Matemáticas y platonismo(s)

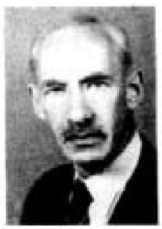
por

José Ferreirós

> *Dice usted [Hermite] muy bellamente en su carta del 27 de Nov.: "Los números (enteros) me parecen constituir un mundo de realidades que existe más allá de nosotros con el mismo carácter de absoluta necesidad que las realidades de la naturaleza, cuyo conocimiento nos es dado por los sentidos, etc." Permítame, sin embargo, el comentario de que en mi opinión la realidad y absoluta legalidad de los números enteros es* mucho mayor *que la del mundo sensorial. Y el que así sea, tiene una única y muy simple razón, a saber, que los números enteros existen en el grado sumo de realidad, tanto separados como en su totalidad actualmente infinita, en la forma de ideas eternas in intellectu Divino.* (Cantor a Hermite, 30 Nov. 1895)

> *No es ninguna exageración decir que el platonismo es hoy en día dominante en matemáticas.* [Bernays 1935, 65]

El término "platonismo" fue propuesto por el gran lógico matemático y colaborador de Hilbert Paul Bernays [1935, 62-63] para dar nombre a un modo de razonar que es característico sobre todo del análisis y la teoría de conjuntos, aunque también del álgebra abstracta y la topología. Dicho modo de pensar consiste esencialmente en lo siguiente: los objetos de la teoría se conciben como elementos de una totalidad o conjunto, que se considera dada al margen de cualquier dependencia respecto al sujeto pensante, al matemático. Que el platonismo, en el sentido de Bernays, es característico de la matemática moderna, fue uno de los resultados tangibles y claros del debate sobre fundamentos que tuvo lugar a principios del siglo XX.



P. Bernays (1888-1977)

La denominación de "platonismo" puede resultar confundente, de manera que vamos a distinguir aquí entre dos sentidos del término, dos aspectos del problema del platonismo que, en mi opinión, son completamente diferentes. Encontrarles un nombre adecuado resulta complicado, pero propondremos a título provisional los siguientes:

1. Platonismo *interno*: es característico de la práctica que se sigue en la matemática abstracta o moderna, donde se hace referencia a elementos cuya

existencia se postula y se considera dada (se podría hablar de *existencia ideal*)[1].

2. *Realismo platónico* (podría llamarse platonismo *filosófico*): es una de las posibles interpretaciones filosóficas de la matemática –en particular de la característica antes señalada de la matemática abstracta– y consiste en afirmar que los objetos matemáticos gozan de una *existencia real*, análoga en algún sentido a la existencia de los objetos físicos.

Las definiciones anteriores son meramente orientativas; los conceptos clave que aparecen en ellas se explicitarán más abajo. Hacer esa distinción no implica que haya una oposición entre los dos tipos de platonismo, pero sí es fundamental reconocer que el platonismo interno o práctico de la matemática moderna no implica la necesidad de adoptar un realismo platónico.

Al hablar de platonismo interno, nos referimos a que basta un análisis lógico de las teorías matemáticas para establecer, de manera rigurosa, que esas teorías postulan la existencia de objetos que no pueden ser construidos. La explicación más simple de este modo de hacer matemáticas consiste en admitir que hay un "universo matematico" en el que se cumplen los principios recogidos en esas teorías. Se trata de la explicación más simple, porque equivale a analizar el lenguaje matemático por analogía con la manera en que el sentido común analiza el lenguaje corriente. Además, el realismo platónico encaja a la perfección con una interpretación ingenua de la experiencia normal del matemático en activo, que tiene, naturalmente, la sensación de estar *descubriendo* resultados acerca de objetos de un tipo peculiar (superficies, funciones, espacios, anillos). Y desde luego esos objetos y los principios que son válidos respecto a ellos ofrecen resistencia: no todo vale, ni muchísimo menos, e incluso es frecuente llegar a resultados inesperados. Por ello no es de extrañar que, como se ha dicho tantas veces, los investigadores matemáticos adopten una posición de realismo los días hábiles y formalismo los domingos[2]. Uno de los integrantes de Bourbaki explicaba la posición oficial del grupo diciendo:

> *En lo relativo a fundamentos, creemos en la realidad de la matemática, pero, por supuesto, cuando los filósofos nos atacan con sus paradojas corremos a escondernos tras el formalismo diciendo: "La matemática es sólo una combinación de símbolos carentes de significado", y entonces sacamos los capítulos 1 y 2 [de los Eléments de mathématique] sobre teoría de conjuntos. Finalmente nos dejan en paz y podemos volver a nuestra matemática, haciéndola como siempre, trabajando en algo real. [Dieudonné 1970]*

[1] Se podría emplear para 1. la denominación de "platonismo" a secas, si no fuera porque este nombre tiene demasiadas resonancias de la acepción 2. Otras posibilidades serían hablar de "postulacionismo" o incluso de "existencialismo" (ya que la matemática abstracta es existencial, en el sentido que veremos).

[2] Davis y Hersh [1982, 247] dicen que el platonismo es la fe de casi todos los matemáticos, aunque se trata de una religión oculta ejercitada en privado.

Sin embargo, defenderé que se puede aceptar y tratar de comprender el platonismo interno desde un punto de vista filosófico que no adopte el realismo platónico. Por eso, nos interesará sobre todo aclarar en qué sentido puede afirmarse que la matemática moderna es platónica en la primera acepción: aclarar en qué consiste el platonismo interno. Comenzaremos, pues, elucidando el platonismo interno sobre la base de la distinción entre lo dado y lo construido; esto nos llevará a tratar la relación entre existencia matemática y consistencia. A continuación observaremos, siguiendo a Bernays, que cabe hablar de toda una gama de compromisos platónicos (internos) crecientes. Sólo después de todo esto consideraremos los aspectos filosóficos del platonismo, patentes en la cita de Cantor que dábamos al principio, hablando de algunas versiones influyentes del realismo platónico. Finalmente, haremos un breve resumen de las dificultades que enfrenta el realismo, y pasaremos a considerar alguna de las posibles alternativas a esa posición.

1. EXISTENCIA MATEMÁTICA: LO DADO Y LO CONSTRUIDO

Aunque el debate sobre fundamentos es famoso y bastante bien conocido, a menudo se trivializa la cuestión como si en último término se redujera a una elección muy subjetiva entre varias posturas enfrentadas[3]. Afortunadamente, hay mucho más de interés en el problema de los fundamentos de la matemática, y afortunadamente, también, el debate de los años 20 y 30 dejó algunas conclusiones firmes. En un artículo de 1971, el propio Bernays [1976, 190] resaltaba los siguientes resultados positivos y duraderos:

1. el conocimiento de las posibilidades de formalización de teorías matemáticas por medio del simbolismo lógico: características, alcance y límites de la formalización;

2. el empleo de la formalización para consideraciones metateóricas (consistencia, decidibilidad, completud, etc.) empleando medios restringidos en Hilbert y en los famosos resultados de Gödel, o todo el poder de la matemática abstracta en desarrollos posteriores como la teoría de modelos de Tarski;

3. la contraposición entre un tratamiento de la matemática constructivo, basado en consideraciones procesuales, y el tratamiento clásico, que se basa en considerar relaciones entre objetos postulados como existentes; el primer enfoque aparece como complementario del segundo.

Esta última contraposición, de gran importancia, apunta al tema fundamental que discutiremos en este trabajo.

La distinción no estaba en absoluto clara en la matemática del siglo XIX, y su aclaración ha sido una de las contribuciones más importantes del debate sobre los fundamentos. En toda teoría matemática se consideran *dados*

[3]En especial el tópico trío de logicismo, intuicionismo y formalismo, que –dicho sea de paso– no resume en absoluto todas las opciones posibles para una fundamentación.

ciertos objetos, relaciones y funciones, mientras que otros son *definidos*, es decir, *construidos* lógicamente a partir de aquéllos. En aritmética elemental, por ejemplo, se parte del 0 y la función sucesor, así como las funciones + (adición) y · (producto); otras funciones, relaciones o propiedades (p.e., la propiedad de ser primo) son definidas o construidas. En geometría, se toman como dados los puntos, rectas y planos, así como algunas relaciones (p.e.,"estar sobre" o "estar entre") y otras relaciones más complejas son definidas. Este proceso de definición o construcción lógica consiste en la aplicación iterada de unas cuantas operaciones lógicas elementales sobre aquella base dada.

A este respecto, hay que resaltar que la utilización de cuantificadores, especialmente del existencial $\exists x$, indica que se consideran *dados* los objetos que pertenecen al dominio de cuantificación. Si en geometría empleamos el axioma que dice:

> *Siendo A y C dos puntos cualesquiera, existe al menos un punto B que está sobre la recta AC, tal que C está entre A y B,*

estamos empleando el cuantificador existencial $\exists x$ con respecto al dominio de puntos; suponemos dada una totalidad de puntos[4]. Como veremos, en algunos casos se aplica el cuantificador $\exists x$ de tal manera que permite postular la existencia de un objeto que *no puede construirse* mediante los objetos y relaciones básicos de la teoría. Esto es lo que ocurre en el Axioma de Elección, de ahí que su empleo causara polémicas en 1904. Fue precisamente la discusión con respecto al Axioma de Elección, y cuestiones similares, lo que llevó a los matemáticos a tomar conciencia de la diferencia clave entre lo dado y lo construido.

La matemática euclidea, y casi todas las contribuciones hechas hasta el XVIII, tendían al enfoque de lo construido. Los postulados de Euclides no constituyen un sistema axiomático en el sentido moderno, sino que, sobre todo, estipulan los medios de construcción de figuras admitidos (fundamentalmente, la idea de una geometría de regla y compás, de rectas y círculos); quizá podría decirse que el único axioma en el sentido moderno es precisamente el 5º, el de las paralelas. Donde Euclides postulaba que podemos siempre unir dos puntos construyendo una recta, Hilbert establece el axioma de que, dados dos puntos, existe una recta que los une. El matiz es sutil, pero ahora se dice que "existe" en el conjunto de las rectas, una totalidad que se toma como dada de antemano. Análogamente, la deducción en Euclides no era sólo obtención de consecuencias lógicas, sino que tales consecuencias se basaban en la elaboración de construcciones con los medios admitidos. Esta es una de las razones de que a Euclides se le "escaparan" axiomas básicos de la geometría, en particular todo lo relativo a congruencia de segmentos y a la continuidad de rectas y círculos.

