Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Oscar Ciaurri y José Luis Díaz-Barrero[1]

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos en formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta soluciones recibidas hasta el 30 de octubre de 2006.*

Solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas enviados a esta sección sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que una solución al problema no está disponible en estos momentos.

Problemas

Problema 49

Sean x, y números reales positivos tales que $1 \leq y \leq x$. Probar que

$$(x-y)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{y}\right) \leq \ln\frac{x(y+1)}{y(x+1)}.$$

Propuesto por Mihàly Bencze
Brasov, Rumanía

[1]En la elaboración de este número han colaborado M. Benito, P. Benito, E. Fernández y J. L. Varona.

PROBLEMA 50

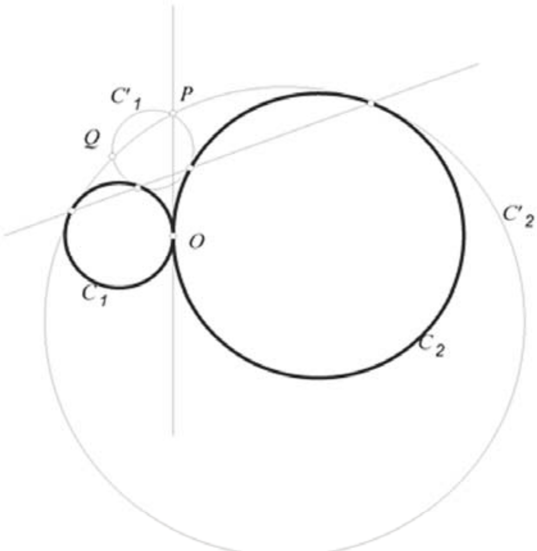
Si a y b son números reales positivos, evaluar

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(by)}{xy(x+y)}dxdy.$$

Propuesto por Ovidiu Furdui
Kalamazoo, Michigan

PROBLEMA 51

Dadas dos circunferencias C_1 y C_2 tangentes exteriormente en O (de trazo grueso), se considera la recta tangente a ambas en el punto de contacto y en ella un punto P variable distinto de O.



Las circunferencias C_1' y C_2' que pasan por P y son tangentes a las circunferencias C_1 y C_2 respectivamente se cortan en un segundo punto Q.

a) Probar que la recta PQ pasa por un punto fijo al variar P.

b) Determinar la posición de P para que los cuatro puntos de tangencia de C_1' y C_2' con C_1 y C_2 estén alineados.

Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio
I.E.S. Penyagolosa, Castellón

Problema 52

Encontrar el valor de $\omega \in \mathbb{C}$ para que la sucesión $z_{n+1} = f \circ g(z_n)$ esté bien definida para todo $z_0 = e^{i\theta_0}$, con $\theta_0 \in [0, \pi/2]$, siendo

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \qquad \text{y} \qquad g(z) = \begin{cases} 1 + \frac{z-1}{|z-1|}, & \text{si } z \neq 1, \\ w, & \text{si } z = 1. \end{cases}$$

En ese caso, determinar el límite de la sucesión $\{z_n\}$.

Propuesto por J. Manuel Gutiérrez
Universidad de La Rioja, Logroño

Problema 53

Los números de Rey Pastor, $\{A_n\}_{n\geq 0}$, y los números de Bernouilli, $\{B_n\}_{n\geq 0}$, están definidos mediante las identidades

$$\frac{x}{\log(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

respectivamente. Si $\left[{n \atop k}\right]$ y $\left\{{n \atop k}\right\}$ denotan los números de Stirling de primera y segunda especie, respectivamente, probar que, para $n \geq 0$,

$$B_{n+1} = -(n+1) \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{A_{k+1}}{k+1}$$

y

$$(-1)^n A_{n+1} = -(n+1) \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] \frac{(-1)^k B_{k+1}}{k+1}.$$

Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez y E. Fernández Moral
Universidad de La Rioja e I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño

PROBLEMA 54

Si en un triángulo cualquiera denotamos por s el perímetro, por r el radio del círculo inscrito y por R el radio del círculo circunscrito, entonces

$$\sqrt[3]{4srR} \leq \sqrt{\frac{2r^2 + 8rR - s^2}{6}} \leq \frac{s}{3}.$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad Complutense, Madrid

PROBLEMA 55

Consideremos la ecuación

$$\sigma(n) + n = \sigma(n+1), \tag{1}$$

donde $\sigma(n)$ denota la suma de los divisores de n.

a) Probar que si $n = 2^k - 1$, entonces n es solución de la ecuación (1) si y sólo si n es primo (primo de Mersenne).

b) $\star$ Probar o refutar la siguiente conjetura:

   Si n es solución de la ecuación (1) entonces n es un primo de Mersenne.

