

Sur la Convergence des D^m -splines d'ajustement pour des données exactes ou bruitées

M. C. LÓPEZ DE SILANES et R. ARCANGÉLI

ABSTRACT. Let Ω be a bounded open subset of \mathfrak{R}^n containing the data points, d the Hausdorff distance from the set of data points to $\bar{\Omega}$ and ε the smoothing parameter. Assume that $\varepsilon = o(d^{-n})$, $d \rightarrow 0$, and in addition when the data are noisy, that the «white noise» hypothesis is satisfied. Then, for smoothing of exact or noisy data with D^m -splines, convergence and error estimates results are obtained. These results improve previous ones given by F. Utreras or the authors.

1. INTRODUCTION

Les D^m -splines (sur \mathfrak{R}^n) constituent un cas particulier des splines d'ordre (m, s) , dont la théorie est due à J. Duchon [5, 6, 7]: les splines d'ordre (m, s) sont des fonctions régulières dont la définition résulte d'un critère de minimisation dans un espace «de type Sobolev», l'espace $X^{m,s}$, et les D^m -splines ne sont autres que les splines d'ordre $(m, 0)$ (la définition de l'espace correspondant $X^{m,0}$, encore noté $D^{-m}L^2$, est rappelée au paragraphe 2 et celle des D^m -splines d'ajustement au paragraphe 3).

Soit Ω un ouvert borné de \mathfrak{R}^n tel que $\bar{\Omega}$ contienne les points de données. L'étude de la convergence des D^m -splines d'ajustement et de l'erreur d'approximation correspondante a fait l'objet de différents travaux: D. Ragozin [12], en dimension 1, et F. Utreras [14], en dimension quelconque, ont donné des résultats de convergence et d'erreur dans $H^{m-1}(\Omega)$ pour des données *exactes* ou *bruitées*. Nous-mêmes [10] avons, dans le cas où les données sont *exactes* et le paramètre d'ajustement ε *borné*, montré la convergence dans $X^{m,s}$ des splines d'ajustement d'ordre (m, s) et obtenu des estimations dans $H^{m+s}(\Omega)$ de l'erreur d'approximation par splines d'ajustement d'ordre (m, s) .

Au paragraphe 4, nous étudions le rôle de différentes conditions dans la convergence des D^m -splines d'ajustement pour des données exactes, quand la distance de Hausdorff d de l'ensemble des points de données à $\bar{\Omega}$ tend vers 0. Sous l'hypothèse $\varepsilon = o(d^{-n})$, $d \rightarrow 0$, nous montrons la convergence dans $D^m L^2$, améliorant ainsi le résultat de [10]. On peut noter que la condition $\varepsilon = o(d^{-n})$ est nécessaire et suffisante dans le cas où les ensembles de points de données satisfont à une propriété de *régularité asymptotique* (vérifiée trivialement par les ensembles de points uniformément répartis).

Le paragraphe 5 est consacré à l'étude de la convergence des D^m -splines d'ajustement pour des données bruitées. Nous montrons d'abord l'impossibilité, dans une situation réaliste, d'obtenir la convergence (déterministe) dans $H^m(\Omega)$ lorsque les données sont entachées d'erreurs de mesure. Nous introduisons alors l'hypothèse probabiliste du *bruit blanc* et, utilisant le théorème de convergence du paragraphe 4 et un résultat de F. Utreras [14], nous déterminons une condition sur ε permettant d'expliciter des estimations (et la convergence vers 0) de l'espérance mathématique des carrés des seminormes $|\cdot|_{i,\Omega}$ de l'erreur pour $i = 0, \dots, m$.

On désigne par «ouvert de \mathfrak{R}^n à frontière lipschitzienne» un ouvert (non vide borné connexe) de \mathfrak{R}^n à *frontière lipschitzienne au sens de J. Nečas* [11]. Pour tout $i \in \mathfrak{N}$, on désigne par $P_i = P_i(\mathfrak{R}^n)$ l'espace vectoriel des (fonctions) polynômes sur \mathfrak{R}^n de degré $\leq i$ par rapport à l'ensemble des variables et, pour tout $i \in \mathfrak{N}$ et pour tout ouvert non vide Ω de \mathfrak{R}^n , par $P_i(\Omega)$ l'espace vectoriel des restrictions à Ω des fonctions de P_i . Pour la définition d'«ensemble $P_i(\Omega)$ -unisolvant» on renvoie à P. G. Ciarlet [2]. Enfin, la même lettre C désignera *diverses constantes strictement positives*.