También el cálculo del XVIII tendía a enfatizar lo construido, como puede verse sobre todo en el desarrollo del concepto de *función*. En esa época, se

[4]Aunque no necesariamente postulamos que esté dada como un conjunto: en teoría de conjuntos axiomática se suponen dados los conjuntos, pero estos no forman a su vez un conjunto (universal) sino en todo caso una clase, en el sentido técnico del término.

concebía una función como una expresión analítica que involucra variables, constantes, y ciertas operaciones conocidas ($+, \surd$, sen, log). Los elementos en que se basaba la construcción eran aquí los números reales, las letras del alfabeto, y unas pocas operaciones o funciones elementales. Claro está que se admitían las funciones dadas a través de series infinitas, pero los miembros de la serie venían siempre definidos a través de una ley de construcción. Se admitía, por descontado, que toda función será continua en el sentido moderno; tan asumido estaba que, de hecho, se entendía por función "discontinua" la que (siendo continua en nuestro sentido) obedece distintas leyes o expresiones analíticas en su recorrido.

Como probablemente sabe el lector, hacia mediados del XVIII tuvo lugar una famosa polémica acerca de la forma analítica de representar el movimiento de una cuerda vibrante (por ejemplo, la cuerda de un violín al pulsarla). Euler se atrevió a sugerir que, en casos como estos, se debían aceptar incluso funciones (continuas salvo en algún punto) dadas por una gráfica trazada libremente, aun si no sabemos representarlas mediante una expresión analítica. Comenzaba a plantearse la cuestión de si son aceptables las funciones definidas en términos puramente abstractos, un tema que resurgiría con el estudio de las series de Fourier en el XIX. En esta época, Dirichlet propuso una definición perfectamente abstracta de función, de manera que su nombre quedó asociado a la idea de función arbitraria[5]. Su alumno Riemann comenzó a ampliar el análisis a las funciones abstractas, especialmente funciones discontinuas; pero otros, notablemente Weierstraß, pensaban que era absurdo hacer matemática con funciones que no sabemos representar analíticamente.

Lo que esto indica es que fue el desarrollo de una nueva forma de hacer matemática, la *matemática abstracta*, lo que trastocó el tradicional esquema de lo construido en favor de un nuevo planteamiento, el de lo dado. Puede decirse, al modo de Bernays, que la matemática abstracta se plantea como una investigación de relaciones que se dan entre objetos o elementos que se postulan existentes con independencia de nuestro pensamiento. La matemática moderna es existencial, platónica, en su práctica: sigue la tendencia fundamental de considerar los objetos de que habla la teoría como exentos de cualquier dependencia respecto al matemático.

Pese a todo, la matemática tradicional también incluía elementos no constructivos, y aquí sí que se puede hablar de lo *dado* en el sentido pleno. Para la tradición, los números expresaban magnitudes y proporciones entre magnitudes; los referentes últimos de la matemática (esas magnitudes) no eran objetos matemáticos sino objetos físicos. Por tanto, eran algo dado en el sentido pleno: volúmenes de agua, distancias entre lugares del espacio físico, etc. Se admitía, también, que el espacio físico es continuo, y de esta manera –vía

[5]Dirichlet dio el ejemplo de la función (que, desde su punto de vista, no era integrable)

$$f(x) = 0 \text{ para } x \text{ racional}, f(x) = 1 \text{ para } x \text{ irracional}.$$

Se trata de una función para la que no se conocía representación analítica, aunque cuarenta años más tarde (en 1870) Hermann Hankel mostró cómo representarla.

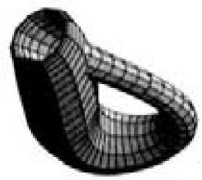
proporciones– entraba en juego el *continuo*, la totalidad de los números reales. Los números reales no pueden construirse mediante operaciones aritméticas a partir de los naturales; para definir $\mathbb{R}$ partiendo de $\mathbb{N}$ se necesitan también conjuntos infinitos arbitrarios, es decir, se necesita recurrir al enfoque no constructivo, abstracto.

Para trabajar con $\mathbb{R}$ también podemos comenzar a la manera de Hilbert: dando un sistema axiomático que define un cuerpo ordenado, arquimediano y completo. Este enfoque se basa, precisamente, en suponer existente un cierto conjunto de elementos, estipulando cuáles son las relaciones que se dan entre ellos (cuál es su estructura). A esto se refería Bernays al decir que la matemática moderna investiga relaciones que se dan entre objetos concebidos como existentes independientemente del matemático. Tomemos como ejemplo el axioma de completud de $\mathbb{R}$, que se puede formular, al modo de Weierstraß y Cantor, como sigue:

> *Dada una sucesión infinita de intervalos cerrados y encajados de elementos de $\mathbb{R}$, existe al menos un número real que pertenece a todos esos intervalos (e.d., su intersección es no vacía).*

El axioma estipula la existencia de ciertos números reales en ciertas condiciones. Sobre su base se puede demostrar, por ejemplo, que existe cota superior para un conjunto infinito y acotado de números reales. Pero estos números reales no pueden, en general, definirse por construcción aritmética a partir de los números naturales. Si no aceptáramos los conjuntos arbitrarios, perderíamos la completud de $\mathbb{R}$ y el teorema de la cota superior; esto es lo que ocurre cuando se trata de definir los reales partiendo de $\mathbb{N}$ y las operaciones aritméticas (ver más abajo, §3).

Para el matemático constructivo, existe aquello que podemos determinar de una manera concreta y efectiva, lo que podemos construir paso a paso. Los números naturales pueden tratarse como meros símbolos que se obtienen, por ejemplo, por adjunción: escribimos $|, ||, |||$ y así sucesivamente; de modo que los naturales son admisibles (aunque no la totalidad infinita de ellos). A continuación, podemos definir las operaciones aritméticas habituales de una manera también admisible, y podemos tratar de reconstruir la matemática mediante construcciones efectivas a partir de dicha base. Este intento se puede llevar bastante lejos, pero nunca hasta recuperar la noción del continuo, de un conjunto $\mathbb{R}$ completo.



¿Que tipo de "existencia" tienen "objetos" como la botella de Klein?

En el caso del matemático "clásico" o abstracto, el concepto de existencia se toma en otro sentido. El signo lógico $\exists x$ se emplea para especificar ciertas propiedades del conjunto o la estructura a la que se refieren los axiomas, sin que "existir" implique ninguna restricción constructivista. La única limitación a la libre postulación –resaltada ya por autores como Cantor, Dedekind y

Hilbert– es que no atentemos contra la lógica, que el sistema resultante sea no contradictorio, *consistente*. Veamos con más calma esta cuestión.

2. EXISTENCIA IDEAL Y CONSISTENCIA

Que el platonismo interno surgió y se hizo claro con la matemática abstracta, es algo que queda claro observando la historia del constructivismo. El punto de vista constructivista comenzó a ser refinado precisamente cuando el ascenso de la nueva matemática abstracta resultaba ya evidente. Esto sucedía en Alemania hacia 1870: el análisis de Dirichlet y Weierstraß, la teoría de funciones de Riemann, o la teoría de números algebraicos de Dedekind, mostraban claramente una tendencia abstracta. En reacción, el influyente matemático berlinés Kronecker comenzó a plantear un claro y ambicioso (aunque muy estricto) programa constructivista. Kronecker rechazaba la noción de conjunto, que se había empleado en diversas definiciones de los números reales o en la mencionada teoría de Dedekind; se oponía al principio de completud de $\mathbb{R}$ adoptado por Weierstraß, y por tanto al concepto de límite. Pretendía reducir todo, en matemática pura, a los números naturales y las operaciones con ellos; por estos motivos, criticó abiertamente a Weierstraß, a Dedekind y a Cantor.

G. Cantor (1845-1918)

Ante ello, Cantor escribió en un famoso artículo [1883, 182] que el matemático debe ser completamente libre en el desarrollo de sus ideas, y que las únicas restricciones consisten en que dichas ideas estén libres de contradicción, bien definidas, y que entren en relaciones ordenadas con las nociones matemáticas previamente aceptadas. Como se ve, no estamos todavía en el simple requisito de la consistencia, pero sí muy cerca. Cantor presentó la cuestión en términos que nos recuerdan la distinción entre platonismo interno y realismo: el matemático atiende única y exclusivamente a la "realidad *inmanente*" de sus conceptos, es decir, a su aceptabilidad en el dominio del pensamiento puro; se despreocupa completamente de la "realidad *transiente*" de los objetos matemáticos, es decir, de su existencia real o su capacidad de representar relaciones o procesos del mundo externo [Cantor 1883, 181] [6]. Esta es una manera muy adecuada de precisar el enfoque que, por esos mismos años, defenderían también hombres como Dedekind y Hilbert. El primero, por ejemplo, creía que la demostración de consistencia lógica debía

[6] Hay que decir que, inmediatamente, Cantor iba más allá, porque sus convicciones filosóficas y metafísicas le hacían pensar que todo lo que existe inmanentemente tiene "realidad transiente".

ser la clave para establecer que el concepto de conjunto infinito es admisible en matemáticas[7].

Al acabar el siglo, Hilbert aplicaba ese enfoque abstracto al tratamiento de la geometría y de la teoría de números reales. Leyendo su obra sobre geometría, el gran lógico Frege se sorprendió de que Hilbert estuviera dispuesto a llamar "puntos", "rectas" y "planos" a tres conjuntos arbitrarios de cosas, siempre y cuando la estructura de esos conjuntos satisficiera los axiomas geométricos. Más aún, Frege no comprendía cómo a Hilbert se le ocurría establecer la aceptabilidad de los axiomas geométricos sobre la base de demostraciones de consistencia. Para Frege, los axiomas euclideos eran *verdades* acerca del espacio intuitivo (en el sentido de Kant), y eso bastaba para hacer superflua una demostración de consistencia: es evidente (aquí en sentido estricto) que existe un modelo, y por tanto la teoría no puede ser contradictoria. Para Hilbert, en cambio, la demostración de consistencia establecía la existencia matemática:

> *Si se consigue demostrar que los atributos conferidos a un concepto no pueden conducir nunca, por aplicación de un número finito de inferencias lógicas, a una contradicción, entonces digo que con ello se ha demostrado la existencia matemática del concepto, por ejemplo la de un número o una función que satisfacen ciertas condiciones... [o] la existencia matemática del conjunto de los números reales, es decir, del continuo. [Hilbert 1900, 301]*

La idea de Hilbert es justamente célebre, y forma un pilar de la matemática moderna a nivel ideológico, por así decir, aunque no tiene un papel relevante en la práctica, ya que las demostraciones de consistencia han resultado inalcanzables en los casos de interés.

