CUADERNOS DE TRABAJO
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ESTADÍSTICA

Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: Experimentos motivadores

Almudena Pajares García
Venancio Tomeo Perucha

Cuaderno de Trabajo número 03/2009

UCM
UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Los Cuadernos de Trabajo de la Escuela Universitaria de Estadística constituyen una apuesta por la publicación de los trabajos en curso y de los informes técnicos desarrollados desde la Escuela para servir de apoyo tanto a la docencia como a la investigación.

Los Cuadernos de Trabajo se pueden descargar de la página de la Biblioteca de la Escuela www.ucm.es/BUCM/est/ y en la sección de investigación de la página del centro www.ucm.es/centros/webs/eest/

CONTACTO: Biblioteca de la E. U. de Estadística
Universidad Complutense de Madrid
Av. Puerta de Hierro, S/N
28040 Madrid
Tlf. 913944035
buc_est@buc.ucm.es

Los trabajos publicados en la serie Cuadernos de Trabajo de la Escuela Universitaria de Estadística no están sujetos a ninguna evaluación previa. Las opiniones y análisis que aparecen publicados en los Cuadernos de Trabajo son responsabilidad exclusiva de sus autores.

ISSN: 1989-0567

Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: Experimentos motivadores

Almudena Pajares Garcia
IMS Health, *almudena.pajares@googlemail.com*

Venancio Tomeo Perucha
E.U. de Estadística, Univ. Complutense
tomeo@estad.ucm.es

9 de octubre de 2009

Resumen

En el ámbito de la educación han aparecido en los últimos tiempos numerosos trabajos destacando la importancia de la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad dentro de la etapa de Educación Secundaria. En la práctica sabemos que ya sea por el orden de los temas establecido en los libros de texto (Probabilidad y Estadística suelen estar al final), por falta de tiempo o por otras razones que analizaremos más adelante, éstas suelen ser las grandes olvidadas por los profesores de matemáticas y los alumnos.

En este trabajo se intenta poner de relieve la importancia que tienen dentro del curriculum, ofreciendo distintas motivaciones para profesores y alumnos y sobre todo un método y unas actividades que pretenden desarrollar el interés por los fenómenos aleatorios y la Estadística a través de la experimentación directa con materiales creados para este fin.

Palabras clave: *Estadística, probabilidad, experimentos, motivación.*

1. Introducción

La Estadística tiene en la actualidad creciente importancia, fundamentalmente por el uso que de ella hacen otras materias y la presencia en multitud de ámbitos de la vida cotidiana en la sociedad actual. La constante presencia de nociones estadísticas en los medios de comunicación es un claro ejemplo del desarrollo de esta rama de las matemáticas y pone de manifiesto la importancia que tiene su conocimiento para poder entender la realidad que nos rodea. Por ello se debe formar a los alumnos para el análisis crítico de las informaciones estadísticas, previniéndoles de las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que con frecuencia contienen.

El alumno posee ya conocimientos de los fenómenos aleatorios sencillos y de la experimentación y tratamiento estadístico por medio de tablas y gráficos, pero estos conocimientos, estudiados en segundo curso, son tan escasos que conviene comenzar desde la base. Es incluso conveniente decírselo a ellos: "No recordáis nada de la Estadística del curso pasado, pero no os preocupéis porque lo vamos a estudiar todo". Ésto generalmente anima a los alumnos a poner más empeño en el estudio porque supone tapar una laguna anterior, para quien la tenga.

La creciente importancia de los métodos estadísticos en muchos campos científicos (Economía, Sociología, Medicina, Geografía económica, Problemas del desarrollo socio-económico, Ciencias de la tierra y el medio ambiente, Sociología, Educación, etc.), incluso a nivel de divulgación, hace que un conocimiento al menos elemental de los métodos estadísticos forme ya parte, en todos los países desarrollados, de los contenidos que se consideran integrantes de una "cultural matemática general". Ejemplos como el análisis de resultados de sondeos electorales, cuestiones de números índices (coste de la vida, producción industrial, etc.), datos de evolución cronológica de determinadas variables, etc., son ya de frecuente aparición en periódicos y revistas no especializadas.

2. Motivaciones para el estudio

Como sabemos es importante a la hora de introducir la materia dedicar algún tiempo a investigar aspectos relacionados con el tema de estudio, que puedan resultar motivadores tanto para nosotros mismos como para los alumnos, de manera que consigamos despertar el interés y la predisposición a la exploración en la nueva materia. En este sentido para el bloque de Estadística podemos basarnos en los siguientes aspectos:

1^o. El conocimiento que los alumnos tienen, a través de sus familias o de los medios de comunicación, de las elecciones generales y municipales que tienen lugar en España. Así como de las elecciones para delegados de curso, representando a sus compañeros. La clave del sistema electoral es la fórmula electoral que transforma los votos de los ciudadanos en escaños para los partidos políticos. Un asunto humano como la política depende de una fórmula matemática que convierte votos en escaños y tiene a menudo efectos políticos decisivos. En los textos de Espinel [6] y Pola [7] se pueden encontrar actividades y sugerencias curriculares para trabajar los sistemas electorales con alumnos de secundaria.

2^o. Recientemente como los gastos de Sanidad son enormes, se utilizan herramientas estadísticas para estudiar el motivo de tan elevado gasto y se ha comprobado que gran parte del gasto corresponde a compras individuales de medicamentos para automedicación y rara vez por prescripción médica. Conocer cómo eligen los consumidores los medicamentos y por qué lo hacen es el primer paso, para hacer que estos recursos se gasten de forma adecuada, sin riesgos y con la mayor productividad posible.

3^o. Actualmente se usa una gran variedad de prácticas estadísticas para introducir nuevos productos en el mercado, para decidir la emisión o no de un programa de televisión, para el lanzamiento de nuevos grupos musicales.

