

Observatorio permanente en Jupiter alimentado por una amarra electrodinámica. Análisis dinámico

J. Peláez*

* Grupo de Dinámica de Tethers

Technical University of Madrid (UPM)

ETSI Aeronáuticos, 28040 Madrid, Spain

Resumen

La exploración de los planetas exteriores se ve limitada por la escasez de potencia eléctrica. Fuentes habituales en vehículos de larga duración —conversión de energía solar en eléctrica— no son efectivas a distancias grandes del Sol. Así, en Júpiter, la intensidad de la radiación solar es sólo del 4% de su valor en la Tierra. En misiones a Júpiter, disponer de potencia extra permite usar instrumentos que normalmente no se incluyen por su consumo excesivo. Por este motivo la misión JIMO de NASA contemplaba el uso de energía nuclear. Las amarras espaciales —tethers— electrodinámicas constituyen una alternativa en la producción de energía a bordo de la nave. Este artículo describe la dinámica de un observatorio permanente situado en una de las lunas interiores de Júpiter (Adrastea, Tebe, Metis, Amaltea) alimentado por un tether electrodinámico trabajando en el régimen generador.

Introducción

La exploración de los planetas lejanos ha estado limitada, siempre, por la escasez de potencia eléctrica a bordo de las naves. Los medios habituales usados para alimentar vehículos espaciales de larga duración, la transformación de energía solar en eléctrica, no resulta ser efectiva a distancias grandes del Sol, pues la intensidad solar disminuye con el cuadrado de la distancia al Sol. Así, por ejemplo, en Júpiter la intensidad de la radiación solar es sólo el 4% de la que se detecta en la Tierra. Los paneles solares serían de tamaño inaceptable. En una misión a Júpiter, cualquier cantidad adicional de energía permitiría el uso de instrumentos que, normalmente, no se emplean a bordo por su consumo excesivo. Esta es una de las razones por la cual en la misión JIMO, de NASA,

*j.pelaez@upm.es

se contemplaba el uso de energía nuclear. De echo, en todas las misiones conocidas a los planetas exteriores se ha usado RTG (Radioisotopes Thermoelectric Generators); estos dispositivos no usan procesos de fisión o fusión; aprovechan el calor producido por la radiación natural del Plutonio-238, y lo convierten en energía eléctrica; se caracterizan, entre otros inconvenientes, por un precio muy elevado del watio producido.

Las amarras espaciales electrodinámicas —tethers electrodinámicos— constituyen una alternativa de enorme interés, sino en todas si en algunas misiones, que permitiría disponer de energía eléctrica a bordo sin necesidad de transportarla hasta las regiones lejanas visitadas en la misión. En particular los tethers desnudos [1, 2] por su mejor rendimiento en el problema básico de recoger electrones del plasma ambiente en el que se mueve la nave. Este artículo describe los aspectos dinámicos esenciales de una misión que consiste en situar un observatorio permanente en las proximidades de una de las lunas internas de Júpiter (Adrastea, Tebe, Metis, Amaltea); dicho observatorio estaría alimentado por un tether electrodinámico trabajando en el régimen generador.

Sin duda, uno de los grandes retos de una misión como la que aquí se propone es la extrema radiación presente en las proximidades de Júpiter. No hacemos frente aquí a este problema que esperamos sea solventado con tecnologías emergentes en un futuro próximo.

Los tethers electrodinámicos pueden deorbitar satélites en diferentes escenarios (ver [3, 4, 5, 6]). En el régimen generador, una parte significativa de la energía mecánica perdida por el sistema al bajar la órbita se recupera en forma de energía útil; esta energía puede usarse a bordo para diferentes tareas (cargar baterías, mover un motor eléctrico, alimentar un circuito, etc). Dependiendo de la configuración del tether, la energía recuperada puede alcanzar hasta el 40% de la energía total perdida, y valores del orden del 20% pueden considerarse completamente razonables (ver [7]). En estos casos, el tether se convierte en una fuente de alimentación embarcada.

La propuesta que se hace en este artículo consiste en deorbitar una de las lunas internas de Júpiter. Debido a la gran masa de la luna, pueden obtenerse cantidades importantes de energía sin que el radio orbital cambie de forma apreciable (millones de kwh por menos de 1 mm). Desde un punto de vista lógico, la luna debe unirse al tether —con un cable, por ejemplo— para el deorbitado efectivo: la resistencia electrodinámica se transmite al cable y la tensión del cable es la fuerza que provoca el deorbitado de la luna. En realidad no se precisa dicho cable, pues puede usarse la atracción gravitatoria de la luna para sustituir a la tensión del cable. Así, ajustando la longitud del tether, el diámetro y el material, es posible obtener la energía que permita alimentar de forma sostenida un observatorio situado en las proximidades de Júpiter. En este artículo se presenta un análisis de los aspectos dinámicos esenciales de la misión.

Sin duda, uno de los retos más importantes planteados por una misión como la que se propone en estas páginas es hacer frente al ambiente de radiación extrema que se

presenta en las proximidades de Júpiter. ésta es una limitación importante que esperamos sea solventada en un futuro próximo de la mano de las nuevas tecnologías actualmente en desarrollo. Otro problema adicional lo constituye la incertidumbre asociada a la densidad electrónica de plasma en las proximidades de Júpiter; dicha densidad interviene de forma decisiva en la determinación de las fuerzas electrodinámicas que actúan sobre el sistema. En lo que sigue, sin embargo, haremos abstracción de tales retos para centrar el análisis en la dinámica del problema.

Dinámica orbital

Desde el punto de vista dinámico, son tres los cuerpos involucrados en el problema: Júpiter, su luna y la nave (S/C). Las lunas internas de Júpiter tienen órbitas circulares (la excentricidad de Amaltea, por ejemplo, es $e \approx 0,003$) con una inclinación residual. Es apropiado, por tanto, considerar el problema como una generalización del problema circular restringido de tres cuerpos. Para fijar ideas supondremos que la luna es Amaltea, aunque su substitución por otra de ellas se facilita debido al uso de variables adimensionales en la mayor parte del análisis.

