

# Mejora de una teoría analítica para el movimiento orbital alrededor de Europa

F. J. Montojo y M. Lara

Real Instituto y Observatorio de la Armada.  
11110 San Fernando (Cádiz), Spain.

## Resumen

Las propiedades más relevantes del movimiento alrededor del satélite joviano Europa se pueden caracterizar mediante la formulación de Hill del problema de tres cuerpos. La evolución secular de los elementos orbitales se estudia entonces con el método de variación de los parámetros, donde se manifiesta que, en primer orden, el semieje mayor de la órbita carece de variación secular. En el presente trabajo estudiamos la variación secular de un tipo particular de soluciones: aquellas que repiten su traza en la superficie de Europa. Como es sabido, para mantener la repetición de la traza al variar la inclinación orbital, el semieje mayor debe variar con respecto al valor kepleriano en una cantidad (del orden de la perturbación del problema) proporcional a la inclinación orbital. La introducción de este efecto en la teoría analítica, nos permite hacer una comparación directa con resultados numéricos obtenidos mediante el estudio de las soluciones periódicas de las ecuaciones del movimiento sin promediar.

**Palabras clave y expresiones:** Diseño de trayectorias, satélites alrededor de Europa, análisis de estabilidad.

**MSC:** 70F15, 70K65.

## 1 Introducción

Para el estudio preciso de las trayectorias alrededor de la luna joviana Europa se utilizan modelos de fuerzas que, además del campo de gravedad de Europa hasta el segundo orden y grado, consideran las perturbaciones gravitacionales de Júpiter (con  $J_2$  y  $J_4$ ), el Sol, los planetas y los otros tres satélites galileanos (Io, Ganímedes y Calisto); y las perturbaciones

no gravitacionales debidas a la atmósfera de Europa y a la presión de radiación solar. Se observa entonces [6] que la integración numérica de las ecuaciones del movimiento de trayectorias casi circulares cuya inclinación se aparta menos de  $\sim 45^\circ$  de una órbita polar, se transforman en órbitas de colisión con la superficie de Europa tras un breve intervalo que oscila entre varios días y pocas semanas.

La naturaleza de este comportamiento es puramente dinámica, y la utilización de un modelo de fuerzas simplificado permite demostrar que las órbitas casi circulares presentan una variación secular de la excentricidad que es exponencial en un amplio margen de inclinaciones [12].

El modelo simplificado de [12] tiene en cuenta el achatamiento de Europa, y el efecto de la gravedad de Júpiter se modela mediante la simplificación dada por Hill [5] para el problema restringido de tres cuerpos. Este modelo no limita su aplicabilidad al caso de Europa y resulta idóneo para el estudio del movimiento en órbitas bajas alrededor de satélites naturales de muchos de los planetas del sistema solar.

El problema de Hill ha sido ampliamente estudiado. Desde el punto de vista de perturbaciones especiales, merecen ser citado el exhaustivo trabajo numérico de Hénon [3, 4]. Desde el punto de vista de las perturbaciones generales, la evolución secular de la órbita se estudia planteando un doble promedio en las anomalías del cuerpo perturbado y el perturbador; prescindiendo del movimiento de los nodos, el problema resultante es integrable y muestra que la inestabilidad dinámica de las órbitas casi circulares se produce para inclinaciones mayores (menores) que  $39.2^\circ$  ( $140.8^\circ$ ). Citaremos solamente el clásico trabajo de Kozai [7] y el más reciente de Broucke [1], que contiene una buena colección de referencias.

La contribución del achatamiento del cuerpo central, ya sugerida por Kozai en sus conclusiones [7] y planteada en [12], produce la modificación en el límite de la inclinación a partir de la cual aparece la inestabilidad. En este último trabajo se estudia la evolución secular de los elementos orbitales con el método de variación de los parámetros, y se proporciona una teoría de primer orden en forma cerrada que, además, permite caracterizar con gran precisión los límites de estabilidad observados anteriormente.

