Las medallas Fields

Sección a cargo de

Adolfo Quirós Gracián

Jesse Douglas y el problema de Plateau

por

Jesús Gonzalo Pérez

Jesse Douglas

El Congreso de Oslo de 1936 fue especialmente histórico para las Medallas Fields: en él se hizo entrega de las dos primeras, ganadas por Lars Valerian Ahlfors y Jesse Douglas.

Las siguientes son, a mi juicio, tres señales de que un trabajo merece la Medalla Fields: que resuelva un problema que muchas buenas cabezas hayan intentado, que el método sea original o incluso sorprendente y que dé lugar a numerosos desarrollos posteriores.

El trabajo de Jesse Douglas sobre el *Problema de Plateau* presenta estas tres señales. ¿Quién era Plateau y en qué consiste el problema que lleva su nombre?

1. Un poco de historia

Estamos en el año 1696 y Johann Bernoulli, doce años más joven que su hermano Jacob, acaba de publicar un desafío en *Acta Eruditorum:* encontrar la curva *braquistocrona*[1], es decir la curva por la que tardará menos en bajar un objeto por la acción de la gravedad y en ausencia de rozamiento.

[1] Dado que no se sabe cómo sonaba el griego clásico, es opcional cuál de las dos oes lleva el acento.

El problema es tan difícil que incluso hoy no se incluye en los cursos básicos de Cálculo: hay que hallar un mínimo dentro de un *espacio de curvas,* espacio que tiene dimensión infinita. Galileo ya lo había intentado en 1638, pero su respuesta (un arco de circunferencia) era errónea.

En el momento de publicar el desafío, Johann ya conocía la solución. Sólo otros cuatro matemáticos fueron capaces de hallarla: Jacob Bernoulli, Leibniz, Newton y L'Hôpital. Los cinco, usando ideas distintas, dedujeron que la curva es una cicloide con las cúspides hacia arriba.

Había nacido el *Cálculo de Variaciones:* optimizar un funcional dentro de un espacio de funciones. Tal como había sido planteado y resuelto, quedaba sólo al alcance de las mentes geniales el resolver problemas de ese tipo.

Pero hay otro genio que es de natural amable, y que desea dar al común de los mortales un método sistemático para resolver tales problemas: en el año 1744 se publica el libro de Leonhard Euler *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minive proprietate gaudeates sive solutio probematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Contiene numerosos ejemplos, pero aquí nos interesa uno en el que Euler muestra que, de entre todas las curvas planas uniendo dos puntos dados, la que engendra una superficie de revolución de área mínima es la catenaria (Euler opta por el griego, y llama *alisseida* a esta curva).

La obra impresiona especialmente a un joven matemático, Joseph–Louis Lagrange, que en 1762 (tiene entonces 26 años de edad) publica una memoria en la que muestra cómo hacer para superficies lo mismo que Euler ha explicado para curvas. Halla, en particular, que si una superficie $z = f(x, y)$ tiene área mínima entre todas las que contienen una curva dada entonces

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0 \, ,$$

donde, siguiendo a Gaspard Monge, escribe (p, q) para el gradiente de f. Con esta ecuación queda establecido el concepto de *superficie minimal.*

Lagrange no propuso más ejemplo de solución que el plano, pero en 1776 Jean-Baptiste Marie Charles Meusnier publica una memoria con los siguientes resultados: (1) la ecuación hallada por Lagrange equivale a que las curvaturas principales de la superficie sean una opuesta de la otra, (2) la *alisoide,*[2] superficie obtenida al rotar la alisseida o catenaria, es minimal, (3) el *helicoide* es minimal.

La situación volvía a ser como con la braquistocrona: quedaba para mentes privilegiadas el encontrar nuevos ejemplos de soluciones.

[2] A mediados del siglo XIX, Plateau popularizará el nombre *catenoide* para esa misma superficie.

En 1784 Monge halla la solución general a la ecuación de las superficies minimales: se toman dos funciones "analíticas" $\varphi(u), \psi(u)$ y se hace

$$\begin{aligned} x_1 &= a + b \\ x_2 &= \varphi(a) + \psi(b) \\ x_3 &= \int \sqrt{-1 - \varphi'(a)^2}\, da + \int \sqrt{-1 - \psi'(b)^2}\, db\,. \end{aligned}$$

Conviene recordar que las funciones de variable compleja aún no se conocen. Nadie sabe qué hacer con las fórmulas de Monge, a excepción de Heinrich Ferdinand Scherk que en 1831 consigue aprovecharlas para obtener cinco nuevas superficies minimales *reales* que le van a hacer inmortal. Han pasado 47 años desde las fórmulas de Monge.

Pasarán otros 33 hasta que, en 1864, Alfred Enneper publique un artículo con unas fórmulas que permiten construir sistemáticamente superficies minimales a partir de un par cualquiera de funciones holomorfas de una variable. Halla, en particular, la superficie que ha de llevar su nombre.

Pasan dos años, y en 1866 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass muestra en la Academia de Berlin las fórmulas:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathrm{Re} \int (f(z)^2 - g(z)^2)\, dz \\ x_2 &= \mathrm{Re} \int i\,(f(z)^2 + g(z)^2)\, dz \\ x_3 &= \mathrm{Re} \int 2\, f(z) g(z)\, dz \end{aligned}$$

donde $f(z), g(z)$ son funciones holomorfas cualesquiera. Estas fórmulas son la bien conocida *representación de Enneper–Weierstrass* de las superficies minimales. Comprueba como ejercicio que son equivalentes a las de Monge (82 años más antiguas).

