

**UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA**

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**Tesis Doctoral**

**Estudio de la Fiabilidad de  
Sistemas con Reparaciones  
Pospuestas**

Eva T. López Sanjuán

Badajoz, 2004

***Edita: Universidad de Extremadura  
Servicio de Publicaciones***

Caldereros 2. Planta 3ª  
Cáceres 10071  
Correo e.: [publicac@unex.es](mailto:publicac@unex.es)  
<http://www.unex.es/publicaciones>

Esta Memoria ha sido realizada por D<sup>a</sup>. Eva Teresa López Sanjuán, bajo la dirección de la Dra. D<sup>a</sup>. Inmaculada Torres Castro y el Dr. D. Attahiru Sule Alfa, y presentada en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura, para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

V<sup>o</sup>. B<sup>o</sup>. de los Directores de la Memoria.

Dra. D<sup>a</sup>. Inmaculada Torres Castro.      Dr. D. Attahiru Sule Alfa.

Badajoz, 2004



*A mis dos Rubenes*



## **Agradecimientos.**

En primer lugar, quiero agradecer especialmente a mi directora de tesis, Inma Torres, haberme brindado la oportunidad de realizar esta tesis doctoral. Agradezco su continuo apoyo y dedicación, así como el gran esfuerzo que ha empleado para que este proyecto se llevase a cabo.

También quiero agradecer a Luis Landesa su ayuda, sus aportaciones prácticas y su serenidad.

Deseo agradecer a Maribel haber compartido conmigo los momentos más difíciles, así como su apoyo incondicional; a mis compañeros de planta, Mariángeles, Pepe y Diego, el ánimo y los consejos que siempre me han dado; a Ignacio y a Inés, su compañerismo.

En general, doy gracias a todos mis compañeros del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, especialmente al Área de Estadística e Investigación Operativa, por crear un ambiente de trabajo agradable y cordial.

Finalmente, por supuesto, a mi familia, especialmente a mis padres y a Rubén, por haber compartido mis problemas y haberme apoyado en todo momento.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>vii</b>
<b>Introducción General</b>	<b>xi</b>
<b>1. Políticas de Mantenimiento en Sistemas Reparables</b>	<b>1</b>
1.1. Modelado estocástico de sistemas reparables . . . . .	1
1.2. Tiempos de vida . . . . .	6
1.2.1. Órdenes estocásticos . . . . .	11
1.2.2. Clases de envejecimiento . . . . .	12
1.3. Políticas de mantenimiento . . . . .	21
<b>2. Procesos Potenciales</b>	<b>25</b>
2.1. Proceso geométrico . . . . .	26
2.2. Definición de proceso potencial . . . . .	29
2.3. Propiedades de convergencia del proceso potencial . . . . .	33
2.4. Propiedades de desgaste . . . . .	35
2.5. Un modelo de sistema reparable . . . . .	42
2.6. Sistema sometido a distintos tipos de fallo . . . . .	45
2.6.1. Distribución estacionaria . . . . .	47
2.6.2. Beneficio esperado del sistema . . . . .	50
2.6.3. Ejemplos numéricos . . . . .	53

<b>3. Modelo I de Reparación Pospuesta</b>	<b>57</b>
3.1. Descripción del modelo . . . . .	58
3.2. Distribución transitoria del proceso . . . . .	59
3.3. Beneficio esperado del sistema . . . . .	63
3.3.1. Política de reparación pospuesta para $N = 2$ . . . . .	69
3.3.2. Política de reparación pospuesta para $N > 2$ . . . . .	74
3.4. Ejemplos numéricos . . . . .	79
3.4.1. Ejemplo 1 . . . . .	79
3.4.2. Ejemplo 2 . . . . .	83
<b>4. Modelo II de Reparación Pospuesta</b>	<b>89</b>
4.1. Descripción del modelo . . . . .	90
4.2. Tiempos esperados . . . . .	91
4.3. Beneficio esperado del sistema . . . . .	96
4.3.1. Política de reparación pospuesta para $N = 2$ . . . . .	99
4.3.2. Política de reparación pospuesta para $N > 2$ . . . . .	102
4.4. Ejemplos numéricos . . . . .	105
<b>Conclusiones finales y algunas cuestiones para futura investigación</b>	<b>111</b>
<b>Apéndice</b>	<b>117</b>
<b>Referencias</b>	<b>121</b>

## Resumen

La presente tesis doctoral se encuadra dentro del marco de la teoría de la fiabilidad y de la teoría de procesos estocásticos. En este trabajo se presenta un nuevo proceso estocástico, denominado *proceso potencial*, que permite modelar tiempos de operatividad y/o de reparación en un sistema en deterioro. Para este proceso estocástico se estudian sus principales propiedades sobre todo las que se refieren a convergencia, órdenes estocásticos y clases de envejecimiento. La segunda parte de esta tesis se dedica al estudio de una nueva política de mantenimiento de sistemas reparables que está basada en el concepto de *reparación pospuesta*. La idea principal de esta política es que la reparación de los fallos que sufre el sistema se pospone hasta un momento en que la reparación sea menos costosa. Esta política de mantenimiento se desarrolla bajo dos modelos. Para ambos modelos, se analiza el beneficio esperado por período laborable con el fin de determinar cuál es la política de reparación óptima. Asimismo, se ilustran los resultados teóricos con ejemplos numéricos.

## Abstract

The hallmark of this doctoral thesis is reliability theory and stochastic processes. In this work, it is presented a new stochastic process called *power process*, which models operating and/or repair times of a system with damage. Its main properties are studied, specially the ones related to convergence, stochastic orders and ageing classes. The second part of this thesis is dedicated to study a new maintenance policy for repairable systems, based on the concept of *delayed repair*. The main idea of it is delaying the repair of the failures suffered by the system until it is less expensive. This maintenance policy is developed under two models. For both of them, the expected profit per working period is analyzed to determine the optimum delayed policy. Also, theoretic results are illustrated with numerical examples.



# Nomenclatura

v.a.	variable aleatoria
vv. aa.	variables aleatorias
i.i.d.	independientes e idénticamente distribuidas
$I_A$	función indicadora de $A$
CMTC	cadena de Markov en tiempo continuo
$X \sim P(\lambda)$	$X$ sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda$
$X \sim \exp(\lambda)$	$X$ sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda$
$X \sim \text{Be}(p)$	$X$ sigue una distribución de Bernoulli de parámetro $p$
$X \sim \text{Ge}(p)$	$X$ sigue una distribución geométrica de parámetro $p$
$X \sim W(\lambda, \alpha)$	$X$ sigue una distribución Weibull de parámetros $\lambda$ y $\alpha$

$X \sim G(\lambda, \alpha)$	$X$ sigue una distribución gamma de parámetros $\lambda$ y $\alpha$
$X$ es IFR	$X$ tiene razón de fallos creciente
$X$ es DFR	$X$ tiene razón de fallos decreciente
$g$ es tipo B	la función $g$ tiene forma de bañera
$g$ es tipo U	la función $g$ tiene forma de bañera invertida
$X$ es IFRA	$X$ tiene razón de fallos creciente en media
$X$ es DFRA	$X$ tiene razón de fallos decreciente en media
$X$ es NBU	$X$ es nueva mejor que usada
$X$ es NWU	$X$ es nueva peor que usada
$X$ es IMRL	$X$ tiene vida media residual creciente
$X$ es DMRL	$X$ tiene vida media residual decreciente
$X$ es NBUE	$X$ es nueva mejor que usada en media
$X$ es NWUE	$X$ es nueva peor que usada en media
$X$ es IDMRL	$X$ tiene vida media residual tipo U
$X$ es DIMRL	$X$ tiene vida media residual tipo B

$f'$	derivada primera de $f$
$f''$	derivada segunda de $f$
$f^{(n)}$	$n$ -ésima convolución de $f$
$f(h) = o(h)$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$
$\{a_n\} \rightarrow a$	$\{a_n\}$ converge a $a$
$\{a_n\} \downarrow a$	$\{a_n\}$ converge a $a$ de forma decreciente
$\{a_n\} \uparrow a$	$\{a_n\}$ converge a $a$ de forma creciente
$X_n \xrightarrow{d} X$	$X_n$ converge en distribución a $X$
$X_n \xrightarrow{P} X$	$X_n$ converge en probabilidad a $X$
$X_n \xrightarrow{c.s.} X$	$X_n$ converge casi seguramente a $X$
$X_n \xrightarrow{L^p} X$	$X_n$ converge en $L^p$ a $X$
u.m.	Unidades monetarias
u.t.	Unidades de tiempo
■	Fin de demostración
□	Fin de observación o ejemplo



# Introducción General

La fiabilidad es una disciplina de la Ingeniería que tiene como propósito desarrollar métodos y herramientas para predecir, evaluar y demostrar propiedades relacionadas con los sistemas. En fiabilidad, un *sistema* se entiende como una colección de dispositivos diseñados para realizar una serie de funciones. Un *sistema reparable* es un sistema tal que, tras fallar, puede ser restaurado a un estado de operatividad de algún modo en lugar de tener que ser reemplazado totalmente.

La fiabilidad comprende diversas áreas como son el mantenimiento de sistemas, los problemas de reemplazo de los dispositivos, la modelación de tiempos de vida de las componentes de un sistema, el control de calidad de dichos sistemas, ...

El análisis de sistemas reparables ha sido tema de estudio de ingenieros industriales, probabilistas y estadísticos, dando lugar a numerosas líneas de investigación sobre esta materia. Mientras que los estadísticos se dedican a la estimación de las características de los tiempos de operatividad, los ingenieros industriales se preocupan más por los métodos y medios de mejora del diseño del sistema bajo unos costes prefijados. Por su parte, los probabilistas dirigen su estudio a las características operativas de estos sistemas usando modelos estocásticos apropiados.

En este trabajo, el estudio de la fiabilidad de un sistema se desarrolla bajo un prisma probabilístico.

## **Antecedentes de la teoría matemática de la fiabilidad**

Una de las primeras áreas de la fiabilidad que fue estudiada de forma matemáticamente rigurosa fue la de mantenimiento de sistemas, estudios que fueron realizados por Khintchine (1932).

Las aplicaciones de la teoría de renovación a problemas de reemplazo fueron discutidas por primera vez por Lotka (1939), el cual resumió todas las investigaciones previas realizadas en este área. Campbell (1941) también se aproximó a los problemas de reemplazo usando técnicas de teoría de la renovación, pero es a Feller (1941, 1949), a quien se le atribuye el desarrollo de esta teoría como una disciplina matemática.

Los primeros intentos de justificar la distribución de Poisson como la distribución de llegada de llamadas a una centralita sentaron las bases del uso de la distribución exponencial como la ley de fallos de un sistema complejo. Fueron Ososkov (1956) y Khintchine (1962) quienes proporcionaron pruebas matemáticas rigurosas.

Los trabajos de Davis (1952) y Epstein & Sobel (1953) marcaron el inicio de la hipótesis ampliamente difundida de considerar la exponencial como distribución de tiempos de vida. Davis (1952) presenta datos de fallos y los resultados de varios test de bondad de ajuste para distribuciones de fallo, que muestran una clara preferencia por la distribución exponencial. Una razón fundamental para la popularidad de la distribución exponencial y su amplia explotación en fiabilidad es que se obtienen expresiones sencillas para la suma de razones de fallo.

Sin embargo, otros estudios defienden diferentes distribuciones de tiempos de vida. Weibull (1939) propuso la distribución que lleva su nombre para describir la duración de la vida de los materiales. Posteriormente, Daniels (1945) y Birnbaum (1955) propusieron modelos matemáticos que justificaban el uso de la normal y de la familia de las distribuciones gamma, respectivamente, como distribuciones de tiempos de vida en ciertas situaciones.

Los trabajos de Kao (1956, 1958) fueron los que atrajeron la atención de nuevo sobre la distribución Weibull, interés que se intensificó con la publicación del trabajo de Zelen & Danne-miller (1961), que demostraba que muchos tests de tiempos de vida basados en la exponencial no eran robustos.

La sofisticación matemática de la fiabilidad se fue incrementando en paralelo con el crecimiento en la complejidad de los sistemas y con el importante papel asumido por los procesos estocásticos y la teoría relacionada con los mismos.

A partir de los años 60, una de las principales líneas de investigación desarrollada fue la dedicada al mantenimiento de los equipos y sistemas. El monográfico de Barlow & Proschan (1965) marcó un punto de partida en el estudio de estas políticas de mantenimiento.

## Motivación de la tesis

La idea de deterioro de un sistema es un concepto muy intuitivo. Si consideramos cualquier dispositivo doméstico (lavadora, televisión, ...), es razonable pensar que, a medida que la edad y el uso de dichos dispositivos electrónicos domésticos aumenta, es probable que la propensión a que fallen sea mucho mayor que cuando los adquirimos nuevos. En una gran empresa, el deterioro de sus equipos a menudo se refleja en unos costes de producción más altos y un descenso en la calidad del producto final.

Este concepto de deterioro, sin embargo, no tiene una definición matemática universalmente aceptada y depende de las características de cada sistema en particular.

Una de las maneras de modelar estocásticamente el deterioro de un sistema es utilizar un proceso estocásticamente monótono, siendo el *proceso geométrico* uno de los más utilizados en fiabilidad. Este proceso geométrico fue introducido por Lam (1988) y presenta diversas propiedades de convergencia que lo hacen apropiado para la modelación estocástica de un sistema en deterioro. Sin embargo, presenta el inconveniente de que las variables aleatorias que lo forman no tienen por qué conservar el mismo soporte. Este hecho puede provocar serios inconvenientes sobre todo cuando utilizamos distribuciones de probabilidad de naturaleza discreta. Por esta razón nos planteamos la posibilidad de construir un proceso estocástico que fuese apropiado para modelar el deterioro de un sistema reparable pero con la característica de que todas las variables que lo formaran conservaran el mismo soporte. Como veremos posteriormente, bajo ciertas condiciones, este proceso incluye al proceso geométrico como caso particular.

Tradicionalmente, en la mayor parte de los trabajos relativos al estudio de sistemas repara-

bles, los autores consideran que los mecanismos que llevan a cabo la reparación de los sistemas se encuentran siempre disponibles. Esta situación no es realista porque este equipo de reparación no está siempre disponible como observaremos en los siguientes ejemplos.

La hipótesis de disponibilidad inmediata del canal de reparación llevada a la práctica equivaldría a que cada vez que alguno de nuestros dispositivos electrónicos domésticos (lavadora, televisor, ...) o equipos que utilizamos diariamente (coche, ordenador personal, ...) sufren un fallo, dispondríamos de un equipo de especialistas que estaría siempre disponible para llevar a cabo la reparación del mismo. Si alguno de nuestros dispositivos sufre un fallo fuera del horario laboral (un fin de semana o durante la noche), el canal de reparación no estaría disponible para llevar a cabo la reparación de nuestro utensilio. En determinadas situaciones, sí que podría haber un equipo de reparación preparado para reparar el dispositivo pero en este caso las horas extras a pagar serían muy elevadas debido a que esta reparación se realiza fuera del horario laboral (como en cualquier servicio 24 horas).

Pensemos en una máquina refrigeradora de las que encontramos normalmente en un hipermercado. Al inicio de cada día, la máquina está activada y en funcionamiento con numerosos productos en sus expositores. Si esta máquina sufre un fallo y es reparada, hay que vaciar todos sus productos y llevarlos a una cámara frigorífica para no detener el ciclo de frío de los mismos. Además, en todo el periodo que dura la reparación, se origina una pérdida debido a que los clientes no pueden acceder a los productos que exponía. Ahora bien, si el fallo de la máquina no provoca su parada, parece razonable posponer la reparación de la misma hasta un periodo en que no haya clientes y que siga en funcionamiento hasta ese momento. Esta solución también provoca un riesgo y es que, al no haber reparado el fallo, se produzca la parada definitiva de la máquina.

La situación de no disponibilidad del canal de reparación es aún más acentuada si consideramos alguno de los sistemas que funcionan en un avión (por ejemplo, el hilo musical, el sistema de vídeo, ...). Si estos sistemas sufren un fallo en pleno vuelo forzosamente la reparación de los mismos no se realizará hasta la revisión técnica llevada a cabo en el aeropuerto de destino.

Por estos motivos nos planteamos la posibilidad de introducir una nueva política de mantenimiento de sistemas en los que el canal de reparación no está siempre disponible y a la que hemos denominado *política de reparación pospuesta*. Bajo esta política de mantenimiento la reparación

del dispositivo o equipo se retrasa o pospone hasta un periodo en el que el coste debido a la reparación del mismo no sea tan elevado. Esta política de mantenimiento se desarrolla bajo dos modelos denominados *modelo I* y *modelo II*. En este trabajo se analizan estos dos modelos bajo el criterio de maximizar el beneficio esperado obtenido suponiendo ciertas condiciones.

## Objetivos propuestos

Los objetivos de investigación perseguidos con esta tesis se pueden agrupar en dos grandes bloques.

1. Introducir un nuevo proceso estocástico, denominado *proceso potencial*, apropiado para modelar tiempos de operatividad y/o de reparación en un sistema en deterioro como consecuencia de las reparaciones sucesivas de los fallos, así como analizar las principales propiedades de dicho proceso. Las aportaciones realizadas se sitúan tanto en el campo de la fiabilidad como en el de la teoría sobre procesos estocásticos.
2. Plantear y analizar un modelo de reparación de sistemas original y novedoso, al cual hemos denominado *modelo de reparación pospuesta*, que se ajuste a situaciones reales en las que otros modelos de reparación no son adecuados. Las aportaciones realizadas se sitúan en el campo de la fiabilidad.

Exponemos a continuación, de forma detallada, los objetivos de investigación propuestos.

- Con respecto al proceso potencial.
  - 1º) Definir el proceso potencial.
  - 2º) Estudiar diversas propiedades asociadas al mismo: propiedades relacionadas con el orden, propiedades de convergencia de dicho proceso estocástico y propiedades de envejecimiento.
  - 3º) Mostrar su aplicación para modelar tiempos de operatividad y de reparación de un sistema en deterioro.
- Con respecto al modelo de reparación pospuesta.
  - 1º) Introducir el concepto de reparación pospuesta.

- 2º) Plantear modelos basados en este concepto y que sean aplicables a situaciones reales.
- 3º) Analizar el beneficio esperado de dicho modelo.

## Organización de la tesis

La tesis está estructurada en cuatro capítulos que detallamos a continuación.

En el Capítulo 1, de carácter introductorio, expondremos la teoría fundamental y necesaria para la comprensión de los capítulos posteriores. En este capítulo introductorio se tratarán conceptos relacionados con los sistemas reparables, detallando algunos de los procesos estocásticos más usuales a la hora de modelar el funcionamiento de un sistema reparable. Se expondrán también diferentes clases de envejecimiento asociados a estos procesos estocásticos. Por último se presentarán diversas políticas de mantenimiento que rigen el comportamiento de un sistema reparable.

El Capítulo 2 se dedica al estudio del proceso potencial. Se obtendrán resultados acerca del orden estocástico, la convergencia de dicho proceso y propiedades de envejecimiento del mismo. Finalmente, aplicamos estos procesos a la modelación de tiempos de operatividad y de reparación de tipo discreto en un sistema que se deteriora debido a las reparaciones sucesivas de fallos.

En los Capítulos 3 y 4 desarrollamos los objetivos propuestos en torno al modelo de reparación pospuesta. En el Capítulo 3 introducimos un modelo, denominado *modelo I de reparación pospuesta*, y en el Capítulo 4 introducimos el *modelo II de reparación pospuesta*. En ambos casos, analizamos el beneficio esperado del sistema y confirmamos la validez del modelo. Asimismo, en cada caso, mostramos aplicaciones numéricas del mismo.

Una vez realizada la exposición de todos los capítulos analizaremos las conclusiones finales de los mismos. Finalmente dedicaremos un apartado a presentar futuras líneas de investigación a las que consideramos que puede dar lugar este trabajo.

# Capítulo 1

## Políticas de Mantenimiento en Sistemas Reparables

Este capítulo tiene por objeto situar al lector en el marco conceptual adecuado y sentar las bases teóricas necesarias para la comprensión de los capítulos posteriores. En la primera sección introducimos los sistemas reparables y presentamos diferentes modelos estocásticos de los mismos. A continuación, en la siguiente sección, mostramos la teoría esencial sobre órdenes estocásticos y clases de envejecimiento de variables aleatorias. Finalmente realizamos un breve repaso de políticas de mantenimiento de sistemas reparables para pasar a introducir la política de reparación pospuesta que desarrollaremos posteriormente en los Capítulos 3 y 4.

### 1.1. Modelado estocástico de sistemas reparables

Según la Real Academia Española, un sistema *“es un conjunto de cosas que relacionadas entre sí ordenadamente contribuyen a determinado objeto”*. En fiabilidad, como ya comentamos en la Introducción General, un sistema se entiende como una colección de dispositivos (que pueden ser mecánicos, eléctricos, ...) diseñados para realizar una serie de funciones. Un *sistema reparable* es un sistema tal que, después de fallar por realizar sus funciones, puede ser restaurado a un estado de operatividad por algún método determinado en lugar de tener que producirse

el reemplazo total del sistema. La mayoría de los sistemas que nos encontramos en la práctica son reparables: un coche, un ordenador, un electrodoméstico, ... Por el contrario, un *sistema no reparable* es aquel en el cual sólo puede ocurrir un fallo y tras el mismo el sistema queda completamente inutilizado. Ejemplos de sistemas no reparables pueden ser una bombilla. En caso de que el sistema sea reparable, el equipo que lleva a cabo la reparación se suele denominar *canal de reparación*.

Consideremos un sistema formado por una serie de dispositivos y sometido a fallos los cuales son reparados en el canal de reparación. Denotemos por  $X_i, i \geq 1$ , la variable aleatoria que representa el tiempo de operatividad del sistema después de su  $(i - 1)$ -ésima reparación. Análogamente, denotamos por  $Y_i, i \geq 1$ , la variable aleatoria que representa el tiempo de reparación del sistema al sufrir el  $i$ -ésimo fallo.

Tradicionalmente, los procesos estocásticos que se han usado para modelar la sucesión de los tiempos de operatividad y de reparación son los *procesos de Poisson*, los *procesos de Poisson no homogéneos*, los *procesos de renovación* y los *procesos de renovación alternados*. Antes de recordar las características de cada uno de ellos, definimos los *procesos de conteo* que se utilizan para contar el número de sucesos de algún tipo que han ocurrido durante un determinado periodo de tiempo, por ejemplo, el número de fallos ocurridos en un sistema durante un espacio de tiempo. Una información más amplia sobre este tipo de procesos se puede encontrar, por ejemplo, en Ross (1996).

**Definición 1.1.1** *Un proceso de conteo se define como un proceso estocástico  $\{N(t), t \geq 0\}$ , donde  $N(t)$  representa el número de sucesos ocurridos hasta el instante  $t$ , tal que*

1.  $N(t)$  toma valores en  $\mathbb{Z}^+$ .
2. Si  $s < t$ ,  $N(s) \leq N(t)$ .
3. Si  $s < t$ ,  $N(t) - N(s)$  es el número de sucesos ocurridos en el intervalo  $(s, t]$ .

Todo proceso de conteo lleva asociadas dos sucesiones: la sucesión de tiempos entre llegadas  $\{W_n, n \geq 1\}$  y la sucesión de tiempos de llegada  $\{S_n, n \geq 0\}$ .

$W_n$  es el tiempo entre la ocurrencia del  $(n - 1)$ -ésimo y el  $n$ -ésimo suceso.

$S_n$  es el instante de ocurrencia del  $n$ -ésimo suceso que se define como sigue

$$S_n = \sum_{i=1}^n W_i, \forall n \geq 1, S_0 \equiv 0,$$

o bien utilizando el proceso de conteo asociado

$$S_n = \inf\{t : N(t) = n\}.$$

**Observación** A partir de la sucesión  $\{S_n, n \geq 0\}$  podemos definir

$$N(t) = \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}.$$

De entre todos los procesos de conteo toma una especial importancia el denominado *proceso de Poisson* pues es una herramienta de modelado natural en numerosos problemas de probabilidad aplicada. El monográfico de Tijms (2003) cuenta con numerosos ejemplos prácticos de procesos de Poisson.

**Definición 1.1.2** *Un proceso de conteo  $\{N(t), t \geq 0\}$  se dice que es un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ , donde  $\lambda > 0$ , si*

1.  $N(0) = 0$ .
2. *Posee incrementos independientes: fijado  $s$ ,  $N(t)$  es independiente de  $N(t+s) - N(t)$ .*
3.  $N(t) \sim P(\lambda t), \forall t > 0$ .

### Observaciones

1. De la definición se deduce que  $\{N(t), t \geq 0\}$  posee incrementos estacionarios: dado  $s$ , la distribución de  $N(t+s) - N(t)$  es la misma  $\forall t \geq 0$ .
2. Para un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ , los tiempos entre llegadas  $W_n, n \geq 1$  son vv. aa. i.i.d. según una exponencial de parámetro  $\lambda$ . Los tiempos de llegada se distribuyen mediante una gamma:  $S_n \sim G(n, \lambda)$ .

3. La hipótesis de tiempos entre llegadas exponencialmente distribuidos puede parecer a priori muy restrictiva. Sin embargo, el proceso de Poisson es un excelente modelo para numerosos fenómenos que nos encontramos de forma cotidiana (consultar Khintchine (1932)).

□

Veamos un ejemplo de proceso de Poisson. Supongamos que un sistema en el instante inicial se encuentra operativo. El sistema falla transcurrida una cantidad aleatoria de tiempo exponencialmente distribuida y un nuevo sistema es puesto en su lugar mediante un reemplazo instantáneo. Del mismo modo, transcurrido un tiempo aleatorio distribuido exponencialmente, el nuevo sistema falla y es reemplazado instantáneamente por uno nuevo e idéntico. Si los tiempos de fallo  $X_1, X_2, \dots$  de los sucesivos sistemas son independientes e idénticamente distribuidos, el proceso  $\{N(t), t \geq 0\}$  que cuenta el número de fallos hasta el instante  $t$ , es un proceso de Poisson.

Otro proceso estocástico de conteo es el *proceso de Poisson no homogéneo*, que generaliza al proceso de Poisson ya que permite definir una tasa de llegadas no necesariamente constante a lo largo del tiempo. Se utiliza para modelar situaciones en las que la tasa de llegadas fluctúa de manera significativa en el tiempo.

**Definición 1.1.3** *Un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad  $\lambda(t)$ ,  $t \geq 0$ , es un proceso de conteo  $\{N(t), t \geq 0\}$  tal que:*

1.  $N(0) = 0$ .
2. *Posee incrementos independientes.*
3.  $P[N(t+h) - N(t) \geq 2] = o(h)$ .
4.  $P[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda(t)h + o(h)$ .

El *proceso de renovación* es una herramienta muy útil en el análisis de modelos de fiabilidad. El motivo es que numerosos procesos estocásticos son regenerativos, i.e., el comportamiento del proceso a partir de ciertos instantes es una réplica probabilística exacta del proceso desde el instante inicial.

La teoría de la renovación tuvo su origen en la ciencia actuarial y no sólo tiene aplicación en el campo de la fiabilidad sino que también es muy utilizada en teoría de colas. Gran parte de la teoría de los procesos de renovación puede encontrarse en el trabajo de Smith (1958). Debido a su amplio uso en el análisis de modelos de probabilidad aplicados, la bibliografía sobre procesos de renovación es extraordinariamente amplia. En el monográfico de Tijms (2003) se dedica un capítulo a la teoría de renovación con numerosos ejemplos prácticos de teoría de colas, teoría de inventarios y teoría de la fiabilidad. En los libros de Kulkarni (1995, 1999) se detallan numerosos ejemplos del empleo de procesos de renovación en modelado estocástico.

**Definición 1.1.4** *Un proceso de renovación es un proceso de conteo  $\{N(t), t \geq 0\}$  donde los tiempos entre llegadas  $W_n$  son i.i.d.*

### Observaciones

1. El proceso de renovación generaliza al proceso de Poisson, pues para este último los tiempos entre llegadas son i.i.d. según una distribución exponencial.
2. Para un proceso de renovación, la distribución del proceso de conteo  $N(t)$  puede obtenerse teniendo en cuenta que

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t.$$

Así,

$$P[N(t) = n] = F^n(t) - F^{n+1}(t),$$

siendo  $F^n$  la convolución  $n$ -ésima de la función  $F$ , que denota la función de distribución de  $W_n$ ,  $n \geq 1$ .

□

Asociadas al proceso  $\{N(t), t \geq 0\}$  existen dos funciones muy importantes y que juegan un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de renovación. Estas dos funciones son la *función de renovación* y la *densidad de renovación*. La función de renovación es el número esperado de renovaciones que se producen en  $(0, t]$  y la densidad de renovación es la derivada de la función de renovación.

$$V(t) = E[N(t)], \quad v(t) = \frac{d}{dt}V(t).$$

- En el caso de un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ , es inmediato que

$$V(t) = \lambda t, \quad v(t) = \lambda.$$

- Y, en el caso de un proceso de Poisson no homogéneo,

$$V(t) = \lambda(t), \quad v(t) = \lambda'(t).$$

La función  $V(t)$  puede hallarse en todo proceso de renovación mediante la expresión

$$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t).$$

**Definición 1.1.5** *Un proceso de renovación alternante es un proceso estocástico  $\{(X_n, Y_n), n \geq 1\}$ , tal que  $\{X_n, n \geq 1\}$  e  $\{Y_n, n \geq 1\}$  son procesos de renovación.*

Los procesos de renovación alternante modelan sistemas que pueden estar en dos estados: operativo o en reparación. Inicialmente, el sistema está operativo y permanece en este estado durante una cantidad de tiempo aleatoria  $X_1$  tras lo cual sufre un fallo y es reparado con una duración de tiempo aleatoria  $Y_1$ . Finalizada la reparación vuelve a estar operativo con una duración de tiempo aleatoria  $X_2$  y transcurrido ese tiempo es reparado transcurrido una duración de tiempo aleatoria  $Y_2$  y así sucesivamente. Las vv. aa.  $\{X_n, n \geq 1\}$  corresponden a los tiempos de operatividad del sistema y dan lugar a un proceso de renovación. Análogamente, las vv. aa.  $\{Y_n, n \geq 1\}$  corresponden a los tiempos de reparación y llevan asociadas otro proceso de renovación. También el proceso  $\{Z_n, n \geq 1\}$  donde  $Z_n = X_n + Y_n$  es un proceso de renovación.

## 1.2. Tiempos de vida

En fiabilidad, cuando se habla de tiempo de vida de un dispositivo nos estamos refiriendo al tiempo transcurrido desde su puesta en funcionamiento hasta que dicho dispositivo falle. Sin embargo, estos tiempos de vida son también estudiados en múltiples áreas de la Ciencia. Por ejemplo, en Medicina, la duración del tiempo de vida de un paciente se entiende como la supervivencia de un paciente que sufre una determinada enfermedad y es sometido a un tratamiento médico. En Demografía aparecen estos tiempos de vida, por ejemplo, cuando se estudia el tiempo que un individuo permanece en un determinado país.

En un modelo de fiabilidad, la elección de las distribuciones de probabilidad de los tiempos de vida no es una cuestión sencilla. Una de las distribuciones de probabilidad más utilizadas es la distribución exponencial cuyas propiedades analizaremos posteriormente. Otras distribuciones que modelan tiempos de vida son la gamma, la distribución tipo fase continua, la Weibull, la normal truncada, la lognormal y la distribución de valores extremos modificados.

Las distribuciones de probabilidad tipo fase son un tipo de distribuciones de probabilidad muy versátil. Como ejemplos de su uso en fiabilidad como distribuciones de tiempo de vida podemos citar los trabajos de Neuts & Meier (1981), Bhattacharjee & Neuts (1981) y, más recientemente, Aalen (1995), Neuts et al. (2000), (?) y Pérez-Ocón & Ruiz-Castro (2004) entre otros. Un análisis pormenorizado de sus propiedades y su uso en numerosas ramas de la probabilidad aplicada viene detallado en el monográfico de Neuts (1995).

Consideremos una CMTC  $\{X(t), t \geq 0\}$  con espacio de estados  $\{1, \dots, m+1\}$ , de modo que los estados  $1, \dots, m$  sean transitorios y  $m+1$  sea un estado absorbente. Supongamos que la matriz de intensidades de transición de la cadena es de la forma

$$Q = \begin{pmatrix} T & T^0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

de modo que  $T$  es una matriz cuadrada de orden  $m$  que verifica

$$T_{ii} < 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad T_{ij} \geq 0, \quad \forall i \neq j \quad (1.2)$$

y

$$T\mathbf{1} + T^0 = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{1}$  es un vector columna de dimensiones apropiadas formado por unos.

Además, sea  $(\alpha, \alpha_{m+1})$  el vector de probabilidades iniciales de la CMTC, con

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad \alpha_i = P[X(0) = i], \quad \alpha\mathbf{1} + \alpha_{m+1} = 1. \quad (1.4)$$

**Definición 1.2.1** Una v.a. continua con soporte  $[0, \infty)$  se dice que sigue una distribución tipo fase si su función de distribución corresponde a la de la v.a.

$$\tau = \inf\{t : X(t) = m+1\},$$

que representa el tiempo hasta la absorción en una CMTC  $\{X(t), t \geq 0\}$  que verifica las hipótesis (1.1-1.3) y cuyo vector de probabilidades iniciales verifica (1.4). El par  $(\alpha, T)$  se denomina *representación de la distribución tipo fase*.

Se prueba (ver Neuts (1995)) que la función de distribución tipo fase con representación  $(\alpha, T)$  viene dada por

$$F(t) = 1 - \alpha \exp(Tt)\mathbf{e}, \quad t \geq 0$$

y su función de densidad por

$$f(t) = \alpha \exp(Tt)T^0, \quad t \geq 0.$$

Aunque la mayoría de las ocasiones los tiempos de vida de un sistema se modelan utilizando distribuciones de probabilidad de tipo continuo, en determinadas ocasiones se necesita utilizar distribuciones de probabilidad discretas. Por ejemplo, podemos pensar en el caso de un dispositivo que es controlado cada cierta unidad de tiempo de modo que los posibles fallos del mismo se van a encontrar cuando sea controlado, esto es, en tiempo discreto. Otro ejemplo puede ser una pieza de un equipo que opere por ciclos, con lo que su tiempo de vida es el número de ciclos completados con éxito antes del fallo. Un caso claro es el de una fotocopiadora, cuya duración de su tiempo de vida se mide por el número de copias que ha producido hasta el fallo, o el de un interruptor, para el cual se mide el número de ciclos de encendido/apagado que se han completado antes del fallo. Distribuciones de probabilidad de naturaleza discreta que suelen emplearse como distribuciones de tiempos de vida son la geométrica, la binomial, la binomial negativa, la Poisson, la distribución tipo fase discreta y la Weibull discreta.

En tiempo discreto, la definición de distribución tipo fase es análoga al caso continuo.

Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  una cadena de Markov en tiempo discreto (CMTD) con espacio de estados  $\{1, \dots, m+1\}$  y con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} T & T^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

**Definición 1.2.2** Una v.a. discreta con soporte  $\{0, 1, \dots\}$  sigue una distribución tipo fase discreta si su distribución de probabilidad viene dada por

$$p_0 = \alpha_{m+1}, \quad p_k = \alpha T^{k-1}T^0, \quad k = 1, 2, \dots$$

donde  $T$  es una matriz cuyos vectores columna suman 1, tal que  $I_m - T$  es no singular, (siendo  $I_m$  la matriz identidad de orden  $m$ ), verifica (1.5) para cierta CMTD y  $(\alpha, \alpha_{m+1})$  es el vector de probabilidades iniciales, que cumple (1.4). El par  $(\alpha, T)$  es la representación de esta distribución tipo fase.

Se puede comprobar (ver Neuts (1995)) que la función generatriz de probabilidad de un distribución tipo fase discreta con representación  $(\alpha, T)$  es de la forma

$$P(z) = \alpha_{m+1} + z\alpha(I_m - zT)^{-1}T^0.$$

Generalmente, el estudio del modelo de un sistema reparable utilizando distribuciones de tiempo de vida de naturaleza discreta presenta más inconvenientes que cuando se consideran distribuciones de tiempo de vida de naturaleza continua. Sin embargo, este análisis puede simplificarse si consideramos el siguiente procedimiento introducido por Alfa (2004) y aplicado en problemas de fiabilidad en los trabajos de Alfa & Castro (2002) y Castro & Alfa (2004). Este procedimiento relaciona la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta general con la distribución de probabilidad de una variable aleatoria tipo fase discreta y viene detallado a continuación.

Si  $X$  es una v.a. discreta con soporte  $S_X = \{1, 2, \dots, M\}$  y probabilidades asociadas

$$p_i = P[X = i], \quad \sum_{i=1}^M p_i = 1,$$

entonces  $X$  puede representarse como una distribución tipo fase discreta con representación  $(\alpha, T)$  donde

$$\alpha = (p_1, p_2, \dots, p_M), \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{M-1} & 0 \end{pmatrix},$$

siendo  $I_{M-1}$  la matriz identidad de orden  $M-1$ .

Este modelo tipo fase de una v.a. discreta incluye numerosas ventajas en teoría de la fiabilidad ya que permite el estudio del comportamiento del sistema como una cadena de Markov simplificando el cálculo de las medidas de operatividad asociadas al mismo.

Dos funciones muy utilizadas para comparar entre diferentes distribuciones de tiempos de vida son la *función de supervivencia* y la *función razón de fallos* que definimos a continuación.

En lo sucesivo, denotaremos por  $X$  la variable aleatoria que representa el tiempo de vida de un dispositivo .

**Definición 1.2.3** Sea  $F$  la función de distribución de una variable aleatoria  $X$ . Llamamos función de supervivencia o de fiabilidad de  $X$  a la función

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t), \quad t \geq 0.$$

Obviamente,  $\bar{F}(t) = P[X > t]$  representa la probabilidad de que el tiempo de vida de un dispositivo sobrepase el instante  $t$ .

**Definición 1.2.4** Si  $X$  es una v.a. continua con función de densidad  $f$ , se define la función razón de fallos, o función tasa de fallos, como

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad t \geq 0,$$

siempre que  $\bar{F}(t) \neq 0$ .

La interpretación probabilística de esta función es la siguiente:  $r(t)dt$  representa la probabilidad de que un dispositivo de edad  $t$  sufra un fallo en el intervalo  $(t, t + dt)$ .

**Observación** La función razón de fallos de una v.a. determina de manera unívoca la distribución de la misma, pues

$$r(t) = \frac{-\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)}.$$

Integrando esta igualdad, resulta que

$$\ln \bar{F}(t) = - \int_0^t r(x)dx + K,$$

siendo  $K$  cierta constante, luego

$$\bar{F}(t) = C \exp \left[ - \int_0^t r(x)dx \right].$$

Tomando  $t = 0$ , se obtiene  $C = 1$ . Por tanto,

$$\bar{F}(t) = \exp \left[ - \int_0^t r(x)dx \right].$$

□

También podemos definir la función razón de fallos para vv.aa. discretas.

**Definición 1.2.5** Dada una v.a. discreta  $X$ , con soporte  $\{x_0, x_1, \dots\}$  y probabilidades dadas por

$$P[X = x_i] = p_i, \text{ donde } p_i \geq 0, \forall i = 0, 1, \dots, \sum_{i \geq 0} p_i = 1, \quad (1.6)$$

se define la función razón de fallos como

$$r(k) = \frac{p_k}{\sum_{j \geq k} p_j}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Nótese que  $r(k)$  es la probabilidad de que se produzca un fallo en el dispositivo en el instante  $x_k$ , condicionado a que no se haya producido ningún fallo hasta ese momento.

**Observación** Como en el caso continuo existe una expresión de la función razón de fallos  $r$  para una variable aleatoria discreta en función de su función de supervivencia  $\bar{F}$ .

$$r(k) = \frac{\bar{F}(x_{k-1}) - \bar{F}(x_k)}{\bar{F}(x_{k-1})}.$$

□

### 1.2.1. Órdenes estocásticos

Un problema que se presenta frecuentemente es la comparación de tiempos de vida. Diversos órdenes, denominados órdenes estocásticos de manera genérica, han sido establecidos según el contexto de aplicación y en función de los elementos comparativos. Por ejemplo, puede interesar en unos casos distinguir entre dos distribuciones cuál tiene mayor razón de fallos. En otros casos, sin embargo, podemos estar interesados en determinar cuál de las dos distribuciones tiene mayor función de supervivencia.

**Definición 1.2.6** Dadas dos vv.aa.  $X$  e  $Y$ , con funciones de supervivencia  $\bar{F}_X$  y  $\bar{F}_Y$  respectivamente, se dice que  $X$  es estocásticamente mayor que  $Y$ , y se denota  $X \geq_{st} Y$ , si

$$\bar{F}_X(t) \geq \bar{F}_Y(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.7)$$

Un concepto de dominación estadística más estricto es el orden de la razón de fallos.

**Definición 1.2.7** Dadas dos vv.aa.  $X$  e  $Y$  con funciones de supervivencia  $\bar{F}_X$  y  $\bar{F}_Y$  respectivamente, se dice que  $X$  es mayor que  $Y$  según el orden de la razón de fallos, y se denota  $X \geq_{hr} Y$ , si la función  $\bar{F}_X(t)/\bar{F}_Y(t)$  es creciente  $\forall t \geq 0$ .

En el caso continuo, si  $r_X$  y  $r_Y$  son las razones de fallo de  $X$  e  $Y$  respectivamente,

$$X \geq_{hr} Y \Leftrightarrow r_X(t) \leq r_Y(t), \forall t \geq 0.$$

**Definición 1.2.8** *Dadas dos vv.aa. continuas  $X$  e  $Y$  con funciones de densidad  $f_X$  y  $f_Y$  respectivamente, se dice que  $X$  es mayor que  $Y$  según el orden de la razón de verosimilitud, y se denota  $X \geq_{lr} Y$ , si la función  $f_X(t)/f_Y(t)$  es creciente  $\forall t \geq 0$ .*

Cuando los soportes de  $X$  e  $Y$  poseen el mismo límite inferior, la relación existente entre estos órdenes es la siguiente:

$$X \geq_{lr} Y \Rightarrow X \geq_{hr} Y \Rightarrow X \geq_{st} Y.$$

Para más detalles sobre órdenes estocásticos, consultar el monográfico de Shaked & Shanthikumar (1994).

### 1.2.2. Clases de envejecimiento

Las distribuciones de los tiempos de fallo pueden clasificarse dependiendo de que la función tasa de fallos  $r$  sea creciente, decreciente o constante, lo cual tiene el significado físico de que, a medida que aumenta la edad cronológica del equipo o dispositivo, la probabilidad de que sufra un fallo aumenta, disminuye o permanece constante.

La clase de las distribuciones de probabilidad con razón de fallos creciente ha recibido una gran atención en la literatura de fiabilidad debido a la tendencia natural de algunos sistemas a fallar con mayor frecuencia como consecuencia del uso, la edad o el desgaste sufrido a lo largo del tiempo. Por ejemplo, como ocurre con un coche, un ordenador, ...

En cambio, existen distribuciones de probabilidad con razón de fallos decreciente, es decir, una mejora de la fiabilidad del sistema con el tiempo. Este puede ser el caso de estudios clínicos de supervivencia de pacientes que se recuperan de una intervención quirúrgica, debido a que el riesgo de muerte o de recaída disminuye a medida que transcurre el postoperatorio.

La razón de fallos constante aparece a menudo en situaciones en las que se cuenta el número de determinados sucesos ocurridos por unidad de tiempo. Por ejemplo, cuando se mide el tiempo transcurrido entre dos llamadas telefónicas independientes a una centralita.

Veremos posteriormente que la razón de fallos constante caracteriza a la distribución exponencial y, aunque pueda parecer que esta distribución tiene una aplicación limitada, en la práctica no ocurre así. Consideremos un sistema formado por numerosos componentes donde cada uno de estos componentes funciona de manera individual pero de modo que todos ellos pueden considerarse como una única unidad. Bajo ciertas condiciones, Barlow & Proschan (1965) probaron que la distribución de los tiempos entre fallos de este equipo tiende a una distribución exponencial cuando la complejidad del equipo y el tiempo de operatividad del mismo aumentan.

El caso de la exponencial es paradójico pues la mixtura de distribuciones exponenciales posee razón de fallos decreciente. Barlow & Proschan (1975) mostraron que dicha mixtura era la distribución apropiada para modelar los fallos que se producían en los sistemas de aire acondicionado de los aviones.

Veamos estos conceptos de manera formal. Para un amplio análisis consultar los trabajos de Barlow & Proschan (1981) y Deshpande et al. (1986).

**Definición 1.2.9** *Sea una v.a.  $X$  con función razón de fallos  $r$ . Se dice que  $X$  tiene razón de fallos creciente, o que  $X$  es IFR (increasing failure rate), si la función  $r$  es creciente.*

*Análogamente se dice que  $X$  tiene razón de fallos decreciente, o es DFR (decreasing failure rate), si  $r$  es decreciente.*

## Distribución exponencial

Es la más conocida y estudiada de las distribuciones de tiempos de fallo. Esta distribución de probabilidad se define como sigue

**Definición 1.2.10** *Una v.a.  $X$  sigue una distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ , donde  $\lambda > 0$  y lo denotamos mediante  $X \sim \text{exp}(\lambda)$ , si su función de densidad es de la forma*

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

La función de supervivencia para dicha variable aleatoria viene dada por

$$\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

### Observaciones

1. Nótese que si  $X \sim \exp(\lambda)$ ,

$$f(t) = \lambda \bar{F}(t), \quad t \geq 0,$$

debido a lo cual la razón de fallos de  $X$  es constante e igual a  $\lambda$

$$r(t) = \lambda, \quad t \geq 0.$$

Esta característica determina de manera unívoca la distribución exponencial, esto es, si una v.a.  $X$  posee razón de fallos constante igual a  $\lambda$ , entonces  $X \sim \exp(\lambda)$ .

2. La propiedad fundamental de la distribución exponencial es la llamada propiedad *de pérdida de memoria*. Si  $X$  es exponencial,

$$P[X > t + s | X > s] = P[X > t], \quad \forall t, s \geq 0. \quad (1.8)$$

Supongamos que  $X$  representa el tiempo de vida de un objeto. Entonces (1.8) establece que la probabilidad de que el objeto viva al menos  $t + s$  unidades de tiempo (u.t.), supuesto que ha sobrevivido  $s$  u.t., es la misma que la probabilidad de que viva al menos  $t$  u.t. En otras palabras, si el objeto sobrevive un tiempo  $t$ , la distribución del tiempo de vida restante es la distribución del tiempo de vida original. Utilizando la función de supervivencia, la propiedad de pérdida de memoria puede formularse como

$$\bar{F}(t + s) = \bar{F}(t)\bar{F}(s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

3. La propiedad de pérdida de memoria determina unívocamente la distribución exponencial. Si  $X$  es una v.a. cuya función de supervivencia verifica la ecuación funcional

$$g(t + s) = g(t)g(s),$$

las únicas soluciones de tal ecuación que poseen propiedades de monotonía y continuidad a la izquierda o a la derecha son aquellas de la forma  $g(t) = e^{-\lambda t}$ , donde  $\lambda > 0$  (para más detalles, consultar Ross (1996)).

4. Si  $X$  es una v.a. con función de distribución  $F_X$  e  $Y$  es una v.a. exponencial de parámetro  $\lambda$ , entonces se verifica que

$$F_{X+Y}(t) = F_X(t) - \frac{1}{\lambda} f_{X+Y}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (1.9)$$

donde  $F_{X+Y}$  y  $f_{X+Y}$  son las funciones de distribución y de densidad respectivamente de la v.a.  $X + Y$ .

□

La distribución exponencial es analíticamente sencilla de manejar pero sus propiedades también la hacen inadecuada para describir los tiempos de vida de aquellos dispositivos cuya probabilidad de sufrir un fallo aumenta o disminuye de algún modo con la edad.

Otra de las curvas típicas que adopta la razón de fallos es la forma de bañera y la de bañera invertida.

A grandes rasgos, decimos que la función razón de fallos tiene forma de bañera si es una función decreciente en un primer tramo de valores, constante en un segundo tramo y creciente en el último tramo. De ahí su nombre, porque adopta la forma de una bañera. La vida de un ser humano sigue este patrón. La primera zona, que se suele denominar *zona de mortalidad infantil*, se caracteriza porque la probabilidad de morir decrece con la edad. La segunda zona es una zona estable, en la que la probabilidad de muerte es constante y, a partir de una edad, esta probabilidad va aumentando.

La razón de fallos tiene forma de bañera invertida si es creciente en un primer tramo de valores, constante en un segundo tramo y decreciente en el último tramo. Por ejemplo, supongamos el caso de una persona dispuesta a dejar de fumar. Al principio, existe una fase en que la determinación de no fumar es alta, pero la probabilidad de fallar en su intento y fumar un cigarro irá aumentando con el tiempo hasta llegar a una fase crítica (aproximadamente entre el tercer y el décimo día desde que dejó de fumar), en la cual la probabilidad de recaer es máxima. Superada esa fase crítica, la probabilidad de volver a fumar va decreciendo con el tiempo.

Formalmente definimos una función con forma de bañera y de bañera invertida como sigue.

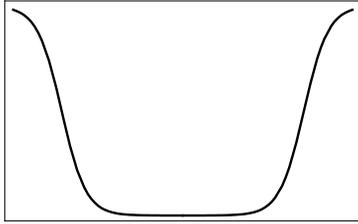
**Definición 1.2.11** *Dada una función  $g(t)$  definida en  $(0, \infty)$  se dice que tiene forma de bañera, o es tipo B (bathtub), si existen  $t_1 \leq t_2 \in (0, \infty)$  tales que*

- $g'(t) < 0$ ,  $t \in [0, t_1)$ ,
- $g'(t) = 0$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ ,
- $g'(t) > 0$ ,  $t > t_2$ .

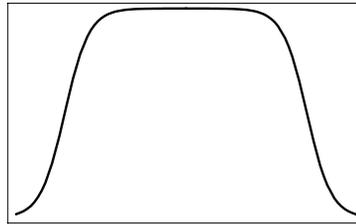
Análogamente  $g(t)$  tiene forma de bañera invertida, o es tipo U (upside down bathtub), si existen  $t_1 \leq t_2 \in (0, \infty)$  tales que

- $g'(t) > 0$ ,  $t \in [0, t_1)$ ,
- $g'(t) = 0$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ ,
- $g'(t) < 0$ ,  $t > t_2$ .

Los puntos  $t_1$  y  $t_2$  se denominan *puntos de cambio*.



Función tipo B



Función tipo U

En los mismos términos, se tiene la definición anterior para funciones de naturaleza discreta.

**Definición 1.2.12** Dada una función  $g(k)$  definida en  $k = 0, 1, \dots$ , se dice que tiene forma de bañera o es tipo B (de bañera invertida o es tipo U), si existen  $n_1 \leq n_2 \in \{0, 1, \dots\}$  tales que

- $g(k) - g(k-1) < (>) 0$ ,  $k = 1, \dots, n_1$ ,
- $g(k) - g(k-1) = 0$ ,  $k = n_1 + 1, \dots, n_2$ ,
- $g(k) - g(k-1) > (<) 0$ ,  $k = n_2 + 1, \dots$

A los puntos  $n_1$  y  $n_2$  se les denominan puntos de cambio.

Asociados a la función razón de fallos, también se definen las clases IFRA y DFRA.

**Definición 1.2.13** Sea  $X$  una v.a. continua con función de supervivencia  $\bar{F}$  y función razón de fallos  $r$ . Se dice que  $X$  tiene razón de fallos creciente en media, o que es IFRA (increasing failure rate average), si la función

$$\frac{1}{t} \int_0^t r(u) du$$

es creciente en  $t > 0$  o equivalentemente si la función  $\bar{F}(t)^{1/t}$  es decreciente en  $t \geq 0$ .

$X$  tiene razón de fallos decreciente en media, o es DFRA (decreasing failure rate average), si

$$\frac{1}{t} \int_0^t r(u) du$$

es decreciente en  $t > 0$  o equivalentemente si la función  $\bar{F}(t)^{1/t}$  es creciente en  $t \geq 0$ .

**Definición 1.2.14** Si  $X$  es una v.a. discreta con función de supervivencia  $\bar{F}$ , se dice que  $X$  es IFRA (DFRA) si  $\bar{F}(k)^{1/k}$  es decreciente en  $k = 1, 2, \dots$

**Observación** Si  $X$  es IFR (DFR) entonces es IFRA (DFRA). □

Existen también resultados que nos muestran la relación existente entre el comportamiento de  $\bar{F}(t)^{1/t}$  y el hecho de que la función razón de fallos sea tipo B o tipo U. Estos resultados pueden encontrarse en los trabajos de Mi (1993) y Mi (1995) pero contiene un error (véase Sanjuán & Castro (2004)) que detallamos en el Apéndice de esta tesis doctoral. Bajo las aclaraciones expuestas en el citado Apéndice se tienen los siguientes resultados.

**Teorema 1.2.1** Sea  $X$  una v.a. continua con función razón de fallos tipo B (tipo U) y puntos de cambio  $t_1$  y  $t_2$ . Entonces, la función  $\bar{F}(t)^{1/t}$  o bien es tipo U (tipo B) con un único punto de cambio o bien es estrictamente creciente (decreciente).

**Teorema 1.2.2** Sea  $X$  una v.a. discreta con soporte  $\{1, 2, \dots\}$  y función razón de fallos tipo B (tipo U) y puntos de cambio  $n_1$  y  $n_2$ . Entonces, la función  $\bar{F}(k)^{1/k}$  o bien es tipo U (tipo B) (con un único punto de cambio  $m_0$  o dos puntos de cambio  $m_0$  y  $m_0 + 1$ ) o bien es estrictamente creciente (decreciente).

Otro concepto de envejecimiento es el denominado *nuevo mejor que usado*.

**Definición 1.2.15** Dada una v.a.  $X$  continua con función de supervivencia  $\bar{F}$ , se dice que  $X$  es nueva mejor que usada, o que es NBU (new better than used), si

$$\bar{F}(t+x) \leq \bar{F}(t)\bar{F}(x), \quad t \geq 0, x \geq 0. \quad (1.10)$$

Se dice que  $X$  es nueva peor que usada, o que es NWU (new worse than used), si

$$\bar{F}(t+x) \geq \bar{F}(t)\bar{F}(x), \quad t \geq 0, x \geq 0. \quad (1.11)$$

Si  $X$  representa el tiempo de vida de un dispositivo o equipo, que  $X$  pertenezca a la clase NBU (NWU) significa que la probabilidad de que dicho dispositivo sobreviva un tiempo  $x$ , dado que ha sobrevivido un tiempo  $t$ , es menor (mayor) que la probabilidad de que el dispositivo sobreviva un tiempo  $x$ .

La distribución exponencial es la única que satisface la igualdad en (1.10) y (1.11) lo cual es equivalente a la propiedad de la pérdida de memoria (1.8).

En el caso discreto, la definición es análoga:

**Definición 1.2.16** Dada una v.a.  $X$  discreta con función de supervivencia  $\bar{F}$ , se dice que  $X$  es NBU (NWU) si

$$\bar{F}(k+j) \leq (\geq) \bar{F}(k)\bar{F}(j), \quad k, j = 0, 1, \dots$$

## Vida media residual

Una función fundamental para estudiar el comportamiento de las distribuciones de tiempos de fallo es la llamada *vida media residual* a partir de cuyas propiedades se definen las clases DMRL, IMRL, IDMRL y DIMRL. El artículo de revisión de Guess & Proschan (1988) proporciona un buen resumen de la teoría sobre la vida media residual así como una extensa bibliografía. Asimismo, Bradley & Gupta (2003) estudian el comportamiento límite de esta función.

**Definición 1.2.17** Sea  $X$  una v.a. que representa el tiempo de vida de un dispositivo con función de supervivencia  $\bar{F}$ . Se define la vida residual en el instante  $t$  como la v.a.  $X_t = [X - t | X > t]$  que posee función de supervivencia

$$\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}, \quad x \geq 0,$$

siempre que  $\bar{F}(t) > 0$ .

**Definición 1.2.18** Dada una v.a. continua  $X$ , se define su función de vida media residual como

$$m(t) = \begin{cases} E[X_t] & \text{si } \bar{F}(t) > 0 \\ 0 & \text{si } \bar{F}(t) = 0 \end{cases}, \quad t \geq 0.$$

### Observaciones

1. La función vida media residual puede expresarse como

$$m(t) = \int_t^\infty \frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(t)} du,$$

siempre que  $\bar{F}(t) > 0$ .

2. Si  $\mu = E[X]$ , entonces  $m(0) = \mu$ .
3. Como la función razón de fallos, la vida media residual es un concepto condicional. Sin embargo, mientras que  $r(t)$  proporciona información acerca del instante justo después de  $t$ ,  $m(t)$  considera la información de todo el intervalo de tiempo después de  $t$ , puesto que representa la vida media de un objeto de edad  $t$  a partir del instante  $t$ .
4. Al igual que ocurre con la función razón de fallos, la vida media residual de una v.a. determina de manera unívoca su distribución de probabilidad mediante la igualdad

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &= \frac{m(0)}{m(t)} \exp \left[ - \int_0^t \frac{1}{m(x)} dx \right], \quad t \in [0, F^{-1}(1)), \\ \bar{F}(t) &= 0, \quad t \geq F^{-1}(1). \end{aligned}$$

donde  $F^{-1}(1) = \sup\{t \geq 0 : F(t) < 1\}$ .

La demostración de esta igualdad se puede consultar en Hall & Wellner (1981).

5. Anteriormente se comentó que, si  $X$  es una v.a. con razón de fallos constante, entonces  $X$  sigue una distribución exponencial. De manera análoga, si la función vida media residual de una v.a.  $X$  es constante,  $X$  sigue una distribución exponencial.
6. Las funciones razón de fallos y vida media residual están estrechamente relacionadas. En el caso continuo, cuando  $m$  y  $r$  existen, se verifica la siguiente relación entre ambas

$$m'(t) = m(t)r(t) - 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Esta igualdad se prueba en Calabria & Pulcini (1987).

Más propiedades acerca de la relación entre las funciones  $r$  y  $m$  se pueden encontrar en Gupta & Bradley (2003).

□

En el caso discreto, la función vida media residual se define como sigue.

**Definición 1.2.19** Sea  $X$  una v.a. discreta con soporte  $\{x_0, x_1, \dots\}$  y función de supervivencia  $\bar{F}$ . Se define la función vida media residual de dicha variable como

$$m(k) = \frac{\sum_{i \geq k} \bar{F}(x_i)}{\bar{F}(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

**Definición 1.2.20** Dada una v.a.  $X$  con función vida media residual  $m$  decimos que dicha variable tiene vida media residual decreciente, o que es DMRL (decreasing mean residual life), si  $m(t)$  es una función decreciente en  $t$ .

Asimismo  $X$  tiene vida media residual creciente, o es IMRL (increasing mean residual life), si  $m(t)$  es creciente en  $t$ .

La clase de distribuciones DMRL modela tiempos de fallo en los que el envejecimiento es adverso y deteriora el objeto. Cuanto mayor es la edad del mismo, el tiempo de vida esperado es menor. Barlow et al. (1963) muestran que ésta es una clase natural en fiabilidad. Otros trabajos relacionados con esta clase de distribuciones son Barlow & Proschan (1965) y Chen et al. (1983). Este último contiene una excelente discusión acerca de los usos de la clase de las distribuciones DMRL.

En cuanto a la utilización de las distribuciones IMRL, podemos citar los trabajos de Morrison (1978) y Brown & Proschan (1983), que analizan la aproximación de distribuciones IMRL mediante exponenciales.

**Definición 1.2.21**  $X$  es nueva mejor que usada en esperanza, o es NBUE (new better than used in expectation), si su función vida media residual verifica

$$m(t) \leq m(0), \quad t \geq 0.$$

Asimismo,  $X$  es nueva peor que usada en esperanza o *NWUE* (new worse than used in expectation), si se verifica

$$m(t) \geq m(0), t \geq 0.$$

**Observación** Nótese que, si una distribución es DMRL (IMRL) en particular es NBUE (NWUE). Asimismo, si  $X$  es NBU (NWU) entonces es NBUE (NWUE).  $\square$

Para consultar las relaciones entre los tipos DMRL (IMRL), NBUE (NWUE) y otras clases de envejecimiento utilizadas en fiabilidad véase el artículo de revisión de Hollander & Proschan (1984).

Para finalizar esta sección introducimos la clase de distribuciones con función vida media residual creciente - decreciente (decreciente - creciente)

**Definición 1.2.22** Dada una v.a.  $X$  decimos que  $X$  posee vida media residual creciente decreciente, o es *IDMRL* (increasing decreasing mean residual life), si su función vida media residual es una función de tipo  $U$ . Asimismo  $X$  posee vida media residual decreciente creciente, o es *DIMRL* (decreasing increasing mean residual life), si su vida media residual es tipo  $B$ .

### 1.3. Políticas de mantenimiento

El control o mantenimiento de un dispositivo puede afectar al funcionamiento y al rendimiento económico del mismo. Las denominadas *políticas de mantenimiento*, definidas como un conjunto de reglas de actuación tales como inspecciones, reparaciones y reemplazos del sistema, están diseñadas para regular el mantenimiento de dicho sistema con el fin de optimizar el funcionamiento y el rendimiento económico del mismo.

El estudio de las políticas de mantenimiento constituye un tema fundamental en teoría de fiabilidad. Existen excelentes monográficos sobre el tema, entre los que podemos citar los libros de Barlow & Proschan (1965), Barlow & Proschan (1975), Ascher & Feingold (1984), Osaki (1985) y Osaki (1992). También existen artículos muy útiles acerca del desarrollo histórico de las políticas de mantenimiento como son los trabajos de Osaki & Nakagawa (1976) y Valdez-Flores & Feldman (1989).

Podemos distinguir entre *políticas de mantenimiento preventivo* y *políticas de mantenimiento correctivo*.

Una política de mantenimiento preventivo incluye cualquier acción programada previamente para conservar el sistema en unas condiciones determinadas.

Una política de mantenimiento correctivo comprende todas las acciones de mantenimiento puestas en funcionamiento como consecuencia de un fallo en el sistema, con el propósito de devolverlo a una condición específica.

Generalmente, para escoger la política de mantenimiento óptima, se utiliza el criterio de optimizar el beneficio medio estacionario esperado del sistema por unidad de tiempo. Otros criterios (aunque menos utilizados) tratan de optimizar el beneficio total esperado o el coste total descontado.

Una política de mantenimiento considerada comúnmente es la política de *reemplazo por edad* introducida por Barlow & Hunter (1960). Bajo esta política, el sistema se reemplaza por uno nuevo en el instante del fallo correctivamente y, si la unidad no falla antes de un instante específico  $T$  ( $T \geq 0$ ), entonces se reemplaza por uno nuevo preventivamente. Esta política contempla la posibilidad de que  $T$  no sea constante sino que sea una variable aleatoria y en este caso se denomina *reemplazo por edad aleatoria*.

En una política de *reemplazo por bloques*, el reemplazo preventivo se lleva a cabo periódicamente en instantes de tiempo especificados con anterioridad  $kT$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , con  $T > 0$ . Si la unidad falla durante el intervalo  $((k-1)T, kT]$  entonces el mantenimiento correctivo se lleva a cabo en el instante del fallo. Esta política de reemplazo debe su nombre a la práctica común de sustituir o reemplazar un bloque o grupo de unidades de un sistema en instantes de tiempo fijados  $kT$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) independientemente del estado del sistema.

Posteriormente, Makabe & Morimura (1963) introdujeron dos nuevas políticas de reemplazo. Bajo la primera, el sistema se reemplaza una vez que ocurre un número preestablecido de fallos. La segunda es una combinación de la primera y la política basada en la edad: se reemplaza el sistema cuando sufre un número determinado de fallos, o cuando alcanza una cierta edad.

Tradicionalmente la mayoría de las políticas de mantenimiento asumen la disponibilidad total del canal de reparación. Es decir, después de producirse un fallo en alguna de las piezas

que conforman el sistema, las unidades se trasladan inmediatamente al canal de reparación. Si el canal de reparación está libre, la unidad es atendida al instante y, si está ocupado, debe esperar en cola hasta ser reparada. Sin embargo, en la práctica, puede ocurrir que el canal no siempre esté disponible principalmente por cuestiones físicas (porque el fallo del sistema se produzca fuera del horario laboral). Aunque no imposibilita la reparación, un fallo del sistema fuera del horario laboral provocaría un encarecimiento del coste de la reparación debido al elevado precio a pagar por horas extras.

Por ello se introduce el concepto de *reparación pospuesta*, que se aplica a sistemas en los que los fallos no provocan la parada total del mismo. La idea fundamental de esta política es posponer o retrasar la reparación hasta un momento más favorable, por ejemplo, cuando el coste de la reparación sea menor o cuando físicamente sea posible.

La reparación pospuesta ha sido estudiada previamente en la literatura en diferentes sentidos.

El concepto de *retardo en la reparación* fue introducido por Nakagawa & Osaki (1974). En este trabajo, el retardo en la reparación se define como el tiempo necesario para preparar el reemplazo del sistema. Este periodo puede ser el tiempo que tarda en llegar una pieza de repuesto o el que se tarda en preparar la instalación de la nueva pieza. El tiempo de retraso en la reparación se modela mediante una v.a. y se mide desde el instante en que el sistema entra en funcionamiento. Si se produce un fallo en el sistema antes de que finalice este tiempo de preparación, el reemplazo no se realiza de manera inmediata.

Posteriormente, Kapur & Kapoor (1975) utilizaron este mismo concepto de tiempo de retardo pero aplicándolo a la reparación del sistema en lugar de al reemplazo. Para ello, consideraron un sistema formado por dos unidades idénticas, de modo que una está activa mientras que otra permanece *standby* o *en espera*, esto es, preparada para ser utilizada si la primera falla. El tiempo de retraso en la reparación de cualquiera de las unidades se mide desde el instante en que el sistema se activa de modo que, si se produce un fallo antes de que el tiempo de retraso finalice, la reparación no es inmediata.

Khalil & Bougas (1975) consideran un sistema formado por  $n + 1$  unidades en paralelo, de modo que una está activa mientras que el resto están en espera. Con el fin de mejorar la

eficiencia del sistema, el canal de reparación sólo presta servicio cuando una cola de  $K$  unidades está esperando a ser reparada. De ese modo, se introduce un retraso en la reparación hasta que se produce esta cola de  $K$  unidades.

Skakala & Rohal-Ilkiv (1977) introdujeron un modelo para un sistema con tres unidades de las cuales una está en activo, otra en espera y otra en situación de *cold standby*<sup>1</sup>. La unidad en standby reemplaza a una unidad tras el fallo pero transcurrida una cierta cantidad aleatoria de tiempo la cual representa el retraso en el reemplazo. Posteriormente, Agarwal & Kumar (1981) completaron el estudio anterior.

Por otra parte, Kumar et al. (1978) definieron el retraso en la reparación como el tiempo transcurrido desde que una unidad completa la reparación hasta que es puesta en funcionamiento. Este tiempo de retardo se debe a la realización de ciertos tests a la unidad tras ser reparada para comprobar la calidad de la reparación.

Más recientemente, De Almeida & De Souza (1993) analizaron el problema de elegir una política de mantenimiento para un sistema con dos unidades en standby. Cuando la unidad activa falla, la reparación de ésta es retrasada un tiempo porque la accesibilidad instantánea de la reparación resulta demasiado cara. Estos autores analizan el problema vía teoría de la decisión, maximizando una función de utilidad que tiene en cuenta las variables disponibilidad y coste. En De Almeida & Bohoris (1996), se estudia una aplicación del modelo planteado anteriormente en el que el tiempo de reparación se distribuye según una gamma.

De entre todos las referencias citadas, sólo el concepto de reparación pospuesta dado por De Almeida & De Souza (1993) se asemeja al concepto de reparación pospuesta que presentamos en este trabajo. Sin embargo, el análisis y los métodos de resolución presentados en los trabajos De Almeida & De Souza (1993) y De Almeida & Bohoris (1996) son completamente distintos a los que se presentan en esta tesis.

---

<sup>1</sup>Una unidad se dice que está en cold standby si es una unidad redundante para el funcionamiento del sistema y además no puede fallar en el tiempo de espera.

## Capítulo 2

# Procesos Potenciales

En el estudio de sistemas reparables es interesante observar el patrón de comportamiento de los tiempos entre fallos sucesivos del sistema. En numerosos problemas de mantenimiento se supone que el sistema después de la reparación *es tan bueno como nuevo*. Este es el modelo de reparación perfecta. En este caso, los tiempos de operatividad del sistema se renuevan después de cada reparación y la idea matemática subyacente a esta reparación perfecta es un proceso de renovación. En otras ocasiones, se considera que un sistema puede sufrir un fallo con un daño tal que requiere el reemplazo total del sistema. Como en el caso de la reparación perfecta, el modelo matemático subyacente también es un proceso de renovación.

En la práctica, la reparación perfecta no siempre se ajusta a la realidad. En numerosas ocasiones, las reparaciones sufridas por el sistema y el efecto de la edad provocan un deterioro en su funcionamiento que origina una disminución aleatoria de su tiempo de operatividad. El concepto de deterioro de un sistema, a pesar de ser una idea bastante intuitiva, no tiene una definición matemática universalmente aceptada y se ajusta más bien a las características de cada sistema en particular.

