Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Oscar Ciaurri y José Luis Díaz-Barrero[1]

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos en formato* TEX*. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta soluciones recibidas hasta el 30 de octubre de 2005.*

Solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas enviados a esta sección sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) *junto al enunciado de un problema indica que una solución al problema no está disponible en estos momentos.*

Problemas

Problema 25

a) Probar que $\underbrace{22\ldots23}_{\text{1987 cifras}}$ es compuesto.

b) Probar que $\underbrace{22\ldots23}_{\text{1986 cifras}}$ es compuesto.

Nota. El enunciado del apartado b) aparece propuesto como ejercicio 6.1 en la edición española de “Problemas de Matemáticas. Álgebra”, de V. V. Vavilov, I. I. Mélnikov, S. N. Oléjnik y P. I. Pasichenko, Ed. MIR, (1993). Por el contexto parece que se trata de una errata, siendo el apartado a) el que se pretendía proponer. Un difícil reto computacional es descomponer el número del apartado b) en factores primos. El autor de la propuesta no ha sido capaz de obtener tal factorización.

Propuesto por Manuel Benito Muñoz
I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño

[1] En la elaboración de este número han colaborado M. Benito Muñoz, P. Benito Clavijo, J. J. Egozcue Rubí, E. Fernández Moral y J. L. Varona Malumbres.

PROBLEMA 26

Se consideran los polígonos convexos de n lados construidos con n segmentos no nulos de longitudes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que cada una de ellas es menor que la suma de las $(n-1)$ restantes. Se pide:

a) Probar que, si $n = 4$, existe un polígono de área máxima. Comprobar que está inscrito en una circunferencia.

b) $\star$ Para todo $n > 4$, ¿existe siempre uno de área máxima?

c) Probar que, si tal polígono de área máxima existe, está inscrito en una circunferencia.

Propuesto por María Jesús Villar Rubio
I. E. S. L. Torres Quevedo, Santander

PROBLEMA 27

Disponemos de una red de n ordenadores libre de triángulos y cuadrados con el mayor número posible de aristas. Probar que si un ordenador está unido a otros cuatro, entonces la red contiene pentágonos.

Propuesto por C. Balbuena, M. Cera, A. Dianez y P. García Vázquez
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, y Universidad de Sevilla, Sevilla

PROBLEMA 28

Caracterizar los $r \in \mathbb{Q}$, con $0 < r \leq 1$, que pueden escribirse como

$$r = \frac{m^2}{4nM}$$

para ciertos $n, m, M \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y $\mathrm{mcd}(n, m) = 1$.

Propuesto por Juan Luis Varona Malumbres
Universidad de La Rioja, Logroño

Problema 29

Sean $a, b, c, d, e, f, m \in (0, +\infty)$. Probar que

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{(mb+c)(mc+b)} &+ \frac{b^2}{(mc+d)(md+c)} \\ &+ \frac{c^2}{(md+e)(me+d)} + \frac{d^2}{(me+f)(mf+e)} \\ &+ \frac{e^2}{(mf+a)(ma+f)} + \frac{f^2}{(ma+b)(mb+a)} \geq \frac{6}{(m+1)^2}.\end{aligned}$$

Propuesto por Marius Olteanu
Rumanía

Problema 30

Sea $\gamma \in \mathbb{R}$. Dados a y b reales positivos, definimos las medias de orden γ de a y b mediante $M_\gamma(a,b) = \left(\frac{a^\gamma + b^\gamma}{2}\right)^{1/\gamma}$, si $\gamma \neq 0$, y $M_0(a,b) = \sqrt{ab}$. Dada una función $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ y un $x \in (0, +\infty)$ diremos que f es derivable en x por sus medias de orden γ si existe

$$f_\gamma(x) := \lim_{t \to x} \frac{M_\gamma(f(t), f(x)) - f(x)}{M_\gamma(t, x) - x}.$$

a) Probar que si f es derivable en x en el sentido habitual, entonces f es derivable en x por sus medias de orden γ, para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

b) $\star$ Si para algún $\gamma \neq 1$, la función f es derivable en x por sus medias de orden γ, ¿es f derivable en x en el sentido habitual?

