

Números, átomos y estrellas

por

Charles Fefferman

Este es el texto completo de la conferencia de la cátedra BBV del Banco Bilbao Vizcaya ofrecida por el Profesor Charles Fefferman de la Universidad de Princeton el día 24 de Enero de 1996.

En este artículo me gustaría explicar, en términos sencillos, algunos temas de matemáticas ligeramente conectados entre sí, terminando con una descripción de un trabajo sobre átomos que hice con Luis Seco y Antonio Córdoba, en el pasado mes de Enero en la Universidad Autónoma de Madrid (UAM). Mi agradecimiento a la Fundación del BBV por hacer posible mi visita a la UAM. El lector deberá tener presente que cualquier explicación matemática que se haga en lenguaje no técnico, contiene muchas imprecisiones. Sólo trato de comunicar el espíritu de las ideas.

Comencemos con un problema geométrico, propuesto por los griegos y resuelto finalmente en el siglo XIX, unos 2000 años más tarde. El problema es demostrar el postulado de paralelismo a partir de los otros axiomas y postulados de la Geometría. Los griegos pudieron organizar sus conocimientos de geometría comenzando por una lista de hechos evidentes (los axiomas y los postulados) y deducir el resto razonando lógicamente. Por ejemplo, uno de los axiomas dice que por dos puntos distintos, pasa una y sólo una recta. Todos estamos de acuerdo en que esto es totalmente obvio. Comenzando con los axiomas y postulados, se pueden probar resultados tan importantes como el teorema de Pitágoras (figura 1): el área de A más el área de B es igual al área de C.

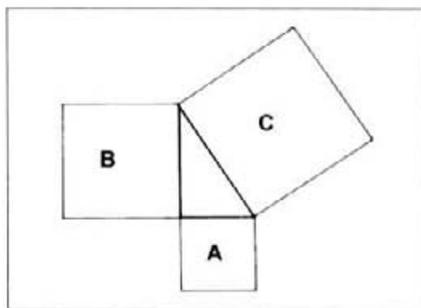


FIGURA 1

Demostrar tanto partiendo de tan poco es un gran logro. Sin embargo a los griegos les inquietaba uno de sus postulados, que veían menos evidente que el resto: El Quinto Postulado o Postulado de Paralelismo. El Postulado de Paralelismo dice que, dada una línea recta L y dado un punto P que no está en L , hay una y sólo una línea recta \tilde{L} que pasa por P y que es

paralela a L . (Figura 2). (Ésta es una versión moderna del Postulado de Paralelismo de Euclides).

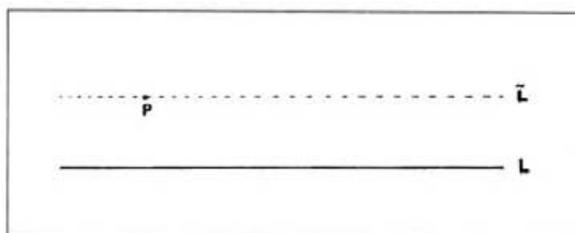


FIGURA 2

Parece ser que la razón de que esto preocupase tanto a los griegos es que si la línea dentada de la figura 3 representase todo el mundo conocido, uno tendría que hacer un largo viaje para ver que $L^\#$ no es paralela a L .

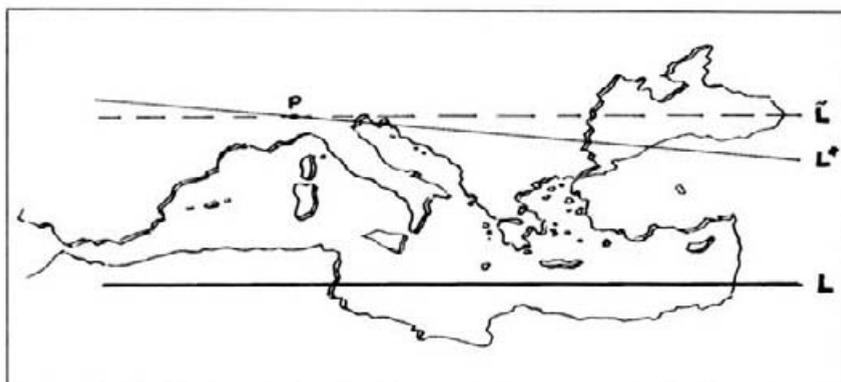


FIGURA 3

Como estaban realmente preocupados por el Postulado de Paralelismo, los matemáticos griegos plantearon como fundamental el problema de demostrar este postulado a partir de los otros axiomas y demás postulados de la Geometría.

Durante unos dos mil años, muchas personas trataron de demostrarlo. Cada uno de los intentos terminó en un fracaso. Finalmente, al comienzo del siglo XIX, el gran matemático alemán C.F. Gauss dió una prueba matemática de que el Postulado de Paralelismo no puede ser demostrado a partir de los otros axiomas y postulados de la Geometría.

El logro de Gauss no se apoyaba en un avance técnico particular, sino en estudiar el problema desde una perspectiva fundamentalmente diferente. Gauss se dio cuenta de que los axiomas de la Geometría, que parecían tan evidentes, podían ser falsos. La Geometría es una ciencia experimental. Si uno quiere saber si un axioma geométrico es verdadero en el mundo real,

uno no debe sentarse en su sillón favorito para decidir si es o no evidente, lo que uno debe hacer es coger una regla y un transportador de ángulos, salir al mundo y ponerse a medir. Ideas que aceptamos como ciertas, pueden ser falsas y los axiomas de Euclides pueden estar equivocados.

Gauss fue estimulado a razonar bajo este punto de vista tan nuevo cuando su patrocinador, el duque de Brunswick, le pidió que supervisase un plano topográfico de Brunswick. Gauss reflexionó sobre la manera en que una persona confinada a moverse sobre la superficie del estado de Brunswick vería la geometría. El camino más corto entre dos puntos es una línea recta, pero para un ciudadano de Brunswick intentando ir de *A* a *B* (figura 4), este consejo no resulta nada práctico, porque no puede volar.

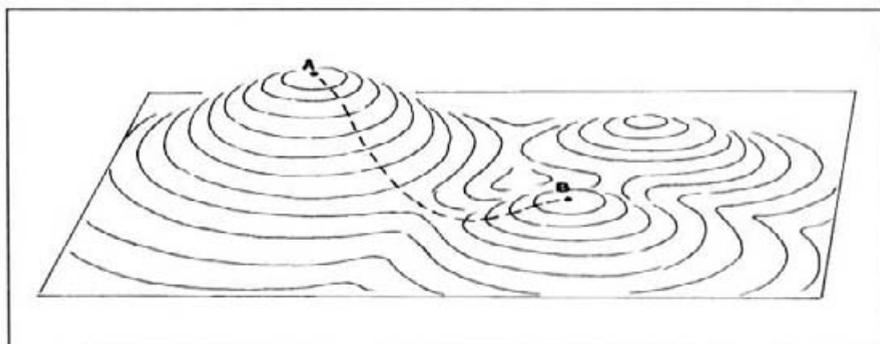


FIGURA 4

Para viajar desde *A* hasta *B* por el camino más corto, este ciudadano debería elegir una **geodésica**, que es el camino más corto que yace completamente sobre la superficie de Brunswick. (La línea dentada en la figura 4 es una geodésica). Los habitantes de Brunswick considerarán como línea recta al camino dentado, lo que nosotros llamamos una geodésica. De la misma manera los habitantes de Brunswick tendrán su propia idea de lo que es un círculo. Estas personas verán la línea punteada de la figura 5 como un círculo (en la figura "circle"), porque todos los puntos se encuentran a la misma distancia de un centro ("center") desde el punto de vista de un viajero confinado a la superficie de Brunswick.

Los habitantes de Brunswick desarrollaron su propia geometría utilizando sus ideas de lo que una línea y un círculo significan, geometría en la que los axiomas y postulados pueden o pueden no ser ciertos, dependiendo de la topografía en la que viven. Gauss demostró que para una topografía adecuada, todos los axiomas y postulados son ciertos en la superficie Brunswick, excepto el Postulado de Paralelismo, que es falso. Luego este postulado no puede ser una consecuencia lógica de otros axiomas o postulados de geometría. Por lo tanto lo que querían hacer los griegos es imposible.

