

SOFTWARE EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

José María Gavilán Izquierdo (Director)

Antonio Ariza García

Ángel Sánchez Sotelo

Ricardo Barroso Campos

Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Facultad de Ciencias de la Educación

RESUMEN

Presentamos en este artículo un Proyecto de Innovación Curricular desarrollado en un Programa de Formación de Maestros dentro de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla, que pretende incorporar software al proceso de enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas en consonancia con aportaciones de la comunidad de educadores matemáticos. Los programas de ordenador utilizados han sido diseñados uno para el aprendizaje de la Geometría (Programa de simulación geométrica) y el otro como un asistente matemático (Sistema de cálculo simbólico). Se ha llevado a cabo en un Laboratorio de Matemáticas. El objetivo perseguido era desarrollar el aprendizaje comprensivo de algunos conceptos matemáticos.

ABSTRACT

We present in this article a Curricular Innovation Project developed in a Program of Teachers Education in the School of Education of the University of Seville, that intends to incorporate software into process of learning and teaching of Mathematics in agreement with contributions of the mathematical educators community. The used computer programs have been designed for the learning of the Geometry (geometric simulation program) and a mathematical assistant (symbolic calculation System). It has been carried out in a Mathematics Laboratory. The pursued objective was to develop the comprehensive learning of some mathematical concepts.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD, CONTEXTO.

En este Proyecto, **Software en al aprendizaje de las Matemáticas (SAM)**, hemos querido incorporar al aprendizaje de las matemáticas nuevas tecnologías, en concreto programas de ordenador (software) de distinta naturaleza, uno de los programas está específicamente diseñado para la enseñanza/aprendizaje de la geometría (Cabri-Géomètre) y el otro es un asistente matemático diseñado para Ahacer@ matemáticas (Derive) sin fines didácticos de manera explícita. El objetivo básico perseguido era desarrollar el aprendizaje comprensivo de algunos conceptos matemáticos dando a los estudiantes la posibilidad de manipularlos en alguna/algunas de sus representaciones y estableciendo traslaciones entre ellas (Ball, 1990),

dar instrumentos a los estudiantes para la indagación, formulación, validación de conjeturas análisis de las propiedades de los conceptos (Schwartz, 1993).

El Proyecto se ha llevado a cabo durante el curso 1.997/98 (los primeros pasos para realizar actividades de innovación los dimos el curso 1995/96) y durante el curso 1996/97 realizó una primera experiencia piloto (Gavilán y Barroso, 1.997) con estudiantes para maestro de la Facultad de Ciencias de la Educación. Los alumnos que han participado pertenecían a distintas especialidades del Título de maestro y distintos cursos. Para el desarrollo del proyecto utilizamos el Aula de Informática como un Laboratorio de Matemáticas, pensamos que la denominación Laboratorio es la que más se ajusta a la actividad que se desarrolla en el mismo, ya que los alumnos realizan investigaciones sobre objetos matemáticos, podemos utilizar para el Sistema de Cálculo Simbólico la metáfora del Microscopio para el estudio de las propiedades locales (infinitesimales) como la continuidad o derivabilidad de una función.

La innovación se ha desarrollado desde diciembre hasta mayo (con una hora semanal en el Laboratorio), y ha incluido para los alumnos la resolución de problemas con el ordenador. Los estudiantes de primer curso se centraron principalmente en el programa de simulación para geometría, Cabri-Géomètre (en adelante Cabri) y los estudiantes de segundo en el programa de cálculo simbólico algebraico/gráfico, Derive. Algunos estudiantes han trabajado simultáneamente con los dos programas. Las primeras sesiones de trabajo en el laboratorio se dedicaron a familiarizar a los estudiantes con los programas. Varios días a la semana los alumnos disponían de libre acceso al Laboratorio. Cada alumno disponía de un ordenador para trabajar, aunque a veces podían trabajar dos alumnos por ordenador.

