Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Oscar Ciaurri y José Luis Díaz-Barrero[1]

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos en formato* TEX. *Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta soluciones recibidas hasta el 28 de febrero de 2006.*

Solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas enviados a esta sección sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que una solución al problema no está disponible en estos momentos.

Problemas

Problema 33

Consideramos un rectángulo blanco de tamaño $N \times 1$ ($N \in \mathbb{Z}^+$). Se pretende colocar sobre él un total de L rectángulos negros de longitudes $l_i \times 1$ ($l_i \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, 2, \ldots, L$) utilizando las siguientes reglas:

- Los rectángulos negros siempre deben colocarse de izquierda a derecha y de modo que el de longitud l_i quede comprendido entre los de longitudes l_{i-1} y l_{i+1}.
- Dos rectángulos negros deben dejar libre entre ellos un rectángulo blanco de tamaño al menos 1×1.

¿Cúantas formas distintas hay de colocar los L rectángulos negros de modo que se verifiquen las reglas anteriores?

Propuesto por Lourdes Benito López
Universidad de La Laguna, La Laguna

[1]En la elaboración de este número han colaborado M. Benito Muñoz, L. Español González y E. Fernández Moral.

PROBLEMA 34

Sean $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ una función continua y par, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar, $\alpha > 0$ y $a > 1$. Probar que

$$\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt[n]{f(x)}}{1 + a^{g(x)}}\, dx \right)^n \leq C\alpha^{n-1} \int_0^{\alpha} f(x)\, dx.$$

Propuesto por Mihàly Bencze
Brasov, Rumanía

PROBLEMA 35

Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}} = z.$$

Propuesto por Juan Luis Varona Malumbres
Universidad de La Rioja, Logroño

PROBLEMA 36

Sean $x_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n$, con $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$. Probar que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq \sqrt{\frac{2n}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{x_j}}.$$

Propuesto por Marius Olteanu
Rumanía

Problema 37

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ números reales estrictamente positivos. Probar que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^5 + 9} \prod_{j=1}^{n} a_j^{1/2} \leq \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{a_j^2}{n-1} \right]^{(n-1)/4} .$$

Propuesto por Pantelimon George Popescu (estudiante)
Universidad Politécnica de Bucarest, Rumanía

Problema 38

a) Encontrar un conjunto de 10 números naturales consecutivos tales que entre ellos no haya un subconjunto cuyos elementos sumen un cuadrado perfecto.

b) $\star$ ¿Existen secuencias arbitrariamente largas de números naturales consecutivos entre los cuales no hay un subconjunto no vacío cuyos elementos suman un cuadrado perfecto?

Propuesto por Bernardo Recamán Santos
Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia

Problema 39

Consideramos el triángulo $\triangle ABC$ con $b = BC$, $c = AB$, $b > c$ y AH su altura desde el vértice A. Sean H' y H'' los puntos sobre la prolongación de AH obtenidos por giro con centro H de C y B respectivamente. Si E es el punto donde se cortan las hipotenusas de los triángulos $\triangle HH'C$ y $\triangle HH''B$, probar que AE es la bisectriz del ángulo A si y sólo si $A = 90^{\circ}$.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad Complutense, Madrid
Dedicado a la memoria de M. S. Klamkin.

PROBLEMA 40

Sea $A_1A_2\cdots A_n$ un polígono regular inscrito en una circunferencia centrada en el origen y de radio R. Si P es un punto cualquiera cuya distancia al origen es menor o igual que $2R$, probar que

$$R \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} PA_k \leq 3R.$$

Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero
Universidad de La Rioja, Logroño, y Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona
Dedicado a la memoria de M. S. Klamkin.

Soluciones

Problema 9

Sea ABC un triángulo de lados a, b, c, semiperímetro s y área S. Si se verifica que $a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)=4S$, entonces las tres circunferencias con centros en los vértices A, B, C y radios $s-a, s-b, s-c$ respectivamente, son tangentes a una misma recta.