4^o. Es interesante tener conocimientos de estadísticas y gráficos para poder entender lo que pasa a tu alrededor, tanto si aspiras llegar a ser presidente, quieras ser dueño de una gran compañía, o pertenecer al mundo del espectáculo, ya que la estadística, entre otras cosas es una herramienta muy potente para recoger, organizar, resumir y analizar la información. A esta rama de la estadística se le denomina Estadística descriptiva y será la que veamos en este nivel de Secundaria.

5^o. Otra rama de la Estadística es la llamada Estadística inferencial que nos permitirá hacer predicciones a partir de los correspondientes datos obtenidos, pero para ello necesitamos conocer también el Cálculo de Probabilidades, que también se estudia en Secundaria. ¿Podremos predecir el futuro mezclando estas dos disciplinas científicas? En cierta forma sí; ya lo veremos.

Para la parte de Probabilidad podemos desarrollar una interesante introducción, basada en argumentos de actualidad, a partir de los siguientes aspectos:

1^o. Los bancos utilizan sofisticados métodos estadísticos para calcular la probabilidad de que un cliente realice el pago de su crédito a tiempo, en caso de que se le conceda. Si por el contrario existe probabilidad de que el cliente vaya a incumplir algún pago, el banco le denegará el crédito para evitar el aumento de morosos.

2^o. También en el mundo del deporte se usan sistemas estadísticos que sirven al entrenador para tomar decisiones sobre las tácticas que convienen en un determinado momento de juego. Por ejemplo un delantero de fútbol lanza su penalty a la derecha en el 80 % de los casos; si el portero lo sabe y se lanza a su izquierda tiene muchas más posibilidades de pararlo.

3^o. Supongamos que se ha previsto rodar unos exteriores de una película, para lo que se necesita saber la cantidad de lluvia que va a caer en un próximo periodo de tiempo, antes de decidir si se podrán o no llevar a cabo los ensayos y preparar el equipo que se necesitará. Los técnicos responsables podrán informarse en el servicio meteorológico en relación con la presión barométrica, la temperatura, velocidad del viento y otros datos meteorológicos, sin embargo, no hay una ecuación que con todos esos datos le permita calcular de forma precisa los milímetros de lluvia que van a caer durante el periodo de tiempo que le interesa.

4^o. De la misma forma, ningún operador puede calcular cuanto va a subir la Bolsa, ni siquiera si va a subir o bajar, aún cuando tenga a su alcance todas las variables económicas disponibles. Este tipo de fenómenos no admiten un modelo determinista, sino un modelo probabilístico, que como resultado nos dice la probabilidad de que llueva una cierta cantidad, o la probabilidad de que la Bolsa suba un cierto porcentaje. El resultado no es un valor determinado, sino la probabilidad de un valor.

Otra razón para motivar a los alumnos es que estos temas son necesarios para otros estudios. En la mayor parte de las carreras actuales y en las más importantes ramas de la Formación Profesional se utilizan hoy técnicas estadísticas, por lo que la única forma de progresar en conocimientos sin quedarse anclado en el pasado es conocer estas técnicas.

Conviene también dar algunas referencias históricas para motivar el estudio de la Estadística, destacamos principalmente los siguientes *cuatro puntos* en los que, a gusto del profesor, se podrá profundizar según el tiempo disponible o las características de los alumnos:

- Hay datos de censos en la Biblia, en Egipto y en la antigua China.
- Los romanos hicieron más de 60 censos para evaluar su potencial guerrero, fijar el derecho a voto y cobrar los impuestos.
- La palabra Estadística fue introducida por Achenwal en 1748, con el significado de *Ciencia del Estado.*
- La Estadística moderna se debe principalmente a Francis Galton, con la teoría de la correlación, y a Karl Pearson que dirigió la revista *Biometrika.*

Para una mayor profundización en la introducción histórica de la Estadística puede consultarse, entre otros, el libro [8].

De la misma forma para la Probabilidad podemos destacar los siguientes *cuatro puntos:*

- Existían juegos de azar en la antigüedad.
- El caballero De Méré consulta a Pascal una duda sobre un juegos de dados y éste inicia una correspondencia con Fermat.
- El libro *Théorie analitique des probabilités* de Laplace fue el primer tratado serio de Probabilidad.
- En 1933 el matemático ruso Kolmogorov fundamentó el Cálculo de Probabilidades en forma axiomática.

Una introducción histórica del Cálculo de Probabilidades puede consultarse en [9], entre otros libros.

3. Reflexiones sobre el curriculum

Parece existir una relación clara entre el grado de desarrollo de un país y la capacidad de su sistema estadístico de producir estudios estadísticos claros y fiables, ya que éstos se usan para la toma de importantes decisiones en distintos campos como el de la política, la economía, la sanidad, etc. De ahí que la Estadística se haya incorporado recientemente en los curriculos de primaria y secundaria y en el de diferentes especialidades universitarias, en la mayoría de los paises desarrollados.

En clase, en la práctica, se dedica poco tiempo tanto a los temas de Estadística como a los de Probabilidad. Son diversos factores los que provocan esta situación y enumeraremos algunos de ellos:

- La dificultad de enseñar un tema en constante cambio y crecimiento. Cada vez más, parece que la Estadística se aleja de la Matemática pura, convirtiéndose en una ciencia de los datos, con aparición de nuevas técnicas específicas para su tratamiento, por lo que necesita de una contínua puesta al día en múltiples aspectos, como por ejemplo, en el manejo de los distintos recursos informáticos que van apareciendo. Dentro de un ámbito formativo básico de la Estadística, que es el que nos ocupa, tendremos que estar actualizados sobre todos estos avances si queremos transmitir a los alumnos la inquietud por esta ciencia de una forma efectiva, esto incluye como dificultad añadida, el conocimiento de técnicas informáticas sencillas y el manejo fluido de al menos algún programa de hojas de cálculo.

- Por otro lado debido a su relativa novedad como materia a impartir desde edades tempranas, es decir ya desde primaria, son bastante desconocidas aún las dificultades que los alumnos encuentran en los conceptos importantes.