   NOTA. Numéricamente se ha comprobado que la conjetura es cierta para $n < 10^8$.

Propuesto por Manuel Benito Muñoz
I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño

PROBLEMA 56

Hallar todas las matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ tales que

$$A^n + A^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \geq 3.$$

Propuesto por J. L. Díaz Barrero
U. Politècnica de Catalunya, Barcelona

Soluciones

Problema 25

a) Probar que $\underbrace{22\ldots23}_{\text{1987 cifras}}$ es compuesto.

b) Probar que $\underbrace{22\ldots23}_{\text{1986 cifras}}$ es compuesto.

Propuesto por Manuel Benito Muñoz
I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño

Solución

a) La suma de los dígitos es igual a

$$1987 \cdot 2 + 1 \equiv 7 \cdot 2 + 1 \equiv 15 \equiv 0 \pmod 3.$$

Por tanto, 3 divide al número propuesto.

b) Es claro que

$$n = \overbrace{22\ldots23}^{\text{1986 dígitos}} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{1985} 10^k + 1 = \frac{2 \cdot (10^{1986} - 1)}{9} + 1.$$

Puesto que 61 es primo se tiene que $\varphi(61) = 60$, donde φ denota la función de Euler, y, usando el Teorema de Euler-Fermat,

$$9n = 2 \cdot 10^{1986} + 7 \equiv 2 \cdot 10^{33 \cdot 60 + 6} + 7 \equiv$$

$$\equiv 2000007 = 32787 \cdot 61 \equiv 0 \pmod{61}.$$

Por tanto, 61 divide al número propuesto.

Solución enviada por G. R. A. 20 Math Problems Group
Roma, Italia

También resuelto por J. López (estudiante), J. Vinuesa y el proponente. El apartado a) lo resuelven M. Peña y J. Sierra (estudiantes) y J. Mir

PROBLEMA 26

Se consideran los polígonos convexos de n lados construidos con n segmentos no nulos de longitudes $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que cada una de ellas es menor que la suma de las $(n-1)$ restantes. Se pide:

a) Probar que, si $n = 4$, existe un polígono de área máxima. Comprobar que está inscrito en una circunferencia.

b) Para todo $n > 4$, ¿existe siempre uno de área máxima?

c) Probar que, si tal polígono de área máxima existe, está inscrito en una circunferencia.

Propuesto por María Jesús Villar Rubio
I. E. S. L. Torres Quevedo, Santander

SOLUCIÓN

El apartado a) será una consecuencia inmediata de los apartados siguientes. Veamos en primer lugar el apartado b) para el que nuestra contestación es afirmativa. Clasifiquemos en primer lugar (por claridad expositiva, aunque esto no sea esencial en nuestra argumentación) los polígonos construibles con los segmentos $a_1, \dots, a_n$ en las diferentes familias (en número finito menor o igual que $(n-1)!$) que se distinguen una de otra por el orden cíclico en que aparecen los lados. Sea, por ejemplo, $\mathcal{F}$ la familia constituida por los polígonos cuyos lados aparecen cíclicamente en el orden $a_1, a_2, \dots, a_n$. Cada polígono $P \in \mathcal{F}$ de esta familia puede ser representado, fijado un sistema de referencia plano por una n-tupla $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, con $v_i \in \mathbb{R}^2$ cumpliendo $\|\overrightarrow{v_i v_{i+1}}\| = a_i$ (considerando los subíndices módulo n). Es claro que el diámetro de estos polígonos es menor que $p := \sum_{1 \le i \le n} a_i$, luego cualquier polígono de $\mathcal{F}$ está contenido en un cuadrado (cerrado) de lado $p/2$. De este modo podemos pensar encerrados en un mismo cuadrado de lado $p/2$ todos los polígonos de la familia $\mathcal{F}$. Además, podemos considerar las coordenadas de cada vértice en el cuadrado $[0, p/2] \times [0, p/2]$.

