

Referenciación al elipsoide WGS-84 de la red de mareógrafos de Andalucía

M. BERROSO ¹, J. GÁRATE ¹, M. CATALÁN PÉREZ DE URQUIOLA ¹,
A. ABOITIZ ² Y O. ÁLVAREZ ²

¹ Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando

² Departamento de Estructura y Propiedades de los Materiales de la Universidad de
Cádiz

RESUMEN

La puesta en órbita de los satélites del Sistema de Posicionamiento Global (GPS) y sus posibilidades geodésicas ha permitido la referenciación de posiciones que habían sido determinadas por procedimientos anteriores al sistema de referencia WGS-84.

Hasta la aparición de los satélites altimétricos la determinación del nivel medio del mar y sus variaciones espacio-temporales sólo se realizaba mediante la determinación y análisis de series temporales obtenidas con mareógrafos, debidamente referenciados a una red geodésica nacional.

El satélite altimétrico TOPEX-POSEIDON dotado, por un lado, de altímetro y radar de apertura sintética y, por otro, de reflectores láser y receptores GPS permite determinar el nivel instantáneo del mar, que a su vez se manifestará en el registro de los mareógrafos. Dicho satélite está posicionado con los sistemas DORIS y GPS.

Este trabajo presenta las posiciones geodésicas de los mareógrafos respecto al elipsoide WGS-84, a fin de poder referir el nivel medio instantáneo del mar determinado por medio de satélites altimétricos y el determinado por medio de los mareógrafos situados a lo largo de la costa, a un solo sistema de referencia.

1. CAMBIOS EN EL NIVEL MEDIO DEL MAR

Hay que distinguir entre la *forma* de la superficie del océano y el *nivel* del mar que miden los mareógrafos a lo largo de la costa. La batimetría del océano y su efecto sobre el geode únicamente presentan cambios

apreciables a lo largo de escalas de tiempo significativas a nivel geológico, por lo que podemos tomar como verdadera la hipótesis de que la forma de la superficie oceánica, y con ella el geoide, permanece constante, variando únicamente la elevación de la superficie marina sobre el fondo.

Entendemos por nivel del mar en una determinada época la altura que alcanzan las aguas para rellenar las cuencas oceánicas en tal momento. Dado que todas las cuencas están intercomunicadas, se trata de un observable global, de tal modo que cualquier cambio de nivel en uno de los océanos, con la consiguiente ruptura del equilibrio anterior, afectará al nivel de todos los demás, produciéndose trasvases de unos a otros hasta que se alcance una nueva situación de equilibrio.

La determinación del nivel de los océanos viene en general condicionada por una serie de efectos interrelacionados.

- El volumen de agua disponible en los océanos varía con aportaciones tanto positivas como son, por ejemplo, lluvias, aguas subterráneas, ríos, deshielo de los casquetes polares, etc., como negativas, por evaporación, efectos volcánicos, etc. Deben incluirse en tal variación los efectos de la dilatación que producen las variaciones de la temperatura del agua y las materias disueltas o en suspensión.
- La forma de las cuencas marinas se encuentra en un constante proceso de modificación, tanto en las zonas costeras por los continuos procesos de erosión y sedimentación, como por los continuos procesos de creación y destrucción de los fondos oceánicos.
- La variación de las situaciones térmicas de la corteza continental y oceánica y su efecto sobre las densidades y el volumen de la materia creada o desaparecida en las fosas y cordilleras.
- La deformación que ocasiona en los fondos de los océanos las variaciones en la columna de agua, de los sedimentos y las variables meteorológicas.

Puede decirse que en general el nivel medio del mar está perturbado por numerosos cambios de corto periodo aunque pueden ser de magnitud considerable, fundamentalmente el efecto combinado del oleaje producido por el viento, las mareas y la influencia de las variaciones de presión. Estas variaciones pueden, en ciertos casos, alcanzar e incluso sobrepasar la decena de metros. A partir de la medida de los mareógrafos en el litoral hay que calcular entre tales perturbaciones el nivel medio

del mar cuya variación anual puede llegar a alcanzar el orden de los milímetros.

De especial interés son las fluctuaciones producidas por las variaciones de presión durante un periodo de tiempo corto. Una disminución de presión de 1 milibar produce un aumento en el nivel del mar del orden de 1 cm. Como la presión en el océano oscila desde unos 930 hasta unos 1080 milibares, la magnitud de la oscilación del nivel oceánico puede llegar a provocar inundaciones en el litoral cuando las bajas presiones coinciden con mareas especialmente altas y vientos fuertes de origen marino.

