

Mecánica Celeste y Sistemas Dinámicos

por

Ernesto A. Lacomba

1. INTRODUCCIÓN

Daremos aquí una descripción de los conceptos básicos de los sistemas dinámicos en general, para culminar en particular con los problemas específicos de la mecánica celeste, como una forma de regresar a los orígenes de aquéllos.

Es un hecho bien conocido que los problemas de la dinámica han fascinado a los científicos durante miles de años. Entre los más notables están los de la mecánica celeste, consistente en el estudio de movimientos de cuerpos dentro del sistema solar. Los intentos de Newton para comprender y modelar los movimientos observados de los planetas incorporaron las leyes de Kepler y dieron origen así a su desarrollo del Cálculo. De esta manera fue como surgió el planteamiento de modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias para describir problemas dinámicos.

Aunque las ecuaciones planteadas parecen muy elegantes y simples, la solución de problemas específicos resultó notablemente difícil y ocupó las mentes de muchos de los más grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX. Mientras que para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales fue desarrollada una teoría relativamente completa, los sistemas no lineales permanecieron esencialmente inaccesibles, excepto por las aplicaciones exitosas de los métodos de perturbaciones a problemas muy cercanos de sistemas lineales o de otros sistemas cuyas soluciones se conocen explícitamente. Las aplicaciones más famosas e impresionantes fueron de nuevo en la mecánica celeste, donde se pudo determinar con mucha precisión las órbitas de los planetas. Como un ejemplo, las irregularidades en el movimiento del planeta Urano a mediados del siglo XIX condujeron al descubrimiento del planeta Neptuno. Primero se tuvo certeza de su existencia en forma teórica, y más tarde fue descubierto físicamente en el espacio. Algo parecido ocurrió después con Plutón. En los métodos de perturbaciones uno toma una solución conocida a un problema más simple pero análogo y la modifica para conseguir una mejor aproximación a la solución verdadera, que no se puede calcular en forma exacta. Para aplicarlo hacemos una expansión en serie de potencias en términos de un parámetro pequeño.

La herramienta favorita para el estudio de problemas dinámicos fue el Análisis Matemático, hasta que el trabajo de Poincaré, a fines del siglo XIX, [7] mostró que los métodos de perturbaciones podrían no darnos resultados correctos en todos los casos, porque las series usadas en tales cálculos divergían. Entonces Poincaré fusionó el análisis con la geometría al desarrollar

un punto de vista cualitativo para el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Así surgió lo que actualmente se conoce como Sistemas Dinámicos. Otras ramas de las Matemáticas, como la Topología Algebraica y la Topología Diferencial surgieron incidentalmente de los trabajos de Poincaré.

Poincaré se caracteriza, entre otras cosas, por un maravilloso punto de vista geométrico global en los métodos que desarrolló. Visualizaba un sistema dinámico como un campo de vectores en el espacio fase, de modo que una solución es una curva suave tangente en cada uno de sus puntos al vector basado en dicho punto. Su preocupación fundamental era la descripción global de todas las soluciones (o “retrato fase”) y el efecto de pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales (estabilidad) en la dinámica original. En particular se interesaba mucho por la existencia de órbitas periódicas en el problema de tres cuerpos, así como de su estabilidad. El estudio de estabilidad de soluciones, o de un sistema, se remonta a cuestiones más generales de mecánica celeste como la estabilidad del sistema solar, estudiadas originalmente por Newton, Lagrange y Laplace. El punto de partida de la teoría moderna de estabilidad fue el estudio de Liapunov en su tesis doctoral [5] del problema general de la estabilidad, realizado simultáneamente en los trabajos de Poincaré.

Los sistemas dinámicos como métodos de análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales fueron desarrollados después por un sinnúmero de matemáticos que continuaron el trabajo de Poincaré. El primero de ellos fue Birkhoff [2], quien impulsó el trabajo iniciado por Poincaré al dar forma coherente a los sistemas dinámicos precisando las nociones básicas, a la vez que probó la existencia de una infinidad de soluciones periódicas en el problema de tres cuerpos. Después Andronov y Pontriagin [1] introdujeron el concepto de estabilidad estructural, donde uno se pregunta si pequeñas perturbaciones de un campo de vectores a otro ligeramente diferente nos dan un diagrama de fases de soluciones que cualitativamente esté cercano del correspondiente al campo vectorial original. Esto tiene gran importancia práctica porque los coeficientes de una ecuación diferencial se determinan experimentalmente y por lo tanto de manera aproximada. Finalmente, Kolmogorov, Arnold y Moser [6] probaron la estabilidad de ciertas soluciones periódicas en el problema de 3 cuerpos, exhibiendo una infinidad de soluciones periódicas y cuasi periódicas (superposición de soluciones periódicas de distintos periodos) vecinas. Así dieron origen a una teoría conocida con sus tres nombres y que podía pensarse como una solución parcial al problema de estabilidad del sistema solar. Realmente este último problema sólo pudo resolverse recientemente con ayuda de supercomputadoras, ver [4], [9] y [10].