En el Laboratorio de Matemáticas-geometría (programa Cabri) pusimos a disposición de los estudiantes un cuaderno de trabajo donde a través de tareas conocían el funcionamiento del programa, las tareas estaban preparadas para que los alumnos se familiarizaran con el uso del cuaderno de trabajo y tenían contenido geométrico. La asignatura en la que se enmarca esta parte del Proyecto, Matemáticas (de Primer curso de la Diplomatura), tiene los siguientes contenidos: Sistemas de Numeración, Divisibilidad, Funciones, Estadística y Geometría. El último es el contenido abordado por el Proyecto. El programa Cabri ha sido un eje clave para el desarrollo del módulo de Geometría.

En el cuaderno de trabajo para Cabri todos los apartados comenzaban por *Cómo...* y describían una acción a realizar, por ejemplo, *Cómo definir un objeto triángulo*. Este cuaderno estaba dividido en tres partes:

1.- Capítulo Primero: Gestión del programa Cabri-Géomètre, recogía la gestión informática del programa (empezar y terminar,...), la gestión de ficheros (Abrir ficheros,...).

2.- Capítulo Segundo: El entorno geométrico de Cabri-Géomètre, incluía la parte relativa a los dibujos/figuras de Cabri, las distintas formas de definir los diferentes objetos que se dibujan con el programa (puntos, rectas,...).

3.- Capítulo Tercero: Gestión del entorno de las macro-construcciones. En este capítulo se analiza cómo se crean y utilizan procedimientos geométricos definidos por el usuario, permitiendo...

te el tratamiento de algunos conceptos geométricos como objetos sobre los que realizar manipulaciones. Incluimos en este capítulo la creación de barras de menús; este apartado permite desde el punto de la enseñanza diseñar sesiones de trabajo en las que el profesor determina qué comandos tienen disponibles los alumnos.

Una vez resueltas las tareas del cuaderno de trabajo y familiarizados con el entorno informático, se plantearon a los estudiantes tareas que permitieran construir y explicitar conceptos geométricos y desde un punto de vista empírico construir/formular conjeturas. En el punto 2 (Los programas de simulación geométrica) de este artículo se hará una descripción más detallada de este tipo de programa y de las actividades que pueden plantearse a los alumnos con un análisis didáctico de su utilización.

Con respecto al Laboratorio de Matemáticas-análisis, el trabajo pudo abordarse de distinta forma ya que eran pocos alumnos en comparación con los anteriores. El contenido de la asignatura Matemáticas II (de segundo curso de la Diplomatura) es un curso clásico de Análisis Matemático: números complejos, funciones, límites, continuidad, derivabilidad y sus aplicaciones. Durante las sesiones llevadas a cabo en el aula (no en el laboratorio) se explicaba a los estudiantes, cómo realizar los problemas que resolvían con lápiz y papel, en el ordenador. Por ejemplo si necesitaban factorizar un polinomio para calcular un límite, se analizaba en clase cómo factorizar expresiones algebraicas con Derive (teniendo en cuenta los distintos modos de factorización, según el campo numérico permitido, racional, real, complejo). Después se les entregaba a los estudiantes un conjunto de actividades para realizar en las sesiones que se desarrollaban en el laboratorio.

Sin embargo, este trabajo no era la meta principal, este trabajo previo es el instrumento para familiarizarse con el programa. Un objetivo básico era plantear un tipo de tareas distintas a las habituales y que con lápiz y papel son prácticamente irresolubles por que no se pueden abordar o bien consumirían mucho tiempo. En el punto 3 (Los sistemas de cálculo simbólico) de esta memoria se detallarán algunas tareas en las que se pondrá de manifiesto la potencia de esta herramienta para el aprendizaje matemático.

Como toda actividad que requiere el uso de tecnología había que tener especial cuidado en que la atención de los estudiantes no se centrara en la herramienta informática como tal, había que intentar no distraer al alumno del foco de atención, el aprendizaje de los conceptos matemáticos y de los procesos asociados a su formación.