En este capítulo se presenta y analiza un nuevo proceso estocástico que hemos denominado *proceso potencial* y que se presenta como una alternativa para modelar el deterioro de un sistema reparable. La razón principal para introducir este proceso estocástico es la de definir un proceso monótono en el que las diferentes variables que forman el proceso tengan el mismo espacio de

estados. Estos procesos potenciales solventan algunos inconvenientes presentados por uno de los procesos más utilizados en fiabilidad para modelar el deterioro como es el proceso geométrico.

La primera sección de este capítulo realiza un breve repaso a la teoría relativa a procesos geométricos detallando sus principales propiedades. En la segunda sección se definen los procesos potenciales y se analiza su monotonía. En la tercera y cuarta sección se presentan distintas propiedades de convergencia y de desgaste de dichos procesos potenciales. Para finalizar este capítulo se presentan diferentes ejemplos del uso de estos procesos potenciales.

## 2.1. Proceso geométrico

Como hemos comentado en la introducción de este capítulo, no existe una definición matemática de deterioro de un sistema habiéndose presentado numerosas alternativas para ella en la literatura en fiabilidad.

Algunos autores, como Barlow & Hunter (1960), señalan la idea de reparación minimal como un concepto adecuado para modelar el deterioro de las piezas que conforman un sistema como consecuencia de la edad. En el monográfico de Ascher & Feingold (1984) puede encontrarse otra definición de deterioro (o mejora) de un sistema reparable modelado como un proceso de Poisson no homogéneo.

Un enfoque más general a la hora de definir el deterioro de un sistema es utilizar un proceso estocástico monótono.

**Definición 2.1.1** *Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  el proceso estocástico que representa los sucesivos tiempos de operatividad del sistema después de la  $n$ -ésima reparación. Se dice que dicho proceso está en deterioro (en mejora) si*

$$\bar{F}_i(t) > (<) \bar{F}_j(t), \quad \forall i \geq 0, \quad \forall j > i, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

donde  $\bar{F}_i$  y  $\bar{F}_j$  denotan las funciones de supervivencia de las vv. aa.  $X_i$  y  $X_j$  respectivamente.

Supongamos un sistema reparable sometido a fallos y sea  $X_n, n \geq 0$ , la variable aleatoria que representa el tiempo de operatividad del sistema después de la  $n$ -ésima reparación e  $Y_n, n \geq 1$ , la variable aleatoria que representa el tiempo de reparación del sistema después del  $n$ -ésimo fallo.

Si el sistema se deteriora por la ocurrencia de estos fallos y las variables son independientes, una manera de modelar estocásticamente este deterioro es escoger el proceso  $\{X_n, n \geq 0\}$  de manera que sea estocásticamente decreciente mientras que  $\{Y_n, n \geq 1\}$  sea estocásticamente creciente en el sentido dado en (2.1). Apoyándose en este modelo de deterioro, Lam (1988) definió los denominados *procesos geométricos* que han sido empleados en numerosas ocasiones en la literatura de fiabilidad. Los trabajos de Lam (1992), Lam & Zhang (1996), Lam et al. (2002), Pérez-Ocón & Torres-Castro (2002) son algunos de estos ejemplos.

**Definición 2.1.2** Una sucesión de vv.aa. independientes no negativas  $\{X_n, n \geq 0\}$  se denomina proceso geométrico si la función de distribución de la variable aleatoria  $X_n$  viene dada por la expresión

$$F_n(t) = F(a^n t), \quad n = 0, 1, \dots, t \geq 0$$

para cierta constante  $a > 0$ , que se denomina tasa del proceso geométrico. La función  $F$  es la función de distribución de la variable aleatoria  $X_0$  que se denomina variable aleatoria subyacente del proceso geométrico.

Los resultados que enunciamos en esta sección, así como las demostraciones de los mismos, se pueden encontrar en Lam (1988).

**Proposición 2.1.1** Dado un proceso geométrico  $\{X_n, n \geq 0\}$  de tasa  $a$ .

1. Si  $a > 1$ , entonces  $\{X_n, n \geq 0\}$  es estocásticamente decreciente y converge a cero en probabilidad y en media cuadrática. Decimos entonces que es un proceso geométrico decreciente.
2. Si  $0 < a < 1$ , entonces  $\{X_n, n \geq 0\}$  es estocásticamente creciente y converge a infinito con probabilidad 1. Decimos entonces que es un proceso geométrico creciente.
3. Si  $a = 1$ ,  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso de renovación.

**Observación** Nótese que, si  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso geométrico de tasa  $a$ , entonces

$$\{a^n X_n, n \geq 0\} \tag{2.2}$$

es un proceso de renovación. □

Como consecuencia de la observación anterior, podemos obtener los momentos de cualquier variable  $X_n$  que conforme el proceso geométrico a partir de los momentos de la v.a.  $X_0$ . Este resultado viene reflejado en la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.2** *Sea  $E[X_0] = \lambda$ ,  $Var[X_0] = \sigma^2$ . Entonces,*

$$E[X_n] = \frac{\lambda}{a^n}, \quad Var[X_n] = \frac{\sigma^2}{a^{2n}}.$$

Otro resultado muy importante del proceso geométrico es el que se refiere al comportamiento de la suma de las variables aleatorias que lo componen. Como antes, sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso geométrico de tasa  $a$  y definimos las variables aleatorias suma

$$S_n = \sum_{i=0}^n X_i, \quad n \geq 0,$$

así como la v.a. límite

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} X_i.$$

**Proposición 2.1.3** *Si  $a > 1$ , entonces  $\{S_n, n \geq 0\}$  converge a  $S$  casi seguramente y en media cuadrática. Además  $P(S < \infty) = 1$ .*

Debido a estas propiedades de convergencia, un proceso geométrico decreciente puede resultar adecuado para modelar los tiempos de operatividad de un sistema en deterioro. Asimismo, un proceso geométrico creciente puede representar los tiempos de reparación en un sistema en el que la duración de las reparaciones crece a medida que el número de reparaciones completadas por el sistema aumenta.

Los procesos geométricos poseen ciertas limitaciones a la hora de modelar algunos tiempos de operatividad o de reparación. Veamos por qué.

- Si  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso geométrico con tasa  $a$  y  $X_0$  es una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad  $f$ , entonces  $X_n$  es una v.a. continua con función de densidad dada por

$$f_n(t) = f(a^n t) a^n, \quad n \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Si el soporte de  $X_0$  es  $(c, d)$ , entonces el soporte de  $X_n$  es  $(c/a^n, d/a^n)$ .

- Si  $X_0$  es una v.a. discreta con soporte  $S_{X_0} = \{x_0, x_1, \dots, x_M\}$  y probabilidades

$$P[X_0 = x_i] = p_i, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^M p_i = 1,$$

entonces  $X_n$  toma valores en el conjunto

$$S_{X_n} = \{x_0/a^n, x_1/a^n, \dots, x_M/a^n\},$$

con probabilidades

$$P[X_n = x_i/a^n] = p_i, \quad i = 0, 1, \dots, M.$$

Es decir, se mantienen las probabilidades asociadas a cada v.a. que forma el proceso pero se modifica el espacio de estados de cada una de las variables.

Por lo tanto el proceso geométrico no sería adecuado si pretendemos que todas las variables que formen el proceso tengan el mismo espacio de estados. Tampoco sería adecuado su uso si precisamos que el espacio de estados de las variables que forman el proceso estén formados por números naturales.

Por este motivo, queremos introducir un proceso estocástico para el cual los soportes de todas las variables que lo forman coincidan pero que, al mismo tiempo, posea las propiedades adecuadas y necesarias para modelar tiempos de operatividad y de reparación en cuanto a su comportamiento asintótico.

## 2.2. Definición de proceso potencial

En esta sección definimos el proceso potencial y estudiaremos sus principales propiedades.

**Definición 2.2.1** Una sucesión de variables aleatorias no negativas e independientes  $\{X_n, n \geq 0\}$  se denomina proceso potencial asociado a la sucesión  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$ , donde  $\gamma_n \in (0, \infty)$  para todo  $n \geq 0$  y  $\gamma_0 = 1$  si la función de supervivencia de  $X_n$  tiene la forma

$$\bar{F}_n(t) = \bar{F}(t)^{\gamma_n}, \quad \forall n \geq 0,$$

donde  $\bar{F}$  es la función de supervivencia de  $X_0$  a la cual llamaremos variable subyacente del proceso.

### Observaciones

1. Es claro que, si  $\alpha \in (0, \infty)$  y  $\bar{F}$  es una función de supervivencia, entonces  $\bar{F}^\alpha$  es también una función de supervivencia, debido a que la función  $t^\alpha$  es continua y creciente si  $\alpha \in (0, \infty)$ ,  $t \geq 0$ .
2. Si  $\gamma_n = 1, \forall n$ , el proceso potencial se reduce a un proceso de renovación.
3. Si  $\gamma_n \in \mathbb{N}, \forall n$ , entonces  $\bar{F}^{\gamma_n}$  es la función de supervivencia del mínimo de  $\gamma_n$  variables aleatorias i.i.d. según la distribución dada por  $\bar{F}$ .

Siguiendo la notación anterior, supongamos que  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\gamma_n\}$ .

1. Si  $X_0$  es una variable discreta que toma valores en  $S_{X_0} = \{x_0, x_1, \dots\}$  con probabilidades

$$P[X_0 = x_i] = p_i^{(0)}, \text{ donde } p_i^{(0)} \geq 0, i = 0, 1, \dots, \sum_{i \geq 0} p_i^{(0)} = 1, \quad (2.3)$$

entonces  $X_n, \forall n \geq 1$ , es una v.a. discreta que toma valores en  $S_{X_0}$  con probabilidades dadas por

$$P[X_n = x_i] = p_i^{(n)} = \left( \sum_{j \geq i} p_j^{(0)} \right)^{\gamma_n} - \left( \sum_{j \geq i+1} p_j^{(0)} \right)^{\gamma_n}, \quad i = 0, 1, \dots$$

2. Si  $X_0$  es una variable aleatoria continua con función de densidad  $f$ , entonces  $X_n$  es una v.a. continua cuya función de densidad viene dada por

$$f_n(t) = \gamma_n \bar{F}(t)^{\gamma_n - 1} f(t), \quad t \geq 0, \quad \forall n \geq 1.$$

### Observación

1. En algunos casos, todas las variables aleatorias que forman el proceso potencial conservan la distribución de probabilidad de la v.a. subyacente  $X_0$  aunque con distintos parámetros. Por ejemplo, si  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso potencial con sucesión asociada  $\gamma_n$ ,

$$X_0 \sim \exp(\lambda) \Rightarrow X_n \sim \exp(\lambda \gamma_n).$$

Siempre que la v.a. subyacente siga una distribución exponencial, el proceso geométrico es un caso particular del proceso potencial tomando  $\gamma_n = a^n$ , siendo  $a$  la tasa del proceso geométrico.

2. La misma situación ocurre para otro tipo de distribuciones de probabilidad de la v.a. subyacente, por ejemplo, Bernouilli, geométrica o Weibull.

$$\begin{aligned} X_0 \sim \text{Be}(p) &\Rightarrow X_n \sim \text{Be}(p^{\gamma_n}), \\ X_0 \sim \text{Ge}(p) &\Rightarrow X_n \sim \text{Ge}(1 - (1 - p)^{\gamma_n}), \\ X_0 \sim \text{W}(\lambda, \alpha) &\Rightarrow X_n \sim \text{W}(\lambda \gamma_n, \alpha). \end{aligned}$$

□

Teniendo en cuenta el orden estocástico presentado en (1.7), se definen los procesos potenciales crecientes y decrecientes.

**Definición 2.2.2** *Un proceso potencial  $\{X_n, n \geq 0\}$  se dice que es creciente (decreciente) si*

$$X_{n+1} \geq_{st} X_n \quad (X_{n+1} \leq_{st} X_n), \quad \forall n.$$

Esta monotonía de los procesos potenciales depende de la monotonía de su sucesión asociada, tal y como se refleja en la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.1** *Un proceso potencial es creciente (decreciente) si y sólo si  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  es decreciente (creciente).*

De hecho, un proceso potencial creciente (decreciente) estocásticamente lo es también según otros órdenes.

**Proposición 2.2.2** *Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial con variable aleatoria subyacente  $X_0$  continua con función de densidad  $f$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso potencial creciente (decreciente).
2.  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso creciente (decreciente) según el orden de la razón de fallos.
3.  $\{X_n, n \geq 0\}$  es creciente (decreciente) según el orden de la razón de verosimilitud.

### Demostración

Puesto que la relación entre los órdenes estocástico, de razón de fallos y de verosimilitud es la siguiente

$$X \geq_{lr} Y \Rightarrow X \geq_{hr} Y \Rightarrow X \geq_{st} Y,$$

(ver Sección 1.2.1), basta demostrar que si  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso potencial creciente (decreciente) lo es también según el orden de la razón de verosimilitud.

Supongamos que  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso potencial creciente. Según la proposición anterior, su sucesión asociada  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  es decreciente. Por tanto, la función

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+1}(t)}{f_n(t)} &= \frac{\gamma_{n+1} \bar{F}(t)^{\gamma_{n+1}-1} f(t)}{\gamma_n \bar{F}(t)^{\gamma_n-1} f(t)} \\ &= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \bar{F}(t)^{\gamma_{n+1}-\gamma_n} \end{aligned}$$

es creciente en  $t \geq 0$ , puesto que  $\gamma_{n+1} - \gamma_n < 0$  y  $\bar{F}(t)$  es decreciente en  $t$ .

Si  $\{X_n, n \geq 0\}$  es decreciente, el razonamiento es análogo. ■

El orden de la razón de verosimilitud se define sólo para vv. aa. continuas. En el caso de que la v.a. subyacente del proceso sea de tipo discreto, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.3** *Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial formado por vv. aa. discretas. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso potencial creciente (decreciente).
2.  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso creciente (decreciente) según el orden de la razón de fallos.

### Demostración

Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial creciente formado por vv. aa. discretas con soporte  $S_{X_0}$ . Entonces,  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  es una sucesión decreciente. Por tanto, la función

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_{n+1}(t)}{\bar{F}_n(t)} &= \frac{\bar{F}(t)^{\gamma_{n+1}}}{\bar{F}(t)^{\gamma_n}} \\ &= \bar{F}(t)^{\gamma_{n+1}-\gamma_n}, \end{aligned}$$

es creciente en  $t \in S_{X_0}$ . ■

A pesar de que no podemos expresar la media de las variables del proceso potencial en función de la media de la v.a. subyacente, como ocurría con el proceso geométrico, sí podemos deducir algunas propiedades de monotonía como las que se detallan en el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.4** Dado un proceso potencial  $\{X_n, n \geq 0\}$  con sucesión asociada  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$ ,

1. Si  $\gamma_n > 1$ , entonces  $E[X_n] < E[X_0]$ .
2. Si  $\gamma_n < 1$ , entonces  $E[X_n] > E[X_0]$ .

### 2.3. Propiedades de convergencia del proceso potencial

Es evidente que el comportamiento del proceso potencial depende en gran medida del comportamiento de la sucesión  $\{\gamma_n\}$ .

Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial de sucesión asociada  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$ . Sea

$$m = \inf\{X_0\}, \quad M = \sup\{X_0\}.$$

De la definición de proceso potencial se deduce que

$$\inf\{X_0\} = \inf\{X_n\}, \quad \sup\{X_0\} = \sup\{X_n\}, \quad \forall n \geq 1,$$

pues todas las vv. aa. que forman el proceso tienen el mismo soporte.

**Teorema 2.3.1** Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  creciente,  $\{\gamma_n\} \uparrow \infty$ . Entonces,  $\{X_n, n \geq 0\}$  es estocásticamente decreciente y  $X_n \xrightarrow{P} m$ . Además,

1. Si  $M < \infty$ ,  $X_n \xrightarrow{L^p} m$ .
2. Si  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  es estrictamente creciente, entonces  $X_n \xrightarrow{c.s.} m$ .

#### Demostración

La convergencia en probabilidad es evidente, pues

$$\bar{F}(t)^{\gamma_n} \rightarrow \begin{cases} 1, & t < m \\ 0, & t \geq m \end{cases}$$

y la convergencia en distribución a una v.a. degenerada implica la convergencia en probabilidad.

1. La convergencia en probabilidad a  $m$  sumado a la acotación de las variables aleatorias  $X_n$  implican la convergencia en  $L^p$ .

2. Una condición que garantiza la convergencia casi segura es la convergencia completa (Laha & Rohatgi (1979)).  $X_n$  converge completamente a  $m$  si

$$\sum_{n=0}^{\infty} P[|X_n - m| \geq \varepsilon] < \infty, \forall \varepsilon > 0. \quad (2.4)$$

Ahora bien,

$$P[|X_n - m| \geq \varepsilon] = P[|X_n - m| = \varepsilon] + \bar{F}(m + \varepsilon)^{\gamma_n}.$$

Puesto que  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  es estrictamente creciente, teniendo en cuenta que  $\bar{F}(m + \varepsilon) \in [0, 1)$  y aplicando el criterio del cociente de D'Alembert (véase Apostol (1998)), la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} P[|X_n - m| > \varepsilon] = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}(m + \varepsilon)^{\gamma_n},$$

es convergente ya que

$$\limsup \frac{\bar{F}(m + \varepsilon)^{\gamma_{n+1}}}{\bar{F}(m + \varepsilon)^{\gamma_n}} < 1.$$

Por lo tanto, si la v.a.  $X_n$  es continua, la serie (2.4) es convergente.

En el caso de que  $X_n$  sea discreta y se verifique  $P[X_n = \varepsilon + m] \neq 0$ , existe un índice  $j > 1$  tal que

$$P[|X_n = \varepsilon + m|] = \left( \sum_{i \geq j} p_i \right)^{\gamma_n} - \left( \sum_{i \geq j+1} p_i \right)^{\gamma_n}.$$

Razonando de manera análoga al caso continuo, como  $\{\gamma_n\} \uparrow \infty$ , la serie (2.4) es convergente. ■

**Proposición 2.3.2** *Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial cuya sucesión asociada  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  es decreciente y tal que  $\{\gamma_n\} \downarrow 0$ . Entonces  $\{X_n, n \geq 0\}$  es estocásticamente creciente.*

1. Si  $M < \infty$ ,  $X_n \xrightarrow{P} M$  y  $X_n \xrightarrow{L^p} M$ . Además, si  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  es estrictamente decreciente,  $X_n \xrightarrow{c.s.} M$ .
2. Si  $M = \infty$ ,  $\{X_n, n \geq 0\}$  converge a infinito con probabilidad 1, esto es,

$$P[|X_n| > K] \rightarrow 1 \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \forall K > 0.$$

**Demostración**

1. La convergencia en probabilidad es clara, pues

$$\bar{F}(t)^{\gamma_n} \rightarrow \begin{cases} 1, & t < M \\ 0, & t \geq M \end{cases}$$

Además, para probar la convergencia casi segura, de nuevo usaremos el criterio de D'Alembert, ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P[|X_n - M| \geq \varepsilon] = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \bar{F}(M - \varepsilon)^{\gamma_n}) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

debido a que se verifica

$$\limsup \frac{1 - \bar{F}(M - \varepsilon)^{\gamma_{n+1}}}{1 - \bar{F}(M - \varepsilon)^{\gamma_n}} < 1.$$

2.  $P[|X_n| > K] = \bar{F}(K)^{\gamma_n} \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty, \forall K > 0$ .

■

**Observación** Si  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso potencial tal que  $\{\gamma_n\} \rightarrow K$ , con  $K \in (0, \infty)$ , es trivial comprobar que  $X_n$  converge en distribución a una v.a. con función de supervivencia  $\bar{F}^K$ . Pero en tal caso, no están asegurados otro tipo de convergencias. □

Teniendo en cuenta estas propiedades asintóticas concluimos que, en un sistema reparable que sufre deterioro por las sucesivas reparaciones, un proceso potencial decreciente puede ser adecuado para modelar los tiempos de operatividad, así como un proceso potencial creciente puede modelar los tiempos de reparación.

**2.4. Propiedades de desgaste**

En este apartado, veremos cómo se comporta el proceso potencial respecto a las clases de envejecimiento definidas en el Capítulo 1.

Supondremos a partir de ahora en este capítulo que  $X$  es una v.a. positiva que representa el tiempo de vida de un dispositivo y denotaremos por  $\bar{F}$  a su función de supervivencia.

La siguiente proposición expresa la función razón de fallos de las vv.aa.  $X_n$  de un proceso potencial en función de la razón de fallos de la v.a. subyacente del proceso.

**Proposición 2.4.1** *Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$ . Sean  $r$  y  $r_n$  la función razón de fallos de  $X_0$  y  $X_n$  respectivamente.*

1. Si  $X_0$  es una v.a. continua, entonces

$$r_n(t) = \gamma_n r(t), \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

2. Si  $X_0$  es una v.a. discreta, entonces

$$r_n(k) = 1 - (1 - r(k))^{\gamma_n}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

### Demostración

1.  $r_n(t) = \frac{f_n(t)}{\bar{F}_n(t)} = \frac{\gamma_n \bar{F}(t)^{\gamma_n - 1} f(t)}{\bar{F}(t)^{\gamma_n}} = \gamma_n r(t).$
2.  $r_n(k) = \frac{\bar{F}_n(k-1) - \bar{F}_n(k)}{\bar{F}_n(k-1)} = 1 - \frac{\bar{F}(k)^{\gamma_n}}{\bar{F}(k-1)^{\gamma_n}} = 1 - (1 - r(k))^{\gamma_n}.$

■

Sabemos que la función razón de fallos clasifica las vv.aa. según su comportamiento (véase Sección 1.2.2). Recordemos que una v.a.  $X$  con función razón de fallos  $r$  es IFR (DFR) si  $r$  es creciente (decreciente). De la proposición anterior se deduce que, en un proceso potencial, o bien todas las variables son IFR (DFR) o ninguna lo es como muestra el siguiente resultado.

**Proposición 2.4.2** *Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial.*

1. Si  $X_0$  es IFR (DFR), entonces  $X_n$  es IFR (DFR),  $\forall n \geq 1$ .
2. Si  $X_j$  es IFR (DFR) para algún índice  $j$ , entonces  $X_n$  es IFR (DFR),  $\forall n \geq 0$ .

Otras formas que definimos para las funciones razón de fallos correspondientes a vv.aa. que representan tiempos de vida de un dispositivo fueron la de bañera (tipo B) y la de bañera invertida (tipo U).

**Proposición 2.4.3** Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial.

1. Si  $r$  es tipo B (tipo U), entonces  $r_n$  es tipo B (tipo U),  $\forall n \geq 1$ .
2. Si  $r_j$  es tipo B (tipo U) para algún índice  $j$ , entonces  $r_n$  es tipo B (tipo U),  $\forall n \geq 0$ .

El proceso potencial conserva asimismo la propiedad de que todas las variables aleatorias que lo forman pertenecen a la clase IFRA (DFRA) si alguna de ellas pertenece a la mencionada clase. Recordemos que  $X$  es IFRA (DFRA) si la función

$$\bar{F}(t)^{1/t},$$

es decreciente (creciente) en  $t$ .

**Proposición 2.4.4** Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial.

1. Si  $X_0$  es IFRA (DFRA), entonces  $X_n$  es IFRA (DFRA),  $\forall n \geq 1$ .
2. Si  $X_j$  es IFRA (DFRA) para algún índice  $j$ , entonces  $X_n$  es tipo IFRA (DFRA),  $\forall n \geq 0$ .

Otra propiedad de desgaste asociada a tiempos de vida que conserva el proceso potencial es el tipo NBU (NWU). Recordemos que  $X$  es NBU (NWU) si

$$\bar{F}(t+x) \leq (\geq) \bar{F}(t)\bar{F}(x), \quad t \geq 0, x \geq 0.$$

**Proposición 2.4.5** Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial.

1. Si  $X_0$  es NBU (NWU), entonces  $X_n$  es NBU (NWU),  $\forall n \geq 1$ .
2. Si  $X_j$  es NBU (NWU) para algún índice  $j$ , entonces  $X_n$  es tipo NBU (NWU),  $\forall n \geq 0$ .

### **Demostración**

Basta tener en cuenta que la función  $t^\alpha$  es creciente en  $t$  si  $\alpha \in (0, \infty)$ , luego si se cumple que

$$\bar{F}(t+x) \leq (\geq) \bar{F}(t)\bar{F}(x),$$

entonces

$$\bar{F}(t+x)^{\gamma_n} \leq (\geq) \bar{F}(t)^{\gamma_n} \bar{F}(x)^{\gamma_n}.$$

Obviamente, este razonamiento se aplica también al caso discreto. ■

Otra función asociada a distribuciones de tiempos de vida es la vida media residual, a partir de cuyas propiedades se definen las clases DMRL e IMRL, es decir, vida media residual decreciente y creciente.

Al contrario de lo que ocurría con las propiedades IFR, IFRA y NBU, el que la variable aleatoria subyacente del proceso sea DMRL (IMRL) no implica que todas las variables del proceso lo sean. Sin embargo esta implicación sí es cierta imponiendo una serie de condiciones.

**Teorema 2.4.6** *Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  tal que  $X_0$  es una v.a. continua DMRL con función razón de fallo  $r$  y función vida media residual  $m$ . Además, supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:*

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$  existe y es no nulo.
2.  $r(t)m(t) \leq \alpha$ , para cierto  $\alpha \in (0, 1)$ .
3.  $\gamma_n \leq \min \left\{ 1, \frac{1-\alpha}{\alpha} \right\}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Entonces  $X_n$  es DMRL.

### Demostración

Consideremos la función

$$z(t) = \gamma_n m_n(t) - m(t),$$

donde  $m_n(t)$  es la función vida media residual de  $X_n$ . Teniendo en cuenta que

$$m'(t) = m(t)r(t) - 1, \quad \forall t \geq 0,$$

$$z'(t) = (1 - \gamma_n) + \gamma_n^2 r(t)m_n(t) - r(t)m(t).$$

Como  $\gamma_n \leq 1$ , se tiene que  $m_n(t) \geq m(t)$ , luego

$$\begin{aligned} z'(t) &\geq (1 - \gamma_n) + (\gamma_n^2 - 1)m(t)r(t) \geq 1 - \gamma_n + (\gamma_n^2 - 1)\alpha \\ &= \alpha\gamma_n^2 - \gamma_n + 1 - \alpha. \end{aligned}$$

La función  $\alpha\gamma_n^2 - \gamma_n + 1 - \alpha$  es positiva siempre que se verifiquen las hipótesis del teorema.

Esto se debe a que las funciones del tipo  $\alpha x^2 - x + 1 - \alpha$  son parábolas convexas que cortan el eje X en los puntos  $x = 1$  y  $x = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ .

- Si  $\frac{1-\alpha}{\alpha} \geq 1$ , esto es  $\alpha \leq 1/2$ , la parábola es positiva en  $[0, 1]$ .
- Si  $\frac{1-\alpha}{\alpha} < 1$ , esto es  $\alpha > 1/2$ , la parábola es positiva en el intervalo  $[0, \frac{1-\alpha}{\alpha}]$ .

De este modo,  $z(t)$  es creciente en  $t$  y por lo tanto

$$z(0) \leq z(t) \leq z(\infty) = 0.$$

Que  $z(\infty) = 0$  se deduce de la hipótesis 1 del teorema teniendo en cuenta que (ver Calabria & Pulcini (1987))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{r(t)},$$

siempre que el último límite exista y sea finito. Luego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \gamma_n \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_n r(t)} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{r(t)} = 0,$$

siempre que el límite de  $r(t)$  exista y sea distinto de cero.

Por ser  $z(t)$  creciente y  $z(\infty) = 0$ , se tiene que

$$z(t) = \gamma_n m_n(t) - m(t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Luego

$$m'_n(t) = \gamma_n r(t) m_n(t) - 1 \leq r(t) m(t) - 1 \leq 0,$$

como queríamos demostrar. ■

**Teorema 2.4.7** Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  tal que  $X_0$  es una v.a. continua y DMRL con función razón de fallo  $r$  y función vida media residual  $m$ . Además, supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:

1.  $r(t)m(t) \leq \inf_{n \geq 1} \frac{1}{\gamma_n}$ ,
2.  $\gamma_n \geq 1, \quad \forall n \geq 1$ .

Entonces  $X_n$  es DMRL.

**Demostración**

Como  $\gamma_n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} m'_n(t) &= \gamma_n m_n(t) r(t) - 1 \\ &\leq \gamma_n m(t) r(t) - 1 \\ &= \gamma_n (m(t) r(t) - 1/\gamma_n) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

por las condiciones del teorema. ■

El teorema equivalente para distribuciones IMRL es el siguiente.

**Teorema 2.4.8** *Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  tal que  $X_0$  es una v.a. continua e IMRL con función razón de fallo  $r$  y función vida media residual  $m$ . Además, supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:*

1.  $r(t)m(t) \geq \sup_{n \geq 1} \frac{1}{\gamma_n}$ ,
2.  $\gamma_n \leq 1, \forall n \geq 1$ .

Entonces,  $X_n$  es IMRL.

**Demostración**

$$\begin{aligned} m'_n(t) &= \gamma_n m_n(t) r(t) - 1 \\ &\geq \gamma_n m(t) r(t) - 1 \\ &= \gamma_n \left( m(t) r(t) - \frac{1}{\gamma_n} \right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$
■

El siguiente resultado, introducido por Gupta & Akman (1995), relaciona también las funciones  $r$  y  $m$ .

**Teorema 2.4.9** *Dada una v.a. continua  $X$  con función razón de fallos  $r$  y función vida media residual  $m$ ,*

1. *Si  $r$  es tipo B, entonces*
  - a)  *$m$  es decreciente si  $r(0) \leq E[X]$ .*
  - b)  *$m$  es tipo U si  $r(0) > E[X]$ .*
2. *Si  $r$  es tipo U, entonces*
  - a)  *$m$  es creciente si  $r(0) \geq E[X]$ .*
  - b)  *$m$  es tipo B si  $r(0) < E[X]$ .*

Aplicando estas propiedades al proceso potencial, se obtiene como consecuencia el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.10** *Sea  $\{X_n, n \geq 0\}$  un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$ .*

1. *Si  $r$  es tipo B, y además*
  - a)  *$X_0$  es DMRL, y  $\gamma_n < 1, \forall n \geq 1$ , entonces  $X_n$  es DMRL,  $\forall n \geq 1$ .*
  - b)  *$m$  es tipo U y  $\gamma_n > 1, \forall n \geq 1$ , entonces  $m_n$  es tipo U,  $\forall n \geq 1$ .*
2. *Si  $r$  es tipo U, y además*
  - a)  *$X_0$  es IMRL, y  $\gamma_n > 1, \forall n \geq 1$ , entonces  $X_n$  es IMRL,  $\forall n \geq 1$ .*
  - b) *Si  $m$  es tipo B y  $\gamma_n < 1, \forall n \geq 1$ , entonces  $m_n$  es tipo B.*

### **Demostración**

1. Si  $r$  es tipo B,  $r_n$  también es tipo B.
  - a) Aplicando el Teorema 2.4.9,  $X_n$  es DMRL si  $r_n(0) = \gamma_n r(0) \leq E[X_n]$ . Puesto que  $\gamma_n < 1, E[X_0] < E[X_n]$ , luego  $r(0) \leq E[X_0] < E[X_n]$ , así que  $\gamma_n r(0) \leq E[X_n]$ .
  - b) Por el contrario, si  $m$  es tipo U,  $r(0) > E[X_0]$ . Por el Teorema 2.4.9,  $m_n$  es tipo U si  $r_n(0) = \gamma_n r(0) > E[X_n]$ . Por ser  $\gamma_n > 1, E[X_0] > E[X_n]$ , luego  $r(0) > E[X_0] > E[X_n]$  y por tanto,  $r_n(0) > \gamma_n E[X_n] > E[X_n]$ .
2. Utilizamos razonamientos análogos si  $r$  es tipo U.

## 2.5. Un modelo de sistema reparable

Veremos en esta sección un ejemplo del uso del proceso potencial para modelar el funcionamiento de un sistema reparable en deterioro con tiempos de operatividad y de reparación modelados mediante distribuciones de probabilidad de naturaleza discreta. Consideremos un sistema compuesto por una unidad y un canal de reparación. La unidad sufre fallos durante el tiempo en que está operando los cuales supondremos que son reparables y debidos al desgaste de la unidad. También asumiremos que, tras la reparación, la unidad no es *tan buena como nueva*, esto es, el tiempo de operatividad de la unidad decrece a medida que el número de reparaciones que ha soportado crece. Asimismo, también aumenta estocásticamente el tiempo de reparación de los fallos. Formalmente, establecemos las siguientes hipótesis:

1. Sea  $X_n, n \geq 0$ , la variable aleatoria que representa el tiempo de operatividad del sistema tras el  $n$ -ésimo fallo. Supondremos que  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso potencial decreciente con sucesión asociada  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  tal que  $\gamma_n \uparrow \infty$ . Además,  $X_0$  es una v.a. discreta que toma valores en el conjunto  $S_{X_0} = \{0, 1, \dots, M\}$  con probabilidades

$$P[X_0 = i] = \alpha_i^{(0)}, \text{ donde } \alpha_i^{(0)} \geq 0, i = 0, 1, \dots, M, \sum_{i=0}^M \alpha_i^{(0)} = 1. \quad (2.7)$$

Denotaremos por  $\alpha^{(n)} = (\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_M^{(n)})$  al vector de probabilidades asociado a  $X_n$ .

2. Sea  $Y_n, n \geq 1$  la variable aleatoria que representa el tiempo de reparación del sistema tras el  $n$ -ésimo fallo. Suponemos que  $\{Y_n, n \geq 1\}$  es un proceso potencial creciente con sucesión asociada  $\{\xi_n, n \geq 1\}$ , tal que  $\xi_n \downarrow 0$ . La variable subyacente  $Y_1$  es discreta y toma valores en el conjunto  $S_{Y_1} = \{0, 1, \dots, N\}$  con probabilidades

$$P[Y_1 = i] = \beta_i^{(1)}, \text{ donde } \beta_i^{(1)} \geq 0, i = 0, 1, \dots, N, \sum_{i=0}^N \beta_i^{(1)} = 1. \quad (2.8)$$

Denotaremos por  $\beta^{(n)} = (\beta_0^{(n)}, \beta_1^{(n)}, \dots, \beta_N^{(n)})$  al vector de probabilidades asociadas a la variable aleatoria  $Y_n$ .

3.  $\{X_n, n \geq 0\}$  e  $\{Y_n, n \geq 1\}$  son independientes,  $\forall n$ .
4. Cuando la unidad completa la  $i$ -ésima reparación comienza a operar de acuerdo al vector de probabilidades  $\alpha^{(i)}$ . Asimismo, cuando se produce el  $i$ -ésimo fallo, la reparación comienza de acuerdo a  $\beta^{(i)}$ .