Posteriormente, el mismo modelo dinámico (problema de Hill y achatamiento del satélite natural) se utiliza en [10] para estudiar la dinámica alrededor de Europa mediante perturbaciones especiales. Las órbitas periódicas ecuatoriales (con inclinación nula), directas o retrógradas, conforman familias monoparamétricas para variaciones de la constante de Jacobi. En las resonancias del movimiento medio orbital con la rotación del sistema de referencia se producen bifurcaciones de nuevas familias de órbitas periódicas con inclinación no nula. Al variar la constante de Jacobi, la inclinación orbital de las órbitas varía en cada familia recorriendo los  $180^\circ$  de inclinación [8, 9]. Con este procedimiento se calculan diversas familias de órbitas tridimensionales periódicas casi circulares, calculan-

do, además, la estabilidad de cada una de las órbitas de las diferentes familias; las órbitas críticas de cada familia permiten determinar regiones de estabilidad en el espacio de las fases para las órbitas de pequeña excentricidad.

Cuando se comparan los resultados obtenidos con ambos procedimientos ([12] y [10]) se comprueba que son consistentes, por lo que se validan mutuamente. Sin embargo, la teoría analítica de [12] predice zonas de estabilidad simétricas con respecto a las órbitas polares, mientras que los resultados numéricos de [10] predicen un desplazamiento de la zona de inestabilidad hacia mayores valores de la inclinación, que produce una asimetría en las zonas de estabilidad dependiendo de que las inclinaciones orbitales sean directas o retrógradas —resultado este último en coincidencia con el proporcionado por las integraciones numéricas precisas del modelo completo con todas las perturbaciones.

Como en el modelo simplificado utilizado las perturbaciones derivan de potenciales, el método de variación de los parámetros indica que el semieje mayor de la órbita osculadora no presenta variación secular. Sin embargo, las soluciones periódicas calculadas en [10] son órbitas que repiten su traza en la superficie de Europa, y es conocido que para mantener la repetición de la traza al variar la inclinación orbital, el semieje mayor debe variar con respecto al valor kepleriano en una cantidad (del orden de la perturbación del problema) proporcional a la inclinación orbital [2]. La introducción de este efecto en la teoría analítica de [12] produce la asimetría en las zonas de estabilidad, y nos permite hacer una comparación directa con resultados numéricos de [10].

## 2 Modelo Dinámico

Para el estudio de la perturbación planetaria en el movimiento del orbitador alrededor del satélite, supondremos válida la aproximación del problema restringido circular de tres cuerpos: el satélite describe una órbita circular alrededor del planeta y la masa del cuerpo orbitador es despreciable con lo que no influye en el movimiento de los otros dos cuerpos. Además, supondremos cierta la simplificación de Hill, es decir:

- El semieje mayor de la órbita alrededor del satélite es mucho menor que la distancia planeta-satélite.
- La masa del planeta es mucho mayor que la masa del satélite.

En el sistema Júpiter-Europa estas aproximaciones son razonables pues la excentricidad de la órbita de Europa es de 0.009, consideraremos órbitas casi circulares de altura inferior a 1000 Km, donde la razón del semieje a la distancia entre Júpiter y Europa es del orden de  $10^{-3}$  y la razón entre las masas Europa y Júpiter es del orden de  $10^{-5}$ .

