

Cuantos, fotones y moléculas: un cuarto de siglo de controversias

Luis Navarro Veguillas

Universitat de Barcelona

1 Introducción

La teoría cinética de los gases —que se desarrolló especialmente en el último tercio del siglo XIX bajo el impulso de Clausius, Maxwell y Boltzmann, entre otros— proporcionó resultados interesantes en diversos campos, como es notorio. Pero resulta sorprendente, y es muy poco conocido, que ciertos aspectos de la teoría introducidos por Ludwig Boltzmann (1844-1906) un cuarto de siglo antes, sirvieron de soporte a Max Planck (1858-1947) para introducir su hipótesis cuántica en 1900.

No es frecuente encontrar en la historia ejemplos de tan íntima conexión entre los respectivos desarrollos de dos disciplinas tan diferentes en métodos y objetivos: la justificación en términos mecanicistas de la termodinámica, en el caso de Boltzmann, y la explicación teórica del comportamiento de la radiación térmica, en el de Planck. Hay que adelantar que esta extraña relación se mantuvo a lo largo de más de un cuarto de siglo, con la peculiaridad de que la influencia fue recíproca: en unas ocasiones la física estadística dio pautas para el desarrollo de la física cuántica, mientras que en otras ocasiones sucedió lo opuesto. Los ejemplos son numerosos, por lo que nos limitaremos a analizar algunos episodios, entre los más representativos y en ambas direcciones.

La figura clave en los episodios más relevantes en esta dirección fue, sin duda, Albert Einstein (1879-1955). Veremos cómo, en su incesante búsqueda de una base sólida donde apoyar las nuevas concepciones cuánticas, los razonamientos de corte mecánico-estadístico —y muy especialmente los ligados con el tratamiento de las fluctuaciones— casi nunca dejaron de figurar entre sus herramientas predilectas. Por otra parte, el análisis y la extensión de las ideas cuánticas, le permitieron asentar conceptos mecánico-estadísticos; y hasta le llevaron a crear una alternativa a la mecánica estadística de Boltzmann, como sucedió al establecer su teoría cuántica de los gases ideales de moléculas, entre 1924 y 1925.

En relación con las mutuas influencias entre ambas disciplinas, no sólo Einstein jugó un papel relevante. Hay que referirse también —además de a Planck— a otros conocidos personajes para confirmarlo. Cabe destacar, por ejemplo, cómo Walter Nernst (1864-1941) creyó encontrar en las primeras ideas cuánticas una vía de aproximación a la búsqueda de soluciones para las anomalías que detectaba en sus experimentos sobre calores específicos; precisamente en ello encontró motivación suficiente como para promover la celebración del Primer Congreso Solvay, en 1911, donde se dio la primera exposición y discusión a nivel internacional de las nociones cuánticas y sus implicaciones.

A su vez, hay que tener presente cómo el físico vienés Paul Ehrenfest (1880-1933) demostró —en 1911, y con argumentos repletos de consideraciones estadísticas— la necesidad de introducir los *quanta* en la física; o cómo Satyendranath Bose (1894-1974), al tratar de obtener una deducción puramente cuántica de la ley de Planck, presentaba —aunque, como veremos más adelante, sin ser plenamente consciente de la innovación— una nueva forma de contar estados de fotones que permitió a Einstein, unos meses después, poner las bases de lo que hoy se conoce como “estadística de Bose-Einstein”, al aplicar aquellas ideas a las moléculas del gas ideal.

Una vez sólidamente establecidas ambas teorías —la mecánica estadística y la mecánica cuántica—, su relación se estrechó hasta el punto de fusionarse en una sola disciplina, apta para estudiar agregados de partículas idénticas. Las bases para la nueva teoría fueron establecidas, en 1927, por John von Neumann (1903-1957), al introducir el formalismo de la llamada “matriz densidad”, en el que se hace una original y rigurosa síntesis del doble papel que tiene que jugar la probabilidad, pues ésta resulta un elemento básico —aunque con muy distinto significado— tanto en la física estadística como en la forma final de la teoría cuántica.

Sin ningún ánimo de exhaustividad, en el presente trabajo nos proponemos presentar tan sólo algunos ejemplos —elegidos bajo criterios puramente subjetivos— que ilustren las afirmaciones anteriores relativas a la estrechísima interconexión que —sobre todo en ciertos personajes— guardaron sus concepciones mecánico-estadísticas y sus primeras ideas cuánticas.

2 Planck y su afortunado “acto de desesperación”

Uno de los grandes objetivos de Boltzmann a lo largo de su trayectoria científica consistió en tratar de justificar, partiendo de la mecánica newtoniana, la validez estadística del segundo principio de la termodinámica; en clara oposición a la corriente más extendida que, desde un principio, lo concibió como una ley de validez absoluta. El tema le hizo verse

envuelto en diversas polémicas a propósito de sus originales concepciones y desarrollos.¹ Aunque las principales ideas del original método estadístico de Boltzmann —y, sobre todo, una gran cantidad de sus aplicaciones— figuran recogidas en sus famosas *Vorlesungen über Gastheorie*,² el aspecto concreto al que vamos a referirnos en nuestro trabajo se encuentra en una larga y famosa memoria suya aparecida en 1877.³

Para Boltzmann la “probabilidad” de un cierto estado de un gas, entendido éste como un agregado de moléculas, está determinada por el número de los posibles estados microscópicos —estados mecánicos del agregado de moléculas— compatibles con las variables termodinámicas que se empleen para definir el estado del gas, que no ha de ser necesariamente un estado de equilibrio. Tras admitir que un sistema termodinámico evoluciona siempre hacia estados de igual o mayor probabilidad, define el estado de equilibrio como el de mayor probabilidad, lo que automáticamente implica una tendencia universal hacia el equilibrio.

En relación con el desarrollo de la teoría cuántica, tan sólo nos interesa hacer referencia aquí a un detalle concreto —en realidad, a un método— del razonamiento empleado por Boltzmann para obtener, entre otros interesantes resultados, la distribución establecida por James Clerk Maxwell (1831-1879), unos veinte años antes, para la energía cinética de las moléculas de un gas ideal. Nos referimos concretamente a la introducción —aunque puramente formal y sólo a efectos de simplificar el cálculo matemático— de una especie de *quantum* de energía cinética. Vale la pena detenerse en esta peculiaridad introducida por Boltzmann porque, como veremos más adelante, habría de jugar un papel esencial en la aparición y desarrollo de ideas posteriores que cristalizaron en la llamada mecánica estadística de Bose-Einstein.

Boltzmann considera un gas ideal de n moléculas, cada una de las cuales sólo puede tener una energía cinética que sea un término de la progresión aritmética

$$0, \epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, \dots, p\epsilon, \dots, \quad (1)$$

donde ϵ representa una cantidad arbitraria de energía, sin ninguna relevancia para el resultado final, y p es un número natural. La energía máxima P de una molécula es $p\epsilon$ y la energía total de las n moléculas valdrá $L = \lambda\epsilon$, donde también λ representa un número natural.⁴ El estado del gas queda determinado por la energía que tiene cada

¹Un comentario ajustado, en versión francesa, de las ideas y aportaciones de Boltzmann en esta dirección, y que guardan relación con aspectos que trataremos más adelante, puede encontrarse en DUGAS (1959), 153-219

²BOLTZMANN (1898).

³BOLTZMANN, (1877) Un resumen de la parte de la memoria que se refiere a nuestra exposición puede verse en DUGAS (1959), 192-199.