Por supuesto que esas fórmulas ya permiten a cualquiera el construir muchas superficies que cumplen la ecuación de Lagrange, o la versión de Meusnier $H = 0$ donde H denota la *curvatura media* de la superficie. Pero recordemos que el problema inicial era: dada una curva Γ en el espacio, hallar la superficie de área mínima entre todas las que contengan a Γ. Adaptar las fórmulas de Enneper–Weierstrass a la curva Γ es un problema dificilísimo, que nos proporciona un buen punto para dejar de momento la historia de las Matemáticas y pasar a otro tema.

Volvamos al año 1825, en que aparece un nuevo juguete: el disco mágico[3]. Es tan simple como un disco de cartón con un dibujo en cada cara. Al girarlo

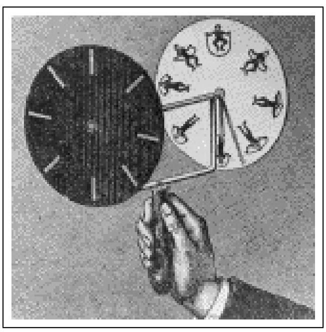
[3]En inglés "thaumatrope". No he encontrado la palabra "taumátropo" en ningún diccionario.

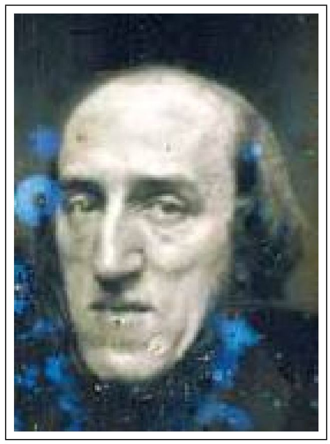
por medio de dos hilos retorcidos, los dibujos de superponen y completan una escena. Ha nacido la animación, aunque nadie lo sabe aún.

Le siguen los siguientes juguetes[4]: el *fenaquistiscopio*, el *zoótropo* y el *praxinoscopio.* Todos ellos producen imágenes con sensación de movimiento. La primera cámara con bobina de película (que ya no consideramos un juguete) la presenta Etienne Marey en 1888... ya sabemos lo que vino después.

Yendo hacia atrás, el praxinoscopio había sido inventado en 1877 por Emile Reynaud y el zoótropo en 1834 por William George Horner[5]. ¿Y el fenaquistiscopio?

El físico belga Joseph Antoine Ferdinand Plateau recibe el título de doctor en 1829, a la edad de 28 años. Acaba de demostrar la persistencia de las imágenes en la retina, descubrimiento fundamental para todos los dispositivos de animación que puedan hacerse (desde el disco mágico a las pantallas de ordenador). Inventa el fenaquistiscopio en 1832, que se comercializa enseguida.


El fenaquistiscopio


Daguerrotipo de Plateau

La importancia de Joseph Plateau en la historia de la animación es evidente, y está bien reconocida. A un alto precio: en 1844 Plateau se queda ciego. Aunque en 1829 había mirado 25 segundos al sol para un experimento, nunca sabremos si ésta fue la única causa de su ceguera.

Un nuevo campo será el interés científico de Plateau para el resto de su vida: los fenómenos de capilaridad en líquidos.

Ayudado por diversas personas (entre las que cabe citar especialmente a Ernest Lamarle) estudia minuciosamente el comportamiento de las superficies líquido–aire y el de las superficies entre dos líquidos. Su obra monumental aparecería en 1873, pero para entonces sus resultados sobre capilaridad ya serían de sobra conocidos.

[4]Todos a la venta en 2005 en comercios de juguetes educativos.

[5]Es el mismo Horner que nos encontramos en los cursos de Análisis Numérico. En realidad, ya hizo un zoótropo un inventor chino de nombre desconocido en el año 180 de la era cristiana.

Lo que más nos interesa aquí son sus investigaciones sobre las películas de jabón. Plateau descubre las siguientes leyes:

1. Todo alambre curvado y cerrado, tenga la forma que tenga, sale después de sumergido en agua jabonosa con una superficie de jabón de la que es el borde. Esta superficie es minimal, porque la película líquida tiende a contraerse hasta tener la menor área posible.

2. A veces tres películas de líquido se juntan en una arista triple (no necesariamente recta) y los ángulos diedros en cada punto de la arista son de 120°.

3. A veces cuatro aristas triples se juntan en un vértice, y su disposición angular al llegar al vértice es como la de los ejes ternarios de un tetraedro.

4. No se forma ningún otro tipo de singularidad.

Se bautizó con el nombre de *problema de Plateau* al siguiente enunciado:

> *Dada una curva simple y cerrada en el espacio, encontrar una superficie minimal cuyo borde sea esa curva.*

Hay muchas maneras, no equivalentes, de precisar este enunciado. Todas ellas se conocen con el nombre de problema de Plateau.

Retomamos ahora la historia de las Matemáticas, pero antes debemos advertir que existe una enorme cantidad de buenas Matemáticas hechas sobre aspectos de las superficies minimales distintos al problema de Plateau y que desafortunadamente no tienen cabida en este breve artículo.

Como ya hemos comentado, dada una curva Γ en $\mathbb{R}^3$ es un problema formidable el hallar funciones holomorfas $f(z), g(z)$ que llevadas a las fórmulas de Enneper–Weierstrass den una superficie minimal conteniendo a Γ.