Estudiaremos el movimiento en un sistema de referencia sinódico ( $xyz$ ) que se presenta en la figura 1. El origen es el centro de masas  $S$  de Europa, el eje  $z$  se toma perpendicular

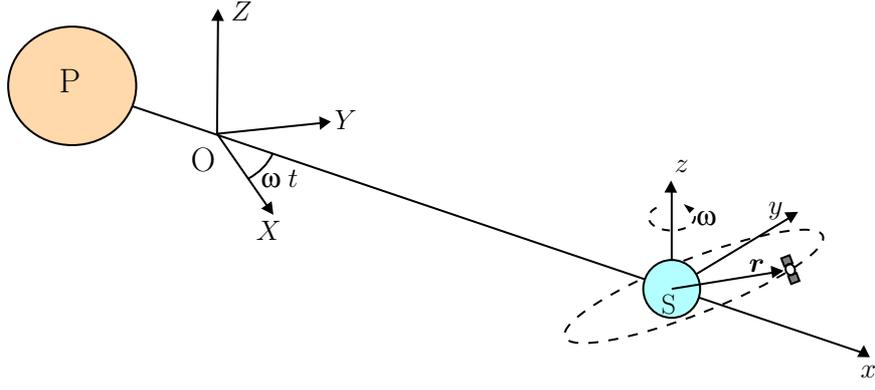


Figura 1: Geometría del modelo matemático.

al plano de la órbita de Europa alrededor de Júpiter, y el eje  $x$  en la dirección del centro de masas  $P$  de Júpiter. Con respecto a un sistema de referencia inercial  $(XYZ)$  este sistema rotante gira con velocidad angular  $\omega$  igual al movimiento medio de Europa alrededor de Júpiter.

Sea  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  el vector de posición del orbitador en el sistema de referencia sinódico, y  $\rho = OS$ . Entonces  $\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}$  es el vector de posición del orbitador en el sistema inercial. La derivada de un vector en un sistema rotante con velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  se puede calcular a partir del operador de Darboux

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times . \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que  $\boldsymbol{\rho}$  es un vector constante en el sistema sinódico,

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \omega^2 \boldsymbol{\rho}, \quad (2)$$

donde los puntos  $(\dot{\cdot}, \ddot{\cdot})$  representan derivación en el sistema sinódico.

Por otra parte, la ley de gravitación de Newton establece que la aceleración del orbitador en el sistema inercial es

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{\mu_p}{R_1^3} \mathbf{R}_1 - \nabla_{\mathbf{r}} V, \quad (3)$$

donde  $R_1 = PO$ ,  $\mu_p$  es el parámetro gravitacional del planeta y  $V(\mathbf{r})$  es la energía potencial del orbitador debida a la gravitación del satélite. De las ecuaciones (2) y (3) se tiene

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \nabla_{\mathbf{r}} V = \omega^2 \boldsymbol{\rho} - \frac{\mu_p}{R_1^3} \mathbf{R}_1. \quad (4)$$

En el sistema inercial, el satélite se mueve animado de la aceleración normal producida por la gravitación del planeta

$$\omega^2 \boldsymbol{\rho} = \mu_p / d^2, \quad (5)$$

donde  $d = PS$ . También, por la tercera ley de Newton  $\omega^2(d - \rho) = \mu_s/d^2$  siendo  $\mu_s$  el parámetro gravitacional del satélite. Por tanto,  $d = \rho(1 + \sigma)$ , con  $\sigma = \mu_s/\mu_p = m_s/m_p$ , y donde  $m$  denota masa.

Teniendo en cuenta que, en la ecuación (5)  $\mu_p = \omega^2 \rho d^2$ , podemos escribir el miembro de la derecha de la ecuación (4) como

$$\frac{\mu_p}{R_1^3} \mathbf{R}_1 = \frac{\omega^2 \rho d^2}{R_1^3} (\mathbf{d} + \mathbf{r}) = \omega^2 \rho \left( \frac{d}{R_1} \right)^3 \left( \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{r}{d} \hat{\mathbf{r}} \right), \quad (6)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\rho}}$  y  $\hat{\mathbf{r}}$  denotan vectores unitarios. Si trabajamos en primer orden de  $r/d$

$$\left( \frac{d}{R_1} \right)^3 = \left[ (1 + x/d)^2 + (y/d)^2 + (z/d)^2 \right]^{-3/2} = 1 - 3\frac{x}{d} + \mathcal{O}(r/d)^2. \quad (7)$$

