

TRANSICIÓN DA ARITMÉTICA Á ÁLXEBA ANÁLISE DE OBSTÁCULOS E RECURSOS DIDÁCTICOS EMPREGADOS EN 3ª ESO.

LUIS CARLOS CACHAFEIRO CHAMOSA.
IES Pontepedriña. Santiago de Compostela

No Boletín das Ciencias nº 35 [Cachafeiro 98] analizamos a transición da aritmética á álgebra. Coidamos conveniente ampliar aquel estudo analizando os erros que se producen no cálculo, mostrando problemas levados á aula xunto con algúns recursos didácticos de xeito que o lector poida contrastalos cos propios e, se os considerara de interese, empregalos. O marco xeral vaise centrar arredor das dificultades do alumnado de 3º ESO á hora de resolver problemas alxébricos tanto estean formulados nesta linguaxe ou se acompañen do proceso previo de traslación á álgebra. Unha parte desas dificultades son de cálculo en si e outras da formalización a linguaxe alxébrica de problemas dados a partir dun contexto externo. Estes dous tipos de dificultades son moi diferentes aínda que se complementan á hora de resultar obstáculos para obter unha solución correcta a un problema concreto. Mostraremos como unha parte desas dificultades, proceden dunha deficiente transición dunha aritmética *inxenua* a outra máis próxima á álgebra e polo tanto máis xeral.

1. ERROS DE CÁLCULO ARITMÉTICO E ALXÉBRICO.

Os erros dos alumnos á hora de resolver problemas de cálculo aritmético e alxébrico son unha importante fonte de datos que permiten analizar os problemas aos que se enfrontan nese longo proceso de asimilación dunha linguaxe e de aparición de certos conceptos alxébricos, como por exemplo as solucións dunha ecuación. Recollidos ao longo de períodos relativamente extensos de tempo, empregando a clasificación proposta de Barnard [Barnard 2002], só poden sernos de axuda na comprensión da formación do coñecemento alxébrico e no deseño de ferramentas de resolución deste tipo de problemas. A posibilidade de adaptar métodos que axuden na redución destas dificultades estará limitado polos factores que conflúen no problema, como a intensidade da práctica, o interese e a capacidade do alumno, etcétera. Coidamos que, aínda que se xeralicen os medios de cálculo automático, continuarán existindo necesidades de coñecemento do cálculo alxébrico tal e como a experiencia destes anos de xeralización das calculadoras parece sinalar.

Algúns dos erros detectados no cálculo teñen que ver cunha dificultade de comprensión das expresións alxébricas e incluso nalgún caso, aritméticas. Estas dificultades poden aparecer baixo a forma xeral de:

- 1- Incomprensión do significado do literal ou unha interpretación pobre destes símbolos non numéricos. Por exemplo atopamos unha mostra desta incomprensión cando un alumno fai desaparecer a x como se se tratara dun símbolo molesto.
- 2- Semántica pobre da propia aritmética.
- 3- Deficiente interpretación das propiedades e confusión co cálculo. Vemos un exemplo disto, cando observamos nun alumno dificultade para comprender a dobre direccionalidade das propiedades dadas a partir dunha igualdade, como a distributiva.
- 4- Dificultade para ver os obxectos complexos como unha unidade.

Se particularizamos estes erros observamos que se poden clasificar en¹:

1º Uso dunha falsa linearidade.

Exemplo 1.1. Transformar a potencia $(x+2)^2$ en x^2+2^2 .

Un problema tamén relacionado coa falsa linearidade obsérvase na transformación da

expresión $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$ en $\frac{2x}{5}$.

2º Erros operacionais nunha parte dun termo composto.

Exemplo 1.2. A expresión $-\frac{x+1}{2}$ transformada en $-\frac{x}{2} + 1$.

Outro exemplo deste tipo observámolo cando a partires da ecuación $\frac{1}{2} - x = \frac{3}{4}$ obteñen como equivalente a ecuación $2 - x = 3$. Trataron correctamente a parte aritmética pero non modificaron o literal. Outro erro deste tipo vese no paso de $(2x)^3$ a $2x^3$. Non perciben que o 2 tamén forma parte da expresión elevada ao cubo e polo tanto que é $2x \cdot 2x \cdot 2x$?

3º Erros consecuencia de confusión entre operacións.