Por otra parte, el área $\mathcal{A}(P)$ de todo polígono $P \in \mathcal{F}$ está acotada superiormente por $p^2/4$ (la desigualdad isoperimétrica permite refinar esta estimación hasta $p^2/(4\pi)$). Entonces existe $\sup_{P \in \mathcal{F}}\{\mathcal{A}(P)\} := S$. Esto es, existe una sucesión $\{P_k\}_{k \ge 1}$ de polígonos representados por $(v_{1,k}, \dots, v_{n,k}) \subset ([0, p/2] \times [0, p/2])^n$, para cada $k \ge 1$, tal que $\mathcal{A}(P_k) \to S$. Tenemos así una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^{2n}$; luego, por compacidad, existirá al menos una subsucesión convergente. Si $(v_{1,\infty}, \dots, v_{n,\infty})$ es el límite, consideramos el polígono P_∞ formado por los lados $\overrightarrow{v_{i,\infty} v_{i+1,\infty}}$

(con el índice módulo n). Obsérvese que $\mathcal{P}_\infty = S$. Para concluir falta probar que $P_\infty \in \mathcal{F}$; es decir, $\|\overrightarrow{v_{i,\infty}v_{i+1,\infty}}\| = a_i$. Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe algún i tal que

$$\|\overrightarrow{v_{i,\infty}v_{i+1,\infty}}\| = a_i + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Por construcción, es posible determinar algún K para el que $\|\overrightarrow{v_{i,K}v_{i,\infty}}\| < \varepsilon/3$ y $\|\overrightarrow{v_{i+1,K}v_{i+1,\infty}}\| < \varepsilon/3$. Con estas estimaciones, teniendo en cuenta que $\|\overrightarrow{v_{i,K}v_{i+1,K}}\| = a_i$ y la desigualdad triangular, se llega a una contradicción con (2). Un argumento similar funciona en el caso $\varepsilon < 0$. Ahora si se hace este proceso de obtención de (al menos) un P_∞ para todas las familias, se obtiene (recordar que hay un número finito de familias) un polígono de la misma área máxima para cada familia. Por tanto queda probado que para cada n existen polígonos de área máxima. (Véase la nota final.)

Veamos ahora el apartado c). Para ello consideraremos el siguiente lema de cuya demostración nos ocuparemos posteriormente.

Lema. *Con cuatro segmentos de longitudes a, b, c y d tales que la longitud de cada uno de ellos es menor que la suma de las longitudes de los restantes, se puede construir un cuadrilátero inscriptible en una circunferencia.*

Supongamos que tenemos un polígono de área máxima que no está inscrito en una circunferencia. Entonces tendrá al menos cuatro vértices consecutivos que no serán concíclicos (en otro caso el polígono sería inscriptible). Sean estos vértices v_i, v_{i+1}, v_{i+2} y v_{i+3}. Consideramos los lados de longitudes a_i, a_{i+1}, a_{i+2} y $\ell = \|\overrightarrow{v_{i+3}v_i}\|$. Si $\tilde{p}$ denota el semiperímetro, sabemos que el área $\mathcal{S}$ de este cuadrilátero verifica

$$\mathcal{S} \leq \sqrt{(\tilde{p} - a_i)(\tilde{p} - a_{i+1})(\tilde{p} - a_{i+2})(\tilde{p} - \ell)}$$

con igualdad si y sólo si el cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia (aplicación de la fórmula de Herón para cuadriláteros). Por el lema sabemos que podemos colocar los vértices v_{i+1} y v_{i+2} de forma que los lados sigan midiendo lo mismo y el cuadrilátero sea concíclico y por tanto el área sea exactamente igual a $\sqrt{(\tilde{p} - a_i)(\tilde{p} - a_{i+1})(\tilde{p} - a_{i+2})(\tilde{p} - \ell)}$. Se concluye que el polígono inicial no era de área máxima, lo que es una contradicción.

Demostración del lema. Bastaría hallar para qué ángulo α formado por los lados de longitudes a y d, los lados de longitudes b y c forman un ángulo de $\pi - \alpha$. Usando el teorema del coseno se obtiene que $\alpha = \arccos\left(\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\right)$, que siempre existirá si el cuadrilátero se puede construir.

Nota. El polígono P_∞ que aparece en la solución del apartado b) podría resultar no ser un n-gono convexo (desde luego por construcción es un polígono no cóncavo, pero pudiera verse rebajado el número de lados).

Sin embargo, el hecho de que este polígono pueda inscribirse en una circunferencia implica que es convexo.

Solución enviada por M. Peña, J. Serra y M. Teixidó (estudiantes)
También resuelto por el proponente (apartados a) y c))

PROBLEMA 27

Disponemos de una red de n ordenadores libre de triángulos y cuadrados con el mayor número posible de aristas. Probar que si un ordenador está unido a otros cuatro, entonces la red contiene pentágonos.