Propuesto por Miguel Amengual Covas
Cala Figuera, Mallorca

Solución

Es claro que las tres circunferencias del enunciado son tangentes entre sí. Ahora bien, tres circunferencias tangentes entre sí, de radios α, β, γ, son tangentes a una recta común si

$$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha\gamma} + \sqrt{\beta\gamma}$$

siendo $\gamma = \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$ (basta tener en cuenta que el segmento tangente común a dos circunferencias tangentes de radios r y R es $2\sqrt{rR}$).

Pongamos $\alpha = s-a$, $\beta = s-b$ y $\gamma = s-c$. En virtud de la fórmula de Herón la igualdad del enunciado es, entonces,

$$\alpha(\beta+\gamma)+\beta(\alpha+\gamma)+\gamma(\alpha+\beta) = 4\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma}.$$

De ahí,

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 2\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma},$$

que, elevando al cuadrado y simplificando, conduce a

$$(\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)^2 = 4\alpha\beta\gamma^2$$

o

$$\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha = \pm 2\sqrt{\alpha\beta}\gamma,$$

de donde se concluye $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha\gamma} + \sqrt{\beta\gamma}$, ya que $\gamma = \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$ hace inviable la otra posibilidad.

NOTA. La otra posibilidad a la que se alude en esta solución conduciría, supuesto que $\alpha \geq \beta$, a $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha\gamma} - \sqrt{\beta\gamma}$, lo cual es absurdo a partir de la condición $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander
También resuelto por M. Peña y J. Serra (estudiantes), C. Sánchez y el proponente.
J. A. Martínez nos envía una contribución experimental a favor de la plausibilidad del resultado elaborada utilizando la hoja de cálculo Excel.

NOTA. En la solución que envía C. Sánchez se establece que la condición $a(s-a)+b(s-b)+c(s-c) = 4S$ es, también necesaria para que las tres circunferencias sean tangentes a una misma recta.

Para resolver este problema también se puede utilizar el ejercicio 10 de la sección 1.5 del libro *Fundamentos de geometría* de H. S. M. Coxeter, Ed. Limusa, México D. F., 1971:

Si tres circunferencias tangentes exteriormente entre sí tienen centros que forman un triángulo $\triangle ABC$, son todas tangentes a otras dos circunferencias (o tal vez a una circunferencia y una recta) cuyas curvaturas (es decir, los inversos de sus radios) son $\frac{r+4R\pm 2s}{S}$, donde s es el semiperímetro, S el área, r el inradio y R el circumradio del triángulo $\triangle ABC$.

En efecto, escribiendo $a = (s-b)+(s-c)$, $b = (s-a)+(s-c)$ y $c = (s-a)+(s-b)$, la condición del problema se transforma en $(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a) = 2S$, o bien, multiplicando por s,

$$2Ss = (s-a)(s-b)(s-c) + 4abc = \frac{S^2}{2} + 4SR = Sr + 4SR,$$

donde se ha utilizado la fórmula de Herón y que $S = sr = \frac{abc}{4R}$. Dividiendo ahora por S queda $r + 4R = 2s$. Pero entonces, según el ejercicio de Coxeter, una de las circunferencias tangentes a las tres dadas tiene curvatura cero, es decir, es una recta. Además, obtenemos que el radio de la otra circunferencia tangente a las tres dadas es $r/4$.

El problema que propone Coxeter es una aplicación del teorema del círculo de Descartes: *Sean E_i cuatro circunferencias de curvaturas ε_i, $i = 1, \ldots, 4$, tangentes entre sí en seis puntos distintos, entonces*

$$2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2.$$

Este resultado fue enviado por Descartes a la princesa Isabel de Bohemia en 1643 y fue redescubierto por Sir F. Soddy en 1936. Éste lo expresó poéticamente en el poema *El beso preciso*, cuyas estrofas centrales dicen (traducción tomada de la pág. 38 de la referencia citada de H. S. M. Coxeter):

Acuden cuatro círculos a un beso;
si más pequeños, con más curvatura.
Precisamente es la curvatura
de la distancia al centro el inverso.
Aunque Euclides quedó mudo ante el dilema,
no hay ya necesidad de un "más o menos".
Pues la curvatura cero es una recta
y si es cóncava tiene signos menos;
la suma de sus cuadrados dará
del cuadrado de la suma la mitad.

