La Gaceta de la RSME, Vol. 7.1 (2004), Págs. 215–246

El diablo de los números

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo Mateo

El arte de contar

por

Marc Noy

El primer contacto de un estudiante con la combinatoria suele ser a través de la probabilidad finita, donde debe responder a preguntas como ¿Cuál es la probabilidad de que en una reunión de n personas haya dos que celebren su cumpleaños el mismo día? O bien: si una urna contiene b bolas blancas y n negras, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar r bolas al azar sean todas del mismo color? La receta para resolver estos problemas es bien conocida: "número de casos favorables dividido por número de casos posibles". Nuestro estudiante se da cuenta rápidamente de que para resolver tales problemas hay que saber *contar*, pero tiene la impresión de que le falta técnica para dominar el arte de contar. Y lleva razón, contar es un arte y requiere técnica.

Introducción

En combinatoria, quizá más que en cualquier otra rama de las matemáticas, los problemas a resolver definen la disciplina. Consideremos, pues, la siguiente lista de problemas de contar, ordenados más o menos en orden de dificultad creciente; en todos los casos se trata de hallar el número de objetos considerados.

1. Subconjuntos de un conjunto de n elementos.

2. Subconjuntos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ que no contienen dos enteros consecutivos.

3. Caminos en el plano que van del punto $(0,0)$ al punto $(2n,0)$, formados por pasos $U=(1,1)$ y $D=(1,-1)$, y tales que no pasan por debajo de la recta $x=0$.

4. Particiones de un conjunto de n elementos.

5. Permutaciones $a_1a_2\cdots a_n$ de $\{1,\ldots,n\}$ que no contienen m elementos consecutivos $a_i<a_{i+1}<\cdots<a_{i+m-1}$ formando una sucesión creciente.

6. Maneras de descomponer un rectángulo $2n\times 2n$ en rectángulos 1×2 y 2×1.

7. Caminos en el plano con origen en $(0,0)$, formados por n pasos $N=(0,1), S=(0,-1), E=(1,0), O=(-1,0)$, sin autointersecciones.

A continuación comentamos la anterior lista de problemas. Algunos de ellos reaparecerán más adelante para ilustrar aspectos básicos de las técnicas enumerativas más importantes.

1. Este es un problema elemental. Cada subconjunto corresponde a una palabra binaria de longitud n, donde un 1 en la posición i indica que el elemento i-ésimo está en el subconjunto. El número de subconjuntos es, pues, igual a 2^n.

2. La solución aquí requiere sólo un poco más de trabajo. Sea u_n el número de tales subconjuntos. Si calculamos los primeros valores, obtenemos $u_0=1$ (el conjunto vacío), $u_1=2, u_2=3, u_3=5, u_4=8$. Parece como si los números de Fibonacci entraran en escena y, en efecto, ésta es la respuesta. Para probarlo, sea A un subconjunto que cumple la condición. Si $n\in A$, entonces $n-1\notin A$ y vemos que $A=B\cup\{n\}$, donde $B\subseteq\{1,\ldots,n-2\}$ cumple la condición. Si $n\notin A$, entonces $A\backslash\{n\}\subseteq\{1,\ldots,n-1\}$ cumple la condición. De aquí se sigue la ecuación

$$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$$

que, como es bien sabido, define a los números de Fibonacci. Dejamos al lector el problema de hallar una ecuación para el número de subconjuntos que no contienen *tres* enteros consecutivos.

3. Se trata de un problema clásico en combinatoria. Sea C_n el número de caminos en cuestión, y probemos que

$$C_{n+1}=C_0C_n+C_1C_{n-1}+\cdots+C_nC_0,$$

donde, por convenio, suponemos $C_0=1$. Sea α un camino de $(0,0)$ a $(2n+2,0)$ con la propiedad requerida y supongamos que la primera intersección con la recta $x=0$ se produce en el punto $(2i+2,0)$, donde $0\le i\le n$. Entonces obtenemos la descomposición $\alpha=U\beta D\gamma$, donde

β y γ son caminos con la misma propiedad de longitudes $2i$ y $2(n-i)$, respectivamente. Esto prueba la igualdad anterior.

Más adelante resolveremos la recurrencia utilizando series de potencias y obtendremos la solución $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Estos son los conocidos números de Catalan; el ejercicio 6.19 de [17] muestra cómo aparecen en la solución de más de 60 problemas combinatorios.

4. Sea $B(n)$ la solución al problema. Los valores iniciales son $B(1) = 1, B(2) = 2, B(3) = 5, B(4) = 15, B(5) = 52$. Por ejemplo, las 5 particiones de $\{1,2,3\}$ son

$$\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\},\quad \{1,2\}\cup\{3\},\quad \{1,3\}\cup\{2\},\quad \{2,3\}\cup\{1\},\quad \{1,2,3\}.$$

Estos son los llamados números de Bell[1], que satisfacen la ecuación

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(i), \qquad B(0) = 1. \tag{1}$$

La prueba consiste en clasificar las particiones de $\{1,2,\ldots,n+1\}$ según el número de elementos en el bloque al que pertenece $n+1$. Si este número es $n+1-i$ (nótese que $0 \le i \le n$), tenemos $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ elecciones para los elementos que acompañan a $n+1$ en su bloque, y $B(i)$ elecciones para partir los restantes i elementos. Aunque existen fórmulas explícitas para los $B(n)$, ninguna de ellas es sencilla. Sin embargo, consideramos que la ecuación de recurrencia anterior es una "solución" del problema, puesto que nos permite calcular eficientemente los números $B(n)$.

5. Sea p_n el número de tales permutaciones. Puede probarse (véase [2]) que $p_n = n!\,a_n$, donde a_n es el coeficiente de z^n en el desarrollo de Taylor de la función $1/w(z)$, siendo $w(z)$ la única solución de la ecuación diferencial lineal

$$\omega^{(m-1)} + \omega^{(m-2)} + \ldots + \omega' + \omega = 0,$$

con condiciones iniciales $\omega(0) = 1, \omega'(0) = -1, \omega^{(2)}(0) = \cdots = \omega^{(m-2)}(0) = 0$.

Nuevamente, aunque no disponemos de ninguna fórmula ni ecuación de recurrencia sencilla para los números p_n, la ecuación diferencial que define la serie $w(z)$ se considera una solución satisfactoria al problema. A partir de aquí pueden calcularse fácilmente tantos valores de p_n como se

[1]En honor de E. T. Bell (1883–1960), matemático norteamericano, autor de libros de divulgación tan conocidos como *Men of Mathematics* y *Mathematics: Queen and Servant of Science*.

quiera. Por ejemplo, si $m = 3$, entonces

$$\frac{1}{w(z)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{z/2}}{\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{\pi}{6})} = 1 + z + z^2 + \frac{5}{6}z^3 + \frac{17}{24}z^4 + \cdots, \quad (2)$$

de manera que $p_3 = 5$ (las 6 permutaciones de $\{1, 2, 3\}$ salvo 123) y $p_4 = 17$ (las 24 permutaciones de $\{1, 2, 3, 4\}$ salvo $1234, 1243, 1342, 2134, 2341, 3124, 4123$).

6. Este es el famoso *problema de los dominós* y se resolvió por primera vez en relación con el llamado problema de Ising, un módelo de la mecánica estadística que intenta dar cuenta de la magnetización de ciertos materiales. La solución no es sencilla y requiere el uso de determinantes y de técnicas de teoría de grafos. El número buscado resulta ser igual a

$$D_n = 2^{2n^2} \prod_{1 \le i,j \le n} \left(\cos^2\left(\frac{\pi i}{2n+1}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi j}{2n+1}\right)\right),$$

una fórmula que puede sorprender si pensamos que D_n es un entero. Una expresión alternativa que involucra únicamente números enteros es

$$D_n = 2^n \begin{vmatrix} \binom{2n}{0} & \binom{2n-2}{2} & \binom{2n-4}{4} & \cdots & & \\ 0 & \binom{2n}{0} & \binom{2n-2}{2} & \cdots & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & \cdots & \binom{2n}{0} & \binom{2n-2}{2} & \\ \binom{2n-1}{1} & \binom{2n-3}{3} & \cdots & & & \\ 0 & \binom{2n-1}{1} & \binom{2n-3}{3} & \cdots & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & \cdots & \binom{2n-1}{1} & \binom{2n-3}{3} & \cdots \end{vmatrix}^2,$$

donde el determinante anterior tiene $n-1$ columnas y $\lfloor (n-1)/2 \rfloor + \lfloor n/2 \rfloor$ filas. Los primeros valores son $D_1 = 2, D_2 = 36, D_3 = 6728, D_4 = 12988816, D_5 = 258584046368$. Se puede probar que $\lim_{n\to\infty} \log(D_n)/n^2$ existe y es aproximadamente 1.17.

7. Sea S_n el número de caminos solución del último problema de nuestra lista. No se conoce ninguna fórmula para S_n y no se cree que pueda obtenerse ninguna fórmula, por compleja que sea, que permita evaluar S_n rápidamente. Los primeros valores en este caso son

$$4, 12, 36, 100, 284, 780, 2172, 5916, 16268, 44100, 120292, 324932.$$

El primer valor corresponde a los cuatro posibles pasos N, S, E, O. Los siguientes valores son $12 = 4 \cdot 3$ y $36 = 4 \cdot 3^2$, donde cada factor 3 corresponde a las tres direcciones que podemos tomar llegando de una dirección

dada. El siguiente es $100 = 4 \cdot 3^3 - 8$, ya que de los $4 \cdot 3^3 = 108$ caminos posibles, exactamente 8 definen un cuadrado, es decir, un camino con autointersección. Utilizando potentes métodos de cálculo paralelo se ha podido calcular el valor $S_{55} = 6985017002775819546746 04$. Se sabe que el límite $c = \lim_{n\to\infty}(S_n)^{1/n}$ existe y que $2.61987 \leq c \leq 2.69576$. Obtener mejores cotas para el valor de la constante c es un problema notablemente difícil [12], en el que trabajan interesante matemáticos y físicos por igual.