Si suponemos además que  $\sigma(r/\rho)$  es de orden superior, resulta que  $r/d \equiv r/\rho$  y el miembro de la derecha de la ecuación (4) se transforma en

$$\omega^2 \rho \left( 3\frac{x}{d} \hat{\boldsymbol{\rho}} - \frac{r}{d} \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{O}(r/d)^2 \hat{\mathbf{r}} \right) \approx \omega^2 \left( 3\frac{x}{\rho} \boldsymbol{\rho} - \mathbf{r} \right). \quad (8)$$

Finalmente, la ecuación (4) resulta

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \omega^2 (3x \hat{\boldsymbol{\rho}} - z \hat{\boldsymbol{\omega}}) - \nabla_{\mathbf{r}} V, \quad (9)$$

ecuación vectorial del movimiento que acepta la integral de Jacobi

$$\mathcal{J} \equiv \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\omega^2(z^2 - 3x^2) + V = C. \quad (10)$$

Las ecuaciones (9) y (10) son las clásicas ecuaciones de Hill que aparecen en la bibliografía. La deducción habitual de dichas ecuaciones se puede encontrar en manuales de mecánica celeste, como por ejemplo [13]. Por supuesto, las suposiciones que hemos hecho aquí son equivalentes a las simplificaciones de Hill.

Nótese que la ecuación (10) puede escribirse como

$$\mathcal{J} = \left( \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{\mu}{r} \right) - \left( \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) - \mathcal{R}, \quad (11)$$

expresión que se compone de la parte kepleriana de la energía del orbitador, la componente del momento angular en la dirección perpendicular a la trayectoria del planeta, y una función perturbadora  $\mathcal{R}$  que combina el efecto del tercer cuerpo y la perturbación debida a la no esfericidad del satélite:

$$\mathcal{R} = \frac{\omega^2}{2} (3x^2 - r^2) - (V + \mu/r). \quad (12)$$

### 3 Movimiento Secular

Si nos limitamos a considerar el achatamiento del satélite, el potencial  $V$  toma la forma

$$V = -\frac{\mu}{r} \left[ 1 + J_2 \frac{R_S^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{3z^2}{2r^2} \right) \right], \quad (13)$$

donde  $J_2$  es el coeficiente de achatamiento del satélite y el factor de escala  $R_S$  es su radio ecuatorial. Entonces, la ecuación (12) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \frac{\omega^2 r^2}{2} \left( 3[\cos(\Omega - \omega t) \cos(g + f) - \sin(\Omega - \omega t) \sin(g + f) \cos I]^2 - 1 \right) \\ & + \frac{1}{4} \frac{\mu R_S^2}{r} J_2 \left( 2 - 3 \sin^2 I + 3 \sin^2 I \cos 2(g + f) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $a$  es el semieje mayor,  $e$  la excentricidad,  $I$  la inclinación,  $g$  es el argumento del pericentro,  $\Omega$  el del nodo,  $M$  la anomalía media, y  $f$  la verdadera. Los términos periódicos se pueden eliminar promediando en las anomalías medias  $nt$  del orbitador y  $\omega t$  del planeta:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R} \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R} d(\omega t) d(nt) \\ &= \frac{\omega^2 a^2}{16} \left[ (2 + 3e^2)(2 - 3 \sin^2 I) + 15e^2 \sin^2 I \cos 2g + 4\epsilon \frac{2 - 3 \sin^2 I}{(1 - e^2)^{3/2}} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $\epsilon$  es el parámetro introducido en [12]

$$\epsilon = J_2 \left( \frac{n/\omega}{a/R_S} \right)^2, \quad (16)$$

que no tiene que ser pequeño ( $\epsilon \approx 0.5$  para órbitas a unos 200 km de altitud sobre la superficie de Europa). Tras el doble promedio, la dinámica del problema puede ser descrita cualitativamente en términos de la variación secular de los elementos orbitales mediante las ecuaciones planetarias de Lagrange (ver, por ejemplo, [11] p.446).