LOS PROGRAMAS DE SIMULACIÓN GEOMÉTRICA

Bajo este nombre se incluyen programas de ordenador cuyo objetivo es el aprendizaje y la enseñanza de la geometría plana euclídea. Disponen de una zona de dibujo donde realizar figuras a partir de objetos predefinidos por el programa y también permiten realizar medidas. Sin embargo estos aspectos no son los más importantes ya que también son válidos para programas de dibujo. La característica más importante de los programas de simulación geométrica es que conservan las relaciones y propiedades de los objetos de la figura que se construye, aunque se muevan o desplacen los objetos sobre los que se ha realizado la construcción, permiten la manipulación directa de los objetos que determinan la figura, es decir

nociones matemáticas abstractas son convertidas en Aobjetos físicos@ susceptibles de experimentación con ellos. Por ejemplo si trazamos una recta r perpendicular a otra recta s por punto P , al desplazar la recta s o el punto P , la recta r sigue siendo perpendicular.

Pueden señalarse algunos ejemplos de este tipo de software, como son Geometric-Suppose Cabri-Géomètre, Cabri II, Cónicas, entre otros. En este trabajo nos centraremos en el programa Cabri, versión 1.7 para entorno MS-DOS y de la nueva versión Cabri-II.

Para Laborde (1.994) Cabri proporciona un interface cuyos dibujos son figuras que conservan las propiedades pertinentes para la construcción pero que al manipular la figura de manera directa descarta relaciones no válidas, las figuras que se construyen con Cabri no son simples dibujos como los que se realizan con lápiz y papel. Las figuras pueden ser modificadas de manera continua mientras mantienen su descripción, las relaciones geométricas de la figura son visualizadas como invariantes bajo la manipulación (Laborde, 1.993).

Este programa diseñado con fines educativos tiene dos tipos de objetos geométricos para definir en sus figuras o dibujos:

- **Objetos básicos**, aquellos que pueden definirse directamente sin depender de otros objetos previos. Son los siguientes: punto, recta, segmento, triángulo, y círculo (con estas denominaciones aparecen en el programa). Alguno de ellos como la recta aparece de dos formas:
 - Recta, es una recta definida por un punto y una dirección. Esta recta al desplazarse sólo lo puede hacer de forma paralela, es decir creamos un haz de rectas paralelas
 - Recta definida por dos puntos, se deben indicar dos puntos por los que deba pasar la recta, no admitiéndose dos puntos iguales. Esta recta puede ser modificada tomando la dirección que nos interese.

El otro objeto que se puede definir de dos formas es el círculo:

- Círculo, que determina un círculo con el centro y un radio. Esta definición de círculo define una familia de círculos con la propiedad de tener todos el mismo radio, lo que podemos cambiar es el centro.
- Círculo definido por dos puntos, uno de ellos es el centro del círculo y el otro es un punto de la circunferencia que lo delimita.

Todos estos objetos están disponibles en la opción CREACIÓN del menú principal de Cabri. Son lo que matemáticamente se denominan Aarbitrarios@, por ejemplo si necesitamos considerar un punto cualquiera, escogeremos Punto como comando de la opción CREACIÓN.

- **Objetos dependientes**, que son los que se definen a partir de los objetos básicos anteriores o de otros dependientes. Se construyen con los comandos de la opción CONSTRUCCIÓN o bien a través de macro-construcciones. Los objetos dependientes de CONSTRUCCIÓN podemos clasificarlos a su vez en dos categorías:

- *Determinados*, unívocamente definidos, como por ejemplo el comando Punto medio, para un segmento (o dos puntos arbitrarios) da su punto medio.
- *Indeterminados*, aquellos que por su naturaleza geométrica permiten distintas posibilidades, por ejemplo el comando recta paralela, depende del punto por el que queremos que sea paralela, es decir una recta tiene infinitas paralelas.