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad de Valladolid, Valladolid

Problema 31

Sea G un grupo y $H_1,\ H_2$ dos de sus subgrupos propios. Probar que $G \setminus (H_1 \cap H_2)$ y $G \setminus (H_1 \cup H_2)$ no son cerrados respecto a la operación del grupo G.

Propuesto por Pantelimon George Popescu (estudiante)
Universidad Politécnica de Bucarest, Rumanía

PROBLEMA 32

Los puntos raíces de la ecuación de coeficientes enteros

$$243z^4 - 810z^3 + 1080z^2 - 1\ldots z + \ldots 5 = 0$$

son cuatro vértices de un pentágono regular. Calcular las coordenadas del quinto vértice.

NOTA. Aunque cayeron unas manchas de tinta, el problema puede resolverse sin necesidad de recuperar los coeficientes ocultos.

Propuesto por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander

Soluciones

Problema 1

Colocamos los enteros positivos como se muestra a continuación:

17	16	15	14	13
$\downarrow$	5	4	3	12
	6	1	2	11
	7	8	9	10

Describir la figura que se obtiene al pintar en negro aquellas casillas que contienen un número con una cantidad impar de divisores. Justificar la respuesta.

Propuesto por Manuel Benito Muñoz
I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño.

Solución

Para responder a la pregunta, utilizaremos el siguiente

Lema. *Un entero positivo n tiene un número impar de divisores si y sólo si es un cuadrado perfecto.*

Demostración. Llamemos r a la raíz cuadrada de n. Hay tantos divisores de n menores que r como divisores de n mayores que r (para cada divisor $d < r$, $\frac{n}{d} > r$ también es divisor y, de manera inversa, para cada divisor $d > r$, $\frac{n}{d} < r$ también es divisor).

Como consecuencia, el número de divisores es impar si y sólo si r es un divisor entero de n, es decir, si n es un cuadrado perfecto.

Las casillas que pintamos de negro según el enunciado del problema (los cuadrados perfectos) están en las posiciones $(a, -a)$ y $(-a, a+1)$, para todo entero $a \geq 0$, formando dos semidiagonales (donde consideramos un sistema de referencia rectangular con el origen en la casilla ocupada por el 1 y con la orientación habitual).

En efecto, se demuestra inductivamente que, por construcción:

a) Los números del 1 hasta el $(2a+1)^2$ están en el cuadrado de $2a+1$ casillas de lado y cuya casilla central es la $(0,0)$. El último número, el $(2a+1)^2$, está en la casilla de la esquina inferior derecha del cuadrado, es decir en la casilla $(a,-a)$.

b) Los números del 1 hasta el $(2a+2)^2$ están en el cuadrado de $2a+2$ casillas de lado y cuyas cuatro casillas centrales son la $(0,0)$, la $(1,0)$, la $(1,1)$ y la $(0,1)$. El último número, el $(2a+2)^2$, está en la casilla de la esquina superior izquierda del cuadrado, es decir, en la casilla $(-a,a+1)$.

Solución enviada por Juan Mir Pieras (estudiante)
También resuelto por A. López López y el proponente

PROBLEMA 2

Sea $\triangle ABC$ un triángulo escaleno cuyos lados a, b y c verifican la relación $27b^3 = a^3 + c^3 + 9abc$. Probar que $r < \frac{2}{9}\, b\sqrt{3}$, donde r denota el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$.