- También cabe destacar en este aspecto que la naturaleza interdisciplinar de la materia hace que a veces sea necesario que profesores de otras asignaturas tengan que enseñar conceptos estadísticos, por lo que se pueden ocasionar conflictos cuando definiciones o propiedades no coincidan con las de la clase de matemáticas.

Distintos autores provenientes de la Sicología y del campo de la propia Educación estadística se han preocupado sobre las dificultades en su aprendizaje. Digamos que la enseñanza de la estadística está ligada a la enseñanza de la probabilidad en cuanto que se manejan conceptos que se alejan de las situaciones deterministas estudiadas habitualmente en matemáticas. Se necesita un tipo de razonaminto distinto para comprender los este tipo de fenómenos relativos a procesos aleatorios o estocásticos.

Como veremos más adelante, existen varias investigaciones que tratan de dilucidar la edad adecuada para introducir los conceptos probabilísticos propios de situaciones no deterministas. Actualmente ya en educación primaria hay un acercamiento a las cuestiones que trata la probabilidad. Sería conveniente, por lo tanto, antes de empezar el tema, explorar los conocimientos previos de los alumnos.

Supuesto que los alumnos sean capaces de diferenciar los fenómenos aleatorios de los deterministas, el siguiente concepto importante que influye en la comprensión de la probabilidad y la estadística es el concepto de frecuencia relativa. Distintos estudios nos llevan a la creencia de que en la adolescencia (según Piaget en lo que llama el periodo de las operaciones formales) es cuando se hacen progresos en lo que se refiere a la intuición de este concepto, ya que además se necesita el razonamiento proporcional para su comprensión.

Creemos por ello que en este curso conviene poner especial interés en la compresión de la noción de frecuencia relativa, mediante la elección adecuada de ejemplos y ejercicios para los alumnos, según sus capacidades en el razonamiento estocástico. Además se hará hincapié en las distintas medidas de dispersión y su uso conjunto con las de centralización, para extraer información adecuada, así como la interpretación correcta de los distintos gráficos estadísticos para representar los datos.

La probabilidad por su parte, además de ser una disciplina íntimamente ligada a la estadística ya que justifica su desarrollo formal y ha aumentado el alcance de sus aplicaciones, tiene la enorme cualidad, en sí misma, de ser capaz de representar adecuadamente la realidad de muchos procesos sociales y naturales, su conocimiento es fundamental para la formación de un individuo capaz de comprender el mundo en que vivimos.

Son destacadas las investigaciones sobre el razonamiento probabilístico en los niños llevadas a cabo por Piaget e Inhelder (1951) por un lado y Fischbein en (1975) por otro. Sus conclusiones no coinciden en varios puntos, por ejemplo, para Piaget el niño no comprende la naturaleza aleatoria antes de los 7 años y sin embargo, según Fischbein, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista aparece antes de esta edad. Fischbein además analiza el efecto de la instrucción para la mejora de estas *intuiciones primarias* sobre el azar y la probabilidad. Él hace una distinción entre intuiciones primarias y secundarias, siendo éstas últimas las que se forman por relación entre las primarias y las que aparecen como consecuencia de la educación.

En cualquier caso a partir de distintas investigaciones como las de Fischbein y Gazit (1984), Fischbein y colaboradores (1991), Kahneman y colaboradores (1982) y Shaughnessy (1992), asistimos a una reforma de la enseñanza obligatoria que concede un mayor peso al estudio de la probabilidad por parte de los niños.

Los nuevos diseños curriculares enfatizan la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos aleatorios y de cambiar también la metodología de enseñanza para hacerla más activa y exploratoria, pasando de la enseñanza de la probabilidad de un modo clásico basada en la combinaroria a un enfoque frecuencial de la probabilidad capaz de obviar la necesidad de razonamiento combinatorio, haciendo uso de la experimentación y simulación para la resolución de problemas probabilísticos.

En los cursos anteriores a tercero de Secundaria, sólo se abordan nociones básicas de la Probabilidad, haciendo conjeturas sobre el comportamiento aleatorio y luego comprobaciones a través de experiencias. Es en tercero cuando se produce un acercamiento a la teoría de la Probabilidad de forma más matemática y haciendo uso del vocabulario específico de esta materia, además se introduce la ley de Laplace para el cálculo de probabilidades.

La Probabilidad se ha introducido tradicionalmente después de la combinatoria. Es cierto que dominando el Análisis combinatorio el estudio de los casos posibles y favorables resulta a menudo inmediato, pero los conceptos de la Combinatoria, si bien son sencillos de entender, son tan semejantes, hasta en sus nombres, y pueden llegar a fórmulas tan complicadas que fácilmente se olvidan. Por ello es conveniente introducir la Probabilidad basándose en los conceptos de frecuencia y sus diferentes tipos.

En segundo de Secundaria se deberían haber visto los primeros contenidos estadísticos, si bien como hemos dicho anteriormente conviene investigar los conocimientos previos de nuestra clase y seguramente habrá que repasar desde el principio todos los conceptos. En segundo no aparecen contenidos de Probabilidad, por lo que los alumnos habrán olvidado casi todo y habrá que comenzar desde el principio aunque algunos conceptos puede que ya les sean familiares.

4. La práctica diaria

Ya que todos los que actualmente nos dedicamos a la enseñanza en Matemáticas, hemos recibido una formación al modo clásico de la Probabilidad y la Estadística, tendemos a utilizar este método también con nuestros alumnos. Nos sería más fácil enseñar la Probabilidad, por ejemplo, como un conjunto de teoremas y leyes a partir de unos axiomas y si bien ya en los libros de texto que utilizamos en clase no se usa este tipo de metodología, nos es dificil cambiar de enfoque y solemos explicar muy pronto el modelo matemático y dar precipitadamente herramientas matemáticas para que el alumno calcule mecánicamente probabilidades.