En general, se admite que la variación secular del nivel medio del océano se debe, en gran parte, al deshielo que se produce por el calentamiento global del planeta. Aunque debe tenerse en cuenta que este cambio térmico no es un proceso actual sino que ha venido produciéndose a nivel planetario desde épocas geológicas, sin embargo, existen causas actuales, como son por ejemplo el efecto contaminante de las crecientes emisiones de dióxido de carbono o el aumento de la deforestación, que a su vez reducen la capacidad de la biosfera para absorber tal cantidad de dióxido de carbono, y que refuerzan el *efecto invernadero* acelerando el mencionado proceso de deshielo, lo que aumenta el riesgo de inundaciones en las áreas costeras.

En el extremo opuesto aparece el efecto compensador que supone el aumento de la elevada y creciente capacidad de almacenamiento de agua en los pantanos, estimada en la actualidad en más de 375 km³.

Por otra parte, en la historia térmica del planeta han ocurrido distintas glaciaciones. La más reciente de estas *edades de hielo* ha sucedido durante el cuaternario, y quizá todavía no ha finalizado. Se le han sobrepuesto varias glaciaciones individuales. La última se inició hace unos 120.000 años, se extendió hasta hace unos 20.000 años, y fue seguida por una retirada de los hielos que produjo un rápido incremento del nivel medio del mar, en el orden de los mm/año, con una tendencia que disminuyó hasta unos 0.2 mm/año hace unos 6.000 años. Hay que tener en cuenta, además que el estudio del nivel medio de los océanos producido por la aportación de agua del deshielo es un proceso muy complejo. Se encuentra dificultado por la depresión que se produce en el fondo oceánico para compensar de forma isostásica las crecientes aportaciones de agua. A este efecto hay que añadir la variación en la densidad del agua producto del calentamiento térmico global, lo que relaciona estos estudios con los objetivos del Global Atmospheric Research Program,

World Climate Research Program y World Ocean Circulation Experiment.

En esta situación y hasta la aparición de las nuevas posibilidades técnicas que se ofrecen con la puesta en órbita de los satélites altimétricos (SEASAT, GEOSAT, ERS1, TOPEX-POSEIDON), la determinación del nivel medio del mar y su variación espacio-temporal sólo era realizable mediante el análisis de las series temporales obtenidas con los mareógrafos instalados en la costa y debidamente referenciados a una red geodésica global.

En todo ello se justifica el interés práctico del estudio de la evolución del nivel medio del océano, en particular en el entorno del Estrecho de Gibraltar, a partir del registro de los mareógrafos instalados en el sur de la península. Sus medidas se relacionan, con precisión subcentimétrica, a las posiciones de sus marcas en Tierra referidas a un sistema global definido por el elipsoide WGS-84. Para ello se utilizan medidas interferométricas sobre las dos frecuencias en las que emiten los satélites de la constelación GPS, lo que permite una mejor definición del nivel medio del mar junto con una aplicación inmediata a la determinación de la zona marítima terrestre.

Éste es el objetivo marcado para la realización del levantamiento geodésico que aquí se presenta y que constituye el encuadre de la red de mareógrafos de la zona andaluza con respecto a la Red Geodésica Nacional, utilizando para ello como referencia el punto geodésico fundamental situado en el Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando, punto que a su vez ha sido posicionado durante la campaña europea EUREF'89. En las proximidades de tal punto, pero también en el interior del Observatorio, se levanta un Punto Geodésico fundamental de la Red Nacional, situado por métodos clásicos.

2. FASES DE LA OBSERVACIÓN: ESTACIONES

El número de equipos disponible para efectuar las observaciones, hizo que se planificara una división de la campaña en dos fases. En la primera, denominada Fase A, y realizada en el mes de abril de 1993, se situaron los mareógrafos correspondientes a la zona occidental de Andalucía localizados en Bonanza (BONA), Rota (ROTA), Huelva (HUEL) y las esclusas del río Guadalquivir en Sevilla (SEVI), junto con el punto de referencia ya mencionado en San Fernando (SFER), estableciéndose una red geodésica que sería orientada por este punto de referencia.

La segunda fase o Fase B tuvo lugar en el mes de mayo del mismo año. En ella se posicionaron los mareógrafos orientales situados en Málaga (MALA) y Almería (ALME), junto con una estación de apoyo en Granada (GRAN), además de repetir las observaciones en el punto fundamental SFER y en las esclusas del Guadalquivir (SEVI). El objetivo de las observaciones efectuadas en este punto era el de obtener una *baselínea común* a ambas fases de la campaña posibilitando así un mutuo enlace entre ellas.