Si atendemos a los distintos objetos, éstos se pueden definir de varias formas. En la figura 1, se pueden ver las distintas formas de definir una recta en Cabri.

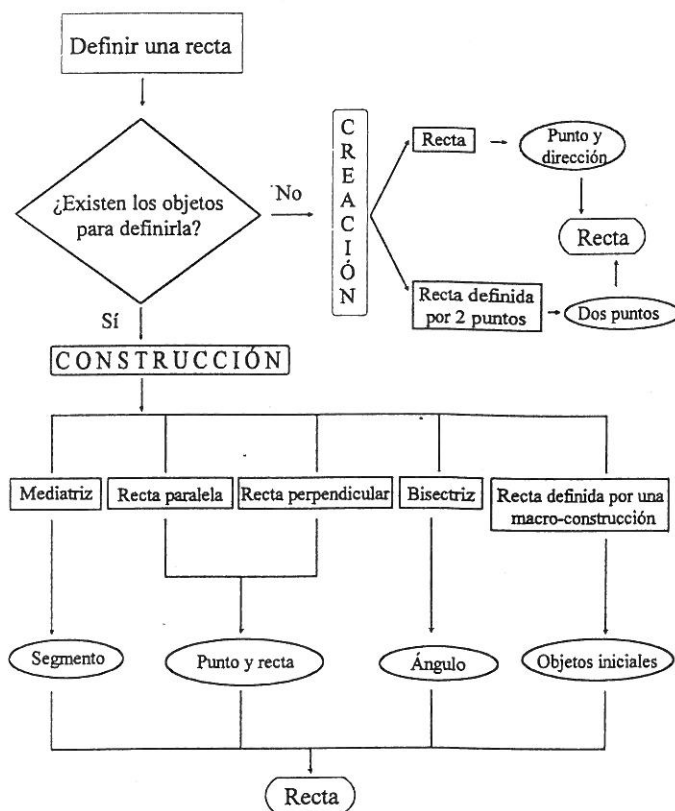


Figura 1. Diversas formas de definir una recta en Cabri.

Cabri permite definir procedimientos, denominados macro-construcciones por el programa, muy útiles para la resolución de algunos problemas y que evitan repetir un conjunto de comandos. Una *macro* es una secuencia de comandos actuando sobre algunos objetos (objetos iniciales) para producir nuevos objetos (objetos finales). El esquema de una macro construcción aparece en la figura 2. El ejemplo propuesto es una macro-construcción que a partir de un segmento construye un triángulo equilátero que lo contiene como lado, este problema

tiene dos soluciones, lo que queda de manifiesto a lo largo del proceso de definición de macro. Una vez definida la macro-construcción esta se convierte en un comando más de 1 del menú CONSTRUCCIÓN.

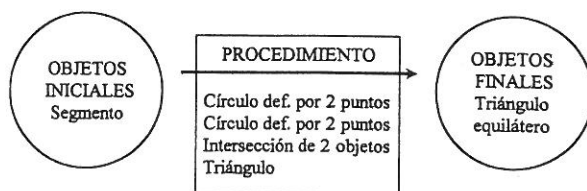


Figura 2. Esquema de una macro-construcción de Cabri, construye un triángulo equilátero a partir de un segmento.

Un aspecto muy importante de los entornos informáticos como Cabri, para el aprendizaje de la geometría es la posibilidad de utilizarlo para la formulación, exploración de conjetura como instrumento para pasar de lo particular a lo general (Schwartz, 1.993). Los ejemplos que se obtienen con los programas de simulación pueden ayudar a realizar generalizaciones de propiedades geométricas (Yerushalmy, 1.993) y a razonar de manera inductiva, por ejemplo, las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto interior al triángulo.