Por ser  $\{X_n, n \geq 0\}$  e  $\{Y_n, n \geq 1\}$  procesos potenciales, las probabilidades asociadas vienen dadas por

$$\alpha_i^{(n)} = \left( \sum_{j=i}^M \alpha_j^{(0)} \right)^{\gamma_n} - \left( \sum_{j=i+1}^M \alpha_j^{(0)} \right)^{\gamma_n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1,$$

$$\alpha_M^{(n)} = \left( \alpha_M^{(0)} \right)^{\gamma_n}.$$

$$\beta_i^{(n)} = \left( \sum_{j=i}^N \beta_j^{(1)} \right)^{\xi_n} - \left( \sum_{j=i+1}^N \beta_j^{(1)} \right)^{\xi_n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\beta_N^{(n)} = \left( \beta_N^{(1)} \right)^{\xi_n}.$$

Para ilustrar cómo evolucionan los tiempos de operatividad y de reparación con el uso de procesos potenciales consideraremos el siguiente ejemplo numérico.

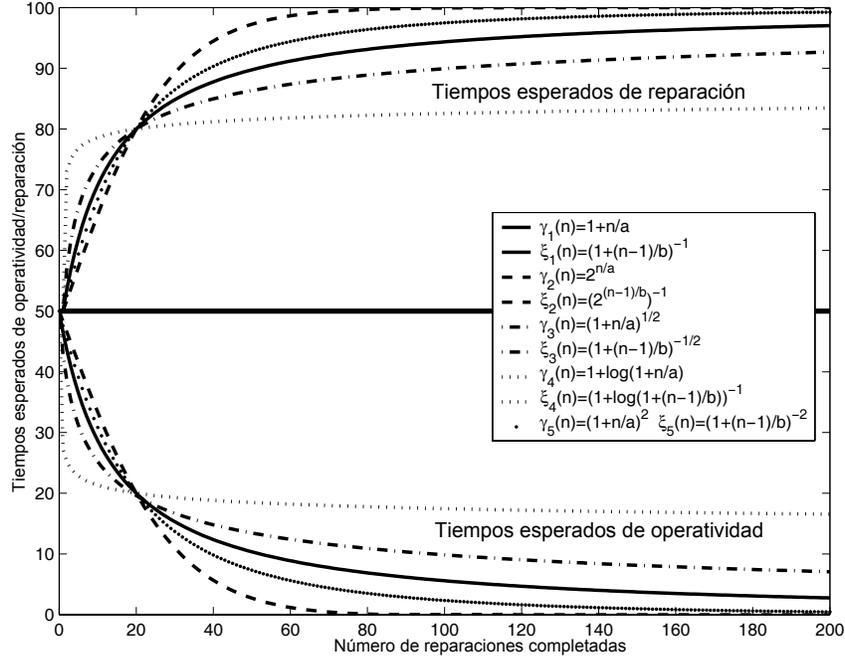


Fig. 1: Evolución de los tiempos esperados de operatividad y de reparación

Suponemos que  $X_0$  e  $Y_1$  siguen una distribución uniforme discreta en  $\{0, 1, \dots, 100\}$ , de modo que

$$\alpha_i^{(0)} = \beta_i^{(1)} = \frac{1}{101}, \quad i = 0, 1, \dots, 100.$$

En la Figura 1 se muestran los diferentes valores de  $E[X_n]$  y de  $E[Y_n]$ , esto es, los tiempos esperados de operatividad y de reparación. Se consideran además cinco sucesiones diferentes crecientes para  $\{\gamma_n, n \geq 0\}$  y cinco decrecientes para  $\{\xi_n, n \geq 0\}$  especificadas en la leyenda interior de la figura. Se fijaron, para todos los casos,  $E[X_{20}] = 20$ , y  $E[Y_{20}] = 80$ , esto es, el tiempo medio de operatividad de la unidad cuando ha sufrido 20 fallos es de 20 unidades de tiempo (u.t.), mientras que el tiempo medio que lleva reparar el fallo vigésimo es 80 u.t. Se pueden observar en la figura las evoluciones de los tiempos de operatividad y de reparación esperados, con las distintas sucesiones definidas. Se aprecia además una ligera simetría entre las sucesiones crecientes y las decrecientes.

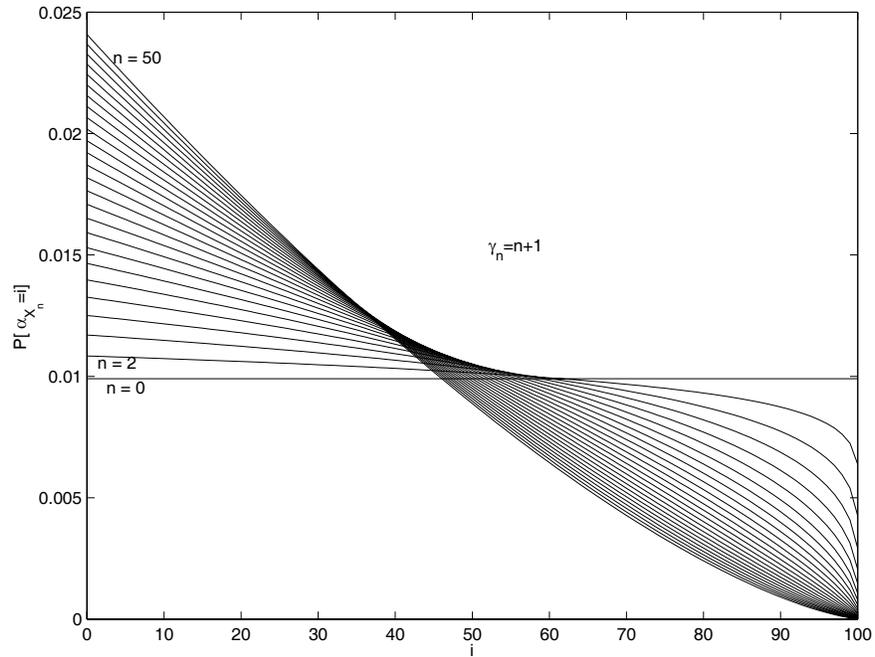


Fig. 2: Probabilidades  $\alpha_n = (\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{100}^{(n)})$  para diferentes valores de  $n$

En la Figura 2 se muestra el vector de probabilidades  $\alpha^{(n)}$  para los distintos valores de  $n$  y para  $\gamma_n = n + 1$ . Se puede comprobar como, a medida que  $n$  aumenta, la probabilidad

se va concentrando en los valores más bajos, lo cual concuerda con el deterioro del tiempo de operatividad de la unidad.

## 2.6. Sistema sometido a distintos tipos de fallo

En esta sección se analiza el comportamiento de un sistema reparable sometido a tres tipos de fallos. Este ejemplo ha sido tratado en la literatura en diferentes sentidos. Fue introducido por Neuts et al. (2000) suponiendo que los tiempos de operatividad y reparación seguían distribuciones de probabilidad tipo fase continuas. Posteriormente, Pérez-Ocón & Torres-Castro (2002) generalizaron el trabajo anterior suponiendo que los tiempos de operatividad y reparación seguían distribuciones de probabilidad de tipo general. Alfa & Castro (2002) consideraron el mismo ejemplo con distribuciones de tiempo y de reparación de tipo discreto. Pérez-Ocón & Ruiz-Castro (2004) estudiaron este problema considerando una configuración en paralelo de los dispositivos que formaban el sistema.

En esta sección se analiza este sistema reparable pero en este caso los tiempos de operatividad y de reparación se modelan como procesos potenciales bajo las siguientes hipótesis.

1. El sistema se compone de una unidad y un canal de reparación. Esta unidad está sometida a fallos accidentales y fallos de desgaste. Los fallos accidentales ocurren de acuerdo a un Proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$ . Con probabilidad  $p$  son reparables y con probabilidad  $q$  no reparables y  $p + q = 1$ . Bajo un fallo reparable, la unidad se traslada al canal de reparación y comienza la reparación. Bajo un fallo no reparable se sustituye por una nueva e idéntica. Los fallos de desgaste son reparables.
2. Denotamos por  $X_n$  el tiempo de operatividad de la unidad después del  $n$ -ésimo fallo,  $n \geq 0$ . Supongamos que  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\gamma_n\}$  con  $\{\gamma_n\} \uparrow \infty$  y  $\gamma_0 = 1$ .  $X_0$  es una variable aleatoria discreta que toma valores en el conjunto  $S_{X_0} = \{1, \dots, m\}$  con probabilidades,  $m$

$$\alpha_i^{(0)} = P[X_0 = i] = p_i, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(0)} = 1.$$

Denotaremos por

$$\alpha^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_m^{(n)}),$$

al vector de probabilidades asociado a  $X_n$ .

3. Denotamos por  $Y_n$  el tiempo de reparación de la unidad en la  $n$ -ésima reparación  $n \geq 1$ . Suponemos que  $\{Y_n, n \geq 1\}$  es un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\xi_n\}$  con  $\{\xi_n\} \downarrow 0$  y  $\xi_1 = 1$ .  $Y_1$  es una variable aleatoria discreta que toma valores en el conjunto  $S_{Y_1} = \{1, \dots, l\}$  con probabilidades

$$\beta_i^{(1)} = P[Y_1 = i], \quad \sum_{i=1}^l \beta_i^{(1)} = 1.$$

Denotaremos por

$$\beta^{(n)} = (\beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}, \dots, \beta_l^{(n)})$$

al vector de probabilidades asociado a  $Y_n$ .

4.  $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$  e  $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$  son independientes,  $\forall n$ .
5. Cuando el sistema complete  $N$  reparaciones, se sustituye por uno nuevo e idéntico cuando ocurra el próximo fallo.
6. Cuando el sistema completa la  $i$ -ésima reparación comienza a operar de acuerdo al vector de probabilidades  $\alpha^{(i)}$ . Asimismo, cuando se produce el  $i$ -ésimo fallo, la reparación comienza de acuerdo a  $\beta^{(i)}$ .

Como en Alfa & Castro (2002) y Castro & Alfa (2004), los sucesivos tiempos de operatividad de este sistema pueden modelarse como una distribución tipo fase discreta con representación  $(\alpha^{(n)}, T)$  siendo  $T$  una matriz cuadrada de orden  $m$  dada por

$$T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 \\ I_{m-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

y

$$\alpha^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_m^{(n)}).$$

En lo sucesivo, denotamos por  $t$  al vector columna dado por  $t = \mathbf{1} - T\mathbf{1}$  siendo  $\mathbf{1}$  un vector columna formado por unos de dimensiones apropiadas.

Análogamente, los sucesivos tiempos de reparación  $Y_n$  de la pieza pueden modelarse como una distribución tipo fase discreta con representación  $(\beta^{(n)}, S)$  siendo  $S$  una matriz cuadrada



Denotando por  $\pi = (\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(N), \pi(1_r), \pi(2_r), \dots, \pi(N_r))$  al vector de distribución estacionaria tal que:

$$\pi = \pi P \quad \pi \mathbf{1} = 1,$$

se tiene que

$$\pi(0) = K_1 \alpha^{(0)} (I - (1 - \lambda)T)^{-1}, \quad (2.12)$$

$$\pi(i) = K_1 \prod_{z=0}^{i-1} K_2^{(z)} \alpha^{(i)} (I - (1 - \lambda)T)^{-1} \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.13)$$

$$\pi(i_r) = K_1 \prod_{z=0}^{i-1} K_2^{(z)} \beta^{(i)} (I - S)^{-1} \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.14)$$

donde

$$K_1 = \left( \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i) \lambda q T \mathbf{1} + \pi(N) \lambda T \mathbf{1} + \pi(N) t \right)$$

y  $K_2^{(i)}$  viene dada por

$$K_2^{(i)} = \alpha^{(i)} (I - (1 - \lambda)T)^{-1} (t + \lambda p T \mathbf{1}). \quad (2.15)$$

La constante  $K_1$  representa la razón de reemplazo del sistema y se obtiene utilizando la condición de normalización,

$$\sum_{i=0}^N \pi(i) \mathbf{1} + \sum_{i=1}^N \pi(i_r) \mathbf{1} = 1. \quad (2.16)$$

La probabilidad de que el sistema se encuentre en alguno de los estados de la cadena de Markov se obtiene utilizando (2.12)-(2.14) y viene dada por:

$$\pi(0) \mathbf{1} = K_1 \frac{1 - P_0(1 - \lambda)}{\lambda}, \quad (2.17)$$

$$\pi(i) \mathbf{1} = K_1 \prod_{z=0}^{i-1} K_2^{(z)} \frac{1 - P_i(1 - \lambda)}{\lambda} \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.18)$$

$$\pi(i_r) \mathbf{1} = K_1 \prod_{z=0}^{i-1} K_2^{(z)} \mu_i \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.19)$$

siendo  $P_i(\cdot)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , la función generatriz de probabilidad de una distribución tipo fase discreta con representación  $(\alpha^{(i)}, T)$ ,

$$P_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(i)} z^n = z \alpha^{(i)} (I - zT)^{-1} t$$

y  $\mu_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , la media de la v.a.  $Y_i$

$$\mu_i = E(Y_i) = 1 + \sum_{z=1}^{l-1} \left( 1 - \sum_{j=1}^z \beta_j \right)^{\xi_i}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.20)$$

Denotando por

$$D_0 = \frac{1 - P_0(1 - \lambda)}{\lambda},$$

$$D_i = \prod_{z=0}^{i-1} K_2^{(z)} \frac{1 - P_i(1 - \lambda)}{\lambda}, \quad E_i = \prod_{z=0}^{i-1} K_2^{(z)} \mu_i \quad 1 \leq i \leq N,$$

las ecuaciones (2.17)-(2.19) pueden expresarse como:

$$\pi(0)\mathbf{1} = K_1 D_0, \quad (2.21)$$

$$\pi(i)\mathbf{1} = K_1 D_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.22)$$

$$\pi(i_r)\mathbf{1} = K_1 E_i, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.23)$$

Debido a que

$$(I - (1 - \lambda)T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (1 - \lambda) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ (1 - \lambda)^2 & (1 - \lambda) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1 - \lambda)^{m-1} & (1 - \lambda)^{m-2} & (1 - \lambda)^{m-3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

la constante  $K_2^{(z)}$  puede expresarse utilizando el vector de probabilidad  $\alpha^{(0)}$  y la sucesión  $\gamma_n$  como:

$$K_2^{(z)} = 1 - \lambda q \sum_{j=1}^{m-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^j \alpha_i^{(0)} \right)^{\gamma_z} (1 - \lambda)^{j-1}, \quad z \geq 0. \quad (2.24)$$

Como  $\gamma_z \uparrow \infty$ ,  $K_2^{(z)} \uparrow 1$ . Análogamente, la función generatriz de probabilidad  $P_i(\cdot)$  puede expresarse utilizando el vector de probabilidad  $\alpha^{(0)}$  como

$$P_i(z) = z - (1 - z) \sum_{j=1}^{m-1} z^j \left( 1 - \sum_{k=1}^j \alpha_k^{(0)} \right)^{\gamma_i}, \quad i \geq 0. \quad (2.25)$$

Utilizando las probabilidades estacionarias de esta cadena de Markov, pueden obtenerse diversas medidas de funcionamiento asociadas a este sistema.

Por ejemplo, denotamos por  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , la fracción de sistemas que sufren  $i$  reparaciones durante su ciclo de vida. Usando la interpretación de  $K_1$ , se tiene que,

$$P_i = \frac{\lambda q \pi(i) T \mathbf{1}}{K_1} = \lambda q \prod_{z=0}^{i-1} K_2^{(z)} \alpha^{(i)} (I - (1 - \lambda)T)^{-1} T \mathbf{1}, \quad 0 \leq i \leq N - 1,$$

$$P_i = \frac{\lambda \pi(i) \mathbf{1}}{K_1} = \lambda D_N, \quad i = N.$$

Sea  $C_0$  el tiempo esperado desde que una unidad es puesta en funcionamiento hasta que sufre el primer fallo y sea  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , el tiempo esperado desde que una unidad entra por  $i$ -ésima vez en el canal de reparación hasta que vuelve a sufrir un fallo. Denotamos por  $\pi_o^*(i)$  la probabilidad de que el sistema se encuentre operativo en  $C_i$  y por  $\pi_r^*(i)$  la probabilidad de que el sistema se encuentre bajo reparación en dicho ciclo. Utilizando (2.17)-(2.19), se tiene que:

$$\pi_o^*(i) = \frac{D_i}{D_i + E_i}, \quad \pi_r^*(i) = \frac{E_i}{D_i + E_i} \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2.26)$$

y

$$\pi_o^*(0) = 1. \quad (2.27)$$

En el siguiente apartado, analizamos el valor óptimo de  $N$  de manera que el beneficio esperado estacionario por unidad de tiempo se maximice.

### 2.6.2. Beneficio esperado del sistema

Supongamos que cuando el sistema está operativo se obtiene una ganancia de  $A_0$  unidades monetarias (u.m.) por u.t. Cuando el sistema está bajo reparación, se produce un coste de  $A_r$  u.m. por u.t. e incurrimos en un coste de  $A^*$  u.m. cuando reemplazamos la unidad por una nueva e idéntica. En esta sección analizaremos el valor de  $N$  que maximice el beneficio esperado estacionario por unidad de tiempo.

Es bien conocido (ver Ross (1996)) que el beneficio medio estacionario por unidad de tiempo viene dado por,

$$\frac{E(R)}{E(L)},$$

donde  $E(R)$  es el beneficio esperado entre reemplazos consecutivos del sistema y  $E(L)$  es el tiempo esperado de un ciclo de reemplazo. Denotamos por  $R(N)$  el beneficio esperado estacionario por unidad de tiempo cuando el número de reparaciones límite es igual a  $N$ . Aplicando

(2.21)-(2.23), se tiene que

$$\begin{aligned} R(0) &= \frac{-A^* + A_0 D_0}{D_0}, \\ R(N) &= \frac{-A^* + A_0 \sum_{i=0}^N D_i - A_r \sum_{i=1}^N E_i}{\sum_{i=0}^N D_i + \sum_{i=1}^N E_i}, \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Definimos

$$\Delta R(N) = R(N+1) - R(N), \quad N \geq 0$$

y utilizando (2.28) se tiene que

$$\Delta R(0) = \frac{A^*(D_1 + E_1) - (A_0 + A_r)D_0 E_1}{D_0(D_0 + D_1 + E_1)} \quad (2.29)$$

y  $\forall N \geq 1$

$$\Delta R(N) = \frac{A^*(D_{N+1} + E_{N+1}) + (A_0 + A_r) \left( D_{N+1} \sum_{i=1}^N E_i - E_{N+1} \sum_{i=0}^N D_i \right)}{\left( \sum_{i=0}^{N+1} D_i + \sum_{i=1}^{N+1} E_i \right) \left( \sum_{i=0}^N D_i + \sum_{i=1}^N E_i \right)}. \quad (2.30)$$

Además, utilizando (2.29) y (2.30), se obtiene que  $\forall N \geq 0$ ,

$$\Delta R(N) \underset{(>)}{<} 0 \iff \frac{A^*}{A_0 + A_r} \underset{(>)}{<} B(N), \quad (2.31)$$

donde

$$B(0) = \frac{D_0 E_1}{E_1 + D_1}, \quad (2.32)$$

$$B(N) = \frac{E_{N+1} \left( \sum_{i=0}^N D_i \right) - D_{N+1} \left( \sum_{i=1}^N E_i \right)}{D_{N+1} + E_{N+1}}, \quad N \geq 1. \quad (2.33)$$

**Lema 2.1** *La función  $B(N)$  dada en (2.32) y (2.33) es positiva y creciente.*

### Demostración

La demostración de este hecho es trivial si consideramos que  $B(N)$  puede expresarse como:

$$B(N) = \frac{E_{N+1} D_0 + \sum_{i=1}^N (E_{N+1} D_i - D_{N+1} E_i)}{E_{N+1} + D_{N+1}}, \quad N \geq 1.$$

Para  $1 \leq i \leq N$ , consideramos la diferencia

$$= \frac{E_{N+1}D_i - D_{N+1}E_i}{\prod_{z=0}^N K_2^{(z)} \prod_{z=0}^{i-1} K_2^{(z)}} \left[ \frac{\mu_{N+1}(1 - P_i(1 - \lambda)) - \mu_i(1 - P_{N+1}(1 - \lambda))}{\lambda} \right]$$

■

Por ser  $\{Y_n, n \geq 1\}$  un proceso potencial creciente,  $\mu_{N+1} > \mu_i$ ,  $i \geq 1$  y por ser  $\{X_n, n \geq 1\}$  un proceso potencial decreciente  $1 - P_i(1 - \lambda)$  es decreciente en  $i$  y por lo tanto las funciones  $B(N)$  son positivas.

La monotonía de las funciones  $B(N)$  se obtiene de manera similar debido a que:

$$B(N+1) - B(N) = \frac{(E_{N+2}D_{N+1} - D_{N+2}E_{N+1}) \left( \sum_{i=0}^{N+1} D_i + \sum_{i=1}^{N+1} E_i \right)}{(E_{N+2} + D_{N+2})(E_{N+1} + D_{N+1})}$$

y por el mismo razonamiento anterior:

$$E_{N+2}D_{N+1} - D_{N+2}E_{N+1} \geq 0.$$

Aplicando el Lema 2.1 y la desigualdad (2.31), es posible encontrar el valor óptimo de  $N$ , denotado por  $N_{opt}$ , que maximice la ganancia media esperada estacionaria.

■ Si

$$\frac{A^*}{A_0 + A_r} < B(0), \quad (2.34)$$

entonces  $N_{opt} = 0$  y por lo tanto el dispositivo tendría que ser reemplazado por uno nuevo independientemente de la naturaleza del fallo.

■ Si

$$\frac{A^*}{A_0 + A_r} > B(N), \quad \forall N, \quad (2.35)$$

entonces  $N_{opt} = \infty$  y por lo tanto bajo un fallo, el dispositivo tendría que ser reparado independientemente del número de reparaciones previas completadas.

■ Si

$$B(0) < \frac{A^*}{A_0 + A_r} < \lim_{N \rightarrow \infty} B(N), \quad (2.36)$$

entonces  $N_{opt}$  viene dado por

$$N_{opt} = \min_{N \geq 0} \left\{ \frac{A^*}{A_0 + A_r} < B(N) \right\}. \quad (2.37)$$

- En los casos particulares en los que

$$\frac{A^*}{A_0 + A_r} = B(N^*),$$

$$N_{opt} = N^* \text{ y } N_{opt} = N^* + 1.$$

### 2.6.3. Ejemplos numéricos

En este apartado presentamos un ejemplo numérico del sistema expuesto en esta sección usando una distribución particular de los tiempos de operatividad y de reparación.

Sea  $X_0$  el tiempo de operatividad del sistema cuando no ha sufrido ninguna reparación. Suponemos que  $X_0$  es una variable aleatoria discreta que toma valores en el conjunto  $S_{X_0} = \{1, 2, \dots, 100\}$  con probabilidades,

$$P[X_0 = i] = \frac{1}{100}, \quad 1 \leq i \leq 100.$$

Denotamos por  $X_n$  el tiempo de operatividad del sistema después de la  $n$ -ésima reparación. Suponemos que  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\gamma_n\}$  donde  $\gamma_n = 1.1^n$ ,  $\forall n \geq 0$ . Análogamente denotamos por  $Y_n$  el tiempo de reparación del sistema en su  $n$ -ésima reparación. Suponemos que  $\{Y_n, n \geq 1\}$  es un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\xi_n\}$  donde  $\xi_n = 0.9^{n-1}$ ,  $\forall n \geq 1$  y tal que  $Y_0$  es una v.a. discreta que toma valores en el conjunto  $S_{Y_1} = \{1, 2, \dots, 20\}$ . Los fallos externos a este sistema ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda = 0.0010$  fallos/u.t. Con probabilidad  $p=0.9$  dichos fallos son reparables y con probabilidad  $q = 1 - p=0.1$  los fallos no son reparables.

Suponemos que el sistema, cuando está operativo, produce una ganancia de  $A_0=1000$  u.m/u.t mientras que cuando está bajo reparación incurre en un coste de  $A_r=1000$  u.m/u.t. El coste de reemplazar el sistema por uno nuevo e idéntico es igual a 120000 u.m.

El objetivo principal de este ejemplo es calcular el valor óptimo de  $N$  que maximice el beneficio medio estacionario por unidad de tiempo al que hemos denotado por  $R(N)$ .

Los valores de la función  $B(N)$  dada en (2.32) y (2.33) vienen detallados en la siguiente tabla para  $0 \leq N \leq 10$ .

N	0	1	2	3	4	5
$B(N)$	9.3463	10.9608	13.5464	17.556	21.8329	27.6135

N	6	7	8	9	10
$B(N)$	34.5227	42.5751	51.7742	62.1118	73.5678

La Figura 3 nos muestra los distintos valores de la función  $B(N)$  en función del parámetro  $N$ .

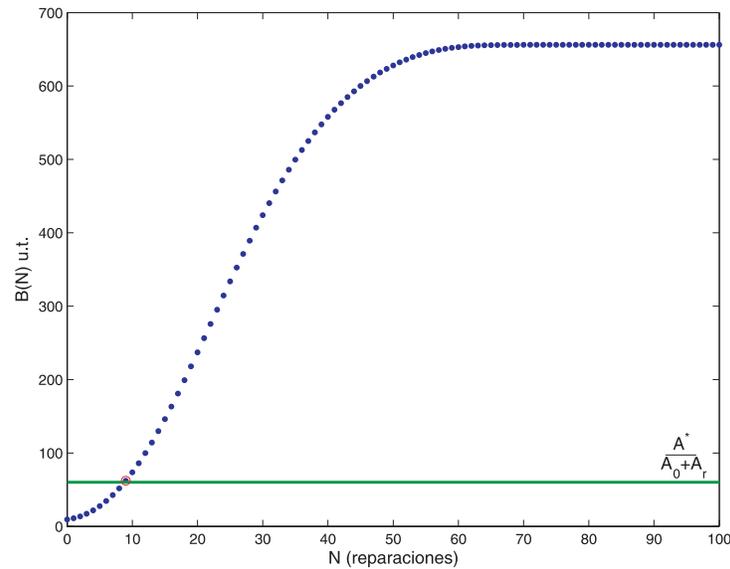


Fig. 3: Función  $B(N)$  para diferentes valores de  $N$ .

En la tabla y en la figura anterior se observa que

$$B(8) = 51.7742 < \frac{A^*}{A_0 + A_r} = 60 < B(9) = 62.1118,$$

con lo que, aplicando (2.37) se obtiene que  $N_{opt} = 9$ , porque es el primer valor de  $N$  para el que la función  $B(N)$  es mayor que 60.

El beneficio medio estacionario por unidad de tiempo para cada valor de  $N$  viene representado en la Figura 4, donde podemos apreciar que efectivamente  $N_{opt} = 9$ , que corresponde al beneficio máximo del sistema. El beneficio máximo esperado estacionario por unidad de tiempo para este sistema se obtiene para  $N_{opt} = 9$  con un valor de 299.3276 u.m.

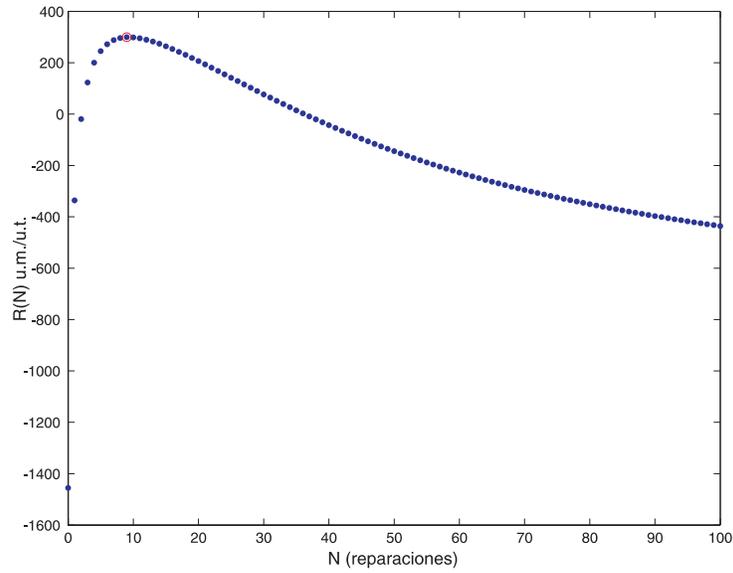


Fig. 4: Beneficio medio estacionario por unidad de tiempo para diferentes valores de  $N$ .



## Capítulo 3

# Modelo I de Reparación Pospuesta

Como comentamos en la Introducción General, los Capítulos 3 y 4 se dedican al estudio de un tipo de política de mantenimiento de sistemas reparables a la que hemos denominado *política de reparación pospuesta*. La principal característica de la misma es que el canal de reparación no siempre se encuentra disponible y por tanto se pospone la reparación de los fallos. Esta política de mantenimiento se desarrolla bajo dos modelos. En el Capítulo 3 se estudia el denominado *modelo I de reparación pospuesta* mientras que en el Capítulo 4 se estudia el denominado *modelo II de reparación pospuesta*. La diferencia fundamental entre estos dos modelos es el instante a partir del cual el canal de reparación no está disponible; en el Modelo I este instante es determinista en contraposición con el Modelo II en el que el instante de no disponibilidad es aleatorio.

En la primera sección de este capítulo se realiza una descripción del modelo. Tal y como se expondrá en este apartado, bajo las hipótesis del modelo I de reparación pospuesta, el canal de reparación no está disponible a partir de un instante de tiempo al que denominaremos  $T^*$ . Si se producen uno o varios fallos en el sistema a partir del instante  $T^*$ , la reparación de los mismos se pospondrá hasta el final del día, momento en que el sistema es sometido a una inspección técnica.

Como ejemplo de esta situación, podríamos pensar en una empresa que tiene subcontratados los servicios de reparación de sus equipos. A partir de cierto momento del día, la subcontrata

encarece sus servicios (por motivos razonables, como encontrarse fuera del horario laboral), por lo que a la empresa le resulta más rentable posponer la reparación de los fallos a horas en las que la reparación de sus equipos sea más económica.

Una vez expuestas las características de este modelo, en la segunda sección de este capítulo se obtiene la distribución transitoria de la cadena de Markov en tiempo continuo que modela el sistema descrito. Una vez obtenida esta distribución estacionaria se analiza el beneficio esperado utilizando esta política de mantenimiento. Para finalizar este capítulo se introducen una serie de ejemplos numéricos.

### 3.1. Descripción del modelo

Supongamos un sistema, que será considerado como una única unidad, y un canal de reparación. El sistema está en funcionamiento durante un período laborable representado mediante el intervalo  $[0, T]$  y durante el cual puede sufrir fallos reparables. Al final del período laborable, el sistema es sometido a una inspección técnica cuya labor es que el sistema esté en una condición *tan buena como nueva* al principio del siguiente período laboral. Es decir, las condiciones de operatividad al inicio de cada período laboral son idénticas.

Además, establecemos las siguientes hipótesis.

1. Sea  $X_1$  la v.a. que representa el tiempo de operatividad del sistema cuando ninguna reparación ha sido pospuesta. Suponemos que  $X_1$  sigue una distribución exponencial de parámetro  $\lambda_1$ . Sea  $X_r$  la v.a. que representa el tiempo de reparación de un fallo del sistema. Suponemos que  $X_r$  sigue una distribución exponencial de parámetro  $\mu$ .
2. El canal de reparación está disponible inmediatamente sólo hasta el instante  $T^*$ , para cierto  $T^* \in [0, T]$ , salvo si se está realizando una reparación en el instante  $T^*$ . En tal caso, el canal de reparación dejará de estar disponible cuando ésta se complete. En  $[0, T^*]$ , si un fallo ocurre, su reparación comienza de forma instantánea y es perfecta. A partir del cierre del canal de reparación, si ocurre un fallo, se pospone su reparación y el sistema continúa operando.
3. Denotamos por  $X_i, i = 2, 3, \dots, N$ , la v.a. que representa el tiempo de operatividad del sistema después de la  $i - 1$ -ésima reparación. La v.a.  $X_i \sim \exp(\lambda_i)$ ,

$i = 2, \dots, N$  y se verifica que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N,$$

lo que implica

$$X_1 \geq_{st} X_2 \geq_{st} \dots \geq_{st} X_N.$$

Esto es, las tasas de fallos crecen a medida que el número de reparaciones pospuestas aumenta. O lo que es lo mismo, los tiempos de operatividad decrecen estocásticamente a medida que el número de fallos no reparados aumenta.

4. Como consecuencia de la posposición de las reparaciones, el sistema sufre un deterioro de modo que, si  $N - 1$  reparaciones se posponen a lo largo de un período laborable, el  $N$ -ésimo fallo provoca que el sistema deje de operar durante el resto del período y tenga que ser reemplazado por uno nuevo e idéntico por la inspección técnica, lo cual supone un coste adicional.
5. Cuando el sistema está operativo se obtiene un beneficio de  $A_0$  unidades monetarias (u.m.) por unidad de tiempo (u.t.) mientras que, cuando está siendo reparado, se produce un coste de  $A_r$  u.m. por u.t. Si el sistema acumula un total de  $N$  fallos no reparados, el coste de reemplazo o de sustitución del sistema es de  $C_s$  u.m.

### 3.2. Distribución transitoria del proceso

Denotamos por  $X(t)$  el estado del sistema en el instante  $t$ . Debido al carácter exponencial de los tiempos de operatividad y de reparación, el proceso  $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$  es una cadena de Markov en tiempo continuo con espacio de estados  $S = \{1, 2, \dots, N, r, D\}$  de modo que

- $X(t) = i, i = 1, 2, \dots, N$  si el sistema está operativo en el instante  $t$  e  $i - 1$  reparaciones han sido pospuestas hasta ese momento.
- $X(t) = r$  si el sistema está siendo reparado en el instante  $t$ .
- $X(t) = D$  si el sistema no se encuentra operativo ni en reparación en el instante  $t$ .