Hermann Amandus Schwarz obtiene la primera solución en 1865: para una poligonal cerrada formada por cuatro segmentos de recta no coplanares, halla las funciones $f(z), g(z)$ que dan una superficie minimal conteniendo a dicha poligonal. La dificultad está en las cuatro esquinas de la poligonal.

Georg Friedrich Bernhard Riemann también lo había hecho, sin que Schwarz lo supiera. Más tarde se encontraron otras superficies minimales con borde formado por rectas, semirrectas y segmentos de recta. Cabe citar, entre otros, a Edvard Rudolf Neovius (alumno de Schwarz). Además Riemann estudió superficies minimales con borde formado por dos circunferencias, o por una recta y una circunferencia. Cada uno de estos ejemplos se daba por las fórmulas de Enneper–Wierstrass, lo que era todo un triunfo técnico. El problema de Plateau para una curva “no ingenua” se veía muy lejano.

2. Comienzos del siglo XX

Llegamos así al año 1900. David Hilbert inaugura el nuevo siglo con su famosa conferencia. En el problema 19 Hilbert pregunta: si un problema variacional es analítico ¿son analíticas sus soluciones?

En el problema 20 habla de la existencia de solución para los problemas de contorno, y recuerda el

> **Principio de Dirichlet:** Dadas una región compacta R y una función ϕ definida en la frontera ∂R, de entre todas las funciones u en R con valor de frontera ϕ la que tiene menor energía $\mathcal{E}[u] = (1/2)\,\|\nabla u\|^2_{L^2}$ es la armónica.

En el problema 21 pide que se demuestre que siempre hay un sistema diferencial lineal, de los llamados *fuchsianos,* con puntos singulares dados y monodromías dadas. Un problema en apariencia sin relación con los dos anteriores, y desde luego muy complicado.

Ya hemos dicho que el problema de Plateau tiene muchas versiones. Merece especial mención la *no paramétrica:* tenemos una región R en el plano y buscamos una función $z(x,y)$ definida en R, con valores de frontera dados y cuyo grafo sea una superficie minimal. Es, obviamente, un caso particular del problema 20 de Hilbert.

Henri Léon Lebesgue halla una solución lipschitziana en 1902 para el caso de R convexa con frontera de curvatura nunca nula. Esta superficie es minimal en el sentido de que tiene área mínima, pero al no saber si tiene derivadas segundas clásicas Lebesgue no pudo decir que fuese una solución de la ecuación $H = 0$.

Sergei Natanovich Bernstein resuelve en 1902 un caso del problema 19 de Hilbert, que le permite demostrar en 1912 que la $z(x,y)$ de Lebesgue es de hecho analítica.

En 1927 Alfréd Haar resuelve el problema no paramétrico para R convexa de un modo directo y sencillo, basado una vez más en funciones lipschitzianas.

También es atractivo el resultado de Arthur Korn, que en 1909 resuelve el problema no paramétrico para datos de contorno muy cercanos[6] a una curva plana no necesariamente convexa.

Estos resultados constituyen una respuesta a los problemas 19 y 20 de Hilbert en el caso de la ecuación $H = 0$.

En 1926 René Garnier da una solución (131 páginas) al problema 21 de Hilbert, basada en trabajo previo de George David Birkhoff. Entonces ataca el problema de Plateau al estilo del siglo XIX: considera una poligonal cualquiera y busca las funciones holomorfas $f(z), g(z)$ que den una superficie minimal conteniendo a esa poligonal. El problema en las esquinas de la poligonal lo resuelve con ayuda de su solución al problema 21 de Hilbert. Además tiene un

[6] En la norma $\mathcal{C}^{2,\alpha}$.

método de paso al límite en sucesiones de poligonales, que le permite resolver el problema de Plateau para las curvas cerradas simples no anudadas y de curvatura acotada a trozos. Publica su solución (52 páginas) en 1928. Aunque hay curvas que no pueden tratarse por su método, es la primera solución verdaderamente general al problema de Plateau.

Esta solución no es totalmente satisfactoria, por las siguientes razones. Sólo trata directamente las poligonales, como en el siglo XIX. Usar la solución al problema 21 de Hilbert era un recurso que lo complicaba todo terriblemente. Se la vió como una solución por fuerza bruta, llevando al extremo las técnicas previas, y quedó la sensación de que tenía que haber una solución más elegante y sencilla.

3. Douglas y Radó

En 1930 Tibor Radó publica una solución que casi cumple esa expectativa. Radó descubrió una noción útil de problema *aproximado* de Plateau: las condiciones de contorno se han de cumplir, pero la ecuación de las superficies minimales es sustituida por una versión ε–aproximada, donde ε es un número positivo dado. Consigue resolver este problema aproximado para curvas de contorno poligonales, eliminando toda referencia al problema 21 de Hilbert. Además esas soluciones aproximadas se comportan bien cuando las curvas poligonales convergen a una curva cerrada simple Γ y hacemos que el número ε tienda a cero. La superficie límite sí que es minimal y resuelve el problema de Plateau para la curva Γ. Lo único que queda de las técnicas antiguas es el empezar con curvas poligonales, pero tenemos solución para cualquier curva de Jordan en $\mathbb{R}^n$ que sea el borde de al menos una superficie con área finita.

Además Radó da un bello teorema de unicidad para el problema de contorno no paramétrico.