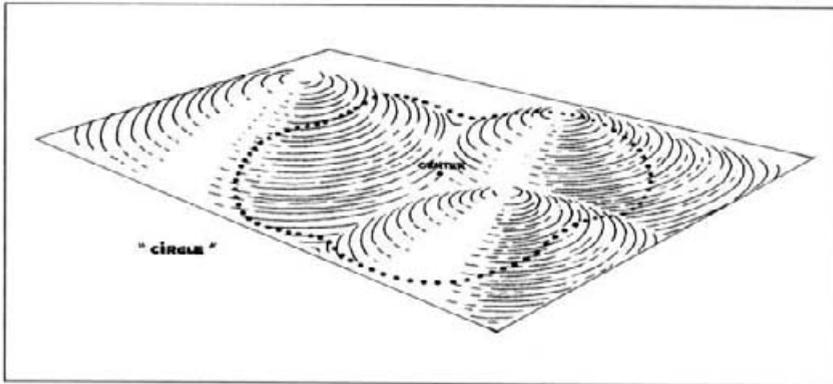


FIGURA 5

El ejemplo de Brunswick no es suficiente para convencernos de que la geometría euclidiana es errónea. Después de todo, si los pobres habitantes de la superficie de Brunswick simplemente pudiesen dejar su mundo bidimensional y observar lo que realmente sucede, verían que los axiomas de Euclides son correctos. Los próximos ejemplos harán que se tambaleen aún más nuestra seguridad en la evidente verdad de los axiomas de Euclides.

El siguiente ejemplo se llama el semiplano de Poincaré, en honor de su inventor el gran matemático francés Henri Poincaré. El semiplano de Poincaré consiste en todo lo que está por encima de la línea L en la figura 6; de manera que L es el "borde del mundo" ("The edge of the world"). En el semiplano de Poincaré viven las criaturas dibujadas en la figura 6, que llevan sus reglas consigo para estudiar la geometría de su mundo.

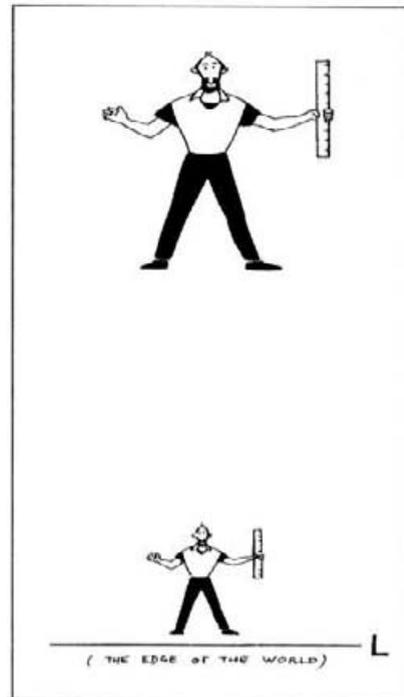


FIGURA 6

La característica especial del mundo de Poincaré es que todo se encoge al acercarse a la línea L y se agranda al alejarse de L .

Por lo tanto, una criatura de Poincaré caminando hacia el borde del mundo L , nunca llegará a alcanzarlo. Puede empezar a un metro del borde del mundo. Después de caminar un día, estará a mitad de camino, por

lo que estará a $1/2$ metro de L . En el caminar de su segundo día se habrá reducido a la mitad de su tamaño original, luego sus pasos serán más pequeños. Al final del segundo día estará a $1/4$ de metro del borde. Al final del tercer día estará a $1/8$ de metro del borde, etc. La criatura de Poincaré nunca alcanzará el borde del mundo. Como nunca lo habrá visto, no sabrá de su existencia. Una criatura de Poincaré caminando hacia el límite del mundo tampoco sabrá que está menguando porque su regla mengua con él. Quizá veamos a la criatura de Poincaré como a un ser extraño, pero también él nos considerará raros, ya que en su opinión, nosotros cambiamos de tamaño, dependiendo de a donde vayamos. No es justo decir que nosotros estemos en lo cierto y que él esté equivocado, su punto de vista es tan bueno como el nuestro.

¿Qué verá una criatura de Poincaré como línea recta?

Una criatura de Poincaré viajando desde A hasta B en la figura 7 necesitará mucho tiempo si utiliza la Ruta 1 ("route 1"), porque seguirá siendo pequeño. Haría mucho mejor en viajar por la Ruta 2 ("route 2"), porque crecerá y dará grandes pasos gran parte del recorrido.

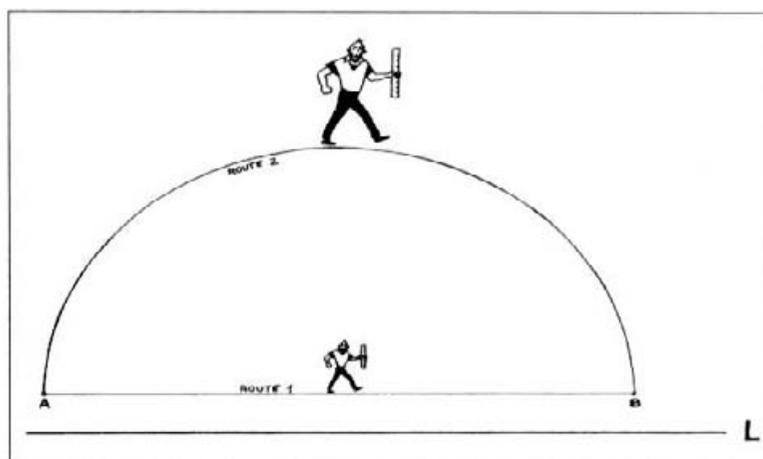


FIGURA 7

En la figura 7, la Ruta 2 le parecerá a una criatura de Poincaré el camino más corto de A a B . Por lo que le llamará una "línea recta;" y verá la Ruta 1 como una que alarga absurdamente su camino.

Utilizando sus propias nociones de distancias y de líneas rectas, las criaturas de Poincaré podrían desarrollar una geometría interesante, radicalmente diferente de la de Euclides. Sin embargo, para notar la diferencia entre su geometría y la de Euclides, estas criaturas de Poincaré deberían viajar una gran distancia. La figura 8 nos muestra la criatura de Poincaré ("Poincaré creature") dentro de su galaxia ("home galaxy") en el mundo de Poincaré.

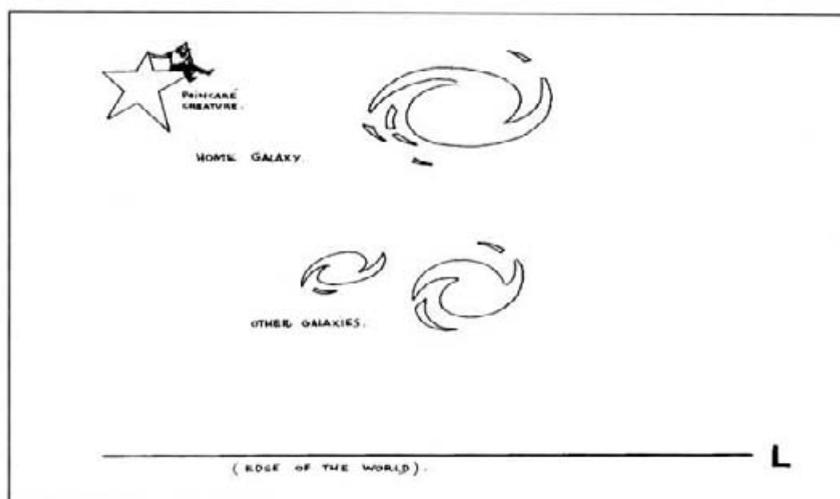


FIGURA 8

Mientras la criatura de Poincaré permanezca en su propia galaxia, sus estiramientos y encogimientos serán muy ligeros. La geometría de Euclides le parecerá correcta, excepto si tiene a su alcance instrumentos de medida extremadamente precisos. Puede observar grandes diferencias entre la geometría de Euclides y la verdad, pero sólo haciendo mediciones a escala muy grande, fuera de su galaxia.

Podemos perfectamente estar viviendo en un mundo de Poincaré sin ni siquiera notarlo, simplemente porque nunca hemos abandonado nuestra propia galaxia. Por supuesto, nuestro mundo es tridimensional. Hay un mundo tridimensional de Poincaré que consiste en la parte del espacio tridimensional que está por encima de un plano horizontal P , "el borde del mundo." Este es el espacio en el que quizás estemos viviendo. Más tarde volveré a la cuestión de si estamos o no viviendo en un mundo de Poincaré.

Antes de abandonar el semiplano de Poincaré, déjenme señalar, que así como un plano ordinario en la Geometría de Euclides puede ser dividido en losetas idénticas como en la figura $8\frac{1}{2}$, también el semiplano de Poincaré se puede dividir en losetas idénticas, como en la figura $8\frac{3}{4}$.

Las losetas de la figura $8\frac{3}{4}$ son idénticas para un habitante del semiplano de Poincaré, aunque a nosotros nos parezcan diferentes. El enlosetado del semiplano de Poincaré es la inspiración matemática de gran parte del arte de Escher, véase por ejemplo, la figura $8\frac{9}{10}$.

Permítanme discutir a continuación otra posible geometría, llamada "el toro plano." El toro plano se parece, a primera vista, al cuadrado de la figura 9.