La forma de Amaltea, y su campo gravitatorio, son extremadamente irregulares; sus dimensiones principales son $270 \times 165 \times 150$ km. A más de 6 ó 7 *diámetros*, su campo gravitatorio puede substituirse por el de una masa puntual, aproximación que se adoptará en lo que sigue. Si, posteriormente, fuese necesario mejorar el análisis se necesitaría una descripción más precisa del campo gravitatorio. Las lunas internas de Júpiter están estabilizadas por gradiente de gravedad, con su *eje mayor* alineado con la vertical local. Su periodo de rotación coincide con su periodo orbital; en el caso de Amaltea ambos son de 0.498179 días.

Problema restringido circular de tres cuerpos

Se resumen aquí los principales resultados del *problema restringido circular de tres cuerpos* que son de aplicación al problema que se estudia.

Júpiter (m_1) y Amaltea (m_2) son los primarios y la nave, S/C, (m) tiene masa despreciable ($m \ll m_1$ y $m \ll m_2$). Cualquier referencia cartesiana desprovista de giro y con origen en G , centro de masas de las primarias, es inercial. El movimiento relativo de las primarias es circular y tiene lugar en un plano de dirección constante. Sea Gx_1z_1 una referencia inercial ligada a dicho plano. La referencia sinódica Gxz gira alrededor del eje Gy con velocidad angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{\ell^3}}$$

siendo ℓ la distancia entre los primarios (ver Fig. 1); los primarios están en reposo en la

referencia sinódica $Gxyz$.

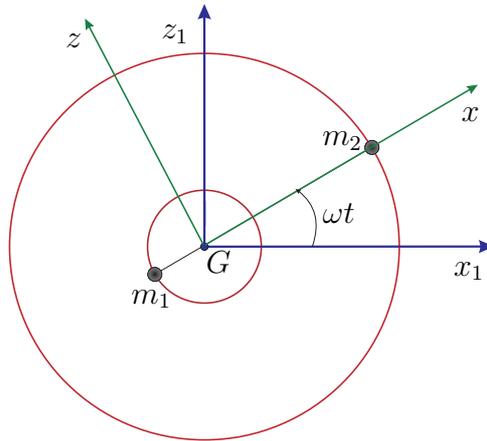


Figura 1: Problema restringido circular de tres cuerpos

Puesto que el movimiento del observatorio tendrá lugar en las proximidades de Amaltea (m_2) se tomará una nueva referencia $Axyz$ con origen en Amaltea y ejes paralelos a los de la referencia $Gxyz$ (triedro orbital de la trayectoria circular de Amaltea). Los primarios están en reposo en esta referencia en las posiciones $m_2(0, 0, 0)$, $m_1(-\ell, 0, 0)$.

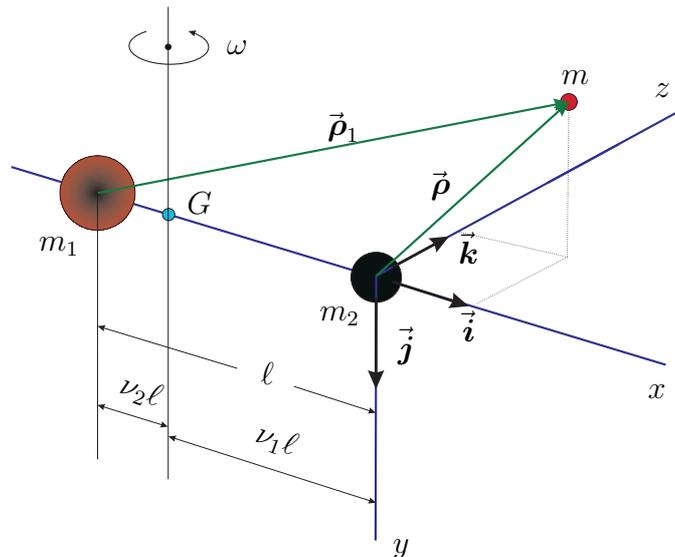


Figura 2: Sistemas de referencia

El movimiento de la nave (m), relativo a la referencia $Axyz$ está gobernado por las fuerzas siguientes:

- atracción gravitatoria de los primarios, dada por

$$\vec{F}_g = -\frac{Gm_1m}{\rho_1^3} \vec{\rho}_1 - \frac{Gm_2m}{\rho^3} \vec{\rho}$$

donde $\vec{\rho}_1 = (\ell + x, y, z)$, y $\vec{\rho} = (x, y, z)$ son vectores posición de la masa m con origen en los primarios m_1 y m_2 respectivamente ($\rho = |\vec{\rho}|$, $\rho_1 = |\vec{\rho}_1|$). Esta fuerza deriva del

potencial

$$\tilde{V}_g = -Gm\left\{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho}\right\}$$

• *fuerza centrífuga*, una repulsión del eje Gy proporcional a la masa y la distancia; deriva del potencial

$$\tilde{V}_I = -\frac{1}{2}m\omega^2((\ell + x)^2 + z^2)$$

• *Fuerza de inercia de Coriolis*, que es giroscópica —no produce trabajo en el movimiento de la nave— y está dada por

$$\vec{F}_{1c} = -2m(-\omega \vec{j}) \times \dot{\vec{r}} = 2m\omega(\dot{z}, 0, -\dot{x})$$

• las *fuerzas electrodinámicas*, \vec{f}_e , proporcionadas por la amarra espacial. Más adelante se modelarán con mayor detalle.

Sea \tilde{V} la función potencial $\tilde{V} = \tilde{V}_g + \tilde{V}_I$. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de la partícula m son:

$$m\ddot{x} - 2m\omega\dot{z} = -\frac{\partial\tilde{V}}{\partial x} + f_{ex} \quad (1)$$

$$m\ddot{z} + 2m\omega\dot{x} = -\frac{\partial\tilde{V}}{\partial z} + f_{ez} \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial\tilde{V}}{\partial y} + f_{ey} \quad (3)$$

y deben integrarse a partir de unas condiciones iniciales dadas.

En ausencia de fuerzas electrodinámicas, $\vec{f}_e = \vec{0}$, las ecuaciones (1-3) proporcionan una integral primera la *integral de Jacobi* que puede deducirse de la ecuación de la energía. Nótese que la energía total del sistema se mantiene constante

$$T + \tilde{V} = E \equiv \text{constante} \quad (4)$$

siendo $T = \frac{1}{2}mv^2$ la energía cinética de m en su movimiento relativo a $Axyz$.