La solución de Douglas, también de 1930, abandona todas las técnicas antiguas.

Douglas no necesita empezar con una poligonal, sino que resuelve el problema directamente para la curva dada Γ. La idea de la solución de Douglas era tan sencilla que por un tiempo resultó difícil de creer para la gente conocedora del tema. Damos ahora algunos detalles del planteamiento y la solución, vistos con la perspectiva de lo que hoy se sabemos al respecto.

El espacio que Douglas y Radó consideran es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Lo que ambos entienden por “superficie” es una parametrización $\Phi : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ con $D = \{(u,v) \,|\, u^2+v^2<1\}$ el disco unidad abierto y $\overline{D}$ su cierre. Se le pide a Φ que sea continua en $\overline{D}$ y con derivadas primeras en el interior D. El dato de contorno consiste en fijar una curva cerrada simple Γ en $\mathbb{R}^n$ y pedir que $\Phi|_{\partial D}$ recorra Γ.

El área de la superficie es la integral $A[\Phi] = \iint_D A(\Phi_u, \Phi_v)\, dudv$, donde para dos vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ denotamos por $A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ el área del paralelogramo cuyos lados son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. La integral se toma, por definición, en el *interior* D. Esto es necesario porque las derivadas Φ_u, Φ_v pueden no existir en los puntos de ∂D, y porque a posteriori vamos a tener solución incluso para algunas curvas Γ que tienen área positiva[7]: lo que se minimiza es el área del interior de la superficie, estando fijada la de su borde.

Se busca una Φ de área mínima entre todos los discos que cumplen la condición de contorno. De existir, esa Φ será una solución.

Esta versión del problema (minimizar el área entre todos los discos de contorno Γ) ha sido a veces llamada *Problema clásico de Plateau*. No olvidemos que es un enunciado matemático: otra cosa es lo que haga una película *física* de jabón.

Digamos de pasada que, puesto que Garnier había seguido otro camino, era posible que su solución no tuviese área mínima.

Definimos las funciones: $E(u,v) = \Phi_u \cdot \Phi_u$, $F(u,v) = \Phi_u \cdot \Phi_v$, $G(u,v) = \Phi_v \cdot \Phi_v$. Definimos la *energía de Dirichlet* como $\mathcal{E}[\Phi] = (1/2) \iint_D (E + G)\, du dv$.

Es claro que $A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \leq |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \leq (1/2)\,(|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2)$. La primera desigualdad es una igualdad si y sólo si $\mathbf{v}_1$ es ortogonal a $\mathbf{v}_2$, y la segunda desigualdad es una igualdad si y sólo si $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2|$. Por lo tanto $A[\Phi] \leq \mathcal{E}[\Phi]$, y la igualdad se da si y sólo si Φ es una parametrización *conforme.*

Es fácil ver que si el interior $\Phi(D)$ es del tipo conforme de $\mathbb{C}$ y tiene área finita entonces la imagen del borde $\Phi(\partial D)$ tiene que reducirse a un punto. Concluimos que en nuestro caso los discos $\Phi(D)$ son del tipo conforme de D y por lo tanto Φ tiene una reparametrización que es conforme (y con la misma área). Luego todos los valores del área son valores de la energía. Esto, junto con la desigualdad $A \leq \mathcal{E}$, nos dice que el mínimo del área coincide con el mínimo de la energía. Si Φ realiza ese mínimo común a los dos funcionales, entonces es conforme y minimal. Además, por el principio de Dirichlet, una tal Φ tiene que ser armónica.

De hecho, para parametrizaciones conformes es $\Delta\Phi = 2H\,N$, con N la normal unitaria. Luego una parametrización conforme es armónica ($\Delta\Phi = 0$) si y sólo si es minimal ($H = 0$).

Conclusión: para resolver el problema clásico de Plateau podemos olvidar el área y minimizar la energía de Dirichlet. Es más, basta con minimizar la energía entre las parametrizaciones armónicas Φ tales que $\Phi|_{\partial D}$ recorre Γ. Al hacer esto nos beneficiamos de las buenas propiedades de convergencia de las sucesiones de funciones armónicas.

También Radó usa funciones armónicas. Las ecuaciones: $E = G$, $F = 0$, $\Delta\Phi = 0$ representan las reparametrizaciones conformes de las superficies minimales. La condición ε–minimal de Radó consiste en pedir $\Delta\Phi = 0$ y

[7] Queremos decir medida de Hausdorff 2–dimensional. De hecho, hay solución para algunas curvas cuya dimensión de Hausdorff es superior a 2.

sustituir las dos primeras ecuaciones por

$$\iint_D |F|\, dudv < \varepsilon \text{ y } \iint_D \left(\sqrt{E} - \sqrt{G}\right)^2 dudv < \varepsilon.$$

Sus buenas propiedades vienen de que es una condición integral, y no puntual, para derivadas de orden bajo de fuciones armónicas.

Ahora podemos resumir la idea de la prueba de Douglas en una sola frase: Considerar, para cada parametrización ϕ de la curva Γ, la aplicación armónica Φ_ϕ con dato de contorno ϕ y entonces minimizar la energía $\mathcal{E}[\Phi_\phi]$ sobre todas las ϕ.

Douglas sigue el *método directo* del Cálculo de Variaciones: tomar una sucesión (ϕ_n) tal que las correspondientes funciones armónicas Φ_n tienen energías $\mathcal{E}[\Phi_n]$ tendiendo al ínfimo, e intentar definir la superficie como límite de las Φ_n.