Exemplo 1.3. Vimos converter a resta $-1-4$ no valor 4, aplicando neste caso a regra *menos por menos é máis* como se se tratase de $-1 \cdot (-4)$.

Tamén cando calculan a potencia 3^4 obtendo o valor 12.

4º Erros pola necesidade da clausura.

Exemplo 1.4. Transformar o polinomio $3x^2 + 5x$ en $8x^3$. Súmanse os coeficientes e os expoñentes anque neste caso máis que mostrar unha confusión de propiedades vese que se procura o peche da expresión nunha soa.

Outro exemplo é o da fracción $\frac{x+y}{x}$ que poden reducir a $1+y$ ou eliminar toda referencia a x e igualar a fracción a y .

¹ Esta clasificación non é excluínte.

5º Erros que teñen que ver co signo menos.

Exemplo 1.5. A expresión $1 - \frac{x+1}{2}$ que, adoitado, é convertida en $\frac{2-x+1}{2}$

Outro exemplo cando pasan a resta $1-10$ é igualada ao número 9.

6º Regras mal aplicadas.

Exemplo 1.6. A ecuación $2x = 25$ transformada en $x = \frac{2}{25}$

Outro exemplo vémosto tamén na transformación de $3^5 \cdot 2^4$ en 6^9

7º Cancelación non apropiada .

Exemplo 1.7. A fracción $\frac{1+5}{1+3}$ convertida en $\frac{5}{3}$.

Tamén cando o cociente $\frac{x^2}{x}$ é igualado a 2.

8º Amañando fórmulas.

Exemplo 1.8. A fracción $\frac{8}{\frac{1}{2}}$ = facela igual a 4

Tamén $(3x+1)(3x-1) = 9x^2 + 1^2$.

9º Erros na resolución de ecuacións.

Na resolución de ecuacións aparecen bastantes exemplos de erros dos tipos antes mencionados. Un exemplo de que os erros detectados escapan a unha explicación sinxela, vémosto no seguinte:

Exemplo 1.9. Resolver correctamente $2x+3=9$ e o propio alumno fai incorrectamente $2+3x=10$ escribindo $5x=10$, $x=2$.

Non deixa de resultar aparentemente sorprendente que se produza unha diferenza entre unha ecuación do tipo $ax+b=c$ e outra da forma $a+bx=c$. Calquera dos dous casos resólvese mellor se a incógnita se atopa na parte dereita, o que amosa que, na práctica, non acadan a tratar de xeito simétrico os dous termos dunha ecuación.

10º Outros erros.**Exemplos 1.10.**

a) Transformar a expresión $\frac{1}{2} - \frac{3-2}{5}$ en $\frac{1}{2} - \frac{5}{5}$

b) Facer $9-3+2$ igual a $9-5$

c) Transformar $3x-(5+x+3)$ en $3x-5+x+3$.

d) A translación a linguaxe alxébrica de: o triple dun número na expresión x^3 .

e) A eliminación de x como un símbolo que estorba: pasar de $\frac{1}{2}x$ a $\frac{1}{2}$.

2. EMPREGO DOS LITERAIS. DIFICULTADES E RETOS.

Vimos que a comprensión dos significados dos literais é unha parte necesaria para a aceptación e uso da álgebra. Faremos aquí unha análise dalgunhas das causas desa dificultade. Aqueles aspectos nos que as técnicas alxébricas varían de forma máis notábel con respecto á aritmética sóense converter nunha fonte continua de erros, nalgún caso por unha especie de conflito entre os dous tipos de técnicas. Por exemplo, a expresión $5x + 3y$ vai ser interpretada por algúns alumnos como a suma de 5 unidades con outras 3 unidades dando un total de oito obxectos dun tipo común, unha combinación de x con y polo que vemos transformar esa expresión $5x + 3y$ en $8xy$, $8x$ ou en $8y$.²

Na simplificación aritmética moitas veces abondará con realizar unha serie de operacións na orde axeitada independentemente de que se puidera ter obtido ese resultado doutra forma mediante o uso doutras técnicas, nalgúns casos, máis directas. Unha parte do alumnado non chega a empregar o novo sistema ficando practicamente excluídos deste proceso que levará á álgebra. Vexamos un exemplo dun problema aritmético e o seu correspondente alxébrico.

Exemplo 2.1 Simplificar a expresión: $\frac{2^4 \cdot 125 \cdot 2}{25 \cdot 2^3}$.