Un problema que a menudo se plantea a la hora de efectuar el posicionamiento de un punto preestablecido es la imposibilidad material de situar la antena del receptor GPS sobre tal punto, y es precisamente el centro eléctrico de la antena el punto que estamos situando con precisión cuando efectuamos observaciones sobre satélites GPS. A nosotros se nos planteó tal problema a la hora de determinar las posiciones de los puntos ROTA, BONA, SEVI, MALA y HUEL. Para salvar este obstáculo introdujimos en las proximidades de cada una de los puntos así señalados una pareja de estaciones auxiliares, donde situamos las antenas de nuestros receptores geodésicos. Tales puntos se conectaron con los mareógrafos, objetivo de nuestro estudio mediante nivelaciones, constituyendo nuevas redes geodésicas.

3. OBSERVADORES E INSTRUMENTACIÓN UTILIZADA

La campaña fue dirigida y coordinada desde el Real Instituto y Observatorio de la Armada por el entonces Director, Almirante Catalán Pérez de Urquiola, junto con D. Manuel Berrocoso, responsable de la instrumentación geodésica del centro. Junto a ellos participaron en tal campaña los observadores que figuran en la Tabla 1.

La instrumentación utilizada fue aquella con la que entonces contaba el Real Instituto y Observatorio de la Armada:

- 2 receptores Trimble 4000 SST
- 2 receptores Trimble 4000 SLD
- 1 receptor Trimble 4000 SLT

Tabla 1. *Distribución de los observadores.*

	Estaciones	
A. Aboitiz	Sevilla	Granada
G. Cartagena	Bonanza	Málaga
J.L.Cueto	Sevilla	Rota
A. García	Bonanza	Granada
B. Jigena	Bonanza	Málaga
J. J. Muñoz	Bonanza	San Fernando
M. Soler	Huelva	Almería
A. Zambrano	Sevilla	Rota

Dichos equipos garantizan, junto con el software de tratamiento de datos TRIMVEC-PLUS de Trimble Navigation y el de compensación de redes geodésicas TRIMNET de la misma casa, y siempre que haya un número suficiente de datos observados sobre 4 satélites, unos niveles de precisión, que son función de la longitud de la base línea observada, en partes por millón de tales distancias según el propio fabricante (ppm)

- $1 \text{ cm} + 2 \text{ ppm } L$ en longitud

- $1'' + 5/L$ en azimut

- $2 \text{ cm} + 2 \text{ ppm } L$ en altitud

donde L es la distancia en kilómetros que separa los puntos observados.

Por otra parte, para el despliegue de los receptores se tuvo en cuenta fundamentalmente la distancia entre los puntos a observar, de modo que el más cercano a la estación de referencia en cada una de las fases fuera

observado con el receptor 4000 SLT, que sólo recibe en la frecuencia L1. Esto da lugar a mayores inexactitudes producidas por la dificultad de modelar el efecto ionosférico, que no puede ser obviado por medio de la relación entre las dos frecuencias de observación conocida como frecuencia libre de ionosfera. Y ya que tal efecto es mayor cuanto mayor sea la distancia entre los puntos a observar era aconsejable procurar una separación lo menor posible entre ese receptor y la estación de referencia.

Tabla 2 a. Instrumentación utilizada en la fase A.

Fase A					
	Sesiones				
	120-1	120-2	121-1	121-2	122-2
San Fernando	SST	SST	SST	SST	SST
Rota 1	SLT	SLT			
Rota 2			SLT	SLT	SLT
Bonanza 1	SLD	SLD			
Bonanza 2			SLD	SLD	SLD
Sevilla 1	SLD	SLD			
Sevilla 2			SLD	SLD	SLD
Huelva 1	SST	SST	SST		
Huelva 2				SST	SST

En las tablas 2 a y 2 b se muestra la distribución de equipos asignados a cada uno de los lugares de observación. La distinción entre los puntos 1 y 2 de varias estaciones corresponde a la necesidad de efectuar medidas excéntricas con respecto al mareógrafo, por la imposibilidad material de situar sobre ellos la antena del receptor GPS.

Tabla 2 b. Instrumentación utilizada en la fase B.