En la década de los sesenta, Smale enriqueció substancialmente la teoría general al bosquejar el estudio sistemático de sistemas hiperbólicos [8]. Su idea básica era la búsqueda global de propiedades genéricas o estables. Propuso así cierto número de problemas muy relevantes, resolviendo algunos de ellos y estimulando mucho del trabajo posterior en el tema. Por un lado probó que la estabilidad estructural generalmente no es válida. Como otro ejemplo, al construir la famosa “herradura” que ahora lleva su nombre, dió lugar a la apli-

cación sistemática de la llamada “dinámica simbólica” en sistemas dinámicos para describir el comportamiento caótico a largo plazo de las soluciones. De esta forma resulta que el comportamiento de ciertas órbitas puede plasmarse en la complejidad ya conocida de un conjunto de Cantor. Esto confirma el hecho de que la aparición de caos es más bien una regla general para sistemas no lineales.

Ya en el trabajo de Poincaré cuando tomaba secciones transversales a ciertas soluciones (generalmente periódicas) de una ecuación diferencial ordinaria para entender el comportamiento de las órbitas vecinas, aparecía otro tipo de sistemas dinámicos llamados discretos, que consisten en el estudio cualitativo de las ecuaciones en diferencias o iteración de aplicaciones o mapeos. Estos tienen diversas aplicaciones en muchas áreas: Biología, Economía, Análisis Numérico, etc. En una ecuación en diferencias podemos pensar que el cambio ocurre en intervalos discretos de tiempo. Al discretizar una ecuación diferencial ordinaria para resolverla por métodos numéricos aparecen ecuaciones en diferencias que hay que resolver. Como ejemplo, al modelar poblaciones de animales que se reproducen en ciertas épocas del año, es preferible usar ecuaciones en diferencias en vez de ecuaciones diferenciales porque el tamaño de la siguiente generación está determinada en gran parte por el tamaño de la actual. Muchos de los conceptos y tipos de soluciones importantes para las ecuaciones en diferencias son el equivalente de los mencionados antes para las ecuaciones diferenciales.

En particular, para los problemas de n cuerpos de la mecánica celeste describiremos la forma especial Hamiltoniana de los campos vectoriales asociados a través de su energía total (o Hamiltoniano) como constante de movimiento del sistema, así como la existencia de órbitas de colisión o de escape, la existencia de órbitas periódicas y la aparición de caos en subsistemas concretos dentro del sistema solar.

2. SISTEMAS DINÁMICOS A TIEMPO CONTINUO

De acuerdo con la descripción de la sección anterior, podemos decir a *grosso* modo que para definir un sistema dinámico tenemos que partir de un campo vectorial en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, o bien de una función que va de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo. Aquí consideramos con detalle el primer caso, que llamaremos sistemas dinámicos a tiempo continuo o diferenciables, ver [3].

Consideremos un campo vectorial X definido en $\mathbb{R}^n$ o en un abierto de $\mathbb{R}^n$ suficientemente diferenciable, digamos C^∞ . A este campo vectorial $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le podemos asociar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que podemos escribir vectorialmente en la forma

$$\dot{x} = X(x), \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y el punto significa derivada con respecto al tiempo. En cualquier caso, al dominio de X se le conoce como su *espacio fase*. Recordemos que una

condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ determina una solución, o sea una curva diferenciable $x = \phi(t)$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $\phi(0) = x_0$ y su derivada satisface

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = X(\phi(t)).$$

Esta curva está definida en un intervalo maximal $I \subset \mathbb{R}$ que contiene al 0. Podemos decir que este campo vectorial define un sistema dinámico a tiempo continuo, cuando estamos interesados en el estudio global cualitativo de sus soluciones.