Habitualmente este problema resólveno do xeito seguinte:

$$\frac{2^4 \cdot 125 \cdot 2}{25 \cdot 2^3} = \frac{2^4 \cdot 250}{25 \cdot 2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 250}{25 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{4000}{200} = 20.$$

Para obter este resultado usaron, esencialmente, que $2^4=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ e $2^3=2 \cdot 2 \cdot 2$ (non mencionamos outras propiedades máis asumidas ou transparentes como a asociativa).

Exemplo 2.2.

Simplificar a expresión: $\frac{a^4 \cdot b^3 \cdot a}{b^2 \cdot a^3}$

Boa parte do alumnado de 3º de ESO non é quen de resolver este problema alxébrico non tendo dificultade para o aritmético. A obtención do valor $a^2 \cdot b$ resulta máis complexa que a aparentemente semellante, solución do problema aritmético anterior. Para obter o valor $a^2 \cdot b$ teñen que dotar de significado a expresións como a^4 , conceptualmente algo máis complexa que 2^4 xa que neste caso a operación pódese realizar e produce un resultado, e realizar por outra parte a operación de simplificación que non cumpría no exemplo 2.1.

O paso de aritmética á álgebra supón unha dificultade engadida que se compensará, para os que teñan éxito, cun elemento de xeralización importante que abre as portas a un coñecemento máis abstracto e potente. Porén, moitos dos nosos alumnos, non teñen éxito na tarefa de resolver novos problemas debido, a miúdo, a que as bases desa translación, que se atopan nesas outras formas de aritmética máis depuradas, non chegan a desenvolverse.

² Este exemplo e a argumentación están tirados de [Socas, Palarea 97].

A álgebra tense considerado como unha xeralización da aritmética, estendendo o uso de operacións numéricas a expresións con literais. Vimos algún exemplo en problemas de tipo procedemental. Outra diferenza notable entre a aritmética e a álgebra obsérvase no uso do símbolo $=$. Na aritmética emprégase para separar dúas expresións diferentes do mesmo número mediante redución dunha á outra. Na álgebra o símbolo $=$ emprégase tamén nese senso mais hai outro moito máis potente que é o que permite producir novos obxectos da forma $A=B$.

Amáis das diferenzas enriba comentadas entre a aritmética e a álgebra, hai métodos de resolución alxébricos que difiren moito dos correspondentes métodos aritméticos. Esta forma de resolución está xeralmente moi centrada nos datos concretos. A alxébrica pasará a estar máis en determinados esquemas conceptuais moi xenerais case independentes dos valores concretos que tomen.

Da tese de Fernández [Fernández 97], extraemos o seguinte problema que consideramos representativo desas formas de pensamento matemático: o aritmético e o alxébrico.

Exemplo 2.3. *Se tres gomas e dous clips miden dezoito centímetros e dúas gomas e un clip miden once centímetros, canto mide cada goma e cada clip?*

Unha argumentación baseada na resolución aritmética é:

Solución 1.

1 goma e 1 clip miden $18 - 11 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$

1 goma mide $11 - 7 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$ e

1 clip mide $7 - 4 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$

Mostramos na Figura 1 a solución xeométrica equivalente a esta solución aritmética.

Esta forma de resolver o problema difire notablemente do método de resolución alxébrico:

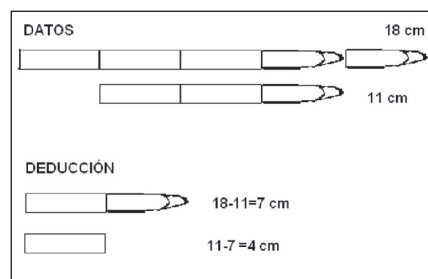


Figura 1. Solución aritmético-xeométrica.

Solución 2.

Se x é a medida en centímetros de cada goma e y é a medida en centímetros de cada clip:
 $3x + 2y = 18$ e $2x + y = 11$

Resolvendo a ecuación (e.g. por substitución) obtemos os valores $x = 4$ e $y = 3$ de onde deducimos que cada goma mide 4 cm e cada clip 3 cm

Obsérvase a dificultade de resolver por aritmética un problema alxebricamente análogo e que tivera outro tipo de coeficientes fraccionarios, negativos. Por outra parte, resulta difícil atopar problemas cotiáns nos que poidan aparecer eses outros rangos numéricos.