Las ecuaciones planetarias de Lagrange derivadas del potencial (15) se encuentran en [12]. Al tratar fuerzas derivadas de potenciales, el semieje mayor carece de variación secular. Centrando el estudio en órbitas casi circulares se puede despreciar el cuadrado de la excentricidad, resultando que la inclinación también carece de variación secular. Prescindiendo del movimiento del nodo, que no afecta al resto de los elementos orbitales, las ecuaciones resultantes son

$$e' = \frac{15 \omega^2}{8 n} \sin^2 I e \sin 2g \quad (17)$$

$$g' = \frac{15 \omega^2}{8 n} \sin^2 I (\cos 2g + \alpha) \quad (18)$$

donde las primas significan derivación con respecto al tiempo, y

$$\alpha = (1 + 2\epsilon) \frac{4 - 5 \sin^2 I}{5 \sin^2 I} \quad (19)$$

es el parámetro introducido en [12]. El sistema (17)–(18) es trivialmente integrable, produciendo crecimiento exponencial de la excentricidad si  $\alpha^2 < 1$  y oscilación en la excentricidad cuando  $\alpha^2 > 1$ . Luego las órbitas de baja excentricidad con inclinaciones tales que

$$\frac{1 + 2\epsilon}{1 + \epsilon} < \frac{5}{2} \sin^2 I < \frac{1 + 2\epsilon}{\epsilon} \quad (20)$$

serán inestables (para detalles, el lector interesado se remite a [12]).

#### 4 Análisis de Estabilidad

La figura 2 representa la condición (20) como una función  $I(\epsilon)$ , donde se aprecia que para valores pequeños de  $\epsilon$  hay una gran zona de inestabilidad centrada en las inclinaciones de  $90^\circ$ . La zona de inestabilidad disminuye para valores crecientes de  $\epsilon$ , hasta que en  $\epsilon = 2$  las órbitas polares pasan a ser estables. Para valores de  $\epsilon > 2$  la zona adicional de estabilidad centrada en las órbitas polares crece poco a poco, y la zona de inestabilidad disminuye hasta quedar reducida a un breve intervalo en las proximidades del conocido valor la *inclinación crítica* del satélite artificial  $I \approx 63.4^\circ$ .

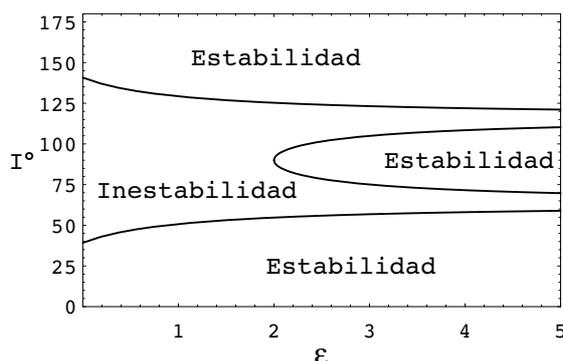


Figura 2: Regiones de estabilidad en función de  $\epsilon$  (después de [12]).

Efectivamente el valor de  $\epsilon$  no tiene por qué ser pequeño, pero, en nuestro caso, para los valores  $\mu = 3.201 \times 10^3 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$   $J_2 R_S^2 = 1051.315 \text{ km}^2$  de Europa, su valor es  $\epsilon \approx 0.85 R_S^5 / a^5$  y podremos representar las regiones de estabilidad directamente con gráficas  $I(a)$ . Como nos ocupamos sólo de órbitas bajas, de alturas menores de unos 1000 km, el semieje mayor podrá variar entre 1 y 1.6 unidades del radio ecuatorial de Europa. Por tanto  $\epsilon$  variará entre 0.85 y 0.08 y nos limitaremos a estudiar la parte baja de la figura 2; la condición de estabilidad se reduce entonces a  $\alpha > 1$  y sólo hay dos zonas de estabilidad.