Fue Hilbert mismo el que, un cuarto de siglo más tarde, intentó zanjar las disputas en torno a la matemática abstracta con una jugada genial: convirtiendo en problema matemático la propia cuestión de la existencia de las nociones matemáticas. Admitamos que la consistencia basta para garantizar la existencia matemática, y admitamos también que las nociones matemáticas pueden ser codificadas mediante teorías formales. Entonces, el problema de la consistencia se convierte en un problema combinatorio, analizable mediante una investigación matemática del concepto de demostración formal. La metamatemática, la *teoría de la demostración*, bastará para establecer la consistencia de las distintas teorías matemáticas axiomatizadas, y por tanto (por el principio de Hilbert) para dictaminar la existencia de las respectivas estructuras abstractas.

Como todo el mundo sabe, la arriesgada apuesta de Hilbert fracasó. Los medios combinatorios y finitarios no son suficientes ni siquiera para establecer

[7] Ver la carta a Keferstein de 1890 en Dedekind [1998]. Dedekind [1998, 105] respondió también a las críticas que le había dirigido Kronecker, diciendo que no le parecían justificadas las limitaciones que éste pretendía imponer a la libre formación de conceptos. En particular, afirmaba que un conjunto está bien determinado cuando se ha precisado un criterio que establezca si una cosa cualquiera pertenece o no al conjunto, completamente al margen de si conocemos un procedimiento efectivo que permita tomar esa decisión en cada caso concreto.

la consistencia de la aritmética de Peano[8], y nadie tiene ni la menor idea de cómo se podría demostrar la consistencia de un sistema axiomático para los números reales. Pero esto no ha impedido que la apelación a la consistencia siga formando parte del credo fundamental del matemático moderno, aunque sea al nivel de las buenas intenciones y la esperanza de que, algún día, alguien resolverá la cuestión. Todo esto nos lleva al tema de la posición formalista, sobre la que ya es hora de decir algunas palabras.

Mientras escribo este trabajo, soy plenamente consciente de que la mayoría de los matemáticos, ante una discusión sobre temas de este tipo, se manifiestan como formalistas (por más que no pocos sientan algún malestar ante las limitaciones de ese planteamiento). Esto habrá tenido como consecuencia que muchas de las formulaciones anteriores les hayan creado cierta incomodidad. De acuerdo con el *formalismo* estricto, toda teoría matemática es (y sólo es) una combinación de símbolos carentes de significado: todo consiste en símbolos, reglas para la formación de expresiones (bien formadas) y reglas para la derivación de expresiones (incluyo aquí axiomas y reglas de inferencia). Las expresiones no tienen un referente externo, no tienen significado; en todo caso, los símbolos matemáticos son autorreferentes. El oficio del matemático es meramente la deducción formal[9].

Ahora bien, el formalismo puro y duro no resulta adecuado ni como una respuesta al problema de los fundamentos, ni como una filosofía de la matemática. No es adecuado como fundamentación, porque la piedra de toque fundacional –en este planteamiento– es y sólo puede ser la demostración de consistencia. De manera que no disponemos de una fundamentación para el análisis, ni para el álgebra abstracta, etc., ni siquiera para la aritmética. No importa, se dirá, porque resulta claro que la aritmética de Peano o la teoría de los números reales no van a dar lugar a contradicción: una larga experiencia y un alto grado de familiaridad con ellas lo avalan. Pero si la fuente de nuestra convicción acerca de la consistencia no está en los propios métodos formales, resulta claro que el formalismo no alcanza a ser un punto de vista autosuficiente en fundamentación de la matemática. Como mínimo, habría que complementarlo con algún otro elemento que diera cuenta de las convicciones matemáticas que no surgen del puro juego formal. Esto es lo que ocurre en el caso de algunos formalistas conscientes, como puede ser Curry [1951], que complementa las ideas formalistas con una cierta intuición informal. Ahora

[8]La consistencia de la aritmética de Peano solo se ha podido establecer (Gentzen) empleando inducción transfinita –limitada, eso sí, a ordinales numerables– o (Gödel) suponiendo consistente la aritmética intuicionista.

[9]Todo el mundo sabe que el formalismo se relaciona con el gran nombre de Hilbert, aunque lo cierto es que Hilbert no era formalista. Lo que para él era un medio para demostrar la consistencia, ha sido convertido por otros en un fin, en todo lo que cabe decir acerca de la matemática. En un curso de 1919/20 se encuentra un texto que no puede ser más claro: "No estamos hablando aquí de ninguna arbitrariedad. La matemática no es como un juego en el que los problemas fueran determinados mediante reglas inventadas arbitrariamente, sino que es un sistema conceptual dotado de necesidad interna, que sólo puede ser así y no de otra manera" [Hilbert 1992, 14].

bien, si aceptamos esta intuición como fuente de nuestras ideas acerca de estructuras como las de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$, estamos abriendo la puerta al platonismo interno.

Los problemas del formalismo no acaban ahí. Se trata de un enfoque muy insatisfactorio para dar cuenta del conocimiento matemático y su desarrollo, es decir, como filosofía de la matemática. Esto se debe, ante todo, a que no hace comprensible ni el desarrollo de la matemática, ni la práctica actual. Comenzando por la práctica matemática, ésta introduce toda una serie de elementos que están lejos de representar simplemente una aproximación formal a las teorías. Cuando el matemático en activo habla de la aritmética de Peano (AP), no está desarrollando un puro juego formal, sino razonando sobre una cierta estructura, un modelo de los axiomas. Quizá esto sería compatible con el formalismo si se estuviera considerando todos los posibles modelos del sistema, pero por supuesto el matemático en activo no está pensando en modelos no estándar de AP (desde un puro formalismo, éstos están exactamente al mismo nivel que el modelo pretendido). Lo mismo se aplica a la teoría de $\mathbb{R}$: es el problema de la no categoricidad de las teorías axiomatizadas en lógica de primer orden[10]. El matemático en activo está habituado a formular las teorías que le interesan en un marco conjuntista, pero no trabaja dentro de la teoría de conjuntos formalizadag; esto le llevaría de nuevo a la existencia de modelos no estándar, a la paradoja de Skolem, etc. (El mismo concepto de finitud –prototipo de idea que todos, clásicos o constructivistas, creemos captar intuitivamente– no es formalizable en primer orden.) Y por supuesto, en la práctica nunca se hace el esfuerzo de comprobar que la demostración del teorema que nos interesa puede formalizarse en el marco conjuntista; la convicción de que así es se establece mediante un razonamiento intuitivo, que además queda implícito.

Otra dificultad clarísima que encuentra el formalismo es que hace incomprensible la historia de la matemática. El imperativo formalista, para la práctica matemática, sería: estudiar todos los sistemas formales consistentes. Pero los matemáticos nunca se han guiado por esa máxima, nunca han estudiado sistemas arbitrarios, sino sólo sistemas *interesantes* en conexión con el conocimiento matemático preexistente. Ni siquiera en la época del formalismo se han investigado sistemas formales arbitrarios: sólo se estudian sistemas que surgen de manera natural a partir de problemas, resultados y teorías precedentes; sólo se estudian ciertas estructuras de interés matemático, entre las infinitas estructuras posibles. Pero una filosofía de la matemática ¿no debería aclarar en qué puede consistir eso del "interés matemático"? (y el problema de qué es "interesante" nos llevaría de nuevo a cuestiones cercanas a la espinosa "intuición"). Además, llamar "matemáticos" a los autores de antes del siglo XX sería, estrictamente hablando, un abuso lingüístico. El enfoque formalista

[10] Esto tiene otra consecuencia: una demostración de consistencia para $\mathbb{R}$ garantizaría la existencia de algún modelo de los axiomas, pero éste no tiene por qué ser el modelo pretendido, ya que los axiomas en primer orden no caracterizan $\mathbb{R}$ categóricamente. (Agradezco a Ignacio Jané el llamar mi atención sobre este punto, cuyas consecuencias podrían llevarse más lejos, aunque no lo haremos aquí.)

no permite entender a qué se ha llamado "matemática" antes de (digamos) 1920, ni qué es lo que ha guiado el desarrollo de las "matemáticas" desde Grecia.

El enfoque abstracto y el planteamiento formalista ganaron la batalla, la disputa de los fundamentos, no porque se demostrara fehacientemente su validez, sino porque garantizaban mejor la libertad de acción del matemático. El formalismo es una ideología muy adecuada para el matemático abstracto: le garantiza *libertad* en la postulación de objetos y estructuras, y sobre todo le asegura una *autonomía* total en la decisión acerca de lo que es aceptable y lo que no en el campo de la matemática. El formalismo es, así, la ideología más conveniente para los miembros de una comunidad matemática autónoma, para los representantes de una disciplina que quiere ser plenamente autosuficiente[11]. A esto se añaden las dificultades filosóficas y de todo tipo que encuentra la posible alternativa del realismo platónico (§4.3). Pero si la disyuntiva entre formalismo y realismo no agota todas las posibilidades, a estas alturas debería poderse buscar una filosofía de la matemática más adecuada, sin que ello supusiera un ataque a la matemática abstracta, ni se interpretara como un atentado a la autonomía de los matemáticos.

Así que, a fin de cuentas, el matemático abstracto se arroga la máxima libertad a la hora de postular objetos y estructuras como existentes independientemente de nuestras construcciones (y por tanto, independientemente de lo que podríamos definir paso a paso, de modo efectivo, a partir de un dominio limitado de objetos y relaciones dados, p.e. la aritmética elemental). Volvemos una vez más a la idea de Bernays: la matemática moderna es platónica o existencial, en el sentido de que investiga relaciones que se dan entre objetos postulados, concebidos como existentes independientemente de nuestras construcciones. Desde un punto de vista histórico, podemos ver esa característica como una herencia del elemento no-constructivo que había en la matemática tradicional. Solo que antiguamente se tenía la creencia (que muchos calificarían de metafísica) de que existen magnitudes continuas en la realidad física, mientras que ahora pocos piensan, o pocos se atreven a decir, que haya una relación inmediata entre la matemática y la realidad.