Propuesto por José Luis Díaz-Barrero
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

SOLUCIÓN

Haciendo $x = a$, $y = -3b$ y $z = c$ en la identidad

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = x^3+y^3+z^3-3xyz$$

se obtiene

$$(a-3b+c)(a^2+9b^2+c^2+3ab+3bc-ca) = a^3-27b^3+c^3+9abc = 0.$$

Dado que

$$a^2+9b^2+c^2+3ab+3bc-ca = \frac{1}{2}\left[a^2+c^2+(a-c)^2\right] + 3b(a+3b+c) > 0,$$

entonces

$$a-3b+c = 0. \tag{1}$$

Si s es el semiperímetro de $\triangle ABC$, entonces su área puede escribirse como rs y también $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (fórmula de Herón). Se sigue que

$$\begin{aligned} rs &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ r^2 s &= (s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

y, por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, resulta

$$s = (s-a) + (s-b) + (s-c) \geq 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} = 3\sqrt[3]{r^2 s},$$

lo que equivale a

$$r^2 \leq \frac{s^2}{27}, \tag{2}$$

verificándose la igualdad sólo si $a = b = c$. Es decir, si el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero.

Como $\triangle ABC$ es escaleno, se verifica en (2) la desiguldad estricta $r^2 < \frac{s^2}{27}$. Teniendo en cuenta (1) la desigualdad anterior toma la forma

$$r^2 < \frac{4b^2}{27},$$

que es equivalente a la desigualdad propuesta y hemos terminado.

Solución enviada por Miguel Amengual Covas
Cala Figuera, Mallorca

También resuelto por J. Mir Pieras (estudiante, 2 soluciones), J. Vinuesa Tejedor y el proponente

Problema 3

Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos homotéticos (A' homólogo de A, etc.). Definimos $A'' = (BC') \cap (B'C)$, $B'' = (AC') \cap (A'C)$ y $C'' = (AB') \cap (A'B)$. Consideramos el triángulo $\triangle A'''B'''C'''$ cuyos vértices A''', B''' y C''' son, respectivamente, los baricentros de los triángulos $\triangle BB'B''$, $\triangle CC'C''$ y $\triangle AA'A''$.

(a) Probar que el triángulo $\triangle A'''B'''C'''$ es homotético con los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$.

(b) Probar que los baricentros de los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$ y $\triangle A'''B'''C'''$ están alineados.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad de Valladolid, Valladolid

Solución

Denotaremos por O el centro de la homotecia que conecta $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$. Usaremos, para abreviar, a para denotar el vector OA, b para el vector OB y así sucesivamente. Con esto, es claro que, $a' = ka$, $b' = kb$ y $c' = kc$ con $k \in \mathbb{R}$ $(k \neq 0, 1, -1)$.

Como $C'' = AB' \cap A'B$, se tendrá que $c'' = a + \lambda(b' - a) = b + \mu(a' - b)$, de donde concluimos que $a(1 - \lambda - \mu k) + b(\lambda k - 1 + \mu) = 0$ y

$$\begin{cases} \lambda + \mu k = 1 \\ \lambda k + \mu = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = \frac{1}{1+k}.$$

Por tanto, procediendo de modo análogo con A'' y B'',

$$a'' = \frac{k}{1+k}(b+c), \quad b'' = \frac{k}{1+k}(c+a), \quad c'' = \frac{k}{1+k}(a+b).$$

Con esto,

$$a''' = \frac{b + b' + b''}{3} = \frac{1}{3}(b + kb + \frac{k}{1+k}(c+a)) = \frac{1}{3(1+k)}(b(1+k)^2 + k(c+a)),$$

y, de modo similar,

$$b''' = \frac{1}{3(1+k)}(c(1+k)^2 + k(a+b)), \quad c''' = \frac{1}{3(1+k)}(a(1+k)^2 + k(b+c)).$$

Veamos ahora que $A'''B''' \parallel BC$, $B'''C''' \parallel CA$ y $A'''C''' \parallel AB$ y habremos concluido el apartado (a). Teniendo en cuenta las expresiones para b''' y a''' tenemos que

$$b''' - a''' = \frac{1}{3(1+k)}(c(1+k)^2 + k(a+b) - b(1+k)^2 - k(c+a)) =$$

$$= \frac{k^2+k+1}{3(1+k)}(b-c),$$

de donde deducimos que $A'''B''' \parallel BC$; en los otros casos procederemos de modo similar.

