Aplicaciones del Álgebra de Boole Métrica a la Teoría de la Medida

por

M. A. Jiménez Pozo y A. López García

1 Introducción

Cuando temas aparentemente distintos de las matemáticas se nos presentan súbitamente y en armonía para resolver conjuntamente un problema, explicar un fenómeno o esclarecer un concepto, no solamente nos revelan la belleza abstracta de nuestra ciencia sino que nos muestran la unidad dialéctica del pensamiento matemático.

Ejemplos trascendentales que reflejan esto, lo constituyen la Geometría Analítica de Descartes, que hizo converger el Álgebra y la Geometría Euclidiana, o el Cálculo Diferencial e Integral de Leibnitz y Newton, que a través del Teorema Fundamental del Cálculo establece una impredecible conexión entre área y tangente.

Ambas teorías revolucionaron las matemáticas de su época, y constituyen hoy en día puntos de referencia de etapas históricas para los filósofos e historiadores de las ciencias.

Pero la convergencia de temas y conceptos no está solamente vinculada a momentos trascendentales de cambio, sino que forma parte consustancial de nuestro trabajo. Precisamente, con este artículo deseamos demostrar la profunda conexión entre ciertos aspectos del Álgebra (anillos booleanos), la Topología (espacios métricos) y la Teoría de la Medida, que siendo más o menos conocida por especialistas de esta última rama, es quizás muy poco divulgada.

Veremos cómo se identifican la extensión de una premedida con el completamiento de ciertos espacios métricos, los espacios de funciones integrables con espacios de funciones continuas, la integración impropia con límites parciales, o la esperanza condicionada con la simple restricción de una función.

Las referencias bibliográficas con que contamos son muy pocas. Nos propusimos la búsqueda de fuentes originales históricas sobre este tema, para lo que consultamos distintos expertos y varias bases electrónicas de datos. Deseamos agradecer especialmente al Dr. Fernando Bombal por sus esfuerzos en esta dirección. Finalmente resultó imposible encontrar materiales satisfactorios para nuestros objetivos.

En su mayoría, los resultados aquí expuestos están recogidos parcialmente en forma de ejercicios de libros de texto variados. En particular en [4], que será nuestra referencia principal.

Por razones obvias de espacio, nos resulta imposible demostrar con detalle las aseveraciones matemáticas que enunciamos. Pero junto a las ideas expuestas incluiremos esquemas de las demostraciones correspondientes.

Deseamos dejar constancia de nuestro agradecimiento al Dr. José María Almira, miembro del equipo de redacción de esta La Gaceta, por su estímulo en la preparación de este artículo, así como por sus valiosas recomendaciones en materia de adaptación de estilo.

2 Definiciones básicas y prolongamiento de una premedida

Un anillo conmutativo y unitario se dice booleano si $x^2 = x$ para todo elemento x del anillo. El ejemplo típico es el de las clases residuales módulo 2.

Un espacio booleano es un espacio de Hausdorff totalmente disconexo y que usualmente se supone compacto. El ser totalmente disconexo significa que para todo x del espacio, el conjunto unitario $\{x\}$ es su componente conexa.

A todo anillo booleano se le asigna un espacio booleano y recíprocamente. Un teorema de M. H. Stone asegura que si $\mathcal{B}$ es un anillo booleano y $\mathbf{X}$ es el espacio asociado, entonces el anillo asociado a su vez a $\mathbf{X}$ es isomorfo a $\mathcal{B}$ (ver [6]). Así que, dado cualquier anillo booleano, existe siempre otro isomorfo a él, asociado a un espacio booleano.

Sea $\mathbf{X}$ un conjunto no vacío, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ una colección de subconjuntos de $\mathbf{X}$ que es estable mediante la unión, intersección y diferencia conjuntista de dos cualesquiera de sus elementos. Suponemos que $\mathbf{X} \in \mathcal{C}$. Si definimos

$$\forall\, A,\, B \in \mathcal{C}, \quad A + B := A \,\Delta\, B\,,$$

donde Δ representa la diferencia simétrica y

$$\forall\, A,\, B \in \mathcal{C}, \quad A * B := A \cap B\,,$$

obtendremos un anillo booleano, también conocido como Álgebra de Boole de conjuntos.

