EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

¿ONDE ESTÁ A CABRA?[1]

LABRAÑA, Antón,
Facultade de Ciencias da Educación - USC

"Pero las explicaciones científicas siempre me han resultado pueriles y un tanto enojosas, y no convencerán jamás al alma inconforme o simplemente imaginativa"
Javier Marías (El siglo)

Relátase aquí unha recreación, que se levou a cabo cuns pequenos grupos de estudiantes de Económicas e de Matemáticas, da polémica que houbo nos Estados Unidos en torno a un "paradoxo" que se presentou a raíz dun concurso televisivo.

A efectos de non influír a priori no que puidesen pensar os estudiantes, ímoslles entregando pouco a pouco información que se vai discutindo puntualmente, demandando que se posicionen no debate aínda que teñan dúbidas. A experiencia desenvolveuse segundo o seguinte guión que a eles, por suposto, non llo dimos a coñecer:

1.- Lectura do problema formulado.

2.- As vosas opinións e os vosos argumentos.

3.- 1ª resposta de *vos Savant* e polémica suscitada.

4.- 2ª resposta de *vos Savant.*

5.- Continua a polémica; 3ª resposta de *vos Savant* e conclusión.

---

[1] Reflexións en torno ó texto de Paul Hoffman "El hombre que solo amaba los números" (Ed. Granica, Bacelona 2000).

6.- Unha crítica ás argumentacións (que non necesariamente á conclusión).

7.- Un argumento en contra.

8.- Un argumento alternativo a favor da conclusión (pensando *en negativo*).

9.- A posición de *Erdós*, o *método Montecarlo* e a súa aceptación.

10.- Ensaiemos o *método Montecarlo*.

11.- Anexo.

1) PROBLEMA FORMULADO

- O concursante pode elixir entre tres portas: detrás dunha delas hai un coche e detrás de cada unha das outras hai unha cabra.
- Unha vez realizada a elección, o presentador, que sabe onde está o coche, abre unha das portas non elixidas, detrás da cal hai, naturalmente, unha cabra.
- Agora dálle ó concursante a posibilidade de cambiar a porta elixida anteriormente pola que aínda queda sen abrir.

2) AS VOSAS OPINIÓNS E OS VOSOS ARGUMENTOS.

A situación de polémica reprodúcese na aula, sendo en principio maioritario o sector que cre que a probabilidade é 1/2 en calquera caso; a opinión xeneralizada podemos resumila neste argumento: "chegados ó momento da elección só hai dúas portas e podemos elixir libremente; o que sucedeu antes inflúe en cales van ser esas portas, pero sempre unha terá premio e outra non, e xa non pode repercutir novamente"

As poucas posicións contrarias a esta opinión son máis ben intuicións "borrosas", que non acertan a expresar con claridade.

3) 1ª RESPOSTA DE *VOS SAVANT* E POLÉMICA SUSCITADA

Von Savant, que figura no Libro Guiness dos récords como o coeficiente intelectual máis alto do mundo, defende que é vantaxoso cambiar de porta:

"Imaxina que hai un millón de portas e ti elixes a porta nº 1. Entón o presentador, que sabe o que hai detrás de cada porta e evitará abrir a do premio, abre todas menos a nº 777 777. Seguro que cambiarías rapidamente de porta, ¿non si?".

Entre os nosos estudiantes, aumentan lixeiramente as simpatías cara vos Savant, pero a maioría segue mantendo en pé o argumento anteriormente exposto (punto 2).

Prestixiosos matemáticos e estatísticos (das universidades George Mason e de Florida, por exemplo, ou do Instituto Nacional da Saúde e do Centro de Información para a Defensa, ídem.), replícanlle en termos semellantes ós que expoñían os nosos alumnos, pedíndolle que rectifique. Pero ela polemiza con todos.

4) 2ª RESPOSTA DE *VOS SAVANT*

Presentou entón unhas táboas nas que desglosaba as diferentes posibilidades:

Táboa 1

PORTA 1	PORTA 2	PORTA 3	RESULTADO (elixindo a porta 1 e non cambiando)
Coche	Cabra	Cabra	gaña
Cabra	Coche	Cabra	perde
Cabra	Cabra	Coche	perde

Táboa 2

PORTA 1	PORTA 2	PORTA 3	RESULTADO (elixindo a porta 1 e cambiando)
Coche	Cabra	Cabra	perde
Cabra	Coche	Cabra	gaña
Cabra	Cabra	Coche	gaña

"polo tanto, cambiando de porta gáñanse dúas veces, mentres que non cambiando, soamente unha".

A táboa produce efecto e agora si hai un deslizamento importante cara esa idea, quedando en minoría os de antes, que admiten a importancia deste novo argumento pero que non acaba de invalidar o deles.

5) CONTINUA A POLÉMICA; 3ª RESPOSTA DE *VOS SAVANT* E CONCLUSIÓN.