Si representamos en la figura 3 las regiones de estabilidad para Europa en función de  $a$ , observamos que a menor altura de la órbita mayor rango de inclinaciones para órbitas estables. Esto es lógico puesto que a menor altura mayor será el efecto del coeficiente  $J_2$  de achatamiento comparado con la perturbación del tercer cuerpo, causante de las amplias zonas de movimiento inestable.

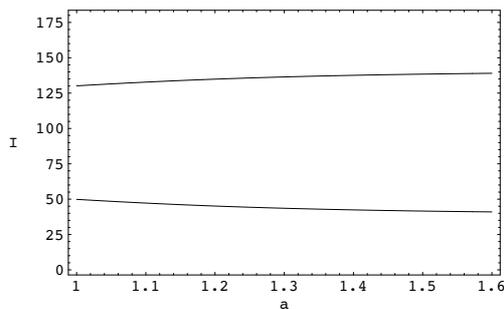


Figura 3: Regiones de estabilidad en función del semieje para Europa, de acuerdo con la condición (20).

Nótese que la condición (20) se refiere al cuadrado del seno de la inclinación, proporcionando simetría en las zonas de estabilidad para inclinaciones directas y retrógradas. Sin embargo, curvas de estabilidad similares obtenidas mediante integraciones numéricas muestran una pequeña asimetría que no refleja la teoría analítica [12, 10]. En la figura 4 se muestra la comparación de los resultados analíticos de [12] con los numéricos de [10]. Como los resultados de [10] se refieren a cálculos de la estabilidad de órbitas que repiten su traza en la superficie del satélite joviano, vamos a tratar de introducir la condición de repetición de traza en la teoría de [12] por si mejora la comparación entre ambos resultados.

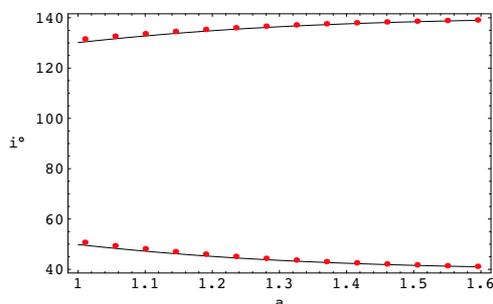


Figura 4: Zonas de estabilidad. Las líneas continuas delimitan las zonas obtenidas analíticamente en [12]; las de puntos son los resultados numéricos obtenidos de [10].

## 5 Desviaciones del Valor del Semieje Respecto al Valor Kepleriano

Cuando un orbitador se mueve en el campo de gravedad de un cuerpo achatado, si se quiere mantener la misma condición de repetición de la traza de una órbita para diferentes inclinaciones, es necesario variar el semieje mayor de la órbita en función de la inclinación. La expresión del semieje en función de la inclinación es [2]

$$a = a_K \left[ 1 + J_2 (R_S / a_K)^2 \left( 4 \cos^2 I - (L/N) \cos I - 1 \right) \right]$$

donde  $a_K$  es el valor kepleriano correspondiente a la repetición de la traza en  $N$  revoluciones del cuerpo central y  $L$  períodos del orbitador. Nótese que, al ir multiplicado por la perturbación,  $L/N \sim n/\omega$  cuando despreciamos términos del orden de  $J_2^2$ . Además, para los valores concretos de órbitas bajas alrededor de Europa, el término que prevalece es el factor del  $\cos I$ , luego

$$a \approx a_K \left( 1 - \frac{J_2 R_S^2}{\omega} \sqrt{\frac{\mu}{a_K^7}} \cos I \right), \quad (21)$$

que muestra claramente que para cierta repetición de la traza, las órbitas directas tendrán menor semieje que las retrógradas.

Si introducimos la expresión (21) en la condición de estabilidad (20), se rompe la simetría de dicha condición, y, como se ilustra en la figura 5, los resultados analíticos (en línea continua) se aproximan más a los numéricos (puntos).