Que la función armónica $\Phi_\infty = \lim \Phi_j$ existe para alguna subsucesión (Φ_j) es evidente, porque (Φ_n) es una sucesión de funciones armónicas con una cota común para la energía. Lo que puede ocurrir es que este límite no cumpla la condición de contorno.

Esto se debe a la invariancia conforme, en dimensión 2, de la energía de Dirichlet y a la no compacidad del grupo conforme del disco. Si $\sigma : D \to D$ es un automorfismo conforme, entonces $\mathcal{E}[\Phi] = \mathcal{E}[\Phi \circ \sigma]$ para toda Φ. Por otra parte es fácil dar una sucesión (σ_n), de automorfismos conformes del disco, que converge puntualmente a una aplicación constante y por lo tanto carece de límite dentro del grupo conforme del disco. Todas las σ_n tienen igual energía, pero ninguna subsucesión nos da un límite útil.

Tanto Douglas como Radó se dan cuenta de cómo contrarrestar la no compacidad del grupo del disco. Se fijan tres puntos $p_1, p_2, p_3 \in \partial D$, y otros tres $q_1, q_2, q_3 \in \Gamma$, y se exige que cada función Φ_n de la sucesión lleve p_i a q_i, $i = 1, 2, 3$. Cualquier sucesión (Φ_n) puede someterse a reparametrizaciones conformes adecuadas de modo que la nueva sucesión cumpla ese requisito.

La sucesión así normalizada tiene una subsucesión cuyo límite Φ_∞ es de energía mínima y tal que la restricción $\Phi_\infty : \partial D \to \Gamma$ es un homeomorfismo. Esta Φ_∞ resuelve cabalmente el problema clásico de Plateau.

De hecho, Douglas llega más lejos y demuestra que aunque Γ sea tal que todas las superficies $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$ de contorno Γ tengan área infinita también en este caso hay una Φ minimal (de área infinita).

4. Biografía

Jesse Douglas nació en Nueva York el 3 de julio de 1879.

Obtuvo el Bachelor of Science (equivalente a la Licenciatura) en el City College de Nueva York.

Se doctoró en la Universidad de Columbia (NY) en 1920 bajo la dirección de Edward Kasner. En su tesis estudia condiciones que tiene que cumplir una familia de curvas para que sean las soluciones de un problema variacional.

Estuvo en Columbia hasta 1926 y, tras visitar Princeton, Harvard, Chicago, París, Götingen y Roma, obtuvo una plaza en el MIT en 1930. Ese mismo año resuelve el problema clásico de Plateau, lo que le valdría la Medalla Fields en 1936.

Es bien conocido que Douglas no estuvo presente en la ceremonia de entrega de las Medallas y que Norbert Wiener la recogió en su nombre. Lo que he podido averiguar al respecto es lo siguiente[8]:

– Los periódicos de Oslo de la fecha del Congreso de 1936 dan fe de que Douglas había llegado a la ciudad y de hecho se había registrado como participante, pero que no pudo salir del hotel en el que estaba e ir a la ceremonia.

  No hubo, pues, ninguna intención de boicot.

– El discurso sobre la vida y obras de Ahlfors y Douglas, justo antes de la entrega de las Medallas, lo leyó Constantin Carathéodory. E.R. Lorch (AMS Centennial vols, III, p. 159-160) afirma que un radiante N. Wiener se acercó a recoger la medalla en representación de Douglas, mientras escuchaba la elogiosa reseña.

– Élie Cartan escribe en las Actas de dicho congreso: “Il regrette que M. Douglas fatigué ne puisse pas venir recevoir lui-même la médaille qui lui est destinée. Il remet deux médailles à M. Lars Ahlfors et à M. Wiener remplacant M. Douglas.”

Según Dirk Jan Struik, Douglas perdió su puesto en el MIT el mismo año que recibió la Medalla Fields siendo la causa del despido el que por tener una salud frágil faltaba con frecuencia a sus clases. También dice Struik que aquellos años vivía en un hotel y llevaba una vida poco cuidada. Aunque no lo sabemos, es razonable suponer que dedicaba más horas a pensar en problemas matemáticos de las que la salud aconseja.

A partir de entonces vivió de becas y trabajos esporádicos en Columbia, MIT, Brooklyn College y Yeshiva University.

Recibe el Premio Bôcher en 1943.

Desde 1951 publica artículos sobre álgebra de grupos.

Por fin en 1955 consiguió una plaza permanente en el City College de Nueva York, su alma mater, donde permaneció el resto de su vida.

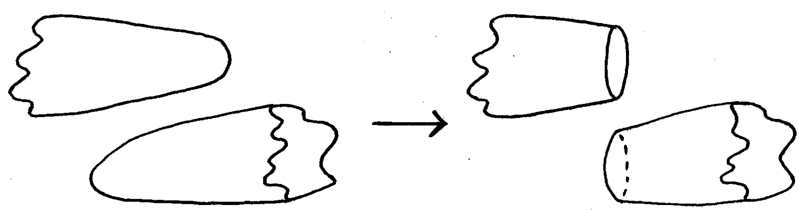
Murió en Nueva York el 7 de octubre de 1965.

[8]Estos datos se los debo a Mario Micallef y Jeremy Gray.