Cuando $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{C}$ es la clase de los conjuntos elementales (la generada a partir de uniones, intersecciones y complementos de rectángulos), estamos en presencia de los conjuntos a los que sabemos asignar un valor de área. El problema estándar consiste en extender esta función área, llamada premedida, a todo un anillo de Boole $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$, que sea estable por uniones e intersecciones numerables, de manera que dicha extensión sea una medida. El anillo $\sigma(\mathcal{C})$ se denomina usualmente σ-álgebra. La menor de ellas es la generada por $\mathcal{C}$, que se puede definir mediante la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{C}$.

Así las cosas, se tiene en general una función de conjuntos

$$\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

tal que $\mu(\phi) = 0$ y que es σ-aditiva. Esto último significa que si $(A_n) \subset C$ es una sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos y si $\cup A_n \in C$, entonces

$$\mu(\cup A_n) = \sum_n \mu(A_n) \,.$$

La función μ se llama premedida. Un famoso teorema llamado de prolongamiento, establece que μ puede extenderse a $\sigma(\mathcal{C})$ de manera que se conserve la σ-aditividad.

Podemos decir, sin temor a equivocarnos, que este resultado es la coronación de miles de años de pensamiento matemático dedicados primeramente a desarrollar la noción intuitiva de longitud, área y volumen, su conceptualización y finalmente la demostración de su existencia bajo ciertas condiciones que la práctica impone.

Esbocemos la demostración del teorema de prolongamiento de Carathéodory [4], de principios del siglo XX:

- Se define $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mediante

  $$\mu^*(A) := \inf \{ \sum \mu(A_n) : (A_n) \in s(A) \} \,,$$

  donde $s(A) := \{(A_n) \subset \mathcal{C} : A \subset \bigcup A_n \}$. La función μ^* recibe el nombre de medida exterior.

- Consideramos ahora

  $$T := \{A \subset \mathbf{X} : \quad \forall\, Y \subset \mathbf{X}, \quad \mu^*(Y) = \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c)\} \,.$$

- A continuación definimos $\overline{\mu} := \mu^*|_T$.

- Finalmente se demuestra que T es una σ-álgebra, que $\sigma(\mathcal{C}) \subset T$, y que $\overline{\mu}$ es una medida que verifica $\overline{\mu}|_{\mathcal{C}} = \mu$.

Se aleja de nuestros objetivos analizar por qué no se puede asignar volumen a todo cuerpo sólido, o por qué si asignamos longitud o área a todo subconjunto lineal o plano, respectivamente, perdemos unicidad en la medida. Sin embargo, diremos que estos resultados están íntimamente vinculados al axioma de elección (en particular, a una de sus famosas consecuencias: la paradoja de Haussdorff-Banach-Tarsky) y pueden consultarse, por ejemplo, en [10].

Apartémonos ahora de este esquema tradicional. Definamos sobre $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ una pseudodistancia de la forma siguiente:

$$\forall\, A,\, B \in \mathcal{C}, \quad d(A, B) := \mu(A \,\Delta\, B)$$

donde a μ sólo se le exige ser aditiva. Es decir,

$$\forall A,\, B \in \mathcal{C} \quad \text{con} \quad A \cap B = \emptyset, \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)\,.$$

Recuérdese que una pseudodistancia d es una función que requiere la misma axiomática de la función distancia excepto que $d(A, B) = 0$ no implica $A = B$.

Para construir un espacio métrico a partir de una pseudoedistancia, consideramos la relación de equivalencia $A \sim B \Leftrightarrow d(A, B) = 0$. En el espacio cociente $\mathcal{C}/_\sim$, cuyas clases denotaremos mediante $[A]$, las operaciones conjuntistas mantienen compatibilidad. Más concretamente, $A' \in [A]$ y $B' \in [B]$ implican que $d(A', B') = d(A, B)$, por lo cual $\overline{d}([A], [B]) := d(A, B)$ está bien definido. Se comprueba asimismo la consistencia de las definiciones $[A]^c := [A^c]$, $[A] \cup [B] := [A \cup B]$, etc. El espacio métrico $(\mathcal{C}/_\sim, \overline{d})$ se denomina álgebra de Boole métrica asociada a $(\mathbf{X}, \mathcal{C}, \mu)$.

Las bellas relaciones que vinculan el teorema de prolongamiento de premedidas con la teoría de los espacios métricos son las siguientes:

- μ es una premedida si y sólo si

  $$[A_n] \downarrow [\emptyset] \quad \Leftrightarrow \quad d(A_n, \emptyset) \downarrow 0\,,$$

  donde $[A_n] \downarrow [\emptyset]$ significa que existe una sucesión decreciente $A_n \in [A_n]$ y $\cap A_n = \emptyset$.