Fase B				
	Sesiones			
	148-1	148-2	149-1	149-2
San Fernando	SST	SST	SST	SST
Málaga 1	SLD	SLD		
Málaga 2			SLD	SLD
Sevilla 1	SLT	SLT		
Sevilla 2			SLT	SLT
Granada	SST	SST	SST	SST
Almería	-	SLD	SLD	SLD

4. DESARROLLO DE LAS OBSERVACIONES

En la época en que se realizaron las observaciones estaba finalizando el despliegue total de la constelación GPS, por lo que hubo que efectuar un plan previo, con ayuda del software TRIMPLAN, de TRIMBLE NAVIGATION, para optimizar el número de satélites a observar de modo simultáneo en la zona. Como resultado se decidió efectuar una campaña en la que las sesiones duraran un mínimo de 7 horas, con una máscara de elevación de 15° , tomando datos cada 15 segundos. En la fase A se admitía un número mínimo de 3 satélites, mientras que en la fase B se aumentó dicho número mínimo a 4 satélites. Las tablas 2 a y 2 b reflejan los resultados del planeamiento, junto con los equipos que se dispusieron en cada uno de los puntos a observar.

5. RESULTADOS

El procesado posterior de los datos se realizó con los algoritmos de triples y dobles diferencias de portadora batida, para cada una de las baselíneas que parten del punto San Fernando, por ser éste el de coordenadas precisas conocidas. Se utilizó el software TRIMMBP, para la reducción de las observaciones y el software TNL para ajuste de las baselíneas. Las tablas 3 a y 3 b muestran los resultados obtenidos tanto en el sistema elipsódico, como en el cartesiano OXYZ, que hemos mantenido con objeto de, como se verá posteriormente, efectuar la reducción de las observaciones excéntricas a los punto descados.

Tabla 3 a. Resultados obtenidos en la fase A.

		Coordenadas Ajustadas	σ		Coordenadas cartesianas
San Fernando	Latitud	36°27'51".631		X	5105520.458
	Longitud	6°12'20".345	FIJAS	Y	-555146.195
	Altura	85.853 m.		Z	3769804.170
Bonanza 1	Latitud	36°48'11".246	0.009	X	5081915.987
	Longitud	6°20'10".736	0.020	Y	-564309.798
	Altura	49.910 m.	0.020	Z	3799952.300
Bonanza 2	Latitud	36°48'11".364	0.006	X	5081912.466
	Longitud	6°20'11".215	0.011	Y	-564321.357
	Altura	49.864 m.	0.021	Z	3799955.194
Huelva 1	Latitud	37°08'32".537	0.004	X	5054071.740
	Longitud	6°51'34".740	0.008	Y	-608001.399
	Altura	55.191 m.	0.010	Z	3830034.838
Huelva 2	Latitud	37°08'32".451	0.006	X	5054074.159
	Longitud	6°51'34".428	0.012	Y	-607993.933
	Altura	55.080 m.	0.016	Z	3830032.657
Rota 1	Latitud	36°36'55".861	0.003	X	5094351.350
	Longitud	6°19'46".585	0.006	Y	-565086.817
	Altura	49.925 m.	0.007	Z	3783261.497
Rota 2	Latitud	36°36'55".903	0.005	X	5094350.110
	Longitud	6°19'46".763	0.009	Y	-565091.128
	Altura	49.943 m.	0.013	Z	3783262.545
Sevilla 1	Latitud	37°19'51".812	0.010	X	5050064.017
	Longitud	5°59'44".796	0.018	Y	-530405.933 9
	Altura	58.115 m.	0.019	Z	3846709.156
Sevilla 2	Latitud	37°19'51".878	0.027	X	5050062.220
	Longitud	5°59'44".997	0.038	Y	-530410.712
	Altura	58.055 m.	0.042	Z	3846710.745

Tabla 3 b. Resultados obtenidos en la fase B.

		Coordenadas Ajustadas	σ		Coordenadas cartesianas
San Fernando	Latitud	36°27'51".631		X	5105520.458
	Longitud	6°12'20".345	FIJAS	Y	-555146.195
	Altura	85.853 m.		Z	3769804.170
Sevilla 1	Latitud	37°19'51".873	0.011	X	5050064.372
	Longitud	5°59'44".775	0.031	Y	-530406.271
	Altura	58.109 m.	0.027	Z	3846708.636
Sevilla 2	Latitud	37°19'51".880	0.011	X	5050063.837
	Longitud	5°59'44".865	0.033	Y	-530408.448
	Altura	57.907 m.	0.025	Z	3846708.636
Málaga 1	Latitud	36°42'45".782	0.009	X	5103963.994
	Longitud	4°24'55".492	0.027	Y	-394109.919
	Altura	48.759 m.	0.025	Z	3791909.659
Málaga 2	Latitud	36°42'45".782	0.010	X	5103961.458
	Longitud	4°24'55".460	0.026	Y	-394108.907
	Altura	48.477 m.	0.026	Z	3791912.683
Granada	Latitud	37°11'24".811	0.007	X	5077905.898
	Longitud	3°35'43".201	0.019	Y	-319059.562
	Altura	827.934 m.	0.017	Z	3834732.558
Almería	Latitud	36°49'56".000	0.009	X	5106412.332
	Longitud	2°29'05".871	0.024	Y	-221608.180
	Altura	52.505 m.	0.023	Z	38302538.192