La aleatoriedad es un modelo matemático que se adapta a ciertos fenómenos de la realidad que son difícilmente explicables a partir de un modelo de tipo determinista, y de igual modo la resolución de problemas estadísticos se basa en gran parte en la construcción y perfeccionamiento de modelos a través de la comparación con la realidad. Nos parece por lo tanto muy importante poner el suficiente énfasis, al explicar Estadística y Probabilidad, en la distinción entre realidad y modelo, y en el modo de pasar de uno a otro.

En los libros de texto se introducen los diferentes conceptos de este bloque, casi siempre a través de ejemplos. A partir de estos ejemplos que pueden ser más o menos acertados, se introducen definiciones y se dan fórmulas que se aplican para resolver las cuestiones que han aparecido. El paso del ejemplo, a la teoría matemática se hace demasiado rápido y los alumnos "no se creen" lo que les estamos enseñando. Esta reacción por parte de alguien que se acerca por primera vez a la Teoría de la Probabilidad y a la Estadística es bastante habitual. Ocultar ciertos pasos existentes en el camino que va del ejemplo pseudo-real a su modelización matemática, oscurece las explicaciones y crea lagunas en el conocimento construido, véanse [1] y [5].

En este sentido, la Comisión Inter-IREM para la enseñanza de la Estadística y Probabilidad organizó hace unos años un proceso de reflexión sobre el trabajo de modelización en la enseñanza de las probabilidades, de ella surgieron distintas sugerencias entre las que destacamos este esquema propuesto por Dantal (1997), véase [4], donde señala los siguientes pasos para la enseñanza de la probabilidad en secundaria, con el enfoque recomendado en los nuevos currículos franceses:

1. Observación de la realidad
2. Descripción simplificada de la realidad
3. Construcción de un modelo
4. Trabajo matemático con el modelo
5. Interpretación de resultados en la realidad

Los pasos tres y cuatro son los que nos cuesta menos desarrollar pues están asentados en la teoría matemática y están más definidos y por lo tanto son más fáciles de explicar, sin embargo creemos que los cinco puntos son importantes para el aprendizaje.

En el primero la dificultad radica en distinguir de entre los fenómenos en los que interviene el azar, aquellos que llamamos aleatorios y que pueden ser modelizados matemáticamente, de otros que no pueden ser modelizados aunque también hayan surgido como consecuencia del azar. Es decir encontrar las características de nuestros ejemplos de estudio que hacen posible que los tratemos a través de un modelo matemático aleatorio.

En el segundo punto se trata de hacer ver a los alumnos que vamos a tener que hacer una simplificación de la realidad para poder pasar de la situación real al modelo, por lo tanto convendría señalar qué aspectos de la realidad estamos descartando y cuáles estamos considerando para poder modelizar la situación real.

En la construcción del modelo tendremos otra vez que tomar decisiones y establecer convenios para poder aplicar la teoría matemática, y finalmente una parte muy importante del proceso será la comparación con la realidad y decidir si el modelo nos proporciona una buena descripción del fenómeno.

La Estadística y la Probabilidad se caracterizan por la dificultad en la definición y en la interpretación de muchos de sus conceptos base. La distinción entre el modelo matemático libre de contradicciones y la compleja realidad, así como la aceptación de que no existe teoría matemática que determine de forma sistemática el modelo que debemos utilizar, puede ayudarnos a hacer entender a nuestros alumnos más sobre esta materia y a eliminar las lagunas que surgen como hemos dicho en muchos casos por la omisión de este tipo de consideraciones, véanse [2] y [5].

5. Actividades para la clase

Ahora vamos a ver algunas líneas de trabajo con actividades y ejemplos que el profesor puede utilizar para este bloque. Para comenzar a introducir el vocabulario estadístico y repasar conceptos que pueden haber visto en cursos anteriores proponemos unos ejemplos que creemos que pueden llamar la atención por su originalidad o por su cercanía a nuestros alumnos.

Supongamos que queremos hacer un estudio de una cierta característica de las arañas, en ese caso en Estadística llamaríamos población a todo el conjunto de las arañas, pero parece que no nos va a ser posible analizar todas las arañas del mundo, ni si quiera todas las arañas de España, así que se pueden utilizar métodos estadísticos para extraer la información que necesitamos a través de una muestra representativa de las arañas. ¿Qué es una muestra representativa?, pues una cantidad de arañas suficiente y elegidas de tal forma, que los resultados que encontremos para esa muestra podamos generalizarlos a toda la población.

O supongamos que queremos hacer un estudio sobre el grupo musical preferido entre las personas de una determinada edad, por ejemplo entre 13 y 18 años en una comunidad autónoma, entonces ésta será nuestra población de estudio, pero no será necesario que preguntemos a todos los individuos de la población sino que lo que se hace en Estadística es elegir de forma aleatoria un conjunto de esa población al que llamamos muestra.

Observaremos la reacción de los alumnos ante la utilización de este vocabulario y sobre todo del concepto de aleatoriedad. En la parte de Cálculo de Probabilidades insistiremos más en este tema y nos aseguraremos que es comprendido por los estudiantes.

Después de utilizar varios ejemplos de este tipo, introduciremos el concepto de variable estadística explicando cuál es la variable estadística en cada uno de los ejemplos dados, así como su distinción en cuantitativa (discreta y continua) y cualitativa (es decir, no numérica).

Posteriormente repasaremos el proceso que se sigue en estadística, para ello y ya que en cursos anteriores se han hecho recuentos y tablas, propondremos una actividad en la que se seguirá todo el proceso en grupo, primero en clase cada alumno diseñará una posible actividad, describiendo cada parte del proceso estadístico, es decir se tendrán que explicar los siguientes puntos:

1. ¿Qué queremos estudiar?
2. Selección de las variables que se van a analizar.
3. Proceso de recolección de datos.
4. Como se van a organizar los datos.
5. Tablas y gráficos.