Ecuaciones del movimiento

Se introducirán variables adimensionales basadas en los siguientes valores característicos: de longitud, la distancia ℓ entre primarios, de tiempo, $1/\omega$ ($\tau = \omega t$) y de masa, la masa total de los primarios ($m_1 + m_2$). En variables adimensionales las ecuaciones del movimiento son:

$$\ddot{x} - 2\dot{z} = -\frac{\partial V}{\partial x} + kf_{ex} \quad (5)$$

$$\ddot{z} + 2\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial z} + kf_{ez} \quad (6)$$

$$\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} + kf_{ey} \quad (7)$$

donde $k = 1/(m\ell\omega^2)$, V es

$$V = -\frac{1}{2}((1+x)^2 + z^2) - \frac{\nu}{\rho} - \frac{(1-\nu)}{\rho_1} \quad (8)$$

y las masas reducidas de los primarios son $\nu = \nu_2 = m_2/(m_1 + m_2)$ y $(1-\nu) = \nu_1 = m_1/(m_1 + m_2)$. Nótese que la dirección positiva del eje Ax va de m_1 (Jupiter) a m_2 (Amalthea). Además, $\nu \ll 1$ ya que $m_2 \ll m_1$. De aquí en adelante, (x, y, z) representan las coordenadas adimensionales de m y los vectores $\vec{\rho}_1$ y $\vec{\rho}$ serán

$$\vec{\rho}_1 = (1+x, y, z) \quad \vec{\rho} = (x, y, z)$$

La integral de Jacobi adopta la forma

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = h + (1+x)^2 + z^2 + \frac{2\nu}{\rho} + \frac{2(1-\nu)}{\rho_1} \quad (9)$$

Las derivadas de la función potencial V resultan ser

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= 1+x - \nu \frac{x}{\rho^3} - (1-\nu) \frac{1+x}{\rho_1^3} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} &= z - \nu \frac{z}{\rho^3} - (1-\nu) \frac{z}{\rho_1^3} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} &= -\nu \frac{y}{\rho^3} - (1-\nu) \frac{y}{\rho_1^3} \end{aligned}$$

y las ecuaciones que gobiernan el movimiento adoptan la forma

$$\ddot{x} - 2\dot{z} = 1+x - \nu \frac{x}{\rho^3} - (1-\nu) \frac{1+x}{\rho_1^3} + k f_{ex} \quad (10)$$

$$\ddot{z} + 2\dot{x} = z - \nu \frac{z}{\rho^3} - (1-\nu) \frac{z}{\rho_1^3} + k f_{ez} \quad (11)$$

$$\ddot{y} = -\nu \frac{y}{\rho^3} - (1-\nu) \frac{y}{\rho_1^3} + k f_{ey} \quad (12)$$

y son ecuaciones exactas, dentro de los límites de validez del modelo.

Modelo de las fuerzas electrodinámicas

En primera aproximación, se supondrá el tether estabilizado por gradiente de gravedad a lo largo de la vertical de Júpiter. se supondrá, además, el tether situado en el plano orbital de Amaltea. Como consecuencia, las fuerzas electrodinámicas tienen una resultante contenida en el plano de Amaltea ($f_{ey} = 0$). La ecuación (12) muestra, en tal caso, que el movimiento de m tiene lugar en el plano Axz , ($y(t) \equiv 0$), si las condiciones iniciales se encuentran en dicho plano ($y = \dot{y} = 0$). Esta es la situación que se busca.

Bajo estas hipótesis la resultante de las fuerzas electrodinámicas adopta la forma adimensional siguiente

$$k \vec{f}_e = \sigma \{-\sin \psi \vec{i} + \cos \psi \vec{k}\}, \quad \sigma = \frac{I_m B L}{m\ell\omega^2} \quad (13)$$

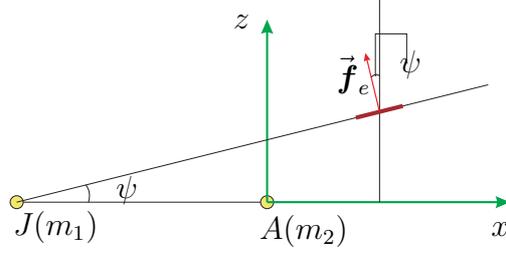


Figura 3: Resultante de las fuerzas electrodinámicas

donde el ángulo ψ está dado por

$$\tan \psi = \frac{z}{1+x}, \quad \cos \psi = \frac{1+x}{\rho_1}, \quad \sin \psi = \frac{z}{\rho_1}$$

y $\rho_1 = \sqrt{(1+x)^2 + z^2}$. En (13), L es la longitud del tether, B el campo magnético en el centro de masas de la nave e I_m el valor medio de la corriente en el tether. El parámetro adimensional σ es una medida de la magnitud de las fuerzas electrodinámicas. Todos los parámetros involucrados en estas expresiones pueden obtenerse de las teorías desarrolladas en [8, 9, 10, 11, 12].

Posiciones de equilibrio

Se determinan, aquí, las posiciones de equilibrio relativo a la referencia $Axyz$ de la partícula m , teniendo en cuenta que ν es pequeño (para Amaltea $\nu \approx 3,79 \times 10^{-6}$) y que las fuerzas electrodinámicas deben compensar a la gravedad de Amaltea.

Las ecuaciones que proporcionan las posiciones de equilibrio son:

$$1 + x_e - \nu \frac{x_e}{\rho_e^3} - (1 - \nu) \frac{1 + x_e}{\rho_{1e}^3} - \sigma_0 \frac{z_e}{\rho_{1e}} = 0 \quad (14)$$

$$z_e - \nu \frac{z_e}{\rho_e^3} - (1 - \nu) \frac{z_e}{\rho_{1e}^3} + \sigma_0 \frac{1 + x_e}{\rho_{1e}} = 0 \quad (15)$$

donde las fuerzas electrodinámicas se han modelado siguiendo la teoría expuesta anteriormente. En ellas, se supondrá $\sigma_0 = \mathcal{O}(1)$. Hay dos parámetros libres en el problema ν y σ_0 , y dos incógnitas, x_e y z_e . Por tanto, las raíces buscadas de (14-15) serán de la forma

$$x_e = x_e(\nu, \sigma_0), \quad z_e = z_e(\nu, \sigma_0) \quad (16)$$

Ahora bien, para una luna dada el valor de ν es constante y las soluciones sólo dependen de la intensidad de corriente adimensional σ_0 . Al variar σ_0 , las relaciones (16) representan una curva en el plano (x_e, z_e) ; cada uno de sus puntos es una posición de equilibrio de la nave respecto de la referencia $Axyz$.