6. SITUACIÓN DE PUNTOS EXCÉNTRICOS

El posicionamiento en algunas estaciones de la red geodésica que se esté determinando presenta imposibilidades físicas de estación de los instrumentos (teodolitos, distanciómetros, equipos GPS, etc.) necesarios para dicha determinación. Debido a estas dificultades se realizan observaciones en estaciones auxiliares denominadas *excéntricas*, a partir de las cuales se pueden determinar las coordenadas geodésicas de las estaciones principales.

Vamos a describir el método a seguir para la resolución de este tipo de problemas y su aplicación a las estaciones: Rota, Bonanza, Sevilla, Huelva y Málaga, para lo que definiremos, en primer lugar, los sistemas de referencia general y local.

6.1. Sistema de Referencia General

Este sistema de referencia, que queda determinado tomando:

- **Origen (O)**: centro de masas de la Tierra.
- **Eje Z**: paralelo al eje de rotación terrestre.
- **Eje X**: perpendicular al eje Z, en la intersección del Ecuador terrestre y el meridiano de Greenwich.
- **Eje Y**: perpendicular al plano XOZ, formando un triedro directo.

se denomina *Sistema Cartesiano Terrestre*. Cuando se asocia a un elipsoide, cuyo semieje mayor y su achatamiento deben definirse como aproximación a la figura de la Tierra, se obtiene el *Sistema Geodésico Elipsódico*, determinado por sus meridianos y paralelos, de tal manera que un punto $P(x, y, z)$ situado a una altitud h por encima del elipsoide verifica la expresión siguiente:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

6.2. Sistema de Referencia Local

A partir del sistema anterior, se define un *sistema de referencia local* como sigue:

- **Origen (A)**: un punto A determinado de coordenadas φ, λ y a una altitud h sobre el elipsoide. Sus coordenadas cartesianas se fijan mediante las ecuaciones de transformación.
- **Ejes z, y**: determinados por el plano meridiano del sistema general de longitud λ . El eje y es paralelo a la tangente de la sección meridiana del elipsoide, considerado positivo hacia el Norte. El eje z es perpendicular al eje y, formando un ángulo de $(\pi/2 - \varphi)$ con el eje de rotación terrestre.
- **Eje x**: se deduce por rotación de $\pi/2$ en sentido retrógrado.

El plano xAy se denomina *plano horizontal* o plano del horizonte y es paralelo al plano tangente al elipsoide en el punto proyección de A sobre el elipsoide que se esté considerando.

6.3. Desarrollo del método

El método operacional aplicado para la determinación de las coordenadas geodésicas geocéntricas de una estación a partir de las coordenadas cartesianas de dos estaciones auxiliares consiste en el siguiente proceso:

1. Dadas las coordenadas cartesianas geocéntricas de dos estaciones A y B, transformar las coordenadas cartesianas de la estación B a un sistema de referencia local con origen en A, obteniéndose las coordenadas topocéntricas de B. La transformación de un sistema de referencia general a un sistema local se realiza en los tres pasos siguientes:
 - a) Traslación de OA.
 - b) Rotación alrededor del eje Z, en sentido positivo con un ángulo de $\pi/2 + \lambda$.
 - c) Rotación alrededor de la nueva dirección del eje X, en sentido positivo con un ángulo $\pi/2 - \varphi$.

