Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Oscar Ciaurri y José Luis Díaz-Barrero

En el año 1998, tras la reconstitución a lo largo del año anterior de la RSME, apareció el primer número de La Gaceta. Esta publicación nació como órgano de expresión de la RSME y como punto de encuentro de todos los que nos dedicamos a esta profesión. En el tiempo que llevo planteando y resolviendo problemas me he encontrado con numerosos autores españoles, o de habla hispana, publicando sus trabajos en revistas de ámbito angloparlante con un formato y unos objetivos similares a los de La Gaceta. Ante este hecho parece evidente hacerse la siguiente pregunta: ¿por qué no incluir una sección de problemas en La Gaceta de la RSME? La idea resulta no ser muy original; las revistas antecesoras de La Gaceta ya contaban con una sección de problemas y soluciones. En concreto, en la *Gaceta Matemática*, cuya primera serie se publicó hasta comienzos de los años ochenta, bajo el epígrafe *Ejercicios propuestos* llegaron a publicarse cerca de dos mil problemas. Algunas de las personas que ahora han participado en poner en pie este proyecto ya hacían entonces sus aportaciones. Esta sección, que comienza en este número y en la que hemos puesto una gran ilusión algunos socios, pretende ser la continuación de aquélla en el espíritu, aunque no lo sea en la forma exacta.

Trataremos de plantear problemas de distinta dificultad, que cubran la mayor parte posible de las ramas de las matemáticas pero sin caer en un exceso de especialización. Procuraremos que en la resolución de las propuestas baste usar técnicas que estén al alcance de cualquiera que tenga unas nociones avanzadas, aunque no especializadas, de matemáticas. Pensamos que no resulta de interés una propuesta que en su resolución involucre resultados excesivamente específicos. Con esto queremos animar a todos los lectores de La Gaceta a que participéis, enviando soluciones o propuestas, en la elaboración de esta sección. En cada número publicaremos ocho problemas y dejaremos un plazo de seis meses para recibir vuestras aportaciones. Tras este periodo de tiempo procederemos a analizar las soluciones recibidas y publicaremos una o varias de entre las que nos hayáis hecho llegar. La publicación de una solución a un problema no indicará que éste está completamente cerrado; cualquier aportación posterior por parte de los lectores (comentarios sobre las soluciones publicadas, nuevas soluciones o referencias adicionales) será bienvenida.

Antes de finalizar me gustaría dar las gracias a todas las personas que han colaborado para poner en marcha esta iniciativa. Me refiero a mis colegas: Miguel Amengual, Francisco Bellot, Manuel Benito, José Luis Díaz, Antonio

Durán, Sergio Falcón, Emilio Fernández, Joaquín Gómez, José Martínez, Juan Bosco Romero, Mercedes Sánchez, Eduardo Sáenz de Cabezón y Juan Luis Varona. Gracias a todos vosotros, esto no hubiese sido posible sin vuestra colaboración.

Óscar Ciaurri Ramírez.
Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja.

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos en formato* TeX. *Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta soluciones recibidas hasta el 30 de octubre de 2004.*

Solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas enviados a esta sección sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que una solución al problema no está disponible en estos momentos.

Problemas

Problema 1

Colocamos los enteros positivos como se muestra a continuación:

17	16	15	14	13
↓	5	4	3	12
	6	1	2	11
	7	8	9	10

Describir la figura que se obtiene al pintar en negro aquellas casillas que contienen un número con una cantidad impar de divisores. Justificar la respuesta.

Nota. El problema que inaugura esta sección es una variante del Problema **1881**, publicado en la *Gaceta Matemática*, 1ª serie, vol. 32 (5 y 6), pág. 92. La solución a este problema no llegó a publicarse. La última solución disponible para problemas de la sección de *Ejercicios propuestos* fue la correspondiente al Problema **1880**.

Propuesto por Manuel Benito Muñoz
I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño.

Problema 2

Sea $\triangle ABC$ un triángulo escaleno cuyos lados a, b y c verifican la relación $27b^3 = a^3 + c^3 + 9abc$. Probar que $r < \frac{2}{9}b\sqrt{3}$, donde r denota el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$.