  En tal caso, $[A_n] \uparrow [A]$ ó $[A_n] \downarrow [A]$ implica que $d(A_n, A) \longrightarrow 0$.

Asumamos en lo que sigue que μ es una premedida.

- $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra y μ una medida si y sólo si el álgebra de Boole métrica es un espacio completo.

- Si $\overline{\mu}$ es el prolongamiento de μ a $\sigma(\mathcal{C})$, resulta que $(\sigma(\mathcal{C})/_\sim, \overline{d_{\overline{\mu}}})$ es el completamiento métrico de $(\mathcal{C}/_\sim, \overline{d_\mu})$.

- Como todo espacio métrico admite un completamiento, del resultado anterior se deriva una nueva demostración del teorema de prolongamiento de premedidas.

Aunque estas conexiones entre prolongamiento y completitud nos sorprenden inicialmente, ellas quedan más al descubierto mediante la interpretación que al álgebra de Boole damos en el epígrafe siguiente, cuando ya μ es una medida.

Aunque los resultados expuestos en este artículo se extienden en su mayoría y sin gran esfuerzo a medidas positivas σ-finitas, con el propósito de simplificar la exposición supondremos siempre que μ es una medida de probabilidad.

3 Transformaciones de L^p

Denotamos por $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Banach de las clases de funciones de potencia p-ésima integrables, con la norma

$$\|f\|_p := (\int |f|^p d\mu)^{1/p}.$$

Si $1 \leq p \leq q < \infty$, resulta $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ y $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$. En $L^1(\mu)$, consideremos el conjunto de las funciones indicadoras (también llamadas características) $\overline{T} := \{\mathcal{X}_A : A \in T\}$, donde T denota la σ-álgebra asociada a μ.

Este conjunto es cerrado en $L^1(\mu)$, pues si $\mathcal{X}_{A_n} \longrightarrow f$ en norma, existe una subsucesión $(\mathcal{X}_{A_{n_k}})$ que converge a f μ-casi por doquier. Pero cada función $\mathcal{X}_{A_{n_k}}$ toma los valores 0 ó 1, luego se infiere por lo anterior que f es una función indicadora.

Como $L^1(\mu)$ es completo y $\overline{T}$ cerrado, también $\overline{T}$ es completo con la norma inducida. Es fácil comprobar que $\overline{T}$ no es más que el álgebra de Boole métrica introducida en el epígrafe anterior, con la identificación obvia entre $[\mathcal{X}_A]$ y $[A]$.

El espacio $L^1(\mu)$ se puede sumergir en un subespacio del espacio de las funciones continuas y uniformemente acotadas sobre $\overline{T}$ con norma uniforme, que denotaremos $C(\overline{T})$, de la manera siguiente

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : L^1(\mu) & \longrightarrow & C(\overline{T}) \\ f & \longmapsto & \hat{f}(\mathcal{X}_A) := \int \mathcal{X}_A f \, d\mu \, . \end{array}$$

En efecto, si $\mathcal{X}_{A_n} \longrightarrow \mathcal{X}_A$ en $L^1(\mu)$, se sigue que $\mathcal{X}_{A_n} f \longrightarrow \mathcal{X}_A f$, luego $\hat{f}(\mathcal{X}_{A_n}) = \int \mathcal{X}_{A_n} f \, d\mu \longrightarrow \int \mathcal{X}_A f \, d\mu = \hat{f}(\mathcal{X}_A)$, mientras que

$$\sup_{\|f\|_1 \leq 1} \|\Lambda f\|_\infty = \sup_{\|f\|_1 \leq 1} \sup_{A \in \overline{T}} |\int \mathcal{X}_A f \, d\mu| \leq 1 \, .$$

En consecuencia, Λ es una aplicación bien definida, lineal, continua, positiva y su norma es 1 (se alcanza en $f \equiv 1$).

La imagen de $L^1(\mu)$ por Λ queda caracterizada fácilmente así: si $g \in C(\overline{T})$, existirá $f \in L^1(\mu)$ tal que $\hat{f} = g$, sí y sólo si $g(\mathcal{X}_\emptyset) = 0$ y $g(\mathcal{X}_{A \cup B}) = g(\mathcal{X}_A) + g(\mathcal{X}_B)$ siempre que $[A] \cap [B] = [\emptyset]$.