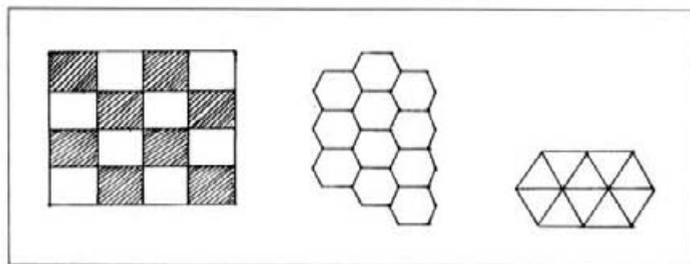


FIGURA $8\frac{1}{2}$. *Enlosetados del plano*

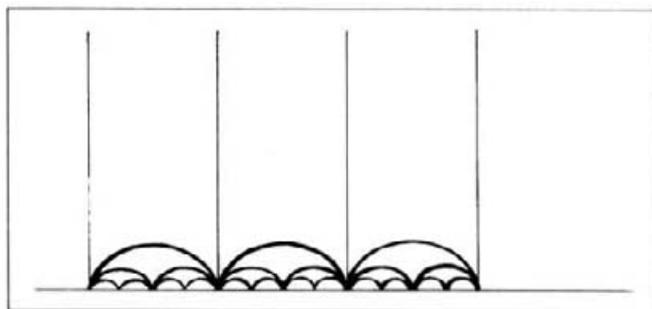


FIGURA $8\frac{3}{4}$. *Un enlosetado del semiplano de Poincaré*

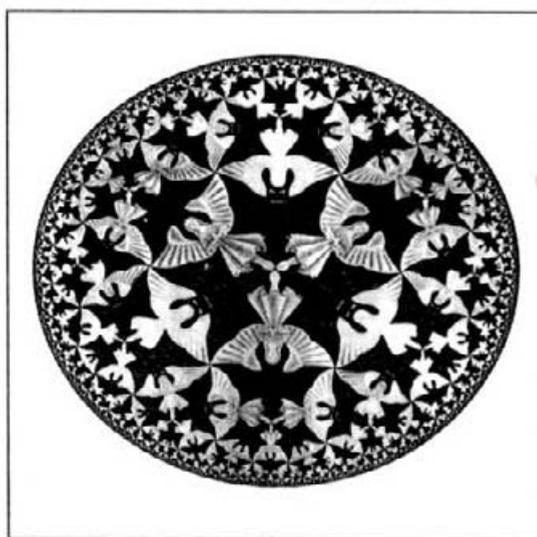


FIGURA $8\frac{9}{10}$. *Por M. Escher*

A una criatura (Fred) que vive en el toro plano la vemos igual que a una criatura en el plano; ni se estira ni se encoge.

Sin embargo, algo extraño le sucede cuando toca una arista del cuadrado. Por ejemplo, en la figura 9, Fred marca su posición de salida y comienza a viajar, moviéndose hacia el Este siempre. Después de cierto tiempo, se encuentra con el "borde del mundo", es decir, el borde Este de la figura 9.

Continúa viajando hacia el Este, aunque da la impresión de que fuerza a parte de su cuerpo a caerse por borde del mundo. La peculiaridad del toro plano es que cualquier cosa que se caiga por el borde Este del mundo reaparecerá en el borde Oeste. La figura 10 nos muestra a Fred en el momento en el que parte de su cuerpo está cerca del borde Este del mundo, mientras que la otra parte ha reaparecido en el borde Oeste.

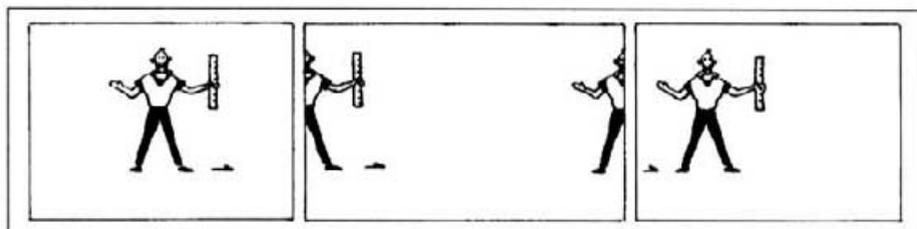
FIGURA 9. *El toro plano*

FIGURA 10

FIGURA 11

Fred continúa su jornada viajando siempre hacia el Este, como en la figura 11. Todo su cuerpo está ahora en la parte Oeste del mundo, y como vemos en la figura 11, volverá a su punto de partida. Por lo tanto, el toro plano es un mundo en el que podemos seguir viajando siempre en la misma dirección, y volver a nuestra posición de partida.

De manera similar, una criatura que viaje siempre hacia el borde Norte del mundo, reaparecerá instantáneamente en el borde Sur, como en las figuras 12, 13 y 14.

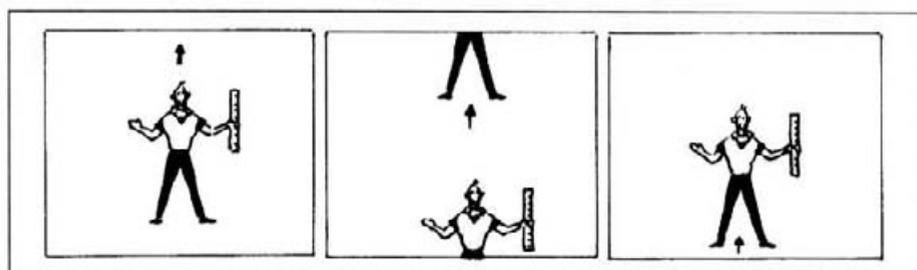
FIGURA 12. *Un viaje hacia el Norte*

FIGURA 13

FIGURA 14

El toro plano se parece al plano de Euclides en un aspecto crucial. Mientras el habitante del toro plano esté próximo a casa, la geometría de Euclides le parecerá totalmente correcta.

(Para una criatura de Poincaré que esté próxima a casa, la geometría de Euclides es sólo aproximadamente correcta).

Desde luego, la criatura de las figuras 12 ó 14 se halla bien lejos del borde del mundo. Cuando mida distancias con su regla, encontrará que los teoremas de Euclides concuerdan con los experimentos, siempre que se encuentre próximo a casa y evite acercarse al borde del mundo.

Sin embargo, ni siquiera la criatura de la figura 13 observa nada inusual, porque su regla también cae por el borde Norte y reaparece por el borde Sur.

La figura 15 muestra la forma en la que vemos el entorno inmediato de una criatura del borde norte del mundo, mientras que la figura 16 nos muestra la forma en la que la criatura lo percibe.

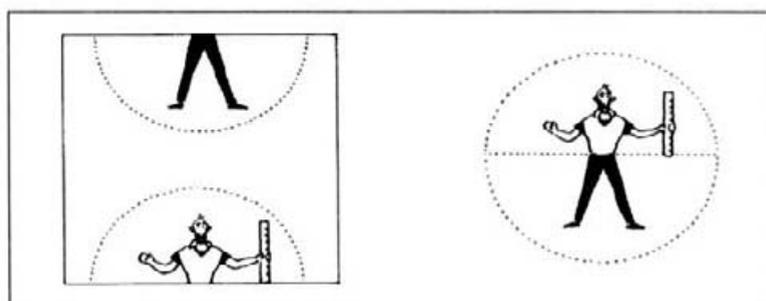


FIGURA 15. *Lo que nosotros vemos* FIGURA 16. *Lo que la criatura ve*

Así que una criatura sentada en el borde norte del mundo y que se halle cerca de su casa comprobará todavía que la geometría de Euclides funciona perfectamente.

Lo mismo es cierto para los bordes Este y Oeste del mundo. Las figuras 17 y 18 muestran, respectivamente, nuestra visión del entorno inmediato de la criatura y la visión que la criatura tiene de sí mismo, en el caso en que se encuentre sentada en una de las cuatro esquinas del mundo.

De manera que, en un toro plano, la geometría de Euclides resulta **totalmente correcta** para cualquiera que esté cerca de casa, pero parece completamente equivocada a cualquiera que viaje distancias comparables al tamaño del universo. Por ejemplo, podemos viajar en una única dirección y volver a nuestro punto de partida.

Otra llamativa diferencia entre el toro plano y el plano de Euclides es que en un un toro plano, el universo entero tiene área finita. (En la

figura 19 se muestra a una ambiciosa criatura que ha recubierto todo el universo con un número finito de losetas cuadradas, de un metro por un metro).