Recíbense miles de cartas na proporción de 9:1 en contra de vos Savant, pero ela replica de novo:

"Supoñamos que entra nos estudios televisivos unha marcianita, que non sabe cal porta eliximos en principio, e pídeselle que elixa unha das dúas portas que quedan sen abrir. As súas posibilidades son ó 50%, pero porque ela carece da vantaxe inicial que ten o concursante: a decisión do presentador. Se o premio está tras da porta 2, o presentador abrirá a 3; e se está detrás da porta 3, abrirá a 2. Entón, ó cambiar, gañamos se o coche está detrás da porta 2 ou da 3. ¡Gañamos das dúas maneiras!. Pero se non cambiamos, soamente gañamos no caso de que o premio estea tras da porta 1".

Os menos convencidos ceden parcialmente no seu convencemento, pero aínda manteñen a primeira idea (punto 2) como algo que finalmente podería funcionar.

Baseándose neste 3º argumento de vos Savant, xorde un novo argumento nesa liña, moi semellante ó que se expón no punto 8, pero antes, nós mesmos, aínda avivamos a polémica.

6) UNHA CRÍTICA ÁS ARGUMENTACIÓNS (QUE NON NECESARIAMENTE Á CONCLUSIÓN)

A 1ª argumentación pode facilmente facernos pensar que a porta que o presentador deixa sen abrir é a que ten o premio ("evitará abrir a do premio"). Iso non é necesariamente así, pois no caso de estar o coche tras da porta 1, procederá aleatoriamente a abrir calquera das outras portas.

A 3ª argumentación de *vos Savant* xira explicitamente en torno á idea de que a decisión do presentador engade información relevante para a decisión do concursante, acerca de se este debe ou non cambiar de porta.

- Dado que hai simetría nas tres eleccións posibles da porta inicial (1, 2 ou 3) traballaremos, igual que fai *vos Savant* unicamente sobre unha delas: supoñamos que elixe a porta 1.
- Na súa argumentación, omite dicir que o presentador pode mostrar a porta 3 ou a 2 aínda estando o premio na porta 1 que o concursante tería elixido. Vexamos o que ocorre se incluímos esta casuística:
- Os tres casos da táboa constitúen unha familia completa de sucesos, que denominaremos A1, A2 e A3, respectivamente se o coche está tras da porta 1, 2 ou 3.

- A probabilidade de que o conductor descubra a porta 2 (C2) é, segundo o teorema das probabilidades totais:

  $$P\ (C2) = P(C2/A1)\cdot P(A1)\ +\ P(C2/A2)\cdot P(A2)\ +P(C2/A3)\cdot P(A3)\ =$$
  $$= 1/2 \cdot 1/3\ + 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 = ½$$

- Analogamente, ou ben polo suceso contrario, P (C3) = ½

Polo tanto, a decisión do presentador non nos aporta información.

En varias ocasións saíra no noso debate a idea de que se o presentador trataría de que non gañasémolo premio, que se intentaría desorientar ó concursante... O feito de comprobar tecnicamente que a decisión do presentador é irrelevante non leva a cambios de posicionamento, pero si debilita a seguranza que algúns/as xa tiñan na veracidade da tese de vos Savant, e fai que os seus detractores recuperen ánimos.

7) UN ARGUMENTO EN CONTRA

Se ben son 3 as posibles posicións do coche, o xogo non consiste en acertar unha vez oculto este, senón en acertar unha vez que concursante e presentador se pronuncien. Isto converte os casos posibles en 4, e non en 3 como viñamos manexando:

- Volvendo á táboa, a primeira opción (que o coche estea colocado tras a porta elixida polo concursante), deixa dúas opcións ó presentador, polo tanto hai dous casos posibles, máis un caso por cada unha das outras opcións. Seguimos, dada a simetría, reducíndoo ó caso de que o inicialmente se elixa a porta 1ª:

Porta 1	Porta 2	Porta 3
Coche	Abre	**Cabra**
Coche	**Cabra**	Abre
Cabra	**Coche**	Abre
Cabra	Abre	**Coche**

Táboa 3

(en negriña a posibilidade de cambiar)

- Daquela, a probabilidade de acertar conservando a primeira elección é 2/4 = ½.
- Do mesmo xeito, a probabilidade de acertar cambiando é, tamén, 2/4 = ½.

Agora os “animados” na defensa de ½ : ½ , cren atopar un argumento concluínte; outros regresan a este posicionamento; pero outros mantéñense no anterior, xusto na situación inversa: este novo argumento parece estar ben, pero non invalida o argumento 3º nin os que se deron na aula como complemento a ese.

8) A POSICIÓN DE *ERDÓS*, O *MÉTODO MONTECARLO* E A SÚA ACEPTACIÓN

Vázsonyi, profesor de universidade en California, preparou un “diagrama de decisións”, semellante ás táboas 1 e 2, que usa nas súas clases de técnicas cuantitativas de decisión, o que o levou a un total convencemento a favor das teses de vos Savant.

Pero Erdós, o matemático máis prolífico do noso tempo, replicoulle rotundamente dicindo que iso era imposible e que, ademais, o seu diagrama non explicaba *por qué* hai que cambiar; algo que si debera explicar unha verdadeira demostración.