Recurrencias y Series

Dada una sucesión numérica $(a_n)_{n\geq 0}$, la *función generatriz* asociada es la serie formal de potencias

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

El método de las funciones generatrices, introducido por Euler para la resolución de problemas combinatorios, se basa en el siguiente principio genérico:

> Las propiedades algebraicas de la serie $A(z)$ permiten obtener información combinatoria sobre los números a_n, en particular fórmulas explícitas y ecuaciones de recurrencia.
>
> Además, si consideramos $A(z)$ como una función de variable compleja, la naturaleza y localización de las singularidades de $A(z)$ permiten obtener estimaciones asintóticas sobre el orden de crecimiento de los números a_n.

Ilustremos este principio con los números de Fibonacci, definidos por

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \qquad u_0 = 0,\ u_1 = 1.$$

Nótese que la recurrencia anterior es válida *para todo* $n \geq 0$, lo cual técnicamente tiene sus ventajas. Afirmamos que la función generatriz $U(z) = \sum u_n z^n$ de los números de Fibonacci es igual a la función racional

$$U(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Para probarlo no hay más que multiplicar $U(z)$ por $1 - z - z^2$ y observar que el coeficiente de z^{n+2} en la serie resultante es igual a $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$, con lo cual se anula para todo $n \geq 0$. Dado que el coeficiente constante y el lineal son, respectivamente, iguales a 0 y 1, se obtiene el resultado. Ahora decomponemos la función racional anterior en fracciones simples

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{a}{1 - \lambda z} + \frac{b}{1 - \mu z},$$

donde $\lambda = (1+\sqrt{5})/2$ y $\mu = (1-\sqrt{5})/2$ son los inversos de las raíces de $1-z-z^2$, y $a = 1/\sqrt{5}$, $b = -1/\sqrt{5}$. Teniendo en cuenta que $1/(1-\alpha z) = \sum \alpha^n z^n$, llegamos a la expresión explícita

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Puesto que $|(1-\sqrt{5})/2| < 1$, se obtiene de inmediato la estimación asintótica

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

donde $a_n \sim b_n$ significa que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$. Como el término de error tiende a cero exponencialmente, la estimación anterior es de una enorme precisión; veremos que esta situación es típica al tratar con funciones generatrices meromorfas (las funciones racionales son las más sencillas entre las meromorfas).

Exactamente la misma técnica permite tratar una clase bastante más amplia de recurrencias y obtenemos el siguiente resultado básico.

TEOREMA 1. *Para una sucesión de números complejos $(a_n)_{n\geq 0}$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *Los números a_n satisfacen una recurrencia de la forma*

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + \cdots + c_k a_n = 0, \tag{3}$$

   donde los c_i son números complejos dados.

2. *La función generatriz $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ es de la forma*

$$A(z) = \frac{P(z)}{1 - c_1 z - c_2 z^2 \cdots - c_k z^k}, \tag{4}$$

   donde $P(z)$ es un polinomio de grado menor que k.

3. *Los números a_n admiten una expresión de la forma*

$$a_n = P_1(n)\lambda_1^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n, \tag{5}$$

   donde

$$1 - c_1 z - c_2 z^2 \cdots - c_k z^k = (1-\lambda_1 z)^{e_1} \cdots (1-\lambda_k z)^{e_k}$$

   y $P_i(n)$ es un polinomio de grado menor que la multiplicidad e_i.

Resumiendo, tenemos que las tres condiciones siguientes son equivalentes:

1. La sucesión satisface una recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes.

2. La función generatriz es racional.

3. Los términos de la sucesión pueden expresarse como combinación de exponenciales con coeficientes polinómicos.

Mencionemos algunas aplicaciones directas de lo anterior. En primer lugar, a partir de la ecuación (5) se obtiene sin dificultad el comportamiento asintótico. Si λ_1^{-1} es la única raíz de módulo mínimo (necesariamente real, como veremos más adelante; el caso en que hay más de una raíz de módulo mínimo es sólo un poco más técnico), entonces

$$a_n \sim Cn^e\lambda^n,$$

donde e es el grado de $P_1(n)$ y C es una constante. Nótese que λ_1^{-1} es la singularidad, en este caso un polo, de módulo mínimo, lo cual ilustra el papel fundamental que juegan las singularidades en las estimaciones asintóticas.

En segundo lugar, se tiene que si (a_n) y (b_n) satisfacen recurrencias lineales del tipo (3), lo mismo es cierto para $(a_n + b_n)$ y (a_nb_n). Para la suma observemos simplemente que la función generatriz de la sucesión (a_n+b_n) es la suma de las de (a_n) y (b_n), y que la suma de funciones racionales es racional. Para el producto utilizamos la tercera condición: si a_n y b_n son combinaciones polinómicas de exponenciales, claramente también lo es a_nb_n. Nótese la siguiente consecuencia no trivial:

Corolario 2. *Si $\sum a_nz^n$ y $\sum b_nz^n$ son funciones racionales de z, también lo es su producto de Hadamard $\sum a_nb_nz^n$.*

El mismo argumento demuestra que si (a_n) satisface una recurrencia del tipo (3), lo mismo es cierto para $p(n)a_n$, donde $p(n)$ es un polinomio cualquiera. Esto último puede demostrarse de una forma alternativa si observamos que de $A(z) = \sum a_nz^n$ se sigue

$$zA'(z) = \sum na_nz^n,$$

donde $A'(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n+1}z^n$ es la derivada. Si denotamos por Θ el operador que a una serie $A(z)$ le asocia la serie $zA'(z)$, tenemos que la función generatriz de $(p(n)a_n)$ es igual a $p(\Theta)A(z)$. En consecuencia, si $A(z)$ es racional, también lo es $p(\Theta)A(z)$.

Hemos utilizado hasta el momento algunas "reglas de cálculo" con funciones generatrices; vale la pena enunciarlas con precisión, junto con algunas más. Si $A(z)$ es la función generatriz de (a_n), escribimos $(a_n) \leftrightarrow A(z)$.

1. *Linealidad.* Si $(a_n) \leftrightarrow A(z)$ y $(b_n) \leftrightarrow B(z)$, entonces $(\alpha a_n + \beta b_n) \leftrightarrow \alpha A(z) + \beta B(z)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. *Producto.* Si $(a_n) \leftrightarrow A(z)$ y $(b_n) \leftrightarrow B(z)$, entonces $(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \leftrightarrow A(z)B(z)$.

3. *Desplazamiento.* Si $(a_n) \leftrightarrow A(z)$ y h es un entero positivo cualquiera, entonces $(a_{n+h}) \leftrightarrow \frac{1}{z^h}(A(z) - a_0 - a_1 z - \cdots - a_{h-1} z^{h-1})$.

4. *Polinomios.* Si $(a_n) \leftrightarrow A(z)$ y $p(n)$ es un polinomio en n, entonces $(p(n)a_n) \leftrightarrow p(\Theta)A(z)$.

5. *Sumas parciales.* Si $(a_n) \leftrightarrow A(z)$, entonces $(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z} A(z)$.

Todas ellas se demuestran sin dificultad a partir de la definición de suma y producto de series formales. Aplicando estas reglas, la equivalencia de (1) y (2) en el teorema es inmediata; la equivalencia con (3) se desprende directamente del desarrollo

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n \geq 0} \binom{m+n-1}{n} z^n,$$

donde m es un entero positivo.

Tratemos ahora la ecuación *no lineal* que surge del problema 3 de nuestra lista introductoria. La recurrencia

$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \cdots + C_n C_0, \qquad C_0 = 1$$

da lugar, aplicando las reglas 2 y 3, a la ecuación $(C(z) - 1)/z = C(z)^2$, es decir

$$zC(z)^2 - C(z) + 1. \tag{6}$$

Si resolvemos la ecuación cuadrática, se obtiene

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z},$$

donde la raíz cuadrada se ha de tomar con signo negativo debido a que los coeficientes de $C(z)$ son positivos. Ahora bien, si $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos el desarrollo $(1 + z)^\alpha = \sum \binom{\alpha}{n} z^n$, donde $\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)/n!$ Una sencilla manipulación nos da

$$(1 - 4z)^{1/2} = \sum (-1)^n 4^n \binom{1/2}{n} z^n = -2 \sum \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} z^n,$$

de donde se obtiene la conocida fórmula $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ para los números de Catalan.

La derivación anterior, aunque efectiva, tiene un inconveniente. Si en lugar de la ecuación cuadrática queremos resolver la ecuación

$$C(z) = 1 + zC(z)^k, \tag{7}$$

que aparece de forma natural en combinatoria, nos enfrentamos a ecuaciones algebraicas de grado superior. El siguiente resultado, conocido como fórmula de inversión de Lagrange, es justamente la herramienta adecuada en esta situación. La notación $[z^n]A(z)$ indica el coeficiente de z^n en $A(z)$.

Teorema 3. *Si la serie $A(z)$ satisface la ecuación $A(z) = z\phi(A(z))$, donde $\phi(t)$ es una serie tal que $\phi(0) \neq 0$, entonces*

$$[z^n]A(z) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\phi(t)^n.$$

Clásicamente, la fórmula de Lagrange se considera un teorema de funciones de variable compleja y se demuestra utilizando integración compleja. Vale la pena mencionar que puede probarse fácilmente en un contexto puramente algebraico utilizando series formales de Laurent y residuos definidos formalmente; véase, por ejemplo, el apéndice 2 de [11].