Las combinaciones lineales $(-z_e) \times (14) + (1 + x_e) \times (15)$ y $(z_e) \times (15) + (1 + x_e) \times (14)$ proporcionan los valores de x_e y z_e en función de ρ_e y ρ_{1e} :

$$z_e = \frac{\sigma_0}{\nu} \rho_e^3 \rho_{1e}, \quad x_e = \rho_e^2 \left\{ \frac{\rho_e}{\rho_{1e}} - 1 \right\} + \frac{\rho_e^3}{\nu} \left\{ \frac{\rho_{1e}^3 - 1}{\rho_{1e}} \right\}$$

Además, al ser $\sigma_0 = \mathcal{O}(1)$ para que la atracción gravitatoria de Amaltea se compense con las fuerzas electrodinámicas, la distancia (adimensional) entre la nave y Amaltea debe ser de orden de $\sqrt{\nu}$. Se introducen, por tanto, las variables

$$\xi_e = x_e / \sqrt{\nu}, \quad \zeta_e = z_e / \sqrt{\nu}, \quad \tilde{\rho}_e = \rho_e / \sqrt{\nu}$$

que facilitan el cálculo numérico de las raíces. Las relaciones anteriores adoptan la forma

$$\zeta_e = \sigma_0 \tilde{\rho}_e^3 \rho_{1e}, \quad \xi_e = \tilde{\rho}_e^3 \left\{ \frac{\rho_{1e}^3 - 1}{\rho_{1e}} \right\} + \sqrt{\nu} \tilde{\rho}_e^2 \left\{ \sqrt{\nu} \frac{\tilde{\rho}_e}{\rho_{1e}} - 1 \right\} \quad (17)$$

donde han de tenerse en cuenta las relaciones:

$$\tilde{\rho}_e = \sqrt{\xi_e^2 + \zeta_e^2}, \quad \rho_{1e}^2 = 1 + 2\sqrt{\nu} \xi_e + \nu \tilde{\rho}_e^2 \quad (18)$$

Al introducir el valor de ζ_e , dado por la primera de las relaciones (17), y el de ξ_e , dado por la segunda de las relaciones (18), en la ecuación $\tilde{\rho}_e^2 - \xi_e^2 - \zeta_e^2 = 0$ se obtiene una nueva ecuación que liga $\tilde{\rho}_e$ con ρ_{1e} . Resulta ser una ecuación bicuadrada en ρ_{1e} que proporciona la solución

$$\rho_{1e}^2 = 1 + \nu \tilde{\rho}_e^2 (1 - 2\sigma_0^2 \tilde{\rho}_e^4) \pm 2\tilde{\rho}_e \sqrt{\tilde{\rho}_e^{10} \nu^2 \sigma_0^4 - \nu \sigma_0^2 \tilde{\rho}_e^4 (\nu \tilde{\rho}_e^2 + 1) + \nu} \quad (19)$$

que, a través de las relaciones (17), permite obtener los valores de (ξ_e, ζ_e) en función, únicamente, de $\tilde{\rho}_e$.

La determinación numérica de las raíces se realiza calculando los ceros de la función

$$g(\tilde{\rho}_e) = \tilde{\rho}_e^2 - \xi_e^2(\tilde{\rho}_e) - \zeta_e^2(\tilde{\rho}_e)$$

El procedimiento seguido es: 1) se fija el valor de σ_0 , 2) se calculan los ceros de $g(\tilde{\rho}_e)$, 3) para cada cero se obtiene el valor de ρ_{1e} (via (19)), 4) conocidos los valores de $\tilde{\rho}_e$ y ρ_{1e} las relaciones (17) determinan las coordenadas buscadas (ξ_e, ζ_e) , 5) se cambia el valor de σ_0 y se repite el proceso.

Se han obtenido dos *ramas* que se recogen en la figura 4 donde se muestran las posiciones de equilibrio en el plano (ξ_e, ζ_e) ; la curva gris adicional corresponde a una aproximación asintótica de una de las ramas (ecuaciones (26-28)). El parámetro de cada rama es σ_0 . En la rama *izquierda* sólo hay una raíz que varía continuamente con σ_0 en el intervalo $[0, \infty]$; la rama comienza, cuando $\sigma_0 \rightarrow 0$, en el punto de Lagrange L_2 y cuando $\sigma_0 \rightarrow \infty$ la rama muere en Amaltea. La rama *derecha*, sin embargo, presenta dos sub-ramas, cuando

$\sigma_0 \in \approx [0, 0,0312865]$ (no hay solución si $\sigma_0 > 0,0312865$). La sub-rama inferior comienza cuando $\sigma_0 \rightarrow 0$, en el punto de Lagrange L_1 ; cuando $\sigma_0 \rightarrow 0,0312865$ la posición de equilibrio tiende al punto J de unión de ambas sub-ramas, de coordenadas $\approx J(0,80, 5,56)$. La sub-rama superior, sin embargo, se describe en sentido opuesto; así, cuando $\sigma_0 \rightarrow 0$ la posición de equilibrio se aleja de Amaltea por el eje Az , y cuando $\sigma_0 \rightarrow 0,0312865$ la posición de equilibrio tiende al punto J .

