^2q - q^3 = -3x^2y + y^3$$

que ten unha solución trivial cando $x = p$ e $y = -q$, que fai que efectivamente as raíces sexan conxugadas.

2.- Caso particular.

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad \leftrightarrow \quad \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

$$\text{A búsqueda de solucións a través do sistema} \quad \left\{ \begin{aligned} 2 &= p^3 - 3pq^2 \\ 11 &= 3p^2q - q^3 \end{aligned} \right.$$

sitúanos diante dun problema difícil. Quizais sexa unha boa ocasión para reflexionar sobre como antes gañabamos en "eficacia" o empregar unha lingoaxe máis avanzada.

Na suposición de Bombelli:

$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\dots$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\dots$, teríamos que $p = 2$, resultando:

$$2 = p^3 - 3pq^2 \quad e \quad 11 = 3p^2q - q^3 \quad \text{dan } q = \pm 1$$

$$\text{e de ahí } x = 2 + i + 2 - i = 4$$

3.- Estudiar un caso simple: ¿que sucede coas raíces cadradas?

O proceso é semellante, pero máis sinxelo, o que supón unha práctica interesante.

Agora o sistema pódese resolver a través dunha ecuación bicadrada.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{a+bi} &= p+qi \\ \sqrt{a-bi} &= x+yi \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} a+bi = (p+qi)^2 = p^2 + 2pqi - q^2 = (p^2 - q^2) + 2pqi \\ a-bi = (x+yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = (x^2 - y^2) - (-2xy)i \end{cases}$$

$$a = p^2 - q^2 = x^2 - y^2 \quad e \quad b = 2pq = -2xy \quad \rightarrow \quad x = \pm p \quad e \quad y = \mp q$$

4.- Xeneralizar un resultado: ¿as raíces nésimas de dous complexos conxugados son tamén complexos conxugados?

O proceso xeneralízase por medio do "binomio de Newton":

$$\sqrt[n]{a+bi} = p+qi$$

$$\sqrt[n]{a-bi} = x+yi$$

$$a+bi = (p+qi)^n =$$

$$a-bi = (x+yi)^n =$$

$$\binom{n}{0}p^nq^0i^0 + \binom{n}{1}p^{n-1}q^1i^1 +$$

$$\binom{n}{0}x^ny^0i^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1i^1 +$$

$$-\binom{n}{2}p^{n-2}q^2 - \binom{n}{3}p^{n-3}q^3i +$$

$$-\binom{n}{2}x^{n-2}y^2 - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3i +$$

$$+\binom{n}{4}p^{n-4}q^4 + \binom{n}{5}p^{n-5}q^5i +$$

$$+\binom{n}{4}x^{n-4}y^4 + \binom{n}{5}x^{n-5}y^5i +$$

$$\dots \pm \binom{n}{n}p^{n-n}q^ni^n$$

$$\dots \pm \binom{n}{n}x^{n-n}y^ni^n$$

e, analogamente cos outros casos, ten unha solución trivial para $x = p$ e $y = -q$.

EPÍLOGO.

O seu compañeiro Beineberg diría, respecto das respostas do profesor:

"Eles fixéronse un camiño de milleiros de serpenteantes corredores, ó traveso do cerebro. E limítanse a mirar o último recodo que entrelazaron, por ver se aínda se mantén o tecido que van deixando tras de si. Por iso ti confúndelos coa túa maneira de preguntar. Agora non poden atopa-lo camiño que leva cara atrais."

- (1) R. Musil, Las tribulaciones del estudiante Törless, Ed. Sur, Buenos Aires 1960
- (2) Boyer C. B., Historia de la matemática, Ed. Alianza Universidad, Madrid 1992