Las medallas Fields

Sección a cargo de

Adolfo Quirós Gracián

Que el último Congreso Mundial de Matemáticos se haya celebrado en Madrid nos sirve como excusa para modificar ligeramente la forma en que, en esta sección, solemos cubrir los ICM. Tras una breve introducción, hablaremos de premios y premiados, pero complementando en esta ocasión las Medallas Fields con los Premios Nevanlinna y Gauss. Aprovecharemos para ello las semblanzas de los galardonados preparadas por IMU, por lo que el tono será más divulgativo que el habitual en esta sección (¡lo que quizás agradezcan los lectores!). Completaremos este *edición especial* con declaraciones de los medallistas Fields. Dos proceden de otros medios, pero el "toque La Gaceta" lo dará una entrevista con Terence Tao conseguida gracias a los buenos oficios de nuestra compañera Ana Vargas, quien es coautora de tres artículos con este flamante medallista Fields.

Las Medallas Fields y otros galardones del ICM 2006

por

Adolfo Quirós Gracián

Premios y Premiados

Como es tradición desde el Congreso de Oslo en 1936, el acto central de la Ceremonia Inaugural del ICM de Madrid ha sido la entrega de los galardones concedidos por la Unión Matemática Internacional (IMU son sus siglas en inglés). En esta ocasión, junto a las ya veteranas *Medallas Fields* y al séptimo *Premio Nevanlinna* otorgado "por una aportación destacada a los aspectos matemáticos de las ciencias de la información" (el primero se entregó en 1982), se ha concedido por primera vez el *Premio Carl Friederich Gauss para aplicaciones de las matemáticas*.

El premio Gauss ha sido creado para contribuir a difundir entre el público que las matemáticas tienen un impacto profundo en todas las ciencias, y, más o menos indirectamente, en la tecnología, los negocios y la vida cotidiana. El premio se concede de forma conjunta por la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (DMV = Unión Matemática Alemana) e IMU, y está administrado por la

DMV. Consiste en una medalla y en un premio económico (valorado actualmente en 10.000 euros). El premio procede del excedente del Congreso Internacional de Matemáticos ICM 98 celebrado en Berlín.

Recibir una Fields o el Nevanlinna exigían no haber cumplido 40 años antes del 1 de enero de 2006. Sin embargo, las normas que rigen el premio Gauss indican que "es concedido, en particular, por el impacto práctico que haya tenido el trabajo del galardonado. Puesto que la utilidad concreta de los resultados matemáticos no es con frecuencia aparente de manera inmediata, y dado que puede que la aplicabilidad y la importancia práctica no se manifiesten hasta después de pasado bastante tiempo, la elección del ganador del premio no debe estar condicionada por consideraciones de edad".

Los galardonados en el Congreso Mundial de Matemáticas de Madrid 2006 han sido:

MEDALLAS FIELDS

- Andrei Okounkov (Rusia; Princeton University, USA), "por sus contribuciones en la interacción entre probabilidad, teoría de representaciones y la geometría algebraica".
- Grigori Perelman (Rusia; San Petersburgo), "por sus contribuciones a la geometría y su revolucionaria profundización en la estructura geométrica y analítica del flujo de Ricci".
- Terence Tao (Australia; University of California at Los Angeles, USA), "por sus contribuciones a las ecuaciones en derivadas parciales, combinatoria, análisis armónico y teoría de números aditiva".
- Wendelin Werner (Francia; Université Paris-Sud), "por sus contribuciones al desarrollo de la evolución estocástica de Loewner, la geometría del movimiento browniano de dos dimensiones y la teoría conforme de campos".

PREMIO NEVANLINNA

- Jon M. Kleinberg, "por contribuciones profundas y perceptivas a la teoría matemática del mundo de la información global, entre ellas: el influyente algoritmo de "hubs and authorities"; métodos para encontrar cadenas cortas en redes sociales grandes; técnicas para modelar, identificar y analizar ráfagas en flujos de datos; modelos teóricos para el desarrollo de comunidades en redes sociales; y contribuciones a la teoría matemática de *clustering*".

PREMIO CARL FRIEDERICH GAUSS

- Kiyoshi Itô, "por sentar las bases de la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y del Análisis Estocástico. El trabajo de Itô ha resultado ser una de las principales innovaciones matemáticas del siglo

XX y ha encontrado un amplio abanico de aplicaciones fuera de las matemáticas. El cálculo de Itô se ha convertido en herramienta esencial en campos como la ingeniería (filtrado, estabilidad y control en presencia de ruido), física (turbulencia y teoría de campos conforme), y biología (dinámica de poblaciones). En la actualidad es particularmente importante en economía y finanzas, con la valoración de opciones como ejemplo prominente.

El 22 de agosto de 2006, S. M. el Rey Juan Carlos I hizo entrega de sus galardones a Okounkov, Tao, Werner, Kleinberg y Junko Itô, la hija menor de Kiyoshi Itô, quien no pudo venir a Madrid por motivos de salud (el Presidente de IMU, John Ball, entregó la medalla Gauss a Itô en persona el 14 de septiembre en Kyoto).

A estas alturas probablemente todos nuestros lectores saben que Grigori Perelman no ha aceptado la Medalla Fields. John Ball viajó *ex profeso* a San Petersburgo para intentar convencerle, pero, nos dice: "Quedé desilusionado por su rechazo. Su motivación gira alrededor de su sensación de aislamiento de la comunidad matemática". Dicha comunidad se entero de que Perelman no quería la medalla el mismo día 22 de agosto, cuando muchos de los grandes periódicos (también los españoles) se hacían eco de un artículo aparecido en la revista *The New Yorker* [NG].