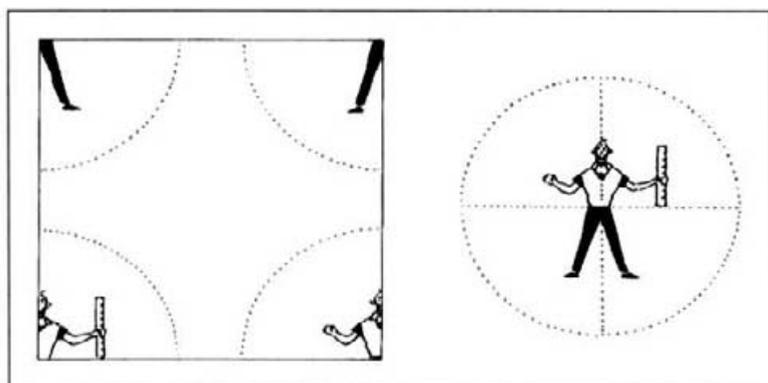


FIGURA 17. *Lo que nosotros vemos* FIGURA 18. *Lo que la criatura ve*

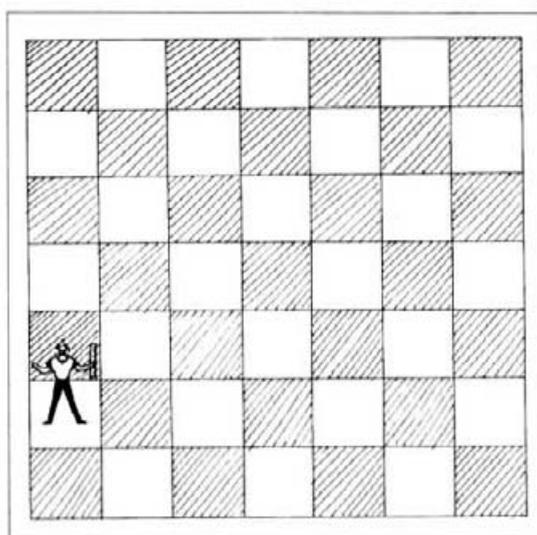


FIGURA 19. *Fred enlosa el mundo*

¿Vivimos en un toro plano? Por supuesto que no, ya que el toro plano es sólo bidimensional. Sin embargo como en el semiplano de Poincaré, hay una versión tridimensional del toro plano, en la que el universo es un cubo, y la gente que intenta abandonar el cubo, reaparece instantáneamente en otro lugar. El toro plano tridimensional es un mundo en el que sus habitantes verán la geometría de Euclides totalmente correcta, siempre y cuando nunca viajen distancias comparables al tamaño de todo el universo.

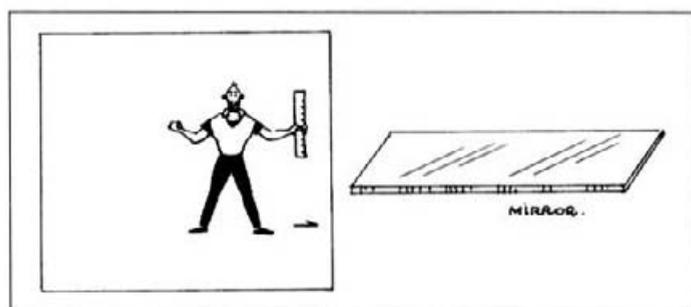


FIGURA 20. *Un viaje hacia el Este comienza en la botella de Klein*

Pero, el universo como un todo parece radicalmente diferente al universo desde la perspectiva de Euclides. Por ejemplo: en el toro plano todo el universo tiene volumen finito, se puede viajar en una única dirección y volver finalmente al punto de partida.

Nada, en nuestra experiencia de cada día, podría decirnos si nuestro universo tridimensional es o no un toro plano. Realmente, en la vida diaria, la geometría de Euclides funciona bien. Por lo tanto, también funciona la hipótesis de que vivimos en un toro plano, ya que esta hipótesis difiere de la de Euclides sólo en distancias enormes. Más tarde discutiremos como uno puede decidir qué clase de geometría es cierta en nuestro universo.

Permítaseme ahora dar un ejemplo más, para mostrar cuán extraña puede ser la geometría. Las figuras 20, 21 y 22, muestran una “botella de Klein” (llamada así en honor de su inventor, el matemático Felix Klein).

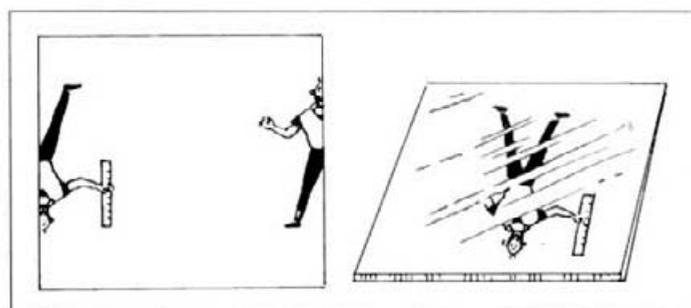
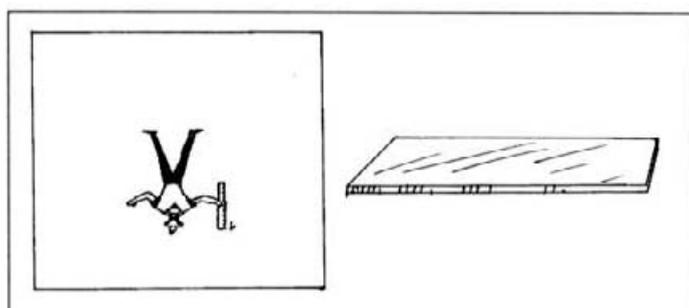
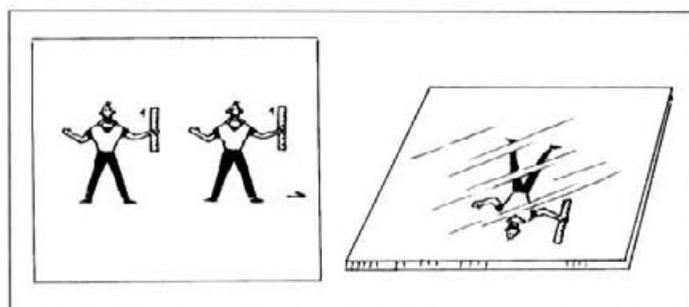


FIGURA 21. *El viaje continúa*

La botella de Klein es como el toro plano (figuras 9, 10 y 11), excepto porque hay un espejo tocando el borde Este del mundo. Un viajero que se mueva hacia el Este y que pase por el borde Este, aparecerá en el borde Oeste, como en el caso del toro plano. Esta vez, sin embargo, antes de aparecer, nuestra criatura será reflejada en el espejo.

FIGURA 22. *El viajero regresa*FIGURA 23. *Un mellizo se marcha*

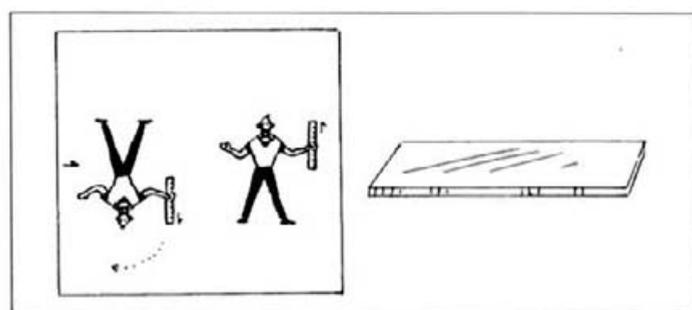
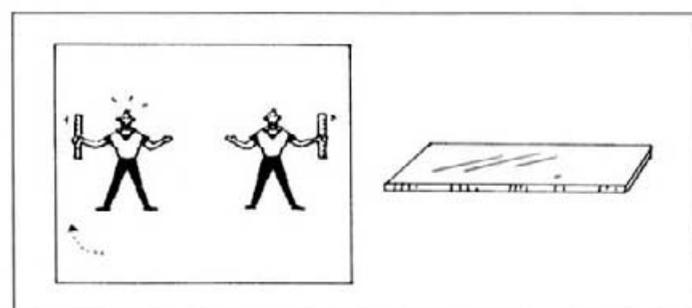
Por lo tanto, nosotros veremos el viaje hacia el Este de la criatura como muestran las figuras 20, 21 y 22. Veremos al viajero moverse rápidamente hacia un nuevo punto y boca abajo.

El viajero no notará nada inusual, porque sus instrumentos de medida (aquí aparecen como una **regla con una flecha** para enseñar que dirección es hacia arriba) cambian cuando él lo hace. De hecho, un habitante de la botella de Klein que esté cerca de casa observará que la geometría de Euclides se aplica perfectamente a su mundo, sin importar con cuanta precisión mida.

Respecto a esto, la botella de Klein es como un toro plano. Sin embargo, si observamos a una pareja de mellizos uno de los cuales se queda en casa mientras que el otro viaja hacia el Este durante largo tiempo, los dos mellizos comienzan como en la figura 23 y terminan como en la figura 24.

Cuando se encuentran de nuevo, cada mellizo observa rápidamente que el otro está boca abajo. Después de lanzar una moneda, deciden que el viajero se pondrá derecho, de forma que los dos quedan como en la figura 25.