2. ESPACES FONCTIONNELS

Soit Ω un ouvert non vide de \mathfrak{R}^n . Pour tout $i \in \mathfrak{N}$, on désigne par $H^i(\Omega)$ l'espace de Sobolev usuel, muni de la norme

$$\|v\|_{i,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq i} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathfrak{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et où $\partial^\alpha v$ désigne la dérivée partielle α -ième de v . On utilise également les semi-normes

$$|v|_{j,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=j} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad 0 \leq j \leq i.$$

Soient m et $n \in \mathfrak{N}^*$ tels que

$$m > n/2.$$

On désigne par $D^{-m}L^2(\mathfrak{R}^n)$, ou plus brièvement par $D^{-m}L^2$, l'espace de Beppo-Levi

$$\left\{ v \in D'(\mathfrak{R}^n); \forall \alpha \in \mathfrak{R}^n, |\alpha| = m, \partial^\alpha v \in L^2(\mathfrak{R}^n) \right\},$$

où $D'(\mathfrak{R}^n)$ est l'espace des distributions sur \mathfrak{R}^n . Rappelons quelques propriétés fondamentales de l'espace $D^{-m}L^2$:

- muni de la semi-norme

$$|v|_m = \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\mathfrak{R}^n} |\partial^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

où $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, et du semi-produit scalaire associé $(\cdot, \cdot)_m$, $D^{-m}L^2$ est un espace «semi-hilbertien», i.e. complet pour cette semi-norme (cf. J. Duchon [5]);

- soit Ω^* un ouvert non vide borné connexe de \mathfrak{R}^n ; muni de la norme

$$\|v\|_m^{\Omega^*} = \left(\int_{\Omega^*} |v(x)|^2 dx + |v|_m^2 \right)^{1/2},$$

$D^{-m}L^2$ est un espace de Hilbert dont la topologie est indépendante de Ω^* (cf. J. Nečas [11]); dans la suite on supposera $D^{-m}L^2$ muni d'une norme $\|\cdot\|_m^{\Omega^*}$, que l'on écrira simplement $\|\cdot\|_m$, sans faire référence à un ouvert Ω^* particulier;

- soit Ω un ouvert de \mathfrak{R}^n à frontière lipschitzienne; alors (cf. J. Duchon [7], J. Nečas [11])

$$(2-1) \quad \left| \begin{array}{l} \text{l'opérateur de restriction à } \Omega \text{ est} \\ \text{linéaire continu de } D^{-m}L^2 \text{ sur } H^m(\Omega); \end{array} \right.$$

il en résulte que

$$(2-2) \quad D^{-m}L^2 \hookrightarrow C^0(\mathfrak{R}^n),$$

où \hookrightarrow désigne l'injection continue.

Donnons, pour terminer ce paragraphe, un résultat d'équivalence de normes.

Proposition 2.1. Soient Ω un ouvert de \mathfrak{R}^n à frontière lipschitzienne et $B_O = \{b_{O1}, \dots, b_{OM}\}$ un sous-ensemble $P_{m-1}(\Omega)$ -unisolvant de points de $\overline{\Omega}$.

Alors il existe $r > 0$ tel que, si \mathcal{B}_r désigne l'ensemble des M -uplets $B = \{b_1, \dots, b_M\}$ de points de $\bar{\Omega}$ satisfaisant à la condition

$$(2-3) \quad \forall j = 1, \dots, M, |b_j - b_{O_j}| \leq r,$$

l'application $|\cdot|_m^B$, définie pour tout $B \in \mathcal{B}_r$ par

$$|v|_m^B = \left(\sum_{j=1}^M |v(b_j)|^2 + |v|_m^2 \right)^{1/2},$$

soit une norme sur $D^{-m}L^2$ uniformément équivalente sur \mathcal{B}_r à la norme $\|\cdot\|_m$.

Démonstration. 1) D'après (2-2),

$$\exists C, \forall B \in \mathcal{B}_r, \forall v \in D^{-m}L^2: |v|_m^B \leq C \|v\|_m.$$

2) Pour tout $v \in D^{-m}L^2$ et pour tout $B \in \mathcal{B}_r$, on a évidemment:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^M |v(b_{O_j})|^2 \leq \sum_{j=1}^M |v(b_{O_j}) - v(b_j)|^2 + \sum_{j=1}^M |v(b_j)|^2.$$

Il résulte du théorème d'immersion hölderienne pour l'espace $H^m(\Omega)$, de (2-3) et de (2-1) que

$$\begin{cases} \forall \gamma > 0, \exists r > 0, \forall B \in \mathcal{B}_r, \forall v \in D^{-m}L^2: \\ \sum_{j=1}^M |v(b_{O_j}) - v(b_j)|^2 \leq \gamma^2 \|v\|_m^2, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \forall \gamma > 0, \exists r > 0, \forall B \in \mathcal{B}_r, \forall v \in D^{-m}L^2: \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M |v(b_{O_j})|^2 + |v|_m^2 - \gamma^2 \|v\|_m^2 \leq (|v|_m^B)^2. \end{cases}$$