El diseño de la actividad servirá para insistir en las nociones iniciales de población, muestra, variables. Se elige un proyecto por votación de entre los propuestos y todos los alumnos tendrán que recopilar información para en las siguientes clases realizar una tabla de frecuencia con los datos. Ejemplos para realizar tablas de frecuencias podemos encontrar en [8].

Deberemos insistir en el concepto de frecuencia relativa, en su cálculo y en su significado. Además, deberíamos hacer reflexionar al alumno sobre su utilidad cuando se quieren comparar distribuciones de frecuencias basadas en diferente número de observaciones, así quedará manifiesta su utilidad y su necesidad, más allá de una definición puramente matemática y estaremos trabajando con ello además el concepto de proporción, podemos proponer el siguiente ejercicio:

Imagina que hemos realizado una encuesta sobre el tipo de película que prefieren ver los alumnos y alumnas que cursan Secundaria Obligatoria en tu centro. Los resultados obtenidos aparecen recogidos en la tabla:

Tipo de película	1^o	ESO	2^o	ESO	3^o	ESO	4^o	ESO
	Chico	*Chica*	*Chico*	*Chica*	*Chico*	*Chica*	*Chico*	*Chica*
Acción	5	8	13	15	18	10	15	6
Terror	13	7	15	10	12	17	12	15
Cienca ficción	7	13	8		5	7	8	9
Romántica	8	14	7	12	3	13	5	16
Drama	2	3	5	4	5	3	5	8
Otros	10	5	6	8	2	7	5	4

¿Crees que es lo mismo que haya en tu clase cinco chicas a las que les guste el cine de acción a que las haya en todo el centro? Por tanto, necesitamos realizar el cálculo en proporción al total para valorar mejor los resultados. Así aparecen las frecuencias relativas. Construimos la tabla.

Este bloque de Estadística y Probabilidad se presta específicamente a otras actividades algo más lúdicas, como la recogida de datos, la discusión en equipo del plan a efecturar, el planteamiento y resolución de algún problema interesante y la presentación de resultados y conclusiones ante los compañeros por parte de equipos de alumnos. Algunas de éstas se explican a continuación para que el profesor las haga ante la clase en forma de presentación.

5.1. Los alumnos miden a los alumnos

El primer día de clase correspondiente a este bloque el profesor hace en la pizarra una tabla y los alumnos salen y escriben sus datos o los dicen en alto y los escribe en profesor. En los siguientes días se van a ir estudiando estadísticamente estos datos.

Los datos pueden ser, por ejemplo, iniciales del alumno, sexo, edad, peso, altura, número de calzado, hermanos que tiene, personas que conviven en su casa.

5.2. ¿Cuánto mide una cuerda?

Naturalmente los alumnos dirán que las hay grandes y pequeñas, pero se trata de hallar la media de las longitudes de las cuerdas. Para ello el profesor dice que el próximo día todos traigan de su casa una cuerda, la que quieran, y en clase se miden las cuerdas y se anotan los resultados. Para empezar puede calcularse la media y la mediana.

Si un alumno tiene un enorme rollo de cuerda, que el profesor debe tener previsto, la media aritmética no va a ser representatativa y la mediana será más apropiada.

5.3. ¿Cuánto mide la pizarra?

El profesor hace una tabla y los alumnos escriben en un papel lo que les parece que mide la pizarra, por ejemplo en diagonal. Se calcula la media y finalmente se mide la pizarra con una cinta métrica. Si los alumnos han tenido buen ojo la diferencia debe ser pequeña.

5.4. ¿Cuántas lentejas tiene un kilo?

Se trata de calcular las lentejas que tiene un paquete de un kilo, sin contarlas todas. Se forman equipos y a cada uno se le da un paquete, todos de la misma marca y variedad.

A unos se les ocurrirá hacer montones aproximadamente iguales, por ejemplo veinte, y contar uno de ellos. El resultado será óptimo si se comienza dividiendo el paquete en dos montones aproximadamente iguales, a continuación uno de ellos se divide en otros dos, uno de ellos en otros dos, hasta que el montón es fácil de contar. Se está usando el *método de la bipartición*: hacer que dos montones sean aproximadamente iguales es fácil porque se van comparando y del que parezca más grande se pasan lentejas al otro.

A otros se les ocurrirá contar las que caben en un pequeño vasito y ver cuantos vasitos contiene el paquete. Se está utilizando el *método de la unidad.* De este modo medían nuestros abuelos los cereales. Al final el número total de lentejas es igual al número de unidades por el número de lentejas en una unidad más un resto que no llegó a la unidad.

Y seguro que a otros, y en caso contrario lo explicará el profesor, se les ocurrirá el *método de la proporción,* que consiste en coger un número de lentejas, por ejemplo 40, hacerles una marca a bolígrafo y volverlas a mezclar bien con las otras, a continuación sacan al azar otro pequeño número, por ejemplo 50, y hallan la proporción:

Si el número total de lentejas es N y hemos marcado 40 de ellas y luego salen x marcadas de entre las 50 elegidas al azar, la razón de marcadas en el total será

$$\frac{40}{N}$$

y en la muestra elegida será

$$\frac{x}{50}.$$

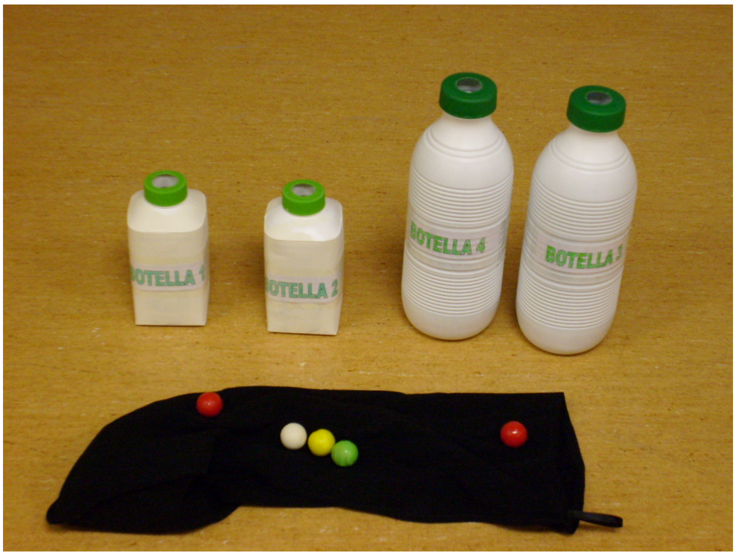
Si las hemos mezclado bien y la muestra es representativa, las razones deben ser aproximadamente iguales, por lo que se tiene

$$\frac{40}{N} \simeq \frac{x}{50} \qquad \Rightarrow \qquad N \simeq \frac{40 \cdot 50}{x}.$$

Éste es el método que se utiliza para contar los peces que hay en un lago.