9) UN ARGUMENTO ALTERNATIVO A FAVOR DA CONCLUSIÓN (PENSANDO *EN NEGATIVO*)

Daquela, se desexamos manter a conclusión, debemos construír argumentos alternativos. Aí vai un, que adapta[2] *en negativo* o anterior argumento 3º:

- Se o concursante toma *a priori a decisión de cambiar de porta* suceda o que suceda, cando elixe por vez primeira en realidade o que está facendo é descartar unha porta:
    * A probabilidade de descartar o coche é 1/3.
    * Se o coche está nalgunha das outras dúas portas (probabilidade 2/3) acerta seguro, pois o presentador *está obrigado* a descartar a outra.
- Entón, cambiando sempre, efectivamente a probabilidade de acertar é de 2 a 1. A decisión do presentador é irrelevante: *alea iacta est*.

[2] Metidos na polémica, os nosos pensamentos non son totalmente orixinais: pensamos a partir das ideas dos demais, tanto das acertadas coma das erradas, aproveitando cousas de aquí e de acolá, ou entrevendo posibles solucións ó facer crítica a formulacións anteriores á nosa.

Recupéranse partidarios de vos Savant, que ven como esta nova argumentación matiza as súas anteriores o suficientemente como para disipar toda dúbida. Os críticos sobreviventes séntense moi debilitados.

10) ENSAIEMOS O *MÉTODO MONTECARLO*

Fixemos na clase unha simulación experimental utilizando uns dados (que indicaban as eleccións) e unhas fichas (dúas verdes representaban as cabras e unha vermella o coche), e deixamos que o azar dictase veredicto.

- Un primeiro lanzamento decidía como colocar o coche (1, 2, ou 3 puntos do dado e, correlativamente, 4, 5 ou 6).
- Un segundo lanzamento representaba a elección do concursante (mesmas puntuacións).
- Repartímonos ó chou de forma que en total fixéronse 60 simulacións conservando a porta elixida inicialmente, e outras 60 cambiando de porta:

*Cambiando gaña en 42 casos e perde en 18.

*Se non cambia gaña en 17 e perde en 43.

(O paralelismo cos resultados 40 e 20 (20 e 40, respectivamente), teoricamente previsibles, é notorio).

Os críticos réndense ante a experiencia. Parece ser que Erdós tamén e que, finalmente foi convencido por Graham, outro insigne matemático:

“ A clave do problema está en saber desde o principio que o presentador darache a oportunidade de cambiar de elección. Iso está nas regras e hai que engadilo ó problema”.

11.- ANEXO

A preocupación de Erdós permanece. Podemos aceptar calquera dos tres argumentos de *vos Savant*, incluso os tres, incluso o “alternativo” dado no punto 8, e tamén o “montecarlo”, pero ningún revela *por qué* é mellor cambiar.

Incluso a explicación de Graham non aclara nada, se non que re-enuncia o xogo, recórdanos o que xa se nos di ó principio. Teño a impresión de que Erdós aceptouna por aburrimento.

Non podiamos descubrilo antes, pois daquela ninguén cambiaría de opinión, pero o argumento do apartado 7 constrúese coa hipótese implícita de que os 4 sucesos elementais (que efectivamente hainos), son equiprobables, o cal non é certo, pois os dous primeiros repártense entre si 1/3 dos casos, ou sexa, cada un destes ten 1/6, mentres que os outros dous teñen 1/3 cada un, co cal volvemos ó anterior.

- Esta última reflexión dános, ademais, a clave para *revelar* cal é a inconveniencia de elixir libremente unha porta entre dúas:
  - Efectivamente, a evidencia de que a decisión definitiva do concursante consiste en elixir unha porta entre dúas leva á intuición de que a probabilidade de acertar é ½ en calquera caso. Dita intuición sería correcta se os sucesos elementais desta tesitura fosen equiprobables (ou sexa, se o coche pode estar aleatoriamente situado en calquera das dúas portas a elixir), o cal é falso:
    - Se elixín a porta 1 e me dan a opción de cambiar á porta 2 (porque a 3 xa foi aberta), das situacións deste tipo que me presenten o coche estará oculto tras da porta 1 só unha terceira parte das veces que me dean esta oportunidade (opción 2ª da táboa 3, con probabilidade 1/6 de se producir) estando oculto tras da porta 2 dúas terceiras partes das veces que me dean esta oportunidade (opción 3ª da táboa 3, con probabilidade 1/3 de se producir). Analogamente sucede se me dan a elixir o cambio entre a porta 1 e a porta 3 (opcións 1ª e 4ª da táboa 3).
    - Doutra maneira, se elixo a porta 1 mostraranme a porta 3 en tódolos casos nos que o coche estea tras da porta 2 (opción 3ª da táboa 3, con p=1/3), e soamente na metade dos casos en que estea tras da porta 1 (opción 2ª da táboa 3, con p=1/6, 1/2 de 1/3), porque aquí o presentador abre aleatoriamente a 2ª ou a 3ª porta.

12) AGRADECEMENTOS

Ós estudiantes que recrearon a polémica e ós profesores Cajaraville e Emilio Crespo polos seus acordos e/ou desacordos.