La expresión matricial de esta transformación, salvo una traslación, sería:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) R_3 \left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

así, cualquier punto B(X_B, Y_B, Z_B) se puede expresar con respecto al sistema local con origen en A, cuyas coordenadas cartesianas respecto al sistema general son (X_A, Y_A, Z_A), mediante la expresión:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = R_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A \right) R_3 \left(\frac{\pi}{2} - \lambda_A \right) \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix}$$

de donde

$$x_B = -\Delta X \sin \lambda_A + \Delta Y \cos \lambda_A$$

$$y_B = -\Delta X \cos \lambda_A \sin \varphi_A - \Delta Y \sin \lambda_A \sin \varphi_A + \Delta Z \cos \varphi_A$$

$$z_B = \Delta X \cos \lambda_A \cos \varphi_A - \Delta Y \sin \lambda_A \cos \varphi_A + \Delta Z \sin \varphi_A$$

2. Supuesta una aproximación plana ($z_A = z_B$), determinar las coordenadas topocéntricas de la estación principal C, a partir de estas coordenadas y las medidas de los tres lados del triángulo plano formado por las estaciones auxiliares y la estación principal.

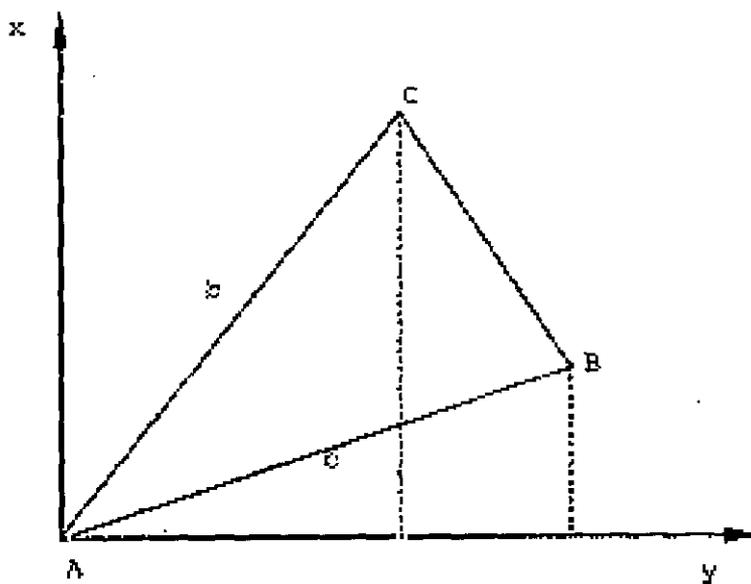


Figura 1. Aproximación plana.

Aplicando el teorema del coseno y la expresión del seno de un ángulo en función del semiperímetro del triángulo, se obtiene:

$$\cos \alpha = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

de donde:

$$\alpha = \arctan \frac{4 \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a^2 - b^2 - c^2}$$

como, por otra parte:

$$\tan \alpha_1 = \frac{y_B}{x_B} \Rightarrow \alpha_1 = \arctan \frac{y_B}{x_B}$$

resulta:

$$\begin{aligned} x_C &= b \cos(\alpha + \alpha_1) \\ y_C &= b \sin(\alpha + \alpha_1) \\ z_C &= 0 \end{aligned}$$

3. Transformar las coordenadas topocéntricas de la estación principal C, a coordenadas geocéntricas cartesianas (X_C, Y_C, Z_C) . Debido a que

$$R_{GL}^{-1} = R_{GL}^T = R_{LG}$$

la transformación inversa, de local a general, sería:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_{GL}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_{GL}^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_{LG} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

consecuentemente

$$\begin{aligned} X_B &= X_A - x_B \sin \lambda_A - y_B \sin \varphi_A \cos \lambda_A + z_B \cos \varphi_A \cos \lambda_A \\ Y_B &= Y_A + x_B \cos \lambda_A - y_B \sin \varphi_A \sin \lambda_A + z_B \cos \varphi_A \sin \lambda_A \\ Z_B &= Z_A + y_B \cos \varphi_A + z_B \sin \varphi_A \end{aligned}$$

4. Transformar las coordenadas cartesianas geocéntricas de la estación principal C, a coordenadas geodésicas geocéntricas: latitud, longitud y altura sobre el elipsoide que se esté considerando.