Las soluciones más simples son las de equilibrio $\phi(t) \equiv x_0$ constante, las cuales pueden encontrarse fácilmente mediante la condición de que el campo vectorial allí se anule, es decir $X(x_0) = 0$. Las siguientes en complejidad serían las soluciones periódicas, las cuales satisfacen para todo $t \in \mathbb{R}$ que $\phi(t + p) = \phi(t)$ para algún $p > 0$. El periodo se define como $\min\{p > 0 : \phi(t + p) = \phi(t) \text{ para todo } t\}$.

La imagen de estos dos tipos de soluciones son puntos o curvas cerradas, un caso particular de los llamados subconjuntos invariantes bajo el campo vectorial, por consistir de soluciones completas.

EJEMPLO 1. La ecuación diferencial escalar $\dot{x} = ax$ con $x \in \mathbb{R}$ y donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro, es la más simple posible. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $\phi(t) = e^{at}x_0$ es la solución que satisface $\phi(0) = x_0$.

EJEMPLO 2. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= -y,\end{aligned}\tag{2}$$

donde el origen es un punto de equilibrio, un punto silla. Aquí la función xy es constante a lo largo de las soluciones, así que sus curvas de nivel son las soluciones pero sin parametrización de tiempo.

EJEMPLO 3. Consideremos ahora el sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= y,\end{aligned}\tag{3}$$

donde el origen como punto de equilibrio es una fuente (repulsor). Todas las otras soluciones describen semi-rectas que salen del origen.

EJEMPLO 4. Consideremos ahora el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin x.\end{aligned}\tag{4}$$

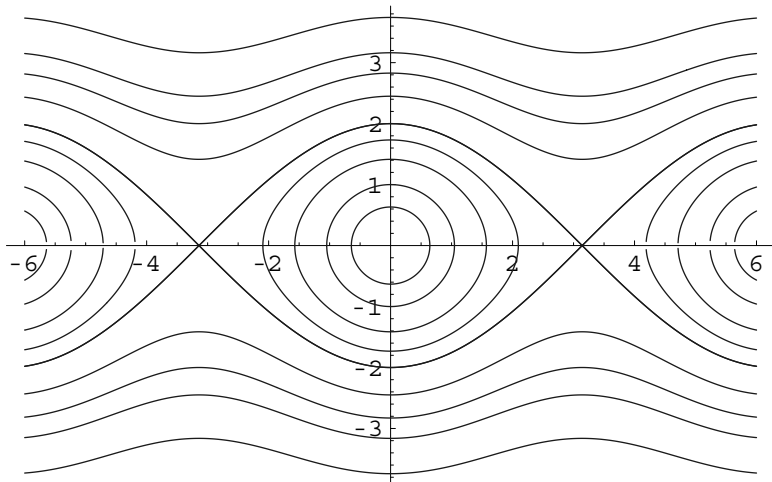


Figura 1: Diagrama de fases del péndulo

Estas ecuaciones son un modelo para un péndulo simple. Tiene un conjunto numerable de puntos de equilibrio sobre el eje x . Aquí la función $\frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x)$ es constante. Dibujando sus curvas de nivel que describen las soluciones, vemos que los puntos de equilibrio son alternadamente sillas y centros. Estos últimos se llaman así por estar rodeados de una región abierta que contiene sólo órbitas periódicas. Ver la Figura 1.

EJEMPLO 5. Ahora consideremos la ecuación $\dot{x} = x^2$, donde el origen es punto de equilibrio y por lo tanto la solución $\phi(t) = 0$ está definida para todo tiempo real. Cualquier otra solución es de la forma $\phi(t) = x_0/(1 - x_0 t)$ y por lo tanto no está definida para todo t real.

EJEMPLO 6. Generalizando los ejemplos 1, 2 y 3, así como la solución general del ejemplo 1, si $x \in \mathbb{R}^n$ y A es una matriz real $n \times n$, la ecuación

$$\dot{x} = Ax \quad (5)$$

representa un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. La solución general puede representarse por medio de la exponencial de matrices como

$$\phi(t) = e^{At}x_0,$$

donde e^{At} es una matriz no singular $n \times n$ y $\phi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ es la condición inicial.

Si definimos $\Phi_t(x) = e^{At}x$, la aplicación lineal

$$\Phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo, puede pensarse como un operador que para cada t aplica la matriz e^{At} a los vectores de $\mathbb{R}^n$. Las Φ_t tienen las siguientes propiedades importantes.

