UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Título
Introducción del álgebra lineal en España y Colombia durante la segunda mitad del s. XIX y la primera del s. XX
Autor/es
Yolima Álvarez Polo
Director/es
Luis Español González
Facultad
Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática
Titulación
Departamento
Matemática y Computación
Curso Académico

Introducción del álgebra lineal en España y Colombia durante la segunda mitad del s. XIX y la primera del s. XX

Yolima Álvarez Polo

Memoria presentada para la obtención del grado de Doctor.
Programa de Doctorado de Ingeniería Eléctrica, Matemáticas y Computación

Director: Dr. D. Luis Español González

Universidad de La Rioja
Departamento de Matemáticas y Computación

Logroño, 2013

A mi familia.

Quiero expresar mis agradecimientos a todas aquellas personas que de una u otra forma, contribuyeron a la realización de este trabajo.

De manera especial a Luis Español, quien puso todo su empeño y dedicación en esta tarea.

Agradezco a la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital, al Departamento de Matemáticas de la Universidad de La Rioja y al Instituto de Matemáticas de Jussieu de la Universidad Pierre y Marie Curie por permitirme realizar este sueño.

Gracias también a las instituciones que creyeron y me apoyaron en este proyecto, la Universidad Distrital, Colciencias, LASPAU, la Universidad de La Rioja, y el IER.

Muchas gracias a todos.

Índice general

Introducción

Introducción

El tema central de esta memoria hace parte de un área de investigación sobre la historia de las matemáticas, que incluye la evolución de las ideas y las teorías matemáticas, sus aplicaciones, y las variadas prácticas y relaciones existentes en la comunidad matemática, formada por quienes se dedican en mayor o menor medida a esta ciencia a través de un variado conjunto de actividades.

Nuestro propósito es investigar en el marco de una historia nacional de las matemáticas, en España y Colombia, durante la segunda mitad del siglo XIX y la primera del XX. Es fácil de comprender que, por sus trayectorias históricas como países, el tratamiento dado a España y Colombia no pueda ser simétrico; esta memoria dedicará una mayor atención al caso español, que ocupará dos capítulos, mientras que el colombiano se desarrollará en uno solo algo más breve.

Durante el periodo que vamos a estudiar, cien años en torno a 1900, España y Colombia han sido países atrasados respecto a los que marcaban la pauta del progreso matemático internacional —primero europeos, con la incorporación posterior de los EEUU—, por ello el tema que nos va a ocupar es la historia de la recepción en estos países periféricos de la ciencia ya creada y difundida en los países más avanzados. Estudios recientes de centro y periferia en el conocimiento, constituyen una rama específica de la investigación en historia de la ciencia, en la que se analiza la expansión del conocimiento desarrollado en un centro de producción científica original.

Es por ello natural iniciar un trabajo de esta naturaleza exponiendo las líneas principales del desarrollo del tema tratado en la historia general de la creación matemática, para ver luego qué parte de ese corpus y en qué forma se incorpora a ciertos ámbitos que no participaron en la fase inicial creativa. En esta tesis prestamos gran atención a los libros, en general de texto para la enseñanza superior o media. Incluso en los países avanzados donde se produce la creación de ciencia original, son los elementos de difusión o divulgación masiva de un conocimiento que primero es compartido por los creadores en el circuito restringido de las revistas de investigación.

Este modelo expositivo va a ser puesto en práctica con el tema de los métodos algebraicos lineales, del álgebra lineal en terminología más reciente, que incluye los avances en los temas clásicos de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales, el algoritmo de los determinantes, las sustituciones lineales, las matrices y otros.

Objetivos. Los objetivos de esta tesis doctoral se puede descomponer en tres partes:

1. Identificar los hitos en la evolución de lo que hoy se conoce como álgebra lineal y su relación con la geometría analítica, la aritmética y las ecuaciones diferenciales ordinarias.

2. Establecer cómo evolucionó la enseñanza del álgebra lineal en la enseñanza universitaria, tanto en España como en Colombia.

3. Señalar los libros que se utilizaban, de acuerdo con los programas de los estudios oficiales, identificando en ambos países a los primeros autores sobre estos temas y determinando el impacto de su obra.

De los tres objetivos específicos recién señalados, el primero llenará la primera parte de esta memoria, en la que se propone una visión de la evolución del álgebra lineal en sus momentos creativos más relevantes y en sus libros de texto más representativos. Teniendo esta primera parte como referencia, la segunda se ocupará en primer lugar de indagar sobre la introducción del álgebra lineal en España durante la segunda mitad del siglo XIX y la primera del siglo XX, y por último de la transferencia de este estudio a la realidad matemática colombiana de la misma época.

Estudios previos y fuentes. Naturalmente, nuestro trabajo se ha construido sobre recopilaciones de materiales e investigaciones históricas previas. Para la primera parte nos hemos basado en trabajos de matemáticos y de historiadores de las matemáticas. El tema de la historia de las matemáticas ha despertado gran interés entre algunos profesionales de las matemáticas, que han vuelto su mirada atrás para dar un merecido reconocimiento a los primeros autores, así como para reflejar el proceso evolutivo de las ciencias matemáticas a través del tiempo. Para el caso particular del álgebra lineal, encontramos trabajos recopilatorios específicos y sistemáticos, como los de T. Muir en lo que respecta a los sistemas de ecuaciones lineales, determinantes y matrices [266, 265, 264, 263] y, para las matrices, también el repertorio de J. Wedderburn [356]. En estas grandes recopilaciones hemos buscado lo que nos ha parecido más significativo para nuestros propósitos, pero siempre acudiendo a consultar las fuentes primarias, artículos o libros, originales. Para obtener los originales de las fuentes seleccionadas en dichos repertorios hemos recurrido profusamente al Servicio de Acceso al Documento de la Biblioteca de la Universidad de La Rioja, pero también se emplearon recursos digitales y físicos localizados en la Biblioteca Nacional de Francia y en las bibliotecas de la Universidad Pierre y Marie Curie (Paris 6).

En cuanto al trabajo de los historiadores de las matemáticas que hemos aprovechado, serían muchos los nombres y obras a recordar aquí, como E. Knobloch para los estudios sobre determinantes y T. Hawkins para matrices.

Resulta oportuno citar un párrafo de Hawkins que hemos procurado poner de manifiesto en nuestra presentación del tema:

> Aunque los orígenes de la teoría de matrices pueden remontarse al siglo 18 y aunque no fue hasta el siglo XX que fue absorbida por la corriente principal de las matemáticas [hasta justificar un tratamiento extensivo en libros de texto y monografías], fue verdaderamente una creación del siglo XIX. [**?**, p. 561]

Se trata del párrafo inicial de su comunicación al ICM Vancouver 1974, en la que Hawkins realiza un anticipo de lo que serían sus artículos en años siguientes, girando cada uno de ellos en torno a la obra de un autor relevante: Cauchy [177], Cayley [179] y Weierstrass [180]

El trabajo de la segunda parte se ha sustentado en las investigaciones existentes sobre la matemática española de la época estudiada, particularmente los dedicados a las revistas matemáticas y a biografías, realizados por autores como E. Ausejo, L. Español, F. González, M. Hormigón, J. LLombart, A. Millán, R. Rodríguez Vidal, F. Vea, M. A. Velamazán, y otros.

Para recopilar los materiales utilizados nos basamos en los resultados obtenidos en el catálogo colectivo de la Red de Bibliotecas Universitarias (REBIUN), realizando la búsqueda por palabras clave: “determinantes”, “matrices”, “sistemas de ecuaciones lineales”. También usando como criterio de búsqueda “análisis algebraico” y “aritmética universal”. Se contrastó con el trabajo de M. Hormigón *Catálogo de la producción matemática en España entre 1870 y 1920* (1987) [192]. Se consultó también la Base de datos de Tesis Doctorales (TESEO), considerando las tesis de doctorado que se relacionan a continuación, en las cuales aparecen registrados textos de matemáticas usados en la época correspondiente a cada tema de investigación de los autores.

- Lusa, Guillermo (1975). *Las Matemáticas y la Ingeniería Industrial 1850-1975.* Tesis doctoral. Barcelona.
- Escribano Benito, José Javier (2000).*Estudio histórico de la obra matemática de Sixto Cámara Tecedor (1878-1964) en el contexto de la matemática española.* Tesis doctoral. Logroño.
- Martínez García, M. Ángeles (2004). *Las matemáticas en la ingeniería: las matemáticas en los planes de estudio de los ingenieros civiles en España en el siglo XIX.* Tesis doctoral. Zaragoza.
- Caballer Vives, M. Cinta (2006). *El álgebra en la enseñanza secundaria en España (1836-1936).* Tesis doctoral. Bilbao.
- Suárez Alemán, Carlos O. (2007). *Aceptación en España de los criterios rigurosos del análisis matemático durante los s. XIX y XX.* Tesis doctoral. Cádiz.

De entre las anteriores, ha tenido especial relevancia la de J. J. Escribano, por la estrecha relación entre los métodos algebraicos lineales y la geometría analítica que empezó a renovar Cámara.

Los recursos bibliográficos, además de los disponibles en Internet, fueron consultados en las bibliotecas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM), Universidad de Salamanca y de la Universidad de Zaragoza, así como también en los archivos digitales de la Biblioteca Nacional de España. Para cuestiones documentales se realizaron consultas en el Archivo Histórico de la UCM y en el Archivo General de la Administración en Alcalá de Henares.

En lo que respecta a Colombia, hemos recurrido a la obra de varios historiadores nacionales:

- Las publicaciones de Luis Carlos Arboleda y Regino Martínez-Chavanz.
- Camargo, Deisy (2008). *Los textos de álgebra publicados en Colombia durante el siglo XIX y comienzos del XX.* Tesis de maestría. Bogotá.
- El proyecto de Clara H. Sánchez y Víctor Albis, del que hemos extraído la información para elaborar el último capítulo.

Los originales de las obras analizadas han sido estudiados en las Bibliotecas Nacional, Luis Angel Arango, y de la Sociedad Colombiana de Ingenieros. Hemos tenido acceso al Archivo Histórico de Bogotá, al Archivo Nacional, así como al de la Universidad Nacional de Colombia.

Resumen

A continuación incluimos el resumen del contenido de la memoria que resulta de reunir como un texto continuo todo o parte de las breves introducciones que acompañan a los capítulos y las secciones .

Primera parte

Si bien nuestro periodo de estudio para las historias nacionales es la segunda mitad del siglo XIX y la primera del siglo XX, vamos a modificarlo para los antecedentes de historia general a considerar en esta primera parte. Por dos razones, en primer lugar porque resulta conveniente hacer referencia a los preliminares de la historia de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales y los determinantes, lo que haremos retrocediendo hasta el origen mismo de estas cuestiones en la matemática antigua. En segundo lugar, el retraso con que los avances de la matemática han llegado a España y Colombia, hace que baste con mostrar la historia general hasta poco más allá de 1900 para disponer de aquello que se va a incorporar a la matemática española y colombiana hasta mediados del siglo XX. Alguna excepción habrá a esta regla, pero cuando se presente esta situación daremos alguna indicación sobre la historia general que venga al caso. Por otra parte, la recepción que vamos a investigar se refiere mayoritariamente a la enseñanza superior, lo que hace necesario que prestemos atención no sólo a los momentos en que la investigación matemática alumbra nuevos conceptos y teorías, sino a su consolidación en libros de amplia difusión.

Capítulo 1. Abordará el desarrollo de los sistemas lineales y los determinantes hasta aproximadamente el año 1850. Por entonces quedó establecida una teoría de determinantes con sus aplicaciones, las primeras a ciertos tipos de sistemas lineales. Se divide en tres secciones, de cuyo contenido damos a continuación una idea general. La primera cubrirá hasta el siglo XVII, largo periodo en el que los sistemas lineales, y con ellos las primeras expresiones que con el tiempo serán los casos más sencillos de determinantes, aparecen esporádicamente y en diversas culturas. Terminaremos la sección dando noticia de la obra, próxima en el tiempo, espacial y culturalmente alejada, del japonés Seki y del alemán Leibniz, que vieron con claridad la idea de determinante, pero su obra pasó, cada una por sus propios motivos, desapercibida.

Con Seki y Leibniz se inicia la monumental recopilación de Muir [266, 265], que tendremos como guía en todo nuestro recorrido sobre determinantes. La notación puramente combinatoria que utilizó Leibniz fue muy acorde con su aspiración a la "característica universal", bajo la influencia o no del filósofo y matemático alemán, este tipo de lenguaje simbólico específico presidió también la obra de Vandermonde un siglo después y, ya en el XIX, fue muy apreciada por los británicos Sylvester, Cayley y Spottiswoode.

La segunda sección expone la aparición más clara y persistente de los determinantes dispuestos para dar forma a las resoluciones de los sistemas lineales que resultan del estudio de problemas primero geométricos y luego también mecánicos, una vez puesta en circulación, respectivamente, la geometría analítica de Descartes-Fermat y el cálculo infinitesimal de Newton-Leibniz.

Con el trabajo de dos matemáticos con dedicación al estudio analítico de las curvas, Maclaurin y Cramer, queda clara la regla para resolver los sistemas lineales de igual número de ecuaciones que de incógnitas, justificada de modo inductivo a partir de las casos de orden pequeño. Pero faltan asuntos importantes para lograr una formulación satisfactoria del problema. Por una parte la propia exposición del caso general, por otra la regla de los signos que hay que atribuir a los productos de coeficientes para formar el denominador y los numeradores de las soluciones, que cada autor daba a su modo. En su prolífica obra no le faltaron a Euler momentos para tratar asuntos algebraicos lineales, como cuando reducía un forma cuadrática a suma de cuadrados, pero no dedicó una atención específica al tema como objeto de estudio independiente, más allá de comentarios generales. Para Bézout, los determinantes, a través de los sistemas lineales, fueron una herramienta para el estudio de la eliminación en sistemas de grado superior. Por el contrario, Laplace llegó a encontrar sistemas y determinantes en trabajos sobre las ecuaciones diferenciales planteadas por la mecánica celeste.

Si la tercera sección comienza en 1772 es por tratarse del año en que Vandermonde publicó la primera exposición sobre determinantes —dejando de lado la inédita de Leibniz—

que puede calificarse como una teoría de dicho algoritmo, conocida y apreciada en su tiempo. En nuestra exposición nos ocupamos después de dos autores, Lagrange y Gauss, que, sin dedicarse al tema específico, ponen sobre la mesa ideas clave que influirán en el desarrollo posterior. Al calcular el volumen de la pirámide, Lagrange ofrece lo que llama un "método algebraico": del análisis de su problema extrae unos cálculos que elabora con autonomía para luego aplicarlos a su problema inicial y a otros. Sus cálculos algebraicos son una sinfonía de determinantes de orden tres, donde aparecen determinantes simples y otros cuyos elementos son a su vez también determinantes. Gauss, además de aportar métodos numéricos para resolver sistemas, trabaja en un problema aritmético con números enteros y en órdenes dos y tres, contribuyendo con una idea clave que tendrá un rico desarrollo, el manejo de los sistemas como sustituciones que transforman formas cuadráticas y, sobre todo, que se componen unas con otras.

Llevando a la mayor generalidad los métodos de Lagrange y Gauss, Binet y Cauchy, simultáneamente, completan un gran selecto de fórmulas implicando sumas algebraicas de productos, pero Cauchy es más organizado y propone en 1815 una exposición completa para su tiempo de la teoría de determinantes con la aplicación a la resolución de sistemas de cualquier orden por la regla de Cramer. Cauchy apuntó en su obra otras aplicaciones de los determinantes al análisis, pero fue Jacobi, hacia 1841, quien abrió con toda su amplitud el abanico de las aplicaciones de estos algoritmos, particularmente las aplicaciones a temas de análisis matemático en los que intervienen las derivadas y las integrales. Para entonces ya se había generalizado el término "determinante" usado por primera vez por Gauss, y Cayley había propuesto en 1841 limitar ente barras verticales el cuadro de números para indicar su determinante, notación que pronto se hizo de uso común. En cambio, el término "matriz" propuesto por Sylvester en 1850 tardó en extenderse fuera de Inglaterra.

Capítulo 2. Se ha observado que la aparición de una teoría general de determinantes quedó completa en la memoria de Cauchy de 1815, pero que una difusión expansiva y generalizada por Europa de esa teoría no se produjo hasta los años cuarenta, a partir de la influencia de Jacobi y la incorporación de la matemática insular europea a la continental con la intervención de Sylvester y Cayley. Los determinantes quedaron plasmados hacia la mitad del siglo en un cuerpo teórico general, unos determinantes especiales con propiedades particulares y aplicaciones de los determinantes en análisis, geometría y mecánica, que llegaron mucho más allá de la inicial resolución de sistemas lineales algebraicos. Este recorrido histórico expansivo se inició en el nivel superior de las revistas de investigación, pero fue decantándose en forma de libros de texto de diversos formatos y alcance. Primero los determinantes aparecieron en libros de texto generales de matemáticas, pero no tardaron en llegar los dedicados específicamente a la teoría de determinantes, que tienen un formato común influido por Jacobi: se dividen en dos partes, primero la teoría y después las aplicaciones.

La primera sección trata sobre la ecuación secular y las formas cuadráticas, cuyos orígenes se encuentran en problemas de la física clásica y la geometría. Destacamos las contribuciones de Cauchy y Jacobi en la línea de Lagrange y en paralelo a los trabajos de Sturm. Mientras que las aportaciones a la teoría por parte de Cayley y Sylvester en un contexto geométrico. La segunda sección ofrece noticia de una selección de libros sobre determinantes del siglo XIX. Un ejemplo de la necesidad de que transcurra un cierto tiempo hasta que una teoría madure, se extienda su uso y se difunda en libros de texto lo proporciona el propio Cauchy, quien, como hemos visto al inicio del apartado anterior, no consideró oportuno integrar la teoría de determinantes que elaboró en 1815 en su *Análisis algebraico* de 1821, se limitó a lo mínimo para justificar la resolución según Cramer de los sistemas lineales algebraicos de igual número de ecuaciones que de incógnitas. Poco después, en 1825, apareció el libro del alemán Scherk, que se ocupa de la regla de Cramer por vía inductiva; lo calificamos como un preliminar porque es una obra miscelánea. El título de primer libro sobre determinantes lo merece el del inglés Spottiswode, de 1851; siguiendo la tradición británica sobre determinantes, además de una rápida mención al libro de álgebra de Salmon (1859), nos ocuparemos de la interesante obra del peculiar autor Dodgson (1867), más famoso por *Alicia en el país de las maravillas* (1865). Nos referimos también a dos libros italianos, los de Brioschi (1854) y Trudi (1862), este último publicado estando ya en circulación el de su colega alemán Baltzer (1857), que fue el más completo de todos, con reediciones mejoradas hasta los años ochenta, algo diremos de la segunda y la tercera (1864, 1870) pero dejaremos de lado las otras dos (1875, 1881).

Resolver los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales dio origen a la teoría de determinantes y una vez que ésta se establece con autonomía, tales sistemas pasan a ser su primera aplicación. Con el método de eliminación de Gauss —conocido por los chinos antiguos como vimos—, la solución práctica de casos numéricos quedó establecida, y para los sistemas de igual número de ecuaciones que de incógnitas, la regla de Cramer daba las soluciones como fracciones en términos de determinantes, teniendo todas en su denominador el determinante del sistema, que hay que suponer no nulo. En el caso de un sistema homogéneo con determinante no nulo no hay más solución que la trivial, pero el determinante igualado a cero se presenta como el resultado de eliminar las variables, lo que significa que el sistema tiene otras soluciones. Hasta aquí llega, o poco más, lo tratado en libros hasta el de Trudi.

Con el tiempo va apareciendo y perfeccionándose la discusión de lo que puede suceder si el determinante del sistema general se anula, y también el intento de resolver sistemas en los que el número de ecuaciones y de incógnitas no coincide, dando las condiciones para la existencia de soluciones y las soluciones posibles en su caso; en esta ampliación los menores de las matrices involucradas juegan un papel esencial. En la sección segunda se da cuenta de esto y se relata cómo la intervención de Kronecker, basada en el estudio general de los sistemas homogéneos, mejoró el estado de la cuestión y quedó reflejada en nuevas ediciones del libro de Baltzer y en obras del italiano Capelli de la segunda mitad de la década de los ochenta del siglo XIX. Gran importancia tienen los sistemas y sus bloques (notación personal para los menores) en la obra de Dodgson (1867). Finalmente, mostramos la prueba del teorema general sobre los sistemas lineales, directamente para el caso no homogéneo, producida en 1875 por los franceses Fontené y Rouché, mejorada enseguida por Frobenius con la introducción de la fructífera noción de rango (o característica como llamaba Capelli) de una matriz.

Capítulo 3. Durante la etapa de predominio del algoritmo del determinante en los problemas algebraicos lineales, las matrices aparecieron como un concepto auxiliar, como un nombre para los coeficientes de un sistema lineal colocados según la disposición que el propio sistema plantea, como una tabla de números de la que se pueden extraer determinantes. Esta imagen perduró mucho más allá de la mitad del siglo, pero al mismo tiempo se fue generando una imagen funcional de las matrices, principalmente de las cuadradas. Primero, desde Gauss y a través de sus seguidores aritméticos Eisenstein, Hermite, se identificarán como las sustituciones lineales y como tales se multiplicarán de un modo regulado por la aplicación sucesiva de sustituciones, como una composición de funciones. En principio, este modo de ver afectaba sólo a las matrices inversibles, pero en buena medida era extensible a todas, dando lugar a un “método algebraico” que percibieron primero Cayley y Laguerre pero que tardó en ser generalmente asumido. Cuando Weierstrass irrumpió con fuerza en los estudios sobre determinantes y la ecuación secular, lo hizo de un modo marcadamente funcional, tratando las formas cuadráticas primero y las bilineales después como un analista que estudia funciones particulares, la matriz de coeficientes sólo servía para obtener determinantes. El estudio de estos temas en Berlín fue muy profundo, y Kronecker introdujo en ellos un punto de vista más algebraico. Más tarde, Frobenius unificó y amplió los resultados obtenidos por sus predecesores creando un cálculo simbólico de formas bilineales, vistas como funciones, que enmascaraba el de sus matrices de coeficientes, esta vez totalmente generales, no restringidas como con las sustituciones. Finalmente salió a la luz el álgebra matricial autónoma, a la vez que se consolidaba el estudio de los sistemas numéricos más generales que los números complejos y los cuaternios. Sylvester tuvo un papel decisivo en la difusión de las matrices cuadradas como cantidades de un tipo más general que las cantidades ordinarias numéricas, pero que admite operaciones con propiedades similares, salvo alguna excepción, a las aritméticas.

En el estudio de las formas cuadráticas con coeficientes enteros que iniciara Gauss, las sustituciones que modificaban la expresión funcional de las formas cuadráticas eran representadas por matrices de orden dos, tres, etc. (con determinante ± 1). Eisenstein y Hermite continuaron esta tarea investigadora, en la que quedó claramente manifiesta la utilidad del producto de matrices, en modo fila-columna, como resultado de la composición de sustituciones. Pero al entrar en escena Weierstrass en el tema de la formas cuadráticas con coeficientes reales y complejos puso el énfasis en el punto de vista funcional, en el que la matriz de coeficientes no recibe una atención especial. El punto de vista funcional de Weierstrass en relación con los temas lineales, se puso de manifiesto también al caracterizar los determinantes como funciones multilineales alternadas y exponer sus propiedades principales a través de esta definición funcional. Por otra parte, las matrices, sin restricciones, daban la expresión de las formas bilineales, pero el enfoque de Weierstraas, tan rico en resultados, era funcional y no destacaba el papel de las matrices. Kronecker completó y perfeccionó el trabajo de Weierstrass en esta campo, pero fue Frobenius quien le dió una nueva visión global a las formas bilineales con coeficientes en los diversos sistemas numéricos. Creó un cálculo simbólico de formas que es como el de matrices, pero sin que las matrices tuvieran el protagonismo; por ejemplo, el producto de formas bilineales se definía como suma de productos de derivadas parciales de la forma, sin recurrir —aunque el resultado era ese— al producto fila-columna de los coeficientes.

El término “matriz” fue acuñado por Sylvester en 1850 para designar esas tablas de cantidades de las que se podían sacar determinantes. A partir de la experiencia matemática en los temas lineales que se investigaban en aritmética, geometría, análisis y mecánica, fue Cayley quien en 1858 publicó por vez primera un trabajo de ordenación sistemática del cálculo con matrices con independencia de sus aplicaciones, al estilo del "método algebraico" lagrangiano. La difusión de este trabajo quedó confinada a las Islas Británicas, hasta el punto que, en 1867, Laguerre repitió el modelo simbólico matricial, de modo independiente de Cayley, para usarlo en una prolongación de la obra aritmética de Hermite. También esta vertiente de la obra de Laguerre tuvo escaso eco. El impulso definitivo a la teoría matricial fue dado por Sylvester en los ochenta, cuando estaba en estrecha relación con la matemática norteamericana. Además de por su papel en el estudio de las sustituciones y las formas bilineales, las matrices se consolidaron como objeto matemático autónomo gracias a su consideración adicional como "cantidades complejas" de orden superior, más allá de los complejos ordinarios y los cuaternios, formando álgebras de dimensiones arbitrarias.

Al igual que hicimos con los determinantes, vamos a vamos a ver que los asuntos relativos a sustituciones, formas bilineales y matrices, que se fueron completando a través de artículos en revistas de investigación, son llevados a los libros con un desfase temporal variable y adquieren de ese modo una difusión mucho mayor en la comunidad matemática y en la enseñanza superior. Seleccionaremos los ejemplos que nos parecen más significativos de mayor difusión y que nos interesan por haber llegado a tener alguna presencia en la matemática española.

Segunda parte

Llegado el momento de investigar la incorporación a la matemática española y colombiana de los métodos algebraicos lineales, empezamos el trabajo en la segunda mitad del siglo XIX porque es entonces cuando se empieza a consolidar la enseñanza superior en España, y todavía más tarde en Colombia, país al que dedicaremos un único capítulo, mientras que España tendrá dos, separados por la emblemática fecha de 1900. En relación con nuestro tema de estudio, hemos de prestar atención a la presencia de los métodos lineales en la enseñanza superior, durante un periodo en el que el álgebra está encuadrada en asignaturas de análisis matemático, a veces con el nombre de análisis algebraico; sólo al final del periodo que estudiamos emergerán en los planes de estudios asignaturas específicas de álgebra, una de ellas de álgebra lineal.

Capítulo 4. Se dedicará a recoger los métodos algebraicos lineales presentes en la matemática española de la segunda mitad del siglo XIX, con alguna incursión en los primeros años del siglo siguiente para completar la exposición. Durante este periodo no hay investigación matemática en España, tan sólo esfuerzos por actualizar el conocimiento matemático imperante en torno a la enseñanza superior, teniendo como referencia la matemática europea de similar nivel. Estos esfuerzos se aprecian en el devenir de la enseñanza superior, que va tomando los modelos europeos como referencia para sus actualizaciones. El capítulo empieza con una sección que ofrece una cierta continuidad respecto a la primera parte de la memoria, pues presenta la naturaleza del análisis algebraico imperante en la enseñanza de la matemática en Europa, que, como veremos, tuvo reflejo en España. La recepción de este aspecto de la matemática europea se produjo principalmente a través de dos obras que analizaremos por ser las que tuvieron una marcada influencia. Una es alemana (Baltzer) y la otra italiana (Capelli), la primera influyó en el último cuarto del siglo XIX y aún prolongó su influencia a principio del XX, periodo en el que fue relevada por la segunda.

La segunda sección expone las obras que en los treinta años que van de 1857 a 1887 significan la introducción y primera difusión de los determinantes y sus aplicaciones en España. Los autores considerados serán J. Cortázar, J. Echegaray, E. Jiménez, A. Suárez, L. Gascó, D. Bacas, R. Escandón y Z. García de Galdeano. Por su parte, la sección tercera se ocupará de describir los libros de texto de enseñanza superior producidos por los profesores en torno a 1890 (J. M. Villafañe, G. Fernández de Prado y M. Marzal) y que se mantuvieron vigentes hasta entrado el siglo XX. También tendremos ocasión de mostrar los artículos sobre el tema que nos ocupa, publicados en las primeras revistas matemáticas españolas y de dar noticia de unas obras sobre la teoría de las formas que exigen el conocimiento de los determinantes y de sus aplicaciones más elementales.

Para contextualizar nuestro estudio de los diversos autores iremos haciendo breves bosquejos de la situación de la enseñanza superior —con interés primordial en la enseñanza del álgebra— durante la última parte del siglo XIX en España, pasada ya la Ley Moyano (1857) que creó las Facultades de Ciencias, con las Secciones de Exactas, Físicas y Naturales. Por otra parte, los futuros ingenieros estudiaban, en general, cálculo infinitesimal y geometría analítica, siendo los estudios previos de álgebra (análisis algebraico) y geometría (con trigonometría) necesarios para ingresar en las escuelas.

Capítulo 5. El adelanto en el conocimiento y uso de los métodos lineales en la matemática española durante la primera mitad del siglo XX fue escaso, a la espera de que poco después de 1950 se incorporara al fin a la matemática española, a través de los planes de estudio de la licenciatura, el álgebra lineal entendida al modo axiomático posterior al rompedor y emblemático libro de van der Waerden.

Vimos en el capítulo anterior como el tratamiento de los métodos lineales en la matemática española del siglo XIX se adentraba con cierta inercia en los primeros años del siglo XX a través de los libros de texto universitarios. Así sucedió hasta aproximadamente 1915, cuando se produjo una sensible renovación de la exposición docente y de los libros de texto referidos a los métodos lineales. Pero, una vez más, la evolución positiva de este aspecto del análisis algebraico español se estabilizó y duró demasiado sin incorporar nuevos progresos. Este estadio final de los método lineales en el análisis algebraico español ocupará la segunda sección de este capítulo, que es una continuación natural del anterior. Antes, intercalamos una primera sección destinada a examinar cómo se utilizaron la ecuación secular (valores propios, en versión simétrica o no) y los divisores elementales (factores invariantes) en la matemática española hasta 1920. El resultado es pobre, no se encuentra ningún estudio puramente algebraico del asunto, pero sí usos de la ecuación secular en geometría analítica y en ecuaciones diferenciales. De los divisores elementales, tan sólo se aprecian menciones muy escuetas a su existencia. Tampoco las publicaciones periódicas que continuaron desde el siglo anterior ni las que aparecen nuevas —las actas de los congresos de la AEPPC a partir de 1908 y la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, 1911-17— añaden trabajos que permitan apreciar un adelanto en el conocimiento de estas materias.

Algo mejoran las cosas a partir de 1920, lo veremos en la sección tercera, pero de manera aislada y con poca continuidad. Tras la Guerra Civil, la revista escolar de la RSME *Matemática Elemental* incluye artículos en los que matemáticos jóvenes van difundiendo, a manera de lecciones, temas de la nueva álgebra axiomática y abstracta, con destino preferente los profesores de bachillerato. Por entonces, la expresión “álgebra lineal” aparece como nombre para los métodos algebraicos lineales que se explicaban en la asignatura de análisis matemático de primer curso de la licenciatura, pero sin más avances llegaremos al final de nuestro periodo de estudio. La plena fusión de la enseñanza universitaria del álgebra y la geometría tendría que esperar una década más.

La ecuación secular es un producto de la matemática del siglo XVIII, surgida del estudio de las curvas y superficies cuadráticas y en la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. En el siglo siguiente se produjo su estudio separado, en el marco de las matrices, como “método algebraico” susceptible de diversas aplicaciones en geometría y análisis, incluyendo la teoría de números. Sin salir del siglo, un poco más tarde, la ecuación secular se incorporó a las investigaciones sobre la clasificación de las sustituciones lineales, tema en el que aparecieron los factores invariantes y los divisores elementales. La primera sección de este capítulo se dedica a detectar, a lo largo de las dos primeras décadas del siglo XX, la presencia de estos elementos en la producción matemática española. Como no hay presencia en este país y periodo de un estudio sistemático algebraico de estos temas, nos limitaremos a explicar cómo se utilizan en obras de geometría y análisis o se habla de ellos en notas o comentarios de carácter complementario a los temas que se tratan.

Empezaremos por la geometría analítica, considerando los libros de texto de S. Mundi y M. Vegas , de los que J.J. Escribano ha dado en 2000 una completa descripción general en su tesis doctoral [130]. Para ver el tratamiento de la ecuación secular en los libros de ecuaciones diferenciales nos limitaremos a examinar el de García de Galdeano. Finalmente, expondremos las breves menciones encontradas a los divisores elementales en el propio Galdeano, en Rey Pastor y en Olegario Fernández Baños.

Una nueva sección, continuación natural del capítulo anterior, estará dedicada a los métodos algebraicos lineales presentes en la tradición del análisis algebraico español enraizada en Baltzer llegan hasta L. Octavio de Toledo, que vio como su joven colega Rey Pastor, desde 1915, introdujo unas referencias más modernas, principalmente la obra de A.Capelli [60] y un nuevo estilo de libro de texto más conciso y a la vez más ambicioso, con mayor uso del lenguaje simbólico aunque en menor medida de lo habitual en libros europeos. Terminada la descripción de la obra algebraica lineal de Rey Pastor haremos su comparación con la de Octavio de Toledo y también con la del italiano A. Capelli vista en el capítulo anterior.

Los treinta años que quedan del periodo de estudio planteado no son demasiado fructíferos para el avance en los temas algebraicos lineales que nos ocupan. Como este periodo está interrumpido por la Guerra Civil, será este corte dramático que cercenó el progreso científico el que aplicaremos a esta sección. En esta sección se diluye la presencia de Rey Pastor, durante la primera mitad de los años veinte permaneció en Buenos Aires, la década siguiente hasta la Guerra Civil venía a España aproximadamente un trimestre en torno al cambio de año, visitas que terminaron para no reanudarse hasta los últimos años cuarenta. Hasta 1936 los planes de estudios apenas cambiaron y no dieron ocasión a una mejor enseñanza de los métodos algebraicos lineales básicos. Veremos cómo en este periodo hubo intentos de incorporar la ecuación secular y los divisores elementales en geometría analítica y en ecuaciones diferenciales, pero por diversas causas no llegaron a fructificar. A partir de 1939, sobre todo después del plan de estudios de 1943, empieza a notarse que la nueva álgebra axiomática va llegando a España, y a se habla de "álgebra lineal", si bien todavía dentro de la asignatura Análisis matemático 1º. Pero los cambios reales en este ámbito no llegarán hasta avanzada la década de los cincuenta.

Capítulo 6. En el capítulo final de esta memoria estudiamos los sistemas de ecuaciones lineales y determinantes en la matemática superior colombiana de la segunda mitad del siglo XIX y primera del XX. Durante este periodo el país vivió una inestabilidad social, política y económica característica de la construcción de un proyecto de estado-nación después de su independencia en 1810. Haremos mención a distintas denominaciones del país, según el periodo, es decir, la Nueva Granada (1832-1857), Estados Unidos de Colombia (1869-1886) y de ahí en adelante el nombre actual, *República de Colombia.* En todo caso, hubo preocupación de sus dirigentes por el estudio de las ciencias, lo que conlleva a la puesta en marcha en 1848 del *Colejio Militar* orientado hacia la formación en ingeniería civil y militar. A mediados del primer gobierno (1845-1849) del general Tomás Cipriano de Mosquera (1798-1878) se creó el Colegio, se impulsó también la importación de libros y la puesta en funcionamiento del observatorio astronómico. El colegio sufrió cierres permanentes debido a la situación social y política de la Nueva Granada, y un cierre duradero se dio en 1854. Fue puesto en funcionamiento de nuevo en 1866, para un tercer mandato (1866-1867) de Mosquera, y al año siguiente pasó a formar parte de la naciente *Escuela de Ingeniería* de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia.

Se hace el seguimiento de la temática lineal que nos ocupa en textos de álgebra publicados en Bogotá en la época de nuestro estudio, que reflejan de algún modo el estado de la materia en Colombia. La primera sección se dedica a los libros que se publicaron a lo largo de la segunda mitad del siglo XIX, junto con una breve nota sobre las publicaciones periódicas que hubo entonces. En la segunda sección veremos lo poco que evolucionó el tema durante la primera mitad del siglo XX; en realidad podríamos decir del primer cuarto, pues durante el segundo el estado de la matemática fue estacionario.

Parte I

Historia General

Capítulo 1

Sistemas lineales y determinantes hasta c. 1850

Nuestro periodo de estudio es la segunda mitad del s. XIX y la primera del s. XX, sin embargo resulta conveniente hacer referencia a los años anteriores para conocer los preliminares de los temas a tratar. Este primer capítulo abordará el desarrollo de los sistemas lineales y los determinantes hasta aproximadamente el año 1850. Por entonces quedó establecida una teoría de determinantes con sus aplicaciones, las primeras a ciertos tipos de sistemas lineales. En este capítulo, extraeremos del exhaustivo catálogo comentado de Thomas Muir, las obras que nos parecen más significativas, de las que presentamos un análisis personal —en general coincidente con el de Muir, pero a veces matizado—basado en el estudio directo de las fuentes originales que se mencionan en los textos españoles y colombianos estudiados.

El capítulo se divide en tres secciones, de cuyo contenido damos a continuación una idea general.

1.1. La primera sección cubrirá hasta el siglo XVII, largo periodo en el que los sistemas lineales, y con ellos las primeras expresiones que con el tiempo serán los casos más sencillos de determinantes, aparecen esporádicamente y en diversas culturas. Para la Antigüedad y la Edad Media nos basaremos en el capítulo tercero de la obra del italiano Silvio Maracchia *Historia del álgebra* (2005) [252], que abarca desde las primeras civilizaciones hasta el Renacimiento[1]. Terminaremos la sección dando noticia de la obra, próxima en el tiempo, espacial y culturalmente alejada, del japonés Seki y del alemán Leibniz, que vieron con claridad la idea de determinante, pero su obra pasó, cada una por sus propios motivos, desapercibida.

Con Seki y Leibniz se inicia la monumental recopilación de Muir [266, 265], que tendremos como guía en todo nuestro recorrido sobre determinantes. La referencia sobre Seki es

[1]Previamente, en el capítulo segundo, Maracchia da cuenta del documento más antiguo de posible significado algebraico, una tablilla del milenio III a.C. que, descifrada por G. Pettinato e interpretada por T. Viola e I. Vino, significa la solución de las ecuaciones, originalmente en base sesenta, $600 = 60x$, $3600 = 60y$, $36000 = 60z$, etc., lo que parece indicar que se trata, más que de un problema de resolver las ecuaciones fáciles, de saber expresar la solución en el sistema de numeración vigente.

Annich Horiuchi [190], y para seguir la obra de Leibniz sobre determinantes, largo tiempo inédita, hay que acudir a los trabajos de Eberhard Knobloch [218, 219, 220, 221]. La notación puramente combinatoria que utilizó Leibniz fue muy acorde con su aspiración a la "característica universal", bajo la influencia o no del filósofo y matemático alemán, este tipo de lenguaje simbólico específico presidió también a la obra de Vandermonde un siglo después y, ya en el XIX, fue muy apreciada por los británicos Sylvester, Cayley y Spottiswoode.

1.2. La segunda sección expone la aparición más clara y persistente de los determinantes dispuestos para dar forma a las resoluciones de los sistemas lineales que resultan del estudio de problemas primero geométricos y luego también mecánicos, una vez puesta en circulación, respectivamente, la geometría analítica de Descartes-Fermat y el cálculo infinitesimal de Newton-Leibniz.

Con el trabajo de dos matemáticos con dedicación al estudio analítico de las curvas, Maclaurin y Cramer, queda clara la regla para resolver los sistemas lineales de igual número de ecuaciones que de incógnitas, justificada de modo inductivo a partir de los casos de orden pequeño. Pero faltan asuntos importantes para lograr una formulación satisfactoria del problema. Por una parte la propia exposición del caso general, por otra la regla de los signos que hay que atribuir a los productos de coeficientes para formar el denominador y los numeradores de las soluciones, que cada autor daba a su modo. En su prolífica obra no le faltaron a Euler momentos para tratar asuntos algebraicos lineales, como cuando reducía un forma cuadrática a suma de cuadrados, pero no dedicó una atención específica al tema como objeto de estudio independiente, más allá de comentarios generales. Para Bézout, los determinantes, a través de los sistemas lineales, fueron una herramienta para el estudio de la eliminación en sistemas de grado superior. Por el contrario, Laplace llegó a encontrar sistemas y determinantes en trabajos sobre ecuaciones diferenciales planteados por la mecánica celeste.

1.3. Si la tercera sección comienza en 1772 es por tratarse del año en que Vandermonde publicó la primera exposición sobre determinantes —dejando de lado la inédita de Leibniz— que puede calificarse como una teoría de dicho algoritmo, conocida y apreciada en su tiempo. En nuestra exposición nos ocupamos después de dos autores, Lagrange y Gauss, que, sin dedicarse, como Euler, al tema específico, ponen sobre la mesa ideas clave que influirán en el desarrollo posterior. Al calcular el volumen de la pirámide, Lagrange ofrece lo que llama un "método algebraico": del análisis de su problema extrae unos cálculos que elabora con autonomía para luego aplicarlos a su problema inicial y a otros. Sus cálculos algebraicos son una sinfonía de determinantes de orden tres, donde aparecen determinantes simples y otros cuyos elementos son a su vez también determinantes. Gauss, además de aportar métodos numéricos para resolver sistemas, trabaja en un problema aritmético con números enteros y en órdenes dos y tres, contribuyendo con una idea clave que tendrá un rico desarrollo, el manejo de los sistemas como sustituciones que transforman formas cuadráticas y, sobre todo, que se componen unas con otras.

Llevando a la mayor generalidad los métodos de Lagrange y Gauss, Binet y Cauchy, simultáneamente, completan un gran electo de fórmulas implicando sumas algebraicas de productos, pero Cauchy es más organizado y propone en 1815 una exposición completa para su tiempo de la teoría de determinantes con la aplicación a la resolución de sistemas de cualquier orden por la regla de Cramer. Cauchy apuntó en su obra otras aplicaciones de los determinantes al análisis, pero fue Jacobi, hacia 1841, quien abrió con toda su amplitud el abanico de las aplicaciones de estos algoritmos, particularmente las aplicaciones a temas de análisis matemático en los que intervienen las derivadas y las integrales. Para entonces ya se había generalizado el término "determinante" usado por primera vez por Gauss, y Cayley había propuesto en 1841 limitar ente barras verticales el cuadro de números para indicar su determinante, notación que pronto se hizo de uso común. En cambio, el término "matriz" propuesto por Sylvester en 1850 tardó en extenderse fuera de Inglaterra.

1.1 Sistemas lineales hasta el siglo XVII

El capítulo tercero de la *Historia del álgebra* [252] de Maracchia contiene también ejemplos particulares, muy bien documentados y comentados, de las ecuaciones y sistemas lineales de primer grado que fueron tratados desde las civilizaciones del Medio Oriente hasta el Renacimiento italiano. Indicaremos brevemente los ejemplos más significativos dados por el historiador italiano referidos a la historia antigua y a la época medieval y renacentista, así como en periodos paralelos de otras culturas. Para el relato de la obra de Seki nos apoyamos principalmente en Horiuchi y para la de Leibniz en los trabajos de Knobloch. Con estos autores del siglo XVII se inicia el volumen I de la obra de Muir, que es la referencia básica a partir del siglo XVIII.

1.1.1 Ecuaciones y sistemas en la Antigüedad

Papiros egipcios del milenio II a.C. contienen la solución de ecuaciones como la sencilla $(1+\frac{1}{2})x+4=10$ o la más elaborada $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=37$, la solución de esta última dada en la forma $x=16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$, que refleja, al igual que la ecuación, la preferencia de los egipcios por las fracciones unitarias.

Aproximadamente del mismo periodo, se han hallado en Babilonia tablillas que contienen un problema de extensión de terrenos que lleva a plantear un sistema lineal de la forma

$$\begin{cases} \frac{x}{1800}4\cdot 300-\frac{y}{1800}3\cdot 300=500 \\ x+y=1800 \end{cases}$$

cuya solución se alcanza por falsa posición con valor inicial $x=y=900$.

Ya en la Grecia clásica, no hay que esperar a Diofanto para encontrar solución de sistemas lineales. El pitagórico Timarida —de difícil datación (hacia s. IV-V a.C.), probablemente de la época de Platón— resolvió un sistema de la forma

$$\begin{cases} x+x_1=a_1 \\ x+x_2=a_2 \\ \dots \\ x+x_{n-1}=a_{n-1} \\ x+x_1+\dots+x_{n-1}=S \end{cases}$$

mediante un discurso algebraico adecuado al que sólo le faltaba la expresión simbólica. Más tarde, hacia el s. I-II d.C., se escribe un papiro griego, descubierto y descifrado ya en el s. XX, que contiene un simbolismo que bien pudo influir en Diofanto. En él se resuelve el sistema

$$\begin{cases} B=(1+\frac{1}{7})A \\ C=A+B+300 \\ D=A+B+C+300 \\ A+B+C+D=9900 \end{cases}$$

pasando a otro en función de $x=\frac{A}{7}$, que una vez resuelto ($x=150$) da las variables iniciales en función de x. Gámblico (s. III d.C.), utilizó el método de Timarida para resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(x_3 + x_4) \\ x_1 + x_3 = 3(x_2 + x_4) \\ x_1 + x_4 = 4(x_2 + x_3) \end{cases}$$

y otro igual con coeficientes numéricos racionales en los segundos miembros. De la misma época romana es Diofanto, cuyo dominio de los sistemas se manifiesta con plenitud en los de segundo grado, pero que dejó resueltos algunos problemas de primer grado, como encontrar dos números conocidos su suma y su diferencia.

La influencia de Tamarida viajó también hacia el este, algunos sistemas de su formato se encuentran en la *Antología griega* de Metrodoro de Bizanzio (s. IV-V d.C.), obra en la que también aparece el epigrama de la edad de Diofanto, que se determina resolviendo la ecuación

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x,$$

de un tipo ya visto en los papiros egipcios.

Cierta similitud con el sistema de Tamarida tiene el que aparece en un manuscrito indio del s. III-IV d.C. (o tal vez anterior), que presenta la importancia de ser reconocido por el autor como un sistema indeterminado del que se obtiene una solución al dar un cierto valor a un parámetro auxiliar. El sistema es

$$\begin{cases} \frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = S \\ x_1 + \frac{x_2}{3} + x_3 + x_4 + x_5 = S \\ \dots \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{x_5}{6} = S \end{cases}$$

del que el autor obtiene por eliminación un parámetro $q = \frac{x_1}{2} = 2\frac{x_2}{3} = \cdots = 5\frac{x_5}{6}$ y, con $q = 60$, da una solución al sistema. Más tarde, en el s. V, la obra *Aryabhativa* del indio Aryabhata contiene un sistema muy similar al de Tamarida:

$$\begin{cases} x + x_1 + \cdots + x_n = S \\ S - x_1 = d_1 \\ S - x_2 = d_2 \\ \dots \\ S - x_n = d_n \end{cases}$$

Instalados en el Lejano Oriente, los chinos lograron importantes resultados en la famosa obra *Arte del cálculo en nueve capítulos*, que tiene una fecha imprecisa entre el s. II a.C. y el s. I d.C., como recopilación de resultados obtenidos en un periodo anterior indeterminado. En el capítulo séptimo de dicha obra se resuelven varios problemas referidos a la compra de ciertos bienes por un grupo de personas, se trata de determinar cuántas personas eran y cuanto dinero gastaron entre todos a partir de una dato por exceso y otro por defecto. Dos de los problemas planteados los representaríamos ahora mediante los sistemas:

$$\begin{cases} 8x = y + 3 \\ 7x = y - 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x = y + 11 \\ 6x = y - 16 \end{cases}$$

El procedimiento de resolución, aún descrito sobre cada caso particular, muestra la existencia de la siguiente regla de resolución, explicada como cuentas a realizar con los coeficientes:

$$\begin{cases} a_1x = y + b_1 \\ a_2x = y - b_2 \end{cases}, \ a_1 > a_2; \qquad y = \frac{b_2a_1 + b_1a_2}{a_1 - a_2}, \ \ x = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}$$

Más notable es que en el capítulo siguiente, el octavo, se resuelva un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. En este caso el problema se refiere a una mezcla de granos y su planteamiento responde al sistema indicado abajo a la izquierda:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 36z = 99 \end{cases}$$

Los matemáticos chinos manipulaban la tabla de coeficientes haciendo sucesivamente ceros hasta llegar al sistema indicado arriba a la derecha, del que se obtiene la solución[2]. Este procedimiento es el que conocemos como "método de eliminación de Gauss".

1.1.2 Continuación desde la Edad Media

Sistemas similares a los de Tamarida y Gámblico reaparecen siglos después en Oriente y Occidente. En el tratado *Ganita Sara Samgraha*, del indio Mahavira (s. IX), se enuncia un problema relativo a tres mercaderes que encuentran una bolsa de dinero y comparan su riqueza según quien se quede con la bolsa; un problema similar, con cuatro hombres, se

[2]Para explicaciones pedagógicas sobre éste y otros asuntos tratados por la matemática china véase C. Maza, *Matemáticas en la antigua China. Una isla en el mar*, Univerisdad de Sevilla, Sevilla 2009.

describe en el *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa (s. XII-XIII). Los problemas enunciados se escriben en forma de sistema como sigue, en orden de escritura cronológico:

$$\begin{cases} b+x=2(y+z) \\ b+y=3(x+z) \\ b+z=4(x+y) \end{cases} \qquad \begin{cases} b+x=2(y+z) \\ b+y=3(z+t) \\ b+z=4(t+x) \\ b+t=5(x+y) \end{cases}$$

Leonardo de Pisa señala que el sistema tiene solución si el dinero que posee el primer hombre es una deuda, lo que significa la aparición explícita de una solución negativa, identificada en términos de la magnitud afecta al problema, en este caso el dinero. El sistema es indeterminado pero Leonardo sólo da una solución. Un problema parecido, algo más complejo, es resuelto en el *Triparty* por Chuquet (s. XV) señalando dos de las soluciones posibles.

El cero y los números negativos, con las reglas de los signos para operar con ellos, fueron descritas en la obra del indio Brahmagupta (s. VI), que contiene también ecuaciones lineales, para las que establece reglas enunciadas en casos particulares pero que tienen el aspecto de reglas generales: la solución de la ecuación $ax+b=cx+d$ es $x=\frac{d-b}{a-c}$. Las ecuaciones lineales siguen siendo objeto de estudio siglos después por Baskara (s. XII), quien plantea en su *Lilavati* un problema que se simboliza con la ecuación $\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}x+3(\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x)+1=x$, resuelta por el método de falsa posición; en una obra posterior, *Vija Ganita*, Baskara resuelve el mismo problema directamente mediante manipulación algebraica.

La técnica de manipulación algebraica fue inventada por los árabes, *Al-Khuwarizmi* (s. IX), al tiempo que forjaron la palabra originaria del término "álgebra", pero utilizaron también los métodos de falsa posición, simple y doble; de ellos los aprendió Leonardo de Pisa, que expuso el de doble falsa posición en el *Liber Abaci*.

Por entonces el imperio chino y su ciencia matemática vivían un periodo de esplendor en el que destaca, entre otros logros, la resolución de sistemas lineales indeterminados como el resuelto por Chin Kin Shao (s. XIII), que se conoce como "teorema chino de los restos". Se trata de un sistema indeterminado ((1.1.1) izquierda) que se suele representar mediante congruencias ((1.1.1) derecha), concepto que no surgió hasta Gauss:

$$\begin{cases} x = 32 + 83y \\ x = 70 + 110z \\ x = 30 + 135t \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 32 \pmod{83} \\ x \equiv 70 \pmod{110} \\ x \equiv 30 \pmod{135} \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Ya en el s. XVI, cuando los matemáticos italianos están resolviendo con éxito las ecuaciones de grado menor o igual que cuatro, Cardano resuelve en el *Ars Magna* (1545) un sistema lineal, enunciado y resuelto con palabras, pero con un método que ya entiende como una «regula de modo» que vale en todos los casos similares. El sistema y la solución en la primera variable, por eliminación de la otra, son:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 72 \\ 2x + 4y = 52 \end{cases}, \qquad x = \frac{72\frac{4}{3} - 52}{7\frac{4}{3} - 2}.$$

Es bien sabido que en el tiempo narrado el único simbolismo que existía era la representación de los números, los sistemas anteriores se han contado con un lenguaje simbólico actual que es anacrónico, lo que el propio Maracchia no deja de advertir:

> Con una simplificación, no del todo lícita, hemos sintetizado los procedimientos vistos con nuestro simbolismo, con el riesgo de que parezcan demasiado modernos estos primeros pasos algebraicos. [252, p. 68]

No obstante, los sistemas resueltos reflejan algunas ideas básicas del álgebra, como la de igualdad, y la de unas reglas de cálculo con atisbos de generalidad aunque expresadas rudimentariamente sobre casos particulares.

La contribución de François Viète (1540-1603) al desarrollo de la teoría y notación algebraica consiste en una manera de escribir las ecuaciones en forma general. En *Introducción al Método Analítico* (1591) emplea las consonantes para denotar cantidades conocidas y la letra "y" griega junto con las vocales para designar cantidades desconocidas. Viète concluye su propuesta en el último párrafo de su obra con estas palabras:

> 29. Finalmente, el arte analítico, una vez ha sido presentado en su forma triple de Zetética, Porística y Exegética, se apropia del mayor problema de los proble-

> mas, que es: NINGÚN PROBLEMA SIN RESOLVER. [350, p. 9] OJO CON LA TRADUCCIÓN

Su método es un tipo de análisis que está compuesto de tres partes fundamentales. La zetética, o arte de plantear los problemas, la porística que estudia los teoremas, transforma y discute aquella ecuación, y la exegética, la búsqueda de la solución de la ecuación bien sea por construcciones geométricas, o por cálculos numéricos.

1.1.3 Los determinantes: Seki y Leibniz

Antes de centrarnos en la matemática occidental, haremos una referencia a la matemática japonesa del s. XVII, que, contando ya con la influencia de los jesuitas ampliamente instalados en el Lejano Oriente, tuvo un momento de esplendor en el que destacó Seki Takakazu (?-1708), cuya obra ha sido ampliamente estudiada por Annich Horiuchi [190]. Al perfeccionar los métodos de resolución de problemas de los matemáticos chinos del s. XIII, Seki llegó a plantearse la eliminación de incógnitas en sistemas de ecuaciones de grado superior y formación de resultantes, en cuyo proceso construyó las expresiones algebraicas que identificamos como determinantes, dando además algunas de las propiedades de estas expresiones. Por ejemplo, al tratar de eliminar la incógnita de un sistema de n ecuaciones de grado $n-1$, Seki obtuvo que la resultante (terminología actual) del sistema

$$\begin{cases} C + Bx + Ax^2 = 0 \\ F + Ex + Dx^2 = 0 \\ I + Hx + Gx^2 = 0 \end{cases}$$

es $EGC + AHF + BDI - DHC - BGF - AEI = 0$.

Los trabajos de Seki tuvieron una influencia limitada en su país y no llegaron a la matemática occidental, donde, por los mismos años, se ocupaba de parecidos asuntos Leibniz, cuyos logros en este campo quedaron inéditos.

Las investigaciones sobre sistemas lineales y eliminación realizados por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) entre 1678 y 1713 no fueron publicadas en su tiempo y permanecieron desconocidas, los manuscritos, escritos en latín, no fueron descubiertos hacia. 1850. La publicación de la transcripción de los manuscritos fue realizada en 1980 por Knoboch [217], que también ha publicado numerosos estudios sobre la obra de Leibniz, particularmente en el campo que aquí nos ocupa [218, 219, 220, 221], llegando a la opinión de que Leibniz no publicó sus logros en este campo, entre otras razones, porque[3] "ningún resultado fue demostrado, todas las reglas, todos los teoremas reposan sobre observaciones, sobre una inducción". No obstante, Leibniz comunicó aspectos de estos trabajos a alguno de sus corresponsales, como el marqués de L'Hôpital (1693) [240] y Ch. Reyneau, quien en 1708 publicó [296] una explicación del uso combinatorio de los índices —más adelante veremos una muestra— por parte de Leibniz.

Sus manuscritos muestran que el genial matemático alemán llegó a concebir una teoría de determinantes y obtuvo resultados sobre sistemas lineales y eliminación que fueron redescubiertos por otros autores a lo largo del siglo XVIII e incluso en el XIX. En lo que a sistemas se refiere, uno de sus primeros logros fue la llamada regla de Cramer, con la determinación clara del algoritmo de sumas combinatorias de productos con signo formados con los coeficientes del sistema. Hacia 1683, expuso —sin explicar como llegó a ella— la regla de reducción para sistemas cuyo número de ecuaciones supera en una unidad al de incógnitas. Utilizaremos esta regla[4] para mostrar el modo de proceder de Leibniz, en el que destaca una notación inspirada en su búsqueda de la "característica universal", un lenguaje simbólico que permitiera expresar mejor el conocimiento e impulsar su avance.

La regla está expuesta en un lenguaje discursivo, añadiendo un ejemplo con dos incógnitas en el que emplea una notación que prescinde de los coeficientes numéricos —que pueden ser números cualesquiera— y refleja únicamente con dos dígitos las claves numéricas de su posición, el primero indica la ecuación, el segundo indica la incógnita a la que pertenece:

$$\begin{cases} 10 + 11x + 12y & = 0 \\ 20 + 21x + 22y & = 0 \\ 30 + 31x + 32y & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{10} + a_{11}x + a_{12}y & = 0 \\ a_{20} + a_{21}x + a_{22}y & = 0 \\ a_{30} + a_{31}x + a_{32}y & = 0 \end{cases}$$

El sistema representado a la izquierda es el original de Leibniz —que lo escribe en horizontal separando con comas las ecuaciones—, y a la derecha se indica la correspondiente notación que pronto se hizo usual y lo sigue siendo. En este contexto, para Leibniz 10 es un "número ficticio", no representaba el número diez sino un número cualquiera puesto en la primera ecuación (1) y en la posición del término independiente (0); lo mismo hay que decir de los demás pares de dígitos que ahora representamos como subíndices. Afirma

[3]Veáse [221, p. 164].

[4]Está en el manuscrito de 1683-84, *De canone pro tollendis incognitis I*, nº 16, pp. 80-83, en [217].

Leibniz que en este sistema se puede suprimir una ecuación porque se verifica la siguiente condición, escrita —abajo a la izquierda— como en la transcripción de Knobloch:

$$\left.\begin{array}{rl} + & 10\cdot 21\cdot 32 \\ - & 10\cdot 22\cdot 31 \\ - & 11\cdot 20\cdot 32 \\ + & 11\cdot 22\cdot 30 \\ + & 12\cdot 20\cdot 31 \\ - & 12\cdot 21\cdot 30 \end{array}\right\} = 0 \qquad\qquad \begin{array}{rl} + & 0,1,2 \\ - & 0,2,1 \\ - & 1,0,2 \\ + & 1,2,0 \\ + & 2,0,1 \\ - & 2,1,0 \end{array}$$

que en terminología actual corresponde a la anulación del determinante del sistema: $|a_{ij}| = 0$. Se observa el modo metódico en que Leibniz ordena los seis productos de tres factores, uno de cada ecuación y cada término independiente o incógnita; en cuanto a la asignación de signo, su regla es la siguiente:

> A una combinación se le asigna un signo arbitrario, y las que le siguen que difieren en dos, cuatro, seis, etc. coeficientes tiene signo opuesto al de ella; aquellas que difieren en tres, cinco, siete, etc. coeficientes tiene el mismo signo que ella. [217, p. 80]

Aquí Leibniz entiende por "coeficiente" cada uno de los dígitos que aparecen en una de las seis combinaciones, pero como los que ocupan la primera posición en cada uno de los tres pares (los que indican ecuación) son iguales, en realidad las diferencias sólo se aprecian en los de la segunda posición (los que representan término independiente o incógnita), de modo que los signos se corresponden con los de las permutaciones que se muestran en la columna de la derecha de la tabla doble anterior.

Esta regla de los signos es correcta para $n = 2, 3$, pero falla en sistemas de mayor tamaño; también fue incorrecta la regla anterior y primera, la que había dado cuando enunció la regla de Cramer. Leibniz era consciente de este problema y en manuscritos sucesivos fue modificando la regla de los signos hasta dar con la correcta en la quinta versión que enunció en 1684, con una nueva formulación el mismo año en términos de transposiciones (Veáse [221]).

1.2 Primeros pasos en el siglo XVIII

La geometría analítica, a medida que se fue desarrollando, planteó varios problemas generales que impulsaron el desarrollo de los sistemas lineales y los determinantes:

1. El problema de las intersecciones de figuras geométricas expresadas mediante sus ecuaciones. Este se estudia por casos, el caso más sencillo, las ecuaciones de primer grado y el caso más general, el de las ecuaciones de grado superior, esto es,
   - Intersección de rectas y planos, que corresponde a los sistemas de ecuaciones lineales.
   - Intersección de curvas planas, la teoría de la eliminación, en la que se aplicarán los sistemas lineales y con ello los determinantes.
2. Determinación de curvas algebraicas por puntos, que da lugar a sistemas lineales.
3. Independencia de puntos en el espacio y cálculo de los volúmenes que engendran.
4. El problema de la invarianza, es decir, que las propiedades de las figuras obtenidas mediante ecuaciones no dependan del sistema de coordenadas.

En el estudio de estos temas los determinantes juegan un papel fundamental como un algoritmo que permite escribir fórmulas y encontrar soluciones a los problemas de la época. Además, los cálculos se efectúan con los números de la geometría, los números reales, pero la experiencia matemática fue creando otros ámbitos para lo lineal. Con la aparición del cálculo infinitesimal, las derivadas y las diferenciales, en cuanto aproximación lineal de las funciones más generales, algebraicas y trascendentes, así como de las ecuaciones diferenciales lineales, los sistemas lineales y los determinantes tuvieron su papel en la teoría de funciones del análisis matemático.

1.2.1 Maclaurin, Cramer y Euler

C. Maclaurin, 1748.

Se tiene conocimiento[5] que la regla de Cramer fue dada por Colin Maclaurin (1698 -1746) en 1729, aunque no vio la luz pública hasta su obra póstuma *Treatise of Algebra* (1748)

[5] Veáse [182, 41]

[249], en la que la demuestra para sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3, y deja indicado el caso 4×4. El *Treatise of Algebra* de Maclaurin tiene tres partes, la primera dedicada a las operaciones de la aritmética y a las ecuaciones lineales y cuadráticas, la segunda desarrolla la resolución algebraica y numérica de las ecuaciones de grado arbitrario, y la tercera se anuncia dedicada a "aplicación de álgebra y geometría, cada una a la otra", contiene el estudio de las curvas, principalmente las cónicas, cúbicas y bicuadradas.

Los sistemas lineales se tratan en dos capítulos de la primera parte cuyos títulos son:

> XI. De la solución de cuestiones que producen ecuaciones simples
>
> XII. Conteniendo algunos teoremas generales para expresar las incógnitas[6] en ecuaciones dadas

En el Capítulo XI el autor da una colección escolar de problemas resueltos. Unos tienen un enunciado directamente matemático y otros son problemas de la vida cotidiana, pero todos se traducen en la formulación de un sistema de dos o tres ecuaciones que hay que resolver. Hay sistemas lineales, pero también los hay de dos ecuaciones que combinan una lineal con otra referida a productos, proporciones o expresiones cuadráticas, como ya se conocían desde Diofanto. Los sitemas lineales 2×2 o 3×3 son resueltos por métodos específicos cuando son particularmente sencillos, y otros por los métodos generales que el autor eleva a teoría en el capítulo siguiente. El capítulo termina con un párrafo en el que se indica que si hay más cantidades a determinar que ecuaciones puede haber un número infinito de soluciones y, al contrario, si es el número de cantidades es menor puede ser imposible encontrar una solución, 'porque algunas de las condiciones pueden ser inconsistentes con otras".

El Capítulo XII contiene dos teoremas, rotulados respectivamente [249, p. 82, p. 83] como "Teorema I" y "Teorema II", que transcribimos literalmente con su propia notación:

> §86. Supongamos que se dan dos ecuaciones, con dos cantidades desconocidas, como
>
> $$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$
>
> Entonces será
>
> $$y = \frac{af - dc}{ae - db}.$$

[6] En el original: "for the exterminating unknown quantities".

...

§87. Supongamos ahora que se dan tres cantidades desconocidas y tres ecuaciones, entonces llamamos a las cantidades desconocidas x, y, y z.

Así,

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + kz = p \end{cases}$$

Entonces será

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}.$$

Maclaurin demuestra el primer teorema despejando x de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, lo que da una ecuación lineal de la que despeja y. Luego escribe la solución para x, que, dice, se obtiene "de la misma manera". Termina el caso con dos ejemplos numéricos con coeficientes enteros positivos y negativos.

Para demostrar el segundo teorema recurre al primero. Toma las parejas de ecuaciones primera y segunda, primera y tercera, calculando de ellas la y (Teorema I) después de pasar los sumandos en z al segundo miembro; igualando las dos expresiones así obtenidas obtiene una ecuación lineal en z que resuelve. Termina afirmando: "Los valores de x e y se encuentran después de la misma manera, y tienen el mismo denominador". En este caso no incluye ejemplos numéricos.

En ambos teoremas el autor acompaña el cálculo algebraico con una descripción en lenguaje común del numerador y el denominador de la expresión resultante para las incógnitas. El primer caso es sencillo de explicar, pero en el segundo aumenta la complejidad y Maclaurin expresa el valor de z del siguiente modo:

> ...el numerador consiste de todos los diferentes productos que se pueden hacer de tres coeficientes opuestos tomados desde todos lo órdenes en los que z no se encuentra; y el denominador consiste de todos los productos que se pueden hacer de los tres coeficientes opuestos tomados desde los órdenes que contienen la tres cantidades desconocidas. [249, p. 82]

En la cita anterior, los "coeficientes opuestos" son lo que se toman de diferente ecuación y de diferente "orden", donde este término se refiere a las incógnitas, a las que habría que añadir, aunque no lo menciona, los términos independientes. Es importante notar que esta descripción de los productos en las fórmulas para las incógnitas no es muy precisa, pero, sobre todo, que Maclaurin no explica el modo en que los productos tienen signo positivo o negativo, parece que para él los signos fueran el resultado del cálculo, sin apercibirse del modo en que los signos se pueden asignar sin necesidad de hacer los cálculos, lo que había hecho con claridad Leibniz. No obstante, cuando termina el capítulo exponiendo sólo con palabras la forma de proceder con un orden más de dificultad, da una idea orientativa del modo de proceder, que es inductivo, llegando a mencionar al final, sucintamente, la regla de los signos, de la que no da ejemplos. El último párrafo del Capítulo XII del *Treatise* dice así:

> Si se dan cuatro ecuaciones, incluyendo cuatro cantidades desconocidas, sus valores se pueden encontrar mucho después de la misma manera, tomando todos los productos que se pueden hacer de cuatro coeficientes opuestos, y siempre prefijando signos contrarios a aquellos que incluyen los productos de dos coeficientes opuestos. [249, p. 85]

La expresión "mucho después de la misma manera" probablemente significa que siguiendo el camino inductivo para $n = 4$ los cálculos serán mucho más largos. El método que deja insinuado Maclaurin es inductivo, para resolver el sistema con $n = 4$ habrá que apoyarse en lo hecho para $n = 3$ y así sucesivamente, pero los cálculos se hacen muy largos y tampoco le compensa poner ejemplos.

Es ilustrativo comparar los métodos de Leibniz y Maclaurin. El primero, en unos manuscritos para su propio uso en los que condensa las conclusiones obtenidas de sus investigaciones, no muestra los cálculos realizados —sin duda los haría—, pero sí expone., con una notación característica, la simple combinatoria que permite escribir directamente la conclusión a partir del cuadro de coeficientes del sistema. El segundo, en un libro publicado destinado a los estudiosos del álgebra, expone cálculos de modo inductivo, pero no llegó a exponer con amplitud y rotundidad, aunque la enuncia, la descripción combinatoria, incluida la regla de los signos, de las fórmulas finales con independencia del procedimiento de su obtención.

G. Cramer, 1750.

La siguiente contribución interesante llegó con la obra de Gabriel Cramer (1704-1752) *Introduction à L'Analyse des Lignes Courbes Algébraiques* (1750) [93], que es un libro de geometría algebraica plana, es decir, de la geometría analítica del plano llevada a un nivel avanzado mediante el estudio del álgebra. La obra consta de trece capítulos en los que se trata de centros y diámetros de las curvas, tangentes, puntos de inflexión y singulares, etc. En el capítulo III, el autor enuncia que la ecuación de una curva de grado n se puede determinar si se conocen $\frac{1}{2}n(n+3)$ puntos de la misma[7] . Para ilustrar este enunciado considera las cónicas ($n = 2$), cuya ecuación escribe de la forma $A + By + Cx + Dyy + Exy + xx = 0$. Explica que encontrar la cónica que pasa por cinco puntos se hace resolviendo un sistema de ecuaciones lineales 5×5, para cuya solución general remite al Apéndice I de la obra [93, pp. 657-659], del que damos un amplio fragmento conservando su notación:

> Sean varias incógnitas z, y, x, v, etc, & otras tantas ecuaciones
>
> $$\begin{cases} A^1 = Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + etc. \\ A^2 = Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + etc. \\ A^3 = Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + etc. \\ A^4 = Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + etc. \\ \qquad\qquad etc. \end{cases}$$
>
> [...]
>
> [...] si sólo hay una ecuación y una incógnita z; se tendrá $x = \frac{A^1}{Z^1}$. Si hay dos ecuaciones & dos incógnitas $z\&y$; se encontrará $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$, & $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$. Si hay tres ecuaciones & tres incógnitas z, y, & x; se encontrará
>
> $$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 + A^2Y^1X^3 - A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + Z^2Y^1X^3 - Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1},$$
>
> $y = [\dots], x = [\dots]$.
>
> El examen de estas fórmulas proporciona esta regla general. Siendo n el número de las ecuaciones & de las incógnitas, se encontrará el valor de cada incógnita formando n fracciones cuyo denominador común tiene tantos términos como colocaciones diversas hay de n cosas diferentes. Cada término está compuesto por las letras $ZYXV$ etc. siempre escritas en el mismo orden, pero a las cuales se aplican como exponentes, las n primeras cifras colocadas de todas las maneras posibles. [...] Se da a estos términos los signos + o −, según la regla siguiente. Cuando un exponente está seguido en el mismo término, mediatamente o inmediatamente, por un exponente menor que él, llamaré a esto un *desacuerdo*. Se cuenta, para cada término, el número de desacuerdos: si es par o nulo, el término tendrá el sigmo +; si es impar, el término

[7]Cramer usa la letra ν y escribe $\frac{1}{2}\nu\nu + \frac{3}{2}\nu$.

> tendrá el signo −.
>
> [. . .]
>
> Así formado el denominador común, se tendrá el valor de z dando a este denominador el numerador que se forma cambiando, en todos sus términos, Z por A. Y el valor de y es la fracción [. . .].

En las partes del texto que no hemos citado, Cramer se explaya en alguna explicación adicional y en ejemplos numéricos sencillos que ayuden a comprender lo expuesto en general. También indica que "generalmente hablando, el problema es determinado", pero puede haber casos indeterminados o imposibles cuando el denominador es nulo.

Así formuló el autor suizo la regla que hoy lleva su nombre: «regla de Cramer». Hay autores que sostienen que la regla debería llevar el nombre de Maclaurin por un criterio recto de prioridad, y que Cramer se ha beneficiado de la mayor pujanza en su tiempo de la matemática continental frente a la insular. Pero a partir del cotejo de ambas exposiciones es correcto deducir que a Maclaurin le faltó enunciar con suficiente claridad y extensión la asignación del signo a los términos de las fracciones, cosa que Cramer hizo de un modo más explícito. En cambio el suizo, quizás porque lo daba por conocido, no se preocupó de explicar los cálculos que llevan a obtener dichas fracciones, cuya estructura combinatoria explicó con más claridad que su precursor inglés.

L. Euler, 1750

Casi podría darse por sorprendente que Euler no haya aparecido al recorrer el siglo XVIII siguiendo la traza de los determinantes y los sistemas lineales. Ha sido así porque, en efecto, Euler no dedicó una atención especial y decisiva a estos temas.

Ya mencionamos el interés de Cramer por determinar las ecuaciones de las curvas algebraicas mediante un número determinado de sus puntos, tema en el que se aplican los sistemas lineales. En el caso de una cúbica (grado $n = 3$) se necesitan $\frac{1}{2}n(n+3) = 9$ puntos. Por otra parte la teoría de la eliminación estudia la intersección de curvas, determinando que dos cúbicas se han de cortar en $3^2 = 9$ puntos. La contradicción entre estas dos conclusiones se conoce cono la "paradoja de Cramer", de la que se ocuparon varios contemporáneos[8]. Uno de ellos fue L Euler (1707-1783) quien trató estos temas en sus trabajos *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter* (1749) [138] y *Sur une*

[8]No fue resuelta hasta Plücker en el siglo siguiente.

contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes (1750) [139], donde considera conjuntos de ecuaciones lineales en los cuales una ecuación depende de otra, haciendo comentarios juiciosos pero sin completar un tratamiento preciso del tema. En el último de los artículos citados, que está dividido en 23 apartados, después de hacer las consideraciones geométricas, discute el caso más simple, el lineal con igual número de ecuaciones que de incógnitas y ofrece tres ejemplos acompañados de estas reflexiones:

> Vamos a considerar estas dos ecuaciones $3x - 2y = 5$ & $4y = 6x - 10$, se ve primero, que no es posible determinar las dos incógnitas x & y: pues al eliminar x, la otra se elimina también, y se obtiene una ecuación idéntica, de la cual no se puede determinar nada. La razón de este incidente es en principio evidente, porque la segunda ecuación se convierte en $6x - 4y = 10$, que no es más que el duplo de la primera $3x - 2y = 5$, que no difieren en puntos. [139, p. 225]

Después de ilustrar la misma situación para el caso de tres y cuatro variables, afirma:

> La misma circunstancia tiene lugar en cualquier número de ecuaciones que se quiera
>
> [...] cuando uno dice que para determinar n incógnitas, es suficiente tener n ecuaciones que expresen sus relaciones mutuas, hay que añadir la restricción que todas las ecuaciones sean diferentes entre ellas, o que ninguna esté contenida en las otras. [139, p. 227]

Esta idea de 'estar contenida" una ecuación en otras siendo algo más que no ser una de ellas parece indicar que Euler tenía una idea más o menos precisa de lo que se fue entendiendo como dependencia lineal de las ecuaciones. En otros aspectos del trabajo de Euler aparecen también problemas algebraicos de tipo lineal, pero sin formar una corriente de actividad en sí misma, sino formando parte de la enorme pluralidad de temas que abarcó en su prolífica vida matemática. Así, por ejemplo, las transformaciones lineales fueron tratadas por Euler en el apéndice del capítulo quinto del tomo segundo de *Introductio in analysin infinitorum* (1748) [137] en términos de cambios de coordenadas para llevar una forma binaria y ternaria a su expresión como suma de cuadrados. Otro ejemplo es la determinación por cambio de coordenadas de las direcciones principales de curvatura en un punto de una de una superficie [116].

1.2.2 Avances de Bézout y Laplace

E. Bézout, 1764

La cuestión de la regla de los signos siguió siendo mucho tiempo un tema de reflexión para los matemáticos. Así le pasó a Étienne Bézout (1730-1783), quien publicó en 1764 un trabajo[9] titulado *Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations* [32], con el fin de reducir la eliminación de un sistema de ecuaciones de cualquier grado con dos incógnitas a la eliminación en un sistema lineal homogéneo de un número de incógnitas a determinar, cuya resultante es esa complicada expresión formada con los coeficientes del sistema que se llegaría con el tiempo a llamarse determinante.

En la introducción del artículo[10], Bézout señala que esa expresión ya la había dado Cramer, pero que su regla de los signos para confeccionarla es un poco complicada "cuando se pasa de un cierto número de incógnitas". Con este motivo, dedicó el inicio del artículo, con el rótulo de "Lema I", a dar un procedimiento mecánico inductivo para escribir dicha expresión.

Las instrucciones inductivas que da Bézout son las siguientes en una primera parte:

(i) Tome dos coeficientes a, b y forme las dos permutaciones ab, ba y la expresión $ab - ba$.

(ii) Tome tres coeficientes a, b, c. Tome la primera permutación anterior ab y añadiendo "la letra c, forme todas las permutaciones posibles, cambiando de signo cada vez que c cambie de lugar en ab", es decir, resulta $abc - acb + cab$. Haciendo lo mismo con $-ba$ resulta en el conjunto de ambas dos permutaciones: $abc - acb + cab - bac + bca - cba$.

(iii) "Con estas permutaciones fijas & la letra d, forme todas las permutaciones posibles, cambiando de signo cada vez que d cambie de lugar en un mismo término ..." Así se llega a una expresión con 24 términos, siendo los cuatro primeros $abcd - abdc + adbc - dabc$ y los cuatro últimos $-cbad + cbda - cdba + dcba$ ... y así sucesivamente.

La segunda parte del proceso seguido por Bézout consiste en aplicar lo anterior a los

[9] Años después Bézout incorporó estas investigaciones en su libro *Théorie générale des equations algébriques* (1779) [33].

[10] Es un artículo extenso, de 51 páginas, pero lo que se refiere a la eliminación en sistemas lineales homogéneos de igual número de ecuaciones que incógnitas ocupa sólo las primeras cuatro páginas técnicas, después de otras cuatro de introducción que son en buena medida una historia de la eliminación en grado superior.

sistemas, también de modo inductivo. El primer caso es claro: Si se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases}$$

la ecuación de condición será $ab' - ba'$ o $ab' - a'b$. En el caso de tres incógnitas

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \end{cases}$$

se toma la expresión obtenida en (ii) para los coeficientes de la primera ecuación y se aplica la siguiente regla que vale para todos los casos:

> ...conserve las letras que ocupan el primer lugar; dé a las que ocupan el segundo, la misma marca que tienen en la segunda ecuación; a las que ocupan el tercero, la misma marca que tienen en la tercera ecuación, & así sucesivamente; iguale al fin el total a cero & y tendrá la condición buscada. [32, p. 292]

Volviendo a las tres ecuaciones, se pasa por la regla anterior de la expresión de (ii) a $ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' = 0$. El autor indica que se pueden reordenar los términos para dejarlos en el orden principal de las letras, resultando así:

$$ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c = 0.$$

Bézout llega a imprimir las expresiones para cuatro y cinco variables, pero como son muy largas y necesitará utilizarlas en problemas de eliminación de grado superior "conviene darles", dice, "una forma que haga las sustituciones lo menos penosas que sea posible". De este modo obtiene lo que llegará a ser el desarrollo de un determinante por los elementos de una fila o columna. En el caso de tres ecuaciones escribe:

$$(ab' - a'b)c'' + (a''b - ab'')c' + (a'b'' - a''b')c = 0.$$

P-S. Laplace, 1772

La matemática francesa produjo un nuevo avance en la dirección de Cramer y Bézout gracias a Pierre-Simon Laplace (1749-1827), quien se aproximó al problema desde investigaciones bien diferentes a las de sus colegas anteriores. Cramer y Bézout eran preferentemente geómetras algebristas, ocupados en cálculos de intersección de curvas algebraicas planas o raíces comunes a diversas ecuaciones, para lo que se utilizaban los métodos de eliminación de incógnitas en ecuaciones de la forma $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$, siendo f, g polinomios de grados arbitrarios. En la resolución de este difícil problema jugaba un papel la eliminación en sistemas lineales de tamaño arbitrario, lugar en el que aparecen las "expresiones resultantes" que acabarían llamándose determinantes.

Laplace se ocupaba de un tema bien distinto, estaba tratando de integrar de modo aproximado las ecuaciones diferenciales que aparecen en el estudio mecánico del sistema del mundo, del movimiento de los planetas y satélites, así lo hizo en su memoria *Recherches sobre le calcul integral et sur le systeme du monde* (1772) [237], en la que continúa investigaciones de Lagrange, D'Alembert y Condorcet. Dicha memoria tiene cinco apartados, los dos primeros están dedicados a la integración, siempre aproximada, de ecuaciones diferenciales de segundo orden. En el tercero, considera el autor sistemas de estas ecuaciones del tipo anterior y en el proceso de su solución aproximada encuentra un sistema lineal cuadrado en cuya diagonal principal (terminología de hoy) aparece una variable que debe calcularse mediante la ecuación de eliminación, que no es sino lo que hoy llamamos el determinante del sistema. Al estudio del sistema algebraico lineal dedica el autor el cuarto apartado, y en el quinto prosigue con el sistema diferencial. Para determinar la forma de la resultante de un sistema lineal, Laplace alude a los trabajos antes comentados de Cramer y Bézout, pero afirmando que las reglas por ellos elaboradas

> …me parece que sólo han sido demostradas por inducción, & por otra parte son impracticables, a poco que el número de ecuaciones sea considerable; voy a retomar este tema de nuevo, & a dar algunos procedimientos más sencillos que los ya conocidos, para eliminar de entre un número cualquiera de ecuaciones de primer grado. [237, p. 294]

Dicho esto, Laplace, usando una notación peculiar, explica y compara los métodos de Cramer y Bézout, para terminar exponiendo el suyo propio, que no es sino obtener el desarrollo del determinante por menores de cualquier orden. Una dificultad evidente en la época era encontrar notaciones adecuadas para expresar las igualdades correspondientes a sistemas de cualquier tamaño. Laplace denotaba las variables de un sistema lineal con una letra griega con tantos acentos como número de variables considerara: $\mu, \mu', \mu'', \&c.$ Por su parte, los coeficientes eran designados con letras latinas con un superíndice anterior que indicaba el número de ecuaciones consideradas: ${}^1a, {}^2a, \&c., {}^1b, {}^2b, \&c.$, de modo que un sistema lineal era expresado por Laplace de esta manera:

$$\begin{cases} {}^1p = {}^1a\mu + {}^1b\mu' + {}^1c\mu'' + \&c. \\ {}^2p = {}^2a'\mu + {}^2b\mu' + {}^2c\mu'' + \&c. \\ {}^3p = {}^3a''\mu + {}^3b\mu' + {}^3c\mu'' + \&c. \\ \&c. \end{cases}$$

En el caso 2×2 la "resultante" del sistema era ${}^1a^2b - {}^1b^2a$, que escribía en notación simbólica como $({}^1a.{}^2b)$. Esta resultante era el denominador de las expresiones de las incógnitas (Cramer). En el caso 3×3 la "resultante" denotada simbólicamente $({}^1a.{}^2b.{}^3c)$ era la expresión que ahora llamamos el determinante del sistema, y podía ser formulada mediante la expresión simbólica:

$$({}^1a.{}^2b.{}^3c) = ({}^1a.{}^2b).{}^3c + ({}^1a.{}^3b).{}^2c + ({}^2a.{}^3b).{}^1c.$$

Pasando al caso 4×4 resuta análogamente[11] $({}^1a.{}^2b.{}^3c.{}^4d) = ({}^1a.{}^2b.{}^3c).{}^4d + \&c$, nuestro actual desarrollo del determinante por una línea, pero también el desarrollo por menores de orden dos:

$$\begin{aligned} ({}^1a.{}^2b.{}^3c.{}^4d) = \; & ({}^1a.{}^2b).({}^3c.{}^4d) - ({}^1a.{}^3b).({}^2c.{}^4d) + \\ & ({}^1a.{}^4b).({}^2c.{}^3d) + ({}^2a.{}^3b).({}^1c.{}^4d) - \\ & ({}^2a.{}^4b).({}^1c.{}^3d) + ({}^3a.{}^4b).({}^1c.{}^2d) \end{aligned}$$

La tarea de Laplace fue dar las instrucciones precisas para escribir directamente estas expresiones simbólicas para un número creciente de ecuaciones:

> Suponga que tiene usted cinco ecuaciones, combine los términos $+abcd - acbd + \&c.$ relativos a cuatro ecuaciones con la letra e, observando 1.º no admitir más que los términos en los que d precede a e; 2.º cambiar de signo cuando e cambia de lugar; tendrá
>
> $$abcde - abdce + abdec + \&c.,$$
>
> dé luego el índice 1 a la primera letra, el índice 2 a la segunda, &c. & tendrá
>
> $${}^1a.{}^2b.{}^3c.{}^4d.{}^5e - {}^1a.{}^2b.{}^3d.{}^4c.{}^5e + {}^1a.{}^2b.{}^3d.{}^4e.{}^5c + \&c.,$$
>
> entonces en lugar de $+{}^1a.{}^2b.{}^3c.{}^4d.{}^5e$ escriba $({}^1a.{}^2b.{}^3c).({}^4d.{}^5e)$; en lugar de $-{}^1a.{}^2b.{}^3d.{}^4c.{}^5e$

[11] Laplace utiliza la letra griega ∂ en vez de la latina d.

escriba $-({}^1a.{}^2b.{}^3d).({}^4c.{}^5e)$, & así sucesivamente; [...] [237, pp. 303-304]

De este modo explicó Laplace cómo expresar el determinante 5×5 como una suma de productos de menores 3×3 por los menores complementarios 2×2. &c.

1.3 Los determinantes desde 1772

Los determinantes surgen como una manera de organizar los cálculos necesarios para resolver los sistemas lineales de igual número de ecuaciones que de incógnitas, como una *herramienta* útil para la resolución de los sistemas lineales y se muestran útiles también para resolver otros tipos de sistemas de ecuaciones y en problemas de diversa naturaleza. Una vez identificado el determinante como un algoritmo asociado a un cuadro de números con utilidades diversas, empieza su desarrollo sistemático como un *objeto* matemático en sí mismo, cuyo estudio da lugar a una teoría que vuelve sobre los problemas que la originaron, y sobre otros nuevos, tratándolos como aplicaciones de la teoría[12].

1.3.1 La teoría de determinantes: Vandermonde

La primera obra impresa que contiene un fragmento inicial significativo de algo que deba ser identificado como una teoría de determinantes es la *Mémoire sur l'élimination* (1772) [345] del matemático francés Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796). Fue leída ante "l'Académie" el 12 de enero de 1771 y, afirma el autor: "Contenía diferentes cosas que he suprimido aquí, porque han sido publicadas después por otros Geómetras." Esta memoria se publicó en el mismo volumen que la antes comentada de Laplace, lo que da idea de que el cálculo de «determinantes» estaba simultáneamente en manos de varios matemáticos franceses. Pero hay que observar que Vandermonde no cita en su memoria a ninguno de los colegas que habían producido avances en ese campo, como Cramer, Bézout o Laplace.

La memoria de Vandermonde es un artículo de dieciocho páginas, la primera de las cuales contiene este texto introductorio:

[12]Esta idea de la existencia de un proceso mediante el cual una noción matemática pasa de ser una *herramienta* en una cierta teoría a ser un *objeto* matemático susceptible de disponer de una teoría propia, se repetirá en la historia del álgebra, siendo los grupos y los cuerpos dos buenos ejemplos. Un libro reciente sobre la teoría de categorías toma su título de este tipo de dualidad: Ralf Krömer, *Tool and Object: A History and Philosophy of Category Theory* (2007).

> La finalidad de todas las Investigaciones generales sobre la Eliminación de las incógnitas en las ecuaciones algebraicas, o sobre el arte de reducir las ecuaciones que encierran varias incógnitas, a ecuaciones que no encierran más que una, sería obtener una formula de eliminación general y única, bajo la forma más concisa y más cómoda, y donde el número de ecuaciones y sus grados fuesen designadas por letras indeterminadas. Estamos sin duda muy alejados de este fin, pero se puede entrever alguna posibilidad de alcanzarlo. Es lo que me propongo poner de manifiesto en esta Memoria. Daré para un número n de ecuaciones de primer grado, una fórmula de eliminación que es una especie de función de n, y cuya fórmula es muy concisa y muy cómoda; y haré ver que las fórmulas conocidas de eliminación entre dos ecuaciones de grados elevados, parecen listas para recibir una forma sistemática, y a convertirse en una especie de función de su grado común. Me he detenido pronto en esta investigación, y será fácil entender la razón entre los recursos que nos faltan para hacer progresos de este género, lo más indispensables será, sin duda, reunir un número suficiente de cooperadores. [345, p. 516]

Este párrafo inicial alinea a Vandermonde con sus colegas Cramer y Bézout, a los que ya hemos dicho que no cita, los cuales se ocupan de los sistemas lineales como parte del estudio de la eliminación de incógnitas en sistemas más generales y obtienen las expresiones que llegará a ser llamadas «determinantes» como un tipo de resultantes en la eliminación. Tras esta introducción la obra se divide, como en autores anteriores, en una primera parte sobre sistemas lineales y una segunda sobre eliminación, un problema más difícil en el que los sistemas lineales se aplican:

> Artículo I. *De las ecuaciones de primer grado.*
> Artículo II. *De la eliminación entre dos ecuaciones de grados elevados.*

Nuestro objetivo es describir el contenido del "Artículo I", que contiene en nueve páginas la primera teoría de determinantes publicada, aunque el término «determinante» no aparece en ella. La notación que usa Vandermonde es muy peculiar, simbólica al estilo de Leibniz pero más compleja, así que antes de dar una idea de su simbolismo reseñaremos los logros que alcanza de un modo sistemático, lo que nos permite hablar ya de la formación de una teoría:

1. Definición combinatoria inductiva a partir de un cuadro de coeficientes, que sólo muestra como tal cuando escribe sistemas de ecuaciones. La inducción se basa en el desarrollo por los elementos de la primera fila, indicando que daría igual tomar la primera columna.

2. Una permutación de filas o columnas sólo altera el signo, indicando cómo determinar éste. La complejidad de la notación le impide dar la demostración general de esta propiedad, así que, dice: "me contentaré con desarrollar los ejemplos más simples; esto bastará para captar el espíritu de la demostración", que tiene que ser inductiva dada la naturaleza asimismo inductiva de la definición. Hecho esto prueba que si dos filas o columnas son iguales la expresión se anula.

3. Resolución de sistemas por la regla de Cramer (sin usar este nombre), que deduce mediante un simple artificio de determinantes sólo en casos de tamaño pequeño, dos y tres incógnitas, terminando con un expresivo "&c." habitual en su tiempo. No obstante, enuncia la regla en general, con una expresión en la que aparecen, debido a la forma en que ordena los «determinantes» en los numeradores, signos negativos en algunos casos que precisa bien.

4. Regla de Laplace del desarrollo por menores complementarios (sin usar esta denominación). La incluye dentro del tratamiento de la regla anterior, justificándola por la necesidad de modificar la expresión de los «determinantes» de modo que se emplee "lo más que se pueda, la multiplicación de factores complejos", y esto para facilitar las aplicaciones, "particularmente aquéllas en las que se quiera usar logaritmos". Las expresiones que aparecen detalladas son: orden 4 desarrollado en productos 2 por 2; orden 6 desarrollado en productos 2 por 4.

El logro de Vandermonde queda reflejado en la siguiente cita del matemático e historiador de los determinantes Thomas Muir:

> Debemos ver el trabajo de Vandermonde en su conjunto, y notar que es el primero en dar una exposición conexa de la teoría, definiendo las funciones al margen de las conexiones con otras materias, asignándoles una notación, y a partir de allí desarrollando lógicamente sus propiedades... De los matemáticos cuyo trabajo ha sido reseñado hasta ahora, el único en condiciones de ser considerado como el fundador de la teoría de los determinantes es Vandermonde. [266, Vol. I, p. 24]

La teoría así construida ha surgido, como hemos visto, de la experiencia matemática en varios campos, y una vez elaborada de modo preciso vuelve a ellos adoptándolos como un ámbito de aplicación. También se da aquí el esquema metodológico que vimos al mencionar el "método algebraico" de Lagrange: en este caso desde la geometría se aislaba un cálculo algebraico que se preparaba para luego aplicarlo al campo inicial o a otros. Por eso la segunda parte del trabajo de Vandermonde se refiere a la eliminación en sistemas generales, donde la teoría de «determinantes» es aplicada.