As posibilidades que proporciona a álgebra coa construción destes novos obxectos, as ecuacións e sistemas de ecuacións, son enormes. Co predicado de igualdade, pódense introducir gran número de teorías de forma lóxica. Unha mostra evidente da capacidade da álgebra para incorporar á Xeometría vémol a nos programas de xeometría dinámica como o *Cabri-Geometre*. O método alxébrico é moi portable no sentido de que depende pouco dos datos específicos do problema (tipo de números, relacións entre os dados) sendo máis potente, conciso e aparentemente afastado da experiencia sensible que o aritmético, producindo unha economía de pensamento moi notable. Esta pode parecer unha vantaxe pero só se é capaz de usar esa linguaxe correctamente.

3. MATEMATIZACIÓN INCORRECTA DE ENUNCIADOS DE PROPORCIONALIDADE. PROBLEMAS DE ÁLXEBA LINEAR.

Para que as ferramentas alxébricas sexan proveitosas non só cómpre saber realizar os cálculos con precisión. Tamén hai que saber trasladar previamente ao formato alxébrico as condicións dos problemas que se desexa resolver, dados por un enunciado ou unha descrición dada. A corrección desa translación depende en gran medida do formato ou da linguaxe do problema, así como das características específicas do problema en si. Nalgún caso descubrimos que a dificultade provén do conflito, xa mencionado, entre as técnicas aritméticas e alxébricas. Noutros casos é debido a unha dificultade da linguaxe na que se expón o problema. Veremos a continuación exemplos de aula, para 3º de ESO, con estes dous tipos de dificultades.

Problemas de incrementos e descontos.

Moitos problemas que se coñecen como “*problemas da vida cotiá*” teñen que ver coa variación dun valor que foi incrementado ou reducido nunha proporción dada. Hai exemplos de modificacións de prezos seguindo unha porcentaxe coñecida e noutras situacións como des-emprego, beneficios empresariais, IPC, IVE, peso, po-boación, etcétera. En 3º de ESO, a maioría do alumnado coñece como obter o valor final dun produto a partir do valor inicial e do incremento porcentual, usando un procedemento esencialmente aritmético que lles dificulta a solución do problema inverso, isto é, obter o valor inicial a partir do final e do incremento producido sobre o inicial.

Este problema inverso atopámolo nalgún caso no que nos cumpría coñecer o valor do IVE dun produto pedíndolle ao vendedor, que soamente coñecía o prezo final, que nos especificara o valor do imposto [figura 2]. Nalgunha ocasión, tivemos que resolver nosoutros mesmos o problema ante a incapacidade do vendedor para facelo correctamente. Como o lector pode imaxinar, adoitó a solución era a de restarlle un 16% ao valor importe total do produto.

A forma de abordar o problema básico, será un indicador de como vai ser abordado o problema inverso. É conveniente traballar de forma intensiva o problema directo ata lograr que sexa resolto de xeito natural por métodos máis próximos á álgebra, para ter expectativas de éxito na resolución dese problema inverso.

Outra mostra deste conflito observámolo na seguinte noticia aparecida nun xornal de ampla difusión³ que reproducimos na figura 3. O titular da noticia era:

Nome cliente: Merco e vendo SA
Enderezo:

SUPRAPHI

REFERENCIA	DESCRIPCIÓN	CANTIDADE	PREZO	IMPORTE
EX-123	Computador	1		
Total bruto	Base Imponible	IVE %	IVE	TOTAL
		16	771,40	

Figura 2. Factura só co importe neto

deportes

Un tanque a la carrera

► El samano Misapeka, «récor» de peso y lentitud en los 100 metros

MARCELO FERRERIO

En un momento de los 100 metros, los atletas se lanzan a la carrera. El tanque Misapeka, en cambio, se queda quieto. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.

El tanque Misapeka, de 27 años, es el más pesado de la historia. Con 400 kilos de peso, el atleta Misapeka es el más pesado de la historia. En la foto, el atleta Misapeka en la línea de salida de la carrera de los 100 metros.



Figura 3. Reproducción da páxina coa noticia.

³ Por discreción, omitimos o nome do xornal e do autor da nova.