Se puede especular sobre la verdadera motivación de Perelman, quién también ha renunciado a su plaza en la sede de San Petersburgo del Instituto Steklov, y sobre si IMU hizo bien en concederle la medalla en cualquier caso: lo que se premia son únicamente las matemáticas, no la personalidad, pero, ¿es correcto renunciar al procedimiento habitual de publicación en una revista tras un proceso de revisión por pares? Por otra parte, dada la importancia del trabajo de Perelman y que los artículos están disponibles en internet, ¿no han sido ya sometidos a suficiente escrutinio? Más mundanamente, y teniendo en cuenta el pequeño número de grandes premios matemáticos, ¿debe invertirse uno en quien ni lo desea ni lo agradece? También se puede discutir (¡y se discute!) si "el caso Perelman" ha sido bueno o malo para la imagen de la profesión (desde luego ha sido muy útil para aparecer en los medios de comunicación). Pero es difícil decidir si ha conseguido transmitir sobre todo una idea de las matemáticas como ciencia pura y noble, de los matemáticos como seres extraños y fuera de este mundo, o de un colectivo donde las envidias y codazos no son ni más ni menos comunes que en el resto de la sociedad.

Lo que sí debemos aclarar es que, siendo la primera vez que alguien rechaza la Medalla Fields, no es la primera vez que el galardonado no la recoge. Ya en la primera ocasión (Oslo 1936), Jesse Douglas, aunque estaba en la ciudad, no asistió a la ceremonia probablemente por problemas de salud. La Medalla la aceptó en su nombre Norbert Wiener [G]. En 1966, Alexander Grothendieck se negó a recogerla en el ICM de Moscú como protesta por la represión soviética a la insurrección húngara de 1956 [AJ]. Más tarde, el gobierno soviético impidió que Sergei P. Novikov viajase a Niza (1970) y Gregori Margulis a Helsinki (1978) para recoger sus medallas.

Terminemos esta sección señalando que los encargados de presentar los trabajos de los galardonados, como siempre grandes expertos, fueron:

- *Andrei Okounkov*: Giovanni Felder (ETH ZŸrich, Suiza).
- *Grigori Perelman*: John Lott (University of Michigan, USA).
- *Terence Tao*: Charles Fefferman (Princeton University, USA).
- *Wendelin Werner*: Charles Newman (Courant Institute, USA).
- *Jon Kleinberg*: John Hopcroft (Cornell University, USA).
- *Kiyoshi Itô*: Hans Föllmer (Cornell University, USA).

El Comité Fields Y Otras Circunstancias, ...

El Comite que ha seleccionado las Medallas Fields de 2006 ha estado presidido por John Ball (University of Oxford, Reino Unido) y formado por Enrico Arbarello (Università di Roma, Italia), Jeff Cheeger (Courant Institute, USA), Donald Dawson (McGill University, Canada), Gerhard Huisken (Universität Tübingen, Alemania), Curtis McMullen (Harvard University, USA), Alexey Parshin (Steklov Institute, Russia), Tom Spencer (Institute for Advanced Study, Princeton, USA) y Michèle Vergne (Ecole Polytechnique, Francia).

Un lector atento que compare con el Comité Fields de 2002 [Q] notará algunas diferencias: mucho menor número de matemáticos que trabajan en Estados Unidos (en 2002 eran 8 de 9); sólo un medallista Fields, McMullen, frente a tres en 2002; por qué no decirlo, entre los comisionados había esta vez una mujer; una mayor presencia de “matemáticos aplicados” en el Comité, que estaba presidido por el propio Presidente de IMU. No valoraremos estas circunstancias, pero sí consideramos relevante poner la última en el contexto de lo que John Ball dijo en la ceremonia de entrega de premios que habían sido los encargos de IMU al Comité Fields (además de respetar el tradicional límite de edad):

- Elegir al menos dos, y muy preferiblemente cuatro, medallistas Fields.
- Prestar atención en la elección a que queden representados una diversidad de campos matemáticos

Quizás como consecuencia de esto o, más probablemente, simplemente porque ya tocaba[1], por primera vez se ha concedido una Medalla Fields a un

[1] Sin presumir de adivino, el autor de estas líneas sugirió precisamente esa posibilidad a quienes le acompañaban en el coche camino del Palacio de Congresos la mañana del 22 de agosto, y les aseguro que no tenía ninguna información privilegiada.

probabilista, Wendelin Werner. Y puede que el enorme aplauso que acompañó el anuncio del premio a Itô (ante un público, no lo olvidemos, esencialmente de matemáticos "puros") mostrase que la comunidad está preparada para estas novedades.

En cualquier caso, creo que es justo señalar que aparecen ideas probabilísticas en el trabajo de todos los premiados, salvo quizás Perelman. Esto es obvio en el caso de Werner, Kleinberg e Itô; pero uno de los objetos centrales del interés de Okounkov son las matrices aleatorias; y Tao declaró explícitamente en su conferencia plenaria que mucho de su trabajo en entender un problema es separar la parte gobernada por estructuras de lo gobernado por lo aleatorio.

Es posible que, como dice Terence Tao en la entrevista que nos ha concedido, veamos en el futuro una mayor síntesis entre las matemáticas de la estructura (algebra y geometría), las matemáticas de lo aleatorio (análisis y probabilidad), y las matemáticas para descomponer objetos generales en estos dos tipos (algoritmos y flujos).