La distribución transitoria del proceso  $\{X(t), 0 < t \leq T^*\}$  es un resultado bien conocido de la teoría de CMTC (véase Kulkarni (1995)). Denotamos por  $P_1(t) = P[X(t) = 1]$  y por

$P_r(t) = P[X(t) = r]$  para  $0 \leq t \leq T^*$ . Bajo la condición inicial  $X(0) = 1$ , las probabilidades  $P_1(t)$  y  $P_r(t)$  pueden obtenerse resolviendo las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$$\begin{aligned} P_r'(t) &= -\lambda_1 P_r(t) + \mu(1 - P_r(t)) \\ &= -(\lambda_1 + \mu)P_r(t) + \mu, \end{aligned}$$

ecuación diferencial que tiene como solución

$$P_1(t) = \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu} \exp\{-(\lambda_1 + \mu)t\}, \quad 0 \leq t \leq T^*, \quad (3.1)$$

$$P_r(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu} \exp\{-(\lambda_1 + \mu)t\}, \quad 0 \leq t \leq T^*. \quad (3.2)$$

Sean  $W_1(T^*)$  y  $W_r(T^*)$  el tiempo esperado que el sistema permanece en el estado 1 y en el estado  $r$  respectivamente durante el intervalo  $[0, T^*]$ . Integrando (3.1) y (3.2), se tiene que

$$\begin{aligned} W_1(T^*) &= \int_0^{T^*} P_1(u) du = \frac{\mu T^*}{(\lambda_1 + \mu)} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu)^2} [1 - \exp\{-(\lambda_1 + \mu)T^*\}], \\ W_r(T^*) &= \int_0^{T^*} P_r(u) du = \frac{\lambda_1 T^*}{(\lambda_1 + \mu)} - \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu)^2} [1 - \exp\{-(\lambda_1 + \mu)T^*\}]. \end{aligned}$$

Introducimos la siguiente notación:

- $F_i$  y  $f_i$  denotan las funciones de distribución y de densidad, respectivamente, de la v.a.  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ .
- $F_r$  y  $f_r$  denotan las funciones de distribución y de densidad, respectivamente, de la v.a.  $X_r$ .
- $F_{1+\dots+i}$  y  $f_{1+\dots+i}$  denotan la función de distribución y de densidad, respectivamente, de la v.a.  $X_1 + \dots + X_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ .
- $F_{r+1+\dots+i}$  y  $f_{r+1+\dots+i}$  denotan la función de distribución y de densidad, respectivamente, de  $X_r + X_1 + \dots + X_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

Para calcular la distribución transitoria del proceso en el intervalo  $(T^*, T]$ , debemos tener en cuenta si en  $T^*$  el sistema está operativo o está siendo reparado.

Calculemos en primer lugar la probabilidad de que el proceso de Markov se encuentre en el estado  $i$  en el instante  $t \in (T^*, T]$  condicionado a que el proceso de Markov se encuentra en

el estado 1 en el instante  $T^*$ . Este hecho es equivalente a que el sistema falle  $i - 1$  veces en el intervalo  $(T^*, u)$ , con  $u < T$ , y no se produzca ningún fallo en el intervalo  $[u, T]$ , suceso que tiene como probabilidad

$$\begin{aligned}
 P[X(t) = i | X(T^*) = 1] &= \int_{T^*}^t f_{1+\dots+(i-1)}(u - T^*) \bar{F}_i(t - u) du \\
 &= \int_{T^*}^t f_{1+\dots+(i-1)}(u - T^*) \frac{f_i(t - u)}{\lambda_i} du \\
 &= \frac{1}{\lambda_i} \int_{T^*}^t f_{1+\dots+(i-1)}(u - T^*) f_i(t - u) du \\
 &= \frac{1}{\lambda_i} f_{1+2+\dots+i}(t - T^*). \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

**Observación** Para obtener las probabilidades anteriores no hemos tenido en cuenta el comportamiento de  $X_1$  antes de  $T^*$ , es decir, hemos considerado que la probabilidad de que el sistema falle en un instante  $u$  ( $T^* < u \leq T$ ) es independiente del tiempo que estuvo operativo antes de  $T^*$ . Esta propiedad se deduce de manera intuitiva sin más que considerar que la variable  $X_1$  sigue una distribución exponencial. Una demostración matemática de este hecho es la siguiente.

$$\begin{aligned}
 P[X_1 + \dots + X_N \leq t + u | X_1 > u] &= \frac{P[X_1 + \dots + X_N \leq t + u, X_1 > u]}{P[X_1 > u]} \\
 &= \frac{\int_{v=u}^{t+u} f_1(v) F_{2+3+\dots+N}(t + u - v) dv}{P[X_1 > u]} \\
 &= \frac{\int_{z=0}^t f_1(z + u) F_{2+3+\dots+N}(t - z) dz}{P[X_1 > u]} \\
 &= \frac{\bar{F}_1(u) \int_{z=0}^t f_1(z) F_{2+3+\dots+N}(t - z) dz}{P[X_1 > u]} \\
 &= F_{1+2+\dots+N}(t) \\
 &= P[X_1 + X_2 + \dots + X_N \leq t].
 \end{aligned}$$

□

Consideramos que en el instante  $T^*$  el sistema está bajo reparación. Como en el punto anterior, que el proceso de Markov se encuentre en el instante  $t$  ( $T^* < t \leq T$ ) en el estado  $r$

equivale a que el sistema no complete la reparación en  $[T^*, t)$ . Dicho suceso tiene la siguiente probabilidad

$$P_{rr}(t) = P[X(t) = r | X(T^*) = r] = \bar{F}_r(t - T^*) = \frac{1}{\mu} f_r(t - T^*). \quad (3.4)$$

**Observación** Si en  $T^*$  el sistema está operativo, en el intervalo  $[T^*, T]$  el sistema no puede estar en reparación ya que a partir de  $T^*$  el canal de reparación no está disponible. Sin embargo, si en el instante  $T^*$  el sistema está bajo reparación, tal y como exponíamos en la hipótesis 3 del modelo, el canal de reparación completa la reparación que estaba llevando a cabo en  $T^*$ .  $\square$

De manera análoga, podemos calcular la probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado  $i$  en el instante  $t \in (T^*, T]$ , condicionando ahora a que el proceso se encuentre en el estado  $r$  en el instante  $T^*$ . El razonamiento es análogo al que hemos utilizado para calcular (3.3).

$$\begin{aligned} P[X(t) = i | X(T^*) = r] &= \int_{u=T^*}^t f_{r+1+\dots+(i-1)}(u - T^*) \bar{F}_i(t - u) du \\ &= \int_{u=T^*}^t f_{r+1+\dots+(i-1)}(u - T^*) \frac{f_i(t - u)}{\lambda_i} du \\ &= \frac{1}{\lambda_i} f_{r+1+\dots+i}(t - T^*). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sea

- $W_{io}(T^*)$ ,  $i = 1, \dots, N$  el tiempo esperado que la CMTC permanece en el estado  $i$  durante el intervalo  $(T^*, T]$  si estaba en el estado 1 en el instante  $T^*$ .
- $W_{rr}(T^*)$  el tiempo esperado que la CMTC permanece en el estado  $r$  durante el intervalo  $(T^*, T]$  si estaba en el estado  $r$  en el instante  $T^*$ .
- $W_{ir}(T^*)$ ,  $i = 1, \dots, N$  el tiempo esperado que la CMTC permanece en el estado  $i$  durante el intervalo  $(T^*, T]$  si estaba en el estado  $r$  en el instante  $T^*$ .

Integrando (3.3)-(3.5), obtenemos

$$W_{io}(T^*) = \frac{F_{1+\dots+i}(T - T^*)}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.6)$$

$$W_{rr}(T^*) = \frac{F_r(T - T^*)}{\mu}, \quad (3.7)$$

$$W_{ir}(T^*) = \frac{F_{r+1+\dots+i}(T - T^*)}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.8)$$

### Observaciones

1. Las expresiones (3.6)-(3.8) tienen una interpretación muy intuitiva. Por ejemplo, analicemos (3.6):  $W_{io}(T^*)$  es igual al tiempo medio de operatividad del sistema cuando se han pospuesto  $i - 1$  reparaciones,  $E[X_i] = 1/\lambda_i$ , multiplicado por la probabilidad de que el sistema sufra al menos  $i$  fallos en el intervalo  $(T^*, T]$ ,  $F_{1+\dots+i}(T - T^*)$ .
2. Si  $T = \infty$ , notar que  $F_{1+\dots+i}(T - T^*) = 1$  y por tanto  $W_{io}(T^*) = E[X_i]$ . Pueden darse interpretaciones similares para (3.7) y (3.8).

□

### 3.3. Beneficio esperado del sistema

El proceso estocástico que hemos construido en la sección anterior es un modelo matemático del sistema que permite una descripción del mismo. De acuerdo a las hipótesis del modelo, el sistema genera costes o produce ganancias dependiendo de los estados que visita y del tiempo medio que permanece en los mismos. El análisis de estos costes y ganancias es crucial para evaluar diferentes políticas de mantenimiento.

Fijado  $T^* \in [0, T]$ , denotamos por  $R_1(T^*)$  el beneficio esperado del sistema por periodo laborable si el canal de reparación está disponible hasta el instante  $T^*$ .

Por Kulkarni (1995), si la CMTC asociada a un sistema produce una ganancia o un coste constante  $A_i$  cuando la cadena permanece en el estado  $i$ ,  $i \in S$  siendo  $S$  el espacio de estados del sistema, y  $E[W_i]$  es el tiempo esperado de permanencia de la CMTC en el estado  $i$  entonces

el beneficio medio del sistema viene dado por

$$R = \sum_{i \in S} A_i E[W_i]. \quad (3.9)$$

Aplicando (3.9) en nuestro caso,

$$\begin{aligned} R_1(T^*) &= A_0 W_1(T^*) - A_r W_r(T^*) \\ &+ P_1(T^*) \left[ A_0 \sum_{i=1}^N W_{i,0}(T^*) - C_s F_{1+\dots+N}(T - T^*) \right] \\ &+ P_r(T^*) \left[ -A_r W_{r,r}(T^*) + A_0 \sum_{i=1}^N W_{i,r}(T^*) - C_s F_{r+1+\dots+N}(T - T^*) \right]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (3.6)-(3.8),

$$\begin{aligned} R_1(T^*) &= A_0 W_1(T^*) - A_r W_r(T^*) \\ &+ P_1(T^*) \left[ A_0 \sum_{i=1}^N \frac{F_{1+\dots+i}(T - T^*)}{\lambda_i} - C_s F_{1+\dots+N}(T - T^*) \right] \\ &+ P_r(T^*) \left[ -A_r \frac{F_r(T - T^*)}{\mu} + A_0 \sum_{i=1}^N \frac{F_{r+1+\dots+i}(T - T^*)}{\lambda_i} \right. \\ &\quad \left. - C_s F_{r+1+\dots+N}(T - T^*) \right]. \end{aligned}$$

Para simplificar el manejo de  $R_1(T^*)$  expresamos dicha función como

$$R_1(T^*) = A_0 W_1(T^*) - A_r W_r(T^*) + P_1(T^*) B(T^*) + P_r(T^*) D(T^*), \quad (3.10)$$

donde

$$\begin{aligned} B(T^*) &= A_0 \sum_{i=1}^N \frac{F_{1+2+\dots+i}(T - T^*)}{\lambda_i} - C_s F_{1+2+\dots+N}(T - T^*), \\ D(T^*) &= -A_r \frac{F_r(T - T^*)}{\mu} + A_0 \sum_{i=1}^N \frac{F_{r+1+2+\dots+i}(T - T^*)}{\lambda_i} \\ &\quad - C_s F_{r+1+2+\dots+N}(T - T^*). \end{aligned}$$

Uno de los aspectos más importantes en el estudio de sistemas reparables es la determinación de las políticas de mantenimiento óptimas, es decir, aquellas políticas que minimicen el coste

total, maximicen la disponibilidad o, en general, alcancen el valor óptimo para alguna función objetivo determinada con anterioridad.

Centremos este apartado en el estudio del valor de  $T^*$ , al que denotaremos por  $T_{opt}^*$ , tal que  $R_1(T^*)$  se maximice. Para ello, calcularemos la derivada de la expresión (3.10) respecto de  $T^*$ .

El siguiente lema será útil para simplificar los cálculos de dicha derivada.

**Lema 3.3.1** *Si  $X_r, X_1, X_2, \dots, X_N$  son variables aleatorias tales que  $X_r \sim \exp(\mu)$  y  $X_i \sim \exp(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , entonces*

$$\sum_{i=2}^N \frac{f_{1+\dots+i}(t)}{\lambda_i} = F_1(t) - F_{1+\dots+N}(t), \quad t \geq 0 \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{f_{r+1+\dots+i}(t)}{\lambda_i} = F_r(t) - F_{r+1+\dots+N}(t), \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

### Demostración

La propiedad (1.9) de la distribución exponencial, expuesta en el Capítulo 1, implica que

$$\frac{f_{1+\dots+i}(t)}{\lambda_i} = F_{1+\dots+(i-1)}(t) - F_{1+\dots+i}(t),$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^N \frac{f_{1+\dots+i}(t)}{\lambda_i} &= (F_1(t) - F_{1+2}(t)) + \dots + (F_{1+\dots+(N-1)}(t) - F_{1+\dots+N}(t)) \\ &= F_1(t) - F_{1+\dots+N}(t). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\frac{f_{r+1+\dots+i}(t)}{\lambda_i} = F_{r+1+\dots+(i-1)}(t) - F_{r+1+\dots+i}(t),$$

con lo que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{f_{r+1+\dots+i}(t)}{\lambda_i} &= (F_r(t) - F_{r+1}(t)) + \dots + (F_{r+\dots+(N-1)}(t) - F_{r+\dots+N}(t)) \\ &= F_r(t) - F_{r+1+\dots+N}(t). \end{aligned}$$

■

En adelante, denotaremos a la derivada de una función  $f(T^*)$  respecto de  $T^*$  por  $f'(T^*)$ , y a la derivada segunda,  $f''(T^*)$ . Derivando la expresión (3.10), tenemos

$$\begin{aligned} R'_1(T^*) &= A_0 W'_1(T^*) - A_r W'_r(T^*) + P'_1(T^*) B(T^*) \\ &\quad + P_1(T^*) B'(T^*) + P'_r(T^*) D(T^*) + P_r(T^*) D'(T^*). \end{aligned}$$

Notar que

$$W'_1(T^*) = P_1(T^*), \quad W'_r(T^*) = P_r(T^*).$$

Además, debido al carácter exponencial de  $X_1$  y  $X_r$ , se tiene que

$$\begin{aligned} P'_1(T^*) &= -P'_r(T^*), \\ P_1(T^*) &= \mu P_r(T^*) - \lambda_1 P_1(T^*). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} R'_1(T^*) &= A_0 P_1(T^*) - A_r P_r(T^*) + (\mu P_r(T^*) - \lambda_1 P_1(T^*)) B(T^*) \\ &\quad + P_1(T^*) B'(T^*) - (\mu P_r(T^*) - \lambda_1 P_1(T^*)) D(T^*) + P_r(T^*) D'(T^*) \\ &= P_1(T^*) [A_0 - \lambda_1 B(T^*) + B'(T^*) + \lambda_1 D(T^*)] \\ &\quad + P_r(T^*) [-A_r + \mu B(T^*) - \mu D(T^*) + D'(T^*)]. \end{aligned}$$

Analizaremos cada sumando por separado.

En primer lugar, veamos que  $-A_r + \mu B(T^*) - \mu D(T^*) + D'(T^*) = 0$ .

Teniendo en cuenta que todas las funciones que aparecen en  $B(T^*)$  y  $D(T^*)$  están evaluadas en  $T - T^*$  en adelante, para facilitar la lectura, omitiremos frecuentemente  $T - T^*$  salvo en los casos que puedan originar confusión.

Primeramente, calcularemos  $B(T^*) - D(T^*)$ .

$$\begin{aligned} &B(T^*) - D(T^*) \\ &= A_0 \sum_{i=1}^N \frac{F_{1+\dots+i}}{\lambda_i} - C_s F_{1+\dots+N} + \frac{A_r}{\mu} F_r - A_0 \sum_{i=1}^N \frac{F_{r+1+\dots+i}}{\lambda_i} + C_s F_{r+1+\dots+N} \\ &= A_0 \sum_{i=1}^N \frac{F_{1+\dots+i} - F_{r+1+\dots+i}}{\lambda_i} + \frac{A_r}{\mu} F_r + C_s [F_{r+1+\dots+N} - F_{1+\dots+N}], \end{aligned}$$

donde todas las funciones que aparecen están evaluadas en  $T - T^*$ . Aplicando (1.9) y (3.12), obtenemos

$$B(T^*) - D(T^*) = \frac{A_0}{\mu} [F_r - F_{r+1+\dots+N}] + \frac{A_r}{\mu} F_r - \frac{C_s}{\mu} f_{r+1+\dots+N}.$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} & -A_r + \mu(B(T^*) - D(T^*)) + D'(T^*) \\ &= -A_r + A_0 [F_r - F_{r+1+\dots+N}] + A_r F_r + C_s f_{r+1+\dots+N} \\ & \quad + \frac{A_r}{\mu} f_r - A_0 \sum_{i=1}^N \frac{f_{r+1+\dots+i}}{\lambda_i} - C_s f_{r+1+\dots+N} \\ &= A_r [-1 + F_r + \bar{F}_r] + A_0 [F_r - F_{r+1+\dots+N}] - A_0 [F_r - F_{r+1+\dots+N}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de  $R_1$  se reduce a la siguiente expresión

$$R'_1(T^*) = P_1(T^*) [A_0 + B'(T^*) - \lambda_1 B(T^*) + \lambda_1 D(T^*)].$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} & A_0 + B'(T^*) - \lambda_1(B(T^*) - D(T^*)) = \\ & A_0 - A_0 \frac{f_1}{\lambda_1} - A_0 \sum_{i=2}^N \frac{f_{1+\dots+i}}{\lambda_i} + C_s f_{1+2+\dots+N} - \frac{\lambda_1 A_0}{\mu} \sum_{i=1}^N \frac{f_{r+\dots+i}}{\lambda_i} \\ & \quad - \lambda_1 \frac{A_r}{\mu} F_r + \lambda_1 C_s \frac{f_{r+\dots+N}}{\mu}. \end{aligned}$$

Y por lo tanto, aplicando el Lema 3.3.1,

$$\begin{aligned} & A_0 + B'(T^*) - \lambda_1(B(T^*) - D(T^*)) = A_0 - A_0 \bar{F}_1 - A_0 [F_1 - F_{1+\dots+N}] + \\ & C_s f_{1+2+\dots+N} - \frac{\lambda_1 A_0}{\mu} [F_r - F_{r+\dots+N}] - \lambda_1 \frac{A_r}{\mu} F_r + \lambda_1 C_s \frac{f_{r+\dots+N}}{\mu}. \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} & A_0 + B'(T^*) - \lambda_1(B(T^*) - D(T^*)) = \\ & A_0 F_{1+\dots+N} + C_s f_{1+\dots+N} - \frac{\lambda_1}{\mu} (A_0 + A_r) F_r + \frac{\lambda_1 A_0}{\mu} F_{r+\dots+N} + \lambda_1 C_s \frac{f_{r+\dots+N}}{\mu}. \end{aligned}$$

De manera que,

$$\lambda_1 \left[ A_0 \frac{F_{1+\dots+N}}{\lambda_1} + C_s \frac{f_{1+\dots+N}}{\lambda_1} - \frac{(A_0 + A_r)}{\mu} F_r + \frac{A_0}{\mu} F_{r+\dots+N} + C_s \frac{f_{r+\dots+N}}{\mu} \right].$$

Notar que,

$$\frac{f_{1+2+\dots+N}}{\lambda_1} + \frac{f_{r+\dots+N}}{\mu} = F_{2+\dots+N} - F_{r+1+\dots+N}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} & A_0 \frac{F_{1+2+\dots+N}}{\lambda_1} + \frac{A_0}{\mu} F_{r+\dots+N} \\ &= \frac{A_0}{\lambda_1} F_{1+2+\dots+(N-1)} - \frac{A_0}{\lambda_N} [F_{2+\dots+N} - F_{r+\dots+N}] + \frac{A_0}{\mu} F_{r+\dots+(N-1)}. \end{aligned}$$

Por tanto, podemos expresar la derivada de  $R_1$  como,

$$R'_1(T^*) = \left[ \left( C_s - \frac{A_0}{\lambda_N} \right) g_{1N}(T^*) + g_{2N}(T^*) \right] P_1(T^*) \lambda_1, \quad (3.13)$$

donde

$$g_{1N}(T^*) = F_{2+\dots+N}(T - T^*) - F_{r+1+\dots+N}(T - T^*), \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} g_{2N}(T^*) &= \frac{A_0}{\lambda_1} F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*) + \frac{A_0}{\mu} F_{r+1+\dots+(N-1)}(T - T^*) \\ &\quad - \frac{(A_0 + A_r)}{\mu} F_r(T - T^*), \end{aligned} \quad (3.15)$$

siempre que  $N \geq 2$ .

**Observación** El caso  $N = 1$  equivaldría a que el sistema tenga que ser reemplazado por uno nuevo e idéntico si sufre un fallo después de  $T^*$ . En realidad, no se pospondría la reparación de ningún fallo. En tal caso,

$$B(T^*) - D(T^*) = \frac{A_0}{\mu} [F_r - F_{r+1}] + \frac{A_r}{\mu} F_r - \frac{C_s}{\mu} f_{r+1},$$

con lo que

$$\begin{aligned} & A_0 - \lambda_1 B(T^*) + B'(T^*) + \lambda_1 D(T^*) \\ &= A_0 - \lambda_1 \left( \frac{A_0}{\mu} [F_r - F_{r+1}] + \frac{A_r}{\mu} F_r - \frac{C_s}{\mu} f_{r+1} \right) - A_0 \frac{f_1}{\lambda_1} + C_s f_1 \\ &= A_0 - \frac{A_0}{\mu} f_{r+1} - A_r \frac{\lambda_1}{\mu} F_r + C_s \lambda_1 [F_1 - F_{r+1}] - A_0 \bar{F}_1 + C_s \lambda_1 \bar{F}_1 \\ &= A_0 [1 - F_1 + F_{r+1} - \bar{F}_1] + A_r \frac{\lambda_1}{\mu} F_r + C_s \lambda_1 [1 - F_{r+1}]. \end{aligned}$$

Luego

$$R'_1(T^*) = [(C_s g_{11}(T^*) + g_{21}(T^*)) P_1(T^*) \lambda_1,$$

siendo

$$g_{11}(T^*) = \bar{F}_{r+1}(T - T^*), \quad (3.16)$$

$$g_{21}(T^*) = \frac{A_0}{\lambda_1} F_{r+1}(T - T^*) - \frac{A_r}{\mu} F_r(T - T^*). \quad (3.17)$$

□

### 3.3.1. Política de reparación pospuesta para $N = 2$

Este caso equivale a que el sistema soporta un fallo no reparado, o lo que es lo mismo, la posposición de dos reparaciones implica la sustitución del sistema por uno nuevo e idéntico. Entonces,

$$R'_1(T^*) = \left[ \left( C_s - \frac{A_0}{\lambda_2} \right) g_{12}(T^*) + g_{22}(T^*) \right] P_1(T^*) \lambda_1, \quad (3.18)$$

donde las funciones  $g_{12}(T^*)$  y  $g_{22}(T^*)$  tienen la forma:

$$g_{12}(T^*) = F_2(T - T^*) - F_{r+1+2}(T - T^*), \quad (3.19)$$

$$g_{22}(T^*) = \frac{A_0}{\lambda_1} F_1(T - T^*) + \frac{A_0}{\mu} F_{r+1}(T - T^*) - \frac{(A_0 + A_r)}{\mu} F_r(T - T^*). \quad (3.20)$$

La expresión (3.20) puede simplificarse, puesto que

$$\begin{aligned} & \frac{F_1}{\lambda_1} + \frac{F_{r+1}}{\mu} - \frac{F_r}{\mu} \\ &= \frac{F_{r+1} + f_{r+1}/\mu}{\lambda_1} + \frac{F_{r+1}}{\mu} - \frac{F_{r+1} + f_{r+1}/\lambda_1}{\mu} \\ &= \frac{F_{r+1}}{\lambda_1}, \end{aligned}$$

con lo cual

$$g_{22}(T^*) = \frac{A_0}{\lambda_1} F_{r+1}(T - T^*) - \frac{A_r}{\mu} F_r(T - T^*). \quad (3.21)$$

El siguiente lema nos servirá para estudiar el comportamiento de la función  $R'_1(T^*)$ .

**Lema 3.3.2** *La función  $h(T^*)$  definida como*

$$h(T^*) = \frac{F_r(T - T^*)}{F_{r+1}(T - T^*)}, \quad 0 \leq T^* < T$$

*es creciente en  $T^*$ .*

**Demostración**

$$\begin{aligned}
& h'(T^*) \\
= & \frac{-f_r(T - T^*)F_{r+1}(T - T^*) + F_r(T - T^*)f_{r+1}(T - T^*)}{F_{r+1}(T - T^*)^2} \\
\geq & \frac{-f_r(T - T^*)F_r(T - T^*)F_1(T - T^*) + F_r(T - T^*)F_1(T - T^*)f_r(T - T^*)}{F_{r+1}(T - T^*)^2} \\
= & 0
\end{aligned}$$

aplicando las desigualdades

$$\begin{aligned}
F_{r+1}(t) & \leq F_1(t)F_r(t), \quad t \geq 0 \\
f_{r+1}(t) & \geq F_1(t)f_r(t), \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

■

En consecuencia, obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.3** *Supongamos que  $C_s < A_0/\lambda_2$ .*

1. *Si se verifica*

$$\frac{1}{1 - \rho} \frac{F_1(T)}{F_r(T)} \leq \rho \left( \frac{A_r}{A_0} - \frac{1}{\rho - 1} \right), \quad (3.22)$$

donde  $\rho = \lambda_1/\mu \neq 1$ , entonces  $T_{opt}^* = 0$ .

2. *Si  $\lambda_1 = \mu$  y se verifica*

$$\frac{A_0}{A_r} \leq \frac{F_r(T)}{F_{r+1}(T)},$$

entonces  $T_{opt}^* = 0$ .

3. *En otro caso, existe  $T_2 \in (0, T)$  que verifica  $g_{22}(T_2) = 0$  y por tanto  $T_{opt}^* \leq T_2$ .*

*En cualquier caso,  $T_{opt}^* < T$ , luego el uso de la reparación pospuesta es aconsejable.*

**Demostración**

1. Supongamos que se verifica (3.22).

La función  $g_{12}(T^*)$  es positiva para todo  $T^* \in [0, T]$  y además

$$g_{12}(T) = g_{22}(T) = 0.$$

Obviamente,

$$g_{22}(T^*) = 0 \Leftrightarrow \frac{F_r(T - T^*)}{F_{r+1}(T - T^*)} = \frac{A_0/\lambda_1}{A_r/\mu}.$$

Por el Lema 3.3.2, la función

$$h(T^*) = \frac{F_r(T - T^*)}{F_{r+1}(T - T^*)}, \quad T^* \in [0, T),$$

es creciente en  $T^*$ , luego la ecuación

$$g_{22}(T^*) = 0$$

posee a lo sumo dos soluciones, una de las cuales es  $T^* = T$ .

Además,

$$g_{22}(T^*) \leq 0 \Leftrightarrow h(T^*) \geq \frac{A_0/\lambda_1}{A_r/\mu},$$

luego, debido a que  $h(T^*)$  es creciente, la condición

$$h(0) \geq \frac{A_0/\lambda_1}{A_r/\mu} \tag{3.23}$$

garantiza que

$$g_{22}(T^*) \leq 0, \quad \forall T^* \in [0, T).$$

Y (3.23) es equivalente a (3.22), ya que (3.23) se cumple si y sólo si

$$\frac{F_{r+1}(T)}{F_r(T)} \leq \frac{A_r/\mu}{A_0/\lambda_1}. \tag{3.24}$$

Por ser  $X_1$  y  $X_r$  vv. aa. exponenciales,

$$F_{r+1}(T) = \alpha_1 F_1(T) + \alpha_r F_r(T),$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{\mu - \lambda_1}, \quad \alpha_r = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \mu}.$$

Por lo tanto

$$\frac{F_{r+1}(T)}{F_r(T)} = \alpha_1 \frac{F_1(T)}{F_r(T)} + \alpha_r \leq \frac{A_r/\mu}{A_0/\lambda_1}$$

si y sólo si

$$\frac{\mu}{\mu - \lambda_1} \frac{F_1(T)}{F_r(T)} \leq \frac{A_r/\mu}{A_0/\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \mu}$$

si y sólo si se verifica (3.22).

2. Si la condición (3.22) no se cumple, tampoco se cumple (3.23) y como

$$\lim_{T^* \rightarrow T} h(T^*) = \infty,$$

debe existir  $T_2 \in (0, T)$  tal que

- $h(T^*) < \frac{A_0/\lambda_1}{A_r/\mu}, \forall T^* \in [0, T_2),$
- $h(T_2) = \frac{A_0/\lambda_1}{A_r/\mu},$
- $h(T^*) > \frac{A_0/\lambda_1}{A_r/\mu}, \forall T^* \in (T_2, T)$

o, equivalentemente,

- $g_{22}(T^*) > 0, \forall T^* \in [0, T_2),$
- $g_{22}(T_2) = 0,$
- $g_{22}(T^*) \leq 0, \forall T^* \in (T_2, T].$

Luego  $R'_1(T^*) \leq 0, \forall T^* \in (T_2, T].$  Por tanto,  $T_{opt}^* \leq T_2.$

■

**Corolario 3.3.4** Si  $C_s < A_0/\lambda_2$  y

$$\frac{1}{F_1(T)} \geq \frac{A_0/\lambda_1}{A_r/\mu} \tag{3.25}$$

entonces  $T_{opt}^* = 0.$

**Demostración**

Basta tener en cuenta que la condición (3.22) es equivalente a (3.23). Como

$$h(0) = \frac{F_r(T)}{F_{r+1}(T)} \geq \frac{F_r(T)}{F_r(T)F_1(T)} = \frac{1}{F_1(T)}$$

la condición (3.25) asegura (3.23). ■

**Corolario 3.3.5** Si  $C_s < A_0/\lambda_2$  y

$$\frac{A_0}{\lambda_1} \leq \frac{A_r}{\mu}$$

entonces  $T_{opt}^* = 0$ .

**Demostración**

El resultado se deduce de manera inmediata utilizando el Corolario 3.3.4 dado que  $F_1(T) \leq 1$ . ■

**Teorema 3.3.6** Si  $C_s > A_0/\lambda_2$ ,  $\mu < \lambda_2$  y además

$$\frac{A_r}{\mu} < C_s - \frac{A_0}{\lambda_2} < \frac{A_0}{\lambda_1},$$

entonces  $T_{opt}^* = T$ . En tal caso, la reparación pospuesta no es aconsejable.

**Demostración**

Basta tener en cuenta que

$$\begin{aligned} R'_1(T^*) &= \left[ \left( C_s - \frac{A_0}{\lambda_2} \right) g_{12}(T^*) + g_{22}(T^*) \right] P_1(T^*) \lambda_1 \\ &= \left[ \left( C_s - \frac{A_0}{\lambda_2} \right) (F_2(T - T^*) - F_{r+1+2}(T - T^*)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_0}{\lambda_1} F_{r+1}(T - T^*) - \frac{A_r}{\mu} F_r(T - T^*) \right] P_1(T^*) \lambda_1, \end{aligned}$$

las condiciones del teorema implican  $R'_1(T^*) \geq 0$ ,  $\forall T^* \in [0, T]$ . ■

**Teorema 3.3.7** Si  $C_s > A_0/\lambda_2$  y existe  $T_2 \in [0, T)$  tal que  $g_{22}(T_2) = 0$ , entonces  $T_{opt}^* > T_2$ .

**Demostración**

Como vimos en la demostración del Teorema 3.3.3, si existe un valor de  $T_2$  tal que  $g_{22}(T_2) = 0$ , entonces

- $g_{22}(T^*) > 0, \quad \forall T^* \in [0, T_2),$
- $g_{22}(T_2) = 0,$
- $g_{22}(T^*) < 0, \quad \forall T^* \in (T_2, T),$

y por lo tanto  $R'_1(T^*) > 0, \quad \forall T^* \in (0, T_2].$  ■

**Observación** Un caso trivial es el caso en que  $C_s = A_0/\lambda_2$ , puesto que

$$R'_1(T^*) = P_1(T^*)\lambda_1 g_{22}(T^*),$$

luego la condición (3.22) implica  $T_{opt}^* = 0$ .

En caso de no cumplirse (3.22), existe  $T_2 \in (0, T)$  tal que  $g_{22}(T_2) = 0$  y entonces  $T_{opt}^* = T_2$ .

□

**3.3.2. Política de reparación pospuesta para  $N > 2$** 

Estudiemos el caso en que  $N > 2$ .

**Proposición 3.3.8** Si  $C_s < A_0/\lambda_N$ ,  $A_0/\lambda_1 \leq A_r/\mu$  y se verifica que

$$X_r \leq_{st} X_1 + \dots + X_{N-1}, \tag{3.26}$$

entonces  $T_{opt}^* = 0$ .

**Demostración**

La función  $g_{1N}(T^*)$ , definida mediante (3.14), es no negativa  $\forall T^* \in [0, T]$ . Como

$$\begin{aligned} g_{2N}(T^*) &= \frac{A_0}{\lambda_1} F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*) + \frac{A_0}{\mu} F_{r+1+\dots+(N-1)}(T - T^*) \\ &\quad - \frac{(A_0 + A_r)}{\mu} F_r(T - T^*), \end{aligned}$$

si imponemos  $C_s < A_0/\lambda_N$  y además se verifica

$$\frac{A_0}{\lambda_1} F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*) \leq \frac{A_r}{\mu} F_r(T - T^*), \quad \forall T^* \in [0, T], \quad (3.27)$$

entonces  $R'_1(T^*) \leq 0$ ,  $\forall T^* \in [0, T]$ , y por tanto  $T_{opt}^* = 0$ .

Las condiciones

- $A_0/\lambda_1 \leq A_r/\mu$ ,
- $X_r \leq_{st} X_1 + \dots + X_{N-1}$

garantizan (3.27). ■

Un resultado más fácil de probar que las condiciones de la proposición anterior viene dado en el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.9** *Si se verifican*

- $C_s < A_0/\lambda_N$ ,
- $\lambda_1 < \mu$ ,
- $A_0/\lambda_1 \leq A_r/\mu$ ,

entonces  $T_{opt}^* = 0$ .

### **Demostración**

Como se expuso en la Proposición 3.3.8, bajo las hipótesis  $C_s < A_0/\lambda_N$  y  $A_0/\lambda_1 \leq A_r/\mu$  si se verifica (3.26) entonces  $T_{opt}^* = 0$ .