Una parte importante en la construcción de las teorías matemáticas ha sido siempre determinar el lenguaje simbólico en el que su expresión resulta más simple y clara. A la teoría de «determinantes» le costó encontrar el simbolismo que finalmente perduró. El sistema simbólico usado por Vandermonde fue tan original como efímero, demasiado abreviado para ser generalmente aceptado. Vandermonde concibe las cantidades como coeficientes de un sistema lineal de ecuaciones, por eso las denota, de un modo análogo al usado por Leibniz, mediante "dos números ordinales" que indican explícitamente su posición en el sistema y sólo implícitamente el valor numérico de la cantidad. Leibniz colocaba los números o índices en yuxtaposición horizontal, pero Vandermonde los dispone en vertical, de modo que el sistema más simple queda escrito en su memoria de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}\,\xi 1 + \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}\,\xi 2 + \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{3} = 0 \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}\,\xi 1 + \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{2}\,\xi 2 + \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3} = 0 \end{cases}$$

Cuando las cantidades así indicadas han de tratarse en general usa letras en vez de números, del alfabeto griego en la posición superior y del latino en la inferior, escribiendo por ejemplo $\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{a}$ o $\genfrac{}{}{0pt}{}{\beta}{b}$. Con estas notaciones la definición de determinante que da Vandermonde es inductiva. Aunque Vandermonde llega a escribir hasta el cuarto grado, terminando con el inevitable "&c.", damos a continuación sólo los dos primeros:

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline a & b \end{array} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{a} \cdot \genfrac{}{}{0pt}{}{\beta}{b} - \genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{b} \cdot \genfrac{}{}{0pt}{}{\beta}{a}$$

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha & \beta & \gamma \\ \hline a & b & c \end{array} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{a} \cdot \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline b & c \end{array} + \genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{b} \cdot \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline c & a \end{array} + \genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{c} \cdot \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline a & b \end{array}$$

Una vez que ha demostrado que las cantidades así definidas (les llama "abreviaturas") se anulan cuando tienen un índice repetido, ya sea en el nivel superior o en el inferior, Vandermonde resuelve el sistema de ecuaciones lineales de orden dos escrito arriba comparando dicho sistema con las dos abreviaturas nulas siguientes:

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array} = \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \end{array} + \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 1 \end{array} + \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{3} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array} = \frac{2}{1} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \end{array} + \frac{2}{2} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 1 \end{array} + \frac{2}{3} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} = 0$$

Propone una simple inspección comparativa de ambos sistemas para concluir la solución:

$$\xi 1 = \frac{\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \end{array}}{\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}}, \qquad \xi 2 = \frac{\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 1 \end{array}}{\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}}$$

Basta llegar hasta este nivel de detalle para dejar constancia de la apretada notación elaborada por Vandermonde, que todavía comprime más sus abreviaturas cuando estudia la eliminación en la segunda parte de la memoria citada. Su interés por la notaciones abreviadas ya había sido puesto de manifiesto un año antes en *Mémoire sur la résolution des équations*[13], en la que intenta encontrar la función que exprese de modo general las raíces de una ecuación algebraica. Es en esta primera memoria (p. 369) en la que aparece lo que hoy se denomina "determinante de Vandermonde", pero sólo en el orden 3 y como una mera expresión de cálculo. Cuando Vandermonde trata los determinantes formalmente y con notación condensada, los considera como formados por cantidades agrupadas en series de letras independientes, mientras que en el determinante de Vandermonde las distintas series son potencias de una de ellas, relación funcional no considerada en la teoría general del matemático de París.

Al tratar en la memoria de 1770/71 la ecuación cúbica, cuyas raíces denota a, b, c, Vandermonde supone que la solución general debería ser una función de la forma

$$\frac{3}{2}\left[a + b + c + \sqrt[3]{(a + r'b + r''c)^3} + \sqrt[3]{(a + r''b + r'c)^3}\right],$$

en la que r', r'' son las raíces cúbicas imaginarias de la unidad. Cuando calcula $(a + r'b + r''c)^3$ obtiene una parte real que es función simétrica de las raíces y una parte imaginaria

[13]Fue su primer trabajo matemático, leído en noviembre de 1770, revisado ese mismo mes por de Fouchy y publicado en 1771, después de ser nombrado miembro de "l'Académie".

que, salvo una constante real multiplicativa, es la función alternada[14]

$$a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b = (a-b)(a-c)(b-c),$$

cuyo cuadrado calcula resultando una función simétrica suma de productos de dos y tres letras de potencias similares de las raíces.

1.3.2 Nuevos enfoques: Lagrange y Gauss

Para avanzar en este apartado dedicado a mostrar cómo los determinantes van surgiendo, todavía sin nombre, como meros útiles de cálculo asociados a diversos problemas que merecían la atención prioritaria por parte de los matemáticos, seguiremos la trayectoria de la matemática francesa mencionando al renombrado Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) y empezaremos a prestar atención a los alemanes empezando por el genial Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

J.L. Lagrange, 1773

Nos referiremos a continuación a dos memorias publicadas por Lagrange en la Academia de Berlín, ambas de 1775 realizadas en 1773, que son relevantes para el surgimiento y evolución de la noción de determinante, a saber:

Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératice [229].

Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires [231].

En ambas el asunto que nos importa es el estudio de relaciones métricas analíticas asociadas a una pirámide triangular con vértice en el origen de coordenadas rectangulares. El tema se trata rápidamente en el primero de los trabajos antes citados, en el que el autor pasa enseguida al estudio del movimiento de un sólido en torno a un punto fijo; pero, en el segundo, Lagrange se recrea en los problemas estrictamente geométricos relativos a las pirámides. Nos limitaremos a mencionar el cálculo del volumen de la pirámide triangular, en el que tiene pleno protagonismo el determinante, sólo en el caso 3×3, advirtiendo que

[14]Esta expresión es el llamado determinante de Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, pero el matemático francés no lo obtuvo como parte de su estudio de los determinantes, se reconoció como tal después.

todavía se trata de una expresión sin nombre que aparece en los cálculos.

Lagrange se propone, entre otros problemas[15], expresar el volumen de la pirámide (un tercio del área de la base por la altura) en términos de geometría analítica. Para ello considera una pirámide de base triangular con vértices $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$, $M''(x'', y'', z'')$ y el cuarto vértice situado en el origen que denota[16] $L(0, 0, 0)$. Con esta configuración aborda los cálculos necesarios: longitudes de las aristas (que Lagrange llama "lados"), áreas de los triángulos laterales (las "caras"), altura correspondiente al vértice L y, finalmente en lo que a lo aquí reseñado se refiere, el volumen (la "solidité" en el lenguaje lagrangiano).

> Por este método todo se reduce a un asunto de puro cálculo, y es muy fácil determinar el valor de las líneas que se quieren conocer [. . .] Después no se trata más que de hacer estos resultados independientes de la posición arbitraria de las coordenadas, introduciendo en su lugar otras líneas relativas únicamente a la figura de la pirámide, como los lados de la pirámide, las perpendiculares sobre sus caras, etc.; es a lo que llego con la ayuda de algunas reducciones y transformaciones bastante notables que expongo al principio de esta Memoria, y que podrán ser también de mayor uso en muchos otros casos. Independientemente de la utilidad directa que estas soluciones puedan tener en varias ocasiones, servirán principalmente para mostrar con cuanta facilidad y éxito el método algebraico puede ser empleado en cuestiones que parecen ser competencia de la Geometría propiamente dicha. [231, p. 150]

Lagrange apunta en esta introducción dos observaciones sobre el "método algebraico" cartesiano, innovadoras e importantes de cara al futuro desarrollo de la matemática. Por una parte, la capacidad del método algebraico para abordar problemas esenciales de la geometría del espacio. Por otra, la generalidad del método, que a partir de problemas específicos extrae algoritmos que pueden ser utilizados en otros contextos. Con esta visión, Lagrange inicia su memoria con los apartados 1 a 8 (de los 37 que constituyen el trabajo completo) que forman una muestra incipiente de "álgebra tridimensional", que ahora podemos identificar como un álgebra de matrices. Luego, a partir del apartado 9, los

[15]Entre los otros problemas tratados figuran los centros de gravedad y las esferas inscritas y circunscritas. El autor afirma en la introducción que las pirámides triangulares son las figuras del espacio equivalentes a los triángulos en el plano, porque "todo cuerpo sólido limitado por planos puede suponerse formado por pirámides triangulares". Escribe también que estos sólidos, a diferencia de los triángulos, apenas habían sido estudiados hasta entonces.

[16]Probablemente la letra usada es por su apellido, pues como buen físico se coloca como observador en el centro del sistema de referencia, y lo que observa son puntos con inicial de "masa". En la introducción afirma que asignar el origen de coordenadas a un vértice "sirve para simplificar las fórmulas sin quitar nada a su generalidad".

números y algoritmos que aparecen en los anteriores empiezan a tomar un significado geométrico. Pero es claro que este modo de exponer corresponde a la síntesis posterior a un análisis de la cuestión tratada, y es este análisis de Lagrange el que vamos a mostrar sucintamente.

Lagrange comienza sus cálculos con los nueve números, x, y, z, etc., que son las coordenadas de los vértices de la base. Para calcular las longitudes de las aristas de la pirámide basta hacer sumas de cuadrados de diferencias de coordenadas. Las que concurren en L miden $\sqrt{a}, \sqrt{a'}, \sqrt{a''}$, con $a = x^2 + y^2 + z^2$, etc. y las que forman la base, MM', MM'', $M'M''$, miden respectivamente $\sqrt{c''}, \sqrt{c'}, \sqrt{c}$, con $c = a' + a'' - 2b$, $b = x'x'' + y'y'' + z'z''$, y expresiones simétricas en los otros casos. Para el cálculo de las áreas de las caras utiliza una fórmula derivada de la bien conocida de Heron que expresa el área de un triángulo en función de las longitudes de los lados; para las que concurren en L obtiene áreas $\frac{\sqrt{\alpha''}}{2}, \frac{\sqrt{\alpha'}}{2}, \frac{\sqrt{\alpha}}{2}$, con $\alpha = a'a'' - b^2$ etc., y para el área de la base $\frac{\sqrt{\alpha+\alpha'+\alpha''+2\beta+2\beta'+2\beta''}}{2}$, siendo $\beta = b'b'' - ab$ etc. Para calcular el volumen de la pirámide necesita la altura correspondiente a la base y para ello obtiene previamente la ecuación del plano base, que es de la forma $u = l + ms + nt$, siendo s, t, u las coordenadas de un punto cualquiera del plano[17] y l, m, n los coeficientes a determinar exigiendo que el plano pase por los vértices M, M', M''. Esta condición se traduce en un sistema lineal que resuelve por un sencillo procedimiento: eliminando primero la variable l obtiene $m = \frac{\xi+\xi'+\xi''}{\zeta+\zeta'+\zeta''}$ y $n = \frac{\eta+\eta'+\eta''}{\zeta+\zeta'+\zeta''}$, tras lo cual calcula $l = \frac{\Delta}{\zeta+\zeta'+\zeta''}$. En estas expresiones figura una nueva serie de números $\xi = y'z'' - z'y''$, $\eta = z'x'' - x'z''$, $\zeta = x'y'' - y'x''$ etc. y finalmente (he ahí el determinante)

$$\Delta = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x''.$$

Todo esta colección de sistemas de números asociados a los nueve primeros, las coordenadas de los vértices del triángulo base, surgen de manera necesaria, como hemos visto, al ir ejecutando los cálculos pertinentes, pero es notable que Lagrange sistematiza su obtención de un modo sintético en los primeros apartados de la memoria, aportando definiciones junto con relaciones que los ligan, dando lugar a unos algoritmos aritméticos previos a sus aplicaciones geométricas. Este despliegue algorítmico es lo que el autor refiere como el "método algebraico" que aplica a la geometría.

[17]Lagrange calcula la altura obteniendo la distancia de L a un punto arbitrario del plano base y minimizando esta distancia mediante el cálculo infinitesimal, por el método de extremos condicionados que lleva su nombre.

El algoritmo algebraico con el que se inicia la memoria sigue este desarrollo en sus ocho primeros apartados:

1. Partiendo de "nueve cantidades cualesquiera"

$$x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'',$$

se forman otras nueve mediante un algoritmo que nosotros designamos Alg_1:

$$\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', \xi'', \eta'', \zeta'' \quad (\xi = y'z'' - z'y'', \text{ etc.}).$$

En un lenguaje simbólico actual escribamos $Alg_1[x] = [\xi]$, es decir, el algoritmo Alg_1 transforma el sistema de nueve cantidades $[x]$ en el sistema $[\xi]$. Un segundo algoritmo que llamaremos Alg_2 opera con las nueve primeras cantidades para dar seis

$$a, a', a'', b, b', b'' \quad (a = x^2 + y^2 + z^2, \text{ etc.}).$$

a partir de las cuales un nuevo algoritmo Alg_3 produce otras seis

$$\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'' \quad (\alpha = a'a'' - b^2, \text{ etc.}).$$

En lenguaje simbólico: $Alg_2[x] = [a]$, $Alg_3[a] = [\alpha]$. Lagrange comprueba que el sistema $[\alpha]$ de seis cantidades es también el resultado de aplicar el algoritmo Alg_2 al sistema de nueve cantidades $[\xi]$. En simbolismo actual:

$$Alg_3 Alg_2[x] = Alg_2 Alg_1[x].$$

2. En este apartado se hace un desarrollo paralelo al anterior partiendo del sistema de nueve cantidades

$$[\xi]: \ \xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', \xi'', \eta'', \zeta'',$$

del cual se deduce el sistema de nueve cantidades

$$[X] = Alg_1[\xi]: \ X, X', X'', Y, Y', Y'', Z, Z', Z''.$$

Por otra parte Lagrange obtiene el sistema de seis cantidades

$$[A] = Alg_3[\alpha]: \quad A, A', A'', B, B', B''$$

y observa que resulta $[A] = Alg_2[X]$, es decir,

$$Alg_3 Alg_3 Alg_2[x] = Alg_2 Alg_1 Alg_1[x].$$

3. En este apartado aparece la expresión Δ antes citada, la suma de productos con signo que ahora se terminó llamando "determinante", aplicada al sistema $[x]$, algoritmo para el que escribiremos $\Delta = Det[x]$. Con esta notación, el autor "encuentra" que cada elemento del sistema $[X]$ es igual al correspondiente del sistema $[x]$ multiplicado por Δ, es decir: $X = \Delta x$, etc. Continuando los cálculos obtiene que cada elemento del sistema $[A]$ es igual al correspondiente del sistema $[a]$ multiplicado por Δ^2, es decir: $A = \Delta^2 a$, etc. Esto le permite calcular Δ en forma de función entera del sistema de cantidades $[a]$, lo que denotaremos

$$\Delta^2 = det[a].$$

4. Aquí Lagrange da otras expresiones de Δ^2 en función de parejas de sistemas de seis cantidades y finalmente

$$\Delta^4 = det[\alpha].$$

5. Este apartado se dedica a resaltar esta que llama "ecuación idéntica muy notable":

$$\Delta^2 = Det[\xi].$$

6. Otro breve apartado para indicar que si se suponen dadas inicialmente las cantidades $[\alpha]$, algunas de las igualdades antes encontradas permiten determinar las cantidades $[a]$ mediante las expresiones $a = \frac{A}{\Delta^2}$ etc.

7. Sigue operando Lagrange para ofrecer dos grupos de nueve igualdades cada uno, conteniendo sumas de productos de elementos de los sistemas $[x]$, $[\xi]$, seis de los cuales dan como resultado Δ y los otros seis 0. En el primer grupo se tiene

$$x\xi + x'\xi' + x''\xi'' = \Delta, \quad y\xi + y'\xi' + y''\xi'' = 0, etc.,$$

y en el segundo

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \Delta,\ \ x'\xi + y'\eta + z'\zeta = 0, etc.$$

8. Lagrange termina la exposición de su "método algebraico" expresando las cantidades del sistema $[\xi]$ como funciones lineales de las del sistema $[x]$ y viceversa. En el primer caso los coeficientes son elementos del sistema $[\alpha]$ divididos por Δ y en el segundo elementos del sistema $[a]$ divididos también por Δ. Lagrange termina afirmando que "estas relaciones [...] son muy notables y pueden ser útiles en diferentes ocasiones".

Estas primeras páginas de la memoria de Lagrange sobre las pirámides fueron una fuente de inspiración para matemáticos posteriores, particularmente para Binet cuando introdujo el producto de determinantes. Una vez que los matemáticos conjugaron la exposición de Lagrange, a través de igualdades similares agrupadas de nueve en nueve o seis en seis, con la disposición matricial de los datos y algoritmos involucrados, se pudo ver que lo que Lagrange había desplegado era un cálculo matricial de dimensión tres[18]. En parte la claridad expositiva de Lagrange se debe a que sólo trata el caso tridimensional, evitando el enojoso problema de disponer de una notación simbólica que sirva para cualquier número de variables.

Una vez establecida la teoría, todavía llevó un tiempo que el término "determinante" quedara establecido como nomenclatura general para el algoritmo cuya historia venimos siguiendo. Dicho término se debe a Gauss, quien lo introdujo en su brillante obra de juventud sobre la teoría de números para referirse a lo que hoy día se denomina "discriminante" de una forma cuadrática. Sobre formas cuadráticas con números enteros ya habían tra-

[18]Vamos a desgranar este cálculo matricial en lenguaje moderno y en paralelo a sus ocho primeros apartados antes descritos: 1.— Si damos los nueve cantidades del sistema $[x]$ en disposición de matriz M con columnas x, y, z etc., resulta que las cantidades del sistema $[\xi]$ forman la matriz adjunta M^*, de modo que $Alg_1 M = M^*$. El segundo algoritmo corresponde a $Alg_2 M = MM^t$ siendo M^t la matriz traspuesta de M. En Lagrange el segundo algoritmo sólo produce seis cantidades porque la matriz MM^t es simétrica y la determina mediante su diagonal principal (los elementos a) y los tres por encima de ella (los elementos b). Análogamente, los seis elementos del sistema $[\alpha]$ determinan la matriz simétrica $(MM^t)^*$, de modo que realmente $Alg_3 = Alg_1$, el aspecto aparentemente diferente de Alg_3 en las fórmulas de Lagrange se desvela con la formulación matricial. Lo mismo sucede con las expresiones Det y det, que con apariencia diferente son realmente la misma, en el caso que se inicia con minúscula corresponde a la matriz simétrica. Las fórmulas finales del primer apartado forman por tanto la igualdad $M^*(M^*)^t = (MM^t)^*$, que indica la permutación de los algoritmos Alg_1 (matriz adjunta) y Alg_2 = (producto por traspuesta). 2.— En paralelo a lo anterior, ahora el sistema de cantidades $[X]$ forma la matriz dos veces adjunta M^{**} y el $[A]$ la matriz simétrica $(MM^t)^{**}$, siendo $M^{**}M^{**t} = (MM^t)^{**}$. 3.— Aquí se introducen el determinante $\Delta = |M|$ y la igualdad $M^{**} = \Delta M$, seguidas de $(MM^t)^{**} = \Delta^2 MM^t$ y $\Delta^2 = |MM^t|$.4.— $\Delta^4 = |(MM^t)^*|$. 5.— $\Delta^2 = |M^*|$. 6.— $MM^t = \frac{1}{\Delta^2}(MM^t)^{**}$. 7.— $M^tM^* = \Delta Id$, y $MM^{*t} = \Delta Id$. 8.— $M^* = \frac{1}{\Delta}(MM^t)^*M$, y $M = \frac{1}{\Delta}(MM^t)M^*$.

bajado Lagrange y Laplace. El primero publicó *Recherches d'Arithmétique* [230] el mismo año, 1775, que su memoria sobre las pirámides. En dicha obra trata sobre los números que pueden representarse como valores de una forma cuadrática $Bt^2 + Ctu + Du^2$, indicando que estos cálculos dan lugar a identidades similares a las consideradas en su artículo sobre las pirámides. Este es el enfoque que Gauss desarrolló en una obra tan original e influyente que sólo a él nos referiremos.

C.F. Gauss, 1801

Gauss dedicó la sección quinta de su obra *Disquisitiones arithmeticae* (1801) a "Formas y ecuaciones indeterminadas de segundo grado". Allí estudia las funciones de dos variables enteras $F = ax^2 + 2bxy + cy^2$, con a, b, c números enteros, a las que se refiere con la notación simplificada (a, b, c). El problema que le ocupa es encontrar los números M que pueden "representarse" como valores de F para ciertos enteros (x, y) primos entre sí y, en su caso, las distintas representaciones de un número. El primer teorema que demuestra en dicha sección quinta afirma que si M es representable por la forma (a, b, c) entonces el número $b^2 - ac$ es un resto cuadrático módulo M. El papel destacado de dicho número conduce a Gauss a definir:

> Llamaremos *determinante* de la forma (a, b, c) al número $b^2 - ac$, del cual veremos que dependen en gran medida las propiedades de dicha forma. [163, p. 167][19]

Es notorio que lo que Gauss llama el determinante de la forma (a, b, c) es la resolvente de dos sistemas de letras, el sistema b, a y el sistema c, b, un caso simétrico en el que una letra se repite en posición diferente en cada sistema[20]. Gauss excluye de su investigación las formas con determinante nulo, las cuales, afirma, deben estudiarse por separado porque su presencia impide el enunciado elegante de los teoremas.

La herramienta principal que Gauss utilizó para estudiar las formas cuadráticas fue la sustitución

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

[19]Citaremos la página por la versión original en latín, con una traducción propia apoyada en la española de H. Barrantes Campos, M. Josephy, A. Ruiz Zúñiga (1995), y la francesa de A.-C.-M. Poullet-Delisle (1807).

[20]Tras la posterior implantación del método matricial, la representación de la forma (a, b, c) se realizará mediante una matriz simétrica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

que permite pasar de una forma $F = (a, b, c)$ en variables x, y, a una forma $F' = (a', b', c')$ en variables x', y'. En estas condiciones Gauss dice que F "implica" F' o que F' "está contenida" en F, y el cálculo de la sustitución le lleva a obtener la identidad

$$b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2,$$

que prueba que el determinante de F divide al de F' y el cociente es un cuadrado, precisamente el cuadrado del "determinante" o "resolvente" de la sustitución efectuada. Los que leyeron a Gauss estando interesados en la resolución de ecuaciones enseguida reconocerían en esta igualdad un producto de resolventes igual a otra resolvente.

La equivalencia de formas es una noción crucial en el estudio aritmético que Gauss se propone realizar. Dos formas F y F' son equivalentes si se contienen mutuamente, entonces sus determinantes serán iguales y $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$.

Pero no es este el aspecto que queremos resaltar aquí, sino aquello que en este fragmento temprano de la obra de Gauss impulsa el desarrollo de la teoría de determinantes. En este sentido, es relevante observar que Gauss prueba que la relación implicativa o de contenido es transitiva:

> *Si la forma F implica la forma F', y ésta implica la forma F'', también la forma F implicará la forma F''.* [**?**, p. 123]

Demostrar esto le lleva a componer sustituciones

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

$$x' = \alpha' x'' + \beta' y'', \quad y' = \gamma' x'' + \delta' y'',$$

para obtener la sustitución compuesta

$$x = (\alpha\alpha' + \beta\gamma')x'' + (\alpha\beta' + \beta\delta')y'', \quad y = (\gamma\alpha' + \delta\gamma')x'' + (\gamma\beta' + \delta\delta')y'',$$

y con ella la igualdad

$$(\alpha\alpha' + \beta\gamma')(\gamma\beta' + \delta\delta') - (\alpha\beta' + \beta\delta')(\gamma\alpha' + \delta\gamma') = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma'),$$

que muestra un producto de resolventes que es a su vez una resolvente de resolventes o, como se trata de números enteros, una suma de productos de resolventes. Este es el tipo de igualdades gaussianas que inspiraron a Binet y también, como veremos, a Cauchy.

Gauss abordó también, con método similar[21], las formas ternarias de segundo grado con coeficientes enteros en variables x, x', x'',

$$f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'x''x + 2b''xx',$$

a las que representaba por sus coeficientes dispuestos en dos filas:

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix},$$

y asignaba el determinante[22] $D = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''$. Nótese la gran similitud formal de estos cálculos con lo que vimos realizar a Lagrange. Este último trabaja con números reales y Gauss lo hace con números enteros, pero el "método algebraico", en expresión de Lagrange, es el mismo. Siguiendo la pauta del francés y las notaciones que utilizamos para explicarla, podemos decir que Gauss toma el sistema de seis cantidades $[a]$ y forma $D = -det[a]$.

En el caso de dos variables, cuando Gauss hizo dos sustituciones sucesivas, realizó un cálculo directo que ahora reconocemos como el producto de dos matrices cuadradas de orden dos, pero nada apunta en Gauss a esta disposición de los cálculos porque escribe las sustituciones en línea. Pero al pasar a tres variables la línea resulta insuficiente para albergar las tres expresiones de la sustitución y la escribe en forma similar a un sistema lineal,

$$\begin{aligned} x &= \alpha y + \beta y' + \gamma y'' \\ x' &= \alpha' y + \beta' y' + \gamma' y'' \\ x'' &= \alpha'' x + \beta'' y' + \gamma'' y'', \end{aligned}$$

[21][**?**, art. 268, p. 301-302].

[22]Nótese que, en términos del lenguaje simbólico por llegar, se trata, salvo el signo, del determinante de la matriz simétrica $\begin{pmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{pmatrix}$.

refiriéndose a ella como "la sustitución (S)" e indicándola mediante el cuadro de números

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

Aplicando esta sustitución a la forma f obtiene otra forma ternaria g en las incógnitas $y, y^{'}, y''$ y con determinante E, encontrando de nuevo, como en el caso de dos variables del art. 157, una igualdad que contiene un producto de expresiones determinantes,

$$E = k^2 D,$$

en la que $k = \alpha\beta'\gamma^{''} + \beta\gamma'\alpha^{''} + \gamma\alpha'\beta^{''} - \gamma\beta'\alpha^{''} - \alpha\gamma'\beta^{''} - \beta\alpha'\gamma^{''}$ es la "resultante" de la sustitución (S). Siguiendo el hilo de la comparación con Lagrange, conviene observar que Gauss tiene un sistema de nueve cantidades $[\alpha]$, que dispone en forma de cuadro, y les asocia la cantidad $k = Det[\alpha]$.

La forma en que representa las sustituciones de tres variables le permite ofrecer la primera visualización clara en un texto matemático de lo que se identificará como un producto de matrices. En efecto, considera el joven autor que si la sustitución anterior "transmuta" f en f' y se cambia

> f' en f'' por la sustitución
>
> $$\begin{matrix} \delta, & \epsilon, & \zeta \\ \delta', & \epsilon', & \zeta' \\ \delta'', & \epsilon'', & \zeta'' \end{matrix}$$
>
> entonces f será transformada en f'' por la sustitución
>
> $$\begin{matrix} \alpha\delta + \beta\delta' + \gamma\delta'', & \alpha\epsilon + \beta\epsilon' + \gamma\epsilon'', & \alpha\zeta + \beta\zeta' + \gamma\zeta'' \\ \alpha'\delta + \beta'\delta' + \gamma'\delta'', & \alpha'\epsilon + \beta'\epsilon' + \gamma'\epsilon'', & \alpha'\zeta + \beta'\zeta' + \gamma'\zeta'' \\ \alpha''\delta + \beta''\delta' + \gamma''\delta'', & \alpha''\epsilon + \beta''\epsilon' + \gamma''\epsilon'', & \alpha''\zeta + \beta''\zeta' + \gamma''\zeta'' \end{matrix}$$
>
> Y en el caso donde f es equivalente a f' y f' a f'', la forma f también será equivalente a la forma f''. Es obvio que estos teoremas son válidos con una serie de varias formas. [**?**, art. 270, p. 308-309]

En este fragmento de *Disquisitiones* el producto de matrices cuadradas como resultado algorítmico de la composición de sustituciones está ya completamente explícito, poco falta para que acabe siendo definitivamente identificado como una operación con un nuevo objeto algebraico.

Por último, hemos de mencionar el tratamiento por Gauss, en el artículo 267, de la forma "adjunta" a una forma ternaria dada. Dada la forma f de coeficientes $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$, su adjunta es la forma F de coeficientes $\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}$, siendo $A = b^2 - a'a''$ y expresiones correlativas para los demás coeficientes. etc. Repitiendo el proceso, Gauss prueba que la adjunta de la adjunta es la forma ternaria $\begin{pmatrix} aD, & a'D, & a''D \\ bD, & b'D, & b''D \end{pmatrix}$. Este resultado muestra de nuevo la analogía con los algoritmos de Lagrange: a partir de las seis cantidades $[a]$ Gauss obtiene otras seis $[A]$ (nótese que en la notación de Lagrange estas segundas eran las $[\alpha]$) por el algoritmo que habíamos llamamos Alg_3; repetido el algoritmo se vuelve a las cantidades iniciales multiplicadas por el determinante[23].

La analogía señalada muestra con claridad que el "método algebraico", es decir, la algoritmia realizada al margen de sus aplicaciones según explicaba Lagrange, coincide en ambos casos, independientemente de que cada autor considere un sistema de números particular. La repetición de estas experiencias matemáticas a lo largo del siglo XIX terminó dando lugar a la consideración progresiva de los aspectos estructurales del álgebra.

Tanto Lagrange como Gauss, en los trabajos comentados, se expresan con ideas muy claras y fructíferas, pero sólo en las dimensiones dos y tres, fueron matemáticos posteriores los que expusieron sus métodos con generalidad n-dimensional. En el artículo 266 de sus *Disquisitiones*, Gauss explicó que sólo iba a dar un ligera idea del estudio de las formas ternarias, sin pasar a las de grado superior:

> Debemos, sin embargo, reservar para otra ocasión el tratamiento más preciso de este tema importante por su utilidad, porque excede los límites de este trabajo y con la esperanza de que seamos capaces más adelante de enriquecer la discusión con un desarrollo más profundo. En este momento excluiremos completamente la discusión de las formas cuaternarias, quinarias, etc. y a todas las formas de grados más altos. Es suficiente con dirigir la atención de los geómetras hacia esta ancho campo.

[23]En Lagrange se obtenía $\Delta^2 a$ etc. y en Gauss aD etc., pero debe notarse que en función de los $[a]$ el factor Δ^2 coincide con $det[a] = D$.

> Hay material amplio para el ejercicio de su genio y la Aritmética trascendental se beneficiará con seguridad de sus esfuerzos. [163, p. 425-426]

Por otra parte, Gauss hizo, además de su aportación a los determinantes a través de sus estudios sobre las formas cuadráticas en teoría de números, otras a los sistemas lineales, pero más desde el punto de vista de la resolución numérica que desde un enfoque general teórico. Se encontró con los sistemas lineales al elaborar el método de los mínimos cuadrados en sus estudios astronómicos. A propósito de este método mantuvo una disputa con Legendre. El francés dio a conocer sus resultados en *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* (1805) [239], mientras que el alemán lo usó, por ejemplo, cuando calculó la órbita del asteroide Ceres en 1801. Gauss reclamó en 1806 [196] (Monatl. Corresp. Beförd. Erd Himmelskd 14,181-186) su prioridad en el uso del método de los mínimos cuadrados (aunque no en su publicación) asegurando que hacía 12 años que venía utilizándolo y prometió publicar sus resultados más tarde. Lo hizo en *Teoría del movimiento de los cuerpos celestes en secciones cónicas alrededor del Sol / Theoria motus corporum coelestium in sectionibus solem ambientiem* (1809) [164], en el cual aplica el método de mínimos cuadrados y da algunas observaciones sobre la solución de sistemas de ecuaciones lineales; allí menciona el trabajo de Legendre y asegura que él ya había utilizado el método en 1795. Los sistemas aparecen en el art. 182 p. 216 de dicha *Teoría del movimiento*, antes había afirmado lo siguiente:

> Ponemos fin a nuestro problema particular y entramos en una discusión general y en una de las más fructíferas aplicaciones del cálculo a la filosofía natural. [164, p. 208]

Legendre, a raíz de esta última publicación de Gauss, le dirigió una carta de enhorabuena, reivindicando no obstante la autoría del método de los mínimos cuadrados[24]

En este ámbito de trabajos aplicados Gauss desarrolló la resolución numérica de los sistemas lineales por eliminación de incógnitas[25]. En 1810 con *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803,1804, 1805, 1807, 1808, 1809* [165] introdujo un

[24]En 1820 Legendre publicó un suplemento a su memoria de 1805, reclamando de nuevo a Gauss la prioridad de los mínimos cuadrados, véase [196].

[25]Este método había sido aplicado por los matemáticos chinos para resolver sistemas de tres ecuaciones y tres variables, y hace parte de los contenidos de *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático / Jiu zhang suan shu*.

procedimiento sistemático de eliminación de incógnitas para resolver sistemas de ecuaciones lineales sin usar matrices propiamente, el cual se ha difundido como "eliminación Gaussiana". Gauss había tenido que estimar el valor de 6 incógnitas que determinan la órbita elíptica, en base a un número mayor de observaciones. En la segunda parte de *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (1823) [166] incluye un apartado donde hace consideraciones generales sobre su método [166, p. 39-40][26]

1.3.3 Binet y Cauchy, 1812-1815

El siguiente avance reseñable, entrado ya en el siglo XIX, se produjo en dos memorias, de Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) y Louis Augustin Cauchy (1789-1857) respectivamente, que contienen en particular el producto de determinantes al asumir la continuidad del trabajo de Lagrange y Gauss. Ambas memorias fueron leídas "à l'Institut" el 20 de noviembre de 1812 y publicadas algo después, Binet en mayo de 1813 y Cauchy en enero de 1815[27]. Binet y Cauchy fueron contemporáneos, pero consideramos que la aportación de Binet es un colofón de los avances sobre determinantes del siglo XVIII, mientras que la de Cauchy incorpora toda una visión general de la teoría de determinantes. Ambos autores se mencionaron mutuamente. Binet escribió en la introducción de su memoria[28]:

> Habiendo tenido ocasión de hablar con el Sr. *Cauchy*, ingeniero de caminos[29], del teorema general que acabo de enunciar, me dijo haber llegado en investigaciones análogas a las del Sr. *Gauss*, a teoremas de análisis que debían tener relación con los míos. Me he asegurado de ello echando un vistazo a sus fórmulas; pero ignoro si tienen la misma generalidad que las mías: hemos llegado a ellas, creo, por vías muy diferentes. [34, pp. 281-282]

La obra de Binet que es pertinente para el tema que nos ocupa es *Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques.*

[26] El procedimiento de Gauss fue mejorado por Wilhelm Jordan (1842-1899), como resultado de investigaciones en geodesia, que aparecen en la cuarta edición de su *Manual de Geodesia / Handbuch der Wermessungskunde* (1895) [215], en el cual presenta un algoritmo de solución de sistemas de ecuaciones lineales, al igual que Gauss, sin usar matrices; pero, haciendo sustitución hacia atrás después de haber transformado la matriz de coeficientes a su forma triangular. Este método se conoce actualmente como "Eliminación de Gauss-Jordan". (Veáse [13]).

[27] Las dos fueron autorizadas para publicación por Legendre, Carnot y Poisson.

[28] Al final de este apartado veremos las expresiones similares escritas por Cauchy en relación con Binet.

[29] "Ingénier des ponts et chaussées", lo que en España llamamos un ingeniero de caminos (canales y puertos) y en Colombia un ingeniero civil.

Tiene setenta y cinco páginas, dedicadas las cinco primeras a introducir su trabajo y el resto a exponerlo a través de cincuenta apartados. En ellos sigue un esquema similar al de la memoria sobre las pirámides de Lagrange, del que se declara deudor en varios aspectos: primero expone los aspectos algebraicos ("sistema de fórmulas analíticas") y luego, desde el apartado veintitrés, los geométricos ("consideraciones geométricas")[30].

La primera parte de la memoria contiene una sucesión de fórmulas progresivamente complejas, cuyo resultado central está enunciado como teorema en la introducción:

> El producto de un número cualquiera de sumas de productos de dos resultantes correspondientes del mismo orden, sigue siendo una resultante de este orden. [34, pp. 281]

Binet tomó el término "resultante" (el determinante) de Laplace[31], así como su notación simbólica para expresar las resultantes, pero su notación para las letras que van a ser usadas en el algoritmo era diferente, mostrando una vez más lo difícil que resultaba encontrar una notación general convincente, cada autor acababa generando la suya. Binet considera que un "sistema de letras" está escrito "con una sola letra llevando diferentes acentos", de modo que el sistema de letra a está formado por $a', a'', a''', \&c.$. A este sistema le asocia la "integral" Σa, que simboliza la suma de los elementos del sistema, $a' + a'' + a''' + \&c.$ Dados dos sistemas de latras a y b respectivamente, introduce la integral Σab que suma los productos de letras de a con letras de b "con el mismo acento", $a'b' + a''b'' + \&c.$ y también $\Sigma ab'$, similar a la anterior pero con letras de "acento diferente", lo que explica escribiendo "la suma $a'b'' + b'a'' + a'b''' + \&c.$" Con estas notaciones enuncia sin demostrar la igualdad sencilla $\Sigma ab' = \Sigma a \Sigma b - \Sigma ab$.[32] También sin demostración enuncia las igualdades que generalizan la anterior hasta expresar $\Sigma ab'c''d'''$ en todos sus términos, finalizando con el inevitable "&c.", pues la notación que utiliza no sirve para expresar de modo preciso los resultados generales[33].

[30]Estas últimas, de las que no nos ocuparemos, consisten básicamente en extender el trabajo de Lagrange sobre pirámides a paralelepípedos y sobre el movimiento de rotación de sólidos.

[31]Véase su memoria que comentamos hace unas páginas.

[32]Con notación hoy habitual de subíndices se escribiría $\Sigma_{i\neq j} a_i b_j = \Sigma_i a_i \Sigma_j b_j - \Sigma_{i=j} a_i b_j$, con los índices i, j variando de 1 a n.

[33]Para tres letras escribe $\Sigma ab'c'' = \Sigma a \Sigma b \Sigma c + 2\Sigma abc - \Sigma a \Sigma bc - \Sigma b \Sigma ca - \Sigma c \Sigma ab$. La demostración es fácil, pues a' interviene en el primer miembro como factor de $\Sigma bc' - b'\Sigma c - c'\Sigma b + 2b'c'$, de donde resulta sustituyendo $\Sigma bc'$ por su expresión antes calculada $a'\Sigma b \Sigma c - a'\Sigma bc + a'b'\Sigma c - a'c'\Sigma b + 2a'b'c'$. Sumando estas expresiones se obtiene la dada. Este tipo de demostración inductiva hay que suponerla implícita con carácter general en la propuesta de Binet.

Estas notaciones y fórmulas introductorias le sirven de acceso al tema de las resultantes, para el cual considera sistemas de letras y las notaciones tipo Laplace para las resultantes: $(y', z'') = y'z'' - z'y''$, (x', y'', z''') etc. Con ellas expresa las formulas que desarrollan la resultante por menores complementarios.[34]

Con este repertorio simbólico, Binet comienza en el apartado 4 el cuerpo central de su trabajo, haciendo "integrales" no ya de series de letras, sino de series de resultantes "derivadas" de series de letras. Comienza por el caso más sencillo y va ganando complejidad aumentando variables. El primer caso lo había expresado así en la introducción:

> Cuando se tienen dos sistemas de n letras cada uno, y si suponemos que cada sistema está escrito con una sola letra llevando diferentes acentos, que servirán para ordenar en el mismo orden los mismos sistemas; se puede formar con estas letras un número $n(\frac{n-1}{2})$ de resultantes con dos letras, tomando solamente en el término de cada una de las letras que llevan el mismo acento que las del primero. Si con otros dos sistemas de letras se forman resultantes con dos letras y se les multiplica a cada una por su correspondiente obtenida de los dos primeros sistemas, es decir, por aquellas letras que llevan el mismo acento, la suma de los productos de todas estas resultantes correspondientes serán una resultante con dos letras, cuyos términos o letras serán sumas de productos de elementos de dos sistemas llevando los mismos acentos. [34, pp. 280-281]

Ya en el cuerpo de la memoria, esto se traduce en tomar dos series de letras y, z de longitud n y a partir de ellas formar una serie de resultantes del tipo (y, z'), con una y seguida de una z con más acentos, resultando una serie de longitud $n\frac{n-1}{2}$ con las resultantes (y', z''), (y', z'''), etc., (y', z'''), (y', z^{iv}), etc. Luego hace lo mismo con otras dos series de letras ν, ζ de igual longitud y obtiene la siguiente fórmula:

$$\Sigma(y, z')(\nu, \zeta') = \Sigma y\nu\Sigma z\zeta - \Sigma z\nu\Sigma y\zeta, \tag{1.3.2}$$

de la que afirma:

> Este último miembro puede ser asimilado a la forma (y, z'), resulta de ello que el

[34] A la manera de Laplace y Vandermonde, a los que cita a este respecto. Escribe también: "El Sr. *Monge* me ha comunicado, después de la lectura de esta memoria, otros teoremas muy notables sobre estos resultados; pero no son del género de los que nos proponemos dar aquí." Monge publicó en 1809 una breve nota sobre las identidades que, al igual que en Lagrange, conectan determinantes con teoremas geométricos, véase [266, Vol. I pp. 67-68].

> producto de un número cualquiera de funciones, tales como $\Sigma(y,z')(\nu,\zeta')$, es él mismo de la forma (y,z'). [34, pp. 287]

Se trata, en efecto, de una resultante, aunque no de letras simples sino de expresiones integrales derivadas de las series de letras dadas. Se tiene por una parte la serie de integrales $\Sigma y\nu, \Sigma y\zeta$ y por otra la serie $\Sigma z\nu, \Sigma z\zeta$, cuya resultante es el segundo miembro de la igualdad anterior. En el caso $n = 2$ es fácil identificar en forma desplegada que el producto de dos resultantes es una resultante[35]:

$$(y'z'' - z'y'')(\nu'\zeta'' - \zeta'\nu'') =$$
$$(y'\nu' + y''\nu'')(z'\zeta' + z''\zeta'') - (y'\zeta' + y''\zeta'')(z'\nu' + z''\nu'')$$

Naturalmente el paso siguiente para Binet era repetir la construcción con resultantes de tres letras, como ya había anunciado en la introducción a su memoria:

> Con dos grupos de tres sistemas de letras cada uno se puede formar de la misma manera dos series de resultantes de tres letras; haciendo luego la suma de los productos de los que se corresponden por los acentos de sus letras, se obtendrá otra resultante de tres letras. [34, pp. 281]

[35] Con la notación para determinantes más tarde consolidada se tiene:

$$\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nu' & \nu'' \\ \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'\nu' + y''\nu'' & y'\zeta' + y''\zeta'' \\ z'\nu' + z''\nu'' & z'\zeta' + z''\zeta'' \end{vmatrix}$$

Nótese que, desde un punto de vista matricial todavía no vislumbrado en tiempos de Binet, la resultante del segundo miembro se obtiene del producto fila-fila de las matrices 2×2 del primero. Para $n = 3$ la fórmula es de tipo más general:

$$\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nu' & \nu'' \\ \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y' & y''' \\ z' & z''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nu' & \nu''' \\ \zeta' & \zeta''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y'' & y''' \\ z'' & z''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nu'' & \nu''' \\ \zeta'' & \zeta''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma y\nu & \Sigma y\zeta \\ \Sigma z\nu & \Sigma z\zeta \end{vmatrix}$$

Matricialmente, en el segundo miembro vemos hoy el producto fila-fila de las matrices rectangulares

$$\begin{matrix} y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \nu' & \nu'' & \nu''' \\ \zeta' & \zeta'' & \zeta''' \end{matrix}$$

Por otra parte, llamando con las mismas letras y, z, etc. a los respectivos vector de componentes de cada serie, la igualdad anterior es la hoy bien conocida fórmula del cálculo vectorial tridimensional que expresa el producto escalar de dos productos vectoriales:

$$(y \wedge z) \cdot (\nu \wedge \zeta) = \begin{vmatrix} y \cdot \nu & y \cdot \zeta \\ z \cdot \nu & z \cdot \zeta \end{vmatrix}.$$

Se observa que de una manera puramente algorítmica y generalizadora de expresiones sencillas del cálculo, se va acumulando una experiencia matemática que a lo largo del siglo XIX irá dando lugar a las síntesis matriciales y vectoriales que permitirán la expresión adecuada de la matemática n-dimensional y de su aplicación a la mecánica.

Tres series de letras de longitud n producen una serie de resultantes de longitud $n\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}$ que verifican la fórmula $\Sigma(x,y',z'')(\xi,\nu',\zeta'') = \Delta$, donde Δ es la resultante de Lagrange 3×3 obtenida a partir de la serie de nueve integrales

$$\Sigma x\xi,\ \Sigma x\nu,\ \Sigma x\zeta,\ \Sigma y\xi,\ \Sigma y\nu,\ \Sigma y\zeta,\ \Sigma z\xi,\ \Sigma z\nu,\ \Sigma z\zeta.$$

Todavía le quedaron ánimos a Binet para expresar la fórmula similar para el orden cuatro, $\Sigma(t,x',y'',z''')(\tau,\xi',\nu'',\zeta''')$, suma de las dieciséis integrales posibles $\Sigma t\tau$, &c. que forman un cuadro 4×4 cuya resultante escribe Binet —con sus veinticuatro términos, positivos y negativos a partes iguales— ocupando ocho líneas de texto[36]. En el apartado 7 observó que por ser el segundo miembro de 1.3.2 una resultante, se pueden hacer sumas de productos de sumas que a su vez darán sumas de resultantes:

> ...se puede decir que el producto de funciones, tales como
>
> $$\Sigma\{S(y,z')S(\nu,\zeta')\},$$
>
> será él mismo de la forma $S(y',z'')$.
>
> Las expresiones que los Srs. Lagrange y Poisson han representado por el símbolo (a,b) en sus investigaciones sobre la variación de las constantes arbitrarias en problemas de mecánica, son del género de las que he designado aquí por $S(y',z'')$. [34, pp. 281]

Después, a partir del apartado 8, siguió rizando el rizo obteniendo fórmulas más complejas para sumas de productos de sumas de resultantes, sumas de cuadrados de letras y de resultantes, etc.; pero para verificar la evolución de la noción de determinante no necesitamos entrar en este alto grado de complejidad.

Para finalizar el análisis de la obra de Binet y poner así término a esta sección, volveremos a la introducción de su memoria para señalar que en ella el autor indica que su trabajo generaliza algunos ejemplos particulares ya obtenidos por otros matemáticos. Así, menciona el producto de resultantes de dos y tres letras que Gauss (dándoles el nombre, él sí, de "determinantes") había utilizado al estudiar las formas cuadráticas en sus *Disquisitiones arithmeticae.*

[36] Véase el apartado 6 de [34, pp. 287-288].

Es muy explícito reconociendo su deuda con Lagrange:

> El Sr. *Lagrange* ha dado, en esta memoria sobre la pirámide, una serie de relaciones muy notables; tienen lugar entre cantidades deducidas de tres sistemas de tres letras cada uno, y conducen a ecuaciones idénticas muy singulares: nuestras investigaciones comienzan con relaciones de esta especie, pero extendidas a las cantidades deducidas de tres sistemas de un número cualquiera de letras. Me parece que no se incluyen entre las del gran geómetra cuyo bello análisis me ha guiado; son una generalización de las mismas que a menudo puede ser útil: varias fórmulas que intervienen en el problema de la rotación de los cuerpo, por ejemplo, son de este género. [34, p. 282]

Antes, había mencionado expresamente que:

> El Sr. Lagrange ha demostrado que el cuadrado de una resultante de tres letras es él mismo una resultante; pero, en esta última, seis de las nueve letraso términos que la forman son iguales dos a dos. [34, p. 281]

Es claro que se refiere a la fórmula $\Delta^2 = det[a]$ que ya comentamos al tratar la contribución de Lagrange.

Finalmente, Binet declara también la utilidad de estos algoritmos en el método de los mínimos cuadrados[37]:

> Varias de las expresiones de las que nos ocupamos entran también en las fórmulas que el Sr. *Laplace* ha dado para el *minimum* de error medio cometido sobre elementos determinados por un gran número de observaciones, fórmulas que se encuentran entre la proporcionadas por el método de los mínimos cuadrados, que los Srs. *Legendre* y *Gauss* han dado a conocer. [34, p. 282]

Cuestiones similares a las tratadas por Binet fueron abordadas por Cauchy en la memoria cuya presentación oral realizó a la vez que la de su colega Binet (1812) pero que no publicó hasta tres años después[38],

[37] Binet hace referencia a Legendre y Gauss.

[38] El retraso en la publicación se debería en cierta medida a que Cauchy se fue de París para una segunda estancia como ingeniero en Cherbourg, una ciudad costera en el Canal de la Mancha, frente a Inglaterra. Napoleón quería que tuviera un puerto muy importante, obra en la que Cauchy tuvo en 1810 su primer destino como ingeniero politécnico. Por razones de salud volvió a París en septiembre de 1812, pero, recuperado, un año después se reintegró a Cherbourg, de nuevo por poco tiempo.

Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suites des transpositions opérées entre variables qu'elles renferment[39] [64].

En ella adopta la denominación de Gauss (aunque a veces utiliza también la palabra "resolvente") y ofrece un tratamiento combinatorio sistemático de los determinantes, considerados como funciones simétricas alternadas de un tipo especial. El desarrollo posterior de la teoría de determinantes puso el énfasis en su aspecto algorítmico hasta que el rasgo funcional fue rescatado cincuenta años después por Weierstrass, cuando caracterizó completamente los determinantes entre las funciones alternadas como aquéllas que son multilineales[40].

La memoria de Cauchy antes citada, de 84 páginas, está dividida en dos partes, con la segunda, mucho más extensa que la primera, formada a su vez por cuatro secciones:

> Primera Parte: *Consideraciones generales sobre las funciones simétricas alternadas.* (pp. 29-51)
>
> Segunda Parte: *Las funciones simétricas alternadas llamadas Determinantes.* (pp. 51-112)
>
> 1ª Sección: *Determinantes en general y Sistemas simétricos.*
>
> 2ª Sección: *Sistemas de Ecuaciones simétricas y sus Determinantes.*
>
> 3ª Sección: *Sistemas de Cantidades derivadas y sus Determinantes.*
>
> 4ª Sección: *Sistemas de Ecuaciones derivadas y sus Determinantes.*

En la primera parte Cauchy estudia las "funciones simétricas" basadas en permutaciones y la manera de asignar a éstas un signo + o −. Hay que advertir que amplía la noción

[39] *Journal de L'École Polytechnique*, Vol. 10, cahier 17, p. 29-112, Paris, 1815. Las páginas anteriores 1-27 corresponden a otro trabajo de Cauchy, *Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorqu'on y permute de toutes manières possibles les quantités qu'elle renferme* [63], en la que Cauchy añade resultados nuevos a lo ya obtenido por Lagrange, Vandermonde y Ruffini. Su objetivo es examinar

> más particularmente el caso en que el número de los valores de una función se supone menor que el número de las letras, porque las funciones de esta naturaleza son aquellas cuyo conocimiento es más útil en análisis

Tras este tema más general viene al memoria sobre las funciones que toman valores mínimos, sólo uno las simétricas o dos iguales y de signo contrario las alternadas, donde aparecen los determinantes. Estos primeros trabajos de Cauchy en los que aparecen las permutaciones están en el origen de los que dedicó a iniciar la teoría de grupos en los años cuarenta, aunque en los de 1815 no aparecen todavía los elementos propios de dicha teoría. Como referencia sucinta sobre este asunto véase [272].

[40] Lo veremos en el capítulo siguiente.

usual de función simétrica admitiendo por tales no sólo a las que no se alteran si se permutan sus variables, sino también a las que cambian sólo de signo. Una función que no cambia por permutaciones es una función "simétrica permanente" y si puede cambiar el signo recibe el nombre de función "simétrica alternada". Por otra parte, para designar las variables Cauchy utiliza, como Binet, series denotadas por letras, pero cada serie la anota con subíndices en vez de con acentos, siendo igual en número de índices de cada letra. Así, dice:

> [...] concebimos las diversas sucesiones de cantidades
>
> $$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, & \ldots & a_n, \\ b_1, & b_2, & \ldots & b_n, \\ c_1, & c_2, & \ldots & c_n, \\ \&c. & & & \end{array}$$
>
> ligadas de tal modo entre sí, que la transposición de dos índices tomados en una de las sucesiones, necesita la misma transposición en todas las otras; [...] [64, p. 30]

Cauchy supone funciones K cuyas variables son las del cuadro anterior (relacionadas por sumas y productos). En casos concretos hará que las letras $b, c, \&c.$ sean "funciones semejantes" de las correspondientes de la serie a, por ejemplo $b_1 = a_1^2, b_2 = a_2^2, \&c.$; $c_1 = a_1^3, c_2 = a_2^3, \&c.$, de modo que K sea una función simétrica de las variables de la serie a.

Expone Cauchy que, dada una función K de m variables que supone numeradas con subíndices en un orden natural, existen "$Q = 1.2.3\ldots m$" permutaciones de esos índices, para cada una de las cuales la función K toma un valor; sumados todos estos valores resulta la función simétrica permanente que denota $S(K)$. Por ejemplo, si $K = a_1b_2$ las variables serán a_1, a_2, b_1, b_2 y sólo hay una permutación, que nos cambia K en la función $K' = a_2b_1$, de modo que $S(K) = K + K' = a_1b_2 + a_2b_1$.

La cuestión importante para Cauchy es estudiar la posibilidad algo más sutil de generar a partir de K una función simétrica alternada $S(\pm K)$, para lo cual

> [...] será necesario establecer una distinción entre los términos que deberán ser considerados como positivos, y los que deberán ser considerados como negativos. [64, p. 36]

En el caso sencillo anterior se trataría de $S(\pm K) = a_1b_2 - a_2b_1$ o bien $S(\mp K) = -a_1b_2 + a_2b_1$.

Para realizar tal distinción de signo, Cauchy considera la "permutación" A_1 con el orden natural de los índices y otra cualquiera A_s que se obtiene de la anterior mediante una "sustitución" $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix}$ descomponible en "círculos" (sustituciones circulares). Su ejemplo es éste:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

En general, si m es el número de índices y g el de sustituciones circulares de la descomposición, con $g \leq m$, a las sustituciones con $m - g$ par son llamadas por Cauchy "de primera especie" y "de segunda especie" si $m - g$ es impar; en el primer caso las permutaciones inicial y final de la sustitución son "de la misma clase" y en el segundo de "clase contraria". De este modo, asignando signo a una permutación, por ejemplo a la principal, queda fijado el signo de todas.

Otro problema que debe resolver para el caso alternado es determinar las condiciones que ha de tener la función K para poder ser "término indicativo" de una función simétrica alternada $S(\pm K)$[41]. Cauchy prueba que:

> la única condición necesaria para que la función K pueda ser el término indicativo de una función simétrica alternada de la forma
>
> $$S(\pm K),$$
>
> es que los dos valores de esta función obtenidos, uno por un número par y otro por un número impar de transposiciones de los índice contenidos en K, sean siempre diferentes uno del otro. [64, p. 44]

Para terminar la primera parte Cauchy demuestra que

> toda función simétrica alternada, que no contiene más que una especie de cantidades tales como
>
> $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
>
> es divisible por las diferencias respectivas de las cantidades de las que se trata. Es por tanto también divisible por el producto de esas diferencias. [64, p. 47]

[41]En el caso permanente no hay condiciones que imponer.

Como consecuencia de este resultado obtiene que

$$S(\pm a_1^0, a_2^1, a_3^2 \dots a_{n-1}^{n-2}, a_n^{n-1})$$

es igual al producto de todas las diferencias $a_j - a_i$ con $i < j$, afirmando que para $n = 3$ este resultado[42] "ha sido dado por *Vandermonde* en su memoria sobre la resolución de ecuaciones". Cauchy expone también otras fórmulas parecidas a la de Vandermonde, entre ellas[43]

$$S(\pm a_1, a_2^2, a_3^3 \dots a_{n-1}^{n-1}, a_n^n) = a_1 a_2 \dots a_n S(\pm a_1^0, a_2^1, a_3^2 \dots a_{n-1}^{n-2}, a_n^{n-1}). \qquad (1.3.3)$$

Cauchy llega a estas fórmulas por métodos específicos para funciones simétricas, pero no mediante el cálculo con determinantes que todavía no ha introducido.

Para terminar la primera parte inserta un párrafo que introduce el estudio de los determinantes que abordará en la segunda parte de la memoria. El párrafo mencionado dice así:

> Voy a examinar ahora particularmente una cierta especie de funciones simétricas alternadas que aparecen en un gran número de investigaciones analíticas. Por medio de estas funciones se expresan los valores generales de las incógnitas contenidas en varias ecuaciones de primer grado. Se presentan cada vez que uno tiene que formar ecuaciones de condición, así como en la teoría general de la eliminación. Los Srs. *Laplace* y *Vandermonde* las han considerado bajo esta relación en las memorias de la Academia de ciencias (año 1772), y el Sr. *Bézout* las ha examinado también bajo el mismo punto de vista en su Teoría de ecuaciones. El Sr. *Gauss* las ha usado con ventaja en sus Investigaciones analíticas , para descubrir las propiedades generales de las formas de segundo grado, es decir, de los polinomios de segundo grado con dos o más variables; y ha designado a estas funciones bajo el nombre de *determinantes*. Conservaré esta denominación que proporciona un medio fácil de

[42]Escribiendo el caso $n = 3$ se identifica de inmediato el que ahora llamamos "determinante de Vandermonde": siendo $a_i^0 = 1$, resulta $S(\pm a_1^0, a_2^1, a_3^2) = a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2 + a_1 a_2^2 - a_3 a_2^2 - a_2 a_1^2 + a_1 a_3^2 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1, & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$ (esta escritura como cuadro de números entre barras no está en Cauchy).

[43]Para $n = 3$ y con notación moderna se trata de

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2, & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1, & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

> enunciar los resultados; observaré solamente que se da también algunas veces a las funciones de las que se trata el nombre de *resultantes* de dos o mas letras. Así las dos expresiones siguientes, determinante y resultante, deberán mirarse como sinónimas. [64, p. 51]

En la primera sección de la segunda parte Cauchy introduce la forma general de los determinantes de orden n y desarrolla para ellos, con carácter general y metódico, los resultados que él mismo atribuye a Cramer y Laplace, citando también a Gauss a la hora de determinar los "adjuntos".

Para Cauchy el determinante de orden n es la función simétrica alternada

$$D_n = S(\pm a_{1.1}a_{2.2}\ldots a_{n.n}), \tag{1.3.4}$$

donde "el símbolo S es relativo a los primeros índices de cada letra" (p. 52). El primer método que ofrece para calcular D_n es hacer uso de la fórmula 1.3.3: se desarrolla su segundo miembro en forma de suma con signo + o − de productos de potencias de las letras, y en el resultado se sustituye cada factor "a_r^s" por "$a_{r.s}$". De este modo obtiene

$$\begin{aligned}
S(\pm a_{1.1}a_{2.2}) &= a_{1.1}a_{2.2} - a_{2.1}a_{1.2}\\
S(\pm a_{1.1}a_{2.2}a_{3.3}) &= a_{1.1}a_{2.2}a_{3.3} + a_{2.1}a_{3.2}a_{1.3} + a_{3.1}a_{1.2}a_{2.3} -\\
&\quad -a_{1.1}a_{3.2}a_{2.3} - a_{3.1}a_{2.2}a_{1.3} - a_{2.1}a_{1.2}a_{3.3}\\
\&c.
\end{aligned}$$

Pero a continuación pasa a la formulación combinatoria más general. Asocia el determinante D_n a lo que llama "*sistema simétrico* de orden n", que es el cuadro de n^2 cantidades

$$(1)\begin{cases}
a_{1.1}, & a_{1.2}, & a_{1.3} & \cdots a_{1.n},\\
a_{2.1}, & a_{2.2}, & a_{2.3} & \cdots a_{2.n},\\
a_{3.1}, & a_{3.2}, & a_{3.3} & \cdots a_{3.n},\\
\&c. & \cdots & & \\
a_{n.1}, & a_{n.2}, & a_{n.3} & \cdots a_{n.n},
\end{cases}$$

afirmando que D_n es el determinante de dicho sistema, que debe calcularse sumando todos los "productos simétricos"

$$a_{\alpha.1}a_{\beta.2}\ldots a_{\zeta.n}$$

con el signo correspondiente a cada uno de ellos según la siguiente regla[44]:

> designemos por g el número de las sustituciones circulares equivalentes a la sustitución
>
> $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \zeta \end{pmatrix}.$$
>
> Este producto deberá estar afectado por el signo +, si $n-g$ es un número par, y por el signo − en el caso contrario. [64, p. 56]

Para referirse al sistema simétrico (1) utiliza Cauchy la notación $(a_{1.n})$, y denota con $(a_{n.1})$ el sistema simétrico (2) que obtiene trasponiendo el (1), diciendo que "los sistemas (1) y (2) son respectivamente conjugados el uno del otro". Entonces argumenta que $D_n = S(\pm a_{1.1}a_{2.2}\cdots a_{n.n})$ es tanto el determinante del sistema (1) como del (2), de modo que da igual que el signo S se refiera a los primeros índices o a los segundos; es decir, dos sistemas conjugados tienen el mismo determinante.

La tarea siguiente que aborda Cauchy es desarrollar D_n por los elementos de una fila del sistema y sus "adjuntos", notación con la que afirma seguir a Gauss en su trabajo sobre las formas ternarias. Denota $b_{\mu.\nu}$ el determinante de orden $n-1$ adjunto de $a_{\mu.\nu}$, probando que

$$a_{1.\nu}b_{1.\mu} + a_{2.\nu}b_{2.\mu} + \dots + a_{n.\nu}b_{n.\mu} = \begin{cases} D_n & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Luego hace lo mismo desarrollando por columnas.

Llegado a este punto expone con toda generalidad la regla de Cramer para un sistema lineal de ecuaciones cuyo sistema de coeficientes es el (1), las incógnitas $x_1, \dots, x_n$ y los términos independientes $m_1, \dots, m_n$. En la nomenclatura de Cauchy, tal sistema es una "sucesión de ecuaciones simétricas" y lo escribe simbólicamente de la forma

$$\Sigma[S^n(a_{\mu.1}x_1) = m_\mu], \tag{1.3.6}$$

donde S^n indica sumar de 1 a n lo que se indica entre paréntesis y Σ es el símbolo para indicar "sistema de ecuaciones" según el índice μ. Para resolver el sistema utiliza las

[44] Inmediatamente Cauchy demuestra que su regla de los signos coincide con la que había dado Cramer.

relaciones 1.3.5, de modo que cada incógnita se obtiene despejando en la ecuación[45]

$$D_n x_\mu = m_1 b_{1.\mu} + m_2 b_{2.\mu} + \ldots + m_n b_{n.\mu}. \tag{1.3.7}$$

A continuación Cauchy considera todas estas ecuaciones como un nuevo sistema lineal cuyos coeficientes forman el "sistema adjunto" $(b_{1.n})$ del $(a_{1.n})$,

$$\Sigma[S^n(b_{1.\mu}x_1) = D_n x_\mu], \tag{1.3.8}$$

Este sistema tiene determinante B_n y da lugar a otro siguiendo el mismo camino que llevó del sistema 1.3.6 al sistema 1.3.9,

$$\Sigma[S^n(D_n c_{\mu.1}x_1) = B_n m_\mu], \tag{1.3.9}$$

cuyos coeficientes forman el "sistema adjunto de segundo orden" del $(a_{1.n})$, denotado $(c_{1.n})$, que no es sino el adjunto del $(b_{1.n})$. Comparando este sistema con el inicial 1.3.6, termina la sección obteniendo las fórmulas

$$c_{\mu.\nu} = \frac{B_n}{D_n} a_{\mu.\nu}.$$

Ya en la sección siguiente, la segunda, demuestra que $B_n = D_n^{n-1}$, de modo que las fórmulas anteriores se reducen a

$$c_{\mu.\nu} = D_n^{n-2} a_{\mu.\nu}.$$

Escribe Cauchy:

> Así, *dado un término cualquiera $a_{\mu,\nu}$ del sistema $(a_{1.n})$, para obtener el término correspondiente del sistema adjunto de segundo orden $(c_{1.n})$, bastará multiplicar el término dado por la $(n-2)^a$ potencia del determinante del primer sistema.* [64, p. 82][46]

Pero el gran matemático francés no obtiene directamente la relación anterior entre los determinantes B_n y D_n, sino como caso particular de su resultado principal sobre el producto

[45] Cauchy advierte que x_μ es una fracción con denominador D_n y cuyo denominador "es lo que queda de este determinante cuando se reemplazan los coeficientes de la incógnita tomados en las ecuaciones por los segundos miembros de estas ecuaciones", pero la notación con S usada por Cauchy no le permite expresar simbólicamente este determinante del numerador.

[46] La cursiva está usada en el original.

de determinantes, que ocupa el inicio de la segunda sección. En ella Cauchy considera tres sistemas simétricos de cantidades $(a_{1.n})$, $(\alpha_{1.n})$ y $(m_{1.n})$, cuyos determinantes son respectivamente D_n, δ_n, M_n, y demuestra que

$$M_n = D_n\delta_n, \tag{1.3.10}$$

ecuación que considera "un teorema muy notable que se puede enunciar de la manera siguiente":

> Cuando un sistema de cantidades está determinado simétricamente mediante otros dos sistemas, el determinante del sistema resultante es siempre igual al producto de los determinantes de los dos sistemas que componentes. [64, p. 82]

Cuando dice el autor que el sistema simétrico de cantidades $(m_{1.n})$ "está determinado simétricamente" por los sistemas simétricos de cantidades $(a_{1.n})$ y $(\alpha_{1.n})$, se refiere a que $(m_{1.n})$ responde más bien a lo que él mismo llama un "sistema de ecuaciones simétricas"

$$\Sigma[S^n(\alpha_{\nu.1}a_{\mu.1}) = m_{\mu.\nu}], \tag{1.3.11}$$

lo que indica que los m son funciones de los a y los α de la forma

$$\alpha_{\nu.1}a_{\mu.1} + \alpha_{\nu.2}a_{\mu.2} + \cdots + \alpha_{\nu.n}a_{\mu.n} = m_{\mu.\nu}.$$

Sustituyendo estos valores en la expresión $M_n = S(\pm m_{1.1}m_{2.2}\dots m_{n.n})$ y argumentando en base a las propiedades de las funciones simétricas alternadas llega a concluir la igualdad 1.3.10 salvo un factor constante c, para el que obtiene $c = 1$ operando con un caso particular sencillo[47].

Nótese que las ecuaciones del sistema 1.3.11 se encuentran los productos de los elementos de una columna de $(a_{1.n})$ por los de una columna de $(\alpha_{1.n})$, pero en las páginas siguientes Cauchy explica que la igualdad 1.3.10 subsiste cualquiera que sea la combinación fila-columna que se adopte para formar los productos.

Cauchy completa este estudio con la obtención de otras fórmulas ligadas a los sistemas relacionados anteriores $(\alpha_{1.n})$, $(a_{1.n})$, $(m_{1.n})$, a sus adjuntos respectivos $(\beta_{1.n})$, $(b_{1.n})$,

[47]Para obtener la igualdad $B_n = D_n^{n-1}$ utiliza la 1.3.10 con los sistemas de cantidades $(a_{1.n})$ y su adjunto $(b_{1.n})$, de modo que los m vienen dados por las igualdades 1.3.5.

$(r_{1.n})$ y a los adjuntos de segundo orden $(\gamma_{1.n})$, $(c_{1.n})$, $(t_{1.n})$, con determinantes respectivos δ_n, D_n, M_n; ζ_n, B_n, R_n; θ_n, C_n, T_n. Entre ellas, repitiendo algunas ya conocidas para apreciar la coherencia del cálculo tal como lo muestra Cauchy (p. 91), se encuentran las siguientes:

$$(45)\left\{\begin{array}{ccc} & M_n = D_n\delta_n & \\ \zeta_n = \delta_n^{n-1} & B_n = D_n^{n-1} & R_n = M_n^{n-1} \\ & R_n = B_n\zeta_n & \\ \theta_n = (\delta_n^{n-1})^2 & C_n = (D_n^{n-1})^2 & T_n = (M_n^{n-1})^2 \\ & T_n = C_n\theta_n & \end{array}\right\} \tag{1.3.12}$$

Sigue a éste otro amplio repertorio de igualdades que expresan los elementos de cada uno de los sistemas anteriores en función de otros. Finalmente, sumando todas las ecuaciones del sistema 1.3.11 llega a la primera expresión siguiente y después a su expresión adjunta:

$$\left.\begin{array}{ll} (50) & S^n\{S^n(\alpha_{\mu.\nu})S^n(a_{\mu.\nu})\} = S^nS^n(m_{\mu.\nu}) \\ (51) & S^n\{S^n(\beta_{\mu.\nu})S^n(b_{\mu.\nu})\} = S^nS^n(r_{\mu.\nu}) \end{array}\right\} \tag{1.3.13}$$

En (50) y (51) "el primer símbolo S en cada miembro es relativo al índice ν y los otros al índice μ". Las fórmulas 1.3.13 son similares a otras logradas simultáneamente por Binet.

Hasta aquí hemos comentado la parte de la memoria de Cauchy que muestra su aporte esencial a la evolución de la teoría de determinantes. En el resto de la memoria, secciones tercera y cuarta de su segunda parte, intensifica sus logros generalizando la fórmula 1.3.10 del producto, en el sentido de usar determinantes cuyos elementos son a su vez determinantes. Dado el sistema de cantidades $(a_{1.n})$ forma el "sistema derivado" de cantidades $(a_{1.P}^{(p)})$ cuyos elementos son los menores de orden p del sistema primero, cuyo número P es el de combinaciones de n elementos tomados de p en p, así como el "sistema derivado complementario" $(a_{1.P}^{(n-p)})$. Con estos elementos demuestra la siguiente fórmula:

$$S^p(a_{\nu.\pi}^{(p)}a_{P-\mu+1.P-\pi+1}^{(n-p)}) = \left\{\begin{array}{ll} D_n & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{array}\right. \tag{1.3.14}$$

que no es sino la expresión general del desarrollo de un determinante por menores complementarios encontrada inicialmente por Laplace. Además[48], siendo $D_P^{(p)}$ el determinante

[48]Las fórmulas 1.3.14 generalizan las 1.3.5, y las siguientes 1.3.15 hacen lo propio con la $B_n = D_n^{n-1}$ (con $p = 1$, $D_n^n = D_nB_n$) obtenida con anterioridad.

del sistema $(a_{1.P}^{(p)})$, Cauchy demuestra la igualdad

$$D_n^P = D_P^{(p)} D_P^{(n-p)}. \tag{1.3.15}$$

Finalmente, en la sección cuarta extiende a menores la fórmula del producto. Asociando a los sistemas $(\alpha_{1.n})$, $(a_{1.n})$, $(m_{1.n})$ sus derivados respectivos $(\alpha_{1.P}^{(p)})$, $(a_{1.P}^{(p)})$, $(m_{1.P}^{(p)})$, llega a la fórmula

$$M_P^{(p)} = D_P^{(p)} \delta_P^{(p)}, \tag{1.3.16}$$

que generaliza la fórmula del producto 1.3.10. La fórmula anterior 1.3.16 va acompañada de otras análogas a las primeras que aparecen en la relación 1.3.12, así como de la correspondiente generalización de la fórmula de tipo Binet numerada (50) en 1.3.13:

$$(70)\;\; S^n\{S^n(\alpha_{\mu.\nu}^{(p)}) S^n(a_{\mu.\nu}^{(p)})\} = S^n S^n(m_{\mu.\nu}^{(p)}) \tag{1.3.17}$$

Con ellas culmina Cauchy su trabajo en esta memoria, que termina con un reconocimiento a Gauss y a Binet. Su deuda con Gauss quedó plasmada de un modo que parece indicar que el teorema del producto era el objetivo principal de su trabajo:

> Acabamos de ver cuántas transformaciones analíticas diferentes pueden deducirse de la consideración de los sistemas de ecuaciones simétricas. Se debe hacer notar sobre todo el teorema encerrado en la ecuación en virtud del cual el producto de dos determinantes es también un determinante, y del cual las investigaciones hechas por el Sr. *Gauss* sobre los polinomios de segundo grado con dos y tres variables ofrecen numerosas aplicaciones. [64, p. 111]

Es importante observar que Cauchy se inspira en el producto de Gauss, pero su versión algorítmica no sigue la directriz funcional que Gauss había trazado. Gauss multiplica los cuadros de números en el orden fila-columna porque se inspira en el aspecto funcional dado por la composición de sustituciones. Pero Cauchy no presta atención a este aspecto funcional y desarrolla el producto en modo fila-fila, señalando que cualquier otra variante de filas y columnas conduce al mismo teorema del producto. En Cauchy prevalece el aspecto algorítmico que calcula con cuadros de números independientemente de su significado. Por otra parte, Cauchy sí mantiene un punto de vista funcional de otro tipo al concebir el determinante como una función simétrica alternada de múltiples variables, desarrollando este aspecto y usándolo intensamente en algunos momentos[49].

Junto a esto, parece que las fórmulas más complejas de tipo Binet fueran un logro simultáneo de menor trascendencia al no tener una importancia decisiva en la configuración de la teoría general de determinantes. Sobre Binet escribe Cauchy:

> Encontré el verano pasado, en Cherbourg, donde estaba ocupado en los trabajos de mi cargo, este teorema y algunos otros del mismo género, buscando generalizar las fórmulas del Sr. *Gauss*. El Sr. *Binet*, de cuya amistad me precio, había llegado a los mismos resultados por investigaciones diferentes. De regreso a París, estaba ocupado en continuar mi trabajo, cuando fui a verle. Me enseñó su teorema que era semejante al mio. Únicamente él designaba bajo el nombre de *resultante* lo que yo había llamado *determinante*. [...] las fórmulas (50), (51) y (70) me parece que deben ser semejantes a aquéllas de las que el Sr. *Binet* me ha hablado. [64, pp. 111-112]

De las fórmulas que aparecen en la cita anterior de Cauchy la más general es (70), que puede compararse con la últimas enunciadas por Binet sin demostración, que no hemos mencionado en la páginas anteriores dedicadas a este autor. Muir discute el alcance de las fórmulas que cada uno de los autores franceses dieron como generalizaciones últimas del teorema del producto –o que lo son aunque no fueran presentadas expresamente como tales—, concluyendo[50] que las de Binet son más generales que las de Cauchy.

Pero desde el punto de vista de la construcción y exposición global y sistemática de la parte general de la teoría de determinantes como colofón al trabajo de los matemáticos anteriores, la memoria de Cauchy fue novedosa y resultó definitiva en cuanto a la materia referida. Dejó la puerta abierta para múltiples aplicaciones de los determinantes a las matemáticas y a la física utilizando determinantes específicos de diversos tipos.

Después de recordar que se debe calificar a Vandermonde como el "fundador" de la teoría de determinantes, Muir cierra su capítulo dedicado a Binet y Cauchy con esta sentencia:

> Cauchy rehizo los cimientos, reconstruyó el conjunto, e inició nuevas ampliaciones; el resultado es un edificio que los arquitectos de hoy en día todavía pueden admirar y encontrar digno de estudio. [266, Vol. I p. 131]

[49]Estos puntos de vista funcionales resurgirán avanzado el siglo XIX, el de la composición de sustituciones ligado a la teoría de matrices y el de función alternada con la formalización de Weierstrass.

[50]Véase [266, Vol. I pp. 123-130]

Muir escribió esto en 1906. Unas líneas antes de la cita anterior, había señalado que

> los libros de texto ordinarios sobre determinantes que se ofrecen a los estudiantes de hoy no contienen mucho más de la teoría general de lo que se encuentra en la memoria de Cauchy de hace unos ochenta años" [266, Vol. I p. 130]

En cuanto al contenido cierto es que poco ha cambiado y una exposición en la línea algorítmica de la teoría seguiría siendo aún hoy, salvo notaciones, próxima a la de Cauchy, pero si se opta por vincularla a la teoría de matrices y al método axiomático aplicado al álgebra lineal moderna, la presentación de la teoría se modifica sensiblemente. Ejemplos de estas permanencia y variaciones se pondrán de manifiesto en los capítulos siguientes.

Para terminar, digamos que, al igual que Binet, Cauchy tenía presente la utilidad de los determinantes en aplicaciones matemáticas y físicas diversas. El mismo año 1815, presentó (publicada en 1827) una memoria [66] sobre la propagación de las ondas en la superficie de un fluido, en la que aparecen los determinantes $S(\pm \frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc})$ que luego estudiará extensivamente Jacobi, así como el volumen de un paralelepípedo en la forma $S(\pm A_1B_2C_3)$, siendo los A_i, B_i, C_i las coordenadas de los extremos de tres aristas concurrentes en el origen.

Después de la memoria de Cauchy de 1815 el tema de los determinantes quedó como zanjado durante más de una década. Tanto fue así que el propio Muir hizo seguir el capítulo IV de su libro, dedicado a Binet y Cauchy, de otro en el que realizó un somero balance de la creación de la teoría de determinantes, producida hasta entonces de la mano, sobre todo, como hemos visto, de matemáticos franceses. Además, los trabajos inmediatamente posteriores recogidos por Muir son exposiciones carentes de novedad, hasta la aparición de Jacobi, que impulsó los determinantes sobre todo desde le punto de vista de sus aplicaciones y del los determinantes especiales que en ellas iban apareciendo.

1.3.4 Hasta c. 1850: Jacobi-Cayley-Sylvester

En 1821 Cauchy publicó la primera parte de su famoso *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Première partie* [65], dedicado a la preparación general en análisis necesaria para abordar el cálculo infinitesimal. Fue un libro de gran importancia matemática y amplia difusión, que pudo servir para dar a conocer la teoría de determinantes, pero no fue así. Su tercer capítulo tiene el siguiente contenido:

> Funciones simétricas y Funciones alternadas. Uso de estas funciones para la resolución de las ecuaciones de primer grado en un número cualquiera de incógnitas. Funciones homogéneas. [65, p. 70]

Este contenido se organiza en tres apartados titulados según los tres tipos de funciones mencionadas[51]. En los dos primeros, relativos a "funciones simétricas" y "funciones alternadas" respectivamente, el autor se limita a definir dichas funciones y usarlas para obtener la regla de Cramer que resuelve los sistema de n ecuaciones y n incógnitas, pero los determinantes quedan ocultos en su exposición. Cauchy tomó de su memoria de 1812-15 lo justo para resolver los sistemas lineales cuadrados, nada más. Veamos a continuación su obtención de la regla de Cramer, primero una particular y luego la general.

En el apartado primero Cauchy anuncia el uso que va a hacer de las funciones simétricas:

> Entre las funciones simétricas de varias cantidades $b, c, \ldots, g, h$, se deben distinguir las que sirven de coeficientes a las diversas potencias de a en el desarrollo del producto
>
> $$(a-b)(a-c)\ldots(a-g)(a-h),$$
>
> cuyas propiedades conducen a una solución muy elegante de varias ecuaciones de primer grado entre n variables $x, y, z, \ldots, u, v$, cuando estas ecuaciones son de la forma [...] [65, p. 71]

y a continuación escribe un sistema de tipo Vandermonde, donde los coeficientes de x son $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$, los de y lo mismo con la letra b, la letra c para la variable z y las h, g respectivamente para u, v. Si V es el producto de diferencias antes citado, Cauchy escribe

$$V = a^{n-1} + A_{n-2}a^{n-2} + \ldots + A_1 a + A_0,$$

siendo A_i las funciones simétricas elementales, es decir, $A_{n-2} = -(b + c + \ldots + g + h)$, A_{n-2} la suma de los productos binarios, y así hasta $A_0 = \pm bc\ldots gh$. Observando que la expresión anterior de V se anula si se sustituye en ella a por cualquiera de las otras letras, y razonando sobre el sistema como veremos luego para el caso general, concluye que

$$x = \frac{(k-b)(k-c)\ldots(k-g)(k-h)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-g)(a-h)}.$$

[51]Cauchy ha abandonado la notación anterior de "simétricas permanentes" y "simétricas alternadas", distinguiendo simplemente entre "simétricas" y alternadas".

En el apartado siguiente aborda el caso general mediante funciones alternadas. Cauchy escribe un sistema de n ecuaciones y n incógnitas con la notación[52]

$$a_0x + b_0y + c_0z + \ldots + g_0u + h_0 = k_0$$

para la primera y similar para las siguientes, que empiezan por $a_1x, \ldots, a_{n-1}x$. A continuación se olvida de los subíndices de los coeficientes y considera las letras $a, b, c, \ldots, g, h$, llamando P a la función formada multiplicando todas las diferencias (no nulas) entre ellas escritas en un orden determinado: primero $b - a$, después $(c - a)(c - b)$, después los tres productos de diferencias de d con las letras que le preceden, y así hasta terminar con $(h - a) \ldots (h - g)$. Tal P es una función alternada que se calcula dejándola en la forma de sumas con signo de productos de las letras con exponentes que son permutaciones del orden natural de los números $0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Si cada uno de estos números se baja a posición de subíndice se obtiene una función alternada de los coeficientes del sistema que llama D (que no es otra cosa sino el determinante del sistema). Sacando factor común cada a_i resulta una expresión de la forma

$$D = A_0a_0 + A_1a_1 + A_2a_2 + \&c \ldots + A_{n-1}a_{n-1}.$$

Por ser D alternada, esta expresión se anulará si cambiamos las letras a por cada una de las otras $b, c, \ldots, g, h$. Entonces, multiplicando cada ecuación del sistema por el factor A_i correlativo y sumando todas ellas resultará

$$Dx = A_0k_0 + A_1k_1 + A_2k_2 + \&c \ldots + A_{n-1}k_{n-1},$$

de donde se despeja la variable x; lo mismo se hace con las demás variables. Este método le permite a Cauchy expresar la variable en una "forma simbólica" que él escribe desarrollada y nosotros vamos a condensar:

$$x = \frac{D(k|a)}{D},$$

don de $D(k|a)$ es la función alternada D en la que, como en el apartado anterior con V, se ha sustituido k en lugar de a. Calculando estas expresiones y pasando los exponentes a subíndice se obtiene la expresión de Cramer.

[52]Es digno de observar que al dar un tratamiento más pedagógico al tema de los sistemas lineales de igual número de ecuaciones que de incógnitas y los determinantes, Cauchy evita la notación del doble subíndice numérico, que es más precisa pero más difícil de comprender por estudiantes o lectores poco habituados a simbolismos.

Este método, ingenioso y breve, se deduce de las primeras consideraciones sobre determinantes que hizo en su memoria de 1815, pero evita todo el desarrollo posterior de la teoría de determinantes allí contenida, con lo que ésta perdió una gran oportunidad de difusión. Pensaría Cauchy que, desde el punto de vista de la enseñanza, los determinantes introducían demasiada complejidad, y que lo único importante a ese nivel, resolver los sistemas, podía hacerse con sencillez y rapidez.

La oportunidad para que se iniciara un difusión amplia y popularización de la teoría de los determinante entre los matemáticos llegó con la obra de Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) y sus discípulos, no porque uno y otros completaran la teoría general, que ya quedó establecida por Cauchy, sino porque ampliaron notablemente sus ámbitos de aplicación, principalmente a cuestiones de análisis y de invarianza geométrica, lo que propició la aparición de determinantes especiales y su correspondiente estudio particular. Ello supuso que el interés por este algoritmo creciera notablemente, teniendo aplicaciones a la eliminación algebraica, a la geometría, la teoría de números y los invariantes, a la diferenciación y la integración, etc. En los diferentes campos de aplicación surgían determinantes de tipo especial que eran sometidos a un estudio particular.

La obra principal de Jacobi sobre determinantes se produjo entre 1827 y 1841. En el primer año citado destacan tres artículos en los que un joven Jacobi toma contacto con esas expresiones funcionales complejas que llamamos determinantes a la manera de los autores del XVIII, sin identificar dichos algoritmos como un objeto matemático específico que tiene una teoría propia. Los títulos de estos artículos[53] son:

> *Sobre los ejes principales de las superficies de segundo orden / Ueber die hauptaxen der flächen der zweiten ordnung [206],*
>
> *Sobre una transformación especial de la integral doble / De singulari quadam duplicis Integralis transformatione [205],*
>
> *Sobre el método de Pfaff, una ecuación diferencial ordinaria lineal entre* $2n$ *variables integrada mediante un sistema de* n *ecuaciones / Ueber die Pfaffsche Methode, eine*

[53] Escritos en alemán y latín —la traducción de los títulos y de alguna cita textual que damos es propia— y publicados en el *J. de Crelle*, que había iniciado su andadura en 1825 como competencia alemana del francés *J. de Liouville*. El primero está firmado en mayo, el segundo en junio el tercero el 14 de agosto; todos ellos en la Universidad Königsberg, a la que a veces se refiere el autor con la versión latina de su nombre: Regiomonte.

gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen 2n Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren [207]

En el primero estudia la reducción de una expresión cuadrática general en tres variables, $Axx+Byy+Czz+2ayz+2bzx+2cxy$, a otra reducida $L\xi\xi+M\nu\nu+N\zeta\zeta$. Para ello realiza un cambio de coordenadas con los nuevos ejes ξ, ν, ζ oblicuos pero con igual unidad de medida, lo que impone relaciones entre los coeficientes del cambio de coordenadas. A lo largo de los cálculos que realiza le surgen expresiones complejas a las que da nombre con letras para simplificar los cálculos, entre ellas el determinante Π del cambio de coordenadas, pero sin reconocer ninguna entidad especial a estas expresiones.

Algo similar sucede en el segundo artículo, en el que realiza un cambio de variable para reducir una integral doble complicada a una mucho más sencilla. Al trabajar este cambio le surgen lo que ahora llamamos en su honor los determinantes "jacobianos", formados con las derivadas parciales del cambio de variable, expresiones que Jacobi identifica formalmente con las que aparecen en los trabajos de Laplace, Vandermonde, Gauss y Binet.

En el tercero de los trabajos antes citado Jacobi expone la teoría de Pfaff para reducir la integral de una formas diferencial de primer orden a la de un sistema lineal cuyos coeficientes tienen la propiedad de presentar ceros en la diagonal y tener iguales y de signo opuesto los elementos simétricos respecto a dicha diagonal, lo que ahora se denomina una matriz cuadrada antisimétrica, semisimétrica o hemisimétrica. Jacobi prueba que el determinante del sistema antisimétrico es nulo si el orden es impar y resuelve el sistema según la regla de Cramer en el caso par, generando un algoritmo para escribir el valor del determinante en este caso. Para describir este tipo de cuadro de cantidades —en este caso cantidades variables— Jacobi usa una terminología de líneas verticales y horizontales similar a la de Cauchy y llama a la función de los coeficientes que se usa en la solución del sistema el "determinante" del mismo, afirmando que toma esta notación de Gauss[54].

Cauchy y Jacobi hicieron en los años siguientes algún otro trabajo en el que intervienen los determinantes, pero el tema como tal no volvió a reaparecer con intensidad hasta 1841, año en que Jacobi publicó tres trabajos y Cauchy cuatro. Además, Arthur Cayley (1821-1895) se sumó al tema, con lo que los determinantes quedaron definitivamente diseminados por la matemática europea.

[54]Véase [266, Vol. I pp. 401-405] para más detalles. Muir sugiere que el uso por Jacobi de una terminología similar a la de Cauchy puede ser indicio de que por entonces empezó a conocer la obra sobre determinantes de su colega francés.

Los trabajos de Jacobi que hemos mencionado, publicados en 1841, son:

> *Sobre la formación y propiedades de los determinantes / De formatione et propietatibus determinantium [208]*

> *Sobre determinantes funcionales / De determinantibus functionibus [202]*

> *Sobre funciones alternadas y su división por productos de diferencias de elementos / De functionibus alternatibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum [203]*

Estos tres artículos de Jacobi publicados en 1841 constituyen una exposición sistemática de la teoría de determinantes actualizando lo que años antes realizara Cauchy, de un modo muy personal e introduciendo algunas interesantes novedades. Se publicaron las tres de modo consecutivo en el *J. de Crelle*[55], por lo que puede considerarse que forman una obra única, la que produjo la definitiva implantación del estudio y uso de los determinantes en matemáticas.

Jacobi comienza la primera de las memorias anteriores afirmando que "los algoritmos que se utilizan en la resolución de las ecuaciones lineales literales son bien conocidos", pero declara su intención de hacer una memoria concisa y de fácil acceso sobre sus propiedades para que puedan ser utilizadas en importantes cuestiones del análisis. [**?**, p. 285] Buena parte de su innovación se basa en un punto de vista funcional que introduce la derivación.

El autor alemán afirmó que utilizaba el término "determinante" inspirándose en Gauss, y citó a Cramer, Bezout, Laplace y Cauchy. Utilizó el simbolismo de este último, aunque operó algunas ligeras variantes en la terminología[56]. Al igual que Cauchy, comenzó por el

[55] La paginación respectiva es 285-318, 319-359 y 360-371, de modo que forman un conjunto de 87 páginas de la citada revista. En las tres entregas se presenta a Jacobi como "profesor ordinario" en Königsberg. La primera está fechada en esa localidad el 17 de marzo.

[56] Por ejemplo, teniendo en cuenta que comparamos latín y francés, usa la palabra *elementis* en vez de *terme* y reserva la palabra *terminus* para designar expresiones más complejas. Utiliza la palabra *gradus* en lugar de *order*.

estudio de las permutaciones y de la función alternada

$$\begin{array}{lccccc} P = & (a_1 - a_0) & (a_2 - a_0) & (a_3 - a_0) & \cdots & (a_n - a_0) \\ & & (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) & \cdots & (a_n - a_1) \\ & & & (a_3 - a_2) & \cdots & (a_n - a_2) \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & (a_n - a_{n-1}) \end{array}$$

y designó el determinante de "$(n+1)^2$ cantidades $a_k^{(i)}$" en la forma

$$R = \Sigma \pm a a_1' a_2'' \dots a_n^{(n)} = a^{(i)} A^{(i)} + a_1^{(i)} A_1^{(i)} \dots + a_n^{(i)} A_n^{(i)},$$

con un desarrollo similar por las otras líneas. La novedad introducida por Jacobi es considerar esta expresión funcional de R para aplicarle cálculo diferencial, escribiendo la fórmula [208, p. 293]

$$dR = \sum A_k^{(i)} da_k^{(i)}, \quad A_k^{(i)} = \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}},$$

que permite derivar un determinante cuando sus elementos son funciones. Este punto de vista lleva de modo natural a considerar segundas derivadas de R. Así, en el apartado 9 estudia el desarrollo del determinante R por productos binarios $a_g^{(f)} a_{g'}^{(f')}$, a los que corresponden factores que denota $A_{g,g'}^{f,f'}$, que no son sino las derivadas segundas sometidas a unas peculiares relaciones cuando se permutan los índices:

$$A_{g,g'}^{f,f'} = \frac{\partial^2 R}{\partial a_g^{(f)} \partial a_{g'}^{(f')}}, \quad A_{g',g}^{f,f'} = A_{g,g'}^{f',f} = -A_{g,g'}^{f,f'}.$$

Por tanto R es una suma de términos $(a_g^{(f)} a_{g'}^{(f')} - a_{g'}^{(f)} a_g^{(f')}) A_{g,g'}^{f,g}$. Además, comparando las expresiones de R como suma de derivadas (primeras o segundas) con coeficientes, obtiene igualdades $A_g^{(f)} = a^{(f')} A_{g,0}^{f',f} + a_1^{(f')} A_{g,1}^{f',f} \dots + a_n^{(f')} A_{g,n}^{f',f}$, que consideradas juntas para $g = 0, 1, \dots, n$, expresan las $A_g^{(f)}$ en función de las $a_g^{(f')}$ mediante un sistema antisimétrico de los que ya había obtenido en trabajos anteriores.