¿Era esperable que fuesen estos y no otros los galardonados? Perelman estaba en boca de todos, centrándose las discusiones en si se aceptaba como válida su demostración y en si había o no cumplido ya los 40. A Tao, con sólo 31 años, se le había sido invitado a dar una conferencia plenaria, y en todos los foros se le daba como seguro para una Medalla Fields, entre otras cosas por la diversidad de campos en que ha obtenido resultados brillantes. Acertar *a priori* los medallistas es tarea casi imposible, pero desde luego todos los galardonados estaban "en la pomada": estaba previsto que Kleimberg, Okounkov y Werner diesen conferencias invitadas en secciones del ICM. El caso de Itô puede parecer el más difícil: no hay restricciones de edad y además era el primer Premio Gauss, con lo que el campo de juego todavía no estaba marcado. Pero, como ya hemos señalado, la elección de Itô fue acogida con entusiasmo. En resumen, como es costumbre y no podía ser de otro modo, los comités responsables de los tres premios han hecho bien su tarea.

Referencias

[1] L.I. Alonso, A. Jeremías, *La obra de Alexander Grothendieck,* La Gaceta de la RSME **4** (2001) 3, 623–638.

[2] J. Gonzalo, *Jesse Douglas y el problema de Plateau,* La Gaceta de la RSME **8** (2005) 2, 453–469.

[3] S.I. Nasar, D. Gruber, *Manifold Destiny. A legendary problem and the battle over who solved it,* The New Yorker, 28-8-2006 (publicado electrónicamente 21-8-2006,
http://www.newyorker.com/fact/content/articles/060828fa_fact2

[4] A. Quirós, *Las Medallas Fields de 2002,* La Gaceta de la RSME **7** (2004) 1, 195–213.

Adolfo Quirós
Correo electrónico: adolfo.quiros@uam.es

El trabajo de los Medallas Fields de 2006

Andrei Okounkov

Andrei Okounkov nació en Moscú en 1969, doctorándose en matemáticas en la Universidad Estatal de Moscú en 1995. Es profesor de matemáticas en la Universidad de Princeton y ha sido investigador en la Academia Rusa de Ciencias, el Instituto de Estudios Avanzados del Princeton, la Universidad de Chicago y la de California en Berkeley. Entre sus distinciones se encuentra el haber sido seleccionado como investigador de la Fundación Sloan (2000) y la Fundación Packard (2001), así como haber obtenido el premio de la Sociedad Matemática Europea (2004).

El trabajo de Andrei Okounkov ha puesto de manifiesto profundas y novedosas conexiones entre diferentes áreas de las matemáticas y ha proporcionado nuevas perspectivas en problemas que se presentan en física. Aunque su trabajo es difícil de clasificar, porque toca una gran variedad de áreas, dos referencias claras son el uso de nociones de aleatoriedad y las ideas clásicas de la teoría de representaciones. Esta combinación ha demostrado ser de gran potencialidad al atacar problemas de geometría algebraica y mecánica estadística.

Uno de los objetos básicos de estudio en teoría de la representación son los grupos simétricos. El *grupo simétrico de n letras* es el conjunto de todas las posibles permutaciones de n objetos junto con las reglas para combinar las permutaciones. Como es bien sabido, el tamaño de este grupo, $n!$, crece muy rápidamente con n.

La teoría de representaciones permite estudiar el grupo simétrico representándolo mediante otros objetos matemáticos que ofrecen una visión de las características más significativas del grupo. Se trata de una subdisciplina bien desarrollada, que tiene importantes aplicaciones en las propias matemáticas y en otros campos de la ciencia, como la mecánica cuántica. Resulta que, para el grupo simétrico de n letras, los bloques con que se construyen todas sus representaciones están indexados por las particiones de n, es decir, secuencias de números positivos que sumados dan n. Por ejemplo $2+3+3+4+12$ es una partición de 24.

A través del lenguaje de las particiones, la teoría de las representación conecta con otra rama de las matemáticas, la combinatoria, que es el estudio de objetos que tienen partes discretas (no continuas) y distinguibles. Muchos fenómenos continuos en matemáticas están relacionados entre sí por tener una subestructura discreta común, de la que surgen cuestiones combinatorias. Los fenómenos continuos también pueden discretizarse, haciéndolos asequibles a los métodos combinatorios. Las particiones se encuentran entre los objetos combinatorios más básicos, y su estudio se remonta al menos al siglo XVIII.

La aleatoriedad se introduce en la combinatoria cuando uno considera objetos combinatorios enormes, como el conjunto de todas las particiones de números muy grandes. Si uno se plantea la partición de un número mediante su división aleatoria en números más pequeños, puede preguntarse ¿cuál es la probabilidad de obtener una determinada partición? Cuestiones semejantes aparecen en teoría de la representación de grupos simétricos grandes. Estas relaciones entre la probabilidad y la teoría de representaciones fueron objeto de estudio por matemáticos rusos durante los años 70 y 80 del siglo XX. La clave para encontrar la herramienta adecuada desde la teoría de la probabilidad apropiada para esta cuestión procede del estudio de las particiones como representaciones del grupo simétrico. Andrei Okounkov asumió este punto de vista y lo ha desarrollado con espectacular éxito aplicándolo a la resolución de una amplia variedad de problemas.

Uno de sus primeros resultados importantes se refiere a las *matrices aleatorias*, que han sido ampliamente aplicadas en física. Los coeficientes de estas matrices son números elegidos aleatoriamente, y desde los años 50, los físicos estudiaron las propiedades estadísticas de los valores propios de matrices aleatorias para avanzar en el estudio del problema de la predicción y distribución de los niveles de energía del núcleo atómico. En años recientes, las matrices aleatorias han recibido una renovada atención por parte de matemáticos y físicos.