Problema 10

Sean f y g funciones reales de variable real infinitamente diferenciables en $x = 0$ y verificando que $g(0) \neq 0$. Probar que si $f \cdot g$ es plana en $x = 0$ y $f(0) = 0$, entonces f es plana en $x = 0$. Aplicando este resultado, probar que

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es plana en $x = 0$. (Una función se dice plana en un punto x_0 si ella y todas sus derivadas se anulan en dicho punto.)

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad de Valladolid, Valladolid

Solución

Poniendo $h(x) = f(x)g(x)$, por la regla de Leibniz se tendría

$$h^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) = 0$$

que, puesto que $g(0) \neq 0$, permite ir deduciendo sucesivamente que $f^{(n)}(0) = 0$ (no es necesario aportar el dato $f(0) = 0$, ya que se obtiene del resto) y por tanto f es plana.

Tomando ahora $g(x) = \exp\left(-\sin^2 x/x^2\right)$, definida por continuidad en el origen, y $f(x)$ la función propuesta se tiene que $h(x) = \exp\left(-1/x^2\right)$. Las funciones f y g son infinitamente diferenciables en $x = 0$, $g(0) =$

$e^{-1} \neq 0$ y es bien conocido que h es plana en el origen con lo que se cumplen las condiciones del enunciado y podemos deducir que f es plana.

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander
También resuelto por N. Casás y J. A. Cid, A. López, J. Mir (estudiante) y el proponente.

NOTA. A. López en su solución denomina la función $\exp\left(-1/x^2\right)$ como función de Cauchy basándose en el libro *Análisis matemático* de Julio Rey Pastor, Pedro Pi Calleja y César A. Trejo (Buenos Aires, Ed. Kapelusz, 1963, vol. 1º, pág. 519). Esta denominación aparece, además de en la primera edición del mencionado libro, que data del año 1952 para ese primer volumen, en otros trabajos de J. Rey Pastor o sus discípulos. Por ejemplo, hemos podido localizarla por primera vez en uno de sus escritos en la *Teoría de funciones reales* que aparece en el año 1925 en su primera versión íntegra, aunque ya podemos encontrarla en una primera parte de esta obra que se publica en 1921. Hay que hacer notar que su obra *Resumen de la teoría de funciones analíticas y sus aplicaciones*, de 1918, no utiliza aún este apelativo al referirse a esta función. Sin embargo, ninguna otra de las referencias en las que hemos podido consultar cuestiones relativas a esta función (y son abundantes, puesto que es de gran utilidad, por ejemplo, en geometría diferencial) aparece tal denominación. La función la introduce, efectivamente, Cauchy en la lección 38 de su *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* como ejemplo de función infinitamente diferenciable pero no analítica. La lectura de esta obra o de alguna otra que la tomase como referencia puede estar en el origen de esta denominación por parte de Rey Pastor aunque, desde luego, no se trata de algo estándar.

PROBLEMA 11

¿Existen ternas pitagóricas con todos sus elementos en la sucesión de Fibonacci?

Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez
Universidad de La Rioja, Logroño

PRIMERA SOLUCIÓN

No existen ternas pitagóricas con todos sus elementos en la sucesión de Fibonacci.

Teniendo en cuenta que en cada terna pitagórica no hay dos valores iguales vamos a probar algo más general: que no existen triángulos cuyos tres lados sean números de Fibonacci distintos.

Supongamos que sí que existe tal triángulo, y sean $a = f_n$, $b = f_m$ y $c = f_k$ las longitudes de sus lados, con $a < b < c$, luego $n < m < k$. Damos por supuesto que el triángulo es no degenerado, así que $c < a+b$ (la desigualdad triangular es estricta). Pero, por otra parte,

$$a + b = f_n + f_m \leq f_{m-1} + f_m = f_{m+1} \leq f_k = c,$$

y esto está en contradicción con $c < a + b$, luego el triángulo no puede existir.

Solución enviada por Juan Luis Varona Malumbres
Universidad de La Rioja, Logroño

Segunda solución

Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión de Fibonacci y supongamos que existen f_i, f_k y f_m tales que $f_i^2 + f_k^2 = f_m^2$.