La justificación de esto es sencilla: si $f \in L^1(\mu)$, la función $\hat{f}$ satisface estas propiedades. Recíprocamente, dada una tal g, se define λ sobre T mediante $\lambda(A) := g(\mathcal{X}_A)$, con $A \in T$. Para ver que λ es una medida se aplica la continuidad y aditividad de g, y que $g(\mathcal{X}_\emptyset) = 0$. Si $\mu(A) = 0$ entonces $A \in [\emptyset]$. Así que λ es absolutamente continua ($\lambda << \mu$) respecto de μ. Por el teorema de Radon-Nikodym (ver [4]), existirá $f \in L^1(\mu)$ tal que $d\lambda = f \, d\mu$, y así se concluye la demostración de la afirmación planteada arriba.

Sigamos con el análisis del operador Λ. Aplicando resultados básicos de Teoría de la Medida deducimos la inyectividad de Λ, por lo que existe la transformación inversa $\Lambda^{-1} : \Lambda(L^1(\mu)) \longrightarrow L^1(\mu)$. Es fácil ver que $\|\Lambda^{-1}\| \leq 2$, luego Λ es un isomorfismo.

Si queremos, por otro lado, transformar continuamente $L^p(\mu)$ en $C(\overline{T})$ para $1 < p < \infty$, definimos una aplicación Λ_p así: para $f \in L^p(\mu)$ y $\mu(A) > 0$, tomamos

$$\Lambda_p f(\mathcal{X}_A) := \frac{\int \mathcal{X}_A f d\mu}{\mu(A)^{1/q}},$$

donde q es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Finalmente definimos $\Lambda_p f(\mathcal{X}_\emptyset) := 0$.

Se demuestra que $\Lambda_p f(\mathcal{X}_{A_n}) \rightarrow 0$ si $\mathcal{X}_{A_n} \rightarrow \mathcal{X}_\emptyset$ mediante el uso de la desigualdad de Hölder:

$$\frac{|\int \mathcal{X}_{A_n} f d\mu|}{\mu(A_n)^{1/q}} \leq \frac{\int |\mathcal{X}_{A_n}||\mathcal{X}_{A_n} f| d\mu}{\mu(A_n)^{1/q}} \leq (\int \mathcal{X}_{A_n} |f|^p d\mu)^{1/p}.$$

A continuación explotaremos estas transformaciones.

4 Esperanza condicional

Recordemos que en la Teoría de Probabilidades una función $f \in L^1(\mu)$ se denomina variable aleatoria. Definamos la medida $d\lambda := f d\mu$, que es absolutamente continua respecto de μ. Si $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra tal que $\mathcal{B} \subset T$, entonces las restricciones de estas medidas a $\mathcal{B}$ cumplen que $\lambda|_{\mathcal{B}} << \mu|_{\mathcal{B}}$. Por el teorema de Radon-Nikodym, existe una función $g \in L^1(\lambda|_{\mathcal{B}})$ tal que $d\lambda|_{\mathcal{B}} = g\, d\mu|_{\mathcal{B}}$, y que no es más que la esperanza condicional de la variable aleatoria f respecto de $\mathcal{B}$, de tanta importancia en Probabilidades.

Si acudimos al contexto de los epígrafes anteriores, el álgebra de Boole métrica $\overline{\mathcal{B}}$ asociada a $\mu|_{\mathcal{B}}$ se identifica de manera natural con el subespacio de $\overline{T}$:

$$\{\mathcal{X}_B \in \overline{T} : B \in \mathcal{B}\}.$$

Luego la esperanza condicional de f en el espacio transformado es simplemente la restricción de $\hat{f}$ a $\overline{\mathcal{B}}$.

Por supuesto, se sigue de manera evidente que la esperanza condicional de una suma de variables aleatorias es la suma de las esperanzas condicionales de estas variables, así como todas esas propiedades que conocemos.

En resumen, la esperanza condicional es la simple restricción de una función. Con esta misma idea, el lector que se encuentre familiarizado con la Teoría de las Probabilidades, observará que una martingala no es más que una sucesión de restricciones consecutivas.

5 Integrales impropias

A veces nos sorprendemos de encontrar afirmaciones tales como que la función $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ es integrable según Riemann, pero no según Lebesgue y que, por tanto, la segunda integral no es más general que la primera. ¡Pero esto es falso!

La integración según Riemann, como puede apreciarse en los textos, se refiere a funciones acotadas sobre ciertos conjuntos acotados de $\mathbb{R}^m$. Algunas extensiones para liberar la acotación son posibles (por ejemplo ver los enfoques de [5] y [8]), pero la integral de $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ siempre existirá en un sentido impropio y, por supuesto, también existe en un sentido impropio según la integral de Lebesgue. De hecho, esto es una práctica tan frecuente que cuando definimos la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^m)$, la integral se considera impropiamente. Pero nos preguntamos, ¿qué es la integral impropia?