Desde un punto de vista tradicional, la enseñanza de la geometría se ha concebido como una ciencia esencialmente deductiva, se parte de definiciones muy elaboradas y se van deduciendo teoremas y propiedades geométricas en un orden determinado. Las secuencias de teoremas vienen determinadas por que para demostrar un teorema utilizamos el anterior. Si embargo este planteamiento ha chocado con los resultados obtenidos por los alumnos. ¿Cuál ha sido la causa?. Si utilizamos el referente de los niveles de Van-Hiele (el modelo de Van Hiele (Dina y Pierre) es un modelo teórico que estructura el razonamiento geométrico en cinco niveles. Este modelo también incluye fases de enseñanza de la geometría) para el razonamiento geométrico, podemos observar que este tipo de razonamiento deductivo es una característica del nivel 4 y si tenemos en cuenta que los estudiantes para profesor tienen un nivel 2, salvo unos pocos que tienen el nivel 3 (Huerta, 1.997) y el nivel 2 tampoco está plenamente alcanzado por ellos, vemos que no hay una adecuación entre el nivel de referencia que exigimos a nuestros alumnos y el que ellos pueden alcanzar en ese momento. El tipo de actividades que podemos ofrecer a los alumnos con el programa Cabri les ayuda a alcanzar plenamente el nivel 2 y les abre las puertas al nivel 3. En la figura 3 se describen brevemente estos niveles de razonamiento (Hoffer, 1.981).

Otro aspecto del aprendizaje de la geometría en el que Cabri puede ser una herramienta útil es el de las imágenes prototípicas de algunas nociones geométricas (en este caso figuras planas). Como señala Dörfler(1.993) cuando un proceso matemático tiene que operar sobre una clase de objetos, no lo hace sobre la clase en general sino que opera sobre casos concretos y prototípicos (representación paradigmática del concepto o familia) y este prototipo es la guía cognitiva de las propiedades que se hacen extensivas a toda la familia.

Nivel 1: Reconocimiento

Reconocer las figuras como un todo, sin discriminar propiedades de las figuras.
Identificar formas geométricas en objetos físicos.

Nivel 2: Análisis

Describir correctamente propiedades de la figura.
Clasificar de forma exclusiva los diferentes tipos de figuras.

Nivel 3: Ordenación

Clasificar de forma inclusiva los diferentes tipos de figuras.
Definir de manera precisa las figuras.

Nivel 4: Deducción

Distinguir entre definir y demostrar.
Deducir propiedades a partir de otras.

Nivel 5: Rigor

Comprender diferentes tipos de geometrías, incluyendo las no euclidianas.
Desarrollar modelos matemáticos abstractos.

Figura 3. Descripción de los niveles basados en Hoffer (1981).

Por ejemplo, si el prototipo de triángulo que manejamos es acutángulo, difícilmente pensaremos que la altura de un triángulo puede ser exterior al mismo, y por tanto el ortocentro pueda estar en el exterior del triángulo. De este modo la propiedad esencial de la altura de un triángulo, la perpendicularidad, no podrá ser integrada en el esquema de relaciones en el triángulo.

En la enseñanza de la geometría, Cabri permite al profesor determinar los comandos de las distintas opciones del menú principal que desea estén disponibles para una determinada sesión de trabajo. Permite diseñar para distintas tareas diferentes barras de menú. Por ejemplo podemos estar interesados en que para realizar determinado problema no está disponible el comando Mediatriz y el alumno tenga que hacer una construcción para obtenerla.

Como ejemplo de tarea planteada con Cabri, proponemos a nuestros alumnos que investiguen y formulen conjeturas relacionadas con los puntos notables del triángulo (baricentro, ortocentro, circuncentro y incentro). Las cuestiones planteadas van en primer lugar dirigidas a relacionar la posición de los mismos (interior/frontera/exterior del triángulo) con el tipo de triángulo. En segundo lugar se relaciona la característica de estar alineados tres o los cuatro, también con el tipo de triángulo. Incluso nos podemos plantear si en algún caso algunos de los puntos son coincidentes. La figura 4, muestra una pantalla de Cabri con la situación en la que los puntos notables están alineados y por las medidas de los lados podemos ver que ocurre cuando el triángulo es isósceles) ocurrirá también en el equilátero?