3. GRADOS DE PLATONISMO INTERNO

Cuando se habla del platonismo, muchas veces viene asociado a la existencia real de un universo conjuntista dado de una vez para siempre (y por tanto, es de suponer, maximal). Pero, en realidad, si nos distanciamos del realismo platónico y nos centramos en el platonismo interno, la cuestión no se plantea en términos de todo o nada. Caben múltiples posiciones, según la teoría que estemos manejando, que desarrollarían una gama de compromisos platónicos crecientes [Bernays 1935]. Los polos extremos serían un constructivismo radical,

[11] A este nivel, pues, el de explicar por qué (históricamente) ha triunfado el formalismo, me parece muy acertada una explicación sociológica. Pero conviene decir que, en general, estoy muy lejos del sociologismo con respecto a la matemática o la ciencia en general.

al modo de Kronecker y Brouwer, que elimina cualquier elemento platónico; y un platonismo extremo, que postularía un mundo ideal conteniendo todos los objetos y relaciones de los que podría ocuparse la matemática. La primera posición es defendible, aunque limita terriblemente las posibilidades teóricas, pero la segunda es inadmisible, tal como mostraron las paradojas (en especial la de Russell y Zermelo)[12]. Si aceptamos los conceptos habituales de conjunto y función en toda su generalidad, no puede hablarse de una totalidad que abarque todos los objetos matemáticos, pues esto nos lleva a una contradicción. Esto hizo posible que Zermelo convirtiera la paradoja mencionada, en el contexto de su sistema axiomático de 1908, en una demostración rigurosa de la no existencia de un conjunto universal.

Ahora bien, las paradojas solo muestran la inadmisibilidad del platonismo extremo. Fuera de esta limitación, cualquier género de platonismo es (hasta donde sabemos) admisible en el sentido de no llevar a contradicción. Pero los tipos de compromiso platónico más importantes son, esencialmente, solo dos [Bernays 1935, 63-64]:

1. El supuesto más débil consiste en admitir el infinito actual sólo en su forma más elemental: admitir la *totalidad de los números naturales* como algo que goza de existencia objetiva. Al hacerlo, nos vemos llevados a admitir el principio de tercio excluso para los naturales: dada una propiedad aritmética, o bien la propiedad se aplica a todos los naturales, o bien existe un número de $\mathbb{N}$ que no la cumple. (Este principio no resulta natural si no se supone que preexisten, en algún sentido, *todos* los números.)

2. El supuesto más fuerte consiste en la admisión de las nociones de conjunto y función tal como se usan en la matemática moderna: lo que suele llamarse las nociones *abstractas*, o la idea de conjuntos y funciones *arbitrarios*. Se trata, por ejemplo, de hablar de conjuntos numéricos (subconjuntos de $\mathbb{N}$), o sucesiones de números, o funciones $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, completamente al margen de posibilidades efectivas de definición. Las leyes de formación y las definiciones que se dan para ejemplos particulares de conjuntos o funciones se contemplan, desde esta perspectiva, sólo como métodos de *determinación* de objetos que existen independientemente.

Por supuesto, caben más opciones que las dos señaladas, aunque habitualmente son exploradas sólo por expertos en fundamentos. La misma opción (2.) no exige adoptar el sistema Zermelo-Fraenkel de teoría de conjuntos, sino que podríamos eliminar el Axioma de Reemplazo y en ciertos contextos –como el análisis real– debilitar el de Elección. Por otro lado, se han propuesto diversos sistemas todavía más débiles, y los expertos en teoría de conjuntos dedican sus esfuerzos a explorar compromisos mucho más fuertes (axiomas de infinitud

[12] Zermelo descubrió la contradicción independientemente de Russell (y algo ántes), aunque fue éste quien la publicó en 1903. Para Zermelo no era una contradicción, probablemente porque no compartía la concepción ingenua (logicista) de los conjuntos; sólo mostraba que no existe cierto tipo de conjuntos.

fuertes, grandes cardinales)[13]. Pero estas opciones alternativas no tienen, de momento, grandes implicaciones para la práctica habitual, a diferencia de las dos que hemos resaltado siguiendo a Bernays [1935].

H. Weyl (1885-1955)

En el momento en que Bernays presentó estas ideas en su clarificador artículo, ya existían buenos ejemplos de las diversas posturas mencionadas. Kronecker había planteado, y Brouwer desarrollado, el punto de vista constructivista estricto, que trata el concepto de infinito en el sentido potencial, y nunca en el actual; Dedekind y Russell, mientras tanto, daban ejemplos de platonismo extremo con su aproximación ingenua a la teoría de conjuntos. La interesante posición esbozada en (1.) fue, de hecho, adoptada por Hermann Weyl en su libro *Das Kontinuum* [1918]. Weyl aplicaba la lógica clásica cuantificando sobre el dominio de los naturales, pero se negaba a admitir subconjuntos infinitos arbitrarios de $\mathbb{N}$. Su argumento era que la característica principal de lo infinito es ser *inexhaustible*, y por eso mismo no puede decirse que exista una analogía entre lo finito y lo infinito. Dado un conjunto finito, podemos razonar asumiendo subconjuntos arbitrarios suyos, porque siempre es posible (en principio) formar dichos subconjuntos seleccionando elemento por elemento. Esto es, justamente, lo que según Weyl (y otros autores) no se puede hacer en el caso infinito, de ahí que sólo podamos hablar de un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ cuando disponemos de una propiedad que lo defina. Y para formar propiedades o relaciones debemos partir de las propiedades y relaciones básicas de la aritmética.

Por razones similares, Weyl estaba de acuerdo con Poincaré en que se deben evitar las definiciones impredicativas. Desarrollando coherentemente esas ideas, Weyl pasaba a tratar la teoría de $\mathbb{R}$ y las cuestiones del análisis. Pensemos en $\mathbb{R}$ definido a través de cortaduras, al modo de Dedekind; si reformamos esta idea en el sentido de Weyl, no dispondremos de cortaduras arbitrarias, y sólo alcanzaremos a definir aquellos números reales que corresponden a una ley aritmética. Ya no tenemos un conjunto $\mathbb{R}$ completo, sino el correlato de un conjunto de leyes aritméticas; nos alejamos de la idea intuitiva del continuo, una idea de origen geométrico. Weyl conseguía rehacer buena parte del análisis, pero desde luego tenía que renunciar a cosas tan básicas,

[13] Dos criterios naturales para la "fuerza" del compromiso platónico son los siguientes: en una primera aproximación, la cardinalidad del dominio de objetos presupuesto; y además, como es natural, su potencia deductiva.

en la concepción clásica, como el teorema de la cota superior. Obtenía una aproximación "atomizada" a $\mathbb{R}$ y una versión predicativa del análisis[14].

Definición impredicativa.
Esta noción fue introducida por Poincaré hacia 1906, reflexionando sobre las paradojas de Richard y de Burali-Forti. Creía que las paradojas surgían de definir un objeto en términos de una totalidad a la que dicho objeto pertenece, lo que sería un círculo vicioso.
El concepto moderno de definición impredicativa es el siguiente: se define un conjunto S de modo que el propio S pertenece al dominio de los cuantificadores empleados en la definición. Es fácil dar ejemplos utilizando el Axioma de Separación (o subconjuntos) con condiciones que involucren conjuntos potencia, del tipo:

$$S = x \in T : \ldots \wp(T) \ldots .$$

Por supuesto, las definiciones impredicativas son absurdas si se piensa que la definición "crea" o construye el objeto, aunque resultan perfectamente aceptables como medios para especificar conjuntos que se suponen dados al margen de la definición. La matemática abstracta es impredicativa, mientras que autores como Weyl y otros han desarrollado sistemas predicativos.

En cuanto a la versión fuerte del platonismo (2.), existían múltiples ejemplos de ella, ya que –como afirmaba Bernays en la cita que dimos al principio– se convirtió en la tendencia dominante en el siglo XX. Sus orígenes pueden trazarse ya en Dirichlet y Riemann, haciéndose explícita en Dedekind, Cantor y Hilbert, por citar solo algunos de los grandes nombres, y quedando formalizada en el sistema Zermelo-Fraenkel. Para esa concepción plenamente general o arbitraria de conjuntos y funciones, Bernays acuñó otra expresión que ha tenido éxito, diciendo que dichos conceptos son entendidos en sentido "cuasi-combinatorio". Es decir, se establece una analogía entre lo finito y lo infinito, tal como lo hemos sugerido ya al hablar de Weyl: en el caso infinito también podemos, por analogía con lo finito, asumir subconjuntos arbitrarios. Casi todos los autores, hacia 1900, admitían que puede determinarse un conjunto infinito indicando una "ley de formación" o propiedad característica de sus elementos. El matemático abstracto va más lejos y supone que no hay nada imposible, ni mucho menos contradictorio, en la idea de una cantidad infinita de determinaciones perfectamente independientes unas de otras. Es fácil darse cuenta de que el Axioma de Elección es una consecuencia natural de ese enfoque, un caso paradigmático de planteamiento abstracto.