Vamos a resumir este concepto según [4]: Dado un espacio de medida positiva σ-finita $(\mathbf{X}, T, \mu)$, se considera la clase

$$\mathcal{H} := \{(A_n) \subset T : \forall n,\ \mu(A_n) < \infty \ \text{ y } \ A_n \uparrow \mathbf{X}\}$$

y $\mathcal{G}$ una parte no vacía de $\mathcal{H}$. Se dice que una función medible $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ es impropiamente integrable según la clase $\mathcal{G}$ y que su integral es α, si

$$\forall\, (A_n) \in \mathcal{G}\, \forall n,\ f|_{A_n} \in L^1(\mu|_{A_n})$$

y

$$\forall\, (A_n) \in \mathcal{G}, \quad \lim_n \int_{A_n} f d\mu = \alpha.$$

En el caso en que se verifiquen las condiciones anteriores podemos decir que $f \in L^1_{\mathcal{G}}(\mu)$ y denotar $\int^{\mathcal{G}} f d\mu = \alpha$.

Por ejemplo, si $\mathbf{X} = \mathbb{N}$, $T = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ es la medida contadora, entonces la suma de una serie $\sum f(k)$ en sentido usual es el límite, si existe, de sus sumas parciales

$$S_n(f) := \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Es decir, aquí $\mathcal{G}$ consta de la única sucesión (A_n) dada por $A_n = \{1, 2, ..., n\}$.

En el caso de la integral impropia de $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$, se tiene que $\mathbf{X} = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue en la recta y $\mathcal{G}$ la clase de todas las sucesiones de intervalos (A_n), donde $A_n := [a_n, b_n]$ con $a_n \downarrow -\infty$ y $b_n \uparrow +\infty$.

Si $\mathbf{X} = [-1, 1]$ y $f \in L^1([-1, -\delta] \cup [\delta, 1])$, para todo $0 < \delta < 1$, el valor principal de Cauchy, si existe, es el límite $\int^{\mathcal{G}} f(x)dx$, donde

$$\mathcal{G} := \{(A_n) :\ A_n := [-1,\, -\delta_n] \cup [\delta_n,\, 1],\ \delta_n \downarrow 0\}.$$

En realidad, las definiciones de integración impropia consisten en dar una regla de cómo tomar $\mathcal{G}$ según sea la función f. Por supuesto, $f \in L^1(\mu)$ si y sólo si $f \in L^1_{\mathcal{H}}(\mu)$, en cuyo caso $\int^{\mathcal{H}} f d\mu = \int f d\mu$.

Veamos ahora qué interpretación tan sencilla de la integración impropia obtenemos mediante el empleo del álgebra de Boole métrica.

Regresemos, para simplificar, al supuesto de que μ es una probabilidad y sea f una función impropiamente μ-integrable según una cierta clase $\mathcal{G}$. Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de los $A \in T$ tales que $f \in L^1(\mu|_A)$. Como antes, podemos definir para todo $A \in \mathcal{D}$

$$\hat{f}(\mathcal{X}_A) := \int \mathcal{X}_A f d\mu.$$

Como f es integrable según $\mathcal{G}$, se tiene que todo conjunto $A \subset \mathbf{X}$ que sea elemento de alguna sucesión $(A_n) \in \mathcal{G}$, está en $\mathcal{D}$. Sea K la clase formada por estos conjuntos y $\overline{K} := \{\mathcal{X}_A : A \in K\}$. Como $(A_n) \in \mathcal{G}$ determina que $\mu(\mathbf{X} \setminus A_n) \downarrow 0$, resulta que $\mathcal{X}_{\mathbf{X}}$ es un punto de acumulación de $\overline{K}$ en el álgebra de Boole métrica y $\int^{\mathcal{G}} f d\mu$ es el límite parcial de $\hat{f}$ sobre $\overline{K}$ en $\mathcal{X}_{\mathbf{X}}$.

Utilizando los conocimientos generales sobre límites, se pueden derivar de inmediato muchas propiedades de la integración impropia.

6 Teorema de Vitali–Hahn–Saks

No se trata, naturalmente, de agotar en esta exposición todos los usos que el álgebra de Boole métrica tiene en la integración. Los epígrafes anteriores –nos parece– deben ser suficientes como para comprender su utilidad; pero antes de concluir presentaremos el teorema de Vitali-Hahn-Saks, motivados porque su demostración utiliza un bellísimo argumento de "categoría", propio de los espacios métricos.