Si hacemos $D(z) = C(z) - 1$, la ecuación (7) se transforma en

$$D(z) = z(D(z) + 1)^k.$$

Aplicamos el teorema de Lagrange con $\phi(t) = (t+1)^n$ y obtenemos directamente los llamados números de Catalan generalizados:

$$[z^n]C(z) = [z^n]D(z) = \frac{1}{(k-1)n+1}\binom{kn}{n}.$$

Como puede verse, la fórmula de inversión es muy efectiva. A menudo la aplicación no es tan inmediata y requiere alguna manipulación previa para que la ecuación a resolver tenga la forma lagrangiana $A(z) = z\phi(A(z))$; en [5] se pueden hallar varios ejemplos ilustrativos en el caso de ecuaciones algebraicas. Las fórmulas que se obtienen no son siempre sencillas y típicamente aparecen sumas de productos de números binomiales afectados de exponenciales.

El método simbólico

En el apartado anterior, las funciones generatrices han aparecido como una herramienta auxiliar para resolver recurrencias. En lo que sigue, las recurrencias prácticamente desparecen y las funciones generatrices se convierten en el objeto central de estudio.

Una *clase combinatoria* $\mathcal{A}$ es un conjunto finito o numerable equipado de una función de talla tal que: 1) la talla de cualquier elemento es un entero

no negativo; 2) el número de elementos de una talla dada es finito. Podemos pensar en permutaciones o caminos (la talla en este caso es la longitud), árboles o grafos (la talla es el número de vértices o de aristas), particiones de conjuntos (la talla es el número de elementos), etc.

La talla de $\alpha \in \mathcal{A}$ se denota por $|\alpha|$. El conjunto de elementos de talla n se denota por $\mathcal{A}_n$, y su cardinal por A_n. El problema básico es investigar la sucesión (A_n). Definimos la *función generatriz* de la clase $\mathcal{A}$ como

$$A(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} = \sum_{n \geq 0} A_n z^n.$$

Decimos que la variable z *marca* la talla en la función generatriz.

El siguiente paso es definir operaciones entre clases y ver qué efecto tienen sobre las funciones generatrices: esta es la esencia del *método simbólico*. Como ejemplo introductorio consideramos el producto cartesiano $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ de dos clases, donde la talla de un par ordenado (α, β) con $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{B}$ se define como $|(\alpha, \beta)| = |\alpha|_{\mathcal{A}} + |\beta|_{\mathcal{B}}$. ¿Cuál es ahora la función generatriz de la clase $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$? El cálculo es elemental:

$$C(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}} z^{|(\alpha,\beta)|} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}} z^{|\alpha|} z^{|\beta|} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} \sum_{\beta \in \mathcal{B}} z^{|\beta|} = A(z)B(z).$$

Desde luego, también podíamos haber establecido directamente la igualdad

$$C_n = \sum_i A_i B_{n-i},$$

y deducir que $C(z) = A(z)B(z)$. Pero la manipulación anterior es característica del método simbólico, en el sentido de que las operaciones sobre clases se identifican totalmente con las operaciones sobre las series.

La *suma* $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ de dos clases es simplemente la unión disjunta, donde la talla de un elemento de la unión es la que tenía en la clase correspondiente; la regla en este caso es sencillamente

$$C(z) = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}+\mathcal{B}} |z|^{\gamma} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} + \sum_{\beta \in \mathcal{B}} z^{|\beta|} = A(z) + B(z).$$

Hay otras operaciones naturales que pueden definirse entre clases, pero para nuestros propósitos será suficiente con introducir la operación de *sucesión*. Dada una clase $\mathcal{A}$, la clase $\mathcal{B} = \mathcal{S}\{\mathcal{A}\}$ consiste en todas las sucesiones de elementos de $\mathcal{A}$, donde la talla de una sucesión $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ es la suma $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_t|$ de las tallas de sus componentes. Simbólicamente, tenemos que

$$\mathcal{B} = \{\epsilon\} + \mathcal{A} + (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) + (\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}) + \cdots,$$

donde ϵ es un elemento de talla 0 que representa la sucesión vacía. Utilizando las reglas de la suma y producto anteriores, tenemos

$$B(z) = 1 + A(z) + A(z)^2 + \cdots = \frac{1}{1 - A(z)}.$$

Resumimos las reglas anteriores en la tabla 1.

Construcción		*Operación*
Suma	$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$	$C(z) = A(z) + B(z)$
Producto	$\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$	$C(z) = A(z)B(z)$
Sucesión	$\mathcal{B} = \mathcal{S}\{\mathcal{A}\}$	$B(z) = 1/(1 - A(z))$

Tabla 1: Las construcciones combinatorias básicas y su traducción en funciones generatrices.

Para mostrar la potencia del método simbólico, resolvamos de nuevo el problema 3 de la introducción. Sea $\mathcal{C}$ la clase de caminos en cuestión, en la que la talla de un camino es el número de pasos. Tenemos entonces la descomposición

$$\mathcal{C} = \{\epsilon\} + (\{U\} \times \mathcal{C} \times \{D\} \times \mathcal{C}),$$

donde ϵ indica el camino vacío, y U y D son elementos de talla uno que representan, respectivamente, a los pasos $(1, 1)$ y $(1, -1)$. Si $C(z)$ es la función generatriz de la clase $\mathcal{C}$, las reglas anteriores nos dicen directamente que

$$C(z) = 1 + zC(z)zC(z) = 1 + z^2C(z)^2.$$

Nótese que coincide con la ecuación (6), salvo en el término z^2. La explicación es simple: aquí C_n es el número de caminos de longitud n (que es 0 si n es impar), mientras que anteriormente C_n contaba caminos de longitud $2n$. Lo que interesa señalar es que las ecuaciones de recurrencia no aparecen, de hecho están implícitas en la descomposición combinatoria y su traducción en funciones genetrices. Lo importante es dar con una descomposición adecuada, lo cual puede ser bastante más difícil que en el caso anterior.

Pasemos a analizar otro ejemplo importante. Un *árbol ordenado* es un árbol con raíz en el que el orden de los descendientes de un nodo es relevante. La figura 1 muestra los posibles árboles ordenados con cuatro nodos. La talla de un árbol se define como el número de nodos. Para obtener una descomposición combinatoria, observamos que un árbol consiste en una raíz de la que emana una sucesión de árboles: precisamente por ser ordenado, se trata de una sucesión y no de un conjunto. Si $\mathcal{T}$ es la familia de los árboles ordenados, entonces

$$\mathcal{T} = \mathcal{N} \times S\{\mathcal{T}\}, \tag{8}$$

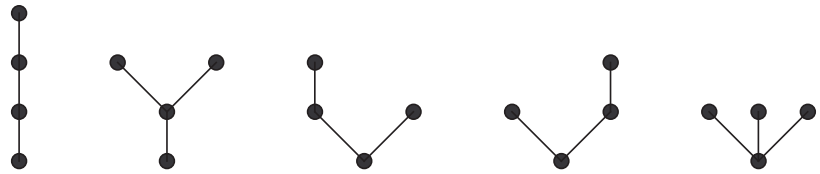

Figura 1: Los cinco árboles ordenados con 4 nodos.

donde $\mathcal{N}$ es la clase formada por un solo nodo de talla 1, correspondiente a la raíz.

La tabla anterior nos da directamente la traducción en funciones generatrices:

$$T(z) = z\frac{1}{1-T(z)}.$$

De aquí resulta

$$T(z)^2 - T(z) + z = 0,$$

que se resuelve igual que la ecuación (6); de hecho, es la misma ecuación con $C(z) = zT(z)$. Por lo tanto, el número T_n de árboles ordenados con n nodos es también un número de Catalan:

$$T_n = C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

La igualdad $T_n = C_{n-1}$ es inesperada, ya que árboles y caminos parecen a primera vista objetos muy distintos. Siempre que en combinatoria encontramos objetos distintos contados por los mismos números, es natural preguntarse si puede establecerse una correspondencia biyectiva entre ellos que dé cuenta directamente de la igualdad. En el caso que nos ocupa, la biyección es muy sencilla. Dado un árbol τ, lo recorremos externamente a partir de la raíz: cada vez que recorremos una arista en sentido ascendente, escribimos U, y si el sentido es descente escribimos D. Por ejemplo, el camino asociado al segundo árbol de la figura 1 es UUDUDD. Dejamos al lector la comprobación de que el camino obtenido no pasa por debajo de la recta $x = 0$, y de que, en efecto, se trata de una biyección.

Con frecuencia interesa contar árboles con ciertas restricciones. Por ejemplo, exigimos que cada nodo tenga a lo sumo dos descendientes. Si llamamos $\mathcal{M}$ a la clase de árboles con esta propiedad, la ecuación correspondiente es

$$M(z) = z\left(1 + M(z) + M(z)^2\right), \tag{9}$$

donde el factor entre paréntesis indica que la raíz del árbol puede tener cero, uno o dos descendientes. Esta es en parte la potencia del método simbólico:

una vez que hemos hallado una buena descomposición, con frecuencia podemos introducir variaciones en el problema con muy poco esfuerzo adicional. El resultado general es el siguiente.

Teorema 4. *Sea Ω un conjunto de enteros no negativos. Entonces la función generatriz de la clase $\mathcal{U}$ de árboles ordenados tales que los grados de salida de los nodos pertencen a Ω satisface la ecuación*

$$U(z) = z\omega(U(z)), \qquad \textit{donde} \;\; \omega(y) = \sum_{k\in\Omega} y^k.$$

Nótese que la ecuación anterior tiene la forma adecuada para aplicar el teorema 3. Dejamos al letor la resolución de la ecuación (9); se obtienen los llamados números de Motzkin M_n, que no admiten una fórmula cerrada tan sencilla como los números de Catalan. Los primeros valores son $1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323$.