5. Trabajos posteriores

En 1933 Edward James McShane da otra solución al problema clásico de Plateau. Las ideas que utiliza se remontan a H. Lebesgue y son muy ingeniosas. Ya hemos visto lo ventajoso de considerar parametrizaciones que sean funciones armónicas. Lebesgue había definido una parametrización $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ como *monótona* si para toda función lineal $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función $\ell \circ \Phi$ satisface los principIos de máximo y mínimo en cada abierto de D. Esto es una versión débil (o incluso *viscosa*) de la armonicidad, y es natural que dé lugar a buenas propiedades de convergencia de subsucesiones. Geométricamente significa que la superficie no tiene "bultos que sobresalgan" en ninguna dirección.

Lebesgue también había inventado un método para, dada cualquier Φ, hacerle una deformación que decrezca su área y la convierta en una Φ' monótona y con los mismos valores de contorno. Esencialmente es sustituir los bultos por partes planas:

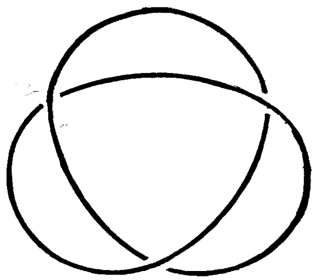


e iterar eso en una infinidad de alturas y direcciones. McShane, en posesión de las técnicas necesarias, hace funcionar estas bonitas ideas hasta el final.

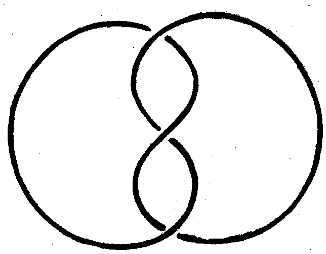
En 1936 aparece una notable simplificación del argumento de Douglas, obtenida de manera simultánea e independiente por Richard Courant y por Leonida Tonelli. De hecho, he aprovechado dicha simplificación en mi descripción rápida del método de Douglas. Hay que destacar el *lema de Courant–Lebesgue,* que afirma que si $p \in \partial D$ y si C_r es la parte contenida en D de la circunferencia de radio r y centro p entonces la longitud de la curva imagen $\Phi(C_r)$ es como $\text{cte} \cdot \mathcal{E}[\Phi]^{1/2} \cdot |\log r|^{-1/2}$ y por lo tanto tiende a cero, a un ritmo conocido a priori, cuando r tiende a cero.

Ya hemos dicho que el problema clásico de Plateau puede no ser un buen modelo de la película física de jabón. Douglas lo manifiesta desde el principio: al pedir que la superficie esté parametrizada por un disco, para muchos contornos Γ se verá obligada a tener autointersecciones. A una curva de autointersección llegan cuatro hojas de la superficie, mientras que las leyes físicas de Plateau sólo permiten que a una curva lleguen *tres* hojas. Las soluciones matemáticas con autointersecciones son, pues, inexistentes como membranas de líquido.

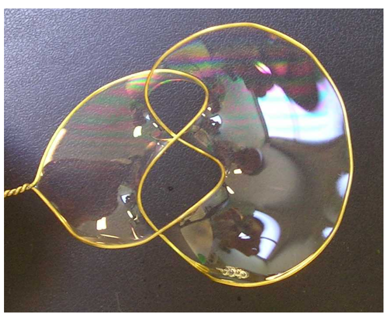
Es fácil imaginar curvas de contorno que dan lugar a superficies minimales no homeomorfas a un disco. Si ponemos el nudo de trébol en la siguiente forma:



es claro cómo usarlo para hacer una banda de Möbius con agua jabonosa. Si ahora ponemos el mismo nudo en esta otra forma:

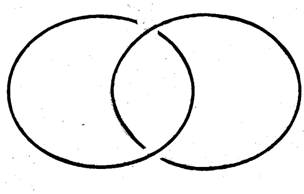
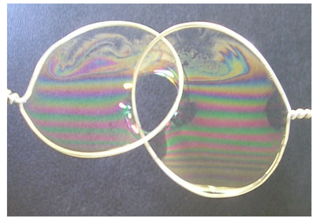


no cuesta nada obtener esta película de jabón:



que es orientable de género 1.

En 1931 Douglas demuestra que si dos curvas de Jordan en $\mathbb{R}^3$ están enlazadas entonces son el borde de una superficie minimal homeomorfa al cilindro:

El método de que se vale lo volverá a usar varias veces. Considera sucesiones $\Phi_n : \Sigma_n \to \mathbb{R}^n$, donde (Σ_n) es a su vez una sucesión de estructuras conformes en una superficie fijada Σ. Al no ser el dominio un disco, en el paso al límite puede haber degeneraciones pero éstas siempre van en el mismo sentido: pérdida de asas, o sea disminución del género o aumento del número de componentes conexas de la superficie. Tales "cirugías" sólo van a ocurrir si suponen una rebaja en el área.

Actualmente es fácil entender por qué es esto así: una sucesión (Σ_n) es divergente en el espacio de Teichmüller si las Σ_n tienen un cuello que en la métricas hiperbólicas se alarga sin cota y se hace cada vez más delgado. Este cuello es el asa que desaparece en el límite.

Pero esto iba a salir del trabajo de L. Ahlfors (que recibió la Medalla Fields a la vez que Douglas), Lipman Bers y otros[9], y en aquél momento aún no estaba disponible. Douglas estudia las degeneraciones haciendo de cada superficie un recubridor ramificado de la esfera de Gauss y viendo cómo se acercan dos puntos de ramificación (en la esfera) hasta aniquilarse mutuamente.

