

FIRMA INVITADA**¿QUE É ISO DAS MATEMÁTICAS?****ALONSO TARRÍO, Leovigildo***Facultade de Matemáticas*

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

e-mail: 1alonso@usc.es

Para empezar, nin sequera me gusta demasiado o título. Semella que habitualmente empregámo-lo nome en plural “*matemáticas*” na vez de “*matemática*” que, sen embargo, pareceríame mellor porque prefiro pensar nesta disciplina cunha unidade suxacente que a fai realmente útil por riba da parcelación e da superespecialización que nos quixo dar este século XX que, seica, por fin remata. De tódolos xeitos, este nome é moito mellor que aquel que nos tiñan adxudicado de “*Ciencias Exactas*”. Con tal nome un licenciado debера leva-la pesada carga de ser un “exacto” ou “exactista”, que non vos sei cal dos dous termos é máis pedante.

De tódalas formas, estoume desviando. Eu quixera transmitir sequera someramente como podemos describi-la actividade desas persoas chamadas matemáticos. A cuestión é abondo difícil. Moitos maxinamos o labor dun científico co seu ciclo interminable de pensar hipóteses, ir a contrastalas ó laboratorio, e volta a empezar tras refina-las hipóteses cos datos obtidos dos experimentos. Esta simplificación é case caricaturesca, pero creo que funciona a grandes rasgos. O que si está claro é que a descrición é completamente falsa se lla aplicamos á matemática.

De maneira que os matemáticos non responden ó *modus operandi* dos científicos (a pesares que a clasificación tradicional sitúa á matemática na esfera das “ciencias” e non das “letras”). Ás veces, alguén fai a pregunta do título sen se imaxinar cómo traballa é qué cousa lle interesa a un investigador das matemáticas. As máis das veces a xente supón que “xa están inventadas”. Pero nese caso alguén as inventou nalgún momento. E se alguén o fixo, é que se pode

seguir facendo. Ás veces preguntome se algunha xente pensará que a táboa de multiplicar atopouna alguén enterrada e gracias a iso podemos facer operacións.

¡E que lle imos facer!, cada vez que xurde a pregunta tódolos intentos de explicación soen resultar catastróficos. Para afondar na catástrofe voume toma-la licencia de enunciado un teorema de topoloxía: Todo campo de vectores dunha esfera bidimensional posúe algún cero. O meu amigo Antonio, despois de escoitar semellante restrita inintelixible de palabras respondeu: ¿Qué?. Ben, vou tentar expresalo doutra maneira: se un ten unha esfera peluda e tenta peiteala, sempre lle fará remuíños. Esta afirmación que parece tan pouco seria serve para predicir, por exemplo, que nalgún punto da Terra a velocidade do vento ten que ser cero; e enmárcase na chamada teoría do punto fixo, que ten moitas aplicacións (dentro e fóra da matemática). Este exemplo empregouno o meu amigo Adolfo (este é matemático) para explicar que era o que facía. O que conseguiu foi que a seguinte vez que se encontrou co seu interlocutor lle preguntara: ¿segues peiteando bolas peludas?.

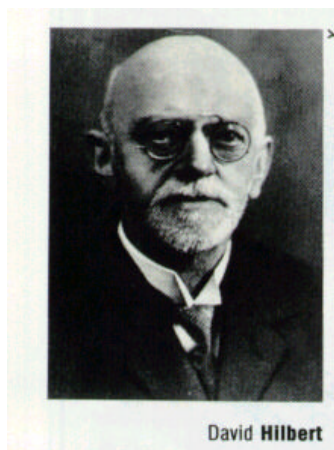
Évos difícil dar unha resposta. Incluso os propios matemáticos non son capaces. Proba delo é que hai varias correntes de pensamento sobre a cuestión e non acaban de pórse de acordo. Resulta curioso que isto fose un tema de discusión a primeiros de século e hoxe en día teña decaído bastante. Vou comentar estas posturas e o quizais de por qué teñen decaído.

A primeira postura que se me ven á mente é o **formalismo**. Foi un punto de vista apadriñado por David Hilbert, matemático alemán do que podemos dicir que foi un dos últimos que non se superespecializou como ocorreu posteriormente.