Para el apartado (b), denotamos por G, G', G'' y G''' los baricentros de los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$ y $\triangle A'''B'''C'''$. Los puntos G, G' y G'' puede probarse que están alineados como se hizo en la solución al Problema **1480** de la revista *Crux Mathematicorum*, vol. 16

(1990), pág. 316. Veamos que G y G''' están alineados. Esto es claro, ya que

$$g''' = \frac{a''' + b''' + c'''}{3} =$$

$$= \frac{1}{9(1+k)}((1+k)^2(a+b+c) + 2k(a+b+c)) = \frac{k^2+3k+1}{1+k}g.$$

Solución enviada por el proponente

Problema 4 $\star$

Sea $a \geq 2$ un número natural; ¿a partir de qué valor de n se verifica que $a^n < n!$? En las tablas siguientes se muestran los valores de n obtenidos para $a \leq 21$.

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	4	7	9	12	14	17	20	22	25	28

a	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
n	30	33	36	38	41	44	47	49	52	55

Propuesto por Sergio Falcón Santana
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas

Solución parcial

Podemos suponer $a > 15$, para los valores anteriores de a los n correspondientes pueden comprobarse en la tabla del enunciado.

Se tiene que si $N-1 < e(a-1) < N$ (es decir, $N = [e(a-1)]+1$) entonces $N! > a^N$, y por tanto $n! > a^n$ para todo $n \geq N$.

Para probar esta afirmación tendremos en cuenta las siguientes observaciones previas:

a) la sucesión $\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}}$ decrece hacia 1,

b) la sucesión $\left(1+\frac{e}{n}\right)^{n+1}$ crece hacia e^e,

c) $15 < e^e < 16$,

d) si $a > 15$, entonces $N > 40$ y $\sqrt{2\pi N} > e^e$.

En virtud de lo anterior

$$N! > \frac{N^N}{e^N}\sqrt{2\pi N} > (a-1)^N\sqrt{2\pi N} = \frac{a^N}{\left(1+\frac{1}{a-1}\right)^N}\sqrt{2\pi N}$$

$$> \frac{a^N}{\left(1+\frac{e}{N-1}\right)^N}\sqrt{2\pi N} > \frac{a^N}{e^e}\sqrt{2\pi N} > a^N.$$

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria
También resuelto por J. Mir Pieras (estudiante)
Se ha recibido una solución incorrecta

NOTA. Al poco tiempo de que este problema apareciera propuesto, los profesores F. Ruiz Blasco y M. Pérez Riera, de la Universidad de Zaragoza, nos comunicaron que la sucesión $4, 7, 9, 12, 14, 17, 20, 22, 25, 28, \ldots$ podía encontrarse, con la referencia A065027, en *The On-Line Encyclopedia of Integers Sequences* (véase la dirección `http://www.research.att.com/~njas/sequences`). Además, allí se menciona que si $f(a) = \min\{n : a^n < n!\}$, entonces $\lim_{a\to\infty} \frac{f(a)}{a} = e$.

La solución que se ha seleccionado resuelve parcialmente el problema ya que muestra que $f(a) \leq [e(a-1)] + 1$. La solución enviada por J. Mir Pieras, también parcial, prueba que

$$f(a) \sim ea - \frac{1}{2}\log(2\pi ea) + h(a), \quad a \to \infty,$$

donde $h(a)$ es una función positiva, creciente y tendiendo a cero en infinito. Esta expresión asintótica permite deducir el valor del límite de $f(a)/a$.

PROBLEMA 5

Sean $f_1(x) = x + x^{-1}$ y $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ si $n > 1$. ¿Posee f_n algún punto fijo real?