Okounkov ha utilizado ideas procedentes de la teoría cuántica de campos para demostrar una sorprendente conexión entre las matrices aleatorias y las subsucesiones crecientes en las permutaciones de números. Por ejemplo, en una permutación de números del 1 al 8, pongamos 71452638, dos subsucesiones crecientes serían 14568 y 1238. Hay una forma de colocar estas subsucesiones de forma jerarquizada: la más larga seguida por la segunda más larga, la tercera más larga, etc. Okounkov demostró que, si n es muy grande, la secuencia o sucesión de los mayores valores propios de una matriz aleatoria $n \times n$ se comporta, desde el punto de vista probabilístico, de la misma forma que las longitudes de las mayores subsucesiones crecientes en las permutaciones de los números del 1 a n. En esta demostración, Okounkov abordó el problema de una forma extremadamente original, al reformularlo en un contexto completamente diferente: como comparación de dos descripciones diferentes de una superficie aleatoria. Este trabajo estableció una conexión con la geometría algebraica, proporcionándole un germen para sus posteriores trabajos en esa materia.

Las superficies aleatorias también aparecen en el trabajo de Okounkov en mecánica estadística. Si calentamos un cristal cúbico desde una temperatura muy baja encontramos que las esquinas del cubo van desapareciendo a medida que el cubo se derrite. La geometría de este proceso puede visualizarse imaginando una esquina consistente en un conjunto de bloques minúsculos. El derretimiento del cristal equivale a la progresiva desaparición aleatoria de estos bloques. Relacionando la partición del cristal en estos bloques con las particiones de enteros, Okounkov proporcionó sus propios métodos para lidiar con el análisis de superficies aleatorias. En un trabajo conjunto con Richard Kenyon, demostró de forma sorprendente que la parte derretida del cristal, proyectada en dos dimensiones, tiene una forma definida y está siempre rodeada por una curva algebraica, esto es, una curva que puede ser definida mediante una ecuación polinómica. Esta conexión con la geometría algebraica real es bastante inesperada.

Durante los últimos años, Okounkov, junto con Rahul Pandharipande y otros colaboradores, ha escrito una larga serie de artículos sobre cuestiones de geometría algebraica enumerativa, un campo con una larga historia, que en años recientes ha sido enriquecido por el intercambio de ideas entre matemáticos y físicos. Una forma clásica de estudiar curvas algebraicas es variar los coeficientes de las ecuaciones polinómicas que definen las curvas y aplicar algunas condiciones como, por ejemplo, que las curvas pasen a través de un conjunto de puntos específicos. Con muy pocas condiciones, el conjunto de curvas es infinito; con muchas, el conjunto es vacío, pero con un número equilibrado y exacto de condiciones se obtiene un conjunto finito de curvas. El problema de contar el número de curvas de esta manera (un problema planteado desde hace mucho tiempo en geometría algebraica, que también aparece en la teoría de cuerdas) es la principal preocupación de la geometría enumerativa. Okounkov y sus colaboradores han realizado contribuciones sustanciales a este campo, proporcionando ideas desde la física y desplegando un amplio abanico de herramientas procedentes del álgebra, la combinatoria y la geometría. La continuación de esta investigación por Okounkov supone un maravilloso intercambio de ideas entre las matemáticas y la física.

GRIGORI PERELMAN

Grigori Perelman nació en 1966 en lo que entonces era la Unión Soviética. Se doctoró en la Universidad Estatal de San Petersburgo. Durante los años 90 pasó una temporada en Estados Unidos, incluyendo una estancia como *Miller Researcher* de la Universidad de California en Berkeley. Durante algunos años fue investigador en el Instituto Steklov de Matemáticas, en San Petersburgo, y en 1994 fue conferenciante invitado en el Congreso Internacional de Matemáticos de Zurich.

El nombre de Grigori Perelman se ha hecho familiar entre el público interesado en cuestiones científicas. Su trabajo del periodo 2002-2003 proporcionó una rompedora visión del estudio de las ecuaciones de evolución y sus singularidades. Y más significativo aún, sus resultados han proporcionado una forma de resolver dos importantes problemas de la topología: la conjetura de Poincaré y la conjetura de la geometrización de Thurston. Después de más de tres años de intensivo escrutinio, los mayores expertos no han encontrado serias objeciones al trabajo. Los pequeños errores y detalles oscuros han sido aclarados por diversos grupos, lo que ha permitido a John Morgan decir en su charla del 24 de agosto en el IACM que "en 2003 Perelman resolvió la Conjetura de Poincaré".

Durante décadas, la conjetura de Poincaré ha sido considerada uno de los más importantes problemas de las matemáticas. La cuestión recibió una mayor atención del público en general cuando fue incluido por el Instituto

Clay de Matemáticas como uno de los siete *Problemas del Milenio*, para cada uno de los cuales esta institución estableció, en el año 2000, un premio de un millón de dólares por su resolución. El trabajo de Perelman sobre la conjetura de Poincaré supone la primera candidatura seria para obtener uno de estos premios.

La conjetura de Poincaré pertenece a la topología, que estudia las propiedades fundamentales de las formas geométricas, las que permanecen inalteradas cuando se deforman. Un ejemplo sencillo de una forma es el de una 2-esfera (una esfera ordinaria), que es la superficie en dos dimensiones de una bola en un espacio tridimensional. Otra forma de visualizar la 2-esfera es pensar en un disco colocado sobre un plano bidimensional e identificar los puntos de su borde que pasaría a ser el polo norte dela 2-esfera. Aunque globalmente, una 2-esfera es muy diferente de un plano, cada punto de la esfera está en una región que semeja un plano. Esta propiedad de ser localmente como un plano es la propiedad definitoria de una variedad de dimensión 2 o 2-variedad. Otro ejemplo de una 2-variedad es el toro, que es la superficie de un "donut".