As súas contribucións tanto á álgebra como á análise foron decisivas. A súa postura consiste en declarar que para garanti-la corrección das afirmacións matemáticas debemos expresa-las nosas afirmacións mediante unha linguaxe puramente formal como se carecese de significado. Os razoamentos convértense así en regras formais de reescritura. Para imaxinármolas podemos poñer un exemplo tomado da lóxica, o siloxismo “bárbara”:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$$

$$\rightarrow p \Rightarrow r$$



Isto quere dicir, a grandes rasgos, que se un ten unha cadea de razoamentos, a primeira afirmación implica a última. Desta maneira, alomenos teoricamente, todo enunciado matemático (incluíndo o da bola peluda) pode expresarse de maneira precisa en termos desa linguaxe formal e expresa-la demostración como unha (longa) cadea de pasos nos que se empregan as regras de reescritura: aplicación das regras lóxicas, das definicións e dos axiomas cos que se traballa. Supoño que está claro que esta forma de funcionar é tremendamente impracticable xa que o simple esforzo de demostrar $2+2 = 4$ de forma absolutamente precisa ocupa varias páxinas. A utilidade deste enfoque consistiría en que se garante a precisión e verdade das afirmacións matemáticas.

Por desgracia isto é demasiado bo para ser certo. Unha reflexión menos optimista lévanos a pensar que o programa de Hilbert é sospeitoso, xa que pretende que un sistema formal se xustifique a si mesmo. De feito, os sistemas formais un pouco complicados (por exemplo, aqueles nos que se pode probar que $2+2 = 4$) posúen unha limitación intrínseca decisiva. Un sistema tal contén enunciados indecibíbles, é dicir, que as regras de reescritura e os axiomas non permiten dar unha proba da súa verdade nin da súa falseade. Este é o contido do famoso teorema de Gödel do que se fai tanto uso e abuso. ¿Quere isto dicir que o punto de vista formalista está esencialmente esgotado? Volverei sobre delo ó final do artigo.

Un punto de vista bastante emparentado é o **loxicismo**. Para os loxicistas, a matemática redúcese á lóxica, de maneira que a matemática é unha cadea de razoamentos lóxicos, algo así como “pura sintaxe” sen semántica, unha ciencia sen significado. Este punto de vista é aínda máis radical que o formalismo, xa que aquel propugna o análise formal como método preventivo de erros mentres que o loxicismo afirma que non hai significado. As súas raíces están en Dedekind pero os máximos expoñentes foron Russell e Whitehead, que escribiron un enorme tratado sobre dos principios da matemática.

Un dos problemas do loxicismo é o enormemente prolixas en que se converten as expresións matemáticas. Ademais o tratado fora escrito antes da utilización xeneralizada das táboas de verdade, co que tivo que cargar cun mamotreto de preliminares de lóxica proposicional que se resolven en poucas



liñas co uso das táboas. O propio Wittgenstein¹ na súa primeira etapa era loxicista e consideraba a matemática como unha colección de identidades tautolóxicas de fórmulas. Por outra parte, abandonou rapidamente os seus estudos de matemáticas antes de acadar unha grande profundidade, o que quizais explica nalgunha medida esta visión.



Pero o problema del loxicismo no é que fose un latazo escribi-los enunciados ou que a exposición de Russell e Whitehead puidera terse simplificado bastante. O problema está na necesidade (ou non) do infinito actual. Se queremos que a nosa teoría nos permita expresa-los números naturais (cos axiomas de Dedekind-Peano, por exemplo) necesitamos a existencia a priori dun conxunto infinito. O propio Dedekind na súa construción dos números naturais² (os que serven para contar) “demostrouno”. O seu razoamento consiste en que o conxunto dos meus pensamentos é infinito. Hoxe en día resúltanos difícil de aceptar un argumento así de metafísico.

Claramente o axioma “existe un conxunto infinito” non pertence á lóxica, que é a forma a priori do mundo e a base de todo razoamento posible.

De xeito que temos que nos enfrontar a unha nova variante do formalismo que é o **conxuntismo**. Neste punto de vista, a matemática é, basicamente, un discurso sobre conxuntos que son aqueles obxectos que poden pertencer e ser pertencidos. Trátase de encontrar unha axiomática desta relación que exprese as nosas intuicións básicas sobre os conxuntos e que non conteña contradicións internas. Frege intentouno da forma que hoxe en día denominamos inxenua (ou naif, si vos gusta máis) pero atopouse que non funcionaba. De feito foi Russell quen encontrou a pedra no zapato da teoría de Frege. O conxunto $\{ x \mid x \notin x \}$ é contradictorio. Para evitar que o meu amigo Antonio diga “¿Qué?”, vou tentar de explicalo doutra maneira. En Sevilla hai un barbeiro que afeita ós que non se afeitan a si mesmos. ¿Quén afeita ó barbeiro?. El mesmo non, porque nese caso afeitaríase a si mesmo, ¿non si?. En fin, ese lío tumbou a teoría de Frege e o probe sen ter ido a Sevilla na súa vida. A solución foi restrinxi-la liberdade de creación de conxuntos para que non aparecieran os paradoxos. ¡Éche unha mágoa que cando hai problemas as cousas se arranxen restrinxindo a liberdade!. Os primeiros en dar unha teoría de conxuntos “politicamente correcta” foron

¹ Filósofo austríaco profesor en Cambridge, discípulo de Bertrand Russell.