El punto de vista funcional diferencial de Jacobi quedó mucho más manifiesto en su segundo artículo, dedicado a los "determinantes funcionales" que ahora llevan su nombra $n+1$ funciones $f, f_1, f_2 \cdots f_n$ en las variables $x, x_1 \cdots x_n$ y forma el determinante que llamó "determinante funcional" y ahora conocemos como "jacobiano":

$$R = \sum \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Demuestra que este determinante se anula y y sólo si entre las funciones hay una dependencia funcional $\Pi(f, f_1, f_2 \cdots f_n) = 0$. Completa el trabajo con un buen número de resultados relativos a cuando algunas funciones no dependen de algunas de la variables y a las funciones inversas, etc. Como ejemplo indicaremos simplemente[57] que obtiene la fórmula

$$R \cdot \frac{\partial x}{\partial f} = \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

y también la variante n-dimensional de la relación

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial f}}$$

deducida de una relación funcional $F(x, f) = 0$. Este segundo artículo de 1841, que es la aportación más original e importante de Jacobi a la teoría de determinantes en su aspecto aplicado, se cierra con un resultado ya conocido en dimensiones 2, 3, pero que Jacobi prueba en dimensión n arbitraria[58]. Se trata del cambio de variable en las integrales múltiples,

$$\int U\, \partial f \partial f_1 \ldots \partial f_n = \int U \cdot \sum \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\, \partial x \partial x_1 \ldots \partial x_n,$$

fórmula que, en opinión de Jacobi, muestra "una egregia analogía entre las diferenciales y los determinantes funcionales" [**?**, p. 359].

El tercer artículo, del que no daremos detalles, es también de tipo aplicado, se refiere a los determinantes de tipo Vandermonde y variantes que se expresan mediante productos de diferencias, funciones alternadas que ya había tratado también Cauchy[59].

Los cuatro artículos de Cauchy en 1841 parecen ser, al menos en parte, una respuesta estimulada por los recién comentados de Jacobi. Prácticamente no aportan nada nuevo a

[57] Más detalles en [266, Vol. I pp. 358-392].

[58] Jacobi se refiere a Euler y Lagrange como inventores en baja dimensión, pero no menciona al belga Catalan, que la propuso en 1839 para una dimensión cualquiera.

[59] Muir se refiere a ellos con el término "alternante", véase [266, Vol. I pp. 325-342].

lo ya escrito por Cauchy años atrás, más bien son reelaboraciones parciales más reposadas y con notaciones más accesibles. Se publicaron los cuatro, de modo consecutivo, en su obra miscelánea *Exercicies d'Analyse et de Physique mathématique*[60]. Los títulos son los siguientes:

> *Note sur les diverses suites que l'on peut former avec des termes donnés [72],*
>
> *Mémoire sur les fonctions alternées [69],*
>
> *Mémoire sur les sommes le nom de résultantes [71],*
>
> *Mémoire sur les fonctions différentielles alternées* [70].

La primera nota trata de las permutaciones y del modo de asignarles signo. De las tres memorias, la primera corresponde en contenido al tercer artículo de de los antes comentados de Jacobi, la segunda al primero y la tercera al segundo del autor alemán. En la primera y la tercera memorias Cauchy hace referencia expresa a artículos de Jacobi. No vamos a detallar los aspectos peculiares de estos trabajos para evitar repeticiones que poco añadirían a la marcha general de la teoría de determinantes que vemos siguiendo[61]. Cabe hacer, sin embargo, algún comentario a esta obra de un Cauchy ya maduro que ha vuelto a París tras los años de destierro. Parece que tuviera interés en salir a la arena de los determinantes, tras leer a Jacobi, realizando una cierta afirmación de la tradición matemática francesa, pues no usa el término "determinante" de origen alemán sino que recupera el de "resultante", y al tratar en la tercera memoria el cambio de variable en las integrales múltiples recuerda la obra previa en francés del belga Eugène Catalan (1841), no mencionada por Jacobi[62].

Antes de dejar atrás la obra de Cauchy sobre determinantes, vale la pena comentar otro breve breve artículo de Cauchy, publicado también en 1841, esta vez en los *C. R. de l'Académie des Sciences*, en el que cuenta las maneras posibles de escribir los determinantes, obteniendo una fórmula que le "parece digna de ser destacada", por lo que vamos a exponerla. Un término P de un determinante S de orden n tendrá signo + o − según que

[60]Esta obra se publicó en cuatro volúmenes de 1840, 1841, 1844, 1847. El editor Bachelier iba sacando fascículos que finalmente formaban un tomo. Las obras a las que nos referimos forman parte del tomo 2, pp. 145-213.

[61]Como siempre, puede verse [266, Vol. I pp. 273-285].

[62]Es apenas natural que Jacobi no mencione a Catalan, dado que el trabajo de Catalan es publicado en las Memorias Coronadas por la Real Academia de Ciencias y Bellas Letras de Bruselas (1841), aunque está firmada en 1839.

la diferencia $n-m$ sea par o impar, siendo m el número de ciclos en que se descompone la permutación correspondiente a P. Habrá ciclos de longitud 1, 2, 3, etc, cada uno de ellos en número $f, g, h, k, \ldots, l$, de modo que $f+g+h+k+\ldots+l=m$ y $f+2g+3h+4k+\ldots+pl=m$. Entonces se verifica $n! = \sum N_{f,g,h,k,\ldots,l}$, donde

$$N_{f,g,h,k,\ldots,l} = \frac{p!}{m!}(m)_{f,g,h,k,\ldots,l}(\frac{1}{1})^f(\frac{1}{2})^g(\frac{1}{3})^h\ldots(\frac{1}{p})^l,$$

siendo[63]

$$(m)_{f,g,h,k,\ldots,l} = \frac{m!}{f!g!h!\ldots l!}.$$

No superaremos el mágico año 1841 sin advertir que fue entonces cuando Cayley introdujo la notación para el determinante que empleamos actualmente, colocando la tabla de cantidades entre barras verticales. Lo hizo en un artículo sobre geometría proyectiva, *On a theorem in the geometry of position* [74], donde escribió

$$|\alpha|, \quad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \alpha', & \beta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix}, \quad \&c.$$

para denotar las cantidades

$$\alpha, \quad \alpha\beta'-\alpha'\beta, \quad \alpha\beta'\gamma''-\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta''\gamma-\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta\gamma'-\alpha''\beta'\gamma, \quad \&c.$$

señalando, en una nota entre paréntesis, que la bien conocida ley de formación podía expresarse como

$$|\alpha| = \alpha, \qquad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \alpha', & \beta' \end{vmatrix} = \alpha|\beta'| - \alpha'|\beta|,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} \beta', & \gamma' \\ \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix} + \alpha'\begin{vmatrix} \beta'', & \gamma'' \\ \beta, & \gamma \end{vmatrix} + \alpha''\begin{vmatrix} \beta, & \gamma \\ \beta', & \gamma' \end{vmatrix}, \quad \&c.$$

[63]Hemos respetado la notación de Cauchy, incluso evitando hacer alguna simplificación posible, pero utilizando el símbolo factorial que Cauchy no usa, con lo que las fórmulas resultan más largas. También hemos corregido una errata, Cauchy escribe n donde hemos escrito p, con lo que n aparece en diversos lugares con dos significados distintos, lo que da lugar a error en varias fórmulas. Este error no fue advertido por Cauchy ni por los revisores de "l'Académie", tampoco por Muir [266, Vol. I pp. 247-253], que lo reproduce.

donde los signos + se utilizan cuando el número de términos en el lado del cuadrado es impar, y + − alternados cuando este número es par.

Dos comentarios cabe hacer sobre esta referencia. En primer lugar que la mancha de aceite de los determinantes se va extendiendo por Europa y llega a las Islas Británicas, donde los matemáticos, que se habían decidido en 1815 a estudiar la matemática continental, sintieron gran atracción por los métodos algebraicos y por su desarrollo en forma simbólica. También cabe advertir que las notaciones para los determinantes y los procedimientos para atribuir el signo a sus términos están todavía lejos de la unificación.

Debe mencionarse también que a lo largo de los años cuarenta y cincuenta Cayley publicó numerosos trabajos sobre determinantes en geometría y determinantes especiales. En la línea de nuestro recorrido centrado en la evolución de la teoría general, es apropiado destacar su artículo *On the theory of determinants* [75] (1843)[64], que tuvo una continuación más particular unos años después: *On the theory of permutants* (1852) [79]. Entre los determinantes especiales de los que Cayley se ocupó quizás los más destacados son los "gauches" [78], que motivaron también un artículo [184] de Charles Hermite (1822-1901) en 1854. A lo largo de estos trabajos Cayley manifestó preferencia por el uso en la teoría de determinantes de notaciones simbólicas del tipo de las utilizadas por Vandermonde[65], en las que se utilizan preferentemente pares de índices que indican la colocación de la cantidad en el cuadro y no letra alguna que la nombre.

En los primeros años cincuenta contribuyó también de modo importante a la teoría de determinantes James Joseph Sylvester (1814-1897), amigo de Cayley, que se sumó con entusiasmo a la notación simbólica. En *On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions* (1851) [329] se adhiere al simbolismo que simplifica la escritura de los determinantes, indicando que:

> Es maravilloso que una teoría puramente analítica pueda originarse en una especulación geométrica. Mi amigo el Sr. Hermite me ha dicho, que algunas de las indicaciones de la misma teoría pueden encontrarse en *Recherches Arithmétiques* de Gauss. La notación que he empleado para determinantes es muy similar a la de Vandermonde, la cual he conocido en el valioso tratado del Sr. Spottiswoode *On the elementary theorems relating to determinants.* Vandermonde evidentemente estaba

[64]Precisamente un año antes, en 1842, Jacobi asistió al congreso celebrado en Manchester por la Asociación Británica para el Avance de las Ciencias, Bessel y él fueron los respresentantes de Prusia en el evento.

[65]Todavía no era ampliamente conocido que ese estilo de notación había sido usado antes por Leibniz.

> en el camino correcto. No dudo en afirmar, que la superioridad de su notación y la mia sobre las que se usan en los métodos ordinarios es tan gran y casi tan importante para el progreso del análisis, como lo es la superioridad de la notación del cálculo diferencial sobre la del sistema de fluxiones. ¿Para qué es la teoría de los determinantes? Se trata de un álgebra sobre el álgebra; un cálculo que nos permite combinar y predecir los resultados de las operaciones algebraicas, de la misma manera como el álgebra en sí misma nos permite prescindir de la realización de las operaciones especiales de la aritmética. Todos el análisis en última instancia, debe cubrirse en sí mismo bajo esta forma. [329, p. 246-247]
>
> [. . .]
>
> Un punto importante en el que Vandermonde me ha anticipado, consiste en expresar un determinante por dos filas horizontales, una sobre otra. Pero la idea de la que esto depende es tan simple y natural, que era segura su reaparición en cualquier sistema de notación bien construido. [329, p. 250]

No debe discutirse las ventajas de la notación fuertemente simbólica para el estudio de los determinantes de modo autónomo y general, incluso para determinantes especiales y también para asuntos de "álgebra pura" en el sentido que apunta Sylvester; pero, cuando los determinantes se aplican a teorías matemáticas diversas, es imprescindible recurrir a las notaciones específicas de esos campos de conocimiento matemático. Eso hicieron los autores que se movían en ámbitos de aplicación, siempre buscando notaciones peculiares capaces de expresar las propiedades del modo más expresivo y cómodo posible.

Antes de abandonar momentáneamente a Sylvester, diremos que a él se debe el propio término "matriz", que introdujo en 1850 en un marco estrictamente algorítmico, con la misión fundamental de dar apoyo a la teoría de determinantes y sistemas. Pasaron más de treinta años hasta que el término fuera de uso común internacional. Después de haber recibido nombres como sistema, cuadro o tabla, el término "matriz" para nombrar un rectángulo de cantidades fue introducido en 1850 por Sylvester (1814-1897), quien insistió en esta nomenclatura durante los años siguientes logrando consolidarla primero en Gran Bretaña y sólo en los años ochenta en el ámbito internacional. Reproduciremos a continuación dos textos de Sylvester de los años 1850, 1851, en los que asocia el término matriz a fuente de determinantes. En un artículo de 1850 en el que completaba otros dos anteriores [327], se lee:

> [...] debemos empezar, no con un cuadrado, sino con una disposición rectangular de

> términos consistente, supongamos, de m líneas y m columnas. Esto en sí mismo no representa un determinante, pero es como si fuera, una Matriz de la que se pueden formar varios sistemas de determinantes [...] [327, p. 150]

Al año siguiente, en un artículo sobre equivalencia de formas cuadráticas [329], escribe:

> En artículos previos, he definido una "Matriz" como una disposición rectangular de términos, a partir de la cual se pueden engendrar diferentes sistemas de determinantes, como desde el vientre de una madre común; estos determinantes emparentados, de ningún modo están aislados en sus relaciones, sino que están sujetos a ciertas leyes simples de mutua dependencia [...]. [329, p. 247]

Volviendo al entorno francófono, recordemos la dedicación de Catalan, ya apreciada en 1839, al cálculo de integrales múltiples por medio de cambios de variables. Reapareció el asunto en el artículo *Recherches sur les déterminants* (1846) [62], en el que expresó así su objetivo final:

> Resulta de lo anterior que el conocimiento de cierto número de determinantes puede dar el valor de ciertas integrales múltiples que serían difíciles de calcular directamente. [62, p. 551]

Dicho esto, Catalán pasa a calcular unas integrales dobles y triples impropias utilizando cambios de variables lineales formados con los números más simples, $0, 1, -1$, de modo que el cálculo del determinante da valores sencillos que no repercuten en la integral, por ejemplo del tipo $\Delta = (n-2p)(-2)n-1$. A su vez, realizar dichos cálculos le llevó a

> retomar, bajo un punto de vista que me parece simple y nuevo, el estudio de los determinantes. Las consideraciones de las que hago uso me han conducido fácilmente a los principales teoremas conocidos y a otros que quizás no habían sido destacados. [62, p. 534]

Este comportamiento de Catalan se repite con frecuencia en la época: al aplicar los determinantes a asuntos concretos hay que calcular determinantes específicos y los autores se ven llevados a exponer más o menos completa la teoría ya conocida añadiendo algún detalle y utilizando nuevas formas de notación que les parecen ventajosas.

Así, Catalan describe los determinantes mediante letras mayúsculas $A, B, C, ...$ que indican sus "líneas" (las o columnas) y describe propiedades mediante fórmulas como $\text{dét}(B, A, C, ...) = -\text{dét}(A, B, C, ...)$ o, más importante [62, p. 536],

$$\text{dét}(A + M, B, C, ...) = \text{dét}(A, B, C, ...) + \text{dét}(M, B, C, ...)$$

una propiedad de linealidad que todavía tardó en reconocerse como esencial en la teoría de determinantes.

Para terminar este apartado mencionaremos algún aspecto de la obra de los discípulos de Jacobi. En su artículo *Sobre la eliminación de variables de tres ecuaciones algebraicas de segundo grado con dos variables /Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln* (1844) [189], Ludwig Otto Hesse (1811-1874) utiliza por primera vez los determinantes cuyos elementos son las segundas derivadas parciales de una función, que ahora se llaman "hessianos" en su honor[66]. Aunque es claro que esta definición es válida para funciones derivables generales dando un determinante simétrico, Hesse la utiliza para las funciones homogéneas que aparecen en el ámbito de la teoría de invariantes de la geometría proyectiva. Empieza considerando funciones homogéneas f_1, f_2, f_3 de segundo grado en las variables x_1, x_2, x_3 y denota con la letra griega φ su determinante jacobiano de derivadas parciales primeras. Cada una de éstas será una función homogénea de grado uno, de modo que φ será una función homogénea de grado tres.

Avanzado el trabajo, Hesse se detiene en el caso donde las tres funciones f_1, f_2, f_3 son las primeras derivadas de una función homogénea

$$f = \sum a_{k,\lambda,\mu} x_k x_\lambda x_\mu$$

de tercer grado, así que las f_i son homogéneas de segundo grado y sus derivadas, las segundas derivadas de la originaria f, $u_\kappa^\lambda = \frac{\partial_2 f}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}$, de grado uno, de manera que su determinante φ será también una función homogénea de grado tres con una expresión análoga a la de f, que Hesse denota con la letra a en los coeficientes y denomina "el determinante de f". Pero, al ser φ una función del mismo tipo que f, puede calcularse el determinante de φ, denotado ψ con la letra c para los coeficientes, que será, dice Hesse, "el determinante del determinante de la función f". A continuación el autor relaciona las

[66]Es decir, el hessiano de f es el jacobiano de sus derivadas parciales primeras.

tres funciones f, φ, ψ, de las que las dos últimas vienen dadas por determinantes, en el siguiente resultado que describe la fórmula $\psi = mf + n\varphi$:

> Teorema 5. El determinante del determinante de una función homogénea dada de tercer grado y tres variables es igual a la suma de la función dada y su determinante, cada uno multiplicado por el factor constante correspondiente. [189, p. 85]

Capítulo 2

El algoritmo y sus aplicaciones

En el capítulo anterior pudimos observar que la aparición de una teoría general de determinantes quedó completa en la memoria de Cauchy de 1815, pero que una difusión expansiva y generalizada por Europa de esa teoría no se produjo hasta los años cuarenta, a partir de la influencia de Jacobi y la incorporación de la matemática insular europea a la continental con la intervención de Sylvester y Cayley. Aunque Cauchy resaltó con frecuencia las propiedades del determinante como función alternada, en esta primera época domina la visión del determinante, reafirmada por Jacobi, como un algoritmo que se extraía de una matriz de números. Los determinantes quedaron plasmados hacia la mitad del siglo en un cuerpo teórico general, unos determinantes especiales con propiedades particulares, y aplicaciones de los determinantes en análisis, geometría y mecánica, que llegaron mucho más allá de la inicial resolución de sistemas lineales algebraicos. Este recorrido histórico expansivo se inició en el nivel superior de las revistas de investigación, pero fue decantándose en forma de libros de texto de diversos formatos y alcance. Primero los determinantes aparecieron en libros de texto generales de matemáticas, pero no tardaron en llegar los dedicados específicamente a la teoría de determinantes, que tienen un formato común influido por Jacobi: se dividen en dos partes, primero la teoría y después las aplicaciones.

El capítulo se divide en tres secciones, de cuyo contenido damos a continuación una idea general.

2.1. La primera sección trata sobre la ecuación secular y las formas cuadráticas, cuyos orígenes se encuentran en problemas de la física clásica y la geometría. Destacamos las contribuciones de Cauchy y Jacobi en la línea de Lagrange y en paralelo a los trabajos de Sturm. Mientras que las aportaciones a la teoría por parte de Cayley y Sylvester en un contexto geométrico.

2.2. La segunda sección ofrece noticia de una selección de libros sobre determinantes del siglo XIX. Un primer ejemplo de la necesidad de que transcurra un cierto tiempo hasta que una teoría madure, se extienda su uso y se difunda en libros de texto lo proporciona el propio Cauchy, quien, como hemos visto al inicio del apartado anterior, no consideró oportuno integrar la teoría de determinantes que elaboró en 1815 en su *Análisis algebraico* de 1821, se limitó a lo mínimo para justificar la resolución según Cramer de los sistemas lineales algebraicos de igual número de ecuaciones que de incógnitas. Poco después, en 1825, apareció el libro del alemán Scherk, que se ocupa de la regla de Cramer por vía inductiva; lo calificamos como un preliminar porque es una obra miscelánea. El título de primer libro sobre determinantes lo merece el del inglés Spottiswode, de 1851; siguiendo la tradición británica sobre determinantes, además de una rápida mención al libro de álgebra de Salmon(1859), nos ocuparemos de la interesante obra del peculiar autor Dodgson (1867), más famoso por *Alicia en el país de las maravillas* (1865). Nos referimos también a dos libros italianos, los de Brioschi (1854) y Trudi (1862), este último publicado estando ya en circulación el de su colega alemán Baltzer (1857), que fue el más completo de todos, con reediciones mejoradas hasta los años ochenta, algo diremos de la segunda y la tercera (1864, 1870) pero dejaremos de lado las otras dos (1875, 1881).

2.3. Resolver los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales dio origen a la teoría de determinantes y una vez que ésta se establece con autonomía, tales sistemas pasan a ser su primera aplicación. Con el método de eliminación de Gauss —conocido por los chinos antiguos como vimos—, la solución práctica de casos numéricos quedó establecida, y para los sistemas de igual número de ecuaciones que de incógnitas, la regla de Cramer daba las soluciones como fracciones en términos de determinantes, teniendo todas en su denominador el determinante del sistema, que hay que suponer no nulo. En el caso de un sistema homogéneo con determinante no nulo no hay más solución que la trivial, pero el determinante igualado a cero se presenta como el resultado de eliminar las variables, lo que significa que el sistema tiene otras soluciones. Hasta aquí llega, o poco más, lo tratado en libros antes citados hasta el de Trudi. Con el tiempo va apareciendo y perfeccionándose la discusión de lo que puede suceder si el determinante del sistema general se anula, y también el intento de resolver sistemas en los que el número de ecuaciones y de incógnitas no coincide, dando las condiciones para la existencia de soluciones y las soluciones posibles en su caso; en esta ampliación los menores de las matrices involucradas juegan un papel esencial. En la sección segunda se da cuenta de esto y se relata cómo la intervención de Kronecker, basada en el estudio general de los sistemas homogéneos, mejoró el estado de la cuestión y quedó reflejada en nuevas ediciones del libro de Baltzer y en obras del italiano Capelli de la segunda mitad de la década de los ochenta. Gran importancia tienen los sistemas y sus bloques (notación personal para los menores) en la obra de Dodgson

(1867). Finalmente, mostramos la prueba del teorema general sobre los sistemas lineales, directamente para el caso no homogéneo, producida en 1875 por los franceses Fontené y Rouché, mejorada enseguida por Frobenius con la introducción de la fructífera noción de rango (o característica como llamaba Capelli) de una matriz.

2.1 Ecuación secular y formas cuadráticas

El inicio del capítulo solapará con el anterior en un fragmento de tiempo entre Cauchy y Sylvester, con el fin de dar cuenta de ciertos problemas geométricos y mecánicos —formulados estos últimos mediante la teoría de funciones de Lagrange— que dan lugar a una importante ecuación, la llamada "ecuación secular". Las cuestiones geométricas mencionadas se refieren a un viejo problema aparecido con la geometría analítica iniciada por Descartes y Fermat, como fue la necesidad de considerar, para diversos fines, cambios de coordenadas rectangulares. Por ejemplo, se venían usando para expresar las ecuaciones de las cónicas y cuádricas en la forma más reducida posible, asunto que iniciara Euler, que también buscó el sistema de referencia más adecuado para describir el movimiento de un sólido. Como tantas veces con la obra de Euler, Lagrange se ocupó también de estas cuestiones geométricas y mecánicas[1], demostrando que la ecuación que ahora escribimos $|A - \lambda I| = 0$ tiene todas sus raíces reales si A es una matriz real simétrica. Las investigaciones en torno a esta ecuación fueron un foco de interés muy importante de problemas lineales relacionados con determinantes, sistemas lineales y formas cuadráticas. En torno a esta ecuación se desarrolló también un "método algebraico" que estudiaba la ecuación en sí misma independientemente de sus aplicaciones diversas. Lo mismo sucedió cuando los cambios de coordenadas dieron lugar a la noción de invariante, originando una teoría en la que los determinantes generaron importantes invariantes.

2.1.1 Cauchy y Jacobi

Cauchy se ocupó de los problemas relativos a la ecuación secular, en particular en las dos memorias vinculadas siguientes:

[1]Véase *Recherches sur la méthode de maximis et minimis* (1759) [228] y *Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératice (a* (1775) [229].

- Cauchy (1826) 1830: *Mémoire sur l'equation qui a pour racines les moments d'inertie principaux d'un corps solide et sur diverses équations du même genre* [68]
- Cauchy 1829: *Sur l'équation à l'aide de laquel le on détermine les inégalités sécu laires des mouvements des planètes* [67]

Vamos a explicar el contenido de las mismas para ofrecer una imagen del tratamiento de estos problemas algebraicos lineales recibían en la época que nos ocupa.

La primera es una memoria, de escasas tres páginas, leída en la Academia de Ciencias de París el 20 de noviembre de 1826 y publicada en *Mémoirs de l'Académie* cuatro años más tarde[2]. En ella se trata de dar un avance de los resultados que desarrollará con detalle en la segunda, limitándose a esbozar de modo discursivo, sin fórmulas, tres teoremas. La prueba completa del primero —tras una versión débil del segundo— y el tercero es el motivo del otro trabajo antes mencionado, el de 1829, que consta de 21 páginas y está publicado en el volumen 4 de *Exercices de Mathématiques*[3].

En cuanto a la motivación para el tema que le ocupa en esta ocasión, Cauchy empieza la memoria de la Academia con este párrafo:

> Se sabe que la determinación de los ejes de una superficie de segundo grado, o de los ejes principales y momentos de inercia de un cuerpo sólido dependen de una ecuación de tercer grado, cuyas tres raíces son necesariamente reales. Sin embargo, los geómetras han logrado demostrar que las tres raíces son reales sólo mediante el uso de métodos indirectos, por ejemplo, a través de una transformación de coordenadas en el espacio, para reducir la ecuación en cuestión, a otra ecuación que sea de segundo grado solamente, o haciendo ver que se llega a conclusiones absurdas si se supone dos raíces imaginarias. La cuestión que me propongo consiste en establecer directamente que las tres raíces son reales, cualesquiera que sean los valores de los seis coeficientes que figuran en la ecuación dada.

[2]Este retraso es comentado en la sección de Historia de la Academia, en la parte de matemáticas: "La impresión de las Memorias de la Academia se había retrasado por diversas circunstancias" Veáse p. VII. Tomo IX (1830).

[3]Cauchy publicaba esta obra en la imprenta de los hermanos Bure, quienes atendían, y eran los libreros del rey. El autor se presentaba lleno de títulos: ingeniero jefe de caminos, profesor de la Escuela Politécnica y de la Facultad de Ciencias, miembro de la Academia de Ciencias y caballero de la Legión de Honor. Estos *Exercices* fueron anteriores en una década a los *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique* en los que volvió a publicar sobre determinantes en 1841. Cuando publicó esta segunda obra su estrella parisina había decaído algo, se presentaba como baron, pero ya no como ingeniero ni profesor de la Escuela o la Facultad, sí como académico en Francia y otros países europeos, también como miembro de la Academia Americana.

En realidad, aunque las aplicaciones se ocupan de problemas geométricos y mecánicos tridimensionales, Cauchy aborda el problema algebraico aislado y considerado en dimensión finita arbitraria. Esta manera de actuar significa un nuevo ejemplo de uso del "método algebraico" de Lagrange, consistente, como vimos, en aislar un problema algebraico que aparece en diversos problemas matemáticos para darle un tratamiento autónomo que luego pueda retornar hacia las aplicaciones mejorando su tratamiento. En la memoria de 1829, cuando obtiene la ecuación $S = 0$, que luego veremos con detalle, explica que "es semejante a la que se encuentra en la teoría de los movimientos de los planetas", pero salvo esta mención, todo en la memoria es netamente algebraico, problemas lineales más el uso de propiedades de las raíces de los polinomios, y sólo al final del trabajo, en un breve párrafo, se refiere de nuevo a las mismas aplicaciones —al movimiento del sólido y los ejes principales de las superficies de segundo grado, sin mencionar las ecuaciones seculares del título— que había mencionado al inicio del trabajo anterior. Realiza pues la justificación de un trabajo en matemática pura por sus aplicaciones a varios temas geométricos y mecánicos, que menciona como tales justificaciones pero sin tratarlos de modo específico en esta ocasión.

Tras estas consideraciones generales referidas a las dos memorias citadas, pasamos a describir su contenido.

En la primera memoria, tras el planteamiento inicial citado, Cauchy expone tres teoremas, el primero es el que afirma que las raíces son reales, procediendo además a su separación, es decir, dando intervalos reales en los que existe una y sólo una de dichas raíces. Afirma Cauchy que tal teorema es una consecuencia del segundo, que enuncia así.

> 2º *Teorema.* Si s denota la suma de cuadrados de n variables independientes x, y, z, $u, \ldots$, y r una función homogénea de segundo grado, formada con las mismas variables, y si se buscan los valores *máximo* y *mínimo* de $\frac{r}{s}$, la determinación de los valores dependerá de una ecuación de grado n-ésimo cuyas raíces son todas reales. [68, p. 112]

Después afirma que los métodos utilizados en la demostración de estos teoremas le han sugerido un tercero, que enuncia dando así por terminada la primera memoria.

Cauchy desarrolló las ideas planteadas en el breve artículo anterior en el segundo de 1829, empezando por el teorema segundo que propuso en 1826 como más general, pero no lo abordó tal como allí quedó enunciado, sino de una manera menos general; en vez de usar dos formas cuadráticas arbitrarias toma una general y la otra reducida a la suma de cuadrados. Así, empieza el artículo proponiendo el cálculo de los extremos de "una función $s = f(x, y, z, \dots)$ real homogénea de segundo grado" sobre la esfera unidad

$$x^2 + y^2 + \dots = 1. \tag{2.1.1}$$

La técnica ideada por Lagrange para el cálculo de extremos condicionados lleva a Cauchy al sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{2}\varphi(x, y, z, \dots) = sx, \ \ \frac{1}{2}\chi(x, y, z, \dots) = sy, \ \ \frac{1}{2}\psi(x, y, z, \dots) = sz, \ \text{ etc.},$$

donde las funciones $\varphi(x, y, z, \dots)$, $\chi(x, y, z, \dots)$, $\psi(x, y, z, \dots)$, etc., son las derivadas parciales de s respecto a cada una de sus variables. Dando a s su expresión

$$s = A_{xx}x^2 + A_{yy}y^2 + A_{zz}z^2 + \cdots + 2aA_{xy}xy + 2aA_{xz}xz + \dots,$$

el sistema de ecuaciones queda de la forma

$$\begin{cases} (A_{xx} - s)x & +A_{xy}y & +A_{xz}z & + \ \cdots & = 0, \\ A_{xy}x & +(A_{yy} - s)y & +A_{yz}z & + \ \cdots & = 0, \\ A_{zx}x & +A_{zy} & +(A_{zz} - s)z & + \ \cdots & = 0, \\ \text{etc.}\cdots & & & & \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Entonces la ecuación a considerar es la "condición de eliminación" del sistema 2.1.2, es decir, $S = 0$, siendo S el determinante de los coeficientes del sistema[4].

Hagamos un inciso para decir que Cauchy no utiliza el término "determinante", sino su notación habitual de "una función alternada de las cantidades contenidas en la tabla…", tabla que escribe sin barras verticales, notación tampoco acuñada todavía. Es más, Cauchy no supone en este artículo que sus lectores estarán familiarizados con la teoría de determinantes, no menciona su artículo de 1815 y sólo se refiera a lo dicho al respecto en su *Análisis Algebraico*. En el artículo que ahora comentamos, de 1829, una vez que tiene la ecuación $S = 0$ describe la función alternada S como suma de productos con signo sin explicar el modo de asignar $\pm$, pero describiendo en todo su desarrollo la función S

[4]Para determinar los extremos condicionados hace referencia a sus *Lecciones de Cálculo infiniteismal*, y al *Análisis algebraico* para la condición de eliminación.

para $n = 2, 3, 4$. Luego desarrolla sobre la marcha las propiedades de los determinantes que necesita, el desarrollo de S por los elementos de su primera fila[5] y la anulación del desarrollo similar cuando se toman los menores de la primera y elementos de otra fila.

Obtenida la ecuación $S = 0$, Cauchy advierte que "los *máximos y mínimos* [condicionados] de la función $s = f(x, y, z, \dots)$ no podrán ser sino las raíces de la ecuación". Se refiere el autor a que, siendo S una función entera de grado n, dada una raíz s_1, particularizando el sistema 2.1.2 a este valor de s, obtenemos soluciones $(x_1, y_1, z_1, \dots)$ salvo proporcionalidad, y normalizando estas soluciones respecto a la condición 2.1.1 resulta $s_1 = f(x_1, y_1, z_1, \dots)$. Advirtamos que esta es la razón por la que Cauchy usa la propia letra s como variable en la ecuación secular $S = 0$, pues sus raíces son valores particulares —los extremos condicionados— de la función s.

Aunque va a dar su propia demostración general, Cauchy ya sabe que en dimensión tres las raíces de esta ecuación son reales y "gozan de propiedades dignas de notar". Lo primero que hace es demostrar en general una de ellas: si dos raíces son distintas, supone $s_1 \neq s_2$, entonces se verifica $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + \ldots = 0$,[6] de modo que, si la ecuación tiene todas sus raíces distintas, observa Cauchy, las soluciones del sistema 2.1.2 normalizadas con la condición 2.1.1 verifican

$$\begin{array}{llll} x_1^2 + y_1^2 + \cdots = 1, & x_1x_2 + y_1y_2 + \cdots = 0, & \cdots & x_1x_n + y_1y_n + \cdots = 0, \\ x_2x_1 + y_2y_1 + \cdots = 0, & x_2^2 + y_2^2 + \cdots = 1, & \cdots & x_2x_n + y_2y_n + \cdots = 0, \\ \ldots & & & \ldots \\ x_nx_1 + y_ny_1 + \cdots = 0, & x_nx_2 + y_ny_2 + \cdots = 0, & \cdots & x_n^2 + y_n^2 + \cdots = 1. \end{array}$$

así que forman la tabla de un cambio de coordenadas rectangulares, lo que aprovechará al final del artículo para su último teorema.

Pero, de momento, está en el camino de demostrar que las raíces de la ecuación $S = 0$ son reales. Para esto considera determinantes menores de orden $n - 1$ de este tipo: P_{xy} es lo que queda de S quitando la fila de $A_{xx} - s$ y la columna de $A_{yy} - s$, para todos los pares x, y posibles. En particular, denota $R = P_{xx}$. Igual que R se obtiene a partir de S, quitando la primera fila y la primera columna de R, haciendo lo propio con R resulta Q, determinante de orden $n - 2$, y así sucesivamente considera los menores de orden decreciente sobre la

[5] En esta ocasión, Cauchy se refiere a las filas como "columnas horizontales".

[6] En lenguaje de hoy, Cauchy ha demostrado que vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.

diagonal principal; el último será el último elemento $A_{uu} - s$ de dicha diagonal. Razonando sobre estos elementos prueba que una raíz imaginaria de $S = 0$ lo será también de $R = 0$[7], repitiendo el argumento iniciándolo con R, también será raíz de $Q = 0$; siguiendo así llega a que también lo será de $A_{uu} - s$, lo que es imposible porque A_{uu} es real. Hasta aquí, Cauchy ha explicado con carácter general lo ya sabido en pequeña dimensión.

Su aportación importante es que, acto seguido, da otra demostración directa basada en esta propiedad, que demuestra en primer lugar: si $R(s) = 0$ entonces $Q(s)S(s) \geq 0$. Esta segunda demostración no sólo le permite concluir que las raíces de $S = 0$ son reales —luego también las de $R = 0$, $Q = 0$, etc.— sino que, además, las raíces de $R = 0$ separan a las de $S = 0$. Esta demostración la realiza por inducción llegando hasta $n = 4$, para terminar asegurando que:

> Los mismos razonamientos, sucesivamente extendidos al caso en que la función s encerrara cinco, seis, ... variables, proporcionarían evidentemente la proposición siguiente. [67, p. 152]

Sigue el enunciado general de su primer teorema —en este artículo de 1829 y en el anterior—, que ya hemos enunciado antes de modo resumido[8], aunque todavía tiene que completar la demostración tratando algunos casos de coincidencia de raíces.

Una vez terminada la prueba de su primer teorema, aborda el segundo en este artículo de 1829, que es el de diagonalización de una forma cuadrática real, que enuncia casi igual que lo hiciera en la Memoria de la Academia de Ciencias, donde le correspondía ser el tercero y decía así:

> 3$^{\text{er}}$ *Teorema.* Dadas una función homogénea de segundo grado de varias variables $x, y, z, \ldots,$ se puede siempre sustituirlas por otras variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ ligadas a $x, y, z, \ldots$ por ecuaciones lineales escogidas de manera que la suma de los cuadrados de $x, y, z, \ldots$ sea equivalente a la suma de los cuadrados de $\xi, \eta, \zeta, \ldots,$ y que la función dada de $x, y, z, \ldots$ se transforme en una función de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ homogénea y de segundo grado, pero que contenga solamente los cuadrados de las últimas variables. [68, p. 113][9]

[7] Usa la ortogonalidad de los vectores propios correspondientes a la raíz imaginaria y a su conjugada.

[8] Este resultado sobre separación de raíces era el primer teorema de la memoria leída en la Academia en 1826, el enunciado completo de 1829 está reproducido, junto a interesantes comentarios, en [180, p. 125].

[9] Lo único que cambia en [67, p. 159] es el final, en vez de escribir "las últimas variables" las menciona por sus símbolos: $\xi, \eta, \zeta, \ldots$.

El cambio de variables que Cauchy propone es

$$\begin{cases} x = & x_1\xi + x_2\eta + x_3\zeta + \dots, \\ y = & y_1\xi + y_2\eta + y_3\zeta + \dots, \\ z = & z_1\xi + z_2\eta + z_3\zeta + \dots, \\ \dots & \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = & x_1 x + y_1 y + z_1 z + \dots, \\ \eta = & x_2 x + y_2 y + z_2 z + \dots, \\ \zeta = & x_3 x + y_3 y + z_3 z + \dots, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

cuyos coeficientes —por columnas a la izquierda y por filas a la derecha— son la soluciones del sistema 2.1.2 normalizadas con la condición 2.1.1. Este cambio de variable mantiene la condición, es decir,

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots = 1 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \dots,$$

y cambia la expresión de la forma cuadrática pero no su valor numérico:

$$A_{xx}x^2 + A_{yy}y^2 + A_{zz}z^2 + \dots + 2aA_{xy}xy + 2aA_{xz}xz + \dots = s_1\xi^2 + s_2\eta^2 + s_3\zeta^2 + \dots.$$

Todo esto lo realiza Cauchy por cálculos directos, sin disponer todavía de las operaciones matriciales[10]. Para generar el cambio de variable ha supuesto que todas las raíces de $S = 0$ son distintas, pero ofrece un argumento de continuidad para ver que esta hipótesis transitoria puede salvarse.

Se observa en los desarrollos de Cauchy que acabamos de comentar, que estamos ante un nuevo ejemplo del "método algebraico", la expresión usada por Lagrange para evidenciar el aspecto sistémico de los cálculos algebraicos realizados de modo análogo para resolver problemas en varios ámbitos de la matemática. En este caso se trataba de asuntos que irán evolucionando y llegará a formar la moderna teoría espectral de matrices que gira en torno a la ecuación $(A - \lambda Id)x = 0$ y su determinante; pero en 1829 el cálculo de matrices no estaban en el ambiente y los determinantes habían aparecido pero todavía no se había extendido su uso. Como tantas veces en la historia de las matemáticas, se van acumulando materiales hasta que llegue el momento de apreciar en ellos la unidad que

[10]En términos actuales el último teorema dice: Toda matriz simétrica real es diagonalizable ortogonalmente. Usando vectores columna y siendo P la matriz de vectores propios por columnas, que es ortogonal ($P^tP = I$), el cambio de variables es $x = P\xi$ y se tiene, por una parte, $1 = x^tx = \xi^tP^tP\xi = \xi^t\xi$; y por otra, $s = x^tx = \xi^tP^tAP\xi = \xi^t(s_i)\xi$, siendo (s_i) la matriz con los s_i en la diagonal principal y los demás elementos nulos. En efecto, es $P = \Sigma_i(x_i)$, donde (x_i) es la matriz que tiene el vector columna x_i en su posición y ceros en lo demás, así que $P^t(x_i)$ es una matiriz con todos sus elementos nulos excepto un 1 en la posición i de la diagonal principal; entonces $P^tAP = \Sigma_iP^tA(x_i) = \Sigma_is_iP^t(x_i) = (s_i)$.

genere un objeto matemático nuevo.

El último párrafo del artículo de Cauchy en 1829 consta de unas pocas líneas dedicadas a anunciar una próxima memoria de Sturm sobre los mismos temas, que ya se conocía porque él ya había expuesto estas investigaciones en la Academia. En efecto, el 27 de julio de 1829 Sturm presentó ante los académicos una memoria sobre la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, un extracto de la cual fue publicado en *Bulletin de Férussac* en 1829 [325]. Sturm no aisló el problema algebraico, sino que lo presentó junto al problema de ecuaciones diferenciales que lo genera; pero tan sólo aludió a los problemas previos mecánicos en la introducción del artículo, donde recordó el estudio sobre las "variaciones seculares de los elementos de las órbitas de los planetas" realizado en la *Mecánica celeste* de Laplace, y el de Lagrange sobre las ecuaciones similares de "las pequeñas oscilaciones de un sistema de puntos materiales", contenido en su *Mecánica analítica*[11].

Cauchy anunció en 1826 el problema algebraico que nos ocupa con dos formas cuadráticas, pero en el artículo netamente algebraico de 1829 sólo trató el caso en que una de ellas era la suma de cuadrados. Sturm, como parte del problema diferencial, ataca el problema algebraico con dos formas cuadráticas generales. El sistema de ecuaciones diferenciales lineales que se propone resolver es[12]:

$$\Sigma_{ij} g_{ij} \frac{du_j}{dt} + \Sigma_{ij} k_{ij} u_j = 0,$$

donde ambos sistemas de coeficientes constantes son simétricos y el número de ecuaciones y funciones u_i es $n = 5$. Un cambio de variable de la forma $u_i = V_i e^{rt}$ transforma el sistema anterior en el sistema de derivadas parciales respecto a las V_i de la función $Z = \Sigma_{ij}(g_{ij} r + k_{ij}) V_i V_j$, combinación lineal de dos formas cuadráticas, por tanto el sistema a resolver es en

[11]Las perturbaciones seculares son los efectos que sobre la órbita de la Tierra, ya calculada como una solución de equilibrio estable, producen pequeñas influencias, como por ejemplo la acción de la Luna; se traducen en un movimiento oscilatorio en torno a la posición de equilibrio. Este es un problema famoso en astronomía, pero que se produce en sistemas mecánicos generales que son perturbados produciéndose pequeñas oscilaciones en torno a sus posiciones de equilibrio, asuntos que ya fueron estudiados por Lagrange y Laplace, pero que tendrían todavía amplio campo de mejora en su tratamiento. En estos problemas, la energía potencial se desarrolla en serie de Taylor y, dado el pequeño efecto, se corta el desarrollo por el orden dos. Como el primer término se anula porque se supone el umbral cero de energía, y el segundo se anula por la condición de equilibrio, resulta que la función energía potencial del sistema levemente sacado del equilibrio es una forma cuadrática. Lo mismo sucede con la energía cinética según la formulación de la mecánica lagrangiana. Para integrar estas ecuaciones interesa realizar cambios de variable que las simplifiquen, particularmente que diagonalizen dichas formas cuadráticas.

[12]Sturm escribe las ecuaciones completamente desarrolladas, pero aquí usaremos los sumatorios.

notación matricial no usada por el autor, el sistema homogéneo $((g_{ij}r + k_{ij}))V = 0$. Sturm dice que eliminando las variables en este sistema resulta una ecuación de quinto grado y demuestra que "esta ecuación en r tendrá todas sus raíces reales y distintas" si una de las dos formas cuadráticas involucradas "goza de la propiedad de "conservar constantemente el signo, cualesquiera que sean los valores reales de las variables". La demostración de Sturm se basa en su conocimiento experto sobre las ecuaciones y comprende también condiciones de separación de raíces. Una vez concluido el problema algebraico, Sturm lo aplica a resolver las ecuaciones diferenciales propuestas, cuya solución son las funciones $u_i = \Sigma_{ij} a_{ij} A_j e^{\alpha_j t}$, sonde α_j es cada una de las cinco raíces de la ecuación en r antes resuelta (valores propios) y, para cada j, a_{ij} es la solución correspondiente en el sistema de las V_i (vectores propios); los coeficientes A_j son coeficientes indeterminados que se calculan haciendo intervenir a las condiciones iniciales del problema.

Estos trabajos de Cauchy y Sturm llamaron la atención de matemáticos posteriores que volvieron sobre el tema a propósito de alguna de las aplicaciones de la cuestión algebraica tratada por Cauchy, que daba lugar a nuevas demostraciones o ampliaciones del tema algebraico subyacente. De momento mencionaremos sólo[13], y lo haremos con brevedad, a Jacobi, quien en 1834 publicó en el J. de Crelle un extenso artículo [201], que amplía lo tratado por Cauchy desde el punto de vista algebraico y lo aplica a un problema de cambios de variable para facilitar la resolución de integrales múltiples. Jacobi da un paso adelante más en la formulación autónoma de situaciones algebraicas que van a serle útiles. Después de recordar los trabajos de Cauchy y Sturm, se plantea completar, mejorar y ampliar sus resultados. Jacobi investigó con amplitud: (1) las transformaciones $y = Ax$ tales que $x^t x = y^t y$, (2) las que dejan una forma cuadrática V —que escribió el primero de la forma $V = \Sigma_{\kappa,\lambda} a_{\kappa,\lambda} x_\kappa x_\kappa$— en la forma diagonal $V = G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 + \ldots + G_n y_n y_n$, y, sobre todo (3) la diagonalización simultánea de dos formas cuadráticas:

Problema III

Dadas dos funciones cualesquiera V, W homogéneas de segundo orden en va-

[13]Más adelante saldrá a colación también la ley de inercia de Sylvester y el teorema de Weierstrass de diagonalización simultánea de dos formas bilineales.

riables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por las sustituciones lineales:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \beta_1' y_1 + \beta_1'' y_2 + \cdots + \beta_1^{(n)} y_n, \\
x_2 &= \beta_2' y_1 + \beta_2'' y_2 + \cdots + \beta_2^{(n)} y_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \beta_n' y_1 + \beta_n'' y_2 + \cdots + \beta_n^{(n)} y_n,
\end{aligned}$$

se transforman en otras variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$,

$$\begin{aligned}
V &= G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 + \cdots + G_n y_n y_n \\
W &= H_1 y_1 y_1 + H_2 y_2 y_2 + \cdots + H_n y_n y_n
\end{aligned}$$

que son los cuadrados de las variables.

Jacobi en su exposición, designa las funciones por

$$\begin{aligned}
V &= \textstyle\sum_{\chi,\lambda} a_{\chi,\lambda} x_\chi x_\lambda, \\
W &= \textstyle\sum_{\chi,\lambda} b_{\chi,\lambda} x_\chi x_\lambda,
\end{aligned}$$

donde,

$$a_{\chi,\lambda} = a_{\lambda,\chi}, \;\; b_{\chi,\lambda} = b_{\lambda,\chi}.$$

con χ, λ variando de $1, 2, \ldots, n$. [201, p. 50]

En este trabajo, para demostrar relaciones entre determinantes, utilizó técnicas de expresión de cocientes de polinomios en varias variables x_i como sumas de potencias de productos de las variables con exponentes negativos, por ejemplo, siendo $X_i = \Sigma_j a_{i,j} x_j$ y A el determinante de la matriz $(a_{i,j})$, escribe la fórmula

$$\left[\frac{1}{X_1 X_2 \ldots X_n}\right]_{\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}} = \frac{1}{A},$$

que identifica el inverso del determinante A con el coeficiente de $\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}$ en el desarrollo de $\frac{1}{X_1 X_2 \ldots X_n}$[14]. En el artículo que comentamos aparecen los sistemas del tipo 2.1.2, para los que Jacobi usa la variable G, mejorando la demostración de que las raíces son reales cuando no se garantiza que sean todas distintas. Estos mismos sistemas volvió a tratarlos en un artículo de 1846 referido, como el comentado de Cauchy, a las ecuaciones diferenciales del movimiento planetario. El artículo se titula *Un algoritmo rápido para*

[14]Este tipo de técnicas será utilizado también por Weierstrass años después.

resolver numéricamente las ecuaciones de la teoría de las perturbaciones seculares / Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen [204] y en él estudia un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas α, β, $\gamma\ldots$, $\widetilde{\omega}$, de la forma:

$$\begin{cases} \{(a,a)-x\}\alpha & +(a,b)\beta & +\cdots & +(a,p)\widetilde{\omega}=0, \\ (b,a) & +\{(b,b)-x\}\beta & +\cdots & +(b,p)\widetilde{\omega}=0, \\ (c,a)\alpha & +(c,b)\beta & +\cdots & +(c,p)\widetilde{\omega}=0, \\ \ldots & & & \ldots \\ (p,a)\alpha & +(p,b)\beta & +\cdots & +\{(p,p)-x\}\widetilde{\omega}=0, \end{cases}$$

con las condiciones de simetría $(a,b)=(b,a)$, $(a,c)=(c,a)$, etc., donde los coeficientes así denotados son funciones que surgen del problema diferencial tratado.

2.1.2 Cayley y Sylvester

Mientras, como ya vimos, a partir de 1841 Cauchy y Jacobi simultaneaban trabajos sobre determinantes y sus aplicaciones, entró también en liza, en 1845, el inglés Cayley, que dio un paso más en el sentido de aislar un problema algebraico a partir de uno geométrico. Cayley publicó un artículo famoso, *On the theory of linear transformations* [76], en el cual plantea los fundamentos de la teoría de invariantes[15] Su interés por las transformaciones le llevó a considerar las que proporcionan los cambios de coordenadas rectangulares con los que se realizaban la reducción de las formas cuadráticas y otros problemas. Un año después, Cayley publicó en francés un artículo, *Sur quelques propriétés des déterminants gauches* [78], que, aunque parece por el título dar importancia principal a los determinantes, lo cierto es que su principal objeto de estudio son las transformaciones de coordenadas rectangulares de la geometría, pero llevadas al plano algebraico. Lo que el autor pretende, como autores anteriores, es dar un procedimiento para obtener "los coeficientes adecuados para la transformación de coordenadas rectangulares", es decir, para obtener "un sistema de n^2 cantidades $\alpha_{r.s}$" que satisfaga las fórmulas de la ortonormalidad (repetidas para

[15] La que ahora se denomina "clásica", que es la primera etapa de las varias que dicha teoría ha tenido.

filas y columnas):

$$\begin{cases} (1)\begin{cases} \sum_r \alpha_{r.s}\alpha_{r.s'} & = 0 \quad s \neq s', \\ \sum_r \alpha_{r.s}\alpha_{r.s} & = 1, \end{cases} \\ (2)\begin{cases} \sum_s \alpha_{r.s}\alpha_{r'.s} & = 0 \quad r \neq r', \\ \sum_s \alpha_{r.s}\alpha_{r.s} & = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Cayley basa su procedimiento en un tipo especial de determinate:

> Le doy el nombre de **determinante "gauche"**, a un determinante formado por un sistema de cantidades $\lambda_{r.s}$ que satisfacen las condiciones
>
> $$(1) \quad \lambda_{r.s} = -\lambda_{s.r} \ [r \neq s].$$
>
> [...] Obtendremos las fórmulas más sencillas, considerando sólo los sistemas para los cuales se tiene también
>
> $$(2) \quad \lambda_{r.r} = 1.$$
>
> [...] K designa el determinante formado por las cantidades $\lambda_{r.s}$, y $\Lambda_{r.s}$ el coeficiente diferencial de K relativo a $\lambda_{r.s}$; por supuesto la diferenciación dada debe efectuarse antes de particularizar las cantidades para las ecuaciones (1) y (2). [78, p. 120-121]

Con estos datos, Cayley demuestra que el sistema de n^2 cantidades $\alpha_{r.s}$ se obtiene como solución del sistema lineal

$$\begin{cases} K\alpha_{r.s} & = 2\Lambda_{r.s} \quad r \neq s \\ K\alpha_{r.r} & = 2\Lambda_{r.r} - K \end{cases}$$

de modo que las cantidades $\alpha_{r.s}$ son "funciones explícitas y racionales de un número $\frac{1}{2}n(n-1)$ de variables independientes" (las $\lambda_{r.s}$).

Hay que notar que en este trabajo están las matrices, pero todavía Cayley no las vislumbra y hace explícitas, lo haría a partir de 1855 consolidando su visión en 1858; ese año publicará la famosa memoria, a la que luego nos referiremos, en la que la matrices y su álgebra ya se incorporan plenamente a la exposición de estos temas lineales[16].

[16] Anticipándonos a la memoria de Cyley de 1858, vamos a parafrasear el método que acabamos de explicar con lenguaje matricial aportando alguna notación propia. A efectos de notación indicaremos primero que dada una matriz $L = (\lambda_{ij})$ de orden n, Cayley toma su determinante $K = K(\lambda_{ij})$ y de él deriva (estilo Jacobi) la matriz de "coeficientes diferenciales" $\partial K = (\Lambda_{ij})$, donde $\Lambda_{ij} = \frac{\partial K}{\partial \lambda_{ij}}$ es el menor complementario de λ_{ij} en L. Si $K \neq 0$, para la notación actual —y de Cayley 1858— dividiendo ∂K por K resulta la traspuesta de la inversa de L. Cayley demuestra que, cuando L es "gauche", la matriz $A = (\alpha_{i,j})$ dada por $A = \frac{1}{K}(2\partial K - KId)$ es ortogonal (ortonormal por filas y columnas). Para $n = 2$ se

Como ya vimos, el propio término "matriz" fue introducido en 1850 por Sylverster en un marco algorítmico, con la misión fundamental de ser una fuente de determinantes; pero aún tardó en ser un término de uso común internacional y en generar su propia teoría operacional. Así se aprecia en un artículo del propio Sylvester —sobre teoría de invariantes y el teorema de Sturm para la resolución de ecuaciones algebraicas—, publicado en 1853 [331], se vio impelido a añadir un *Glosario de términos nuevos o inusaules, o de términos usados en un sentido nuevo o inusual en la memoria precedente*, en el que se incluyen, entre otros términos de la teoría de invariantes[17], los siguientes:

> *Determinante.*- Esta palabra se usa por todas partes en un único sentido, según el cual denota la función alternada o "hemihedral", cuya anulación es la condición de la posibilidad de coexistencia de un sistema de un cierto número de ecuaciones lineales homogéneas con igual número de variables.
>
> *Inversa.*- La inversa de una matriz cuadrada dada se forma mediante la selección consecutiva de cada componente de la matriz dada, sustituyendo la unidad en su lugar, haciendo que todas las otras componentes en la misma línea y columna sean cero, y finalmente escribiendo el valor del determinante correspondiente a la matriz así modificada, en lugar de la componente seleccionada. Si el determinante de la matriz es igual a la unidad, su segunda inversa, es decir, la inversa de la inversa, será idéntica, término a término, con la matriz original.
>
> *Matriz.*- Una matriz cuadrada o rectangular es una disposición de términos en líneas y columnas.
>
> *Sustitución (lineal similar o contraria).*- Se dice que se ha realizado una sustitución lineal en un sistema de variables cuando cada variable es reemplazada por una conjunción lineal de todas las variables. La matriz formada por los coeficientes de la sustitución, dispuestos en orden regular, se llama la Matriz de la Sustitución, y es por supuesto un cuadrado. Cuando dos sustituciones (realizadas en dos sistemas de variables) tienen la misma matriz, se dice que son *similares*, y *contrarias* cuando

tiene

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \partial K, \qquad A = \frac{1}{K}\begin{pmatrix} 2-K & 2\lambda \\ -2\lambda & 2-K \end{pmatrix},$$

siendo $K = 1 + \lambda^2$. Cayley dio [78, 121] el ejemplo $n = 3$, $K = K = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$.

[17] Por ejemplo: *Hessiano* or *Hesseano*, nombrado después del Dr. OTTO HESSE, de Königsberg (el alumno digno de su ilustre maestro, JACOBI, pero que, para escándalo del mundo matemático, permanece todavía sin una Cátedra en la Universidad que él adorna con su presencia y su nombre), es el Jacobiano de los coeficientes diferenciales de una función homogénea de cualquier número de variables. *Jacobiano.*- El jacobiano de n funciones homogéneas de n variables es el determinante representado por la colocación simétrica en un cuadrado de los n coeficientes diferenciales de cada una de las n funciones. [331, p. 545]

> sus matrices son contrarias, esto es mutuamente inversas la una a la otra [...]

Es importante notar que la descripción de la matriz "inversa" dada por Sylvester requiere que las matrices se multipliquen por el algoritmo fila-fila, y, por otra parte, no da exactamente la inversa respecto al producto, sino la matriz proporcional a ella con el determinante como factor; es decir, su noción de inversa coincide con la matriz de "coeficientes diferenciales" que vimos en Cayley 1846[18].

Digamos para terminar esta mención a Sylvester, que en el año que hemos dejado pasar, en 1852, formuló su famosa "ley de inercia de las formas cuadráticas". Fue en el artículo *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares* [330], en el que formula el problema que le ocupa:

> Es bien conocido que la reducción de cualquier polinomio cuadrático
>
> $$(1,1)x^2 + 2(1,2)xy + (2,2)y^2 + \cdots + (n,n)t^2$$
>
> a la forma $a_1\zeta^2+a_2\eta^2+\cdots+a_n\theta^2$, donde $\zeta,\eta,\dots,\theta$ son funciones lineales de $x,y,\dots,t$, tal que $x^2+y^2+\cdots+t^2$ permanece idéntico con $\zeta^2+\eta^2+\cdots+\theta^2$ (lo que caracteriza una transformación ortogonal), depende de la solución de la ecuación
>
> $$\begin{vmatrix} (1,1)+\lambda, & (1,2), & \dots & (1,n) \\ (2,1), & (2,2)+\lambda, & \dots & (2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,1), & (n,2), & \dots & (n,n)+\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad [330, p.138]$$

que tiene todas sus raíces reales como ya demostraron, dice, Cauchy, Jacobi y Borchardt; pero él da otra demostración distinta de las anteriores. La nueva demostración que ha realizado del teorema conocido le permite anunciar uno nuevo:

> Puede ser la ocasión de notar, que cualquier que sea la sustitución lineal, ortogonal o no, por la que un polinomio dado sea reducido a la forma $\sum A_1\zeta^2$, el número de coeficientes positivos y negativos es invariante. [...]

[18] En la forma propuesta por Sylvester, el producto de una matriz A por su "inversa" A^* es $|A|Id$ y la "inversa de la inversa" es $A^{**} = |A|^{n-2}A$, con lo que $A^{**} = A$ si $|A| = 1$. Nótese también que, en la forma propuesta por Sylvester para obtener la "inversa", el menor que se calcula para la posición i,j sale ya con su signo; cuando la regla se da suprimiendo la fila y la columna correspondiente y calculando el menor resultante hace falta asignarle signo según la paridad de $i+j$.

> [...] una ley a la que mi visión del significado físico de cantidad de materia me inclina, por vía de analogía, a dar el nombre de Ley de la Inercia de las Formas Cuadráticas, como expresando el hecho de la existencia de un número invariable inseparablemente unido a tales formas. [330, p, 141]

La notación que utiliza Sylvester para escribir la forma cuadrática en la cita anterior pone en evidencia que pensaba en una disposición de sus coeficientes en matriz simétrica, pero no es matricial la expresión misma de la forma cuadrática. Por esta y las observaciones anteriores, hay que considerar que a la altura de la mitad del siglo XIX y en la línea evolutiva de tipo geométrico, las matrices no tenían todavía vida matemática propia. Será durante la década de los cincuenta cuando cambien las cosas, pero hay que señalar, lo veremos en el capítulo siguiente, que la vía de investigaciones aritméticas sobre formas cuadráticas iniciada por Gauss, sí que se había llegado en los años cuarenta a una mayor percepción, todavía parcial, del cálculo simbólico con matrices.

2.2 Los determinantes en los libros

Empezamos describiendo la demostración inductiva dada por Scherk en su libro misceláneo de 1825 de la regla de Cramer, en la que introduce las propiedades que necesita de los determinantes. También hacemos un rápida mención a la regla de Sarrus para determinantes de orden tres. Estas menciones sirven de preliminares para el primer libro sobre determinantes que llega desde Inglaterra, el de Spottiswoode publicado en 1851. El amplio artículo de Jacobi de 1841 —o el de Cayley de 1844— es citado por algunos autores[19] como el primer libro sobre determinates, aquí no lo consideramos así porque fue publicado en una revista de investigación y porque su texto, de difícil lectura, sólo es apto para matemáticos expertos. Entendemos que los libros, aunque pueden tener diversos niveles de extensión y dificultad, tienen como objetivo difundir entre públicos más amplios, casi siempre en el entorno educativo, una materia ya elaborada en el ámbito de la investigación. En esto compartimos la opinión de Muir, quien afirma[20] que la obra de Spottiswoode es "notable por ser el primer trabajo elemental sobre el tema publicado separadamente". Este criterio desautoriza en cierto modo como libro a la segunda edición

[19] Véase [142]. Uno de estos autores, Farebrother, reconoció la prioridad de Spottiswoode poco después [141].

[20] Véase [266, Vol. II p. 54].

del de Spottiswoode, notablemente ampliada, publicada en 1856 en el *J. de Crelle*. Precisamente por tener este destino editorial de alto nivel, el autor parece que se vio necesitado de hacer su obra "más difícil".

Sin duda la obra publicada por Baltzer en 1857 es la más completa de las que comentamos, y mejorará en sucesivas ediciones durante dos décadas. Pero nos interesa especialmente la obra publicada en 1862 por el italiano Trudi porque fue traducida al español seis años después, y con ella es oportuno mencionar a su precedente nacional más elemental, publicada por Brioschi en 1854. Citamos también brevemente el libro de álgebra de Salmon (1859) como simple ejemplo de los libros no específicos que dedicaban algún capítulo a los determinantes dentro de su variada temática algebraica.

2.2.1 Preliminares

El libro que mencionamos como preliminar, de la escuela combinatoria alemana, es *Tratados matemáticos / Mathematischen Abhandlungen* (1825) [316] de Heinrich Ferdinand Scherk (1798-1885), cuyo "segundo tratado" se titula *La solución general de ecuaciones de primer grado con cualquier número de incógnitas, seguido de algunos estudios analíticos relacionados*[21]. En este tratado se hace una demostración por inducción, muy extensa y detallada, de la regla de Cramer, sin suponer un conocimiento previo de la teoría de los determinantes, sino que éstos y sus propiedades van surgiendo, sin que el autor se refiera a ellos con nombre alguno, a medida que progresa el proceso inductivo de prueba.

Scherk sigue el método de inducción de los precursores Maclaurin, Cramer, etc. —que Cauchy había soslayado—, pero no sólo demostrando los primeros casos y recurriendo al "&c." para concluir, sino que abordó el paso general de la inducción, que deduce la verdad para $n+1$ supuesta la verdad para n. La notación de Scherk para las ecuaciones es, basta dar la primera ecuación del sistema, la siguiente[22]:

$$a_i^n x^n + a_1^{n-1} x^{n-1} + a_1^{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1^1 x^1 = s_1.$$

El autor prueba la regla de Cramer por inducción hasta el orden 3, escribiendo los de-

[21]La obra está dividida en cuatro "tratados" de contenido diverso, el primero se refiera al desarrollo en serie de la secante y los números de Bernoulli. Sherck fue el director de la tesis doctoral de Kummer en 1931.

[22]Pero Scherk escribe los superíndices y los subíndices sin desplazamiento a la derecha, es decir, encima y debajo de la letra correspondiente. No lo hemos reproducido exactamente así por dificultades tipográficas.

terminantes en forma desarrollada. Luego da la noción de determinante como suma de productos con signo y enuncia la regla de Cramer que supone válida para sistemas de orden n, de modo que la variable x^i es un cociente con denominador el determinante del sistema, que Scherk denota $P(a_n^n; a_h^i, a_h^i)$ y numerador el determinante obtenido sustituyendo en el anterior la columna de coeficientes a_h^i de x^i por los correspondiente términos independientes s_i, determinante modificado que denota $P(a_n^n; s_h, a_h^i)$ indicando la sustitución de columnas que ha realizado[23]. A continuación plantea un sistema de orden $n+1$ y lo reduce a uno de orden n suprimiendo la última ecuación y pasando un término al segundo miembro en las anteriores de modo que queda un sistema cuya primera ecuación es

$$a_i^n x^n + a_1^{n-1} x^{n-1} + a_1^{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1^1 x^1 = s_1 - a_1^{n+1} x^{n+1}$$

y análogamente las demás. Al escribir la solución x^i de este sistema aparece el determinante que sustituye la columna a_h^i por la $s_h - a_h^{n+1} x^{n+1}$, con el que realiza cálculos hasta obtener la expresión

$$P(a_n^n; s_h - a_h^{n+1} x^{n+1}, a_h^i) = P(a_n^n; s_h, a_h^i) - x^{n+1} P(a_n^n; a_h^{n+1}, a_h^i),$$

que le permite continuar la prueba hasta su final. Lo interesante en el marco de nuestra exposición es notar que aparece bien explícita la propiedad de linealidad de los determinantes, aunque el autor no la aprecie como una propiedad esencial del algoritmo, sino como un recurso más entre los necesarios para realizar una demostración.

Los libros de texto sobre determinantes todavía tardaron en aparecer. Hasta entonces, basta dejar anotado como curiosidad la popular y pedagógica "regla de Sarrus" para determinantes 3×3 que lleva el nombre de Pierre Frédérique Sarrus (1798-1861), matemático francés de la Universidad de Estrasburgo. La regla se encuentra expuesta por vez primera en la segunda edición del libro *Elementos de Álgebra* (1846) [148] de Pierre Joseph Étienne Finck (1797-1870), editado en Estrasburgo, donde el autor era colega de Sarrus. Finck explica la regla, que atribuye a Sarrus, a propósito de la solución de un sistema lineal de tres ecuaciones y tres incógnitas resuelto por cálculo directo, sin intervención de determinantes; de modo que la regla dice cómo ordenar los cálculos del denominador y los numeradores en la solución del sistema según Cramer, a partir de los coeficientes del sistema.

[23]La notación para el denominador es algo redundante, pero el autor quiere indicar la sustitución que no hace (sustitución identidad) pero sí hará para el numerador.

> Para calcular, en un ejemplo dado, los valores de x, y, z, el Sr. Sarrus inventó el siguiente método práctico, que es muy ingenioso. En primer lugar, se calcula el denominador, para esto se escriben los coeficientes de las incógnitas
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | | a | b | c |
> | | a' | b' | c' |
> | | a'' | b'' | c'' |
> | Se repiten los tres primeros | a | b | c |
> | y los tres siguientes | a' | b' | c' |
>
> entonces partiendo de a se sigue la diagonal de arriba a abajo, descendiendo al mismo tiempo una posición, y retrocediendo lo mismo hacia la derecha, $ab'c''$: partiendo del mismo modo de a', se obtiene $a'b''c$; de a" y se encuentra $a''bc'$; se tienen así los tres términos positivos (es decir, tomados con sus signos) del denominador. Se comienza a continuación por c y se desciende del mismo modo hacia la izquierda, obteniendo $cb'a''$, $c'b''a$, $c''ba'$, los tres términos negativos (o más bien los términos a los que es preciso cambiar de signo). [148, p. 95]

El libro de Finck es elemental y no se ocupa de sistemas lineales generales ni de determinantes.

En un artículo del año 2005 en el que aparece una nota biográfica sobre Sarrus, se atribuye a Muir [264, pp. 90-91], al que los autores llaman "el papa de los determinantes", la información según la cual la regla de Sarrus "se encontraba expuesta por primera vez en *Nouvell méthode pour la résolution des equations*" [73, p. 93]. Se trata de un pequeño libro, de 31 páginas en formato de bolsillo, publicado en Estrasburgo y en París, en el que la regla no aparece por ningún lado[24], ni siquiera el contenido del libro da pie a ello. Examinada la obra de Muir antes citada, en ella se afirma que la referencia a un trabajo de Sarrus en 1833 está tomada de un "libro reciente" de Weischold, podría tratarse de [357].

2.2.2 Primer libro sobre determinantes

Los libros que tratan los determinantes de forma aislada o como capítulos autónomos de libros de contenidos más amplios, llegaron en los años cincuenta. Una vez que la teoría

[24]Tampoco la vemos en otro folleto de Sarrus (1834), que por su tema pudiera ser más afín a los determinantes.

de los determinantes quedó suficientemente elaborada y sus aplicaciones establecidas en diversos campos, comenzaron a surgir libros que exponía de modos más o menos completo dicha teoría y sus aplicaciones. Describiremos algunos de ellos aparecidos mediado el siglo XIX, empezando por el que merece ser llamado, aunque no sin una ligera disputa, como veremos, el primer libro de texto sobre determinantes. Se trata del escrito por el británico Spottiswoode en 1851. De los libros que le siguieron nos interesarán aquellos que nos llevan hacia el de Trudi (1862), con cuya traducción Echegaray incorporó a España los determinantes.

W. Spottiswoode, 1851.

Elementary Theorems Relating to Determinants [323]

Esta obra no es muy extensa, consta de ocho páginas iniciales que incluyen un prefacio de cinco, y tras ellas las sesenta y tres de texto propiamente dicho. Cinco años después fue publicada en el *J. de Crelle* en dos entregas que sumaron más de cien páginas[25].

Por tratarse del primer libro sobre determinantes con finalidad pedagógica vale la pena detenerse en la descripción y comentario del planteamiento general de la teoría que hace el autor.

William Spottiswoode (1825-1883)[26] dedicó su obra a exponer, después del oportuno prefacio, quince teoremas a lo largo de diez secciones. El prefacio comienza con esta definición de objetivos:

> La variedad de problemas en los que la Teoría de Determinantes ha sido recientemente aplicada hace que sea conveniente que esta rama del análisis se haga accesible en general. A pesar de que los teoremas principales son conocidos por los matemáticos más avanzados, hasta ahora no ha habido un trabajo elemental sobre el tema, el cual sirva fácilmente de referencia para un estudiante. [323, p. 1].

Luego el autor indica que la teoría no es "ni larga ni complicada" y se limita a intentar

[25] 1ª ed. Londres: Longman, Brown, Green (1851). *viii* + 63 pp. 2ª ed. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 51 (1856) p. 209-271, 328-381. [Disponible en formato digital en http://gdz.sub.uni-goettingen.de]

[26] Spottiswoode estudió en Harrow School y en Balliol College. Fue nombrado miembro de la Royal Society en 1853. Fue presidente de la sección de matemáticas de la British Association en 1865. Fue presidente de la London Mathematical Society (1870-1872) y de la Royal Society (1878-1883). Además de su libro escribió varios artículos que involucran los determinantes.

evitar la realización de cálculos largos, afirmando que

> a excepción de algunos teoremas relativos a la adición, multiplicación, &c de determinantes, puede decirse que consiste enteramente en sus aplicaciones. [323, p. 1].

La mayor parte del prefacio está dedicada a exponer un breve esbozo histórico de la evolución de los determinantes desde Cramer, mencionando a los autores principales y a sus obras, todos ellos recogidos en las páginas previas de nuestro trabajo[27].

Los títulos de las diez secciones son los siguientes:

I. Introducción (p. 1)
II. Sobre la formación de determinantes (p. 8)
III. Transformación de determinantes (p. 13)
IV. Sobre la conexión entre determinantes y sistemas de ecuaciones lineales (p. 20)
V. Sobre productos y potencias de determinantes (p. 24)
VI. Sobre sistemas inversos, y determinantes de determinantes (p. 29)
VII. Expresiones para un determinante y sus constituyentes en términos de sus coeficientes diferenciales (p. 37)
VIII. Sobre sistemas redundantes, y grupos de determinantes (p. 42)
IX. Sobre determinantes antisimétricos (p. 46)
X. Sobre determinantes funcionales (p. 51)

La primera sección tiene carácter motivador de la teoría general que se iniciará en la sección siguiente. El autor aborda de forma familiar algunos cálculos bien conocidos[28] y los expone de modo que aparezcan determinantes hasta de cuarto orden, incluidos unos de tercer orden cuyos "constituyentes" son determinantes de segundo orden. Es en la sección II donde se definen formalmente los determinantes, y se hace siguiendo el método inductivo y la notación simbólica de Vandermonde; por ejemplo, para $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) \\ (2,1) & (2,2) \end{vmatrix} = (1,1)|(2,2)| - (1,2)|(2,1)| = (1,1)(2,2) - (1,2)(2,1).$$

[27] Cramer, Bézout, Laplace, Vandermonde, Lagrange, Gauss, Binet, Cauchy, Jacobi, Cayley, Sylvester y Hermite. Spottiswoode menciona los "hiperdeterminantes" de Cayley como un novedoso desarrollo de la teoría que no ha incluido en su libro.

[28] Los necesarios para obtener el centro y los ejes principales de una curva plana y de una superficie de segundo orden, así como para la transformación de coordenadas.

Nótese que la doble igualdad destaca el primer paso inductivo, por ejemplo $|(2,2)| = (2,2)$. Descripciones completas como la anterior quedan escritas en el libro hasta $n = 4$, en cada caso se plantea como definición del determinante el desarrollo por los elementos de su primera fila. Antes de pasar al caso general, el autor intercala dos observaciones de interés. La primera se refiere a los signos de los términos de los desarrollos propuestos:

> La ley de formación de estas funciones será suficientemente obvia, si se observa que cuando el número de líneas (horizontales o verticales) es impar los términos en la primera etapa del desarrollo son todos positivos, y cuando el número es par los términos son alternativamente positivos y negativos. [323, p. 10].

La segunda observación pretende justificar que esta definición responde a lo que podría esperarse de la regla de Cramer, que se supone conocida por el lector, lo cual es bastante obvio para $n = 2, 3$, pero el autor parece consciente de no serlo tanto para $n = 4$:

> Se podría verificar que este determinante de cuarto orden es el denominador común en las expresiones para las cuatro cantidades desconocidas determinadas por cuatro ecuaciones lineales cuyos coeficientes son los constituyentes del determinante; o, que el mismo determinante, cuando es igual a cero, es el resultado de la eliminación de las mismas cantidades desconocidas a partir de las mismas ecuaciones, cuando su segundo miembro se anula. [323, p. 10].

Tras este argumento tranquilizador, Spottiswoode continúa con la definición inductiva general, dejando para más adelante (sección VI) la justificación de que los determinantes así definidos resuelven los sistemas lineales. La ley de formación para el orden n, incluyendo la determinación de los signos, es la siguiente[29]:

$$\nabla = (1{,}1)\begin{vmatrix} (2{,}2) & (2{,}3) & .. & (2{,}n) \\ (3{,}2) & (3{,}3) & .. & (3{,}n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n{,}2) & (n{,}3) & .. & (n{,}n) \end{vmatrix} \pm (1{,}2)\begin{vmatrix} (2{,}3) & (2{,}4) & .. & (2{,}1) \\ (3{,}3) & (3{,}4) & .. & (3{,}1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n{,}3) & (n{,}4) & .. & (n{,}1) \end{vmatrix} + .. \pm (1{,}n)\begin{vmatrix} (2{,}1) & (2{,}2) & .. & (2{,}n{-}1) \\ (3{,}1) & (3{,}2) & .. & (3{,}n{-}1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n{,}1) & (n{,}2) & .. & (n{,}n{-}1) \end{vmatrix}.$$

> los signos de arriba se toman cuando el número de líneas (horizontales o verticales) es impar, y el de abajo cuando es par . [323, p. 11].

A continuación, el autor se refiere a la definición más convencional de determinante sin destacarla como teorema de equivalencia, sino incorporándola como un simple comentario:

[29]En el segundo determinante el último elemento $(n,1)$ está equivocado en el original, donde pone (n,n). Es relativamente frecuente encontrar en este libro erratas o incluso errores, aún teniendo en cuenta que no eran todavía tiempos de rigor expositivo.

> Es fácil ver por la ley de esta formación, que un determinante es [...] la suma de los términos formados por todos los posibles intercambios del primero y del segundo miembro de las combinaciones binarias, $(1,1),(2,2),\ldots(n,n)$, sujetas a la condición de que en cada producto todos los primeros miembros serán diferentes, e igualmente todos los segundos miembros; siendo el signo de cada producto + o −, según sea deducible de
>
> $$(1,1),(2,2),\ldots(n,n)$$
>
> por un número par o impar de intercambios de los primeros (o segundos) miembros. [323, pp. 12-13]

Esta explicación permite al autor indicar que la notación

$$\nabla = \sum \pm(1,1)(2,2)\ldots(n,n)$$

era usada por "Jacobi y otros", sin atribuírsela en este lugar del texto a Cauchy, su verdadero inventor, aunque sí quedó reflejada esta prioridad en el prefacio del libro. [323, p. vi]

Desde el punto de vista del rigor lógico, todavía no imperante, la definición inductiva requiere probar la independencia de la misma respecto a la línea elegida para el desarrollo, mientras que la definición sugerida por la notación de Cauchy es general e independiente del tamaño. A la hora de empezar a demostrar propiedades, Spottiswoode se apoya según le convenga en en uno u otro desarrollo. En la sección segunda aparecen los dos primeros teoremas, que son precisamente los que establecen la propiedad lineal de la función determinante, por una parte cuando se efectúa la operación de escalamiento y por otra cuando una línea está formada por sumas. Estos resultados están desarrollados por sus fórmulas, pero también enunciados en el estilo retórico del momento:

> Teorema I. Si toda una línea vertical u horizontal se multiplica por la misma cantidad, el determinante es multiplicado por esa cantidad.
>
> [...]
>
> Teorema II. El determinante cada uno de cuyos constituyentes es la suma de varios otros es igual a la suma de los determinantes formados por todas las posibles combinaciones de líneas verticales, tomando una de cada par encontrado en el determinante dado. [323, pp. 12-13].

Los teoremas III a V en la sección III establecen, respectivamente, la invarianza del determinante por cambio entre filas y columnas, el cambio de signo por permuta de dos filas o columnas y la anulación del determinante en presencia de dos líneas iguales.

Es relevante el teorema VIII que cierra esta segunda sección. Atendiendo a la orientación pedagógica del libro, va precedido de dos teoremas (VI y VII) en los que se calculan determinantes con un rectángulo de ceros bajo la diagonal, así como de dos resultados más de tipo similar que no se destacan como teoremas; pero todos estos resultados son casos particulares del teorema principal citado:

> TEOREMA VIII. Si en un determinante de orden n se dan números $\alpha, \beta, \ldots, \nu, \kappa$, tales que $\alpha + \beta + \ldots + \nu + \kappa = n$, el determinante puede expresarse como la suma de los productos de los determinantes formados a partir de todos los grupos de α líneas verticales en las primeras α líneas horizontales, de todos los grupos de β líneas verticales en las siguientes β líneas horizontales, y así sucesivamente, observando que ninguna línea vertical es usada dos veces. [323, p. 18].

Este teorema propone descomposiciones precisas de un determinante en sumas de productos de determinantes menores —incluidos los elementos como menores de orden uno— en la línea de los resultados de Binet-Cauchy y generalizando el desarrollo por menores de Laplace[30], limitando la generalidad a lo que es útil para expresar determinantes. La prueba del teorema —no exenta de erratas[31]— es convincente de acuerdo con el estilo de la época, y se refuerza con el ejemplo de la descomposición de un determinante 4×4 según menores de orden dos[32].

La última página de la sección tercera está dedicada a indicar algunos ejemplos de apli-

[30]Que corresponde a una descomposición $n = \alpha + \beta$, desde luego con $\beta = n - \alpha$.

[31]Por ejemplo, escribe $|\alpha + 1, \alpha + 2, \ldots \beta|$ donde debería poner $|\alpha + 1, \alpha + 2, \ldots \alpha + \beta|$.

[32]Esta descomposición, tipo Laplace, corresponde a $4 = 2 + 2$. No le hubiera costado al autor, para vislumbrar mejor el alcance de su resultado, ofrecer todos los casos posibles de orden 4, que son: (i) $4 = 1 + 1 + 1 + 1$. El teorema da en este caso la expresión del determinante por elementos (menores de orden uno), que es una suma de $4! = 24$ sumandos. (ii) $4 = 1 + 1 + 2$. Salen en este caso 12 sumandos formados por productos de dos elementos, uno de cada una de las dos primeras filas sin repetir columna, y menores complementarios 2×2 de las dos últimas filas. Cada uno de estos determinantes se descompone en dos sumandos de constituyentes, con lo que se obtendrían los $12 \times 2 = 24$ términos del desarrollo anterior. Los casos $4 = 1 + 2 + 1$, $4 = 2 + 1 + 1$ son similares cambiando las líneas elegidas. (iii) $4 = 1 + 3$ (similar $4 = 3 + 1$). Es el desarrollo del determinante según la definición inductiva, en total 4 sumandos, cada uno de ellos con un constituyente y un determinante de tercer orden, lo que recupera la descomposición de (i) en la forma de $4 \times 6 = 24$ términos. (iv) $4 = 2 + 2$. Ahora son 6 sumandos producto de dos determinantes de segundo orden, cada sumando se descompone en 4 productos de constituyentes, lo que vuelve a recuperar el total de (i) en la forma $6 \times 4 = 24$. En definitiva, cada caso significa un agrupamiento de los términos de (i).

cación a la geometría de los teoremas anteriores, momento en el que necesariamente el autor tiene que abandonar la notación simbólica de la teoría de determinantes para utilizar la notación propia del campo de aplicación. Análogamente irá sucediendo en el resto del libro, cuyos capítulos terminan frecuentemente con aplicaciones a la geometría y el análisis.

En la sección IV aparecen las conexiones entre determinantes y sistemas de ecuaciones lineales (regla de Cramer), que veremos con detalle en el apartado 2.2. Llega en la sección V el teorema del producto, con su enunciado retórico en estos términos:

> Teorema XI. Un determinante cuyos constituyentes son funciones lineales de constituyentes dados, siendo los coeficientes los mismos para cada línea horizontal, es igual al producto de los dos determinantes cuyos constituyentes son los constituyentes dados y los coeficientes respectivamente [323, p. 26].

Lo interesante es ver cómo desarrolla la demostración que precede al enunciado. Es una construcción extraída de los trabajos de los precursores pero originalmente elaborada. Spottiswoode considera un determinante ∇ de orden n cuyos elementos ("constituyentes") son los coeficientes (i,j) de un sistema de variables x_i y términos independientes u_i. Otro determinante ∇' de igual orden tiene coeficientes $(i,j)'$, variables u_i y términos independientes v_i. Opera con estos sistemas como si se tratara de un cambio de variables, con lo que obtiene un sistema lineal que da las v_i en función de las x_i, cuyo determinante ∇'' está constituido por elementos $(i,j)''$ que son funciones lineales de los (i,j) con coeficientes $(i,j)'$. Luego, forma un segundo sistema de orden $2n$, variables las x_i, u_i y términos independientes la primera mitad de ceros y otra mitad los v_i. El cuadro de coeficientes de este sistema se descompone en cuatro: arriba a la izquierda los (i,j) debajo de ellos un cuadro de ceros, arriba a la derecha otro cuadro de ceros excepto la diagonal formada por los $-u_i$, y abajo a la derecha los $(i,j)'$. El determinante de este sistema se calcula por la regla de Laplace (teorema VIII), resultando ser $\nabla\nabla'$. Finalmente, el autor compara las soluciones para las x_i que resultan de ambos procesos, que han de ser iguales, lo que da como resultado el teorema del producto

$$\nabla'' = \nabla\nabla',$$

que completa con estas explicaciones:

> ...entonces $(i,j)''$ es la suma de los productos formados tomando en orden los

> términos de la i-ésima línea horizontal de ∇' y multiplicándolos por los de la j-ésima línea vertical de ∇ (o viceversa); o ya que las líneas verticales pueden ser cambiadas en horizontales, puede decirse que $(i, j)''$ es la suma de los productos formados tomando los términos a lo largo de la i-ésima línea horizontal de ∇ con los de la j-ésima línea vertical de ∇' (o viceversa). [323, p. 25]

De este modo, queda establecida la exposición del producto de determinantes al modo algorítmico, dejando abierta la ambigüedad en la elección del producto de los cuadros de cantidades ya sea por fila-columna, fila-fila, etc. No obstante, en la primera parte de la demostración utilizó el sistema de cálculo por cambio de variable que terminó estandarizando el producto fila-columna. Esta necesidad de los sistemas lineales para el desarrollo de la teoría priva a ésta de una autonomía como construcción puramente algorítmica, cualidad que iría ganando en exposiciones posteriores.

En la sección VI Spottiswoode se ocupa de los sistemas "inversos", que son los que se obtienen al expresar los términos independientes u_i en función de las incógnitas x_i del primer sistema, cuyo determinante es de la forma $\nabla = (1, 1)[1, 1] + (2, 2)[2, 2] + \ldots + (n, n)[n, n]$, donde los pares entre paréntesis cuadrados son los menores de los elementos correspondientes. Calcula el determinante de los menores $[i, j]$, obteniendo ∇^{n-1}, y expone otros resultados más generales que toma de Jacobi, cálculos con determinantes simétricos, etc.

Hasta aquí la parte general de la teoría de determinantes tal como fue expuesta por primera vez de modo a un tiempo sistemático y pedagógico. El resto del libro se dedica a las aplicaciones —determinantes antisimétricos, funcionales, etc., en la línea de Jacobi— y no lo vamos a comentar en detalle.

2.2.3 1853-56: Spottiswoode y Brioschi

El segundo libro sobre determinantes fue italiano, lo publicó Brioschi en 1854. Respecto al primero, Crelle había pedido permiso para publicarlo en su revista y Spottiswoode le envió en 1853 una versión modificada y notablemente ampliada, que no salió hasta 1856. Estas dos obras pueden considerarse como dos libros[33] independientes, y que siguen cami-

[33] El segundo de Spottiswoode lo consideraremos como tal a pesar de que fue publicado en una revista de investigación, parece razonable hacerlo así porque fue una evolución de un libro que sí tuvo origen editorial.

nos diferentes como veremos, surgidos como continuadores del primero de Spottiswoode. Vamos a exponer primero la obra del inglés para favorecer la continuidad con los comentarios a su primera edición de 1851. Hemos dado importancia al libro de Spottiswoode, en sus dos versiones, porque fue el pionero y marcó el esquema sobre el que realizarían variaciones los autores sucesivos.

W. Spottiswoode, 1853(56).

Elementary Theorems Relating to Determinants [322]

Unos años después el libro de Spottiswoode tuvo una segunda edición en las páginas del prestigioso *Journal de Crelle*, precedida por esta nota del autor:

> En el año 1851 el autor del siguiente artículo publicó un folleto titulado "Teoremas elementales relacionados con los determinantes" y tras la solicitud del Editor de esta revista para reproducirlo, solicité permiso para revisar el trabajo. El tema había sido ampliamente desarrollado en el intermedio, lo que hacía necesario no solamente revisarlo sino reescribir por completo la obra. El resultado se ofrece en las páginas siguientes. [322, p. 209]

Esta segunda edición está firmada en 1853, y en el periodo 1851-53 se produjo una aportación notable de Cayley y Sylvester a la teoría de determinantes, lo que incitó a Spottiswoode a rehacer su libro, llegando a 117 páginas desde las 71 iniciales, lo que justifica la mención con que aparece en el índice del *J. de Crelle*, 51 (1856): "Segunda edición, reescrita y muy ampliada por el autor".

En su obra sobre determinantes Sylvester reconoció la influencia que sobre su trabajo ejerció el libro de Spottiswoode y éste, a su vez, actualizó y amplió su libro a partir de las nuevas aportaciones de Sylvester, que incluyen resultados de la teoría y también aspectos sobre la notación en línea con la tendencia simbólica del álgebra británica de su tiempo.

Parece sorprendente, tratándose de algo solicitado por el propio Crelle, que la nueva versión de la obra de Spottiswoode no fuera publicada hasta 1856. Tal retraso no es fácil de explicar, pero, sin conocer datos que justifiquen la demora, cabe pensar que lo que Crelle recibió no era lo esperado y bien pudo tener alguna objeción para publicarlo, al estar tan modificada y ampliada la obra reclamada. El autor se esmeró para estar a la altura del honor que se le brindaba, pero al hacerlo privó a su obra del mérito de frescura, concisión y accesibilidad que tenía; tal vez fueran éstas la cualidades que Crelle apreció en la primera edición y vio un tanto desvirtuadas en la segunda.

El texto de la segunda edición, que está dividido en 11 secciones y abarca 21 teoremas. Una primera parte de la obra, la más amplia, apareció como el trabajo nº 5 de un fascículo de la revista alemana (prefacio y siete primeras secciones, pp. 209-271) y el resto como nº 8 de uno posterior (pp. 328-381) comprenden los contenidos de la primera edición, ampliados, más dos secciones nuevas al final.

Damos a continuación el índice de la segunda edición indicando la relación de cada sección con las de la primera, entendiendo que las secciones de la segunda edición contienen, en general, lo que se indica de la primera de modo ampliado. Se debe observar también que parte del material expuesto aparece reordenado y que en la segunda parte hay dos secciones completamente nuevas. El índice anunciado es el siguiente:

1. Sobre la formación de determinantes (p. 213)
   [Parte de §II y §III de 1ª ed.]
2. Sobre la adición y sustracción de determinantes (p. 231)
   [Parte de §II de 1ª ed.]
3. Sobre la conexión entre determinantes y sistemas de ecuaciones lineales (p. 234)
   [§IV de 1ª ed.]
4. Sobre la multiplicación de determinantes (p. 238)
   [§V de 1ª ed.]
5. Sobre sistemas redundantes, y grupos de determinantes (p. 256)
   [§VIII de 1ª ed.]
6. Sobre determinantes antisimétricos (p. 260)
   [§IX de 1ª ed.]
7. Expresiones para un determinante y sus constituyentes en términos de sus coeficientes diferenciales (pp. 267-271)
   [§VII de 1ª ed.]
8. Sobre la conexión entre determinantes y funciones homogéneas (p. 328)
9. Sobre determinantes funcionales (p. 338)
   [§X de 1ª ed.]

10. Sobre determinantes compuestos (p. 350)

    [§VI de 1ª ed.]

11. Miscelánea de ejemplos de determinantes (pp. 373-381)

Sin entrar a fondo en la descripción de la segunda edición completa, comentaremos las variaciones producidas en el tratamiento de la parte general de la teoría de determinantes.

El prefacio de la segunda edición es muy similar al de la primera, pero nada más iniciarse el contenido propiamente dicho en la sección primera, se observa que el autor abandona la idea pedagógica que presidió la primera edición, que tuvo una primera sección con ejemplos capaces de motivar la conveniencia de introducir los determinantes. La versión del *Crelle* suprime estas primeras ocho páginas[34] y pasa directamente a la formación de los determinantes, que son presentados de este modo:

> Un *Determinante* es una función formada a partir de una *matriz* cuadrada, de acuerdo a cierta ley explicada más abajo, y los símbolos que constituyen esa Matriz se llaman los *consituyentes del Determinante* [322, p. 214]

El uso del término "matriz" para denotar el cuadro de cantidades en una primera muestra de la influencia de Sylvester, que fue el introductor de dicho término[35]. Esta influencia se aprecia también en la introducción de otros términos que se han consolidado, como "diagonal principal", elementos "conjugados" etc. Resulta curioso observar que al introducir los determinantes (p. 215), Spottiswoode escribe la matriz como un cuadro de cantidades (i, j) con ambos índices variando de 1 a n, afirmando a continuación que "la misma matriz con una línea vertical a cada lado [...] indica el Determinante formado por los n^2 Constituyentes". Pero a la matriz anterior también la colocó entre líneas verticales, así que repitió dos veces lo mismo de manera consecutiva, lo que sin duda fue una errata. A lo largo del texto, a veces habla de determinante y escribe un cuadro sin barras, es decir una matriz, otras veces la matriz es, en efecto un cuadro sin barras, y lo más frecuente es que se refiera sólo a determinantes y escriba siempre el cuadro de cantidades entre barras verticales. En definitiva, la mención a "matriz" no va más allá de una nomenclatura utilizada muy pocas veces.

[34]El contenido de esta introducción suprimida como tal aparece reubicada en los ejemplos que el autor va presentando.

[35]Fue en 1850 [327], antes incluso de la primera edición de la obra de Spottiswoode.

En cuanto a las erratas advertidas en la primera edición, unas están parcialmente corregidas y otras no, a veces parece que problemas tipográficos dificultaran escribir con más corrección. En el volumen del *J. de Crelle* de 1856 se publicó una fe de erratas relativa a las siete memorias sobre determinantes que había publicado Cayley en el volumen anterior, en la que se advierte de un defecto de edición y se explica sus causas:

> ... el autor se había servido en el manuscrito de un carácter particular para denotar las matrices, pero en la impresión las matrices están representadas de la misma manera que los determinantes. Al observar este defecto, el sentido de las fórmulas bastará para suprimir la ambigüedad.
>
> **Nota del director de la revista.** La razón por la cual no se ha adoptado en la impresión el carácter particular de dos arcos)(entrelazados, si bien elegido por el Sr. Cayley, fue que este carácter no se encuentra entre los de la imprenta, y que el tiempo no permitía hacerlo fundir expresamente.