Aunque localmente la 2-esfera y el toro parecen iguales, globalmente sus topologías son diferentes: sin agujerear una 2-esfera no hay forma de deformarla para convertirla en un toro. He aquí otra manera de ver esta distinción: consideremos un lazo colocado sobre una 2-esfera. No importa donde se coloque, el lazo podrá ser reducido a un punto, y la reducción se puede hacer sin salirse de la esfera. Ahora imaginemos un lazo colocado sobre un toro; si rodea el agujero del toro el lazo no puede ser reducido a un punto. Si el lazo puede ser reducido a un punto en una variedad, ésta se denomina *simplemente conexa.* La 2-esfera es de este tipo mientras que el toro no. El análogo de la conjetura de Poincaré en dos dimensiones sería la afirmación de que cualquier 2-variedad simplemente conexa y finita puede ser deformada hasta convertirse en una 2-esfera, y esta afirmación es correcta. Es natural preguntarse entonces ¿qué podemos decir de una 2- variedad que no sea simplemente conexa? Resulta que pueden clasificarse de acuerdo con el número de agujeros que tengan: se pueden deformar hasta convertirse en un toro, o un doble toro (con dos agujeros), o en un triple toro (la superficie de un "pretzel"), etc. (Uno necesita entonces otras dos hipótesis técnicas en esta cuestión: compacidad y orientabilidad).

La geometría ofrece otra forma de clasificar las 2-variedades. Cuando uno observa topológicamente una variedad no existe la noción de distancia. Si la dotamos de esta cualidad (es decir, añadimos una métrica) y medimos la distancia entre dos de sus puntos obtenemos la noción geométrica de curvatura. Las 2-variedades pueden clasificarse por su geometría: una 2-variedad con curvatura positiva puede deformarse para convertirse en una 2-esfera; una con curvatura 0 puede deformarse en un toro, y una con curvatura negativa puede deformarse en un toro con más de un agujero. La conjetura de Poincaré, propuesta originalmente por el matemático francés Henri Poincaré en 1904, se refiere a las variedades de dimensión 3, o 3-variedades. Un ejemplo sencillo de este tipo es la 3-esfera: de forma análoga con la 2-esfera, uno obtiene una

3-esfera tomando una bola en tres dimensiones e identificando los puntos de su contorno en un solo punto. (Igual que el espacio tridimensional es el hogar natural de una 2-esfera, el de una 3-esfera es un espacio cuatridimensional, el cual resulta difícil de visualizar). ¿Puede cada 3-variedad ser deformada para convertirse en una 3-esfera? La conjetura de Poincaré afirma que la respuesta a esta pregunta es que sí.

De igual manera que con las 2-variedades, uno puede pensar en una clasificación de las 3-variedades. En los años 70, el medallista Fields William Thurston hizo una nueva conjetura, que ha sido denominada la conjetura de geometrización de Thurston, que proporciona una forma de clasificar las 3-variedades. Esta conjetura ofrece una visión global de las 3-variedades que incluye la conjetura de Poincaré como un caso especial. Thurston propuso que, de forma análoga al caso de las 2-variedades, las 3-variedades podían ser clasificadas utilizando la geometría. Pero la analogía no llega muy lejos, porque éstas son mucho más diversas y complejas que las 2-variedades. Thurston identificó y analizó ocho estructuras geométricas y conjeturó que permitían clasificar todas las 3-variedades posibles. Su trabajo revolucionó el estudio de la geometría y la topología. Las ocho estructuras geométricas fueron intensamente investigadas y la conjetura de la geometrización fue verificada en muchos casos. El propio Thurston la demostró en un gran número de variedades. Pero la demostración global de la conjetura permaneció sin resolver.

En 1982, Richard Hamilton identificó una ecuación de evolución particular, llamada *flujo de Ricci*, como la clave para resolver las conjeturas de Poincaré y de geometrización de Thurston. El flujo de Ricci es similar a la ecuación del calor, que describe cómo fluye el calor de la parte más caliente de un objeto a la más fría, hasta homogeneizar la temperatura de manera uniforme en todo el objeto. La idea de Hamilton fue utilizar el flujo de Ricci para homogeneizar las 3-variedades y mostrar que su geometría se ajusta a la clasificación de Thurston. Durante más de veinte años, Hamilton y otros especialistas en geometría analítica hicieron grandes progresos en la comprensión del flujo de Ricci, pero no consiguieron resolver el problema de las "singularidades", que son regiones donde la geometría, en lugar de evolucionar hacia la homogeneidad, muestra repentinos e incontrolados cambios.

Así estaban las cosas cuando el trabajo de Perelman apareció en escena. En una serie de artículos, iniciados a finales de 2002 y colocados en un archivo de preprints, Perelman mostró revolucionarios resultados sobre el flujo de Ricci y sus singularidades. Proporcionó nuevas formas de analizar la estructura de las singularidades y mostró cómo se relacionan con la topología de las variedades. Perelman rompió el parón que se había producido en el programa que Hamilton había establecido y validó la idea de utilizar el flujo de Ricci para demostrar las conjeturas de Poincaré y de geometrización de Thurston. Aunque el trabajo de Perelman parece poner un definitivo punto final en la demostración de ambas conjeturas, sus contribuciones no terminan aquí. Las técnicas que ha introducido para manejar singularidades en el flujo de Ricci han generado una gran excitación entre los especialistas del análisis geométrico y están empezando a utilizarse para resolver otros problemas en este campo.

La combinación de una visión profunda y unas técnicas brillantes señalan a Perelman como un matemático extraordinario. Al iluminar el camino hacia la resolución de dos problemas fundamentales de la topología en dimensión 3, ha producido un profundo impacto en las matemáticas.

Terence Tao

Terence Tao nació en Adelaida, Australia, en 1975. Obtuvo el grado de doctor en matemáticas en 1996 en la Universidad de Princeton. Es profesor de matemáticas en la University of California, Los Angeles. Entre sus distinciones se cuentan premios de la Fundación Sloan, la Fundación Packard y el Instituto Clay. En 2000 recibió el premio Salem; en 2002 el premio Bocher de la *American Mathematical Society*; y en 2005 el premio Conant (junto con Allen Knutson), también de la *American Mathematical Society*.