Propuesto por José Martínez Aroza
Universidad de Granada, Granada

SOLUCIÓN

La función f_n no posee puntos fijos para ningún $n \geq 1$. Para $f_1(x)$ se obtienen de modo sencillo las siguientes propiedades:

a) f_1 está definida para todo $x \neq 0$,

b) para todo $x > 0$, $x < f_1(x)$,

c) para todo $x \neq 0$, $f_1(-x) = -f_1(x)$.

De las propiedades b) y c) se deduce que f_1 no puede tener puntos fijos. Probando, por inducción, que las funciones f_n, $n > 1$, satisfacen a), b) y c) habremos concluido. Supongamos que f_{n-1} satisface a), b) y c). En primer lugar, es claro que f_n verificará a). Teniendo en cuenta b) para f_1 y f_{n-1}, es fácil comprobar que se tiene la propiedad b) para f_n:

$$f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)) > f_{n-1}(x) > x.$$

Usando que f_1 y f_{n-1} son funciones impares tenemos

$$f_n(-x) = f_1(f_{n-1}(-x)) = f_1(-f_{n-1}(x)) = -f_1(f_{n-1}(x)) = -f_n(x),$$

luego f_n cumple c) y la inducción está completa.

Solución enviada por A. López López
También resuelto por J. Mir Pieras (estudiante) y el proponente

Problema 6

Si x es solución de la ecuación $x^2 - ax + 1 = 0$, siendo a un número natural mayor que 2, probar que x^3 puede escribirse en la forma $p + q\sqrt{r}$, donde p, q y r son números enteros.

Propuesto por Miguel Amengual Covas
Cala Figuera, Mallorca

Solución

Las raíces de $x^2 - ax + 1 = 0$ son $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$. De este modo

$$x^3 = \frac{a(a^2-3)}{2} \pm \frac{(a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}.$$

Si a es un entero par mayor o igual que 2, entonces $a = 2n$ para algún entero $n \geq 1$ y

$$\begin{aligned} x^3 &= \frac{2n(4n^2-3)}{2} \pm \frac{(4n^2-1)\sqrt{4n^2-4}}{2} \\ &= n(4n^2-3) \pm (4n^2-1)\sqrt{n^2-1}. \end{aligned}$$

Si a es un entero impar mayor o igual que 2, entonces $a = 2n+1$ para algún entero $n \geq 1$ y

$$\begin{aligned} x^3 &= \frac{(2n+1)(4n^2+4n-2)}{2} \pm \frac{(4n^2+4n)\sqrt{4n^2+4n+3}}{2} \\ &= (2n+1)(2n^2+2n-1) \pm (2n^2+2n)\sqrt{4n^2+4n-3}. \end{aligned}$$

Obsérvese que en ambos casos x^3 ha sido expresado en la forma $p + q\sqrt{r}$ donde p, q y r son números enteros.

Solución enviada por Elsie M. Campbell, Dionne T. Bailey y Charles Diminnie
Angelo State University, San Angelo, USA
También resuelto por A. López López, J. Mir Pieras (estudiante), C. Sánchez Rubio, J. Vinuesa Tejedor, M. R. Wilhelmi (2 soluciones) y el proponente.
Se ha recibido una solución incompleta

NOTA. Una de las soluciones enviadas por M. R. Wilhelmi ha sido obtenida de forma constructiva utilizando *Mathematica*.