Las fórmulas de cambio de coordenadas geodésicas a coordenadas rectangulares cartesianas son

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{aligned}$$

donde

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

invirtiendo este sistema, se obtienen las coordenadas geodésicas. La longitud se obtiene mediante:

$$\tan \lambda = \frac{Y}{X}$$

teniendo en cuenta el valor de N, se considera:

$$(Z + e^2 N \sin \varphi) = (N + h) \sin \varphi = Z'$$

mediante un proceso de aproximaciones sucesivas se resuelve el problema del cálculo de la latitud. Así, en una primera aproximación se obtiene:

$$\tan \varphi = \frac{Z'}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

Este valor obtenido para la latitud se introduce nuevamente en las expresiones de N y Z', realizando una siguiente aproximación. Este proceso converge rápidamente, sea cual sea el valor de h y en general con tres aproximaciones es suficiente. En la primera aproximación se toma para el valor de la latitud, la latitud geocéntrica correspondiente a las coordenadas X,Y,Z. El valor de h se obtiene mediante:

$$(N + h) = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

6.4. Aplicación y resultados

ESTACIÓN: **ROTA (Base Naval)**

ESTACIONES AUXILIARES: Rota 1, Rota 2

Coordenadas cartesianas geocéntricas: ROTA 1

$$X = 5094351.350$$

$$Y = -565086.817$$

$$Z = 3783261.497$$

Coordenadas cartesianas geocéntricas: ROTA 2

$$X = 5094350.110$$

$$Y = -565091.128$$

$$Z = 3783262.545$$

Distancias medidas:

$$\text{Rota} - \text{Rota 1} = 5.43 \text{ mts.}$$

$$\text{Rotam} - \text{Rota 2} = 5.65 \text{ mts.}$$

$$\text{Rota 1} - \text{Rota 2} = 4.64 \text{ mts.}$$

Coordenadas cartesianas geocéntricas:

$$X = 5094354.137$$

$$Y = -565089.092$$

$$Z = 3783257.430$$

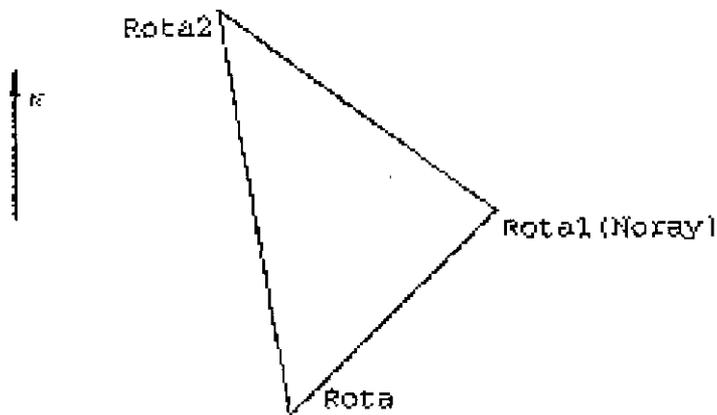


Figura 2. Solución en Rota.

Coordenadas geodésicas elipsólicas:

- Latitud = $36^{\circ}36'55''7108$
- Longitud = $6^{\circ}19'46''6839$
- Altitud = 49.92 mts

ESTACIÓN: **Bonanza (Muelle)**

ESTACIONES AUXILIARES: Bonanza 1, Bonanza 2

Coordenadas cartesianas geocéntricas: Bonanza 1

$$\begin{aligned} X &= 5081915.987 \\ Y &= -564309.798 \\ Z &= 3799952.300 \end{aligned}$$

Coordenadas cartesianas geocéntricas: Bonanza 2

$$\begin{aligned} X &= 5081912.466 \\ Y &= -564321.357 \\ Z &= 3799955.194 \end{aligned}$$

Distancias medidas:

$$\begin{aligned} \text{Bonanza} - \text{Bonanza 1} &= 14.94 \text{ mts.} \\ \text{Bonanza} - \text{Bonanza 2} &= 13.48 \text{ mts.} \\ \text{Bonanza 1} - \text{Bonanza 2} &= 12.44 \text{ mts.} \end{aligned}$$

Coordenadas cartesianas geocéntricas:

$$\begin{aligned} X &= 5081923.975 \\ Y &= -564315.204 \\ Z &= 3799940.890 \end{aligned}$$

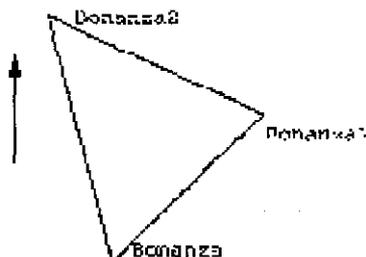


Figura 3. Solución en Bonanza.