En su artículo, Bernays dedicaba la mayor parte del espacio a discutir las virtudes y defectos de la matemática platónica por comparación con la matemática constructiva. En su opinión, ambas tienen un papel que desempeñar, y sería antinatural el forzarse a prescindir de la una o la otra [1935, 75]. En su

[14]Los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell estaban cerca del platonismo débil, tal como lo presentó Weyl, pero "emborronaron" su planteamiento al admitir el famoso (o infame) axioma de reducibilidad y al empeñarse en defender la posición logicista. Weyl afirma que llegó a sus concepciones sin haber leído a Russell.

discusión, mostraba cómo las distintas ramas de la matemática sugieren uno u otro nivel de platonismo, y concluía esta parte diciendo:

> *A modo de sumario podemos decir que el intuicionismo es adecuado para la teoría de números; el método semi-platónico que emplea la idea de una totalidad de los números enteros, pero evita los conceptos cuasi-combinatorios, es adecuado para la teoría de los números reales; y el método platónico habitual se ajusta a la teoría geométrica del continuo. Esta situación no es de ningún modo sorprendente; pues al matemático actual le resulta familiar el aplicar en cada disciplina sólo los presupuestos que sean necesarios para ella. [Bernays 1935, 68]*

Como puede verse, Bernays afirmaba que la idea del continuo es de origen geométrico (o quizá, añadiríamos, cinemático), por más que en el campo del análisis se traduzca a un lenguaje aritmético-conjuntista [1935, 74]. La matemática constructivista, que evita el platonismo de la forma más radical, no representa más que una tendencia minoritaria o una rama particular: la mayor parte de la matemática actual es infinitista y platónica, en el sentido del platonismo interno. Además, a consecuencia de la familiaridad con el análisis y con nociones tan básicas como puede serlo la de número real (el continuo), al matemático le resulta incluso artificial cuestionar el Axioma del Infinito[15].

4. Realismo platónico

¿Cómo puede entenderse y justificarse el platonismo (interno) de la matemática moderna? Ante esta pregunta cabe una diversidad de posiciones, algunas de las cuales serán meramente pragmáticas, argumentando, por ejemplo, que el análisis es extraordinariamente útil como herramienta para la descripción científica del mundo físico. Otras posiciones pueden llamarse teóricas o quizá filosóficas, y entre ellas (aunque sólo como una entre muchas) encontramos por fin el realismo platónico. En este apartado consideraremos algunas versiones del platonismo filosófico, comenzando por Platón y deteniéndonos sobre todo en los clásicos planteamientos de Cantor. Pero el platonismo, como tantos otras enfoques, ha sido refinado y desarrollado durante el siglo XX, y hoy encontramos versiones del mismo que son mucho más complejas. Valgan como ejemplos las ideas de un Hardy o un Thom, el platonismo de Gödel, que cabría llamar crítico, el llamado "platonismo de compromiso" del lógico y filósofo Quine, o el platonismo naturalista de Maddy. No tendría sentido intentar aquí un resumen de todos esos enfoques, así que me limitaré a comentar las ideas de Gödel, enfatizando lo que tienen de novedoso y moderno[16].

[15] Sin embargo, el polémico Axioma de Elección puede verse, simplemente, como una consecuencia natural de emplear las nociones de infinito actual y de conjunto arbitrario (o cuasi-combinatorio).

[16] Del lógico y filósofo Quine puede verse su [1953, caps. 1 y 7] y [1968, caps. 2 y 4], así como también las exposiciones de Maddy; los trabajos de esta autora son [Maddy 1990,1998].

4.1. De Platón a Cantor

Desde luego, el platonismo filosófico no surgió históricamente del intento de responder a la pregunta sobre la matemática abstracta que hacíamos más arriba. Su origen está, más bien, en cuestiones muy elementales como pueden ser las siguientes: ¿qué son los números? ¿qué tipo de realidad tienen? O una típica cuestión griega: dado que los triángulos y los círculos que podemos encontrar en la naturaleza, o construir nosotros mismos, no son figuras geométricas perfectas, ¿qué es un triángulo geométrico? ¿dónde se encuentra?

Platón, empeñado en la búsqueda de una auténtica realidad que se ocultaría detrás del mundo de apariencias y opiniones que nos rodea, postuló la existencia de un Mundo de las Ideas o Formas (recordemos el famoso mito de la caverna, en la *República*). Las cosas perceptibles deben su existencia y su ser a las Formas de las que participan; además,

> *Platón afirmó que entre las cosas sensibles y las Formas existen los entes matemáticos, que se diferencian de los sensibles por ser eternos e inmóviles, y de las Formas por haber muchos individuos similares, mientras la Forma es en sí misma única y singular. (Aristóteles, Metafísica, libro A, cap. 6)*

Las figuras matemáticas y los números se cuentan entre aquellas nociones accesibles a nuestra razón que son más próximas al verdadero mundo de las Formas[17].

Como es bien sabido, Aristóteles rechazó la distinción de su maestro entre un universo de auténticas realidades y un universo de apariencias. Según él, la unidad o la circularidad se abstraen de los objetos materiales, pero no tienen existencia independiente de esos objetos. Conviene recordarlo aquí, porque algunas posiciones filosóficas que se califican de "platónicas" están, en realidad, más cerca del aristotelismo.

Las ideas de Platón adquirieron tintes nuevos al mezclarse con la tradición judeo-cristiana. San Agustín situó las Ideas en la mente de Dios, igual que hacía Cantor con los números en la carta a Hermite citada al principio. Y, por cierto, eso llevó a San Agustín a afirmar que la totalidad infinita de los números naturales existe en acto en el intelecto divino, porque ¿quién será tan demente para decir que la ciencia de Dios se detiene en un cierto número n, por grande que sea?[18] La idea de Dios siguió presente en muchos otros autores que atribuyeron existencia real a los objetos de la matemática.

Así pues, el platonismo filosófico postula una bifurcación de la realidad: existe una realidad física perceptible por los sentidos, y una realidad matemá-

[17] Parece ser que, en sus enseñanzas orales, Platón llegó a afirmar que las Ideas son números, aunque no los números matemáticos, sino Números ideales; estos Números–Idea se engendrarían a partir del Uno y de la Díada de lo grande y lo pequeño. La fuente de estas afirmaciones es la *Metafísica* de Aristóteles.

[18] Agustín de Hipona, *La ciudad de Dios* (escrito hacia el año 420), citado por Cantor [1932, 401].

tica perceptible a la intuición, a un supuesto "ojo de la mente". La mayoría de los platónicos adoptan un *apriorismo*; como dice Putnam:

> *Desgraciadamente, la creencia en la objetividad de la matemática ha ido, en general, junto con la creencia en los "objetos matemáticos" entendidos como una realidad incondicionada y no física, y junto con la idea de que el tipo de conocimiento que tenemos en matemáticas es estrictamente a priori. [Putnam 1975, 60]*

La intuición que postula el platónico debe hacer que tengamos un conocimiento cierto y seguro de las proposiciones matemáticas, que son, pues, *verdades* en sentido estricto. Ni que decir tiene que el desarrollo de la matemática en el último siglo y medio ha planteado graves dificultades a un planteamiento tan ingenuo. Pero ya veremos que hay versiones sofisticadas del platonismo, como la de Gödel.

Hemos visto cómo el platonismo seguía vivo entre los grandes matemáticos del XIX, por ejemplo en Hermite, así como en Frege y otros[19]. Pero de todos los platónicos de aquel siglo, el más famoso es sin duda Cantor, descubridor (¿o inventor?) de la teoría de conjuntos transfinitos. Según vimos, Cantor distinguió dos sentidos de "realidad", el *inmanente* que es el único que compete a la matemática, y el *transiente* que incumbe a las ciencias (y a la metafísica). Pero nada más fijar la distinción seguía escribiendo una frase bastante llamativa:

> *Desde la base totalmente realista, pero a la vez no poco idealista, de mis consideraciones, no admite para mí ninguna duda que estas dos formas de realidad siempre se encuentran, en el sentido de que un concepto que haya que caracterizar como existente en el primer sentido, posee siempre en algún respecto e incluso en infinitos una realidad transiente, cuya determinación constituye generalmente una de las tareas más fatigosas y difíciles de la metafísica. [Cantor 1883, 181]*

Lo que existe en matemáticas, existe también en la mente divina, y aun más, existe en la naturaleza. Por este motivo, Cantor pedía que no sólo se investigaran las relaciones matemáticas entre los números transfinitos, sino también sus manifestaciones en la naturaleza [1883, 177, 205], y de hecho intentó avanzar por este camino en los años siguientes (ver [Ferreirós 1993], cap. 10). Conviene señalar que Cantor escribió estos párrafos cuando estaba en lo más alto de su creatividad y capacidad matemática: justamente mientras introducía los números ordinales transfinitos y demostraba el teorema de Cantor-Bendixson.

Para Cantor, pues, los conjuntos y los números transfinitos existían en un reino platónico (o mente divina) y en la naturaleza, lo que sin duda le salvaba de sufrir dudas constructivistas al estilo de Kronecker. Cantor tenía plena

---

[19] Resulta también fácil dar ejemplos de otras posturas, como pueden ser los casos de Riemann y Dedekind (ver [Ferreirós 1993], cap. 10).

confianza en la *realidad* del infinito actual, en la *existencia* de los conjuntos. Y en su mente había una relación directa entre sus nuevas nociones y las ideas de Platón ; dando por primera vez una definición de conjunto, escribió: "con ello creo definir algo emparentado con el *eidos* o *idea* platónico" [Cantor 1883, 204]. Más tarde enfatizó esta posición ontológica y epistemológica a través de las citas que encabezaban sus dos últimos artículos. En 1895 decía con Newton: "hypotheses non fingo", y citaba el siguiente texto de Francis Bacon:

> *Pues no damos leyes al intelecto o a las cosas a nuestro arbitrio, sino como escribas fieles las recibimos y copiamos de la voz revelada de la naturaleza misma. [Cantor 1932, 282]*

Ya en 1884, le había escrito a Mittag-Leffler que con respecto al contenido de sus trabajos era solo un escribano, un funcionario. Dios mismo, o la Naturaleza, parecía ser la inspiración de sus novedosas y radicales creaciones. Tales ideas tuvieron como consecuencia que, ante el descubrimiento de las paradojas del conjunto de los ordinales y el conjunto de los alefs, Cantor ni siquiera se inmutara. Vio enseguida que las paradojas suponían un grave problema para otros autores interesados en la teoría de conjuntos, especialmente para los planteamientos ingenuos de los logicistas. Pero a Cantor no le parecían "antinomias" o contradicciones, sino resultados bastante naturales que incluso trató de aprovechar para demostrar el teorema de buen orden. Lo transfinito, en su opinión, se sitúa en el terreno intermedio entre lo finito y el Absoluto divino. Lo absoluto, Dios, no es comprensible para la razón humana, por lo que no es matematizable [Cantor 1883, 205]. Y las paradojas tenían que ver precisamente con totalidades absolutas, por lo que no era extraño que el intento de razonar matemáticamente sobre ellas llevara a contradicciones. Como vemos, a lo largo de toda su carrera, el platonismo fue para Cantor un punto de apoyo importante, al darle confianza para desarrollar sus innovadoras teorías sobre el infinito e inmunizarle de posibles dudas escépticas.