- i) $\Phi_0(x) = x$, pues e^0 es la matriz identidad.
- ii) $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_t \circ \Phi_s(x)$, pues $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.

Decimos que $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es un grupo uniparamétrico de transformaciones lineales no singulares. Su importancia radica en que contienen simultáneamente la información global de todas las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales.

En el caso general no lineal, las Φ_t son siempre difeomorfismos, pero sus dominios pueden ser diferentes para cada t y pueden ni siquiera estar definidos para todo $t \in \mathbb{R}$. De la fórmula para las soluciones en el Ejemplo 5, vemos que en este caso el dominio tiene que describirse mediante tres fórmulas distintas como sigue

$$\text{dom}\Phi_t = \{x \in \mathbb{R} : x < 1/t\}, (t > 0),$$

$$\text{dom}\Phi_0 = \mathbb{R},$$

$$\text{dom}\Phi_t = \{x \in \mathbb{R} : x < 1/t\}, (t < 0),$$

El siguiente concepto importante es el de estabilidad de una solución $x = \phi(t)$ de equilibrio o periódica. Intuitivamente podemos decir que $x = \phi(t)$ es estable cuando toda solución con valores iniciales próximos a los de $x = \phi(t)$ está definida para todo $t > 0$ y permanece próxima a $x = \phi(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Si el sistema de ecuaciones describe la evolución de un proceso natural o un mecanismo, las soluciones estables tienen una importancia especial para el estudio del mismo. La solución $x = \phi(t)$ es asintóticamente estable si es estable y además toda solución con valores iniciales suficientemente próximos tiende a ella cuando $t \rightarrow \infty$. En el último caso la solución es un atractor (o un repulsor si este comportamiento ocurre cuando $t \rightarrow -\infty$).

En realidad, lo más común es una situación intermedia. En el Ejemplo 6 si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real no nula, entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es un atractor si todas las partes reales son negativas, es un repulsor si son positivas, o bien se generaliza el comportamiento del punto silla en el ejemplo 1. Existen dos subespacios vectoriales invariantes bajo el campo vectorial que se intersectan transversalmente en el origen. En el caso general de (1), un teorema debido a Hartman y a Grobman nos asegura que si x_0 es un punto de equilibrio del campo vectorial X y los valores propios de la matriz $DX(x_0)$ tienen parte real no nula, entonces x_0 es un atractor si todas las partes reales son negativas, es un repulsor si son positivas, o bien se generaliza el comportamiento del punto silla en el ejemplo 1. Existen dos variedades invariantes bajo el campo vectorial cuya intersección transversal es el punto de equilibrio. En una de ellas las soluciones tienden asintóticamente al punto de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$ y en la otra ocurre lo mismo cuando $t \rightarrow -\infty$. Fuera de ellas localmente se tiene un comportamiento combinado como en el caso de la silla. Dichos puntos de equilibrio son llamados *hiperbólicos*. En el caso

de órbitas periódicas se puede definir hiperbolicidad en términos de puntos fijos de la aplicación de Poincaré (ver el final de la Sección 3) y se tiene un resultado análogo de Hartman–Grobman que permite construir subvariedades invariantes que se intersectan en la órbita periódica.

3. SISTEMAS DINÁMICOS A TIEMPO DISCRETO

Comencemos motivando con ejemplos simples de iteración de funciones. Si f es una función real de una variable real, la correspondiente ecuación en diferencias o sistema dinámico a tiempo discreto es

$$x_{k+1} = f(x_k), \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Dada una condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, una solución consistirá generalmente de una sucesión de puntos $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ que puede construirse iterando a partir de la ecuación (6). A esta sucesión se le llama comúnmente la órbita que se inicia en x_0 .

EJEMPLO 7. Si $f(x) = 0.5x$ y $x_0 = 2$ obtenemos la sucesión de números

$$1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, \dots$$

Así que a diferencia de los sistemas dinámicos a tiempo continuo tenemos en vez de curva un conjunto discreto de puntos que puede ser finito. El caso finito es equivalente al hecho de que en general las soluciones de una ecuación diferencial dada no tienen por qué estar definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

EJEMPLO 8. Un caso extremo de esta situación es por ejemplo la función $g(x) = -\sqrt{x}$, que está definida sólo para $x \geq 0$ y toma valores no positivos. Si partimos de un $x_0 > 0$ entonces $x_1 = -\sqrt{x_0} < 0$ y ya no podemos calcular el segundo iterado x_2 . Si tomamos la condición inicial $x_0 = 0$, todos los iterados existen y son nulos.