⁴No era la primera vez que Boltzmann actuaba de esa forma: introducía variables discretas para

una de sus moléculas: esa especificación microscópica es lo que Boltzmann entiende por “compleción”. La energía total L del gas se puede distribuir de diferentes formas entre las n moléculas; cada distribución —es decir, cada estado macroscópico del gas— queda caracterizada por un cierto conjunto de números naturales:

$$\omega_0, \omega_1, \omega_1, \dots, \omega_p, \quad (2)$$

donde cada ω_k representa el número de moléculas con la correspondiente energía $k\epsilon$. Mientras que en la caracterización de una compleción hay que especificar qué energía tiene cada una de las moléculas que integran el gas, el estado macroscópico (termodinámico) de éste queda determinado por la serie de números (2), por lo que un estado del gas resulta compatible con

$$W = \frac{n!}{(\omega_0)!(\omega_1)! \dots (\omega_p)!} \quad (3)$$

compleciones distintas. Y este número W es el que Boltzmann adopta como una medida de la probabilidad —relativa— del estado termodinámico representado por (2).

La distribución de equilibrio, en virtud del postulado establecido por Boltzmann, corresponde al máximo valor de W —o, equivalentemente, de $\ln W$ —, que se habrá de calcular teniendo en cuenta las ligaduras correspondientes a los valores dados de n y λ . Al recuperar el continuo para la energía de las moléculas, tomando el límite $\epsilon \mapsto 0$, Boltzmann obtuvo dos resultados de gran calado: dedujo la distribución de Maxwell para la energía cinética de las moléculas ¡sin recurrir a las problemáticas colisiones! y justificó que el valor de $\ln W$, para esa distribución de equilibrio, coincidía —salvo factores irrelevantes— con la entropía termodinámica del gas.

Conviene resaltar que, a pesar de la influencia que este método habría de tener en tratamientos posteriores, la “cuantización” empleada por Boltzmann en 1877 mediante su consideración de los elementos de energía e , no tenía la pretensión de representar ninguna propiedad de realidad física alguna; tan sólo era una forma simple de tratar el continuo de energía partiendo del discreto; algo relativamente habitual —entonces y hoy— entre los métodos matemáticos de la física.

Planck rechazaba, no sólo la interpretación probabilística del segundo principio proporcionada por Boltzmann, sino todas las concepciones de éste que, en general, incorporaban la descripción estadística a la justificación última de las leyes básicas de la física. No obstante, Planck también creía deseable —y, quizá, posible— una deducción teórica de la validez absoluta de dicha ley; pero siempre a través de las rutas clásicas de la mecánica, el electromagnetismo y la termodinámica. Mediante razonamientos e intuiciones cuyo

facilitar el cálculo matemático. En relación con el uso del discreto por parte de Boltzmann, antes de 1877, puede verse BACH (1990), 15-19.

análisis sobrepasaría los objetivos que nos hemos marcado en este trabajo, Planck llegó al convencimiento de que la radiación térmica era un campo adecuado para tratar de lograr resultados en aquella dirección, por lo que dedicó varios trabajos —sobre todo desde 1895— al análisis de diferentes problemas asociados con el comportamiento de la radiación del cuerpo negro.⁵

Entre estos resultados uno merece atención especial por el papel que había de jugar en relación con el desarrollo de las primeras ideas cuánticas. En 1899 Planck dedujo que la relación existente entre la función $\rho(\nu, T)$, la densidad espectral de la energía de la radiación del cuerpo negro en equilibrio a la temperatura T , y $E(\nu, T)$, la energía media de un resonador monocromático de frecuencia ν , venía dada por la expresión:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} E(\nu, T), \quad (4)$$

donde c representa la velocidad de la luz en el vacío. Recuérdese que estos resonadores planckianos (cargas eléctricas oscilando alrededor de un centro de equilibrio) no representaban sino un cierto recurso —permitido por la ley de Kirchhoff, que permitía máxima libertad en la construcción de modelos de cuerpo negro— para obtener un modelo de interacción entre la radiación y la materia, suponiendo concretamente que la cavidad que contenía a la radiación en equilibrio estaba integrada por un elevadísimo número de aquellos resonadores.

Es notorio que un ingenioso ajuste de los resultados experimentales recientes permitió a Planck obtener en 1900 su famosa fórmula para la distribución espectral:⁶

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (5)$$

Para lograr una justificación teórica de la expresión (5) bastaba —en principio— evaluar $E(\nu, T)$, lo que se podía lograr, por ejemplo, mediante la determinación de la entropía media S de un resonador de frecuencia ν , en función de la energía E , e introducir la temperatura a partir de la conocida relación termodinámica

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(\nu, E)}{\partial E(\nu, T)}, \quad (6)$$

como era, y es, usual al operar en el marco de la colectividad microcanónica.

Es el momento en que Planck recurrió al famoso “acto de desesperación”, como años más tarde él mismo calificaría su decisión de adoptar los procedimientos estadísticos

⁵Para más detalles sobre las ideas termodinámicas y electromagnéticas de Planck previas a 1900 puede verse, por ejemplo, KUHN (1980), 95-116.

⁶PLANCK (1900). Por comodidad, hemos escrito la fórmula de Planck con notación actual.

usuales de Boltzmann para tratar de obtener la expresión adecuada para $S(\nu, E)$, que finalmente conduciría hasta la deducción de (5).⁷ Esencialmente no era otro que el método probabilístico de Boltzmann que acabamos de resumir, incluyendo el empleo de los elementos discretos de energía. No entraremos aquí en los detalles concretos del cálculo —tampoco lo hizo Planck en su trabajo de 1900, sino que lo publicó unas semanas después, ya en 1901⁸ — baste con señalar que sus cálculos le depararon una doble sorpresa. Por un lado, si como había hecho Boltzmann, tomaba el límite $\epsilon \mapsto 0$, no obtenía la expresión perseguida —la (5)— sino la ley de Rayleigh-Jeans, una fórmula para la radiación con graves problemas teóricos y desajustes experimentales. Por el contrario, para obtener la fórmula de Planck, los elementos de energía adoptados del tratamiento de Boltzmann, lejos de ser arbitrarios, habían de tener exactamente el valor $\epsilon = h\nu$, donde h representa una nueva constante universal a la que, a la vista de los datos experimentales del momento, Planck asigna el valor 6.55×10^{-27} erg. seg.

3 Aparición de Einstein en el escenario cuántico (1905)

No suelen ser muy favorablemente valorados —tampoco son excesivamente conocidos— tres trabajos que Einstein presentó entre 1902 y 1904, ya asentado en Berna, que contienen una formulación de la mecánica estadística —en la línea de Boltzmann— original e independiente de la presentada por Josiah Willard Gibbs (1839-1903) en 1902, que aquél no conocía.⁹ Es en el último trabajo de la terna en el que, tras deducir el valor de las fluctuaciones de energía en el equilibrio térmico, Einstein se pregunta por un sistema físico adecuado para poder contrastar experimentalmente los resultados obtenidos. Un sutil razonamiento le lleva hasta la conclusión de que la radiación del cuerpo negro era un buen candidato para ensayar parte de los métodos estadísticos propuestos, pues en tal sistema las fluctuaciones son relevantes y hasta relacionables con la ley del desplazamiento.¹⁰

Con tales antecedentes Einstein publicó en 1905 su famoso artículo sobre los *quanta*.¹¹ En el mismo —y centrándonos en sus aspectos mecánico-estadísticos— comienza sometiendo a crítica la introducción de los *quanta* de Planck, obtenidos con la imprescindible colaboración del principio de Boltzmann, que establece la proporcionalidad entre la entropía termodinámica y el logaritmo de la probabilidad del estado en cuestión. Einstein concreta su crítica en los siguientes términos:¹²

⁷Véase, por ejemplo, HERMANN (1971), 5-28.

⁸PLANCK (1901).

⁹Para una comparación entre las respectivas formulaciones de Gibbs y de Einstein puede verse, por ejemplo, NAVARRO (1998).

¹⁰EINSTEIN (1904), 75-77, de la versión inglesa.

¹¹EINSTEIN (1905).

¹²*Ibid.*, 94.

“Al calcular la entropía por métodos teórico-moleculares [es decir, “a lo Boltzmann”], el término “probabilidad” se utiliza frecuentemente en un sentido que no coincide con la definición de probabilidad que se emplea en el cálculo de probabilidades. En particular, los “casos de igual probabilidad” se suelen introducir como hipótesis, aun cuando los modelos teóricos aplicables son suficientes para permitir su deducción, en lugar de plantearlos como hipótesis. Demostraré en otro trabajo que, en el caso del equilibrio térmico, es completamente suficiente emplear la llamada “probabilidad estadística”, y confío que ello elimine una dificultad lógica que todavía dificulta la aplicación del principio de Boltzmann. Aquí, no obstante, sólo expondré su formulación general y su aplicación a casos muy especiales.”

Aunque el trabajo prometido nunca llegó a aparecer, el párrafo citado contiene los elementos esenciales que fuerzan a Einstein a adoptar una posición diferente —y original— por lo que al empleo de la mecánica estadística se refiere. Además de introducir la por él denominada probabilidad estadística, invirtió completamente la línea de razonamiento de Planck: en lugar de partir de la existencia de los *quanta* para justificar el comportamiento de la radiación, Einstein presentó un argumento —de no mucha solidez, como lo demuestra el hecho de que no lo volviera a emplear en futuras argumentaciones a favor de la necesidad de la introducción de los *quanta* de luz— que sugería que el comportamiento de la radiación electromagnética parecía conducir a una cierta cuantización de su energía.

Así aparece por primera vez una diferencia notable, que se mantendrá durante una década, entre el proceder de Einstein y el de Planck. Mientras que para éste la hipótesis sobre la cuantización de la energía de los resonadores era una condición suficiente para explicar el comportamiento experimental de la radiación térmica en equilibrio, Einstein optó por deducir la necesidad de los *quanta* —dada la extraordinaria novedad del concepto— a partir de su original análisis de los datos experimentales. O dicho de otro modo: la importancia y previsible trascendencia de los *quanta* de energía impulsaron a Einstein a obtenerlos como un resultado que se había de deducir del comportamiento experimental de la radiación térmica.

El razonamiento de Einstein siguió —muy esquemáticamente— la siguiente vía. Si se deduce, a partir de la mecánica estadística, la variación de la entropía de un gas ideal con n moléculas en un cambio reversible de volumen a temperatura constante, y se tiene en cuenta el principio de Boltzmann, la probabilidad estadística —a la que había hecho referencia anteriormente y que aquí no nos detendremos en analizar por tratarse de una noción no del todo clara, y de escasa relevancia para nuestros objetivos— de que esas n moléculas ocupen una parte V del volumen total V_0 resulta ser

$$W = \left(\frac{V}{V_0}\right)^n. \quad (7)$$

Aplicando el cálculo para la radiación en un proceso análogo, pero tomando ahora como dato experimental la ley fenomenológica de Wien —¡no la de Planck!—, Einstein obtiene para la probabilidad de que la radiación térmica de frecuencia ν y energía E esté contenida en una parte V del volumen total V_0 el valor

$$W = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{E/h\nu}. \quad (8)$$

La comparación de las dos últimas expresiones es la que permite a Einstein llegar a la conclusión fundamental de su trabajo:¹³

“La radiación monocromática de baja densidad (dentro del rango de validez de la ley de Wien) se comporta termodinámicamente como si estuviera constituida por *quanta* de energía, mutuamente independientes, de valor $h\nu$ [en notación actual].”

Así, la conclusión fundamental del trabajo queda establecida sobre la base de la existencia de cierta analogía formal entre el gas ideal de moléculas y la radiación térmica; a la detección de tal analogía se llega tras un adecuado y original tratamiento mecánico-estadístico de la situación planteada. Habremos de referirnos posteriormente a esta analogía, pues, en cierta forma, Einstein recurrió a ella —aunque en dirección opuesta— al formular, veinte años después, su teoría cuántica de los gases ideales de moléculas.

Un análisis detenido de este artículo de Einstein depara varias sorpresas. Entre ellas el comprobar que el efecto fotoeléctrico no juega allí un papel esencial, pues no representa más que una de las tres aplicaciones que Einstein sugiere —junto con la regla de Stokes para la luminiscencia y la ionización de gases por luz ultravioleta— para mostrar algunas consecuencias que se podrían deducir de la existencia de los *quanta*.¹⁴ También vale la pena insistir en que a la cuantización de la energía Einstein llegó a través de la ley fenomenológica de Wien, lo que sin duda puede extrañar sobremanera a quien asocie necesariamente la cuantización de la energía de la radiación con la ley de Planck.

Aún hoy puede sorprender el que Einstein obtuviera un resultado tan trascendente apoyándose en la ya por entonces obsoleta ley de Wien, y que no recurriera a la de Planck. Nos hemos ocupado del tema y hemos llegado a una doble conclusión: si Einstein hubiese aplicado a la ley de Planck el mismo tratamiento que aplicó a la de ley Wien en 1905, no habría obtenido la analogía que le permitió llegar a la conclusión que hemos mencionado. En cuanto al hecho de que, no obstante, obtuviera la cuantización de la

¹³*Ibid.*, 97.

¹⁴Para mayores detalles en relación con este artículo de Einstein, así como para las diferencias entre los respectivos *quanta* de Planck y de Einstein —tema éste muy estrechamente relacionado con el diferente grado de aceptación de ambos— véase, por ejemplo, NAVARRO (1990), 98-114.

energía, Ehrenfest aclaró el tema en 1911: las leyes de Wien y de Planck implican la misma cuantización, difiriendo tan sólo en los pesos estadísticos que cada de ellas asocia a cada valor de la energía.¹⁵

4 Experimentos mentales y fotones

El siguiente paso en su búsqueda de los fundamentos de las nuevas concepciones cuánticas lo dio Einstein mediante el original y hábil análisis de las fluctuaciones en uno de sus habituales experimentos mentales (*Gedanken-Experimente*). Ello le condujo a dos nociones que más tarde quedarían definitivamente incorporadas a la física cuántica: el germen de la idea de fotón, y los primeros síntomas de la conveniencia —cuando menos— de incorporar simultáneamente en una misma descripción aspectos ondulatorios con aspectos corpusculares para llegar a una mejor comprensión de ciertas peculiaridades del comportamiento de la radiación en su interacción con la materia. En 1909 Einstein publicó dos trabajos que ya incorporan ideas en esa dirección.

El primero de los artículos contiene la descripción de un fructífero experimento mental, así como el análisis de las fluctuaciones en el mismo.¹⁶ El segundo —que es una transcripción de la memoria presentada por Einstein en Salzburgo, en la reunión de físicos alemanes celebrada el 21 de setiembre de 1909— lleva por título “Sobre el desarrollo de nuestras concepciones acerca de la naturaleza y constitución de la radiación”. Es en éste en el que se expresan las ideas a las que —según Einstein— parecen conducir los resultados de su análisis;¹⁷ un trabajo que Wolfgang Pauli (1900-1958) no dudó en calificar como “uno de los hitos en el desarrollo de la física teórica”, precisamente en una colaboración dedicada a resaltar las contribuciones de Einstein a la física cuántica.¹⁸

En el experimento mental se consideraba un espejo que se puede mover libremente en la dirección perpendicular a su propio plano y está suspendido en una cavidad llena de radiación electromagnética y de un gas ideal monoatómico; todo ello en equilibrio térmico a una cierta temperatura T . El espejo es perfectamente reflectante, por ambas caras, para frecuencias comprendidas en el intervalo $(\nu, \nu + d\nu)$ y transparente para el resto. El espejo aparecía, en primer lugar, sometido a una especie de movimiento browniano como consecuencia de los impactos contra las moléculas del gas. Por otro lado, la presión de radiación ofrecía una resistencia al movimiento del espejo. Para que el equilibrio no se rompiera, Einstein pensó que era necesario otro proceso que compensara la tendencia del espejo a detenerse como consecuencia de aquella fricción; este proceso —en opinión de

¹⁵ NAVARRO and PÉREZ (2004), 115-116.

¹⁶ EINSTEIN (1909 a).

¹⁷ EINSTEIN (1909 b)

¹⁸ PAULI (1949), 154.

Einstein— no es otro que el originado por la existencia de fluctuaciones irregulares en la presión de radiación.¹⁹

El análisis detallado de las fluctuaciones del impulso y de la energía de la radiación —con cierta similitud con su tratamiento del movimiento browniano— permite a Einstein deducir las correspondientes expresiones:²⁰

$$\begin{aligned}\frac{\langle \Delta^2 \rangle}{\tau} &= \frac{1}{c} \left(h\nu\rho + \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho^2 \right) Sd\nu, \\ \langle \epsilon^2 \rangle &= \left(h\nu\rho + \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho^2 \right) Vd\nu,\end{aligned}\tag{9}$$

donde Δ representa el impulso transferido al espejo, durante τ segundos, como resultado de las fluctuaciones irregulares de la presión de radiación; c la velocidad de la luz en el vacío; ρ la densidad de energía de la radiación; S la superficie del espejo y V el volumen de la cavidad.

A la vista de las dos últimas igualdades, uno se sorprende de que Einstein no “se atreviera” a asignar impulso —y no sólo energía, como hasta entonces— a los *quanta* de radiación. Aunque algunas ideas de este tipo no se le pudieron pasar por alto al creador de la teoría de la relatividad, lo cierto es que no las mencionó en sus conclusiones. Tal vez unos argumentos basados en un experimento mental, y en algo tan escasamente considerado por entonces como era el papel de las fluctuaciones estadísticas, no le debieron parecer suficientemente convincentes; quizá ni para él mismo a juzgar, por ejemplo, por sus manifestaciones dos años después —en las discusiones que siguieron a su intervención en el Primer Congreso Solvay (1911)— insistiendo en el “carácter provisional de este concepto [los *quanta*]”.²¹

El análisis, por parte de Einstein, de los resultados expresados en las relaciones (9) fue por otros derroteros, indudablemente de singular importancia. En efecto, mientras que los segundos sumandos en ambas son —siempre según Einstein— justificables a partir de un proceso de interferencias basado en la interpretación ondulatoria de la radiación electromagnética, los primeros sumandos sólo se pueden interpretar mediante una imagen corpuscular de la radiación. Tras constatar que, por el momento, no existe una teoría de la radiación que involucre ambos aspectos —el corpuscular y el ondulatorio que ha inferido de su análisis de las fluctuaciones— Einstein sugiere que el papel de los *quanta* en el campo electromagnético bien pudiera guardar ciertas analogías con el de los electrones en el campo electrostático.²²

¹⁹EINSTEIN (1909 a), 367.

²⁰*Ibid.*, 368-369.

²¹LANGEVIN et DE BROGLIE (1912), 443.

²²EINSTEIN (1909 b), 394.

Einstein comenzó su intervención en Salzburgo expresando una osada opinión a la que había llegado analizando el experimento mental.²³

“Resulta innegable que existe un amplio conjunto de hechos, referentes a la radiación, que muestran que la luz tiene ciertas propiedades fundamentales que pueden ser entendidas mucho más apropiadamente a partir del punto de vista newtoniano de la teoría de la emisión, que desde el punto de vista de la teoría ondulatoria. Es mi opinión, por consiguiente, que la próxima fase del desarrollo de la física teórica nos aportará una teoría de la luz que pueda ser interpretada como una especie de fusión de las teorías ondulatoria y de emisión.”

Precisamente lo que trató de poner de manifiesto con su intervención en la reunión era que, a la luz de su original análisis de las fluctuaciones en el experimento anterior, posiblemente había llegado el momento de comenzar a pensar en la compatibilidad entre aspectos ondulatorios y corpusculares dentro de una misma teoría, aunque no se vislumbraran las bases de ésta. Nada más explícito al respecto que el párrafo con el que cerró su participación en Salzburgo:²⁴

“Estoy seguro de que no es necesario insistir en que no hay que dar importancia a tal imagen [una visión personal basada en la posible localización de la energía del campo electromagnético en ciertas singularidades de éste] en la medida en que no conduce a una teoría exacta. Todo lo que yo quería era señalar brevemente con su ayuda [la del experimento mental] que las dos propiedades estructurales (la ondulatoria y la corpuscular) desplegadas simultáneamente por la radiación de acuerdo a la fórmula de Planck no deberían ser consideradas como mutuamente incompatibles.”

En el verano de 1916 Einstein escribió a Michele Besso (1873-1955), amigo y confidente —en lo personal y en lo científico— durante más de medio siglo, estas entusiásticas palabras:²⁵

“He tenido un destello de lucidez a propósito de la absorción y la emisión de radiación; esto te interesará. Una demostración completamente sorprendente de la fórmula de Planck, yo incluso diría *la* demostración. Todo completamente cuántico. Estoy ahora redactando este resultado.”

²³*Ibid.*, p. 379.

²⁴*Ibid.*, p. 394.

²⁵Carta de A. Einstein a M. Besso, 11 de agosto, 1916. En SPEZIALLI (1994), 129. (Énfasis en el original).

Einstein publicó inmediatamente estos resultados en uno de sus más famosos trabajos.²⁶ Aunque no es éste el lugar adecuado para analizar detenidamente su contenido, sí hemos de comentar ciertos aspectos del mismo por su relevancia para el tema del que nos estamos ocupando aquí. En particular nos referiremos al “destello de lucidez”, al tratamiento empleado, al papel de la mecánica estadística en el mismo y a una precisión que tiene relación con el tema que trataremos más adelante.

Ha llegado el momento elegido por Einstein para desembarazarse definitivamente de aquellos oscuros resonadores planckianos asociados a las moléculas, como objeto de disponer de un modelo que hiciera tratable la interacción entre la radiación y la materia. Einstein, en 1916, pasó a considerar agregados de moléculas que tan sólo pueden existir en un conjunto discreto de estados energéticos y que son capaces de experimentar transiciones bohrianas, ligadas con la emisión y absorción de radiación.

Einstein estableció la existencia de tres procesos elementales a la hora de abordar la interacción entre la radiación y la materia: uno espontáneo (*Ausstrahlung*) en el que las moléculas emiten radiación sin estímulo de radiación exterior, y dos inducidos (*Einstrahlung*) por la radiación presente. Estos últimos —uno de emisión y otro de absorción— ocurren con probabilidad proporcional a la densidad de radiación presente, mientras que la emisión espontánea es independiente de la misma. El tratamiento consistía en la imposición de equilibrio térmico entre un gas de moléculas y la radiación, lo que condujo a Einstein a la deducción de la fórmula de Planck.

Conviene aclarar que, aunque la fórmula de Planck había sido obtenida a partir de una hipótesis cuántica —la naturaleza discreta de los valores de la energía de las moléculas—, no se había especificado *a priori* su relación con la frecuencia de la radiación emitida o absorbida en un proceso. Por decirlo brevemente: si ϵ_m y ϵ_n representan las energías de los estados involucrados en un proceso elemental, y ν es la frecuencia de la radiación —emitida o absorbida— la relación $\epsilon_n - \epsilon_m = h\nu$ no es un supuesto, sino un resultado adicional al que Einstein llegó en 1916 teniendo en cuenta la ley del desplazamiento.²⁷

Dos de estos procesos elementales —la absorción de radiación y la emisión espontánea— se pueden entender como adaptaciones de los previamente introducidos por Einstein, en 1912, en el análisis de la ley del equivalente fotoquímico: los de excitación des-excitación, respectivamente.²⁸ La auténtica novedad radica en que, si se parte de esos dos procesos el tratamiento conduce hasta la fórmula de Wien, mientras que si se incluía la emisión inducida se obtenía la de Planck.

En cualquier caso, la deducción de la fórmula de Planck no le pareció a Einstein el

²⁶EINSTEIN (1916).

²⁷*Ibid.*, p. 172-173.

²⁸BERGIA and NAVARRO (1988).

resultado más importante de su trabajo, como se deduce de la opinión escrita enviada a Besso.²⁹

“Lo que hay de esencial es que las consideraciones *estadísticas* que conducen a la ley de Planck se han *sistematizado* (...). Esto conduce al resultado (que todavía no se encuentra en el trabajo que te he enviado) de que, cuando existe intercambio de energía elemental entre la radiación y la materia, se transfiere el impulso $h\nu/c$ a la molécula. Se deduce que todo proceso elemental de esta naturaleza es un proceso *enteramente orientado*. Así queda establecida la existencia de los cuantos de luz.”

Es el momento del auténtico nacimiento del fotón— según la terminología adoptada poco después, sobre todo a partir del Quinto Congreso Solvay, celebrado en 1927 bajo el lema “Electrones y fotones”— como partícula elemental constituyente de la radiación, al quedar los *quanta* dotados de impulso en cierta dirección. Interesa resaltar que a tal conclusión Einstein llegó, no porque ello fuera necesario para obtener una justificación completamente cuántica de la ley de Planck, sino en virtud de unas consideraciones mecánico-estadísticas adicionales basadas en su análisis de las fluctuaciones en un experimento mental. En efecto, una vez deducida la fórmula de Planck a partir de la hipótesis cuántica mencionada, y sin otros requisitos que la imposición de la condición de equilibrio estadístico, en el cuarto apartado del trabajo que estamos comentando Einstein retorna al análisis de las fluctuaciones para tratar de profundizar en las implicaciones de la introducción de los tres procesos elementales considerados.³⁰

“Ahora volvemos a investigaciones acerca de los movimientos que nuestras moléculas ejecutan bajo la influencia de la radiación. Para hacerlo, empleamos un método que es bien conocido de la teoría del movimiento browniano, y que yo he empleado ya muchas veces para cálculos numéricos de movimientos en presencia de radiación.”

El método al que Einstein se refiere aquí no es otro que el análisis de fluctuaciones, análogo al ya mencionado a propósito del experimento mental de 1909, sólo que ahora ya no hacía falta recurrir a resonadores ni espejos, más o menos extraños al problema, sino que se consideraban moléculas que se veían frenadas por la radiación como medio continuo, al tiempo que recibían impulsos originados por las fluctuaciones de la radiación. Fue al establecer el correspondiente balance cuando Einstein introdujo por vez primera la direccionalidad de los procesos elementales, si bien tan sólo en el caso de los procesos

²⁹Carta de A. Einstein a M. Besso, 6 de setiembre, 1916. En SPEZIALLI (1994), 131-132. (Énfasis en el original). La versión castellana, que es la que hemos citado, contiene un error: escribe diciembre en lugar de setiembre.

³⁰EINSTEIN (1916), 174.

inducidos existía contribución neta al impulso medio transferido, al no haber dirección privilegiada en la emisión espontánea. Es importante destacar que Einstein llegó a establecer la direccionalidad de los procesos elementales únicamente por razones de coherencia de carácter general: de otra forma no se obtendría “una teoría cuántica consistente”.³¹

En la carta a la que hace referencia nuestra nota 25, Einstein afirmaba que su tratamiento era “completamente cuántico”. Ello no es del todo cierto, en el sentido de que se emplean fórmulas del electromagnetismo maxwelliano que —con rigor y según el propio Einstein reconoce—, por el momento, se consideraba incompatible con los principios mismos de la teoría cuántica. La dificultad es “salvada” por Einstein con un razonamiento peculiar.³²

“Se puede objetar que las ecuaciones (14), (15), y (16) [se refieren a cambios de las densidades de radiación, de las frecuencias y de los ángulos ante transformaciones de Lorentz] están basadas en la teoría de Maxwell del campo electromagnético, que es incompatible con la teoría cuántica. Esta objeción, sin embargo, afecta más a la forma que a la esencia de la cuestión. Cualquiera que sea la forma de la teoría de los procesos electromagnéticos, es seguro que el principio Doppler y la ley de la aberración de la luz resultarán válidas [ello afecta a las ecuaciones (15) y (16)] ... La relación (14) ... es válida de acuerdo a la teoría de la relatividad...”

5 La teoría cuántica de la radiación de Bose

A finales de la primavera de 1924, Bose, un joven profesor bengalí, envió al ya famosísimo profesor Einstein, en Berlín, un trabajo redactado en inglés acompañado de la siguiente nota manuscrita:³³

³¹ *Ibid.*, p. 172.

³² *Ibid.*, p. 178.

³³ Carta de S. Bose a A. Einstein, 4 de junio, 1924. Citada en MEHRA (1982), 565.

“Respetado Señor:

Me he atrevido a enviarle el artículo adjunto para que usted lo examine y me dé su opinión. Estoy deseando saber que piensa sobre él. Verá que he intentado deducir el coeficiente $8\pi\nu^2/c^3$ de la ley de Planck independientemente de la electrodinámica clásica, tan sólo suponiendo que las regiones elementales últimas en el espacio de las fases tienen un volumen h^3 . Yo no sé suficiente alemán como para traducir el trabajo. Si usted cree que vale la pena publicarlo, le quedaría sumamente agradecido si tomara las medidas necesarias para su aparición en *Zeitschrift für Physik*. A pesar de ser por completo un extraño para usted, no tengo reparos en hacerle tal petición. Porque todos somos discípulos suyos aunque sólo nos hayamos podido beneficiar de sus enseñanzas a través de sus escritos. No sé si aún recuerda que alguien, desde Calcuta, pidió su autorización para traducir al inglés sus trabajos sobre relatividad. Usted accedió a la solicitud. El libro ya ha sido publicado. Yo fui el que tradujo su trabajo de relatividad general.”

El trabajo al que Bose hacía referencia llevaba por título “La ley de Planck y la hipótesis de los *quanta* de luz”.³⁴ Había sido enviado previamente para su publicación a la prestigiosa *Philosophical Magazine*, pero fue rechazado por el informe negativo del árbitro científico. Por el contrario, Einstein debió quedar fuertemente impresionado por el contenido del trabajo: en apenas una semana lo tradujo al alemán y lo recomendó para su urgente publicación en *Zeitschrift für Physik*, donde apareció con esta aclaración:³⁵

“Nota del traductor. La deducción de Bose de la fórmula de Planck representa, en mi opinión, un avance importante. El método utilizado suministra también una base para la teoría cuántica de los gases ideales como expondré en otra ocasión.”

Prescindiendo aquí del contenido general del trabajo, así como de las interesantes peripecias de la vida científica de Bose,³⁶ cabe preguntarse dónde radicaba la importancia que Einstein parecía asignar a la contribución del físico bengalí. La cuestión, en este sentido era clara: parecía que, por primera vez, la fórmula de Planck se deducía a partir de un tratamiento exclusivamente corpuscular de la radiación. En el fondo, como si de un gas de moléculas se tratara, sólo que el papel de éstas aparentemente lo desempeñaban ahora los fotones, por entonces ya auténticas partículas con energía e impulso bien establecidos, según las conclusiones obtenidas por Einstein en 1916, que acabamos de comentar en el apartado anterior.

³⁴BOSE (1924).

³⁵*Ibid.*, 1056.

³⁶Para más detalles sobre la vida y sobre la obra científica de S. Bose, puede verse, por ejemplo, NAVARRO (1996).

La similitud entre el tratamiento seguido por Bose en 1924 y el método combinatorio de Boltzmann de 1877, que hemos esbozado en la sección 2, es total; sólo que mientras éste distribuía elementos de energía entre moléculas, Bose distribuía fotones en celdas del correspondiente espacio de la fases. Así, operando esencialmente con la colectividad microcanónica —es decir, empleando el principio de Boltzmann y maximizando la entropía— dedujo la distribución de energía en el equilibrio, lo que le llevó a escribir la expresión:

$$E = \sum_s \frac{8\pi h\nu^{s^3}}{c^3} V \frac{1}{\exp(h\nu^s/kT) - 1} d\nu^s, \quad (10)$$

que “... es equivalente a la fórmula de Planck”.³⁷

Empleando una terminología anacrónica, pero quizás útil para los lectores, es importante destacar que la *indistinguibilidad* que uno espera encontrar como propiedad característica de los fotones —y, tal vez, como gran novedad del trabajo— no aparece explícitamente impuesta, sino que se descubre como una consecuencia del tratamiento empleado. De hecho las ideas que acompañan a esta famosa contribución de Bose —por la que ha pasado a ocupar un lugar de honor dentro de la historia de la física cuántica— no dejan de estar exentas de misterio, al menos por lo que a su génesis se refiere. ¿Cómo pudo lograr, y con tan aparente sencillez, un resultado cuya plena justificación sólo puede parecer posible, para algunos, dentro de un marco entonces aún por diseñar? No hay que esforzarse en buscar la solución al enigma; la respuesta la dio el propio Bose. Y lo hizo con una franqueza que, tal vez, pudiera incluso resultar molesta para los más fundamentalistas en lo que a la concepción del método científico se refiere:³⁸

“No tenía idea de que lo que había hecho era realmente novedoso ... No era yo estadístico hasta el punto de saber que lo que hacía era algo verdaderamente distinto de lo que hubiera hecho Boltzmann, algo distinto de la estadística de Boltzmann... En cierto modo, esa era la misma pregunta que me hizo Einstein cuando nos encontramos [octubre o noviembre de 1925]: ¿cómo había llegado yo a ese método de deducir la fórmula de Planck?”

En cualquier caso se trata de un episodio que ha dado lugar a diferentes análisis historiográficos acerca del alcance del descubrimiento de Bose y, por tanto, de la auténtica participación de éste en el establecimiento de una nueva estadística.³⁹

³⁷BOSE (1924), 1057.

³⁸Extracto de una entrevista de J. Mehra a S. Bose, cincuenta años después de su aportación. Citado en: PAIS (1984), 482.

³⁹Véase, por ejemplo, DELBRÜCK (1980) y BERGIA (1987).

6 De los fotones a las moléculas: el nacimiento de la estadística de Bose-Einstein

Bose, según su propia opinión, no era un estadístico destacado. Einstein sí, por lo que se apercibió inmediatamente, no sólo de la novedad del tratamiento de Bose, sino — sobre todo— de sus implicaciones, como se desprende de su nota como traductor a la que nos hemos referido en nuestra nota 35. En particular se dio cuenta inmediata de que la aplicación del nuevo método a un gas de moléculas llevaba a la sustitución de la tradicional mecánica estadística de Boltzmann por una nueva teoría cuyas características, alcance e implicaciones estaban aún pendientes de precisar.

Esta aplicación fue desarrollada por Einstein entre 1924 y 1925, en dos memorias que contienen las bases de la luego llamada estadística de Bose-Einstein para los gases ideales de moléculas. En el prólogo de la primera de ellas expresa su visión del método propuesto por Bose, así como un anticipo de las primeras aplicaciones. Vale la pena reproducirlo:⁴⁰

“Hasta hoy no existe una teoría cuántica del gas ideal monoatómico exenta de hipótesis arbitrarias. En lo que sigue vamos a rellenar esta laguna gracias a un nuevo procedimiento que se inspira en el del doctor Bose, y sobre el que este autor ha basado una demostración de la fórmula de la radiación de Planck, que merece la mayor consideración por nuestra parte.

El camino seguido, que se remite al propuesto por Bose, se puede caracterizar de la forma siguiente. El espacio de las fases de una estructura elemental (aquí será una molécula) correspondiente a un volumen (tridimensional) se subdivide en “celdas” de dimensión h^3 . Si se consideran muchas de estas estructuras elementales, su distribución (microscópica), la que interviene en termodinámica, está caracterizada por la forma en que las estructuras elementales son distribuidas en aquellas celdas. La “probabilidad” de un estado, definido macroscópicamente (en el sentido de Planck), es igual al número de estados microscópicos diferentes que pueden entenderse como una realización del estado macroscópico. La entropía del estado macroscópico y, por tanto, el comportamiento estadístico y termodinámico del sistema quedan entonces determinados por el principio de Boltzmann.”

En otras palabras: lo que indica Einstein es que va a invertir el sentido de la analogía que en 1905 le sirvió para sugerir la existencia de los *quanta* de radiación. Entonces el comportamiento de las moléculas le dio pistas sobre los *quanta*; ahora el método introducido por Bose para contar la forma de distribuir fotones en celdas le servirá de referencia para un nuevo tratamiento estadístico de las moléculas.

⁴⁰EINSTEIN (1924), 172.