PROBLEMA 7

Sea

$$h(t) = \frac{\pi}{16t^3} \frac{t\pi - \operatorname{sen}(t\pi)}{\cos^2\left(\frac{t\pi}{2}\right)},$$

para $t \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Probar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} h\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\pi^2}{4t^2} \operatorname{cosec}^2(t\pi) + \frac{\pi}{4t^3} \cot(t\pi) - \frac{1}{2t^4}.$$

Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez
Universidad de La Rioja, Logroño

SOLUCIÓN

De la fórmula de adición para la función tangente se deduce fácilmente que $\tan y = \frac{1}{\tan y} - \frac{2}{\tan 2y}$ y de ahí:

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x/2} - \frac{1}{\tan(x/2)}\right)$$

que, reiterando, conduce a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \tan\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x \operatorname{sen} x}.$$

Tomando $x = t\pi$ en la identidad anterior tendremos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \tan\left(\frac{t\pi}{2^{k+1}}\right) = \frac{\operatorname{sen}(t\pi) - t\pi\cos(t\pi)}{t\pi \operatorname{sen}(t\pi)},$$

o, de forma equivalente,

$$\frac{\pi}{8}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k}t} \tan\left(\frac{t\pi}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}(t\pi) - t\pi\cos(t\pi)}{t^2 \operatorname{sen}(t\pi)}.$$

El enunciado se obtiene inmediatamente derivando los dos miembros de la identidad precedente y observando que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{8}\frac{1}{2^k t}\tan\left(\frac{t\pi}{2^{k+1}}\right)\right) = \frac{t}{16^k} h\left(\frac{t}{2^k}\right)$$

y

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}(t\pi) - t\pi\cos(t\pi)}{t^2 \operatorname{sen}(t\pi)}\right) = \frac{\pi^2}{4t}\operatorname{cosec}^2(t\pi) + \frac{\pi}{4t^2}\cot(t\pi) - \frac{1}{2t^3}.$$

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria
También resuelto por el proponente

Problema 8

Por cada una de las rectas paralelas medias de las caras de un cubo se trazan los dos planos que la unen con las aristas de la cara opuesta que son paralelas a ella. Los veinticuatro planos formados encierran el centro del cubo en un poliedro convexo. ¿Qué parte del volumen del cubo ocupa este poliedro? Generalizar el problema para un n-paralelotopo ($n \geq 2$).

Propuesto por Emilio Fernández Moral,
I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño

Solución

Llamemos k-celdas ($k = 0, 1, \dots, n$) a los k-paralelotopos componentes de un n-paralelotopo. El número de k-celdas es $\binom{n}{k}2^{n-k}$ (cf. [1], pág. 122). Podemos decir que el contenido n-dimensional del n-paralelotopo está encerrado por sus $(n-1)$-celdas paralelas dos a dos, en cantidad de $2n$; dos $(n-1)$-celdas paralelas entre sí diremos que son *opuestas* una de otra. Por su parte, una $(n-1)$-celda consta de $(n-2)$-celdas, que son en total $2(n-1)$, paralelas dos a dos, de manera que se pueden considerar, para cada $(n-1)$-celda, las $(n-2)$-celdas *paralelas medias*, siendo en total $n-1$, determinadas entre cada una de las parejas de $(n-2)$-celdas opuestas en ella. Con este preámbulo, el enunciado general del resultado propuesto podría quedar así:

Sea un entero $n \geq 2$. Por cada una de las $(n-2)$-celdas *paralelas medias* de cada una de las $(n-1)$-celdas de un n-paralelotopo *se trazan* los dos hiperplanos que unen dicha paralela media con las $(n-2)$-celdas de la $(n-1)$-celda opuesta que son paralelas a ella. Los $4n(n-1)$ hiperplanos formados encierran el centro del n-paralelotopo en un n-politopo convexo. La medida n-dimensional de este politopo es la $(2 \cdot 3^{n-1})$-ava parte de la medida n-dimensional del n-paralelotopo.