Pero si la función por iterar tiene como dominio a todo $\mathbb{R}$, o si su dominio contiene a su imagen, entonces las órbitas serán sucesiones para cualquier condición inicial. La propiedad equivalente de que todas las soluciones estén definidas en todos los reales no es válida para ecuaciones diferenciales sin imponer condiciones extras sobre la función. De hecho, aquí ni siquiera es necesario que la función f sea continua para que estén definidos sus iterados. Sin embargo, generalmente se supone que f es por lo menos continua para poder hablar de estabilidad de soluciones bajo pequeños cambios en la condición inicial. Si queremos hablar de hiperbolicidad, también requerimos diferenciabilidad por lo menos de clase C^1 .

EJEMPLO 9. Para modelar el crecimiento de las poblaciones se acostumbra usar la llamada ecuación logística

$$x_{k+1} = ax_k(1 - x_k),$$

generada por la función $f(x) = ax(1-x)$, definida sólo en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ para que tome siempre valores positivos. En este caso, la condición para que la órbita de cualquier punto sea siempre una sucesión, es que el parámetro a satisfaga $0 \leq a \leq 4$.

En general, si F es una función continua de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo, o con dominio un abierto de $\mathbb{R}^n$, podemos definir el sistema dinámico a tiempo discreto

$$x_{k+1} = F(x_k), k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Una solución de este sistema queda determinada al fijar una condición inicial x_0 en el dominio de F . Como vimos para funciones de una variable, la función será siempre una sucesión de puntos si el dominio de F es todo $\mathbb{R}^n$. Si denotamos por $F^{(k)}$ a la composición de F consigo mismo k veces, podemos escribir explícitamente cualquier elemento de la órbita en términos de x_0 como sigue.

$$x_k = F^{(k)}(x_0), k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

El equivalente de puntos de equilibrio para los sistemas a tiempo discreto son los puntos fijos x_* , definidos mediante la ecuación

$$x_* = F(x_*),$$

o sea los puntos del dominio que bajo iteraciones generan una sucesión constante.

Un ciclo de p puntos distintos

$$x_k = F^{(k)}(x_0), k = 0, 1, \dots, p-1 \text{ con } F^{(p)}(x_0) = x_0$$

se llama una órbita periódica de periodo p . El periodo aquí se define como $\min\{p \text{ natural} : F^{(p)}(x_0) = x_0\}$.

Se puede definir cuándo un punto fijo o una órbita periódica es estable o asintóticamente estable en forma análoga al caso de sistemas dinámicos a tiempo continuo.

Si la función F es diferenciable, digamos C^∞ , tenemos un sistema dinámico diferenciable a tiempo discreto. Si además F es un difeomorfismo, es decir es invertible y su inversa también es diferenciable, podemos definir puntos fijos hiperbólicos y órbitas periódicas hiperbólicas con sus correspondientes subvariedades invariantes. De hecho, las aplicaciones de Poincaré que se obtienen tomando una sección transversal a una órbita periódica de un sistema dinámico a tiempo continuo tienen la propiedad de ser difeomorfismos.

EJEMPLO 10. En el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales (5) si fijamos el tiempo, digamos $t = 1$, entonces el valor de una solución al tiempo 1 se escribe como

$$\Phi_1(x) = e^A x,$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la condición inicial en $t = 0$. Entonces Φ_1 define un sistema dinámico lineal discreto, por ser una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ con matriz e^A .

Si el origen como punto de equilibrio de (5) es hiperbólico, esto significa que los valores propios de A tienen parte real no nula. Los valores propios de e^A son simplemente las exponenciales de los valores propios de A , por lo que no pueden tener módulo igual a 1. Esta consideración motiva la siguiente definición.