5.5. Hallar la composición de una bolsa

El profesor entrega a cada equipo una bolsa de tela opaca con 10 bolas de colores, pongamos que de tres colores diferentes y en distinta cantidad como cinco rojas, tres azules y dos blancas. Los alumnos deben sacar una bola, anotar el color y volverla a introducir, y esta extracción puede repetirse las veces que sean necesarias hasta conocer la composición.



Bolsas de tela y botellas muestrales

Estas bolsas son equivalentes a las *botellas muestrales,* que son simples botellas opacas, como algunas botellas de leche, que tienen en su interior las bolas y que poseen un cierre semiesférico a modo de tapón que permite ver sólo una de las bolas. Estas botellas tienen la ventaja de que los alumnos no pueden hacer trampa mirando el interior de la bolsa.

El trabajo consiste en efectuar, por ejemplo, cien extracciones y hallar las frecuencias. Si los alumnos hacen recuentos y anotaciones cada diez extracciones, por ejemplo cambiando las personas del equipo que extraen, que anotan y que hacen los cálculos, pueden ver cómo las frecuencias relativas de cada color van tendiendo a un valor: la probabilidad del color.

5.6. El aparato de Galton-Pearson

El profesor debe llevar un aparato de Galton-Pearson o *demostrador geométrico de la probabilidad,* bien sea comprado o construido por el profesor o los propios alumnos si poseen taller. El aparato consta de un tablero rectangular de madera y unas filas de clavos alternados, de cinco a siete filas son suficientes. Un frontal de plástico o metacrilato permite ver la forma en que caen las fichas. Es preferible que pueda abrirse por debajo para la rápida extracción de las fichas, como se observa en la siguiente fotografía.

Dos aparatos de Galton, uno para bolas y otro para monedas

El profesor comienza preguntando si todas las casillas del aparato recibirán bolas o fichas de forma aproximadamente igual y, tras un turno de opiniones, se llegará a alguna conclusión. Debe aprovecharse también este experimento para relacionarlo con el binomio de Newton: el número esperado de fichas en cada casilla sigue la distribución del binomio si echamos una gran cantidad de ellas.

5.7. Trabajando con matrículas de coches

El profesor dirá a sus alumnos que para el día siguiente deben llevar anotadas en un papel las matrículas de diez coches que observen de forma aleatoria, por ejemplo los diez primeros que vean al salir de casa. Al día siguiente el profesor va haciendo que los alumnos salgan a la pizarra a escribir los números, de cuatro cifras, de las matrículas que anotaron. Como las matrículas se reparten por orden en todo el país, estos números serán aleatorios, y el objetivo del experimento consiste en hallar la frecuencia relativa de cada una de las cifras. Especulando sobre qué números tendrán mayores frecuencias se llega a la conclusión de que todos tendrán frecuencias próximas a 1/10.

El profesor puede haberse puesto de acuerdo con un alumno para que éste escriba como sus matrículas 4441, 4442, ..., 4449, 4450. Algunos alumnos pueden decir que no es cierto, pero el alumno dirá que se fue a la carretera general para que los números fuesen lo más aleatorios posible y observó coches nuevos, todos de la misma marca, con esas matrículas, que serían sin duda de una flota de coches de alquiler. El experimento acaba cuando se hacen las tablas de recuento y frecuencias.

Es posible que algún alumno suscite la idea de las rachas y dé al profesor pié para hablar sobre ellas y contar alguna paradoja, como la de dos personas que, discutiendo sobre la imposibilidad de que las cien primeras personas que pasasen por delante de ellos fuesen del mismo sexo, ya que esta probabilidad es $1/2^{100}$, prácticamente nula, uno de elllos está dispuesto a perder la vida si tal cosa ocurriese, cuando suena una trompeta y comienza una parada militar y todos los soldados son hombres.

5.8. Experimentando con monedas

El profesor propondrá a los alumnos el experimento que consiste en lanzar dos monedas 50 veces, anotando el número de caras obtenidas. Antes de efectuar los lanzamientos se escriben como casos posibles que pueden obtenerse: "salir dos caras", "salir una cara" y "no salir cara". Se pregunta cuál creen ellos que será la probabilidad de cada suceso. Unos dirán que 1/3 para cada uno de los tres sucesos y otros dirán que obtener una sola cara tiene el doble de probabilidad que obtener dos caras u obtener dos cruces.