Terence Tao tiene una maravillosa habilidad para resolver problemas, y su espectacular trabajo ha tenido gran impacto en diversas áreas de las matemáticas. Tao combina una enorme potencia técnica, una originalidad del todo fuera de lo común para abordar nuevas ideas y un punto de vista de una espontaneidad que deja a los demás matemáticos desarmados, preguntándose "¿y cómo nadie lo había visto hasta ahora?".

A sus 31 años Tao ha escrito más de 80 trabajos de investigación, con más de 30 colaboradores. Sus intereses abarcan una amplia franja de las matemáticas, incluyendo análisis armónico, ecuaciones en derivadas parciales no lineales y combinatoria. "Trabajo en muchas áreas, pero no las considero desconectadas", declaró Tao en una entrevista publicada en la Memoria Anual del Instituto Clay de Matemáticas. "Tiendo a ver las matemáticas como un tema único, y me siento especialmente feliz cuando tengo la oportunidad de trabajar en un proyecto que implica varios campos a la vez".

Dado el amplio rango de sus hallazgos, es difícil resumir la obra de Tao. Una breve selección de sus logros puede acaso dar una idea de la amplitud y la profundidad del trabajo de este extraordinario matemático.

En primer lugar está la colaboración de Tao con Ben Green, que ha dejado un importante resultado sobre los "ladrillos fundamentales" de las matemáticas, los números primos. Green y Tao abordaron un problema clásico que probablemente fue planteado por primera vez hace varios siglos: ¿Contiene el conjunto de números primos progresiones aritméticas de cualquier longitud? Por ejemplos 3, 5, 7 es una progresión aritmética de primos de longitud 3, donde los números difieren en 2; 109, 219, 329, 439, 549 es una progresión de longitud 5, donde los números difieren en 110. En 1974 se produjo un gran avance en la comprensión de las progresiones aritméticas, cuando el matemático húngaro Emre Szemeredi demostró que cualquier conjunto infinito de números que tenga "densidad positiva" contiene progresiones aritméticas de cualquier longitud. Un conjunto tiene densidad positiva si, para un número n suficientemente grande, hay siempre un porcentaje fijo de elementos $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en el conjunto. El teorema de Szemeredi puede ser visto desde diferentes puntos de vista, y ahora está demostrado al menos de cuatro maneras distintas, incluyendo la prueba original de Szemeredi y una de Timothy Gowers, medalla Fields 1998.

Los números primos no tienen densidad positiva, así que el teorema de Szemeredi no es aplicable a ellos. De hecho, los números primos se vuelven cada vez más escasos a medida que los números enteros tienden hacia el infinito. En un relevante hallazgo, Green y Tao han demostrado que, a pesar de su escasez, los primos sí contienen progresiones aritméticas de cualquier longitud. Cualquier resultado que arroje luz sobre las propiedades de los números primos es un avance muy significativo. Este trabajo muestra gran originalidad y capacidad de visión, y proporciona una solución a un problema profundo, fundamental y difícil.

Otro de los hallazgos destacables de Tao es su trabajo en el problema de Kakeya, que en su forma original puede describirse de la siguiente manera. Supongamos que tenemos una aguja descansando sobre un plano. Imaginemos todas las posibles formas que aparecen al hacer girar la aguja 180 grados. Una posible forma es un medio disco; con un poco más de cuidado se puede hacer un giro de un cuarto de disco. El problema de Kakeya pregunta: ¿Qué superficie ocupa la mínima forma que se puede obtener al girar la aguja 180 grados? La sorprendente respuesta es que el área puede hacerse tan pequeña como se desee, así que en cierto sentido el área mínima es cero.

La dimensión fractal de la forma trazada por la aguja proporciona un tipo de información más fina, respecto al tamaño y la forma, de la que se obtiene midiendo la superficie. Un resultado fundamental del problema Kakeya dice que la dimensión fractal de la forma que traza la aguja es siempre 2.

Imaginemos ahora que la aguja no está sobre un plano, sino en un espacio de n dimensiones, donde n es mayor que 2. El problema de Kakeya n-dimensional pregunta: ¿Cuál es el volumen mínimo de una forma n-dimensional en la que la aguja puede ser girada en cualquier dirección? De forma análoga al caso de dos dimensiones, este volumen puede ser tan pequeño como se quiera. Pero una cuestión mucho más crucial es: ¿Qué puede decirse de la dimensión fractal de esta forma n-dimensional? Nadie conoce la respuesta a esta pregunta. La técnica de la demostración de que en un plano de dos dimensiones la dimensión fractal es siempre 2 no es válida para más dimensiones. El problema de Kakeya n-dimensional es interesante en sí mismo y tiene además conexiones fundamentales con otros problemas en matemáticas, por ejemplo en análisis de Fourier y ondas no lineales. En los últimos años Terence Tao ha sido uno de los principales investigadores del problema de Kakeya n-dimensional, y de sus conexiones con otros problemas en el campo.

Tao ha trabajado también en la comprensión de mapas de ondas. Este asunto emerge de forma natural en el estudio de la teoría de la Relatividad General de Einstein, que dice que la gravedad es una onda no lineal. Nadie sabe cómo resolver completamente las ecuaciones de la relatividad general que describen la gravedad; están, simplemente, más allá del grado actual de comprensión. Sin embargo, las ecuaciones se vuelven mucho más simples si se considera un caso especial en el que las ecuaciones tienen simetría cilíndrica. Un aspecto de este caso más simple recibe el nombre de *problema de mapas de onda*, y Tao ha desarrollado un programa que permitiría entender su solución. El trabajo no ha llegado a una conclusión definitiva, pero las ideas de Tao han eliminado un obstáculo psicológico importante al demostrar que las ecuaciones no son inabordables. Así, el interés en este problema ha resurgido.