4.2. GÖDEL

Similares posiciones de corte platónico pueden encontrarse en Gödel, quien también indicó que el platonismo fue crucial para que pudiera llegar a resultados del calibre de su célebre primer teorema de incompletud, o la independencia del Axioma de Elección y la Hipótesis del Continuo [Wang 1987]. Algunos han visto en ello argumentos no poco impresionantes a favor de esa posición filosófica. Pero lo que nos interesa aquí es que la versión del platonismo que da Gödel se distingue por ser ciertamente más sutil que la de Cantor.


K. Gödel (1906-1978)

Gödel plantea ciertas similitudes entre la teorización científica y la teorización en matemáticas, anticipándose a puntos de vista propios de lo que se ha llamado "cuasi-empirismo": un nombre que, por cierto, yo eliminaría, sustituyéndolo por hablar de una *concepción hipotética* de (partes de) la matemática. En realidad, la idea de que en las teorías matemáticas hay elementos hipotéticos fue otro de los resultados del debate sobre fundamentos, aceptado de manera muy general. Se encuentra en autores tan diferentes como el empirista Russell, Hilbert, el constructivista Weyl, von Neumann, y Gödel.

En su trabajo sobre la lógica matemática de Russell, Gödel se atreve a comparar la aceptación de los conjuntos "como objetos reales" con la aceptación de los cuerpos físicos:

> *las clases y los conceptos pueden concebirse como objetos reales... Me parece que la aceptación de tales objetos es tan legítima como la aceptación de los cuerpos físicos y que hay tantas razones para creer en la existencia de aquéllos como en la de éstos. Son necesarios para obtener un sistema de matemáticas satisfactorio en el mismo sentido en que los cuerpos físicos lo son para una teoría satisfactoria de nuestras percepciones sensibles, y en ambos casos es imposible interpretar los enunciados acerca de estas entidades como enunciados acerca de datos... [Gödel 1944, 310]*

Conviene tener en cuenta, aquí, que Gödel está aceptando (con Russell) que los objetos físicos no son un "dato", sino entidades teóricas que postulamos para dar cuenta de los fenómenos percibidos. Algo parecido sucedería con los conjuntos.

Gödel cita muy positivamente la idea de Russell de comparar los axiomas de la matemática con las leyes naturales, y la evidencia matemática con la percepción sensible. En cuanto a los datos básicos de la evidencia matemática, el ejemplo obvio al que Gödel vuelve una y otra vez son las proposiciones de la teoría finitaria de números, que Hilbert tomó como la piedra de toque para las demostraciones de consistencia absoluta. Así, la "evidencia" matemática se limitaría a elementos tales como los números naturales y sus leyes, que servirían de base para un proceso de desarrollo teórico en el que se habrían ido introduciendo elementos cada vez más abstractos. Dice:

> *los axiomas no tienen por qué ser necesariamente evidentes por sí mismos, sino que su justificación estriba (como en la física) en el hecho de que permiten que estas "percepciones sensibles" sean deducidas; esto no excluiría, por supuesto, que tuviesen también una suerte de plausibilidad intrínseca similar a la que se da en física. Creo que (en el supuesto de que "evidencia" se entienda de un modo suficientemente estricto) este punto de vista ha sido ampliamente justificado por posteriores desarrollos y se puede esperar que aún lo sea más en el futuro. [Gödel 1944, 300]*

Gödel admite que al plantear un método hipotético-deductivo en conexión con la matemática, ésta puede perder buena parte de su "absoluta certeza", pero insiste en que las hipótesis de que se trata nunca son puramente convencionales.

En un trabajo posterior, Gödel afirmaría que lo "dado" que subyace a la matemática está muy relacionado con elementos abstractos contenidos en nuestros conceptos empíricos, como es el concepto mismo de objeto. El que tales "datos" no sean de origen perceptual no implica subjetividad:

> *Pueden representar más bien un aspecto de realidad objetiva, pero, en oposición a las sensaciones, su presencia en nosotros puede deberse a otro tipo de relación entre la realidad y nosotros mismos. [Gödel 1964, 360]*[20]

Ya hemos visto que el platonismo tiende a enlazar con una concepción apriorista del conocimiento matemático; en el mismo artículo, Gödel llega a decir:

> *a pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos. No veo ninguna razón por la cual debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción sensible. [Gödel 1964, 359]*

Desde luego, este tipo de ideas resultan ya muy difíciles de compartir. Lo más interesante, en mi opinión, es quedarse con la idea de que Gödel no era un platónico ingenuo, que pensara que todo lo que afirma (por ejemplo) la teoría de conjuntos se limita a describir una realidad exterior. Su posición era más sofisticada, admitiendo que entre los principios de la teoría hay elementos que se introducen por razones puramente teóricas, como pueden ser la búsqueda de generalidad explicativa, e incluso motivos de simplicidad y conveniencia.

4.3. Dificultades del realismo

Las grandes virtudes del realismo platónico son que da una explicación sencilla y directa al fenómeno del platonismo interno, y que suministra la base más fuerte posible a la objetividad y especificidad del conocimiento matemático. Pero lo hace al precio de defectos no menos llamativos. Sus dificultades resultan bastante obvias, fundamentalmente se relacionan: con la ontología que se postula, con que se convierte la aplicabilidad de las matemáticas en algo sumamente misterioso, con el problema del acceso a la realidad platónica, y con la falta de compatibilidad teórica. Veámoslas brevemente.

El realismo lleva a postular una ontología nada económica: las infinitas geometrías posibles, todos los distintos tipos de grupos finitos o infinitos, los conjuntos de cardinales pequeños o exorbitantes, el análisis estándar y el no-estándar, etc., etc., etc., todos ellos están ahí (en algún lugar y tiempo, o fuera

[20] Esta frase permitiría conectar con una teoría naturalista del conocimiento matemático, y Maddy [1990] trata de aprovechar esta circunstancia. También sería posible conectarla con lo que diremos más adelante.

de todo tiempo y lugar, pero ahí). Se trata de un mundo infinitamente rico al que sólo tenemos una forma de acceso: hacer matemáticas; ni la física, ni la biología, ni la lingüística nos pueden servir de ayuda a la hora de investigar esa supuesta realidad. Dicho de otro modo, la realidad se bifurca en dos universos totalmente disjuntos, lo que en sí mismo no resulta plausible. Y los dos universos se encuentran en una situación muy desequilibrada: en uno se encuentra casi todo lo que conocemos; en el otro, infinitamente más rico, los objetos matemáticos.

Todo ello hace que la gran efectividad de la matemática en su aplicación al estudio de los fenómenos resulte todavía más falta de plausibilidad. ¿Por qué la constitución del mundo físico debería guardar relación alguna con la constitución de ese otro mundo paralelo? A menos, claro está, que recurramos de nuevo a Platón y a Cantor, considerando a Dios como el demiurgo creador del universo físico según el patrón eterno de las Ideas matemáticas. Incluso los lectores que sean creyentes tendrán, probablemente, algún reparo ante el carácter sumamente especulativo de esta solución.

Un tercer problema es el siguiente: cuanto más sólido y real hagamos el universo matemático, más difícil resultará explicar cómo podemos conocerlo. Parece natural aceptar que conocer algo exige interaccionar con ello de alguna manera. Pero ¿cómo puede interaccionarse con una realidad no física, incondicionada, inmóvil y atemporal? Esta objeción es evidente, y sin duda ha sido reconocida por todos los que han reflexionado sobre la cuestión. Un intento reciente de darle una formulación filosófica clara e incisiva fue el de Benacerraf hace 25 años; de ahí que en la literatura anglosajona se hable muy a menudo del "dilema de Benacerraf"[21].

La respuesta habitual, por supuesto, es recurrir a la equívoca idea de intuición, entendida aquí en el sentido de que existe una forma específica de acceso, una especie de "ojo de la mente" que nos permite "percibir" la otra realidad (aunque no sea espacial). Gödel [1944, 303] acepta que nuestras intuiciones pueden estar a veces "desenfocadas" o incluso ser "autocontradictorias", como según él pasó, en su día, cuando se plantearon las paradojas. Esto no hace sino recordarnos lo impreciso que resulta hablar de una intuición que no es exacta, sino que se va perfeccionando y desarrollando, etc., y respecto a la cual no se introduce ninguna otra aclaración. Hablar de intuición supone más bien plantear un nuevo problema, no resolver el antiguo; como mucho, no pasa de ser una forma de replantearlo. ¿En qué consiste esa intuición? ¿Qué relación tiene con el resto de nuestra constitución mental?

Además, es de suponer que los matemáticos son aquellas personas que tienen bien desarrollada la facultad de la intuición, el "ojo mental". La gente que tiene problemas con las matemáticas presenta alguna atrofia de esa facultad. Pero también los formalistas estrictos y los constructivistas, pese a ser (en ocasiones al menos) grandes matemáticos, parecen tener problemas de "visión", ya que no son conscientes de acceder a la realidad platónica. Y, lo

[21] Su formulación tiene el defecto de que, por querer ser muy precisa, presupone determinados principios que pueden resultar cuestionables. Por eso evitaré entrar en detalles.

que es peor, eso no les impide aprender matemáticas ni dominar las teorías, incluso cuando son teorías abstractas que pueden encontrar filosóficamente inaceptables. El propio Brouwer dio el mejor ejemplo de ello con su trabajo en topología, por ejemplo su demostración del teorema de invariancia de la dimensión en 1911. (Gracias a estos trabajos consiguió ganar fama y una posición académica desde la cual dedicar todos sus esfuerzos al programa del intuicionismo, que había formulado ya unos años antes.) Esto apunta a que la intuición platónica no acaba de resolver el problema de cómo conocemos en matemáticas.