Or (cf. M. C. López de Silanes et R. Arcangéli [10]), l'application $v \rightarrow \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^M |v(b_{O_j})|^2 + |v|_m^2 \right)^{1/2}$ est une norme sur $D^{-m}L^2$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_m$. On en déduit que

$$\begin{cases} \exists C' > 0, \forall \gamma > 0, \exists r > 0, \forall B \in \mathcal{B}_r, \forall v \in D^{-m}L^2: \\ (C'^2 - \gamma^2) |v|_m^2 \leq (|v|_m^B)^2. \end{cases}$$

et le résultat suit en fixant r à partir de la condition $\gamma < C'$. ■

3. D^m -SPLINES D'AJUSTEMENT (SUR \mathbb{R}^n)

Rappelons la définition de ces splines, due à J. Duchon [6]. Soient toujours m et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m > n/2$. On suppose donnés:

- un ouvert Ω de \mathbb{R}^n à frontière lipschitzienne;
- un sous-ensemble \mathfrak{D} de \mathbb{R}_+^* admettant 0 pour point d'accumulation;
- pour tout $d \in \mathfrak{D}$, un ensemble ordonné A^d de $N = N(d)$ points distincts de $\bar{\Omega}$ contenant un sous-ensemble P_{m-1} -unisolvant.

Pour tout $d \in \mathfrak{D}$, on désigne par $\rho^d \in \mathcal{L}(D^{-m}L^2, \mathbb{R}^N)$ l'opérateur défini par

$$\rho^d v = (v(a))_{a \in A^d}$$

(la continuité de ρ^d résulte de (2-2)). On note $\langle . \rangle$ et $\langle ., . \rangle$ respectivement la norme et le produit scalaire euclidiens dans \mathbb{R}^N . Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $d \in \mathfrak{D}$ et pour tout $\beta^d \in \mathbb{R}^N$, on pose:

$$\forall v \in D^{-m}L^2, J_\varepsilon^d(v) = \langle \rho^d v - \beta^d \rangle^2 + \varepsilon |v|_m^2$$

et on considère le problème: trouver σ_ε^d solution de

$$(3-1) \quad \begin{cases} \sigma_\varepsilon^d \in D^{-m}L^2, \\ \forall v \in D^{-m}L^2, J_\varepsilon^d(\sigma_\varepsilon^d) \leq J_\varepsilon^d(v). \end{cases}$$

Le problème (3-1) admet une solution unique (cf. J. Duchon [6]), la « D^m -spline d'ajustement (sur \mathbb{R}^n) relative à A^d, β^d et ε », qui est également la solution unique du problème variationnel: trouver σ_ε^d solution de

$$(3-2) \quad \begin{cases} \sigma_\varepsilon^d \in D^{-m}L^2, \\ \forall v \in D^{-m}L^2, \langle \rho^d \sigma_\varepsilon^d, \rho^d v \rangle + \varepsilon (\sigma_\varepsilon^d, v)_m = \langle \beta^d, \rho^d v \rangle. \end{cases}$$

De plus, la solution de (3-1) et (3-2) est explicitement connue (cf. J. Duchon [6]):

$$\sigma_\varepsilon^d(x) = \sum_{a \in A^d} \lambda_a K_{2m-n}(x-a) + p(x),$$

où $p \in P_{m-1}$ et

$$K_{2m-n}(x) = \begin{cases} |x|^{2m-n}, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ |x|^{2m-n} \text{ Log } |x|, & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

(les coefficients λ_a et le polynôme p sont déterminés par la résolution d'un système linéaire).

4. CONVERGENCE POUR DES DONNÉES EXACTES

Soient f une fonction donnée de $H^m(\Omega)$ et f_1 un prolongement quelconque de f à $D^{-m}L^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $d \in \mathfrak{D}$, on désigne maintenant par σ_ε^d la D^m -spline d'ajustement relative à A^d , $\rho^d f_1$ et ε .

4.1. Hypothèses pour la convergence

Le problème est de déterminer les conditions les plus larges sur A^d et ε assurant la convergence sur Ω , i.e. telles que: $\lim_{d \rightarrow 0} \|f - \sigma_\varepsilon^d\|_{m,\Omega} = 0$, où pour simplifier on a écrit σ_ε^d au lieu de $\sigma_\varepsilon^d|_\Omega$.