Propuesto por José Luis Díaz-Barrero
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

PROBLEMA 3

Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos homotéticos (A' homólogo de A, etc.). Definimos $A'' = (BC') \cap (B'C)$, $B'' = (AC') \cap (A'C)$ y $C'' = (AB') \cap (A'B)$. Consideramos el triángulo $\triangle A'''B'''C'''$ cuyos vértices A''', B''' y C''' son, respectivamente, los baricentros de los triángulos $\triangle AA'A''$, $\triangle BB'B''$ y $\triangle CC'C''$.

(a) Probar que el triángulo $\triangle A'''B'''C'''$ es homotético con los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$.

(b) Probar que los baricentros de los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$ y $\triangle A'''B'''C'''$ están alineados.

NOTA. El problema anterior es una generalización del Problema **1480** de la revista *Crux Mathematicorum*, vol. 15 (8), pág. 233, publicado por el mismo autor. La solución de este problema apareció en el vol. 16 (10), pág. 316, de la misma revista.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad de Valladolid, Valladolid

PROBLEMA 4*

Sea $a \geq 2$ un número natural; ¿a partir de qué valor de n se verifica que $a^n < n!$? En las tablas siguientes se muestran los valores de n obtenidos para $a \leq 21$.

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	4	7	9	12	14	17	20	22	25	28

a	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
n	30	33	36	38	41	44	47	49	52	55

Propuesto por Sergio Falcón Santana
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas

PROBLEMA 5

Sean $f_1(x) = x + x^{-1}$ y $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ si $n > 1$. ¿Posee f_n algún punto fijo real?

Propuesto por José Martínez Aroza
Universidad de Granada, Granada

PROBLEMA 6

Si x es solución de la ecuación $x^2 - ax + 1 = 0$, siendo a un número natural mayor que 2, probar que x^3 puede escribirse en la forma $p+q\sqrt{r}$, donde p, q y r son números enteros.

Propuesto por Miguel Amengual Covas
Cala Figuera, Mallorca

PROBLEMA 7

Sea

$$h(t) = \frac{\pi}{16t^3} \frac{t\pi - \sin(t\pi)}{\cos^2\left(\frac{t\pi}{2}\right)},$$

para $t \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Probar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} h\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\pi^2}{4t^2} \operatorname{cosec}^2(t\pi) + \frac{\pi}{4t^3} \cot(t\pi) - \frac{1}{2t^4}.$$

Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez
Universidad de La Rioja, Logroño

PROBLEMA 8

Por cada una de las rectas paralelas medias de las caras de un cubo se trazan los dos planos que la unen con las aristas de la cara opuesta que son paralelas a ella. Los veinticuatro planos formados encierran el centro del cubo en un poliedro convexo. ¿Qué parte del volumen del cubo ocupa este poliedro? Generalizar el problema para un n-paralelotopo ($n \geq 2$).

NOTA. El caso $n = 2$ originario de este problema es muy conocido, cf. [1], ejercicio 13.6.5, y la referencia a H. Dörrie (1941) que allí se da. En la literatura de habla castellana lo encontramos, por ejemplo, en [2] (es la edición más temprana de este libro que hemos podido cotejar), problema 866. Fourrey lo recoge en [3], pág. 291, acreditando su aparición en alguno de los números de 1891 del *Journal de mathématiques élémentaires* de Vuibert (la primera revista europea de resolución de problemas, con tirada quincenal desde 1875). Una reaparición reciente se encuentra en [4].

Tanto para el cuadrado original, como para un paralelogramo cualquiera, el área del octógono central es un sexto del área total.

REFERENCIAS PARA LA NOTA

[1] H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*, 2ª reimp. de la 1ª ed. de 1971, Limusa, México D. F., 1988.

[2] M. García Ardura, *Problemas gráficos y numéricos de Geometría*, 5ª ed., Nuevas Gráficas S. A., Madrid, 1941.

[3] E. Fourrey, *Curiosités géométriques*, 2ª ed., Vuibert et Nony, París, 1907.

[4] E. Kitchen, *Dörrie tiles and related miniatures*, Mathematics Magazine, 67 (1994), págs. 128-130.

Propuesto por Emilio Fernández Moral,
I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño