La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

María Gaspar

XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

por

Ignasi Mundet i Riera

Entre los días 13 y 20 de septiembre de 2003 tuvo lugar en Mar del Plata (Argentina) la XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, en la que participaron un total de 19 países representados por 75 alumnos (4 participantes por país salvo Venezuela, con 3 participantes). El equipo español estaba formado por Víctor González Alonso (Bribiesca, Burgos), Luis Hernández Corbato (Madrid), Daniel Rodrigo López (Montcada i Reixac, Barcelona) y Maite Peña Alcaraz (Sevilla). Completaba el equipo español el jefe de delegación, Pepe Aymerich Miralles, y el tutor, Ignasi Mundet i Riera, además de Juan Antonio Caballero Molina y Paco González Martínez, que viajaron a título de observadores.

Argentina es un país con mucha tradición en competiciones de este tipo (ya acogió anteriormente la VI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se celebró en 1991 en Córdoba, además de la XXXVIII Olimpiada Internacional de Matemáticas, celebrada en Mar del Plata en 1997). Esta larga experiencia se notó en la excelente organización del evento. Es de destacar, en este sentido, el altísimo nivel matemático del equipo coordinador de problemas. Dicho equipo tiene por función tanto la preparación de la lista de problemas (de entre los cuales el jurado escoge los seis que aparecen en el examen), como el puntuar los ejercicios realizados por los estudiantes. Tanto una tarea como la otra conllevan muchas dificultades, y en la calidad de este trabajo se apoya la credibilidad matemática de una competición como ésta.

Como es habitual en estas competiciones, los problemas que constituían el examen tenían un enunciado sencillo y fácilmente comprensible, pero requerían más ingenio que conocimientos avanzados. Estos fueron sus enunciados:

Problema 1

a) Se tienen dos sucesiones, cada una de 2003 enteros consecutivos, y un tablero de 2 filas y 2003 columnas. Decida si siempre es posible distribuir los números de la primera sucesión en la primera fila y los de la segunda sucesión en la segunda fila, de tal manera que al sumar los dos números de cada columna formen una nueva sucesión de 2003 números consecutivos.
b)¿Y si se reemplaza 2003 por 2004?
Tanto en a) como en b), si la respuesta es afirmativa, explique cómo se distribuirían los números, y si es negativa, justifique el porqué.

Problema 2

Sean C y D dos puntos de la semicircunferencia de diámetro AB tales que B y C están en semiplanos distintos respecto de la recta AD. Denotemos M,N y P los puntos medios de AC, DB y CD respectivamente. Sean O_A y O_B los circuncentros de los triángulos ACP y BDP. Demuestre que las rectas O_AO_B y MN son paralelas.

Problema 3

Pablo estaba copiando el siguiente problema:

Considere todas las sucesiones de 2004 números reales $(x_0, x_1, x_2, ..., x_{2003})$, *tales que*

$$x_0 = 1,$$
$$0 \leq x_1 \leq 2x_0,$$
$$0 \leq x_2 \leq 2x_1,$$
$$...$$
$$0 \leq x_{2003} \leq 2x_{2002}.$$

Entre todas estas sucesiones, determine aquella para la cual la siguiente expresión toma su mayor valor: S=.....

Cuando Pablo iba a copiar la expresión de S le borraron la pizarra. Lo único que pudo recordar es que S era de la forma $S = \pm x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_{2002} + x_{2003}$, donde el último término, x_{2003}, tenía coeficiente $+1$, y los anteriores tenían coeficiente $+1$ ó -1. Demuestre que Pablo, a pesar de no tener el enunciado completo, puede determinar con certeza la solución del problema.

Problema 4

Sea $M=\{1,2,..., 49\}$ el conjunto de los primeros 49 enteros positivos. Determine el máximo entero k tal que el conjunto M tiene un subconjunto de k elementos en el que no hay seis números consecutivos. Para ese valor máximo de k, halle la cantidad de subconjuntos de M, de k elementos, que tienen la propiedad mencionada.

Problema 5

En el cuadrado $ABCD$, sean P y Q puntos pertenecientes a los lados BC y CD respectivamente, distintos de los extremos, tales que $BP = CQ$. Se consideran puntos X e Y, $X \neq Y$, pertenecientes a los segmentos AP y AQ respectivamente. Demuestre que, cualesquiera que sean X e Y, existe un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos BX, XY y DY.

Problema 6

Se definen las sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{y}$$

$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \text{ para } n \geq 0.$$

Demuestre que 2003 no divide a ninguno de los términos de estas sucesiones.

El lector podrá encontrar información adicional sobre la Olimpiada en la página *web*: `http://www.campus-oei.org/oim/xviiioim.htm`.

En esta ocasión el equipo español consiguió tres medallas de plata, lo cual puede considerarse un muy buen resultado. Por otra parte, la copa Puerto Rico (que se otorga al país que en los últimos tres años ha obtenido, siguiendo un cierto criterio, un mayor progreso) fue ganada por Puerto Rico.

Dicho esto, nunca está de más recordar que, más allá de obtener uno u otro resultado, lo mejor (y lo que queda con el paso del tiempo) de poder participar en una olimpiada matemática es la experiencia humana: descubrir un país en unas condiciones privilegiadas, conocer y convivir con un grupo de personas provinientes de muchos países distintos y, sobre todo, compartir con personas de la misma edad la pasión por las matemáticas. En cuanto a lo primero, decir que a lo largo de la estancia en Argentina el equipo español tuvo ocasión de visitar tanto Buenos Aires como la ciudad de Mar del Plata, así como de degustar las delicias gastronómicas del país (para lo cual nuestros estudiantes demostraron tener unas grandes aptitudes, fuese para comer bifés de chorizo como para engullir alfajores o huevos duros). En cuanto a lo segundo, mencionar que la organización del evento preparó varias actividades para facilitar la interacción entre representantes de países distintos.

Para finalizar quisiera agradecer, en nombre del equipo español, a todas las personas que participaron en la organización de la XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en Mar del Plata por el excelente trabajo llevado a cabo. También quisiera agradecer a todos aquellos que, en varios lugares de España, ayudan a prepararse para estas competiciones a los estudiantes que lo desean, enseñando matemáticas y ayudando a descubrir la belleza que en ellas se encuentra.

Ignasi Mundet i Riera
Universitat de Barcelona
Correo electrónico: ignasi.mundet-riera@upc.es