Une condition usuelle sur A^d est que

$$(4-1) \quad \lim_{d \rightarrow 0} \sup_{x \in \Omega} \delta(x, A^d) = 0,$$

où δ désigne la distance euclidienne dans \mathfrak{R}^n . (On sait que $\sup_{x \in \Omega} \delta(x, A^d)$ est la distance de Hausdorff de A^d à $\bar{\Omega}$). On vérifie facilement que (4-1) implique que

$$\lim_{d \rightarrow 0} N(d) = +\infty.$$

On préférera utiliser la condition

$$(4-2) \quad \forall d \in \mathfrak{D}, \sup_{x \in \Omega} \delta(x, A^d) = d,$$

qui implique (4-1): ce faisant on procède comme il est habituel de le faire dans la théorie des éléments finis (cf. P. G. Ciarlet [2]). On utilisera également l'hypothèse

$$(4-3) \quad N = O(d^{-n}), d \rightarrow 0$$

(propriété de «régularité asymptotique» de la répartition dans $\bar{\Omega}$ des points des ensembles A^d).

D'autre part, on supposera que ε est fonction de d et l'on envisagera les différentes hypothèses suivantes:

$$(4-4) \quad \varepsilon \text{ est borné quand } d \rightarrow 0:$$

$$(4-5) \quad \varepsilon = o(N), d \rightarrow 0;$$

$$(4-6) \quad \varepsilon = o(d^{-n}), d \rightarrow 0.$$

Evidemment (4-1) et (4-4) impliquent (4-5), et (4-3) et (4-5) impliquent (4-6).

De même, (4-2) et (4-6) impliquent (4-5). En effet, il résulte de (4-2) que

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup_{a \in A^d} B'(a, d),$$

où $B'(a, d)$ désigne la boule euclidienne fermée de centre a et de rayon d ; on en déduit que

$$|C|, \forall d \in \mathfrak{D}, Nd^n \geq C,$$

d'où le résultat.

Par ailleurs,

Proposition 4.1. *La condition (4-1) est nécessaire pour la convergence sur Ω .*

Démonstration. 1) Supposons que la convergence sur Ω ait lieu sans que l'hypothèse (4-1) soit vérifiée. Alors,

$$|\alpha > 0, |(d_n) \subset \mathfrak{D}, \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0, |(x_n) \subset \Omega : \forall n, \delta(x_n, A^{d_n}) > \alpha.$$

Mais puisque Ω est borné, il existe un point $x^* \in \bar{\Omega}$ et une suite extraite de (x_n) , soit (x_{n_p}) , tels que

$$x^* = \lim_{p \rightarrow +\infty} x_{n_p}.$$

On a:

$$\forall p, \forall r \in A^{d_{n_p}}, x_{n_p} - r = (x_{n_p} - x^*) + (x^* - r),$$

d'où

$$\delta(x_{n_p}, A^{d_{n_p}}) \leq |x_{n_p} - x^*| + \delta(x^*, A^{d_{n_p}}).$$

Alors il existe $x^* \in \bar{\Omega}$, il existe $\alpha_1 > 0$, il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_p) et il existe un entier p_0 tels que

$$\forall p, p \geq p_0: \delta(x^*, A^{d_{n_p}}) > \alpha_1.$$

2) Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $H^m(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} f_1 \neq f_2 \text{ sur la boule } B^*(x^*, \alpha_1), \\ f_1 = f_2 \text{ sur } \Omega \setminus B^*(x^*, \alpha_1). \end{cases}$$

D'après le 1), il leur correspond une même suite $(\sigma_\varepsilon^{d_{n_p}})$ de D^m -splines d'ajustement et l'on obtient d'après l'hypothèse de convergence:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f_1 - \sigma_\varepsilon^{d_{n_p}}\|_{m,\Omega} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f_2 - \sigma_\varepsilon^{d_{n_p}}\|_{m,\Omega} = 0.$$

d'où le résultat. ■

De même,

Proposition 4.2. *La condition (4-5) est nécessaire pour la convergence sur Ω , sauf dans le cas trivial $f \in P_{m-1}(\Omega)$.*

Démonstration. Supposons que $\sigma_\varepsilon^d \rightarrow f$ dans $H^m(\Omega)$. De l'équation (3-2) on déduit que

$$(4-7) \quad \frac{1}{N} \langle \rho^d (\sigma_\varepsilon^d - f_1), \rho^d \sigma_\varepsilon^d \rangle + \frac{\varepsilon}{N} (\sigma_\varepsilon^d, \sigma_\varepsilon^d)_m = 0.$$

Puisque $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$, le premier terme dans (4-7) tend vers zéro quand $d \rightarrow 0$ et par conséquent:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon}{N} |\sigma_\varepsilon^d|_{m,\Omega}^2 \right) \leq \lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon}{N} |\sigma_\varepsilon^d|_m^2 \right) = 0,$$

d'où le résultat. ■

4.2. Résultats de convergence

Le principal résultat de ce paragraphe est le suivant:

Théorème 4.1. *Supposons que les hypothèses (4-2) et (4-6) soient satisfaites. Alors*

$$\lim_{d \rightarrow 0} \|\sigma_\varepsilon^d - f^\Omega\|_m = 0,$$

où f^Ω désigne l'unique élément de semi-norme $|\cdot|_m$ minimale de l'ensemble $\{v \in D^{-m}L^2; v|_\Omega = f\}$.