En particular, uno de los mellizos sostiene su regla con su mano derecha, aunque al principio ambos tenían sus reglas en sus manos izquierdas. ¡La mano izquierda del viajero se ha convertido en su mano derecha! Luego, si el

FIGURA 24. *Los mellizos de nuevo*FIGURA 25. *Ambos mellizos hacia arriba*

mundo es como una botella de Klein, entonces un viaje completo alrededor suyo puede cambiar tu mano izquierda en tu mano derecha. No podemos concluir con nuestra experiencia de cada día si esto sucederá o no en el mundo real, ya que un universo que sea como una botella de Klein parece idéntico al mundo de Euclides, desde el punto de vista de cualquiera que se quede en su propia galaxia.

Estos ejemplos nos muestran que, respecto a la geometría de nuestro propio universo, podemos estar seguros de pocas cosas. ¿Es la suma de los ángulos de un triángulo igual a 180 grados? Si viajamos siempre en la misma dirección, ¿volveremos al punto de partida? El volumen total del universo ¿es finito o infinito?

Una persona diestra ¿se volverá zurda después de un viaje alrededor del universo?

No podemos responder a ninguna de estas preguntas sin hacer medidas de la escala del universo.

¿Cómo podemos tener alguna esperanza de comprender la geometría del universo?

No hay esperanza de poder viajar, en un futuro cercano, lo suficientemente lejos como para realizar los experimentos geométricos que hemos

pergeñado anteriormente. Sin embargo todavía cabe una posibilidad de aprender porque sí que podemos mirar objetos muy lejanos, a saber, las estrellas.

Analizando la luz de una estrella, los astrónomos pueden dar una aproximación razonable de su distancia a la Tierra. (La idea es medir el “desplazamiento hacia el rojo”, que no explicaré ahora). Por lo tanto, observando y contando todas las estrellas que podemos ver, podemos estimar cuantas estrellas hay a, digamos, un millón, diez millones o un millar de millones de años luz de la tierra. Si además suponemos que las estrellas se hallan esparcidas de forma más o menos uniforme por todo el universo, entonces el número de estrellas que se encuentran a una distancia dada, R , de la Tierra debería ser proporcional al volumen de una bola de radio R .

Por lo tanto, contando las estrellas y estimando sus distancias, podemos medir el volumen de una bola de radio R en la geometría de nuestro universo.

En la geometría Euclidiana ordinaria, el volumen de una bola de radio R es $\frac{4\pi}{3}R^3$. En la geometría tridimensional de Poincaré, el volumen es aproximadamente $\frac{4\pi}{3}R^3$ cuando R es pequeño, pero es mucho, mucho más grande que $\frac{4\pi}{3}R^3$ cuando R es grande. (El volumen crece exponencialmente, como una explosión de población).

Para un toro plano o una botella de Klein, el universo completo tiene volumen finito. Gracias a todas estas fórmulas de volumen diferentes, podemos utilizar la aproximación del volumen, contando estrellas, para decidir qué geometría está más de acuerdo con la observación. Este trabajo se ha llevado a cabo y se ha encontrado que la geometría de Euclides no es la que se ajusta mejor a los datos. Es más, con los datos que poseemos en el momento presente, todo lo que podemos decir es que parece que estamos viviendo en algo semejante a un universo de Poincaré.

El lector no debería tomar esta discusión de la geometría “real” del universo demasiado literalmente. Hemos hecho simplificaciones cruciales, ignorando el papel del tiempo. La luz que proviene de una estrella distante necesita mucho tiempo para llegar hasta nosotros. Por lo tanto, vemos estrellas cercanas como fueron recientemente y estrellas lejanas como fueron hace mucho tiempo.

No deberíamos hablar de la geometría del espacio, sino acerca de la geometría del espacio-tiempo.

Llevaría mucho tiempo explicar la geometría del espacio-tiempo aquí. Convergamos en que, a gran escala, y apoyándose en la observación y conteo de estrellas, el espacio tiene un aspecto muy diferente de la imagen euclidiana.

Abandonemos ahora la geometría del espacio, y dirijamos nuestra atención hacia otro problema de las matemáticas. En un principio puede parecer muy específico pero hacia el final de este artículo veremos cómo está relacionado con muchas otras cosas. Hemos supuesto anteriormente que las estrellas se encontraban esparcidas de forma aleatoria por todo el cielo. Imaginemos ahora un patrón de estrellas completamente regular y uniforme como en la figura 26.

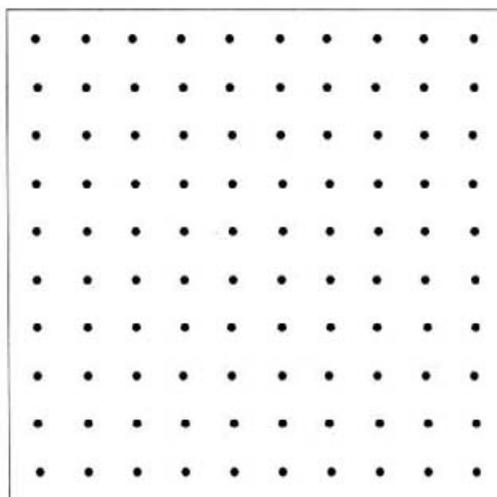


FIGURA 26. *Un retículo de estrellas*

El patrón de la figura 26 se llama "retículo" y los puntos se llaman "puntos reticulares". Si nos sentamos en uno de estos puntos reticulares, y preguntamos cuántas estrellas hay a una distancia dada de nosotros, R , entonces nos estamos preguntando cuántos puntos reticulares hay dentro de un círculo de radio R . (Véase la figura 27).

Si R es muy grande (comparado con el espacio entre puntos reticulares vecinos), entonces podemos encontrar fácilmente una buena aproximación del número de puntos reticulares en un círculo de radio R . La idea es considerar a cada punto del retículo como el centro de una loseta cuadrada, como en la figura 28.

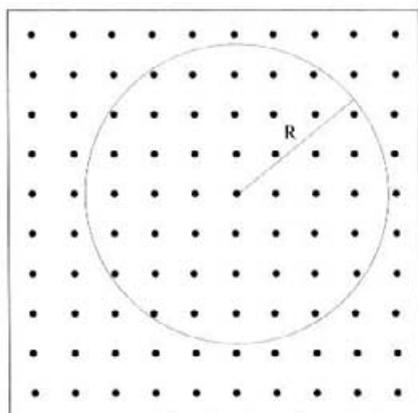


FIGURA 27. *Los puntos reticulares dentro de un círculo*

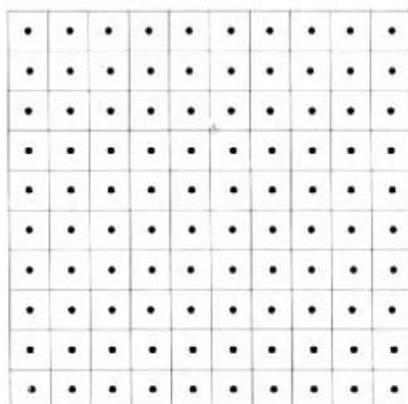


FIGURA 28. *Puntos del retículo y losetas cuadradas*

Por conveniencia supondremos que cada loseta tiene 1 metro cuadrado de área. (¡Los puntos del retículo han dejado de representar estrellas!) En

la figura 29, hemos sombreado las losetas cuyos centros están dentro de un círculo de radio R . Como cada loseta tiene un área de $1 m^2$, el área de la región sombreada (en m^2) es igual al número de puntos del retículo que se encuentran dentro del círculo. Llamaremos "región de comparación" a la región sombreada en la figura 29.

Obsérvese que la región de comparación contiene al círculo rayado en la figura 30, y está contenida en el círculo punteado. (Aquí, el círculo rayado tiene radio $R - 2$, y el círculo punteado tiene radio $R + 2$).

Por lo tanto, la región de comparación se halla comprendida entre el círculo punteado y el círculo rayado. Es decir, la región de comparación tiene área entre $\pi(R - 2)^2$ y $\pi(R + 2)^2$.

Dado que el número de puntos reticulares en un círculo de radio R , es igual al área de la región de comparación, en un círculo de radio R está entre $\pi(R - 2)^2$ y $\pi(R + 2)^2$. Cuando R es grande, esto nos dice que el número de puntos reticulares en un círculo de radio R es, aproximadamente, πR^2 , con un error no mayor que, digamos, $2R$. Para R grande, $2R$ es despreciablemente pequeño comparado con πR^2 (pruebe con $R = 10^6$). Por lo tanto, por geometría elemental, hemos encontrado una fórmula aproximada para el número de puntos reticulares, con un pequeño error relativo.