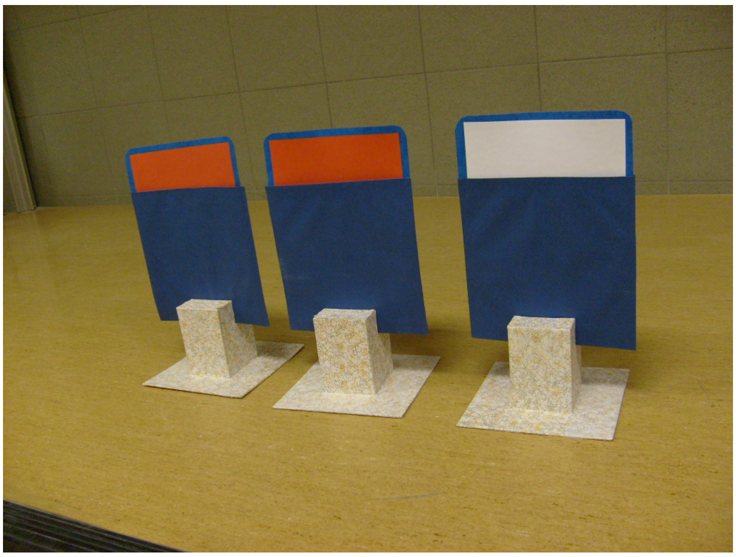
El experimento debe hacerse con un cubilete de dados, donde se introducen las monedas, se agitan y se lanzan sobre la mesa. Puede hacerse con monedas idénticas, con monedas diferentes y también lanzando una única moneda dos veces. Sólo cuando se ha realizado el experimento se convencerán los alumnos que es lo mismo que las monedas sean distinguibles o indistinguibles, y que es lo mismo lanzar las monedas a la vez que lanzar una tras otra, o una misma moneda dos veces, para los sucesos que estamos considerando.

Este experimento está relacionado con la disputa entre dos matemáticos coetáneos, Roberval y Fermat, acerca del juego consistente en lanzar dos veces una moneda de forma que un jugador ganaba si obtenía al menos cara en una de las tiradas. Roberval decía que la probabilidad de ganar es 2/3 porque si saca cara en la primera tirada ya no necesita tirar la segunda, mientras que Fermat decía que era 3/4 y llevaba razón. Puede verse en el libro [3].

5.9. El problema de las tres tarjetas

El profesor lleva a clase tres tarjetas de cartulina del tamaño de tarjetas postales y tres sobres indistinguibles para meterlas. Una tarjeta tiene dos caras rojas, otra las dos blancas y la tercera tiene una cara roja y otra blanca. Las muestra a los alumnos, las mete en los sobres, los mezcla y los sitúa en la mesa. A continuación un alumno elige uno de los sobres, el profesor saca con cuidado la tarjeta, enseña una sola de las caras y pide al mismo alumno que trate de acertar el color de la otra cara.

Una vez explicado el experimento, el profesor debe preguntar cuál es la probabilidad de acertar. Los alumnos opinarán y parece que, como hay igual número de caras de cada color, decidirán que la probabilidad es 1/2. El profesor puede ahora razonar erróneamente diciendo que si la tarjeta que vemos es roja, no se puede tratar de la tarjeta blanca-blanca, luego puede ser la RR o la RB, por lo que la otra cara tiene dos posibilidades. Es muy posible que algún alumno diga que esas posibilidades no son iguales ya que el rojo tiene doble posibilidades porque hay dos caras rojas en una misma tarjeta. Para comprobar si tiene razón se realiza el experimento.



Materiales para el problema de las tres tarjetas

Se piden ahora doce voluntarios y se pone en la pizarra una tabla para rellenar con R y B de la forma:

Vió												
Dijo												
Era												

A la vista de la tabla rellena se deduce que si todos los voluntarios hubiesen dicho el mismo color que veían, habrían acertado con probabilidad 2/3. Por tanto, la mejor táctica es esa: *predecir que es del mismo color que vemos.* Si vemos R, es claro que no es la tarjeta BB, puede ser la RB o la RR, ésta con doble probabilidad que la otra.

5.10. Vamos a la tele: El problema de la tres puertas

En un programa de televisión el concursante que ha llegado a la final debe jugar contra el presentador el juego de las tres puertas, que consiste en que el presentador enseña tres puertas cerradas y dice que detrás de una de ellas está el premio, que es un coche. El concursante debe elegir una de las tres puertas, numeradas 1, 2 y 3, a continuación el presentador enseña una de las otras dos y todos ven que el coche no está ahí, ofreciendo al concursante la posibilidad de cambiar la elección que hizo. ¿Qué es mejor para el concursante, cambiar de puerta o mantenerse con la que escogió?

A primera vista parece que, como al final sólo quedan dos puertas donde puede estar el coche, la probabilidad de cada una sería 1/2, por tanto será igual cambiar de opción que mantenerse en la elección inicial. Pero este razonamiento es erróneo. Si S es el suceso *"el coche está en la puerta elegida"*, es claro que $P(S) = 1/3$ y $P(\overline{S}) = 2/3$. Cuando el presentador abre una puerta que no contiene el premio, lo cual siempre es posible hacerlo, seguirá siendo $P(S) = 1/3$, por lo que el concursante debe cambiar su elección. Para el concursante que decide mantenerse en su elección el problema es equivalente a elegir una puerta entre las tres, mientras que el presentador se queda con dos puertas, enseñando la que no contiene el coche.

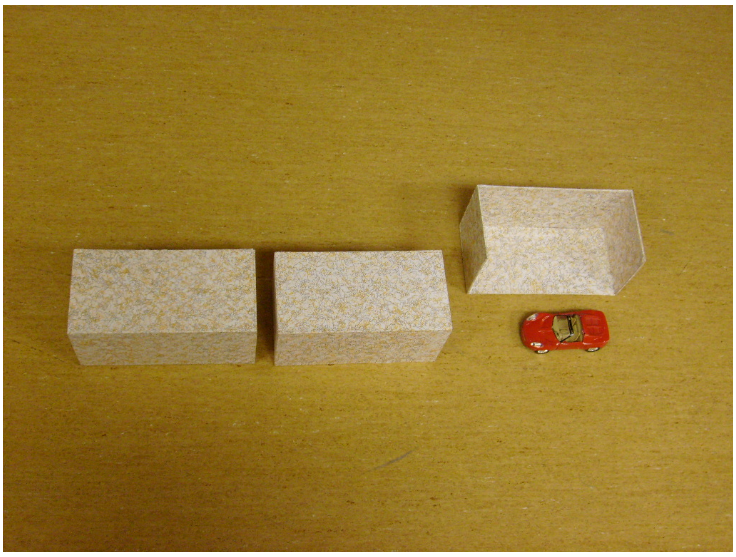
Una explicación más detallada consiste en indicar por A_i el suceso *"el coche está en la puerta i"* y por B_j el suceso *"el concursante ha elegido la puerta j"*. Los casos posibles de este experimento son nueve e igualmente posibles:

$$\{A_1B_1,\ A_1B_2,\ A_1B_3,\ A_2B_1,\ A_2B_2,\ A_2B_3,\ A_3B_1,\ A_3B_2,\ A_3B_3\}.$$

Por lo que si el concursante decide mantenerse con la puerta inicialmente elegida, ganará en los casos A_iB_j, con $i = j$, que son 3, mientras que si decide cambiar la puerta ganará en 6 de los nueve casos, que son los correspondientes a A_iB_j, con $i \neq j$.