Démonstration. 1) Montrons d'abord que la famille (σ_ε^d) , avec $\varepsilon = o(d^{-n})$, $d \rightarrow 0$, est bornée dans $D^{-m}L^2$ quand $d \rightarrow 0$. Considérons (3-2) avec $\beta^d = \rho^d f^\Omega$ et prenons $v = \sigma_\varepsilon^d - f^\Omega$. Il vient:

$$\forall (d, \varepsilon) \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{R}_+^*, \langle \rho^d (\sigma_\varepsilon^d - f^\Omega) \rangle^2 + \varepsilon (\sigma_\varepsilon^d, \sigma_\varepsilon^d - f^\Omega)_m = 0.$$

On en déduit que

$$(4-8) \quad \forall (d, \varepsilon) \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{R}_+^*, |\sigma_\varepsilon^d|_m \leq |f^\Omega|_m$$

et que

$$(4-9) \quad \exists C, \forall (d, \varepsilon) \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{R}_+^*, \langle \rho^d (\sigma_\varepsilon^d - f^\Omega) \rangle \leq C\varepsilon^{1/2}.$$

D'autre part, soit $B_O = \{b_{O1}, \dots, b_{OM}\}$ un sous-ensemble P_{m-1} -unisolvant de $\bar{\Omega}$. Pour chaque point b_{Oj} on considère la boule (fermée) $\omega_j = B^*(b_{Oj}, r)$, où $r > 0$ est la constante de la proposition 2.1. Pour chaque $j = 1, \dots, M$, en tenant compte de l'hypothèse (4.2), on a pour tout $d \in \mathfrak{D}$, $d \leq r$:

$$B^*(b_{Oj}, r-d) \subset \bigcup_{a \in A^d \cap \omega_j} B^*(a, d).$$

Posant $N_j = \text{card}(A^d \cap \omega_j)$, il vient:

$$\exists C, \forall d \in \mathfrak{D}, d \leq r, \text{mes } B^*(b_{Oj}, r-d) \leq CN_j d^n,$$

d'où:

$$\exists d_0, \exists C, \forall d \in \mathfrak{D}, d \leq d_0 < r, N_j \geq Cd^{-n}.$$

Or on déduit de (4-9), avec l'hypothèse (4-6), que

$$\sum_{a \in A^d \cap \omega_j} |(\sigma_\varepsilon^d - f)(a)|^2 = o(d^{-n}), d \rightarrow 0.$$

Donc pour tout d assez petit et pour tout $j = 1, \dots, M$, il existe (au moins) un point $b_j^d \in A^d \cap \omega_j$ tel que

$$(4-10) \quad \forall j = 1, \dots, M, (\sigma_v^d - f)(b_j^d) = o(1), d \rightarrow 0.$$

On note B^d l'ensemble $\{b_1^d, \dots, b_M^d\}$. Appliquant la proposition 2.1 avec $B = B^d$, d assez petit, il résulte alors de (4-8) et (4-10) que:

$$\|C, \|\sigma_v^d\|_m \leq C, d \rightarrow 0.$$

La famille (σ_v^d) étant bornée dans $D^{-m}L^2$, il existe une suite $(\sigma_{v_i}^{d_i})_{i \in \mathfrak{N}}$, avec $\lim_{i \rightarrow +\infty} d_i = 0$, $(\varepsilon_i)_{i \in \mathfrak{N}} \subset \mathfrak{R}_+^*$ et $\varepsilon_i = o((d_i)^{-m})$, $i \rightarrow +\infty$, extraite de la famille (σ_v^d) , et un élément $f^* \in D^{-m}L^2$ tels que

$$(4-11) \quad f^* = \lim_{i \rightarrow +\infty} \text{faible } \sigma_{v_i}^{d_i} \text{ dans } D^{-m}L^2.$$