El cambio de un enfoque pedagógico a otro más exigente o estricto se observa también en la secuencia de primeros teoremas. Los ocho primeros teoremas de la segunda edición están contenidos en la sección primera de la misma, que contiene parte de la segunda y toda la tercera de le primera edición. Pero el orden de los teoremas cambia completamente. Los primeros en 1851 fueron los que enunciaban las propiedades de linealidad, ahora dejadas para la sección segunda. En la nueva edición el primer teorema se refiere a la invarianza del determinante por cambio de filas y columnas (el teorema III primitivo), pasando de inmediato a dar como segundo teorema el que tuviera el número VIII de la primera edición, aquel que generalizaba el desarrollo de Laplace ofreciendo diversas maneras de expresar el determinante en función de sus menores. En la primera edición el autor llegó al teorema VIII caminando de lo particular a lo general, probando primero varios casos particulares accesibles y atacando al fin el teorema en su forma general; para la publicación en el *Crelle* usó el camino inverso, de lo general a lo particular, dando de un golpe el resultado general y luego desgranando los casos particulares[36].

En el tratamiento de los determinantes por parte de Spottiswoode este teorema es muy importante y constituye la base para sus demostraciones, que en su mayor parte consisten en jugar con las diversas maneras en que se puede expresar un determinantes mediante la aplicación de dicho teorema. Esto es particularmente claro en la demostración del teorema del producto en la sección IV, que comentaremos de inmediato.

[36] El autor no usa el término “corolario”, todos sus enunciados son calificados como “teoremas”.

Las secciones II y III tienen un contenido bastante similar al de la edición anterior, poco hay que añadir sobre ellas, pero en la sección IV sobre el producto de determinantes sí que hay novedades de interés, de nuevo buscando que la obra se dirija más a un lector experto en matemáticas. La pureza de la teoría que persigue en este caso Spottiswoode consiste en justificar el producto de determinantes de un modo completamente algorítmico, sin recurrir como en la primera edición al uso de los sistemas lineales[37].

Explicaremos el algoritmo aplicado sin descender a todos los detalles técnicos. Se parte de dos matrices cuadradas de orden n, A, A', cuyos determinantes son $\nabla = |A|$, $\nabla' = |A'|$ respectivamente. Con ellas se obtienen una matriz de orden $2n$ dispuesta en cuatro cajas, con una matriz cuadrada nula O de orden n en cada posición de la diagonal principal y las matrices A, A' en la diagonal secundaria, en la parte superior e inferior respectivamente. Así que Spottiswoode quiere calcular el determinante

$$\left|\begin{array}{c|c} O & A \\ \hline A' & O \end{array}\right|$$

de dos maneras diferentes para igualar los resultados que obtiene en cada caso. Primero, por el teorema II (el VIII de la primera edición) el determinante de esta matriz grande es $(-1)^n\nabla\nabla'$.

Por otra parte[38], si a_1 (resp. a'_1) es la primera columna (resp. fila) de A (resp. A') y A_1 (resp. A'_1) lo que queda de A (resp. A') quitando a_1 (resp. a'_1), entonces el producto $a_1a'_1$ —realizado tal como lo entendemos hoy, producto de una matriz columna por una matriz fila— es una matriz de orden n. Podemos formar otra matriz por cajas, con un orden menos que la anterior, del siguiente modo: En la primera posición de la diagonal principal ponemos $a_1a'_1$, en la segunda una matriz nula de orden $r-1$, y en los laterales A_1 y A'_1 respectivamente. Spottiswoode demuestra que los determinantes de la primera matriz de

[37] De hecho, este método originario usando la composición del cambio de variables es reproducido después del puramente algorítmico por considerarlo también de interés.

[38] Usaremos alguna notación que no está en la obra de Spottiswoode, pero que nos ayudará a explicar con más claridad y brevedad que si nos sirviéramos exclusivamente de los términos y símbolos por él utilizados. Por ejemplo, usa ∇ para designar determinantes pero nunca letras para las matrices que los forman.

cajas y de la segunda, que tiene un orden menos, son iguales salvo el signo:

$$\left|\begin{array}{c|c|c} O & a_1 & A_1 \\ \hline a'_1 & 0 & O \\ \hline A'_1 & O & O \end{array}\right| = -\left|\begin{array}{c|c} a_1a'_1 & A_1 \\ \hline A'_1 & O \end{array}\right|$$

La manera como lo hace es aplicar al determinante grande, llamémosle ∇_2, la expresión que le corresponde (teorema II, antiguo VIII) en la descomposición por filas del tipo $2n = n+1+(n-1)$, es decir, $\nabla_2 = \nabla(1,1)'[1,1]' + \ldots + \nabla(1,n)'[1,n]'$, donde, con la notación de Spottiswoode, los elementos $(1,1)', \ldots, (1,n)'$ forman la fila de A' que hemos denotado a'_1, y $[1,j]', 1 \le j \le n$, designa el menor complementario de $(1,j)'$ en A'. El paso siguiente es considerar los determinantes $\nabla_{(1,j)'}$ obtenidos multiplicando por $(1,j)'$ la primera columna de ∇. Finalmente, se observa que la expresión $\nabla_2 = \nabla_{(1,1)'}[1,1]' + \ldots + \nabla_{(1,n)'}[1,n]'$ es, con el ajuste del signo, el desarrollo del determinante arriba mencionado de orden $2n-1$ según la descomposición $2n-1 = n+(n-1)$.

Reiterando el proceso hasta que desaparezca la matriz nula que va perdiendo orden en la parte inferior de la diagonal principal, una vez eliminadas i filas —las filas $n+1, \ldots, n+i$ de la matriz duplicada— se llega a tener en la primera posición de la diagonal principal la matriz de orden n que tiene la forma, usando una notación inductiva fácil de comprender, $a_1a'_1 + a_2a'_2 + \ldots + a_ia'_i$, que no es sino la matriz producto de la matriz que se obtiene con las i primeras columnas de A por la que resulta de las i primeras filas de A', producto realizado al modo fila-columna[39].

Si termináramos la recursión resultaría que sólo quedará la matriz de orden n situada en la parte superior de la diagonal, que tendría la forma $a_1a'_1 + a_2a'_2 + \ldots + a_na'_n$, que no es sino la matriz $A'' = AA'$ que resulta de multiplicar A por A' en la forma fila-columna[40], matriz

[39]Un ejemplo con matrices $A = (a_{ij})$, $A' = (a'_{ij})$ de orden 3 puede ayudar a seguir el argumento. En la primera reducción de la matriz duplicada se realiza el producto

$$a_1a'_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a'_{11} & a_{11}a'_{12} & a_{11}a'_{13} \\ a_{21}a'_{11} & a_{21}a'_{12} & a_{21}a'_{13} \\ a_{31}a'_{11} & a_{31}a'_{11} & a_{31}a'_{13} \end{pmatrix}.$$

Tras la segunda se obtiene, también con producto fila-columna,

$$a_1a'_1 + a_2a'_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \end{pmatrix}.$$

[40]Con las notaciones de Spottiswoode el elemento de la fila i y columna j de este producto se escribiría

con determinante ∇''. Como el signo que va cambiando en cada paso a un determinante cada vez menor concuerda al final del proceso con el del primer procedimiento, resulta la igualdad $\nabla'' = \nabla\nabla'$.

Pero resulta que el autor no termina así, llegado al paso i de la recursión explica lo obtenido en un largo enunciado[41] tras el cual afirma que, "cuando $n = i$ se obtiene la formula usual", la cual escribe con todo su desarrollo y representa con la ecuación $\nabla'' = \nabla\nabla'$, en la que, sorprendentemente y cambiando el criterio seguido hasta entonces, da el producto con formato columna-fila, como si hubiera invertido el orden de las matrices. El autor lo indica así:

> $(i, j)''$ es la suma de los productos formados tomando en orden los términos a lo largo de la i-ésima línea horizontal de ∇' y multiplicándolos por los términos a lo largo de la j-ésima línea vertical de ∇ (o viceversa); o ya que las líneas verticales pueden ser cambiadas en horizontales, puede decirse que $(i, j)''$ es la suma de los productos hechos tomando los términos a lo largo de la i-ésima línea horizontal de ∇ con aquellos a lo largo de la j-ésima línea horizontal de ∇' (o viceversa). [322, p. 243]

Este modo de proceder induce a confusión y refleja la imprecisiones propias de la época, todavía falta el rigor que se fue imponiendo a lo largo del siglo, tanto en los aspectos de fundamento lógico como de expresión. No es que $(i, j)''$ valga lo mismo se multiplique como se multiplique, lo que sucede es que los diversos modos de multiplicar dan matrices diferentes pero con el mismo determinante, bien sea porque una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante (teorema I), o bien —aunque Spottiswoode no lo menciona, sin duda estaría al corriente de ello— porque si las matrices se cambian de orden al multiplicarlas sale un matriz diferente pero con el mismo determinante. La invarianza del determinante por transposición de una matriz y por cambio en el orden del producto de dos unifica en el algoritmo de los determinantes lo que no queda unificado en el algoritmo del producto de matrices[42], que resulta sometido a una ambigüedad que puede producir errores, debidos más bien a que el lenguaje no ha alcanzado todavía un grado suficiente

así: $(i, j)'' = (i, 1)(1, j)' + \ldots + (i, n)(n, j)'$.

[41] Es el teorema XIV, pp. 242-243.

[42] Una vez codificado el producto de matrices en la forma fila-columna —y lo mismo hubiera sucedido si se hubiera consolidado otra codificación—, resultó claro con las matrices cuadradas que AB y BA son en general distintas, pero $|AB| = |BA|$, igual que la matriz A y su traspuesta A^t son en general distintas, pero siempre $|A| = |A^t|$. Las distintas formas de producto se deducen del canónico por cambios de orden y trasposiciones.

de precisión.

Un algoritmo propio para matrices, con su álgebra operacional bien establecida no está todavía en las manos del autor británico, pero fueron precisamente Cayley y Sylvester quienes lo fueron estableciendo. De la evolución de este tema diremos algo en el capítulo siguiente.

En la segunda parte de la cita anterior se observa también una cierta preferencia por el producto de matrices en la forma fila-fila, que desde Cauchy venía siendo habitual para multiplicar matrices rectangulares de las mismas dimensiones. Cuando Spottiswoode da ejemplos de su algoritmo del producto para los casos $n = 2, 3$, calcula según el algoritmo antes descrito

$$|A||A'| = \pm \left| \begin{array}{c|c} O & A \\ \hline A' & O \end{array} \right| = |AA'|$$

pero, sin explicar los motivos por los que lo hace, traspone la matriz A' para que el final le quede el producto de matrices calculado en la forma fila-fila.

La sección IV, que contiene otros resultados que no vamos a comentar, se prolonga también en la sección X sobre "determinantes compuestos", que de inicio es una ampliación muy extendida de la sección VI de la primera edición, añadiendo al resultado del determinante de los adjuntos otros más generales sobre determinantes cuyos elementos son a su vez determinantes, tomados principalmente de la obra de Sylvester.

Para terminar la comparativa entre las dos versiones del libro de Spottiswoode, señalemos que la nueva sección XI "miscelánea" es más bien una curiosidad, en ella se ofrecen ejemplos diversos, procedentes de campos variados de la matemática, de fórmulas que pueden expresarse en forma de determinante.

F. Brioschi, 1854.

La teorica dei determinanti e le sue principali applicationi [45]

Este fue el segundo libro de texto que se ocupa exclusivamente de la teoría de determinantes[43] e incorpora a Italia a la producción de obras sobre estos algoritmos. En general, este libro conserva el esquema general que comparten los dos de Spottiswoode, pero el italiano sólo conoció la primera edición del inglés, pues cuando apareció el libro de Francesco

[43] Véase [266, Vol. II pp. 87-91].

Brioschi[44] (1824-1897) la segunda en el *J. de Crelle* estaba escrita pero no publicada. De la medida del éxito de Brioschi, así como del interés europeo en las obras difusoras de esta teoría, da cuenta que tuvo traducciones al francés y al alemán, publicadas ambas el año 1856, el mismo año en que Crelle dio a conocer en su revista la segunda obra de Spottiswoode[45].

En definitiva, debemos considerar que la obra de Biroschi (1854) y la segunda de Spottiswoode (1856) presentan sendas exposiciones de la teoría y aplicaciones de los determinantes posteriores a la primera de Spottiswoode (1851) e independientes entre sí, pues el autor inglés escribió su segunda edición en 1853, sin posibilidad de conocer la de Brioschi. Naturalmente el inglés nunca citó al italiano, éste por su parte, en el prólogo de su obra, hizo un recorrido histórico por la teoría desde los trabajos de Cramer y Bézout hasta los de Jacobi y Spottiswoode (1851). Frente a las setenta páginas del primer Spottiswoode, la segunda edición del inglés y el libro de Brioschi comparten una extensión de unas ciento diez páginas y se dividen en igual número, once, de secciones, siendo bastante similar el esquema que siguen las obras, aunque tienen algunas diferencias, las principales de las cuales vamos a resaltar.

A pesar de los antecedentes recientes que Brioschi reconoció, el autor italiano defendió en el prologo la oportunidad de un nuevo libro sobre el tema, al tiempo que trazaba su orientación:

> Los más recientes trabajos sobre determinantes son aplicaciones de sus propiedades al análisis, a la geometría, a la mecánica, a la teoría de las ecuaciones, a la teoría de los números, etc. [...]
>
> La variedad y la importancia de las aplicaciones de la teoría de los determinantes, hace que los estudiosos sientan el deseo y la necesidad de libros en los que podamos encontrar expuestos los principios de esta rama del análisis. La memoria de Jacobi y el apreciado opúsculo de Spottiswoode —*Elementary theorems relating to*

[44]Estudió en la Universidad de Pavía, donde se doctoró en 1845. Esta ciudad lombarda se encuentra muy próxima a Milán y a Lucca, donde en 1845 se celebró un congreso al que asistieron Jacobi y otros matemáticos alemanes que le acompañaban hacia su estancia en Roma por motivos de salud. Brioschi fue profesor de matemática aplicada (1853-1859) y de análisis superior (1859-1861) en la Universidad de Pavia. Dio a conocer en Italia algunas teorías algebraicas, como determinantes e invariantes, y se ocupó también de mecánica e hidráulica. Entre sus estudiantes se destacan E. Beltrami, F. Casorati, y L. Cremona. Además promocionó como director la revista *Annali di Scienze Matematische e Fisiche* y ejerció una actividad política como diputado (1862) y como senador (1865).

[45]No hay que descartar que la aparición del libro de Brioschi influyera en vacilación que pudo haber para aceptar la segunda edición de Spottiswoode, firmada en 1853 y publicada en 1866.

> *determinants*— son las únicas obras a las que se puede recurrir quien se encamina hoy al estudio de esta teoría. No estimamos pues inoportuna la publicación de un nuevo libro sobre el tema. [**?**, pp. iv-v].

Con este ánimo, Brioschi elaboró su contribución a la difusión de la teoría de determinantes siguiendo el siguiente índice:

I. Definiciones y notaciones (p. 1)
II. Leyes de formaciones de determinantes (p. 2)
III. Propiedades generales de los determinantes (p. 4)
IV. De la resolución de las ecuaciones algebraicas lineales (p. 12)
V. Multiplicación y elevación a potencias de los determinantes (p. 21)
VI. Determinantes y elementos recíprocos, o determinantes de determinantes (p. 34)
VII. De las propiedades de los determinantes menores (p. 44)
VIII. Determinantes antisimétricos y determinantes simétricos (p. 55)
IX. De los determinantes de las raíces de las ecuaciones algebraicas, y de los determinantes de las integrales particulares de las ecuaciones diferenciales lineales (p. 73)
X. Determinantes de funciones (p. 84)
XI. Determinantes de Hesse (pp. 106-116)

A la vista de este índice parece un libro muy similar al de Spottiswoode, pero en realidad no lo es tanto, su enfoque es bien diferente y bastante divergente de la segunda edición del autor inglés. Brioschi se comporta como un matemático aplicado al que interesan más las aplicaciones de los determinantes que la construcción precisa de su teoría, expuesta a modo de explicación general convincente, pero sin precisión en los enunciados y las demostraciones de las propiedades fundamentales. Al tratarse de un libro dirigido hacia las aplicaciones no utiliza la notación tipo Vandermonde sino la de los a_{ij} más usual en los diversos campos matemáticos. Se trata por tanto de un libro elemental en cuanto al desarrollo teórico y abundante en los que a exponer aplicaciones se refiere.

A manera de ejemplo, nos fijaremos en el tratamiento que Brioschi da al teorema del producto en la sección V. Realmente no enuncia ni demuestra dicho teorema, sino que justifica la "fórmula" $R = PQ$ usando para hacerla verosímil los sistemas de ecuaciones a la manera de Spottiswoode, indicando que

> ...es manifiesto como los elementos constituyentes de una misma línea del producto resultan de la suma de los productos de los elementos de una fila del determinante P por los elementos de las diversas filas del factor Q.

Vemos pues que Brioschi cae también en la obsesión por el producto fila-fila, aunque los sistemas que ha escrito antes le dan al componer el producto fila-columna. Para curarse en salud, añade a continuación de la cita que acabamos de recoger:

> Es evidente que el determinante producto se podrá obtener también siguiendo, cualquier multiplicación de los elementos de los determinantes factores, por columnas, o por fila y columna; en estos casos la forma del determinante producto no será más la de R, pero los valores de los determinantes serán idénticos. [45, p. 23]

Como ejemplo que explique esta ambigüedad, Brioschi escribe el producto de dos determinantes de orden 2 de las cuatro maneras posibles. Luego, empieza a extenderse en ejemplos de aplicaciones del producto de determinantes a diversos campos de la matemática. En un momento dado utiliza la expresión “teorema”, por única vez en esta sección[46], para enunciar, citando como fuente un trabajo Sylvester de 1852, que un determinante de la forma

$$\left|\begin{array}{c|c} a_{rs} & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right|,$$

obtenido orlando una matriz (a_{rs}) de orden n con una fila y columna de unos excepto un cero en la diagonal, es igual a un determinante del mismo tipo

$$\left|\begin{array}{c|c} A_{rs} & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right|,$$

en el que $A_{rs} = a_{rs} + h_r + k_s$, siendo h_r, k_s “dos series de cantidades del todo arbitrarias”. La demostración consiste en realizar el producto

$$\left|\begin{array}{c|c} I & k \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} a_{rs} & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline h & 1 \end{array}\right|,$$

donde I es la matriz identidad, k la columna de los k_s y h la fila de los h_r.

[46]Véase [45, pp. 28-29]. Pocos teoremas más hay en todo en libro, siendo en general aplicaciones sencillas de teoremas generales que no están enunciados con tal nombre, sino relatados en una exposición informal.

En la obra hay otros ejemplos de este tipo, los teoremas esenciales de la teoría de determinantes se suponen estudiados en las obras previas de las que ha dado cuenta en el prólogo, y en el libro de Brioschi están repasados en líneas generales; después, los que a veces enuncia como teoremas son resultados particulares de aplicación.

2.2.4 Libros consolidados c. 1860: Baltzer y Trudi

Entre los nuevos continuadores de Spottiswoode, nuestro interés se centra en la obra publicada por el italiano Trudi en 1862, porque fue la que Echegaray tradujo en España seis años después. No obstante, mencionaremos con brevedad las obras intermedias de Baltzer y Salmon, por su interés general o porque Trudi las tuvo presentes al escribir la suya.

R. Baltzer, 1857.

Teoría y aplicaciones de los determinantes, con indicación de las fuentes originales / Theorie und Anwendung der Determinanten. Mit Beziehung auf die Originalquellen dargestellt [24]

Para el desarrollo histórico de la teoría de determinantes, en la fase de su recepción por un público más amplio, esta obra presenta dos novedades principales que se complementan. Por una parte establece una separación entre la teoría, que expone primero, y las aplicaciones que se concentran en una segunda parte del libro, un esquema metodológico que seguirían obras posteriores. Las obras previas iban dando aplicaciones como ejemplos a lo largo de las secciones o mediante secciones de tal perfil aplicado intercaladas entre las más teóricas. La segunda novedad es que con Heinrich Richard Baltzer[47] (1818-1887) aparece manifiesta la intención del rigor en la exposición, una característica que va ganando fuerza a lo largo del siglo XIX, rigor que propone para la parte primera dedicada a la teoría. El autor justifica la división de su obra en dos, una dedicada a la teoría y otra a las aplicaciones, indicando que para la primera se requiere la demostración de los teoremas de la forma más precisa posible, mientras que en la segunda se trata de exponer aplicaciones a temas de álgebra, análisis y geometría, materias en las que el rigor corresponde a las

[47] Matemático alemán, fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias de Leipzig en 1864 y profesor de la Universidad de Giessen a partir de 1869.

obras dedicadas expresamente a ellas.

De este modo, Baltzer, desde el núcleo germánico influido por Jacobi, abarca y culmina una primera fase en la evolución del libro sobre determinantes producida en el entorno europeo, que se inició en Spottiswoode 1851, donde la teoría y las aplicaciones están equilibradas y entremezcladas. En Spottiswoode 1856, el autor británico mantuvo el carácter ecléctico del libro pero procurando una mejora de su rigor teórico, mientras que Brioschi 1854, sin variar sensiblemente el estilo mixto del libro, había sacrificado el porte teórico para enfatizar las aplicaciones. Baltzer abraza ambos aspectos, teoría y aplicaciones, y los separa en dos partes tratadas con el estilo expositivo que a cada una de ellas conviene, y dando a cada una de ellas la extensión que la pareció adecuada para una primera introducción al tema.

El libro de Baltzer , que tiene vi+129 páginas, se fue ampliando en las ediciones sucesivas (1864, 1870, 1875 y 1881)[48]. La primera edición fue traducida al francés en 1861 y la obra con toda su evolución y difusión, logró una amplia influencia a lo largo de tres décadas.

Baltzer empieza el prefacio con estas palabras[49]:

> El poderoso instrumento que el Álgebra y el Análisis emplean hoy bajo el nombre de *Determinantes* era, todavía hace pocos años, difícil de conocer con la ayuda de las únicas fuentes que entonces se podían consultar. Los grandes geómetras crearon este medio auxiliar a propósito de las altas especulaciones de las que se ocupaba su genio, y apenas consideraron recomponer la construcción de su edificio por consideraciones sobre los materiales y los instrumentos, de cuya solidez estaban perfectamente convencidos. [24, p. iii]

Como indica el propio título del libro y se señala con énfasis en el prefacio, el autor alemán presta atención a la historia de la materia. Señala que en su trabajo cita las fuentes originales como tributo a los primeros inventores de los métodos y autores de los teoremas, y para que sirva de elemento de estudio para la historia de la ciencia, y como invitación al estudio de las mismas. A lo largo de toda la obra no deja de indicar en notas a pie de página a quién corresponde la autoría de los diversos resultados que expone, ya

[48]Comentaremos la primera edición y algo diremos también de las siguientes, en las que llegó a recoger resultados de Weierstrass y Kronecker.

[49]Citaremos a Baltzer paginando por la primera edición alemana, pero para la traducción nos hemos ayudado de la versión francesa. Ambas están disponibles en formato digital en Gallica: `http://gallica.bnf.fr`.

sea en la parte de la teoría como en la de aplicaciones.

Baltzer es el primer autor de libro que menciona a Leibniz como iniciador de la teoría de determinantes:

> El primero que tuvo la idea de acudir en ayuda del álgebra mediante la formación de las sumas combinatorias llamadas hoy determinantes, fue el ilustre Leibniz, como ha notado Dirichlet. Pero, salvo la carta a L'Hospital de 28 de abril de 1693, donde Leibniz habla con convicción de la fecundidad de su idea, no se conoce ningún otro pasaje de donde se pueda concluir que Leibniz había buscado extraer nuevos frutos de este descubrimiento. [24, p. iii]

Luego continúa un recorrido histórico desde Cramer hasta Brioschi, indicando que el trabajo de Jacobi de 1841 no está diseñado para principiantes y que el de Spottiswoode goza de una ordenación adecuada de los temas y tiene una buena elección de ejemplos, pero contiene errores que reducen el valor de la obra. Sobre el "tratado" de Brioschi afirma lo siguiente:

> ... surgido de la necesidad generalmente sentida de una introducción elemental al conocimiento de los determinantes, aunque no sea siempre rigurosa en los principios, está sin embargo escrita con un perfecto conocimiento del tema, y contiene un rico tesoro de excelentes materiales. [24, p. iv]

A continuación indica que su libro se distingue del anterior por su diferente plan y diseño, que presenta de este modo:

> Para poner al descubierto en su mayor simplicidad el núcleo teórico de esta doctrina, he expuesto las principales propiedades de los determinantes y los algoritmos a los que sirven de base, en un tratado redactado con el rigor sintético, tal y como se encuentra en las obras de los geómetras de la antigüedad, y cuando ello me ha parecido necesario, he aclarado los principios mediante ejemplos sencillos. [...] Siempre he buscado con el mayor cuidado dar a los teoremas y a las demostraciones toda la precisión posible, allí donde parecía faltar todavía. [24, p. iv]

Con respecto a las notaciones afirma que ha elegido la más cuidadosa dentro de la gran cantidad existente, alguna de las cuales muestra. Pero se decanta por designar los determinantes por cuadros de números entre barras verticales, denotando sus elementos en la forma $a_{i,k}$, con una coma entre los índices que más adelante sería eliminada. En ocasiones le resulta cómodo y breve usar la notación de Cauchy para hacer frases como "sea $R = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ un determinante".

El prefacio termina con agradecimientos "para la bondad con que mi sabio amigo Borchardt me ha apoyado en mi trabajo por las muchas informaciones que le debo". Borchardt conecta a Baltzer con Jacobi, pues fue uno de sus estudiantes distinguidos y uno de los que le acompañaron en su viaje a Italia en 1843.

Tras el prefacio, el libro inicia su tarea con esta distribución de las materias a tratar:

	TEORÍA DE DETERMINANTES
I.	División de las permutaciones de elementos dados en dos clases
II.	Determinante de un sistema de n^2 elementos
III.	Los términos de un determinante ordenado siguiendo los elementos de una misma línea
IV.	Descomposición de un determinante en una suma de productos de determinantes parciales
V.	Determinantes ordenados siguiendo los productos de los elementos de dos líneas que se cortan
VI.	Productos de determinantes
VII.	Los determinantes de sistemas adjuntos
VIII.	El determinante de un sistema de elementos en el cual los elementos correspondientes ($a_{i,k}$ y $a_{k,i}$) son iguales y de signo contrario
	APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES
IX.	Resolución de un sistema de ecuaciones lineales
X.	Teoremas sobre las ecuaciones diferenciales lineales
XI.	Resultante de dos ecuaciones algebraicas
XII.	Productos de todas las diferencias de varias cantidades dadas
XIII.	Los determinantes funcionales
XIV.	Teoremas sobre las funciones homogéneas
XV.	Las sustituciones lineales y en particular las sustituciones ortogonales
XVI.	Área de un triángulo y volumen de un tetraedro
XVII.	Sobre los productos de áreas de triángulos y volúmenes de tetraedros
XVIII.	Relaciones poligonométricas y poliedrométricas

Las dos partes están bien definidas, y queda claro que, como Spottiswoode y Brioschi, Baltzer da preferencia a las aplicaciones, pues de las dieciocho secciones[50] que componen la obra, ocho pertenecen a la primera parte, que ocupa 34 páginas, mientras que la segunda sobre las aplicaciones abarca las diez secciones restantes con un total de 95 páginas. En las aplicaciones Baltzer no se limita a indicar el uso que se hace de los determinantes en los temas seleccionados, sino que expone la materia correspondiente de modo bastante completo.

Basta observar el índice de la segunda parte para apreciar la amplia gama de aplicaciones que Baltzer presenta al álgebra, el análisis y la geometría. En cuanto a álgebra, incluye en primer lugar, como no podía ser menos, los sistemas lineales, dando la regla de Cramer y la discusión cuando el determinante se anula. El otro tema algebraico es la resolución de dos ecuaciones algebraicas de grados m y n, que incluye las propuestas de Euler y Bézout junto con aportaciones recientes de Sylvester y Hesse. Aquí aparecen los determinantes de orden $m+n$ obtenidos copiando en varias filas los coeficientes de las ecuaciones desplazándolos y dejando triángulos de ceros en los laterales. Los temas de análisis incluyen todo lo referido a los wronskianos (nombre que no había sido acuñado) jacobianos y hessianos. En cuanto a la geometría, los cambios de coordenadas están presentes, en particular los ortogonales, y dedica un amplio espacio a las fórmulas de von Staudt relativas a la geometría métrica del espacio respecto a un triedro de referencia no ortogonal.

En cuanto a las aplicaciones, nos limitaremos a estas someras indicaciones, pues fieles al plan que tenemos trazado, prestaremos atención detallada tan sólo a la contribución de Baltzer a la exposición de la teoría general de determinantes.

Como ya hiciera en su día Cauchy, Baltzer inicia su libro con una primera sección dedicada al estudio de las permutaciones y su clasificación en dos clases. En la sección II fija notacionalmente un "sistema" rectangular de elementos y para el caso cuadrado define su determinante de este modo:

> Se entiende por *determinante de un sistema de* n^2 elementos, dispuestos sobre n líneas de n elementos cada una, y representados por $a_{i,k}$, i, k tomando cada uno los valores $1, 2, \ldots, n$, la suma de productos de estos elementos tomados de n en n, de manera que no haya dos en el mismo producto que pertenezcan sea a la misma línea horizontal, sea a la misma línea vertical. El primer término del determinante es el

[50]Las secciones van con numeración romana y cada una de ellas se divide a su vez en apartados listados con numeración arábiga.

> producto de los elementos de la diagonal,
>
> $$a_{1,1}\, a_{2,2}\, \ldots\, a_{n,n}.$$
>
> Del primer término se deducen todos los otros, dejando los primeros índices invariables y permutando los segundos. Se toma cada término positivamente o negativamente, según que la permutación de los índices que ha servido para formarlo pertenezca o no pertenezca a la misma clase que la primera alineación de los índices. [24, p. 5]

Tras la definición añade algunos comentarios y enuncia, sin necesidad de destacar el resultado como un teorema, que cambiando líneas por columnas se obtiene el mismo determinante. Como primer teorema figura que el cambio de dos líneas paralelas cambia el signo del determinante y que éste se anula si tiene dos líneas iguales. Completan la segunda sección dos teoremas más que muestran ejemplos de cálculo fácil, parcial o total del determinante. El primero se refiere a un determinante con una línea de elementos nulos excepto uno, y el segundo a un determinante con ceros bajo la diagonal principal.

La sección III nos parece clave para definir el nuevo estilo del libro. Está dedicada a desarrollar las primeras propiedades de los determinantes en los diversos frentes de la teoría, incluyendo las consideraciones diferenciales sobre los mismos desarrolladas principalmente por Jacobi y un teorema relativo a sumas nulas de productos de menores. Se inicia con el desarrollo de un determinante R por los elementos de una línea, que Baltzer escribe de la forma

$$R = a_{i,1}\alpha_{i,1} + a_{i,2}\alpha_{i,2} + \ldots + a_{i,n}\alpha_{i,n},$$

sin determinar, de momento, cómo sean los factores α. Prueba que una expresión análoga a la anterior con elementos $\alpha_{k,j}, k \neq i$, se anula. Como consecuencia de este teorema deduce de modo inmediato las propiedades de linealidad del determinante y calcula los $\alpha_{i,k}$ como determinantes menores afectados de signo. Luego expresa los $\alpha_{i,k}$ como derivadas parciales de R respecto a los $a_{i,k}$, expone el significado de las derivadas parciales sucesivas, etc. Se apoya en las relaciones diferenciales para obtener primeras propiedades de los determinantes simétricos y antisimétricos, a los que dedicará una sección específica al final de la primera parte. También da un primer apunte sobre los determinantes wronskianos (sin usar este nombre) a los que volverá con más extensión en las aplicaciones. En el último teorema de la sección considera el determinante R desarrollado como antes por los elementos de la última fila, con lo cual se tiene (por el primer teorema de la sección)

$$0 = a_{i,1}\alpha_{n,1} + a_{i,2}\alpha_{n,2} + \ldots + a_{i,n}\alpha_{n,n}, \ i \neq n.$$

Dado otro determinante B de orden $n-1$, se forman n nuevos determinantes B_i reemplazando la primera vertical de B por la vertical i-ésima de R tomada excepto el último elemento. Baltzer prueba entonces que

$$\alpha_{n,1}B_1 + \alpha_{n,2}B_2 + \ldots + \alpha_{n,n}B_n = 0.$$

Este teorema es un buen ejemplo del grado de elaboración que va alcanzando la exposición sistemática de la teoría. Baltzer explica en las notas históricas, con todas la referencias precisas, que ejemplos de este tipo de igualdades hay en Bézout y en Vandermonde, que Monge y otros habían dado fórmulas de geometría que responden a este esquema, que el teorema es un caso particular de uno más general de Sylvester, y que Faá di Bruno dio una demostración sencilla del mismo.

Las secciones IV y V están dedicadas exponer las diferente maneras de expresar un determinante[51]. En la primera de ellas se da el teorema que generaliza el desarrollo de Laplace y que tan relevante fue para Spottiswooode. En la sección VII se ocupa de los determinantes cuyos elementos son a su vez determinantes, en particular del cálculo del determinante de los adjuntos de un determinante dado. La última sección de la primera parte está dedicada a los determinantes antisimétricos.

Para terminar, prestaremos un poco de atención al tratamiento dado por Baltzer al producto de determinantes en la sección VI. Comienza, a la manera de Cauchy, multiplicando fila- fila dos sistemas rectangulares $a_{i,k}$, $b_{i,k}$ de la misma dimensión, n filas y p columnas, con los que resulta un sistema cuadrado $c_{i,k}$ de orden n cuyo determinante R calcula en la forma

$$R = \Sigma PQ,$$

donde P recorre los determinantes formados con n líneas del primer sistema y Q los del segundo correspondientes a las mismas líneas. Cuando $n = p$ esto da un sólo producto $R = PQ$ y resulta igual a cero cuando $p < n$. La demostración consiste en tomar la expresión definitoria del determinante R e ir agrupando términos convenientemente. Después de

[51]La sección IV es muy breve y fue suprimida en las ediciones siguientes, que tienen una sección menos.

unos ejemplos, Baltzer explica que en el caso cuadrado el producto se puede obtener de cuatro maneras combinando filas y columnas. Finalmente, siguiendo con el caso cuadrado, prueba que la fórmula del producto se conserva al pasar a los sistemas adjuntos.

Más adelante dedicaremos un apartado a las ediciones sucesivas del libro de Baltzer y a la presencia en ellas de resultados debidos a Kronecker.

G. Salmon, 1859.

Lessons introductory to the modern higher algebra [310]

Incluimos esta obra sólo para dejar constancia de que los determinantes fueron apareciendo también como un tema a tratar en libros de álgebra[52]. El matemático irlandés George Salmon (1819-1904), famoso por sus diversos libros de texto de nivel superior de álgebra y geometría, escribió esta obra de éxito, traducida al alemán en 1863 y al francés en 1868. Antes de esta traducción ya había tenido la segunda edición en inglés, de 1866 y bastante ampliada, a la que siguieron otras en 1876 y 1885. En los libros de geometría de Salmon aparecen aplicaciones de los determinantes.

La primera edición se compone de 17 lecciones de las cuales las tres primeras están dedicadas a los determinantes, en las que presenta la definición y las propiedades básicas. Manifiesta haber usado como referencia las obras de Spottiswoode, y la traducción francesa del libro de Brioschi. En la segunda edición aparecen seis lecciones dedicadas a los determinantes, indicando que cuatro o cinco de ellas estaban preparadas desde hacía un año o dos, porque había tenido la intención de publicar de forma separada unas lecciones sobre determinantes, antes de conocer el libro de Baltzer.

N. Trudi, 1862.

Teoria de determinanti e loro applicazioni [343]

Esta obra no tiene la importancia de la de Baltzer en la historia general de los determinantes, pero, en relación con la matemática española, tiene la importancia capital que le da el hecho de que es la vía por la que los determinantes fueron conocidos y difundidos

[52]Un estudio más completo de este grupo de obras llevaría necesariamente a considerar los libros de álgebra de Serret, que recorrió con sus diversas ediciones buena parte de la segunda mitad del siglo XIX, y al finalizar el siglo, de la obra de Weber.

en España, gracias a la traducción que de este libro hizo J. Echegaray, como veremos en el capítulo siguiente.

La opinión de Muir sobre esta obra se condensa en estas líneas:

> Este libro tiene un alcance similar al de Brioschi y Baltzer, pero dirigido a lectores menos avanzados. Las explicaciones son más completas, tiene numerosos ejemplos, los teoremas menos simples están divididos para una gradual absorción, y las deducciones que son evidentes están enunciadas formalmente. [266, p. 8]

Este juicio da una imagen adecuada de la obra, que quedará completada con los comentarios que van a seguir. La característica a destacar respecto a los "numerosos ejemplos" debe entenderse referida a los de tipo numérico, acorde con la pretensión pedagógica de la obra.

El libro sigue el diseño metodológico de Baltzer, pero con las modulaciones pedagógicas que introdujo el autor italiano. Está constituido por un prefacio y dos partes, once secciones dedicadas a la teoría y diez a las aplicaciones de los determinantes, con un total de xii+268 páginas, algo más de la mitad dedicadas a las aplicaciones. Cada sección está a su vez dividida en parágrafos enumerados de manera consecutiva a lo largo de todo el texto.

Nicola Trudi (1811-1884)[53] inicia el prefacio diciendo

> Las aplicaciones de los *determinantes* a importantes cuestiones de análisis, de geometría y de mecánica, que por todas partes y desde hace muchos años estaban siendo publicados por los doctos en las Actas de las Academias, y en las revistas científicas, nos hacen desear que la parte elemental de la teoría de estas interesantes funciones pase al campo de la instrucción ordinaria, a fin de poner a la juventud estudiosa en situación de conocer y seguir los progresos de la ciencia. [343, p. v]

Trudi asigna a Jacobi 1841 la cualidad de ser el primer "libro sobre este tema", mencionando después el texto de Spottiswoode 1851, del que destaca, más que sus cualidades teóricas, que "ofrece una colección de propiedades y aplicaciones de los determinantes". Luego se extiende en halagos hacia Brioschi:

[53]Fue nombrado profesor en la Escuela de Marina de Nápoles en 1850 y un año después, obtuvo la cátedra de cálculo infinitesimal en la Universidad de Nápoles.

> El libro de Brioschi fue para la ciencia un señalado beneficio; y su aparición significa, por así decirlo, en Italia *la época de transición del viejo al nuevo estilo*: de lo que es prueba no sólo el favor con que fue generalmente acogido por los doctos, sino el fervor con el que era buscado por la juventud estudiosa. [343, p. vi]

No obstante, Trudi indica que la obra de Brioschi sobre determinantes, especialmente en la parte teórica, iba dirigida a los jóvenes ya introducidos en la ciencia, mientras que la que él mismo llevaba un tiempo madurando y elaborando tenía una alcance más elemental. Durante el proceso, sigue diciendo, aparecieron los libros de Baltzer y Bellavitis[54], que también quedaban lejos de su deseo de atender a la enseñanza "absolutamente elemental". Este carácter elemental significa para Trudi que no ha de faltar "casi ninguna de las proposiciones esenciales de los determinantes" y que sus demostraciones deben ser "claras, y a un tiempo rigurosas y generales", pero evitando que dependan de la forma "simbólica y concisa" de representar los determinantes, prefiriendo que aparezcan en "forma explicada". De este modo el libro de Trudi se extiende en páginas sin ganar contenido respecto a otros. El enfoque claramente pedagógico de su obra exime a Trudi, así lo manifiesta en el prólogo —en lo que parece ser una alusión implícita a Baltzer— de "citar los nombres de autores a los que se deben las propiedades de los determinantes, o que han mejorado su demostración, o que han hecho importantes aplicaciones"; no obstante, cierra el prólogo con una nota a pie de página indicando los nombres, sin citar obras ni fechas, de los principales protagonistas[55].

Es hora ya de avanzar el índice del libro de Trudi, con sus dos partes, como vimos en el de Baltzer, pero menos variado que éste en aplicaciones:

TEORÍA DE DETERMINANTES

I. Inversiones en las permutaciones (p. 1)
II. Nociones en torno a las matrices rectangulares y cuadradas (p. 5)
III. Primeras nociones en torno a los determinantes, y a los determinantes menores y complementarios (p. 12)

[54] Se trata del trabajo *Sposizione elementare della teorica dei determinante* de Giusto Bellavitis (1803-1880) publicado en Memorie dell' I. R. Istituto Veneto di scienze lettere ed arti 7 (1857), 67-144.

[55] Afirma Trudi que las "primeras trazas" se encuentran en los trabajos de Leibniz, Cramer, Vandermonde y Bézout, que pasos más amplios dieron Lagrange, Gauss, Cauchy, Binet y Jacobi, y que "entre los más recientes promotores hay que mencionar a Sylvester, Cayley, Salmon, Boole, Robert, en Inglaterra; Borchardt, Hesse, Joachimsthal, Kummer, Eisenstein, Aronhold, Baltzer en Alemania; Hermite en Francia; y entre los italianos Brioschi, Betti, Bellavitis, Tortolini, Genocchi, Mainardi, Faá di Bruno, Cremona, Padula, Battaglini, Rubino, Sannia y Janni".

Sobre este temario de la obra completa, aún señaló el autor en el prólogo un programa mínimo con “lo que verdaderamente interesa en una primera instrucción”, dejando el resto para un aprendizaje cíclico a través de segundas lecturas o estudios posteriores. Dicho programa mínimo lo estableció Trudi considerando las secciones I a VI y la IX de la primera parte y, de la segunda, simplemente las secciones primera y última.

Como Baltzer, siguiendo una tradición que se remonta a Cauchy, Trudi dedica la primera sección a explicar las permutaciones. En la segunda tan sólo introduce terminología sobre los rectángulos de cantidades, a los que denomina “matrices”, siendo dichas cantidades los “elementos” de la matriz, que están dispuestos en líneas “horizontales” y “verticales” [343, p. 6]. Como otros autores anteriores, pero con más detalle en las descripciones, Trudi comenta las diversas maneras de expresar los determinantes. Empieza escribiendo la matriz (a la que también coloca barras verticales) con letras distintas

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & p \\ q & r & s & t & u \end{vmatrix}$$

y explicando la notación de Vandermonde en estos términos:

> 12. Como cada elemento pertenece a la vez a una horizontal y a una vertical, resulta que para individualizar un elemento de la matriz basta indicar el número de orden de su horizontal y de su vertical. Entonces para representar de una manera general el elemento que pertenece a la r^{ma} horizontal y a la s^{ma} vertical suele adoptarse el símbolo (r, s), y los dos números r y s se llaman *índices* del elemento, un *índice de horizontales*, el otro *índice de verticales*, o simplemente *primero y segundo índice.* [343, p. 6]

Como apoyo aplica la descripción a la matriz anterior escribiendo

$$\begin{array}{ccccc} a = (1,1), & b = (1,2), & c = (1,3), & d = (1,4), & e = (1,5) \\ f = (2,1), & g = (2,2), & h = (2,3), & i = (2,4), & j = (2,5) \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Pero finalmente se decanta por denotar a los elementos de la matriz, como Baltzer, $a_{i,j}$, manteniendo una coma entre los índices. En la sección V decide suprimir la coma para simplificar la notación, aunque a veces se olvida de hacerlo en lo sucesivo.

En la sección III define el determinante como suma algebraica de productos de elementos, para deducir enseguida que el determinante no cambia se se cambian "horizontales en verticales y viceversa". En general escribe los determinantes en forma de cuadro, pero a veces usa la notación abreviada de Cauchy para referirse a ellos. El enunciado exacto de la definición es el siguiente:

> 19. Se llama *determinante* a la suma algebraica de todos los productos que se pueden obtener multiplicando de n en n los elementos de una matriz cuadrada de grado n tomados en horizontales y verticales distintas, y dando a cada producto el + o el −, según que las dos permutaciones correspondientes de horizontal y vertical sean de la misma clase o de clase diferente, o en otras palabras, según que el número total de inversiones es par o impar. [343, p. 12]

Muir destaca de esta definición que es la primera vez que se determina el signo usando ambas permutaciones, no considerando que unos índices están en el orden natural y es la permutación de los otros la que aporta la paridad.

En la sección III también se ocupa de los menores a los que asigna un número llamado 'característica", que es la suma de los índices de las horizontales y verticales que lo forman, de modo que la suma de la característica de un menor y la de su complementario en un determinante de orden n suman $2(1+2+\ldots+n)$, así que son de la misma paridad. En particular, la característica de un elemento $a_{i,j}$ es $i+j$. La característica es utilizada para dirimir cuestiones de signo en manejo algebraico de los menores. Así lo hace ya en el primer resultado que ofrece sobre menores, del que dice

> puede tenerse como el fundamento de la teoría de los determinantes. [343, p. 18]

El teorema, que expone con claridad a su modo discursivo, es el siguiente:

> El producto de un determinante menor por su complemento algebraico es una parte del primitivo. [343, p. 19]

Este resultado le da pie a entrar en la sección IV exponiendo la expresión de un determinante por los elementos de una línea. Siguen los resultados asociados a las propiedades de linealidad, utilizando el término "polinomio" para indicar una suma de números con signo[56]. De las propiedades lineales Trudi concluye que

> Un determinante no cambia de valor si a una línea se suma o resta otra línea del mismo tamaño, aunque esté multiplicada o dividida por una cantidad arbitraria. [343, p. 29]

Este resultado es aprovechado por el autor para calcular un determinante numérico haciendo ceros por combinación lineal de líneas y también para calcular algunos determinantes especialmente configurados, en particular de tipo Vandermonde. Que con este avance de la teoría haya llegado a la página 35 da idea de la anunciada "forma explicada" que iba a tener su libro debido a su intención pedagógica.

En la sección V retoma el teorema anterior sobre el producto de un menor y su complemento para deducir con sencillez el desarrollo de Laplace —al que no da este nombre—

[56]Esta terminología entrará en España y llegará a ser usada en este contexto incluso entrado el siglo XX. En cambio, el uso de "característica" en el sentido de Trudi se perderá.

y lo usa para calcular determinantes con bloques de ceros. Este resultado lo enuncia y demuestra en "forma explicada" y luego introduce la simbología necesaria para traducirlo "en fórmulas". Algo similar hace con el teorema del producto en la sección VI. Primero demuestra que multiplicando por horizontales dos determinantes P y Q de igual orden obtiene un determinante $K = PQ$. La prueba es la misma de Baltzer, pero explicada minimizando el uso de simbología. No deja de explicar que el determinante final no cambia si el producto se realiza mediante otra combinación de filas y columnas. Luego extiende el resultado al determinante obtenido como producto de matrices rectangulares de las mismas dimensiones. Finalmente estudia cómo los menores del producto K son productos de matrices parciales de P y Q, terminando con este teorema:

> El complemento algebraico de un elemento cualquiera $c_{r,s}$ del producto de dos determinantes equivale a la suma de los productos de los complementos algebraicos de los elementos de la r^{ma} horizontal del multiplicador por los complementos algebraicos de la s^{ma} horizontal del multiplicando. [343, p. 50]

La sección VII es de nuevo típica, considerando el determinante como función de sus elementos considerados como variables independientes. Las derivadas parciales primeras son los adjuntos de los elementos y Trudi da también el resultado con derivadas de orden superior: cada derivada parcial respecto a elementos de distinta fila y columna es el complemento algebraico correspondiente. Termina tratando el caso en que los elementos del determinante son a su vez funciones de otra variable, en particular el determinante wronskiano[57]

$$X = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_{1,1} & y_{2,1} & y_{3,1} & \cdots\cdots & y_{n,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & y_{3,2} & \cdots\cdots & y_{n,2} \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & y_{3,n-1} & \cdots\cdots & y_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

donde las y_j son funciones y cada una lleva debajo sus sucesivas derivadas.

En la sección VIII Trudi recoge algunos resultados que se refieren a diversas formas de expresar determinantes. Con el nombre de "transformaciones" se refiere simplemente a cambiar la forma de expresar algo. Expone cuatro transformaciones:

1. *Descomposición de los determinantes en otros que tienen nulos los elementos prin-*

[57] Al igual que Baltzer, Trudi no utiliza este nombre.

cipales

2. *Desarrollo de un determinante según la potencia de una parte común a todos los elementos principales*

3. *Desarrollo de un determinante según los productos de los elementos de dos líneas de nombre distinto*

4. *Una transformación del producto de dos determinantes*

Lo que Trudi refiere como determinante "recíproco" en la sección IX es lo que Baltzer llamó determinante "adjunto", nombre habitual también hoy. Fiel a su gusto por calcular menores, Trudi no sólo da la expresión, bastante inmediata de obtener, del determinante recíproco como potencia del primitivo, sino que prueba, lo que es más laborioso, la versión de la relación anterior para los menores:

> En el recíproco todo menor de grado m equivale al complemento algebraico de su homólogo en el primitivo, multiplicado por la potencia $(m-1)^{\text{ma}}$ del mismo primitivo. [343, p. 67]

Cuando Trudi escribe "equivale" se refiere a una proporcionalidad, en este caso dada sólo por un signo. Para la determinación del signo utiliza la "característica" que definió para cada menor, con la cual da una regla para obtener el signo que, afirma, "es mucho más simple que la ordinaria", refiriendo en nota a pie de página a la sección VII (apartado 2) del libro de Baltzer [24, p. 27] para ver cómo se procede en la regla "ordinaria".

La sección X es estándar en el tratamiento de las propiedades especiales de los determinantes simétricos, antisimétricos ("gobbi simmetrici" en la terminologia de Trudi) y disimétricos ("gobbi")[58] Trudi justifica la inclusión de esta sección porque estas tres especies de determinantes "son de gran interés en las aplicaciones", pero en las que él presenta en la segunda parte sólo aparecen los determinantes simétricos. Aquí podemos observar también la naturaleza de la relación de esta obra con la de Baltzer[59], pues tras demostrar Trudi el teorema que sigue añade la observación que se indica:

> Todo determinante semisimétrico de grado par, es el cuadrado de una función entera y racional de sus elementos. [...]

[58]Estos últimos son como los antisimétricos pero sin obligar a que se anule la diagonal principal (llamados también «gauches »).

[59]Se va a referir a lo que aparece en Baltzer §5, para determinantes simétricos p. 34.

> Aunque la demostración que hemos dado del teorema precedente es simplísima y clara, también encontramos oportuno exponer otra debida al Sr. Baltzer, modificada ligeramente. [343, p. 81]

La última sección de la parte teórica, la sección XI, está también vinculada a las aplicaciones, esta vez a las de tipo algebraico, pues los determinantes de dos escalas surgen en la teoría general de la eliminación. Estos determinantes ya aparecieron en las obras de Brioschi y Baltzer, pero no merecieron en ellas tener un apartado propio como elemento básico de la teoría. En su apartado sobre sistema lineales Brioschi incluye tres aplicaciones, la segunda de las cuales es obtener el determinante resultante de dos ecuaciones de grado tres con dos variables por el "método dialítico" de Sylvester, en el que aparecen determinantes de dos escalas. Por su parte, Baltzer trata este tema en la sección III de la segunda parte del libro, dedicada a las aplicaciones.

Estos determinantes son denotados por Trudi en la forma

$$\begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_s \end{vmatrix},$$

con lo que indica que se trata de un determinante dividido en dos franjas o "escalas" horizontales, la primera $(a_0)_r$ formada por r y la segunda $(b_0)_s$ por s filas. La primera escala se dice "directa" porque su primera fila es de la forma

$$a_0, a_1, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0$$

la segunda $0, a_0, a_1, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0$ y sigue el desplazamiento hasta la r-ésima $0, 0, \ldots, 0,$ $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Por su parte la segunda es "inversa" por tener una geometría similar invirtiendo la colocación de los ceros: la primera fila es de la forma

$$0, 0, \ldots, 0, b_0, b_1, \ldots, b_n$$

la segunda $0, 0, \ldots, 0, b_0, b_1, \ldots, b_n, 0$ y sigue el desplazamiento hasta la s-ésima $b_0, b_1, \ldots, b_n,$ $0, 0, \ldots, 0$. De este modo el determinante tiene orden $m + r = n + s$. El estudio de estos determinantes, que es un tema de complejidad técnica, consiste en proponer métodos para calcularlos con la mayor eficacia posible.

Las dos últimas secciones nos dan pie a entrar en la segunda parte del libro dedicada a las aplicaciones de los determinantes. Como no podía ser menos por razones históricas, la primera sección de esta parte se dedica a los sistemas algebraicos lineales, tratado de modo muy similar al de Baltzer, como veremos en la sección siguiente. Además de esta primera sección, que puede considerarse obligatoria, la mayor parte de las aplicaciones ofrecidas por Trudi pertenecen al álgebra y a su asociada la teoría de invariantes, con los hessianos de funciones homogéneas estudiados en la sección VIII . La breve sección VI es de análisis matemático, se ocupa de lo básico sobre el determinante jacobiano. La última sección dedicada a geometría es un breviario de curso de geometría analítica del plano y del espacio, incluyendo la curvatura de curvas y superficies, indicando cómo las diversas relaciones o los conceptos puede ser expresados mediante determinantes[60]. Los últimos resultados que ofrece son los siguientes[61]:

> Una línea de grado m tiene en general $3m(m-2)$ puntos de inflexión. [...]
>
> Si es nulo el Hessiano de una función homogénea u de grado m con tres variables, la ecuación $u = 0$ representa un haz de m rectas. [...]
>
> Si u denota una función homogénea u de grado m con cuatro variables, y sea v el Hessiano de u, la línea de inflexión de las superficie $u = 0$ resultará de la intersección con la superficie$v = 0$, que es de grado $4m(m-2)$.
>
> Y cuando el Hessiano v es idénticamente nulo, la ecuación $u = 0$ expresará una superficie cónica. [343, pp. 267-268]

Una vez realizada la descripción del libro de Trudi, dado que el autor italiano nos abre la puerta a la entrada de los determinantes en España, podríamos dar por terminado nuestro recorrido por los primeros libros especializados en la materia de los determinantes. No obstante, antes de abandonar este tema, dedicaremos una pequeña atención a las ediciones sucesivas del libro de Baltzer, con aportaciones de Kronecker, y mencionaremos algunas otras obras de las décadas finales del siglo XIX.

[60] Este tipo de formulación de la geometría puede verse en le libro de F. Padula (1815-1881), *Investigaciones de geometría analítica* (1864) [276].

[61] Trudi es muy parco en la atribución de resultados, pero afirma que el primero de ellos se debe a Plücker.

Baltzer posteriores y Kronecker.

En la segunda edición del libro de determinantes de Baltzer (1864) comenzó a verse la influencia de Leopold Kronecker (1823-1891). Sabido es que este gran matemático alemán, doctorado en 1845 bajo la dirección de Dirichlet, no vivía profesionalmente de la universidad, pero cuando en enero de 1861 ingresó en la Academia de Ciencias de Berlín le correspondió como académico el derecho a impartir cursos en la Universidad de Berlín, lo que hizo desde octubre de 1862. Sus cursos estaban dedicados principalmente a poner orden y mejorar teorías que habían tenido un reciente desarrollo, alcanzaron justa fama y fueron difundidos por sus discípulos. Una buena parte de ellos estuvo dedicada a los determinantes y sus aplicaciones, quedando recogida en una obra póstuma, *Conferencias sobre la teoría de los determinantes / Vorlesungen über die Theorie der Determinanten* editada por Kurt Wilhelm Sebastian Hensel (1861-1941) en 1903 [227], de la que algo diremos más adelante.

Ahora es más oportuno mencionar un artículo que Kronecker publicó en 1870 en el *J. de Crelle*, titulado *Observaciones sobre la teoría de determinantes / Bemerkungen über Determinanten-Theorie* [225], que es un extracto de la correspondencia que mantuvo con Baltzer enviándole comentarios sobre los temas tratados en el libro. En las modificaciones que el autor iba introduciendo en las sucesivas ediciones de su obra aparecen algunas atribuidas al profesor de Berlín. El contenido de las *Observaciones* es el siguiente:

> Teorías generales relativas a un único determinante. Reducción y cálculo. Matrices. Tetraedros; centros de gravedad; alturas, volumen, etc. Eliminación de una incógnita entre dos ecuaciones. Formación de la resultante; condición para que dos ecuaciones tengan varias raíces comunes. sistemas diversos de coordenadas en el plano, sobre la esfera, sobre una superficie cualquiera y en el espacio. [225]

En este índice se aprecia que buena parte de las contribuciones se refieren a las aplicaciones a cuestiones de álgebra y geometría, pero también alguna es específica de la teoría de determinantes. Mencionaremos una de ellas por ser la primera vez que Kronecker aparece citado en el libro de Baltzer como su correspondiente, y también porque muestra cómo Baltzer iba incorporando a su libro sucesivas mejoras producidas por Kronecker en sus cursos.

En el prólogo de la segunda edición explica Baltzer que gracias al éxito de la primera edición ha podido preparar otra incorporando resultados nuevos de los últimos años pero manteniendo el "carácter elemental del libro". Destaca los añadidos sobre determinantes parciales (tema en el que sigue a Kronecker) y sustituciones lineales (aquí influido por Weierstrass)[62].

El resultado sobre determinantes que Baltzer incorpora en la segunda edición de su libro, capítulo cuarto (§4.7), que llamaremos "lema 1 de Kronecker", es el siguiente[63]:

> Cuando un sistema de n^2 elementos $a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ son tales que un determinante parcial de grado m, por ejemplo $p = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{m,m}$, es no nulo, mientras que se anulan los $(n-m)^2$ determinantes parciales de grado $m+1$ de la forma
>
> $$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,m} & a_{1,k} \\ . & \ldots & . & . \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,m} & a_{m,k} \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,m} & a_{i,k} \end{vmatrix} = b_{1,i}a_{1,k} + \ldots + b_{m,i}a_{m,k} + pa_{i,k},$$
>
> donde los números i y k varían de $m+1$ a n, entonces también se anulan todos los determinantes parciales de orden $m+1$ y de orden superior. [26, p. 60 2ª ed.]

Este resultado, que indica que una vez que se dispone de un menor de orden m no nulo, para saber que todos los de orden mayor se anulan basta verificarlo con $(n-m)^2$ de ellos orlados al anterior, es importante como paso previo al establecimiento, sucedido unos años después, de la noción de característica o rango de una matriz.

En la tercera edición del Baltzer (1870), el lema 1 de Kronecker apareció en unos términos diferentes. Fue también en 1870 cuando se publicó el artículo *Observaciones* de Kronecker referido a sus cartas con Baltzer[64]. Aunque *Observaciones* se divide en cuatro partes, aquí nos ocuparemos sólo de la muy breve primera de ellas, dedicada al que llamaremos "lema 2 de Kronecker"[65]. Allí dice el autor que, en lugar de lo que le comunicó a Baltzer y éste publicó en la segunda edición de su obra, va a exponer un teorema más general que ha explicado en "sus conferencias en la universidad local en el invierno de 1864".

[62] Además agradece a sus amigos Borchardt y Kronecker "su apoyo en múltiples facetas" y explica que la obra se edita en el formato de la traducción francesa de Hoüel, 1861, porque es más manejable. Finalmente, desea que el libro "incluso sirva para hacer amigos".

[63] En nota a pie de página afirma Baltzer que este lema es una comunicación escrita de Kronecker fechada en marzo de 1864.

[64] En la reseña de este artículo la revista se llama *J. de Borchardt*. Cuando falleció August Leopold Crelle (1780-1855), Carl Wilhelm Borchardt (1817-1880) le sustituyó al frente de la revista y ésta llevó su nombre durante un tiempo, luego recuperó el de su fundador.

[65] Las partes de *Observaciones* son: I(pp. 152-153) Lema de Kronecker. II(pp. 154-158) Determinantes funcionales. III y IV(pp. 159-170-175) Geometría. *Observaciones* fue reseñado por Stolz en *Jahrbuch*.

Kronecker considera n^2 elementos a_{ij} dispuestos en cuadro y llama d al determinante menor de orden $m < n$ sobre la diagonal principal. Para cada elemento a_{ij}, llama d_{ij} al determinante que orla a d con los inicios hasta la posición m de la fila y la columna de dicho elemento, es decir,

$$\left|\begin{array}{c|c} \delta & a_i \\ \hline a_j & a_{ij} \end{array}\right| = d_{ij}, \tag{2.2.3}$$

donde δ es la matriz del determinante d, a_i es la fila i tomada de 1 a m y a_j es la columna j tomada de 1 a m. Finalmente, introduce la notación $c_{ij} = a_{ij} \cdot d - d_{ij}$. Si no se cumple $i, j > m$ entonces $d_{ij} = 0$ y por tanto $c_{ij} = a_{ij} \cdot d$. Con este despliegue de datos, demuestra el lema 2 de Kronecker:

> En el sistema formado por los n^2 elementos c_{ij}, todos los menores de orden $m + 1$ se anulan. [26, p. 153 3ª ed.][66]

En la tercera edición, publicada el mismo año 1870 que las *Observaciones* de Kronecker, Baltzer sustituyó el lema 1 por el lema 2, y mostró que el lema 1 es una consecuencia del lema 2. Hemos llamado “lemas” a estos enunciados de Kronecker siguiendo a Stolz, que en su reseña en el *Jahrbuch* de la tercera edición del libro de Baltzer destacó entre la mejoras dignas de mención

> (Producto de determinantes) contiene un lema del Sr. Kronecker, que es de gran importancia para la teoría general de ecuaciones lineales [...] [JFM 02.0080.01]

Stolz indica entre paréntesis el título del capítulo quinto del libro, en el que se encuentra dicho resultado (§5.4), que en la segunda edición estaba colocado en el capítulo anterior. Baltzer empieza así el apartado §5.4:

> A partir de un sistema dado de n^2 elementos a tal que el determinante parcial de grado m especificado $d = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{mm}$ no se anula, se puede obtener un sistema de n^2 elementos c tal que todos los determinantes partialen de grado $m + 1$ o superior se anulen idénticamente.
>
> [Nota a pie de página] Conferencia de invierno 1864/5 de Kronecker. La conclusión de esta información fue incluida en la 2ª edición de este libro. [26, p. 42 3ª ed.]

[66] En la demostración utiliza el desarrollo de los determinantes orlados $d_{ij} = a_{ij} \cdot d + \Sigma_r a_{ir} \cdot b_{ir}$ y demuestra que $-b_{rs} = \delta_{rs} \cdot d$, siempre que el índice s no sea mayor que m. En la expresión anterior δ_{rs} es la conocida “delta de Kronecker”, que vale 1 si $r = s$ y 0 en caso contrario.

El autor repite las notaciones y relaciones consideradas por Kronecker[67] para concluir que el sistema c con las condiciones requeridas está formado por unos c_{ij} que son los que dio Kronecker divididos por d, variante que no afecta al resultado del lema. Finalmente Baltzer deduce el lema 1, al que llama "lema", de este último lema 2, que él enuncia sin calificarlo.

Baltzer incorporó a las siguientes ediciones del libro otras ampliaciones originadas en trabajos de Kronecker sobre asuntos diferentes, pero no vamos a ocuparemos de estas últimas ediciones[68]. La influencia de la obra de Kronecker en el libro de Baltzer sobre determinantes es en cierto modo paralela a la influencia que tuvo el matemático de Berlín en las sucesivas ediciones que el *Álgebra* de Serret tuvo a lo largo de la segunda mitad del siglo XIX, referida esta vez a la teoría de Galois[69].

Ch. L. Dodgson, 1867.

An elementary treatise on determinants with their application to simultaneous linear equations and algebraical geometry [115]

Se trata de un pequeño libro (viii+143 páginas) en la línea escolar de su autor, Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), conocido por sus obras de lógica y geometría, también como fotógrafo, pero, sobre todo, por su literatura, en la que destacan los cuentos sobre *Alicia* que firmó como Lewis Carroll. Además de por la original personalidad de su autor, el libro sobre determinantes de Dodgson merece algún comentario por sí mismo.

Tiene una estructura compartimentada, presidida por ocho capítulos (pp. 1-110) en orden estrictamente lógico (a la manera de Euclides: definiciones, axiomas, proposiciones,...) que desarrollan la teoría expuesta, acompañados de algunas observaciones y ejemplos en notas a pie de página. Los comentarios excesivamente amplios para estar dispuestos a lo largo de las notas a pie de página forman cinco apéndices (pp. 111-133) colocados a continuación de los capítulos. Las últimas páginas (pp. 134-143) contienen tablas y formularios. El estilo lógico de Dodgson es expresado por Muir con estas palabras:

> Este es un libro de texto muy diferente a sus predecesores. Intencionadamente, su

[67] Evita usar la delta de Kronecker, sustituye su uso por argumentos literales.

[68] La cuarta edición (1875) fue comentada en el *Jahrbuch* de nuevo por Stolz y la quinta y última (1881) por Netto.

[69] Véase [132]

> objetivo principal es la exactitud lógica. Para lograrlo, por tanto, todas las definiciones, convenciones, axiomas, proposiciones y corolarios han sido cuidadosamente formulados, etiquetados y numerados: cada paso en una cadena de razonamientos se mantiene separado escrupulosamente el antecedente y el consecuente, y con el fin de evitar posibles distracciones en los razonamientos, los ejemplos ilustrativos son relegados a notas al pie de página. [266, p. 24 Vol. III]

El autor plantea así la originalidad de su obra:

> De las setenta proposiciones contenidas en el siguiente tratado, diez son esencialmente tomadas del tratado sobre determinantes de Baltzer; también los test de geometría dados en el capítulo VIII, se encuentran en la mayoría de trabajos de geometría algebraica: el resto de la materia es, hasta donde yo sé, original, y se compone de una serie de proposiciones que el objetivo que tenía en vista me obligó a introducir. [115, p. iii]

Enunciada una proposición, Dodgson sigue su demostración impresa en cuerpo menor. Como buen lógico, se esmera en acertar con vocabulario y símbolos adecuados. Prefiere el término "bloque" a "matriz", usa "test" para indicar una condición necesaria y suficiente para algo, etc. Le gusta la notación (i, j) para los elementos de un bloque, pero temiendo la confusión con las coordenadas de los puntos de un plano prefiere crear un símbolo nuevo que da a su libro un aspecto singular:

$$\left\{\begin{matrix} 1\backslash 1 & 1\backslash 2 & \cdots & 1\backslash n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ m\backslash 1 & m\backslash 2 & \cdots & m\backslash n \end{matrix}\right\}, \quad \begin{vmatrix} 1\backslash 1 & \cdots & 1\backslash n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1\backslash 1 & \cdots & n\backslash n \end{vmatrix}$$

El primer capítulo es para las permutaciones y el segundo contiene lo básico de los determinantes, incluido su producto fila-fila. Los dos capítulos siguientes se dedican a los sistemas lineales. Siguen dos, quinto y sexto, en lo que el autor estudia condiciones de anulación de menores en un bloque rectangular. Los dos últimos capítulos son aplicaciones a la geometría analítica. Parece claro que el interés central de Dodgson es la teoría general de los sistemas lineales, de ello nos ocuparemos en la sección siguiente.

En lo que a los determinantes se refiere, debemos detenernos ahora en los apéndices II, III y IV dedicados al "cálculo aritmético de determinantes" es decir, a su cálculo efectivo cuando sus elementos son números. Dodgson explica su "método de condensación"[70], del que da ejemplos. Se trata de un algoritmo para ir reduciendo un determinante a otros de menor tamaño. En el apéndice tercero intenta, con éxito sólo para tamaños pequeños, la demostración de la validez general del algoritmo. En el apéndice cuarto aplica el método de condensación a la resolución de sistemas.

Dodgson describe el proceso de "condensación" de un bloque de n filas y n columnas mediante las siguientes reglas, :

(1) Organice el bloque dado, si es necesario, de modo que no hayan ceros en su interior. Esto se logra mediante transposición de filas o columnas, o sumando a una fila un múltiplo de otra.

(2) Calcule el determinante de todo menor formado por 4 términos adyacentes. Estos valores forman un segundo bloque de $n-1$ filas y $n-1$ columnas.

(3) Condense el segundo bloque del mismo modo, dividiendo cada término hallado, por el correspondiente término en el interior del primer bloque.

(4) Repita este proceso tanto como sea necesario (observando que en cualquier bloque condensado de la serie, el r-ésimo por ejemplo, los términos encontrados deben dividirse por el correspondiente término en el interior del $(r-1)$-ésimo bloque) hasta que el bloque condensado sea un solo término, el cual corresponde al valor del determinante.

Después de calcular por este método un determinante de orden 4, finaliza con este comentario en el que advierte una dificultad del mismo, que ilustra con un ejemplo:

> El proceso no puede continuar cuando aparece un cero en el interior[71] de cualquier bloque, ya que infinitos valores se pueden utilizar como divisores. Cuando esto ocurre en el bloque dado, este se reorganiza tal como lo hemos mencionado antes, pero ésto no se debe hacer cuando esto ocurre en cualquiera de los bloques deducidos; en tal caso el bloque dado debe reorganizarse como las circunstancias lo requieran, y la operación comienza de nuevo. [115, p. 120]

[70]Lo había presentado ante la Royal Society el 15 de mayo de 1866, el año anterior en que publicó el libro, comunicación que fue publicada en los *Proceedings* de dicha sociedad con el título *Condensation of Determinants, being a new and brief Method for computing their arithmetical values* (1867) [114]. Dodgson distingue entre "valores algebraicos" y "valores aritméticos", para los primeros el método de cálculo son los desarrollos por menores, pero para los segundos hay métodos numéricos más eficaces.

[71]Por "interior de un bloque" denota el bloque que resulta de uno dado al eliminar la primera y última de sus filas y columnas.

Aunque en su momento este método pasó desapercibido, en la actualidad tiene importancia computacional, como ha explicado F. Abeles en su artículo de 2008 *Dodgson condensation: the historical and mathematical development of an experimental method development of an experimental method* [4][72] cuyo resumen comienza así:

> El método de condensación de Dodgson se ha convertido en una poderosa herramienta en la evaluación automática de determinantes. [4, p. 429]

En el quinto y último apéndice Dodgson estudia determinantes cuyas entradas son monomios y que tienen los mismos ceros que una función entera dada de varias variables. Por diversas razones esta obra de Dodgson es, como su autor, muy peculiar.

Otros.

Naturalmente no dejó de haber nuevos libros dedicados específicamente a los determinantes a lo largo de las tres últimas décadas del siglo, basta indicar algunos ejemplos de obras del siglo XIX en la línea pedagógica. Cabe citar el de Dostor en sus dos ediciones (1877, 1883) [117] que tuvo repercusión en España, así como los de Günter (1875) [173] y Scott (1880) [320]. En cuanto a la tradición italiana hay que destacar a finales del siglo la obra de 1897, *I determinanti. Teoria ed applicazioni con tutte le più recenti ricerche*, de Ernesto Pascal [277], profesor primero en la Universidad de Pavía, donde estudiara y profesara Brioschi, y más tarde en la de Nápoles, como Trudi.

2.3 Los sistemas lineales en general

Resolver los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales es el problema que está en el origen de la teoría de determinantes y una vez que ésta se establece con autonomía, los sistemas lineales algebraicos son sin duda su primera aplicación. Con el método de eliminación Gauss —conocido por los chinos antiguos como vimos—, la solución práctica de casos numéricos quedó establecida, pero el problema general de la resolución de sistemas lineales, como el de otros tipos de ecuaciones, era para los matemáticos, lo hemos visto desde Maclaurin y Cramer, expresar las soluciones mediante una fórmula general. El primer caso de estudio fue el sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas,

[72] Véase también [3].

cuyas soluciones se expresan como fracciones en términos de determinantes, teniendo todas en su denominador el determinante del sistema, que hay que suponer no nulo. En el caso de un sistema homogéneo con determinante no nulo no hay más solución que la trivial, pero el determinante igualado a cero se presenta como el resultado de eliminar las variables, lo que significa que el sistema tiene otras soluciones. Con el tiempo va apareciendo y perfeccionándose la discusión de lo que puede suceder si el determinante del sistema general se anula, y también el intento de resolver sistemas en los que el número de ecuaciones y de incógnitas no coincide, dando las condiciones para la existencia de soluciones.

2.3.1 Los sistemas lineales en los libros

En este apartado vamos a dar una rápida visión de cómo fue evolucionando el tratamiento de los sistemas lineales en las obras que hemos considerado como textos expositivos sobre determinantes y sus aplicaciones. Aunque abarquemos un poco más, nuestro principal objetivo es llegar hasta la obra de Trudi (1862), por que es la que se tradujo al español en 1868 y con ella entraron los determinantes en España. Terminaremos viendo cómo fue finalmente planteada la discusión completa de los sistemas lineales de cualquier número de ecuaciones por Kronecker-Baltzer, Fontené-Rouché, Capelli, Frobenius, etc.

Cauchy había dado en 1815 una demostración impecable de la regla de Cramer para sistemas cuadrados, basada en la expresión de un determinante por los elementos de una línea. A su vez, en el *Análisis Algebraico* (1821) compuso una prueba con la misma idea pero expresada en lenguaje de funciones alternadas al no disponer de los determinantes como requisito previo. Pero no abordó las posibilidades abiertas por el caso de determinante nulo no otras cuestiones generales.

Por su parte, Jacobi tampoco entró en el estudio general. En el apartado 7 de [**?**, p. 297-298] reconoció que cuando el determinante se anula la regla de Cramer daría lugar a soluciones indeterminadas $\frac{0}{0}$ que habría que estudiar según casos. Puso como ejemplo la determinación del centro de una superficie de segundo grado (cuádrica) que da lugar a un sistema de cuya discusión en términos de anulación de determinantes salen elipsoides, hiperboloides o paraboloides; pero Jacobi indicó que la discusión general de esta asunto "es un tarea tediosa".

W. Spottiswoode, 1851-1856. Este autor británico no fue demasiado claro en la aplicación de los determinantes a la resolución de los sistemas lineales. Las conexiones entre determinantes y sistemas de ecuaciones lineales aparecen en la sección IV de su primera obra, que empieza así:

> Se vio que determinantes de orden 1,2,... son el resultado de la eliminación de 1,2,... variables en el mismo número de ecuaciones lineales; supongamos que esto es cierto para n variables, entonces [...] [323, p. 20]

El "se vio" se refiere, para 2 y 3 variables[73], a la primera sección del libro, de carácter motivador para la teoría general, que Spottiswoode inicia explicando el conocido problema geométrico de obtener el centro y los ejes principales de una cónica, lo que le da motivo a plantear dos sistemas sencillos 2×2, uno homogéneo y otro completo, con los mismos coeficientes, de modo que, por una parte, la anulación del determinante de los coeficientes significa la eliminación de las variables en el homogéneo (condición para que haya solución no nula) y, por otra, el determinante (no nulo) es el denominador común de las soluciones del sistema. Lo mismo repite en dimensión tres refiriéndose a centros y ejes de cuádricas.

Como extensión de estos ejemplos, el autor pide al lector acepte que dado un sistema de n ecuaciones de la forma

$$(1,1)x_1 + (1,2)x_2 + \ldots + (1,n)x_n = 0, \text{ etc.}$$

el resultado de eliminar las incógnitas es $\Sigma \pm (1,1)(2,2)\ldots(n,n) = 0$, condición para que el sistema homogéneo tenga solución no nula. Si el sistema no es homogéneo, con términos independientes $u_1, u_2, \ldots, u_n$, entonces escribe cada término independiente en la forma $u_i = \frac{u_i}{x_1} x_1$ y forma el sistema homogéneo

$$((1,1) - \frac{u_1}{x_1})x_1 + (1,2)x_2 + \ldots + (1,n)x_n = 0, \text{ etc.},$$

cuyo determinante anula aplicando el resultado admitido sobre eliminación. Las transformaciones de linealidad le llevan a la regla de Cramer[74]

$$(\Sigma \pm (1,1)(2,2)\ldots(n,n))x_1 = \Sigma \pm u_1(2,2)\ldots(n,n).$$

[73] El caso de una variable no está mencionado en la introducción, pero es obvio: $a = 0$ es la condición para que tenga solución no nula la ecuación $ax = 0$ y $a \neq 0$ es el denominador de la solución de $ax = b$.

[74] Que no ha mencionado con este nombre. La escribe con los determinantes desarrollados [323, p. 20], aunque nosotros la indicamos con la notación de Cauchy para abreviar.

Naturalmente este cálculo se repite con las demás variables. Luego, Spottiswoode realiza una argumentación un poco oscura para deducir de la regla de Cramer que la anulación de un determinante equivale a la eliminación de un sistema homogéneo, lo que había admitido en un principio.

En la sección VIII Spottiswoode aborda los sistemas que llama "redundantes", aquellos en los que hay más ecuaciones (m, con términos independientes $u_1, \ldots, u_m$) que incógnitas ($x_1, \ldots, x_n$, $n < m$). Se podrían resolver, dice, los sistemas formados por "cada grupo de n ecuaciones", lo que daría un conjunto $\binom{m}{n}$ posibles soluciones. Por otra parte, supone que las x_i se podrían resolver también como incógnitas en un sistema lineal $n \times n$ cuyos términos independientes v_i fueran a su vez combinaciones lineales de los u_j. Con estos elementos, más algunas hipótesis adicionales, Spottiswoode establece fórmulas para las incógnitas x_i, que aparecen como fracciones de sumas de productos de determinantes, del tipo de las que Binet relacionaba con el método de los mínimos cuadrados de Gauss y Lagrange. Spottiswoode también relaciona sus fórmulas con este método.

Estos asuntos se mantuvieron sin cambios en la segunda versión publicada en la revista de Crelle.

Brioschi, 1854. El autor italiano fue más claro en la exposición en el tema que nos ocupa. Explicó la regla de Cramer como ya lo hiciera Cauchy y de ella dedujo que si el sistema es homogéneo la anulación del determinante del sistema es la condición para que haya soluciones distintas de la nula. No indicó explícitamente cómo serían las soluciones en este caso, pero sí dejó expuesta a continuación la forma de hacerlo. En efecto, presentó la aplicación de la regla de Cramer a un sistema homogéneo de n ecuaciones con $n+1$ incógnitas $x_0, x_1, \ldots, x_n$; pasando a términos independientes los términos correspondientes a la variable x_0 expresó las demás en función de ésta, concluyendo que las incógnitas estaban en proporción (notación $x_0 : x_1 : \ldots : x_n$) a la sucesión de menores de orden n resultantes de suprimir la columna correspondiente tomados con el signo adecuado. Brioschi lo dejó así, sin discutir lo que podría suceder si los menores se anularan.

Baltzer, 1857. Dio un paso más en la claridad expositiva respecto a Brioschi y se mostró fiel seguidor de Jacobi, al que citó repetidas veces en la sección novena de su libro, la primera dedicada a las aplicaciones. Esta sección, dedicada exclusivamente a sistemas con igual número de ecuaciones que de incógnitas, tiene cinco apartados.

En el primero expone por el método ya estandarizado la regla de Cramer. En el segundo considera lo que sucede “si el determinante del sistema lineal se anula”, afirmando que en este caso el sistema es en general incompatible, pero pasa a ser indeterminado si se anulan también los determinantes que aparecen en los numeradores de las fórmulas de Cramer. El tercer apartado expone el caso del sistema homogéneo, probando que si el determinante es nulo tiene soluciones proporcionales a los menores de orden máximo del sistema que resulta suprimiendo una cualquiera de sus ecuaciones por ser dependiente de las demás (supone implícitamente que estos menores no se anulan). Hasta aquí la parte general, que amplía con algunos sistemas de tipo particular. Los apartados siguientes tratan de los sistemas con matriz antisimétrica, el cuarto en el caso de tamaño impar y el quinto y último en el caso par.

Trudi, 1862. Salvando las diferencias de estilo expositivo ya comentadas en la sección anterior, Trudi plantea el tema de un modo muy análogo al de Baltzer, también como primera aplicación de los determinantes. No obstante, incorpora algunos detalles diferenciadores que comentaremos. Expone la regla de Cramer (sin llamarla así) y discute el caso en que se anula el determinante del sistema (ecuaciones no independientes), con la novedad de incluir en este punto la que dice es una “observación importante”:

> ...si es nulo el denominador Δ [del sistema], y lo es al mismo tiempo uno de los numeradores, todos los otros numeradores deben, en general, ser nulos. [343, p. 116]

Si esta situación se produce, al aplicar la regla de Cramer se llega a “la forma indeterminada $\frac{0}{0}$”, en la que una de las ecuaciones “es consecuencia de las otras”. Trudi, a diferencia de Baltzer, recupera de Spottiswoode la consideración de los sistemas redundantes, con más ecuaciones que incógnitas, pero sólo en el caso de n incógnitas y $n+1$ ecuaciones. Afirma entonces que el sistema es “más que determinado” y prueba que la exigencia para su compatibilidad es que se anule el determinante de orden $n+1$ formado por los coeficientes del sistema y los términos independientes[75].

Finalmente, Trudi expone del mismo modo que Baltzer los sistemas homogéneos $n \times n$.

[75]Lo que Trudi anula es el determinante de la que se dio en llamar la “matriz ampliada del sistema”. La introducción de este término tiene lugar en la obra *On systems of linear indeterminate equations and congruences* (1861) [321], de H.J.S Smith (1826-1883), en la que el término usado fue “augmented array”.

2.3.2 Hacia un teorema general: Kronecker

De lo que acabamos de ver se deduce que en los primeros libros sobre determinantes y sus aplicaciones, la primera aplicación que se presenta es la resolución de los sistemas lineales algebraicos, pero que su tratamiento dista de ser todavía completo. Los que tienen igual número de ecuaciones que de incógnitas son bien conocidos en los casos más comunes, pero no se termina de aclarar lo que puede suceder cuando la matriz de coeficientes y sus menores se anulan de los diversos modos posibles. Por otra parte, queda todavía más incompleta la discusión cuando el número de ecuaciones y el de incógnitas son diferentes.

Kronecker-Baltzer 1864. En la segunda edición del libro de Baltzer (1864) sobre determinantes (§8. *Resolución de sistemas de ecuaciones lineales*) apareció la primera explicación que tiende a ser completa de los sistemas lineales, pero la autoría corresponde en parte a Kronecker, que comunicó sus resultados a Baltzer.

En §8.1 Baltzer presentó, como en la primera edición, la regla de Cramer (variables x_i, coeficientes a_{ij}, términos independientes u_j). En §8.2 indicó que la solución anterior podría basarse en la de un sistema homogéneo obtenido añadiendo una variable más (escribiendo cada término independiente en la forma $-u_i = a_{i0}x_0$), pues en este caso la solución viene dada por una proporcionalidad

$$x_0 : x_1 : x_2 : \ldots : x_n = R : \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \ldots : \alpha_{in}. \tag{2.3.4}$$

donde R es el determinante no nulo del sistema inicial; por tanto $\frac{x_j}{x_0} = \frac{\alpha_{ij}}{R}$, lo que da la solución de Cramer con $x_0 = 1$.

Esto le da pie a centrar su atención, siguiendo a Kronecker, en los sistemas lineales homogéneos, pues hay un método para deducir de las consideraciones realizadas sobre éstos los resultados similares para sistemas con términos independientes no todos nulos[76].

El apartado §8.3, dedicado a la resolución de los sistemas homogéneos ($u_j = 0$) con igual número de variables que de ecuaciones, presenta tres apartados, el último de los cuales es el original de Kronecker:

I. Constata que si el determinante del sistema, $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$, no se anula entonces

[76]Hay que advertir que estas consideraciones metodológicas no están explícitamente expuestas por Baltzer.

$x_1 = \ldots = x_n = 0$ es la única solución.

II. Si R se anula pero un menor de orden $n-1$ no lo hace, entonces el sistema es indefinido con soluciones proporcionales a los menores del desarrollo de R por una fila cualquiera,

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \ldots : \alpha_{in}. \tag{2.3.5}$$

Una solución de $n-1$ ecuaciones lo es también de la otra.

III. Cuando un determinante parcial de grado m no se anula, por ejemplo $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm}$, y los determinantes parciales de grado superior se anulan, considera las expresiones $v_i = a_{i,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{in}x_n$ y afirma que

$$\left| \begin{array}{c|c} (a_{ij}) & v \\ \hline a_i & v_i \end{array} \right| = 0, \tag{2.3.6}$$

donde (a_{ij}) es la matriz del determinante R, a_i es la fila $i > m$ tomada de 1 a m y v es la columna de expresiones $v_1, \ldots v_m$. El determinante anterior se anula porque es la suma ponderada de $n-m$ determinantes parciales de grado $m+1$ que orlan a R y se anulan por hipótesis[77]. Aplicando (II) se obtiene la proporcionalidad

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_m : 1 = p_1 : p_2 : \ldots : p_m : p. \tag{2.3.7}$$

donde las $p_i, 1 \leq i \leq m$ son "funciones homogéneas independientes" de las $x_i, m+1 \leq i \leq n$, y el sistema es por ello $n-m$ indeterminado.

Esta breve explicación de Kronecker-Baltzer merece algún comentario adicional. Para aplicar II como se ha hecho, hay que pensar, aunque el autor no lo haga explícito, que los v_i son los coeficientes de una hipotética nueva variable y, de modo que 2.3.6 es el determinante nulo de un sistema lineal homogéneo de orden $m+1$ con un menor de orden m no nulo; por II resulta $x_1 : \ldots : x_m : y = p_1 : \ldots : p_m : p$, pero debe ser $y = 1$ en la solución, lo que lleva a 2.3.5. Nótese que la proporcionalidad 2.3.7 significa que se obtienen fórmulas tipo Cramer, $x_i = \frac{p_i}{p}$, pero estas fracciones no son numéricas, pues, como dice el autor, los numeradores son funciones de las $n-m$ variables sobrantes.

[77]El "lema de Kronecker" que mencionamos en la sección anterior afirma que la anulación de los determinantes orlados es condición necesaria y suficiente para la anulación de todos los de orden mayor que m.

En la tercera edición (1870), Baltzer modificó el lema de Kronecker como ya vimos, pero no introdujo cambios significativos en la exposición de los sistemas lineales homogéneos y generales.

Esta discusión de los sistemas lineales homogéneos, más el método expuesto antes para transferir resultados sobre sistemas homogéneos a sistemas generales con términos independientes u_i no todos nulos, deja muy expedito el camino para llegar una teoría completa sobre los sistemas lineales. Pero quedan todavía algunos pasos por dar, por ejemplo considerar sistemas con distinto número de ecuaciones que de incógnitas.

No obstante, el libro de Baltzer siguió siendo hasta muy avanzado el siglo la referencia básica para el estudio de los sistemas lineales. Así lo indica E. Netto[78] en el artículo I 9. *Les Fonctions Rationelles* de la *Encyklopädie* Teubner[79], que indica como referencias posteriores las *Lecciones de teoría de invariantes / Vorlesungen über Invariantentheorie* (1885) [170] de P. Gordan y las *Lecciones de Álgebra / Lehrbuch der Algebra* (1895) [355] de H. Weber.

Dodgson 1867. La obra de Dodgson no es una referencia de primer orden pero merece mención por su singularidad, como vimos en el apartado anterior sobre determinantes. Ahora daremos una ligera idea de su enfoque sobre los sistemas lineales. Parece claro que el interés central de Dodgson es la teoría general de los sistemas lineales, su estudio de la anulación de bloques parece ir en esa dirección, aunque no logra más que una variedad de resultados sin sistematizar. En el prefacio dejó escrito que:

> Siempre me ha parecido que un análisis completo de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas es un desiderátum en álgebra: el tema sólo se toca en Baltzer; un intento más completo se encuentra en el Álgebra de Peacock, pero no he visto en ninguna parte algo como un análisis exhaustivo. [115, p. v]

La afirmación anterior hace pensar que Dodgson se refiere a la primera edición de Baltzer y sorprende por su referencia al *A treatise on algebra* de Peacock [287], que es del año 1830 y no incorpora determinantes. Calificar como "más completo" el tratamiento que da Peacock a los sistemas lineales simultáneos, capítulo XVI de su libro, sólo se justifica en

[78]Netto fue el autor de la reseña en el *Jahrbuch* de la última edición del libro de Baltzer.

[79]La edición alemana de este artículo es del año 1899. La versión francesa completada por R. le Vavasseur es de 1907. Citamos por esta edición reeditada por Gabay [**?**], para las referencias antes mencionadas véase p. 46. En esta página y las siguientes se da una larga relación de trabajos —mayoritariamente del último tercio del siglo XIX— dedicados a distintos aspectos de los sistemas lineales.

un sentido meramente pedagógico, pues la exposición es más detallada y con ejemplos, pero no más general. Su interés por los sistemas lineales y su afán pedagógico quedan patentes también en las tablas incluidas al final del libro sistematizando por casos las condiciones de solubilidad.

En el apéndice I, propone un proceso general para analizar un conjunto de ecuaciones, considerando primero el caso en que las ecuaciones no son todas homogéneas y luego el de las homogéneas. Para el primero pone a consideración los siguientes puntos: (1) La consistencia de las ecuaciones. (2) Su dependencia de otra. (3) Las variables a las cuales se pueden asignar simultáneamente valores arbitrarios. La discusión de los diferentes posibilidades se basa en comparar la anulación de los que llama V-bloques, que son los bloques (menores) de coeficientes del sistema y los B-bloques, que son lo que utilizan también la columna de los términos independientes.

2.3.3 El teorema atribuido a Rouché

Fontené-Rouche 1875. Los primeros a los que se reconoce generalmente que consiguieron completar el objetivo de exponer de modo las condiciones de resolubilidad de los sistemas lineales fueron dos matemáticos franceses, Georges Fontené (1848-1923)[80] y Eugène Rouché (1832-1910):

> G. Fontené: *Théorème pour la discussion d'un systeme de n équations du premier degré á n inconnues* [149]
>
> E. Rouché: *Sur la discussion des équations du premier degré* [303]

Rouché publicó su artículo en la revista *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, mientras que Fontené envió el suyo a la revista *Nouvelles annales de mathématiques*, que dirigía Camille Christophe Gerono (1799-1891)[81]. El artículo de Rouché fue publicado en el número de *CRAS* de noviembre, que vio la luz el 29 de ese mes, mientras que el de Fontené se inserta en el número de noviembre de *NAM*, pero que no apareció hasta el día 6 de diciembre. Rouché quiso hacer valer su prioridad, aunque fuera tan escasa, y

[80] Véase la biografía de Fontené publicada por su amigo Raoul Bricard en *Nouvelles Annales de Mathématiques* el año 1922 [44].

[81] Esta revista fue fundada en 1842 y duró hasta 1927. Estaba dirigida a los aspirantes a ingresar en la Escuela Politécnica y en la Escuela Normal. Gerono fue uno de sus cofundadores y Fontené estuvo muy ligado a ella.

escribió una carta al editor de *NAM* que apareció en la sección de "Correspondencia" del número de enero de 1876, seguida de una nota aclaratoria:

> *Extracto de una carta del Sr. E. Rouché.* En el número de los *Annales*, que es relativo al mes de noviembre, pero *que no apareció hasta ayer 6 de diciembre*, encuentro un artículo sobre la discusión de las ecuaciones de primer grado. Me apresuro a reconocer que el Sr. Fontené, cuyo mérito reconozco particularmente, no podía, cuando les ha entregado su trabajo, haber tenido conocimiento del que yo había comunicado a la Academia sobre el mismo tema; pero quiero dejar constancia que mi Nota, *habiendo aparecido en los* Comptes rendus *del 29 de noviembre*, ha sido publicada *antes* que el artículo citado. Por eso les ruego que inserten estas líneas en su próximo número.
>
> *Nota de la Redacción.* La reclamación del Sr.. Rouché está perfectamente fundada. Con respecto al Sr. Fontené, diremos que su artículo nos ha sido remitido en el mes de septiembre último, que lo hemos hecho componer inmediatamente, y que es a nuestro pesar que no ha aparecido antes. El trabajo del Sr. Rouché y el del Sr. Fontené son pues bien independientes el uno del otro[82]

Tal vez en este asunto se mezcló una cuestión de celos profesionales en París. Fontené fue un profesor de liceos (secundaria) que llegó a ejercer en el prestigioso Colegio Rollin, teniendo a su cargo la preparación de los aspirantes al ingreso en las grandes escuelas. Rouché, que era quince años mayor, empezó también como profesor de instituto, pero alcanzó plaza en el Conservatorio de Artes y Oficios y fue examinador de ingreso en la Escuela politécnica; de modo que, en cierto modo, el puesto de Rouché era superior al de Fontené en el escalafón matemático francés, los estudiantes de Fontené debían ser examinados por Rouché. Un colega de ambos, examinador también para el ingreso de la Escuela Politécnica, H. Laurent, escribió un *Traité d'algebre* en 1879 dirigido a los estudiantes que preparaban el acceso a las escuelas; en él atribuye el teorema general de los sistemas lineales a Fontené y Rouché.