La publicación de 1924 fue inmediatamente seguida de una segunda parte, aparecida ya en 1925, donde se completaban algunos puntos pendientes.⁴¹ La unidad que ambos trabajos representaban en la mente de Einstein se refleja en que el primer apartado del nuevo trabajo aparece como el sexto, al mantener una numeración correlativa respecto al de 1924. Sin entrar en mayores detalles acerca del contenido de ambas memorias,⁴² baste decir que en ellas se aclaran varios enigmas largamente pendientes de solución. Por ejemplo, se dilucidaban ciertos problemas relacionados con la equipartición de la energía, se explicaban teóricamente las anomalías observadas experimentalmente en relación con la ley de Dulong-Petit; se predecía el fenómeno luego conocido como “condensación de Bose-Einstein”; también se precisaba en qué sentido la mecánica estadística de Boltzmann podía ser considerada como una aproximación aceptable de la nueva teoría.

Pero el nuevo método estadístico deparaba una sorpresa que no fueron ni Bose ni Einstein los primeros en detectar. El problema y su vía de solución fueron claramente expuestos por éste en su memoria de 1925:⁴³

“Ha sido criticado por el Sr. Ehrenfest y otros colegas que en la teoría de Bose, y en la análoga mía para el gas ideal, los *quanta* (y las moléculas, respectivamente) no son tratados como entidades estadísticamente independientes entre sí, sin que ello se haya indicado explícitamente en nuestros respectivos trabajos. Ello es completamente exacto. Si se trata a los *quanta* como estadísticamente independientes los unos de los otros, por lo que respecta a su localización, se obtiene la ley de Wien; si se trata a las moléculas de gas de forma análoga, se obtiene la ecuación de estado clásica de los gases perfectos, aunque en el resto se proceda exactamente como Bose y yo mismo hemos hecho. Voy a comparar aquí los dos métodos para el gas, con objeto de mostrar claramente en qué se diferencian y facilitar la comparación entre nuestros resultados y los de la teoría de moléculas independientes.”

El problema detectado por Ehrenfest radicaba, desde una perspectiva actual, en que Bose y Einstein, sin especificarlo, habían considerado *de facto* a los fotones y a las moléculas como partículas indistinguibles en sus respectivos tratamientos. Los habían tratado de la misma forma Boltzmann a sus elementos de energía, sólo que ahora no se trataba de elementos de cálculo sino de auténticas partículas. La parte del tratamiento donde se introducía tal peculiaridad era aquella en la que se asignaban probabilidades a los respectivos estados. Según Einstein —siguiendo a Bose— el número de complejiones

⁴¹EINSTEIN (1925).

⁴²Para una descripción más precisa del contenido de ambas memorias, puede verse, por ejemplo, NAVARRO (1990), 175-194.

⁴³EINSTEIN (1925), 182.

(realizaciones microscópicas) correspondientes a la distribución de n moléculas en z celdas viene dado por

$$W = \frac{(n + z - 1)!}{n!(z - 1)!}. \quad (11)$$

Pero si las moléculas fueran verdaderamente tratadas como entidades independientes —emplear aquí el término *distinguishables* resultaría anacrónico— la expresión para W sería obviamente

$$W = z^n. \quad (12)$$

La justificación de la elección de (11) frente a (12) la hizo Einstein comparando los resultados para la expresión de la entropía que se obtenían empleando una y otra. Su conclusión fue rotunda. Operando dentro del formalismo de la colectividad microcanónica y partiendo de la expresión (11) se lograba obtener simultáneamente una expresión aditiva para la entropía y la deducción teórica del tercer principio de la termodinámica. Por el contrario, partiendo de (12) sólo se podía obtener uno de esos dos resultados: uno u otro, según se procediera; pero no los dos simultáneamente. Ello, en opinión de Einstein, justificaba sobradamente la adopción del nuevo método estadístico basado en (11), en lugar del clásico de Boltzmann basado en (12).

Una vez más, ante la novedad de las ideas asociadas con el nuevo método estadístico, Einstein no se conformó con los resultados obtenidos. En la línea seguida en su trabajo de 1916 —donde, recordemos, introdujo los tres procesos elementales que conducían al fotón— también ahora se planteó una prueba de coherencia de los supuestos empleados. Y para ello volvió a recurrir a un experimento mental con cierta analogía con el de 1909: dos gases separados por una pared que sólo permite el intercambio de moléculas de energía comprendida en un intervalo $(E, E + dE)$.

El correspondiente estudio de las fluctuaciones del número de partículas le condujo a un sorprendente resultado, pues no se obtenía la expresión que cabía esperar para la fluctuación en el número de partículas de un gas de moléculas según la antigua mecánica estadística de Boltzmann, sino otra diferente que incorporaba un término inesperado y misterioso. Parecía como si el nuevo término “recordara” fluctuaciones asociadas a interferencias de movimientos ondulatorios.⁴⁴ Dado que en aquellos días Einstein tenía conocimiento —a través de Paul Langevin (1872-1946)— de la tesis doctoral que acababa de presentar Louis de Broglie (1892-1987) en París,⁴⁵ escribió en el mismo artículo las siguientes reflexiones acerca de los resultados obtenidos:⁴⁶

⁴⁴*Ibid.*, 186-187.

⁴⁵JAMMER (1966), 248-249.

⁴⁶EINSTEIN (1925), 188.

“De las consideraciones anteriores parece que, con cada movimiento [de una molécula], hay un campo ondulatorio asociado, de la misma forma que el campo ondulatorio óptico se asocia al movimiento de los *quanta* de luz. Este campo ondulatorio, cuya naturaleza física resulta por el momento oscura, debe en principio poder detectarse a través de los efectos de los movimientos correspondientes. Así, un haz de moléculas de gas que atraviesa una abertura deberá sufrir una difracción, análoga a la que experimenta un rayo luminoso. Para que un fenómeno de este tipo sea observable, la longitud de onda λ [que escribe como $\lambda = h/mv$ para el caso no relativista] debe ser comparable con las dimensiones de la abertura.”

No se le ocultó a Einstein la dificultad real de llevar a cabo experiencias interesantes en este campo. Las longitudes de onda asociadas a moléculas en movimiento —a temperaturas ordinarias— eran del orden de las dimensiones moleculares, por lo que las difracciones mediante aberturas habían de resultar inviables en la práctica; sí pensó, en cambio, en difracciones mediante colisiones con otras moléculas.⁴⁷ Pero ciertamente son aspectos en los que no llegó mucho más lejos; ni en la detección, ni —sobre todo— en la aclaración de la naturaleza de tan misterioso campo ondulatorio asociado a las moléculas.

Quisiéramos acabar con un ligero comentario, como colofón a este muestrario en el que hemos tratado de exponer algunos ejemplos ilustrativos de mutuas influencias en los desarrollos de la física estadística y de la física cuántica durante el primer cuarto de siglo. La llamada mecánica estadística de Bose-Einstein suele presentarse en los manuales de física cuántica como una consecuencia inevitable de la aplicación de la nueva mecánica cuántica a ciertos agregados de partículas idénticas. En principio nada que objetar, pues se da por supuesto que la situación se enmarca dentro de un contexto de justificación lógica, que es el que preside —y pensamos que debe presidir— la didáctica de las ciencias. Pero, en el episodio que acabamos de tratar, sí cabe resaltar que el contexto del descubrimiento apunta exactamente en dirección opuesta: el método de Bose para la radiación, y su adopción por parte de Einstein para el tratamiento de las moléculas de gas, no sólo precedieron a la formulación de la mecánica ondulatoria sino que, en cierta medida —junto con las ideas de L. de Broglie— jugaron un importante papel en el desarrollo de las ideas que llevaron, en 1926, a Erwin Schrödinger (1887-1961) a la formulación de la mecánica ondulatoria, tal y como éste último no tuvo inconveniente en reconocer:⁴⁸

“... todo ello [los desarrollos de Schrödinger] no habría aparecido aún, y puede que jamás (al menos por lo que a mí respecta) si, en su segundo artículo sobre el gas degenerado, Vd. no me hubiera abierto los ojos acerca de la importancia de las ideas de De Broglie.”