2) Montrons maintenant que $f^*|_{\Omega} = f$. Pour cela, raisonnons par l'absurde: supposons que $f^*|_{\Omega} \neq f$. Il existe alors un ouvert non vide O contenu dans Ω et un réel $\alpha > 0$ tels que:

$$\forall x \in O, |f^*(x) - f(x)| > \alpha.$$

D'autre part, il résulte de (4-11) que la suite $(\sigma_{v_i}^{d_i})$ converge simplement sur $\bar{\Omega}$ vers f^* . De plus (théorème d'immersion hölderienne pour l'espace $H^m(\Omega)$), la suite $(\sigma_{v_i}^{d_i})$ est équicontinue sur $\bar{\Omega}$, donc la convergence est uniforme:

$$\forall i_0 \in \mathfrak{N}, i \geq i_0, \forall x \in O, |\sigma_{v_i}^{d_i}(x) - f^*(x)| \leq \alpha/2,$$

et il en résulte que, pour tout $i \geq i_0$:

$$(4-12) \quad \forall x \in O, |\sigma_{v_i}^{d_i}(x) - f(x)| \geq |f^*(x) - f(x)| - |\sigma_{v_i}^{d_i}(x) - f^*(x)| \geq \alpha/2.$$

Or le raisonnement du 1) montre que, pour tout $i \in \mathfrak{N}$ assez grand, il existe un point $b^i \in A^i \cap O$ tel que $|\sigma_{v_i}^{d_i}(b^i) - f(b^i)| = o(1)$, $i \rightarrow +\infty$, ce qui contredit (4-12). Donc $f^*|_{\Omega} = f$.

3) Montrons que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|\sigma_{v_i}^{d_i} - f^{\Omega}\|_m = 0$. On a évidemment, pour tout $i \in \mathfrak{N}$:

$$|\sigma_{v_i}^{d_i} - f^*|_m^2 = |\sigma_{v_i}^{d_i}|_m^2 + |f^*|_m^2 - 2(\sigma_{v_i}^{d_i}, f^*)_m.$$

Mais il résulte de (4-8), de la définition de f^{Ω} et de la relation $f^*|_{\Omega} = f$ que

$$(4-13) \quad \forall i \in \mathfrak{N}, |\sigma_{v_i}^{d_i}|_m \leq |f^{\Omega}|_m \leq |f^*|_m,$$

d'où:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i} - f^*|_m = 0.$$

D'autre part, la convergence faible de $\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i}$ vers f^* dans $D^{-m}L^2$, la relation (2-1) et le théorème d'injection compacte de $H^m(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ impliquent que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i} - f^*\|_{0,\Omega} = 0.$$

Enfin, passant à la limite dans (4-13), on obtient:

$$f^* = f^\Omega$$

et le résultat suit.

4) Achéons la démonstration en raisonnant par l'absurde. Supposons que $\|\sigma_{\varepsilon}^d - f^\Omega\|_m$, avec $\varepsilon = o(d^{-n})$, $d \rightarrow 0$, ne tende pas vers 0 quand $d \rightarrow 0$. Cela revient à dire qu'il existe $\alpha > 0$ et $((d_i, \varepsilon_i))_{i \in \mathfrak{N}}$, suite de $\mathfrak{D} \times \mathfrak{R}_+^*$ telle que $\lim_{i \rightarrow \infty} d_i = 0$, et $\varepsilon_i = o((d_i)^{-n})$, $i \rightarrow +\infty$, vérifiant

$$\forall i \in \mathfrak{N}, \|\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i} - f^\Omega\|_m > \alpha.$$

Mais une telle suite est bornée dans $D^{-m}L^2$ et le raisonnement précédent entraîne une contradiction. ■

Remarque 4.1. Le théorème 4.1 améliore le théorème 1.6 de M. C. López de Silanes et R. Arcangéli [10], où la convergence est obtenue sous les hypothèses (4-2) et (4-4). Le résultat du théorème 4.1 est *optimal* en ce sens que (hormis le cas trivial $f \in P_{m-1}(\Omega)$) la condition (4-6) est, sous les hypothèses (4-2) et (4-3), *nécessaire et suffisante* pour la convergence sur Ω . ■

On déduit de ce théorème le résultat suivant, dont le point (i) a précédemment été prouvé par F. Utreras [14].

Théorème 4.2. *On suppose que les hypothèses (4-2), (4-3) et (4-6) sont vérifiées et que:*

$$(4-14) \quad \varepsilon \geq d^{2m-n}, d \rightarrow 0.$$

Alors, quand $d \rightarrow 0$:

$$(i) \quad \forall i = 0, \dots, m-1, |f - \sigma_{\varepsilon}^d|_{i,\Omega} = O\left[\left(\frac{\varepsilon}{N}\right)^{(m-i)/2m}\right]$$

et

$$(ii) \quad \|f - \sigma_\varepsilon^d\|_{m, \Omega} = o(1).$$

Démonstration. Le résultat du théorème 4.1 de M. C. López de Silanes et R. Arcangéli [10] est valable sous la seule hypothèse (4-2) pour d assez petit et pour tout $\varepsilon > 0$. Compte tenu de (4-6) et de (4-14), on en déduit que

$$\|f - \sigma_\varepsilon^d\|_{0, \Omega} = O(d^{m/2} \varepsilon^{1/2}), \quad d \rightarrow 0.$$

D'autre part, on a (ii) d'après le théorème 4.1.