De hecho, el error al aproximar el número de puntos reticulares en un círculo por πR^2 es incluso más pequeño que $20R$. Los matemáticos Sierpinsky y Voronoi probaron que para R grande, el error es como máximo $R^{2/3}$. Cuando R es grande, $R^{2/3}$ es despreciablemente pequeño comparado con $20R$. (Pruebe con $R = 10^{12}$). Por lo tanto este resultado mejora el término de error anterior, $20R$. Los resultados de Sierpinsky y Voronoi nos hacen ver que hay que considerar la irregular región sombreada en la figura 29 con más cuidado y que no basta con compararla simplemente con los círculos de la figura 30. Incluso este resultado puede mejorarse.

Hay razones para creer que el error real al aproximar el número de puntos reticulares en un círculo de radio R por πR^2 es, *grosso modo*, $R^{1/2}$ para R grande. Probar o contradecir esta hipótesis es un problema matemático muy difícil y que aún hoy en día permanece sin resolver.

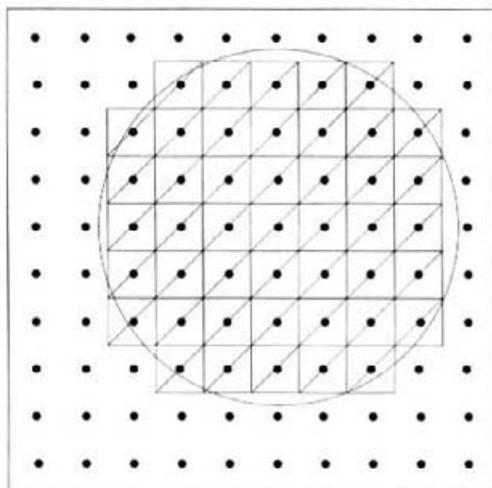


FIGURA 29. Los cuadrados cuyos centros se hallan dentro del círculo de radio R . La "región de comparación"

Explicaré a continuación la importancia de los puntos reticulares en otras áreas de las matemáticas. Comenzaremos con vibraciones, por ejemplo, las de un instrumento musical.

Las vibraciones más simples son las de los diapasones porque vibran en un único tono o frecuencia. Tienen los tonos más puros posibles. Un modelo más rico de vibraciones se obtiene cuando pulsamos una cuerda. Una cuerda tiene una nota fundamental, es decir, un tono al que puede oscilar como en la figura 31.

En la figura 31, la cuerda comienza en la posición 1, después se desplaza sucesivamente por las posiciones desde la 2 a la 5, luego vuelve de la 5 a la 1, y repite el ciclo. Sin embargo, a diferencia del diapasón (ideal), una cuerda también tiene otros “armónicos” o “sobretonos”, como en la figuras 32 y 33.

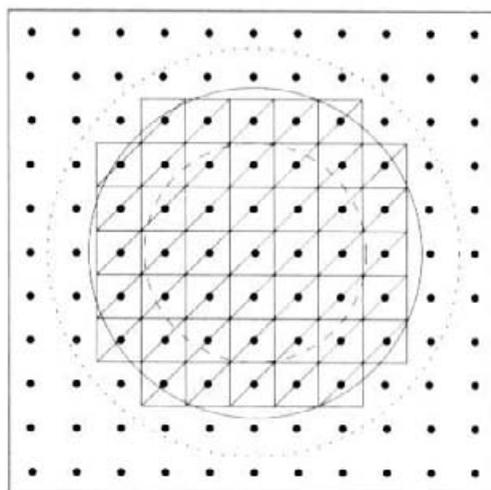


FIGURA 30. La región de comparación atrapada entre dos círculos

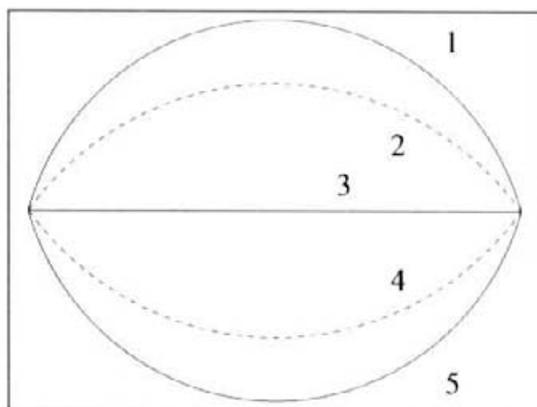


FIGURA 31. Una cuerda vibrando en su nota fundamental

Una vez más, en las figuras 32 y 33, la cuerda comienza en la posición 1, después se mueve desde la 2 a la 5, y vuelve desde la 5 a la 1, y repite el ciclo. A diferencia de las notas fundamentales, los sobretonos tienen puntos nodales, que no se mueven durante la vibración de la cuerda. La vibración fundamental y los armónicos de la cuerda se llaman modos de vibración.

Los modos pueden etiquetarse con los enteros positivos 1, 2, 3, ... El modo 1 es la nota fundamental, modo 2 es el primer sobretono, modo 3 es el segundo sobretono, etc.

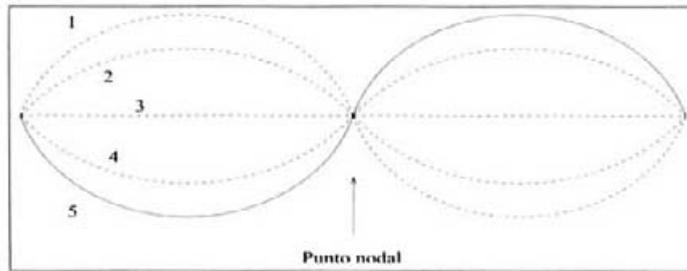


FIGURA 32. Una cuerda vibrando en su primer armónico

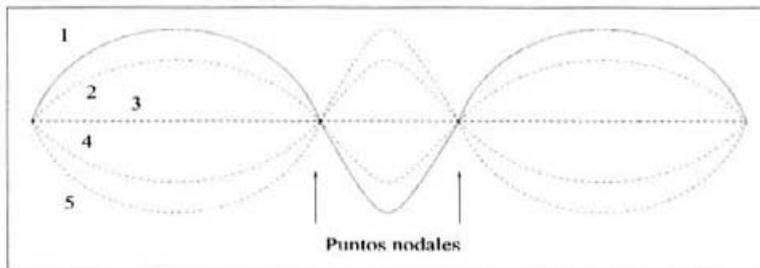


FIGURA 33. Una cuerda vibrando en su segundo armónico

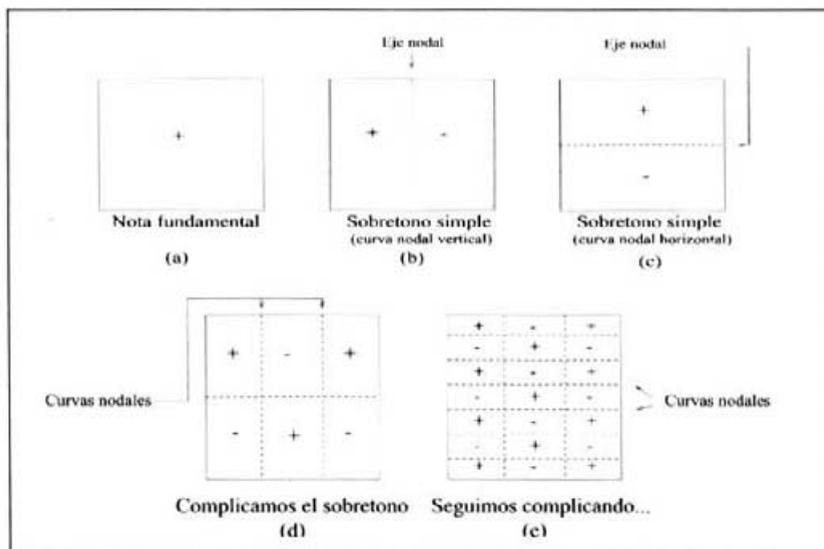


FIGURA 34. Modos de un tambor cuadrado

La etiqueta de un modo es uno más que el número de puntos nodales. Cada modo de la cuerda tiene un tono puro (frecuencia) al igual que un diapasón. El tono de modo N es proporcional a N .

La vibración real de una cuerda pulsada es una complicada combinación de todos los modos (escalas) diferentes.

Este patrón es lo que da a todos los instrumentos de cuerda su profunda similitud musical, y hace que sea razonable, por ejemplo, transcribir un concierto de violín para clavicordio.

Un patrón de modos muy diferente aparece en la vibración de un tambor. Por simplicidad consideremos un tambor cuadrado sujeto en sus bordes. La figura 34 muestra algunos de los sobretonos que pueden ocurrir.

Cada modo es una manera en la que puede vibrar el tambor en un tono simple, como un diapasón. La vibración real de un tambor es una complicada combinación de todos sus modos diferentes.

En la figura 34 suponemos que el tambor yace en un plano horizontal.