Por otra parte, si  $\lambda_1 < \mu$ , entonces por ser  $X_1$  y  $X_r$  variables aleatorias exponenciales

$$\bar{F}_1(t) \geq \bar{F}_r(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Por lo tanto,  $X_1 \geq_{st} X_r$  lo que implica (3.26). ■

Consideremos la función  $g_{2N}(T^*)$  dada en (3.15) y definimos para  $0 \leq T^* < T$ ,

$$\begin{aligned} h_{2N}(T^*) &= \frac{g_{2N}(T^*)}{F_r(T - T^*)} \\ &= \frac{A_0}{\lambda_1} \frac{F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)}{F_r(T - T^*)} + \frac{A_0}{\mu} \frac{F_{r+1+\dots+(N-1)}(T - T^*)}{F_r(T - T^*)} - \frac{A_0 + A_r}{\mu}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\text{signo } h_{2N}(T^*) = \text{signo } g_{2N}(T^*), \quad 0 \leq T^* < T.$$

Sea  $g(\cdot)$  la función definida como

$$g(T^*) = \frac{F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)}{F_r(T - T^*)}, \quad 0 \leq T^* < T. \quad (3.28)$$

Vamos a probar que  $g(T^*)$  es decreciente en  $T^*$  si  $\lambda_1 < \mu$ . Calculando su derivada se tiene que  $g'(T^*) \leq 0$  si y sólo si

$$-f_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)F_r(T - T^*) + F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)f_r(T - T^*) \leq 0,$$

o lo que es lo mismo

$$g'(T^*) \leq 0 \iff \frac{f_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)}{F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)} - \frac{f_r(T - T^*)}{F_r(T - T^*)} \geq 0, \quad 0 \leq T^* < T.$$

Consideremos la función

$$z_\mu(t) = \frac{\mu \exp(-\mu t)}{1 - \exp(-\mu t)}, \quad t > 0.$$

La función  $z_\mu(t)$  es decreciente en  $\mu$  para  $t > 0$ . Entonces, bajo la condición  $\lambda_1 < \mu$ , se tiene que

$$\frac{f_r(T - T^*)}{F_r(T - T^*)} \leq \frac{f_1(T - T^*)}{F_1(T - T^*)}, \quad \forall T^* \in [0, T].$$

Consideramos ahora las diferencias

$$\frac{f_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)}{F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)} - \frac{f_1(T - T^*)}{F_1(T - T^*)}, \quad 0 \leq T^* < T. \quad (3.29)$$

Expresando las funciones de densidad como

$$\begin{aligned} f_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*) &= \lambda_1 F_{2+\dots+(N-1)}(T - T^*) - \lambda_1 F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*), \\ f_1(T - T^*) &= \lambda_1 \bar{F}_1(T - T^*) = \lambda_1 - \lambda_1 F_1(T - T^*), \end{aligned}$$

la diferencia (3.29) se reduce a

$$\lambda_1 \left( \frac{F_{2+\dots+(N-1)}(T - T^*)}{F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)} - \frac{1}{F_1(T - T^*)} \right), \quad T^* \in [0, T^*),$$

y por lo tanto la diferencia (3.29) es positiva ya que

$$F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*) \leq F_1(T - T^*)F_{2+\dots+(N-1)}(T - T^*), \quad \forall T^* \in [0, T].$$

De este modo,

$$0 \leq \frac{f_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)}{F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)} - \frac{f_1(T - T^*)}{F_1(T - T^*)} \leq \frac{f_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)}{F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*)} - \frac{f_r(T - T^*)}{F_r(T - T^*)}.$$

Por lo tanto la función  $g$  dada en (3.28) es decreciente en  $T^*$ .

Consideremos ahora

$$h(T^*) = \frac{F_{r+1+\dots+(N-1)}(T - T^*)}{F_r(T - T^*)}.$$

La función  $h(\cdot)$  es decreciente si y sólo si

$$\frac{f_{r+1+\dots+(N-1)}(T - T^*)}{F_{r+1+\dots+(N-1)}(T - T^*)} - \frac{f_r(T - T^*)}{F_r(T - T^*)} \geq 0. \quad (3.30)$$

Expresando las funciones de densidad como

$$\begin{aligned} f_{r+1+\dots+(N-1)}(T - T^*) &= \mu F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*) - \mu F_{r+1+\dots+(N-1)}(T - T^*), \\ f_r(T - T^*) &= \mu \bar{F}_r(T - T^*) = \mu - \mu F_r(T - T^*), \end{aligned}$$

la diferencia (3.30) se reduce a

$$\mu \left( \frac{F_{1+2+\dots+(N-1)}(T - T^*)}{F_{r+1+\dots+(N-1)}(T - T^*)} - \frac{1}{F_r(T - T^*)} \right), \quad T^* \in [0, T^*),$$

y por lo tanto (3.30) es positiva ya que

$$F_{r+1+\dots+(N-1)}(T - T^*) \leq F_r(T - T^*) F_{1+\dots+(N-1)}(T - T^*), \quad \forall T^* \in [0, T].$$

En resumen, la función  $h_{2N}(T^*)$  es una función decreciente en  $T^*$  si  $\lambda_1 < \mu$  y toma valores comprendidos entre los siguientes límites,

$$\begin{aligned} h_{2N}(T^*) &\geq -\frac{A_0 + A_r}{\mu}, \\ h_{2N}(T^*) &\leq \frac{A_0}{\lambda_1} \frac{F_{1+2+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} + \frac{A_0}{\mu} \frac{F_{r+1+2+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} - \frac{A_0 + A_r}{\mu}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si

$$\frac{A_0}{\lambda_1} \frac{F_{1+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} + \frac{A_0}{\mu} \frac{F_{r+1+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} > \frac{A_0 + A_r}{\mu},$$

existe  $T_2 \in (0, T)$  tal que  $h_{2N}(T_2) = 0$  y en consecuencia,

$$\blacksquare \quad g_{2N}(T^*) > 0, \quad \forall T^* \in [0, T_2),$$

- $g_{2N}(T_2) = 0$ ,
- $g_{2N}(T^*) < 0, \quad \forall T^* \in (T_2, T)$ .

Considerando las apreciaciones anteriores, se tienen los siguientes resultados.

**Proposición 3.3.10** *Si  $C_s < A_0/\lambda_N$ ,  $\lambda_1 < \mu$  y*

$$\frac{A_0}{\lambda_1} \frac{F_{1+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} + \frac{A_0}{\mu} \frac{F_{r+1+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} < \frac{A_0 + A_r}{\mu},$$

entonces  $T_{opt}^* = 0$ .

#### Demostración

Por las condiciones expuestas anteriormente, la función  $h_{2N}$  es negativa y por lo tanto  $g_{2N}$  también es negativa. De este modo  $R'_1(T^*) \leq 0$  y por lo tanto  $T_{opt}^* = 0$ .

**Proposición 3.3.11** *Si  $C_s < A_0/\lambda_N$ ,  $\lambda_1 < \mu$  y*

$$\frac{A_0}{\lambda_1} \frac{F_{1+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} + \frac{A_0}{\mu} \frac{F_{r+1+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} > \frac{A_0 + A_r}{\mu},$$

entonces  $T_{opt}^* \leq T_2 < T$ , donde  $T_2$  es la raíz de la función  $g_{2N}(T^*)$  definida en (3.15).

#### Demostración

La condición

$$\frac{A_0}{\lambda_1} \frac{F_{1+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} + \frac{A_0}{\mu} \frac{F_{r+1+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} > \frac{A_0 + A_r}{\mu}$$

garantiza la existencia de la raíz de la función  $g_{2N}$  a la que denominaremos  $T_2$ .

- $g_{2N}(T^*) > 0, \quad \forall T^* \in [0, T_2)$ ,
- $g_{2N}(T_2) = 0$ ,
- $g_{2N}(T^*) < 0, \quad \forall T^* \in (T_2, T)$ .

Por lo tanto  $R'_1(T^*) \leq 0, \quad \forall T^* \in (T_2, T]$  y por lo tanto  $T_{opt}^* \leq T_2$ .

**Proposición 3.3.12** *Si  $C_s > A_0/\lambda_N$ ,  $\lambda_1 < \mu$  y*

$$\frac{A_0}{\lambda_1} \frac{F_{1+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} + \frac{A_0}{\mu} \frac{F_{r+1+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} > \frac{A_0 + A_r}{\mu},$$

entonces  $T_{opt}^* > T_2 > 0$  donde  $T_2$  es la raíz de la función  $g_{2N}$  definida en (3.15).

**Demostración**

La condición

$$\frac{A_0}{\lambda_1} \frac{F_{1+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} + \frac{A_0}{\mu} \frac{F_{r+1+\dots+(N-1)}(T)}{F_r(T)} > \frac{A_0 + A_r}{\mu}$$

asegura la existencia de la raíz  $T_2$  de la función  $g_{2N}$ . Además, por ser  $C_s > A_0/\lambda_N$ ,

$$R'_1(T^*) > 0, \quad \forall T^* \in [0, T_2).$$

■

Los resultados anteriores concuerdan con los resultados obtenidos en la sección anterior en el caso en que considerábamos  $N = 2$ .

**3.4. Ejemplos numéricos**

En esta sección presentamos algunos ejemplos para dar cobertura numérica a la política de mantenimiento presentada en este capítulo.

**3.4.1. Ejemplo 1**

Consideremos una compañía que posee dos redes que utiliza para el flujo de información entre dos puntos. Una de ellas, la denominada *red primaria*, se emplea para la circulación de información ordinaria, la cual representa la mayor parte de la información que la empresa posee. La *red de seguridad* se utiliza para enviar y recibir datos importantes o secretos. Debido a ello, esta red es completamente necesaria para la compañía y debe estar siempre operativa. La compañía opera durante un periodo laborable  $[0, T]$ , intervalo durante el cual la red primaria sufre fallos debido a la gran cantidad de información que soporta. Para encargarse de su mantenimiento, una empresa externa es contratada durante el periodo laborable. Cuando la red está siendo reparada, al no estar en funcionamiento, la compañía sufre pérdidas por cesar la producción provisionalmente.

Supondremos que, cuando la red primaria funciona, la compañía percibe unos beneficios de  $A_0$  u.m. por u.t., mientras que, si está siendo reparada, incurre en unas pérdidas de  $A_r$  u.m. por u.t.

Por el contrario, la red de seguridad opera durante todo el periodo laborable sin fallos pues el flujo de datos importantes no es excesivo. El funcionamiento de esta red no produce beneficios ni costes, pues es meramente una red de seguridad.

Una inspección técnica revisa las redes al final del periodo laborable para dejarlas en perfecto estado al inicio del siguiente periodo laborable.

Para minimizar costes, la compañía estudia la posibilidad de reducir el contrato con la empresa de mantenimiento limitándolo a una parte del periodo laborable. Se decide contratarla hasta un instante  $T^*$  con  $T^* \in [0, T]$ . De este modo, si ocurre un fallo en la red primaria en el periodo  $[T^*, T]$ , la compañía usará la red de seguridad provisionalmente para hacer circular todos los datos por ella. La idea parece buena porque la compañía se ahorra los costes derivados de detener la producción. Sin embargo, existe el riesgo de que, al circular toda la información por la red de seguridad, ésta sufra un fallo y no pueda ser reparada. En ese caso, la compañía debería buscar otra empresa que le proporcionase el servicio de flujo de la información importante. Esto produciría un coste adicional.

Este problema se puede adaptar al modelo I de reparación pospuesta para el caso  $N = 2$ . La cuestión sería elegir  $T^*$  óptimo que maximice los beneficios de la compañía.

Supondremos que la red primaria falla según una distribución exponencial, con tasa  $\lambda_1 = 1$  fallos por unidad de tiempo. La empresa de mantenimiento también emplea una cantidad de tiempo exponencial en la reparación de cada fallo con una tasa  $\mu = 1.5$  reparaciones por unidad de tiempo. Cuando la red de seguridad opera como red primaria provisional, la tasa de fallos aumenta a  $\lambda_2 = 2$  fallos por unidad de tiempo.

El periodo laborable se fija con una duración de  $T = 10$  u.t. Cuando el sistema está operativo se obtienen beneficios de  $A_0 = 1$  u.m. por unidad de tiempo, mientras que cuando está siendo reparado, el coste es de  $A_r$  u.m. por unidad de tiempo. Asimismo, si la red de seguridad sufre un fallo y la compañía debe buscar otra empresa para hacer circular los datos importantes, la empresa tiene un coste adicional de  $C_s$  u.m.

$A_r$	$C_s$	Signo de $C_s - A_0/\lambda_2$	Signo de $A_0/\lambda_1 - A_r/\mu$	$T_{opt}^*$
0.5	0.25	-	+	8.7524
0.5	0.50	0	+	9.2756
0.5	0.75	+	+	9.9989
0.5	1	+	+	10
1	0.25	-	+	7.8028
1	0.50	0	+	8.2723
1	0.75	+	+	8.9893
1	1	+	+	9.9987
1	1.25	+	+	10
1.5	0.25	-	0	0
1.5	0.50	0	0	0
1.5	0.75	+	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
5	0.25	-	-	0
5	0.50	0	-	0
5	0.75	+	-	0

Tabla 1. Valor de  $T_{opt}^*$  para diferentes valores de  $A_r, C_s$  en el caso  $N = 2$ .

La Tabla 1 muestra los valores de  $T_{opt}^*$  cuando los parámetros  $A_r$  y  $C_s$  varían. Dichos valores han sido calculados usando una variante del método de la secante para obtener las raíces de  $R'_1(T^*) = 0$ .

Podemos también generalizar este ejemplo al caso  $N > 2$  considerando una red primaria y  $N - 1$  redes secundarias. En el periodo  $[T^*, T]$ , si un fallo ocurre en la red primaria, la compañía emplea una red secundaria como red primaria provisional. Esto hace que la tasa de fallo aumente, o lo que es lo mismo  $\lambda_2 > \lambda_1$ . Si esta red sufre un fallo, se utiliza otra red secundaria aumentando de nuevo la tasa de fallos siendo  $\lambda_3$  su tasa de fallos por unidad de tiempo. Así sucesivamente hasta utilizar la  $(N - 1)$ -ésima red secundaria de modo que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N.$$

$A_r$	$C_s$	Signo de $C_s - A_0/\lambda_2$	Signo de $A_0/\lambda_1 - A_r/\mu$	$T_{opt}^*$
0.5	0.25	-	+	8.7524
0.5	0,33	0	+	0
0.5	0.40	+	+	8.4043
0.5	0.50	+	+	8.7446
0.5	1.50	+	+	9.5737
0.5	250	+	+	9.9980
0.5	2500	+	+	9.9998
1	0.25	-	+	0
1	0,33	0	+	0
1	0.40	+	+	8.0845
1	0.50	+	+	8.45092
1	1.50	+	+	9.3904
1	250	+	+	9.9973
1	2500	+	+	9.9997
1.5	0.25	-	0	0
1.5	0,33	0	-	0
1.5	0.40	+	0	7.9144
1.5	0.50	+	0	8.2748
1.5	1.50	+	0	9.2082
1.5	250	+	0	9.9967
1.5	2500	+	0	9.9996
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	0.25	-	-	0
5	0,33	0	-	0
5	0.40	+	-	7.4719
5	0.50	+	-	7.8056
5	1.50	+	-	8.5673
5	250	+	-	9.9919
5	2500	+	-	9.9992

Tabla 2. Valor de  $T_{opt}^*$  para diferentes valores de  $A_r$ ,  $C_s$  en el caso  $N = 3$ .

Finalmente, el  $N$ -ésimo fallo produce que la compañía tenga que recurrir a otra empresa para que envíe y reciba datos de seguridad con un coste adicional de  $C_s$  unidades monetarias.

En la Tabla 2 se muestran, para el caso  $N = 3$ , con los valores anteriores de  $\lambda_1, \lambda_2, \mu, T$  y  $A_0$ , y para  $\lambda_3 = 3$  fallos por unidad de tiempo, los valores calculados para  $T_{opt}^*$  a medida que  $A_r$  y  $C_s$  varían.

### 3.4.2. Ejemplo 2

La siguiente sección muestra un sistema con las características dadas en la siguiente tabla

$T$	Periodo laborable	10 u.t.
$1/\lambda_1$	Tiempo medio operativo	20 u.t.
$1/\lambda_2$	Tiempo medio operativo tras una posposición	8.5 u.t.
$1/\mu$	Tiempo medio de reparación	1 u.t.
$A_0$	Beneficio por unidad de tiempo	20000 u.m./u.t.
$A_r$	Coste de reparación por unidad de tiempo	400000 u.m./u.t.

donde se variará el parámetro  $C_s$  (coste de sustitución del sistema) para apreciar o no la validez de la reparación pospuesta.

Para  $C_s = 500000$  u.m., la ganancia esperada es una función decreciente en  $T^*$  y por lo tanto  $T_{opt}^* = 0$  y  $R_1(0) = 100269$  u.m.. El comportamiento del beneficio esperado viene reflejado en la Figura 5. La razón por la que la ganancia óptima se alcanza para  $T_{opt}^* = 0$  se debe al bajo coste de sustitución del sistema y a la baja probabilidad de sustitución del mismo si  $T^* = 0$

$$P(X_1 + X_2 \leq T) = 0,1731.$$

Para  $C_s = 1000000$  u.m., la ganancia esperada es una función que presenta un máximo en el punto  $T_{opt}^* = 5.207$  con una ganancia esperada de 42060 u.m. El comportamiento del beneficio esperado viene reflejado en la Figura 6. El mínimo para dicha función se alcanzaría en el instante  $T^* = 0$  caso que es equivalente a no utilizar el canal de reparación y posponer todos los fallos hasta la actuación de los equipos de mantenimiento al siguiente periodo laborable. La razón de que esta actuación sea tan poco rentable (en términos de ganancia) estriba en el alto coste de sustitución de la pieza (1000000 unidades monetarias). Para  $T^* = 0$ , la probabilidad de

sustitución de la pieza es igual a

$$P(X_1 + X_2 \leq T) = 0,1731,$$

es decir, en un 17.31 % de los casos el sistema debe de ser reemplazado con un coste adicional de 1000000 de unidades monetarias cantidad que difiere notablemente del máximo de ganancia que puede esperarse por periodo laborable que es igual a  $A_0 \cdot T = 200000$  unidades monetarias. Sin embargo, para  $T^* = 5.207$  unidades de tiempo, la probabilidad de que el sistema tenga que ser sustituido pasa a ser de

$$P(X_1 + X_2 \leq 4,793) = 0.000657,$$

o lo que es lo mismo, en un 0.0657 % el sistema tiene que ser sustituido lo que implica que, aunque el coste de sustitución es muy elevado, la probabilidad de que realmente ocurra la sustitución es muy baja.

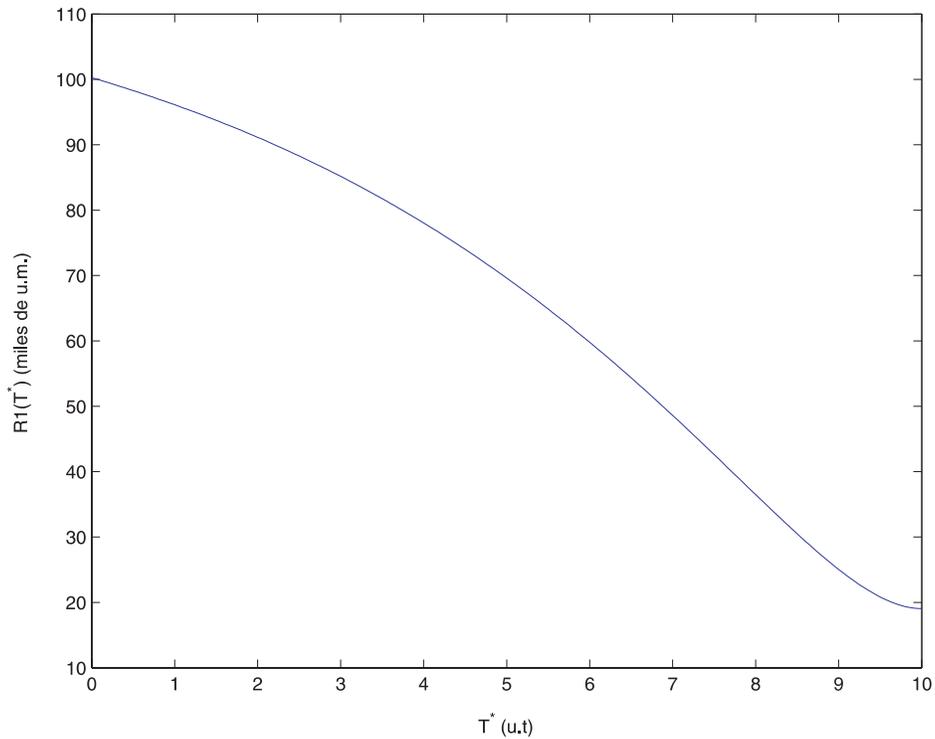


Fig. 5: Beneficio esperado del sistema del ejemplo 2 sobre el instante de no disponibilidad del canal de reparación considerando  $C_s = 500000$  u.m.

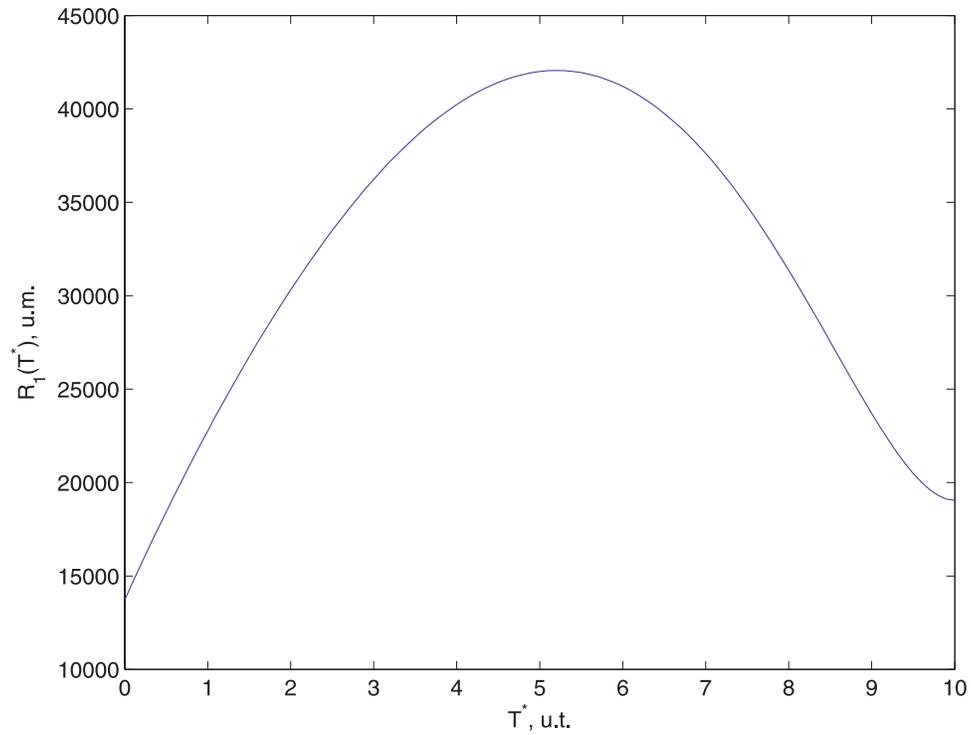


Fig. 6: Beneficio esperado del sistema del ejemplo 2 sobre el instante de no disponibilidad del canal de reparación considerando  $C_s = 1000000$  u.m.

Para  $C_s = 4000000$  u.m., la ganancia esperada es una función creciente en  $T^*$  y por lo tanto  $T_{opt}^* = 10$  y  $R_1(10) = 19047.1$  u.m.. El comportamiento del beneficio esperado viene reflejado en la Figura 7. En este caso no compensa un modelo de reparación pospuesta debido al alto coste de sustitución del sistema en contraposición con los beneficios máximos que se obtendrían por periodo laborable ( $A_0 \cdot T = 200000$  unidades monetarias).

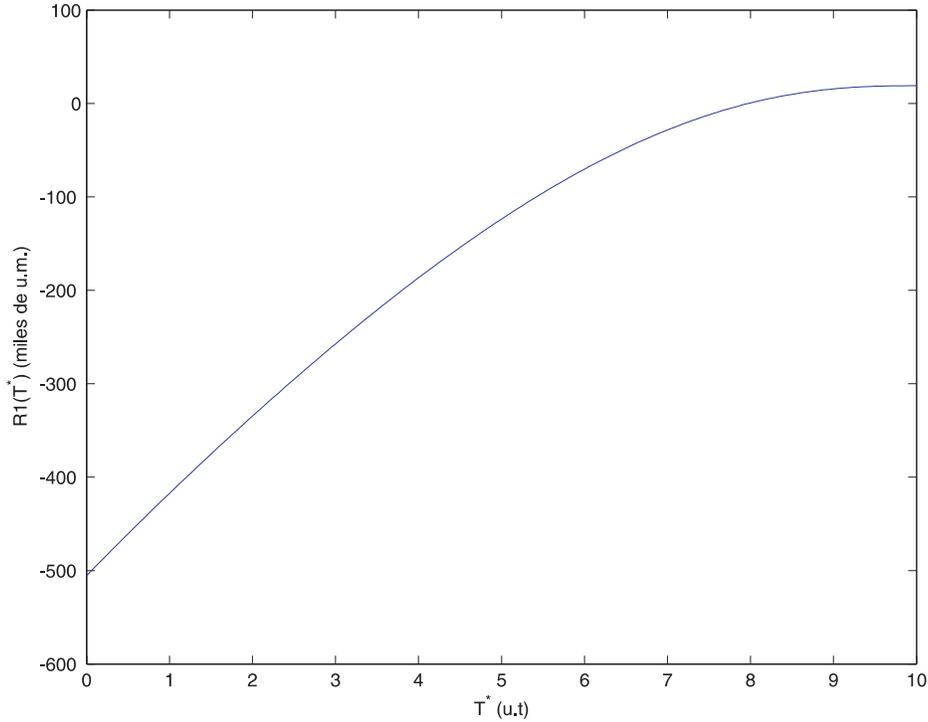


Fig. 7: Beneficio esperado del sistema del ejemplo 2 sobre el instante de no disponibilidad del canal de reparación considerando  $C_s = 4000000$  u.m.

Para comparar esta variabilidad según el valor del parámetro  $C_s$ , se representa el valor del  $T_{opt}^*$  y  $R_1(T_{opt}^*)$  en la Figura 8. Se observa que para valores pequeños de  $C_s$ , la política óptima se obtiene para  $T_{opt}^* = 0$ . Por el contrario, para valores elevados de  $C_s$ , la política óptima se alcanza para  $T_{opt}^* = T$ . En los valores intermedios de  $C_s$  se obtiene, tal y como se muestra en la Figura 8, un valor de  $T_{opt}^*$  comprendido entre 0 y  $T$ . El valor representado de  $R_1(T_{opt}^*)$  se encuentra delimitado por las rectas correspondientes a  $R_1(0)$  (ganancia esperada mediante la acción que supone no reparar nunca el sistema) y  $R_1(T)$  (ganancia esperada mediante la acción que supone no posponer nunca la reparación). Estas dos rectas, cuyo expresión viene dada por

$$R_1(0) = A_0 \sum_{i=1}^2 W_{i,0}(T) - C_s F_{1+2}(T),$$

$$R_1(T) = A_0 W_1(T) - A_r W_r(T),$$

marcan claramente los límites inferiores del valor de  $R_1(T_{opt}^*)$ .

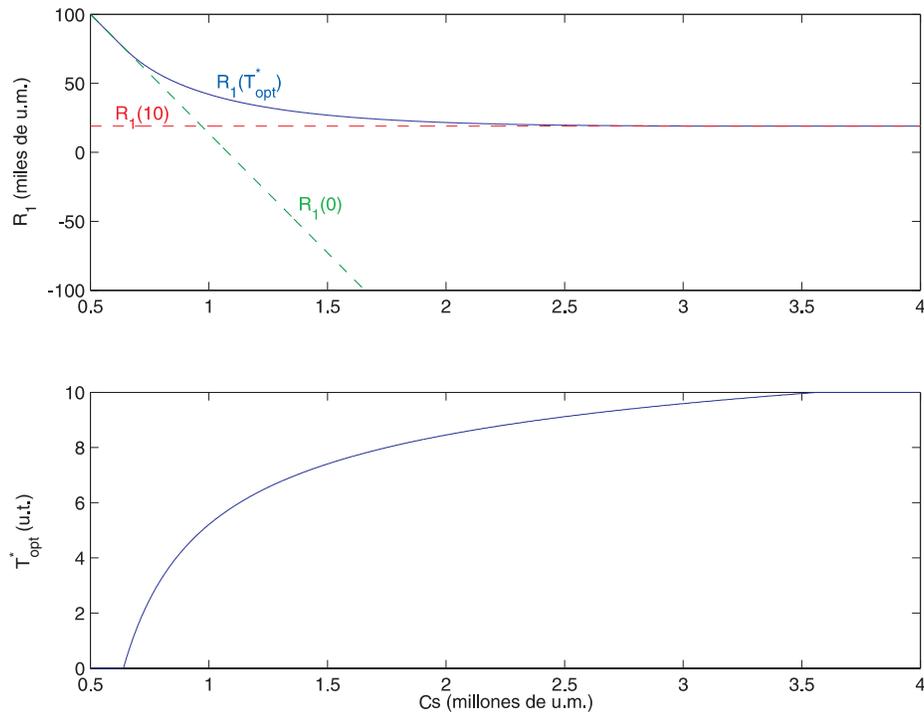


Fig. 8: Beneficio máximo esperado e instante óptimo de cierre del canal de reparación para el ejemplo 2 según el valor de  $C_s$ .



## Capítulo 4

# Modelo II de Reparación Pospuesta

En este capítulo presentamos y analizamos un segundo modelo de la política de reparación pospuesta, al que hemos denominado *modelo II de reparación pospuesta*. Como en el modelo I de reparación pospuesta, la idea principal es que el canal de reparación no está disponible durante todo el período laborable. Se diferencia del modelo anterior en el instante de cierre del canal de reparación. En este modelo II, el instante de cierre es justamente el momento en que se han completado un total de  $K$  ciclos operatividad-reparación. Es decir, el canal de reparación está disponible hasta que se hayan producido  $K$  fallos y completado las  $K$  reparaciones correspondientes.

A partir del momento en que el canal de reparación no está disponible, como en el modelo I, si ocurre algún fallo, su reparación se pospone hasta el final del período laborable cuando el sistema es sometido a una inspección técnica. Esta inspección mantiene el sistema en una condición de operatividad *tan buena como nueva* al inicio de cada período laborable.

Este modelo se ajusta a situaciones en las que el número de reparaciones que se pueden realizar durante un período laborable ha de ser limitado.

Por ejemplo, supongamos que una empresa subcontrata los servicios de otra empresa que se encarga del mantenimiento y la reparación de sus equipos. Debido a que la reparación de los dispositivos es perfecta, la subcontrata necesita disponer de un gran número de piezas en *stock* para realizar estas reparaciones por cada período laborable. El disponer de un número

ilimitado de piezas sería prácticamente imposible por lo que se supone que la subcontrata tiene un total de piezas en almacén necesarias para realizar  $K$  reparaciones por periodo laborable a la empresa.

La estructura de este capítulo es análoga a la presentada en el Capítulo 3. En una primera sección se describe el modelo. Posteriormente se obtienen los tiempos esperados que la cadena de Markov que describe el modelo permanece en cada uno de los estados. Finalmente se analiza el beneficio esperado para este sistema y se muestran ejemplos numéricos del mismo.

## 4.1. Descripción del modelo

Supongamos un sistema, que será considerado como una única unidad, y un canal de reparación. El sistema está en funcionamiento durante un periodo laborable representado mediante el intervalo  $[0, T]$  y durante el cual puede sufrir fallos reparables. Al final del periodo laborable, el sistema es sometido a una inspección técnica cuya labor es que el sistema esté en una condición *tan buena como nueva* al principio del siguiente periodo laboral. Es decir, las condiciones de operatividad de cada uno de los periodos laborales son idénticas.

Además, establecemos las siguientes hipótesis.

1. Sea  $X_1$  la v.a. que representa el tiempo de operatividad del sistema cuando ninguna reparación ha sido pospuesta. Suponemos que  $X_1$  sigue una distribución exponencial de parámetro  $\lambda_1$ . Sea  $X_r$  la v.a. que representa el tiempo de reparación de un fallo del sistema. Suponemos que  $X_r$  sigue una distribución exponencial de parámetro  $\mu$ .
2. Sea  $S_K$  la v.a. que representa el instante en que se han producido  $K$  ciclos operatividad-reparación. En  $[0, S_K]$ , si un fallo ocurre, su reparación comienza de forma instantánea y es perfecta. A partir del instante  $S_K$ , el canal de reparación deja de estar disponible y, si ocurre un fallo, se pospone su reparación y el sistema continúa operando.
3. Denotamos por  $X_i, i = 2, 3, \dots, N$ , la v.a. que representa el tiempo de operatividad del sistema después de la  $i - 1$ -ésima reparación pospuesta. Suponemos que  $X_i \sim \exp(\lambda_i)$ ,  $i = 2, \dots, N$ , y que se verifica

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N,$$

lo que implica

$$X_1 \geq_{st} X_2 \geq_{st} \dots \geq_{st} X_N.$$

Esto es, las tasas de fallos crecen a medida que el número de reparaciones pospuestas aumenta. Equivalentemente, los tiempos de operatividad decrecen estocásticamente a medida que el número de fallos no reparados aumenta.

4. Como consecuencia de la posposición de las reparaciones, el sistema sufre un deterioro de modo que, si  $N - 1$  reparaciones se posponen a lo largo de un período laborable, el  $N$ -ésimo fallo provoca que el sistema deje de operar durante el resto del período y tenga que ser reemplazado por uno nuevo e idéntico por la inspección técnica, lo cual supone un coste adicional.
5. Cuando el sistema está operativo, se obtiene un beneficio de  $A_0$  unidades monetarias (u.m.) por unidad de tiempo (u.t.), mientras que, cuando está siendo reparado, se produce un coste de  $A_r$  u.m. por u.t. Si el sistema acumula un total de  $N$  fallos no reparados, el coste de reemplazo o de sustitución del sistema es de  $C_s$  u.m.

## 4.2. Tiempos esperados

Denotamos por  $X(t)$  el estado del sistema en el instante  $t$ . Como en el capítulo anterior y como consecuencia de que los tiempos de operatividad y reparación son exponenciales, el proceso  $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$  es una cadena de Markov en tiempo continuo con espacio de estados  $S = \{1, 2, \dots, N, r, D\}$ , donde

- $X(t) = i, i = 1, 2, \dots, N$  si el sistema está operativo en el instante  $t$  e  $i - 1$  reparaciones han sido pospuestas hasta ese momento.
- $X(t) = r$  si el sistema está siendo reparado en el instante  $t$ .
- $X(t) = D$  si el sistema no se encuentra operativo ni en reparación en el instante  $t$ .