Objetos etiquetados

En la discusión precendente, los *átomos* que constituían los objetos combinatorios eran indistinguibles. Con frecuencia, resulta necesario que sean distinguibles o, dicho de otra manera, que estén *etiquetados*, de modo que el orden en que los átomos se agrupan para formar objetos combinatorios es relevante.

Una *clase etiquetada* es una clase combinatoria $\mathcal{A}$ donde los elementes están formados por átomos y cada átomo tiene asignada una etiqueta diferente. La talla de un elemento es el número de átomos. Si α tiene talla n, el conjunto de etiquetas asignadas a α debe ser necesariamente $\{1, 2, \ldots, n\}$. En este caso decimos que α está *bien etiquetado*.

La definición de $\mathcal{A}_n = \{\alpha \in \mathcal{A} : |\alpha| = n\}$ y de $A_n = |\mathcal{A}_n|$ es la misma que en el caso no etiquetado. La *función generatriz exponencial* asociada a la clase $\mathcal{A}$ es la serie

$$A(z) = \sum_{\alpha} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}.$$

Enseguida veremos por qué, a diferencia del caso no etiquetado, tenemos un factorial dividiendo.

Nuestro primer ejemplo son las permutaciones. Una permutación es una lista ordenada $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$, donde los σ_i están etiquetados con $\{1, 2, \ldots, n\}$. Es bien sabido que toda permutación se descompone de forma única en producto de ciclos disjuntos. Así, por ejemplo,

$$4\,6\,3\,5\,1\,2 = (1\,4\,5)\,(2\,6)\,(3), \tag{10}$$

donde el orden de los factores es irrelevante. Podemos decir, informalmente, que una permutación es un *conjunto* de ciclos. La formalización de esta idea

requiere el concepto de producto etiquetado; un ejemplo será útil para introducirlo. Si queremos construir una permutación a partir de los ciclos (1) y (1 3 2), necesitamos las etiquetas $\{1, 2, 3, 4\}$. Hay cuatro permutaciones que son "consistentes" con el orden de las etiquetas en cada ciclo:

$$(1)\,(2\,4\,3) \qquad (2)\,(1\,4\,3) \qquad (3)\,(1\,4\,2) \qquad (4)\,(1\,3\,2)$$

En general, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son clases etiquetadas, el *producto etiquetado* $\mathcal{A}*\mathcal{B}$ es la clase de pares ordenados (α, β), con $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{B}$, reetiquetados de todas las maneras consistentes. Si $|\alpha| = k$ y $|\beta| = n - k$, entonces hay $\binom{n}{k}$ maneras de reetiquetar; no hay más que elegir las etiquetas, ya que el reetiquetado, al ser consistente, está determinado. Resulta que el número de objetos de talla n en $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ es igual a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k B_{n-k} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{k!} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!}.$$

Lo cual implica que la FG de $\mathcal{A}*\mathcal{B}$ es simplemente $A(z)B(z)$ (nótese que el factor $n!$ en la expresión anterior se cancela convenientemente con el denominador de $z^n/n!$ en la FG exponencial).

La operación de suma, o unión disjunta, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ se define como en el caso no etiquetado, y la FG vuelve a ser $A(z)+B(z)$. La de sucesión de define como

$$S\{\mathcal{A}\} = \{\epsilon\} + \mathcal{A} + (\mathcal{A} * \mathcal{A}) + (\mathcal{A} * \mathcal{A} * \mathcal{A}) + \cdots,$$

y la FG es, nuevamente, igual a $1 + A(z) + A(z)^2 + \cdots = 1/(1 - A(z))$.

Llegamos finalmente a la operación de *conjunto*. La clase $\Pi\{\mathcal{A}, \text{card} = k\}$ de conjuntos de talla k de $\mathcal{A}$ se obtiene a partir de $\mathcal{A} * \mathcal{A} * \cdots * \mathcal{A}$ (k factores) "olvidando" el orden de las componentes (formalmente, se toma el cociente por la relación de equivalencia que identifica dos sucesiones si tienen las mismas componentes, salvo el orden). La FG asociada es $A(z)^k/k!$, donde el denominador da cuenta del paso al cociente. La clase de todos los conjuntos de $\mathcal{A}$ es

$$\Pi\{\mathcal{A}\} = \sum_{k \geq 0} \Pi\{\mathcal{A}, \text{card} = k\},$$

y la FG asociada es $\sum_{k\geq 0} A(z)^k/k! = \exp(A(z))$. Resumimos las operaciones y su traducción sobre las series en la tabla 2.

Retomamos el ejemplo de las permutaciones. Si $\mathcal{P}$ es la clase de las permutaciones y $\mathcal{C}$ la de los ciclos, entonces $\mathcal{P} = \Pi\{\mathcal{C}\}$: esto formaliza con precisíon la idea de que una permutación es un conjunto de ciclos. Puesto que el número de ciclos de longitud n es igual a $(n-1)!$, tenemos que

$$C(z) = \sum_{n \geq 1} (n-1)! \frac{z^n}{n!} = \ln \frac{1}{1-z}.$$

Construcción		*Operación*
Suma	$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$	$C(z) = A(z) + B(z)$
Producto	$\mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B}$	$C(z) = A(z)B(z)$
Sucesión	$\mathcal{B} = \mathcal{S}\{\mathcal{A}\}$	$B(z) = 1/(1 - A(z))$
Conjunto	$\mathcal{B} = \Pi\{\mathcal{A}\}$	$B(z) = \exp(A(z))$

Tabla 2: Construcciones con clases etiquetadas.

Según las reglas anteriores, la FG de las permutaciones es

$$P(z) = \exp(C(z)) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} n! \frac{z^n}{n!}.$$

De aquí se obtiene que el número de permutaciones de talla (longitud) n es igual a $n!$ Llegados a este punto el lector pensará que para este viaje no hacían falta estas alforjas; pretendemos convencerle, al contrario, de que estas alforjas tan livianas permiten emprender fácilmente otros viajes más interesantes.

Sea $\mathcal{D}$ la clase de los *desarreglos*, es decir, permutaciones sin puntos fijos. Puesto que un punto fijo corresponde a un ciclo de longitud uno, tenemos que $\mathcal{D} = \Pi\{\mathcal{C}, \text{card} > 1\}$. En términos de FGs tenemos que

$$D(z) = \exp(C(z) - z) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

Si extraemos el coeficiente de z^n en la serie anterior obtenemos la fórmula clásica

$$D_n = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \tag{11}$$

para el número de desarreglos de longitud n.

Una *involución* es una permutación σ tal que $\sigma^2 = \text{id}$ en el grupo simétrico S_n. Ahora bien, esto equivale a que todos los ciclos en que descompone σ sean de longitud uno o dos. Si $\mathcal{I}$ es la clase de las involuciones, entonces $\mathcal{I} = \Pi\{\mathcal{C}, \text{card} \leq 2\}$. En términos de FGs tenemos que

$$I(z) = \sum_{n\geq 0} I_n \frac{z^n}{n!} = \exp(z + z^2/2).$$

Insistimos una vez más en que la fórmula anterior debe considerarse como una solución completa al problema de contar involuciones. Dejamos al lector la deducción de la recurrencia

$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$$

y de la fórmula explícita

$$I_n = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ par}}}^{n} \binom{n}{i} \frac{i!}{2^{i/2}(i/2)!}.$$

Más en general, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5. *Sea Ω un conjunto de enteros positivos. Entonces la función generatriz exponencial de la clase $\mathcal{Q}$ de permutaciones tales que las longitudes de sus ciclos pertencen a Ω es igual a*

$$Q(z) = \exp\left(\sum_{k\in\Omega} \frac{z^k}{k}\right).$$

Si queremos restringir el número de ciclos, en lugar de sus longitudes, hemos de actuar sobre los sumandos de la serie $\exp(C(z)) = \sum_{n\geq 0} C(z)^n/n!$. Dejamos al lector el enunciado de un resultado análogo al anterior en este caso. Nótese, en particular, que $\ln(1/(1-z))^k/k!$ es la FG de las permutaciones que descomponen en exactamente k ciclos; el coeficiente de $z^n/n!$ es el número de Stirling de primera clase $s(n,k)$.

Nuestro segundo ejemplo son las particiones de conjuntos (el problema 4 de la introducción). Sea $\mathcal{B}$ la clase etiquetada de las particiones de conjuntos y $\mathcal{C}$ la clase etiquetada de los conjuntos no vacíos. Una partición no es más que un *conjunto* de bloques, y un bloque es simplemente un conjunto *no vacío*, de modo que $\mathcal{B} = \Pi\{\mathcal{C}\}$. Ahora bien, para cada n hay un único conjunto de tamaño n bien etiquetado, a saber, el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. La función generatriz exponencial de la clase $\mathcal{C}$ es, pues,

$$C(z) = \sum_{n\geq 1} 1 \cdot \frac{z^n}{n!} = e^z - 1.$$

La FGE de la clase $\mathcal{B}$ de las particiones es, por lo tanto,

$$B(z) = \exp(C(z)) = \exp(e^z - 1). \tag{12}$$

Dejamos al lector la deducción de la recurrencia (1) que hallamos anteriormente para los números de Bell a partir de la fórmula de $B(z)$ (para ello deberá hallar la regla correspondiente al desplazamiento de un índice en el caso de FGEs y resolver una sencilla ecuación diferencial).