Todas las partes del tambor marcadas con "+" se mueven arriba y abajo juntas. De manera similar, todas las partes marcadas con "-", se mueven arriba y abajo juntas. Pero cuando las partes marcadas con "+" se mueven hacia arriba, las partes marcadas "-" se mueven hacia abajo y viceversa. El lector puede imaginar como vibraría el tambor en cada uno de los modos que aparecen en la figura 34. Observemos que las "curvas nodales" punteadas en la piel del tambor de la figura 34 (b)...(e), que no se mueven ni hacia arriba ni hacia abajo.

Para etiquetar los modos de un tambor cuadrado, basta con contar las líneas nodales verticales y horizontales. Por ejemplo, el modo fundamental (figura 34 (a)) tiene la etiqueta (0, 0) porque no hay líneas nodales ni verticales ni horizontales. La figura 34(b) tiene la etiqueta (0, 1) porque no hay curvas nodales horizontales pero hay una línea nodal vertical. La figura 34 (d) se etiqueta con (1, 2) porque contiene 1 línea nodal horizontal y 2 curvas nodales verticales. Si pensamos en el par (m, n) como en las coordenadas de un punto en el plano, entonces los posibles modos de vibración se etiquetan como puntos reticulares en el cuadrante noroeste como en la figura 35.

En el modo etiquetado por un punto reticular dado, el tambor vibra en un tono puro; su frecuencia es proporcional a la distancia desde el punto reticular al "x" en la figura 36.

Como sólo podemos oír tonos hasta una frecuencia máxima determinada, los modos que podemos oír están etiquetados por puntos reticulares que están dentro del círculo de la figura 36.

Un murciélago oye tonos de una frecuencia mucho más alta, por lo que los tonos audibles por un murciélago están etiquetados por los puntos reticulares dentro del círculo grande de la figura 36.

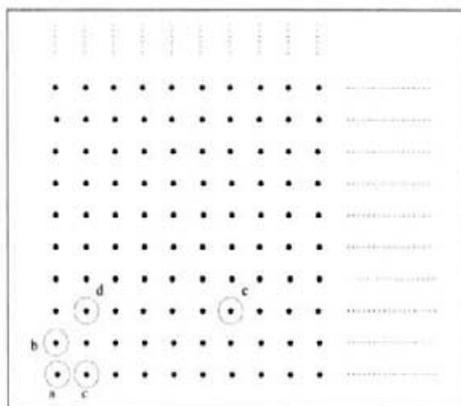


FIGURA 35. Todos los posibles modos de vibración de un tambor, con los modos de la figura 34 marcados

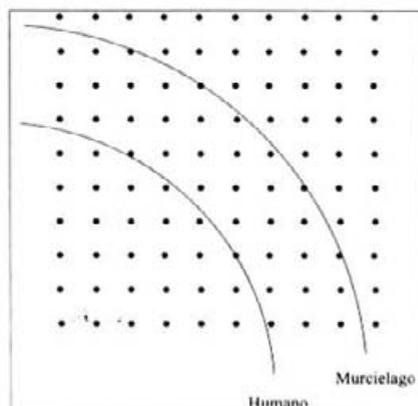


FIGURA 36. Los modos de un tambor, audibles por un ser humano y audibles por un murciélago

Por lo tanto, para un tambor cuadrado, el número de modos hasta una determinada frecuencia, queda determinado contando el número de puntos reticulares dentro de un círculo. Esta es una forma de vibrar muy diferente a la de una cuerda y nuestros oídos pueden percibir la diferencia. Esta es la razón por la que un concierto de violín puede ser transcrito con éxito para clavicordio, pero no para tambores.

He de advertir que en esta discusión sobre instrumentos musicales hemos introducido numerosas simplificaciones. Por ejemplo, un piano no es sólo una cuerda y un tambor no suele ser cuadrado. Pero es cierto que los puntos reticulares determinan las vibraciones de un tambor cuadrado, y que todos los tambores tienen formas de vibrar que comparten muchas propiedades matemáticas. Estas propiedades hacen que los tambores suenen de forma totalmente diferente a como suenan los instrumentos de cuerda.

Los puntos reticulares y las vibraciones se hallan estrechamente conectados. Por cierto, un famoso problema matemático pregunta: *¿Se puede oír la forma de un tambor?* Hace unos pocos años se ha descubierto que la respuesta es "no"; es posible exhibir dos tambores con formas diferentes que suenan exactamente igual.

Los puntos reticulares juegan también un papel en el estudio de los átomos. Permítanme embarcarme en una larga introducción acerca de átomos y mecánica cuántica, para posteriormente analizar como intervienen los puntos reticulares en este tema.

Un átomo, con sus electrones girando en órbitas alrededor de su núcleo, se asemeja a un pequeño sistema solar, con pequeñas diferencias que resultan ser cruciales. Una de ellas es que los electrones se repelen, mientras que los planetas se atraen. Otra diferencia fundamental es que los átomos

están gobernados por la mecánica cuántica (que comenzaré a explicar en un momento), mientras que en el sistema solar la mecánica cuántica se puede ignorar.

La interacción entre átomos nos conduce a la química: los átomos se unen para formar moléculas. La meta final de la investigación que quiero comentar es el paso de las leyes de mecánica cuántica a las leyes químicas mediante cálculos matemáticos que se pueda demostrar que son correctos. Para hacer esto, tenemos que ser capaces de calcular de manera fiable cuál es la menor energía posible de una colección dada de núcleos y electrones.

Todos los sistemas físicos buscan estados de mínima energía. (Por ejemplo, una bola rueda colina abajo para descansar al pie de la colina, donde su energía potencial es mínima). Dos átomos de Hidrógeno, quedan ligados químicamente para dar lugar a una molécula H_2 , porque la mínima energía de esa molécula es menor que la suma de las mínimas energías de dos átomos de hidrógenos aislados. De manera que para entender la Química, intentaremos calcular de manera fiable la menor energía ("*energía del estado fundamental*") posible de átomos y moléculas.

Comencemos ahora nuestra discusión de la mecánica cuántica, empezando por unas pocas ideas generales.

La mecánica cuántica es esencial para comprender cosas muy pequeñas, como un átomo.

Lo que la mecánica cuántica nos enseña es tan opuesto a nuestra intuición acerca del mundo, que parece totalmente ridícula. Sin embargo, es absolutamente correcta. La mecánica cuántica ha permitido predecir correctamente muchos experimentos, algunos de los cuales describen directamente fenómenos absurdos que contradicen nuestra intuición.

Para poder discutir sobre mecánica cuántica, tenemos que hablar de ondas y de partículas. En la vida diaria, ondas y partículas son cosas totalmente diferentes.

Podemos empujar una partícula, pero no una onda. (Pensemos en las ondas de un estanque de agua). Podemos preguntarnos donde está situada una partícula exactamente, pero una onda está necesariamente extendida y no existe en un punto concreto. Podemos crear una onda tirando una piedra en un estanque, pero en condiciones normales no podemos crear una partícula que no existiera antes. En mecánica cuántica todo se comporta como una partícula, en ciertos aspectos, y como una onda, en otros. Concretaremos todo esto dentro de un momento.

Las predicciones científicas habitualmente son determinísticas: un objeto que cae durante un segundo, partiendo del reposo, en el vacío situado en la superficie de la tierra, siempre caerá 4,9 metros.

Las predicciones de la mecánica cuántica son probabilísticas. Quizás la bola caerá 4,8 metros o quizás 5 metros. Si repetimos exactamente el mismo experimento muchas veces, podemos obtener muchos resultados

distintos. No esperamos poder predecir el resultado de ninguno de los experimentos con total certeza. En lugar, de esto, la mecánica cuántica predice que si dejamos caer muchos objetos partiendo del reposo en el vacío, en la superficie de la tierra, entonces, (digamos) el 30% de los objetos caerán más de 5 metros, el 10% de ellos caerán menos de 4.8 metros y 60% caerán entre 4,8 y 5 metros. Luego la mecánica cuántica sólo predice probabilidades.

Finalmente, en mecánica cuántica, cuando hacemos una observación podemos perturbar el sistema que estamos observando.

Permítaseme ser más concreto acerca de los contenidos de la mecánica cuántica. Para simplificar nos centraremos en un simple electrón. El electrón es a la vez una partícula y una onda. Cuando lo miramos es una partícula. Ya que está situado en un punto concreto del espacio. Pero si no lo estamos mirando, el electrón es una onda. No está en ningún punto concreto; se extiende por el espacio como una onda.

Cuando miramos a un electrón se convierte de onda en partícula. La onda le dice a la partícula como actuar. Por ejemplo, si la onda es grande, es fácil que aparezca el electrón, como partícula, mientras que si la onda es pequeña no es fácil que aparezca el electrón.



Otras propiedades de la partícula, como su velocidad, están determinadas por la onda de manera más compleja. Cuando no estamos mirando al electrón es una onda, luego tiene sus modos de vibración, muy similares a los de un tambor. Este es el contenido básico de la mecánica cuántica.