Propuesto por C. Balbuena, M. Cera, A. Dianez y P. García Vázquez
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, y Universidad de Sevilla, Sevilla

SOLUCIÓN

Nombramos a la red de n ordenadores como G, y al ordenador unido a los otros 4 como P. Razonamos por contradicción, es decir, suponemos que en G tampoco hay pentágonos. Llamemos P_1, P_2, P_3, P_4 a los vecinos de P. Procedemos a quitar de la red G las aristas PP_3 y PP_4, y a añadir los enlaces P_2P_3, P_3P_4 y P_4P_1. De este modo obtenemos una nueva red G^* de n nodos con una arista más que en G. Además como los nodos P_i y P_j están unidos en G a través de P por un camino de longitud 2 y G no tiene ciclos de longitud menor o igual a 5, deducimos que los caminos de G que unen P_i y P_j, $i \neq j$, que no pasan por P (caso de existir) deben contener al menos 4 ramas. Por tanto cualquier ciclo de G^* que contenga alguna de las ramas nuevas, P_2P_3 o bien P_3P_4, debe contener además un camino de G uniendo los extremos de estas ramas que no pase por P, y por tanto este ciclo debe tener longitud al menos 5. Del mismo modo razonamos si el ciclo de G^* contiene la rama nueva P_1P_4. Concluimos que G^* es libre de triángulos y cuadrados y tiene una arista más que G, lo cual contradice la hipótesis de que G tiene el máximo posible de enlaces. Por tanto G contiene pentágonos.

Solución enviada por los proponentes.

PROBLEMA 28

Caracterizar los $r \in \mathbb{Q}$, con $0 < r \leq 1$, que pueden escribirse como

$$r = \frac{m^2}{4nM}$$

para ciertos $n, m, M \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y $\text{mcd}(n, m) = 1$.

Propuesto por Juan Luis Varona Malumbres
Universidad de La Rioja, Logroño

Solución

Pueden escribirse de esta forma todos los racionales en el rango dado salvo $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, que obviamente no admiten esa forma.

En efecto, cualquier otro racional en ese intervalo se escribe en su forma irreducible $\frac{a}{b}$ con $b \neq 1, 2, 4$.

Si b ($\neq 1, 2, 4$) no tiene divisores impares (a entonces es impar), $b = 2^p$ ($p \geq 3$), poniendo $m = a$, $n = 2^{p-2}$ y $M = a$, se tiene $\operatorname{mcd}(m, n) = \operatorname{mcd}(a, 2^{p-2}) = 1$, $n = 2^{p-2} \geq 2$ y

$$\frac{m^2}{4nM} = \frac{a^2}{4 \cdot 2^{p-2} \cdot a} = \frac{a}{2^p} = \frac{a}{b}.$$

Si b tiene algún divisor impar, $b = 2^p b_1$ ($p \geq 0$, b_1 impar y $b_1 \geq 3$), poniendo $m = 2a$, $n = b_1$ y $M = 2^p a$, se tiene $\operatorname{mcd}(m, n) = \operatorname{mcd}(2a, b_1) = 1$, $n = b_1 \geq 3 > 2$ y

$$\frac{m^2}{4nM} = \frac{4a^2}{4 \cdot b_1 \cdot 2^p \cdot a} = \frac{a}{b}.$$

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander
También resuelto por M. Peña y J. Sierra (estudiantes) y el proponente

Problema 29

Sean $a, b, c, d, e, f, m \in (0, +\infty)$. Probar que

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{(mb+c)(mc+b)} + \frac{b^2}{(mc+d)(md+c)} \\ &\qquad + \frac{c^2}{(md+e)(me+d)} + \frac{d^2}{(me+f)(mf+e)} \\ &\qquad\quad + \frac{e^2}{(mf+a)(ma+f)} + \frac{f^2}{(ma+b)(mb+a)} \geq \frac{6}{(m+1)^2}. \end{aligned}$$

Propuesto por Marius Olteanu
Rumanía

SOLUCIÓN

La resolución del problema está basada en la denominada desigualdad de Shapiro: sean $x_1, \ldots, x_6 \in (0, \infty)$, entonces

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \frac{x_3}{x_4+x_5} + \frac{x_4}{x_5+x_6} + \frac{x_5}{x_6+x_1} + \frac{x_6}{x_1+x_2} \geq 3.$$

Además, la igualdad se verifica si y sólo si $x_1 = \cdots = x_6$.