“Un tanque a la carrera”. *El samoano Misapeka «récord» de peso y lentitud en los 100 metros.*

No artigo, mencionábase a moi pobre marca deste atleta na proba de 100 metros libres, 14,28 segundos, na competición dos campionatos mundiais de Atletismo. Comparábase esa marca co entóns récord mundial de Green de 9,79 segundos, supondo aquela un 45,8% de aumento sobre este récord. Como tamén competiu no lanzamento de peso, na noticia facíase unha equivalencia desa marca en 100 m coa marca en peso. Xa que nesta proba o que se mide é lonxitude, aquí interesan as máximas e non mínimas como nos tempos, a proporción non é directa. Para realizar a equivalencia fíxose a seguinte transformación:

Tempo marca en lentitude = récord mundial + 45,8% sobre o récord mundial = 14,28 s

Equivalente no lanzamento de peso = récord mundial - 45,8% sobre o récord mundial = 12,53 m

Así, para trasladar a marca en lonxitude á marca en peso restóuselle a mesma porcentaxe ao récord mundial. Este razoamento é unha mostra do pensamento aritmético inxenuo. Pensemos que a unha marca dobre en tempo a súa equivalente non é ;0 metros en distancia! senón a metade da distancia. Non existiría equivalente a triplicar o tempo, ¡xa que ese procedemento daría unha distancia negativa! O equivalente a aumentar nun 45,8% o tempo, e polo tanto a multiplicar por 1,458 o récord, é dividilo entre 1,458. Así o procedemento que debeu empregarse era o seguinte:

Tempo marca en lentitude = récord mundial $\cdot$ 1,458 = 14,28 s

Equivalente no lanzamento de peso = récord mundial $\cdot \frac{1}{1,458} = 12,53$ m

Estes dous exemplos móstranos que unha parte dos problemas que levamos a aula son verdadeiros *problemas da vida cotiá*. Os alumnos en 3º de ESO deberían coñecer a solución, para consolidar o pensamento alxébrico e superar o pensamento aritmético sinxelo que non axuda á hora de resolver determinados problemas reais.

Para iso propoñemos unha serie de exercicios do tipo seguinte:

Exemplo 3.1. a) Un produto A ten un desconto do 25% sendo o seu prezo inicialmente de 80 euros. Calcula o valor final dese produto logo do desconto.

A maioría dos alumnos de 3º de ESO resólveno, correctamente, restando 20 euros ao prezo inicial.

Porén, se se lle engade o seguinte apartado:

b) Sabendo que outro produto B ten o mesmo desconto e que o seu prezo final é de 15 euros, que valor tiña antes do desconto?

Agora a resposta é errónea na maioría dos casos moitos deles aplicando

$$\text{Prezo inicial} = \text{prezo final} + 25\% \text{ prezo final}$$

Este esquema vai ser usado polos alumnos de xeito continuo aínda logo de comprobar o erro, mostrándose como un procedemento solidamente asentado.

Coidamos que un dos obstáculos máis notables se debe a que a resolución estándar do problema básico, obter o 25% da cantidade inicial e restárllela a esta cantidade, é unha operación que veñen realizando moitas veces por tratarse dunha situación que adoito aparece na vida diaria dos alumnos e ademais está relacionada cunha aritmética pouco evolucionada:

- está ligada á operación indicada xa que nos están dando información sobre ese desconto,
- a operación de sumar a unha cantidade outra obtida de forma parcial é ben coñecida dende a época das sumas con acarreo.

Ademais é un método correcto para resolver o problema directo aparecendo moitas máis veces frecuente que o problema inverso. Polo tanto cómprenos un método de resolución que:

- sirva tanto para resolver o problema directo como o inverso,
- non supoña unha complexidade engadida notable para que poida ser asumido pola maioría,
- poidamos deseñar unha serie de exercicios que axuden á substitución do vello modelo polo novo.

Para iso mostramos que o desconto do 25% equivale a conservar o prezo nun 75%. Esta sinxela operación inicial levaranos a cambiar o formato do problema.

Engadimos unha pregunta anterior ao apartado a) do Exemplo 3.1

- Se en 100 nos descuentan 25, que cantidade é a que nos cobran?

Dámoslle moita importancia a esta pregunta. De feito, todos os problemas de porcentaxes vaise incluír un apartado semellante, xa que desexamos que a contesten antes de que apliquen o desconto ou incremento a unha cantidade previa. O método de resolución que aplicamos ten as partes seguintes:

Resolución por porcentaxe de constancia.