Ambos, Fontené y Rouché, abordan en sus artículos citados sistemas con igual número n de variables que de ecuaciones y determinante nulo, pues el caso no nulo lo dan por conocido. Ambos suponen que es no nulo el determinante que resulta de suprimir en el determinante del sistema todas las filas y columnas de 1 a $p < n$, pero que son nulos los

[82] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^{e}, 15 (1876) p. 48. Los fragmentos del texto que aparecen enfatizados en cursiva tienen esta presencia en el original.

menores que lo amplían (Fontené sólo los que lo amplían con una fila y columna más, y Rouché todos (la equivalencia entre estas condiciones es el lema 1 de Kronecker). A partir de estas hipótesis, incorporando a los menores que manejan los términos independientes y considerando su nulidad, desgranan las posibilidades de que el sistema tenga o no solución. Los dos artículos aparecieron reseñados en el *Jahrbuch*, el de Fontené con una llamada al de Rouché, del que Stolz decía que:

> La discusión de los sistemas de n ecuaciones lineales no homogéneas con n incógnitas, generalmente deducida del teorema de Kronecker sobre ecuaciones lineales homogéneas, es dado aquí con independencia y completa generalidad. [JFM 07.0044.02/03]

Ninguno de los dos autores franceses había mencionado a Kronecker, pero Fontené terminó su artículo particularizando su resultado general a sistemas homogéneos, para los cuales daba por conocida la discusión. La alusión de Rouché a este precedente fue más explícita, pues empezó su comunicación con este párrafo que alude sin citar a Kronecker:

> La discusión del sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas no ha sido tratada hasta ahora más que en el caso en que los segundos miembros son nulos. Se puede, es cierto, remitir a este caso, por la introducción de una nueva incógnita, aquél en que los segundos miembros son diferentes de cero; pero, para resolver así la cuestión, en lugar de eludirla, sería necesario entonces añadir, a la discusión propiamente dicha del sistema homogéneo, el estudio de las soluciones de este sistema que responden a las singularidades del las ecuaciones primitivas. pero esta investigación auxiliar ofrece, en el fondo, la misma dificultad que la discusión directa del sistema primitivo. [303, p. 1050]

Cinco años después Rouché publicó en el *Journal de l'Ecole Polytechnique* un nuevo artículo más extenso, *Note sur les équations linéaires* [305], con el que pretendía detallar lo que en su breve trabajo primero en *CRAS* apenas había desarrollado. Además, en esta nueva entrega se refiere a un sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas, sin importar los tamaños de n y m. Dado un sistema, llama T al cuadro ("tableau") rectangular de los coeficientes y supone que al menos uno de sus coeficientes es distinto de cero. Entonces:

> En esta hipótesis, existirá siempre, entre los determinantes deducidos del cuadro (T), al menos un determinante que sea diferente de cero y cuyo orden sea superior

> o igual al de todo otro determinante no nulo. Si existen varios gozando de esta propiedad, se elegirá uno de ellos a voluntad.
>
> Daremos al determinante δ así elegido el nombre de *determinante principal* del sistema [...] [305, p. 222]

Rouché supone que δ se forma con las p primeras filas y columnas[83], y a partir de $\delta = |a_{ij}|, 1 \leq i, j \leq p$ forma los que llama *determinantes característicos* del sistema orlando el determinante principal en la forma[84]

$$\left|\begin{array}{c|c} (a_{ij}) & k \\ \hline a_{p+\alpha} & k_{p+\alpha} \end{array}\right|$$

donde (a_{ij}) es la matriz con determinante δ, k es la columna formada con los términos independientes $k_1, \ldots, k_p$ y $a_{p+\alpha}$ es la fila que se indica, también tomada desde 1 hasta p. Con estos elementos Rouché enuncia y demuestra su teorema:

> Para que n ecuaciones lineales con m incógnitas sean compatibles, es necesario y suficiente que los determinantes característicos del sistema sean todos nulos.
>
> Bajo esta hipótesis, el sistema tiene una única solución o es indeterminado según que el orden de sus determinantes característicos sobrepase o no el número de incógnitas. [305, p. 223]

Con esta versión más precisa el teorema quedó definitivamente establecido, en el futuro sólo tuvo mejoras en la brevedad y elegancia de su exposición. Fontené no se ocupó más de este teorema general de los sistemas lineales, pero llegado el cambio de siglo volvió a referirse a él y al asunto de la asignación de nombre[85]. En 1900, se asomó una vez más a las páginas de "su" revista *NAM* para hacer valer su derecho a que el teorema llevara también su nombre mediante la publicación de esta nota:

> *Reclamación a propósito del teorema llamado «de Rouché »*. Es costumbre dar el nombre de *teorema de Rouché* a la discusión de un sistema de ecuaciones de primer

[83] Antes había tomado las últimas, ahora pasa a las primeras, como hiciera Kronecker.

[84] Nótese que son los determinantes orlados de Kronecker, tomados sólo con los términos independientes para ver que con ellos no aparecen menores no nulos de orden $p+1$. Aunque los mencionemos con ocasión del segundo artículo de Rouché, este tipo de determinantes orlados aparecían también en el primero y en el de Fontené.

[85] En 1899, de nuevo en *NAM*, publicó un artículo titulado *Sur un système remarquable de n relations entre deux systèmes de n quantités*, pero es un estudio sobre la solución de un sistema con una primera fila de coeficientes que se repiten cíclicamente en las demás ecuaciones.

grado. Aunque no haga gracia hablar de uno mismo, creo poder recordar que remití en el mes de *septiembre* de 1875 a Gerono el Artículo que apareció en el mes de diciembre en los *Nuevos Anales*, y que daba esta discusión: esto resulta de una Nota de Gerono insertada en el número de enero siguiente, en respuesta a una reclamación, por otra parte benevolente, del Sr. Rouché. Ahora, la Nota del Sr. Rouché a la Academia es del mes de *noviembre* del mismo año. Se podría pues, como ha hecho el Sr. H: Laurent en su Tratado de álgebra (1879), decir sin injusticia: *el teorema de los Srs. Fontené y Rouché*. Creo que esto no contrariará al Sr. Rouché, cuyo bagaje científico es por otra parte considerable[86]. [150, p. 188]

Frobenius 1877 y sgs. La concordia ente ambos autores franceses fue sugerida unos años después por Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), que se ocupó casi simultáneamente del mismo teorema que ellos, mejorando definitivamente la exposición del mismo. Este gran matemático de Berlín, sucesor de su profesor Kronecker, se ocupaba de los sistemas de ecuaciones lineales algebraicos a través de sus investigaciones en análisis matemático sobre ecuaciones diferenciales y en teoría de números. En un trabajo muy extenso de 1875 en el *J. de Crelle*, *Sobre el problema de Pfaff / Ueber das Pfaffsche problem* [152], en una sección titulada *Sobre las ecuaciones lineales y las formas bilineales alternadas*, repasó buena parte de la teoría de determinantes y sistemas lineales que necesitaba para su estudio, realizando una discusión sobre los sistemas lineales homogéneos en la que ponía el énfasis en las condiciones de dependencia o independencia lineal de las ecuaciones y de las soluciones del sistema:

Sean m ecuaciones lineales homogéneas independientes

$$(10.)\ \ a_1^\mu u_1 + \cdots + a_n^\mu u_n = 0, (\mu = 1, \ldots, m)$$

en $n(> m)$ incógnitas $u_1, \ldots, u_n$. [...]

Sean $A_1, \ldots, A_n$ y $B_1, \ldots, B_n$ dos soluciones *particulares* cualesquiera de las ecuaciones (10.), entonces $aA_1 + bB_1, \cdots, aA_n + bB_n$ es también una solución. Unas soluciones particulares

$$A_1^\xi, \ldots A_n^\xi \ \ (\xi = 1, \ldots, k)$$

se dicen *independientes* o *diferentes*, si $c_1 A_\alpha^{(1)} + \cdots + c_k A_\alpha^{(k)}$ no se anulan para todos

[86]Cuando Bricard hizo la semblanza ya citada de Fontené en *NAM* (1922), citó otro libro, de 1916, con el reconocimiento compartido, el *Cours d'algèbre et d'analyse* de Charles Michel [259].

> los $\alpha = 1, \ldots, n$, sin que los $c_1, \ldots, c_k$ sean todos nulos, en otros términos, si las k formas lineales $A_1^\xi u_1 + \cdots A_n^\xi u_n$ son independientes. [152, p. 236]

Dos años más tarde (en *Sobre ecuaciones diferenciales homogéneas totales / Ueber homogene totale Differentialgleichungen*, 1879 [156])[87] aisló la noción de "rango" en el sentido usado hoy:

> Cuando en un determinante todos los menores de orden $(m+1)$ se anulan, pero los de orden m no son todos nulos, yo llamo a este valor m, *rango* del determinante. [156, p. 1]

Este concepto, denominado también a veces "característica", estaba oculto o implícito en la obra de Kronecker-Baltzer ya comentada y en los "determinantes característicos" de Rouché. Kronecker destacó la importancia de la noción de rango en un artículo de 1884[88].

Finalmente, en 1905, publicó un artículo específico, *Sobre la teoría de ecuaciones lineales / Zur theorie der linearen gleichungen* [159], en el que repasó sus realizaciones anteriores en este campo y ofreció una demostración del teorema que resulta elegante y breve gracias al uso de la noción de rango. Este artículo comienza así:

> Las condiciones para la resolubilidad en términos generales de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo fue dada por *Fontené* [...] y por *Rouché* [...], y poco después me resultó conocida [. . .]. Pueden ser formuladas de manera más conveniente utilizando el concepto de *rango* de una matriz o de un determinante, cuya importancia para la teoría de ecuaciones lineales fui el primero en aclarar. [159, p. 175]

Más allá de lo dicho, las aportaciones de Frobenius en [159] se dirigieron a clarificar las relaciones cualitativas de dependencia lineal entre las ecuaciones lineales homogéneas y sus soluciones. En su análisis del sistema (10.) antes citado, llegó a establecer la solución general como combinación lineal arbitraria de $n-m$ soluciones independientes. Probó además que estas soluciones, a su vez, puede verse como los coeficientes de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones independientes cuyas n soluciones independiente serían los propios

[87] El mismo año publicó también un artículo notable, *La teoría de las formas lineales con coeficientes enteros / Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten [155]*, en el que estudiaba los sistemas lineales que surgen en la teoría de números.

[88] Así lo señala Netto en [**?**, p. 46].

coeficientes del sistema (10.) original[89].

Capelli desde 1886. No debemos abandonar el seguimiento de los sistemas lineales sin considerar otra línea de desarrollo del teorema general en Italia bajo la influencia de Kronecker, que nos interesa además por la repercusión que tuvo en España. El protagonista es Alfredo Capelli[90] (1855-1910), quien, entre 1877 y 1881, recién licenciado en la Universidad de Roma, fue ayudante de Casorati en la Universidad de Pavía, un lugar con tradición sobre determinantes y sistemas lineales. A finales de los años 70 Capelli realizó una estancia en Berlín, donde recibió cursos de Weierstrass y Kronecker, lo que explica que siga la línea expositiva de este último en el tema de los sistemas lineales, empezando por los sistemas homogéneos y refiriendo a ellos el caso general. Pero su tratamiento mejora porque introduce la noción de característica (es el rango de Frobenius con otro nombre) que clarifica notablemente la exposición. El autor italiano no cita fuentes ni para su modo de proceder ni para la noción y uso de la característica.

El establecimiento de las condiciones para que un sistema lineal homogéneo tenga solución aparece en un libro de texto de 1886 escrito por A. Capelli y G. Garbieri, *Corso di analisi algebrica. I. Teorie introduttorie* [61]. En el quinto capítulo, titulado *Sistemas de formas lineales*, se encuentra este teorema:

> A fin de que un sistema de varias ecuaciones lineales homogéneas entre n incógnitas admita soluciones no nulas es necesario y suficiente que la característica h de su matriz sea menor que n. En tal caso existe siempre $n - h$ incógnitas a las cuales se pueden atribuir otros tantos valores arbitrarios, fijados los cuales, los valores de las restantes h incógnitas quedan perfectamente determinados. [61, p. 383]

Unos años después, en 1892, Capelli publica en la *Revista di Matematica* un artículo que recoge las lecciones impartidas durante el curso académico 1888/89, titulado *Sopra la compatibilità o incompatibilità di più equazioni di primo grado fra più incognite* [57], en el que plantea el teorema general como sigue:

[89] La evolución del concepto de rango y esta idea de dualidad en Frobenius puede verse en el artículo de J-L. Dorier *Le concept de rang dans les systèmes d'équations linéaires*, 1999 [116].

[90] Véase [270] para la vida y obra de A. Capelli. También tiene biografía en Internet: en *The MacTutor History of Mathematics archive* y en *L'Enciclopedia italiana Treccani.*

Dado un sistema cualquiera de m ecuaciones de 1[er] grado con n incógnitas

$$(I)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = \alpha_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = \alpha_n \end{cases}$$

a fin de que sea compatible con valores finitos de las incógnitas es necesario y suficiente que las dos matrices

$$(A)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \quad \text{e} \quad (B)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \alpha_n \end{matrix}$$

tengan la misma característica [57, p. 55].

En 1902 Capelli publicó un libro que alcanzó gran difusión (segunda edición 1909), *Instituzioni di analisi algebrica* [59], en el que expone la teoría de los sistemas lineales generales con esa misma orientación. Es esa la obra que tuvo influencia en España, como veremos más adelante.

El interés que ha suscitado el teorema general de los sistemas lineales en Francia e Italia ha dado lugar a que se le denote realzando autores locales[91]; en Francia se encuentra con el nombre de "teorema de Rouché" o de "Rouché-Fontené", mientras en Italia se le conoce como "teorema de Rouché-Capelli" o "Kronecker-Capelli". Veremos en un capítulo posterior que Rey Pastor introdujo el nombre de "teorema de Rouché-Frobenius" y lo popularizó en los países hispanos.

[91]Veáse, por ejemplo [28, p. 197]

Capítulo 3

Las matrices: de funciones a cantidades

Durante la etapa de predominio del algoritmo del determinante en los problemas algebraicos lineales, las matrices aparecieron como un concepto auxiliar, como un nombre para los coeficientes de un sistema lineal colocados según la disposición que el propio sistema plantea, como una tabla de números de la que se pueden extraer determinantes. Esta imagen perduró mucho más allá de la mitad del siglo, pero al mismo tiempo se fue generando una imagen funcional de las matrices, principalmente de las cuadradas. Primero, desde Gauss y a través de sus seguidores aritméticos Eisenstein, Hermite, se identificarán como las sustituciones lineales y como tales se multiplicarán de un modo regulado por la aplicación sucesiva de sustituciones, como una composición de funciones. En principio, este modo de ver afectaba sólo a las matrices inversibles, pero en buena medida era extensible a todas, dando lugar a un "método algebraico" que percibieron primero Cayley y Laguerre pero que tardó en ser generalmente asumido. Cuando Weierstrass irrumpió con fuerza en los estudios sobre determinantes y la ecuación secular, lo hizo de un modo marcadamente funcional, tratando las formas cuadráticas primero y las bilineales después como un analista que estudia funciones particulares, la matriz de coeficientes sólo servía para obtener determinantes. El estudio de estos temas en Berlín fue muy profundo, y Kronecker introdujo en ellos un punto de vista más algebraico. Más tarde, Frobenius unificó y amplió los resultados obtenidos por sus predecesores creando un cálculo simbólico de formas bilineales, vistas como funciones, que enmascaraba el de sus matrices de coeficientes, esta vez totalmente generales, no restringidas como con las sustituciones. Finalmente salió a la luz el álgebra matricial autónoma, a la vez que se consolidaba el estudio de los sistemas numéricos más generales que los números complejos y los cuaternios. Sylvester tuvo un papel decisivo en la difusión de las matrices cuadradas como cantidades de un tipo más general que las cantidades ordinarias numéricas, pero que admite operaciones con propiedades similares, salvo alguna excepción, a las aritméticas.

3.1 La imagen funcional de las matrices

En el estudio de las formas cuadráticas con coeficientes enteros que iniciara Gauss, las sustituciones que modificaban la expresión funcional de las formas cuadráticas eran representadas por matrices de orden dos, tres, etc. (con determinante ±1). Eisenstein y Hermite continuaron esta tarea investigadora, en la que quedó claramente manifiesta la utilidad del producto de matrices, en modo fila-columna, como resultado de la composición de sustituciones. Pero al entrar en escena Weierstrass en el tema de la formas cuadráticas con coeficientes reales y complejos puso el énfasis en el punto de vista funcional, en el que la matriz de coeficientes no recibe una atención especial. El punto de vista funcional de Weierstrass en relación con los temas lineales, se puso de manifiesto también al caracterizar los determinantes como funciones multilineales alternadas y exponer sus propiedades principales a través de esta definición funcional. Por otra parte, las matrices, sin restricciones, daban la expresión de las formas bilineales, pero el enfoque de Weierstraas, tan rico en resultados, era funcional y no destacaba el papel de las matrices. Kronecker completó y perfeccionó el trabajo de Weierstrass en esta campo, pero fue Frobenius quien le dió una nueva visión global a las formas bilineales con coeficientes en los diversos sistemas numéricos. Creó un cálculo simbólico de formas que es como el de matrices, pero sin que las matrices tuvieran el protagonismo; por ejemplo, el producto de formas bilineales se definía como suma de productos de derivadas parciales de la forma, sin recurrir —aunque el resultado era ese— al producto fila-columna de los coeficientes.

3.1.1 Sustituciones en aritmética hasta Hermite

El aspecto algebraico y simbólico de la reducción de formas cuadráticas quedó por vez primera muy explícito, ya lo vimos, en las investigaciones aritméticas de Gauss, que fueron continuadas por Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852)[1]. En los trabajos de éste, producidos entre 1842 y 1852, sobre formas binarias y ternarias, cuadráticas y cúbicas, con sus transformaciones por sustituciones, aparecieron algunas operaciones básicas del álgebra de matrices —aunque no usaran este término para nombrarlas— expresadas de

[1]Fue un estudiante precoz, muy aventajado y de mala salud. Siendo estudiante de Dirichlet en Berlín, conoció en 1842 las *Disquisiciones* de Gauss y dos años después, todavía estudiante en Berlín, publicó en el *J. de Crelle* los dos artículos a los que nos vamos a referir, el primero de los cuales está fechado en diciembre de 1843. Eisenstein publicó 24 artículos en el volumen del *J. de Crelle* del año 1844, en cuyo verano viajó a Gotinga para visitar a Gauss.

modo simbólico: producto (no conmutativo) e inversas.

En *Estudios sobre la forma cúbica con dos variables / Untersuchungen über die cubischen Formen mit zwei Variabeln* (1844) [125] Eisenstein considera la forma con coeficientes enteros

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = (a, b, c, d) = f,$$

y la transforma en otra f' mediante una sustitución[2] que representa, como Gauss, en forma matricial,

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y', \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = t_1$$

y con la condición, $\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon = \pm 1$. El término matriz no es utilizado por el autor, y tampoco llama "determinante" a la expresión ε, que no recibe nombre alguno. Eisenstein estudia las formas cúbicas f asociándoles una forma cuadrática F ("determinirende Form") cuyo discriminante (nomenclatura actual) es llamado "determinante" siguiendo a Gauss, pero este término no se utiliza en ningún otro sentido a lo largo de este artículo. Dejaremos de lado el trabajo que el autor realiza con las formas, para centrarnos en el uso que hace de las sustituciones (a las que en ningún momento llama "lineales").

Junto con la sustitución t_1 aparece una segunda t_2 del mismo tipo y otras asociadas a la primera [125, p. 96]:

$$\begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix} = t_2, \quad \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix} = t_3, \quad \begin{pmatrix} \alpha\varepsilon, & \beta\varepsilon \\ \gamma\varepsilon, & \delta\varepsilon \end{pmatrix},$$

siendo t_3 la transformación "recíproca" (inversa) de t_1 que lleva f' en f (salvo proporcionalidad ± 1). Con estas transformaciones realiza cálculos de composición que dan productos de matrices fila-columna. Primero combina t_3 con t_2 para obtener una nueva transformación

$$\tau_1 = [t_2 t_3 =] \begin{pmatrix} \alpha'\delta - \beta'\gamma, & -\alpha'\gamma + \gamma'\alpha \\ \gamma'\delta - \delta'\gamma, & -\gamma'\beta + \delta'\alpha \end{pmatrix}.$$

Luego, con la recíproca de t_2 y t_1 obtiene $\tau_2 [= t_1 t_4]$, y finalmente verifica que $\tau_2 \tau_1$ es la matriz identidad.

El mismo año, una páginas más adelante en el mismo *J. de Crelle*, Eisenstein publica otro artículo sobre formas aritméticas en el que aparecen desarrollos matriciales de tercer

[2]Eisenstein utiliza los términos 'transformación" y "sustitución" indistintamente, como sinónimos.

grado. Se trata de *Cuestiones generales sobre las formas de tercer grado con tres variables, que se originan en la división del círculo / Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, welche der Kreistheilung ihre Entstehung verdanken* (1844, con una segunda parte en 1845) [126] La primera parte está compuesta de nueve apartados, y en el quinto introduce las sustituciones de este modo,

$$\left\{\begin{array}{l} u = \alpha\mathrm{u} + \alpha'\mathrm{v} + \alpha''\mathrm{w}, \\ v = \beta\mathrm{u} + \beta'\mathrm{v} + \beta''\mathrm{w}, \\ w = \gamma\mathrm{u} + \gamma'\mathrm{v} + \gamma''\mathrm{w}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{matrix}\right\}$$

llamando S al "sistema lineal" (la matriz) de sus coeficientes y Δ a su determinante, expresión que usa con naturalidad en este segundo artículo. Para la composición de dos sustituciones S y T utiliza la notación $S \times T$ y aplica el teorema del producto a su determinante. En el apartado siguiente necesita usar el sistema inverso de S (con determinante unidad), para el que justifica la notación $\frac{1}{S}$; con él realiza cálculos[3] que resuelvan la ecuación $S \times X = S'$:

$$S \times \left(\frac{1}{S} \times S'\right) = S \times \frac{1}{S} \times S' = \left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}\right\} \times S' = S'$$

Utiliza también una sustitución T descompuesta en dos factores:

$$T = \left\{\begin{matrix} 1, & K, & L \\ 0, & K', & L' \\ 0, & K'', & L'' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & K', & L' \\ 0, & K'', & L'' \end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix} 1, & K, & L \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}\right\}$$

Más adelante, en el apartado octavo, explica a modo de esquema teórico las cálculos que ha ido realizado con los "sistema lineales", explicando que de la igualdad $S \times T = S'$ entre sistemas de determinante unidad (trabaja con números enteros) puede despejar $S = S' \times \frac{1}{T}$ y $T = \frac{1}{S} \times S'$. Concluye Eisenstein destacando la posibilidad de aplicar a los sistemas un algoritmo de cálculo simbólico[4] con las reglas usuales aritméticas del producto —nada se

[3]En el cálculo que sigue los paréntesis están puestos exactamente como en el original, al aplicar la propiedad asociativa del producto sólo aparece el parénsis en la primera expresión, como indicando que lo que contiene es la solución propuesta para la ecuación.

[4]Las menciones de Eisenstein a operaciones y ecuaciones "simbólicas" no dejarían de estar influidas por su contacto con Hamilton cuando el alemán viajó a Inglaterra en 1843, precisamente el año del

dice de la suma—, advirtiendo que

> la única consideración es sobre el orden de los factores, es decir, el orden de los sistemas que se componen *no* debe alterarse. [126, p. 354]

Así pues, en el territorio de la aritmética se había instalado durante la década de los cuarenta (1844) —y registrado en el *J. de Crelle*— el producto con las matrices —con el nombre de "sistemas lineales"— de segundo y tercer orden similar al de la aritmética ordinaria excepto que la multiplicación no era conmutativa.

Una observación importante cabe hacer en este punto. Nótese que en la introducción de las matrices y su producto funcional por Gauss y Eisenstein, las matrices están asimiladas a las sustituciones, son pues matrices inversibles. Cuando se aplica una sustitución a la transformación de una forma cuadrática los cálculos son del tipo habitual, no son cuentas matriciales, porque todavía no se ha captado que la propia forma puede ser representada por una matriz simétrica y que las operaciones de la transformación son operaciones matriciales. Esta misma situación la apreciaremos en las obras de Hermite y Laguerre, las matrices sólo se identifican con las sustituciones. La situación cambiará en la obra de Cayley de 1855 que comentaremos unas páginas más adelante, en la que ya vemos operando conjuntamente a la matiriz de la sustitución y a la matriz de la forma.

La anastomosis de Hermite. Fue Charles Hermite (1822-1901) quien observó en primer lugar que en los trabajos de la línea aritmética de Gauss-Eisenstein y los de la línea geométrica de Cauchy-Jacobi-Cayley-Sylvester había una unidad de cálculo algebraico subyacente. La anastomosis entre las dos líneas de desarrollo de los temas lineales que hasta entonces seguían caminos diferenciados la realizó Hermite en 1854 en los dos trabajos siguientes:

- Hermite 1854a: *Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies* [185]
- Hermite 1854b: *Remarques sur un Mémoire de M. Cayley relatif aux déterminants gauches* [184]

En el primero de ellos, el matemático francés, siguiendo a Gauss y Eisenstein, a los que cita expresamente, considera[5]:

descubrimiento de los cuaternios.

[5] Todo el artículo refleja en las notaciones la influencia de Eisenstein.

las formas $f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$ reducibles a $X^2 + Y^2 - Z^2$; [...] El Determinante, o después de la nueva denominación del Sr. **Sylvester**, el **Invariante** de f, será:

$$\Delta = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - 2bb'b'' - aa'a'';$$

y la forma adjunta g será

$$g = \frac{d\Delta}{da}x^2 + \frac{d\Delta}{da'}y^2 + \frac{d\Delta}{da''}z^2 + \frac{d\Delta}{db}yz + \frac{d\Delta}{db'}xz + \frac{d\Delta}{db''}xy.$$

[185, p. 307]

Se puede observar que Hermite no utiliza, como tampoco lo hicieron los matemáticos anteriores, la forma matricial de expresar las formas cuadráticas. Pero en las consideraciones que realiza intervienen varias sustituciones a las que se refiere someramente con el simbolismo matricial. El problema que trata le lleva a plantearse

profundizar en la naturaleza de las sustituciones que cambian en ella misma una forma indefinida, [...] descubrir la sustitución de x, y, z en X, Y, Z, que da idénticamente

$$f(x, y, x) = f(X, Y, Z).$$

[185, pp. 308-309]

Puesto a esta tarea, considera una sustitución S (un sistema lineal) que expresa unas variables (u, v, w) en función de las (x, y, z), y también otas (U, V, W) en función de las (X, Y, Z); más adelante surge otra sustitución Σ que transforma las (U, V, W) en las (u, v, w); con ellas concluye que

la fórmula abreviada $S^{-1}\Sigma S$ dará en números enteros la relación entre los dos grupos de variables x, y, z en X, Y, Z, para los cuales $f(x, y, x)$ se cambia en $f(X, Y, Z)$. [185, p. 311]

En el enunciado anterior aparece claramente el producto de sustituciones lineales (matrices) de Eisenstein, con una notación simplificada que prescinde del símbolo operacional $\times$. Como consecuencia del “método precedente” obtiene un resultado en el que aparece en el contexto aritmético la ecuación secular:

Sea

$$\begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z, \end{aligned}$$

una sustitución S que cambia en ella misma una forma cuadrática cualquiera, la ecuación de tercer grado, que se formará igualando a cero el determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a' & a'' \\ b & b'-\lambda & b'' \\ c & c' & c''-\lambda \end{vmatrix}$$

admitirá como una de sus raíces la **unidad**, y las otras dos tendrán valores recíprocos. [185, p.312]

Hay que prestar atención al problema planteado por Hermite en el ámbito aritmético tridimensional, consistente en obtener las transformaciones que dejan invariable una forma cuadrática (en números enteros). Porque inmediatamente, en el segundo de los artículos de 1854 antes citados, se refiere a este mismo problema en el ámbito geométrico n-dimensional inspirado, así lo reconoce, en el artículo de Cayley en 1846 antes reseñado, en el que, dice Hermite, el inglés ha resuelto esta cuestión en un caso particular y él va a hacerlo en general:

[Cayley ha obtenido] todas las transformaciones de una forma cuadrática en ella misma cuando esta forma es una suma de cuadrados.

Me propongo dar aquí las fórmulas análogas a las del Sr. Cayley, para la transformación en ella misma de una forma cuadrática cualquiera. [184, p. 63]

Hawkins denomina este problema como “Problema de Cayley-Hermite” y dice al respecto que Hermite

estuvo familiarizado con el artículo de Cayley [1846] que, desde el punto de vista de Hermite, podría ser visto como una solución al Problema para la forma $f = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$. Hermite ideó su propia solución al problema general, aunque siguió la iniciativa de Cayley tomando como punto focal de su solución la introducción de un sistema hemisimétrico. Dio la solución para tres variables en [1854a] y la generalizó a n variables en [1854b]. [179, p. 87-91]

Añadiremos algunas consideraciones al análisis de Hawkins resumido en estas líneas. Como ya hemos indicado, en nuestra opinión, la diferencia fundamental entre los dos trabajos de Hermite es que en el primero se trabaja en el mundo aritmético de los números enteros y en el segundo en el mundo geométrico de los números reales; si pensamos sólo en estos últimos, el salto de dimensión 3 a n hubiera sido un simple artificio técnico. Lo que realmente descubre Hermite es: (1) Que encontrar las sustituciones que fijan una forma cuadrática es importante igual en el trabajo algebraico que en el geométrico, y (2) que el método que utilizó en 1854a, para llegar a

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sirve también en 1854b para generalizar lo hecho por Cayley. Se trata en ambos casos de utilizar un juego de variables $X_r + x_r = 2\xi_r$, que le permite encontrar la sustitución que pasa de los x_r a los X_r manteniendo la igualdad anterior. Esta sustitución resulta de eliminar las ξ_r de las ecuaciones que ligan a las variables X_r, x_r, ξ_r en juego[6], y en ella participan unos parámetros arbitrarios $\lambda_{r.s}$ que cumplen la relación $\lambda_{r.s} = -\lambda_{s.r}$ si $r \neq s$.

Para poner más claramente de manifiesto la identidad descubierta entre los caminos algebraico (1854a) y geométrico (1854b), Hermite termina este último diciendo:

> . . . añadiré todavía los teoremas siguientes que sirven de lemas a una investigación aritmética importante [184, p. 65]

tras lo cual recoge los resultados finales de su artículo anterior aritmético. Nótese además que 1854b fue publicado en francés pero en una revista británica, lo que sin duda indica que Hermite lo ponía a disposición de Cayley[7].

Para terminar esta disgresión sobre el "Problema de Cayley-Hermite" precisaremos en qué medida Hermite 1854b generaliza a Cayley 1846. En efecto, Hermite, después de explicar su método con un ejemplo bidimensional, indica que

> . . . si se aplica el mismo método a una forma cuadrática de un número cualquiera de indeterminadas en el caso en que ella es una suma de cuadrados, se encontrará inmediatamente los resultados que el Sr. Cayley ha obtenido en su bella memoria [. . .] [184, p. 65]

[6] En el caso aritmético necesitó cuidados adicionales para asegurar que las operaciones le mantenían permanentemente en el dominio de los enteros.

[7] El idioma no suponía dificultad para Cayley, él mismo publicó en francés en ocasiones.

Se comprende esto observando que lo que hizo Cayley en 1846 fue caracterizar las sustituciones ortogonales, que son precisamente aquellas que conservan la métrica euclídea, es decir, la forma cuadrática $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ referida como suma de cuadrados[8].

Un año después de los dos trabajos reseñados, en 1855, Hermite publicó otros dos artículos, uno en la línea geométrica y otro en la aritmética, en los que ya hace un uso explícito de la técnica matricial:

- Hermite 1855a: *Remarque sur un théorème de M. Cauchy* [187]
- Hermite 1855b: *Note sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes* [186]

En la primera se ocupa de la ecuación secular[9] que resulta "igualando a cero el determinante del sistema" [187, p. 181]

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{cccc} a_{1,1} - \theta, & a_{2,1}, & \cdots & a_{n,1}, \\ a_{1,2}, & a_{2.2} - \theta, & \cdots & a_{n,2}, \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & \cdots & a_{n,3}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, & \cdots & a_{n,n} - \theta, \end{array} \right\}.$$

Es significativo observar que el problema espectral, las matrices y determinantes de los valores propios, aparece en manos de Hermite desde los dos puntos de vista, ahora geométrico y antes, como vimos, en un problema aritmético. Con estos dos puntos de vista unificados el problema espectral ganaba importancia en el camino de la constitución de la teoría de matrices.

Por otra parte, en su artículo 1855b, trabajando sobre los periodos de funciones abelianas

[8]Recrearemos el ejemplo bidimensional de Hermite tomándonos la libertad, como en una nota anterior de recurrir a notación matricial más moderna. Hermite supone la forma cuadrática de matriz $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ y discriminante $D = -|G|$, a la que aplica el método para obtener la sustitución de matriz que deja invariable a G:

$$A = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} P(\lambda) & -2\lambda c \\ 2\lambda a & P(-\lambda) \end{pmatrix}, \quad K = 1 - \lambda^2 D, \quad P(\lambda) = 1 - 2\lambda b + \lambda^2 D,$$

En el caso $G = Id$ $(a = c = 1, b = 0)$ se obtiene $K = 1 + \lambda^2$, $P(\lambda) = 2 - K = P(-\lambda)$ y resulta la matriz ortogonal de Cayley: $A = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} 2-K & -2\lambda \\ 2\lambda & 2-K \end{pmatrix}$.

[9]En este trabajo usa variable compleja.

$f(u,v)$ se ve necesitado de utilizar una “relación de composición” entre “sistemas lineales” de números enteros que no sólo denota, sino que también escribe, a la manera de Eisenstein [186, p. 252]:

$$\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \end{Bmatrix}$$

Las matrices que se multiplican corresponden a sustituciones que dejan invariable una relación entre los periodos ω_i de la variable u y los periodos ν de la variable v de $f(u,v)$, es decir, $f(u+\omega_i, v+\nu_i) = f(u,v)$ con $0 \leq i \leq 3$. Dicha relación es $\omega_0\nu_3 - \omega_3\nu_0 + \omega_1\nu_2 + \omega_2\nu_1$, así que se trata de una forma bilineal en cuatro variables, aunque Hermite no la menciona como tal; pero el problema que está resolviendo es determinar sustituciones que dejan inalterada una forma bilineal[10]. Por ser el caso bilineal y no el cuadrático, el problema es más general que el tratado en los trabajos del año anterior, pero aborda sólo un ejemplo, no la teoría general.

Hermite se mostró en los trabajos de 1854-55 tan sólo como un usuario moderado del cálculo matricial, que era útil como lenguaje simbólico que permitía escribir con brevedad la composición de sustituciones. No obstante, su visión de conjunto y unificada de problemas aritméticos y geométricos a los que se podía aplicar un mismo planteo algebraico significó una referencia para fomentar el desarrollo del cálculo matricial como una muestra más del “método algebraico” que preconizara Lagrange, que extrae, aisla y desarrolla formas de calcular similares de diversas situaciones matemáticas.

3.1.2 El enfoque de Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) impartió en la Universidad de Berlín[11] dos cursos anuales desde 1856-57 hasta 1889-90. Además mantuvo con Kummer, desde 1861, un seminario de matemáticas en el que se discutía los avances producidos en las

[10] Nótese que se trata de una forma bilineal hemisimétrica cuya matriz tiene elementos no nulos sólo en la diagonal secundaria, que son dos 1 y dos -1.

[11] Llegó a ella en 1856 después de haber sido profesor en la escuela secundaria (1841-1856) y recibir el doctorado *honoris causa* por la Universidad de Königsberg en 1854. Fue miembro de la Academia de Ciencias de la misma ciudad. Veáse [?]

matemáticas internacionales y se iba dando cuenta de las propias investigaciones; este ambiente era enriquecido por los cursos impartidos por Kronecker desde su posición de miembro de la Academia. Con todo ello, Berlín fue durante décadas un foco principal de matemáticas a nivel internacional.

En las clases y los seminarios, Weierstrass se ocupó de todas la ramas importantes del análisis matemático. A pesar que publicó poco en vida, la influencia de sus enseñanzas, difundidas a través de las obras de sus numerosos discípulos, fue inmensa. La obra completa de Weierstrass se publicó en siete volúmenes entre 1894 y 1927, el autor sólo llegó a supervisar la publicación de los dos primeros, en 1894 y 1895.

Nuestro interés se centra en el volumen tercero[12], que publicado ya en 1903 fue póstumo, con edición a cargo de Johannes Knoblauch (1855-1915). La sección 18 de este volumen, titulada *La teoría de determinantes* se originó en el curso de teoría y aplicación de las formas bilineales y cuadráticas que Weierstrass desarrolló durante el invierno 1886-1887 con una intensidad de tres horas semanales. Según una nota editorial al final de la sección, los apuntes fueron tomados por Paul Günther (18**-19**) y el manuscrito estaba en poder de la Sociedad Matemática de Berlín. Allí se dice que desde años atrás Weierstrass presentaba el determinante como una forma n-lineal alternada:

> En años anteriores, Weierstrass había explicado en el seminario de matemáticas de la Universidad la deducción de los teoremas fundamentales de la teoría de determinantes a partir de las tres propiedades básicas que los caracterizan. [360, p. 286]

La exposición de Weierstrass sobre los determinantes empieza con esta introducción al tema:

> La siguiente comunicación tiene como objetivo las estructuras aritméticas peculiares, llamadas determinantes, para dar una definición que resulta útil en muchos casos, y usar esta definición para evidenciar propiedades de la teoría de los determinantes.
>
> Se ha llegado a los determinantes a través de la solución de ecuaciones lineales con coeficientes indeterminados. Las incógnitas surgen como un cociente con el mismo denominador y la observación de este denominador dio lugar a la peculiar formación de los determinantes. [360, p. 271]

[12]Consta de 362 páginas y está dividido en 26 secciones.

Después de verificar un ejemplo de tres ecuaciones y tres variables las propiedades del determinante como función A de los coeficientes del sistema, plantea el caso general:

> Basado en el caso particular anterior, una función A se define sobre $a_{\alpha\beta}$, y cumple las siguientes propiedades:
>
> 1) A es una función entera, lineal y homogénea con respecto a cada fila;
> 2) A cambia de signo sólo cuando dos filas se intercambian entre sí;
> 3) si $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ y todos los demás elementos son iguales a 0, A toma valor 1.
>
> Antes de demostrar que la función A queda definida unívocamente mediante estas tres propiedades y que es idéntica a la función que se conoce comúnmente como determinante $|a_{\alpha\beta}|$, queremos mostrar que las dos primeras propiedades establecen que A se anula si dos filas cualesquiera coinciden.[360, p. 272]

La obra de Weierstrass sobre determinantes apareció publicada el mismo año, 1903, que la obra también póstuma de Kronecker[13] *Lecciones sobre la teoría de determinantes / II. Vorlesungen über die Theorie der Determinanten* [227], cuya edición corrió a cargo de Kurt Wilhelm Sebastian Hensel (1861-1941). En el prefacio de esta obra se lee:

> «Las dos propiedades características de los determinantes que se originan como consecuencia de la teoría de ecuaciones lineales, fueron usadas por Weierstrass en sus primeras lecciones sobre esta materia para la definición de los determinantes. [227, p. vi]

En la lección[14] número 17, titulada *Representación del determinante mediante sus tres rasgos característicos*, se encuentra una definición análoga a la de Weierstrass:

> La función $\Theta(U_{gh})$ debe ser función de un número entero n^2 de variables (U_{gh}), que tiene las siguientes propiedades:
>
> 1. Es homogénea y lineal en los elementos de cada fila horizontal del sistema;
> 2. sólo cambia de signo si se intercambian dos líneas;
> 3. es $\Theta(E_{gh}) = 1$ si con E se denota el sistema de unidades.

[13] Kronecker codirigió con Weierstrass el seminario matemático desde 1883.
[14] *Lecciones* consta de 390 páginas que contienen 21 lecciones.

Resulta por tanto que la definición funcional sintética del determinante aparece publicada el mismo año 1903 en obras póstumas respectivas de Kronecker y Weierstrasss, siendo a este último al que Hensel asigna la prioridad en su formulación, producida años antes.

Vimos que el principal problema matemático que generó atención sistemática a los problemas algebraicos lineales en autores del siglo XVIII —Cramer, Bezout, Vandermonde— fue el de la intersección de curvas, es decir, la resolución de sistemas de ecuaciones de orden superior, los sistemas lineales eran el caso particular más sencillo y se generaban recursos para reducir problemas más complejos de orden superior a los lineales más simples, aunque fueran en mayor número de variables. También hemos mencionado ejemplos —Lagrange, Laplace, Cauchy, Sturm, Jacobi— en los que los problemas lineales algebraicos se relacionan con problemas de la geometría, del análisis matemático y la mecánica, en particular con el estudio de ciertas ecuaciones diferenciales. A lo largo del siglo XIX, al crecer, como en toda la matemática, el campo de las ecuaciones diferenciales se suscitaron en él problemas lineales que atrajeron la atención de los analistas de más relieve —ya hemos anotado la participación en este recorrido histórico de Hermite— hacia las formas bilineales. En este punto la actuación de Weierstrass fue crucial.

El mismo año en que Cayley publicó la primera gran sistematización de la teoría de matrices, 1858, Weierstrass publicó un artículo, *Sobre un teorema que afecta a las funciones homogéneas de segundo grado, junto con la aplicación del mismo a la teoría de las pequeñas oscilaciones / Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen* [358], en el que elevó a un alto grado de generalidad los resultados previos sobre la ecuación $|A - xI| = 0$, al mismo tiempo que resolvía el problema mecánico de las pequeñas oscilaciones, a fin de cuentas un problema de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales $A\ddot{Y} = BY$.

Weierstrass inicia su artículo con esta líneas:

> Dadas dos funciones enteras y homogéneas de segundo grado Φ, Ψ, de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, por lo general es siempre posible representarlas en la forma
>
> $$\begin{aligned} \Phi &= \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n \\ \Psi &= s_1\vartheta_1 + s_2\vartheta_2 + \cdots + s_n\vartheta_n \end{aligned}$$
>
> donde $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ son expresiones cuadráticas homogéneas de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $s_1, s_2, \ldots, s_n$ son constantes. Denotamos por s una cantidad variable arbitraria, por

> $f(s)$ el determinante de
>
> $$s\Phi - \Psi$$
>
> y por $s_1, s_2, \ldots, s_n$, los valores de s para los cuales $f(s) = 0$ [...], mientras que los coeficientes de ϑ_1, $\vartheta_2, \ldots$, ϑ_n se forman con los de Φ, Ψ y los $s_2, \ldots$, s_n.
>
> [...] El caso en que las cantidades $s_1, s_2, \ldots, s_n$ son distintas, fue resuelto por Cauchy, Jacobi y otros de modo tan completo que probablemente nada más puede pedirse. [358, p. 233-234]

Se refiere Weierstrass al estudio hecho por Cauchy en 1829 —y otros en fechas posteriores— de la ecuación $f(s) = |A - sI| = 0$, en el que las notaciones de la cita anterior corresponden a $\Phi = I = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, y, en el caso de raíces s_i todas distintas, $\Psi = A = s_1x_1^2 + s_2x_2^2 + \ldots + s_nx_n^2$ (A diagonalizable). Acabamos de comentar cierto abuso de notación, pues Cauchy denota con A, I sistemas de cantidades (matrices), mientras que Weierstrass denota con Ψ, Φ las formas cuadráticas, sin identificarlas en ningún momento a su matriz de coeficientes. Es decir, para Weierstrass el objeto de estudio son las propias formas como tipo especial de funciones, independientemente del formalismo matricial que pudiera servir para representarlas.

Dicho esto, lo que Weierstrass se plantea es estudiar el caso en que las raíces de la ecuación $f(s) = 0$ no son todas distintas, afirmando que su interés principal era modificar las demostraciones conocidas encontrando "un método independiente de la multiplicidad de los s_1, $s_2, \ldots$, s_n".

Tras esta introducción de planteamiento y objetivos, inicia Weierstrass el cuerpo central de la memoria, que organiza en cinco apartados. El cuerpo algebraico se desarrolla en los apartados 1 y 4, estando el 5 dedicado a aplicar lo visto a la integración de las ecuaciones de las pequeñas oscilaciones, el viejo problema de Lagrange al fin plenamente resuelto. En el apartado 2 Weierstrass recupera desde su teoría general lo realizado por Jacobi, y en el 3 hace lo propio con Cauchy. Los apartados 1 y 4 están encaminados a probar el siguiente teorema:

> Sean Φ, Ψ funciones enteras y homogéneas de segundo grado en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con coeficientes reales, la primera conserva un signo constante, y no se anula para los valores reales de x_1 , $x_2, \ldots$, x_n. El determinante de la función
>
> $$s\Phi - \Psi$$

es una función entera de grado n de la variable s que se anula para unos valores reales. Sean estos s_1, s_2,..., s_m, y por lo tanto el determinante, aparte de un factor que no depende de s, es igual a

$$(s - s_1)^{\lambda_1}(s - s_2)^{\lambda_2} \ldots (s - s_m)^{\lambda_m},$$

donde λ_1, λ_2,..., λ_m son números positivos, que suman n; exiten entonces funciones homogéneas de segundo grado perfectamente determinadas ϑ_1, ϑ_2,..., ϑ_n de x_1, x_2,..., x_n, tales que Φ, Ψ se pueden expresar de la forma

$$\begin{aligned} \Phi &= \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_m \\ \Psi &= s_1\vartheta_1 + s_2\vartheta_2 + \cdots + s_m\vartheta_m \end{aligned}$$

donde ϑ_μ o $-\vartheta_\mu$, dependiendo de que Φ sea siempre positiva o siempre negativa, representan una suma de los cuadrados de funciones lineales reales de λ_μ OJO variables x_1, x_2,..., x_n, en efecto, cuando es $\lambda_\mu > 1$, de infinitas maneras. [358, 242-243]

Para llegar a este resultado el autor no escribe explícitamente ninguna matriz, aunque es claro que cuando habla del "determinante de la función $s\Phi - \Psi$" está pensando en el cuadro de coeficientes de las formas, que no escribe en la forma —habitual desde Jacobi— $\Phi = \Sigma_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$, con $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ hasta que necesita los coeficientes para algunos cálculos en el apartado 4; de momento, a lo largo del apartado 1, donde sólo supone $|\Phi| \neq 0$, le basta con la expresión funcional

$$\Phi = \sum_{\alpha\beta} \Phi_\alpha x_\alpha, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} = \Phi_\alpha,$$

en la que, Weierstrass no pierde tiempo en hacerlo explícito, $\Phi_\alpha = \Sigma_\beta A_{\alpha\beta} x_\beta$. Con su estilo directo y sin dar detalles que deja a completar por el lector, plantea directamente expresar

$$x_\alpha = \sum_\beta \left\{ \frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} (s\Phi_\beta - \Psi_\beta) \right\}, \tag{3.1.1}$$

donde $f(s)_{\alpha\beta}$ significa una función entera de $(n-1)$-ésimo grado a lo sumo, y el símbolo Σ_β indica que se realiza la suma con respecto a β, y este número recorre todos los valores 1, 2, ... n. Entonces $f(s)_{\alpha\beta} = f(s)_{\beta\alpha}$. [358, 234]

En efecto, Weierstrass toma las expresiones

$$s\Phi_\alpha - \Psi_\alpha = \Sigma_\beta(sA_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta})x_\beta = 0$$

como un sistema con determinante $f(s)$ que resuelve por la regla de Cramer, lo que es posible siempre que el valor de s no sea una de las raíces de f. Resulta entonces $x_\alpha = \frac{f(s)_\alpha}{f(s)}$ —esto no lo escribe Weierstrass—, siendo $f(s)_\alpha$ el determinante que resulta de $f(s)$ cambiando la columna correspondiente a α por la de términos independientes $s\Phi_\beta - \Psi_\beta$; desarrollando $f(s)_\alpha$ por los elementos de esta columna resulta la expresión 3.1.1, en la que los $f(s)_{\alpha\beta}$ son los menores de $f(s)$[15]. Weierstrass considera todos estos determinantes como funciones enteras (polinomios) y se dedica a estudiar las funciones racionales $\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$ a través de coeficientes del tipo

$$\left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}}, \quad \left\{\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}}.$$

El primero es el coeficiente de s^{-1} en el desarrollo de la fracción "en potencias negativas de s", y el segundo es el que corresponde a $(s-s_\mu)^{-1}$ en la descomposición de la fracción según las raíces s_μ, $\mu = 1, \ldots m$ del denominador $f(s)$. Entre estos coeficientes se da una relación que Weierstrass utilizará para construir el cambio de variables:

$$\left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} = \sum_\mu \left\{\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}}. \tag{3.1.2}$$

Relacionando estos coeficientes, va dando resultados sin hacer explícitos los cálculos; por ejemplo, afirma que (igualdades que explicamos a pie de página[16]):

$$x_\alpha = \sum_\beta \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Phi_\beta, \qquad \Phi = \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Phi_\alpha\Phi_\beta, \tag{3.1.3}$$

---

[15]Una aplicación de la regla de Cramer al sistema $\Phi_\alpha = \Sigma_\beta A_{\alpha\beta}x_\beta$, similar a la realizada para obtener 3.1.1, da $x_\alpha = \Sigma_\beta \frac{A^*_{\alpha\beta}}{|\Phi|}\Phi_\beta$, siendo $A^*_{\alpha\beta}$ los menores de la matriz de Φ, por tanto $\Phi = \sum_{\alpha\beta} \frac{A^*_{\alpha\beta}}{|\Phi|}\Phi_\alpha\Phi_\beta$. Esto quiere decir que cambiando las variables x_α por las Φ_α la matriz de Φ pasa a ser A^{-1}, lo que es claro en notación moderna: Si $\Phi(x) = x^tAx$ y tomo nuevas variables $y = Ax$ entonces $\Phi(y) = (A^{-1}y)^tAA^{-1}y = y^tA^{-1}AA^{-1}y = y^tA^{-1}y$.

[16]La segunda sigue de la primera y de $\Phi = \Sigma_\alpha\Phi_\alpha x_\alpha$. Para la primera, después de la nota al pie anterior, se trata de ver que $\left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} = \frac{A^*_{\alpha\beta}}{|\Phi|}$, lo que sigue de la expresión de los polinomios: $f(s) = |\Phi|s^n + \ldots + (-1)^n|\Psi|$, y $f(s)_{\alpha\beta} = A^*_{\alpha\beta}s^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}B^*_{\alpha\beta}$.

además de una relación[17] entre Φ y Ψ:

$$\sum_{\beta}\left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}}\Psi_{\beta} = \sum_{\beta}\left[\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}}\Psi_{\beta} \qquad (3.1.4)$$

que le permite dar para Ψ una expresión análoga a 3.1.3, también en función de las variables Φ_{α}:

$$\Psi = \sum_{\alpha\beta}\left[\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}}\Phi_{\alpha}\Phi_{\beta}, \qquad (3.1.5)$$

De estas expresiones de Φ y Ψ, junto con la igualdad de coeficientes 3.1.2, obtiene los cambios de variables que le permiten llegar a descomposiciones

$$\begin{aligned}\Phi &= \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_m\\ \Psi &= \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_m\end{aligned}$$

Naturalmente, en los cálculos no explícitos hay una buena cantidad de operaciones con los determinantes de las formas implicadas y sus menores, algunos de los cuales hemos mostrado en notas a pie de página. En el apartado 4, completa la demostración del teorema con nuevos cálculos con determinantes, alguno ya explícito, probando que $\Theta_{\mu} = s_{\mu}\vartheta_{\mu}$ bajo ciertas hipótesis.

Este trabajo de Weierstrass tuvo continuidad con una publicación en 1864 de Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), *Generalización de algunos teoremas del Sr.* Weierstrass / *Verallgemeinerung einiger Theoreme des Hern Weierstrass* [84], en la que el autor explica que está haciendo una nueva recreación, aun sin mencionarlo, del "método algebraico" de Lagrange:

> He llegado a la generalización de un teorema importante del Sr. Weierstrass por el estudio de las pequeñas oscilaciones de un sistema de puntos materiales ya tratados por Cauchy. Debido a su interés algebraico, he dado a esta generalización un desarrollo independiente. [84, p. 255]

[17]Que sigue de comparar las expresiones de x_{α} en 3.1.1 y 3.1.3.

3.1.3 Formas bilineales en Berlín

El paso siguiente para avanzar en el estudio de estas cuestiones fue pasar de las formas cuadráticas a las bilineales, lo que sucedió también por motivos relacionados con el análisis matemático, en particular con el estudio de las funciones elípticas. En 1868, Kronecker publicó un trabajo *Sobre formas bilineales / Ueber bilineare Formen* [223][18] en el que explica así su plan de trabajo algebraico extraído de un problema analítico:

> Las discusiones con mi amigo Weierstrass me han conducido, hace ya largo tiempo, a examinar las Θ-funciones de n variables que tienen la forma
>
> $$e^{G(u_1,u_2,\ldots,u_n;v_1,v_2,\ldots,v_n)}$$
>
> donde G es una función de segundo grado en variables u y v. [...]
>
> En consecuencia, esto me ha conducido al estudio general de transformación de formas bilineales de $2n$ variables por las sustituciones aplicadas a las dos series de variables x, y. [223, p. 273]

Simultáneamente, con inspiración en problemas geométricos sobre cuádricas, investigó también desde el punto de vista autónomo algebraico los haces de formas cuadráticas $u\varphi+v\psi$[19]. En este conjunto de trabajos ganó importancia el problema de determinar formas canónicas de sustituciones o de formas bilineales y cuadráticas bajo equivalencias producidas por transformaciones diversas.

Pero, la aportación más relevante y definitiva sobre formas bilineales producida durante estos años, también como subproducto del estudio de funciones elípticas que tanto interesaba a Weierstrass, fue su artículo algebraico *Sobre la teoría de formas bilineales y cuadráticas / Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* [359], publicado en 1868 donde extiende a formas bilineales los resultados de 1858 sobre formas cuadráticas y para ello formula la teoría de divisores elementales. Esta memoria también está dividida en cinco apartados, los cuatro primeros están dedicados a las formas bilineales y el quinto a recuperar los resultados para formas cuadráticas.

[18] En este trabajo introduce la notación δ_{ik} que se conoce como "delta de Kronecker": $\delta_{ik}=1$ o $\delta_{ik}=0$ dependiendo de los índices i,k son iguales o distintos [223, p. 276].

[19] Véase *Sobre haces de formas cuadráticas / Ueber Schaaren quadratischer Formen* (1868) [224] y Sobre haces de formas bilineales y cuadráticas / Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen (1874) [226].

En el primer apartado Weierstras plantea sus notaciones y objetivos. Considera un par de formas bilineales en $2n$ variables x_α, y_β, implícitamente sobre números complejos,

$$P = \Sigma_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \;\; Q = \Sigma_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

y forma con ellas el haz $pP+qQ$, siendo p, q "cantidades indefinidas", al que corresponde el determinante de coeficientes denotado $[P, Q]$ que, dice Weierstrass, será, salvo caso singulares, una función de p, q entera y homogénea de grado n, que se descompondrá en factores homogéneos lineales con determinada multiplicidad, es decir, factores de la forma $(ap+bq)^l$ con exponente máximo. Lo mismo sucederá con los menores de $[P, Q]$ —Weierstrass les llama "determinares parciales"—, serán funciones de p, q enteras y homogénea de grado $n - \kappa$. Le importa al autor observar que —en efecto, no hay más que desarrollar por una línea— cada menor de orden $n-\kappa+1$ es una combinación lineal de menores de orden $n-\kappa$ con coeficientes elementos del determinante total $[P, Q]$. Esto quiere decir que si un factor divide a todos los menores de orden $n - \kappa$ dividirá también a todos los de orden $n - \kappa + 1$, y en general a todos los de orden mayor. Esta propiedad le permite considerar, para cada factor $(ap + bq)^l$ y cada κ, el mayor exponente $l^{(\kappa)}$ tal que $(ap + bq)^{l^{(\kappa)}}$ es factor de todos los menores de orden $n - \kappa$. Empezando por $l^{(0)} = l$, estos exponentes irán decreciendo mientras no se anulen, dando una secuencia $l > l^{(1)} > \ldots > l^{(r-1)} > 0$, a la que corresponde una secuencia de diferencias positivas $e = l - l^{(1)}, \ldots e^{(r-1)} = l^{(r-1)}$, que suman l, así que el factor dado se descompone en la forma

$$(ap + bq)^l = (ap + bq)^e (ap + bq)^{e^{(1)}} \ldots (ap + bq)^{e^{(r-1)}}.$$

Cada factor de esta descomposición es un "divisor elemental del determinante de $pP+qQ$". Haciendo lo mismo con todos los factores lineales resulta que $[P, Q]$ es "el producto de todos sus divisores elementales y una cantidad constante independiente de p, q".

Enseguida demuestra Weierstrass que si se transforman de modo inversible las variable x_α por una parte y las y_b por otra, de modo que el haz $pP + qQ$ se transforme en el $pP' + qQ'$, resulta que ambos haces tienen los mismos divisores elementales. A continuación plantea el resultado recíproco que demuestra en los apartados siguientes de una manera mucho más laboriosa.

Hawkins otorga gran relevancia al trabajo recién comentado de Weierstrass:

> Su teoría de divisores elementales proporciona un núcleo teórico, una base sólida, sobre la cual construir. [180, p. 156]

Así es, en efecto, pero tal vez el prestigioso historiador saca una conclusión algo atrevida al decir que se atribuya a Weierstras, que es "la figura central en los desarrollos del siglo XIX", el título de "fundador de la teoría de matrices". Lo cierto es que las teoría de matrices no es utilizada por el gran matemático de Berlín, que sí manejó a fondo los determinantes desde un punto de vista funcional.

El tratamiento por Weirerstrass de los divisores elementales fue completado por Kronecker y discípulos de ambos. Weierstrass y Kronecker siguieron trabajando conjuntamente en estos asuntos y en el relacionado de las formas canónicas. En los años setenta Kronecker mantuvo una controversia con Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) sobre la metodología para la obtención de formas canónicas de sustituciones y de formas[20], recientemente estudiada por Fréderic Brechenmacher, en su tesis doctoral *Histoire du theoreme de Jordan de la descomposition matricielle (1870-1930)*, de 2006 [43][21].

Para que se fuera poniendo de manifiesto el papel que las matrices, consideradas como un objeto matemático con una teoría propia, podía jugar en la teoría de las formas bilineales, fue necesario que apareciera de nuevo un matemático que manejara simultáneamente la herencia geométrico-mecánica y la aritmética, porque en esta última la presencia de las matrices había sido mayor. Este sucesor de Hermite fue Frobenius:

> [...] las investigaciones en aritmética motivaron la formulación del problema de Cayley-Hermite y Bachmann revivió el interés de este problema en la década de 1870, a través del cual éste atrajo la atención de Frobenius. [179, p. 97]

Se refiere Hawkins a un trabajo de Paul Gustav Heinrich Bachmann (1837-1920) titulado *Untersuchungen über quadratische Formen / Investigaciones sobre las formas cuadráticas* (1873) [23] que fue publicado en el *J. de Crelle*[22] y motivó una respuesta por parte de Hermite en *Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt sur la transformation des formes quadratiques ternaires en elles-mèmes* (1874) [188]. Este intercambio atrajo la atención de Frobenius, quien publicó dos artículos vinculados sobre el tema, en 1877

[20] Jordan se ocupó de la forma canónica de sustituciones lineales en el segundo libro, capítulo II, apartado V, de su famosa obra *Traité des substitutions et des équations algébriques* [214].

[21] En esta obra se puede ver también comentarios detallados sobre el trabajo de Weierstrass.

[22] A la sazón dirigido por Borchardt y llamado temporalmente *J. de Borchardt.*

y 1878, siguiendo un esquema que ya vimos en Cauchy, el primero es breve y se limita a anunciar resultados que desarrollará en el segundo:

- Frobenius 1877. *Note sur la théorie des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables* [153]
- Frobenius 1878. *Sobre sustituciones lineales y formas bilineales / Über lineare Substitutionen und bilineare Formen* [154]

El primero fue publicado en *Comptes Rendus* de la Academia de Ciencias de París, revista elegida quizás por Hermite, porque, siguiendo con el cruce de correspondencia antes citado, el artículo es un extracto de una carta dirigida a Hermite en la que Frobenius retoma el Problema de Cayley-Hermite, al que ya no hemos referido, y anuncia resultados interesantes al tratarlo para n variables:

> Usted respondió, hace algún tiempo, a una objeción que el Sr. Bachmann había hecho a sus fórmulas, para la transformación de formas cuadráticas en ellas mismas, mostrando que la única excepción posible estaba contenida en el tipo general, cuando se atribuía a los tres parámetros valores que se hacían infinitos siguiendo una ley determinada. He tenido éxito en extender esta investigación al caso de n variables, que me parece ofrecer dificultades de un género muy diferente. [153, p. 131]

En este adelanto de resultados, Frobenius anunció a Hermite que la exposición completa de los temas propuestos sería publicada "en los próximos números de la revista del Sr. Brochardt". En efecto, el año siguiente apareció allí la extensa memoria recién citada en segundo lugar, que consta de 63 páginas divididas en 14 apartados, al último de los cuales, dedicado a los números complejos, nos referiremos en la siguiente sección. Esta memoria ha sido ampliamente analizada por Hawkins en *Frobenius and the symbolical algebra of matrices* (2008) [181], quien la considera un hito en la historia de la teoría de matrices porque fusiona la teoría espectral de Weiertrass y Kronecker con el álgebra simbólica matricial de Cayley, Hermite y Laguerre. Frobenius compone una teoría global de formas bilineales reuniendo los trabajos anteriores de otros autores, a los que da forma unificada utilizando un lenguaje simbólico coherente y eficaz.

Es notable el papel jugado por el *J. de Crelle* en el artículo de Frobenius de 1878. Aunque el análisis histórico destaca otras publicaciones para trazar el hilo conductor que lleva a dicha memoria, Frobenius señala en la introducción que los trabajos que ha estudiado y motivan su intervención, a propósito del problema de transformar una forma cuadrática en sí misma—cuyos autores son, por orden de cita, Bachman, Hermite, Cayley, Rosane, Christoffel— todos fueron publicados en el *J. de Crelle*. En el interior del trabajo hay nuevas citas a esta revista, por ejemplo un artículo de Borchardt, y cuando se refiere a Weierstrass y Kronecker lo hace a través de sus publicaciones en *Monatsberichte der Berliner Academie*, la revista mensual de la Academia de Berlín.

Aquí nos limitaremos a resaltar el modo en que Frobenius plantea el álgebra simbólica de tipo matricial, que para él era un álgebra simbólica de formas bilineales. Así se lo explica a Hermite resumiendo los elementos básicos de su cálculo:

> Para simplificar, me sirvo de una notación simbólica. Si
>
> $$A = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \text{ y } B = \Sigma b_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$
>
> son dos formas bilineales dadas, llamo a la forma $\Sigma \frac{\partial A}{\partial y_k} \frac{\partial B}{\partial x_k}$ su producto, y lo designo por AB. Verá que esta operación no es otra cosa que la composición de sustituciones lineales que usted ha usado tan a menudo. Además, pongo $E = \sum x_\alpha y_\beta$ y designo por A^{-1} la forma X que satisface la ecuación $AX = E$ que no tiene solución o sólo tiene una según que el determinante de la forma A se anule o no. Finalmente, llamo forma conjugada de A, y la designo por A' a la que se obtiene cambiando las variables $x_1 y_1 \ldots x_n y_n$. [153, p. 131][23]

Basta esta cita para observar dos características del punto de vista de Frobenius: (1) Su visión de las formas bilineales sigue siendo funcional, pues describe el producto

$$AB = \sum \frac{\partial A}{\partial y_k} \frac{\partial B}{\partial x_k}$$

a través de las derivadas de la función —resulta desde luego el producto matricial fila-columna[24]— y para definir la forma "conjugada" A' permuta las variables, lo que a efectos

[23]En el original pone $C = \sum x_\alpha y_\beta$ para la forma con matriz identidad, pero hemos puesto la letra E que usará en el artículo siguiente, en el que se le presenta con frecuencia el uso de tres formas cualesquiera A, B, C para operar con ellas.

[24]Con el simbolismo de hoy, dada la forma bilineal $x^t A y$, $\frac{\partial A}{\partial y_k}$ es una forma lineal en las variables x_i que se puede escribir en la forma $x^t A_{.k}$, siendo $A_{.k}$ la matriz con la misma columna k que A y lo demás ceros. Análogamente, $\frac{\partial A}{\partial x_k} = A_{k.} y$, siendo $A_{k.}$ la matriz con la misma fila k que A y lo demás ceros. Por tanto $\frac{\partial A}{\partial y_k} \frac{\partial B}{\partial x_k} = x^t A_{.k} B_{k.} y = x^t C_k y$, siendo $C_k = (c_{ij}^k)$ con $c_{ij}^k = a_{ik} b_{kj}$. Sumando en k los c_{ij}^k se obtiene el elemento c_{ij} de la matriz producto fila-columna.

de los coeficientes significa transponer la matriz. (2) Considera que el uso que se venía haciendo de sustituciones por una parte y formas bilineales y cuadráticas por otra, de modo que las primeras se utilizaban para transformar las segundas, puede unificarse en un único cálculo de formas bilineales, que se puede realizar de modo simbólico con el estilo matricial de Cayley. Se multiplican formas bilineales y la identidad E es una forma bilineal. Se aprecia esto con claridad al ver cómo le plantea a Hermite ([153, p. 132]) el problema de transformar una forma cuadrática en ella misma, la transforma mediante formas bilineales que pasan a tomar el papel de las sustituciones:

> [...] puedo enunciar el problema de la transformación de una forma cuadrática $\sum S_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ en ella misma, de la siguiente manera: Dadas una forma bilineal simétrica $S = \sum S_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ $(S = S')$, con determinante distinto de cero, encontrar todas las formas $U = \sum u_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ (sustituciones) con determinante no nulo que satisfacen la ecuación
>
> $$U'SU = S.$$

Otro ejemplo podemos verlo en la definición de equivalencia de formas bilineales [154, p. 19]:

> Una forma B es *equivalente* a forma cuadrática A en ella misma, cuando se pueden determinar dos formas P y Q que satisfacen la ecuación
>
> $$PAQ = B.$$

No obstante, indica unas líneas más abajo que "P y Q se llaman las *sustituciones* que pasan de A a B", y usa este término cuando plantea las relaciones más particulares dadas por ecuaciones $P^{-1}AP = B$ (formas "*similares*") y $P'AQ = B$ (formas "*semejantes*").

Frobenius empieza su artículo de 1878 desplegando todo el cálculo simbólico de formas bilineales. No hace demostraciones ofrece resultados conocidos, se limita a mostrar las operaciones y propiedades que forman este cálculo simbólico. Define obviamente la suma $A + B$ de formas bilineales y el producto aA de una "constante" por una forma bilineal y lista las propiedades asociativas y distributivas de estas operaciones. Advierte que el producto no es conmutativo y demuestra que si dos formas conmutan con una tercera entonces su producto también conmuta. Aquí sí que hay una demostración, porque se trata ya de una prueba dentro del propio cálculo simbólico: si B, C conmutan con A, entones, escribe Frobenius, usando tan sólo propiedades preestablecidas,

$$A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = (BC)A.$$

Da cuenta también de las propiedades de la transposición A' y del determinante $|A|$.

En el apartado segundo se ocupa de la "división", es decir, de lo relativo a la matriz inversa, que él llama "recíproca". Observa primero el producto de dos matrices no nulas puede ser nulo que $AX = 0$ implica $X = 0$ si el determinante de A es no nulo. Esto lo justifica por consideraciones sobre sistemas, pero luego saca una conclusión por vía puramente simbólica: si se verifica la propiedad anterior entonces $AC = BC$ implica $A = B$ si el determinante de C es no nulo. Introduce del modo habitual la matriz adjunta B de A, que verifica $AB = BA = |A|E$ (con $EA = AE = A$), y plantea la forma recíproca de A como solución de las ecuaciones $AX = E$, $XA = E$, que se verifican para $X = B : |A|$, forma que acaba denotando A^{-1}, una vez que ha probado, por cálculo simbólico, que la forma inversa es única. Prueba simbólicamente que si el determinante de B es no nulo y B conmuta con A, entonces también lo hace B^{-1}.

Este doble juego de justificar las fórmulas unas veces por el significado de los símbolos y siempre que puede directamente mediante el cálculo simbólico a partir de fórmulas previamente incorporadas, se presenta con frecuencia en este artículo de Frobenius. Con esto es suficiente para ver el nuevo enfoque simbólico que Frobenius incorpora a la teoría de las formas bilineales, que identificamos con claridad con el álgebra de matrices, pero éstas no están todavía identificadas como un objeto matemático autónomo. No obstante, indicaremos el método usado por Frobenius para dar en el apartado tercero la primera demostración completa del teorema de Cayley-Hamilton.

Frobenius se ocupa de las formas que resultan de calcular en una matriz A una función racional, $f(A) = \frac{g(A)}{h(A)}$. Recoge en primer lugar resultados conocidos que toma de Borchardt sobre potencias de A, el primero que si B conmuta con A lo hace también con toda función racional de A, y luego una propiedad de la "ecuación característica" $\varphi(r) = |rE - A| = 0$: Si r_i son las raíces de la ecuación característica de A, entonces $f(r_i)$ son las de la ecuación característica de $f(A)$[25]. Todo esto crea el ambiente que Frobenius necesita para demostrar que $\varphi(A) = 0$. Primero argumenta que, como todas las potencias sucesivas de A no pueden ser independientes, habrá una función entera $\psi(r)$ de grado mínimo p tal que tal que

[25] Antes ha probado que $|f(A)| = f(r_1)\dots f(r_n)$.

$\psi(A) = 0$, lo que significa que A^p es función de las potencias de exponente menor; luego viene su trabajo principal, demostrar que $\psi(r)$ es divisor de $\phi(r)$, porque de ello se deduce de inmediato $\varphi(A) = 0$. La parte crucial de la prueba se basa en comparar dos expresiones diferentes de $(rE-A)^{-1}$. Por una parte toma de Christoffel la expresión en serie $(rE-A)^{-1} = S = \frac{A^0}{r} + \frac{A^1}{r^2} + \frac{A^2}{r^3} + \ldots$, y por otra un cálculo ordinario que da $(rE-A)^{-1} = \frac{F(r)}{\phi(r)}$, donde $F(r)$ es una forma con coeficientes funciones enteras de r. Frobenius demuestra que la condición $\psi(A) = 0$ implica que $\psi(r)S = G(r)$, donde $G(r)$ es una forma con coeficientes funciones enteras de r de grado $p-1$. Finalmente, de la igualdad de fracciones $\frac{F(r)}{\varphi(r)} = \frac{G(r)}{\psi(r)}$ deduce que $\psi(r)$ es divisor de $\varphi(r)$. La demostración de este teorema exige recurrir a aspectos ajenos al cálculo simbólico, pero este cálculo es usado también, incluso extendido a sumas infinitas; así, para demostrar que $(rE - A)^{-1} = S$ calcula

$$S(rE - A) = SrE - SA = A^0 + \frac{A^1}{r^1} + \ldots - \frac{A^1}{r} + \frac{A^2}{r^2} + \ldots = A^0 = E.$$

Basta lo anterior para dar una idea de la forma en que Frobenius plantea en este trabajo un recopilatorio ampliado de lo conocido en su tiempo sobre formas bilineales sin dejar de contemplar las formas como funciones. Al igual que Weierstrass en su memoria sobre los divisores elementales, Frobenius trata las formas como funciones particulares del análisis y no menciona las matrices. No obstante, Frobenius introduce un cálculo simbólico de formas bilineales que es el de las matrices, como tenía tras de sí todo el trabajo de formas de Weierstras y Kronecker, Frobenius llegó más lejos que Cayley en el uso del cálculo simbólico, pero sin aislar las matrices como un objeto matemático independiente. Se apoyó en Cayley, pero en sólo en sus artículos publicados en el *J. de Crelle*, previos a su memoria puramente matricial de 1858, que, afirma Hawkins[26], permaneció desconocida fuera de Inglaterra hasta 1880, siendo Sylvester quien tomó protagonismo para revitalizarla.

Hemos destacado el trabajo de Frobenius antes comentado, pero su actividad en este campo en estos años y durante la década de los noventa fue muy amplia y principal. El reflejo de esta actividad creadora se verá en los materiales que se irán incorporando a libros de amplia difusión a través de la educación superior producidos en torno a 1900, a los que dedicaremos la sección siguiente. No dejaremos de citar su contribución a la teoría de los divisores elementales, completando la tarea de Weierstrass y otros desarrollándola en el caso en que los coeficientes de las formas son números enteros, lo que hizo en 1879 [156], el mismo año que publicó junto con Stickelberger, otro discípulo de Weierstrass,

[26]Véase[178, p. 561] y [180, p. 120-121].

su artículo sobre grupos abelianos [160] en el que dieron los invariantes del isomorfismo de tales grupos provistos de una base finita, invariantes que son similares a los divisores elementales.

3.2 Las matrices como cantidades

El término “matriz” fue acuñado por Sylvester en 1850 para designar esas tablas de cantidades de las que se podían sacar determinantes. A partir de la experiencia matemática en los temas lineales que se investigaban en aritmética, geometría, análisis y mecánica, fue Cayley quien en 1858 publicó por vez primera un trabajo de ordenación sistemática del cálculo con matrices con independencia de sus aplicaciones, al estilo del “método algebraico” lagrangiano. La difusión de este trabajo quedó confinada a las Islas Británicas, hasta el punto que, en 1867, Laguerre repitió el modelo simbólico matricial, de modo independiente de Cayley, para usarlo en una prolongación de la obra aritmética de Hermite. También esta vertiente de la obra de Laguerre tuvo escaso eco. El impulso definitivo a la teoría matricial fue dado por Sylvester en los ochenta, cuando estaba en estrecha relación con la matemática norteamericana. Además de por su papel en el estudio de las sustituciones y las formas bilineales, las matrices se consolidaron como objeto matemático autónomo gracias a su consideración adicional como “cantidades complejas” de orden superior, más allá de los complejos ordinarios y los cuaternios, formando álgebras de dimensiones arbitrarias.

3.2.1 Cayley 1858 y Laguerre 1867

Para iniciar este apartado resulta oportuno citar el párrafo con el que Hawkins inicia su comunicación al ICM Vancouver 1974:

> Aunque los orígenes de la teoría de matrices pueden remontarse al siglo 18 y aunque no fue hasta el siglo XX que fue absorbida por la corriente principal de las matemáticas [hasta justificar un tratamiento extensivo en libros de texto y monografías], fue verdaderamente una creación del siglo XIX. [178, p. 561]

En su estudio posterior sobre Weierstrass y las matrices (1977) [153], reprodujo el párrafo anterior completándolo con estas líneas:

> Durante esa época fértil en la historia de las matemáticas, se establecieron los teoremas básicos de similaridad, congruencia y equivalencia de matrices y se introdujeron las formas canónicas. Las propiedades de las raíces características de varios tipos de matrices también fueron descubiertas. [180, p. 155]

En este breve comentario se distinguen tres etapas que estamos considerando en la evolución de los temas algebraicos lineales. Desde este punto de vista algorítmico —que se inicia en el siglo XVIII y se prolonga todavía hasta la segunda mitad del XIX— las matrices, que no recibían este nombre, no tenían unas operaciones propias, sino que se operaba con ellas de manera subsidiaria a las manipulaciones que era necesario hacer con las ecuaciones o los determinantes. Así por ejemplo, el producto de matrices, al ser subsidiario del de sus determinantes, era ambiguo en cuanto a su formación mediante sumas de productos por filas o columnas. Durante el siglo XIX, a la vez que se completaba el desarrollo de los determinantes desde el punto de vista algorítmico, se fue iniciando también un punto de vista funcional para las matrices, que dejaron de ser simples cuadros o bloques de números para soportar los sistemas de ecuaciones lineales y los determinantes que los discuten y resuelven, pasando a ser un objeto directo de estudio, incluso previo a los determinantes. Esta etapa intermedia funcional es la que describiremos en el presente apartado. En el último capítulo se esbozará el papel de las matrices en la matemática axiomática del siglo XX.

Cuando llegó el momento de la consideración funcional de las matrices como expresión de sustituciones, la composición de sustituciones terminó imponiendo un modo sistemático de multiplicar matrices por el procedimiento fila-columna que definitivamente quedó consolidado y se incorporó a una operativa matricial autónoma. El cálculo matricial floreció primero en aritmética con Gauss y su continuador Einsestein, que lo dejaron dispuesto en la primera mitad del siglo XIX. Por el lado geométrico (invariantes) y analítico (ecuaciones diferenciales) el proceso fue más lento, quizás porque ha sido más propio de la aritmética generar una sintaxis algebraica, mientras que los cálculos de la geometría y la mecánica, para captar su forma algebraica, han necesitado abstraerse de otros significados. Las dos líneas evolutivas acabaron por encontrarse en la década de los cincuenta y dos décadas después quedó completo el desarrollo de la teoría funcional de las matrices.

Cayley 1855. Este nuevo cálculo matricial no tardaría en volver a manifestarse con plenitud, después de su primera breve exposición por parte de Eisenstein en 1844-45. Lo desarrolló Cayley en 1858 en un trabajo, *A memoir on the theory of matrices* [82], en la que aparece unificadamente expuesta una formulación completa del inicio de una teoría de matrices que ya presenta cierto porte: la suma, la multiplicación por escalar y el producto de matrices, las matrices nula e identidad; la opuesta e inversa de una matriz; la transposición y sus propiedades; la definición de matriz simétrica y antisimétrica, con el teorema que afirma que toda matriz se puede escribir como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica; incluso el teorema que llamamos de Cayley-Hamilton. En la parte final de la memoria se refiere también a las matrices rectangulares, para las que propone, cuando es posible, un producto siempre del tipo fila-columna. La memoria está redactada sin usar una notación general, sólo con matrices de tamaño 2×2 y 3×3, a lo sumo completadas con puntos suspensivos, indicando que las definiciones y propiedades son obviamente válidas para el caso general n-dimensional que ha tratado en ocasiones anteriores.

La memoria de 1858 sintetiza en hilera teórica lo realizado por Cayley sobre matrices desde 1855, un año después de las contribuciones de Hermite que hemos reseñado. Ese año introdujo plenamente la notación matricial en forma funcional para tratar las ecuaciones lineales y las formas cuadráticas, en una serie de siete artículos, [184, p. 65].

Cayley introduce notación matricial en unos trabajos redactados en francés y publicados consecutivamente en el *J. de Crelle* de 1855, bajo el título común *Sept différents mémoires d'analyse* [80]:

1. *Reponse à une question proposée par M.* Steiner.
2. *Sur un théorème de* Schläfli.
3. *Remarques sur la notation des fonctions algébriques.*
4. *Note sur les covariants d'une fonction quadratique, cubique ou biquadratique à deux indeterminées.*
5. *Sur la transformation d'une fonction quadratique en elle même par des substitutions linéaires*
6. *Recherches ultérieures sur les déterminants gauches.*
7. *Recherches sur les Matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indeterminée.*

Las memorias son cortas, en conjunto ocupan 41 páginas. La primera, de sólo 2 páginas, se refiere a una cuestión de geometría sintética del espacio, pero las demás tienen que ver con el tema que nos ocupa. La segunda no demasiado, pues discute una cuestión de eliminación entre dos ecuaciones algebraicas y simplemente escribe un par de resultantes como determinantes.

La tercera ya es muy importante para nuestro asunto, pues en ella Cayley introduce, sólo en el caso cuadrado, su notación matricial no sólo para sustituciones, también para formas bilineales y cuadráticas. Primero lo hace con las sustituciones lineales[27] [80, 3, pp. 282-3]:

> Esta notación me parece muy cómoda para la teoría de ecuaciones **lineales**; escribo por ejemplo:
>
> $$(\xi, \eta, \zeta, \dots) = \left(\begin{array}{|cccc|} \alpha & \beta & \gamma & \cdots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \dots \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \dots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right)(x, y, z, \dots)$$
>
> para representar el sistema de ecuaciones
>
> $$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \dots \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \dots \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Las ecuaciones lineales son consideradas en realidad como cambios de variable o sustituciones, porque pasa a componerlas por fila-columna indicando estos productos de la forma

$$(\alpha, \beta, \gamma \dots)(a, a', a'' \dots) = \alpha a + \beta a' + \gamma a'' + \dots$$

Cayley recalca que esta visión funcional de las matrices lleva necesariamente a estandarizar su producto y les da un carácter de objeto matemático prioritario:

> Se debe tener cuidado en la composición de matrices, de combinar las **filas** de la matriz de la izquierda con las **columnas** de la matriz a la derecha, para formar las **filas** de la matriz compuesta. Habría muchas cosas que decir sobre esta teoría matrices, la que debe, creo yo, preceder a la teoría de los **Determinantes**. [80, 3, p. 284]

[27]Usamos los símbolos tal como Cayley los diseñó y así están reproducidos en su artículo general de 1858, pero el *J. de Crelle* tenía dificultades para reproducirlos en imprenta y los modificó ligeramente. Para representar las matrices eliminó el trazo curvo de la primera línea, dejando las mismas líneas verticales que para determinantes, con lo que para distinguir unos de otras había que recurrir al contexto; por otra parte, en vez de los paréntesis enlazados colocaron un acento circunflejo.

El paso siguiente que da Cayley tiene extrema importancia, pues hasta este momento sólo se había utilizado la notación matricial y el cálculo de matrices —con este u otro nombre— para las sustituciones, mientras que Cayley da el paso decisivo de incluir a las formas bilineales (las que llama "lineo-lineales") y cuadráticas:

> Una notación semejante puede emplearse en la teoría de funciones **cuadráticas**. En efecto, se puede denotar por
>
> $$\begin{array}{l} (\;\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \cdots\;)\!(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\!(x, y, z, \ldots) \\ \left|\begin{array}{cccc} \alpha' & \beta' & \gamma' & \ldots \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right| \end{array}$$
>
> la función (**lineo-lineáire**)
>
> $$\begin{array}{l} (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta \ldots)x \\ +(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta \ldots)y \\ +(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta \ldots)z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ . \end{array}$$
>
> y de allí por
>
> $$\begin{array}{l} (\;a \quad h \quad g \quad \cdots\;)\!(x, y, z, \ldots)^2 \\ \left|\begin{array}{cccc} h & b & f & \ldots \\ g & f & c & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right| \end{array}$$
>
> la función **cuadrática**
>
> $$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \ldots$$
>
> que represento también por
>
> $$(a, b, c \ldots f, g, h \ldots)\!(x, y, z, \ldots)^2.$$

En esta tercera memoria no va más allá en el tema matricial, pero añade la notación $(\diamond)\!(x, y \ldots)\!(^m x', y' \ldots)^{m'} \ldots)$ para nombrar a "una función racional, entera, homogénea y de grados m y m', etc. relativa a las indeterminadas x, y, etc., x', y' etc." En el lugar del diamante coloca coeficientes en casos concretos, como en el ejemplo cuadrático anterior o en este otro: $(a, b, c, d)\!(x, y)^3$ representa la función $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$.

En la cuarta memoria se extiende en el uso de estas notaciones y en la sexta repite el tema de la quinta poniendo el énfasis en el uso de determinantes "gauches" que estudia con la notación simbólica tipo Leibniz-Spotiswoode. No nos ocuparemos de estos asuntos ni tampoco de todo lo tratado en la quinta, que es la más importante, nos limitaremos a lo que tiene directamente significado para recorrer el camino hacia la teoría de matrices.

Antes de entrar a exponer lo que nos parece más relevante de la quinta memoria, nos parece de gran interés destacar la claridad con la que Cayley expresa la forma bilineal (no necesariamente simétrica) que particulariza en la cuadrática (simétrica), su escritura de la función "lineo-lineal" anterior indica que podemos escribir la siguiente igualdad como un traductor de la simbología de Cayley a la matricial que usamos ahora:

$$(\diamond \between \xi, \eta, \zeta \ldots \between x, y, z \ldots) = x^t A \xi, \tag{3.2.6}$$

donde x^t es el la matriz fila de coeficientes $x, y, z \ldots$ (las "variable más próximas" en la terminología de Cayley) y ξ es la matriz columna de coeficientes $\xi, \eta, \zeta \ldots$ (las "variables más lejanas")[28].

La quinta memoria es la más extensa y decisiva. En ella Cayley escribe con su notación matricial la solución dada por Hermite en 1854 al problema de encontrar las transformaciones lineales que conservan una forma cuadrática

$$(\diamond \between x, y, z \ldots)^2 = \begin{array}{|cccc|} \multicolumn{4}{(c)}{a \quad h \quad g \quad \cdots} \\ h & b & f & \ldots \\ g & f & c & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \between x, y, z, \ldots). \tag{3.2.7}$$

Se trata, como ya vimos pero ahora con otra notación, de encontrar una sustitución de las variables $x, y, z \ldots$ por otras $X, Y, Z \ldots$ de modo que

$$(\diamond \between X, Y, Z \ldots)^2 = (\diamond \between x, y, z \ldots)^2. \tag{3.2.8}$$

Sin explicaciones previas, Cayley afirma que

> la solución que ha dado el Sr. Hermite a este problema se puede resumir en una sola

[28] Los términos usados por Cayley son 'nearer" y "further" respectivamente.

ecuación:

$$(X, Y, Z\ldots) = \begin{pmatrix} a & h & g & \cdots \\ h & b & f & \ldots \\ g & f & c & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a & h-v & g+\mu & \cdots \\ h+v & b & f-\lambda & \cdots \\ g-\mu & f+\lambda & c & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & h+v & g-\mu & \cdots \\ h-v & b & f+\lambda & \cdots \\ g+\mu & f-\lambda & c & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a & h & g & \cdots \\ h & b & f & \ldots \\ g & f & c & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} (x, y, z, \ldots)$$

donde $\lambda, \mu, v, \ldots$ son cantidades cualesquiera. [80, 5, p. 284]

Luego Cayley justifica que esta es en efecto la solución, recorriendo a la inversa el camino que había seguido Hermite en 1854b. Hermite había supuesto 3.2.8, con su notación $f(X_1\ldots) = f(x_1\ldots)$, y deducido la sustitución usando las variables auxiliares ξ_i, definidas por $x_i + X_i = 2\xi_i$. Cayley da de salida la sustitución, que sin duda obtuvo traduciendo a matrices la de Hermite, y luego comprueba que verifica 3.2.8 usando las mismas variables auxiliares.

Es interesante aclarar el razonamiento de Cayley con cierto detalle, para lo cual designaremos con letras las matrices anteriores y usaremos modos de escritura actuales según el traductor 3.2.6. La ecuación anterior de Cayley es de la forma $X = A^{-1}PQ^{-1}Ax$. La matriz A es la matriz simétrica de la forma cuadrática, que se ha de suponer no degenerada ($|A| \neq 0$) porque tiene inversa. Dice Cayley que la sustitución anterior se puede descomponer en dos usando las variable intermedias $(\xi, \eta, \zeta\ldots)$, las mismas de Hermite; las dos sustituciones, que Cayley escribe desarrolladas en todo su tamaño como la antes citada, son $Ax = Q\xi$, $AX = P\xi$, tras las cuales afirma Cayley

que dan de inmediato en primer lugar

$$(\diamond)(x, y, z\ldots)(\xi, \eta, \zeta\ldots) = (\diamond)(\xi, \eta, \zeta\ldots)^2 \tag{3.2.9}$$

y después $x + X = 2\xi$, $y + Y = 2\eta$, $z + Z = \zeta$, etc.

Usando 3.2.9 y las ecuaciones $x + X = 2\xi$ llega a 3.2.8 calculando la forma cuadrática en 2ξ, exactamente igual que hizo Hermite.

Destaquemos 3.2.9. Es una igualdad en la que, creemos que por primera vez, aparece en un miembro la forma cuadrática y en el otro su forma bilineal (simétrica) asociada. En notación matricial actualizada se escribe $\xi^t Ax = \xi^t A\xi$. Cayley no explicó como obtenerla, lo dejó para el lector como un cálculo "inmediato". Para deducirla "de inmediato" basta escribir $P = A - \Lambda$ y $Q = A + \Lambda$, siendo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \nu & -\mu \\ -\nu & 0 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz hemisimétrica de parámetros arbitrarios usada por Hermite, quien no la escribió como matriz, y calcular

$$\xi^t Ax = \xi^t P\xi = \xi^t (A - \Lambda)\xi = \xi^t A\xi - \xi^t \Lambda\xi = \xi^t A\xi,$$

porque evidentemente $\xi^t \Lambda\xi = 0$. Cayley tampoco escribió las matrices P, Q en su descomposición $A \pm \Lambda$. No se refiere en ningún momento a la suma de matrices ni al producto de éstas por una cantidad, pero es difícil pensar que no tuvo en mente estas operaciones al deducir las igualdades anteriores. Lo mismo pasa con las $x + X = 2\xi$, que se obtienen simplificando A en

$$A(x + X) = Ax + AX = (A - \Lambda)x + (A + \Lambda)X = 2A\xi.$$

Las operaciones con matrices que hemos realizado suponiéndolas implícitas en los cálculos que Cayley no mostró en su quinta memoria de 1855, aparecen expuestas con claridad completa en la memoria de 1858 [82], por la que se le considera el fundador de la teoría de matrices.

Nos falta decir algo de la última memoria. En ella Cayley recrea a su modo y hace algunas correcciones, así lo declara, a la anterior de Sylvester *An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order* (1851) [328], título que anuncia el problema de la clasificación de haces de cónicas y cuádricas. El problema algebraico es, dadas dos ecuaciones cuadráticas $U = 0, V = 0$ formar otra $U + sV$ cuyo discriminante es un polinomio en s; se trata entonces de buscar:

> en qué grado cada factor de este discriminante puede entrar como factor en los menores primeros, segundos, etc.[29] [80, 7, p. 316]

Se trata pues de primeros intentos por Sylvester y Cayley de resolver el problema que llevaría a Weierstras en 1858 a introducir los divisores elementales. Dice Cayley que su tarea ha sido simplemente generar unos símbolos que expliquen la situación y el algoritmo para su formación. A manera de ejemplo, en el caso $n = 4$,

> el símbolo $\boxed{\begin{matrix}321\\1\end{matrix}}$ denota que el determinante tiene un factor $s - a$ que entra como factor **triple** en el determinante, como factor **doble** en los primeros menores y como factor **simple** en los segundos menores; el otro factor del determinante es un factor simple $s - b$. [80, 7, p. 316]

Cayley indica también que estas consideraciones tienen otra aplicación geométrica a la determinación de las "especies de homografías".