Coordenadas geodésicas elipsólicas:

- Latitud = $36^{\circ}48'10''8150$
- Longitud = $6^{\circ}20'10''9377$
- Altitud = 49.90 mts

ESTACIÓN: **Sevilla (Exclusas)**

ESTACIONES AUXILIARES: Sevilla 1, Sevilla 2

Coordenadas cartesianas geocéntricas: Sevilla 1

$$X = 5050064.372$$

$$Y = -530406.271$$

$$Z = 3846708.636$$

Coordenadas cartesianas geocéntricas: Sevilla 2

$$X = 5050063.837$$

$$Y = -530408.448$$

$$Z = 3846708.701$$

Distancias medidas:

$$\text{Sevilla} - \text{Sevilla 1} = 5.14 \text{ mts.}$$

$$\text{Sevilla} - \text{Sevilla 2} = 5.14 \text{ mts.}$$

$$\text{Sevilla 1} - \text{Sevilla 2} = 2.08 \text{ mts.}$$

Coordenadas cartesianas geocéntricas:

$$X = 5050061.244$$

$$Y = -530407.341$$

$$Z = 3846712.572$$

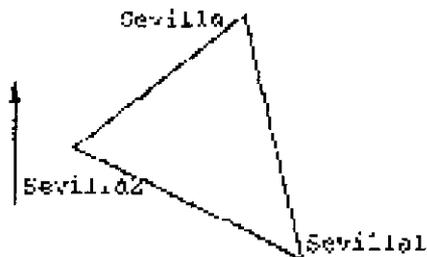


Figura 4. Solución en Sevilla.

Coordenadas geodésicas elipsódicas:

- Latitud = $37^{\circ}19'52''0330$
- Longitud = $5^{\circ}59'44''8312$
- Altitud = 58.11 mts

ESTACIÓN: Málaga (Muelle)

ESTACIONES AUXILIARES: Málaga 1, Málaga 2

Coordenadas cartesianas geocéntricas: Málaga 1

$$\begin{aligned} X &= 5103963.994 \\ Y &= -394109.919 \\ Z &= 3791909.659 \end{aligned}$$

Coordenadas cartesianas geocéntricas: Málaga 2

$$\begin{aligned} X &= 5103961.458 \\ Y &= -394108.907 \\ Z &= 3791912.683 \end{aligned}$$

Distancias medidas:

$$\begin{aligned} \text{Malaga} - \text{Malaga 1} &= 4.87 \text{ mts.} \\ \text{Malaga} - \text{Malaga 2} &= 4.99 \text{ mts.} \\ \text{Malaga 1} - \text{Malaga 2} &= 4.05 \text{ mts.} \end{aligned}$$

Coordenadas cartesianas geocéntricas:

$$\begin{aligned} X &= 5103962.774 \\ Y &= -394114.497 \\ Z &= 3791910.819 \end{aligned}$$

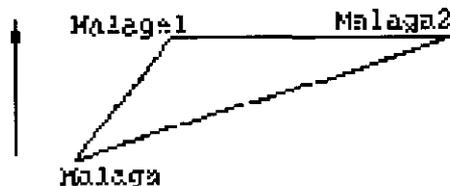


Figura 5. Solución en Málaga.

Coordenadas geodésicas elipsóidicas:

- Latitud = $36^{\circ}42'45''6993$
- Longitud = $4^{\circ}24'55''6797$
- Altitud = 48.76 mts

ESTACIÓN: **Huelva (Muelle)**

ESTACIONES AUXILIARES: Huelva 1, Huelva 2

Coordenadas cartesianas geocéntricas: Huelva 1

$$X = 51054701.740$$

$$Y = -608001.399$$

$$Z = 3830034.838$$

Coordenadas cartesianas geocéntricas: Huelva 2

$$X = 51054704.159$$

$$Y = -607993.933$$

$$Z = 3830032.657$$

Distancias medidas:

$$\text{Huelva} - \text{Huelva 1} = 8.19 \text{ mts.}$$

$$\text{Huelva} - \text{Huelva 2} = 8.92 \text{ mts.}$$

$$\text{Huelva 1} - \text{Huelva 2} = 8.12 \text{ mts.}$$

Coordenadas cartesianas geocéntricas:

$$X = 5054067.529$$

$$Y = -607997.876$$

$$Z = 3830041.015$$

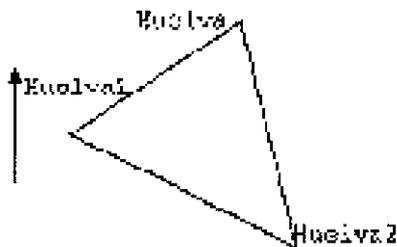


Figura 6. Solución en Huelva.

Coordenadas geodésicas elipsólicas:

- Latitud = $37^{\circ}8'32''8501$
- Longitud = $6^{\circ}51'34''7238$
- Altitud = 55.25 mts