El modelo II de reparación pospuesta establece que el canal de reparación no está disponible después del instante  $S_K$ . Sean  $X_{1i}$  y  $X_{ri}$  las vv. aa. que representan el tiempo de permanencia

en el estado 1 y en el estado  $r$ , respectivamente, cuando  $i - 1$  reparaciones han sido completadas para  $i = 1, \dots, N$ .  $S_K$  puede expresarse como

$$S_K = \sum_{i=1}^K X_{1i} + \sum_{i=1}^K X_{ri}, \quad K = 1, 2, \dots \quad S_0 \equiv 0. \quad (4.1)$$

**Observación** En el modelo I de reparación pospuesta, el instante a partir del cual el canal de reparación no está disponible,  $T^*$ , es determinista. Sin embargo, para el modelo II, el momento en que el canal de reparación no está disponible es aleatorio con una distribución de probabilidad que vendrá determinada por las distribuciones de probabilidad de las variables  $X_{1i}$  y  $X_{ri}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

La función de distribución de la v.a.  $S_K$ ,  $F_{S_K}$ , puede obtenerse de manera recursiva, mediante

$$\begin{aligned} F_{S_0}(t) &= 1, \quad t \geq 0, \\ F_{S_K}(t) &= \int_0^t F_{S_{K-1}}(t-u) f_{S_1}(u) du, \quad t \geq 0, \quad K = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

donde  $f_{S_1}$  es la función de densidad de la v.a.

$$S_1 = X_{11} + X_{r1}.$$

Puesto que  $X_{11} \sim \exp(\lambda_1)$  y  $X_{r1} \sim \exp(\mu)$ , se verifica que

$$f_{S_1}(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_r f_r(t),$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{\mu - \lambda_1}, \quad \alpha_r = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \mu},$$

y  $f_1, f_r$  son las funciones de densidad de las vv. aa.  $X_{11}$  y  $X_{r1}$  respectivamente.  $\square$

**Proposición 4.2.1** La función de distribución de la v.a.  $S_K$  puede expresarse como,

$$F_{S_K}(t) = \sum_{i=0}^K \binom{K}{i} \alpha_1^i \alpha_r^{K-i} F_{i \cdot 1 + (K-i) \cdot r}(t), \quad K = 1, 2, \dots, \quad t \geq 0. \quad (4.2)$$

donde  $F_{i \cdot 1 + (K-i) \cdot r}$  es la función de distribución de la v.a.

$$\underbrace{X_1 + X_1 + \dots + X_1}_i + \underbrace{X_r + X_r + \dots + X_r}_{K-i}.$$

**Demostración**

La proposición anterior puede obtenerse utilizando el método inductivo sobre  $K$ . Para  $K = 1$ ,

$$F_{S_1}(t) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_r F_r(t)$$

Para  $K = 2$ ,

$$\begin{aligned} F_{S_2}(t) &= \int_0^t F_{S_1}(t-u) f_1(u) du \\ &= \int_0^t (\alpha_1 F_1(t-u) + \alpha_r F_r(t-u)) (\alpha_1 f_1(u) + \alpha_r f_r(u)) du \\ &= \alpha_1^2 F_{1+1}(t) + 2\alpha_1 \alpha_r F_{1+r}(t) + \alpha_r^2 F_{r+r}(t). \end{aligned}$$

Para  $K = 1$  y  $K = 2$ , la ecuación (4.2) es cierta. Suponemos que (4.2) se verifica para  $K - 1$  y veamos que se cumple para  $K$ .

$$\begin{aligned} &F_{S_K}(t) \\ &= \int_0^t \sum_{i=0}^{K-1} \binom{K-1}{i} \alpha_1^i \alpha_r^{K-1-i} F_{i+1+(K-1-i)\cdot r}(t-u) (\alpha_1 f_1(u) + \alpha_r f_r(u)) du \\ &= \sum_{i=0}^{K-1} \binom{K-1}{i} \alpha_1^{i+1} \alpha_r^{K-1-i} F_{(i+1)\cdot 1+(K-1-i)\cdot r}(t) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{K-1} \binom{K-1}{i} \alpha_1^i \alpha_r^{K-i} F_{i+1+(K-i)\cdot r}(t) \\ &= \sum_{i=1}^K \binom{K-1}{i-1} \alpha_1^i \alpha_r^{K-i} F_{i+1+(K-i)\cdot r}(t) + \sum_{i=0}^{K-1} \binom{K-1}{i} \alpha_1^i \alpha_r^{K-i} F_{i+1+(K-i)\cdot r}(t) \\ &= \binom{K-1}{0} \alpha_1^0 \alpha_r^K F_{K\cdot r}(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{K-1} \left[ \binom{K-1}{i-1} + \binom{K-1}{i} \right] \alpha_1^i \alpha_r^{K-i} F_{i+1+(K-i)\cdot r}(t) \\ &\quad + \binom{K-1}{K-1} \alpha_1^K \alpha_r^0 F_{K\cdot 1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^K \binom{K}{i} \alpha_1^i \alpha_r^{K-i} F_{i+1+(K-i)\cdot r}(t). \end{aligned}$$

■

Antes de deducir los tiempos de permanencia en cada uno de los estados de la cadena de Markov, introducimos la definición de v.a. truncada y la notación empleada en este apartado.

**Definición 4.2.1** Dada una variable aleatoria positiva continua  $X$  con función de distribución  $F$ , se define la v.a.  $X$  truncada en  $T$ , con  $T \geq 0$ , y se denota  $X_T$ , como la v.a. dada por:

$$X_T = \begin{cases} X, & \text{si } X < T \\ T, & \text{si } X \geq T \end{cases}$$

La esperanza de  $X_T$ , a la cual denotamos mediante  $E[X]_T$ , viene dada por

$$E[X]_T = \int_0^T \bar{F}(u) du = \int_0^T u dF(u) + T\bar{F}(T).$$

De este modo, se verifica que

$$E[X] = \int_0^\infty \bar{F}(u) du = E[X]_T + \int_T^\infty \bar{F}(u) du,$$

para cualquier  $T \geq 0$ .

**Observación** En el caso de que  $X \sim \exp(\lambda)$ ,

$$E[X]_T = \int_0^T \bar{F}(u) du = \int_0^T \frac{f(u)}{\lambda} du = \frac{1}{\lambda} F(T).$$

□

La notación que emplearemos a continuación será la siguiente.

- $F_i$  y  $f_i$  son las funciones de distribución y de densidad, respectivamente, de la v.a.  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ .
- $F_r$  y  $f_r$  son las funciones de distribución y de densidad, respectivamente, de la v.a.  $X_r$ .
- $F_{1+\dots+i}$  y  $f_{1+\dots+i}$  son la función de distribución y de densidad, respectivamente, de la v.a.  $X_1 + \dots + X_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ .
- $F_{S_K+1+\dots+i}$  y  $f_{S_K+1+\dots+i}$  son la función de distribución y de densidad, respectivamente, de  $S_K + X_1 + \dots + X_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

Sea  $W_1(K)$  el tiempo esperado de operatividad cuando el canal de reparación está disponible, i.e., antes del instante  $S_K$ .

$$\begin{aligned} W_1(K) &= E \left[ \sum_{i=1}^K X_{1i} I_{\{S_{i-1} + X_{1i} \leq T\}} + \sum_{i=1}^K (T - S_{i-1}) I_{\{S_{i-1} < T < S_{i-1} + X_{1i}\}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^K \int_{u=0}^T E[X_1]_{T-u} dF_{S_{i-1}}(u). \end{aligned} \quad (4.3)$$

La expresión (4.3) se deduce aplicando propiedades de la esperanza condicionada como veremos a continuación.

En primer lugar, para  $i = 1, \dots, K$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 & E [X_{1i} I_{\{S_{i-1} + X_{1i} \leq T\}}] = E [E [X_{1i} I_{\{S_{i-1} + X_{1i} \leq T\}} | S_{i-1}]] \\
 &= \int_{u=0}^T E [X_{1i} I_{\{S_{i-1} + X_{1i} \leq T\}} | S_{i-1} = u] dF_{S_{i-1}}(u) \\
 &= \int_{u=0}^T E [X_{1i} I_{u + X_{1i} \leq T}] dF_{S_{i-1}}(u) \\
 &= \int_{u=0}^T \int_{v=0}^{T-u} v dF_1(v) dF_{S_{i-1}}(u).
 \end{aligned}$$

Y, por otra parte,

$$\begin{aligned}
 & E [(T - S_{i-1}) I_{\{S_{i-1} < T < S_{i-1} + X_{1i}\}}] \\
 &= E [E [(T - S_{i-1}) I_{\{S_{i-1} < T < S_{i-1} + X_{1i}\}} | S_{i-1}]] \\
 &= \int_{u=0}^T E [(T - S_{i-1}) I_{\{S_{i-1} < T < S_{i-1} + X_{1i}\}} | S_{i-1} = u] dF_{S_{i-1}}(u) \\
 &= \int_{u=0}^T (T - u) \bar{F}_1(T - u) dF_{S_{i-1}}(u).
 \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
 W_1(K) &= \sum_{i=1}^K \int_{u=0}^T \left[ \int_{v=0}^{T-u} v dF_1(v) + (T - u) \bar{F}_1(T - u) \right] dF_{S_{i-1}}(u) \\
 &= \sum_{i=1}^K \int_{u=0}^T E[X_{1i}]_{T-u} dF_{S_{i-1}}(u).
 \end{aligned}$$

De manera análoga, sea  $W_r(K)$  el tiempo esperado que el sistema está en reparación si el canal de reparación deja de estar disponible en el instante  $S_K$ .

$$\begin{aligned}
 W_r(K) &= E \left[ \sum_{i=1}^K X_{ri} I_{\{S_i \leq T\}} + \sum_{i=1}^K (T - S_{i-1} - X_{1i}) I_{\{S_{i-1} + X_{1i} < T < S_i\}} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^K \int_{u=0}^T \int_{v=0}^{T-u} E[X_{ri}]_{T-u-v} dF_1(v) dF_{S_{i-1}}(u) \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

Basta tener en cuenta que

$$\begin{aligned}
E [X_{ri} I_{\{S_i \leq T\}}] &= E [E [X_{ri} I_{\{S_{i-1} + X_{1i} + X_{ri} \leq T\}} | S_{i-1}]] \\
&= \int_{u=0}^T E [X_{ri} I_{\{X_{1i} + X_{ri} \leq T-u\}}] dF_{S_{i-1}}(u) \\
&= \int_{u=0}^T \int_{v=0}^{T-u} E [X_{ri} I_{\{X_{ri} \leq T-u-v\}}] dF_1(v) dF_{S_{i-1}}(u) \\
&= \int_{u=0}^T \int_{v=0}^{T-u} \int_{w=0}^{T-u-v} w dF_r(w) dF_1(v) dF_{S_{i-1}}(u),
\end{aligned}$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned}
&E [(T - S_{i-1} - X_{1i}) I_{\{S_{i-1} + X_{1i} < T < S_i\}}] \\
&= E [[(T - S_{i-1} - X_{1i}) I_{\{S_{i-1} + X_{1i} < T < S_{i-1} + X_{1i} + X_{ri}\}} | S_{i-1}]] \\
&= \int_{u=0}^T \int_{v=0}^{T-u} E [(T - u - v) I_{\{u+v < T < u+v+X_{ri}\}}] dF_1(v) dF_{S_{i-1}}(u) \\
&= \int_{u=0}^T \int_{v=0}^{T-u} (T - u - v) \bar{F}_r(T - u - v) dF_1(v) dF_{S_{i-1}}(u).
\end{aligned}$$

Denotamos por  $W_2(K)$  el tiempo esperado que el sistema está operativo una vez que el canal de reparación no está disponible. En este caso,

$$\begin{aligned}
W_2(K) &= E [(X_1 + X_2 + \dots + X_N) I_{\{S_K + X_1 + \dots + X_N \leq T\}}] \\
&\quad + E [(T - S_K) I_{\{S_K \leq T < S_K + X_1 + X_2 + \dots + X_N\}}] \\
&= \int_{u=0}^T \left[ \int_{v=0}^{T-u} v dF_{1+\dots+N}(v) + (T - u) \bar{F}_{1+\dots+N}(T - u) \right] dF_{S_K}(u) \\
&= \int_{u=0}^T E[X_1 + X_2 + \dots + X_N]_{T-u} dF_{S_K}(u). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

### 4.3. Beneficio esperado del sistema

De acuerdo a las hipótesis del modelo, el sistema genera costes o produce ganancias dependiendo de los estados que visita y del tiempo medio que permanece en los mismos. Como en el modelo I de reparación pospuesta, debemos analizar los costes y ganancias para evaluar diferentes políticas de mantenimiento.

Fijado  $K \in \{0, 1, \dots\}$ , denotamos por  $R_2(K)$  el beneficio esperado del sistema por período laborable si el canal de reparación está disponible hasta el instante  $S_K$ . Teniendo en cuenta

(3.9), tenemos que

$$R_2(K) = A_0W_1(K) + A_0W_2(K) - A_rW_r(K) - C_sP_d, \quad (4.6)$$

donde  $P_d$  es la probabilidad de que se pospongan  $N$  reparaciones y el sistema tenga que ser finalmente sustituido.

Utilizando las expresiones (4.3)-(4.5) halladas en la sección anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} R_2(K) = & A_0 \sum_{i=1}^K \left[ \int_{u=0}^T E[X_1]_{T-u} dF_{S_{i-1}}(u) \right] \\ & - A_r \sum_{i=1}^K \left[ \int_{u=0}^T \int_{v=0}^{T-u} E[X_r]_{T-u-v} dF_1(v) dF_{S_{i-1}}(u) \right] \\ & + A_0 \int_{u=0}^T E[X_1 + X_2 + \dots + X_N]_{T-u} dF_{S_K}(u) \\ & - C_s F_{S_{K+1+2+\dots+N}}(T). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Hasta este punto, no hemos utilizado la hipótesis de que las variables que intervienen en el proceso son exponenciales. Es decir, la expresión (4.7) es válida para un sistema que verifique las hipótesis del modelo sea cual sea la distribución de probabilidad de las vv. aa.  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  y  $X_r$ .

Utilizando la exponencialidad de dichas variables, podemos simplificar la expresión de  $R_2(K)$ . Para ello, introducimos el siguiente resultado.

**Proposición 4.3.1** *Supongamos que  $X_i \sim \exp(\lambda_i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ . Entonces,*

$$E[X_1 + \dots + X_N]_T = \sum_{i=1}^N F_{1+\dots+i}(T) E[X_i], \quad N = 1, 2, \dots \quad \forall T > 0. \quad (4.8)$$

### Demostración

Podemos demostrar este resultado por inducción sobre  $N$ .

- Para  $N = 1$ , vimos como consecuencia de la definición de v.a. truncada en  $T$  que, si  $X \sim \exp(\lambda)$ ,

$$E[X]_T = F(T)E[X].$$

- Supongamos que el resultado es cierto para  $N - 1$ . Basta notar que, debido a la propiedad (1.9) de la distribución exponencial,

$$F_{1+\dots+N}(t) = F_{1+\dots+(N-1)}(t) - \frac{1}{\lambda_N} f_{1+\dots+N}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Por tanto,

$$\bar{F}_{1+\dots+N}(t) = \bar{F}_{1+\dots+(N-1)}(t) + \frac{1}{\lambda_N} f_{1+\dots+N}(t). \quad \forall t \geq 0.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} E[X_1 + \dots + X_N]_T &= \int_0^T \bar{F}_{1+\dots+N}(u) du \\ &= \int_0^T \bar{F}_{1+\dots+(N-1)}(u) du + \frac{1}{\lambda_N} \int_0^T f_{1+\dots+N}(u) du \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{F_{1+\dots+i}(T)}{\lambda_i} + \frac{F_{1+\dots+N}(T)}{\lambda_N} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{F_{1+\dots+i}(T)}{\lambda_i}. \end{aligned}$$

■

Aplicando (4.8), tenemos que

$$\begin{aligned} R_2(K) &= \frac{A_0}{\lambda_1} \sum_{i=1}^K \int_{u=0}^T F_1(T-u) dF_{S_{i-1}}(u) \\ &\quad - \frac{A_r}{\mu} \sum_{i=1}^K \int_{u=0}^T \int_{v=0}^{T-u} F_r(T-u-v) dF_1(v) dF_{S_{i-1}}(u) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{A_0}{\lambda_i} \int_{u=0}^T F_{1+\dots+i}(T-u) dF_{S_k}(u) - C_s F_{S_{K+1+\dots+N}}(T), \end{aligned}$$

y, considerando la expresión de la función de distribución de la suma de variables aleatorias se tiene que

$$\begin{aligned} R_2(K) &= \frac{A_0}{\lambda_1} \sum_{i=1}^K F_{S_{i-1}+1}(T) - \frac{A_r}{\mu} \sum_{i=1}^K F_{S_i}(T) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{A_0}{\lambda_i} F_{S_{K+1+\dots+i}}(T) - C_s F_{S_{K+1+\dots+N}}(T) \end{aligned}$$

Como en el capítulo anterior, intentamos analizar la política de mantenimiento óptima, es decir, aquella política que maximice el beneficio esperado por periodo laborable. Denotaremos por  $K_{opt}$  al valor de  $K$  que maximice  $R_2(K)$ . En este caso,  $R_2(K)$  es una función que toma valores en  $\{0, 1, \dots\}$ , así que el procedimiento a seguir será calcular los incrementos

$$\Delta R_2(K) = R_2(K+1) - R_2(K), \quad K = 0, 1, \dots$$

$$\begin{aligned} \Delta R_2(K) &= \frac{A_0}{\lambda_1} F_{S_{K+1}}(T) - \frac{A_r}{\mu} F_{S_{K+1}}(T) \\ &+ A_0 \sum_{i=1}^N \frac{F_{S_{K+1}+1+\dots+i}(T) - F_{S_{K+1}+\dots+i}(T)}{\lambda_i} \\ &+ C_s [F_{S_{K+1}+\dots+N}(T) - F_{S_{K+1}+1+\dots+N}(T)]. \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} \Delta R_2(K) &= \frac{A_0}{\lambda_1} F_{S_{K+1}}(T) - \frac{A_r}{\mu} F_{S_{K+1}}(T) \\ &+ A_0 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{F_{S_{K+1}+1+\dots+i}(T) - F_{S_{K+1}+\dots+i}(T)}{\lambda_i} \\ &+ \left( C_s - \frac{A_0}{\lambda_N} \right) [F_{S_{K+1}+\dots+N}(T) - F_{S_{K+1}+1+\dots+N}(T)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

#### 4.3.1. Política de reparación pospuesta para $N = 2$

Estudiamos la política de reparación pospuesta óptima en el caso particular  $N = 2$ , i.e., cuando sólo se permite la posposición de una reparación pues el segundo fallo es catastrófico para el sistema. La expresión (4.9) de la función incremental  $\Delta R_2(K)$  en este caso viene dada por

$$\begin{aligned} \Delta R_2(K) &= \frac{A_0}{\lambda_1} F_{S_{K+1}+1}(T) - \frac{A_r}{\mu} F_{S_{K+1}}(T) \\ &+ (C_s - A_0/\lambda_2) [F_{S_{K+1}+2}(T) - F_{S_{K+1}+1+2}(T)]. \end{aligned}$$

Analizando su comportamiento, obtenemos los siguientes resultados.

**Proposición 4.3.2** Si  $C_s < A_0/\lambda_2$  y

$$\frac{1}{F_1(T)} \geq \frac{A_0/\lambda_1}{A_r/\mu}, \quad (4.10)$$

entonces  $K_{opt} = 0$ .

**Demostración**

Las diferencias

$$F_{S_{K+1+2}}(T) - F_{S_{K+1+1+2}}(T)$$

son siempre positivas. Luego, si se verifica

$$\frac{F_{S_{K+1}}(T)}{F_{S_{K+1+1}}(T)} \geq \frac{A_o/\lambda_1}{A_r/\mu}, \quad \forall K = 0, 1, \dots, \quad (4.11)$$

entonces

$$\Delta R_2(K) < 0, \quad \forall K = 0, 1, \dots$$

Aplicando la desigualdad

$$F_{S_{K+1+1}}(T) \leq F_{S_{K+1}}(T)F_1(T),$$

la condición (4.10) es suficiente para que se verifique (4.11). ■

A partir de este resultado, podemos deducir el siguiente corolario:

**Corolario 4.3.3** Si  $C_s < A_o/\lambda_2$  y

$$\frac{A_o}{\lambda_1} \leq \frac{A_r}{\mu},$$

entonces  $K_{opt} = 0$ .

**Observación** Las conclusiones obtenidas con la Proposición 4.3.2 y el Corolario 4.3.3 son análogas a las que se obtuvieron con los Corolarios 3.3.4 y 3.3.5 cuando analizamos el modelo de reparación pospuesta tipo I. Esto es, si se verifican ciertas hipótesis, tanto el modelo I como el modelo II de reparación pospuesta proponen como política de mantenimiento óptima no tener el canal de reparación disponible en ningún momento del periodo laboral y posponer siempre la reparación de los fallos al momento de la inspección técnica del equipo.

La interpretación física de las hipótesis anteriores es sencilla.

- $C_s < A_o/\lambda_2$ : el coste de sustituir o reemplazar el equipo es menor que el beneficio medio cuando el equipo está operando una vez que se ha pospuesto la reparación del primer fallo.

- $A_0/\lambda_1 \leq A_r/\mu$ : el beneficio medio de operatividad del equipo es menor que el coste medio de repararlo, i.e., el coste medio de un ciclo operatividad-reparación es negativo.

El caso opuesto al Corolario 4.3.3 viene dado en el siguiente resultado.

**Proposición 4.3.4** Si  $C_s > A_0/\lambda_2$ ,  $\mu \leq \lambda_2$  y

$$\frac{A_r}{\mu} < C_s - \frac{A_0}{\lambda_2} < \frac{A_0}{\lambda_1},$$

entonces  $K_{opt} = \infty$  y por lo tanto la política de reparación pospuesta no merece la pena.

### Demostración

Por ser  $\mu \leq \lambda_2$ , tenemos que

$$F_{S_{K+1+2}}(T) - F_{S_{K+1+r}}(T) = \int_0^T [F_2(T-u) - F_r(T-u)]f_{S_{K+1}}(u)du \geq 0.$$

Además,  $F_{S_{K+1+1}}(T) > F_{S_{K+1+1+2}}(T)$  y, por lo tanto, si

$$C_s - \frac{A_0}{\lambda_2} > \frac{A_r}{\mu},$$

entonces  $\Delta R_2(K) \geq 0$ ,  $\forall K = 0, 1, \dots$  ■

Si comparamos estos resultados con los obtenidos en el capítulo anterior utilizando el modelo I, observamos que son exactamente los mismos. De hecho, el siguiente resultado relaciona la función derivada de  $R_1(T^*)$  y la función incremental de  $R_2(K)$ .

**Proposición 4.3.5** Si  $R_1(T^*)$  es creciente (decreciente) en  $T^* \in [0, T]$ , entonces  $\Delta R_2(K) \geq (\leq) 0$ ,  $\forall K = 0, 1, \dots$

### Demostración

Por una parte,

$$\begin{aligned} & F_{S_{K+1+2}}(T) - F_{S_{K+1+1+2}}(T) \\ &= \int_0^T F_2(T-u)f_{S_{K+1}}(u)du - \int_0^T F_{1+r+2}(T-u)f_{S_{K+1}}(u)du \\ &= \int_0^T [F_2(T-u) - F_{1+r+2}(T-u)]f_{S_{K+1}}(u)du \\ &= \int_0^T g_{12}(u)f_{S_{K+1}}(u)du, \end{aligned}$$

donde la expresión de  $g_{12}(u)$  viene dada por (3.19).

Por otra parte,

$$\begin{aligned} & \frac{A_0}{\lambda_1} F_{S_{K+1}+1}(T) - \frac{A_r}{\mu} F_{S_{K+1}}(T) \\ &= \int_0^T \left[ \frac{A_0}{\lambda_1} F_{1+r}(T-u) - \frac{A_r}{\mu} F_r(T-u) \right] f_{S_{K+1}}(u) du \\ &= \int_0^T g_{22}(u) f_{S_{K+1}}(u) du, \end{aligned}$$

donde  $g_{22}(u)$  está definida mediante (3.21).

Por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta R_2(K) &= \int_0^T \left[ \left( C_s - \frac{A_0}{\lambda_2} \right) g_{12}(u) + g_{22}(u) \right] f_{S_{K+1}}(u) du \\ &= \int_0^T \frac{R'_1(u)}{P_1(u)\lambda_1} f_{S_{K+1}}(u) du. \end{aligned}$$

■

### 4.3.2. Política de reparación pospuesta para $N > 2$

Este caso es más difícil de analizar aunque podemos obtener algunos resultados. Recordemos la expresión de  $\Delta R_2(K)$  para  $N$  genérico.

$$\begin{aligned} \Delta R_2(K) &= \frac{A_0}{\lambda_1} F_{S_{K+1}}(T) - \frac{A_r}{\mu} F_{S_{K+1}}(T) \\ &+ A_0 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{F_{S_{K+1}+1+\dots+i}(T) - F_{S_{K+1}+\dots+i}(T)}{\lambda_i} \\ &+ \left( C_s - \frac{A_0}{\lambda_N} \right) [F_{S_{K+1}+\dots+N}(T) - F_{S_{K+1}+1+\dots+N}(T)]. \end{aligned}$$

La siguiente proposición es el resultado análogo en el caso discreto al Corolario 4.3.3 para el caso  $N > 2$ .

**Proposición 4.3.6** *Supongamos que  $C_s < A_0/\lambda_N$  y*

$$\frac{A_0}{\lambda_1} \leq \frac{A_r}{\mu}.$$

*Entonces,  $K_{opt} = 0$ .*

**Demostración**

Basta tener en cuenta que

$$F_{S_{K+1}+1+\dots+i}(T) \leq F_{S_{K+1}+\dots+i}(T), \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

y que la condición

$$\frac{F_{S_{K+1}}(T)}{F_{S_{K+1}}(T)} \geq \frac{A_0/\lambda_1}{A_r/\mu}, \quad K = 0, 1, \dots \quad (4.12)$$

se cumple si  $A_0/\lambda_1 \leq A_r/\mu$ . ■

Como en el caso  $N = 2$ , también existe una cierta relación entre la función derivada  $R'_1(T^*)$  del modelo I de reparación pospuesta y la función incremental  $\Delta R_2(K)$  del modelo II que viene reflejada en el siguiente resultado.

**Proposición 4.3.7** *Si  $R'_1(T^*) \leq (\geq)0$ , entonces  $\Delta R_2(K) \leq (\geq)0$ ,  $\forall K$ .*

**Demostración**

Consideramos la expresión de  $\Delta R_2(K)$ .

$$\begin{aligned} \Delta R_2(K) &= \frac{A_0}{\lambda_1} F_{S_{K+1}}(T) - \frac{A_r}{\mu} F_{S_{K+1}}(T) \\ &+ A_0 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{F_{S_{K+1}+1+\dots+i}(T) - F_{S_{K+1}+\dots+i}(T)}{\lambda_i} \\ &+ \left( C_s - \frac{A_0}{\lambda_N} \right) [F_{S_{K+1}+\dots+N}(T) - F_{S_{K+1}+1+\dots+N}(T)]. \end{aligned}$$

Por un lado, se tiene que

$$F_{S_{K+1}+\dots+N}(T) - F_{S_{K+1}+1+\dots+N}(T) = \int_0^T f_{S_{K+1}}(u) g_{1N}(u) du.$$

Además,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{F_{S_{K+1}+1+\dots+i}(T) - F_{S_{K+1}+\dots+i}(T)}{\lambda_i} &= \\ \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^T f_{S_{K+1}}(u) \frac{F_{r+1+\dots+i}(T-u) - F_{2+\dots+i}(T-u)}{\lambda_i} du & \quad (4.13) \end{aligned}$$

Además, para  $1 \leq i \leq N - 1$ ,

$$F_{1+\dots+i}(t) = F_{2+\dots+i}(t) - \frac{1}{\lambda_1} f_{1+2+\dots+i}(t), \quad t \geq 0.$$

De donde

$$F_{2+\dots+i}(t) = F_{1+\dots+i}(t) + \frac{1}{\lambda_1} f_{1+2+\dots+i}(t), \quad t \geq 0.$$

Y por lo tanto, para  $1 \leq i \leq N-1$ ,

$$F_{r+1+\dots+i}(t) - F_{2+\dots+i}(t) = F_{r+1+\dots+i}(t) - F_{1+\dots+i}(t) - \frac{1}{\lambda_1} f_{1+2+\dots+i}(t), \quad t \geq 0.$$

Por otra parte, utilizando el Lema 3.3.1

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{F_{r+1+\dots+i}(t) - F_{1+\dots+i}(t)}{\lambda_i} = -\frac{1}{\mu} [F_r(t) - F_{r+1+\dots+(N-1)}(t)], \quad t \geq 0.$$

Y,

$$\sum_{i=1}^{N-1} -\frac{1}{\lambda_1} \frac{f_{1+2+\dots+i}(t)}{\lambda_i} = -\frac{1}{\lambda_1} \bar{F}_1(t) - \frac{1}{\lambda_1} [F_1(t) - F_{1+\dots+(N-1)}(t)], \quad t \geq 0.$$

De manera que (4.13) es igual a

$$\int_0^T f_{S_{K+1}}(u) \left[ \frac{F_{r+\dots+(N-1)}(T-u) - F_r(T-u)}{\mu} + \frac{F_{1+\dots+(N-1)}(T-u) - 1}{\lambda_1} \right]$$

Por otra parte,

$$\frac{A_0}{\lambda_1} F_{S_{K+1}}(T) - \frac{A_r}{\mu} F_{S_{K+1}}(T) = \int_0^T f_{S_{K+1}}(u) \left( \frac{A_0}{\lambda_1} - \frac{A_r}{\mu} F_r(T-u) \right) du.$$

Uniendo todas las condiciones, se tiene que

$$\Delta R_2(K) = \int_0^T f_{S_{K+1}}(u) ((C_s - A_0/\lambda_2)g_{1N}(u) + g_{2N}(u)) du,$$

donde las funciones  $g_{1N}$  y  $g_{2N}$  vienen dadas por las expresiones (3.14) y (3.16), respectivamente.

■

#### 4.4. Ejemplos numéricos

La siguiente sección muestra un sistema con las características dadas en la siguiente tabla<sup>1</sup>

$T$	Periodo laborable	10 u.t.
$1/\lambda_1$	Tiempo medio operativo	20 u.t.
$1/\lambda_2$	Tiempo medio operativo tras una posposición	8.5 u.t.
$1/\mu$	Tiempo medio de reparación	1 u.t.
$A_0$	Beneficio por unidad de tiempo	20000 u.m./u.t.
$A_r$	Coste de reparación por unidad de tiempo	400000 u.m./u.t.

donde se variará el parámetro  $C_s$  (coste de sustitución del sistema) para apreciar o no la validez de la reparación pospuesta.

Para  $C_s = 500000$  u.m., la ganancia esperada es una función decreciente en  $K$  y por lo tanto  $K_{opt} = 0$  y  $R_2(0) = 100269$  u.m. Este hecho concuerda con la Proposición 4.3.5 que ligaba la función derivada del beneficio esperado bajo el modelo I de reparación pospuesta y el beneficio esperado bajo el modelo II de reparación pospuesta. El comportamiento del beneficio esperado viene reflejado en la Figura 9. Como explicamos en el Capítulo 3, la razón por la que la ganancia óptima se alcanza para  $K = 0$  se debe al bajo coste de sustitución del sistema y a la baja probabilidad de sustitución del mismo

$$P(X_1 + X_2 \leq T) = 0.1731.$$

---

<sup>1</sup>Ejemplo que coincide con el ejemplo 2 del Capítulo 3.

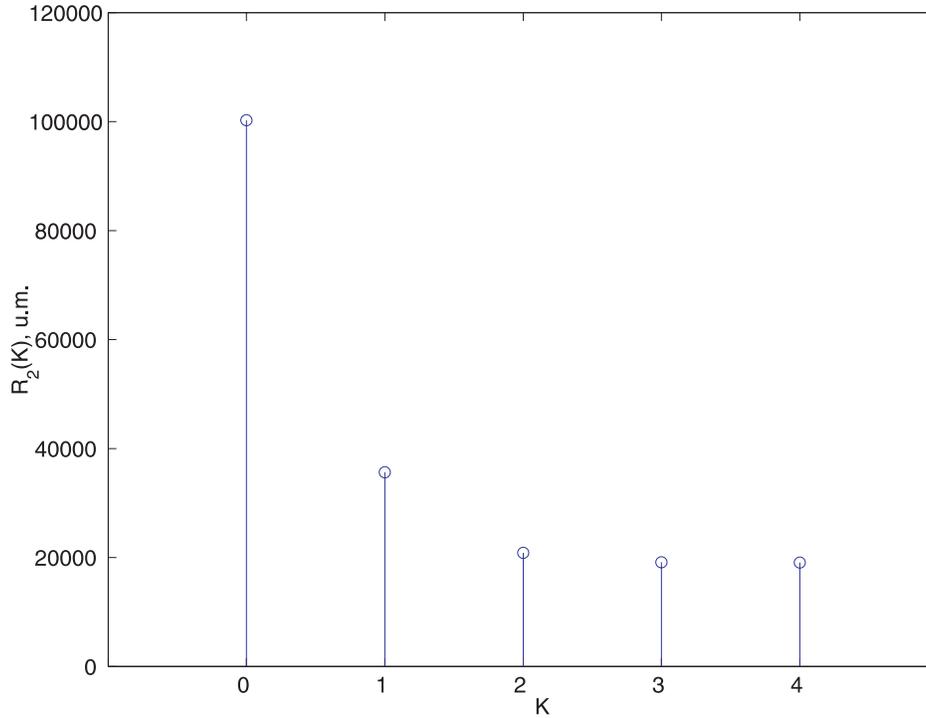


Fig. 9: Beneficio esperado del sistema sobre el número de ciclos de reparación completados por el mismo.  $C_s = 500000$  u.m.

Para  $C_s = 1000000$  u.m., la ganancia esperada es una función que presenta un máximo en el punto  $K = 1$  con una ganancia esperada de 24313.3 u.m. El comportamiento del beneficio esperado viene reflejado en la Figura 10. El mínimo para dicha función se alcanzaría en  $K = 0$ , caso que es equivalente a no utilizar el canal de reparación y posponer todos los fallos hasta la actuación de los equipos de mantenimiento al siguiente periodo laborable. La razón de que esta actuación sea tan poco *rentable* (en términos de ganancia) estriba en el alto coste de sustitución de la pieza (1000000 unidades monetarias). Para  $K = 0$ , la probabilidad de sustitución de la pieza es igual a

$$P(X_1 + X_2 \leq T) = 0.1731,$$

es decir, en un 17.31% de los casos el sistema debe de ser reemplazado con un coste adicional de 1000000 de unidades monetarias cantidad que difiere notablemente del máximo de ganancia que puede esperarse por día laborable que es igual a  $A_0 \cdot T = 200000$  unidades monetarias.