Y se puede ofrecer una solución así:

Nos podemos limitar a considerar un n-cubo (el n-paralelotopo regular), pues mediante una transformación lineal regular conveniente, que conservará las razones de las medidas n-dimensionales de dos figuras, un n-paralelotopo se transformará en un n-cubo. Consideremos, entonces, en un sistema n-dimensional de coordenadas, el n-cubo centrado en el origen y con vértices (0-celdas) en los 2^n puntos de coordenadas $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$. En ese caso, las ecuaciones de los $4n(n-1)$ hiperplanos que conforman el n-politopo convexo central son

$$\pm 2x_i \pm x_j = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;\ i \neq j. \tag{3}$$

Dicho politopo tiene el mismo grupo de simetrías que el n-cubo, con lo que podemos reducirnos a calcular la medida n-dimensional de la parte del politopo que está contenida en la $(2^n\, n!)$-ava parte del espacio n-dimensional definida por las desigualdades

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0. \tag{4}$$

No es difícil ver que, en esta región (2), el hiperplano de los definidos en (1) que cierra el politopo es el de ecuación

$$2x_1 + x_2 = 1.$$

De modo que la parte de politopo contenida en la región (2) es el n-símplex de vértices

$$O=(0,0,0,\dots,0),\ \ A_1=(\tfrac{1}{2},0,0,\dots,0),\ \ A_2=(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},0,\dots,0),\qquad \dots A_n=(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\dots,\tfrac{1}{3}),$$

entendiendo que, para $j\geq 2$, el punto A_j tiene las j primeras coordenadas iguales a $1/3$, y el resto de las coordenadas nulas (en el caso $n=3$, que representamos en la figura, el triángulo $A_1A_2A_3$ es la mitad de una de las caras planas del tetraquishexaedro convexo central). La medida n-dimensional de este símplex, como es bien sabido, es

$$\frac{1}{n!}\cdot\begin{vmatrix}\frac12 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \frac13 & \frac13 & 0 & \dots & 0\\ \frac13 & \frac13 & \frac13 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac13 & \frac13 & \frac13 & \dots & \frac13\end{vmatrix}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}\,,$$

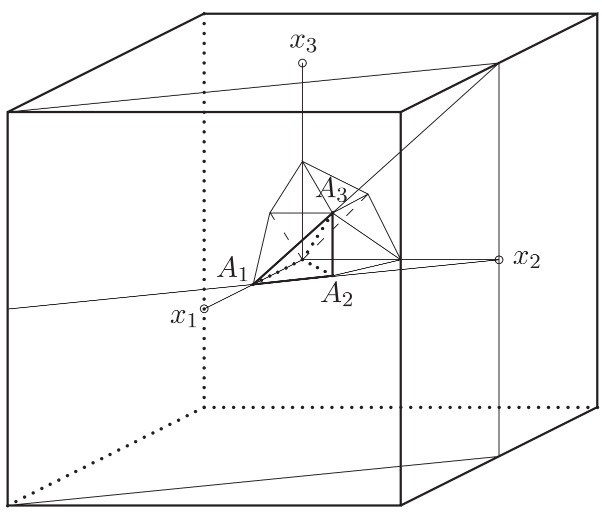
y la medida del politopo convexo central es, por consiguiente,

$$2^n\,n!\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}=\frac{2^n}{2\cdot 3^{n-1}}\,,$$

es decir, $\dfrac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$ por la medida del n-cubo de vértices $(\pm1,\pm1,\dots,\pm1)$.

Referencias para la solución

[1] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, 3ª ed., Dover, New York, 1973.



Solución enviada por el proponente
También resuelto por J. Mir Pieras (estudiante) en el caso $n = 3$

NOTA. M.ª Carmen Mínguez, de la Universidad de La Rioja, nos ha proporcionado una demostración sobre el número de k-celdas de un n-paralelotopo distinta de la que se presenta en [1] (y también diferente de otras que hemos localizado).

Sin pérdida de generalidad podemos considerar el n-paralelotopo unidad $\{(x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 1\}$. Una k-celda (del borde) del n-paralelotopo se describe como $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 1\}$ con ε_j siendo 0 ó 1. Además, esos ε_j se distribuyen en posiciones distintas de la n-tupla, lo cual se puede hacer de $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ formas. En consecuencia, el número de k-celdas es $2^{n-k}\binom{n}{k}$.