Tendremos en cuenta los siguientes hechos:

1. No hay ternas pitagóricas en las que 1 sea una de sus entradas.
2. Los dos catetos de una terna pitagórica deben ser distintos.
3. La sucesión de Fibonacci es estrictamente creciente para $n > 2$.

Por tanto podemos asumir que $2 < i < k < m$ y tendremos que $f_i < f_k < f_m$. Ésto implica que $f_k \leq f_{m-1}$ y $f_i \leq f_{m-2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} f_i^2 &= (f_m - f_k)(f_m + f_k) \geq (f_m - f_{m-1})(f_m + f_k) \\ &= f_{m-2}(f_m + f_k) \geq f_i(f_m + f_k) > f_i f_k > f_i^2, \end{aligned}$$

lo que es imposible. Por tanto, no pueden existir tales ternas pitagóricas.

Solución enviada por Charles R. Diminnie
Angelo State University
También resuelto por J. Mir Pieras (estudiante), M. Peña y J. Serra (estudiantes), J. Vinuesa y el proponente.
Se ha recibido una solución incompleta.

Problema 12

Dos jugadores lanzan una moneda n y $n+1$ veces respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos obtengan igual número de caras? ¿Y la de que el segundo obtenga más caras que el primero?

Propuesto por José Luis Díaz Barrero y Juan José Egozcue Rubí
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

SOLUCIÓN

Supongamos un caso más general que el del enunciado, en el que un jugador A efectúa L_A lanzamientos y un jugador B efectúa L_B lanzamientos. Denotaremos por C_A y C_B el número de caras obtenidas por A y B tras sus respectivos lanzamientos L_A y L_B y estudiaremos el comportamiento de $C_A - C_B$, supuesto que $C_A \geq C_B$.

El número de caras obtenidas en n lanzamientos sigue una distribución binomial $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$, así la probabilidad de que $C_A = i$ es $P(C_A = i) = \frac{1}{2^{L_A}}\binom{L_A}{i}$ y la de que $C_B = j$ es $P(C_B = j) = \frac{1}{2^{L_B}}\binom{L_B}{j}$. Por tanto

$$P(C_A - C_B = k) = \sum_j \frac{1}{2^{L_A}}\binom{L_A}{j+k}\frac{1}{2^{L_B}}\binom{L_B}{j} = \frac{1}{2^{L_A+L_B}}\sum_j \binom{L_A}{j+k}\binom{L_B}{j}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$ y la identidad de Vandermonde $\binom{a+b}{c} = \sum_j \binom{a}{j}\binom{b}{c-j}$, concluimos que

$$\begin{aligned} P(C_A - C_B = k) &= \frac{1}{2^{L_A+L_B}}\sum_j \binom{L_A}{L_A - j - k}\binom{L_B}{j} \\ &= \frac{1}{2^{L_A+L_B}}\binom{L_A+L_B}{L_A - k} = \frac{1}{2^{L_A+L_B}}\binom{L_A+L_B}{L_B + k}. \end{aligned}$$

Así, $C_A - C_B$ sigue la distribución binomial desplazada $B\left(L_A + L_B, \frac{1}{2}\right) - L_B$. Además, observando que

$$P(C_A = C_B) = \frac{1}{2^{L_A+L_B}}\binom{L_A+L_B}{L_B},$$

es fácil ver que es simétrica respecto de $k = (L_A - L_B)/2$.

Para el caso propuesto en el enunciado tomamos $L_A = n$ y $L_B = n+1$. De este modo para la primera pregunta se tiene que

$$P(C_A = C_B) = P(C_A - C_B = 0) = \frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n+1}{n+1}$$

y para la segunda, observando que en este caso la distribución es simétrica respecto a $1/2$,

$$P(C_A < C_B) = P(0 < C_B - C_A) = P\left(\frac{1}{2} < C_B - C_A\right) = \frac{1}{2}.$$

Nota. De la misma manera, habríamos podido determinar que

$$P(C_A + C_B = k) = \frac{1}{2^{L_A+L_B}} \binom{L_A + L_B}{k};$$

es decir que el suceso $C_A + C_B$ sigue una distribución $B\left(L_A + L_B, \frac{1}{2}\right)$. Este resultado es obvio, ya que es equivalente a que un único jugador efectúe todos los lanzamientos $(L_A + L_B)$ y se anote el total de las caras.