En resumen, siempre que un objeto combinatorio admite una descomposición (directa o recursiva) en términos de objetos elementales, las técnicas que hemos ilustrado en el caso de los árboles o de las permutaciones proporcionan resultados muy generales y flexibles. Esta es una de las virtudes del método simbólico. Sin exagerar demasiado, podemos decir que el método simbólico

trivializa una buena parte de la combinatoria enumerativa clásica. Los resultados básicos sobre árboles, caminos, palabras, permutaciones, particiones, etc. se obtienen todos a partir de unas pocas descomposiciones básicas y de cierta destreza en la manipulación de series de potencias. En este sentido, es instructivo comparar el tratamiento de estos temas en un texto clásico como [1], del tratamiento simbólico en los primeros capítulos de [8].

Sin embargo, algunos objetos combinatorios son demasiado complejos y requieren técnicas más específicas: dos buenos ejemplos de esta situación más compleja son los arreglos de dominós y los caminos sin autointersección mencionados en la introducción. De hecho, contar objetos bidimensionales es mucho más difícil que contar objetos que en cierto modo son unidimensionales o "lineales"; el motivo es que los objetos bidimensionales generalmente requieren descomposiciones muy sutiles para ser tratados.

Análisis asintótico

Aunque a menudo la solución a un problema enumerativo no puede expresarse mediante una fórmula cerrada sencilla, en muchos casos disponemos de estimaciones *asintóticas* para valores grandes de la talla de los objetos a contar. Vimos un primer ejemplo con los números de Fibonacci, para los cuales obtuvimos la estimación $u_n \sim C\omega^n$, con $w = (1+\sqrt{5})/2$ y C una constante. Las estimaciones asintóticas no proporcionan fórmulas exactas, pero sí una descripción *cualitativa* sencilla y útil. Por ejemplo, es fácil recordar que los números de Fibonacci crecen como una progresión geométrica cuya razón es la razón aúrea. Tal como observamos anteriormente, el análisis es igualmente sencillo siempre que $\sum u_n z^n$ sea un función racional de z. Lo interesante es que un análisis similar es posible para funciones generatrices bastante más complicadas.

La clave para obtener estimaciones asintóticas en situaciones más complicadas es considerar las funciones generatrices correspondientes como *funciones de variable compleja* y aplicar técnicas de análisis complejo para estimar los coeficentes de sus desarrollos de Taylor. Resumimos a continuación los conceptos básicos de análisis complejo que necesitamos en esta breve exposición.

Una función de variable compleja $f(z)$ es analítica en un punto a si admite un desarrollo de Taylor convergente

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$$

en un entorno de a. En lo que sigue nos limitaremos a desarrollos en un entorno de 0. Si $f(z)$ es analítica en 0, existe un disco (de radio posiblemente infinito) tal que la serie que representa a $f(z)$ es convergente en el interior del disco y divergente en el exterior. El radio de dicho disco es el *radio de convergencia* de $f(z)$ en $z = 0$. Una función $f(z)$ es meromorfa en a si admite un desarrollo

de Laurent convergente

$$f(z) = \sum_{n \geq -M} a_n (z-a)^n$$

en un entorno de a, donde M es un entero no negativo. La parte *singular* del desarrollo es $S_a(z) = \sum_{n \geq -M}^{-1} a_n (z-a)^n$; nótese que la parte *regular* $f(z) - S_a(z)$ define una función analítica. Si la parte singular ${}_a(z)$ es no nula, decimos que $f(z)$ tiene un *polo* en a. Si $a_{-M} \neq 0$, decimos que el polo tiene *orden* M y que a_{-1} es el *residuo* de f en a.

Dada una curva cerrada orientada Γ en el plano complejo y una función $f(z)$ analítica en Γ, la integral compleja $\int_\Gamma f(z)dz$ está bien definida y no depende de la parametrización de Γ. El resultado básico es la *fórmula de Cauchy* para los coeficientes de una función analítica en 0: si Γ es un camino cerrado simple que encierra el punto 0 y $f(z)$ es analítica en Γ, entonces

$$f_n = [z^n]f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

La fórmula anterior permite obtener información sobre los coeficientes de $f(z)$ a partir de los valores de la función, utilizando contornos de integración adecuados. Este es el hecho clave del método que describimos a continuación.

Si el desarrollo de Taylor de una función analítica $f(z)$ en 0 tiene radio de convergencia finito, entonces necesariamente existe un punto z_0 en la frontera del disco de convergencia en el que $f(z)$ deja de ser analítica; decimos que z_0 es una *singularidad dominante* de f. Por ejemplo, $f(z) = 1/(1-z)$ y $g(z) = \sqrt{1-z}$ son ambas analíticas en el disco $|z| < 1$. En ambos casos el punto 1 es una singularidad dominante, pero por razones distintas: para f porque $f(z) \to \infty$ cuando $z \to 1$; para g, porque, como es bien sabido, $g(z)$ no puede prolongarse analíticamente en un entorno de 1, debido a la existencia de dos *ramas* de la raíz cuadrada. Mientras que $f(z)$ es una función meromorfa (incluso racional), $g(z)$ es una función *algebraica*; esta diferencia es esencial y se traduce en distintos comportamientos asintóticos de los coeficientes. Enseguida veremos que $[z^n]g(z) \sim Cn^{-3/2}$: la presencia de un exponente de n no entero es característico de las funciones algebraicas y no puede ocurrir en funciones meromorfas.

Pasamos ahora al análisis sistemático de funciones generatrices. Supongamos que $f(z)$ es analítica en 0 y que tiene radio de convergencia finito. El primer paso es determinar la singularidad dominante de $f(z)$ (para simplificar, supondremos que sólo hay una)[2]. Si disponemos de una fórmula explícita para

[2]En este contexto es importante el teorema de Pringsheim: si los coeficientes de Taylor de $f(z)$ son números reales no negativos y R es el radio de convergencia de $f(z)$, entonces el punto real $z = R$ es una singularidad dominante de f. Es evidente que la condición anterior se satisface siempre para funciones generatrices, puesto que en este caso los coeficientes cuentan el *número* de elementos en una clase combinatoria.

$f(z)$, la singularidad dominante puede hallarse directamente en la mayoría de los casos. Por ejemplo, la FG de los números de Catalan $C(z) = \frac{1}{2z}(1 - \sqrt{1-4z})$ deja de ser analítica cuando el radicando se anula, de modo que la singularidad dominante está en $1/4$.

Si R es la singularidad dominante de $f(z) = \sum f_n z^n$ y $K = 1/R$, entonces $\limsup |f_n|^{1/n} = K$; decimos que f_n es de *orden exponencial* K^n, y lo denotamos por $f_n \asymp K^n$. Es decir,

$$f_n \asymp K^n \qquad \text{si y sólo si} \qquad \limsup |f_n|^{1/n} = K.$$

Otra forma de expresar esta relación es la siguiente:

$$|f_n| = \sigma(n) K^n,$$

donde $\sigma(n)$ es un factor subexponencial, en el sentido de que

$$\limsup |\sigma(n)|^{1/n} = 1.$$

Vemos, pues, que la *localización* de la singularidad dominante de $f(z)$ determina el orden de crecimiento exponencial de sus coeficientes. Veremos a continuación que la *naturaleza* de la singularidad determina cómo el término exponencial dominante queda afectado de un factor subexponencial. Los factores subexponenciales típicos son de la forma $Cn^\alpha (\log n)^\beta$, donde C, α y β son constantes (pero no son los únicos: por ejemplo, el número $p(n)$ de particiones del entero n crece, asintóticamente, como $Cn^{-1}e^{D\sqrt{n}}$ para ciertas constantes C y D).

El caso más sencillo es de las funciones meromorfas, cuyo comportamiento asintótico queda completamente descrito en el siguiente resultado. En el próximo apartado trataremos otras funciones que aparecen con frecuencia en combinatoria.

Teorema 6. *Sea $f(z) = \sum f_n z^n$ una función meromorfa para $|z| \le R$ con polos en $a_1, a_2, \ldots, a_m$, y analítica en $|z| = R$ y $z = 0$. Entonces existen polinomios $P_i(z)$, $1 \le i \le m$, tales que*[3]

$$f_n = \sum_{i=1}^{m} P_i(n) a_i^{-n} + O(R^{-n}).$$

Además, el grado de P_i es igual al orden del polo de f en a menos uno.

[3]Como es habitual, $O(h(n))$ denota una función $g(n)$ tal que $g(n) \le Ch(n)$ con C constante y n suficientemente grande.

La demostración del resultado anterior es sencilla: se descompone $f(z)$ en sus partes singular y regular y se aplica la fórmula de Cauchy; la parte singular es una función racional; la parte regular es analítica en $|z| \leq R$ y las propiedades generales implican la cota de error $O(R^{-n})$. Las estimaciones que se obtiene son de gran calidad. Por ejemplo, la FGE de las aplicaciones exhaustivas (que no son más que particiones de conjuntos en las que los bloques están ordenados) es igual a

$$R(z) = \sum_{n\geq 0} r_n \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2 - e^z}.$$

La función es meromorfa con polos en $\log 2 + 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$. El polo de módulo mínimo $\log 2$ es la singularidad dominante; los siguientes polos están en $\log 2 \pm 2\pi i$, con módulo menor que 6. Un sencillo cálculo de residuos nos da la estimación

$$\frac{r_n}{n!} = \frac{1}{2}(\log 2)^{-n-1} + O(6^{-n}).$$

Por ejemplo, la aproximación al valor exacto $r_{10} = 102247563$ es $\frac{1}{2}(\log 2)^{-11}10!$ $= 102247563.0052$.