En primer lugar, utilizando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, se prueba que $(mb+c)(mc+b) = bc(m^2+1)+(b^2+c^2)m \leq (m+1)^2(b^2+c^2)/2$ y lo mismo para los otros sumandos. Con lo que el lado izquierdo de la desigualdad propuesta es mayor que

$$\frac{2}{(m+1)^2}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+d^2} + \frac{c^2}{d^2+e^2} + \frac{d^2}{e^2+f^2} + \frac{e^2}{f^2+a^2} + \frac{f^2}{a^2+b^2}\right).$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Shapiro con $x_1 = a^2$, $x_2 = b^2$, $x_3 = c^2$, $x_4 = d^2$, $x_5 = e^2$ y $x_6 = f^2$ se obtiene el resultado. La igualdad en la desigualdad propuesta se verifica cuando $a = b = c = d = e = f$.

Solución enviada por Juan López González (estudiante)
Universidad Autónoma de Madrid

También resuelto por O. Furdui, M. Peña y J. Sierra (estudiantes) y el proponente

NOTA. Las soluciones de O. Furdui y del proponente también están basadas en la desigualdad de Shapiro. La solución de M. Peña y J. Sierra utiliza la desigualdad de reordenamientos.

PROBLEMA 30

Sea $\gamma \in \mathbb{R}$. Dados a y b reales positivos, definimos las medias de orden γ de a y b mediante $M_\gamma(a,b) = \left(\frac{a^\gamma+b^\gamma}{2}\right)^{1/\gamma}$, si $\gamma \neq 0$, y $M_0(a,b) = \sqrt{ab}$. Dada una función $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ y un $x \in (0,+\infty)$ diremos que f es derivable en x por sus medias de orden γ si existe

$$f_\gamma(x) := \lim_{t\to x} \frac{M_\gamma(f(t), f(x)) - f(x)}{M_\gamma(t,x) - x}.$$

a) Probar que si f es derivable en x en el sentido habitual, entonces f es derivable en x por sus medias de orden γ, para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

b) $\star$ Si para algún $\gamma \neq 1$, la función f es derivable en x por sus medias de orden γ, ¿es f derivable en x en el sentido habitual?

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad de Valladolid, Valladolid

Solución

Se obtiene sin ninguna dificultad por procedimientos elementales que $\lim_{t\to x} \frac{M_\gamma(t,x)-x}{t-x} = \frac{1}{2}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Fijado $x \in (0,\infty)$ y denotando $F_\gamma(t) = M_\gamma(f(t), f(x))$, resulta

$$\frac{F_\gamma(t) - F_\gamma(x)}{t-x} = \frac{M_\gamma(f(t), f(x)) - f(x)}{M_\gamma(t,x) - x} \frac{M_\gamma(t,x) - x}{t-x}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, la función $F_\gamma(t)$ es derivable en $t = x$ si y sólo si f es derivable en x por sus medias de orden γ. Además, $F'_\gamma(x) = f_\gamma(x)/2$.

Ahora es claro que si f es derivable en x, $F_\gamma(t)$ (función derivable de $f(t)$) es también derivable en $t = x$ y la prueba de la parte a) está concluida. Para la parte b) basta observar que $f(x) = \frac{(F_0(t))^2}{f(x)}$ y $f(x) = (2(F_\gamma(t))^\gamma - f(x)^\gamma)$, si $\gamma \neq 0$ y, así, si una cualquiera de las funciones $F_\gamma(t)$ es derivable en x la función f será derivable en x.

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander.
También resuelto por J. Mir, M. Peña y J. Sierra (estudiantes) y el proponente
(todos ellos resuelven únicamente el apartado a))

Nota. El resto de soluciones al apartado a) prueban que $f_\gamma(x) = f'(x)$.

Problema 31

Sea G un grupo y H_1, H_2 dos de sus subgrupos propios. Probar que $G \setminus (H_1 \cap H_2)$ y $G \setminus (H_1 \cup H_2)$ no son cerrados respecto a la operación del grupo G.

Propuesto por Pantelimon George Popescu (estudiante)
Universidad Politécnica de Bucarest, Rumanía

Solución

Nota. Para que tenga sentido el enunciado del problema es necesario probar que $G \setminus (H_1 \cup H_2) \neq \emptyset$ siempre que H_1 y H_2 sean subgrupos propios de G.