En el caso de dos curvas entrelazadas, la solución formada por dos discos (uno para cada curva) tiene autointersecciones y es fácil cambiarla a un cilindro (no minimal) con menos área. Si ahora (Φ_n) es una sucesión de cilindros, todos ellos con área menor que la de los dos discos, entonces no va a degenerar y la superfice límite también es un cilindro.

En 1932 Douglas publica un artículo sobre superficies minimales no orientables de área mínima. Las trata como parametrizaciones $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ con Σ orientable pero Φ recorriendo dos veces la imagen $\Phi(\Sigma)$, que ya no es orientable.

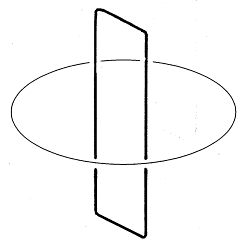
En 1939 publica en Annals un artículo en el que ya considera superficies de cualquier topología finita.

Si una curva Γ es tal que el disco S_0 de área mínima con contorno Γ tiene más área que alguna superficie de género 1, entonces va a haber una superficie S_1 de área mínima entre las de género 1 y contorno Γ. Si además hay una superfice de género 2 y menos área que S_1, entonces va a haber una superficie S_2 de área mínima entre las de género 2 y contorno Γ.

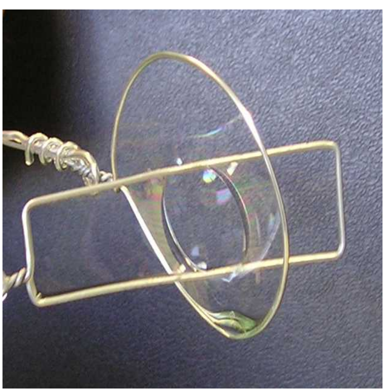
[9]Muy relacionada con eso está la compactificación del espacio de estructuras conformes descubierta por David Mumford y Pierre Deligne, ambos ganadores de la Medalla Fields en 1974.

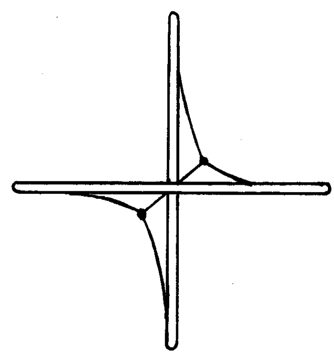
¿Puede esto seguir indefinidamente? En 1956 Wendell Helms Fleming publica un sencillo ejemplo de una curva de Jordan que es contorno para superficies minimales de cualquier género, de modo que el área mínima va bajando a medida que sube el género. A la vista de la curva es obvio que la superficie de área absolutamente mínima tiene género infinito. Las infinitas asas de esta superficie son cada vez más pequeñas y convergen a un punto singular de la curva de contorno. Fuera de dicho punto, la curva es suave a trozos.

Este ejemplo sirvió de revulsivo para que se dejase de insistir en que un objeto de área mínima tiene que venir dado por una parametrización. Estaba además la realidad de las películas de jabón, que con frecuencia muestran tres hojas unidas a una misma arista y por lo tanto no son variedades bidimensionales[10]. Supongamos, por ejemplo, que intentamos obligar a la película líquida a tener una autointersección sumergiendo en agua jabonosa el siguiente sistema de dos alambres:



Sale el sistema de superfices minimales que mostramos en foto y en dibujo de perfil:





[10]Una variedad bidimensional es un espacio topológico "parametrizable": en pequeñas regiones es siempre como el plano o como el semiplano.

En el dibujo, los segmentos terminados en puntos gordos son la vista de perfil de las aristas triples, que limitan una hoja líquida de forma ojival (vista de frente en la foto) la cual forma ángulos diedros de 120° con otras dos hojas a lo largo de cada arista. La ojiva puede eliminarse a mano, para obtener una superficie lisa todavía con menos área.

Los desarrollos que vinieron después, por obra de Ennio De Giorgi, Ernst Robert (Peter) Reifenberg, Wendell Fleming, Herbert Federer, Frederick Justin Almgren y otros, dieron respuesta a los siguientes objetivos:

- Dar métodos para minimizar área que no precisen de ningún conocimiento previo de la topología del objeto que va a salir. De hecho, definir el concepto de minimizante para objetos que tal vez no sean variedades.

- Minimizar el área de objetos de dimensión mayor que 2 (en esas dimensiones las parametrizaciones conformes no existen, pero de todos modos en el primer objetivo ya hemos renunciado a parametrizar).

- Demostrar teoremas de existencia y suavidad para esos objetos minimizantes.

La parte de las Matemáticas que ha resuelto tan difíciles problemas se llama *Teoría Geométrica de la Medida.* Se sale de los límites de este artículo el reseñar sus logros, pero mencionemos que predice perfectamente las leyes físicas de Plateau y también predice que, de entre todos los objetos estables cuyo contorno es un sistema dado de curvas de Jordan en $\mathbb{R}^3$, el que tiene área absolutamente mínima es una superficie lisa (sin aristas triples) aunque tal vez de género infinito. Digamos también que en dimensión $n \geq 8$ hay minimizantes de dimensión $n-1$ que no son lisos, y de hecho no son variedades topológicas en el entorno de los puntos singulares. Sin embargo su conjunto singular es muy pequeño[11] y fuera de él el minimizante es liso y analítico.