Otro ejemplo lo proporciona el problema 5 de la introducción con $m = 3$. La función generatriz definida por la ecuación (2) es meromorfa con polos en los ceros del denominador $\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{\pi}{6})$, siendo el de menor módulo $2\pi\sqrt{3}/9$. La estimación asintótica del número de permutaciones sin tres posiciones consecutivas en orden creciente resulta ser (el lector puede completar los detalles)

$$p_n \sim e^{3\sqrt{3}\pi} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^n n!.$$

La estimación anterior puede resumirse así: la proporción $p_n/n!$ de permutaciones de longitud n que cumplen la condición decrece exponencialmente con razón $3\sqrt{3}/(2\pi) = .826993$.

Análisis de singularidades

El método del análisis de singularidades, que tiene por origen el trabajo de Flajolet y Odlyzko [7], permite extraer estimaciones asintóticas de funciones cuyas singularidades son más complicadas que los polos de las funciones meromorfas. La base del método es la correspondencia que existe entre 1) el desarrollo asintótico de una función cerca de sus singularidades dominantes y 2) el desarrollo asintótico de los coeficientes de la función.

El método consta de dos partes. En primer lugar, se obtiene un *catálogo* de coeficientes de funciones estándar que aparecen en los desarrollos singulares; a

continuación, *teoremas de transferencia* que permiten obtener el crecimiento de los coeficientes a partir de los desarrollos singulares.

El ejemplo básico del catálogo es la función $(1-z)^{-k}$, donde k es un entero positivo. El desarrollo $(1-z)^{-k} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} z^n$ nos da inmediatamente la estimación

$$[z^n](1-z)^{-k} = \frac{(n+k-1)\cdots(n+2)(n+1)}{(k-1)!} = \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\left(1+O(1/n)\right).$$

Si ahora α es un número complejo cualquiera, se tiene

$$[z^n](1-z)^{-\alpha} = \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1+O(1/n)\right),$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma de Euler, que es igual a $(\alpha-1)!$ si α es un entero positivo. De hecho, se tiene un desarrollo asintótico completo en potencias de n:

$$[z^n](1-z)^{-\alpha} = \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k(\alpha)}{n^k}\right),$$

donde $e_k(\alpha)$ es un polinomio en α de grado $2k$.

El teorema más general es el siguiente.

Teorema 7. *Sea α un número distinto de $0, -1, -2, \ldots$ y sea*

$$f(z) = (1-z)^{-\alpha}\left(\log\frac{1}{1-z}\right)^{\beta}.$$

Entonces

$$[z^n]f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(\log n)^{\beta}\left(1+\frac{C_1}{1!}\frac{\beta}{\log n}+\frac{C_2}{2!}\frac{\beta(\beta-1)}{(\log n)^2}+\cdots\right).$$

Pasamos ahora a enunciar los teoremas de transferencia; para evitar aspectos demasiado técnicos, no definimos con precisión las condiciones analíticas necesarias para la validez de los teoremas.

Teorema 8. *Si $f(z)$ satisface condiciones adecuadas de analiticidad en cierto dominio del plano complejo y, en un entorno de 1, satisface la condición*

$$f(z) = O\left((1-z)^{-\alpha}\left(\log\frac{1}{1-z}\right)^{\beta}\right),$$

entonces

$$[z^n]f(z) = O\left(n^{\alpha-1}(\log n)^{\beta}\right).$$

El segundo teorema trata las cotas de error del tipo $o(g(z))$, donde $f(z) = o(g(z))$ significa que $f(z)$ es un infinitésimo de $g(z)$.

Teorema 9. *Si $f(z)$ satisface condiciones adecuadas de analiticidad en cierto dominio del plano complejo y, en un entorno de 1, satisface la condición*

$$f(z) = o\left((1-z)^{-\alpha}\left(\log\frac{1}{1-z}\right)^{\beta}\right),$$

entonces

$$[z^n]f(z) = o\left(n^{\alpha-1}(\log n)^{\beta}\right).$$

La demostración de ambos teoremas se basa en la fórmula de Cauchy $[z^n]f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$, selecionando contornos de integración cada vez más cerca de la singularidad $z = 1$, que son capaces de "capturar" finamente el comportamiento de la función cerca de la singularidad. Los detalles completos son algo técnicos y pueden consultarse en [7] y [8]. El segundo teorema permite trasladar equivalencias asintóticas entre funciones a equivalencias entre los coeficientes, ya que $f(z) \sim g(z)$ equivale a $f(z) = g(z) + o(g(z))$. Por ejemplo, tenemos que

$$f(z) \sim (1-z)^{-\alpha} \quad \Rightarrow \quad [z^n]f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Después de esta larga introducción técnica llega el momento, más agradecido, de aplicar los resultados anteriores a problemas concretos. En los teoremas 8 y 9 la singularidad dominante está en $z = 1$; dada una función $f(z)$ cuya singularidad dominante esté en $z = \rho$, no hay más que aplicar los teoremas de transferencia a la función $f(z/\rho)$. En todos los ejemplos que siguen, las condiciones de analicitidad que no hemos explicitado son fáciles de comprobar.

Empezamos con la FG de los números de Catalan $C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$. Ya hemos visto anteriormente que la única singularidad dominante está en $z = 1/4$. Puesto que $[z^n](1-z)^{1/2} \sim \frac{n^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)}$ y $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$, obtenemos

$$[z^n]C(z) = [z^{n+1}]\frac{-\sqrt{1-4z}}{2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,n^{-3/2}4^n.$$

Desde luego, el resultado anterior puede obtenerse directamente a partir de la fórmula $[z^n]C(z) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ aplicando la estimación de Stirling, pero la potencia del método es que se aplica aunque *no* tengamos fórmulas explícitas de los coeficientes. Por ejemplo, la función generatriz definida por la ecuación (9), que tiene por coeficientes los números de Motzkin, es igual a $M(z) = \frac{1-z-\sqrt{(1+z)(1-3z)}}{2z}$. Es singular en los ceros del radicando, que son -1 y $1/3$;

la singularidad dominante está, pues, en $z = 1/3$. Alrededor del punto $1/3$, tenemos el desarrollo

$$M(z) = 1 - \sqrt{3}\sqrt{1-3z} + O((1-3z)^{3/2}),$$

y un cálculo análogo al anterior nos da

$$[z^n]M(z) \sim \sqrt{\frac{3}{4\pi}} n^{-3/2} 3^n.$$

Como último ejemplo, consideramos la FG exponencial de los grafos 2-regulares (cada vértice es incidente con exactamente 2 aristas), que es igual a

$$D(z) = \sum D_n \frac{z^n}{n!} = \frac{e^{-z/2-z^2/4}}{\sqrt{1-z}}.$$

La única singularidad está en $z = 1$. El desarrollo alrededor de 1 se obtiene multiplicando los desarrollos de Taylor del numerador y del denominador, y obtenemos

$$D(z) = \frac{e^{-3/4}}{\sqrt{1-z}} + e^{-3/4}\sqrt{1-z} + \cdots.$$

Aplicando los teoremas de transferencia término a término se obtiene

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{e^{-3/4}}{\sqrt{\pi n}} + \frac{3e^{-3/4}}{8\sqrt{\pi n^3}} + O(n^{-5/2}).$$

Concluimos este apartado con varias observaciones. En primer lugar, en los ejemplos anteriores hemos llevado a cabo el análisis asintótico de FGs para las que disponíamos de una fórmula explícita. ¿Qué ocurre cuando sólo conocemos la FG implícitamente? Si $f(z)$ está definida como la raíz de una ecuación

$$P(z, f(z)) = 0,$$

el teorema de la función implícita asegura que las únicas singularidades pueden ocurrir en los ceros comunes de las ecuaciones

$$P(z,y) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y} P(z,y) = 0. \tag{13}$$

En la mayoría de los casos, un análisis simple permite localizar la singularidad dominante sin ambigüedades. Nótese, en particular, que si P es un polinomio y, por lo tanto, $f(z)$ es una función algebraica, los ceros comunes de (13) se obtienen simplemente como los ceros de la resultante $\mathrm{Res}_y(P(z,y), \frac{\partial}{\partial y}P(z,y))$.

En varias situaciones de interés es posible llevar a cabo un análisis de singularidades y obtener desarrollos asintóticos completos. Esto es posible,

en particular, en el caso de funciones algebraicas: en [5] se lleva a cabo un estudio sistemático y se presentan algoritmos efectivos (basados en el desarrollo de funciones algebraicas en series fraccionarias de Puiseux) para obtener los desarrollos explícitamente.

La segunda observación es que los teoremas de transferencia se aplican a FGs que tienen singularidades finitas. La FGE de los números de Bell es, según la ecuación (12), igual a $\exp(e^z - 1)$; es una función analítica en todo el plano complejo y, por lo tanto, no tiene singularidades. Las técnicas para analizar esta situación son distintas y se basan en el llamado *método del punto de silla* (véase el capítulo 6 de [8]). Por ejemplo, puede probarse que los números de Bell $B(n)$ son, asintóticamente,

$$B(n) \sim (\log w)^{1/2} w^{n-w} e^w,$$

donde w es la única raíz positiva de $n = w \log(w+1)$. El orden de crecimiento está por encima de cualquier exponencial a^n, pero por debajo de $n!$

La última consideración se refiere a series divergentes, aquellas que tienen radio de convergencia 0, como $\sum_{n\geq 0} n! z^n$. Uno podría pensar que estas series, al no definir una función, no son abordables mediante métodos analíticos. Un ejemplo de que no siempre es así y de que en algunos casos es posible incluso establecer la existencia de leyes límite de probabilidad, se haya en [6].