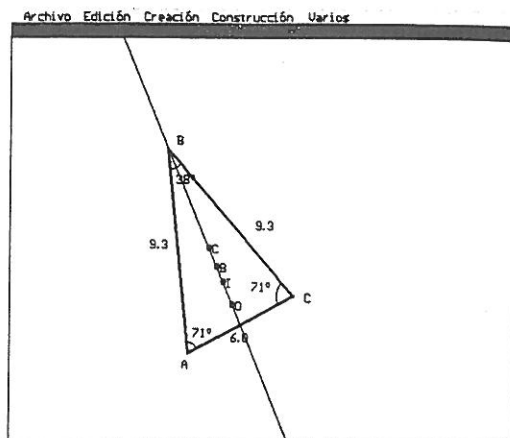


Figura 4. Posiciones de los dos puntos notables de un triángulo isósceles.

LOS SISTEMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO

Un Sistema de Cálculo Simbólico es un programa de ordenador que integra herramientas de tres tipos:

- Herramientas de cálculo numérico, algebraico, matricial y funcional, es decir es capaz de realizar operaciones con números, matrices, variables y funciones.
- Herramientas de representación gráfica tanto en dos como en tres dimensiones (el propio sistema detecta el tipo de gráfico en función del número de variables de entrada) que se denominan gráficos 2D y 3D.
- Herramientas de programación, es posible realizar las operaciones definidas por defecto o bien es posible crear procedimientos no estándares. Puede utilizar variables lógicas condicionales.

Su historia comienza con REDUCE, el primero con propósito general y data de 1.98 (García y cols., 1.995) y su diversificación comienza a mediados de los ochenta, con productos bastante completos (que con sucesivas versiones han ido ampliando los tres tipos de herramientas) como Derive, Mathematica, Maple, etc... y que para facilitar su uso disponen de un completo sistema de ayuda. Existen para el sistema operativo DOS como para el sistema Windows.

Para tener una idea clara de las posibilidades que ofrecen los programas de cálculo simbólico veamos a continuación un listado de procedimientos que se realizan en ellos (no es una lista exhaustiva):

- resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, ambos pueden tener parámetros
- factorizar números y expresiones algebraicas,

- calcular parámetros estadísticos (media, varianza, ...), rectas de ajuste y funciones más generales como base para ajustar una nube de puntos por mínimos cuadrados,
- calcular límites, derivadas (de cualquier orden), integrales (definidas e indefinidas),
- representar funciones de una y dos variables,
- efectuar cálculos en forma racional y decimal con la precisión deseada,
- resolver ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, y de tipos más generales,
- calcular polinomios de Taylor del orden deseado,....
- cálculo matricial (determinantes, inversas, polinomio característico,...).

Este tipo de software también se ha denominado como *Aasistente matemático@*, y a diferencia de los programas de geometría no han sido explícitamente creados con una finalidad didáctica para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, sino que son considerados herramientas que ayudan a todos los que necesitan las matemáticas para el desarrollo de su profesión. Por este motivo el reto de los educadores matemáticos está en definir las estrategias de su uso y en el desarrollo de las tareas que sean significativas y potencien el aprendizaje. En la lista anterior de tareas y procedimientos que se realizan con este tipo de software se abordan muchos de los ejercicios que hoy figuran en el currículum de matemáticas y que el ordenador resuelve de manera rápida (muchas en menos de un segundo) y automática. Creemos que incorporar el ordenador a la práctica del aula de matemáticas lleva aparejado un cambio en el currículum, por un lado tareas tradicionales pueden abordarse de otra forma y hay que plantearse nuevas tareas (Gavilán y Barroso, 1.997). Pierde mucho sentido utilizar tareas del tipo, *calcular el límite de $f(x)=...$ cuando x tiende a....* que el ordenador resuelve en una secuencia de comandos.