Un cuarto desarrollo destacable de Tao se centra en las ecuaciones no lineales de Schrödinger. Estas ecuaciones se usan, entre otras cosas, para describir el comportamiento de la luz en un cable de fibra óptica. El trabajo de Tao ha arrojado luz sobre el comportamiento de una ecuación de Schrödinger en particular y ha producido resultados definitivos de existencia de soluciones. Este trabajo ha sido realizado en colaboración con otros cuatro matemáticos: James Colliander, Markus Keel, Gigliola Staffilani, y Hideo Takaoka. El grupo ha llegado a ser conocido como el "Equipo I", donde la I denota muchas cosas distintas entre ellas, "interacción". El término se refiere a la forma en que la luz puede interaccionar consigo misma en un medio como el cable de fibra óptica; esta auto-interacción está reflejada en el término no lineal en la ecuación de Schrödinger estudiada por el equipo. El término "interacción" se refiere también a las interacciones entre los miembros del grupo; en efecto, la colaboración es el "sello de la casa" de Terence Tao. "La colaboración es muy importante para mi, porque me permite aprender sobre otros campos y, a la inversa, compartir con otros lo que he aprendido en mis propios campos de trabajo", declaró en la entrevista para el Instituto Clay. "Amplía mi experiencia no sólo en el sentido matemático técnico, sino también porque me expone a otras filosofías de investigar y exponer".

Pero la historia no acaba con este resumen del trabajo de Tao. Por ejemplo, muchos matemáticos se sorprendieron mucho cuando Tao y Allen Knutson produjeron un bello trabajo sobre un problema conocido como la conjetura de Horn, que aparece en un área que cabría esperar muy alejada de la experiencia de Tao. Viene a ser algo equiparable a que un novelista británico de primera fila publique de repente una novela rusa que se convierta en best-seller. La versatilidad, profundidad y capacidad técnica de Tao permiten asegurar que seguirá siendo un potente investigador en matemáticas en las décadas venideras.

Wendelin Werner

Nacido en 1968 en Alemania, Wendelin Werner tiene nacionalidad francesa desde los 9 años. Se doctoró en la Universidad de París VI en 1993. Ha sido profesor de matemáticas en la Universidad de Paris-Sud, Orsay desde 1997. De 2001 a 2006 fue miembro del *Institut Universitaire de France*, y desde 2005 está a tiempo parcial en la *École Normale Supérieure de Paris*. Entre sus distinciones se cuentan el premio Rollo Davidson (1998), el premio de la Sociedad Matemática Europea a jóvenes investigadores (2000), y los premios Fermat (2001), Jacques Herbrand (2003), Loeve (2005) y Polya (2006).

El trabajo de Wendelin Werner y sus colaboradores representa una de las interacciones más emocionantes y fructíferas entre las matemáticas y la física de los últimos tiempos. La investigación de Werner ha desarrollado un nuevo marco conceptual para entender fenómenos críticos que aparecen en sistemas físicos, y ha puesto en evidencia nuevos aspectos geométricos que antes eran desconocidos. Las ideas teóricas que emergen en este trabajo, que combina teoría de la probabilidad e ideas de análisis complejo clásico, han tenido un gran impacto tanto en matemáticas como en física, y tienen conexiones potenciales con una amplia variedad de aplicaciones.

Una de las motivaciones del trabajo de Wendelin Werner es la física estadística, área en que la teoría de probabilidad es usada para analizar el comportamiento a gran escala de sistemas complejos, integrados por muchas partículas. Un ejemplo tipo de un sistema complejo es el de un gas: aunque sería imposible conocer la posición de cada molécula de aire en una habitación, la física estadística dice que es muy improbable que todas las moléculas acaben en un rincón de la habitación. Estos sistemas pueden mostrar transiciones de fase que marcan un cambio repentino en su comportamiento microscópico. Por ejemplo, cuando el agua hierve se produce una transición de fase de líquido a gas. Otro ejemplo clásico de transición de fase es la magnetización espontánea del hierro, que depende de la temperatura. En estos puntos de transición de fase el sistema puede exhibir los llamados *fenómenos críticos*. Pueden parecer aleatorios a cualquier escala (y en particular a nivel macroscópico), y se convierten en *invariantes de escala*, lo que significa que su comportamiento general aparenta ser estadísticamente el mismo a cualquier escala. Estos fenómenos críticos son muy complejos, y aún se está lejos de entenderlos completamente.

En 1982 el físico Kenneth G. Wilson recibió el premio Nobel por sus estudios sobre los fenómenos críticos, que contribuyeron a comprender la *universalidad*. Muchos sistemas físicos diferentes se comportan de la misma manera a medida que se acercan a los puntos críticos. Este comportamiento está descrito por funciones en las que una cantidad (por ejemplo la diferencia entre la temperatura real y la crítica) es elevada a un exponente, llamado un *exponente crítico* del sistema. Los físicos han conjeturado que estos exponentes son universales en el sentido de que dependen sólo de determinadas características cualitativas del sistema, y no de sus detalles microscópicos. Aunque los sistemas en que Wilson estaba interesado eran sobre todo de tres y cuatro dimensiones, en dos dimensiones se da el mismo fenómeno. Durante los años ochenta y noventa los físicos hicieron grandes esfuerzos por desarrollar la teoría conforme de campos, que proporciona una aproximación al estudio de los fenómenos críticos de dos dimensiones. Sin embargo esta aproximación era difícil de entender de una manera matemática rigurosa, y no proporcionaba una imagen geométrica de cómo se comportaban los sistemas. Un gran logro de Wendelin Werner y sus colaboradores Gregory Lawler y Oded Schramm ha sido el desarrollo de una nueva aproximación a los fenómenos críticos de dos dimensiones que es matemáticamente riguroso y proporciona una imagen geométrica directa de sistemas cerca de, y en, sus puntos críticos.