² ¿Qué son y para qué sirven los números?. Alianza, 1998

Zermelo e Fraenkel. E, por suposto, a súa teoría contiña o axioma da existencia de conxuntos infinitos.

Hai outro axioma que enuncia a existencia de cousas, o axioma da elección. Este axioma garántenos que podemos facer infinitas eleccións. Por exemplo, se temos infinitos pares de zapatos podemos elixir un de cada par, os esquerdos (por dicir algo). Pero, ¿que sucede se temos infinitos pares de calcetíns, todos idénticos entre si?. ¿Como dicir agora cales son os elixidos?. Daquela, a elección soamente nola garante o axioma. Este axioma ten os seus detractores porque, entre outras cousas, implica que un pode esnaquizar unha esfera nunha cantidade finita de partes e reconstruír cos anacos ¡dúas esferas exactamente iguais á de partida! Este é o contido do paradoxo de Banach-Tarski. (O infinito xoga un papel na construción non algorítmica das partes da esfera). Así, hai matemáticos que non o aceptan e representan o sector minoritario dos non-electivos. Hai que dicir que a principios de século os non-euclídeos tamén eran minoritarios, e xa vedes o que pasou despois. A pesares disto, os grandes resultados da álgebra, da análise e da topoloxía baséanse neste axioma (e, polo tanto, a maior parte da matemática). Compréndese así que os matemáticos non queiran renunciar a este xoguete tan divertido.

Como xa maxinaredes nesta altura, entre tanta controversia de principios do século XX, hai correntes que non están moi satisfeitas con iso de que certos conxuntos (ou aplicacións) existan por real decreto. Entre os máis radicais están os **intuicionistas**. Para estes nin a lóxica nin os sistemas formais, nin moito menos unha sabia axiomatización dos conxuntos, xustifican a verdade dos razoamentos. Se a matemática é un produto do pensamento humano, soamente a pura intuición a xustifica. Desta maneira, calquera razoamento que empregase un conxunto que existe a priori estaría prohibido. No fondo está a crítica ó infinito actual. Afírmase que o infinito non existe “todo dunha vez” senón que hai sucesións que non rematan nunca, como os números naturais. Defenden, polo tanto, o infinito potencial. Tamén criticaron o principio do terceiro excluído: “unha proposición é certa ou a súa negación é certa”, é dicir, a negación da negación dunha proposición equivale á proposición de partida. De xeito que, se dito principio non exerce, se un proba que a negación dunha proposición é falsa, non proba a verdade da proposición, ou o que ven sendo o mesmo, non podemos razoar por redución ó absurdo. O máximo expoñente desta corrente foi Brouwer. Sen embargo, proba de que o falar non ten cancela ou que unha cousa é predicar e outra dar trigo, nos seus traballos de topoloxía empregou razoamentos “intuicionistamente incorrectos”, entre eles no seu teorema principal, o do punto fixo, que implica o citado da bola peluda. Recentemente, ten habido un certo renacemento do intuicionismo, pero explicar en qué consiste levaríame demasiado lonxe.

Máis moderados na súa postura non-formalista son os **constructivistas**. Estes fan unha lectura moderada das teses de Brouwer. Eles non prohiben nin censuran. Limítanse a facer matemáticas ó xeito constructivo.

É dicir, nas demostracións e nos argumentos nos que se afirma a existencia de algo dáse un método explícito para a súa construción. É o método que se sigue na chamada teoría de modelos, e hai que recoñecerlles unha grande utilidade para o desenvolvemento da matemática, xa que marcan a fronteira entre aquilo que se pode facer explicitamente e o que non. Por certo, ¿como enfrontan os constructivistas o problema do axioma da elección?. Todo conxunto ven dado polo seu método de construción que inclúe un método para construír un elemento, de maneira que sempre temos forma de escoller un calcetín de cada par se un constructivista é quen nos dá o infinito conxunto de calcetíns.

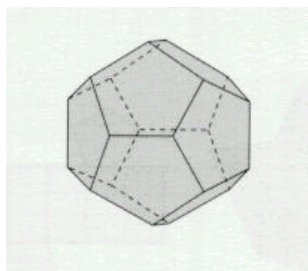
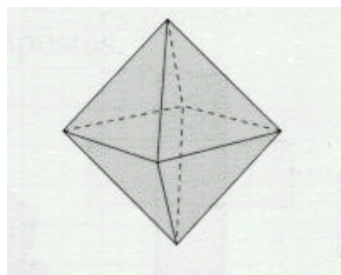
Despois de todas estas controversias, as augas remansaron e os matemáticos adicáronse a facer matemáticas máis que a pensar sobre delas. É como o fútbol: é máis divertido xogalo que falar sobre elo, aínda que os luns dea a impresión contraria. Sen embargo algún filósofo si dixo algo e merece a pena que o consideremos.