1º Se en 100 descuentan 25 seguen cobrando 75. xa que $100 - 25 = 75$.

2º Xeneralizamos a unha cantidade x^4 ,

un desconto do 25% a x equivale a dicir que cobran $\frac{75}{100}x$ xa que

$$\text{Prezo final} = x - \frac{25}{100}x = \frac{100x - 25x}{100} = \frac{75}{100}x.$$

3º Podemos expresar a relación entre o prezo final e o inicial da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} \text{prezo inicial} & \rightarrow & \text{prezo final} \\ x & \rightarrow & \frac{75}{100}x \end{array}$$

4º Multiplicar por $\frac{75}{100}$ é o mesmo que multiplicar por 0,75 aforrando unha operación.

5º Se para pasar do inicial ao final multiplícase por 0,75, para pasar do final ao inicial, divídese entre 0,75.

Polo tanto, para un problema como o Exemplo 3.1 as respostas serán:

- De 100 quedará o prezo en 75.
- a) O que custaba inicialmente 80 euros agora custa $0,75 \cdot 80 = 60$ €
- b) O que agora ten un custo de 15 euros antes custaba $\frac{15}{0,75} = 20$ €

⁴ O que se incluír posteriormente como unha pregunta entre o apartado a) e o apartado b).

Unha alternativa ao método desenvolvido, é a de realizar unha regra de tres. Esta foi tradicionalmente pouco valorada entre outras razóns polo seu propio éxito, xa que se converte nunha especie de fórmula máxica aplicada en moitos máis casos dos que aqueles para os que é correcta⁵. Por outra parte, tampouco pode aplicarse sen máis xa que cómpre ter unha relación entre os valores iniciais e os posteriores, para o exemplo anterior, 100 e 75 respectivamente que é precisamente por onde comezamos.

Inicialmente propoñemos un problema que deben resolver a partir das técnicas que coñecen de cursos anteriores sen aportar información a maiores, comprobando que a maioría ou ben non resolven o problema inverso ou o fan incorrectamente. Expomos o método incidindo especialmente na obtención do 75%. Preguntamos canto sería o custo final para o valor inicial de 100 con descontos do 10%, do 40%, e se en vez dun desconto se trata dun incremento dun 10%, cal é o custo agora do que antes valía 100?

A continuación pasamos a incluír outros problemas análogos, nuns casos con reducións e aumentos noutros, aumentando o número de apartados e variando algúns aspectos como vemos nos seguintes exemplos.

Exemplo 3.2 Unha empresa de carburantes, aplica unha baixada no prezo dos combustibles do 5%.

- a) Se encher un depósito custaba 100 euros, canto custará agora?
- b) Cal é o novo prezo por litro dun carburante que custaba 1,2 €/l?
- c) Se antes se pagaban x euros por unha determinada cantidade de combustible, canto se pagará agora?
- d) Outro combustible custa agora 1,15 euros o litro, qué custaba antes da baixada?

Exemplo 3.3 Un panadeiro decide incrementar o prezo de todo o pan que produce nun 15%.

- a) O pan que antes se mercaba con 100 euros, canto custa agora?
- b) A como vende a peza de pan que antes vendía a 2,10 € ?
- c) O que antes eran x euros, canto custa agora?
- d) Unha peza que agora vale 0,69 euros, que prezo tiña antes da suba?

Problemas de reparto proporcional

Os problemas de reparto proporcional combinan a propia dificultade da tarefa, coa dun enunciado que non sempre resulta acesíbel e de interese, aínda que podemos atopar variantes deste tipo de problemas en verdadeiras situacións cotiáns. Porén, na maioría dos textos consultados, os exercicios adoitan consistir en enunciados abstractos como o seguinte:

Exemplo 3.4 Repartir 45 en partes proporcionais a 8, 6 e 14.

Unha boa parte dos alumnos só se fixarán nesa expresión **partes proporcionais** que non comprenderán de inmediato. Farán un exercicio introspectivo buscando algún significado ou a

⁵ Nosoutros non pensamos que ese obstáculo, que por outra parte é inherente a moitas técnicas matemáticas e do coñecemento en xeral, sexa razón suficiente como para rexeitar o uso da regra de tres.

que parte da materia ou como o resolvía o profesor. Se esa introspección non ten éxito, como adoito ocorre, o problema queda en branco.