Se trata de demostrar que si $(f_n) \subset L^1(\mu)$ es tal que $(\int_A f_n d\mu)$ converge para todo $A \in T$, entonces la sucesión (f_n) tiene integrales uniformemente absolutamente continuas. Esto último significa, recordemos, que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in T \mid \mu(A) < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_A |f_n| d\mu < \epsilon\,.$$

En efecto, para $\epsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, se define

$$F_k(\epsilon) := \{\mathcal{X}_A \in \overline{T} : \sup_{n \geq 1} |\hat{f}_k(\mathcal{X}_A) - \hat{f}_{k+n}(\mathcal{X}_A)| \leq \epsilon\}\,.$$

Notemos que

$$F_k(\epsilon) = \bigcap_{n\geq 1} \{\mathcal{X}_A \in \overline{T} : |\hat{f}_k(\mathcal{X}_A) - \hat{f}_{k+n}(\mathcal{X}_A)| \leq \epsilon\} ,$$

por lo cual, siendo cada $\hat{f}_k$ continua sobre $\overline{T}$, resulta que $F_k(\epsilon)$ es una intersección de conjuntos cerrados y, consecuentemente, cerrado en $\overline{T}$.

De la hipótesis de convergencia, se infiere que $\bigcup_k F_k(\epsilon) = \overline{T}$. Pero siendo $\overline{T}$ un espacio métrico, completo y no vacío, se sigue del teorema de Baire sobre categorías que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ para el cual $F_{k_0}(\epsilon) \neq \emptyset$. En otras palabras, que existen $A_0 \in \mathcal{A}$ y $\delta > 0$, tales que, para todo $A \in T$ con $d(A, A_0) < \delta$, se tiene

$$\sup_{n\geq 1} |\hat{f}_{k_0}(\mathcal{X}_A) - \hat{f}_{k_0+n}(\mathcal{X}_A)| \leq \epsilon .$$

De aquí se deriva, después de algunos cálculos quizás engorrosos pero directos, lo aseverado en el teorema (ver [1] o [4]).

El núcleo de la demostración, por tanto, es el uso del teorema de Baire, aprovechando la completitud del álgebra de Boole métrica asociada a la medida.

El Teorema de Vitali-Hahn-Saks surgió a partir de un resultado previo más débil debido a Vitali (1907) [9] y la primera demostración de dicho resultado, hasta lo que nosotros conocemos, se debe a H. Hahn (1922) [3]. Dicha prueba no utilizaba el lema de la categoría de Baire. Fueron S. Saks (1933) [7] y, de manera independiente, S. Banach (1931) [1], quienes introdujeron el método de prueba que hemos explicado en esta sección. Para un estudio muy interesante de la historia del Teorema de Vitali-Hahn-Saks, que contiene la demostración original de Hahn, ver [2].

Referencias

[1] S. Banach, *"Teorja Operacyj"*, Warsaw, 1931.

[2] J. R. Choksi, Vitali's convergence theorem on term by term integration, *L'Enseignement Mathématique* **47** (2001) 269–285.

[3] H. Hahn, Über Folgen linearer Operationen, *Monatsshefte für Math. und Physik* **XXXII** (1922) 3–88.

[4] M. A. Jiménez Pozo, *"Medida, Integración y Funcionales"*, Pueblo y Educación, La Habana, 1989.

[5] M. A. Jiménez Pozo, E. López, J. J. Ruckman, Sequential convergence in the space of absolutely Riemann integrable functions, *Zeitschrift fnr Analysis und ihre Anwendungen* **13** (1994) 4, 567–576.

[6] K. Kuratowski, *"Topology"*, Vol. II, Academic Press, New York, 1968.

[7] S. Saks, On some functionals, I *Trans. Maer. Math. Soc.* **35** (1933) 549–556.

[8] M. Spivak, *“Calculo sobre Variedades”*, Editorial Reverté, Barcelona, 1972.

[9] G. Vitali, Sull’integrazione per serie, *Rendiconti Circolo Matematico Palermo* **23** (1907) 137–155.

[10] S. Wagon, *“The Banach-Tarski Paradox”*, Cambridge Univ. Press, New York, 1985.

Miguel Antonio Jiménez Pozo
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Puebla (México)
Correo electrónico: mapozo@@ujaen.es

Abey López García
c/Horizon, 3-I, 6-A, 28041
Madrid (España)
Correo electrónico: abeymat@@yahoo.es