Unha opinión interesante é a do Wittgenstein da segunda época. El interpretaba a capacidade da linguaxe en termos de “xogos de linguaxe” nos que a linguaxe forma parte de todo un sistema de actitudes e actividades. Da mesma maneira as matemáticas ensértanse nun xogo deste tipo. Por exemplo, haberá un xogo de aprender matemáticas, un xogo de dar unha conferencia matemática, etcétera. Desta maneira, é o propio uso, unicamente, o que garante a corrección dunha inferencia. Non debe confundirse este punto de vista con aquel que expresa a ciencia dun modo social: “matemática é o que fan os matemáticos”, xa que o uso da linguaxe é algo máis esencial e anterior para Wittgenstein. Entre as críticas que se lle fixeron está a de empregar exemplos moi básicos de matemática sen entrar no rico edificio dos conceptos e as súas complexas relacións con outras ciencias, entre as que destaca claramente a física. Como filósofo do século XX tense destacado da súa postura que tenta construír unha teoría que desvele unha realidade oculta e, polo tanto, vésele como un expoñente da filosofía da sospeita.

Dentro desta gran corrente inscríbese tamén o punto de vista de Lakatos. No libro “Probas e refutacións”³ expón dunha maneira moi plástica o proceso dialéctico de refinamento dunha demostración e elaboración de conxecturas. Brevemente, o proceso consiste en expoñer unha proba,

³ Hai edición en castelán: Ed. Alianza. Madrid 1982

sometela a crítica (contraexemplos, ambigüidades...) e desenvolver unha nova proba máis precisa ou, quizais, unha nova conxectura.



$$C-A+V=2$$

Na vez de teorizar sobre o proceso amósao cun diálogo entre alumnos que analizan a proba de Euler de que o número de caras menos arestas máis vértices dun poliedro é 2. Os alumnos critican a proba de Euler e reconstrúen o proceso histórico que conlevou as distintas xeneralizacións do teorema, proceso que ó final desembocou no desenvolvemento da topoloxía alxébrica.

Na lectura do texto, a un lector moderno (e polo tanto pecando de formalista), resúltalle un tanto incómodo o feito de que nunca se faga precisa a definición de poliedro. De tódolos xeitos unha tendencia recente é a discusión aberta de conxecturas (moitas inspiradas pola física) e indubitablemente a análise de Lakatos é válida neste contexto. Quizais nos séculos vindeiros os estándares de rigor que hoxe temos como válidos resulten insuficientes.

E un podería traslada-la pregunta a un matemático en exercicio. É case seguro que respondería que “a matemática é un sistema formal no que se manipulan signos como se non tivesen significado algún e bla, bla, bla, ...”. Noutras palabras, o formalismo impúxose como doutrina “oficial”. Pero a verdade é que poucos o teñen crido. A meirande parte son **platónicos**. Isto quere dicir que, no fondo, consideran que os obxectos matemáticos “están aí”, algo así como nun mundo ideal, independente do home (e quizais do mundo). O matemático adícase entón a explora-lo territorio, inventando, iso si, ferramentas e “vehículos” para percorrelo, pero o que descubre xa existía previamente. Esta situación refórzase coa xa case habitual situación na que os físicos producen conxecturas matemáticas baseándose en cálculos simplificados e argumentos plausibles, e despois confírmanse de forma precisa, moitas veces con razoamentos e construcións difíciles. Os matemáticos nunca admitirán publicamente que pensan así, porque non estaría intelectualmente ben visto. Como exercicio propóñovos que preguntedes a algún amigo matemático se se cre ou non o axioma da elección.

Pode ser oportuno recomendar un par de libros como lectura que amplíen e contrapoñan os puntos de vista que fun expoñendo aquí. Un deles é

Experiencia matemática de Philip Davis y Reuben Hersch (Ed. Labor), no que pretenden retoma-la filosofía matemática mediante a reflexión dos propios matemáticos sobre da súa actividade e da comunidade na que se inscriben; lonxe de ser un discurso árido, dannos suficientes detalles como para asomarnos a este mundo. O outro sitúase no extremo oposto do espectro; titúlase *En honor del espíritu humano*, escrito por Jean Dieudonné (Ed. Alianza) e cae no vicio habitual dos matemáticos cando lle fan unha pregunta como a do título deste artigo, de contarnos resultados e teoremas e proponnos algún que outro exercicio. Pero, polo camiño, deixa caer unhas opinións sobre a cuestión que ben paga a pena coñecer.

De maneira que chegamos ó final e non resposteí a pregunta. Mellor así, se tódalas preguntas tiveran resposta, non habería matemáticas. Nin ciencia.