Cayley 1858. La secuencia de dos memorias que vamos aconsiderar ahora fueron publicados en 1858 por la "Royal Society" de Londres en su revista *Philosophical Transactions*. Las comentaremos, la primera con más detalle, por orden de aparición:

1. *A memoir on the theory of matrices.* [82]
2. *A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadric function.* [81]

El famoso artículo de Cayley *A memoir on the theory of matrices* [82] comienza así:

> El término matriz puede ser utilizado en un sentido más general[30], pero en la presente memoria considero sólo matrices cuadradas y rectangulares, y el término matriz usado sin calificativo debe entenderse como una matriz cuadrada; en este sentido restringido, un conjunto de cantidades dispuesto en forma de cuadrado, *e.g.*

$$\begin{matrix} (\ a & b & c\ ) \\ \vert\ a' & b' & c'\ \vert \\ \vert\ a'' & b'' & c''\ \vert \end{matrix} \tag{3.2.10}$$

[29]La expresión "menores primeros, segundos, etc." significa "menores de orden $n - 1$, $n - 2$, etc."

[30]Cayley se referirá posiblemente a las disposiciones de números formando cubos tridimensionales o n-cubos con los que formar "hiperdeterminantes", como hizo en su artículo de 1846 [77].

> se dice que es un matriz. [82, p. 17]

Señala a continuación que la noción de matriz surge como notación abreviada para los sistemas de ecuaciones lineales, que ahora escribe en la forma ya usada en la tercera memoria de 1855. Luego dedica una líneas a trazar un resumen completo del contenido, que en su primera parte es como sigue:

> Se verá que las matrices (atendiendo sólo a las del mismo orden) se comportan ellas mismas como cantidades individuales; pueden ser sumadas, multiplicadas o compuestas, &c.: la ley de la adición de matrices es precisamente la misma que para la adición de cantidades algebraicas ordinarias; en lo que respecta a su multiplicación, (o composición), existe la peculiaridad de que las matrices nos son en general convertibles; sin embargo es posible formar potencias (positivas o negativas, enteras o fraccionarias) de una matriz, y por tanto llegar a la noción de una función entera y racional, o generalmente de cualquier función algebraica de una matriz.

La memoria está dividida en apartados numerados del 1 al 58 que abarcan un total de veinte páginas. Los apartados 1 a 20 desarrollan la primera parte del programa recién descrito, la más elemental. En el primero indica que para que la exposición sea más concisa va a emplear matrices de orden 3, aunque las definiciones, razonamientos, y conclusiones son válidas para matrices de cualquier orden, siempre el mismo para todas la matrices que se combinan. A partir de las operaciones con las sustituciones lineales va definiendo las correspondientes para las matrices, primero la suma $L + M$ y luego la multiplicación de una matriz por una cantidad individual mL; en el desarrollo se encuentran igualdades como $L+M = M+L$, $(L+M)+N = L+(M+N) = L+M+N$, $m(L+M) = mL+mM$, etc. Define la multiplicación o composición de matrices de la forma fila-columna, indicando que es asociativa y no conmutativa; también que la multiplicación por la matriz cero (denotada 0) anula el producto, y la multiplicación por la matriz unidad (denotada 1) no lo altera. En general, una cantidad m puede ser considerada "como *implicando la matriz identidad*" cuando está multiplicada por ella., entonces mL puede verse como un producto de matrices, caso particular en el que sí es conmutativo. Como ejemplo de propiedad asociativa de la multiplicación escribe $LM.NP = L.MN.P$

La definición y notación para la matriz inversa es la hoy habitual, con $LL^{-1} = L^{-1}L = 1$. Inspirado en Jacobi, escribe la inversa de la forma siguiente :

$$\left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{array}\right)^{-1} = \frac{1}{\nabla}\left(\begin{array}{ccc} \partial_a\nabla & \partial_{a'}\nabla & \partial_{a''}\nabla \\ \partial_b\nabla, & \partial_{b'}\nabla, & \partial_{b''}\nabla \\ \partial_c\nabla, & \partial_{c'}\nabla, & \partial_{c''}\nabla \end{array}\right),$$

donde ∇ es el determinante de la matriz, que da por conocido. Indica que la noción de matriz inversa falla cuando el determinante es nulo, en cuyo caso la matriz se considera "indeterminada". En este punto hace un inciso para señalar que

> [...] el producto de dos matrices puede ser cero, sin que ninguno de los factores sea cero, sólo si una de las matrices o ambas son indeterminadas. [82, p. 22]

Finalmente, le resulta inmediato definir las potencias enteras y fraccionarias L^m de una matriz y con todo lo anterior disponer de operaciones racionales con matrices.

La segunda y principal parte de la memoria se dedica a utilizar las operaciones polinómicas con una matriz para obtener el teorema de Cayley-Hamilton y alguna aplicación. En la primera parte había anunciado así sus objetivos en este asunto:

> Obtengo el teorema notable que una matriz cualquiera satisface una ecuación algebraica de su mismo orden, siendo el coeficiente de la mayor potencia la unidad, y los de las otras potencias funciones de de los términos de la matriz, siendo en efecto el último coeficiente el determinante; [...] [82, p. 17]

Dedica a este teorema los apartados 20-25, pero no a dar una prueba formal del mismo sino a comprobarlo para $n = 2, 3$. Con $M = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)$ se verifica:

$$\begin{vmatrix} a - M & b \\ c & d - M \end{vmatrix} = M^2 - (a + d)M^1 + (ad - bc)M^0 = 0. \tag{3.2.11}$$

Cayley enuncia así el teorema, obviando su demostración:

> ... el determinante que tiene como matriz una matriz dada menos la misma matriz considerada como una cantidad individual implicando la matriz unidad, es igual a cero. [...]

> No creo necesario emprender la tarea de una demostración formal del teorema en el caso general de una matriz de cualquier grado. [82, p. 24]

Termina afirmando que, como consecuencia del teorema de Cayley-Hamilton[31], toda función racional de una matriz de orden n se puede expresar como una función racional entera de orden a lo sumo $n-1$. Más adelante (nº 28), Cayley se refiere a la dificultad que encierra la escritura de 3.2.11, en la que se considera la matriz M como una cantidad. Explica entonces que puede pensarse en la ecuación $|M - XId| = 0$ con la indeterminada X y en ella sutituir la indeterminada por M. Si X_1, X_2 son la raíces de la ecuación pensadas como cantidades implicando la matriz identidad, entonces se verifica la igualdad matricial $(M - X_1)(M - X_2) = 0$, ejemplo de producto nulo de matrices no nulas. En estas consideraciones están implícitos también los números complejos, pero Cayley no hace ninguna precisión sobre las "cantidades algebraicas ordinarias" que utiliza.

El resto de la memoria está dedicada a asuntos diversos en los que no nos vamos a detener, entre ellos el cálculo de raíces de matrices, al estudio de las matrices que conmutan con una dada, las matrices traspuestas —con la propiedad $tr.(LM) = tr.M.tr.L$—, una comparativa del producto de matrices de orden dos con las operaciones de los cuaternios —con $LM = -ML$, $L^2 = -1 = M^2$ y $N = LM$ resulta que L, M, N operan como los cuaternios i, j, k— y con las funciones $\varphi x = \frac{ax+b}{cx+d}$ que ocupan "las investigaciones de Babbage y otros". Para terminar, Cayley dedica unos apartados (52-58) a las matrices rectangulares, que compone por fila-colunmna cuando la forma de las matrices lo permite[32].

La segunda memoria de Cayley de 1858, *A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadric function*, está dedicada, como fácilmente se adivina por su nombre, a las formas bilineales, que considera en toda su generalidad desde el punto de vista matricial, como había iniciado en la memoria anterior del mismo año, limitando también la exposición al orden tres. La memoria consta de tan solo 8 páginas y está dividida

[31]Sobre la historia del teorema de Cayley-Hamilton véanse los artículos [95], [96]. de 1978 y 1992 respectivamente. En una carta de 1857 –fechada el 19 de noviembre, pocas semanas antes de la fecha de entrada del manuscrito de Cayley en la revista *Transactions*, que fue el 10 de diciembre— Cayley escribe a Sylvester anunciándole que había obtenido un teorema "muy notable" y que trabajaba en una generalización sustituyendo la matriz identidad en $M + xId$ por $M + xL$ siempre que M, L sean permutables y modificando la definición del determinante. La atribución del teorema a "Cayley-Hamilton" fue iniciativa de Sylvester en 1884 [336], que refiere a Hamilton porque obtuvo un resultado equivalente en artículos sobre cuaternios de 1853 y 1862.

[32]Se limita a ver ejemplos de cálculo entre matrices rectangulares y sus traspuestas, incluyendo el juego con matrices fila y matrices columna que le hubiera permitido expresar las formas bilineales con una sisntaxis matricial mucho más parecida a la actual.

en 18 apartados. Se inicia en la consideración del problema de encontrar las sustituciones que dejan invariante una forma cuadrática, recordando los trabajos sobre el tema de Euler, Hermite y él mismo, que ya hemos mencionado con anterioridad. El objetivo de Cayley en esta memoria es extender los resultados anteriores a una forma bilineal general, es decir, formular y resolver el Problema de Cayley-Hermite con toda generalidad para formas bilineales. Hawkins considera que es muy importante porque en ella se puede ver la eficiencia del cálculo matricial que llevó finalmente a la consolidación de la teoría de matrices.

Considera la "cuadrática bipartita"

$$\left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \hline a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{array}\right)\!\!\big(x, y, z\big)\!\!\big(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\big)$$

que representa $(ax+by+cz)\mathrm{x}+(a'x+b'y+c'z)\mathrm{y}+(a''x+b''y+c''z)\mathrm{z}$. Con nuestro traductor 3.2.6 la escribiremos $X^t\Omega x$[33]. Cayley hace sustituciones $x = Px_1$ y $X = QX_1$ con los que cambia la forma bilineal a $X_1^tQ^t\Omega Px_1$ y se plantea determinar las sustituciones para que la nueva forma bilineal sea igual a la originaria.

Primero aplica el método de Hermite, que llama "*à-priori*" porque busca la solución a partir del enunciado del problema[34], utilizando como él, pero ahora dos, variables auxiliares dadas por $x+x_1 = 2\xi$, $X+X_1 = 2\Xi$; operando según la pauta de Hermite pero en clave matricial bilineal, concluye este teorema que damos en su propia notación y aplicando el traductor:

Siendo Υ una matriz arbitraria, si

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \ (\Omega^{-1}(\Omega-\Upsilon)(\Omega+\Upsilon)^{-1}\Omega\,)\!(x_1, y_1, z_1), \\ (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) &= \ ((tr.\Omega)^{-1}(tr.\overline{\Omega+\Upsilon})(tr.\overline{\Omega-\Upsilon})^{-1}tr.\Omega\,)\!(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1, \mathrm{z}_1), \end{aligned}$$

entonces $(\Omega\,)\!(x, y, z\,)\!(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = (\Omega\,)\!(x_1, y_1, z_1\,)\!(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1, \mathrm{z}_1)$.

---

[33]Usando mayúsculas porque con la notación de Cayley, que sólo modifica el tipo de letra, ordinaria o cursiva, es más difícil observar las diferencias.

[34]Podríamos también decir que es el método "analítico".

Siendo Υ una matriz arbitraria, si

$$x = (\Omega^{-1}(\Omega - \Upsilon)(\Omega + \Upsilon)^{-1}\Omega)x_1,$$
$$X = (((\Omega)^{-1})^t(\Omega + \Upsilon)^t((\Omega - \Upsilon)^t)^{-1}\Omega^t)X_1$$

entonces $X^t\Omega x = X_1^t\Omega x_1$.

Probado el teorema por el método analítico de Hermite, quiere considerarlo de nuevo mediante verificación "*à posteriori*"[35], como hizo en su quinta memoria de 1855; es decir, toma las fórmulas de las sustituciones y verifica que cumplen la condición de invarianza respecto a Ω, lo que le permite desplegar con eficacia el cálculo matricial.

En el resto de la memoria considera el caso en que las dos sustituciones son iguales, concluyendo que entonces la sustitución que da la automorfía es

$$P = Q = \Omega^{-1}(\Omega - \Upsilon)(\Omega + \Upsilon)^{-1}\Omega,$$

donde Υ es de la forma siguiente, siendo Υ_1 una matriz hemisimétrica:

$$\Upsilon = -(\frac{1}{2}(\Omega^{-1} + (\Omega^{-1}))(\frac{1}{2}(\Omega^{-1} - (\Omega^{-1}))\Upsilon_1 + \Upsilon_1.$$

Finalmente enuncia estas dos situaciones particulares importantes:

Si Ω es una matriz simétrica, entonces Υ es una matriz hemisimétrica arbitraria.

Si Ω es una matriz hemisimétrica, entonces Υ es una matriz simétrica arbitraria.

La memoria que publicó en 1866, también en los *Transactions* de Londres, bajo el título *A supplementary memoir on the theory of matrices* [83] es una continuación de las dos de 1858 que acabamos de comentar. En ella retoma el Problema de Cayley-Hermite en el caso bilineal, refiriéndose al ejemplo considerado por Hermite en su artículo 1855b reseñado en su momento. Dice Cayley que a este ejemplo se le puede aplicar su teoría general del segundo artículo de 1858 recién comentado, pero que el ejemplo es "extremadamente interesante" y merece una "investigación independiente", a la que dedica las once páginas del artículo, que serían bastantes menos con la actual notación condensada.

[35]Podríamos también decir que es el método "sintético"

No cabe duda que durante el periodo 1855-58 Cayley consigue desplegar una teoría de matrices con todos sus ingredientes, un cálculo algebraico bien establecido y algunos teoremas relevantes. La motivación para este nuevo "método algebraico" había sido dada por el propio Cayley y, sobre todo, por Hermite, que mostró el papel importante que estos problemas jugaban en distintos campos de la matemática. La teoría de matrices de Cayley representa un paso adelante muy significativo respecto al germen de la misma que presentó Eisenstein en 1844. Para Cayley las matrices sirven para representar las sustituciones y las propias formas, y operan entre sí independientemente de su significado.

No obstante, Hawkins[36] afirma que la teoría de matrices de Cayley no tuvo repercusión en Europa continental hasta aproximadamente 1880. Uno de los argumentos explicativos de Hawkins es que Cayley publicó en una revista generalista de ciencias de la Royal Society, no en una revista específica de matemáticas. Añadimos que otro motivo pudo ser que los problemas matemáticos en los que se había manifestado eficaz el lenguaje y la teoría de las matrices eran cultivados por un grupo más bien minoritario de matemáticos.

Abona esta idea que en la década siguiente se produjo en Francia otra exposición resumida pero bastante completa de la teoría de matrices, por Laguerre, que tampoco tuvo especial repercusión. Por una parte fue publicada en una revista francesa de ciencias en general, la de la Escuela Politécnica, y el problema matemático de aplicación de las matrices era una continuación de las investigaciones aritméticas de Eisenstein-Hermite.

Laguerre 1867. El artículo de Edmond Nicolas Laguerre[37] (1834-1886) *Sur le calcul des sytèmes linéaires* [233] es un "extracto de un carta dirigida al Sr. Hermite" que llena cincuenta páginas en la revista de la Escuela Politécnica de París, en la que el autor ejercía como tutor siendo capitán de artillería. Los "sistemas lineales" del título son las matrices, recordemos que era la terminología que sigue a Eisenstein-Hermite, de los que Laguerre es un claro seguidor. Si el título dice "cálculo" es porque el autor usa matrices para calcular en ámbitos en los que sigue la obra de la pareja de precedentes recién citada: las formas cuadráticas y las funciones abelianas, con preferencia por los asuntos aritméticos que suscitan. Estos temas de aplicación ocupan las últimas secciones IV a VIII del artículo, que ocupan 32 páginas. Son las 18 páginas restantes, secciones I a III, las que se ocupan de presentar la teoría de matrices que Laguerre quiere aplicar a los temas mencionados. En

[36]Véase [178, 180].

[37]Laguerre se graduó en la Escuela Politécnica en 1854 y siguió carrera militar. En 1864 regresó a la Escuela como profesor y en 1874 pasó a ser examinador. Fue nombrado profesor de física matemática en el College de France en 1883.

este fragmento inicial no cita ninguna referencia, su notación es a veces muy personal y no permite encontrar antecedentes, pero hay detalles, también notacionales, que permiten pensar que conoció la obra de Cayley, aunque no la siguió en otros aspectos. Como Cayley, no escribe en general sino sólo en órdenes pequeños, aunque llega a usar $n = 4$, y presenta, sobre todo al principio, lo que más parece un repaso de cosas vistas —dice al inicio que el término "sistema lineal" es de uso habitual— dispuesto para unificar la notación que usará en la parte principal del artículo.

Lo primero que llama la atención es que Laguerre denota los sistemas lineales como cuadros de números sin límites verticales, ni rectos ni curvos. Se lee, por ejemplo:

> ... el *sistema lineal*
>
> $$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix}$$
>
> se representa por la letra mayúscula A. [233, p. 215].

La suma y el producto de sistemas lineales los define sin más indicando que se cumplen todas las reglas aritméticas excepto la conmutatividad del producto. Afirma que siempre representará los sistemas lineales con letras mayúsculas y sus elementos con minúsculas, excepto para los "sistemas simples", que define por su descripción: tienen un elemento m repetido en la diagonal principal y el resto de los elementos son 0, y denota con la misma letra m, teniendo un caso evidente de conmutatividad, pues $mA = Am$.

También es original al definir el sistema transpuesto de A, pues él lo llama *sistema inverso* y lo denota A_1, de modo que sus reglas operativas son:

$$\begin{aligned} (A + B + C + \cdots + L)_1 &= (A_1 + B_1 + \cdots + L_1) \\ (ABC \cdots KL)_1 &= L_1 K_1 \cdots C_1 B_1 A_1 \end{aligned}$$

Laguerre da por supuesto el conocimiento de los determinantes, y con ellos define [233, p. 218-219]:

> Dado A un sistema cualquiera, el sistema del mismo orden formado por los determinantes menores de primera especie se llama sistema recíproco de A, y se designa por A_0. Por ejemplo, si
>
> $$A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}, \quad A_0 = \begin{matrix} d & -b \\ -c & a \end{matrix}$$

pero no deja de advertir que $AA_0 = a$, $(A_0)_0 = a^{n-2}A$, siendo a el sistema simple correspondiente al determinante de A, y a^{n-1} el determinante de A_0; se cumplen además las reglas

$$(ABC\cdots KL)_0 = L_0K_0\cdots C_0B_0A_0,\ \ A_{10} = A_{01},\ A_{101} = A_{011} = A_0.$$

Como Cayley, denota por ∇M al determinante de un sistema M y enuncia el teorema del producto $\nabla(ABC\cdots) = \nabla A\cdot\nabla B\cdot\nabla C\cdots$

En su afán porque todos los elementos de una fórmula sean matrices del mismo orden, representa con Ω el sistema cuyo primer elemento es 1 y los demás son ceros para poder escribir $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ en forma matricial:

$$\begin{matrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} x & y \\ 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \times \begin{matrix} x & 0 \\ y & 0 \end{matrix},$$

que se puede escribir también en la forma $\Omega f = X_1AX$, de modo que introduce un uso de matrices fila y columna vistas como matrices cuadradas. Así termina la primera sección.

La segunda sección está dedicada al teorema de Cayley -Hamilton, que verifica para $n = 2$ afirmando que vale en general: siendo d el determinante de A, se tiene

$$\nabla(A-\lambda) = d - m\lambda^2 + \cdots + (-1)^n\lambda^n,$$

$$A^n - sA^{n-1}\cdots \pm mA \pm d = 0,$$

Seguidamente deduce una nueva fórmula,

$$A_0 = m - pA\ldots \pm sA^{n-2} \mp A^{n-1},$$

y termina realizando nuevos cálculos de sistemas recíprocos. Usando la notación $\varphi(\lambda) = \nabla(A-\lambda)$, y siendo f un polinomio de grado a lo sumo $n-1$, con $\nabla f(A) = \rho$, calcula

$$[f(A)]_0 f(A) = \rho,\ \ (A-\rho)_0(A-\rho) = \varphi(\rho) - \varphi(A).$$

En la tercera sección estudia las funciones $f(A,B)$, sólo en segundo orden “para no entrar en desarrollos demasiado largos”. Prueba que

> toda función entera de A, B, puede ponerse bajo la forma
>
> $$m + pA + qB + rAB,$$
>
> [...] si los coeficientes en la función dada son enteros, m, p, q, r serán también enteros. [233, p. 230]

Terminando ya, declara la importancia que tendría alcanzar una "forma canónica" para toda función entera $f(A, B)$, con lo que sería más accesible calcular además su determinante y su sistema recíproco. Como ya hemos dicho, Laguerre desarrolló este cálculo de sistemas lineales para su uso en cuestiones aritméticas en la línea de Eisenstein-Hermite, pero en otros artículos de la década siguiente los aplicó también en cuestiones de geometría y de ecuaciones diferenciales [234], [235].

Para que llegara la universalización del uso de las matrices fue necesario mostrar su eficacia en problemas de más amplia repercusión general que los tratados hasta ahora con su concurso. Hubo que esperar a que aumentaran las investigaciones sobre formas cuadráticas y bilineales, y para ello tuvo que concretarse mucho más su relación con el estudio de las ecuaciones diferenciales y otros temas centrales de las matemáticas. En este estudio de problemas lineales que prepararon la universalización del uso de las matrices tuvo un papel central la escuela de Berlín.

3.2.2 Sylvester en los ochenta

Es justamente Sylvester quien más contribuye a reivindicar y difundir el concepto y el término "matriz" y su teoría, a través de un gran número de artículos de diferente extensión publicados entre 1882 y 1884. Todos están recogidos en la completa bibliografía sobre matrices que ofrece Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882-1948) en el apéndice II de su libro *Lectures on Matrices* (1934) [356][38]. En los 17 trabajos de Sylvester que aparecen registrados en 1884 se observa una nueva imagen de las matrices, que el autor ha ido evolucionando durante los últimos dos años. En palabras de Hawkins, las publicaciones de Sylvester en estos primeros años ochenta:

[38]En la *List of writings on the theory of matrices (1857-1893)* que ofrece Muir en 1898, [263, p. 225-228] no está el registro completo de los artículos que mencionamos a continuación.

> [...] contienen poco en cuanto a resultados matemáticos sustanciales, pero transmitían un entusiasmo por el tema, que junto con lo inconcluyente de muchas de las propuestas matemáticas, atrajo la atención hacia el tema de varios matemáticos probablemente no familiarizados con los artículos de Cayley, Laguerre y Frobenius. [179, p. 102].

Para dar una idea del significado de estos trabajos en la historia del "álgebra lineal" —término que parece empezar a sugerirse en uno de ellos— mencionaremos detalles del contenido de algunos de los publicados en Francia (*Comptes Rendus*) y en EEUU (*Johns Hopkins University Circulars* y *American Mathematical Journal*), que son los que más contribuyeron a expandir el tema fuera de las Islas Británicas:

Sylvester 1882a. *Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires* [332],
Sylvester 1882b. *Sur les racines des matrices unitaires* [333],
Sylvester 1882c. *A word on nonions* [334],
Sylvester 1884a. *On quaternions, nonions, sedenions, etc.* [338],
Sylvester 1884b. *Sur la résolution générale de l'équation linéaire en matrices d'un ordre quelconque* [339],
Sylvester 1884c. *Lectures on the principles of universal algebra* [337].

Haremos algún ligero comentario sobre cada uno de ellos.

Sylvester 1882a. Este primer artículo sirve como enlace con la situación anterior, pues en él se opera con determinantes y con sustituciones, pero no con matrices. Al igual que para Frobenius la noción de matriz estaba oculta dentro de la forma bilineal, Sylvester hace lo propio con las sustituciones.

Empieza Sylvester con un comentario sobre la diferencia entre los determinantes ordinarios o *absolutos*, y los determinantes de una sustitución. En el primer caso se refiere a lo que hemos llamado la visión algorítmica de los determinantes, según la cual son objetos matemáticos aritméticos en sí mismos, mientras que en el segundo se trata de la visión funcional, en la que el determinante es un elemento asociado a una función, en este caso a una sustitución; aquí el elemento absoluto sería la sustitución y el determinante un mero objeto auxiliar. Sylvester ejemplifica el doble punto de vista con la "ley de combinación", es decir, el producto. Considera que un determinante

$$\begin{vmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{vmatrix}$$

tiene dos tipos de inverso dados por

$$\begin{vmatrix} \frac{b}{\Delta} & \frac{-\beta}{\Delta} \\ \frac{-\alpha}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{b}{\Delta} & \frac{-\alpha}{\Delta} \\ \frac{-\beta}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{vmatrix} \tag{3.2.12}$$

donde $\Delta = ab - \alpha\beta$. El inverso de la izquierda en (3.2.12) corresponde al determinante absoluto (que opera con el producto fila-fila), mientras que a la derecha en (3.2.12) aparece el inverso para el mismo determinante visto como determinante de una sustitución (ahora se multiplica por fila-columna)

Luego, plantea un determinante cualquiera y añade el término $-\lambda$ a cada elemento de la diagonal, y así obtiene una función de λ. Denomina "raíces lambdaicas" a las soluciones de la ecuación que resulta[39], y da el siguiente teorema, que engloba a otros casos particulares expuestos antes:

> Siendo *i una cantidad conmensurable cualquiera, las i-ésimas potencias de las raíces* lambdaicas *del determinante de una sustitución son idénticas con las raíces* lambdaicas *de la potencia i-ésima del determinante.* [332, p. 56-57]

Aplica este teorema para resolver el problema de encontrar la potencia i-ésima de una sustitución dada, para cualquier número racional i, en el caso de raíces distintas.

Sylvester 1882b. Este artículo es una continuación del anterior en cuanto al tema tratado —ambos publicados en Comptes Rendus—, pero justamente este segundo ya está planteado en términos matriciales, dedicado a la obtención de raíces de la matriz identidad ("unitaire"), que también se dan en los números complejos, y de la matriz nula ("zéroïdale"), lo que plantea el estudio de los que se llamaron "elementos nilpotentes", que no se encontraban en los números habituales, aunque sí en las congruencias. El producto de

[39] Es nuestra bien conocida ecuación $|A - \lambda Id| = 0$, que Sylvester no escribe con símbolos. Al año siguiente, publica en Inglaterra *On the equation to the secular inequalities in the planetary theory* [335], donde renombra las raíces lambdaicas, como "raíces latentes de una matriz", latentes en un sentido similar a como el vapor se puede decir que está latente en el agua o el humo en las hojas de tabaco, así lo explica el autor.

matrices considerado es el que se ajusta a la combinación de sustituciones lineales (fila-columna). El autor señala que la extracción de raíces de una matriz unitaria de segundo orden se corresponde con encontrar una función del tipo[40] $\varphi(x) = \frac{ax+\alpha}{bx+\beta}$ tal que $\varphi^{\mu}(x) = x$.

En este artículo Sylvester ha iniciado la comparación del cálculo de matrices con otros sistemas cerrados por operaciones de tipo aritmético. Lo hizo con la funciones de Babbage —lo que ya había adelantado Cayley en 1858— y en el artículo que comentaremos a continuación lo repitió, de nuevo emulando a su colega y amigo Cayley, con los cuaternios de Hamilton.

Sylvester 1882c. Para relacionar las matrices 2×2 y los cuaternios, establece que dos matrices u, v satisfacen las ecuaciones $vu = -uv$, $u^2 = v^2 = -1$, si y solamente si "$Det.(z + yu + xv) = x^2 + y^2 + z^2$", donde en la expresión de la matriz los números $x, \ldots$ representan su producto por la matriz identidad[41]. Tomando dos matrices u, v de este tipo de matrices se opera con las combinaciones lineales de $\{1, u, v, uv\}$ igual que con los cuaternios.

Luego extiende estos resultados para matrices 3×3, para formar un sistema de fabricación propia, el de los noniones ("nonions") que califica como "análogo a los cuaternios de Hamilton"[42] Esta vez toma dos matrices u, v verificando las condiciones $vu = \rho uv$, $u^3 = v^3 = -1$, con ρ una raíz cúbica de la unidad, condiciones que son equivalentes a[43] $Det.(z + yv + xu) = z^3 + (y + x)(\rho y + \rho^2 x)(\rho^2 y + px) = x^3 + y^3 + z^3$. En estas condiciones[44], se opera con las combinaciones lineales de $\{1, u, v, u^2, uv, v^2, u^2 v, uv^2, u^2, v^2\}$ con reglas "análogas" a las de los cuaternios. A propósito de estas nueve matrices, Sylvester indica en una nota:

> Estas formas pueden deducirse de un álgebra dada por el Sr. Charles S. Pierce (Logic of Relatives, 1870). [334, p. 242]

En los derroteros tomados por Sylvester el año 1882 podemos apreciar que va vinculando la defensa de las matrices como objeto matemático con los intentos de extender los sistemas

[40]Incluye referencias a la obra de Babbage *Sur le Calcul des fonctions*, y al tomo II del *Cours d'Algèbre supérieure* de Serret.

[41]Da como ejemplo: $u = \begin{vmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{vmatrix}$, $v = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, con $\theta = \sqrt{-1}$.

[42]En los dos años siguientes presenta dos trabajos que llevan el mismo título *Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton* [340].

[43]En Sylvester 1884a reconoce un error en la equivalencia anterior, para que se cumpla es necesario añadir la condicón $(uv)^3 = 1$.

[44]Propone como ejemplo: $u = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \end{vmatrix}$ y $v = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \end{vmatrix}$.

numéricos más allá de los complejos y los cuaternios por métodos formales. Por esta vía se llegará a la implantación definitiva de la teoría de matrices. Esto, que enlaza con el contenido de la sección siguiente, se concretará más en los trabajos de 1884 que siguen, de los que tan sólo vamos a recoger algunos párrafos propagandísticos de Sylvester.

Sylvester 1884a. Aunque en el título de este artículo, publicado en las *Circulars* de la Universidad Johns Hopking, aparecen nombrados los sistemas de números generalizados ("cuaterniones, noniones, sedeniones, etc,") el objetivo del trabajo no se refiera a ellos, que aparecen como subproductos, sino que plantea determinar condiciones necesarias y suficientes para que dos matrices m, n verifiquen una relación del tipo $mn = knm$, siendo k una raíz de la unidad. Los desarrollos más detallados los realiza en orden 2 y 3, haciendo uso de propiedades de las "raíces latentes " de las matrices. La notación que utiliza ya pone de manifiesto que trata a las matrices como cantidades con las que operar aritméticamente con alguna restricción. En este sentido, interesa señalar el comentario final de Sylvester sobre las "cantidades múltiples":

> Me parece que esta vasta nueva ciencia de cantidades múltiples se eleva muy por encima del Álgebra ordinaria o de los cuaternios, como la Mecánica Celeste sobre la "Dinámica de la Partícula" o un par de partículas, [...] y está bien calificada con el nombre de Álgebra Universal como el Álgebra del pasado con el nombre de Aritmética Universal. [338, p. 132]

Como en el caso anterior, de los dos últimos artículos nos limitamos a destacar su alegato en favor de estos desarrollos algebraicos. De Sylvester 1884b recogemos:

> Lo que más interesa de los resultados recientemente adquiridos que tengo el honor de presentar a la Academia, es la unión o bien la anastomosis de la que ofrecen un ejemplo sorprendente y totalmente inesperado entre dos grandes teorías del *Álgebra moderna* y del *Álgebra nueva*, de las que una se ocupa de las transformaciones lineales, y la otra de la cantidad generalizada, de manera que del mismo modo que Newton definió el Álgebra ordinaria como la Aritmética universal, se podría caracterizar igualmente este Álgebra como el Álgebra universal, o al menos como una de sus ramas más importantes. [339, p. 199]

En el texto anterior encontramos una primera alusión aproximada a lo que hoy entendemos por "álgebra lineal", que sería lo que Sylvester refiere como el "álgebra moderna [que] se ocupa de las transformaciones lineales".

Para terminar, recogemos de Sylvester 1884c un fragmento de su “Apoteosis de la cantidad algebraica”[45]:

> Una matriz de una forma cuadrada surge históricamente de la noción de sustitución lineal realizada sobre un sistema de variables o “carriers”; considerada aparte del determinante, que puede ser, y durante un tiempo lo fue casi exclusivamente, utilizado para representarla, se convierte en un *esquema* vacío de operación, pero de conformidad con el principio de Hegel de que la cantidad negativa es el camino a través del cual el pensamiento llega a otra y más plena positiva, sólo por un momento pierde el atributo de cantidad para emerger de nuevo como cantidad, si se acepta que ese término está adecuadamente aplicado a cualquier objeto de una operación funcional, de un impensado y superior tipo, y por así decirlo, en una forma glorificada, —como un organismo compuesto de partes discretas, pero teniendo una unidad indivisible y esencial como un todo propio. [...] La concepción de la cantidad múltiple surge así a la vista. [...]
>
> Ya en los Cuaternios (que, como pronto se verá, no son más que las matrices de orden más simple observadas bajo un aspecto particular) se ha dado un ejemplo del Álgebra liberada del yugo del principio conmutativo de la multiplicación —una emancipación algo parecida a la de la Geometría de Lobatchewski del célebre axioma empírico de Euclides; y más tarde, los Pierces, padre e hijo (pero con posterioridad a 1858) habían prefigurado la universalización de la teoría de Hamilton, y emitido una opinión en el sentido que probablemente podría descubrirse que todos los sistemas de símbolos algebraicos sujetos a la ley asociativa de la multiplicación fueran idénticos a transformaciones lineales de esquemas susceptibles de representación matricial.

Entre los matemáticos que fueron influídos por las propuestas de Sylvester que acabamos de comentar se encuetra el checo Eduard Weyr (1852-1903), que tuvo acceso a lo publicado por Sylvester en *Comptes Rendus*, lo que completó y mejoró en un artículo, *Sur la théorie des matrices* [362], publicado en la misma revista francesa el año 1885. En el listado de Wedderburn, aparecen registrados seis trabajos de Weyr, el anterior y otro más (2º y 3º de la lista) publicados en *Comptes Rendus*. Aquí nos referiremos al sexto y último, un artículo de setenta páginas que se titula *O theorii forem bilinearnych / Teoría de formas bilineales* [363], publicado en checo en 1889 y al año siguiente traducido al alemán y publicado en una revista germana de matemáticas y física. Este trabajo ha sido ampliamente estudiado

[45]Pertenece a la primera lección, “Conceptos y definiciones preliminares”, de su curso sobre “álgebra universal”.

en la tesis doctoral de F. Brechenmacher (2006)[46], quien entre otras cosas, establece un paralelo entre los cinco primeros capítulos de la memoria de Weyr y la memoria de matrices de Cayley. Por su parte, en su extenso artículo, además de difundir la teoría de matrices de Cayley, Weyr pone de manifiesto el vínculo de la misma con los trabajos de Frobenius, lo que expresa en una breve introducción, de este modo:

> Las reglas para el cálculo con matrices dadas por Cayley en su artículo "A memoir on the Theory of Matrices", Philos. Transactions of the R. Society, London 1859, vol. 148, se aplican directamente para la composición de formas bilineales [Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. Journal für Mathematik. Bd. LXXXIV, §. 1 sqq].

Weyr se refiere a los trabajos que ya hemos comentado, sobre matrices de Cayley 1858, y sobre formas bilineales de Frobenius 1878.

Resulta curioso que aunque Weyr destaca en su obra la teoría de matrices, mantiene las formas bilineales en el título. Esto hace decir a Muir, después de describir los diez apartados de la memoria de Weyr, que el título del documento bien podía haber sido *Teoría de matrices con una aplicación a formas bilineales y una aplicación a ecuaciones diferenciales*[47]. Años más tarde, el mismo Frobenius publica un artículo, *Sobre matrices permutables / Über vertauschbare Matrizen* (1896) [158], en el que aparecen las "matrices" en el título y alguna en el interior como simple cuadro de números, pero el álgebra que desarrolla en el texto sigue siendo de formas bilineales.

3.3 Las matrices en los libros

Al igual que hicimos con los determinantes, vamos a ver que los asuntos relativos a sustituciones, formas bilineales y matrices, que se fueron conociendo mejor a través de artículos en revistas de investigación, acaban siendo sistematizados, al menos parcialmente, y llevados a los libros con un desfase temporal variable. De este modo, parcelas de conocimiento van adquiriendo una difusión mucho mayor en la comunidad matemática y en la enseñanza superior. Seleccionaremos unos pocos ejemplos que nos parecen los más significativos por su mayor difusión y por haber llegado a tener alguna presencia en la matemática

[46]Veáse también la tesis de J. Becvar (2007).
[47]Véase [265, p. 3-4].

española.

En la completa bibliografía sobre matrices y temas relacionados dada por Wedderburn (1934)[48], la inmensa mayoría de los registros corresponden a artículos en revistas, pero también hay libros, en primer lugar los dedicados a los cuaternios y la *Teoría de la extensión / Die Ausdehnungslehre* de Grassmann (1844, 1862) [171, 172] y el álgebra universal de Whitehead (1898) [364], junto con otros que pueden incluir matrices u otros temas lineales por ser libros de teoría de números, geometría o ecuaciones diferenciales. Pero los primeros libros que se encuentran en dicha lista dedicados específicamente a los asuntos algebraicos lineales son los de Muth (1899), Bôcher (1907) y Cullis (1913). Mencionamos también la obra de Levi (1916) [241] que cubre otros temas algebraicos, a la que dedicaremos un estudio original detallado en el último capítulo de ésta memoria. Aunque no deja de ser interesante, dejaremos de lado el tercero de los antes mencionados[49]. Como compensación por estas pérdidas, incluiremos en nuestro relato el libro de Weber (1895) por la importancia que tuvo como renovador de lo que se entendía como el "álgebra superior" y porque fue el representante máximo de esta materia durante años. Luego daremos una sucinta descripción de las obras mencionadas de Muth y Bôcher. Weber y Muth sintetizan los avances de la escuela algebraica alemana, mientras que aparece como novedad de este periodo en torno a 1900 la presencia de una obra de autor norteamericano, Bôcher, y adaptada a la enseñanza superior en su país.

3.3.1 Los alemanes Weber y Muth a finales del XIX

H. Weber, 1895.

Tratado de álgebra / Lehrbuch der Algebra [355]

Esta extensa obra en un buen ejemplo del descenso al nivel pedagógico superior de buena parte de los adelantos del álgebra en la segunda mitad del siglo XIX en Europa, canalizados a través de la hegemónica matemática alemana. Se inició en dos volúmenes[50], cada uno

[48]Cubre desde 1853 hasta 1933, con un total de 549 títulos. La primera obra que propone es el libro sobre cuaternios de Hamilton [175].

[49]El autor inglés Cuthbert Edmund Cullis (18**-1954), escribió la obra [97] como resultados de sus lecciones en la Universidad de Calcuta durante el invierno 1909-1910. La obra acabó teniendo tres volúmenes, los otros dos publicados en 1918 y 1925, respectivamente.

[50]Un volumen sobre funciones elípticas y números algebraicos, publicado en 1891 se convirtió en el tercer volumen cuando tuvo la segunda edición en 1908. El primer volumen tuvo más difusión por su

de los cuales se divide en varios “Libros” con el siguiente contenido:

Volumen I (xvi+ 708 páginas).— Libro I: *Los principios*, contiene funciones racionales, determinantes, eliminación, y una introducción a la teoría de invariantes; Libro II: *Las raíces*, contiene la resolución numérica de las ecuaciones algebraicas; Libro III: *Las cantidades algebraicas*, contiene la resolución general de las ecuaciones algebraicas y la teoría de Galois.

Volumen II (xvi+ 796 páginas).— Libro I: *Grupos*, contiene los inicios de la teoría abstracta de grupos, generales y abelianos; Libro II: *Grupos lineales*, contiene grupos de sustituciones lineales y teoría de invariantes; Libro III: *Aplicaciones de la teoría de grupos*, contiene aplicaciones a la teoría de ecuaciones algebraicas; Libro IV: *Números algebraicos*, contiene cuerpos algebraicos y cuadráticos, cuerpos de clases y números trascendentes.

Leo Corry se ha referido al libro de Weber[51] desde el punto de vista de la imagen que el álgebra ofrece en relación con el “cambio de imagen”, la palabra clave de Corry, que produjo el *Moderne Algebra* de B.L. van der Waerden en 1930 [344]; desde este punto de vista Weber representa la imagen anterior que va a cambiar al iniciarse la tercera década del siglo XX. Este enfoque hacia la llegada de la nueva imagen estructural del álgebra, hace que los puntos de atención de Corry sean los conceptos de número y sus operaciones y los grupos y cuerpos relacionados con la teoría de Galois, sin prestar atención a los aspectos lineales contenidos en la obra, en los que centraremos nuestra atención.

El plan diseñado por Weber para su exposición actualizada del álgebra no contempla como un conjunto los métodos algebraicos lineales, sino que van apareciendo en diversos lugares a lo a largo de los dos volúmenes del libro.

El Libro I del primer volumen está dividido en cinco capítulos, el primero de los cuales ofrece el conocimiento básico sobre las funciones enteras y racionales de una y varias variables, dejando el estudio general de las raíces para el capítulo tercero y las funciones simétricas y la eliminación para el cuarto. En estos capítulos puede advertirse que el libro conserva el modo funcional de abordar el álgebra, por ejemplo tratando en el capítulo primero, §16, el “desarrollo de una función fraccionaria según las potencias decrecientes de la variable”, técnica que hemos visto manejar a Jacobi y Weierstrass. En el capítulo tercero introduce la continuidad (toda la obra trabaja sobre el número real y el complejo)

traducción al francés de la segunda edición alemana de 1898, publicada el mismo año.

[51] Primero en el libro [89, pp. 34-45] y luego en el artículo resumen [88]. En estas obras, y en [90], puede verse una nota biográfica de Weber.

para demostrar el teorema fundamental del álgebra.

Entre estos temas sobre funciones se intercalan en el capítulo segundo los determinantes, que plantea desde el punto de vista algorítmico utilizando la notación a_i^j para el cuadro de números —no usa de momento el término “matriz”—, y para el determinante la notación del cuadro de números entre barras —que, dice el autor, es imprescindible para determinantes numéricos— o para el tratamiento teórico las expresiones reducidas de Cauchy, $\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n$, que Weber atribuye a Jacobi, o $|a_i^j|$, esta última asignada a Kronecker; también utiliza la notación diferencial de Jacobi para los menores de mayor grado. Expone la teoría tradicional básica hasta el desarrollo por menores de Laplace. Se ocupa después de los sistemas lineales, momento en que hace aparecer las matrices como “tabla rectangular de coeficientes” y fuente de la que extraer determinantes, como dijera Sylvester. Weber lo expresa así:

> Esta tabla, que no tiene por sí misma ningún significado numérico, se llama *matriz*; es el origen de un cierto número de determinantes. [355, p. 82]

Para significar la matriz de la tabla de coeficientes coloca ésta entre doble barras verticales, pero no le asigna una letra para identificarla, tipo de notación reservada para los determinantes.

Al exponer los sistemas lineales inicia el método de Kronecker —sin mencionarlo—, pues primero discute los sistemas homogéneos y luego afirma que los no homogéneos surgen como caso particular “atribuyendo valor 1 a una incógnita determinada”, pero, en vez de hacerlo así, dice, prefiere tratar los homogéneos de modo independiente, lo que hace “sólo en el caso más importante en que el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones”. El caso de determinante no nulo lo resuelve según el método de Cramer —sin darle nombre— y en la discusión del caso nulo usa la noción de rango o característica escribiendo su descripción, sin usar ningún término específico para el orden del mayor menor no nulo.

Después de exponer los sistemas lineales completa la teoría de determinantes con dos teoremas, el del producto y uno de Sylvester[52] El teorema del producto lo prueba por dos métodos, primero el que ya usara Cauchy interpretando los determinantes como determinantes de sistemas lineales, así llega al teorema multiplicando (las matrices de) los

[52]Se trata de un teorema dado por Silvester en 1851 [329], que Weber demuestra “por un procedimiento debido a Frobenius”, de 1894 [157].

determinantes por el método columna-columna; la segunda prueba es una verificación del resultado por cálculo directo. El teorema de Sylvester es algo técnico[53] y su inclusión se debe sin duda a que más adelante lo utilizará para demostrar el teorema de eliminación de Bézout para dos polinomios en una variable.

Esta parte compacta de asuntos lineales responde al clásico esquema "determinantes y sistemas". Otros temas lineales aparecen después diseminados por la obra, sin estar reunidos en un cuerpo común. Daremos una rápida cuenta de ello.

El capítulo quinto es una introducción a la teoría de invariantes. Entiende Weber que una "transformación lineal" es el efecto producido sobre una función de n variables —en principio cualquiera, pero las que se manejan son homogéneas de diverso tipo— al aplicarle una "sustitución lineal", pero la sustituciones lineales son simples auxiliares en este tema y nada especial se dice sobre ellas. Cuando la sustitución se aplica a un sistema de funciones lineales el sistema transformado tiene como determinante el producto del determinante del sistema inicial por el de la sustitución; éste tiene que ser distinto de cero, pero los otros no, serán nulos o no a la vez. Al afirmar esto como de pasada, Weber no precisa que la forma de multiplicar en el estudio del producto fue columna-columna, mientras que al trabajar la transformación lineal deberá hacerse fila-columna, aunque la diferencia (una transposición) no cambia el valor de la fórmula del producto. En este capítulo el autor expone dos temas sobre formas cuadráticas: la reducción a sumas de cuadrados y la ley de inercia, asunto este último que completará más adelante. La manera de exponer es del estilo funcional habitual en la teoría de invariantes, con uso de determinantes pero sin mencionar las matrices.

Las formas cuadráticas vuelven a aparecer al inicio del Libro II, en el capítulo séptimo dedicado a las raíces reales de las ecuaciones algebraicas con coeficientes reales, donde obtiene la ley de inercia por otro procedimiento debido a Frobenius (1894) [157] y calcula el número de términos positivos y negativos en función de los coeficientes de la forma, distinguiendo cuando el "discriminante" (determinante) de la forma es distinto de cero

[53]Lo explicaremos usando las matrices que Weber no usa, lo que le obliga a escribir grandes determinantes. Sea A una matriz cuadrada de orden n, $A_r, r < n$, la matriz que se forma con sus r primeras filas y columnas, y A_r^* su adjunta. Sea B la matriz de cajas de orden n siguiente, en la que $|A_r|I$ es diagonal, 0 una matriz nula e Y una matriz cualquiera, cada una de las dimensiones requeridas:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_r^* & 0 \\ \hline Y & |A_r|I \end{array}\right).$$

Entonces $|A||B| = |A||A_r|^{n-1}$.

o nulo. También en el capítulo octavo, dedicado al teorema de Sturm que determina el número de raíces reales contenidas en un intervalo aparece una cuestión lineal como es la "ecuación secular", pero dada tan sólo como un ejemplo interesante al que aplicar dicho teorema.

En el segundo volumen vuelven a surgir las sustituciones lineales, ahora sí asociadas a matrices. En el Libro II estudia los grupos de sustituciones lineales, dados por ecuaciones escritas de un modo algo peculiar, $y_\kappa = \Sigma_{1,n}^{i} a_i^{(\kappa)} x_i$. Ahora sí que denota con letra la matriz de coeficientes, $A = (a_i^{(\kappa)})$, e indica su determinante como $|A|$, notaciones no usadas en el volumen primero, lo que le permiten abreviar la referencia a la sustitución en la forma $(y) = A(x)$. En este segundo volumen, al componer sustituciones realiza los productos de matrices AB en la forma fila-columna. Como se trata de sustituciones sólo opera con matrices con determinante no nulo, y con ellas expone en lenguaje simbólico tan sólo la estructura de grupo multiplicativo no conmutativo, denotando J la matriz identidad, A^{-1} la inversa, A' la traspuesta, etc. Estudia también subgrupos como el ortogonal, sólo en dimensión tres.

Weber no cuenta entre los materiales seleccionados para su libro con el estudio de las formas bilineales, sus haces, clasificación y formas canónicas mediante los divisores elementales. Una razón pudo ser que le pareciera un material de naturaleza superior o menos prioritaria para preparar un libro con objetivos de amplia difusión, otra que podría estar al corriente de que Muth preparaba la obra que comentaremos a continuación. Pero sí incluye su versión aritmética más sencilla, tratada de modo autónomo; en el capítulo sobre grupos abelianos (Vol. II, Libro I), demuestra que todo grupo abeliano finito tiene una base finita y que para cada divisor primo p del orden n del grupo los factores máximos p^α de los ordenes de los elementos de la base no dependen de la base elegida; como consecuencia, concluye que dos grupos de tal tipo son "isomorfos" si y sólo si tienen los mismos invariantes[54].

De modo que a la altura de finales del siglo XIX, el nuevo libro de álgebra del nivel de la enseñanza superior se mantenía clásico en el tema de los determinantes y sistemas, las formas cuadráticas aparecían en sus problemas más tradicionales y las matrices tan sólo eran consideradas con su álgebra simbólica al estudiar el grupo lineal y algunos subgrupos (llamados "divisores") en el segundo volumen.

[54]Weber está interesado principalmente en los grupos finitos que aparecen en la teoría de Galois. Como referencia para este isomorfismo menciona [355, Vol. II pp. 42-43] el artículo de Frobenius y Stickelberger de 1879 [160] y uno suyo sobre cuerpos abelianos de 1887 [354].

P. Muth, 1899.

Teoría y aplicaciones de los divisores elementales / Theorie und Anwendung der Elementartheiler [269]

Este libro aparece en la lista de referencia sobre matrices dada por Wedderburn, y Muir le dedica un comentario por tratarse del primer libro de texto sobre factores invariantes[55]. Peter Muth (1860-1907) preparó este libro para dar una exposición completa y accesible de la obra de Weierstrass-Frobenius en esta materia, el propio Frobenius le ayudó, según explica el autor, en la confección de la obra. No se trata tanto de un libro de texto como de una monografía de nivel avanzado. A lo largo de la obra se encuentran frecuentes notas a pie de página con referencia a las fuentes originales, pues no hay que olvidar que la propia obra de Frobenius en este tema, no exenta de aportaciones originales, es en buena medida una reformulación unificada de resultados previos.

Muth dividió su libro en dieciocho capítulos, que, a la vista del título, inspirado en el de los libros sobre determinantes, Muir clasifica en cinco dedicados a la teoría y trece a las aplicaciones. Los capítulos que Muir califica como teóricos son los cinco primeros, a los que añadiremos precisamente el último, por razones que luego explicaremos:

§1. Definición y propiedades generales de los divisores elementales (p. 1)
§2. Cálculo simbólico con formas bilineales (p. 20)
§3. Sistemas con números enteros (p. 43)
§4. Sistemas cuyos elementos son funciones de una variable (p. 58)
§5. Sistemas cuyos elementos son formas binarias del mismo grado (p. 63-69)
§18. Sistemas de cantidades enteras o fraccionarias de un cuerpo (p. 224-230)

En §1 explica el artículo de Weierstrass de 1858, así que los divisores elementales los introduce para el determinante de un haz de formas bilineales. El contenido de §2 es una exposición adecuada del artículo Frobenius 1878, con el álgebra simbólica de formas bilineales. Al "sistema" de coeficientes de una forma A le da algún protagonismo, incluso lo escribe por una sola vez de la forma

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array},$$

[55] Véase [266, Vol. IV pp. 450-451].

con determinante $|a_{ik}|$. Esta no es la única vez que aparece una matriz, con el nombre de "sistema de n^2 elementos", al final del libro se imprimen algunas más, esta vez con el cuadro de números limitado entre paréntesis. Los sistemas —siempre cuadrados— pasan a ser los protagonistas de los otros tres capítulos que completan la teoría de los divisores elementales. Se trata de asociar divisores elementales a diferentes tipos de sistemas a través de las correspondientes formas. En §3 se estudian los divisores elementales de sistemas de números enteros (ahora anillo $\mathbb{Z}$), en §4 para sistemas de funciones enteras de una variable λ (ahora anillo $K[\lambda]$) y en §5 para sistemas de funciones enteras homogéneas de grado fijo en dos variables. Al final del libro, en el último capítulo, §18, se repite el tratamiento para sistemas cuyos elementos pertenecen a cuerpos de números o de funciones —nomenclatura de Dedekind— basado en un trabajo de Hensel de 1894 [183]. Esta parte final es importante, porque con los métodos de Hensel — línea de investigación en la que colaboró el propio Muth en 1900 — se acabaría explicando la teoría de los divisores elementales de Weierstrass que abre el libro de Muth sin recurrir a técnicas funcionales utilizadas por Weierstrass. De modo que el último capítulo del libro de Muth abre el camino por el que el propio libro quedará superado.

Al añadir el último capítulo a los primeros, separándonos del criterio de Muir que lo considera una aplicación más, hemos seguido la opinión de Bromwich en la reseña que realizó de la obra de Muth en *Bulletin of the AMS* de 1901 [46][56]

Buena parte de las "aplicaciones" que vienen a partir de §6 completan el cuerpo teórico, pero respecto a los divisores elementales en sí mismos considerados se podrían ver, como dice Muir, en clave de aplicaciones. Pero los capítulos §6-9 contienen en esencia el trabajo de Weierstrass y Kronecker, con aportaciones de otros, sobre equivalencia de haces de formas, en general, en el caso simétrico y otros. Más claramente aplicados son §10 y siguientes. En §11 y §16 Muth sigue la orientación de Weierstrass —no a Jordan— al tratar la forma canónica de una sustitución y su aplicación a la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En §12-13 se trata el problema de Cayley-Hermite a la manera de Frobenius y en §17 la clasificación de colineaciones, basada en Kronecker y otros, con referencia para los aspectos geométricos proyectivos a varios matemáticos italianos, el principal Segre.

En definitiva, el libro de Muth es un fiel reflejo de las investigaciones de la escuela alemana,

[56] La reseña tiene nueve páginas, de las que dedica a Muth apenas las tres últimas; todo lo anterior es una interesante exposición sobre la historia del tema, partiendo desde la reducción canónica de dos formas caudráticas iniciada en Cauchy 1829.

principalmente focalizada en Berlín. Naturalmente hay otras obras de interés en diversos países europeos, también en Alemania, pero aquí no corresponde tratar exhaustivamente este tema.

Los dos libros recién comentados tienen fechas de finales del siglo XIX y procedencia alemana, el siguiente corresponde ya al siglo XX y marca la aparición en esta historia de los autores norteamericanos.

3.3.2 Llegan los norteamericanos, Bôcher 1907

M. Bôcher, 1907.

Introduction to higher algebra [36]

Maxime Bôcher (1867-1918) fue un matemático norteamericano graduado en Harvard en 1888 y que completó su formación investigadora con Klein en Gotinga, cuando ya se había desplazado a esta universidad la hegemonía que ostentara Berlín décadas atrás. Se especializó en ecuaciones diferenciales y álgebra. El libro es el resultado de los cursos que el autor impartió durante los diez años anteriores en la Universidad de Harvard, de la que era "full professor" desde 1904. El libro, que fue traducido al alemán en 1910, tuvo una difusión amplia y duradera, con una segunda edición en 1922[57].

Muir compara el trabajo de Bôcher con la última edición de *Lessons introductory to the modern higher algebra* de Salmon. Señala que los contenidos de ambos libros son distintos porque en el intervalo entre ellos el álgebra se ha ampliado bastante[58]. Esta comparación sólo está justificada porque ambas obras comparten el rótulo de "álgebra superior", que también tuvo la obra de Serret. El francés y el inglés llenaron con sus obras la difusión del álgebra durante la segunda mitad del siglo XIX, y la nueva álgebra del último tercio ya había quedado presentada en las obras de los alemanes Weber y Muth, superando el estadio de representación y difusión a través del libro del avance matemático que en su día significaron los de Serret y Salmon.

En comparación con Weber y Muth, Böcher presenta una selección de temas de ambos libros alemanes, toma de Weber lo necesario para llegar al tratamiento algebraico ade-

[57]En la confección del libro Bôcher fue ayudado por E.P. R. Duval, uno de sus antiguos estudiantes. La obra entró en la colección de clásicos de las matemáticas de la editorial Dover en 1964.

[58]Véase [265, p. 108-109].

cuado de una intoducción a la teoría de invariantes que contiene los divisores elementales en el caso de matrices de polinomios en una variable, las "λ-matrices" en su nomenclatura[59]. Bôcher reconoce la influencia de fondo de Kronecker y Frobenius[60], pero utiliza una presentación más nueva de los temas que trata. Sobre todo, presenta un material más seleccionado y ordenado, adecuado a los métodos de la enseñanza superior en su país:

> Un estudiante estadounidense que se aproxima a las partes más altas de las matemáticas usualmente no está familiarizado con los principios más básicos del álgebra, por no decir nada con sus demostraciones. Él sólo tiene un conocimiento rudimentario de los sistemas de ecuaciones lineales, y él no sabe casi nada sobre el tema de las formas cuadráticas. [...] Este es el objeto del presente libro introducir al estudiante en el álgebra superior de manera que el deberá, por una parte, aprender qué significa una demostración en álgebra y familiarizarse con las pruebas de los resultados fundamentales, y por otra parte, familiarizarse con importantes resultados del álgebra que son nuevos para él. [36, p. v]

Desde este punto de vista de la programación didáctica esta obra contrasta con las dos anteriores. Los polinomios y otros temas van apareciendo escalonadamente según las necesidades de la exposición, el libro incluye ejercicios propuestos[61] y hay capítulos —o secciones dentro de un capítulo— dedicados a temas geométricos para ayudar a comprender el significado de los métodos algebraicos tratados[62].

Siguiendo uno de los hilos conductores de nuestra exposición, hay que destacar que en esta obra las matrices ya tienen una presencia nítida como objeto matemático, si bien el desarrollo de su teoría es una de las cuestiones que el autor escalona a lo largo de la obra.

Es hora ya de indicar el índice del libro de Bôcher. La obra consta de veintidós capítulos:

[59] Bôcher no necesita ocuparse de la teoría de Galois porque ya hay en EEUU libros libros de otros autores que han desarrollado esa materia con fines de difusión a un nivel educativo superior, por ejemplo L.E. Dickson (1903) [113] y F. Cajori (1904) [48]

[60] Además agradece a su colega William Fogg Osgood (1864-1943) por sus sugerencias y críticas relativas a los capítulos sobre divisibilidad de polinomios.

[61] Van al final de cada sección, con el fin de dar al lector la oportunidad de pensar por sí mismo sobre los temas tratados. Hay algún ejercicio numérico, pero en su mayoría son ejercicios de tipo teórico: demostraciones complementarias, ampliaciones de teoremas, etc.

[62] En la reseña del libro realizada en por A. Ranum para la American Mathematical Society (1910) [294] destaca estos aspectos: "[...] se indican las conexiones entre diferentes líneas de pensamiento: el origen, el significado, y la aplicación de cada nueva idea. Esto hace del trabajo un libro de texto ideal,. . . " [294, p. 523]. En relación con el significado geométrico del álgebra que Bôcher resalta, indicaremos que Ranun indica que los divisores elementales están expuestos también en el libro de *Geometria Proiettiva degli Iperspazi* del italiano E. Bertini (1907) [30].

El inicio del libro no tiene un planteamiento muy distinto al de Weber, pero dos diferencias podemos señalar. Por una parte Bôcher se mueve en el ámbito numérico de los reales y los complejos dando por conocidos estos sistemas numéricos. Por otra, Bôcher pone lo justo sobre polinomios —llamados así, no funciones enteras— para abordar los primeros aspectos lineales, los tradicionales "determinantes y sistemas". Luego la teoría de polinomios se completa en los capítulos XIV-XVI, más el capítulo XVIII sobre polinomios simétricos una vez que ha iniciado la teoría de invariantes. En el primer capítulo enuncia y saca conclusiones del teorema fundamental del álgebra, pero para su demostración remite a libros de análisis.

Los capítulos II-V se ocupan de "determinantes y sistemas" al modo usual, pero marcaremos algunas diferencias con Weber. Bôcher, posiblemente de acuerdo con los programas docentes de su entorno, supone conocidas la definición del determinante y sus propiedades elementales, comienza dando el concepto de matriz:

> Un sistema de mn cantidades dispuestas en un arreglo rectangular de m filas y n columnas se llama una matriz. Si $m = n$, decimos que tenemos una matriz de orden n. [36, p. 20].

Indica que las matrices se suelen denotar entre doble barras[63] y algunas veces entre paréntesis redondos. Explica que las matrices y los determinantes son de naturaleza distinta e ilustra el caso cuando hay intercambio de filas o columnas, que se obtiene el mismo determinante pero, distinta matriz, a la que denomina *conjugada*. Sigue hablando de menores, dando la noción de rango de una matriz y del desarrollo de Laplace de un determinante. Luego demuestra el teorema del producto, lo puede hacer antes de los sistemas, no después como Weber, porque utiliza una demostración autónoma dentro de la teoría del algoritmo, basada en determinantes de matrices diseñadas por cajas. Este producto algorítmico lo define del modo fila-colunma, y simplifica la demostración haciéndola en el orden tres con los determinantes completamente desplegados.

Después de dedicar el capítulo III a resaltar la noción de dependencia lineal, el autor realiza en el capítulo IV una presentación de los sistemas lineales clara y completa, según este orden: primero la regla de Cramer, luego el teorema de consistencia de sistemas generales con la noción de rango —sin asignarle nombre alguno ni citar fuentes— para terminar con los homogéneos.

Las matrices aparecieron en el segundo capítulo, pero el estudio de las cuadradas se inicia en los capítulos V y VI. En el primero de ellos se definen las transformaciones elementales de las matrices, que se usan para determinar una relación de equivalencia entre ellas, que está caracterizada por tener el mismo rango. En el capítulo VI llega el álgebra de matrices a la manera de Cayley, de modo autónomo sin soporte funcional alguno. Explica el autor, con ecos de Sylvester[64], que aunque las matrices no son cantidades como los números reales o complejos, se van a poder entender como "cantidades complejas" adoptando "un punto de vista amplio" que permitirá operar con ellas de modo similar al establecido en aritmética. Bôcher define el producto fila-columa directamente, sin recurrir al apoyo de las sustituciones:

[63] Notación empleada por Smith [321, p. 293]

[64] También como Sylvester denota las matrices cuadradas con letras minúsculas, pero resaltadas en negrita.

> El producto **ab** de dos matrices cuadradas de n-ésimo orden es una matriz cuadrada de n-ésimo orden en la que el elemento que se encuentra en la fila i-ésima y la j-ésima columna se obtiene multiplicando cada elemento de la i-ésima fila de **a** por el correspondiente elemento de la j-ésima columna de **b** y sumando los resultados. [36, p. 63]

Prueba las reglas básicas del cálculo matricial, incluidas las relaciones con la matriz adjunta, y también que el rango del producto no puede superar al rango de los factores. Al margen de cuestiones de notación, el estudio de las matrices reaparecerán cuando llegue el momento de las λ-matrices.

El estudio de las formas cuadráticas ocupa los capítulos X-XIII, donde la forma bilineal asociada es llamada “forma polar” adoptando el lenguaje geométrico. Bôcher explica dos métodos de reducción a suma de cuadrados y la ley de inercia. En el capítulo XIII llega el turno a los haces de formas cuadráticas reales, bajo su nomenclatura el “pencil” $\varphi - \lambda\psi \equiv \Sigma_1^n(a_{ij} - \lambda b_{ij})x_i x_j$, cuyo “discriminante” es el polinomio

$$F(\lambda) \equiv |a_{ij} - \lambda b_{ij}| = \Theta_0 - \Theta_1\lambda + \cdots + (-1)^n\Theta_n\lambda^n.$$

Bôcher pone énfasis en el carácter invariante de este polinomio: sus coeficientes son “invariantes racionales enteros de peso dos”, las raíces de la “λ-ecuación” $F(\lambda) = 0$ son “invariantes irracionales absolutos” y las multiplicidades de estas raíces son “invariantes aritméticos”[65]. Bôcher explica la “reducción a forma normal” del par de formas, es decir, el proceso de diagonalización simultánea; primero resuelve el caso en que las raíces de $F(\lambda) = 0$ son simples y ψ es no singular (Cauchy) y luego cuando hay multiplicidades y ψ es definida no singular (Weierstrass).

Después de unos capítulos dedicados a completar la exposición sobre polinomios e invariantes, los tres últimos capítulos (XX-XXII) se dedican a los divisores elementales y a la clasificación de pares de formas bilineales. El inicio, capítulo XX, es puramente matricial:

> La teoría de los divisores elementales, inventada por Sylvester, H.J.S. Smith, y, más

[65] En el capítulo VII el autor dejó sentadas las bases de la teoría de invariantes, que estudia el modo de cambio de las funciones por sustituciones lineales ”no singulares”. Denota las sustituciones como sus matrices, así que si una sustitución **c** con determinante $c \neq 0$ transforma la función F en $F' = c^\mu F$ entonces F es un “invariante de peso μ”, llamado “absoluto” si $\mu = 0$ y “relativo” en los demás casos. Que los invariantes se llamen aritméticos, irracionales, etc. atiende a su naturaleza, todos pueden considerarse como funciones, en este caso de los coeficientes del par de formas.

> particularmente, Weierstrass, y perfeccionada en aspectos importantes por Kronecker, Frobenius y otros, tiene como inmediato propósito, en la forma en la que la presentaremos, el estudio de las matrices (que sin pérdida de generalidad suponemos que son cuadradas) cuyos elementos son polinomios en una única variable λ. Tales matrices serán llamadas λ-matrices. [36, p. 262]

Acompaña a este párrafo una nota a pie de página en la que indica que esta es la opción tomada para este libro, pero que se puede repetir la teoría con matrices cuyos elementos sean: polinomios en varias variables —se supone que, como en todo el libro, con coeficientes que son números reales o complejos, y específicamente reales cuando así se dice—; polinomios con coeficientes en un "cuerpo de racionalidad" o en números enteros, o incluso sólo números enteros.

Bôcher extiende automáticamente a λ-matrices las nociones de rango, transformación elemental y equivalencia de matrices que ya había dado para matrices ordinarias, de modo que λ-matrices equivalentes tienen el mismo rango, pero ahora hay más invariantes a considerar. Los primeros nuevos invariantes son los polinomios $D_i(\lambda)$ máximo común divisor de los menores con orden i menor o igual que el rango r de la λ-matriz. Estos invariantes se toman con coeficiente uno en el grado máximo (mónicos) y con $D_0(\lambda) = 1$. Luego Bôcher demuestra que una λ-matriz de rango r es equivalente a una diagonal con polinomios mónicos $E_i(\lambda), 1 \leq i \leq r$, en la diagonal principal, de modo que cada $D_i(\lambda)$ es producto de algunos $E_j(\lambda)$ y $E_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}$. Los $E_i(\lambda)$ son los "factores invariantes" de la λ-matriz. Si estos factores invariantes se descomponen según sus raíces en factores $(\lambda-\alpha)^e$ estamos ante los "divisores elementales" de Weierstrass. El rango y los factores invariantes o bien el rango y los divisores elementales son un conjunto completo de invariantes para λ-matrices. Para terminar este tema Bôcher prueba que la definición de equivalencia de dos matrices $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, dada a través de transformaciones elementales es equivalente a la que puede darse mediante la relación $\mathbf{b} \equiv \mathbf{cad}$, siendo $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ dos λ-matrices con determinantes no nulos e independientes de λ. Los dos capítulos siguientes y últimos contienen la aplicación de la anterior teoría de λ-matrices a la clasificación de pares de formas bilineales y colineaciones (capítulo XXI) y de pares de las formas cuadráticas (capítulo XXII). Las λ-matrices que aparecen en estos casos son particularmente sencillas, pues tiene la forma $\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$ siendo $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ independientes de λ. En el último capítulo necesita el teorema de Cayley-Hamilton[66],

[66] Bôcher no llama así al teorema, que enuncia sin nombre, pero llama a la ecuación $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ la "ecuación de Hamilton-Cayley" de la matriz $\mathbf{a}$, donde $\phi(\lambda)$ es el polinomio característico.

con su enunciado y demostración termina la exposición de la teoría de matrices que ha ido completando a lo largo del libro.

Parte II

Historias Nacionales

Capítulo 4

Métodos algebraicos lineales en España 1850-1900

Este capítulo inicial de la segunda parte se dedicará a recoger los métodos algebraicos lineales presentes en la matemática española de la segunda mitad del siglo XIX, con alguna incursión en los primeros años del siglo siguiente dando continuidad natural a la dinámica de la propia exposición. Durante este periodo no hay investigación matemática en España, tan sólo esfuerzos por actualizar el conocimiento matemático imperante en torno a la enseñanza superior, teniendo como referencia la matemática europea de similar nivel. Estos esfuerzos se aprecian en el devenir de la enseñanza superior, que va tomando los modelos europeos como referencias para sus actualizaciones[1].

El capítulo empieza con una sección que ofrece una cierta continuidad respecto a la primera parte de la memoria, pues presenta la naturaleza del análisis algebraico imperante en la enseñanza de la matemática en Europa, que, como veremos, tuvo reflejo en España. La recepción de este aspecto de la matemática europea se produjo principalmente a través de dos obras que analizaremos por ser las que tuvieron una marcada influencia. Una es alemana y la otra italiana, la primera influyó en el último cuarto del siglo XIX y aún prolongó su influencia a principio del XX, periodo en el que fue relevada por la segunda. La segunda sección expone las obras que en los treinta años que van de 1857 a 1887 significan la introducción y primera difusión de los determinantes y sus aplicaciones en España.

Por su parte, la sección tercera se ocupará de describir los libros de texto de enseñanza superior producidos por los profesores en torno a 1890 y que se mantuvieron vigentes hasta entrado el siglo XX. La sección terminará, a manera de complemento, con un apartado dedicado a mostrar los artículos sobre el tema que nos ocupa fueron publicados en las primeras revistas matemáticas españolas y a dar noticia de unas obras sobre la teoría de las formas que exigen el conocimiento de los determinantes y de sus aplicaciones más elementales.

[1]En un reciente artículo de F.A. González Redondo [169] en el que el autor hace un recorrido por las revistas científicas que se ocuparon de las matemáticas a lo largo del siglo XIX, se menciona varias veces que éstas aspiran, en lo que a las matemáticas se refiere, a traer de Europa lo que en España falta.

4.1 El álgebra en el análisis matemático

La tradición europea del análisis algebraico[2] se remonta al primer tomo de *Introductio in analysin infinitorum* [137] de Euler (1748), donde el genial suizo presenta las funciones en cuanto son dadas por desarrollos en serie de potencias, extensión infinita de la expresión de los polinomios, a las que se aplica un cálculo formal algebraico y el álgebra de los infinitesimales, con carácter previo al estudio del cálculo diferencial e integral y a la aplicación de las funciones al estudio de las curvas. Algebraico es también el enfoque que presenta Lagrange en *Théorie des fonctions analytiques* (1797) [232], usando series de potencias (desarrollo de Taylor) pero no infinitesimales. Esta forma de entender el análisis significaba una segunda etapa histórica, tras la inicial que vinculaba el cálculo con la geometría. A pesar de sus diferencias de enfoque, Euler y Lagrange

> ...comparten un énfasis explícito en el carácter analítico o "algebraico" del cálculo diferencial e integral, lo mismo como una descripción fundacional que como un motivo para unificar las diferentes ramas del tema; en la necesidad de separar el cálculo de la geometría, pero continuando con el cultivo de las aplicaciones geométricas y mecánicas; y en una creencia en la generalidad como un objetivo primario de las matemáticas. [151, p. 319]

El modo de proceder de Euler calculando con funciones y series infinitas de modo puramente formal, sin preocupaciones por la convergencia, distinguía entre las expresiones consideradas formalmente y sus valores numéricos, aspecto que fue muy desarrollado por la escuela combinatoria alemana durante los últimos años del siglo XVIII y buena parte del siglo XIX[3], dando así una interpretación peculiar del análisis algebraico.

De Cauchy a Weierstrass. En la Escuela Politécnica de París, Cauchy reinterpretó esta forma de introducir el análisis matemático en su *Curso de análisis. Primera parte: Análisis algebraico* (1821), que es, como en Euler, un curso que precede a su *Cálculo infinitesimal* (1823). La primera parte del análisis algebraico de Cauchy trata, principalmente, de límites y continuidad de las funciones reales y complejas, de la convergencia y suma de las series y de los desarrollos en series de potencias de las funciones elementales, así inicia

[2] Las cuestiones sobre el análisis algebraico aquí expuestas fueron ya publicadas en dos artículos [135, 134] en cuya autoría participó la doctoranda que firma esta memoria.

[3] Véase [209] donde se estudia la evolución del análisis de la fórmula del binomio y los trabajos en esta línea de C.F. Hindenburg y M. Ohm.

Cauchy la etapa siguiente en la evolución del cálculo, diferenciándose de los supuestos compartidos por Euler y Lagrange e iniciando el periodo de análisis clásico en variable real y compleja[4]. También se incluyen en el curso de Cauchy las funciones más sencillas, los polinomios ("funciones racionales enteras"), y con ellos la interpolación y la resolución de las ecuaciones algebraicas, temas conocidos como de "álgebra clásica".

El desarrollo en serie de potencias de las funciones elementales era el objetivo principal del análisis algebraico superior y por ello, desde el punto de vista especializado, el análisis algebraico se concentraba en la variable compleja, donde los desarrollos alcanzaban su más perfecta expresión, de modo que este tipo de análisis aparece como antecedente de la teoría de las funciones analíticas de Weierstrass:

> En la primera mitad del siglo XVIII, un cierto número de geómetras se aplicaron a establecer las propiedades de las funciones elementales con independencia del cálculo infinitesimal, haciendo uso de procedimientos más bien algebraicos. Más tarde se dio el nombre de Análisis Algebraico al cuerpo de doctrina así constituido fuera del análisis infinitesimal. El empleo de los métodos algebraicos en el estudio de las funciones elementales tuvo como consecuencia no sólo proporcionar nuevas formas de desarrollo de estas funciones (tales como su desarrollo en producto infinito o en fracción continua), ajenos al análisis infinitesimal, sino también y sobre todo introducir sistemáticamente, en el estudio de las funciones, las cantidades imaginarias.
>
> [...] Bajo el nombre de Análisis algebraico se puede comprender, todavía hoy, el estudio de los algoritmos ilimitados de números reales o complejos y el de los métodos especiales que permiten representar con ayuda de series, productos infinitos o fracciones continuas, las funciones elementales. [291]

En el artículo citado de la *Enciclopedia* de Teubner, Pringsheim y Faber ponen el énfasis en explicar el desarrollo del tema a lo largo del siglo XIX en el caso general de variable compleja, dejando que las funciones reales aparezcan sólo como casos particulares[5].

Análisis algebraico elemental. Pero este enfoque tuvo también un desarrollo en diversos niveles educativos elementales, en los que el alcance máximo del análisis algebraico quedaba disminuido. El análisis algebraico elemental inspiró el núcleo de la formación

[4] En [151] el autor señala y argumenta la radicalidad del corte que Cauchy significa frente a Euler-Lagrange.

[5] La versión francesa de este artículo, realizada por J. Molk, es de 1911 y el original alemán de Pringsheim y Faber se publicó en 1908. El artículo forma parte del volumen dedicado a funciones de variable compleja.

inicial en matemáticas preconizada en la reforma educativa diseñada en Prusia por Humboldt, y fue desarrollado durante la primera mitad del XIX por la llamada escuela combinatoria. Bajo esta tendencia, el análisis algebraico se convirtió en el núcleo de la enseñanza escolar, ya que se consideraba como un modelo elemental de las matemáticas puras y estaba en completa armonía con el propósito educativo de la mencionada reforma. Hacia mediados del siglo XIX el movimiento combinatorio alemán reconoció la necesidad de asumir los puntos de vista y los contenidos de Cauchy, así que la convergencia de las series se fue introduciendo en la enseñanza[6]. Los textos de (o con) análisis algebraico se fueron reconfigurando en un relación dialéctica entre la coherencia sistémica de la materia y las necesidades impuestas por los programas de enseñanza, obligados a administrar y priorizar las materias a impartir en el tiempo disponible, incorporando, en la medida de lo posible, las novedades matemáticas de cada tiempo. Particularmente significativo fue, en la segunda mitad del siglo XIX, el proceso de aritmetización de las matemáticas. En este modelo fue jugando un papel metódico clave la ampliación de los sistemas numéricos, sobre lo cual Janhke escribe:

> Más tarde, las progresivas extensiones de los sistemas de números siguiendo el principio de permanencia de las operaciones algebraicas se convirtieron en el centro de todos los programas de tipo aritmético algebraico. [209, p. 281]

El "principio de permanencia de las operaciones algebraicas" (o "de las leyes formales de la aritmética", como también se dice) fue establecido por Hankel[7] en 1867, como consecuencia de su reflexión sobre los trabajos de Hamilton sobre los complejos y los cuaternios. Hankel reclamaba con valor de "principio" que al seguir el procedimiento genético de obtener sucesivos sistemas de números, la nueva definición de número y sus operaciones contenía a la anterior como caso particular, y mantenía la validez de las propiedades (asociativa, conmutativa, etc.) que satisfacen las operaciones (así sucedía de los naturales a los complejos, pero ya no con los cuaternios). Hankel sostenía que estas leyes tenían un carácter "formal" y el principio de su mantenimiento podía verse también como la concordancia entre los procedimientos formales del cálculo con números y la realidad concreta a la que esos cálculos se aplicaban[8].

[6] Según [291] el libro de análisis algebraico [318] tuvo mucha influencia en la asimilación de Cauchy por la escuela combinatoria alemana.

[7] Hermann Hankel (1839-1873). La referencia es [176]

[8] Este aspecto formal resaltado por Hankel, al igual que Boole, Peacock, Hamilton y otros que apreciaron el significado de los cálculos según reglas con independencia de los objetos a que los cálculos se refieren, marca un camino hacia la definición axiomática de las estructuras algebraicas.

Se consideraba altamente educativo comprender este proceso de extensión de los números, bajo el control del principio de permanencia, a la vez que utilizarlo de modo que cada nuevo sistema permitía resolver nuevas ecuaciones mediante un nuevo tipo de "operación inversa". Un curso o libro de este tenor consistía en abordar, organizados de un modo otro, estos dos asuntos:

A) La definición progresiva de los números y sus operaciones, de los naturales hasta los reales en un principio y más tarde hasta los complejos.

B) La exposición de los temas básicos del análisis algebraico, colocados todos ellos después de los números o diseminados a lo largo de este recorrido genético, colocando después de cada tipo de número los temas que le son propios.

Numerosos libros de texto europeos siguieron este esquema de un modo más o menos explícito, si bien la precisión (o rigor) con que introducían los sucesivos sistemas de números fue variable, mejorando ya en el entorno de 1900.

4.1.1 Dos referencias europeas: Baltzer y Capelli

Como ejemplos del análisis algebraico presente en la enseñanza europea, describiremos en este apartado dos libros que responden a ese esquema. Por orden cronológico, el primero, aparecido en Alemania el año 1860, es más elemental, mientras que el otro es más avanzado y completo, empieza a gestarse a finales del siglo XIX y se consolida en los primeros años del siglo XX en Italia, país cuyas matemáticas estaban muy influenciadas por las alemanas. Hay varias razones para elegirlos entre los muchos disponibles, una es que se sitúan al principio y al final del periodo correspondiente a este capítulo, otra que ambos tuvieron amplia difusión, no sólo en sus respectivos países de origen; pero el motivo principal de considerarlos es que los dos ejercieron una notable influencia en España[9]. Sus respectivos autores, R. Baltzer y A. Capelli, han aparecido ya en la primera parte de este trabajo en relación con el tratamiento general de los determinantes y los sistemas lineales.

Baltzer, 1860

Elementos de matemáticas / Die Elemente der Mathematik [25]

[9] Autores franceses como Bourdon o Cirodde también influyeron en España, lo veremos al comentar la obra de Cortázar.

Esta obra contiene una introducción amplia a la matemática con fines educativos, incluyendo análisis algebraico, geometría y trigonometría. El libro tuvo ediciones sucesivas en las que los dos volúmenes se iban publicando separadamente, la segunda edición se inició en 1865 y la última, que era la séptima, se produjo en 1885[10]. La segunda edición fue traducida al italiano por Luigi Cremona y publicada entre 1865 y 1868 [94]; la traducción española de Eulogio Jiménez Sánchez y Manuel Merelo [212] se produjo a partir de de la quinta y la sexta del original y apareció entre 1879 y 1881. Recordemos que la obra de Baltzer sobre determinantes y aplicaciones se publicó en 1857, así que *Die Elemente der Mathematik* es posterior, pero durante tres décadas el autor fue sacando intercaladas en el tiempo ediciones sucesivas de una y otra obra. Esta segunda obre podríamos calificarla como más pedagógica que la anterior sobre determinantes por su contenido más elemental, pero tanto una como otra son libros concentrados y austeros, sin demasiadas concesiones al lector. Refiriéndose a *Die Elemente der Mathematik*, Marta Menghini, cuyo interés se centra en la parte geométrica de la obra, afirma que el libro es un compendio para profesores más que un libro dirigido a lo alumnos:

> Aunque fue escrito para ser usado en la escuela, se dirigía al profesor más que al estudiante. La transposición didáctica se dejaba completamente en manos del profesor. [258, p. 39]

La descripción general que vamos a hacer de esta obra de Baltzer sirve igual para la primera edición que para las siguientes, aunque hubo ciertos cambios en las ediciones sucesivas. Se divide en dos volúmenes bien diferenciados, correspondiendo al análisis algebraico el primero de ellos:

1. Aritmética vulgar, Aritmética universal[11], Álgebra
2. Planimetría, Estereometría, Trigonometría

En este trabajo sobre métodos algebraicos lineales nos interesa el primer volumen, cuyo primer libro contiene lo siguiente:

Libro primero. Aritmética vulgar

[10]Ediciones: 1ª vol. 2: 1862. 2ª vol. 1: 1865, vol. 2: 1867. 3ª vol. 1: 1868, vol. 2: 1870. 4ª vol. 1: 1872, vol. 2: 1874. 5ª vol. 1: 1875, vol. 2: 1878. 6ª Vol. 1: 1879, vol. 2: 1883. 7ª vol. 1: 1885. Algunas ediciones están disponibles en formato digital en `http://archive.org`.

[11]Hemos traducido los términos "gemeine Arithmetik, allgemeine Arithmetik" como lo hicieron los traductores españoles Jiménez y Merelo.

Esta materia, *Aritmética vulgar*, es muy elemental, está pensada para iniciar la enseñanza utilizando directamente números concretos, sin pasar al cálculo literal, que se pospone a la segunda parte.

Luego, en *Aritmética universal*, Baltzer expone los diferentes sistemas de números, hasta los complejos, con independencia de su representación en un sistema de numeración, usando el cálculo literal; es un estadio más general y apropiado para el acceso a y el inicio de la enseñanza universitaria. Se introducen los números naturales y la divisibilidad elemental (máximo común divisor y mínimo común múltiplo, congruencias, etc), pasando a considerar sucesivamente los números racionales, reales y complejos con sus operaciones y temas propios. Hay que destacar el carácter, en cierto modo formal, de la exposición que Baltzer hace de los números, de los que habla sin mencionar expresamente de qué números se trata, no se plantea la necesidad de dar definiciones específicas de los mismos por un "método genético". Baltzer va exponiendo las operaciones básicas, suma, producto y potencia con expresiones formadas por letras (polinomios) y los números más generales (negativos, racionales, etc.) van apareciendo a medida que considera las operaciones inversas de las tres básicas anteriores. Que las propiedades formales de la aritmética valen para todos los números es algo que fluye con naturalidad sin enunciados específicos. El punto más delicado en este proceso es la aparición de los números irracionales, que solventa con una idea de aproximación indefinida a través de la expresión decimal de los números. Al hilo de la introducción de los números se van tratando los temas matemáticos que forman esta obra.

El contenido de análisis algebraico propiamente dicho empieza en este segundo libro, cuyo desglose por secciones se relaciona a continuación:

Libro segundo. Aritmética universal

29. Determinante de un sistema de números (p. 166)
30. Productos y potencias de polinomios (p. 170)
31. Números figurados y progresiones aritméticas (p. 176)
32. Cálculo de probabilidades (pp. 189-196)

El análisis algebraico tratado por Baltzer se completa con el libro tercero, que está dedicado al álgebra entendida al modo clásico, como la resolución numérica de las ecuaciones algebraicas, dando la expresión general de las soluciones sólo hasta el cuarto grado. Esta parte se inicia con una insistencia en la idea de los irracionales, esta vez como razón de cantidades inconmensurables a la manera euclídea, seguida de nociones intuitivas de función, continuidad y derivada (cociente incremental), para entrar enseguida en la resolución de ecuaciones algebraicas, realizada a través de ejemplos y no con métodos generales. El último capítulo, que el autor califica como "análisis algebraica, o sea teoría de las funciones", es algo más teórico; trata sobre polinomios de una variable, interpolación, descomposición de una fracción racional y resolución numérica de ecuaciones (teorema de Sturm, de Cauchy sobre los ceros contenidos en un recinto plano, de Gauss o teorema fundamental del álgebra). Termina con una mención al método de Gräffe y a la resultante por el método de Euler. El desglose por secciones del libro tercero es el siguiente:

Libro tercero. Álgebra

1. Las proporciones (p. 199)
2. Funciones de variables (p. 203)
3. El método analítico (p. 210)
4. Las ecuaciones (p. 217)
5. Sistemas de ecuaciones lineales (p. 221)
6. Las ecuaciones cuadráticas (p. 227)
7. Las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas (p. 238)
8. Resolución de ecuaciones numéricas (p. 245)
9. Resolución particular de las ecuaciones indeterminadas (p. 253)
10. Teoremas elementales (pp. 264-274)

En la segunda edición el autor hace una reordenación, trasladando a la parte final de la *Aritmética universal* los temas 24 y 25 que incluyen algoritmos indefinidos. A partir de la segunda edición, Baltzer no hace reformas en la estructura del texto, pero sí ampliaciones y actualizaciones en lo que respecta al tema que nos ocupa, de acuerdo a las variaciones que efectuaba en las nuevas ediciones de su *Teoría y aplicaciones de los determinantes*.

En el libro segundo, apartado titulado *29. Determinante de un sistema de números* en tan sólo 5 páginas (166-170) plantea la definición y notación, y las propiedades de los determinantes.

En el libro tercero encontramos el apartado *5. Sistemas de ecuaciones con varias incógnitas; y, en particular, de ecuaciones lineales* (pp. 221-227), que empieza con nociones generales sobre las ecuaciones y sus soluciones. Pero, como el título indica, enseguida se dirige a tratar el caso lineal, sólo cuando es igual el número de ecuaciones al de incógnitas. Plantea la solución de un sistema general no homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas mediante la regla de Cramer. En definitiva, es notorio que Baltzer incorpora a su libro de matemáticas elementales la parte más sencilla de la amplia teoría expuesta en su obra específica sobre determinantes y sus aplicaciones a sistemas lineales y otros temas.

Volveremos a tratar de este libro más adelante, a propósito de la traducción española realizada dos décadas después de la aparición de la obra.

El libro Istituzioni de Capelli

El otro ejemplo que presentamos de la interpretación del análisis algebraico en la enseñanza universitaria, es un libro de A. Capelli, cuya primera edición se titula *Lezioni di algebra complementare* [58] (1895), y tuvo una 2ª edición en 1898. El texto fue evolucionando hasta que en 1902 encontramos la 3ª edición titulada *Instituzioni di analisi algebrica* [59] que alcanzo la 4ª y última edición en 1909 [60][12]. El contenido de la primera edición es el siguiente:

[12] Algunas ediciones están disponibles en formato digital en `http://archive.org`

Aunque todavía con otro título, el autor mantenía desde la primera edición que el tema de la obra era el análisis algebraico; en efecto, en la introducción se lee:

> 1. El *álgebra complementaria* tiene por objetivo principal establecer los fundamentos del llamado análisis algebraico definiendo correctamente por *análisis algebraico* aquella rama del análisis matemático cuyo objeto es el estudio de las *funciones algebraicas*. [58, p. 1]

Instituzioni di analisi algebrica [59, 60][13] tuvo gran influencia en la enseñanza de la matemática superior italiana de las primeras décadas del siglo. Este libro dará un buena imagen del estado de la enseñanza de la matemática en el primer curso universitario en Italia. En libros italianos de finales del siglo XIX se aprecia ya una presentación muy clara del método genético de ampliación de los sistemas de números respetando el principio de Hankel, incorporando la construcción aritmética de los reales por cortaduras (Dedekind) o sucesiones convergentes (Cantor, Meray). Por otra parte, la exposición de los diversos capítulos de las matemáticas se van escalonando a lo largo del libro intercalando entre los diferentes sistemas de números según un criterio en parte pedagógico y en parte sistemático que cada autor hace más o menos explícito. Es muy frecuente en este periodo, en torno a 1900, que los autores se quejen del desajuste entre lo que sería un libro sistemáticamente organizado desde el punto de vista de la materia y, por otra parte, el contenido de los cursos a impartir que viene obligado por los planes oficiales. Quizás por ello, por ser libros ajustados a cursos con programas regulados, sólo desarrollan con variable compleja la resolución algebraica de las ecuaciones –los desarrollos de las funciones elementales sólo en variable real– y en cambio incluyen el cálculo diferencial real.

Instituzioni di analisi algebrica [60] de Capelli (1909), un grueso volumen de casi mil páginas, consta de veintidós capítulos, cuyos títulos vamos a presentar en el índice que sigue agrupados (por nosotros, no por el autor) en cuatro partes y resaltando en negrita

[13] Aparece citado en [271, p. 39], [291, p. 32] artículos de la *Enciclopedia* de Teubner dedicados a funciones racionales y análisis algebraico, respectivamente.

para cada una de ellas un rótulo que indica el sistema de números que la determina (el primero se refiere al número natural). Pretendemos así resaltar claramente la existencia de un criterio para escalonar el contenido matemático a medida que se van poniendo en circulación los sistemas de números. El índice del libro de Capelli 1909 es el siguiente:

I. **Génesis combinatoria de la aritmética** e introducción al cálculo literal.

- II. Divisibilidad y propiedades elementales de los números naturales.
- III. Elementos de análisis combinatorio.

IV. Operaciones con **números racionales**.

- V. Aplicaciones de los números racionales.
- VI. Teoría de los determinantes y su aplicación en la resolución de problemas algebraicos de primer grado.
- VII. Elementos del cálculo de las funciones racionales enteras.
- VIII. Divisibilidad de las funciones enteras de una o más variables.

IX. Operaciones con los **números reales**.

- X. Series de términos reales - Fracciones continuas infinitas.
- XI. Continuidad y derivabilidad de las funciones de variables reales.
- XII. Las funciones trigonométricas.
- XIII. Propiedades generales de las ecuaciones con coeficientes reales.
- XIV. Resolución numérica de las ecuaciones.

XV. Operaciones con **números complejos**.

- XVI. Series de potencias enteras y positivas de una variable.
- XVII. Las funciones elípticas.
- XVIII. De las raíces de la ecuación de grado n.
- XIX. Teoría general de la divisibilidad y de la eliminación.
- XX. Transformación de las ecuaciones. Resolución general de las ecuaciones de los cuatro primeros grados.
- XXI. Principios de la teoría de los irracionales algebraicos.
- XXII. Transformación lineal de las formas algebraicas. Invariantes y covariantes.

Capelli llega a exponer los desarrollos en serie de potencias de las funciones trascendentes elementales en variable real, que es el objetivo estándar del análisis algebraico tradicional. En la introducción expone la misma concepción del análisis algebraico que ya manifestó en la primera edición.

El autor italiano entiende las funciones algebraicas en sus términos más generales, como explica en la misma página del libro; para una variable, son las funciones implícitas $y = f(x)$ que resultan de una ecuación $F(x, y) = 0$, donde $F(x, y)$ es un polinomio en dos variables[14]. Pero sucede que el estudio de estas funciones con toda generalidad entra en los dominios del análisis superior, incluso de variable compleja, de modo que los libros dirigidos a la enseñanza de los dos primeros cursos universitarios, como los antes citados, reducen también el alcance teórico del análisis algebraico así concebido, limitándose al estudio de las funciones algebraicas más sencillas, los polinomios.