En general, una aplicación lineal no singular $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama *hiperbólica* si ninguno de sus valores propios se encuentra en la circunferencia unitaria. De acuerdo con esta definición, si partimos de un campo vectorial lineal (5) donde el origen es un punto de equilibrio hiperbólico, entonces la transformación lineal $\Phi_1 = e^A$ es hiperbólica. Una aplicación F no lineal se dice que tiene un punto fijo *hiperbólico* x_* si $DF(x_*)$ es una aplicación lineal no singular e hiperbólica. Los puntos fijos hiperbólicos son por lo tanto ya sea atractores (correspondiendo a que todos los valores propios se encuentren en el interior de la circunferencia unitaria), repulsores (correspondiendo a que todos los valores propios se encuentren en el exterior de la circunferencia unitaria), o de tipo silla (cuando algunos están en el interior y otros en el exterior). Esto es una consecuencia del teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos hiperbólicos, que asegura la existencia de subvariedades invariantes. Si una aplicación de Poincaré de una órbita periódica de un campo vectorial es hiperbólica, todos los mapeos de Poincaré de la órbita son difeomorfos y como consecuencia obtenemos subvariedades invariantes para la órbita periódica completa como mencionamos en la sección anterior.

4. MECÁNICA CELESTE

Vimos en la introducción que los problemas de mecánica celeste llevaron a Poincaré a iniciar la teoría de sistemas dinámicos. Sin embargo, los problemas de mecánica celeste y en general los de mecánica clásica tienen ciertas características peculiares que queremos describir ahora.

En primer lugar son sistemas Hamiltonianos, es decir, sistemas dinámicos a tiempo continuo donde el campo vectorial se define en un espacio de dimensión par a través de una función Hamiltoniana H que representa la energía total del sistema.

El problema de n cuerpos en $\mathbb{R}^k$ ($k = 1, 2$ o 3) consiste de un sistema de n partículas que se mueven bajo sus interacciones gravitacionales mutuas.

La partícula de masa m_i está situada en el punto $x_i \in \mathbb{R}^k$, para cualquier $i = 1, \dots, n$. Las ecuaciones de movimiento son

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|x_i - x_j|^3} (x_j - x_i) \quad j = 1, \dots, n,$$

donde G es la constante de gravitación universal que supondremos que vale uno de ahora en adelante, mediante una elección apropiada de unidades. Es importante observar que la aceleración producida sobre un cuerpo dado depende solamente de las masas de los otros:

$$\ddot{x}_i = \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3} \quad j = 1, \dots, n,$$

donde escribimos $r_{ij} = |x_i - x_j|$ para las distancias mutuas entre partículas. Esto nos permite estudiar problemas restringidos, donde una o más de las masas se suponen nulas.

Si definimos la función potencial como

$$U = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3},$$

podemos reescribir el sistema como

$$m_i \ddot{x}_i = \nabla U(x_1, \dots, x_n)$$

Para ver que se puede escribir como un sistema Hamiltoniano, escribimos $q_i = x_i$, $p_i = m_i \dot{x}_i$ y definimos los vectores $q = (q_1, \dots, q_n)$ and $p = (p_1, \dots, p_n)$ de $(\mathbb{R}^k)^n$ obteniendo la ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p). \end{aligned} \tag{7}$$

donde $H = K(p) - U(q)$ y $K(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (1/m_i) |p_i|^2$.

Un teorema debido a Liouville nos dice que las aplicaciones correspondientes Φ_t (introducidas en la Sección 2) para un sistema Hamiltoniano como (7) preservan el volumen en el espacio fase $\mathbb{R}^{2kn}$, como si se tratara de un fluido incompresible que se mueve al transcurrir el tiempo. Los ejemplos 3 y 4 que vimos antes son casos particulares de sistemas Hamiltonianos, donde definimos $H(x, y)$ como $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$ y $\frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x)$, respectivamente. Un rectángulo pequeño sería trasladado por $\Phi(t)$ en otra figura plana deformada pero de la misma área para todo t .

En el caso de problemas de n -cuerpos de mecánica celeste con las coordenadas inerciales de posiciones y momentos lineales que se utilizan normalmente, no existen puntos de equilibrio. Esto se debe a que si colocamos cierto número de partículas inicialmente en reposo en puntos fijos del espacio, deberán moverse debido a las fuerzas de atracción sin permanecer más en reposo. De aquí surge inmediatamente la pregunta de que si al pensarlo como fluido incompresible el flujo del campo vectorial podrá tener fuentes o sumideros. Del razonamiento de arriba, vemos que la respuesta es que el único lugar donde pueden estar situados éstos es al “infinito” de $\mathbb{R}^{2kn}$. Este escape a infinito se puede lograr si las partículas escapan en el espacio de posiciones o si la velocidad se va a infinito, como ocurre por ejemplo en una colisión de dos o más partículas. Por ejemplo, en el caso del problema de Kepler en una dimensión tenemos solamente una posición x y una velocidad y con ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x^{-2}$; el espacio fase es el semiplano $x > 0$ en $\mathbb{R}^2$ y las correspondientes fuentes o sumideros se localizan en los extremos $\pm\infty$ del eje y (colisiones) y el extremo $+\infty$ del eje x (escapes).