Parámetros y leyes límites

Con frecuencia, interesa refinar la enumeración de una clase combinatoria teniendo en cuenta uno o varios parámetros. Un parámetro natural es, por ejemplo, el número de hojas (nodos terminales) en un árbol ordenado. En este caso nos interesamos por el número de árboles con n nodos y exactamente k hojas. Siguiendo con el ejemplo, sea $\mathcal{T}$ nuevamente la clase de árboles ordenados y

$$\xi : \mathcal{T} \to \mathbb{N}$$

la función que asigna a cada árbol τ el número de hojas $\xi(\tau)$. Para estudiar ξ introducimos la función generatriz *bivariada*

$$T(u, z) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} u^{\xi(\tau)} z^{|\tau|} = \sum_{n,k} T_{n,k} u^k z^n,$$

donde $T_{n,k}$ es el número de árboles con n nodos y exactamente k hojas. Nótese que el rango de k para el cual $T_{n,k}$ no es cero es igual a $[1, n-1]$, ya que un árbol de n nodos siempre tiene al menos una hoja y a lo sumo tiene $n-1$. Otros parámetros tendrán un rango cuadrático en n, en lugar de lineal: un ejemplo es la longitud total *de encaminamientos* en un árbol, es decir, la suma de las distancias de la raíz a cada uno de los nodos. Toda la información relativa a ξ está contenida en la serie $T(u, z)$. Señalamos en primer lugar que

$T(1,z) = \sum_{n\geq 0} T_n z^n$ es simplemente la FG de la clase de árboles; es decir, al hacer $u = 1$ "olvidamos" el parámetro ξ.

Para calcular $T(u,z)$ hay que modificar la ecuación básica (8), distinguiendo el caso en que el subárbol que emana de la raíz es vacío, ya que da lugar en la descomposición recursiva a una hoja. Así, tenemos que

$$\mathcal{T} = \mathcal{N} \times (\mathcal{L} + \mathcal{T} + (\mathcal{T} \times \mathcal{T}) + \cdots),$$

donde $\mathcal{L}$ es la clase con un único elemento de talla 0 y $\xi = 1$. La ecuación correspondiente es

$$T(u,z) = z\left(u + T(u,z) + T(u,z)^2 + \cdots\right) = z\left(u + \frac{T(u,z)}{1 - T(u,z)}\right). \qquad (14)$$

Podemos obtener el coeficiente de $u^k z^n$ por inversión de Lagrange, sin más que considerar T como función de z y la variable u como una "constante". El resultado, que el lector puede comprobar aplicando el Teorema 3 con $\phi(t) = u + t/(1-t)$, son los llamados números de Narayana:

$$T_{n,k} = \frac{1}{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n-1}{k-1}. \qquad (15)$$

Así, por ejemplo, $T_{5,2} = 6$ indica que hay exactamente 6 árboles con 5 nodos y 2 hojas, tal como muestra la figura 2.

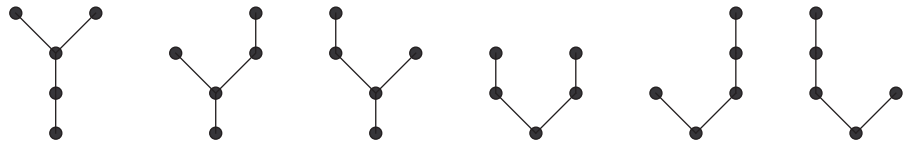

Figura 2: Los 6 árboles ordenados con 5 nodos y 2 hojas.

Pasamos ahora a considerar un parámetro ξ como una familia de variables aleatorias discretas (X_n), donde X_n es la variable definida sobre el conjunto de árboles de n nodos tal que $X_n(\tau)$ es el número de hojas de τ. La primera pregunta que nos formulamos es cómo hallar la media y la varianza de X_n a partir de $T(u,z)$. La respuesta es sencilla:

$$E(X_n) = \frac{1}{T_n}\sum_k k T_{n,k} = \frac{[z^n]T_u(1,z)}{[z^n]T(1,z)},$$

donde $[z^n]$ extrae el coeficiente de z^n en una serie y $T_u(1,z)$ se obtiene derivando $T(u,z)$ respecto de u y haciendo $u = 1$. Para obtener la varianza

basta calcular los momentos de segundo orden y aplicar la fórmula $\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Un cálculo rutinario premite comprobar que

$$E(X_n^2) = \frac{[z^n]T_u(1,z) + [z^n]T_{uu}(1,z)}{[z^n]T(1,z)}.$$

En el ejemplo que nos ocupa, los cálculos son sencillos a partir de (14) (ya sea resolviendo la ecuación cuadrática o derivando implícitamente) y obtenemos

$$E(X_n) = n/2, \qquad \sigma^2(X_n) = \frac{n(n-2)}{4(2n-3)}. \tag{16}$$

Las fórmulas para la media y la varianza de distribuciones discretas son clásicas y eran conocidas ya por Laplace, el primero en introducir series de potencias en la teoría de la probabilidad. Pero podemos ir más lejos. Con frecuencia, un parámetro combinatorio admite una *ley límite*, en el sentido de que las variables X_n tienden en probabilidad hacia una distribución límite. Cuando esto ocurre, tenemos una visión cualitativa muy precisa del parámetro.

Una ley límite puede ser discreta o continua. Una sucesión X_n de variables aleatorias discretas admite una *ley límite discreta* si existen números $p_k \geq 0$ tales que $\sum_k p_k = 1$ y

$$p_k = \lim_{n\to\infty} \Pr\{X_n = k\}.$$

Recordemos que una sucesión de variables aleatorias Y_n converge en distribución a una variable Y si las funciones de distribución $G_{Y_n}(x)$ convergen hacia la función de distribución $G_Y(x)$, puntualmente para cada x. Una sucesión X_n admite una *ley límite continua* si las variables normalizadas $X_n^* = (X_n - \mu_n)/\sigma_n$ (donde μ_n y σ_n son, respectivamente, la media y desviación de X_n) convergen en distribución a una variable aleatoria continua Y. Las leyes límite más frecuentes en combinatoria son la distribución de Poisson, como ley discreta, y la normal, como ley continua. A continuación damos un ejemplo de cada una de ellas.

Sea X_n el número de puntos fijos en una permutación de longitud n. La distribución en este caso es fácil de calcular. Recordemos que D_n es el número de n-permutaciones sin puntos fijos. El número de n-permutaciones con exactamente k puntos fijos es, pues, igual a

$$F_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k},$$

donde el factor binomial corresponde a la elección de los k puntos fijos. La fórmula (11) implica la estimación $D_n \sim e^{-1}/n!$; de aquí se sigue que la distribución asintótica es, para k fijo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n,k}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{D_{n-k}}{k!(n-k)!} = e^{-1}\frac{1}{k!}.$$

Esta es precisamente la distribución de Poisson con parámetro 1. Así, aunque la fórmula exacta para los $F_{n,k}$ sea relativamente compleja, la visión cualitativa es muy simple: para n grande, el número de puntos fijos en una permutación se comporta como una distribución Poisson(1).

Nuestro siguiente ejemplo es el número de hojas en árboles ordenados. La fórmula (15), junto con la fórmula $T_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$, nos da una fórmula explícita para la distibución $T_{n,k}/T_n$. La figura 3 muestra la distribución para $n = 15$ y sugiere claramente una distribución normal. La demostración de que la ley límite es normal $\mathcal{N}(0,1)$ puede hacerse directamente a partir de la fórmula explícita para $T_{n,k}/T_n$, utilizando la aproximación de Stirling $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. Así es como se demuestra clásicamente el teorema de De Moivre-Laplace, según el cual la distribución binomial $2^{-n}\binom{n}{k}$ tiende a la distribución normal.

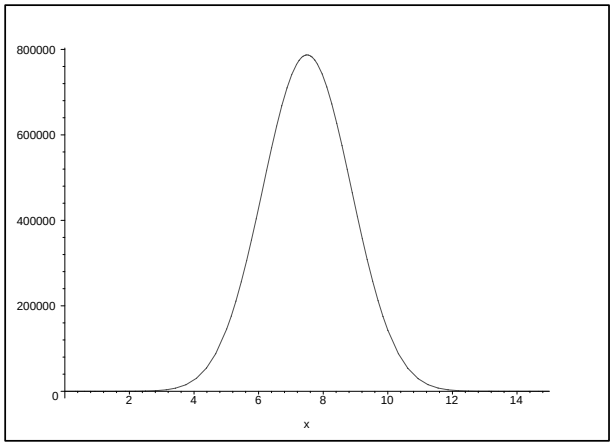

Figura 3: La distribución del número de hojas para árboles ordenados con 15 nodos.

Sin embargo, la demostración de la existencia de una ley límite normal cuando no disponemos de fórmulas simples requiere el uso de las funciones generatrices de probabilidad (FGP) y de los teoremas de continuidad y sus variantes. Si X es una variable discreta y $p_k = \Pr\{X = k\}$, la FGP de X es la serie

$$p(u) = \sum_{k\geq 0} p_k u^k.$$

El *teorema de continuidad* en el caso discreto afirma lo siguiente: Si X_n y X son variables discretas con FGPs $p_n(u)$ y $p(u)$, respectivamente, y $\lim_{n\to\infty} p_n(u) = p(u)$ para todo[4] u, entonces las X_n admiten X como ley límite.

El análogo de la FGP para una variable arbitraria Y es la función característica

$$\Phi_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dG(x),$$

donde $G(x)$ es la función de distribución de Y y la integral es la de Stieljes. Nótese que si Y es una variable discreta con FGP igual a $p_Y(u)$, entonces $\phi_Y(t) = p_Y(e^{it})$. El teorema de continuidad general es el siguiente.