4.2 Primeros autores o importadores españoles

Para contextualizar nuestro estudio de los diversos autores iremos haciendo breves bosquejos de la situación de la enseñanza superior —con interés primordial en la enseñanza del álgebra— durante la última parte del siglo XIX en España, pasada ya la Ley Moyano (1857)[15] que creó las Facultades de Ciencias, con las Secciones de Exactas, Físicas y Naturales[16].

Sobre la enseñanza de las matemáticas en las escuelas de ingenieros se pronuncia Santiago Garma, haciendo referencia a la más antigua de ellas, la de Caminos,

> [...] hasta 1857, la enseñanza de matemáticas para los ingenieros de Caminos consistía en lo que se aprendía para el examen de ingreso y lo que se aprendía prácticamente, en el primer curso, lo que proporcionaba una sólida base de conocimientos matemáticos suficientes para emplear en sus proyectos. [162, p. 123]

Para conocer los programas de matemáticas en la Escuela General Preparatoria y en las diversas escuelas superiores de ingenieros a lo largo del siglo XIX, así como los libros reco-

[14]A partir de una ecuación polinomial de la forma $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ surgen las funciones algebraicas de varias variables.

[15]En septiembre de 1857 es aprobada la Ley de Instrucción Pública que ha pasado a la historia como Ley Moyano, en alusión a Claudio Moyano Samaniego (1809-1890), el ministro de Fomento que la propuso. Sobre éste y otros aspectos de las matemáticas en el sistema liberal español, véase el trabajo de F. Vea [346] y la bibliografía que contiene.

[16]La linea argumental de la historia del álgebra universitaria en España en el siglo XIX estará basada en [133]. Recientemente apareció la obra [275], que muestra la evolución de la enseñanza universitaria de las matemáticas, programas, textos y profesores de la Universidad Central (Madrid). Para la historia del álgebra elemental en el siglo XIX español usaremos [47].

mendados para seguirlos, la referencia básica es la obra de Mª Ángeles Martínez [254][17]. Allí puede verse que, en general, los futuros ingenieros estudiaban cálculo infinitesimal y geometría analítica, siendo los estudios previos de álgebra (análisis algebraico) y geometría (con trigonometría) necesarios para ingresar en las escuelas.

La Ley Moyano planteaba que los primeros años de los estudios de Ciencias Físico-Matemáticas fueran los de acceso a las ingenierías, que perdían así independencia en la formación de sus profesionales; los ingenieros protestaron, liderados por los de Caminos, reclamando para ellos mismos la formación en la matemática de aplicación, lo que consiguieron Caminos, Minas y Montes en 1859, bajo el argumento de que la Facultad de Ciencias estaba todavía en fase de organización. La influencia social de los ingenieros de caminos fue muy notable durante el siglo XIX, y eran uno de los estamentos de referencia, junto con los militares, para el conocimiento de las matemáticas. Cuando la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Academia surgió en 1847, la Sección de Exactas tuvo 12 plazas fundacionales, de las cuales 6 estaban ocupadas por ingenieros de caminos[18].

4.2.1 Cortázar, antes y después de 1857

José Cortázar y Abasolo (1809-1873)[19] fue el catedrático de matemáticas representativo de los primeros años de la segunda mitad del siglo XIX, en los que estos profesores eran una rareza como indica S. Garma:

> Por lo que se refiere a las matemáticas, al ver el primer escalafón de los catedráticos de las universidades del reino, publicado en 1851 por Antonio Gil de Zárate, de los 15 catedráticos de asignaturas de ciencias que había en las universidades sólo dos, Francisco Travesedo y Juan Cortázar[20], lo eran de matemáticas, de cálculo infinitesimal y de álgebra superior y geometría analítica,

[17] Para la ingeniería industrial véase también la obra de G. Lusa a partir de [248].

[18] Esta Academia surgió como ampliación de competencias de la Academia de Ciencias Naturales de Madrid, que surgió en 1834.

[19] Nada más aparecer la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, Irueste publicó en ella un artículo biográfico [200] sobre Cortázar, utilizado por Outerelo para su nota biográfica en [275, p. 320]. El artículo biográfico de Irueste está accesible en `http://elgranerocomun.net`, la página web de Ernesto García Camarero.

[20] F. Travesedo (1786-1861) fue uno de los académicos fundadores de la Academia de Ciencias en 1847. J. Cortázar (1809-1873) formado en los años treinta como ingeniero de caminos en París y, a su regreso a España, influyente catedrático de matemáticas en los años centrales del siglo. Fue elegido académico en 1857, cargo que no llegó a ocupar por motivos de salud.

> y en el escalafón siguiente de 1859, mientras que los catedráticos de física, química y ciencias se han triplicado, sólo queda como catedrático Cortázar [. . .] Así pues, las matemáticas universitarias llevaron una vida lánguida con pocos medios y sólo cuando definitivamente se creó la Facultad de Ciencias se impulsó su enseñanza. [162, pp. 123-124]

Cortázar fue nombrado catedrático de Matemáticas elementales en 1845, y en 1850 también de Álgebra superior y Geometría analítica[21], materias sobre las que publicó obras de gran difusión desde los años cuarenta, a través de muy numerosas ediciones, algunas de las cuales se siguieron editando en el siglo XX[22]. Sus libros de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría forman un conjunto equiparable al que escribiera Baltzer en cuanto a la materia abarcada, si bien con un alcance matemático algo menor. También había autores franceses con una obra variada que alcanza a todas las materias de la enseñanza inmediatamente anterior a la universidad y de los primeros años universitarios, como Sylvestre François Lacroix (1765-1843), Pierre Louis Marie Bourdon (1779-1854) o Paul Louis Cirodde (1749-1849). La gran vinculación de España con Francia en materia científica desde el inicio del siglo XIX se manifiesta en que los libros seguidos en las escuelas españolas de ingenieros, así como en la Facultad, traducidos muchos de ellos, eran franceses. Al propio Cortázar se le envió a París a formarse como ingeniero de caminos, así que sus obras reflejan claramente la influencia francesa[23]. En la Facultad, no tanto en las escuelas de ingenieros, Cortázar imponía sus textos, que aparecían recomendados junto a los de sus mentores franceses. Así, en la lista de libros de texto para los primeros cursos aparecen recomendados en 1859[24]:

> [Materias] Álgebra, Geometría y Trigonometría:
>
> *Tratado de Algebra, Geometría y Trigonometría*, por D. Juan Cortázar.
>
> Idem id. por Bourdon, traducido.
>
> Idem id. por Cirodde, traducido.

La cita anterior parece referirse a un solo libro de Cortázar, pero en realidad se trata de uno por cada una de las materias citadas. Como hicimos al estudiar la obra de Baltzer,

[21]Todavía en la Facultad de Filosofía y Letras.

[22]Véase una relación de las sucesivas ediciones de las obras de Cortázar en la obra de Mª Cinta Caballer [47], también en [346].

[23]Luis Rico y Alexander Maz afirman que al comparar el *Tratado Elemental de Álgebra* de Cortázar y los *Elementos de Álgebra* de Bourdon se detectan diferencias didáctico-pedagógicas. [297]

[24]Véase [254], donde se recoge lo publicado en el *Boletín Oficial del Ministerio de Fomento*.

nos interesan sólo las de álgebra, porque dan cobijo al análisis algebraico de aplicación a la enseñanza.

Cortázar escribió un *Tratado de Aritmética* que precede a dos obras de álgebra, ambas con primera edición en 1848[25]: *Tratado de Álgebra elemental* [91] y *Tratado de Álgebra superior*, llamado *Complemento de Álgebra* a partir de su tercera edición en 1864[26]. Este cambio de título, que hemos deducido de la consulta directa de las obras, se corresponde con el cambio de nombre de la asignatura Álgebra superior, que, tras las reformas de planes ocasionadas por la Ley Moyano, pasó a llamarse Complemento de álgebra, geometría y trigonometría. Los tres "tratados" juntos podrían componer un "tratado de análisis algebraico" que muestra el nivel de la enseñanza matemática española de su tiempo[27]. Los dos primeros componen el primer nivel del análisis algebraico y el tercero un segundo nivel o curso referido a la resolución de las ecuaciones algebraicas y temas como las series. Los métodos lineales que nos ocupan en esta memoria están en la segunda de las obras citadas, que vamos a describir con algún detalle.

Tratado de álgebra elemental [92]

Esta obra, como la mayoría de su autor, alcanzó muchas ediciones, la primera data de 1848 y la última en vida del autor fue la número 22 del año 1873, seguida por otra de 1875 que ya aparece al cuidado de "sus herederos", bien entendido que quien se ocupaba de ello era el hijo Daniel de Cortázar y Larrubia[28] (1845-1927), que era ingeniero de minas y geólogo. La última edición de la obra fue la 40ª en el año 1926.

Elegimos para comentar la octava edición publicada en el año 1857 por tratarse del año de expedición de la Ley Moyano[29].

El *Tratado de Álgebra elemental* de Cortázar está dividido en seis partes, esas partes se subdividen en capítulos y estos a su vez, en artículos y estos últimos en apartados. El

[25]Nótese que coincide con el año de la fundación de la Escuela General Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos.

[26]La segunda edición tuvo lugar en 1858, y la última, ya con el nuevo nombre, fue la sexta de 1885. Outerelo [275, p. 155] reproduce el índice de la tercera edición, obra que está accesible en `www.bdh.es`.

[27]Inferior a la que alcanzó el libro de texto general de Baltzer antes comentado, aparecido en Alemania en 1860; esta superioridad justifica que, como más adelante veremos, se eligiera traducir el Baltzer para mejorar el nivel de la enseñanza de las matemáticas en España.

[28]Ingresó al Cuerpo de Ingenieros de Minas en 1865, obtuvo el ascenso a Ingeniero Jefe de Segunda en 1877 y de Primera en 1891. Fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias, Exactas, Físicas y Naturales de Madrid en 1884. [292]

[29]Varias ediciones se pueden localizar en `http://bdh.bne.es.`, Outerelo [275, pp. 118-119] describe el índice de la 15ª de 1865.

índice es el siguiente:

Aquí nos ocuparemos del libro 2º –que hemos destacado en cursiva–, que es donde se ocupa de los sistemas lineales. Cortázar comienza con nociones generales sobre ecuación, solución, y ecuaciones equivalentes. Centrándose ya en las ecuaciones de primer grado, expone a través de ejemplos los procedimientos algebraicos para eliminar incógnitas en dos ecuaciones con dos o más incógnitas. En los capítulos 4 a 7 se plantea el problema general de resolver un sistema de ecuaciones (sin emplear el término sistema) en estos términos:

> *Para resolver un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas, se elimina una incógnita entre dichas ecuaciones; y resultará una ecuación menos y una incógnita menos. Se vuelve á eliminar una incógnita en estas ecuaciones; y continuando del mismo modo, se llegará a una ecuación con una incógnita. Se halla el valor de esta incógnita, y por medio de ella se hallarán fácilmente los valores de las demás.* [92, p. 59]

Continúa su exposición con ejemplos numéricos de sistemas de dos, tres y cuatro ecuaciones. Finalmente considera el caso general de los sistemas de dos y tres ecuaciones, y presenta la solución como lo hicieran MacLaurin y Cramer[30], con el único recurso al proceso algebraico de eliminación de incógnitas, con lo que las fórmulas se le hacen inabarcables por largas y sólo se puede sugerir con un "etc" que se hace igual con sistemas de mayor tamaño, como hicieron sus predecesores en el siglo anterior.

En el capítulo siguiente, discute los casos de indeterminación e imposibilidad y las fórmulas generales de las ecuaciones de primer grado. Trata el caso de dos ecuaciones y dos incógnitas, en las que las fracciones que expresan la solución tienen numerador distinto de cero, y denominador nulo; y cuando ambos son iguales a cero. Indica que análogamente, se pueden discutir las fórmulas correspondientes a tres ecuaciones generales, etc.

En definitiva, dado que Cortázar no introduce determinantes[31], su presentación se reduce a los casos de dos, tres y cuatro ecuaciones, quedando pendiente el caso general, que se vislumbra pero sin disponer de un procedimiento que permita expresarlo.

Esto fue así en todas las ediciones del *Tratado Elemental de Álgebra*, pero fue compensado, a partir de 1883, con la adición de una amplia nota al final del libro. Con respecto a las ediciones 2ª (1849) y 28ª (1883), F. Vea comenta que

> ambas desarrollan un contenido idéntico, salvo en el último punto de la edición corregida por Daniel de Cortázar donde se expone –con cierta amplitud– la teoría de los determinantes. [346, p. 589].

En efecto, en la edición de 1883, corregida y aumentada por su hijo el ingeniero de minas y geólogo Daniel de Cortázar, encontramos al final del libro una nota de 31 páginas dedicada a los determinantes[32].

El esquema de la nota sobre determinantes es el siguiente: Inicia con unas nociones preliminares que le permiten introducir la definición combinatoria del determinante, como lo hiciera Trudi[33]. Comenta sobre las notaciones y establece las propiedades de los determinantes, sin olvidar la regla de Sarrus. Define determinantes menores y explica el desarrollo de un determinante por una línea. Define el producto de determinantes fila-fila, indicando que este producto se puede escribir de cuatro maneras distintas permutando las

[30] Véase lo dicho sobre estos autores en la primera parte de la memoria.

[31] Sí trata las nociones de permutaciones y combinaciones, pero son introducidas en el segundo capítulo del libro cuarto, justo antes de explicar el desarrollo del Binomio de Newton.

[32] Como vamos a ver a continuación, para entonces ya era una realidad la presencia de los determinantes en la matemática española, y ello significaba una carecncia evidente en la obra de Cortázar, lo que su hijo intentó remediar sin modificarla.

[33] Que ya estaba traducido por Echegaray, como veremos enseguida.

líneas a considerar para multiplicar. LLama determinantes "múltiplos" a los determinantes múltiples expuestos en [117][34]. En las últimas 10 páginas se ocupa de las aplicaciones de los determinantes: a la geometría, a la solución de sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas, todas ellas muy sencillas. En el primer caso escribe en forma de determinante el área de un triángulo en el plano. En el segundo retoma las fórmulas de la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3 dadas en el libro 2º y observa que se trata de fracciones cuyos numeradores y denominadores son determinantes. Agrega que eso mismo ocurre para sistemas con cuatro o más ecuaciones que contengan igual número de incógnitas, de modo que, a pesar de exponer determinantes, deja incompleta su aplicación primera y básica a la resolución de los sistemas lineales.

Dedica algo más de una página a la discusión de la compatibilidad de los sistemas no homogéneos considerando la problemática en general y en un caso particular.

Finalmente, trata de la eliminación en sistemas de dos ecuaciones de segundo grado, escritas en forma general, explicando el método dialítico de Sylvester para éste caso.

4.2.2 Echegaray 1868: los determinantes de Trudi

En la reforma de planes de estudios 1866 (del Ministro de Fomento Manuel de Orovio) se consolidó una situación que venía de años anteriores, en la que para ser Bachiller en Ciencias se estudiaba, entre otras materias, una asignatura de Complementos de Álgebra, Geometría y Trigonometría en primer curso y otra de Geometría Analítica en segundo, asignaturas cuyos textos de referencia eran, entre otros, los de Juan Cortázar. Luego, para ser Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas se cursaban en un primer curso (tercero en el cómputo total) Cálculo Diferencial e Integral y Geometría Descriptiva, además de Física etc. Todas estas asignaturas tenían clase diaria, al igual que la Mecánica Racional de segundo de Licenciatura (cuarto en el cómputo total) que culminaba la formación teórica del licenciado. La reforma de Orovio volvió a plantear que los primeros años de los estudios de Ciencias Físico-Matemáticas fueran los de acceso a las ingenierías, pero de nuevo los ingenieros se opusieron, liderados como siempre por Caminos, reclamando por su parte que la Facultad debería elevar su nivel teórico, lo que suponían innecesario para los ingenieros, quienes podían ocuparse de la formación matemática aplicada de sus

[34]También veremos más tarde que la obra de este autor era seguida en España en un libro publicado el mismo año 1883 [22].

estudiantes.

En esta línea argumental se expresaba un artículo publicado sin firma en la *Revista de Obras Públicas*, en el que su autor[35] consideraba insuficientes los programas de la facultad, particularmente la asignatura Complemento de Álgebra, y reclamaba la presencia en nuestros centros superiores de cursos de álgebra como los que Serret impartía en la Sorbona, en los que se explicaran, además de los temas más elementales de la resolución de ecuaciones que en nuestro país se enseñaban, otros como las congruencias, la teoría de los determinantes y un asomarse a la teoría de Galois, aspecto de álgebra superior:

> Hemos dicho ya varias veces que las materias comprendidas en el programa de la facultad no representan ciertamente la ciencia moderna por mucho que sea el esmero con que se estudien, y aun menos si las varias asignaturas que abarcan han de explicarse tan sólo con la extensión necesaria para los alumnos de las cinco escuelas mencionadas, que ni aun es la misma para todos ellos. Citemos algunas pruebas de esta verdad.
>
> ¿Dónde está en el programa de la facultad de ciencias una clase de Algebra superior como la que —no ya hoy, sino 18 años há— explicaba brillantemente Mr. Serret en la Sorbonne?
>
> En la facultad no aparece esta clase, porque *no lo es, ni puede serlo*, lo que en la *Gaceta* del día 22 se llamaba CLASE DE ÁLGEBRA, y de COMPLEMENTO DE ÁLGEBRA en la del 24. Esta asignatura titulada complemento de Algebra será, cuando más, *teoría general de ecuaciones* con la extensión de las obras elementales; pero no comprenderá la teoría de los determinantes, ni las congruencias, ni las factoriales, ni la teoría de las sustituciones, ni los trabajos de Abel, Galois, Hermite y tantos otros geómetras: y sin embargo todo esto debia enseñarse en la facultad, [...] [1, p. 262][36]

Sin duda las líneas anteriores encerraban una crítica a los libros de texto de Cortázar, considerándolos de contenido anticuado. En esa fecha el libro de Serret andaba por su tercera edición y se estaban traduciendo en Italia los *Elementos de Matemáticas* de Baltzer, libro[37] que avanzaba en la dirección propuesta, pues el autor reconoce el influjo de Serret

[35]Probablemente el firmante era J. Echegaray.

[36]Esta cita u otras similares se han utilizado repetidas veces por diversos autores, por ejemplo, [162] y [47].

[37]Ya hemos comentado este libro de 1860 y un poco más adelante nos ocuparemos de su traducción

en la parte relativa a la resolución de ecuaciones (anterior a la teoría de Galois), aunque la obra del francés tiene mayor nivel que la del alemán. Estas críticas de 1866 no surtieron efecto hasta una nueva reforma que se produjo en 1887, entretanto se reeditaban una y otra vez los libros de álgebra de Cortázar.

Por estos años José Echegaray y Eizaguirre[38] (1832-1916) había iniciado su labor de escritor de libros de matemáticas, al poco de convertirse en profesor de la Escuela de Caminos, en la que había ingresado como estudiante en 1848 y de la que salió graduado en 1853; después de ejercer un año como ingeniero en las obras del puerto de Almería, se incorporó a la misma como profesor. En la Escuela de Caminos, como en todas la de ingenieros, se utilizaban libros franceses de matemáticas, y fueron estos libros los que orientaron mayoritariamente las obras de Echegaray. Publicó primero *Cálculo de variaciones* (1858) [120], como ayuda para el estudio de un tema de sus cursos de cálculo, en los cuales seguía el texto *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* de Antoine Augustin Cournot (1801-1877), un libro de 1841. En 1865 publicó, a petición de un amigo suyo, preparó dos colecciones de problemas resueltos: *Problemas de geometría plana* y *Problemas de geometría analítica en dos dimensiones*. En ese mismo año fue elegido miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales[39]. Entonces asumió como objetivo la importación de teorías matemáticas no difundidas antes en España, lo que inició con la geometría de Chasles en la obra *Introducción a la geometría superior* (1867) [122][40], cuyo propósito describió con las siguientes palabras:

> Me propongo publicar en esta serie de artículos un breve resúmen de las principales teorías que constituyen hoy la *Geometría superior*, y facilitar de este modo á la juventud el estudio de las obras clásicas, entre las que debo citar la *Geometría superior* de Mr. Chasles, uno de los primeros matemáticos de nuestra época.
>
> En España desgraciadamente nunca se ha esplicado esta materia, ni *jamás* se ha contado con ella en nuestros programas de enseñanza: verdad es que la misma suerte han corrido y corren otras muchas. [122, Introducción]

En su conocido, y también discutido, discurso pronunciado en Valladolid en 1915, Rey

española publicada a partir de 1879.

[38] Para su prolífica biografía véase la obra de Sánchez Ron [302].

[39] Su discurso de ingreso [121], en el que criticó el bajo rendimiento histórico de la matemática española fue un hito relevante en la llamada “polémica de la ciencia española”.

[40] Apareció primero como artículos en la revista de la Academia, denominada entonces *Revista de los Progresos de las Ciencias, Exactas, Físicas y Naturales*.

Pastor se refirió a Echegaray con estas palabras que empiezan con una declaración retórica algo excesiva:

> Para la Matemática española, el siglo XIX comienza en 1865, y comienza con Echegaray.
>
> Su labor admirable se divide en dos épocas, que pudiéramos titular vulgarización con éxito y vulgarización en el vacío[41]; [...]
>
> En la primera época importa la Geometría superior de Chasles y el Cálculo de variaciones; introduce la Teoría de las determinantes mediante un arreglo de los tratados de Trudi y Brioschi; finalmente, vulgariza la transcendencia de π, para acabar en España con la plaga de los cuadradores; y los trabajos de Wantzel, para exterminar la de los trisectores. [281, p. 14]

En la tarea importadora de los determinantes es en la que nos vamos a detener, porque constituye el tema de esta memoria[42].

J. Echegaray, 1868.

Memoria sobre la teoría de las determinantes [123]

Este es el primer libro dedicado a la teoría de los determinantes en España. La obra está compuesta de 202 páginas, cuya numeración comienza en la página 243 y termina en la página 444 porque, según una primera *Advertencia* inserta en la obra: "esta memoria debió publicarse formando parte del tomo VIII de la colección de *Memorias y documentos*", refiriéndose tal vez a las publicaciones asociadas a la *Revista de la Academia de Ciencias*, el órgano de difusión más importante en la época.

En una segunda *Advertencia* el autor presenta así su trabajo:

> Esta memoria es un arreglo, y casi pudiera decir que la traducción libre de la parte elemental de la excelente obra del profesor Trudi. No conozco libro mejor escrito que el del profesor italiano: claridad, método, exactitud, todo lo reune, y lo más á que

[41] Dos años antes, había dejado escrito en su Discurso de apertura del curso 1913-14 en la Universidad de Oviedo: "Tampoco podría encomiar bastante la admirable obra vulgarizadora del genial Echegaray" [279, p.].

[42] Ya hemos mencionado las primeras obras de Echegaray citadas por Rey Pastor, respecto a las últimas véase [302].

> puedo aspirar es á que en mi trabajo se refleje algo de las brillantes cualidades del original. [123, Advertencia][43].

Echegaray no da la referencia completa del libro referido, pues, siguiendo un hábito de la época que duró hasta entrado el siglo XX, lo supone conocido por sus lectores. Se trata de la obra del matemático italiano Nicola Trudi *Teoria de' determinanti e loro applicazioni* (1862) [343], que hemos comentado en la primera sección del segundo capítulo de esta memoria. Pero Echegaray no vuelca al idioma español la obra completa, sino sólo su primera parte, *Teoria de los determinantes*, a la que se refiere en la segunda advertencia citada como la "parte elemental". Esto quiere decir que Echegaray considera más difícil o superior la segunda parte dedicada a las aplicaciones, en la que no sólo se necesita conocer el algoritmo de los determinantes, sino también cuestiones diversas de álgebra, geometría y análisis matemático. Por otra parte, nos parece lo más importante destacar que no hace una traducción estricta del libro de Trudi, sino que la modula a su estilo formando lo que llama un "arreglo, y casi pudiera decir que la traducción libre" del texto del italiano. A propósito de este aspecto, Muir se limita comentar de este modo lo que dice Echegaray:

> El autor dice que ha considerado su trabajo más que una traducción libre de Trudi. [266, Vol. III p. 28]

Como la primera parte del libro de Trudi ya ha sido descrita y comentada, nos limitaremos ahora a exponer la naturaleza de la intervención de Echegaray en su "arreglo" o "traducción libre".

El autor español sigue el hilo del discurso y el planteamiento diseñado por el italiano, con los once capítulos subdivididos en apartados enumerados, lo que permite seguir en paralelo la obra original y la traducción libre. Echegaray incluye repetidas veces párrafos introductorios previos a la traducción directa del texto de Trudi, intercala ejemplos numéricos y explicaciones, añade figuras descriptivas de la disposición de los elementos del determinante, etc. En definitiva, añade abundante discurso adicional para ayudar a comprender el libro del italiano, quizás porque Echegaray supone que para el lector español la obra deTrudi resulta tal cual de difícil lectura. De este modo, Echegaray emplea 202 páginas para lo que el italiano, en un formato similar, sólo necesita 112. Seguidamente vamos a

[43]Como preámbulo a la obra sólo están estas cortas líneas, dado que el ingeniero español no traduce el prefacio de la obra del profesor italiano, en el que aparece una lista de autores que se habían ocupado de los determinantes. A lo largo del texto propiamente dicho, Echegaray sólo menciona, cuando lo hace Trudi, a Baltzer.

hacer explícitos algunos aspectos de la memoria que ilustran el modo de introducir esta forma de proceder de Echegaray.

En primera instancia relacionamos el índice propuesto por Echegaray[44] para mostrar en paralelo la cantidad de páginas[45] empleadas por cada autor en la exposición de cada una de las secciones.

Sec.	Memoria sobre la teoría de las determinantes	Teoria de' determinanti
		Prefazione (p. v-ix)
	Advertencias	Avvertenze
I	Inversiones en las permutaciones (p. 1)	Inversioni nelle permutazioni di più elementi (p. 1)
II	Consideraciones generales sobre los cuadros generadores ó matrices (p. 15)	Nozioni intorno alle matrici rettangolari e quadrate (p. 5)
III	Primeras nociones sobre las determinantes. Determinantes menores y complementarias (p. 27)	Prime nozioni intorno ai determinanti minori e complementali (p. 12)
IV	Propiedades generales de las determinantes (p. 50)	Propietà generali de' determinanti (p. 19)
V	Descomposición de determinantes en suma de productos de menores complementarias (p. 79)	Descomposizione de' determinanti in somme di prodotti di minori complementali (p. 35)
VI	Multiplicación de determinantes (p. 87)	Moltiplicazione de' determinanti (p. 40)
VII	Derivadas y diferenciales de las determinantes (p. 112)	Derivate e differenziali de' determinanti (p. 51)
VIII	Transformación de determinantes (p. 120	Speciali trasformazioni de' determinanti (p. 57)
IX	Determinantes recíprocas (p. 135)	Determinanti reciproci (p. 67)
X	Determinantes simétricas, semisimétricas y disimétricas (p. 142)	Determinanti simmetrici, gobbi simmetrici, e gobbi (p. 73)
XI	Matrices y determinantes de dos escalas (pp. 172-202)	Matrici e determinanti a due scale (pp. 94-112).

Tabla 4.1: Contenido por secciones de la memoria de Echegaray y su parte correspondiente del libro de Trudi

Ahora indicamos cómo plantea Echegaray la traducción libre, señalando en cada sección algunas de las adaptaciones y comentarios añadidos por el autor español.

En §I mediante 14 páginas Echegaray expone los contenidos de los 10 apartados presentados en 5 páginas que dedica Trudi a la primera sección. Veamos cómo Echegaray aborda el tema,

1. Imaginemos una *série de elementos* literales o numéricos en los que exista un

[44]Traduce también con libertad algunos títulos de los capítulos, una traducción más fiel de los originales sería, por citar algunos casos: I.-Inversiones en las permutaciones de varios elementos. II.-Nociones en torno a las matrices rectangulares y cuadradas. II.-Primeras nociones en torno a los determinantes minores y complementarios, etc.

[45]A la página n de éste índice le corresponde la página $n + 242$ de la memoria de Echegaray.

> órden natural de sucesion, ó á los que, para las combinaciones subsiguientes, demos á voluntad un número de órden. [123, p. 243]

Enseguida, da ejemplos para llegar a la noción de permutación de n elementos usando letras y números. Distingue dos tipos de permutaciones, la *principal* y la *inversa* para referirse a la que sigue el orden natural y el orden inverso, respectivamente; que corresponde al punto inicial de la exposición de Trudi.

Dos elementos forman una inversión cuando no siguen el orden directo. Añade que *cada permutación tiene un número fijo y perfectamente determinado de inversiones* y que para el caso de la permutación inversa el número total de inversiones es $\frac{1}{2}n(n-1)$. Este enunciado es planteado sin más por Trudi:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

mientras que Echegaray continúa diciendo:

> En efecto, el *primer elemento* forma inversion con todos los que le siguen, que son en número $n-1$, pues tiene menor número de órden que todos ellos; luego á dicho número corresponden $(n-1)$ inversiones: el *segundo elemento* forma asimismo inversion con los $(n-2)$ que le siguen; tenemos, pues, $(n-2)$ inversiones más: al *tercero* corresponden $(n-3)$, y así sucesivamente hasta el penúltimo, que forma *una* inversión con el elemento final. [123, p. 246]

y finaliza puntualizando que cuando $n=4$ se tienen 6 inversiones.

Añade que en las permutaciones se distinguen dos categorías las pares e impares, según sea el número de inversiones.

El título de la segunda sección es un tanto distinto del original, y Echegaray en sus explicaciones hace énfasis en el manejo del cuadro de números o tabla. Expone la definición y notación de matrices, las cuales aparecen escritas entre barras verticales. Señala que se pueden sumar y restar las líneas de una matriz, así como también multiplicar o dividir una línea por una cantidad dada. Dice que dos líneas son equivalentes si una es múltiplo de la otra y que dos matrices son *semejantes* cuando tienen el mismo número de líneas horizontales y el mismo número de líneas verticales. Distingue entre matrices rectangulares y cuadradas. Llama conjugada a la acción de transposición y describe matrices simétricas haciendo uso de figuras explicativas [123, p. 266]. Denomina grado al tamaño de una matriz cuadrada.

Retomamos aquí el apartado número 12 citado de la obra de Trudi [343, p. 6], solo para indicar las explicaciones adicionales dadas por Echegaray:

> 12. Como cada elemento pertenece á la vez á una *horizontal* y á una *vertical*, [y es, por decirlo así, la intersección de ambas líneas][46]., resulta que para individualizar [ó fijar] cada elemento de una matriz, basta indicar el *número* de órden de la horizontal y el de su vertical.
>
> En general se designa el elemento, que se halla en la r^{ma} horizontal y en la s^{ma} vertical, reuniendo los dos números de órden en el siguiente símbolo:
>
> $$(r, s).$$
>
> Los números r y s se dice que son los índices del elemento: el primero, *índice de las horizontales*; el segundo *índice de las verticales*, ó más sencillamente *primero y segundo índice*. [123, p. 258]

Estos añadidos no tienen nada de particular, sólo que Echegaray los emplea en el momento de explicar la matriz simétrica (p. 266) donde aparece la primera figura. También usará figuras en la sección siguiente para las determinantes conjugadas (p. 281), en las dos últimas secciones para ilustrar las determinantes simétricas, semi-simétricas y disimétricas (p. 385), así como también en las determinantes y matrices de dos escalas (p. 417, 418, 423, 429, 431, 432, 439). Añade:

> [La palabra *conjugado* indica, pues, *simetría de posición relativamente á la diagonal* ó línea de elementos principales].
>
> Se llaman *simétricas* las matrices cuadradas en las que cada línea es idéntica á su conjugada. [123, p. 267]

Ya vimos la definición del determinante que presenta Trudi en su libro, ahora veamos el planteamiento de Echegaray en §III:

[46] De esta manera indicaremos de aquí en adelante los comentarios intercalados que ha añadido Echegaray en la memoria y que no están en el libro de Trudi.

19. Sea la matriz cuadrada de grado n

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \cdots & a_{4,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Tomemos en cada *vertical* un elemento, de suerte que todos ellos correspondan á *horizontales distintas*; formemos su producto, y démosle el signo + ó − segun que las dos permutaciones de los primeros y de los segundos indices sean de la misma ó de distinta clase. [123, p. 269]

Seguidamente, considera el caso particular, $n = 4$ y continua diciendo:

Pero este producto no es único: de la misma matriz pueden deducirse otros muchos distintos entre sí, aunque en número finito, y á la suma algebráica de todos ellos se le da el nombre de DETERMINANTE.

[La determinante, pues, de los n^2 elementos de una matriz es por lo tanto *una cierta función algebráica, racional, entera y homogénea de dichos n^2 elementos*]. [123, p. 270]

Vale la pena indicar que esta última afirmación cobra gran importancia si vemos el contexto europeo de los determinantes.

Designa con letras mayúsculas lo que él llama valor numérico de una determinante del grado n,

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots\ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

seguido de este comentario, que también constituye un añadido del autor español, con referencia a sus precisiones en la distinción entre matriz como el simple cuadro de números y el determinante como una función.

> pero entiéndase que este cuadro no es matriz, grupo ó tabla.
> Por el contrario, debe considerarse como expresión simbólica y abreviada de una función perfectamente definida, que para valores numéricos de sus elementos tomará valores numéricos tambien y determinados. [123, p. 270]

Incluye las nociones de las determinantes menores y complementarias, y también las transpuestas (conjugadas), estas últimas en relación a las figuras simétricas que forman con respecto a la diagonal.

Inicia la sección §IV con el desarrollo de un determinante por cofactores, luego expone cada una de las propiedades de los determinantes las cuales enuncia mediante teoremas, y suministra ejemplos. Finaliza con algunos casos especiales por su importancia en las aplicaciones en el análisis y la geometría.

En §V encontramos otro ejemplo en el que Echegaray amplia la explicación, antes de enunciar el teorema

> Todo determinante equivale á la suma de los productos de todas las menores comprendidas en una matriz rectangular formada con m líneas paralelas cualesquiera por sus respectivos complementos algebraicos. [123, p. 322]

al que llega rápidamente Trudi, Echegaray añade varios párrafos para explicarlo, junto con una representación gráfica.

La sección §VI contiene la explicación de la *multiplicación de determinantes y matrices.* Primero considera el caso cuadrado y luego el de las rectangulares.

$$K = PQ$$

> ... para formar la determinante K, puede decirse que P funciona como multiplicador y Q como multiplicando; de suerte que los elementos de una horizontal de K se obtienen multiplicando una misma horizontal de P por todas las horizontales de Q, y el elemento $s.^{mo}$ de la $r.^{ma}$ horizontal será, por lo tanto, el producto de la $r.^{ma}$ horizontal de P por la $s.^{ma}$ horizontal de Q. [123, p. 336]

e indica que bien puede efectuarse el producto usando filas o columnas

> El método precedente de multiplicación puede designarse con el nombre de *multiplicación por horizontales*, mas se comprende que pueden multiplicarse dos determinantes dadas por *verticales*, y aún *horizontales* por *verticales*, de donde resultan cuatro expresiones distintas en la forma para el producto de dos determinantes, aunque idénticas en su valor algebraico. [123, p. 336]

Seguidamente introduce la multiplicación de matrices diciendo:

> Aplicando el método de la multiplicación de determinantes á dos matrices, que en general supondrémos rectangulares y semejantes, se obtienen resultados dignos de notarse. [Mas obsérvese que la palabra *multiplicación* no tiene en este caso la misma significación que en las determinantes; pues en éstas indica una operación algebraica, y en el caso de dos matrices, sólo expresa una transformación del orden combinatorio, pues ni cada matriz expresa una cantidad, sino un cuadro ó agrupación de elementos distribuidos según cierto órden; ni, por lo tanto, el producto de dichas dos matrices puede expresar el producto de dos cantidades ó funciones algebraicas]. [123, p. 339]

Como ejemplo de aplicación del producto obtiene la fórmula de Euler-Lagrange, la cual es presentada con esta denominación. Esta expresión también se encuentra en el libro de Trudi quien afirma que es una relación conocida sin atribuir nombres.

En las secciones §VII y §$VIII$ incluye comentarios principalmente al inicio de cada una, o bien para introducir el tema o para justificar los pasos para la obtención de las fórmulas que van apareciendo.

Las últimas tres secciones del libro están dedicadas a determinantes con formas especiales.

§IX como su título indica trata las determinantes recíprocas y sus propiedades. Entiéndase recíproca de la determinante primitiva a la determinante cuyos elementos son los complementos algebraicos.

§X Este apartado tiene que ver con tres tipos de determinantes: simétricas, semi-simétricas y disimétricas; las que define con palabras, con figuras y con nomenclatura algebraica, lo que constituye una diferencia con el planteamiento de Trudi.

> *en las determinantes simétricas* $a_{r,s} = a_{s,r}$ *para todos los valores de* r *y* s*;*
> *en las determinantes semi-simétricas* $a_{r,s} = -a_{s,r}$ *y* $a_{rr} = 0$ *por lo tanto, para todos los valores de* r *y* s*;*

> *en las determinantes disimétricas* $a_{r,s} = -a_{s,r}$ *con tal que* r *y* s *sean desiguales* [123, p. 385]

§XI versa sobre las matrices a una y dos escalas. Las cuales define para matrices rectangulares, tanto en palabras como mediante el uso de figuras.

Una vez que hemos visto el modo como Echegaray tradujo la primera parte del libro de Trudi intentando hacer su obra lo más comprensible posible, hemos de añadir que el proyecto de Echegaray no termina aquí, su objetivo era traducir también la segunda parte de la obra dedicada a las aplicaciones, la cual empieza a publicar en 1869 con un artículo en la *Revista de los Progresos de las Ciencias* titulado *Aplicaciones de las determinantes* [124]:

> Me propongo en estos artículos dar una sucinta idea de las principales aplicaciones de las determinantes. En cuanto à su teoría puede verse en varias obras elementales, entre las que merecen citarse las siguientes: el Algebra de Laurent, el Algebra superior de Serret, el Algebra superior de Salmon. [. . .]
>
> Los principales capítulos del presente trabajo, son casi la traducción de la segunda parte de dicha obra, incomparable por su método y su claridad; para los restantes he consultado la Teoría de las determinantes de Brioschi, y varias publicaciones italianas. [124, p. 321]

Este propósito se refiere a un proyecto que quedó inconcluso. En el artículo citado hay siete apartados en los que traduce la primera aplicación de los determinantes planteada por Trudi, la resolución de los sistemas lineales; nada más aparecer el apartado 8 surge el rótulo "se continuará", lo que no sucedió. Parece que en esta ocasión Echegaray quería mezclar planteamientos de Trudi con aspectos del libro de Brioschi [45], que hemos destacado en la primera parte de esta memoria por su dedicación especial a las aplicaciones, y otras publicaciones italianas[47], pero la tarea de Echegaray quedó suspendida en este punto.

Llegado el Sexenio Revolucionario, Echegaray fue reclamado por la política y suspendió su dedicación a las matemáticas, que reapareció a finales del siglo[48]. Aunque fue durante el

[47]Recordemos que en el prefacio de su obra, Trudi [343, p. ix] presenta trece representantes italianos promotores de la teoría.

[48]Primero fue nombrado Director de Obras Públicas, Agricultura, Industria y Comercio, y luego se desempeñó como Ministro de Fomento durante los períodos 1869-1871 y 1872-1873. Llegada la Restauración se estrenó como dramaturgo y estuvo en frente del Ministerio de Hacienda por poco tiempo, en 1904 recibió el Premio Nobel de Literatura.

Sexenio Revolucionario cuando Echegaray interrumpió su tarea de producción de libros, en el conjunto del país se produjo durante el Sexenio un crecimiento en la publicación de libros de matemáticas. A este respecto, Fernando Vea comenta:

> A partir de 1868, desaparecerían las listas oficiales de libros de texto, pasando –según las épocas– a recibir una autorización para su uso. En todo caso, a partir del Sexenio Revolucionario, comenzaron a publicarse un mayor número de libros de texto, cuyos autores veían en la edición un mérito profesional [La elaboración de libros de texto servía como mérito dentro del escalafón de catedráticos, que, en el caso universitario, suponía pasar de catedrático de entrada a catedrático de ascenso y, de éste, a catedrático de término] y una forma de incrementar sus ingresos [No era extraño que los propios catedráticos propusieran sus libros de texto en los establecimientos educativos donde impartían docencia]. [346, p.]

Pero no nos vamos a ocupar de libros realizados durante el Sexenio, los siguientes pertenecen ya al periodo siguiente de la Restauración, que nos llevará hasta el siglo XX.

4.2.3 Jiménez, traductor de Dirichlet y Baltzer

Pasamos a ocuparnos ahora de otro traductor, el astrónomo Eulogio Jiménez Sánchez (1834-1884), un matemático que perteneció a la Institución Libre de Enseñanza (ILE), de la que, al igual que Echegaray, fue accionista fundador.[49]. Como traductor, complementó a Echegaray porque puso su atención en obras alemanas, quizás porque también era alemana la influencia krausista que alimentaba el espíritu de la ILE.

En su discurso de Valladolid de 1915 [281], Rey Pastor asignó a Jiménez estos méritos:

> D. Eulogio Jiménez, importa la Teoría de los números (1872) mediante una buena adaptación española de la clásica obra de Lejeune Dirichlet (17); continua la divulgación del sistema de Chasles (1878-80) (18), importa y traduce las obras de Baltzer (1879-81) sobre Matemáticas elementales (19), cuyas ideas, poco modificadas, constituyen, hoy todavía, el programa de los dos primeros cursos en casi todas las Facultades de Ciencias (20). [281, p. 14]

[49]Natural de Méntrida (Toledo), estudió en las Escuelas Pías de San Fernando en Madrid. Se licenció en Derecho, pero fue uno de los primeros doctores en matemáticas de España, se doctoró en 1864 con una tesis titulada *De los eclipses*. Desde 1860 hasta su fallecimiento perteneció a la plantilla del Observatorio Astronómico de Madrid. Su descendiente Antonio Jiménez-Landi Martínez ha escrito una documentada obra sobre la Institución fundada en 1876 [213]. Para las matemáticas en la ILE véase [274].

No corresponde en este trabajo ocuparnos de la geometría de Chasles[50], pero sí de las otras dos actividades mencionadas.

Jiménez y la teoría de números

Tratado elemental de la teoría de los números, 1877 [211]

Este libro es el resultado de uno de los premios anuales convocados por la Real Academia de Ciencias de Madrid, concretamente el de 1872. Resuelta la convocatoria, la Academia premió la obra de Eulogio Jiménez Sánchez, que no fue publicada hasta 1877 como Tomo VII de la colección Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid[51]. Antes del inicio del prólogo se deja constancia en la obra de la convocatoria a la que concurrió con éxito:

TEMA

PARA LA ADJUDICACIÓN DE PREMIOS EN EL AÑO DE 1872.

> *Escribir una* Obra *sobre la* Teoría de los Números*, en la que se presente bajo forma didáctica el estado actual de esta rama importantísima de las ciencias matemáticas, y que pueda servir de preparación para el estudio de las* Memorias *especiales que acerca de esta materia se han escrito.*

Esta obra merece por sí misma un estudio detallado que no haremos, pero sí dedicaremos un pequeño apunte a propósito del calificativo de "buena adaptación española de la clásica obra de Lejeune Dirichlet", dado por Rey Pastor en 1915. La referencia es a la obra *Lecciones de Teoría de Números* de Dirichlet, que ha sido cuidadosamente descrita por C. Goldstein [167], quien la presenta de este modo:

> Las *Vorlesungen*, basadas en las lecciones de Lejeune-Dirichlet impartidas en 1856-57 en Göttingen, fueron publicadas póstumamente por Richard Dedekind, que las enriqueció con sustanciales suplementos, incorporando material de Dirichlet y suyo propio. Esta autorizada y cuidadosamente escrita introducción jugó un papel decisivo atrayendo a los matemáticos de la segunda mitad del siglo XIX a la teoría

[50]El importador de la geometría de Chasles es Echegaray, quien lo hizo antes de la Restauración en sus lecciones en la Escuela de caminos, por eso Rey Pastor afirma que Jiménez "continua la divulgación" de esa materia. Pero Jiménez explicó en la ILE la geometría proyectiva sintética de Steiner, también a un nivel "divulgador", por lo que podría considerarse una actualización previa a la introducción de la obra de Staudt por parte de Eduardo Torroja.

[51]En las páginas iniciales de la obra impresa se hace constar "Publicado por acuerdo de la Academia." De ello daba fe "El Secretario perpetuo, Antonio Aguilar".

> de números. Proporciona un puente entre las *Disquisitiones arithmeticae* (1801) de C.F. Gauss y el desarrollo de la teoría de números algebraica tal como fue promovida por David Hilbert en su *Zahlbericht* de 1897. [167, p. 480]

Según este juicio histórico reciente, no era un mal dato de actualización científica que la obra de Dirichlet fuera un referente para quienes concurrieran al concurso convocado por la Academia de Ciencias de Madrid en 1872, nueve años después de la primera edición impresa (1863) de las lecciones de Dirichlet. Y, en efecto, el trabajo ganador de Jiménez está decisivamente influido por el del profesor de Gotinga, pero hay matices a la hora de calificarlo como traducción o adaptación. Esta obra de Jiménez mereció un comentario breve de Z. García de Galdeano en su artículo "Les Mathématiques en Espagne" [102], publicado en *L'Enseignement Mathematique* el año 1899, donde escribe:

> La Academia de ciencias de Madrid publicó (1877) la obra premiada del astrónomo D. Eulogio Jiménez donde se exponen los principales resultados de Gauss, Dirichlet y Dedekind sobre esta rama [...] [102, p. 13]

García de Galdeano no mencionó expresamente la obra de Dirichlet a propósito de la de Jiménez[52], pero su discípulo Rey Pastor sí lo hizo en los términos comentados, que recogió de nuevo en su libro *Elementos de análisis algebraico* (1917) [286], donde dio como referencias las obras de Dirichlet —la primera entre las extranjeras— y Jiménez[53] —la primera entre las nacionales— en estos términos:

> Lejeune-Dirichlet: *Vorlesungen über Zhalentheorie.* Braunschweig (Vieweg), 1894. [Obra clásica, considerablemente ampliada por Dedekind en sus últimas ediciones. Contiene la parte elemental y además la Teoría de las formas numéricas.] [...]
>
> Jiménez: *Tratado elemental de la teoría de los números.* Madrid, 1887. [Es una adaptación al español de la edición de 1863 del libro de Dedekind, con algunas nociones previas de Aritmética.] [286, p. 123]

Rey Pastor menciona la obra de Dirichlet por su cuarta y última edición, a la vez que afirma que Jiménez adaptó la primera de ellas, siendo que también podía haber dispuesto

[52] En cambio, afirmó que C. Jiménez Rueda seguía en su obra *Prolegómenos de Aritmética universal* (1889) [210] la de O. Stolz titulada *Leciones de Aritmética general / Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* [324].

[53] Al finalizar el capítulo segundo que se ocupa de la divisibilidad numérica, en el apartado de "notas", Rey Pastor incluye una bibliografía sobre la teoría de los números referida a los "tratados más importantes que no suponen conocida la parte elemental", añadiendo después otras referencias especiales para las "ramas superiores" de la teoría.

de la segunda de 1870-71, no así de la tercera, que no llegó hasta 1879. En algún momento de los cinco años transcurridos entre la primera edición de *Elementos* y la segunda (1922) [283] Rey Pastor modificó algo su opinión. En la segunda edición Jiménez fue colocado a continuación de Dirichlet en estos términos:

> LEJEUNE-DIRICHLET: *Vorlesungen über Zhalentheorie.* Braunschweig (Vieweg), 1894. [Obra clásica, ...]
>
> Hay una excelente traducción libre, con adiciones, titulada:
>
> JIMÉNEZ: *Tratado elemental de la teoría de los números.* Madrid, 1887. [283, p. 127]

También añadió Rey Pastor, en las notas a la segunda edición, una breve noticia de la ley de reciprocidad cuadrática, en la que se lee:

> Por la importancia de esta ley, dedican gran espacio los tratados de Teoría de números a su demostración, demasiado complicada para este libro de Aritmética general. (Véase DIRICHLET, o la traducción de JIMÉNEZ.)

La opinión de Rey Pastor pasó pues de considerar la obra de Jiménez una "adaptación" a una "traducción" de la de Dirichlet, en cualquier caso contando además con adiciones, otra "traducción libre" como la que Echegaray hiciera de Trudi.. La obra no es presentada por Jiménez ni como adaptación ni como traducción[54], el autor español no menciona la obra del alemán ni en los créditos ni en el prólogo, en el que afirma sobre la teoría de números:

> Iniciado su estudio por Diofanto en la resolución de las ecuaciones que llevan su nombre, y proseguido con éxito, muchos siglos después, por Euler y Legendre, los problemas que hoy comprende —gracias en primer término á las investigaciones de Gauss, y á los trabajos posteriores de Lejeune-Dirichlet, Poinsot, Kummer, Eisenstein, Schwarz, Liouville, Lebesgue, Dedekind, Krönecker, y otros eminentes matemáticos— constituyen un verdadero cuerpo de doctrina, si no completo todavía, hasta cierto punto bien definido: en el cual se descubren, y explican con sorprendente claridad, relaciones no vislumbradas antes, aunque muy íntimas y fecundas, entre asuntos al parecer inconexos de la Aritmética y el Análisis, del Algebra y la Geometría. Y por lo que á su peculiar carácter se refiere, podemos también afirmar, ampliando una

[54]José Ferreirós nos ha comunicado oralmente que Jiménez escribió a Dedekind solicitando permiso para traducir la obra.

> idea de Hankel, que la *Teoría de los Números* guarda con la *Aritmética propiamente dicha* casi la misma dependencia ó semejanza que la *Geometría*, llamada superior, ó de *Steiner*, con la denominada *elemental*, ó de *Euclides*.

Jiménez divide su obra en tres partes, separando cada una de ellas en capítulos con numeración independiente en cada parte. Las tres partes tienen estos rótulos:

> PARTE PRIMERA. Principios fundamentales de la teoría de los números (pp. 1-140).
>
> PARTE SEGUNDA. Resolución de las congruencias (pp. 141-390).
>
> PARTE TERCERA Teoría de las formas cuadráticas (pp. 391-604).

La primera parte tiene dos capítulos iniciales dedicados a la naturaleza de los números, de los naturales a los irracionales[55], y sus operaciones, organizados según el principio de permanencia de las leyes formales de Hankel; luego se ocupa de la combinatoria. El tema del capítulo segundo son los números figurados. Estos dos primeros capítulos (pp. 1-60) son uno de los "añadidos" mencionados por Rey Pastor, que significan el inicio de la obra por los aspectos más elementales de la aritmética, no considerados por Dirichlet. La tercera parte se completa con dos capítulos más, en los que Jiménez toma ya como guía muy explícita la obra de aquél. El capítulo tercero sobre divisibilidad tiene el mismo contenido y desarrollo que el primero de Dirichlet, con algún leve cambio de orden; se extiende a lo largo de 56 páginas frente a las 32 de su modelo, lo que sucede porque el autor español ofrece explicaciones más detalladas y algún complemento, lo que de nuevo nos recuerda a Echegary. El capítulo cuarto, último de la primera parte, contiene las cuatro primeras secciones del capítulo segundo de Dirichlet, con el inicio de las congruencias hasta el teorema de Fermat. Jiménez ha elegido como lema de la segunda parte de su obra la resolución de las ecuaciones de congruencia, de modo que el resto del capítulo segundo de Dirichlet —ecuaciones de congruencia, teorema de Wilson, restos potenciales y raíces primitivas— se incorpora a la segunda parte, donde es expuesto a lo largo de tres capítulos con un total de 110 páginas, frente a las 35 utilizadas por Dirichlet para los mismos temas en su contenido esencial. Jiménez completa la segunda parte con un cuarto capítulo sobre restos cuadráticos similar al tercero de Dirichlet y añadiendo un quinto sobre la división

[55]La obra de Jiménez tiene xx+688 páginas, frente a xiii+414 la de Dirichlet 1863. Al final de la obra (pp. 600-603) hay una nota sobre números complejos, a la que siguen cinco apéndices (pp. 606-140).

del círculo según Gauss que no figura en la obra de Dirichlet[56].

Es en la tercera parte, dedicada a las formas cuadráticas, donde la proximidad a Dirichlet aparece declarada:

> El objeto de nuestro estudio en esta tercera y última parte, á la cual sirven principalmente de lemas las dos anteriores, es ya en toda su pureza el de la teoría de los números, á saber: la representación de éstos por *formas*, limitándonos, como es consiguiente, á las de segundo grado o cuadráticas.
>
> Pero tal representación ó construcción de los números depende íntimamente de la equivalencia de las mismas formas, según más adelante demostraremos; y así, para proceder con órden, siguiendo á Gauss (*) y con más exactitud á su ilustrado comentador Dedekind (**), expondremos desde luego la doctrina general de dicha equivalencia, con sus antecedentes precisos é indispensables. [211, p. 391][57]

El inicio de la exposición por Jiménez de las formas cuadráticas binarias, su transformación por sustituciones, y la equivalencia entre ellas sigue con fidelidad completa la de Dirichlet. No es una traducción fiel porque los párrafos escritos no son completamente iguales, también algunos párrafos de Dirichlet se omiten, pero las fórmulas son las mismas, incluso con las mismas letras, tanto las latinas cuanto las griegas; hasta los primeros ejemplos numéricos son los mismos. Son exactamente iguales, con las mismas letras, la expresión simbólica de la composición de sustituciones

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix},$$

la expresión de una matriz y su inversa

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +\varepsilon\delta & -\varepsilon\beta \\ -\varepsilon\gamma & +\varepsilon\alpha \end{pmatrix},$$

[56]Este tema aparece en los suplementos añadidos por Dedekind, uno de los cuales incorpora Jiménez como apéndice.

[57]Los astericos llaman a sendas notas a pie de página referidas a las *Disquisitiones* de Gauss y a las *Vorlesungen* de Dirichlet: "(*) D. A., Sectio quinta. (**) Dirichlet. Zahlentheorie, cap. IV."

siendo $\varepsilon = \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ el determinante de la sustitución inversible, y la expresión simbólica de la propiedad asociativa de la composición de sustituciones, en la forma $(SS')S'' = S(S'S'')$[58]; notaciones todas ellas que vienen de Eisenstein.

Dejando para otro momento el estudio detallado de esta obra, en el que tendría cabida sus parecidos y diferencias con la de Dirichlet, lo que ahora tenemos que resaltar es que Jiménez puso a disposición de los estudiosos de la matemática en lengua española, si bien sólo en orden dos, el uso de las sustituciones en la teoría aritmética, la representación "matricial" de las mismas y el "producto de las matrices" por el método fila-columna tal como fue dispuesto desde Eisenstein. Pero los cálculos en orden dos con las sustituciones se realizan directamente sin dificultad, por lo que no acaba de manifestarse la conveniencia o necesidad de una teoría general de matrices, de hecho, la palabra "matriz" no aparece en la obra de Jiménez, él opera con sustituciones. Tampoco las formas cuadráticas $ax^2 + 2bxy + cy^2$ se representan con la matriz simétrica de coeficientes, sino con el símbolo tradicional (a, b, c), expresando, como hiciera Dirichlet, que

$$(a, b, c) \text{ por la sustitución } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ se convierte en la } (a', b', c'),$$

dando las expresiones de a', b', c' por cálculo directo, sin producto matricial.

Jiménez y Merelo, traductores de Baltzer

Elementos de matemáticas, 1879 [212]

Eulogio Jiménez junto con Manuel Merelo y Calvo[59] (1827-1901) son los responsables de la traducción al castellano de la obra de Baltzer comentada en 4.1.1. La obra tuvo formato de bolsillo y se dividió en cinco volúmenes con estos títulos: *Aritmética vulgar* (1879), *Aritmética universal* (1880), *Álgebra* (1880), *Geometría* (1880), *Trigonometría* (1881). Como ya dijimos al comentar la obra original de 1860, nuestro interés se centra en los tres primeros, que corresponden a los tres "libros" en que se dividía el primer volumen original[60].

[58] Véase [211, pp. 391-399].

[59] Ingeniero y político español, también catedrático de Historia en segunda enseñanza. Datos biográficos en [47, p. 145].

[60] Recordemos que el original alemán se publicó en dos volúmenes divididos en "libros".

Se utilizó como libro de texto en institutos de enseñanza secundaria y en la Institución Libre de Enseñanza. *Aritmética vulgar* es un tomo demasiado elemental, desde luego pensado para una etapa anterior a la universitaria. En el prólogo a la traducción española escribía Echegaray:

> [...] a pesar de la modestia de su porte y de las materias elementales que trata, es libro de verdadero mérito y de indiscutible utilidad, que puede prestar, a no dudarlo, grandes servicios en la enseñanza [...] es una gimnasia del espíritu, útil y provechosa al mismo tiempo. [212, pp. vi-vii v. 1]

En efecto, se entendía por aritmética "vulgar" el estudio de los números basados en su representación decimal, comprendiendo a los números naturales y los racionales, exponiendo con ellos la divisivilidad elemental (máximo común divisor y mínimo común múltiplo), la regla de tres y los repartos proporcionales.

Igual que para el primer volumen, para el segundo de *Aritmética universal* los traductores prepararon una división que no se da en el original. Mientras que *Aritmética universal* era el "libro segundo" del primer volumen en la edición alemana, ahora en la española el "libro" pasa a volumen y éste se divide en los libros que se indican en la tabla siguiente, en la que la columna de la derecha indica los apartados que engloban según los ya enumerados en 4.1.1:

Sec.	**Aritmética universal**	1860
	Prólogo del autor	
	Prólogo de la traducción (p. i-vii)	
Libro 1	Las cuatro especies del cálculo literal (p. 1)	§1-13
Libro 2	La potencia, la raíz, el logaritmo y la progresión geométrica (p. 73)	§14-22
Libro 3	El binomio, la combinatoria y sus aplicaciones (p. 132)	§23-29
Libro 4	Las fracciones continuas, y las series, exponencial, binómica y logarítmica (p. 239-294)	§30-32

Tabla 4.2: División en libros de *Aritmética Universal*

Este segundo volumen español también tuvo un prólogo de Echegaray, en el que se lee:

> [...] un tratado de *Aritmética universal*, es decir, una Aritmética a la cual se aplica el algoritmo ordinario del Álgebra, y que comprende el estudio de las principales propiedades de los números y de sus combinaciones y formas; pero son *números*

> representados por *letras y propiedades numéricas* representadas por *fórmulas algebraicas.* [...] las letras representan números enteros ó fraccionarios, conmensurables ó inconmensurables, reales ó imaginarios (complejos); pero números, al fin, en un riguroso sentido. Y por esto excluye de ella las teorías en que los signos $+, -, \times, :$, etcetera, representan no solamente las operaciones ordinarias y elementales, sino otras distintas y de órden superior, [...] Ejemplo de ello, [...] la admirable creación de Hamilton, es decir, sus célebres *cuaternios.* [212, pp. ii-iii v. 2]

Se aprecia cómo Echegaray destaca el tránsito de la aritmética "vulgar" a la "universal", pero tratando con "números al fin", lo que excluye construcciones aritméticas "admirables" como los cuaternios, que ya no considera como números "en un riguroso sentido", justificando así que Baltzer lo excluya de su libro y no lleve más allá de los complejos su exposición más bien formal de los sistemas de números.

Merece ser destacado ahora que en el apartado *Permutaciones de elementos dados* del libro tercero, aparece el término "coordinatoria", que será de uso común en España, como veremos en algunos de los primeros libros sobre la materia que describiremos más adelante. La terminología introducida es la siguiente:

> Se denomina *coordinación* de varios elementos un conjunto ó reunión de los mismos, cualquiera que sea el modo como estén reunidos, o unos a otros se sucedan. Las *permutaciones* de varios elementos dados comprenden todas sus coordinaciones posibles, distintas unas de otras sólo por el orden o sucesión de los elementos componentes.[212, p. 144 v. 2]
>
> [...] 130. La primera coordinación contiene los elementos en orden natural ascendente: en las otras ya los elementos se apartan del orden establecido en la primera. Todo elemento que preceda, en vez de seguir, a otro inferior, diremos que está *invertido.* Si contamos, pues, en una de las permutaciones desde cada elemento los inferiores que le siguen, el total de estos elementos inferiores constituye el número de inversiones (*derangements, variations*) comprendidas en dicha permutación. [212, p. 147-48 v. 2]

Más adelante aparece una nota a pie de página relativa a la historia de la coordinatoria y de la nomenclatura con ella asociada, que contiene la siguiente información:

> NOTA: Los principios de la coordinatoria se encuentran en BUCLEY, CARDAN y otros matemáticos del siglo XVI. La primera publicación extensa sobre combina-

ciones se debe a PASCAL 1650, y en ella, coincidiendo con FERMAT, explicó el enlace de los números combinatorios con los figurados (OEuvres ed. Lahure II, p. 423 y siguientes). La memoria de LEIBNIZ *De arte combinatoria* (1666), contiene, más que pura y nueva teoría, aplicaciones de la doctrina de las permutaciones y combinaciones. La teoría y el concepto actual de la Combinatoria se hallan completamente desenvueltos por SANTIAGO BERNOULLI en su *Ars conjectandi* (op. posth 1713). En este libro aparece el nombre de permutaciones, por el cual habían usado: WALLIS, el de alteraciones; y LEIBNIZ, el de variaciones. El nombre de coordinación (complexion) significaba para LEIBNIZ combinación; el de variaciones adquirió su propia significación hacia el fin del siglo XVIII.[212, pp. 158-159 v. 2]

En el apartado titulado *Determinante de un sistema de números*, también del libro 3, la definición es traducida como sigue:

138. Dado un cuadrado de elementos, esto es, n^2 elementos (números), ordenados en series de n en n, a saber: en filas y en columnas, con n elementos cada una; y designando por a_{ik} el término o elemento k^{o} de la fila i^{a} (el i^{o} de la columna k^{a}) el sistema de dichos elementos será:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

Bajo el nombre de *determinante* (*)[61] de este sistema se comprende un conjunto determinado de todos los productos posibles, cada uno con n elementos entre los cuales no haya dos que correspondan a una misma fila, ni a una misma columna. Así, cuando $f, g, h, \dots$ representa una permutación de una clase determinada de los índices de filas, y $r, s, t, \dots$ otra permutación de la misma clase, de los índices de columnas, y ϵ significa 1 en el primer caso, y -1 en el segundo, el producto $\epsilon a_{fr} a_{gs} a_{ht} \cdots$ es un *término de la determinante.* En particular, el producto $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ formado por los elementos de la diagonal, es un término de la determinante, llamado el término *inicial* de la misma.

[61] Aquí llama a la nota a pie de página: (*) "La historia y ulterior desenvolvimiento de estas formas pueden verse en la obra del mismo autor, *Theorie und Anwendung der Determinanten*". De dicho desarrollo histórico ya hemos dado cuenta en la primera parte de esta memoria.

De un término de la determinante, por ejemplo, del $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots$, se deducen todos los demás, con sus correspondientes índices. Para ésto, ó se permutan los índices que señalan las columnas, dejando invariables los correspondientes á las filas; ó se permutan estos últimos, dejando invariables los primeros. [212, pp. 159-160 v. 2]

La traducción no resulta del todo clara, pues se utiliza "conjunto" por "aggregat", sin darle sentido de suma al agregado de productos de elementos del cuadro. Unas líneas más adelante se lee:

"La determinante del sistema de n^2 elementos tiene $n!$ términos [de una suma], tantos positivos como negativos; y se llama de grado n^{o}, porque sus términos (productos) comprenden n factores". [212, p, 160 v. 2]

Con la notación empleada ya queda claro que el determinante es una suma de términos con signo, pues usa, además de la común de subíndices y barras verticales, también la notación abreviada de Cauchy:

La determinante del sistema se designa: incluyendo entre rayas el sistema de números dados, ó escribiendo su término inicial ligado con el doble signo ± al de suma Σ. [,]

Es decir, escribe los determinantes en la forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

El tercer volumen, el dedicado al álgebra entendida al modo clásico, ya no fue prologado por Echegaray, fue el propio traductor Jiménez quien se ocupó de poner las palabras iniciales de presentación, en las que encontramos esta definición:

El Álgebra, según Baltzer, es la Teoría de las funciones algebraicas, caso particular de la Teoría de las funciones o del Análisis,... el objeto del Álgebra es la Resolución de las ecuaciones algebraicas. [212, p. viii v. 3]

En la tabla siguiente indicamos cómo los traductores dividieron el volumen en tres libros.

Sec.	**Álgebra**	1860
	Prólogo de la traducción (p. v-vii)	
	Prólogo del autor (p. 1)	
	Introducción	§1-3
Libro 1	Las ecuaciones en general y las funciones y ecuaciones cuadráticas en particular	§4-6
Libro 2	Las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, las numéricas y las indeterminadas	§7-9
Libro 3	Teoría de las funciones algébricas	§10

Tabla 4.3: División en libros de *Álgebra*

Los sistemas lineales aparecen estudiados, como ya vimos, en el libro 1 de *Álgebra*. En definitiva, lo que la traducción de Jiménez y Merelo incorpora a España es un texto de matemáticas generales que actualiza los libros de Cortázar en los que a métodos lineales se refiere, porque explica la resolución de sistemas lineales (regla de Cramer y homogéneos) mediante el uso de los determinantes. Si Cortázar explicaba los sistemas lineales como lo hicieron Maclaurin y Cramer, ahora se dispone en versión española del modo de hacer de Jacobi.

4.2.4 Dos libros elementales sobre determinantes

Mencionamos ahora dos libros sobre determinantes de los primeros años ochenta, que dan fe de la difusión que tuvo este algoritmo en el campo de las matemáticas elementales. García de Galdeano daba cuenta de ellos en su artículo *Las matemáticas en España* de 1899, ya citado a propósito de la traducción de Dirichlet realizada por Jiménez; allí se lee:

> Algunos trabajos aparecieron en España sobre esta rama de la ciencia matemática. Hay que mencionar los tratados sobre los determinantes de Bacas y Escandón y Fernández de Prado; la Combinatoria de Suárez y Gascó, profesores en el Instituto y en la Universidad de Valencia, libro apreciado por su claridad y rigor didáctico. [102, p. 12]

Comentaremos a continuación las dos obras de doble autor y dejaremos la de Fernández de Prado para más adelante porque corresponde a la década siguiente y tiene un nivel algo superior al adentrarse en la teoría de invariantes.

Las dos obras que siguen son más elementales o didácticas que las vistas hasta ahora, su correlato internacional sería el libro *Éléments de la théorie des déterminants (1877)*

[117] de G. Dostor, que no hemos considerado en la primera parte de esta memoria. El libro comienza con un prefacio de cinco páginas, en el que el autor destaca la importancia de los determinantes en las matemáticas y esboza brevemente sus orígenes y desarrollo.

> La ciencia de las *determinantes* es una de las herramientas más poderosas que el análisis pone a disposición de los matemáticos, el mecanismo es simple, los métodos casi elementales, los resultados son de una fecundidad extraordinaria[117, p. v].

Le sigue una nota al lector en la indica que usa dos tamaños de letra. El libro está dividido en cuatro partes, que se subdividen en 14 capítulos, que a su vez están divididos en secciones. El contenido detallado del libro está expuesto en 21 páginas. Con respecto a ésta obra, Muir comenta:

> Hasta la aparición del trabajo de Dostor no había un libro de texto en francés disponible para los estudiantes excepto las traducciones de Brioschi y Baltzer. En consecuencia, lo que más se lamenta es que el autor no muestre un gran avance con respecto al trabajo de sus predecesores, lo cual era lo razonablemente esperado. Aunque sea el más extenso de los libros de texto publicados, una parte desproporcionadamente grande de (195 páginas) es asignado a las denominadas "aplicaciones geométricas", de modo que sólo alrededor de 155 páginas están dedicadas al tratamiento de la teoría [266, Vol. III p. 68].

Antonio Suárez y Luis G. Gascó, 1882

Lecciones de coordinatoria con las determinantes y sus principales aplicaciones [326][62]

Antonio Suárez Rodríguez (1821-1907) y Luis Gonzaga Gascó y Albert[63] (1846-1899) son los responsables del primer libro sobre determinantes escrito en castellano, si nos referimos a obras originales excluyendo las traducciones que acabamos de comentar.

La obra se compone de tres partes que se corresponden al título de la misma, y contiene un total de 20 lecciones (xvi+451 pp.) diferenciadas por apartados enumerados y subtitulados. Cada una de las 17 primeras lecciones consta de 20 apartados, mientras que en

[62] Disponible en formato electrónico en la Biblioteca Digital Hispánica `http://bdh.bne.es`.

[63] Suárez fue profesor de matemáticas en los institutos de Sevilla, Madrid, Jerez y Valencia. Gascó se desempeñaba también como profesor de instituto en Valencia, y en 1893 obtuvo la cátedra de Análisis Matemático en la misma universidad. Desde 1896 a 1899 crea y dirige la revista *Archivo de Matemáticas*. Veáse [27, 56, 21]

las tres últimas los apartados varían entre 6 y 8. El contenido del libro está expuesto en un índice muy detallado que ocupa ocho páginas. Dicen los autores que para el estudio de sus lecciones se requiere el conocimiento de las operaciones fundamentales de cálculo, limitado a lo que suele enseñarse al comienzo del primer curso matemático en los institutos de segunda enseñanza. Lo que, desde su óptica, da un carácter elemental propio, peculiar y exclusivo a su trabajo, diferenciándolo de los trabajos análogos sobre determinantes que han sido publicados por matemáticos de diversas naciones como consecuencia de sus investigaciones sobre eliminación y el empleo de conceptos del análisis. En el libro encontramos ejemplos desarrollados, pero no ejercicios propuestos. Los autores presentan al final de la obra un resumen de las lecciones en 51 páginas.

Damos a continuación los títulos de las partes del libro y las lecciones:

Introducción

Primera parte. Principios

I. Permutaciones
II. Combinaciones
III. Repeticiones permutatorias
IV. Repeticiones combinatorias
V. Inversiones
VI. Sustituciones
VII. Permutación por sus binomios

Segunda parte. Determinantes

VIII Nomenclatura y noción de matrices
IX Desarrollo de matrices
X Transmutación de matrices
XI Menores
XII Desarrollo en menores
XIII Operaciones con matrices
XIV Ampliación de operaciones con matrices
XV Matrices notables
XVI Desarrollos notables
XVII Matrices y determinantes numéricos

Tercera parte. Aplicaciones

XVIII Aplicaciones aritméticas
XIX Aplicaciones algébricas

XX Aplicaciones geométricas

Resumen de las precedentes lecciones de coordinatoria

En una breve introducción de apenas dos páginas, los autores señalan que la coordinatoria investiga las maneras como puede distribuirse un todo compuesto de varias cosas o elementos. Añaden:

> Constituida ya como ciencia la Coordinatoria, desenvuelve las indicadas conexiones y dependencias mutuas entre las cosas, suministrando importantes procedimientos de cálculo á las demás ciencias matemáticas; y hasta engendra ciencias nuevas como la de las *Determinantes*, de la cual emanan numerosas aplicaciones. [326, p. xv-xvi]

La primera parte de la obra, de título *Principios*, contiene siete lecciones sobre coordinatoria en las que los autores desarrollan extensamente (146 páginas) notación, terminología, fórmulas y ejemplos. Las cuatro primeras lecciones guardan la misma estructura en su contenido[64].

El apartado preliminar de la lección I está motivado por el problema de *Calcular el número de grupos posibles con varias cosas y deducir reglas para formarlos*. En el apartado subtitulado *Permutaciones de índices, de subíndices y de letras con ambos signos*, se encuentra una mención a las matrices como generadoras de permutaciones:

> Si letras diferentes se modifican con índices diversos, podremos permutar las letras, los índices, ó letras con los índices; y como cada letra vendrá a ser modificada por cada uno de los diversos índices; resultan los siguientes cuadros matrices:
>
> $$\begin{array}{ccccc} a^1 & b^1 & c^1 & \cdots & u^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & \cdots & u^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & \cdots & u^3 \\ \vdots & & & & \\ a^n & b^n & c^n & \cdots & u^n \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & u_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & u_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & u_3 \\ \vdots & & & & \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & u_n \end{array}$$
>
> de los cuales podremos deducir todas las permutaciones posibles con la letras y los índices, tomando un elemento de cada línea con tal que pertenezca también cada uno a diversa columna. [326, p. 13]

[64] 1. Preliminar. 2. Definición. 3. Su nomenclatura. 4. Su notación. 5. Cálculo de número de [...]. 6. Formulario. 7. Números permutatorios [...]: su forma. 8. [...] de ordenes consecutivos; etc., hasta llegar al apartado final 20. Discusión de la fórmula general.

Para ilustrar su discurso explican los autores que de un cuadrado de dimensión 2 se deducen las dos permutaciones a_1b_2, a_2b_1, y que de unos de dimensión 2 y 3 el procedimiento da 6 y 24 permutaciones repectivamente.

En los últimos tres apartados de la lección VII, definen funciones simétricas, alternadas y luego abordan el concepto de determinante de este modo:

> **140. Determinantes: sus matrices** *Llámase DETERMINANTE el polinomio suma de los productos que se obtienen haciendo las permutaciones posibles con los índices de toda expresión de la forma $a_1b_2c_3 \cdots m_i \cdots u_n$, y aplicando a los resultados los signos de su respectiva paridad.*
>
> Supuesto e_i, símbolo de cantidad variable, función de e y de i, susceptibles e de todos los valores $a, b, c, \cdots, u$ e i de los 1,2,3,...,n, el cuadro
>
> $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & m_1 & \cdots & u_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & m_2 & \cdots & u_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & m_3 & \cdots & u_3 \\ \vdots & & & & & & \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & m_n & \cdots & u_n \end{vmatrix}$$
>
> que comprende todos los valores de la función e_i, y en consecuencia todas las permutaciones de la forma $a_1b_2c_3 \cdots e_i \cdots u_n$, se denomina MATRIZ DE LA DETERMINANTE, y su carácter especial está simbolizado por las barras que la encierran.
>
> Así las determinantes como sus matrices, gozan de propiedades tan notables que constituyen una de las ramas más importantes de la Coordinatoria y de la Matemática moderna; el estudio de las propiedades será objeto de las lecciones sucesivas que forman la parte segunda de este tratado. [326, p. 145-146]

De este modo se da entrada a la segunda parte dedicada a los determinantes, expuestos a lo largo de diez lecciones que ocupan 242 páginas. El tratamiento es análogo al de Echegaray-Trudi, pero todavía con una mayor preocupación por explicar con el máximo detalle.

Vale la pena destacar que en el último apartado de la lección VIII, la primera dedicada a los determinantes, los autores hacen un listado de las diferentes notaciones empleadas: general, ordenada, de doble índice, de índices superpuestos, la bilateral y la numérica. Las cuales son explicadas y resumidas en un apartado que transcribimos a continuación,

160. Notaciones abreviadas. Las notaciones que acaban de exponerse pueden recibir una notable simplificación, que consiste en representar cada matriz por sola diagonal principal incluida entre paréntesis, y esto constituye las *notaciones abreviadas.* Aplicada la abreviación a las diversas notaciones tendremos:

en la notación ordenada $(a_1\ b_2\ c_3\ \ldots\ u_n)$

en la de doble índice $(a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ \ldots\ a_{nn})$ y $(a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ \ldots\ a_{n,n})$

en la de índices superpuestos $\left(a_1^1\ a_2^2\ a_3^3\ \ldots\ a_1^1\right)$

en la bilateral $(a\alpha\ b\beta\ c\eta\ \ldots\ uv)$ y $\begin{pmatrix} a & b & c & \ldots & u \\ \alpha & \beta & \eta & \ldots & v \end{pmatrix}$

en la numérica $((1,1)\ \ (2,2)\ \ (3,3)\ \ (n,n))$ que también se expresa así $\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \hline 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{array}$

y simplificando la misma diagonal en la notación ordenada escríbase de esta manera: $|a\ b\ c\ \ldots\ u|$

También puede emplearse en vez del paréntesis la letra con el doble signo antepuesto a la diagonal, en esta forma:

$$\begin{array}{ll}
\sum\pm & a_1\ b_2\ c_3\ \ldots\ u_n \\
\sum\pm & a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ \ldots\ a_{nn} \\
\sum\pm & a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ \ldots\ a_{n,n} \\
\sum\pm & a_1^1\ a_2^2\ a_3^3\ \ldots\ a_1^1 \\
\sum\pm & a\alpha\ b\beta\ c\eta\ \ldots\ uv \\
\sum\pm & \left\{\begin{matrix} a & b & c & \cdots & u \\ \alpha & \beta & \eta & \cdots & v \end{matrix}\right\} \\
\sum\pm & (1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (n,n)
\end{array}$$

pero que hay que advertir que la diagonal principal encerrada entre paréntesis es, en rigor, notación abreviada de matriz, y el signo $\sum\pm$ es propiamente notación abreviada de determinante.

Además de estas notaciones abreviadas emplearemos en algunas ocasiones una sola letra como símbolo de matriz ó determinante, cuya lacónica representación nos permitirá simplificar en gran manera los razonamientos. [326, p. 160-161]

En el apartado preliminar de la lección IX indican que en esta parte del libro estudian el problema inverso al planteado en la primera parte, es decir, dado el cuadro de valores ahora se trata de obtener su determinante. La definición de determinante aparece seguida de un comentario destinado a explicar la naturaleza funcional que Echegaray asignó al determinante:

> La determinante es, pues, función algebraica racional, entera, homogénea y alternada de los elementos de su matriz:
>
> función, porque depende de los elementos de la matriz;
>
> algebraica, porque solo indica operaciones elementales cuales son las de adición, sustracción y multiplicación;
>
> racional y entera, porque no exigiendo extracción ni división no puede ocasionar formas irracionales ni fraccionarias;
>
> homogénea, porque sus términos son del mismo grado; y
>
> alternada, porque cambia de signo por la transposición de dos indicadores. [326, p. 166-167]

Es interesante ver el significado que los autores dan en las lecciones XIII y XIV a las operaciones "calculatorias" que se pueden efectuar con matrices, que siempre son realmente operaciones con determinantes. Damos un párrafo donde se pone de manifiesto este concepto operacional:

> **242. Objeto de las operaciones con matrices**. Toda operación con matrices tiene por objeto hallar una matriz cuya determinante sea igual al resultado que obtendríamos practicando la operación de que se trate con las determinantes correspondientes a los datos. [326, p. 268]

Un ejemplo sencillo aclara la cuestión:

> [...] *el producto de un elemento por una matriz puede expresarse por otra matriz de orden superior inmediato, en la cual el primer elemento sea el factor, los otros elementos de la primera fila columna sean ceros, y los de la primera columna fila arbitrarios.* [326, p. 276]

De este modo, haciendo que matriz y determinante sean términos sinónimos, lo que están planteando no es lo que en álgebra de matrices se entendería por multiplicar un número por una matriz, sino el producto de un número por un determinante, expresado como otro determinante de un orden superior en una unidad[65].

Explicado este primer ejemplo ya se pueden entender los siguientes más elaborados sobre "producto y cociente de matrices":

> *el producto de dos matrices cualesquiera se expresa por otra matriz de orden igual a la suma de los órdenes de los factores, en la cual dichos factores aparecen colocados como menores complementarias, siendo nulos los elementos que se agregan para completar la matriz a un lado de la diagonal principal y arbitrarios los introducidos en el lado opuesto. ...*]
>
> *el cociente de una matriz que tenga un grupo de elementos nulos, por una de sus menores adyacentes al grupo de elementos nulos, es igual en la otra menor adyacente, la cual es complementaria de la que hace de divisor.* [326, pp. 280-284]

Este tipo de operativa es desarrollada ampliamente. Una matriz se puede descomponer en factores cuando tiene elementos nulos y cuadradas las menores adyacentes a dicho grupo. Para obtener una potencia cualquiera de una matriz, basta transformar la elevación en multiplicación. Una matriz tendrá raíz exacta si aparecen en su diagonal tantas menores iguales como unidades tenga el índice, siendo nulos todos los elementos situados a un lado de la diagonal. Se puede expresar, dicen, el producto de dos matrices cuadradas de igual orden por otra matriz cuadrada del mismo orden que los factores, en la cual los elementos de cada horizontal resultan de multiplicar la horizontal correspondiente del primer factor por todas las horizontales del segundo; es decir, se hace el producto de matrices para obtener el producto de sus determinantes. Los autores insisten como siempre en los cuatro métodos para efectuarlo, el producto por horizontales, por verticales, horizontal por vertical y viceversa. También consideran productos y potencias de matrices rectangulares y lo aplican a obtener la bien conocida fórmula de Euler (p. 318), que ya había sido explicada por Echegaray con este nombre, mientras que Trudi la presentó sin atribuírsela a algún autor.

En la lección XV introducen los autores matrices notables por la forma especial de sus elementos, destacando que la notación de doble índice permite expresar con fórmulas de manera sencilla y clara las condiciones de simetría de las matrices. Pero también introduce

[65]Escrito con notación actual de matrices de bloques: $a|A| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & A \end{vmatrix}$, o bien intercambiando las filas de ceros y de unos.

las que llaman “matrices recíprocas”: Una matriz es recíproca de otra cuando tiene por elementos los complementos algebraicos de los elementos de la otra. Esta denominación se extiende para las determinantes, dando la fórmula $DR = D^n$, por tanto $R = D^{n-1}$. Señalan en letra pequeña que,

> La recíproca de una matriz $|a_1 b_2 c_3 \cdots u_n|$ se expresa algunas veces por $|a_1 b_2 c_3 \cdots u_n|^{-1}$. [326, p. 326]

En la Lección XVI exponen los autores el desarrollo de un determinante con atención a casos patriculares como las matrices simétricas, semisimétricas y pseudosimétricas. Finalmente, en la lección XVII tratan las matrices/determinantes cuyos elementos son números concretos, explicando sus desarrollos y habilidades de cálculo.

La tercera y última parte está dedicada a las aplicaciones, a las que se dedican tres lecciones y 30 páginas. En ellas se trata simplemente de ver cómo el uso de los determinantes es ventajoso para expresar cierto tipo de fórmulas. Las aplicaciones aritméticas se refieren a la división, a las fracciones continuas y a los cuadrados mágicos. Las aplicaciones algebraicas corresponden a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales cuadrados por la regla de Cramer (sin mencionar su nombre) para $n = 2, 3$ y en general:

> *en todo sistema de primer grado con tantas ecuaciones como incógnitas, el valor de cada una de estas es igual a una fracción que tiene por numerador la determinante de la incógnita y por denominador la determinante del sistema.* [326, p. 399]

Las aplicaciones geométricas corresponden a la expresión de áreas planas y volúmenes mediante determinantes, así como algunas fórmulas trigonométricas. No obstante, en el apartado preliminar de esta lección los autores mencionan que la importancia de las determinantes se manifiesta principalmente aplicándolas al estudio algebraico de la geometría.

Darío Bacas y Ramón Escandón, 1883

Teoría elemental de las determinantes y sus aplicaciones al álgebra y a la trigonometría [22][66]

[66] Disponible en formato electrónico en la Biblioteca Digital Hispánica `http://bdh.bne.es`

Los militares Darío Bacas (1845-1913) y Ramón Escandón plantean, en el largo prefacio de cinco páginas que encabeza su obra, la importancia de las determinantes para el estudio de los tratados modernos de análisis y de mecánica. Justifican la elaboración del libro debido a que en el examen de ingreso en algunas carreras del Estado exigen el estudio de las determinantes, y en otras carreras los profesores tienen que dar a sus discípulos apuntes, en parte originales y en parte entresacados de los tratados de Baltzer, Dostor y Rubini[67], los cuales exponen la teoría bajo un punto de vista más científico que didáctico. Presentan su proyecto de la teoría elemental y su plan de darle continuidad mediante la teoría superior de las determinantes, complemento necesario para las aplicaciones de las funciones Jacobianas y Hessianas al análisis superior y la mecánica.

Bacas y Escandón retoman una iniciativa que fue tradición en los libros de determinantes, empezar con unas notas históricas, es así que esbozan brevemente sus orígenes desde los trabajos de Leibniz[68] y su desarrollo hasta los de Jacobi. Indicando que a partir de entonces son múltiples las aplicaciones en el álgebra, la geometría y el análisis infinitesimal, señalando a Binet y Hermite como ejemplos. Finalmente, señalan que los tratados publicados principalmente en Francia e Italia, así como los trabajos de Echegaray y Jiménez en España, han hecho posible que estos conocimientos se exijan en los estudios universitarios y profesionales.

El índice de la obra es el siguiente:

[67] Este último es, el Tratado de álgebra (1882) (2 vols.; trad. E. Márquez), Sevilla.

[68] Aquí es bastante clara la afiliación con el libro de Dostor 1877 [117], dado que en ambos se encuentra la errata del año en que Leibniz comunicó algunas de sus ideas combinatorias a L'Hôpital. Veáse [117, p. viii] y [22, p. 3]

La obra está dividida en dos libros, que se subdividen en cuatro capítulos cada uno, y estos a su vez están divididos en secciones, en las cuales se encuentran apartados numerados. Los autores presentan ejercicios resueltos sin proponer otros.

En el primer capítulo encontramos los determinantes como los denominadores que se obtienen en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Les siguen las distintas notaciones existentes para expresarlos. Las propiedades de los determinantes están planteadas como teoremas. Es aquí donde aparece enunciada la regla de Cramer y la de Sarrus, con estos encabezados,

Regla de Crâmer.- Crâmer dedujo, por inducción, la siguiente regla para formar

> el polinomio determinante del sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas [22, p. 14]
>
> **Regla de Sarrus.-** Sarrus ha ideado el siguiente medio para desarrollar las determinantes de tercer grado. [22, p. 38]

En el capítulo tercero se ocupan de la multiplicación de las determinantes, aplicando el algoritmo columna-fila[69] y empleando los teoremas establecidos antes. Señalan que el producto de las determinantes se puede ordenar de cuatro maneras distintas (columna-fila, columna-columna, fila-fila y fila-columna). Seguido calculan potencias de determinantes.

En el capítulo cuarto consideran las determinantes recíprocas o adjuntas, aquellas que están formadas por los complementos algebraicos y las denotan usando el exponente -1. Gascó También, las simétricas, hemi-simétricas, pseudo-simétricas, y las determinantes múltiples. Para éstas últimas, encontramos las definiciones que se indican:

> 103. **Definiciones.-** La determinante que tiene los elementos de la primera columna ó de la primera fila iguales á la unidad, se llama determinante múltiple. [22, p. 99]

Esta determinante también se escribe en forma rectangular, esto es,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix}$$

Explican que cuando la fila de unos está ubicada en otra fila ésta se intercambia con la primera, teniendo en cuenta el cambio de signo.

En el segundo libro los autores consideran distintas aplicaciones, la primera, en el primer capítulo, está dedicada a la escritura de ecuaciones de primer, segundo y tercer grado, con la terminología de las determinantes. El segundo capítulo se ocupa de la solución de sistemas de n ecuaciones lineales en n variables. Primero estudian el caso general no homogéneo y luego el homogéneo. El procedimiento explicado es la regla de Cramer. El tercer capítulo, contrario a lo que su título indica, contiene algunos métodos de eliminación, primero resuelven sistemas de dos ecuaciones de segundo grado en una variable mediante los métodos ordinario, dialítico de Sylvester, y de Euler. Para los sistemas de

[69] Siguiendo a Dostor, veáse [117, pp. 67-68].

dos ecuaciones de tercer grado aplican los métodos de Sylvester y de Bézout. En el último capítulo consideran aplicaciones a la trigonometría. Hacen una "interpretación geométrica del determinante de segundo grado" como las tres cuartas partes del área de una región rectangular dividida en cuatro rectángulos. Expresan la formula del seno de una resta de ángulos mediante un determinante. Seguidamente los emplean también para expresar las demás identidades trigonométricas, formular algunos teoremas relativos a los triángulos y relacionar los cosenos (y las tangentes) de los ángulos de un triángulo.

Muir recogió los dos libros antes comentados en su extensa recopilación sobre la teoría de los determinantes. Su opinión fue favorable al primero[70] pero no para el segundo. Estos fueron sus juicios:

a) Sobre la obra de Suárez y Gascó

> Algún interés especial acompaña al primer libro de texto español sobre determinantes, una parte inusualmente amplia del mismo está ocupada por el tema auxiliar de "coordinatoria", –es decir, combinaciones y permutaciones. [...]
>
> En todo caso, la exposición se realiza con gran cuidado, e incluso supera en amplitud a la de Dostor. [266, Vol. III p. 82]

b) Sobre la obra de Bacas y Escandón

> Toma de Dostor dos páginas sobre "determinantes múltiples", y algunas de sus "aplicaciones a la trigonometría" son menos apropiadas que las de Dostor. [266, Vol. III p. 82].

En efecto, Dostor cierra el tema de los determinantes múltiples con la presentación de fórmulas del artículo de Lagrange sobre el volumen de las pirámides, mientras que los autores españoles las omiten. En las aplicaciones a la trigonometría no se observan diferencias en los contenidos, aunque en el esquema de la exposición sí las hay.

[70]Dan cuenta de la gran acogida del libro de Suárez y Gascó las reseñas publicadas en la revistas *Nature* [2] y *Revue des Questions Scientifiques* [251], así como la mención en el prefacio del libro de determinantes [250] de Paul Mansion.

4.2.5 García de Galdeano, 1883-87

Zoel García de Galdeano y Yanguas (1846-1924)[71] es una de las tres figuras reconocidas como principales en la matemática española que transitó del siglo XIX al siglo XX, junto a J. Echegaray y E. Torroja[72]. Buena parte de la fama de García de Galdeano, corroborada por estudios biográficos posteriores, se la atribuyó Rey Pastor, que había sido su alumno en Zaragoza durante el curso 1906-07 en la asignatura Elementos de Cálculo Infinitesimal. Siete años después, el discípulo ya era catedrático de Análisis matemático, y en el discurso inaugural del curso 1913-14 en la Universidad de Oviedo [] dejó escrito que "es preciso esperar hasta fines del siglo XIX, para notar un progreso esencial" en la matemática española, que atribuía principalmente a la tarea de tres maestros: el catedrático de Madrid Eduardo Torroja Caballé, el ingeniero de caminos José Echegaray y el catedrático de Zaragoza Zoel García de Galdeano.

Después de dedicar otro elogio a Torroja, con quien había realizado el doctorado en Madrid durante el curso 1908-09, calificó de este modo a su anterior profesor en Zaragoza:

> Igualmente revolucionaria, pero de una amplitud que asusta –y por esto mismo menos ordenada y perfecta–ha sido la obra del benemérito profesor García de Galdeano, cuya labor de apóstol –sólo comparable á la del Bachiller Pérez de Moya– es una protesta enérgica y constante contra nuestro voluntario atraso matemático; pero desgraciadamente no ha sido estimada todavía en su justo valor, perdiéndose su voz en el vacío. [...] [279, pp. 63-64]

De la amplísima obra de García de Galdeano vamos a ocuparnos en otras ocasiones más adelante, pero esta que sigue será la ocasión principal, pues puede decirse que como línea dominante de su actividad matemática, García de Galdeano primero atendió al álgebra, luego a la geometría y después al análisis.

Antes de entrar de lleno en la obra sobre determinantes de García de Galdeano, dejaremos únicamente mencionado que la tercera figura, Torroja, publicó en 1884 un breve libro, más bien un folleto manuscrito de cuarenta páginas, sobre determinantes y sistemas [], que fue una obra casi anecdótica pues sabido es que la importancia de Torroja, durante muchos años catedrático de la Facultad de Ciencias de Madrid, radica en su obra de geometría

[71] Para su biografía veáse [191, 194]

[72] Cabe citar también a otro ingeniero, L. Torres Quevedo, gran inventor y figura internacional de la automática.

proyectiva sintética y en su influencia institucional.

Volviendo a García de Galdeano, es un su primer periodo principalmente algebrista cuando se ocupó de los determinantes y sus aplicaciones, como ya lo hiciera Echegaray; éste fue un traductor pero Galdeano realizó una versión personal de sus estudios en esta materia, como vamos a ver analizando un libro escrito y publicado mientras era catedrático de matemáticas en el Instituto de Toledo, unos años antes de que accediera a la cátedra de Geometría analítica en la Universidad de Zaragoza, lo que sucedió el año 1891.