Por otro lado, el campo vectorial no es completo, porque al ocurrir colisiones de partículas las velocidades se van a infinito en tiempo finito. Para $n \geq 5$ cuerpos pueden existir movimientos en que tanto las posiciones como las velocidades dejen de estar acotadas en tiempo finito. En cualquiera de estos casos las soluciones se escapan al infinito de $\mathbb{R}^{2kn}$ en tiempo finito.

Entonces la idea es que el escape de partículas o la aparición de singularidades (colisiones o singularidades complicadas sin haber colisión) están relacionadas con atractores o repulsores, pero sólo las singularidades se relacionan con la incompletitud del campo vectorial. La razón para tener tal incompletitud del flujo es el hecho de que el espacio fase no es compacto, pero ciertas transformaciones de coordenadas permiten compactificar algunas partes del espacio fase $\mathbb{R}^{2kn}$, al infinito, agregando puntos de equilibrio u órbitas periódicas (ficticias). Estos generalmente son atractores, repulsores o elementos hiperbólicos, así que permiten describir nuevas características del flujo.

Una consecuencia de la forma de las ecuaciones (7) es que H se mantiene constante a lo largo de las soluciones del sistema, así que los conjuntos no vacíos $\{H = h\}$ donde $h \in R$, son subvariedades invariantes de dimensión $2n - 1$ en donde hay que estudiar cualitativamente el campo vectorial.

Otros problemas importantes estudiados en mecánica celeste además de las singularidades o escapes de partículas es la existencia de órbitas periódicas y la aparición de movimientos caóticos.

Las órbitas periódicas pueden existir solamente si la energía es negativa, de manera que la energía potencial o gravitacional predomina sobre la energía cinética o debida al movimiento. Hay muchas técnicas que se usan aquí, como el método de continuación analítica de Poincaré (una aplicación del teorema de la función implícita), muchas veces combinado con posibles simetrías del problema, el uso de principios variacionales, etc.

En cuanto a movimientos caóticos, éstos pueden aparecer en el sistema solar de dos maneras diferentes. Un caos rápido como en el satélite Hipérion

de Saturno (de forma irregular), que se manifiesta como una imprecisión en la orientación del satélite como cuerpo rígido en un intervalo de 6 horas. Un caos lento aparece como una imprecisión en la posición de los planetas gigantes en un lapso de tiempo de 200 millones de años [9], así como una imprecisión en la posición de los planetas pequeños en un lapso de tiempo de 40 millones de años [4]. Ver [10] para una descripción más reciente. Las simulaciones con supercomputadoras permiten predecir que los planetas seguirán describiendo aproximadamente las mismas órbitas, así que el caos consiste en una imprecisión en la localización del planeta en cuestión a lo largo de su órbita.

REFERENCIAS

- [1] A.A. ANDRONOV, L. PONTRIAGIN, Systèmes grossiers, *Dokl. Akad. Nauk USSR Math.*, **14**, 247–251.
- [2] G.D. BIRKHOFF, *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 1927.
- [3] M. HIRSCH, S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [4] J. LASKAR, A numerical experiment on the chaotic behavior of the solar system, *Nature*, **338** (1989), 237–238.
- [5] A. LIAPUNOV, *Problème Général de la stabilité du mouvement*, vol. 9 Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 1907.
- [6] J. MOSER, *Stable and Random Dynamical Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1973.
- [7] H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier–Villars, Paris, 1892.
- [8] S. SMALE, Differentiable Dynamical Systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747–817.
- [9] G. SUSSMAN, J. WISDOM, Numerical evidence that the motion of Pluto is chaotic, *Science* **241** (1988), 433–437.
- [10] S. TREMAINE, Is the solar system stable?, in P.B. LILJE, P. MALTBY, EDS., *Frontiers of Astrophysics, Proceedings of the Rosseland Centenary Symposium*, Institute of Theoretical Astrophysics, University of Oslo, (1994), 85–95.

Ernesto A. Lacomba
 Departamento de Matemáticas
 Universidad Autónoma Metropolitana–Iztapalapa
 Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
 Apdo. 55534, C.P. 09340, México, D.F., México
 Correo-electrónico: lace@xanum.uam.mx