TEOREMA 10. *Si Y_n, Y son variables aleatorias con funciones características $\phi_n(t)$, $\phi(t)$ y $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t)$ para todo t, entonces las Y_n convergen en distribución a Y.*

Como primer ejemplo, veamos la demostración del teorema de De Moivre-Laplace usando funciones características. La distribución binomial tiene media $\mu_n = n/2$, desviación $\sqrt{n}/2$ y FGP igual a $p_n(u) = 2^{-n}(1+u)^n$. Un cálculo sencillo nos da como función característica de la variable normalizada

$$\phi_n^*(t) = e^{-it/\sqrt{n}} \left(\frac{1 + e^{2it/\sqrt{n}}}{2} \right)^n = \cos(t/\sqrt{n})^n.$$

La forma asintótica se halla tomando logaritmos. Para t fijo, cuando $n \to \infty$, tenemos

$$\log \phi_n^*(t) = n \log \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^4}{24n^2} - \cdots \right) = -\frac{t^2}{2} + O(1/n).$$

Puesto que la función característica de la normal $\mathcal{N}(0,1)$ es $e^{-t^2/2}$, el teorema queda demostrado.

A continuación, recordamos el contenido del *teorema central del límite*: si X_n son variables independientes, tienen una distribución común con media μ y desviación σ, y $S_n = X_1 + \cdots X_n$, entonces las medias normalizadas $S_n^* = (S_n - \mu n)/(\sigma\sqrt{n})$ convergen en distribución a la normal $\mathcal{N}(0,1)$. La demostración sigue el razonamiento anterior: puesto que las X_n son independientes, la función característica de S_n^* es $\phi(t/(\sigma n))^n$, donde ϕ es la función característica común de las X_i; tomamos logaritmos y desarrollos locales y obtenemos, nuevamente, que el límite es $e^{-t^2/2}$.

La propiedad clave en las demostraciones anteriores es que la función característica de las variables normalizadas es una *potencia* de n. Esta condición

[4] De hecho, es suficiente que la convergencia sea en un conjunto Ω con al menos un punto de acumulación en el interior del disco unidad.

raramente se satisface en problemas enumerativos, pero a menudo es posible demostrar que la función característica es una *cuasi-potencia*, un concepto que el siguiente teorema de Hwang [10] hace preciso.

Teorema 11. *Sean X_n variables aleatorias no negativas con FGP $p_n(u)$ y sean $A(u)$ y $B(u)$ funciones analíticas en 1 con $A(1) = B(1) = 1$. Si se cumple que*

$$p_n(u) = A(u)B(u)^{\beta_n}\left(1 + O(1/\kappa_n)\right),$$

uniformemente en un entorno complejo de 1, entonces las X_n tienen una ley límite normal.

La forma de aplicar el teorema anterior es, en líneas generales, la siguiente (por simplicidad, nos limitamos al caso de FGs ordinarias). Partimos de la función generatriz bivariada $F(u,z) = \sum f_{n,k}u^k z^n$ correspondiente a un parámetro ξ (piénsese, por ejemplo, en la serie $T(u,z)$ definida mediante la ecuación (14)) y queremos deducir la existencia de una ley límite a partir del análisis de $F(u,z)$. Si es posible aplicar el análisis de singularidades a la FG $F(1,z)$, obtenemos una aproximación

$$[z^n]F(1,z) \approx C \cdot \rho^{-n} n^{\alpha},$$

donde ρ es la singularidad dominante de $F(1,z)$ y α es, habitualmente, un número racional. Si las condiciones son favorables, es posible un análisis similar en un entorno de $u = 1$ y se obtiene una aproximación de la forma

$$[z^n]F(u,z) \approx C(u) \cdot \rho(u)^{-n} n^{\alpha(u)}.$$

En esta situación, la función generatriz de probabilidad sería

$$p_n(u) \approx \frac{C(u)}{C(1)}\left(\frac{\rho(u)}{\rho(1)}\right)^{-n} n^{\alpha(u)-\alpha(1)}.$$

Si sólo se perturba la singularidad ρ y el exponente crítico α no cambia, obtenemos la aproximación

$$p_n(u) \approx \frac{C(u)}{C(1)}\left(\frac{\rho(u)}{\rho(1)}\right)^{-n},$$

de la cual es posible, en general, deducir la existencia de una ley límite normal con media y varianza proporcionales a n. Para una implementación detallada de este bosquejo de programa a funciones algebraicas, el lector puede consultar [5], donde se analizan varios parámetros relacionados con el número de hojas en árboles ordenados. En todos los casos se obtiene una ley límite normal con media $\mu_n \sim \kappa n$ y varianza $\sigma_n^2 \sim \lambda n$, donde κ y λ son constantes que dependen del parámetro ξ en cuestión. Por ejemplo, si ξ es el número de hojas en árboles ordenados, se tiene $\kappa = 1/2$ y $\lambda = 1/8$, en consonancia con las ecuaciones (16).

Para completar las explicaciones anteriores, necesariamente breves, remitimos al lector al último capítulo de [8].

Comentarios bibliográficos

Lo que hemos llamado método simbólico es la culminación de ideas debidas a varios matemáticos durante la segunda mitad del siglo XX, entre ellos M.-P. Schutzenberger, D. Foata, G.-C. Rota, I. Goulden, D. Jackson, R. Stanley, H. Wilf y otros. Buena parte de nuestra exposición está basada en los libros [15] y [8] de P. Flajolet y R. Sedgewick. El primero de ellos es una excelente introducción al tema, que muestra además el papel central de la combinatoria enumerativa en el análisis de algoritmos. El segundo (en avanzado estado de preparación) es un texto muy notable, con un énfasis en los aspectos analíticos y probabilísticos, y está destinado a ser la referencia básica en el tema durante mucho tiempo. Para una rápida introducción a la Combinatoria Analítica, recomendamos la lectura de la ponencia [4] de Flajolet en el ICM 2002. También es recomendable el artículo de Odlyzko [13] sobre métodos asintóticos.

Otros textos importantes son: Goulden y Jackson [9], que contiene gran cantidad de resultados enumerativos no tratados en otros textos; Stanley [16, 17], que cubren, entre otros temas, la teoría enumerativa de conjuntos parcialmente ordenados, matrices de transferencia y funciones simétricas; y Comtet [1], Feller [3] y Riordan [14], más antiguos, pero todavía vigentes.

Fine

Supongamos que el estudiante que presentamos al iniciar esta discusión decide, una vez acabada la secundaria, estudiar matemáticas en la universidad. En más de una materia volverá a encontrar problemas de naturaleza combinatoria, que probablemente serán soslayados como "simples problemas de combinatoria", o como "problemas de combinatoria demasiado arduos para deternernos en ellos". En cualquier caso, es muy posible que acabe sus estudios sin saber de la combinatoria más que contar bolas en urnas, si es el caso. ¿Es esta una situación deseable, teniendo en cuenta el gran desarrollo de la combinatoria en las últimas décadas, sus importantes aplicaciones a la informática, la ingeniería, la biología y otras disciplinas, y su definitivo entroncamiento en las matemáticas contemporáneas a través de sus mútliples conexiones con el álgebra, la teoría de números, la geometría, la topología, la probabilidad, el análisis, la física estadística, la teoría de la computación y la optimización? El autor cree, sinceramente, que no.

Agradecimientos

Es para mí una satisfación reconocer una deuda de gratitud con el profesor Philippe Flajolet, quien, con la generosidad y profundidad que le caracterizan, me inició en los métodos simbólicos y analíticos en combinatoria enumerativa.

Referencias

[1] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, Reidel, Dordrecht, 1974.

[2] S. Elizalde, M. Noy, Consecutive patterns in permutations, *Advances in Applied Math.* **30** (2003), 110–125.

[3] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 1, 3a. ed., John Wiley, New York, 1971.

[4] P. Flajolet, *Singular Combinatorics*, Proc. International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002), 561–571, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[5] P. Flajolet, M. Noy, Analytic combinatorics of non-crossing configurations, *Discrete Math.* **204** (1999), 203–229.

[6] P. Flajolet, M. Noy, Analytic Combinatorics of Chord Diagrams, en *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics* (editado por D. Krob, A. Mikhalev), Springer (2000), pp. 191–201.

[7] P. Flajolet, A. M. Odlyzko, Singularity analysis of generating functions, *SIAM J. Discrete Math.* **3** (2) (1990), 216–240.

[8] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic combinatorics* (libro en preparación). Versión preliminar disponible en `http://algo.inria.fr/flajolet/`.

[9] I. P. Goulden and D. M. Jackson, *Combinatorial Enumeration*, John Wiley, New York, 1983.

[10] H.-K. Hwang, *Théorémes limites pour les structures combinatoires et les fonctions arithmetiques*, Ph.D. Thesis, École Polytechnique, Diciembre 1994.

[11] J. H. van Lint, R. M. Wilson, *A course in combinatorics*, 2a. ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[12] N. Madras, G. Slade, *The Self-Avoiding Walk*, Birkhäusser, Boston, 1993.

[13] A. M. Odlyzko, Asymptotic enumeration methods, en *Handbook of combinatorics, Vol. 1*, 1063–1229, Elsevier, Amsterdam, 1995.

[14] J. Riordan, *Introduction to Combinatorial Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.

[15] R. Sedgewick, P. Flajolet, *An Introduction to the Analysis of Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, MA 1996.

[16] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics, Vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[17] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics, Vol. 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

Marc Noy
Departamento de Matemática Aplicada II
Universidad Politécnica de Cataluña
Pau Gargallo 5
08028 Barcelona
Correo electrónico: marc.noy@upc.es