La percolación es un modelo que capta el comportamiento básico de, por ejemplo, un gas filtrándose a través de un medio aleatorio. Este medio podría ser una red horizontal de tuberías en las que, con una cierta probabilidad, cada tubería está abierta o bloqueada. Otro ejemplo es el comportamiento de contaminantes en un acuífero. Uno quisiera responder a cuestiones como ¿qué aspecto tiene el conjunto de sitios contaminados? Los físicos y los matemáticos estudian modelos esquemáticos de percolación como el siguiente. Primero, imagine un plano cubierto de losetas hexagonales. Con una moneda (posiblemente trucada) lanzada al aire se decide si un hexágono es blanco o negro, de forma que para cualquier hexágono dado, la probabilidad de ser de color negro es p y la probabilidad de ser de color blanco es $1 - p$. Si designamos un punto en el plano como el origen, podemos preguntar, ¿Qué partes del plano están conectadas al origen por una franja de hexágonos negra? Este conjunto se denomina *cluster* que contiene el origen. Si p es menor que $1/2$, habrá menos hexágonos negros que blancos, y el *cluster* que contiene el origen será finito. Por el contrario, si p es mayor que $1/2$ hay una probabilidad positiva de que el *cluster* que contiene el origen sea infinito. El sistema presenta una transición de fase en el valor crítico $p = 1/2$. Este valor crítico corresponde a la situación en la que uno lanza una moneda no trucada para escoger el color de cada hexágono. En este caso se puede probar que todos los *clusters* son finitos y que en cualquier porción de la superficie que uno escoja mirar encontrará, con gran probabilidad, *clusters* de tamaño comparable a dicha porción.

El modelo de percolación ha atraído el interés de los físicos teóricos, que han usado varias técnicas no rigurosas para predecir aspectos de su comportamiento crítico. En particular, hace unos quince años, el físico John Cardy usó la teoría conforme de campos para predecir algunas propiedades a gran escala de percolación en su punto crítico. Werner y sus colaboradores Lawler y Schramm estudiaron los objetos continuos que aparecen cuando se toma el límite de gran escala; esto es, cuando se permite que el tamaño de los hexágonos sea más y más pequeño. Obtuvieron muchas de las propiedades de estos objetos, como por ejemplo la dimensión fractal de los bordes de los *clusters*. Este trabajo, combinado con los resultados de Stanislav Smirnov en 2001 sobre el modelo de percolación y con trabajos anteriores de Harry Kesten, condujo a la obtención completa de los exponentes críticos de este modelo particular.

Otro modelo de dos dimensiones es el movimiento browniano en el plano, que puede ser visto como el límite a gran escala del paseo aleatorio discreto. El paseo aleatorio discreto describe la trayectoria de una partícula que escoge aleatoriamente una nueva dirección en cada unidad de tiempo. La geometría de las trayectorias del movimiento browniano en el plano es bastante complicada. En 1982 Benoit Mandelbrot conjeturó que la dimensión fractal de la frontera exterior de la trayectoria de un movimiento browniano en el plano es $4/3$. Resolver esta conjetura parecía fuera del alcance de las técnicas probabilísticas clásicas. Lawler, Schramm, y Werner la demostraron probando en primer lugar que la frontera exterior de las trayectorias brownianas y las fronteras exteriores de los *clusters* de percolación continuos son similares; después calcularon su dimensión común usando una construcción dinámica de los *clusters* de percolación continuos. Con la misma estrategia también obtuvieron los valores de los muy relacionados *exponentes de intersección* para el movimiento browniano y el paseo aleatorio discreto, que habían sido conjeturados por los físicos B. Duplantier y K.-H. Kwon (uno de estos exponentes de intersección describe la probabilidad de que las trayectorias de dos caminantes no se crucen durante un largo periodo de tiempo). Otro trabajo posterior de Werner mostró simetrías adicionales de estas fronteras exteriores de los bucles brownianos.

Otro resultado de Wendelin Werner y de sus colaboradores es la demostración de la *invariancia conforme* de algunos modelos de dos dimensiones. La invariancia conforme es una propiedad parecida a la invariancia de escala, aunque más sutil y general. Está en la raíz de la definición de los objetos continuos que Werner ha estado estudiando. Sin precisar demasiado, se dice que un objeto aleatorio bi-dimensional es un invariante conforme si su distorsión por transformaciones que preservan el ángulo, es decir, por las transformaciones que en el análisis complejo se denominan aplicaciones conformes, tiene la misma ley de probabilidad que el objeto inicial.

Suponer que muchos sistemas críticos de dos dimensiones son invariantes conformes es uno de los puntos de partida de la teoría conforme de campos. El resultado de Smirnov mencionado anteriormente demostró la invariancia conforme para la percolación. Werner y sus colaboradores demostraron la invariancia conforme para dos modelos clásicos de dos dimensiones, el paseo aleatorio con bucles suprimidos (en inglés, *loop-erased random walk*) y el modelo relacionado con el mismo denominado árbol de expansión uniforme (en inglés *uniform spanning tree*), y describieron su comportamiento límite normalizado. Uno de los grandes desafíos actuales en esta área es demostrar la invariancia conforme para otros sistemas de dos dimensiones.

Los matemáticos y los físicos han desarrollado abordajes muy distintos para entender los fenómenos críticos de dos dimensiones. El trabajo de Wendelin Werner ha contribuido a reducir la brecha entre estas estrategias, enriqueciendo ambos campos y abriendo nuevas y fructíferas áreas de investigación. Su espectacular trabajo seguirá influyendo tanto en las matemáticas como en la física en las décadas venideras.