Utilisant alors (4-3) et un résultat concernant les semi-normes intermédiaires (cf. le théorème 4.14 de R. Adams [1]), on obtient (i). ■

5. CONVERGENCE POUR DES DONNÉES BRUITÉES

Soient toujours f une fonction donnée de $H^m(\Omega)$, f_1 un prolongement de f à $D^{-m}L^2$ et σ_ε^d la D^m -spline d'ajustement relative à A^d , $\rho^d f_1$ et ε . Pour tout $d \in \mathfrak{D}$, soit $v^d = (v_a^d)_{a \in A^d} \in \mathfrak{R}^N$ un quelconque «vecteur d'erreur». Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $d \in \mathfrak{D}$, on désigne par $\tilde{\sigma}_\varepsilon^d$ la D^m -spline d'ajustement relative à A^d , $\rho^d f_1 + v^d$ et ε , et par e_ε^d la D^m -spline d'ajustement relative à A^d , v^d et ε . On a évidemment: $\tilde{\sigma}_\varepsilon^d = \sigma_\varepsilon^d + e_\varepsilon^d$ (l'opérateur qui à tout $\beta^d \in \mathfrak{R}^N$ fait correspondre la D^m -spline d'ajustement relative à A^d , β^d et ε est *linéaire*).

5.1. Hypothèses pour la convergence

On peut mettre en évidence une condition *nécessaire* pour la convergence sur Ω , i.e. telle que: $\lim_{d \rightarrow 0} \|f - \tilde{\sigma}_\varepsilon^d\|_{m, \Omega} = 0$.

Proposition 5.1. *On suppose que l'hypothèse (4-5) est vérifiée. Alors une condition nécessaire pour la convergence sur Ω est que:*

$$(5-1) \quad \forall v \in D^{-m}L^2, \lim_{d \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{a \in A^d} v_a^d v(a) \right\} = 0.$$

Démonstration. L'équation (3-2) de la D^m -spline d'ajustement $\tilde{\sigma}_\varepsilon^d$ peut s'écrire

$$(5-2) \quad \forall v \in D^{-m}L^2, \frac{1}{N} \langle \rho^d (\tilde{\sigma}_\varepsilon^d - f_1), \rho^d v \rangle + \frac{\varepsilon}{N} (\tilde{\sigma}_\varepsilon^d, v)_m = \frac{1}{N} \langle v^d, \rho^d v \rangle.$$

La convergence sur Ω implique que le premier terme du premier membre de (5-2) tend vers 0 quand $d \rightarrow 0$.

Elle implique d'autre part que $|\tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_m$ est borné. Posons en effet $\varphi = \tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_\Omega$ et désignons par φ^Ω l'élément de semi-norme $|\cdot|_m$ minimale de l'ensemble $\{v \in D^{-m}L^2; v|_\Omega = \varphi\}$. Il résulte alors de (3-1), avec $v = \varphi^\Omega$, que $\tilde{\sigma}_\varepsilon^d = \varphi^\Omega$. D'autre part, d'après un résultat de G. Geymonat (cf. G. Strang [13]), il existe un opérateur de prolongement \tilde{P} de $H^m(\Omega)$ dans $D^{-m}L^2$ tel que:

$$\exists C, \forall v \in H^m(\Omega), |\tilde{P}v|_m \leq C|v|_{m,\Omega}.$$

On en déduit que:

$$\forall d \in \mathfrak{D}, \forall \varepsilon > 0, |\tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_m \leq |\tilde{P}(\tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_\Omega)|_m \leq C|\tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_{m,\Omega},$$

ce qui entraîne que $|\tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_m$ est borné.

Utilisant alors (4-5), on voit que le second terme du premier membre de (5-2) tend lui aussi vers 0. D'où la relation (5-1). ■

La condition (5-1) n'est généralement pas vérifiée. Elle l'est lorsque, par exemple:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sup_{a \in A^d} |v_a^d| = 0.$$

Malheureusement, cette hypothèse est irréaliste dans le cas usuel où v^d est une erreur de mesure. Par contre (cf. W. Feller [8]), (5-1) est vérifiée lorsque v^d est un *bruit blanc* (et sous l'hypothèse supplémentaire que la famille (A^d) soit une suite croissante).