En nuestro laboratorio hemos usado el sistema de cálculo simbólico Derive. El motivo de usar Derive para DOS es que es un programa con una buena relación calidad/precio, y que tiene pocos requisitos de hardware, lo que permite utilizarlo en equipos relativamente modestos de prestaciones. Además su sistema de elección de comandos (interface de comunicación con el usuario) es muy cómodo de utilizar ya que no requiere conocer de forma exhaustiva la sintaxis de los comandos, y viene estructurado en forma de árbol de comandos, la figura 5 muestra el interfaz en forma de árbol para factorizar expresiones algebraicas.

Un ejemplo de uso de estos asistentes viene dado por la siguiente tarea que planteamos a los estudiantes en relación con el concepto de función y los cortes con el eje de abscisa (eje X). El objetivo de la tarea era potenciar la comprensión conceptual, en su componente semántica, es decir dar significado a los cortes con el eje, donde dar significado lo entendemos en el sentido de utilizar diferentes modos de representación. Los cortes de una función algebraica o racional $F(x)$ con el eje X se plantean de forma algebraica como las soluciones (reales, si existen) de la ecuación $F(x)=0$. Si planteamos simbólicamente este problema el programa nos lo resuelve a través del comando *soLve*, aunque Derive no indica el orden de cada solución, si utilizamos la factorización (comando *Factor*) sí nos informa del orden de los ceros o cortes con el eje X. El objetivo es)Qué significado gráfico podemos asociar a los distintos órdenes

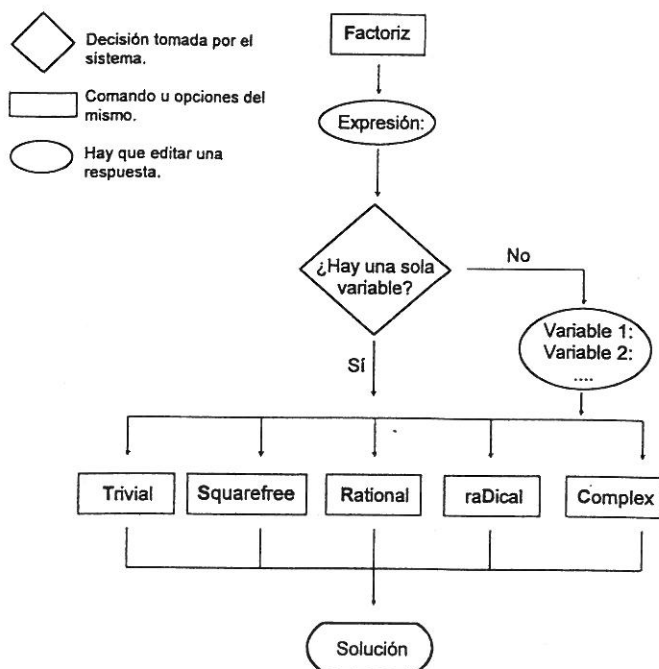


Figura 5. Interfaz en árbol de comandos para factorizar expresiones algebraicas.

de los cortes con los ejes? (esta cuestión es abordada a veces en el proceso de traslación entre el modo algebraico y el modo gráfico de una función). Este tipo de tareas, capacidad de interpretar los distintos modos y trasladarse de un modo a otro (Azcárate y Deulofeu, 1.990) y también que la traslación conlleva la traslación de significados (García y Llinares, 1.994) son claves en relación al aprendizaje del concepto de función.