Queremos utilizar la mecánica cuántica para comprender los átomos. En principio lo que tenemos que hacer es resolver la ecuación del movimiento de la onda que dice a los electrones del átomo lo que deben de hacer.

En la práctica, es muy difícil entender la ecuación de Schrödinger para un átomo con más de uno o dos electrones. Una de las razones de que esto sea así es que las fuerzas que actúan en un electrón dependen de las posiciones de los otros electrones. Por lo tanto no podemos predecir cómo se va a comportar un electrón hasta que sepamos cómo se comportan los otros electrones. Luego no podemos resolver la ecuación de Schrödinger para cada electrón por separado. Debemos resolver las ecuaciones de movimiento de todos los electrones a la vez.

Para poder avanzar tenemos que hacer algo para simplificar el problema. La primera idea en este punto nos lleva hasta Bohr. (De hecho la idea de Bohr es anterior a la ecuación de Schrödinger. No intentaré contar la historia de la mecánica cuántica). Supongamos que decidimos simplemente hacer caso omiso de la repulsión de los electrones, y consideramos solamente la atracción de cada electrón por el núcleo. De esa manera dispondremos de una caricatura de un átomo real, para el que podemos resolver uno a uno, el movimiento de cada electrón. Al resolver esta caricatura de un átomo nos encontramos con un hecho notable:

La energía de un "átomo" con número atómico Z (es decir, que tiene Z electrones y un núcleo con Z protones) varía con Z en un patrón con pequeñas irregularidades. Este patrón es un pariente cercano, modificado pero reconocible, de la tabla periódica de elementos. Este fue de los primeros descubrimientos de Bohr, evidencia convincente de que la mecánica cuántica cuenta, de manera fundamental, en química.

Una simplificación del átomo menos drástica fue diseñada por Thomas y Fermi. En lugar de hacer caso omiso de la repulsión entre electrones, Thomas y Fermi propusieron una aproximación estadística. Recordemos que para determinar las fuerzas que actúan en cualquier electrón, necesitamos conocer donde están todos los electrones.

Por analogía, supongamos que necesitamos conocer la situación de todo el mundo en España. Podemos sacrificar precisión, para ganar simplicidad y mantener gran cantidad de información relevante, diciendo simplemente que hay tantos millones de personas en Madrid, tantos millones en Barcelona, tantos en Bilbao, etc. Ésta es la manera de tratar a todos los electrones en un átomo estadísticamente, para obtener un problema mucho más sencillo, que todavía captura características esenciales de un átomo.

Es ésta una herramienta teórica fundamental para comprender como la repulsión entre electrones dan forma a un átomo complejo. Desgraciadamente la teoría de Thomas-Fermi no permite deducir las irregularidades pequeñas en la energía total y por lo tanto no nos conduce a la química.

El trabajo que Córdoba, Seco y yo hemos estado haciendo en la UAM intenta remediar el fracaso de la teoría de Thomas-Fermi para explicar los fenómenos químicos. Creemos que hemos encontrado la corrección principal a la aproximación de Thomas-Fermi y esta corrección nos da pequeñas irregularidades en la energía total. A grandes rasgos nuestra idea es la siguiente: en un átomo, cada electrón vibra como una onda. El movimiento de la onda tiene modos característicos, como los modos de un tambor. Cada modo de un electrón en un átomo tiene su propia energía, de igual manera que cada modo de un tambor tiene su propio tono. Algunos modos de electrones tienen energía positiva, otros tienen energía negativa, como en la figura 37.

(La figura 37 para el electrón es el análogo de la figura 36 para un tambor.)

El átomo, como cualquier sistema físico, trata de minimizar su energía. Por lo tanto todos los modos de energía negativa del electrón en la figura 37 aparecerán en el átomo, porque disminuyen la energía total: mientras que los modos de energía positiva de la figura 37 estarán ausentes del átomo, porque aumentarían la energía total. Luego los modos que aparecen en un átomo de menor energía posible son como en la figura 38.

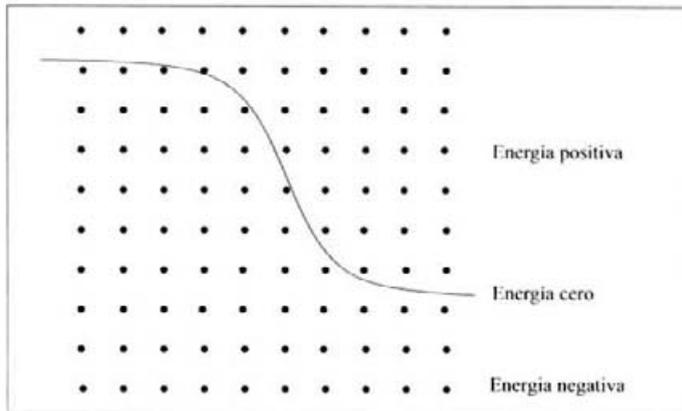


FIGURA 37. *Modos de los electrones en un átomo y sus energías*

Al tratar los electrones estadísticamente, la teoría de Thomas-Fermi trata los modos de la figura 38 estadísticamente, y al difuminarlos todos juntos se obtiene algo parecido a la figura 39.

La figura 39 se parece mucho a la figura 38, pero en ella se pierden las pequeñas irregularidades del patrón de puntos cerca la curva de energía cero.

En conclusión, la teoría de Thomas-Fermi da una buena descripción del átomo, aunque no capta las pequeñas irregularidades en la energía total.

Mediante el cálculo de los modos del electrón en un átomo con suficiente precisión, Córdoba, Seco y yo esperamos poder pasar del dibujo difuminado de un átomo, como en la figura 39 al preciso dibujo representado en la figura 38. Estamos convencidos de que las irregularidades de energía que nos llevan a fenómenos químicos provienen de los problemas de puntos reticulares en matemáticas. Es demasiado prematuro afirmar que la descripción de átomos mediante puntos reticulares es correcta. Córdoba, Seco y yo estamos trabajando para demostrarlo. Tenemos demostraciones matemáticas de algunos, pero no de todos, los enunciados cruciales. Con suerte, demostraremos los aspectos conjeturales de este tema en unos pocos años.

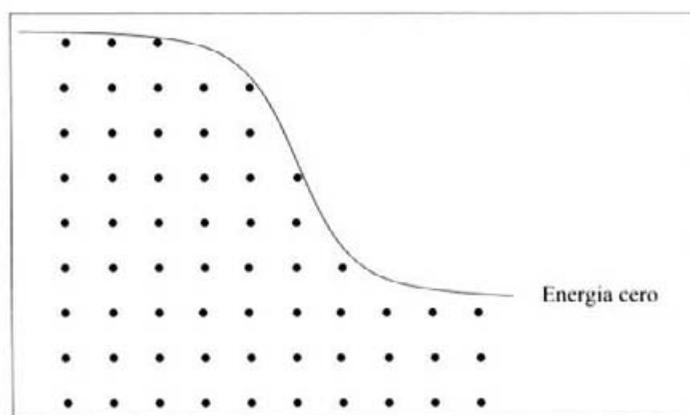


FIGURA 38. Modos que aparecen en un átomo de energía mínima

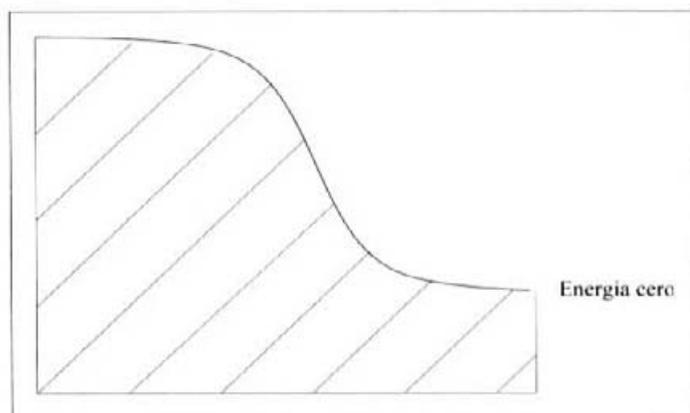


FIGURA 39. La versión de Thomas-Fermi de la figura 38

Concluyendo: contar los puntos dentro de una figura curvada grande es un problema profundo y fascinante. Puede explicarnos la geometría de nuestro universo, conducirnos a problemas de matemática pura no resueltos todavía, y aportar una parte significativa de la explicación de fenómenos químicos mediante la mecánica cuántica.

Espero haber tenido éxito en transmitir un poco de la maravillosa fascinación de las matemáticas.

Traducido del inglés por María José Alcón
Dibujos realizados por Manuel Ruiz González

Charles Fefferman. Department of Mathematics. Princeton
University. NJ 08544-1000. Estados Unidos de América.