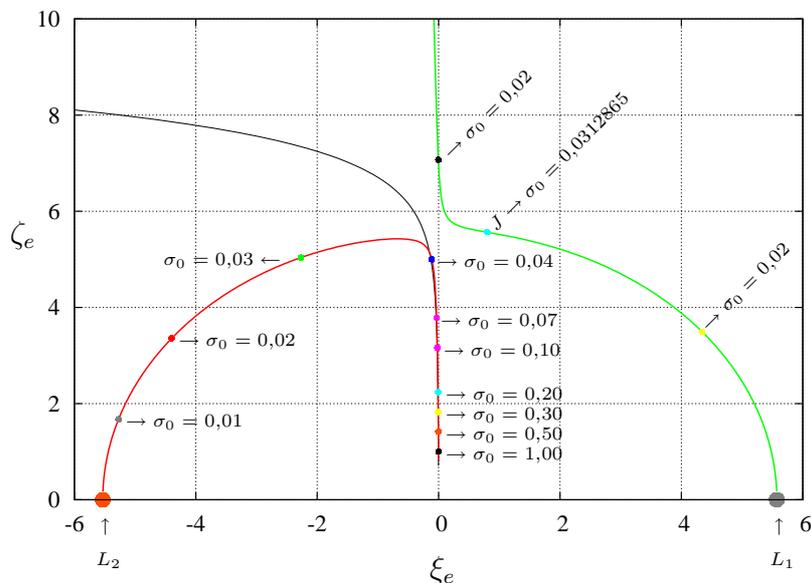


Figura 4: Posiciones de equilibrio en el plano (ξ_e, ζ_e)

Análisis de estabilidad

Es fácil comprobar, desde un punto de vista físico, que las posiciones de equilibrio determinadas son inestables. En efecto, si se rompe el equilibrio, la nave se cae hacia Amaltea o se escapa de ella. Aún así, es importante realizar un análisis clásico para estimar la intensidad de la inestabilidad, imprescindible para abordar el problema de control.

Ya que el plano orbital es atractor, se despreciará, en primera aproximación, el movimiento normal a dicho plano (eje Ay); así, para estudiar la estabilidad lineal se introducirán las variaciones:

$$x(t) = x_e + \delta x, \quad z(t) = z_e + \delta z$$

y las ecuaciones variacionales del sistema (10-11) adoptan la forma:

$$\frac{d^2 \delta x}{d\tau^2} - 2 \frac{d\delta z}{d\tau} + k_1 \delta x + k_2 \delta z = 0 \quad (20)$$

$$\frac{d^2 \delta z}{d\tau^2} + 2 \frac{d\delta x}{d\tau} + k_3 \delta x + k_4 \delta z = 0 \quad (21)$$

donde los coeficientes k_1 , k_2 , k_3 y k_4 , que son funciones de (x_e, z_e) y por consiguiente de (σ_0, ν) , toman los valores:

$$k_1 = -1 - \frac{3\nu x_e^2}{\rho_e^5} + \frac{\nu}{\rho_e^3} - \frac{3(1-\nu)(1+x_e)^2}{\rho_{1e}^5} + \frac{(1-\nu)}{\rho_{1e}^3} - \sigma_0 z_e \frac{(1+x_e)}{\rho_{1e}^3} \quad (22)$$

$$k_2 = \frac{\sigma_0}{\rho_{1e}} - \frac{3\nu x_e z_e}{\rho_e^5} - \frac{\sigma_0 z_e^2}{\rho_{1e}^3} - \frac{3(1-\nu)(1+x_e)z_e}{\rho_{1e}^5} \quad (23)$$

$$k_3 = -\frac{3\nu x_e z_e}{\rho_e^5} - \frac{3(1-\nu)(1+x_e)z_e}{\rho_{1e}^5} + \frac{\sigma_0(1+x_e)^2}{\rho_{1e}^3} - \frac{\sigma_0}{\rho_{1e}} \quad (24)$$

$$k_4 = -1 - \frac{3(1-\nu)z_e^2}{\rho_{1e}^5} + \frac{\nu}{\rho_e^3} - \frac{3\nu z_e^2}{\rho_e^5} + \frac{(1-\nu)}{\rho_{1e}^3} + \frac{\sigma_0 z_e(1+x_e)}{\rho_{1e}^3} \quad (25)$$

Las ecuaciones lineales (20-21) se dejan escribir en forma matricial como sigue

$$\frac{d\vec{y}}{d\tau} = \mathcal{M}\vec{y}$$

donde \mathcal{M} es la siguiente matriz cuadrada de tamaño 4:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ -k_1, & -k_2, & 0, & 2 \\ -k_3, & -k_4, & -2, & 0 \end{pmatrix}$$

Su ecuación secular es

$$\lambda^4 + (k_1 + k_4)\lambda^2 - 2(k_2 - k_3)\lambda + k_1 k_4 - k_2 k_3 = 0$$

y sus raíces proporcionan los 4 autovalores de \mathcal{M} ; Han de calcularse numéricamente.

Autovalores de \mathcal{M}

Sub-rama superior derecha

El análisis comenzará en la *sub-rama superior derecha* de la figura 4. Cuando σ_0 varía desde 0 hasta el valor límite $\approx 0,0312865$ se *desciende* por esta sub-rama. La figura 5 muestra los valores obtenidos para los autovalores de \mathcal{M} en función de σ_0 .

Para valores pequeños de σ_0 los autovalores son complejos (dos parejas de imaginarios conjugados). Esta situación se mantiene hasta que σ_0 alcanza el valor $\approx 0,0311$, más allá del cual los autovalores son todos reales. beyond which all the eigenvalues take real values. Nótese que los autovalores $\lambda_{3,4}$ en la figura 5 tienen parte real positiva; en consecuencia, las posiciones de equilibrio asociadas a esta sub-rama son siempre inestables. Sin embargo, la parte real del autovalor inestable se mantiene en el intervalo $\approx [0,6, 1,4]$.

Sub-rama inferior derecha

Cuando σ_0 varía desde 0 hasta el valor límite $\approx 0,0312865$ se *asciende* por la sub-rama inferior derecha de la figura 4. Los valores numéricos obtenidos para los autovalores de la

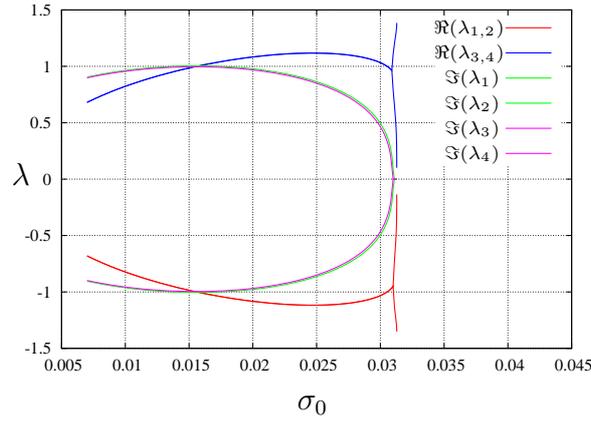


Figura 5: Parte real e imaginaria de los autovalores de \mathcal{M} vs. σ_0 (corresponden a la *sub-rama superior derecha*)