Finalmente, es inevitable que juzguemos cualquier teoría, científica o no, no sólo por sus virtudes intrínsecas, sino también por su compatibilidad con el resto de lo que sabemos o creemos saber. La imagen de la mente humana y del conocimiento matemático que nos presenta el realismo podía resultar fácil de admitir hace dos o tres siglos, pero cada vez se hace más disonante con respecto al resto de nuestros conocimientos acerca del hombre. El realismo platónico resulta muy natural al matemático que considera ingenuamente su actividad, pero, por todas las razones que hemos indicado, casi ninguno puede atreverse a defenderlo explícitamente. Esta ha sido, sin duda, otra de las razones que han favorecido el éxito del formalismo.

5. Alternativas al realismo platónico

Varios autores han intentado plantear alternativas al platonismo filosófico, sin tratar de alterar el modo habitual de hacer matemáticas, es decir, respetando el platonismo interno. En esta línea cabe destacar el estructuralismo de Resnik [1988] y Shapiro [1989], el enfoque modal de Putnam [1975] y Hellman [1989], o las propuestas naturalistas de Maddy [1998]. Puede ser interesante decir unas palabras sobre el enfoque modal, propuesto por Putnam en 1967 como una forma de escribir matemáticas alternativa al habitual lenguaje conjuntista. La idea intuitiva era, esencialmente, que en matemáticas no tratamos con objetos existentes, sino con estructuras posibles, realizando una libre exploración de posibilidades estructurales y determinando aquello que es necesariamente válido en dichas estructuras. En esta interpretación, existencia matemática significa existencia posible; demostrar significa establecer lo que es necesario en una estructura posible. La idea es sugerente, pero aclararla o precisarla no es fácil; Hellman ha afrontado este problema en el sentido de una reformulación de las teorías matemáticas en un marco de lógica modal, lo que en mi opinión no lleva a atacar los problemas fundamentales.

En realidad, la concepción del enfoque modal coincide en lo esencial con lo que ya decían los grandes clásicos de hace un siglo. Volvamos a la idea de Cantor de una existencia inmanente, olvidándonos de su realismo platónico; según esta idea, todo lo que exige el matemático es la aceptabilidad en el dominio del pensamiento puro, la mera posibilidad lógica. Quizá el origen de esta concepción se encuentra en Riemann [1854], cuando reflexionaba sobre la geometría diciendo que su pretensión era sólo explorar las posibilidades teóricas que se abren ante la física, superando los prejuicios transmitidos y las limitaciones de los conceptos. Lo que Riemann trataba de hacer era mostrar toda una gama de posibles geometrías, entre las que habría que elegir de acuerdo a métodos científicos; llegaba incluso a sugerir que el sustrato real (físico) de la idea de espacio podría ser discontinuo o aun finito. Su amigo Dedekind venía a decir lo mismo en una frase de 1872, al afirmar que aún si supiéramos a ciencia cierta que el espacio físico (real) es discontinuo, "nada nos podría impedir, si así lo quisiéramos, hacerlo continuo en el pensamiento rellenando sus lagunas" [Dedekind 1998, 85]. La aceptabilidad de nociones como la del infinito o del continuo es independiente, en opinión de todos estos autores, de si existe algo real que sea continuo o infinito.

El propio Hilbert, en sus escritos sobre fundamentos, enfatizaba que la matemática moderna introduce continuamente *elementos ideales*. Al decir esto tenía ejemplos concretos en mente, como los puntos en el infinito de la geometría proyectiva o los números ideales de Kummer. Pero apuntaba también a ese planteamiento según el cual el dominio de la matemática es el reino del pensamiento puro. Zermelo, que fue su discípulo, afirmó en el mismo espíritu [1930, 43] que la consistencia de los axiomas del sistema Zermelo-Fraenkel entrañaría "la *existencia* (matemática, es decir, ideal)" de modelos para el mismo. Este es el planteamiento que motivó la equivalencia hilbertiana *consistencia* $\leftrightarrow$ *existencia*: porque en el dominio del mero pensamiento es admisible todo aquello que cabe pensar sin contradicción. En esta línea, se trata de comprender el concepto de existencia empleado en matemáticas (§1) como existencia posible o existencia ideal, como una postulación de objetos en cuanto admisibles en el reino del pensamiento. En lo que sigue no haremos más que sugerir un planteamiento que haría viables las concepciones de Riemann, Dedekind y Hilbert.

Aunque no es éste el lugar para tratar de desarrollar una filosofía de la matemática, no me gustaría abandonar el tema del platonismo sin esbozar rápidamente unas ideas al respecto. Lo que voy a decir equivale simplemente a un programa de trabajo; no voy a incurrir en el pecado filosófico más habitual, la pretensión de sistematicidad y de tener ya todas las respuestas, sino que esbozaré lo que me parece una teoría prometedora, pero que necesitaría de mucho desarrollo[22]. En mi opinión, no es imposible admitir el platonismo interno en el marco de una concepción *naturalista* del conocimiento; naturalista en el sentido de entender la matemática como un desarrollo, todo lo sofisticado que se quiera, de las capacidades naturales adquiridas por los miembros de la especie humana[23]. Parece de sentido común que los conceptos abstractos no existen al margen de la mente humana, y que en este sentido las teorías matemáticas son simplemente (como le gustaba repetir a Dedekind) una creación nuestra.

[22]Se trata de un programa interdisciplinar para una teoría del conocimiento matemático, no necesariamente de algo que sea específicamente "filosófico", ni mucho menos de una filosofía sistemática.

[23]Hay que decir que el término *naturalismo* está demasiado de moda entre filósofos en los últimos años, con lo que se emplea de manera bastante abusiva y, sobre todo, ambigua. En concreto, el enfoque naturalista que esbozaré está lejos del naturalismo de Kitcher y del de Maddy (tanto en [1990] como en [1998]).

Es razonable admitir que el pensamiento va más allá de lo dado y lo perceptible, y también de lo que puede ser definido atendiendo a requisitos constructivistas. No hay nada de extraño en la idea de que somos capaces de crear "universos ideales", por así decir, que solo existen en el pensamiento (y a los que nos referimos usando un lenguaje construido como el lenguaje habitual: nos referimos a ellos *como si* gozaran de existencia real). Basta pensar en las novelas, en los viejos sistemas filosóficos, en la física del éter, o en los mitos; los propios niños juegan con ficciones ya a los dos años. Además, la teorización humana contiene siempre elementos hipotéticos o conjeturales: hoy estamos muy lejos de pensar que las teorías científicas son meros registros de observaciones, o el resultado de una simple inducción sobre lo perceptible. Pocos físicos serán tan ingenuos como para pensar que todos los detalles de sus teorías y modelos matemáticos son realistas, lo que implica la libertad de pensamiento a la que antes me refería.

Así, la perspectiva que voy a esbozar admite y casi requiere una concepción hipotética de (partes de) la matemática, como la que hemos visto a propósito de Gödel, aunque elaborándola en una dirección muy distinta. Ya he indicado que este tipo de enfoque fue adoptado por muchos de los que participaron, de una forma u otra, en el debate de fundamentos. Pero, como saben bien los físicos, las hipótesis interesantes nunca son puramente convencionales ni arbitrarias, y esto es aun más cierto en el caso de las matemáticas. El intento de concebir buena parte de la matemática como algo hipotético o "ideal" plantea así un problema filosófico fundamental. Se trata de aclarar cómo esa "existencia ideal" es compatible con el alto grado de universalidad y objetividad que caracteriza a la matemática (y que, en buena medida, constituye su carácter diferencial con respecto a las ciencias naturales).

Es tentador interpretar la *objetividad* de la matemática, según sugiere la propia palabra, como equivalente a la existencia real (en algún sentido) de objetos matemáticos. Pero los filósofos (por ejemplo, Kant) se han encargado de recordarnos que al hablar de "objetividad" no tenemos garantías de nada que vaya más allá de la intersubjetividad. '?Cómo algo meramente postulado, algo que sólo cuenta con existencia posible o ideal, puede presentarse como objetivo? Estamos planteando una objetividad sin objetos reales, sólo con objetos mentales o ideales. Y esto implica la necesidad de explicar cómo distintas personas pueden, en determinados ámbitos del pensamiento, alcanzar un acuerdo casi perfecto[24]. Ahora bien, sólo el solipsismo o el subjetivismo más extremos podrían hacer pensar que no hay ninguna base para un acuerdo. Si concebimos al hombre como un ser biológico que desarrolla sus habilidades físicas y mentales en un mundo de objetos físicos, y que maneja el lenguaje, parece haber ya una base mínima para avanzar. Quizá el conocimiento matemático sea el indicio más notable de aquellos elementos que compartimos los sujetos

[24] Entre otros, en el siguiente sentido: también los constructivistas admiten que la demostración habitual de un teorema clásico es correcta según los estándares de la matemática abstracta.

humanos, debido a nuestra constitución física y cognitiva. Pero vayamos paso a paso.

Es importante tener en cuenta que nuestra constitución mental no se desarrolla sólo en base a la observación y el razonamiento, sino también sobre la base de la respuesta motora del organismo, la actuación. Estímulos sensoriales y respuestas motoras están siempre en realimentación, en un proceso que determina la constitución de buena parte de nuestros sistemas cognitivos. El resultado de su coordinación y desarrollo puede llamarse, siguiendo al psicólogo y filósofo Piaget, *inteligencia práctica*. La inteligencia práctica, que sería prelingüística, tiene pues un claro fundamento biológico: es el resultado de ejercitar nuestras capacidades perceptivas y motoras (*input* y *output* del organismo) en el mundo físico. Si el mundo físico en China es similar al de Europa, y si la constitución biológica de los nigerianos es semejante a la de los mayas, resulta fácilmente explicable la existencia de una inteligencia práctica común.

En opinión de Piaget, la matemática está especialmente ligada a esa inteligencia práctica; idea que me parece muy prometedora, al margen de si se admite o no la forma en que Piaget mismo la desarrollaba. Basta pensar en las raíces históricas de la matemática, la aritmética y la geometría, para darse cuenta de tal conexión. En el caso de la aritmética, quizá el menos obvio, enumerar supone siempre correlacionar, y en el proceso normal de contar esa correlación se establece mediante la actuación, al tiempo que vamos produciendo la serie numérica. Como ya indicó Frege, el número no es sin más una propiedad de las cosas (una docena de flores, es una o doce?). El número es siempre el resultado de nuestra manera de considerar las cosas y de interactuar con ellas.