⁴⁷ *Ibid.*, pp. 188-189.

⁴⁸ Carta de E. Schrödinger a A. Einstein, 23 de abril, 1926. Extracto reproducido en JAMMER (1966), 257.

Referencias

- [1] BACH, A. (1990): “Boltzmann’s probability distribution of 1877”. *Archive for History of Exact Sciences* **41**, 1-40.
- [2] BALIBAR, F.; DARRIGOL, O.; JECH, B. (eds.) (1989): *Albert Einstein. Oeuvres choisies*, 4 vol. 1, *Quanta*, Paris, Seuil/CNRS.
- [3] BECK, A. (1989): *The collected papers of Albert Einstein* (vol. 2). *The Swiss years: writings, 1900-1909*. English translation. Princeton, Princeton University Press.
- [4] BERGIA, S. (1987): “Who discovered the Bose-Einstein statistics”. En M. García Doncel et al. (eds.) (1987): *Symmetries in physics (1600-1980)*. Bellaterra, UAB, 221-250.
- [5] BERGIA, S.; NAVARRO, L. (1988): “Recurrences and continuity in Einstein’s research on radiation between 1905 and 1916”. *Archive for History of Exact Sciences* **38**, 79-99.
- [6] BOLTZMANN, L. (1877): “Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respective den Sätzen über das Wärmegleichgewicht”. *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften (Vienna). Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Zweite Abtheilung. Sitzungsberichte* **76**, 373-435.
- [7] BOLTZMANN, L. (1896, 1898): *Vorlesungen über Gastheorie*, Leipzig, J. A. Barth. I Teil, 1896; II Teil, 1898. Versión inglesa, en un sólo volumen, en *Lectures on gas theory*, New York, Dover, 1995.
- [8] BOSE, S. (1924): “Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese”. *Zeitschrift für Physik* **26**, 178-181. Versión inglesa en O. Theimer and B. Ram (1976): “The beginning of quantum statistics”. *American Journal of Physics* **44**, 1056-1057.
- [9] DELBRÜCK, M. (1980): “Was Bose-Einstein statistics arrived at by serendipity?” *Journal of Chemical Education* **57**, 467-470.
- [10] DUGAS, R. (1959): *La théorie physique au sens de Boltzmann*. Neuchâtel, Le Griffon.
HERMANN, A. (1971): *The genesis of quantum theory (1899-1913)*. Cambridge, (Mass.), MIT Press. (Versión original alemana, 1969).
- [11] EINSTEIN, A. (1904): “Zur allgemeinen molekularen Theorie der Wärme”. *Annalen der Physik* **14**, 354-362. Versión inglesa en Beck (1989), 68-77.
- [12] EINSTEIN, A. (1905): “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt”. *Annalen der Physik* **17**, 132-148. Versión inglesa en Beck (1989), 86-103.

- [13] EINSTEIN, A. (1909 a): “Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems”. *Physikalische Zeitschrift*, **10**, 185-193. Versión inglesa en Beck (1989), 357-375.
- [14] EINSTEIN, A. (1909 b): “Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung”. *Physikalische Zeitschrift*, **10**, 817-825. Versión inglesa en Beck (1989), 379-394. Es la reproducción textual de la comunicación presentada por Einstein en Salzburgo.
- [15] EINSTEIN, A. (1916): “Zur Quantentheorie der Strahlung”. *Physikalische Gesellschaft Zürich. Mitteilungen* **16**, 47-62. Una reedición del mismo artículo se publicó, ya en 1917, en *Physikalische Zeitschrift* **18**, 121-128; éste es el trabajo que se cita generalmente. Versión inglesa en Ter Haar (1967), 167-183.
- [16] EINSTEIN, A. (1924): “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases”. *Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin), Physikalisch-mathematische Klasse. Sitzungsberichte* **22**, 261-267. Versión francesa en Balibar et al. (1989), 172-179.
- [17] EINSTEIN, A. (1925) : “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung”. *Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin), Physikalisch-mathematische Klasse. Sitzungsberichte* **23**, 3-14. Versión francesa en Balibar et al. (1989), 180-192.
- [18] JAMMER, M. (1966): *The conceptual development of quantum mechanics*. New York, McGraw Hill.
- [19] KUHN, T. S. (1980): *La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica, 1894-1912*. Madrid, Alianza Editorial. (Versión original inglesa, 1978).
- [20] LANGEVIN, P.; DE BROGLIE, M. (eds.) (1912): *La théorie du rayonnement et les quanta (Rapports et discussions de la réunion tenue à Bruxelles, du 30 octobre au 3 novembre 1911)*. Paris, Gauthier-Villars.
- [21] MEHRA, J.; RECHENBERG, H. (1982): *The historical development of quantum theory* (vol. 2). New York, Springer Verlag.
- [22] NAVARRO, L. (1990): *Einstein profeta y hereje*. Barcelona, Tusquets.
- [23] NAVARRO, L. (1996): “Satyendranath Bose: un cometa fugaz”. *Arbor* **CLIII**, 45-65.
- [24] NAVARRO, L. (1998): “Gibbs, Einstein and the foundations of statistical mechanics”. *Archive for History of Exact Sciences* **53**, 147-180.
- [25] NAVARRO, L. and PÉREZ, E. (2004): “Paul Ehrenfest on the necessity of quanta (1911): discontinuity, quantization, corpuscularity, and adiabatic invariance”. *Archive for History of Exact Sciences* **58**, 97-141.

- [26] PAIS, A. (1984): ‘*El Señor es sutil...*’ *La ciencia y la vida de Albert Einstein*. Barcelona, Ariel. (Versión original inglesa, 1982).
- [27] PAULI, W. (1949): “Einstein’s contributions to *quantum* theory”. En Schilpp (1970), 147-160.
- [28] PLANCK, M. (1900): “Ueber eine Verbesserung der Wien’schen Spectralgleichung”. *Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen* **2**, 202-204. Reproducido en Planck (1958): vol. 1, 687-689. Versión inglesa en Ter Haar, 79-81.
- [29] PLANCK, M. (1901): “Ueber das Gesetz der Energieverteilung in Normalspectrum”. *Annalen der Physik* **4**, 553-563. Reproducido en Planck (1958), 717-727.
- [30] PLANCK, M. (1958): *Physikalische Abhandlungen und Vorträge*, (3 vols.), Braunschweig, F. Vieweg und Sohn.
- [31] SCHILPP, P. A. (ed.) (1970): *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*. (The Library of Living Philosophers). La Salle (Illinois), The Open Court. (Primera edición, 1949).
- [32] SPEZIALI, P. (ed.) (1994): *Albert Einstein. Correspondencia con Michele Besso*. Barcelona, Tusquets. (Versión original francesa, 1972).
- [33] TER HAAR, D. (1967): *The old quantum theory*. Oxford, Pergamon Press.