Aínda así, este problema é un exercicio que axudará neste proceso de transición da aritmética á álgebra se se é capaz de dotar de significado á operación dobre: suma de 8, 6 e 14 e división de 45 en 24 partes.

Para iso procuramos buscar contextos nos que poidan aplicar estratexias matemáticas coñecidas e lles resulte relativamente natural aplicar esas estratexias.

Exemplo 3.5 No bar do instituto, dan 20 chicles por 50 céntimos, cantidade que xuntan tres amigos. Un deles pon 30 céntimos e os outros dous 10 céntimos cada un. Cantos chicles lle corresponde a cada un, se os reparten en función do que puxeron?

Exemplo 3.6 Para unha festa familiar encárganse 120 racións de polbo. Como hai xente que falla na celebración, xúntanse soamente 10 nunha mesa, 25 noutra e 40 noutra. Determinar o número de racións que se deben repartir en cada mesa.

Obsérvese que no problema 3.5 o dato da cantidade total aportada xa aparecía como un dato, debendo calcularse o seu equivalente, o número de asistentes, no exemplo 3.6. A partires dese valor, a obtención do número de racións de polbo que corresponden por persoa é unha parte esencial da solución do problema.

Damos agora outro problema que tamén se resolve a partires do reparto proporcional, resultando próximo ao propio contexto escolar.

Exemplo 3.7 Un profesor prepara un exame con 4 preguntas: a primeira de 3 puntos, de 2,5 puntos as dúas seguintes e de 2 puntos a cuarta pregunta. Por un problema imprevisto, os alumnos non puideron facer a última.

- a) Un alumno que recibe 2 puntos na primeira e 1 punto nas dúas seguintes, que puntuación debe recibir por ese exame?
- b) E outro que recibe 1,5 puntos en cada unha de esas tres preguntas, que puntuación debería ter no exame?

Como xeito de motivar ao alumnado para este problema, avisamos de que ao primeiro que o resolva sóbeselle a nota para o seguinte exame elevando a 11 puntos a máxima puntuación posíbel repartindo proporcionalmente a nota entre as distintas preguntas.

4. RESUMO

Neste artigo, estudiamos algúns problemas que aparecen no cálculo aritmético e alxébrico. Observamos diferenzas entre as técnicas aritméticas máis sinxelas e outras máis elaboradas que, sendo as dúas válidas para resolver moitos problemas, aquelas próximas á álgebra, son máis xerais e permiten resolver unha gama de problemas máis ampla. Mostramos algún exemplo de situacións da vida cotiá onde a diferenza entre un coñecemento aritmético inxenuo e outro máis rico e preto da álgebra supón resolver correcta ou incorrectamente unha tarefa real. Mostramos actividades de aula para 3ª da ESO que resultan significativas de como intentamos conseguir, mediante determinados recursos didácticos, que os nosos alumnos acaden ese estadio de coñecemento.

Sería interesante realizar estudios extensivos da situación actual con respecto a épocas pretéritas encol de se os erros de cálculo medran ou mingúan en relación cos de translación dun enunciado a unha expresión alxébrica. É evidente que as necesidades pretéritas dunha parte da poboación de realizar con rapidez e exactitude cálculos aritméticos téñense reducido. Este debería reflectirse nunha menor motivación da poboación escolarizada para ese tipo de cálculo. Non sabemos en que medida iso ten alterado a destreza do cálculo alxébrico nas novas xeracións de estudantes xa que os métodos alxébricos e aritméticos non sempre van á par.

BIBLIOGRAFÍA

1. [Barnard 02]. *Barnard, T.* Hurdles and strategies in the teaching of algebra I, II, III en *Mathematics in School* 2002(1), pp 10-13, 2002(IV),pp41-44, 2002(V), pp. 12-15.
2. [Cachafeiro 98] *Cachafeiro Chamosa, L.C.*, Papel dos métodos alxebraicos no ensino secundario. ¿Esquecen os alumnos a álgebra? En *Boletín das Ciencias* nº 35, pp73-79, 1998.
3. [Fernández 97] Fernández García, Francisco. *Evaluación de competencias en Álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada 1997.
4. [Socas, Palarea97] Socas M.M., Palarea M.M. Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. En *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Nº 14, pp7-24, 1997.