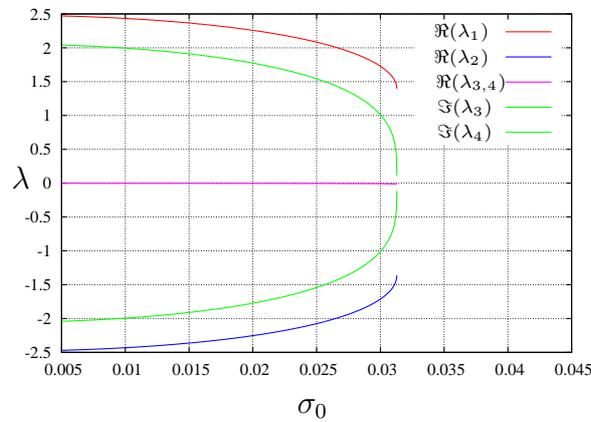


Figura 6: Parte real e imaginaria de los autovalores de \mathcal{M} vs. σ_0 (corresponden a la *sub-rama inferior derecha*)

matriz \mathcal{M} se resumen en la figura 6 como funciones de σ_0 . Para valores pequeños de σ_0 hay dos autovalores reales y una pareja de complejos conjugados ($\lambda_{3,4}$) con parte real negativa y pequeña (este detalle no puede observarse en la figura 6). Uno de los autovalores reales es siempre positivo (λ_1) y proporciona carácter inestable a las posiciones de equilibrio de esta sub-rama. El autovalor inestable, no obstante, se mantiene en el intervalo $\approx [1,39, 2,5]$.

Rama izquierda

Comenzando en $\sigma_0 = 0$ (L_2), al crecer σ_0 en el intervalo $\sigma_0 \in [0, 0,0332]$ se *asciende* por la rama izquierda de la figura 4; posteriormente, cuando $\sigma_0 > 0,0332$ se *desciende* por la rama acercándonos a Amaltea. La figura 7 resume los valores numéricos obtenidos para los autovalores de \mathcal{M} en función de σ_0 . Hay dos autovalores reales y una pareja de complejos conjugados ($\lambda_{3,4}$) cuya parte real es negativa y pequeña (este detalle no puede observarse en la figura 7). Uno de los autovalores reales (λ_2) es siempre positivo y comunica un carácter inestable a las posiciones de equilibrio de esta rama. El autovalor inestable alcanza un valor mínimo $\approx 1,62287677$ para $\sigma_0 \approx 0,033$; no obstante, para

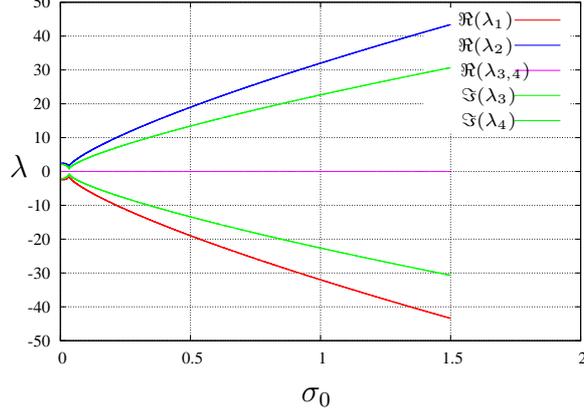


Figura 7: Parte real e imaginaria de los autovalores de \mathcal{M} vs. σ_0 (corresponden a la *rama izquierda*)

valores crecientes de σ_0 la inestabilidad es bastante más fuerte de la que se encuentra en la otra rama: $\lambda_2 \in \approx [1,62, 44]$ cuando $\sigma_0 \in [0, 1,5]$. Así pues, esta rama es más inestable que la rama derecha.

Análisis asintótico

Se puede realizar un análisis asintótico del problema explotando el hecho de que ν es pequeño frente a la unidad. El análisis no es complicado y conduce, cuando se reescribe en términos de ν y se desprecian términos de orden ν^2 y superiores, a la siguiente posición de equilibrio

$$x_e = -\frac{\nu}{\sigma_0} + \frac{\sigma_0 - 3}{\sigma_0^{5/2}} \nu^{3/2} + \mathcal{O}(\nu^2) \quad (26)$$

$$z_e = \sqrt{\frac{\nu}{\sigma_0}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\nu}{\sigma_0}\right)^{3/2} + \mathcal{O}(\nu^2) \quad (27)$$

$$\rho_e = \sqrt{\frac{\nu}{\sigma_0}} - \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{\sigma_0}\right)^{3/2} + \mathcal{O}(\nu^2) \quad (28)$$

Nótese que, en el plano (ξ_e, ζ_e) , esta solución coincide con la rama izquierda descrita en la figura 5 (en concreto, con la parte de la rama más próxima al eje Az); en la propia figura 5 se dibujan las soluciones estacionarias proporcionadas por esta solución.

Para estudiar la estabilidad lineal de una de estas soluciones estacionarias, las ecuaciones variacionales (20-21) siguen siendo válidas. Los coeficientes k_1, \dots, k_4 son funciones de (x_e, z_e) dados por las relaciones (22-25); por tanto, son funciones de ν, σ_0 . Cuando se

usan las relaciones asintóticas (26-27) resultan ser:

$$k_1 = \frac{\sigma_0^{3/2}}{\sqrt{\nu}} - 3 - \frac{13}{4}\sqrt{\sigma_0\nu} + \frac{16\sigma_0 - 27}{2\sigma_0}\nu + \mathcal{O}(\nu^{3/2}) \quad (29)$$

$$k_2 = 4\sigma_0 - \frac{3(\sigma_0 - 2)}{\sqrt{\sigma_0}}\sqrt{\nu} - \frac{(7\sigma_0^2 + 18\sigma_0 - 54)}{2\sigma_0^2}\nu + \mathcal{O}(\nu^{3/2}) \quad (30)$$

$$k_3 = 3\sigma_0 - \frac{3(\sigma_0 - 2)}{\sqrt{\sigma_0}}\sqrt{\nu} - \frac{(4\sigma_0^2 + 9\sigma_0 - 27)}{\sigma_0^2}\nu + \mathcal{O}(\nu^{3/2}) \quad (31)$$

$$k_4 = -\frac{2\sigma_0^{3/2}}{\sqrt{\nu}} + \frac{5}{2}\sqrt{\sigma_0\nu} - \frac{14\sigma_0 - 15}{2\sigma_0}\nu + \mathcal{O}(\nu^{3/2}) \quad (32)$$