El anclaje de las ideas matemáticas básicas en la inteligencia práctica establecería unos mínimos de objetividad. Y a ello habría que sumar el papel del lenguaje, un elemento intersubjetivo y social donde los haya. Aprender el lenguaje implica siempre coordinar los propios esquemas mentales con los de otros humanos, con lo que se consolida la base para la intersubjetividad. Nuevos elementos y complicaciones entran en escena al aparecer el lenguaje simbólico, escrito, con el que trabaja siempre el matemático; se trata de un punto en el que habría que insistir, pero no podemos detenernos aquí en ello. Con todo lo anterior, surge la idea de la matemática como un ámbito en el que nuestras capacidades simbólicas se ligan de manera especialmente estrecha con ciertos aspectos de la inteligencia práctica. Y por cierto, parece abrirse una buena vía para explicar la especificidad de la matemática frente a las ciencias: aquí no se trata de explorar fenómenos u objetos externos al sujeto, sino que se trabaja con desarrollos simbólicos y conceptuales íntimamente ligados a las propias estructuras cognitivas de los sujetos[25].

Conviene enfatizar que una filosofía de la matemática según la línea que estoy sugiriendo no trataría de ofrecer una fundamentación de esa disciplina: el objetivo primario no es justificar la matemática ni establecer garantías de

[25] Pese a todo, no estamos hablando de conocimiento *a priori*, como no sea en cuanto a su base genética, ni tampoco de un simple lenguaje.

certeza, sino analizar y en su caso explicar cómo alcanzamos y desarrollamos el conocimiento matemático. En particular, se dejaría de perseguir el mito, bastante obsesivo, de un sistema formal que lo abarque y lo sistematice todo (ya sea la teoría de conjuntos, la de categorías, o alguna otra que aparezca mañana). Si algo nos enseña el desarrollo de las matemáticas, es el despliegue de una actividad creativa, en un proceso histórico abierto, que lleva a la introducción de problemas, conceptos y teorías cada vez más complejos. Esto basta para que la idea de un sistema formal omniabarcante resulte un mito. Mucho más realista y prometedor me parece el proyecto de analizar el trasfondo epistemológico del conocimiento matemático, tal como se ha desarrollado históricamente[26]. Se trataría de seguir la evolución histórica del tema, comenzando por las nociones matemáticas más simples (aritmética, geometría), tratando de entender los orígenes de este tipo de conocimiento, y luego observando y analizando cómo otras nociones y problemas más complejos van surgiendo sobre esos elementos iniciales.

La propuesta que estoy esbozando aspira a explicar el origen y la naturaleza del conocimiento matemático. En este sentido, habla del fundamento de la matemática. Pero lo que se busca no es una fundamentación cartesiana o hilbertiana (eliminar toda posible duda escéptica sobre la certeza de la matemática). El fundamento de que hablamos es biológico: sólo pretende entender la actividad matemática y el conocimiento que produce, no establecer garantías absolutas.

Sin embargo, lo dicho hasta aquí sólo puede dar cuenta de los niveles más elementales del conocimiento matemático. Hace falta más para tener, siquiera, una base plausible con la que afrontar la tarea de analizar la matemática superior. A la hora de plantear el paso siguiente hacia la matemática avanzada, me parece que una buena manera es considerando la idea del continuo, noción de origen geométrico-cinemático que parece ser (histórica o genéticamente) el "primer motor" de la aparición del infinito en matemáticas.

Tenemos una idea, una *representación* del continuo, todo lo vaga y necesitada de correcciones que se quiera[27]. Parece inevitable admitir que hay una idea así, y que los humanos pueden llegar a acuerdos muy notables respecto a ella: los matemáticos se han basado en la noción del continuo durante más de 2000 años sin que hubiera una mínima precisión teórica de la misma (por no hablar de axiomatización). Además, hay motivos para pensar que esa idea tiene su origen en nuestra forma de representarnos el movimiento de objetos, ya sea un pájaro que vuela o una flecha que podamos lanzar. Y tenemos

[26]Esta es la idea de autores como Lakatos o Kitcher, con numerosos precedentes ya antiguos.

[27]Ligar las nociones abstractas de la matemática superior con el término "representación" supone plantear un problema, más que dar una solución. Se habla mucho de representaciones en ciencias cognitivas, pero hay buenos motivos para pensar que se trata de un concepto impreciso, necesitado de clarificación. Creo, incluso, que el tener en cuenta las representaciones matemáticas y su desarrollo puede servir de gran ayuda en ese proceso de clarificación. He tratado de elaborar un poco más estas ideas en un trabajo anterior [Ferreirós 1997], aunque me temo que todavía de una manera demasiado telegráfica.

esa representación o idea –como señalaron Riemann, Dedekind o Hilbert– sin que ello implique necesariamente que el continuo existe en la realidad. Esto sugiere que en matemáticas (al menos en casos notables como el del análisis) se trabaja con representaciones basadas de una forma especialmente sólida en nuestra constitución mental, en particular en la inteligencia práctica. Esas representaciones pasan a ser precisadas, reformadas y ampliadas, interrelacionadas, convertidas en la base de desarrollos teóricos mucho más ambiciosos, etc. Y siempre en conexión con un proceso lingüístico, simbólico y social de admisión y transmisión de los conocimientos.

Con la idea o representación del continuo, nos situamos en disposición de seguir el despegue de la matemática moderna y alcanzamos el núcleo clave de todo debate sobre fundamentos. Interconectada con la noción elemental de número, la idea del continuo acabará llevando al sistema de los números reales, y recordemos que aquí aparece ya el fenómeno de los elementos postulados pero no definibles, no constructibles. Con su enorme versatilidad para la modelización de múltiples fenómenos, la matemática basada en el continuo es ciertamente algo que podemos concebir, pero no tiene por qué responder a una realidad externa. En resumidas cuentas, el platonismo interno de las teorías matemáticas aparece como un rasgo perfectamente admisible, sin necesidad de recurrir a una justificación realista en el sentido del platonismo filosófico.

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar las gracias a Leo Alonso, Ana Jeremías, José F. Ruiz, e Ignacio Jané por sus comentarios y críticas a una primera versión de este artículo.

Bibliografía

[1] BERNAYS P.: 1935. Sur le platonisme dans les mathématiques, *L'Enseignement Mathématique* **34**, 52–69 ; en [Bernays 1976] y versión inglesa en P. Benacerraf & H. Putnam, eds., *Philosophy of Mathematics: selected readings*, Cambridge University Press, 1983.

[2] BERNAYS P.: 1976. *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

[3] CANTOR, G.: 1883. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, en [Cantor 1932], 165–208; traducción inglesa en [Ewald 1996], vol.2.

[4] CANTOR, G.: 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Berlin, Springer; reimpresión: Hildesheim, G. Olms, 1966.

[5] CURRY, H. B.: 1951. *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, North-Holland.

[6] DAVIS, P. J. & R. HERSH.: 1982. *Experiencia matemática*, Labor/MEC, Barcelona, 1989.

[7] DEDEKIND, R.: 1998 *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*, Alianza/UAM, Madrid.

[8] DIEUDONNÉ, J.: 1970 The Work of Nicolas Bourbaki, *American Mathematical Monthly* **77**, 134–45.

[9] EWALD, W. B.: 1996. *Kant to Hilbert* , 2 vols., Oxford University Press.

[10] FERREIRÓS, J.: 1993. *El nacimiento de la teoría de conjuntos 1854–1908*, Publicaciones Univ. Autónoma de Madrid. Versión inglesa revisada y ampliada, Labyrinth of Thought en [cva.], Basel, Birkhäuser, 1999.

[11] FERREIRÓS, J.: 1997. $1, 2, 3, \ldots\omega$: historia, epistemología y matemática, *Actas II Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, Publicaciones Univ. Autónoma de Barcelona..

[12] GÖDEL, K.: 1944. La lógica matemática de Russell, en *Obras completas*, Alianza, Madrid, 1980.

[13] GÖDEL, K.: 1964. ¿Qué es el problema del continuo de Cantor?, en *Obras completas*, Alianza, Madrid, 1980.

[14] HELLMAN, G.: 1989. *Mathematics Without Numbers*, Clarendon Press, Oxford.

[15] HERSH, D.: 1979. Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics, *Advances in Mathematics* **31**. En T. Tymozcko, *New Directions in the philosophy of mathematics*. Basel, Birkhäuser, 1986.

[16] HILBERT, D.: 1900. Mathematische Probleme, en *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, 290–339, Springer, Berlin, 1935. Versión inglesa en *Bulletin of AMS* **8** (1902), y versión parcial en [Ewald 1996], vol. 2.

[17] HILBERT, D.: 1992. *Natur und mathematisches Erkennen*, Basel, Birkhäuser.

[18] MADDY, P.: 1900. *Realism in Mathematics*, Oxford Univ. Press.

[19] MADDY, P.: 1998. *Naturalism in Mathematics*, Oxford Univ. Press.

[20] PUTNAM, H.: 1975. What is mathematical truth?, en *Mathematics, matter and method*, Cambridge Univ. Press.

[21] QUINE, W. V.: 1953. *Desde un punto de vista lógico*, Ariel, Barcelona 1962.

[22] QUINE, W. V.: 1969. *La relatividad ontológica y otros ensayos*, Tecnos, Madrid 1974.

[23] RESNIK, M.: 1988. Mathematics from the Structural Point of View, *Revue Internat. de Philosophie* **167**, 400–24.

[24] RIEMANN, B.: 1854. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, en *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig, Teubner, 1892. Versión inglesa en [Ewald 1996], vol. 2; versión española en preparación (CSIC).

[25] SHAPIRO, W.: 1989. Logic, Ontology, Mathematical Practice, *Synthese* **79** (1989), 13–50.

[26] WANG, H.: 1987. *Reflexiones sobre Kurt Gödel*, Alianza, Madrid 1992.

[27] WEYL,H.: 1918. *Das Kontinuum*, Leipzig, Veit; reimpresión: New York, Chelsea. Hay versión inglesa.

[28] ZERMELO, E.: 1930. Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Fundamenta Mathematicae* **16**. Versión inglesa en [Ewald 1996], vol.2.

José Ferreirós
Dpto. de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla
c/ Camilo José Cela, s/n, 41018 Sevilla
email:`jmferre@cica.es`