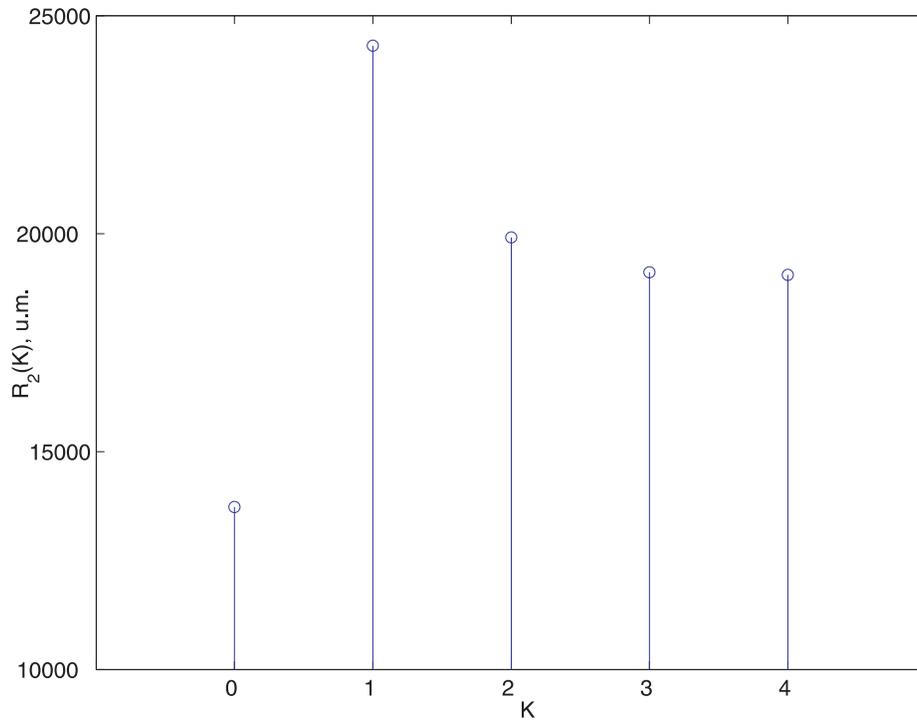


Fig. 10: Beneficio esperado del sistema sobre el número de ciclos de reparación completados por el mismo.  $C_s = 1000000$  u.m.

Para  $C_s = 4000000$  u.m., la ganancia esperada es una función creciente en  $K$  y por lo tanto  $K_{opt}^* = \infty$  y  $R_2(\infty) = 19047.1$  u.m. Este hecho concuerda con el resultado obtenido en la Proposición 4.3.5. El comportamiento del beneficio esperado viene reflejado en la Figura 11. En este caso no compensa un modelo de reparación pospuesta debido al alto coste de sustitución del sistema en contraposición con el beneficio máximo que se obtendría por periodo laborable ( $A_0 \cdot T = 200000$  unidades monetarias).

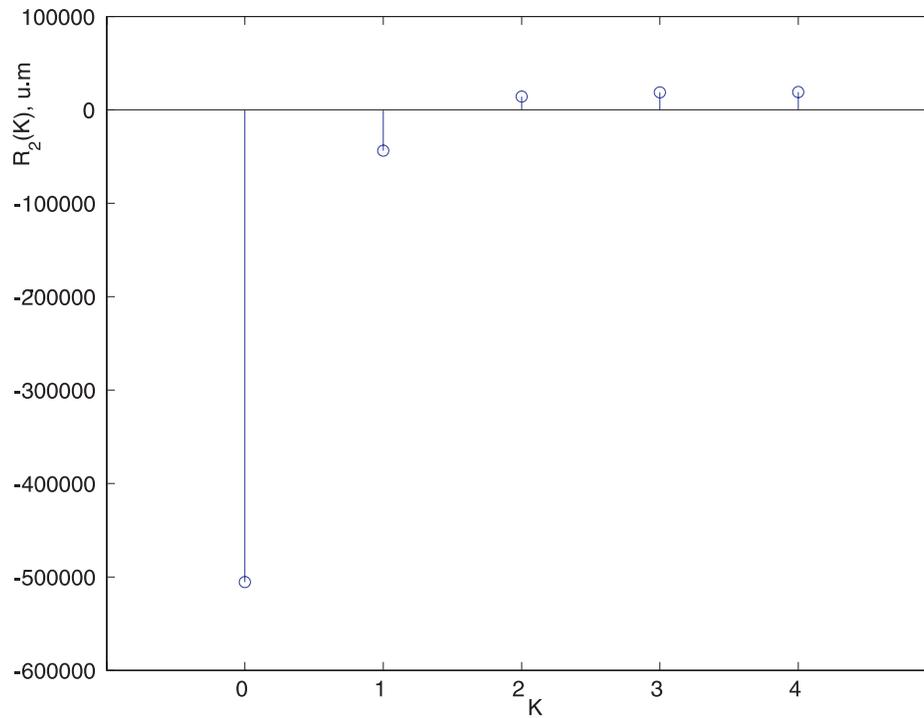


Fig. 11: Beneficio esperado del sistema sobre el número de ciclos de reparación completados por el mismo.  $C_s = 4000000$  u.m.

Como resumen de estos casos los resultados numéricos obtenidos para este ejemplo particular son los siguientes.

$R_2(K)$ medido en unidades monetarias			
$K$	$C_s = 500000$ u.m.	$C_s = 1000000$ u.m.	$C_s = 4000000$ u.m.
0	100269	13726.2	-505532
1	35653	24313.3	-43724.8
2	20838.6	19912.8	14357.8
3	19166.5	19115.5	18810
4	19053.6	19053.3	19051.5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	19047.1	19047.1	19047.1

Para la realización de estos ejemplos sólo ha sido posible obtener los valores de beneficio esperado hasta  $K = 4$  dado que se necesitan efectuar un número proporcional a  $K$  de integrales recursivas. El software *Mathematica*, a partir de  $K = 5$ , devuelve resultados imprecisos.

Notar también que,

	$R_1(T_{opt}^*)$	$R_2(K_{opt})$
$C_s=500000$	100269	100269
$C_s=1000000$	42060	24313.3
$C_s=4000000$	19047.1	19047.1

o lo que es lo mismo, el beneficio óptimo conseguido con el modelo II es inferior al beneficio óptimo obtenido con el modelo I. Señalar que este hecho no es específico de este ejemplo en particular sino que se ha obtenido en todos los ejemplos numéricos realizados.



# Conclusiones finales y algunas cuestiones para futura investigación

En estas conclusiones finales resumimos las principales aportaciones realizadas en esta tesis doctoral.

## Conclusiones finales

- Con respecto al proceso potencial.

**1<sup>a</sup>)** Hemos introducido el proceso potencial y hemos descrito las propiedades básicas asociadas al mismo.

**2<sup>a</sup>)** Posteriormente, hemos estudiado las propiedades de convergencia del proceso potencial, propiedades relativas al orden estocástico y a las clases de envejecimiento. Para ello nos hemos servido, fundamentalmente, de la función razón de fallos y la función vida media residual. Para una gran parte de clases de envejecimiento hemos probado que, si una v.a. del proceso pertenece a esa clase de envejecimiento, todas las variables que forman el proceso también pertenecen a dicha clase.

**3<sup>a</sup>)** Finalmente, hemos utilizado sendos procesos potenciales para modelar los tiempos de operatividad y de reparación de ejemplos de sistemas reparables introduciendo aplicaciones numéricas de dichos ejemplos.

Como comentamos en el capítulo dedicado a los procesos potenciales, estos procesos solventan inconvenientes que presentan los procesos geométricos. Sin embargo, los procesos potenciales presentan un tratamiento analítico más complicado que los procesos geométricos. Por ejemplo, si  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\gamma_n\}$  y  $X_0$  es una v.a. continua con función de distribución  $F$ , entonces

$$E(X_n) = \int_0^{\infty} (\bar{F}(x))^{\gamma_n} dx,$$

mientras que si  $\{Y_n, n \geq 0\}$  es un proceso geométrico de razón  $a$ , entonces

$$E(Y_n) = \frac{E(Y_0)}{a^n}.$$

La complejidad en el tratamiento analítico de los procesos potenciales se debe a la generalidad de la sucesión  $\{\gamma_n\}$ . Sin embargo, debido a la no restricción de la sucesión  $\{\gamma_n\}$ , este proceso es muy versátil y permite cubrir un gran número de problemas reales.

- Con respecto al modelo de reparación pospuesta.

**1<sup>a</sup>)** Hemos introducido el concepto de reparación pospuesta. Este modelo se ajusta a situaciones reales en las que otros modelos de reparación no son adecuados, como aquellos para los cuales la disponibilidad inmediata del equipo de reparación puede resultar demasiado cara o incluso imposible físicamente de realizar.

**2<sup>a</sup>)** Hemos planteado dos modelos diferentes de reparación pospuesta. Para el modelo I de reparación pospuesta, desarrollado en el Capítulo 3, hemos obtenido la distribución transitoria del proceso asociado así como los tiempos esperados de operatividad y de reparación. Una vez calculado el beneficio esperado del sistema por periodo laborable y una expresión sencilla de su función derivada, hemos analizado la misma en dos situaciones diferentes. En ambos casos, hemos obtenido condiciones que garantizan que el uso de la reparación pospuesta es aconsejable. Para el modelo II de reparación pospuesta, desarrollado en el Capítulo 4, hemos estudiado los tiempos esperados de operatividad y reparación, calculado el beneficio esperado del sistema por periodo laborable y analizado los incrementos de esta función. Asimismo, hemos relacionado la función derivada del beneficio empleada en el modelo I con la función incremental del modelo II.

**3<sup>a</sup>)** Para ambos modelos de reparación pospuesta, hemos desarrollado aplicaciones numéricas de los mismos a ejemplos reales, y hemos comprobado cómo las conclusiones teóricas obtenidas concuerdan con los resultados experimentales.

El estudio de modelos de reparación pospuesta también presenta limitaciones. La primera de ellas es la relacionada con las distribuciones de los tiempos de operatividad y de reparación. En este trabajo hemos supuesto que dichas distribuciones son exponenciales. El estudio de estas políticas de reparación utilizando distribuciones de probabilidad generales es bastante complicada. La segunda de estas limitaciones la encontramos en la obtención analítica de la política óptima. En la política de reparación pospuesta tipo I la obtención de la política óptima se traduce en la búsqueda de la raíz de una función específica. En el caso de utilizar una política de reparación pospuesta tipo II la obtención de la política óptima se traduce en la búsqueda de un cambio de signo de una función incremental. En cualquiera de los dos modelos la obtención analítica de la política óptima es prácticamente imposible y por lo tanto se realiza de manera numérica. Cabe señalar que, en la literatura concerniente a políticas de reemplazo, la obtención analítica de la política óptima raramente se alcanza presentándose métodos numéricos como alternativas al estudio analítico. En nuestro caso, hemos proporcionado cotas de la política óptima de reparación pospuesta.

De los resultados obtenidos en la investigación realizada en esta memoria se ha derivado, hasta el presente momento, la siguiente producción científica:

## Publicaciones

Castro, I. T. and Sanjuán, E. L. (2004). "Power processes and their application to reliability". *Operations Research Letters*, **32**, 415-421.

## Comunicaciones presentadas en reuniones científicas

- Castro, I. T., Sanjuán, E. L. "Un modelo de reparación pospuesta". 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Lleida. Abril de 2003.

- Castro, I. T., Sanjuán, E. L. “A delayed repair model”. 54th ISI Session. Berlín (Alemania). Agosto de 2003.
- Castro, I. T., Sanjuán, E. L. “A model of delayed repair for  $N$  failures”. International Network Optimization Conference. Evry-París (Francia). Octubre de 2003.
- Castro, I. T., Sanjuán, E. L. “Power processes: definition and some properties”. 6th World Congress of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability. Barcelona. Julio de 2004.
- Castro, I. T., Sanjuán, E. L. “Procesos potenciales”. 28 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Cádiz. Octubre de 2004.

## Algunas cuestiones para futura investigación

En todo trabajo de investigación y, en particular en el realizado en esta tesis doctoral, siempre surgen una serie de cuestiones abiertas para una futura investigación. En este sentido, finalizaremos esta memoria comentando, brevemente, algunas de las cuestiones surgidas como consecuencia de la investigación realizada y cuyo estudio consideraremos a corto y medio plazo.

### 1ª) Cuestiones derivadas del estudio realizado sobre los procesos potenciales.

- Obtener propiedades tipo-renovación para un proceso potencial. Así, si  $\{X_n, n \geq 0\}$  es un proceso potencial con sucesión asociada  $\{\gamma_n\}$ , analizar la distribución de probabilidad de la variable aleatoria suma  $S_k$

$$S_k = \sum_{n=0}^k X_n.$$

En términos de fiabilidad, si  $X_n$  representa el tiempo de operatividad de un sistema después de su  $n$ -ésima reparación, entonces  $S_n$  representa el tiempo de espera hasta la ocurrencia del  $n$ -ésimo fallo.

La función de distribución de  $S_k$ ,  $F_{S_k}$ , se obtiene vía convolución como

$$F_{S_k}(t) = \int_0^t F_{S_{k-1}}(u) f_k(t-u) du,$$

donde  $f_k$  representa la función de densidad de la variable aleatoria  $X_k$ . Asociada a  $S_k$ , otro proceso estocástico de interés para su estudio es el proceso de recuento asociado al proceso potencial  $\{X_n, n \geq 0\}$

$$N(t) = \text{máx}\{k, S_k \leq t\}.$$

Como antes, si  $X_n$  representa el tiempo de operatividad de un sistema después de su  $n$ -ésima reparación, entonces  $N(t)$  representa el número de reparaciones completadas por el sistema hasta el instante de tiempo  $t$ . Además, se tiene que

$$P(N(t) = k) = F_{S_k}(t) - F_{S_{k-1}}(t), \quad t \geq 0.$$

Otras funciones de interés en el futuro es el estudio de la función  $E[N(t)]$  y de su derivada. Si  $X_n$  representa el tiempo de operatividad de un sistema después de su  $n$ -ésima reparación, la función  $E[N(t)]$  representa el número esperado de fallos hasta el instante  $t$ . La derivada de  $E[N(t)]$ , denominada en fiabilidad como *razón de ocurrencia de fallos*, tiene un significado especial en esta materia. Así,  $dE[N(t)]/dt$  representa la probabilidad de que ocurra un fallo en el sistema en el intervalo  $(t, t + dt)$ .

- Otra cuestión pendiente de estudio es la manera de utilizar procesos potenciales para modelar tiempos de operatividad y de reparación en un sistema que se ajuste a uno de los dos modelos de reparación pospuesta estudiados. Pretendemos obtener, en un futuro, resultados más concretos o más sencillos analíticamente que los obtenidos hasta ahora.

#### **2<sup>a</sup>) Cuestiones derivadas del estudio realizado sobre la reparación pospuesta.**

- Hemos definido y estudiado dos modelos diferentes de reparación pospuesta para un sistema reparable. Nos planteamos buscar modelos más complejos que abarquen un mayor número de situaciones. En particular, sistemas con más de unidad.
- La extensión de los modelos I y II de reparación pospuesta al caso en que las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias presentes en los modelos sigan distribuciones tipo fase las cuales generalizan la distribución exponencial.



# Apéndice

En este Apéndice exponemos el Lema 1 y el Teorema 1 detallados en el artículo de Mi (1993) titulado “*Discrete Bathtub Failure Rate and Upside-Down Bathtub Mean Residual Life*” aparecido en la revista *Naval Research Logistics* y mostramos cuál es el error cometido en la demostración de los mismos. Posteriormente, enunciamos y demostramos correctamente los mismos. En este trabajo se relacionan los conceptos de razón de fallos con forma de bañera (o de bañera invertida) con el de vida media residual con forma de bañera (o de bañera invertida).

**Lema 1. Mi (1993):** Sea  $\{a(n), n \geq 1\}$  una sucesión de tipo  $U$  de números reales con puntos de cambio  $1 < n_1 \leq n_2$ . Entonces, la sucesión  $\{\bar{a}(n), n \geq 1\}$ , donde

$$\bar{a}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a(i),$$

es tipo  $U$  con un único punto de cambio  $m_0$ , siendo  $m_0 \geq n_2$ , o dos puntos de cambio,  $m_0$  y  $m_0 + 1$ .

**Teorema 1. Mi (1993):** Sea  $X$  una v.a. discreta con soporte  $\{1, 2, \dots\}$  y con función de distribución  $F$  cuya función razón de fallos es tipo  $B$  (tipo  $U$ ) con puntos de cambio  $n_1 > 1$  y  $n_2 \geq n_1$ . Entonces, la sucesión  $\{\bar{F}(n)^{1/n}, n \geq 1\}$  es tipo  $B$  (tipo  $U$ ) con un único punto de cambio  $m_0$ , o dos puntos de cambio  $m_0$  y  $m_0 + 1$ .

En la demostración del Lema 1 de Mi (1993), el punto de cambio  $m_0$  de la sucesión  $\{\bar{a}(n), n \geq 1\}$  se define como

$$m_0 = \inf\{n \geq 1 : a(n+1) - \bar{a}(n) \leq 0\},$$

A continuación, se prueba que  $m_0 \geq n_2$  y se establece la existencia de  $m_0$  basándose en que la sucesión  $\{a(n), n \geq 1\}$  es tipo U.

Sin embargo, el error consiste en que la existencia de  $m_0$  no está garantizada. Por ejemplo, consideremos la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} a(1) = 1 &< a(2) = 2 < a(3) = 3 < a(4) = 4 = a(5) = 4 = a(6) = 3,5 + 1/2 \\ &> a(7) = 3,5 + 1/2^2 > a(8) = 3,5 + 1/2^3 > a(9) = 3,5 + 1/2^4 > \dots \end{aligned}$$

donde  $a(k) = 3,5 + 1/2^{k-5}$ ,  $\forall k \geq 6$ .

Obviamente, la sucesión  $\{a(n), n \geq 1\}$  es tipo U con puntos de cambio  $n_1 = 4$  y  $n_2 = 6$ .

La sucesión correspondiente  $\{\bar{a}(n)\}$  es

$$\begin{aligned} \bar{a}(1) = 1 &< \bar{a}(2) = 1,5 < \bar{a}(3) = 2 < \bar{a}(4) = 2,5 < \bar{a}(5) = 2,8 < \\ &< \bar{a}(6) = 3 < \bar{a}(7) = 3,1071 < \bar{a}(8) = 3,1719 < \dots \end{aligned}$$

Esta sucesión  $\{\bar{a}(n)\}$  es estrictamente creciente y verifica

$$a(n+1) - \bar{a}(n) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.1})$$

Por tanto,  $m_0$  no existe en este caso. En consecuencia, la hipótesis de que la sucesión  $\{a(n)\}$  sea tipo U no implica necesariamente que exista  $m_0$ .

La demostración de (A.1) es sencilla.

- Para  $n = 1, 2, \dots, 6$  claramente

$$a(n+1) - \bar{a}(n) > 0.$$

- Para  $n \geq 7$ ,

$$\begin{aligned} \bar{a}(n) &= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3,5(n-5) + \sum_{i=1}^{n-5} (1/2)^i}{n} \\ &= \frac{14 + 3,5(n-5) + ((1/2) - (1/2)^{n-4})2}{n} \\ &< 3,5 \\ &< a(n+1). \end{aligned}$$

De hecho, si se verifica

$$a(n+1) - \bar{a}(n) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces  $\{\bar{a}(n)\}$  es creciente, pues

$$\bar{a}(n+1) - \bar{a}(n) = \frac{a(n+1) - \bar{a}(n)}{n+1} > 0.$$

□

Considerando estas correcciones, podemos reescribir el Lema 1 y el Teorema 1 de Mi (1993) como sigue:

**Lema A.1:** *Sea  $\{a(n), n \geq 1\}$  una sucesión tipo  $U$  de números reales con puntos de cambio  $1 < n_1 \leq n_2$ . Entonces, la sucesión  $\{\bar{a}(n), n \geq 1\}$ , donde*

$$\bar{a}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a(i),$$

*o bien es tipo  $U$  (con un único punto de cambio  $m_0$ , siendo  $m_0 \geq n_2$ , o dos puntos de cambio,  $m_0$  y  $m_0 + 1$ ), o bien es creciente.*

### Demostración

Es evidente que

$$\bar{a}(n) < \bar{a}(n+1) \Leftrightarrow \bar{a}(n) < a(n+1). \quad (\text{A.2})$$

Por tanto, para  $1 \leq n \leq n_2 - 1$ ; o lo que es lo mismo  $n+1 \leq n_2$ , se tiene que

$$\bar{a}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a(i) < a(n) \leq a(n+1),$$

puesto que  $n_1 > 1$ . Por lo tanto  $\bar{a}(n+1) - \bar{a}(n) > 0$  y consecuentemente

$$\bar{a}(1) < \bar{a}(2) < \dots < \bar{a}(n_2 - 1) < \bar{a}(n_2).$$

1. Supongamos que existe  $m_0 = \inf\{n \geq 1 : a(n+1) - \bar{a}(n) \leq 0\}$ .

La sucesión  $\{\bar{a}(n), n = 1, 2, \dots, m_0 - 1\}$  es creciente y, por tanto,  $m_0 \geq n_2$ .

- Si  $a(m_0 + 1) = \bar{a}(m_0)$ , entonces

$$\bar{a}(m_0 + 1) = \bar{a}(m_0) = a(m_0 + 1) > a(m_0 + 2),$$

luego

$$\bar{a}(m_0 + 1) > \bar{a}(m_0 + 2),$$

y, según el razonamiento seguido en Mi (1993),

$$\bar{a}(n) > \bar{a}(n + 1), \quad \forall n \geq m_0 + 1.$$

En consecuencia,  $\{\bar{a}(n), n \geq 1\}$  es tipo U con puntos de cambio  $m_0$  y  $m_0 + 1$ .

- Si  $a(m_0 + 1) < \bar{a}(m_0)$ , siguiendo un razonamiento análogo, concluimos que  $\{\bar{a}(n), n \geq 1\}$  es tipo U con un único punto de cambio  $m_0$ .

2. Si  $m_0$  no existe, entonces se verifica

$$a(n + 1) > \bar{a}(n), \quad \forall n \geq 1,$$

luego, por (A.2),  $\{\bar{a}(n), n \geq 1\}$  es estrictamente creciente. ■

**Teorema A.2:** Sea  $X$  una v.a. discreta con soporte  $\{1, 2, \dots\}$  y función razón de fallos tipo B (tipo U) con puntos de cambio  $n_1 > 1$  y  $n_2 \geq n_1$ . Entonces, la sucesión  $\{\bar{F}(n)^{1/n}, n \geq 1\}$ , o bien es tipo U (tipo B) (con un único punto de cambio  $m_0$ , o dos puntos de cambio  $m_0$  y  $m_0 + 1$ ) o bien es estrictamente creciente (decreciente).

### Demostración

Dada  $X$  una v.a. discreta con función razón de fallo  $r$  y función de supervivencia  $\bar{F}$  podemos expresar

$$\bar{F}(n) = \prod_{i=1}^n (1 - r(i)).$$

De este modo, se tiene que

$$n \ln(\bar{F}(n))^{1/n} = \sum_{i=1}^n \ln(1 - r(i)).$$

Debido a que la sucesión  $\{r(n), n \geq 1\}$  es tipo B con puntos de cambio  $n_1$  y  $n_2$  implica que la sucesión  $\{\ln(1 - r(n)), n \geq 1\}$  es de tipo U con los mismos puntos de cambio  $n_1$  y  $n_2$ . Aplicando el lema anterior se tiene el resultado anterior. ■

# Referencias

- AALEN, O. (1995). Phase type distributions in survival analysis. *Scand. J. Statist.* **22**, 447–463.
- AGARWAL, M. & KUMAR, A. (1981). Analysis of a repairable redundant system with delayed replacement. *Microelectron. Reliab.* **21**, 165–171.
- ALFA, A. S. (2004). Markov chain representation of discrete distributions applied to queuing models. *Comput. Operat. Res.* **31**, 2365–2385.
- ALFA, A. S. & CASTRO, I. T. (2002). Discrete time analysis of a repairable machine. *J. Appl. Probab.* **39**, 503–516.
- APOSTOL, T. (1998). *Análisis Matemático*. Ed. Reverté, Barcelona.
- ASCHER, H. & FEINGOLD, H. (1984). *Repairable Systems Reliability*. Marcel Dekker, New York.
- BARLOW, R. E. & HUNTER, L. (1960). Optimum maintenance policies. *Operat. Research* **8**, 90–100.
- BARLOW, R. E., MARSHALL, A. W., & PROSCHAN, F. (1963). Properties of probability distributions with monotone hazard rate. *Ann. Math. Statist.* **34**, 375–389.
- BARLOW, R. E. & PROSCHAN, F. (1965). *Mathematical Theory of Reliability*. Wiley.
- BARLOW, R. E. & PROSCHAN, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- BARLOW, R. E. & PROSCHAN, F. (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing to Begin With*. Silver Spring. Maryland.
- BHATTACHARJEE, M. C. & NEUTS, M. F. (1981). Shock models with phase type survival and shock resistance. *Naval Res. Logist. Quart.* **28**, 213–219.
- BIRNBAUM, Z. W. (1955). On a use of the mann-withney statistic. In *Proc. of the Third Berke-*

- ley Symposium on Mathematical Statistics and Probab.*, volume 1, pages 13–17. University of California Press, Berkeley and Los Angeles.
- BLOCK, H. W., BROGES, W. S., & SAVITS, T. H. (1985). Age-dependent minimal repair. *J. Appl. Probab.* **22**, 370–385.
- BRADLEY, D. M. & GUPTA, R. C. (2003). Limiting behaviour of the mean residual life. *Ann. of the Inst. of Statist. Mathematics* **55**, 217–226.
- BROWN, M. & PROSCHAN, F. (1983). Imperfect repair. *J. Appl. Probab.* **20**, 851–859.
- CALABRIA, R. & PULCINI, G. (1987). On the asymptotic behaviour of the mean residual life. *Reliab. Engin.* **19**, 165–170.
- CAMPBELL, N. R. (1941). The replacement of perishable members of a continually operating system. *J. Roy. Statist. Soc.* **7**, 110–130.
- CASTRO, I. T. & ALFA, A. S. (2004). Lifetime replacement policy in discrete time for a single unit system. *Reliab. Engin. and Safety System J.* **84**, 103–111.
- CASTRO, I. T. & SANJUÁN, E. L. (2004). Power processes and their application to reliability. *Operat. Research Letters* **32**, 415–421.
- CHEN, Y. Y., HOLLANDER, M., & LANGBERG, N. A. (1983). Tests for monotone mean residual life, using randomly censored data. *Biometrics* **39**, 119–127.
- DANIELS, H. E. (1945). The statistical theory of the strength of bundles of threads. *Proc. Roy. Soc. London* **183**, 405–435.
- DAVIS, D. J. (1952). An analysis of some failure data. *J. Amer. Statist. Assoc.* **47**, 113–150.
- DE ALMEIDA, A. T. & BOHORIS, G. A. (1996). Decision theory in maintenance strategy of standby system with gamma distribution repair time. *IEEE Transact. on Reliab.* **45**, 216–219.
- DE ALMEIDA, A. T. & DE SOUZA, F. M. C. (1993). Decision theory in maintenance strategy for a 2-unit redundant standby system. *IEEE Transact. on Reliab.* **42**, 401–407.
- DESHPANDE, J. V., KOCHAR, S. C., & SINGH, H. (1986). Aspects of positive ageing. *J. Appl. Probab.* **23**, 748–758.
- EPSTEIN, B. & SOBEL, M. (1953). Life testing. *J. Amer. Statist. Assoc.* **48**, 486–502.
- FELLER, W. (1941). On the equation of renewal theory. *Ann. Math. Statist.* **12**, 243–267.
- FELLER, W. (1949). Fluctuation theory of recurrent events. *Transact. Amer. Math. Soc.* **67**,

98–119.

- FELLER, W. (1957). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1. Wiley, New York.
- FELLER, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 2. Wiley.
- GUESS, F. & PROSCHAN, F. (1988). Mean residual life: Theory and applications. In Krishnaiah, P. R. & Rao, C. R., editors, *Handbook of Statistics*, volume 7, pages 215–224. Elsevier Science Publishers.
- GUPTA, R. C. & AKMAN, H. O. (1995). Mean residual life function for certain types of non-monotonic ageing. *Stochast. Models* **11**, 219–225.
- GUPTA, R. C. & BRADLEY, D. M. (2003). Representing the mean residual life in terms of the failure rate. *Math. and Computer Modelling* **37**, 1271–1280.
- HALL, W. J. & WELLNER, J. A. (1981). Mean residual life. In *Statistics and Related Topics*.
- HOLLANDER, M. & PROSCHAN, F. (1984). Nonparametric concepts and methods in reliability. In *Handbook of Statistics*, volume 4. North-Holland, Amsterdam.
- KAO, J. H. K. (1956). A new life-quality measure for electron tubes. *IRE Transact. on Reliab. and Quality Control* **PGRQC-7**.
- KAO, J. H. K. (1958). Computer methods for estimating weibull parameters in reliability studies. *IRE Transact. on Reliab. and Quality Control* **PGRQC-13**, 15–22.
- KAPUR, P. K. & KAPOOR, K. R. (1975). A 2-unit warm standby redundant system with delay and one repair facility. *IEEE Transact. on Reliab.* **R-24**, 275.
- KHALEDI, B. & KOCHAR, S. (2002). Stochastic orderings among order statistics and sample spacings. In Misra, J., editor, *Uncertainty and Optimality: Probability, Statistics and Operations Research*, pages 167–203. World Scientific. Singapore.
- KHALIL, Z. & BOUGAS, I. (1975). On standby redundancy with delayed repair. *IEEE Transact. on Reliab.* **R-24**, 286–287.
- KHINTCHINE, A. Y. (1932). *Mathematisches über die Erwartung von einen öffentlicher Schalter*. Matem. Sbornik.
- KHINTCHINE, A. Y. (1962). Mathematical methods in the theory of queuing. *Griffin's Statist. Monographs and Courses* .

- KIJIMA, M. (1989). Some results for repairable systems with general repair. *J. Appl. Probab.* **26**, 89–102.
- KULKARNI, V. G. (1995). *Modeling and Analysis of Stochastic Systems*. Chapman and Hall, London.
- KULKARNI, V. G. (1999). *Modeling, Analysis, Design and Control of Stochastic Systems*. Springer-Verlag, New York.
- KUMAR, A., RAY, D., & AGARWAL, M. (1978). Probabilistic analysis of a two-unit standby redundant system with repair efficiency and imperfect switchover. *Int. J. Systems Sciences* **9**, 731–742.
- LAHA, R. G. & ROHATGI, V. K. (1979). *Probability Theory*. Wiley.
- LAM, Y. (1988). Geometric processes and replacement problem. *Acta Math. Appl. Sinica* **4**, 366–377.
- LAM, Y. (1992). Optimal geometric process replacement model. *Acta Math. Applic. Sinica* **8**, 73–81.
- LAM, Y. & ZHANG, Y. (1996). Analysis of a two-component series system with a geometric process model. *Nav. Res. Logist.* **43**, 491–502.
- LAM, Y. & ZHANG, Y. L. (2003). A geometric process maintenance model for a deteriorating system under a random environment. *IEEE Transact. on Reliab.* **52**, 83–89.
- LAM, Y., ZHANG, Y. L., & ZHENG, Y. H. (2002). A geometric equivalent model for a multistate degenerative system. *Europ. J. of Operat. Res.* **142**, 21–29.
- LOÈVE, M. (1978). *Probability Theory I, II*. Springer-Verlag, New York.
- LOTKA, A. J. (1939). A contribution to the theory of self-renewing aggregates with special reference to industrial replacement. *Ann. Math. Statist.* **10**, 1–25.
- MAKABE, H. & MORIMURA, H. (1963). On some preventive maintenance policies. *J. Operat. Res. Soc. of Japan* **6**, 17–47.
- MI, J. (1993). Discrete bathtub failure rate and upside-down bathtub mean residual life. *Naval Research Logistics* **40**, 361–371.
- MI, J. (1995). Bathtub failure rate and upside-down bathtub mean residual life. *IEEE Transact. Reliab.* **44**, 388–391.
- MORRISON, D. G. (1978). On linearly increasing mean residual lifetimes. *J. Appl. Probab.* **15**,

617–620.

- NAKAGAWA, T. & OSAKI, S. (1974). Optimum replacement policies with delay. *J. Appl. Probab.* **11**, 102–110.
- NEUTS, M., PÉREZ-OCÓN, R., & TORRES-CASTRO, I. (2000). Repairable models with operating times and repair times governed by phase type distributions. *Adv. in Appl. Probab.* **32**, 468–479.
- NEUTS, M. F. (1975). Probability distributions of phase type. In *Liber Amicorum Prof. Emeritus H. Florin*, pages 173–206. Dept. Math. Univ. Louvain, Belgium.
- NEUTS, M. F. (1995). *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models. An Algorithmic Approach*. Dover Publications, Inc. New York.
- NEUTS, M. F. & MEIER, K. S. (1981). On the use of phase-type distributions in reliability modelling of systems with two components. *OR Spektrum* **2**, 227–234.
- OSAKI, S. (1985). *Stochastic System Reliability Modeling*. World Scientific, Singapore.
- OSAKI, S. (1992). *Applied Stochastic System Modeling*. Springer-Verlag, Berlin.
- OSAKI, S. & NAKAGAWA, T. (1976). Bibliography for reliability and availability of stochastic systems. *IEEE Transact. on Reliab.* **R-25**, 284–287.
- OSOSKOV, G. A. (1956). A limit theorem for flows of similar events. *Theory of Probab. and Its Applic.* **1**, 248–255.
- PÉREZ-OCÓN, R., GÁMIZ-PÉREZ, M., & RUIZ-CASTRO, J. (1998). *Métodos Estocásticos en Teoría de la Fiabilidad*. Proyecto Sur de Ediciones, Granada.
- PÉREZ-OCÓN, R. & MONTORO-CAZORLA, D. (2004). A multiple system governed by a quasi-birth-and-death process. *Reliab. Engin. and System Safety J.* **84**, 187–196.
- PÉREZ-OCÓN, R. & RUIZ-CASTRO, J. E. (2004). Two models for a repairable two-system with phase type sojourn time distributions. *Reliab. Engin. and System Safety J.* **84**, 253–260.
- PÉREZ-OCÓN, R. & TORRES-CASTRO, I. (2002). A reliability semi-markov model involving geometric process. *Appl. Stoch. Models in Business and Industry* **18**, 157–170.
- ROHATGI, V. K. (1976). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, Inc.
- ROSS, S. (1996). *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons, Inc.
- SANJUÁN, E. L. & CASTRO, I. T. (2004). Letters to the editor. *Naval Research Logistics*.

Enviado para su publicación.

- SHAKED, M. & SHANTHIKUMAR, J. G. (1994). *Stochastic Orders and Their Applications*. Academic Press. San Diego.
- SKAKALA, J. & ROHAL-ILKIV, B. (1977). 2-unit redundant systems with replacement and repair. *IEEE Transact. on Reliab.* **R-26**, 294–295.
- SMITH, W. L. (1958). Renewal theory and its ramifications. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.* **20**, 243–302.
- TIJMS, H. C. (2003). *A First Course in Stochastic Models*. John Wiley and Sons, England.
- VALDEZ-FLORES, C. & FELDMAN, R. M. (1989). A survey of preventive maintenance models for stochastically deteriorating single-unit systems. *Naval Research Logistics Quarterly* **36**, 419–446.
- WEIBULL, W. (1939). A statistical theory of the strength of materials. *Ing. Vetenskaps Akad. Handl.* .
- ZELEN, M. & DANNEMILLER, M. C. (1961). The robustness of life testing procedures derived from the exponential distribution. *Technometrics* **3**, 29–49.