C'est pourquoi nous supposerons dans la suite que

$$(5-3) \quad v^d \text{ est un bruit blanc,}$$

c'est à dire que les v_a^d sont des (réalisations de) variables aléatoires gaussiennes indépendantes identiquement distribuées de moyenne 0 et de variance η^2 , i.e. telles que:

$$\forall a, b \in A^d, E(v_a^d) = 0 \quad \text{et} \quad E(v_a^d v_b^d) = \begin{cases} \eta^2, & a = b, \\ 0, & a \neq b, \end{cases}$$

où E désigne l'espérance mathématique.

D'autre part, posant

$$\mu = \mu(d) = \inf \{ \delta(a, b); a \in A^d, b \in A^d, a \neq b \},$$

nous supposons que

$$(5-4) \quad d = O(\mu), d \rightarrow 0.$$

On vérifie facilement que (5-4) implique (4-3).

5.3. Résultats de convergence

Puisque $E(v^d) = 0$, on a:

$$\forall i = 0, \dots, m, E \left[|f - \tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2 \right] = |f - \sigma_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2 + E \left[|e_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2 \right].$$

Le théorème 4.2 donne une estimation du terme $|f - \sigma_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2$. Pour borner le terme aléatoire $E \left[|e_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2 \right]$, nous utiliserons le résultat suivant.

Théorème 5.1. *On suppose que les hypothèses (4-5), (4-14) et (5-4) sont vérifiées. Alors il existe une constante C telle que, pour d assez petit, on ait la majoration:*

$$(5-5) \quad \forall i = 0, \dots, m, E \left[|e_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2 \right] \leq C \eta^2 \frac{N^{(n+2(i-m))/2m}}{\varepsilon^{(n+2i)/2m}}.$$

Démonstration. Cf. F. Utreras [14]. ■

Le second membre de (5-5) tend vers 0 pour $i=0, \dots, m$, s'il tend vers 0 pour $i=m$. Soit $\omega: \mathfrak{N}^* \rightarrow \mathfrak{R}_+^*$ une fonction vérifiant les conditions:

$$(5-6) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \omega(N) = +\infty \quad \text{et} \quad \omega(N) = o(N^{2m/(n+2m)}), N \rightarrow +\infty.$$

Alors il est clair que le terme aléatoire tend vers 0 si:

$$(5-7) \quad \varepsilon = N^{n/(n+2m)} \omega(N).$$

Notons que (5-6) et (5-7) impliquent (4-14). En combinant les résultats précédents, on obtient le théorème suivant, qui prolonge un résultat de F. Utreras [14].

Théorème 5.2. On suppose que les hypothèses (4-2), (4-5), (5-4), (5-6) et (5-7) sont satisfaites. Alors, quand $d \rightarrow 0$:

$$\forall i=0, \dots, m-1, E \left[|f - \tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2 \right] = O \left[N^{-2(m-i)/(n+2m)} (\omega(N))^{(m-i)m} \right]$$

et

$$E \left[|f - \tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_{m,\Omega}^2 \right] = o(1).$$

Démonstration. On vérifie que les hypothèses de l'énoncé impliquent celles des théorèmes 4.2 et 5.1. Substituant l'expression (5-7) de ε dans la relation (i) du théorème (4-2) et dans (5-5), on obtient respectivement:

$$\exists C, \forall i=0, \dots, m-1, |f - \sigma_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2 \leq CN^{-\chi} (\omega(N))^{(m-i)m},$$

et

$$\exists C, \forall i=0, \dots, m, E \left[|e_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2 \right] \leq C\eta^2 N^{-\chi} (\omega(N))^{-(n+2i)/2m},$$

quand $d \rightarrow 0$, avec $\chi = \chi(i) = 2(m-i)/(n+2m)$.

Le résultat suit. ■

Bien entendu, dans l'énoncé du théorème, on peut remplacer $N^{-2(m-i)/(n+2m)}$ par $d^{2n(m-i)/(n+2m)}$.

Remarque 5.1. On obtient ainsi la convergence vers 0 des quantités $E \left[|f - \tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2 \right], 0 \leq i \leq m$. On notera que les hypothèses (5-6) et (5-7) qui conditionnent le résultat sont *indépendantes de la fonction f* (et aussi d'ailleurs de la variance η^2), ce qui peut être intéressant dans la perspective de la détermination numérique du paramètre ε : pour le choix de ε , on ne dispose guère actuellement, le niveau de bruit étant supposé inconnu, que de la *méthode de validation croisée généralisée* (cf. P. Craven et G. Wahba [4]), dont la mise en oeuvre est a priori coûteuse (cf. cependant les travaux de D. Girard, en particulier [9]). ■