DEMOSTRACIÓN DE LA NOTA. Si $H_1 \cup H_2$ no es subgrupo, el resultado es claro. Si $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G, entonces se puede probar que $H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$. En efecto, si suponemos que $x \in H_2 \setminus H_1$ e $y \in H_1 \setminus H_2$, y tomamos $z = xy \in H_1 \cup H_2$ (por ser $H_1 \cup H_2$ un subgrupo), llegamos a que, si $z \in H_1$, entonces $x = zy^{-1} \in H_1$ (lo que no puede ser), y si $z \in H_2$ entonces $y = x^{-1}z \in H_2$ (lo que tampoco puede ser). Por tanto, si $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G entonces $H_1 \cup H_2 = H_1$ o $H_1 \cup H_2 = H_2$ y como ambos son subgrupos propios de G se tiene que $H_1 \cup H_2$ también es un subgrupo propio de G. Luego $H_1 \cup H_2 \neq G$.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA.

Lema. Si $e \in H$ y $H = H^{-1} := \{x^{-1} : x \in H\}$ es un subconjunto de G, con $H \neq G$, entonces el producto de G no es una operación cerrada sobre $G \setminus H$.

Demostración del Lema. Sea $x \in G \setminus H$. Entonces $x^{-1} \in G \setminus H$ (pues en otro caso tendríamos que $x = (x^{-1})^{-1} \in H$). Ahora bien, $e = x \cdot x^{-1} \in H$.

Corolario. Si $H_1, H_2 \leq G$ son dos subgrupos propios del grupo G entonces el producto de G no define una operación cerrada sobre $G \setminus (H_1 \cup H_2)$ ni sobre $G \setminus (H_1 \cap H_2)$.

Demostración del Corolario. Basta aplicar el Lema a $H = H_1 \cup H_2$ y a $H = H_1 \cap H_2$.

Solución enviada por J. M. Almira y J. Á. Cid
E. U. P. de Linares, Jaén
También resuelto por J. López (estudiante) y el proponente

PROBLEMA 32

Los puntos raíces de la ecuación de coeficientes enteros

$$243z^4 - 810z^3 + 1080z^2 - 1\text{[illegible]}z + \text{[illegible]}5 = 0$$

son cuatro vértices de un pentágono regular. Calcular las coordenadas del quinto vértice.

NOTA. Aunque cayeron unas manchas de tinta, el problema puede resolverse sin necesidad de recuperar los coeficientes ocultos.

Propuesto por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander

Solución

Llamenos a al vértice que completa el pentágono, c a su centro y r a su radio. Haciendo una traslación al centro del pentágono, sus vértices deben cumplir la ecuación

$$(z-c)^5 = r^5 \Leftrightarrow (z-c)^5 - r^5 = 0 \Leftrightarrow 243\,(z-c)^5 - 243r^5 = 0$$

pero la misma ecuación puede obtenerse añadiendo la raíz a a la ecuación dada, es decir

$$(z-a)\left(243z^4 - 810z^3 + 1080z^2 - ....\right) = 0$$

como los coeficientes de z^5 coinciden, también han de ser iguales los restantes. Así, igualando los coeficientes de z^4 y z^3, resulta el sistema

$$\begin{cases} 15c = 3a + 10, \\ 9c^2 = 3a + 4. \end{cases}$$

Este sistema tiene dos soluciones $(c,a) = \left(1, \frac{5}{3}\right)$ y $(c,a) = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$. En ambos casos $r = |c-a| = \frac{2}{3}$.

Para comprobar cuál es la solución pedida y recuperar los coeficientes borrados, basta desarrollar la ecuación de coeficientes enteros $243\,(z-c)^5 - 243\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0$ para cada valor de c y separar la raíz a correspondiente.

Para la pareja $(c,a) = \left(1, \frac{5}{3}\right)$, tras separar la raíz a, resulta la ecuación de cuarto grado $243z^4 - 810z^3 + 1080z^2 - 630z + 165 = 0$. Esta solución es válida ya que coinciden los tres coeficientes conocidos, el signo del término de primer grado y la cifra final del término independiente.

Para la segunda solución $(c,a) = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$, queda $243z^4 - 810z^3 + 1080z^2 - 720z + 240 = 0$, que no es válida por no coincidir la cifra final del término independiente que es 5 para la ecuación dada y 0 para la obtenida.

Por tanto, las coordenadas del vértice pedidas son $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ y girando 72^o con centro en $c = 1$ podemos ir obteniendo las de los restantes vértices.

Solución enviada por Cristóbal Sánchez Rubio
I.E.S. Penyagolosa, Castellón
También resuelto por J. López (estudiante), J. Mir, A. Ramos, M. J. Villar, G. R. A. Math Problems Group y el proponente