Para la presentación de este problema de forma más espectacular, el profesor debe llevar preparado un material: se cogen dos cajas de zapatos sin tapa y se cortan por la mitad para aprovechar tres mitades con forma de portería de fútbol y debe llevar además un coche de juguete que quepa holgadamente en cualquiera de las porterías, preferiblemente iguales. Por la parte visible de las porterías, que hacen de puertas, se numeran y se coloca el coche en una de ellas. Un alumno elige una puerta y el profesor que hace de presentador del programa levanta una de las puertas donde no esté el coche, permitiendo al alumno cambiarse si quiere y después se levanta la puerta que definitivamente eligió.

Se piden doce voluntarios y concursan, poniendo en la pizarra una tabla para rellenar como en la presentación anterior:



Materiales para el problema de las tres puertas

Eligió												
Se abrió												
Estaba en												

Anotando la puerta elegida, la que se abrió y dónde estaba el premio. Los que se cambian tienen una probabilidad de 2/3 de ganar y los que se mantienen en su primera elección tienen 1/3, así que es de esperar que la mayoría de los que ganen coche sean los que cambiaron de opción.

Una pequeña variante del juego, si el profesor es un poco hábil consiste en colocar las tres puertas juntas y el situar el coche detrás pero entre dos de ellas. Cuando el profesor vaya a levantar una puerta, un pequeño toque moverá el coche a un lado o al otro, de modo que quede en el lugar correspondiente a la opción de cambiarse. De este modo los resultados, trucados claro, serán más exagerados y sólo conseguirán premio los que cambien de opción.

6. Recursos didácticos y materiales

Para este bloque de Estadística y Probabilidad conviene tener algunos materiales, además de los ya citados en las actividades presentadas. Entre ellos pequeños materiales como son: dados cúbicos y de otros poliedros, dados defectuosos, dados de quinielas, monedas, barajas, perindolas y ruletas.

Los programas Excel permiten hoy en día introducir datos estadísticos a la vez que se observa como va variando la representación gráfica de la correspondiente distribución. Ello contribuye a la correcta asimilación de los conceptos.

Otra posibilidad son los vídeos educativos que existen en el mercado. Los que nos parecen más son interesantes los siguientes:

Matemática electoral. Serie Más por menos, n^o 10. Autor: Antonio Pérez Sanz. Producción y distribución: TVE.

Ojo matemático. Película n^o 18: Estadística. Producción: Yorkshire TV. Distribución: Metrovídeo Escuela.

Ojo matemático. Película n^o 7: Probabilidad. Producción: Yorkshire TV. Distribución: Metrovídeo Escuela.

Las leyes del azar. Serie Más por menos, n^o 17. Autor: Antonio Pérez Sanz. Producción y distribución: TVE.

Introducción a la probabilidad. Serie Investigaciones matemáticas (I.M.10). Producción: BBC. Distribución: Videoplay.

Finalmente están las lecturas recomendadas. Es muy adecuado recomendar a los alumos la lectura de una evolución histórica de la Estadística y otra lectura sobre la evolución del Cálculo de Probabilidades, ya sea facilitando el profesor el texto a leer o buscando en internet y haciendo un resumen. También puede recomendarse, según el curso, que los alumnos lean algunos de los siguientes libros:

Cruz, M.C. De La. Actividades sobre azar y probabilidad. *Ed. MEC-Narcea.* Madrid 1993.

Haigh, J. Matemáticas y juegos de azar: jugar con la probabilidad. *Ed. Tusquets.* Barcelona 2003.

Nortes, A. Encuestas y precios. *Ed. Síntesis.* Madrid 1987.

Paulos, J.A. El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias. *Ed. Tusquets.* Barcelona 1990.

7. Bibliografía

[1] Batanero, C.: Aleatoriedad, modelización, simulación. En *Actas de las X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas,* (pp. 119-130). Zaragoza 2001.

[2] Batanero, C.: Didáctica de la Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática, *Ed. Univ. de Granada,* Granada 2002.

[3] Cramér, H.: Elementos de la Teoría de las Probabilidades y algunas de sus aplicaciones. *Ed. Aguilar,* Madrid 1968.

[4] Dantal, B.: Les enjeux de la modélisation en probabilité. En *Enseigner les probabilités au lycée,* (pp.57-59) Commission Inter-IREM, Reims 1997.

[5] Díaz, M.J.: Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuestas curriculares. *Ed. Síntesis,* Madrid 1988.

[6] Espinel, F, Candelaria, M.: Propuestas para la formación de profesores sobre cuestiones matemáticas y estadísticas de los sistemas electorales democráticos. *Ed. Univ. de La Laguna,* Santa Cruz de Tenerife.

[7] Pola, A.: Matemáticas en sondeos y sistemas electorales, sugerencias curriculares. *Ed. I.C.E. Univ. de Zaragoza,* Zaragoza 1993.

[8] Tomeo, V, Uña, I.: Estadística descriptiva, *Ed. Garceta G.E.,* Madrid 2009.

[9] Uña, I, Tomeo, V, San Martín, J.: Cálculo de Probabilidades, *Ed. Garceta G.E.,* Madrid 2009.