Es evidente que los coeficientes k_1 y k_4 son grandes cuando se comparan con k_2 y k_3 . Si se retienen sólo los términos más importantes, las ecuaciones variacionales (20-21) adoptan la siguiente forma:

$$\frac{d^2\delta x}{d\tau^2} + \Omega^2\delta x = 0 \quad (33)$$

$$\frac{d^2\delta z}{d\tau^2} - 2\Omega^2\delta z = 0 \quad (34)$$

donde $\Omega^2 = \frac{\sigma_0^{3/2}}{\sqrt{\nu}}$. Los autovalores de estas ecuaciones son

$$\hat{\lambda}_1 = -\sqrt{2}\Omega, \quad \hat{\lambda}_2 = \sqrt{2}\Omega, \quad \hat{\lambda}_{3,4} = \pm\Omega i$$

siendo i la unidad imaginaria. Ahora se entiende el comportamiento de los autovalores encontrado en la sección previa. Si se compara con la figura 7 que recoge el resultado del análisis numérico, se observa que los autovalores reales de aquella figura corresponden a los autovalores $\hat{\lambda}_1$ y $\hat{\lambda}_2$ de este análisis asintótico.

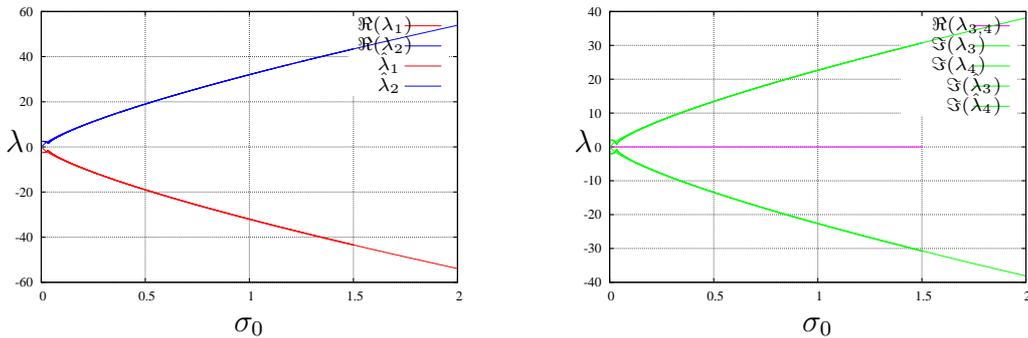


Figura 8: Partes real e imaginaria de los autovalores de la matriz \mathcal{M} en la *rama izquierda* vs. σ_0 . Se muestran los resultados del análisis numérico y del análisis asintótico. Autovalor inestable (izquierda)

Los gráficos de la figura 8 muestran los autovalores de la rama izquierda, tanto los obtenidos en la solución numérica, como los obtenidos en la solución asintótica. El acuerdo

entre las dos soluciones es excelente, salvo para valores pequeños de σ_0 para los cuales las diferencias entre una y otra solución se dejan notar.

La solución de las ecuaciones (33-34) son simplemente:

$$\delta x(\tau) = A_1 \cos(\Omega\tau + \phi_1), \quad \delta z(\tau) = A_2 \cosh(\sqrt{2}\Omega\tau + \phi_2)$$

La primera muestra que las variaciones en x van a evolucionar de forma oscilatoria; la segunda, recoge la inestabilidad propia de las posiciones de equilibrio alrededor de las cuales se ha linealizado el sistema. Lo que resulta evidente es que hay un nuevo tiempo característico $\tau_1 = \Omega\tau$; dado que $\nu \ll 1$, $\Omega \gg 1$ y los tiempos característicos en los que $\tau_1 = \mathcal{O}(1)$, corresponden a tiempos pequeños en la escala de τ . Así, las variaciones $(\delta x, \delta z)$ evolucionan en tiempos bastantes menores que el periodo orbital.

Control

Admítase que se eligen unas condiciones nominales para el funcionamiento del tether o, lo que es lo mismo, se fija un valor $\sigma = \sigma_0$ en el que el tether va a trabajar de forma permanente. Una vez fijado σ_0 , el tether está obligado a trabajar en las proximidades de la posición de equilibrio (x_e, z_e) correspondiente a dicho valor. Supondremos que la posición de equilibrio elegida pertenece a la rama izquierda de la figura 5. Se trata de ver si es posible controlar el sistema por medio de la corriente de tether. En otras palabras, supondremos que el valor de σ se moverá en las proximidades de σ_0 , es decir, se admitirá que es

$$\sigma = \sigma_0 + u(\tau)$$

y se planteará el siguiente problema: ¿es posible elegir la función $u(\tau)$ de forma que se cancele la inestabilidad de la posición de equilibrio en cuya vecindad va a evolucionar el sistema?

Las ecuaciones que gobiernan las variaciones alrededor de la posición de equilibrio son ahora

$$\frac{d^2\delta x}{d\tau^2} - 2\frac{d\delta z}{d\tau} + k_1\delta x + k_2\delta z = -u(\tau)\frac{z_e}{\rho_{1e}} \quad (35)$$

$$\frac{d^2\delta z}{d\tau^2} + 2\frac{d\delta x}{d\tau} + k_3\delta x + k_4\delta z = u(\tau)\frac{1+x_e}{\rho_{1e}} \quad (36)$$

y en ellas, los valores de k_1, \dots, k_4 siguen estando dados por las relaciones (22-25). Si se usa, por simplicidad, la versión asintótica de estas ecuaciones variacionales, adoptan la forma:

$$\frac{d^2\delta x}{d\tau^2} + \Omega^2\delta x = 0 \quad (37)$$

$$\frac{d^2\delta z}{d\tau^2} - 2\Omega^2\delta z = u(\tau) \quad (38)$$

Bastaría pues con elegir $u(\tau)$ de la siguiente forma:

$$u(\tau) = -3\Omega^2\delta z$$

para asegurar que la inestabilidad en la variable δz desaparece. En efecto, con dicha elección la ecuación inestable (38) se convierte en

$$\frac{d^2\delta z}{d\tau^2} + \Omega^2\delta z = 0$$

y la evolución de δz sería, al igual que la de δx , oscilatoria.