Solución enviada por J. Mir Pieras (estudiante).

También resuelto por A. López, J. A. Martínez, J. Mir (estudiante, otras dos soluciones distintas), M. Peña y J. Serra (estudiantes), J. Vinuesa y los proponentes.

Problema 13

Para cada número natural k fijo, determinad cuántas funciones $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tales que $f(f(n)) = n+k$ para todo número natural n, existen.

Propuesto por José Luis Ansorena Barasoain
Universidad de La Rioja, Logroño

Solución

Si k es impar no hay ninguna. Si k es par, el número es $\frac{k!}{(k/2)!}$:

Sea $I = \{1, 2, \ldots, k\}$. Supongamos que f cumple la condición del enunciado. La imagen de $f \circ f$ es $\mathbb{N} \setminus I$, y además $f \circ f$ es inyectiva. Deducimos que f es también inyectiva, y su imagen será $\mathbb{N} \setminus E$, con $E \subseteq I$.

Todo elemento de $I \setminus E$ es la imagen por f de otro, que es único por inyectividad y que necesariamente estará en E; por otro lado, la imagen de cualquier valor de E está en I pero no en E. Concluimos que la restricción de f a E es una biyección $E \to I \setminus E$ (véase la nota al final). Se sigue entonces que k es par, puesto que E es un subconjunto formado por la mitad de los elementos de I.

Recíprocamente, cualquier biyección $g\colon E \to I \setminus E$, donde E es un subconjunto de I de $k/2$ elementos, se extiende de forma única a una aplicación $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con la propiedad requerida: si $g(r) = s$ tendremos

$$f(r) = s,\ f(s) = r + k,\ f(r + k) = s + k,\ f(s + k) = r + 2k, \ldots$$

y en general

$$f(r + nk) = s + nk,\ \ f(s + nk) = r + (n + 1)k.$$

Es decir, f empareja las clases de congruencia módulo k y en cada pareja aplica ordenadamente los elementos de una clase sobre los de la otra,

comenzando en el menor número de una de las dos; la aplicación g (la restricción de f a E) dice cómo se emparejan las k clases entre sí, y establece el orden en cada pareja.

En definitiva hay tantas aplicaciones con la propiedad requerida como biyecciones $g\colon E \to I \setminus E$ donde $E \subseteq I$. Si k es impar no hay ninguna, y si k es par el número de aplicaciones es el producto de $\binom{k}{k/2}$ (las posibles elecciones de E) y $(k/2)!$ (hay una biyección, una vez fijado E, para cada permutación de los $k/2$ elementos de $I \setminus E$).

NOTA. Sea $f\colon X \to X$ una aplicación cualquiera, y sean $f^{\circ 2} = f \circ f$, $f^{\circ 3} = f \circ f \circ f$, y en general $f^{\circ m}$ su composición m veces consigo misma. La aplicación f es inyectiva si y sólo si lo es $f^{\circ m}$, independientemente del valor de m. Supongamos que así es, y que en cambio no es suprayectiva. Sea E_1 el conjunto de puntos que están fuera de la imagen de f; resulta entonces que f aplica E_1 biyectivamente sobre el conjunto E_2 de puntos que están en la imagen de f pero fuera de la imagen de $f^{\circ 2}$; análogamente f transforma E_2 en el conjunto de puntos $E_3 = f^{\circ 2}(X) \setminus f^{\circ 3}(X)$, y así sucesivamente. El complementario de $\cup_m E_m$ es el conjunto $\cap_m f^{\circ m}(X)$, y contendría entre otros a todos los posibles puntos fijos o cíclicos de f; la restricción de f a dicho complementario es una biyección sobre el mismo conjunto.

En la situación del problema tenemos $X = \mathbb{N}$, $E_1 = E$ y $E_1 \cup E_2 = I = \{1, 2, \ldots, k\}$, con $\cup_m E_m = \mathbb{N}$. La clave de la solución es que f está determinada por su restricción a E_1.