La cuestión planteada, era representar en diferentes ventanas gráficas de tipo 2D las funciones siguientes, x , x^2 , x^3 y x^4 . Después se les presentaba a los estudiantes la gráfica de una función y tenían que identificar los cortes con el eje X según los patrones dibujados (x , x^2 , x^3 y x^4). La figura 6 las distintas ventanas con los patrones de corte con el eje X. Algunos estudiantes manifestaron la necesidad de usar otros comandos para discriminar entre el patrón de orden 2 (x^2) y el patrón de orden 4 (x^4), en concreto se referían a los comandos que analizan la conducta gráfica de la función en el entorno de un punto (Zoom o Escala).

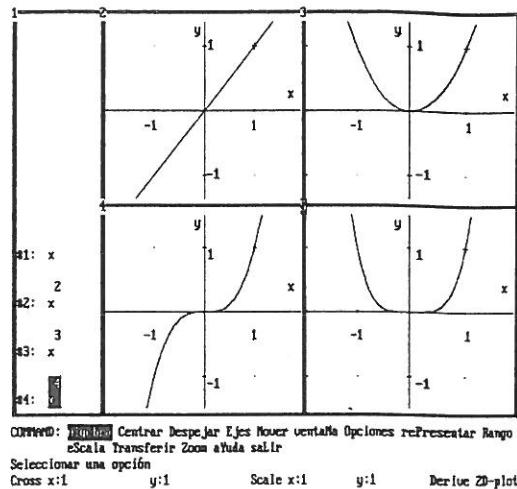


Figura 6. Representaciones gráficas de cortes con el eje X de distintos órdenes.

AGRADECIMIENTOS

Al Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla por apoyar y financiar el Proyecto **Software en el aprendizaje de las Matemáticas** en el marco de los Proyectos de Ayudas a la Docencia Universitaria, y a nuestros alumnos sin los cuales no se habría podido llevar a cabo.

BIBLIOGRAFIA

- AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (1990): *Funciones y gráficas*. Madrid, Editorial Síntesis.
- BALL, D.L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal* 90, n1 4, 449-466.
- DÖRFLER, W. (1993). Computer use and views of the mind, en KEITEL, C. y RUTHVEN, K. (eds) *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*. Berlin, Springer-Verlag. .
- GARCÍA A., MARTÍNEZ A. Y MIÑANO R. (1995): *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas*. Madrid, Editorial Síntesis.
- GAVILÁN J. M. y BARROSO R. (1997). Los modos de representación de una función con un sistema de cálculo simbólico, en ABRAIRA, C. y FRANCISCO, M. A. (eds) II Simposio sobre el currículum en la formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de Didáctica de las Matemáticas. León, Facultad de Educación, Universidad de León

- GAVILÁN J.M. (En prensa): Los sistemas de Cálculo Simbólico y el concepto de función. Comunicación presentada a las VIII Jornadas Andalcuzas de Educación Matemática ATHALES@, Jaén.
- GARCÍA M. y LLINARES S. (1.994): Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. *Suma*, n1 18, 13-23.
- HUERTA, P. (1.997). Didáctica de la Geometría en la formación de maestros, en BLANCO, J. y CRUZ, M. C. (eds) *Aportaciones al currículum en la formación inicial de los profesores de primaria en el área de matemáticas*. León, I.C.E. Universidad de León.
- HOFFER, A. (1.981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, 74, 1. 11-18.
- LABORDE C. (1.993). The Computer as Part of the Learning Environment: The Case of geometry, en KEITEL, C. y RUTHVEN, K. (eds) *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*. Berlin, Springer-Verlag.
- LABORDE C. (1.994). Les rapports entre visuel et géométrie dans un EIAO, en ARTIGU M. y otros (eds) *Vingt ans de didactique des Mathématiques en France*. París, La Pensée Sauvage, Editions.
- SCHWARTZ, J. L. (1.993): A Personal View of the Supposer, en SCHWARTZ, J. y otros (eds.) *The Geometric Supposer, What Is It a Case of?*. Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- YERUSHALMY, M. (1.993). Generalization in Geometry, en SCHWARTZ, J. y otros (eds) *The Geometric Supposer, What Is It a Case of?*. Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.