Así, de manera natural, nos vemos conducidos a estudiar cómo influye en la dinámica del sistema la siguiente ley de corriente

$$\sigma = \sigma_0 \left\{ 1 - 2\delta \sqrt{\frac{\sigma_0}{\nu}} (z - z_e) \right\} \quad (39)$$

en donde δ es un parámetro adimensional arbitrario, y $z_e = z_e(\sigma_0, \nu)$ es conocido (es una solución de las ecuaciones de equilibrio y, si se admite la aproximación asintótica, está dado por la ecuación (27)).

El sistema de ecuaciones es ahora:

$$\ddot{x} - 2\dot{z} = 1 + x - \nu \frac{x}{\rho^3} - (1 - \nu) \frac{1 + x}{\rho_1^3} - \sigma_0 \left\{ 1 - 2\delta \sqrt{\frac{\sigma_0}{\nu}} (z - z_e) \right\} \frac{z}{\rho_1} \quad (40)$$

$$\ddot{z} + 2\dot{x} = z - \nu \frac{z}{\rho^3} - (1 - \nu) \frac{z}{\rho_1^3} + \sigma_0 \left\{ 1 - 2\delta \sqrt{\frac{\sigma_0}{\nu}} (z - z_e) \right\} \frac{1 + x}{\rho_1} \quad (41)$$

y en él, σ_0, ν y z_e son constantes. El objetivo es, ahora, estudiar cómo evolucionan las propiedades de estabilidad del sistema con δ , manteniendo σ_0, ν y z_e constantes. Nótese que si (x_e, z_e) es una posición de equilibrio del sistema (10-12), también es solución estacionaria del sistema (40-41), pues los términos de control que multiplican a δ se anulan en la misma. Tal como se ha deducido la ley de corriente (39), el sistema debe ser estable para valores de δ superiores a la unidad ($\delta > 1$).

El segundo problema que ha de abordarse es el siguiente: una vez fijado el valor de σ_0 , ¿es posible operar el tether para proporcionar la ley de corriente (39) para un cierto valor de δ que conduzca a estabilidad?

Una ley alternativa podría ser

$$\sigma = \sigma_0 \left\{ 1 - 2\delta \sqrt{\frac{\sigma_0}{\nu}} (\rho - \rho_e) \right\} \quad (42)$$

Conclusiones

En este artículo se propone un sistema que permite obtener energía de forma continuada a partir de un tether electrodinámico trabajando en régimen generador. La forma de obtener energía implica deorbitar una de las lunas internas de Júpiter

Mostramos cuales son las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema y deducimos las posiciones de equilibrio en las que debería operar el mencionado sistema. Dichas posiciones son de equilibrio inestable, como muestra el análisis lineal que se desarrolla en el artículo.

Se propone un esquema de control que permite, con la ayuda del propio tether, estabilizar el sistema en la posición de equilibrio nominal que se haya elegido. También se muestra como extender el control para obtener estabilidad asintótica.

Antes de entrar en la fase de diseño, debe extenderse el análisis para incluir la dinámica de actitud del tether, teniendo en cuenta el par gravitatorio producido por Amaltea.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto de investigación **Dynamics of satellite orbit descent/raise using electrodynamic tethers** (ESP2004-04376) financiado por la DGI del Ministerio de Educación y Ciencia.

Referencias

- [1] J. R. Sanmartín, M. Martínez-Sánchez & E. Ahedo, “Bare Wire Anodes for Electrodynamic Tether”, *Journal of Propulsion and Power*, 9(0):352–320, 1993.
- [2] R. I. Samanta Roy, D. E. Hastings and E. Ahedo, “Systems analysis of electrodynamic tethers,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 29, 1992, pp. 415–424.
- [3] G. Vannaroni, M. Dobrowolny and F. De Venuto, “Deorbiting of LEO Satellites with Electrodynamic Tethers”, *Proceedings Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, January, 2000.
- [4] J. Corsi & L. Iess, “Stability and Control of Electrodynamic Tethers for De-orbiting Applications,” *Acta Astronautica*, Vol. 48, No. 5-12, 2001, pp. 491–501.
- [5] L. Iess, C. Bruno, C. Olivieri, et al., “Satellite de-orbiting by means of electrodynamic tethers - Part I: General concepts and requirements,” *Acta Astronautica* , Vol. 50(7), April 2002, pp.. 399–406
- [6] L. Iess, C. Bruno, C. Olivieri, et al., “Satellite de-orbiting by means of electrodynamic tethers - Part II: System configuration and performance,” *Acta Astronautica* , Vol. 50(7), April 2002, pp.. 407–416
- [7] M. Sanjurjo & J. Peláez , “Power generation using self-balanced electrodynamic tethers in debris mitigation scenarios” (Paper AAS07-196) of *The 2007 AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting Sedona, Arizona, January 28 - February 1, 2007*.

- [8] E. Ahedo and J. R. Sanmartin, "Analysis of bare-tethers systems for deorbiting Low-Earth-Orbit satellites," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 39, No. 2, March-April, 2002, pp. 198–205.
- [9] J. Peláez, "Self balanced electrodynamic tethers," *Paper AIAA 2004-5309, The 2004 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, Providence, Rhode Island, USA, 16-19 August 2004.
- [10] J. Peláez, M. Sanjurjo & J. Fontdecaba, "Satellite deorbiting using a self balanced electrodynamic tether," *Paper IAC-04-A.5.08, The 55th International Astronautical Congress*, Vancouver, Canada, October 2004.
- [11] J. Peláez & M. Sanjurjo, "Generator regime of self balanced electrodynamic bare tethers" *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol.120 (PART II), pp. 1651-1670, 2005.
- [12] J. Peláez & M. Sanjurjo, "Generator regime of self balanced electrodynamic bare tethers" *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 43, # 6, November-December 2006, pp. 1359-1369.