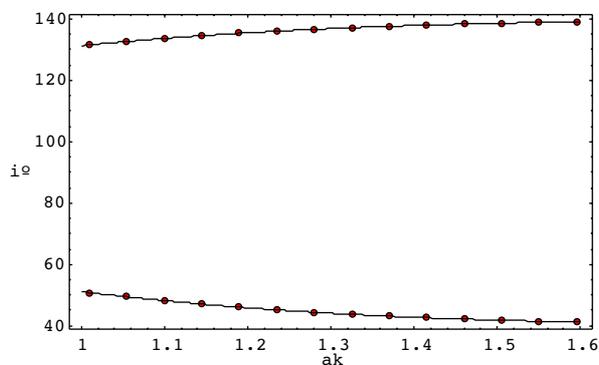


Figura 5: Comparación de resultados.

## 6 Conclusiones

Para el caso de órbitas bajas alrededor de Europa, el modelo de Hill proporciona una buena aproximación para entender la dinámica del sistema. Una simple teoría analítica de primer orden resulta suficiente para predecir el comportamiento orbital, no sólo cualitativamente sino, con bastante aproximación, también cuantitativamente. Sin embargo, las características de estabilidad derivadas de tal teoría predicen un comportamiento simétrico de las órbitas directas y retrógradas, lo que contradicen los resultados numéricos.

La introducción en la teoría analítica de una condición de dependencia entre el semieje de la órbita y su inclinación, rompe la simetría en el comportamiento de órbitas directas y retrógradas, y aproxima más los resultados analíticos a los numéricos. Sin embargo, en el presente momento no resultan claras las implicaciones dinámicas que suponen el introducir tal restricción en el movimiento orbital, por lo que se hace necesario un estudio más riguroso.

## Referencias

- [1] Broucke, R. A.: 2003, ‘Solution of the elliptic rendezvous problem with the time as independent variable’, *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **26**, 615–621.
- [2] Cutting, E., Born, G. H. and Frautnick, J. C.: 1978, ‘Orbit analysis for SEASAT-A’, *The Journal of the Astronautical Sciences* **26**, 315–342.
- [3] Hénon, M.: 1969, ‘Numerical exploration of the restricted problem. V’, *Astronomy and Astrophysics* **1**, 223–238.
- [4] Hénon, M.: 2003, ‘New families of periodic orbits in Hill’s problem of three bodies’, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **85**, 223246.
- [5] Hill, G.W.: 1878, ‘Researches into the lunar theory’ *American Journal of Mathematics* **1**, 129–147; *ibid. Collected Mathematical Works I*, 284–335.
- [6] Johannesen, J. R. and D’Amario, L. A.: 1999, ‘Europa orbiter mission trajectory design’, (AAS 99-360) *Advances in the Astronautical Sciences* **103**, 895–908.
- [7] Kozai, Y.: 1962, ‘Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity’, *The Astronomical Journal* **67**, 591–598.
- [8] Lara, M.: 2003, ‘Repeat ground track orbits of the Earth tesseral problem as bifurcations of the equatorial family of periodic orbits’, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **86**, 143–162.
- [9] Lara, M. and Scheeres, D. J.: 2002, ‘Stability bounds for three-dimensional motion close to asteroids’, (AAS 02-108) *Advances in the Astronautical Sciences* **112**, 105–126.
- [10] Lara, M. and San Juan, J. F.: 2003, ‘Phase space structure for three-dimensional motion around Europa’, (AAS 03-233) *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, Ponce, Puerto Rico.
- [11] Meirovitch, L. M.: 1970, *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, New York.
- [12] Scheeres, D. J., Guzmán, M. D. and Villac, B. F.: 2001, ‘Stability analysis of planetary satellite orbiters: Application to the Europa orbiter’, *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **24**, 778–787.
- [13] Szebehely, V.: 1967, *Theory of Orbits*, Academic Press, New York.