Volviendo al problema de Plateau, una versión valiosa del mismo es que entendamos por "espacio" una variedad riemanniana más o menos arbitraria (lo que incluye el espacio euclídeo como caso particular). Este problema fue resuelto por Charles Benedict Morrey en 1948.

Un caso del problema de Plateau con el que se ha tenido especial éxito es cuando el contorno Γ está situado sobre la frontera de un cuerpo convexo. La superficie de área absolutamente mínima es entonces un disco liso y sin autointersecciones, y único si se dan condiciones adicionales. Es la conclusión de trabajos de Robert Gulliver y Joel Spruck (1973), Friedrich Tomi y Antony Tromba (1978), Fred Almgren y Leon Simon (1979).

En 1982 William Hamilton Meeks III y Shing–Tung Yau obtienen resultados similares donde el cuerpo convexo es reemplazado por una variedad riemanniana de dimensión 3 (continúan así lo hecho por Morrey) cuya frontera tal vez no sea convexa pero tiene el vector curvatura media apuntando siempre

[11] Es un cerrado de dimensión de Hausdorff no mayor que $n-8$.

hacia adentro. Estos resultados permitieron demostrar la parte de la *conjetura de Smith*[12] que no puede probarse por los resultados de Thurston.

Una cuestión que Douglas y Radó dejaron completamente abierta es si su solución Φ es una inmersión, es decir si tiene jacobiana de rango 2 en todo punto. En 1970 Robert Osserman (alumno de Ahlfors) casi demuestra que Φ es una inmersión en el interior, faltándole un caso que resultó mucho más difícil y que fue resuelto en los tres años siguientes por R. Gulliver, Hans Wilhelm Alt, Osserman y Halsey Lawrence Royden (alumno de Ahlfors).

En 1979 Robert Hardt y L. Simon demuestran que si $\mathcal{O}$ es un objeto de dimensión $n-1$ en $\mathbb{R}^n$ que minimiza absolutamente el área para un contorno *suave* dado entonces $\mathcal{O}$ es suave cerca de dicho contorno. Si además $n=3$, entonces $\mathcal{O}$ es una superficie de género acotado.

¿Cuántas soluciones tiene el problema de Plateau? Lo que se sabe al respecto dista de ser definitivo. Ya hemos citado el teorema de Radó de unicidad para el problema no paramétrico.

En 1973 Johannes Nitsche publica un bonito teorema que dice que si la curva Γ es $\mathcal{C}^\omega$ y con curvatura total menor que 4π entonces sólo hay un disco minimal que la tenga por contorno.

Se conocen las superficies minimales de género cero cuyo borde son dos circunferencias no enlazadas en $\mathbb{R}^3$, por trabajos de B. Riemann, Max Shiffman, Richard Schoen, W. Meeks, David Hoffman y otros.

En 1986 R. Gulliver y Stefan Hildebrandt probaron que tres círculos coaxiales en $\mathbb{R}^3$ son el borde de todo un continuo de superficies minimales conexas de género cero.

AGRADECIMIENTOS

Ya he mencionado a M. Micallef y J. Gray. Doy gracias a José Pedro Moreno Díaz por los dibujos y a Adolfo Quirós por las fotografías. El nombre de pila de A. Korn se lo debo a Hansjörg Geiges.

REFERENCIAS

[1] F. ALMGREN, J. TAYLOR, The Geometry of Soap Films and Soap Bubbles. *Scientific American* 235 (1976), no. 1, 82–93.

[2] U. DIERKES, S. HILDEBRANDT, A. KÜSTER, O. WOHLRAB, Minimal surfaces, *Vol. I. Springer–Verlag* 1992.

[3] J. DOUGLAS, Solution of the Problem of Plateau. *Trans. AMS* 33 (1931) 263–321.

[12] Además de contribuir a resolver ésta, Yau había resuelto la *conjetura de Calabi* por lo que recibió la Medalla Fiels en 1982.

[4] J. Douglas, Minimal Surfaces of Higher Topological Structure. *Ann. of Math.* 40 (1939) 205–298.

[5] D. Hilbert, Mathematical problems. *Reedición de la conferencia histórica*, en *Bull AMS* 37 (2000) 407–436.

[6] E. Kreyszig, On the Theory of Minimal Surfaces. Páginas 138–164 de: The problem of Plateau, World Scientific 1992. Edit. T. M. Rassias.

[7] E. McShane, Parametrization of saddle surfaces, with application to the problem of Plateau. *Trans. AMS* 35 (1933) 716–733.

[8] M. Micallef, J. Gray, Minimal Surfaces and the Work of Jesse Douglas. *En preparación.*

[9] J. Morgan, H. Bass, The Smith conjecture. *Academic Press* 1984.

[10] J. Nitsche, Lectures on Minimal Surfaces, Vol. 1. *Cambridge Univ. Press* 1989.

[11] J. Nitsche, Plateau's problems and their modern ramifications. *Amer. Math. Monthly* 81 (1974), no. 9, 945–968.

[12] T. Radó, On Plateau's problem. *Ann. of Math.* 31 (1930) 457–469.

[13] D. J. Struik, My Recollections of Jesse Douglas. Páginas 41–42 de: The problem of Plateau, World Scientific 1992. Edit. T. M. Rassias.

Jesús Gonzalo Pérez
Universidad Autónoma de Madrid
Departamento de Matemáticas
28049 Madrid
Correo electrónico: `jesus.gonzalo@uam.es`