En vista de estas observaciones, el resultado puede generalizarse sin mucha dificultad como sigue: dados dos números naturales, m y k, la condición necesaria y suficiente para que existan aplicaciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $f^{\circ m}(n) = n + k$ $(n \in \mathbb{N})$ es que m sea un divisor de k, y en tal caso el número de ellas es $\frac{k!}{(k/m)!}$.

Solución enviada por José Luis Arregui
Universidad de Zaragoza, Zaragoza
También resuelto por J. Mir (estudiante), J. Vinuesa y el proponente.
Se ha recibido una solución incompleta.

PROBLEMA 14

Sea $\{b_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión definida por $b_0 = 1$ y $\frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_{n-1}} = -b_{n-1}$, para $n \geq 1$. Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Propuesto por Joaquín Gómez Rey
Universidad Carlos III, Madrid

Solución

Por inducción se prueba que $b_n = (-1)^n/a_n$, donde $\{a_n\}_{n\geq 0}$ está definida por $a_n = a_{n-1} + 1/a_{n-1}$, para $n \geq 1$, con $a_0 = 1$. Además, se puede ver sin dificultad que $\{a_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión positiva, estrictamente creciente y que no tiene cota superior (esto último se comprueba mediante un razonamiento de reducción al absurdo: supongamos que la sucesión es acotada superiormente, entonces será convergente con límite L, pero ese límite deberá verificar que $1/L = 0$, lo que es absurdo).

De las propiedades de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ se deduce que la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 0}$ es alternada, con valor absoluto estrictamente decreciente y con límite nulo. De estas propiedades, aplicando el criterio de Leibniz para series alternadas, deducimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.

Solución enviada por Juan Mir Pieras (estudiante).
También resuelto por Ch. R. Diminnie, A. López, J. Vinuesa y el proponente.
Se ha recibido una solución incompleta.

Nota. En su solución, Ch. R. Diminnie prueba que $|b_n| \geq \frac{1}{n}$, para $n \geq 3$. De donde se deduce que la serie no es $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutamente convergente.

Problema 15

Determinar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$x^2y^2 + 4(x^2 + y^2) + 4(x - y)(4 - xy) = 16xy.$$

Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero
Universidad de La Rioja, Logroño y Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

Solución

Factorizando se obtiene

$$\begin{aligned} x^2y^2 + 4(x^2 + y^2) + 4(x - y)(4 - xy) - 16xy &= \\ x^2y^2 + (4x^2 + 4y^2 - 8xy) - 4xy(x - y) + 16(x - y) - 8xy &= \\ \big[x^2y^2 + 4(x - y)^2 - 4xy(x - y)\big] + 16(x - y) - 8xy &= \\ \big[xy - 2(x - y)\big]^2 - 8\big[xy - 2(x - y)\big] &= \\ \big[xy - 2(x - y)\big]\big[xy - 2(x - y) - 8\big] &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto habrá que resolver las ecuaciones $xy - 2(x - y) = 0$ y $xy - 2(x - y) - 8 = 0$. De la primera, despejando y resulta $y = \frac{2x}{x+2} = 2 - \frac{4}{x+2}$.

Como $x+2$ ha de ser un divisor de 4, resulta $x+2=\pm 1, \pm 2, \pm 4$ y $x=-6,-4,-3,-1,0,2$. Sustituyendo, se obtienen las soluciones $(-6,3)$, $(-4,4)$, $(-3,6)$, $(-1,2)$, $(0,0)$ y $(2,1)$. Procediendo de modo análogo con la segunda ecuación tenemos $y=\frac{2(x+4)}{x+2}=2+\frac{4}{x+2}$. Por tanto, $x=-6,-4,-3,-1,0,2$. Finalmente, las otras seis soluciones son $(-6,1)$, $(-4,0)$, $(-3,-2)$, $(-1,6)$, $(0,4)$ y $(2,3)$ con lo hemos terminado.

Solución enviada por Cristóbal Sánchez Rubio,
I.E.S. Penyagolosa, Castellón

También resuelto por M. Amengual, Ch. R. Diminnie, J. A. Martínez, J. Mir (estudiante), M. Peña y J. Serra (estudiantes), J. Vinuesa y los proponentes.