Nos referimos a su *Tratado de álgebra* [98, 100] en dos volúmenes (*Parte elemental* y *Parte superior*)[73]. El primer volumen se publicó en 1883 y el autor le colocó una nueva portada en 1884 añadiendo a continuación del título “con arreglo á las teorías modernas”. El segundo volumen tuvo una gestación un poco más compleja, primero publicó un primer fragmento incompleto, *Tratado de álgebra con arreglo a las teorías modernas (parte segunda)*, de 368 páginas, de lo que un año después fue la edición completa con viii+566 páginas, a la que al año siguiente colocó una portada nueva[74]. En el primer volumen el autor se presentaba como “catedrático numerario del Instituto de Toledo”, en el segundo de 1877 añadió “Doctor graduado, Licenciado en ciencias Exactas” y también “Miembro Corresponsal de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales”. Entonces, en 1887, sucedió que se publicaron las listas de libros que se declaraban útiles para las materias de matemáticas del ingreso en la Escuela General Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos, entre los que se encontraba el *Tratado de Álgebra* de García de Galdeano[75], quien no dudó en señalar esta circunstancia en la nueva edición, como reclamo para posibles ventas[76]; así, en la portada de 1888 se lee, acompañando al título, “con arreglo al programa oficial publicado para el ingreso en la Escuela Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos” y, después del nombre del autor[77], “esta obra ha sido designada entre las que pueden servir para dicho objeto”.

La obra de Galdeano en álgebra fue estudiada por M. Hormigón [193], quien consideró el

[73]Hemos consultado un ejemplar de la Biblioteca Nacional accesible a través de `www.bne.es`

[74]Nótese que 368 es múltiplo de 16, así que parece que García de Galdeano puso en circulación inicialmente 23 cuadernillos de una obra inconclusa, que poco después completó en su contenido y le añadió el índice.

[75]Véase [254, pp. 502-503].

[76]*Tratado de Álgebra con arreglo al programa oficial publicado para el ingreso en la Escuela Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos* [100]. Parece que en el aspecto comercial no tuvo mucho éxito, según señala Hormigón en el artículo repetidas veces citado.

[77]Presentado esta vez como “Catedrático y Miembro Corresponsal de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Tratado de Álgebra en su primera versión 1883-1886[78] y el ensayo *Crítica y Síntesis de Álgebra* de 1888 [99]. La descripción y el análisis realizado por Hormigón se dirigían principalmente a poner de manifiesto la "cota de modernidad" alcanzada por Galdeano en el enfoque y desarrollo de la materia, mostrando que el autor, a partir de una muy notable información actualizada, estaba captando los cambios que se iban produciendo en el álgebra. Estos cambios son los referidos principalmente a los aspectos formales de las operaciones y a las generalizaciones de la noción de cantidad, donde Hormigón detecta las influencias de Boole, Grassmann y Hankel.

Desde este punto de vista, Hormigón prestó atención especial a algunos aspectos del tratado, entre los que no contaban el algoritmo de los determinantes y otros temas afines, que son los que ahora nos interesan. Al respecto, se limitó a reflejar que las permutaciones y los determinante son tratados en el primer volumen elemental y que el tema se amplía en el segundo.

Por otra parte, algunos comentarios de Hormigón sobre el *Tratado de Álgebra* nos facilitarán definirlo[79] como una obra de análisis algebraico, concebida, poco después de ser traducido el Baltzer, por un catedrático de instituto con claras aspiraciones universitarias. Escribe Hormigón:

> [...] el texto fue escrito bajo la influencia de la filosofía matemática de finales del siglo XVIII y primera mitad del XIX, según la cual el álgebra y el análisis no ocupaban dominios claramente separados. [...]
>
> Los textos del siglo XIX sobre análisis, algoritmos, o álgebra [...] incluyen los más diversos temas [...] Esta relativa confusión conceptual –desde el punto de vista del siglo XX avanzado–fue compartida por matemáticos tales como Serret, Hoüel, Baltzer, Salmon, Jordan, Hermite, Casorati, y muchos otros. [193, p. 3]

Estos comentarios se hacen eco de la declaración que García de Galdeano formula en el prólogo del segundo volumen del *Tratado* (el primero no tuvo introducción alguna), que alinea su obra con lo que estamos llamando el análisis algebraico en su versión educativa:

> Desde hace algunos años se incluyen en los Tratados escritos para alumnos de los diversos grados de enseñanza las teorías más modernas de la Matemática, según

[78] La segunda parte incompleta de 1886 es la que se encuentra en el Fondo García de Galdeano de la Universidad de Zaragoza, y sería sin duda la examinada por Hormigón.

[79] Junto con el *Tratado de Aritmética* publicado por García de Galdeano en 1884 [], acompañado de *Problemas de aritmética y álgebra con las nociones correspondientes de crítica algorítmica* (1885) [].

> acreditan el Curso de Álgebra del señor Serret y las obras de los señores Hoüel, Baltzer, Briot, Rubini y Laurent, referentes á la rama de la ciencia denominada generalmente Análisis y que hoy principia a llamarse Algoritmia, exponiéndose en todas ellas, de una manera rigurosa, las teorías que cada autor ha creído más necesarias para constituir el Álgebra. Además, de las obras que realizan este objeto, otras varias referentes á las formas homogéneas, los cuaternios, las sustituciones, las funciones elípticas y las funciones de variables complejas, debidas á profesores tan eminentes como los Señores Salmon, Faá de Bruno, Tait, Jordán, Hermite, Casorati, etc.; han divulgado los conocimientos que constituyen la teoría de las funciones algébricas o analíticas. Pero si tanta variedad de obras importantes han realizado un gran progreso bajo el punto de vista científico, no lo han realizado bajo el punto de vista didáctico tanto como fuera de desear, [...] [99, p. i-ii][80]

Antes de proceder a exponer algunos comentarios sobre la obra, desplegaremos completos los índices de las materias contenidas en cada uno de sus dos volúmenes. Respecto al primer volumen, Hormigón lo cita [193, pp. 2-3] sin incluir los rótulos de las secciones y se desliza una errata en el tercer libro de la tercera sección, donde repite el título del tercer libro de la segunda; por ello conviene reproducirlo ahora íntegro. En ambos volúmenes, cada sección se divide en"Libros" según una terminología de inspiración alemana seguida por el autor.

Tratado de Álgebra con arreglo a las teorías modernas (Parte primera. Tratado elemental) (1884) [98]

Sección primera: Teoría de los algoritmos primitivos

I. Definiciones, divisiones y nociones primitivas
II. Teoría combinatoria
III. Teoría de las funciones explícitas ó cálculo algebraico

Sección segunda: Teoría de las funciones explícitas en los algoritmos derivados

I. Algoritmos técnicos
II. Algoritmos teóricos derivados
III. Teoría general de las operaciones y de las cantidades

[80]Desde el punto de vista de la teoría de los determinantes que nos ocupa, es de notar que García de Galdeano no menciona la obra de Trudi, ni directamente ni por la traducción de Echegaray. Los autores incluidos en la cita anterior son las únicas referencias mencionadas por el autor, que no añade ninguna otra en el interior de la obra.

Sección tercera: Teoría de las funciones implícitas

I. Las funciones implícitas en las ecuaciones de equivalencia
II. Las funciones implícitas en las ecuaciones de congruencia
III. Teoría de las inecuaciones

Tratado de Álgebra con arreglo a las teorías modernas (Parte segunda. Tratado superior) (1888) [100]

Sección primera: Teoría de la continuidad

I. Principios y nociones generales sobre la continuidad
II. Teoría de las series y de los productos infinitos
III. Teoría de las derivadas
IV. Teoría de las diferencias
V. Teoría de los grados y de las facultades
VI. Teoría de las funciones y de las ecuaciones

Sección segunda: Teoría de la combinación y el orden

I. Principios de combinatoria y aplicaciones inmediatas
II. Teoría de las sustituciones
III. Teoría de las determinantes
IV. Teoría de la eliminación
V. Teoría de las funciones simétricas y alternadas
VI. Teoría de las formas homogéneas
VII. Algoritmo de la forma

En su parte elemental, el *Tratado* comienza, sección primera, considerando "los tres algoritmos primitivos" con los que se engendran los números:

> Se llama *algoritmo* el concepto de una operación, y en este sentido, se dice que existen en el Álgebra los tres algoritmos de la *suma* ó *sumación*, de la *multiplicación* ó *reproducción* y de la *elevación á potencias* ó *graduación*, según el tecnicismo de Wronski. [98, p. 12]

El primer algoritmo engendra los números naturales positivos y su operación inversa, la "sustracción", los negativos. Todos juntos, los enteros, se multiplican y la operación inversa, la "división", engendra los "números fraccionarios", con los que se efectúa la "elevación á potencias" cuya inversa, la "extracción de raíces", da lugar a lo s"números irracionales". De este modo se ha generado, por un método aritmético genético no riguroso la que el autor llama "cantidad continua" asociada a la medida del espacio y del tiempo. Seguidamente expone, sin más que definirlas y mostrar las operaciones con ellas, la "cantidades llamadas imaginarias o complejas". En el resto de la obra no especifica las cantidades con las que opera, casi siempre podrían ser reales o complejas, aunque en los ejemplos siempre se trata de números reales, incluso más bien racionales. En el índice de la sección segunda aparece más desarrollada la terminología sobre algoritmia que García de Galdeano toma de Wronski, ambos autores se caracterizan por realizar un análisis crítico de la matemática con una gran componente filosófica. Indicaremos un rápido glosario de los términos utilizados. De los algoritmos primitivos se deducen, combinándolos, otros "algoritmos derivados", que pueden ser 'teóricos" o "técnicos" según que estudien, respectivamente, bien la "naturaleza y generación de las cantidades" o bien su "medida y evaluación". Algoritmos técnicos derivados son las series y las fracciones continuas, mientras que algoritmos teóricos derivados son los sistemas de numeración, los "factoriales" –entendidos como producto de términos sucesivos de una progresión aritmética–, junto con los logaritmos y la "función seno" entendidos por sus desarrollos en serie.

Todo esto forma un contenido característico del análisis algebraico. Pero es de notar que el libro tercero del *Tratado superior* se dedica también al cálculo diferencial en variable real, que no es un tema propio del análisis algebraico. Este capítulo no formaba parte de la edición previa de 1886, parece que lo intercaló por la necesidad de adaptar la obra a los planes de estudio vigentes, como ha sucedido frecuentemente en libros de texto similares. Por otra parte, por coherencia expositiva y por la analogía que presenta con el cálculo diferencial, expone también el cálculo de diferencias finitas.

Otra cuestión general importante de reseñar es que el segundo volumen quedó inconcluso en relación a los objetivos de su autor, el cual, en el prólogo de la obra, afirmaba:

> Expuestos los principios de la continuidad y de la combinatoria, la tercera sección comprende su doble aplicación á la resolución numérica y algébrica de las ecuaciones. [100, p. vii]

Pero no hubo tercera sección. Las dos anteriores, las que llegaron a la imprenta, suministran los elementos necesarios para ello, más allá de lo ya enseñado en en el primer volumen elemental. La primera sección (228 págs.) está dedicada a "la continuidad", en ella se expone lo necesario para dar el teorema fundamental del álgebra y la aproximación de las raíces de una ecuación numérica (también un cálculo de derivadas y de diferencias finitas). La segunda (338 págs.), dedicada a "la teoría de la combinación y el orden" se ocupa de la teoría de (grupos de) sustituciones, los determinantes y la eliminación, las funciones simétricas, asuntos necesarios para abordar la resolución algebraica de las ecuaciones; también de la teoría de formas e invariantes, hasta completar un volumen de casi seiscientas páginas.

Intercalaremos un inciso relativo al reflejo de la obra de García de Galdeano en la de su discípulo Rey Pastor, que también dejó inconclusas obras de gran alcance. En muchos aspectos la influencia de García de Galdeano sobre Rey Pastor fue notable, si bien el discípulo dio siempre una versión personal y avanzada de estas influencias. Una de ellas se advierte en la ordenación "por algoritmos" del libro *Elementos de análisis algebraico* [286] que Rey Pastor publicó en 1917, del que nos ocuparemos en el capítulo siguiente. Otro aspecto a resaltar en este sentido es el carácter cíclico de la obra en su conjunto de dos tomos, elemental y superior, donde algunos temas se repiten en uno y otro volumen dosificando con fines pedagógicos el tratamiento de los asuntos según su grado de dificultad. Aquí pudo encontrar inspiración el discípulo cuando escribió su *Curso cíclico* para la enseñanza elemental de la matemática universitaria en sus primeros años en Argentina. Tampoco es difícil encontrar paralelismos, más en cuanto al diseño de objetivos que al desarrollo concreto, entre los dos volúmenes del *Tratado de álgebra* de García de Galdeano y los dos libros de texto consecutivos de su discípulo riojano, el ya mencionado *Elementos* y el posterior *Lecciones de álgebra* (1924, 1931, etc. [284]) .

Uno de los temas en los que se aprecia el carácter cíclico de la propuesta pedagógica de García de Galdeano es el referido a los determinantes, tema en el que nos vamos a centrar en lo que sigue. El autor plantea el estudio de los determinantes en los dos volúmenes, ajustándose al calificativo de elemental y superior asignados a la primera y la segunda parte de su obra. En el primer volumen explica lo más sencillo de la teoría, lo suficiente para explicar la resolución de sistemas lineales –a la manera de Cauchy en el análisis algebraico–, en el segundo completa la teoría –en la línea de Jacobi– y ofrece como aplicación la teoría de la eliminación, tocando también la de invariantes. Después de introducir los tipos de números o "cantidades", García de Galdeano expone los determinantes referidos a cantidades, sin especificar la naturaleza de las mismas.

A continuación vamos a aislar aquellas partes del *Tratado* que constituyen el contenido dedicado a los determinantes y sistemas lineales. Los determinantes aparecen en el "Libro segundo" de la primera parte elemental, después de la "teoría combinatoria" que es su preámbulo natural y que no incluimos en el extracto que sigue.

EXTRACTO: Determinantes y sistemas lineales en el *Tratado de Álgebra*

Tratado elemental.

Sección primera. Libro segundo: Teoría combinatoria
§.7.º—Teoría de las determinantes

Libro tercero: Teoría de las funciones explícitas ó cálculo algebraico
Cap. III. Nociones sobre el cálculo de las determinantes
§.1.º—Transformaciones y reducciones
§.2.º—Adición y sustracción de las determinantes
§.3.º—Multiplicación de dos determinantes

Sección tercera. Libro primero: Las funciones implícitas en las ecuaciones de equivalencia
Cap. V. Sistemas de ecuaciones
§.1.º—Eliminación de una incógnita entre dos ecuaciones
§.2.º—Resolución de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneas con igual número de éstas que de incógnitas
§.3.º—Discusión de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneas
§.4.º—Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas

Tratado superior

Sección segunda. Libro tercero: Teoría de las determinantes
Cap. I. Nociones generales acerca de las matrices y de los determinantes
Cap. II. Desarrollos de las determinantes
Cap. III. Cálculo y reducción de las determinantes
Cap. IV. Determinantes especiales

García de Galdeano empieza su "teoría de las determinantes" con esta definición:

67. Dadas las n^2 cantidades ,,, representadas por letras afectadas de índices y dispuestos en un cuadrado que consta de n columnas verticales caracterizadas por las n letras $a, b, c, \ldots$ y de n líneas caracterizadas por los n índices $1, 2, 3, \ldots$; la DETERMINANTE de estas n^2 cantidades *es el polinomio formado con todos los productos*

> *posibles de dichos elementos tomados n á n, de manera, que cada producto o término no contenga más de un elemento de cada línea y otro de cada columna, y cuyo signo + ó -, segun que los índices formen un número par ó impar de inversiones.* [98, pp. 36-37]

El autor se decanta –de momento– por la notación que usa letras distintas para las columnas indicando con subíndices la filas, aunque también menciona y escribe las notaciones posibles con una sola letra acompañada bien de dos subíndices, que separa con una coma, o bien de un subíndice y un superíndice. El cuadro de cantidades lo representa sin limitarlo por líneas y cuando se trata del determinante coloca las barras verticales laterales usuales. Además, denomina "término principal" al producto $a_1 b_2 c_3 \dots l_n$ con signo positivo que sirve de referencia para obtener el signo de todos los demás. Después de explicar esta definición dando en detalle los desarrollos de los determinantes hasta el orden cuatro, el autor explica las propiedades de los determinantes que se refieren a la transposición y a la permutación de sus líneas, anulación con líneas iguales y al producto de una línea por un número. Esto es todo en su primera aproximación a los determinantes (pp. 36-42). Las propiedades se enuncian en general, pero se demuestran a través de casos de orden pequeño, dando por evidente que el argumento vale igual para cualquier tamaño; falta pues un esfuerzo simbólico, de notación, que permita expresar adecuadamente las ideas desarrolladas independientemente del tamaño del determinante.

Mas adelante, al tratar del "cálculo algebraico", después de exponer los cálculos con polinomios y con raíces, le llega el turno a "Nociones del cálculo de las determinantes" (pp. 69-78). En esta segunda aproximación al tema se introduce la noción de "determinante menor de una determinante dada" y se expone el desarrollo de un determinante por elementos de una línea y sus menores, teorema para cuya demostración le conviene la notación a_i^j para los elementos del ("de la") determinante.

> 117. **Teorema.-** Una determinante es una función de primer grado y homogénea de los elementos de una misma línea ó columna, y el coeficiente de cada elemento menor que resulta de suprimir la línea y columna á que dicho elemento perteneces multiplicado por $(-1)^{m+n}$, designando m y n el número de inversiones necesarias para que la columna y línea en que se encuentra dicho elemento pasen á ser la primera línea y la primera columna de la determinante propuesta. [98, p. 70]

Este desarrollo significa el método básico para calcular el valor numérico de determinantes (da ejemplos de tercer orden), pero admite ciertas "simplificaciones" cuando la disposición del cuadro de cantidades presenta alguna peculiaridad ventajosa para el cálculo. En particular, cuando los elementos de una línea están expresados como sumas o diferencias de dos o más sumandos, lo que descompone el determinante en suma o diferencia de dos a más determinantes.

El tratamiento del producto de determinantes se hace en dos tiempos. Primero un "lema" explica (en orden cuatro) el cálculo de un determinante de orden par $2n$ dividido por mitades en cuatro de orden n, uno de ellos con todos los elementos nulos; el resultado es el producto de los determinantes de orden n contiguos al nulo[81]. A continuación un "teorema" –enunciado en general y demostrado en orden 2– expresa del producto de dos determinantes de igual orden como otro del mismo orden formado por el método columna-columna, lo que hace apoyándose en el lema anterior[82].

El asunto de los determinantes se interrumpe de nuevo para reaparecer en la última sección dedicada a las "funciones implícitas", donde el autor explica la resolución de ecuaciones y sistemas. Después de resolver ecuaciones sencillas de primero, segundo grado y binomias, le llega el turno a los sistemas lineales (pp. 287-306). Primero se ocupa del caso elemental de dos ecuaciones con dos incógnitas, al que aplica los tradicionales métodos de reducción, de sustitución y de igualación. Sigue la "resolución de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneas con igual número de ecuaciones que de incógnitas". Afirma García de Galdeano que hay dos procedimientos de resolución: "el primero consiste en una serie de eliminaciones sucesivas y el segundo consiste en una eliminación simultánea de todas las incógnitas menos una, mediante el empleo de determinantes." El primer procedimiento es el debido a Gauss, origen que el autor no menciona, y el segundo es la regla de Cramer, artífice originario que tampoco es citado por el autor español. Respecto al método de Gauss se da la idea general y se verifica con un sistema numérico de orden cuatro que se reduce a forma triangular. En cuanto a la regla de Cramer, hay una demostración general con el determinante del sistema diferente de cero y la discusión del caso nulo se enuncia en general pero se realiza sobre un sistema de orden cuatro. Luego se ocupa, también

[81]En notación actual de bloques: $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$.

[82]En notación actual de bloques, García de Galdeano opera así: $|A||B| = \begin{vmatrix} A & -I \\ O & B^t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & -I \\ AB & B^t \end{vmatrix} = |AB|$, donde $-I$ es la matriz identidad negativa, B^t es la matriz transpuesta de B y AB representa el producto columna-columna. Como sólo resuelve el caso de orden dos utiliza que $|-I| = 1$, lo que no sucede en orden impar, una exposición general le hubiera obligado a ser más cuidadoso con el signo.

con carácter general, de los sistemas lineales homogéneos. Termina con "nociones sobre resultantes", donde se ocupa de la compatibilidad de sistemas con diferentes números de ecuaciones y de incógnitas, otra vez con enunciados generales pero con demostraciones basadas en sistemas de tres ecuaciones.

Este es el contenido sobre determinantes y sistemas lineales que aparece esparcido, en función del orden interno programado para el mismo, a lo largo del primer volumen del *Tratado de álgebra* de García de Galdeano.

Como ya dijimos antes, la parte superior del *Tratado* García de Galdeano tiene una "sección segunda" dedicada a "la teoría de la combinación y el orden", que se ocupa, entre otras cosas, de nuestra temática algebraica lineal. En efecto, el libro tercero retoma la "teoría de las determinantes" (pp. 297-336) ampliando lo tratado en la parte previa elemental. Una novedad es que ahora introduce el término "matriz", primero en forma cuadrada y luego rectangular:

> Se llama *matriz* de una determinante la expresión abreviada en que suele representarse por medio de sus elementos, dispuestos en líneas y columnas comprendidas entre dos líneas verticales que se llaman *barras*. Así:
>
> $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ es la matriz de la determinante } a_1 b_2 - a_2 b_1.$$
>
> Las matrices son *cuadradas* ó *rectangulares*, según que el número de sus líneas sea igual ó desigual al de sus columnas. [100, p. 297]

Sigue alguna terminología sobre matrices, pero estas configuraciones, como en los demás textos que estamos comentando, no tienen autonomía como objetos matemáticos, son una simple nomenclatura para hablar de determinantes. García de Galdeano insiste en distinguir, en el caso cuadrado, entre la matriz, que es una disposición particular de cantidades, y el determinante que es un polinomio expresado a partir de dicha disposición.

Entrando ya en la ampliación que ofrece de la teoría de los determinantes, retoma el asunto considerando menores de cualquier orden y sus menores complementarios. Como en la obra de Trudi-Echegaray, cada menor H tiene una *característica*

$$c = r_1 + r_2 + \ldots + r_m + s_1 + s_2 + \ldots + s_m,$$

siendo los r_i los índices de las filas que forman H y los s_j los índices de sus columnas. Este número se usa en la fórmula $\Delta' = (-1)^c\Delta$ (p. 302) que relaciona el determinante inicial Δ con el Δ' que resulta al desplazar el menor H a la posición principal. Esto sirve como introducción al teorema que da el desarrollo de un determinante por menores complementarios, que el autor identifica como generalización del desarrollo por elementos de una línea dado en la parte elemental. Lo enuncia así:

> **Teorema**.— La determinante
>
> $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
>
> es igual á la suma algebraica de los productos que se obtienen multiplicando aritméticamente las menores de cualesquiera de sus matrices de m paralelas por las respectivas complementarias, tomando cada una con el signo + ó -, según que la característica de una ú otra sea par ó impar. [100, p. 304]

También en esta ocasión García de Galdeano elude los nombres que refieren al origen histórico, cierto o atribuido, de los teoremas; en este caso, no dice que se trata de la regla de Laplace. Sin embargo, a continuación sí expone por su nombre la regla nemotécnica elemental de Sarrus para calcular los determinantes de orden tres, explicada como en [148].

En esta parte superior se encuentran también las reglas de cálculo con determinantes basadas en combinaciones lineales (sin utilizar esta expresión) de líneas paralelas, así como una versión más general Binet-Cauchy del producto de determinantes. Aquí García de Galdeano multiplica por el sistema fila-fila dos matrices rectangulares semejantes (de m filas y n columnas) resultando una matriz cuadra de orden m cuyo determinante expresa, en el caso $m < n$, como suma de productos de menores correlativos de orden m de ambas matrices. Finalmente, el autor incluye el estudio de los determinantes especiales habituales, ya considerados en la traducción Echegaray-Trudi, que nunca es mencionada por el entonces catedrático de Toledo.

Como ya dijimos, los determinantes son utilizados en los libros cuarto a séptimo para exponer la teoría de la eliminación y la teoría de invariantes, con los determinantes funcionales Jacobiano y Hessiano.

4.3 Determinantes y sistemas en la enseñanza superior

En esta sección daremos cuenta de varios libros destinados a la enseñanza universitaria o técnica superior, escritos por los profesores encargados de impartirla y publicados avanzada la década de los ochenta y en la última del siglo XIX. Como ya hemos mencionado en la sección anterior, se trata de un tiempo finisecular en el que permanece ese despertar de la matemática española producido a partir de Echegaray.

Aquellas críticas que se formularon en 1866 contra la enseñanza de las matemática en la Facultad surtieron efecto en la reforma de 1877, en la que la asignatura Complementos de Álgebra, Geometría y Trigonometría desapareció para desdoblarse en dos que se llamaron Análisis Matemático 1º y 2º, si bien con el mismo contenido de álgebra y trigonometría que la desaparecida[83]. El contenido de las nuevas asignaturas antes citadas, según el decreto de creación de las cátedras correspondientes, debía ser el siguiente:

> El primer curso comprenderá las teorías de Aritmética, no explicadas en la segunda enseñanza; el álgebra elemental en toda su extensión y la trigonometría rectilínea y esférica con el análisis de las funciones circulares.
>
> Comprenderá el segundo curso el Álgebra superior con la teoría general de ecuaciones y la introducción al estudio de las teorías modernas del álgebra[84].

Como veremos, este programa general se adapta bien al contenido del libro de Baltzer antes descrito, en lo que se refiere a análisis algebraico más trigonometría. Las asignaturas eran comunes a las tres Secciones de las Facultades de Ciencias, lo que añadía un componente de necesidades docentes heterogéneas. Los primeros catedráticos que impartieron en Madrid dichas asignaturas fueron Agustín Monreal y García (1824-1889) y Emilio Ruiz de Salazar y Usategui (1843-1895), a los que siguieron Vicente Andrés y Andrés (-1890) y otros que vamos a mencionar más adelante.

Un nuevo plan de estudios de 1880 no cambió estas asignaturas, pero con él llegarán otras novedades, entre ellas la incorporación a los programas de la teoría de las formas, una de las aplicaciones algebraicas de los determinantes. Ello explica la aparición de las formas en las obras que vamos a citar a continuación como más características de este

[83]El cambio de nombre sin cambiar el contenido se explica por la ambigüedad mantenida en la época entre los significados de los términos “álgebra” y “análisis”, que se mantuvo hasta entrado el siglo pasado. Ver por ejemplo la relación de planes y textos en [248].

[84]Real Decreto de 30 de noviembre de 1877, Gaceta de 1º de diciembre.

periodo de fin de siglo en las materias que nos ocupan. En el último apartado daremos alguna información complementaria sobre las obras españolas dedicadas exclusivamente a la teoría de las formas.

4.3.1 José María Villafañe, 1888

Jose Maria Villafañe y Viñals (1830-1915) fue catedrático de Análisis matemático en Barcelona (1887) y Madrid (1891)[85]. Cuando se trasladó de Barcelona a Madrid la cátedra que ocupaba en la capital catalana pasó a Miguel Marzal, cuya obra analizaremos más adelante. En su puesto de la Universidad Central protagonizó el cambio de siglo compartiendo la cátedra con su joven colega Octavio de Toledo, y cuando se jubiló ocupó su lugar Rey Pastor. Ambos, Octavio de Toledo y Rey Pastor, serán protagonistas en el capítulo siguiente.

Villafañe publicó varias obras, pero nos vamos a limitar a considerar las dos que dedicó a los determinantes durante su estancia en Barcelona. La primera, de 173 páginas, es una primera versión de la segunda, más completa, que llegó tres años después con 350 páginas[86]. Tuvo ediciones posteriores en 1897, 1901 y 1906.

Cuando llegó a la cátedra de Geometría Analítica en la Universidad de Valencia (1882), Villafañe se interesó en los determinantes a fin de usarlos para explicar dicha materia. En su libro *Geometría analítica* (1883) incluye una sección introductoria que trata de *Nociones sobre las determinantes* en unas nueve páginas con la definición y propiedades de las determinantes aplicadas a la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Teoría de las determinantes [351]

El libro está constituido por siete capítulos, de manera que los seis primeros (pp. 7-69) se encargan de la teoría y el último está dedicado a las aplicaciones subdividido en quince secciones (pp. 69-173). Este es su índice, en el que el número de páginas pone de manifiesto que, Villafañe concede la máxima importancia a las aplicaciones:

[85]Nacido en Santiago de Cuba, antes que catedrático de Análisis matemático lo fue de Geometría Analítica en la Universidad de Valencia (1882). Veáse [247]

[86]Ambas están disponibles en formato electrónico en la Biblioteca Digital Hispánica `http://bdh.bne.es`.

I. Nociones preliminares
II. Desarrollo de matrices
III. Transmutación de matrices
IV. Menores
V. Desarrollo de matrices en sus menores
VI. Operaciones con matrices
VII. Aplicaciones

En la introducción el autor declara sus propósitos y el alcance de su obra:

> [...] no aspiramos a producir una obra, que pueda competir con las que tratan magistralmente la *Teoría de las determinantes*, ni mucho menos presentar novedades, que le den nuevo aspecto. No llegan a tanto nuestras aspiraciones, ni lo modesto de nuestros conocimientos nos lo permitirían. [...] pero sí advertiremos que lo único que hemos pretendido es tratarla lo más elementalmente posible y en su parte esencial, para que se adquiera de ella una idea clara y precisa, que prepare para su más amplio y trascendental estudio y sus más usuales aplicaciones. [351, pp. iii-v]

Comienza el primer capítulo con las permutaciones[87], noción previa para dar la definición de determinante y explicar la notación a emplear. Villafañe procede así:

> 4. *Determinante* es el polinomio que resulta al sumar todos los productos, que pueden formarse con n objetos
>
> $$a_1 b_2 c_3 \ldots,$$
>
> permutando de todas las maneras posibles las letras ó los respectivos índices, y dando á cada término el signo + ó el signo −, según sea de la primera ó segunda clase, ó según su paridad. [...]
>
> El denominador común de los valores de las variables en un sistema de ecuaciones de 1$^{\text{er}}$ grado con tantas ecuaciones como incógnitas es una determinante, cual lo demuestra la regla de KRAMER.
>
> 5. Si tenemos un cuadro
>
> $$(M)\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots & k_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots & k_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots & k_n, \end{vmatrix}$$

[87]Para éste tema en particular, remite a la obra *Lecciones de Álgebra elemental y superior* de Briot.

> que comprende entre dos líneas verticales n objetos
>
> $$a, b, c, \ldots, k$$
>
> con los índices
>
> $$1, 2, 3, \ldots, n,$$
>
> y permutamos de todas las maneras posibles los respectivos índices, sumando todos los grupos así formados con los signos de su paridad, se obtendrá una determinante del *órden* n.
>
> El cuadro (M) se llama *matriz de la determinante* obtenida. [351, pp. 14-15]

Villafañe llama esta notación "ordenada o de Cauchy", e indica que la de "doble índice" se debe a Leibniz y que también hay otra que utiliza índices superpuestos (subíndice y superíndice). Luego da cuenta de los mismos tres tipos de matrices que ya trató Echegaray-Trudi, y con los mismos términos: simétrica, hemi-simétrica ó gobbo-simétrica y pseudo-simétrica ó gobba. También como Echegaray, destaca la condición funcional del determinante:

> 17. De todo lo expuesto podemos concluir que
> *El desarrollo de una matriz en su determinante es la suma algébrica de todos los productos, que pueden formarse con los elementos de dicha matriz, de modo que cada producto ó término contenga todos los elementos correspondientes á filas y columnas diferentes, y tenga el signo + ó -, según su paridad.*
> La determinante es por consecuencia una función algébrica, racional, entera, homogénea y alternada de los elementos de su matriz. [351, p. 20]

En el segundo capítulo, como ya vimos en otros autores, aunque titule *Desarrollo de matrices*, lo que se trata son los desarrollos de un determinante. En el resto de los capítulos coincide en la presentación de los temas con sus predecesores españoles, sólo que casi en todos los casos emplea el término matriz en vez de determinante. En el capítulo sexto se ocupa de las operaciones matriciales y hace una presentación similar a la de Gascó y Suárez. No obstante vale la pena indicar que es consciente que la teoría va más allá, dado que inserta este comentario al inicio del capítulo:

> Vamos á ocuparnos, solo en los casos mas sencillos, de las operaciones, que pueden efectuarse con las matrices.

> 59. El objeto de estas operaciones es hallar una matriz, cuya determinante sea igual al resultado obtenido por las operaciones efectuadas con las determinantes de las matrices, con las cuales se opera. [351, p. 57]

La regla del producto está enunciada por el autor como "teorema de Cauchy", igual que está registrada en el índice del libro de Dostor [117], aunque en el cuerpo de la obra de Villafañe lo denomina de Binet-Cauchy. Como lo hicieran sus predecesores, tampoco se olvida de señalar que hay cuatro maneras posibles de efectuar el producto.

En el último capítulo encontramos las aplicaciones, las cuales el autor presenta de este modo:

> Con objeto de dar una lijera idea de la importancia y trascendencia de las determinantes en las múltiples cuestiones, de que se ocupan las matemáticas, vamos á aplicarlas á la resolución de un sistema de ecuaciones, explicando brevemente algunos de los principales métodos de eliminación conocidos hoy en el Análisis matemático, y dando unas meras nociones sobre las eliminantes, discriminantes, trasformaciones lineales é invariantes, así como sobre el cálculo de las raíces comunes de dos ecuaciones y raíces dobles de una ecuación, resolución de la de 3.^{er} grado, y de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y sobre algunas propiedades de las diferencias de las raíces de una ecuación. [351, pp. 68-69]

Villafañe ofrece una lista de quince aplicaciones sobre sistemas lineales, eliminación e invariantes por transformaciones lineales:

- I. Resolución de ecuaciones algébricas expresadas en determinantes
- II. Resolución de un sistema de ecuaciones no homogéneas
- III. Sistemas de ecuaciones lineales, en que todas menos una son homogéneas
- IV. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas
- V. Eliminante ó resultante de un sistema de ecuaciones
- VI. Métodos de eliminación de Euler, de Sylvester, de Bézout, de Cayley y de Cauchy
- VII. Cálculo de los elementos de la resultante. -Método de Cauchy y de Cayley
- VIII. Cálculo de las raíces comunes à dos ecuaciones
- IX. Cálculo de las raíces dobles de una ecuación
- X. Resolución de la ecuación de 3.^{er} grado
- XI. Resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

XII. Diferencias de las raíces de una ecuación
XIII. Discriminantes
XIV. Trasformaciones lineales
XV. Invariantes

Nos detendremos en las últimas por tratarse de temas que sus predecesores españoles no habían considerado. En el tema 13 encontramos esta definición:

> 147. *Discriminante* de una función homogénea con n variables es la resultante de las n derivadas igualadas á cero tomadas con relación á cada una de estas n variables. [351, p. 165]

El autor calcula las discriminates de las funciones homogéneas de segundo, tercer y cuarto grado en dos variables, designándolas por $\partial_2, \partial_3, \partial_4$ respectivamente. Hecho esto, pasa a considerar (14) las trasformaciones lineales:

> 147. *Trasformación lineal* de una ecuación de n variables $x, y, z, \ldots, u$ es el resultado que se obtiene al poner en dicha ecuación funciones lineales de otras nuevas variables $x_1, y_1, z_1, \ldots, u_1$.
>
> $$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 + \nu_1 z_1 + \cdots + \gamma_1 u_1, \\ y &= \lambda_2 x_1 + \mu_2 y_1 + \nu_2 z_1 + \cdots + \gamma_2 u_1, \\ z &= \lambda_3 x_1 + \mu_3 y_1 + \nu_3 z_1 + \cdots + \gamma_3 u_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u &= \lambda_n x_1 + \mu_n y_1 + \nu_n z_1 + \cdots + \gamma_n u_1 \end{aligned}$$
>
> en lugar de las variables $x, y, z, \ldots, u$. [351, p. 168]

Concluye afirmando que la discriminante de la función transformada es igual al discriminante de la función primitiva, lo que le da pie para introducir una nueva noción en el apartado 15:

> 171. *Invariante* de una función homogénea con n variables es toda función de los coeficientes de esta función, que cambia una transformación lineal en otra función idéntica de los coeficientes análogos de la función trasformada, dividida por una potencia del *módulo de la transformación*. La invariantes es *absoluta*, cuando esta potencia del módulo es igual á la unidad. [351, p. 171]

J.M. Villafañe, 1891

Elementos de las teorías coordinatoria y de las determinantes con sus principales aplicaciones [352]

Esta es una segunda edición bastante ampliada de la anterior. El propio autor habla así de su nuevo proyecto:

> Al haberse agotado en muy poco tiempo la primera edición de la *Teoría de las determinantes*, que publiqué como un mero ensayo, y con el exclusivo objeto de facilitar la enseñanza de esta importantísima y trascendental teoría en la asignatura de Análisis matemático, que explico en esta Universidad de Barcelona, me estimula á dar esta segunda edición aumentada, haciéndola preceder de la *Teoría coordinatoria.* [352, p. iii]

En efecto, Villafañe dedica a los temas de coordinatoria las primeras 144 páginas, para luego plantear como segunda parte (pp. 145-350) los contenidos publicados en la primera edición, con algunas ampliaciones. Esta vez la teoría de las determinantes ocupa 206 páginas agrupadas en ocho capítulos, uno más que en la versión anterior, resultado de la división del primer capítulo en dos, acompañados del capítulo de aplicaciones. Este es el nuevo índice:

VIII. Matrices de formas especiales
IX. Aplicaciones de las determinantes

En general es una presentación mejorada en la exposición de los enunciados, se nota mucho más reposada. Contiene más referencias, aunque de manera informal; encontramos los nombres de Serret, Baltzer, Salmon, Leibniz, Sylvester, Cauchy, Sarrus (p. 167), Jacobi, Cramer, Laplace, Binet, Euler, Hankel (p. 256), Brioschi, Muir (sobre continuantes, p. 264). Villafañe atribuye nombre a los teoremas. Aparecen teoremas atribuidos a Kramer-Cauchy, Brioschi-Cayley, entre otros. Hay un teorema de Cauchy, uno de Binet-Cauchy, dos de Laplace, etc. En los capítulo tres y ocho, menciona las determinantes y matrices múltiples considerando la noción citada de Bacas y Escandón [22, p. 99]. Añade que el teorema de Binet-Cauchy es aplicable a este tipo de determinantes. Tal como lo expresa Villafañe, en su obra no se distinguen determinantes y matrices.

> [...] las correlaciones íntimas, que existen entre las matrices y sus determinantes, de tal suerte que aquellas en realidad no son más que meras *notaciones* de estas, no debemos continuar en lo sucesivo haciendo distinción entre unas y otras, y por consecuencia, llamaremos en adelante indiferentemente matriz ó determinante á toda matriz, que aparezca en las cuestiones de que vamos á tratar. [352, p. 270]

Las modificaciones del libro corresponden en su mayor parte a la teoría, en las aplicaciones no tanto. En la solución de sistemas de ecuaciones lineales aparece un criterio de compatibilidad para los sistemas que tienen n ecuaciones y $n-1$ incógnitas, y el estudio del caso cuando el determinante es nulo. Las aplicaciones citadas de la primera edición han sido reducidas en esta segunda versión de la obra.

Finalmente, menciona la existencia de las llamadas funcionales (Jacobiana, Hessiana, Wronskiana), que serán tratadas en su teoría de formas, como lo hiciera Galdeano en [100] y Octavio de Toledo en *Elementos de la teoría de las formas* (1889).

4.3.2 Guillermo Fernández de Prado, 1891

La obra que pasamos a comentar tuvo varias ediciones, comentaremos la primera edición y luego veremos las variaciones en las siguientes, que no afectan demasiado a la parte de determinantes y sistemas lineales. La obra fue recomendada para la enseñanza en la

Escuela Superior de Ingenieros Agrónomos[88]

Elementos de la teoría de los determinantes y sus aplicaciones a la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales y a la teoría de las formas: de acuerdo con los programas oficiales de la Escuela General Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos, 1891 [144].

En una advertencia el autor pone a consideración del público su obra:

> ADVERTENCIA
>
> Al redactar este libro, destinado principalmente á los jóvenes que siguen las carreras de Ingenieros y Arquitectos, me propuse tan sólo reunir bajo forma sencilla y con unidad de criterio las diversas materias que abarca una parte muy importante de los programas oficiales. Si con él he conseguido hacer más fácil la inteligencia de esta parte, economizando á los alumnos el penoso trabajo de la confección de apuntes, habré logrado al mismo tiempo el único objeto de su publicación.
>
> Los números que no van precedidos de (*) constituyen por sí solos un cuerpo de doctrina, con la extensión indicada en los programas de la Escuela general preparatoria de Ingenieros y Arquitectos.

Seguido de la advertencia aparecen desglosados los siguientes capítulos:

I. Inversiones y sustituciones circulares
II. Matrices
III. Determinantes
IV. Desarrollo de un determinante
V. Combinación de los determinantes
VI. Determinantes recíprocos y simétricos
VII. Aplicación de los determinantes a la resolución de ecuaciones aisladas
VIII. Aplicación de los determinantes a la resolución de ecuaciones lineales simultáneas de primer grado
IX. Sustitución lineal
X. Preliminares a la teoría de las formas
XI. Discriminantes
XII. Invariantes
XIII. Covariantes y contravariantes
XIV. Formás canónicas

Fernández de Prado opta por introducir un capítulo inicial de seis páginas sobre permutaciones. En el segundo considera las matrices como cuadro de cantidades entre barras

[88]Véase [254]. G. Fernández de Prado fue profesor del Real Colegio de María Cristina de Estudios Superiores, centro de los Padres Agustinos de El Escorial.

verticales. La definición de determinante aparece en el capítulo III (p. 11) y en el cuarto encontramos sus propiedades y desarrollos por menores. En este capítulo expone también la regla de Sarrus.

En el quinto capítulo se ocupa de la combinación de los determinantes. Primero, expone la propiedad aditiva por líneas. Expone aquí el teorema de Binet-Cauchy con su demostración. Como aplicación del mismo plantea la identidad de Lagrange por su utilidad en la geometría y el producto de determinantes de cuatro maneras distintas.

En el capítulo sexto trata los determinantes especiales, y el capítulo siete contiene la solución de ecuaciones expresándolas en términos de determinantes. En el octavo realiza un estudio de la resolución de las ecuaciones simultáneas de primer grado que incluye la regla de Cramer y el teorema de Rouché.

> 126. El ilustre matemático M. Rouché ha dado á conocer [*Journal de l'École Polytechnique, XLVIII^{e} Cahier, 1880*] un notable teorema que viene á ser la síntesis de la teoría de las ecuaciones lineales.
>
> [...]
>
> 127. Establecidas estas definiciones, formularemos el enunciado general del teorema.
>
> 1º *Para que n ecuaciones lineales con m incógnitas sean compatibles, es necesario y suficiente que todos los determinantes característicos del sistema sean nulos ó que éste no admita ninguno.*
>
> 2º *Cuando el sistema es compatible, si todas las incógnitas son principales, admite una solución única y determinada; si no son principales todas las incógnitas, es indeterminado.* [144, p. 126]

En las aplicaciones considera también el método de eliminación de Sylvester. En la sección final de este capítulo ilustra la regla de Cramer y el método de Sylvester con ejemplos.

Hasta aquí la parte propiamente dedicada a los determinantes y su principal aplicación básica, la resolución de los sistemas lineales.

El resto del libro se dedica a la teoría de las formas, empezando en el capítulo IX por las sustituciones lineales,

> 136. Se llama *sustitución lineal* la que se efectúa en una función de cualquier número de variables, por ejemplo $u = f(x, y, z)$, cuando se reemplzan estas variables por otras

> tantas nuevas X, Y, Z, ligadas á las primeras por medio de las ecuaciones lineales. [144, p. 144]

El autor, expone la teoría para el caso de formas lineales ternarias y enuncia un teorema general para n funciones lineales en n variables. En la sección siguiente introduce las sustituciones ortogonales.

En el décimo capítulo se ocupa de las formas, y en el capítulo XI encontramos los discriminantes y sus propiedades. Los invariantes son introducidos en el capítulo XII.

Las funciones jacobiana y hessiana aparecen en el capítulo XIII, bajo el título de Covariantes y contravariantes.

En el capítulo XIV Fernández de Prado aborda las formas canónicas.

> 198. DEFINICIÓN. - Se llama *forma canónica* de una función, dada en su expresión más general, la forma más sencilla posible á que puede reducirse dicha función, sin perder nada de su generalidad, mediante una sustitución lineal. [144, p. 223]

En general, la exposición está bien estructurada y bien cuidada la presentación. En la revista *El Progreso Matemático* se reseña así está primera edición:

> Lo esmerado de la impresión unido a la precisión y brevedad del razonamiento y a los numerosos ejemplos y ejercicios, contribuyen a hacer fácil el estudio de la hoy tan importante teoría, que es el objeto de la obra escrita, con gran conocimiento del asunto y de las exigencias de la enseñanza, por el profesor Fernández de Prado. [101, p. 96]

Vale la pena indicar que el libro esta nutrido de ejemplos pero, no plantea ejercicios. Además, de referirse a Rouché, Fernández de Prado no recomienda otras obras.

A continuación comentaremos brevemente las ediciones posteriores.

En 1895 apareció una supuesta "segunda edición", pero el autor no la denominó así, reservando tal ordinal para la posterior de 1902, como veremos.

Elementos de la teoría de los determinantes y sus aplicaciones á la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales y á la teoría de las formas. Con un apéndice que contiene *la teoría de los resultantes y su aplicación á la eliminación de grado superior, de acuerdo con los programas oficiales*, 1895 [145].

Es interesante destacar que esta edición mantiene una dedicatoria que ya no aparecerá en la siguiente:

> Al Excmo. Señor D. Antonio Cánovas del Castillo. Testimonio de admiración y respetuoso afecto.

Sigue a continuación una "Advertencia" en la que indica los cambios introducidos y añade una consideraciones que ponen de manifiesto el estilo retórico imperante en la época:

> Alentado por la favorable acogida que el público ha dispensado á mi TRATADO DE LOS DETERMINANTES, he resuelto completar el cuadro de la enseñanza elemental de esta teoría con la adición de un Apéndice que contiene la teoria de los resultantes y su aplicación á la eliminación de grado superior, introduciendo el precioso teorema de Rouché, que por su importancia debe ocupar lugar preferente en la enseñanza. De suerte que la obra, completada de ese modo, encierra cuanto contienen los programas oficiales referente á la teoría de los Determinantes.
>
> He procurado aportar á la exposición toda la claridad posible, cuidando de hacer resaltar el íntimo enlace de algunas teorías y procedimientos, y evitando siempre el empleo de laberínticas y estériles explicaciones que, lejos de crear hábitos de exactitud, logran solamente llevar á la inteligencia del alumno la vacilación y la duda, precursoras de la desconfianza y del desaliento; si he conseguido mi propósito, el público decidirá.

No hay cambios en la parte inicial relativa a determinantes y sistemas, en el apéndice amplía lo poco expuesto en la primera edición sobre eliminación basándose en un "teorema de Rouché" de 1877 [304] [E. Rouché, Sur l'élimination, Nouvelles Annales de Mathématiques 16 (1877) 105-113.] que justifica así:

> 1. OTRA FORMA DEL RESULTANTE DE CAUCHY. - Para no interrumpir el enlace histórico de invención, tan necesario en una obra didáctica, y para adaptarme á la capacidad intelectual de nuestros alumnos, he tenido necesidad de alterar un poco la brillante exposición del insigne autor de tan valioso teorema en lo que se refiere a la forma; el fondo es el mismo. [145, p. 251]

Viene ahora la que el autor calificó como "Segunda edición, revisada y ampliada":

Elementos de la teoría de los determinantes y sus aplicaciones a la eliminación y a la teoría de las formas [146], 1902.

En ella las ampliaciones principales (pasa a tener xii+324 páginas) afectan a su exposición de la eliminación, que es sensiblemente mejorada y queda como parte segunda del libro, que queda configurado en tres partes, a saber: "Primera, Determinantes y ecuaciones lineales simultáneas; Segunda, Eliminación; Tercera, Teoría de las formas". La primera parte que nos concierne, incluye los ocho primeros capítulos ya considerados de la primera edición. En esta versión de la obra encontramos otras referencias.

Esta edición de principios del siglo XX tuvo este comentario de Muir:

> Una exposición clara pero rígidamente formal, ordenada cuidadosamente, sin material no familiar, y sin ejercicios de prácticas. Sólo una tercera parte del libro se dedica a la teoría, y el último tercio se dedica al álgebra de quanticas. No he visto la primera edición. [266, Vol. IV p. 91].

Todavía tuvo, al menos, dos ediciones más que nos limitamos a citar: Una de 1917 en Madrid (Imp. de Eduardo Arias, 302 pp.) y otra de 1930 en El Escorial (Imp. del Real Monasterio, 296 pp.).

Después de la edición de 1902, Fernández de Prado[89] publico tres artículos, dos en 1905 y uno en 1906, en la revista *La Ciudad de Dios* de los padres agustinos:

1. G. Fernández. Ecuaciones lineales. Teorema de Rouché. *La Ciudad de Dios*, 66 (1905) 659-664.
2. G. Fernández. Discusión de las fórmulas generales de los sistemas de primer grado. *La Ciudad de Dios*, 67 (1905) 309-315.
3. G. Fernández. Análisis indeterminado de primer grado. *La Ciudad de Dios*, 71 (1906) 300-307, 469-482.

En el primero, el autor expone una versión didáctica de la demostración del Teorema de Rouché, basada en su libro de determinantes, el cual cita por la edición de 1902. Indica

[89]Como en el libro, el autor firma los artículos de 1905 como profesor en el Real Colegio de Estudios Superiores de María Cristina de los Padres Agustinos de El Escorial y el de 1906 como profesor de Matemáticas en la Universidad de El Escorial.

a pie de página, que el contenido del artículo corresponde a una nota de las lecciones explicadas en su lugar de trabajo. El segundo, que puede considerarse como continuación del primero, establece una propiedad de las ecuaciones adjuntas, que según el autor corresponde a una nueva demostración de la primera parte del Teorema de Rouché. Trata los sistemas con igual número de ecuaciones que de incógnitas, y discute la compatibilidad de los mismos cuando el determinante de los coeficientes es nulo. Se ocupa de problemas diofánticos lineales con más incógnitas que ecuaciones en su tercer artículo.

4.3.3 Miguel Marzal, 1894

Esquema de los contenidos de la obra:

Resumen de las lecciones de análisis matemático (primer curso) [256]

- Sección primera: Aritmética Universal (lecciones 1-57)
  - Parte I: Calculatoria (lecciones 1-38)
  - Parte II: Coordinatoria (lecciones 39-57)
- Sección segunda: Álgebra elemental (lecciones 58-72)
- Sección tercera: Trigonometría rectilínea y esférica (lecciones 73-90)

Resumen de las lecciones de análisis matemático (segundo curso)[257]

- Sección primera: Introducción. –Derivados, series y funciones continuas (lecciones 1-37)
- Sección segunda: Teoría general de ecuaciones (lecciones 38-74)
- Sección tercera: Teoría general de las "formas" algébricas (lecciones 75-90)

Miguel Marzal y Bertomeu[90] (1856-1915) publica litografiada su obra de análisis matemático en varias entregas, y como en una advertencia inicial manifiesta, para apoyar sus actividades de docencia.

> Al redactar estos ligeros apuntes accediendo á las reiteradas instancias de nuestros alumnos, no llevamos otro propósito que facilitar á estos el estudio de nuestra asignatura, evitándoles la pérdida de tiempo y los sacrificios que habrian de ocasionarles la adquisición y consulta de las varias obras que exige el desarrollo de nuestro programa de 1º y 2º curso de análisis, algunos de los cuales se hallan escritos en idioma extranjero. [256, p. 5]

[90]Marzal obtuvo el título de licenciado en ciencias exactas (1878) y doctor (1883) por la Universidad de Madrid. Catedrático de Análisis Matemático primero en Valencia y a partir de 1891 en Barcelona. Miembro de la SME desde su fundación.

El diseño de las lecciones para el primer curso, sigue la estructura de los *Elementos de Matemáticas* de Baltzer y declara ser su seguidor en la advertencia,

> Muy lejos de nosotros la pretensión de haber acertado en todo cuanto se refiere á la exposición de las diversas teorías que integran el 1º y 2º curso de análisis. En este modesto trabajo destinado única y exclusivamente á servir de guía á nuestros alumnos, y reducido, por lo tanto, á los estrechos límites de la cátedra, sólo debe verse el ensayo de un plan didáctico de nuestra asignatura en el que, siguiendo las huellas del ilustre matemático alemán Dr. Baltzer, procuramos agrupar y ordenar las verdades de modo que se hallen, lógicamente hablando, lo más cerca posible de los principios, y tanto más próximas unas de otras, cuanto más íntima sea la conexión que entre ellas exista; por entender que, dado el gigantesco desenvolvimiento que en la actualidad alcanza el análisis matemático, y el número sin cesar creciente de sus aplicaciones á las demás ciencias y, en especial, á las propias del ingeniero y del arquitecto, [...] [256, p. 6]

Pasamos a tratar las lecciones con los temas específicos, del primer curso:

46. Preliminares
47. Transmutación de matrices
48. Matrices menores
49. Operaciones con matrices
50. Multiplicación de matrices
51. Matrices múltiples
52. Matrices simétricas
53. Matrices hemisimétricas

Después de dar unas lecciones sobre combinatoria, introduce la noción de determinante al final de la lección 45.

> Dese el nombre de *determinante* de un sistema de n^2 elementos dispuestos en n filas y otras tantas columnas, al polinomio suma de todos los productos que pueden formarse con estos elementos tomándolos n a n de manera que cada producto sólo contenga un elemento de cada fila y de cada columna, y cuyo signo sea + ó − según que las permutaciones formadas por los números de orden de las filas y de las columnas á que pertenecen sus elementos factores sean de la misma o diferente paridad. [256, p. 633]

Llama la atención que Marzal utilice el término sistema para referirse a las matrices así como también el de transmutación para la transposición. Usa la misma notación para determinantes y matrices. Además, todas las lecciones cuentan con ejercicios propuestos.

Las siguientes ocho lecciones están dedicados a esta teoría. En los preliminares de la lección 46 (p. 635) lo llama *algoritmo funcional* e indica que es un instrumento analítico apropiado para expresar bajo forma sencilla y elegante los más complicados y difíciles resultados del análisis algebraico. Por tanto, es conveniente hacer un estudio especial de cuanto se refiere al desarrollo, transmutación y cálculo de las determinantes representadas por sus matrices. Añade que las matrices cuadradas son las verdaderas matrices de las determinantes.

En la lección 46 están las nociones básicas de matrices, Finaliza la lección dando reglas prácticas para el desarrollo de las matrices de $2^{\underline{o}}$, $3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$ grado y Lección 47, aquí trata la transmutación de matrices.

Lección 48 está dedicada a las matrices menores y sus desarrollos.

Lección 49, comprende las operaciones con matrices: suma, resta

Lección 50, trata la multiplicación de matrices, siguiendo el estilo de Cauchy establecido en el teorema del producto.

Lección 51, aparecen las matrices múltiples.

Lección 52, sobre matrices simétricas. Aquí Marzal menciona dos autores,

> Teorema de Baltzer. Si los elementos de una matriz orto-simétrica de grado m^{mo} forman una progresión aritmética de orden $(n-1)^{\underline{o}}$ la determinante de esta matriz será igual á la potencia n^{ma} de la diferencia de orden $(n-1)^{\underline{o}}$ de dichos elementos multiplicada por $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; pero si dicha progresión aritmética fuese de orden inferior al $(n-1)^{\underline{o}}$, la expresada determinante sería nula.
>
> *Este teorema puede considerarse como un corolario del de Hankel, pues cuando los elementos de la matriz forman una progresión aritmética de orden $(n-1)^{\underline{o}}$, las diferencias de este orden serán todas iguales entre si, y las de ordenes siguientes serán nulos, y si la progresión aritmética es de orden inferior al $(n-1)^{\underline{o}}$, serán nulas las diferencias de este orden y las de orden superior.* [256, p. 701]

Lección 53, tipos especiales de matrices: antisimétricas (hemisimétricas) y pseudo-simétricas, definición y ejemplos.

En la sección segunda: Álgebra elemental, encontramos la lección 66 donde Marzal se ocupa de los sistemas de ecuaciones lineales. En la lección previa introduce la terminología que utilizará en el tratamiento de las ecuaciones algebraicas y sistemas en general. En un apartado titulado, *Caracteres distintivos de los sistemas determinados, indeterminados e imposibles*, Marzal hace algunas observaciones relativas a los sistemas e incluye la noción de sistema equivalente.

> Un sistema se llamará posible ó imposible según que tenga ó no tenga soluciones finitas; denominándose, en el primer caso, determinado si tiene un número limitado de soluciones, é indeterminado si tiene infinitas. [256, p. 840]

Ya en la lección 66, en el primer apartado considera los sistemas de ecuaciones lineales con n ecuaciones y n variables y su solución por los métodos de eliminaciones sucesivas y de los coeficientes indeterminados. En el segundo, explica el *método de las determinantes* que no es más que la regla de Cramer. En el tercero, discute el caso cuando el determinante del sistema es nulo. Introduce la noción de determinante característica de Rouché, y esto le da pie para entrar en el cuarto apartado *Condición para que un sistema de* $n+1$ *ecuaciones lineales con* n *incógnitas sea determinado* que concluye con estas palabras,

> De igual manera se demostraría que las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de $n+m$ ecuaciones con n incógnitas sea determinado. [256, p. 875]

Por último, aborda los sistemas lineales homogéneos como un caso particular de los sistemas generales.

En las lecciones del segundo curso, vamos directamente a la sección tercera, que se ocupa de la teoría de las formas y empieza en la lección 75. Marzal aborda el tema desde un punto de vista general, como funciones enteras homogéneas que gozan de propiedades, que

> son de excepcional interés para la geometría analítica, por traducirse en propiedades geométricas que no cambian al transformar las coordenadas, sirviendo de fundamento á la admirable correlación que existe entre las "formas" analíticas y las geométricas; y ellas son las que constituyen el objeto principal de la *teoría de las "formas" algébricas*, una de las más modernas é importantes del análisis algébrico. [257, p. 3]

El autor emplea la notación de Aronhold, para una "forma" de grado n-ésimo con m variables:

$$(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + \cdots + a_m\varphi_m)^n.$$

En la lección 80, explica las sustituciones lineales, las cuales introduce de este modo,

> Uno de los medios más eficaces y expeditos de que dispone el Análisis para la investigación de las propiedades de las funciones, como para la resolución de problemas, es el *cambio de variables* en las primeras y de *incógnitas* en las segundas. El caso más sencillo de esta transformación es la llamada *sustitución lineal*, que consiste en el cambio de las variables de una función por otras nuevas que se hallan enlazadas con las primeras mediante un sistema determinado de ecuaciones lineales. [257, p. 49]

Marzal considera las sustituciones directas e inversas, pero no la compuesta, por tanto no aparecen las matrices. Explica que el módulo de la sustitución inversa es la determinante recíproca del módulo de la sustitución directa.

En la lección 81, trata las sustituciones ortogonales, las cuales define mediante la relación

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \cdots + \varphi_m^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_m^2$$

que cumplen las variables primitivas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m$ y las nuevas $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Añade la propiedad que las caracteriza en términos de filas y columnas ortonormales, pero escrita en estos términos:

> En toda sustitución ortogonal la suma de los cuadrados de los elementos de cada columna del módulo es igual á la unidad; y la suma de los productos que se obtienen multiplicando cada elemento de una columna cualquiera por su homólogo de otra es igual á cero. [257, p. 57]

En la lección 82, incluye la noción de invariante, como sigue:

> Llámase invariante de una "forma" ó sistema de "formas" á toda función de los coeficientes tal que cuando se efectúa en ellas una sustitución lineal, la función semejante de los nuevos coeficientes es igual á la de los primitivos multiplicada por una potencia del módulo de la sustitución. [257, p. 64]

Finalmente, en la lección 90 considera el caso particular de las formas binarias.

4.3.4 Otros autores y obras

Los que hemos señalado en los apartados anteriores son los autores y libros más difundidos e influyentes, que marcan el tono de la época en la exposición en España de estas materias, pero hay otras obras que también merecen al menos ser citadas para dar una idea más completa de la implantación en España de los métodos algebraicos lineales.

En primer lugar daremos cuenta de relacionar los artículos aparecidos en las incipientes revistas científicas y matemáticas de la época. Para terminar, daremos noticia de las obras dedicadas a la teoría de las formas.

En la segunda mitad del siglo XIX, en los países de ciencia avanzada se produjo un despliegue considerable de revistas matemáticas, unas dirigidas a la investigación y otras al profesorado. Como muestra valga esta breve cita de un trabajo de E. Ausejo en [19], donde menciona en algunos países revistas de investigación frente a revistas para el profesorado:

> *Journal de Liouville* y *Nouvelles Annales* en Francia, *Journal de Crelle* y *Archiv der Mathematik und Physik* en Alemania, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* y *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* frente a *Giornale di Matematiche* (1863) y *Periodico di Matemática* (1886) en Italia, *American Journal of Mathematics* (1878) y *Transactions of the American Mathematical Society* frente a *The American Mathematical Monthly* (1894) en los Estados Unidos de América darán cobertura a las respectivas comunidades nacionales investigadoras y docentes. [19, p. 38]

Este movimiento de proliferación del periodismo matemático llegó a España con cierto retraso, cuando ya el siglo terminaba y tuvo una continuidad hasta los primeros años del siglo XX con revista de iniciativa personal y corta duración, situación que tomó un nuevo perfil institucional cuando apareció en 1911 la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, que mencionaremos en el capítulo siguiente. García de Galdeano funda en Zaragoza la primera revista española dedicada a las matemáticas, *El Progreso Matemático*, publicada en dos series, la primera en el periodo 1891-1896 y la segunda entre 1899 y 1900. En el primer número de *El Progreso Matemático*, su fundador afirmaba:

> Es un hecho sorprendente que en España, donde tantos periódicos se publican, destinados á los fines más diversos, no exista uno cuyo objeto exclusivo sea la propaganda y desenvolvimiento de las ciencias matemáticas. [101, p. 3]

Esta afirmación refiere a la existencia de otras revistas científicas de carácter general, no sólo matemático; entre ellas citaremos sólo a tres porque nos hemos referido a ellas o nos vamos a referir enseguida, a propósito trabajos publicados en ellas. Estos antecedentes de las revistas matemáticas fueron: Una de iniciativa institucional, a revista de la Academia de Ciencias *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, que empezó a publicarse trimestralmente en 1850[91]. Ya vimos al inicio de este capítulo que en ella publicó Echegaray sobre aplicaciones de los determinantes. La segunda responde a un esfuerzo personal, es la revista mensual *Crónica Científica*, que se publicó en Barcelona entre 1878 y 1892[92]. Finalmente, mencionamos la revista quincenal *La Ciudad de Dios* de los PP. Agustinos, en la que, como vimos, publicó sus artículos Fernández Prado.[93]

Pero en torno a 1900 surgieron otras revistas específicamente matemáticas. Durante los años intermedios entre las dos épocas de *El Progreso*, surge *El Archivo de Matemáticas Puras y Aplicadas* de Luis Gascó en Valencia. Le sigue la *Revista Trimestral de Matemáticas* (1901-1906) de José Ríus y Casas en Zaragoza y la *Gaceta de Matemáticas Elementales* (1903-1905) de Pedro Ángel Bozal y Obejero en Vitoria.

A continuación, para completar la relación de los escritos por Echegaray y por Fernández Prado, ya vistos en páginas anteriores, mencionamos otros trabajos publicados sobre cuestiones algebraicas lineales en estas las primeras revistas del incipiente del periodismo científico y matemático español[94].

En la sección de matemáticas de *Crónica Científica*, entre los años 1879 y 1880, publicó tres artículos Lauro Clariana y Ricart[95] (1842-1916), que versan sobre aplicaciones de los determinantes. También, en la misma revista del año 1881, el astrónomo Miguel Merino[96] (1831-1905) publicó un artículo que según Llombart [246], tenía como propósito "llamar la atención del lector al error cometido por *un autor del mérito y experiencia tal como es el matemático francés Dostor* en la página 62 de su libro *Elementos de la Teoría de los*

[91]En 1904, pasó a llamarse *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, y actualmente se mantiene en circulación.

[92]Subtitulada *Revista Internacional de Ciencias*. Rafael Roig i Torres (1855-1931) fue el editor y director de la misma, en la que publicaron numerosos científicos católicos [246].

[93]Subtitulada *Revista Religiosa, Científica y Literaria*. Los agustinos editaban esta revista en El Escorial y la dedicaban "al gran padre san Agustín", de cuya famosa obra *La ciudad de Dios frente a los paganos* (siglo V) tomó el título la revista.

[94]En la primera revista española dedicada a la matemáticas: *El Progreso Matemático*, no hemos encontrado artículos en relación a nuestro tema.

[95]Licenciado (1872) y Doctor en Exactas (1873). Catedrático de Matemáticas del Instituto de Tarragona (1870-1881) y de Cálculo Infinitesimal en la Universidad de Barcelona de ahí en adelante.

[96]Doctor en Ciencias Exactas y Director del Observatorio Astronómico de Madrid a partir de 1882.

Determinantes". Los artículos citados son:

1. L. Clariana. Aplicación de las determinantes a la geometría. *Crónica Científica*, 2 (1879) pp. 497-500.
2. L. Clariana. Aplicación de las determinantes a la trigonometría. *Crónica Científica*, 3 (1880) pp. 201-204.
3. L. Clariana. Aplicación de las determinantes a la resolución de las ecuaciones de cuarto grado. *Crónica Científica*, 3 (1880) pp. 425-429
4. M. Merino. Sobre una propiedad de las determinantes de tercer grado. *Crónica Científica*, 4 (1881) pp. 133-137.

En la década siguiente, en el *Archivo de Matemáticas* encontramos tres artículos, dos de su editor, y uno de otro autor[97]. En su primer artículo, Gascó presenta tres reglas para el cálculo de un determinante de cuarto grado en armonía con la regla de Sarrus. En el segundo, presenta un procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones, que corresponde básicamente a la regla de Cramer. Por su parte, Caro expresa en su artículo el desarrollo del binomio mediante determinantes. Los artículos mencionados son:

1. L. Gascó. Reglas prácticas para el desarrollo de los determinantes de cuarto grado. *Archivo de Matemáticas*, 1 (1896) pp. 11-15.
2. L. Gascó. Resolución por determinantes de los sistemas de ecuaciones. *Archivo de Matemáticas*, 2 (1897) p. 124-127.
3. R. Caro. Determinante de $(a+b)^n$. *Archivo de Matemáticas*, 2, (1897) p. 68-70.
4. J. M. de las Alas. Sobre el desarrollo de una matriz en menores. *Gaceta de Matemáticas Elementales*, 2 (1904) pp. 15-16.

Por su parte, en la *Gaceta de Matemáticas Elementales*, Alas presenta un detalle técnico que aparece en el desarrollo de una matriz por sus menores complementarios. En la misma revista, que en 1905 pasó a llamarse simplemente *Gaceta de Matemáticas*, Laurent representa mediante matrices una forma cuadrática y afirma que si la matriz se reduce a su forma derivada (diagonal), la forma se convierte en una suma de cuadrados; ilustra el caso con dos ejemplos. Kurschak "demuestra de forma simultánea dos teoremas acerca de la irreductibilidad de algunos determinantes" [245]. Se trata de los artículos:

[97]Se trata de Ricardo Caro, quien se desempeñó primero como profesor de Instituto y luego pasó a ser catedrático de Universidad. Veáse, Tesis doctoral de María Cinta Caballer [47].

1. J. M. de las Alas. Sobre el desarrollo de una matriz en menores. *Gaceta de Matemáticas Elementales*, 2 (1904) pp. 15-16.
2. H. Laurent. La descomposición en cuadrados de formas cuadráticas. *Gaceta de Matemáticas*, 3 (1905) pp. 14-16.
3. J. Kurschak. *Sobre la irreductibilidad de algunos determinantes.* Gaceta de Matemáticas IV. (1906) pp. 206-207.

No faltaron los determinantes en la *Revista Trimestral de Matemáticas.* Hernández publica un artículo en el que considera sistemas de ecuaciones lineales en los que sus coeficientes y/o sus entradas independientes son términos consecutivos de una progresión aritmética y estudia el efecto que esto tiene en el cálculo del determinante. Por su parte, Ruiz-Castizo presenta un resultado sobre formas cuadráticas cuya demostración atribuye a Marzal. Los artículos son:

1. E. Hernández. De algunos sistemas particulares de ecuaciones lineales. *Revista Trimestral de Matemáticas*, 4 (1904) p. 24-28 y 75-77.
2. J. Ruiz Castizo. Nota sobre una propiedad de las formas cuadráticas. *Revista trimestral de Matemáticas*, 4 (1904) p. 72-74.

Para iniciar el último asunto de este capítulo, que es la exposición de los libros españoles dedicados a la teoría de las formas, volveremos a utilizar una afirmación de Rey Pastor en el ya citado discurso de Valladiolid (1915):

> Hacia 1880 comienza, por fin, a llegar la Universidad el Análisis de Cauchy, cuyos fundamentos explica Archilla en la misma Facultad. La traducción del mediocre tratado de Rubini sobre las formas algébricas (1885), introduce esta teoría, que pronto pasó casi todos los programas oficiales, llegando obtener hasta tres adaptaciones españolas; García de Galdeano importa la teoría de las funciones de variable compleja de Cauchy (1883) y la de los grupos de substituciones (1856); Clariana incluye nociones de la primera en los programas universitarios (1891)... [281, p. 15]

"La traducción del mediocre tratado de Rubini" mencionada en la cita anterior es el libro *Teoría de las formas en general y principalmente de las binarias* del autor italiano Rafaello Rubini (1817-1890), cuya traducción fue publicada en 1885 por Emilio Márquez Villarroel (1827-1888), catedrático de la Universidad de Sevilla[98]. Se refiere también Rey Pastor a

[98]El mismo catedrático había traducido en 1882 los dos volúmenes del *Tratado de álgebra* de Rubini.

que la teoría de las formas, es decir, la teoría de invariantes, que formaba parte en los libros europeos que hemos comentado en la primera parte de esta memoria, se incorporó a la matemática española al incluirla en el programa de Análisis matemático 1º y 2º, con lo que este tema fue apareciendo en los libros de texto de los profesores de la asignatura. Así lo hemos visto en este mismo capítulo, siendo especialmente importante el contenido en teoría de las formas de la obra comentada de Fernández de Prado.

Pero dos autores escribieron libros específicos de más de cien páginas sobre esta materia, que vamos a comentar brevemente.

Luis Octavio de Toledo, 1889.

Su papel en la matemática española desde que llegó en 1898 a la cátedra universitaria de Madrid —pasando antes por las universidades de Zaragoza y Sevilla— es bien conocido. En el capítulo próximo estudiaremos su enseñanza sobre determinantes y sistemas, pero antes de alcanzar la posición máxima de su carrera, mientras era catedrático en el Instituto de León en 1889, publicó, probablemente para acumular méritos para su promoción profesional, la obra *Elementos de la teoría de las formas* [108][99]. Ya en Madrid y a cargo de la asignatura Curso de Análisis superior, del Doctorado, utilizó este libro como texto de la primera parte del curso[100] [275, p. 324].

Esta obra se inscribe también el el tipo de "traducciones libres" o "adaptaciones", en este caso de la obra antes citada de Rubini. Octavio de Toledo reconoce en el prólogo la existencia de la obra del italiano traducida por Márquez y de otras no traducidas[101], señalando que su objetivo no es investigador sino docente, simplemente facilitar el estudio de estos libros superiores. Así lo expone en el prólogo:

> Pero como nó existe á juicio nuestro una Teoría verdaderamente elemental de las Formas, en la que se hallen expuestas con sencillez y brevedad los principios fundamentales de tan bellísima rama del Análisis moderno, considerando por otra parte la dificultad que presenta el estudio de las obras anteriormente citadas á los que

[99] El ejemplar consultado, de la Biblioteca García Galdeano de la Universidad de Zaragoza, tiene esta dedicatoria manuscrita: "Al Sr. Dn. Zoel García de Galdeano en testimonio de nuestra antigua y buena amistad un afmo. compañero. [Firma sin fecha] Luis Octavio de Toledo".

[100] La mayor parte del curso era análisis de variable compleja, para lo que también publicó un libro de texto en 1907.

[101] De los autores George Salmon (1819-1904), Francesco Faá di Bruno (1825-1888) y Alfred Clebsch (1833-1872). Otras obras de Faá di Bruno y de Salmon cita son sus referencias para cuestiones de eliminación.

> carecen de las primeras nociones de esta parte del Álgebra [102] , [...] nos han parecido razones estas más que suficientes para decidirnos á redactar y publicar unos *Elementos*, cuyo principal objeto es por lo tanto, que sirvan de preparación al estudio de la referida Teoría, y facilitar la inteligencia de todas las otras memorias que sobre la misma publican los más ilustres analistas y geómetras contemporáneos.
>
> Desprovisto nuestro modestísimo trabajo de todo género de pretensiones y limitado así su campo á servir de introducción al estudio de las obras que tratan de la *Teoría de las Formas* con mayor extensión y profundidad, claro es que no deben en él buscarse proposiciones nuevas ni trascendentales investigaciones, en absoluto vedadas á nuestro pobre ingenio; sinó una exposición elementalísima de las teorías de [...]
>
> [...] concédasenos benévola inteligencia, en gracia del vehementísismo deseo que nos anima de que se generalicen los conocimientos matemáticos en nuestra nación mucho más de los que están en la actualidad.

Juan Jacobo Durán y Loriga 1889.

En esta fecha era capitán del Artillería, luego dejó el Ejército y fue profesor. Tuvo una participación importante, con relaciones internacionales, en el ámbito de la matemática elemental, la que era cultivaba por el profesorado de varios niveles y participación efectiva en las revistas matemáticas dedicadas a este colectivo. Escribió y publicó, también en 1889, un libro de *Teoría elemental de las formas algebraicas* [118][103] muy parecido al de Octavio de Toledo y más explícito si cabe en su único objetivo de ayudar a los estudiantes a aprender la materia, tal como lo expresa en el prólogo:

> La práctica de la preparación para el ingreso en la Escuela General de Ingenieros y Arquitectos nos ha puesto de manifiesto la necesidad de un tratado elemental de la teoría de las formas algebraicas. Las obras que se ocupan de esta importante teoría, aparte de las que por la forma de exposición no son propias para la enseñanza,

[102] El autor recomienda como libros de álgebra elemental en los que encontrar los conocimientos necesarios para la teoría de las formas el propio de Rubini traducido también por Márquez, los textos franceses de H. Laurent, en su cuarta edición de 1887, y el de Ch. Briot traducido y completado en 1880 por C. Sebastián y B. Portuondo; así como el *Álgebra* de los militares Manuel Benítez y Parodi e Ignacio Salinas y Angulo, reeditado y muy difundido en España para uso en la enseñanza militar menos técnica.

[103] La obra lleva impresa esta dedicatoria: "A Mr. A. G. Greenhill, Mayor de la Real Artillería Inglesa, Miembro de la Real Sociedad de Londres, etc., etc. Homenaje al ilustre artillero y sabio matemático, saludo cariñoso al amigo. [Firmado] Juan J. Durán". El ejemplar consultado, de la Biblioteca García Galdeano de la Universidad de Zaragoza, tiene esta otra dedicatoria manuscrita: "Al S^{r} D^{n} Zoel G. de Galdeano. En testimonio de consideración. Coruña Sbr 28/91. [Firma y rúbrica] Juan J. Durán Loriga".

> tratan el asunto con mucha más extensión de la que se exige en el programa de la citada Escuela. El alumno tropieza con el grave inconveniente de tener que estudiar extractando y á ello se debe el que se le presente en general difícil esta parte de su examen de ingreso.
>
> En este tratado que tenemos la honra de ofrecer al público se encierra todo lo que el programa pide y dentro de los límites que hemos juzgado convenientes para que el estudio no sea deficiente. Si responde al buen deseo que nos ha impulsado á escribirlo, quedará sobradamente recompensada nuestra tarea.

El alcance de estas obras y la duración de su vigencia clarifica que el progreso en España de estos estudios, después de un esfuerzo introductorio inicial quedó estancado, no se pasó del nivel elemental que significa la asimilación del libro de Rubini.

Capítulo 5

Métodos algebraicos lineales en España: 1901-1950

El adelanto en el conocimiento y uso de los métodos lineales en la matemática española durante la primera mitad del siglo XX fue escaso, a la espera de que poco después de 1950 se incorporara al fin a la matemática española, a través de los planes de estudio de la licenciatura, el álgebra lineal entendida al modo axiomático posterior al rompedor y emblemático libro de van der Waerden.

Vimos en el capítulo anterior como el tratamiento de los métodos lineales en la matemática española del siglo XIX se adentraba con cierta inercia en los primeros años del siglo XX a través de los libros de texto universitarios. Así sucedió hasta aproximadamente 1915, cuando se produjo una sensible renovación de la exposición docente y de los libros de texto referidos a los métodos lineales. Pero, una vez más, la evolución positiva de este aspecto del análisis algebraico español se estabilizó y duró demasiado sin incorporar nuevos progresos. Este estadio final de los método lineales en el análisis algebraico español ocupará la segunda sección de este capítulo, que es una continuación natural del anterior. Antes, intercalamos una primera sección destinada a examinar cómo se utilizaron la ecuación secular (valores propios, en versión simétrica o no) y los divisores elementales (factores invariantes) en la matemática española hasta 1920. El resultado es pobre, no se encuentra ningún estudio puramente algebraico del asunto, pero sí usos de la ecuación secular en geometría analítica y en ecuaciones diferenciales. De los divisores elementales, tan sólo se aprecian menciones muy escuetas a su existencia. Tampoco las publicaciones periódicas que continuaron desde el siglo anterior ni las que aparecen nuevas —las actas de los congresos de la AEPPC a partir de 1908 y la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, 1911-17— añaden trabajos que permitan apreciar un adelanto en el conocimiento de estas materias.

Algo mejoran las cosas a partir de 1920, lo veremos en la sección tercera, pero de manera aislada y con poca continuidad. Tras la Guerra Civil, la revista escolar de la RSME *Matemática Elemental* incluye artículos en los que matemáticos jóvenes van difundiendo, a manera de lecciones, temas de la nueva álgebra axiomática y abstracta, con destino preferente los profesores de bachillerato. Por entonces, la expresión "álgebra lineal" aparece como nombre para los métodos algebraicos lineales que se explicaban en la asignatura de análisis matemático de primer curso de la licenciatura, pero sin más avances llegaremos al final de nuestro periodo de estudio. La plena fusión de la enseñanza universitaria del álgebra y la geometría tendría que esperar una década más.

5.1 La ecuación secular y los divisores elementales hasta 1920

La ecuación secular es un producto de la matemática del siglo XVIII, surgida del estudio de las curvas y superficies cuadráticas y en la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. En el siglo siguiente se produjo su estudio separado, en el marco de las matrices, como "método algebraico" susceptible de diversas aplicaciones en geometría y análisis, incluyendo la teoría de números. Sin salir del siglo, un poco más tarde, la ecuación secular se incorporó a las investigaciones sobre la clasificación de las sustituciones lineales, tema en el que aparecieron los factores invariantes y los divisores elementales. La primera sección de este capítulo se dedica a detectar, a lo largo de las dos primeras décadas del siglo XX, la presencia de estos elementos en la producción matemática española.

Como no hay presencia en este país y periodo de un estudio sistemático algebraico de estos temas, nos limitaremos a explicar cómo se utilizan en obras de geometría y análisis o se habla de ellos en notas o comentarios de carácter complementario a los temas que se tratan.

Empezaremos por la geometría analítica, considerando los libros de texto de Santiago Mundi y Giró[1] (1842-1915) y Miguel Vegas Puebla-Collado[2] (1856-1943), de los que J.J. Escribano ha dado en 2000 una completa descripción general en su tesis doctoral [130]. Para ver el tratamiento de la ecuación secular en los libros de ecuaciones diferenciales nos limitaremos a examinar el de García de Galdeano. Finalmente, expondremos las breves menciones encontradas a los divisores elementales en el propio Galdeano, en Rey Pastor

[1]Catedrático de Geometría Analítica de la Universidad de Barcelona (1881-1912), autor de numerosos artículos y libros. Veáse [130].

[2]Miguel Vegas, Licenciado y Doctor por la Universidad de Madrid. Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad de Zaragoza (1889-1891), Catedrático de Geometría Analítica en la Universidad de Madrid (1891-1935). Académico de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Veáse [347].

y en Olegario Fernández Baños.

5.1.1 La ecuación secular en la geometría analítica

Las obras que vamos a considerar aparecieron en la última década del siglo XIX, pero tuvieron vigencia durante el primer tercio del siglo XX. Una característica de los libros de texto de esta época es que tratan primero del plano y luego del espacio, con una ordenación similar del índice de contenidos, como si se escribiera la geometría dos veces. Así lo hacen Mundi y Vegas, que utilizan determinantes en ciertos cálculos, en particular los asociados a sistemas lineales, pero no las matrices.

La ecuación secular surge en geometría analítica cuando se calculan los ejes de las cuádricas, no tanto en las cónicas, pues la mayor facilidad de cálculo en esta dimensión baja hace que sea menos necesario estructurar un método general. Tanto Mundi como Vegas ofrecen un tratamiento del asunto algo diferente en cónicas y en cuádricas, lo que esconde en cierto modo la existencia de un procedimiento general independiente de la dimensión. Vamos a verlo.

S. Mundi, 1893

Como explica Escribano en su tesis doctoral [130][3], el texto de geometría analítica de Mundi tuvo tres ediciones, en 1883, 1893 y 1904, más reediciones posteriores a iniciativa de sus herederos. El esquema de la obra parte del *Programa razonado de Geometría analítica* que presentó a las oposiciones a cátedra en 1880 y Escribano da cuenta de las variaciones que la obra tuvo en las ediciones antes indicadas. Para el tema que nos ocupa la edición relevante es la central de 1893, pues en ella el tratamiento de los diámetros y ejes está actualizado con el uso de los puntos del infinito y la polaridad. Así, en la primera edición un diámetro era el lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas, mientras que en la segunda se define como la recta o plano "polar de un punto situado en el infinito", aunque sin usar sistemáticamente coordenadas homogéneas[4]; de este modo, la propiedad usada como definición en 1883 es una simple consecuencia de la nueva definición y de las leyes de la polaridad, tomando el haz de cuerdas paralelas con

[3] Véase también [131].

[4] El dominio adquirido por Mundi de la geometría proyectiva se puso de manifiesto en su obra innovadora *Apuntes de geometría de la posición* [267] de 1884.

punto de infinito el polo del diámetro, siendo éste el conjugado armónico del punto medio de la cuerda.

Lecciones de geometría analítica, 1893 [268]

Esta obra, de 640 páginas, está ajustada a lo que es un programa realista para un curso anual. En ella Mundi expone geometría euclídea apoyada en puntos del infinito. Consideremos primero el plano, que ocupa la primera mitad del libro después de unas lecciones sobre el "análisis determinado" según Descartes. Mundi escribe la ecuación general de una cónica en la forma

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Para determinar los diámetros considera una dirección $y = mx$ de cuerdas paralelas y su correspondiente diámetro, que tiene ecuación

$$Ax + By + D + m(Bx + Cy + E) = 0.$$

El coeficiente angular de esta recta es $m' = -\frac{A+Bm}{B+Cm}$, de modo que un eje —diámetro perpendicular a su sistema conjugado de cuerdas, llamadas "principales"— vendrá dado por la condición $mm' = -1$, que se traduce en la ecuación con raíces reales

$$Bm^2 + (A - C)m - B = 0.$$

Las raíces de esta ecuación dan las direcciones de los ejes, a falta de la discusión de casos posibles según los valores de los coeficientes. Esta ecuación, a la que Mundi no da nombre, correspondiente a la ecuación secular mediante una transformación que luego veremos. Antes hemos de considerar el cálculo de los ejes en las cuádricas.

Mundi escribe la ecuación general de una "superficie de segundo orden" en el espacio en la forma

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Como la situación es más compleja que en el plano se ve obligado a introducir más terminología que defina los diferentes elementos geométricos que se presentan:

> *Plano principal* es todo plano diametral [polar de un punto situado en el infinito] perpendicular a la dirección de sus cuerdas conjugadas. *Cuerda principal* es toda cuerda conjugada á un plano principal. *Eje* es la intersección de dos planos principales. [...] *Vértice* es el punto de intersección de un eje con la superficie. [268, p. 465]

Para determinar los planos diametrales considera una dirección de cuerdas paralelas $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ y su correspondiente plano diametral, que tiene ecuación

$$(Al + B''m + B'n)x + (B''l + A'm + Bn)y + (B'l + Bm + A''n)z = 0.$$

La condición de perpendicularidad es ahora más compleja:

$$\frac{Al + B''m + B'n}{l} = \frac{B''l + A'm + Bn}{m} = \frac{B'l + Bm + A''n}{n}.$$

Denotando s el valor común de estas razones, la condición múltiple anterior se expresa mediante un sistema homogéneo en las variables l, m, n, cuya condición de compatibilidad es la anulación del determinante

$$\begin{vmatrix} A - s & B'' & B' \\ B'' & A' - s & B \\ B' & B & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Esta ecuación en s, dice Mundi, "acostumbra á llamarse *ecuación característica*", y es la que venimos llamando ecuación secular según la tradición originada en las ecuaciones diferenciales de los astrónomos. Cada raíz s_i, $i = 1, 2, 3$, determina valores l_i, m_i, n_i salvo proporcionalidad y la ecuación de los planos principales queda en la forma

$$s_i(l_i x + m_i y + n_i z) + Cl_i + C'm_i + C''n_i = 0.$$

Mundi demuestra que en la ecuación "las tres raíces son reales" y que "no pueden ser nulas a la vez", hechos que en la ecuación que usó para cónicas en el plano eran obvios. Además, normaliza los parámetros de la dirección añadiendo la condición $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, es decir, suponiendo que los parámetros son los cosenos directores. De este modo quedan determinados los diversos elementos principales, a falta de la discusión de casos posibles según los valores de los coeficientes.

Hecha la descripción de los dos procedimientos seguidos por el autor, en el plano y en el espacio, para determinar los elementos principales de la cónica/cuádrica general, podemos observar que tal modo de proceder oculta lo que Lagrange llamó, como vimos en la primera parte de esta memoria, el "método algebraico", es decir, la coincidencia de método de cálculo en diversos problemas que lleva a convertir el método como tal en objeto de estudio.

El método que puede ser general es el usado en el espacio, donde la complejidad obliga a ser más cuidadoso en la exposición. Seguir el mismo método en el plano hubiera significado no reducir la dirección de las cuerdas a un parámetro m sino mantener dos parámetros en la forma $\frac{x}{p} = \frac{y}{q}$, con lo que el diámetro hubiera quedado $(Ap + Bq)x + (Bp + Cq)y = 0$ y la condición de perpendicularidad

$$\frac{Ap + Bq}{p} = \frac{Bp + Cq}{q}.$$

Denotando s el valor común de estas razones, resulta como en el espacio la ecuación secular

$$\begin{vmatrix} A - s & B \\ B & C - s \end{vmatrix} = 0, \quad s^2 - (A + C)s - B^2.$$

Para cada raíz s de esta ecuación, claramente real, en el sistema homogéneo previo se obtienen valores concretos de p, q iguales o proporcionales a $B, s - A$. Como Mundi simplificó el problema a un parámetro $m = \frac{q}{p}$, resulta $m = \frac{s-A}{b}$ y haciendo este cambio de variable en la ecuación de Mundi resulta la ecuación secular anterior.

M. Vegas, 1894

La geometría analítica española se considera representada por la obra de Miguel Vegas, porque fue el catedrático de Geometría Analítica de la Universidad Central desde 1891 hasta su jubilación en 1935. Fue discípulo y colega de E. Torroja, a cuyo lado siempre estuvo hasta la retirada del maestro, ocupando una posición siempre secundaria, como secundaria fue entonces la geometría analítica detrás de la geometría sintética, sostenida por Torroja con el rango de geometría principal. Jubilado Torroja en 1917, la asignatura de geometría del doctorado fue adjudicada a Vegas por afinidad y antigüedad, frente a la opción más modernizadora que hubieran representado Álvarez Ude, que sustituyó a Torroja en la cátedra de Geometría descriptiva o incluso Rey Pastor, aunque éste era, además de más joven, catedrático de Análisis matemático.

El libro de texto de geometría analítica de Vegas[5] tuvo tres ediciones tan distintas que bien pueden considerarse tres libros diferentes, o al menos tres variantes bien diferenciadas de un proyecto docente que las unifica. Corresponden a los años 1894 (596 pp.), 1906/07 (688/702 pp.) y 1922 (663 pp.). Las dos primeras llevan por título *Tratado de Geometría analítica*, mientras que la tercera, así calificada por el autor, se titula en realidad *Elementos de Geometría analítica*. La obra surge con un claro intento de incorporar intensamente la geometría proyectiva, lo que se acentúa notablemente en la segunda edición o versión, en dos volúmenes, y retrocede hacia la posición de la primera obra en la tercera edición de 1922, que a esas alturas del siglo el autor ya declara apta más bien para los alumnos de "ciencias de aplicación". La segunda edición fue un texto preparado para los cursos de la licenciatura y del doctorado como complemento de la geometría proyectiva sintética según el ideario que Torroja consolidó en 1900 a través del nuevo plan de estudios.

La vocación de texto analítico paralelo a la geometría proyectiva sintética se aprecia desde la primera edición en la estructura y lenguaje utilizados en su índice, dividido en tres secciones:

I. Formas de primera categoría
II. Formas planas
III. Formas en el espacio

Esta orientación queda también declarada por autor en el prólogo:

> Siendo tres los grupos en que se dividen las formas geométricas, tres han de ser las partes en que se divida la Geometría, correspondientes á cada uno de aquellos grupos.
>
> Pero como al tratar de establecer algébraicamente las relaciones que existen entre los elementos de una radiación, se tropieza con algunas dificultades desde el punto de vista didáctico, de aquí que en vez de adoptar esta lógica división establecida en

[5]Véase un estudio detallado en la tesis de Escribano [130].

> la geometría pura, incluiremos en una misma parte las radiaciones y las formas en el espacio.
>
> Dividiremos pues, la Geometría Analítica en tres secciones que traten: la primera de las formas de primera categoría; la segunda de las formas planas, y la tercera de las formas radiadas y en el espacio. [348, p. 2]

En lo que a la ecuación secular se refiere, basta con examinar la primera edición, pues en las demás no se modifica la formulación de esta cuestión.

Tratado de geometría analítica, 1894 [348]

La exposición realizada por Vegas de la obtención de los elementos principales de las curvas y superficies de segundo orden es igual a la que hemos visto en Mundi. La diferencia estriba, además de las letras utilizadas en las ecuaciones genéricas, en que Vegas utiliza coordenadas homogéneas, dejando más claro el papel de los puntos del infinito. En el plano no encuentra la ecuación secular, sino la correspondiente al parámetro m que da la pendiente de las curvas y en el capítulo VI: *Planos principales, ejes, vértices y normales*, referido a las superficies del espacio, la ecuación secular toma la forma

$$\begin{vmatrix} A-S & H & G \\ H & B-S & F \\ G & F & C-S \end{vmatrix} = 0, \quad [348, p.447]$$

donde la variable S está ahora denotada en mayúscula. La ecuación anterior está en correspondencia con la expresión usada para la ecuación general

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 + 2Fyz + 2Gxz + 2Hxy + 2Lxt + 2Myt + 2Nzt = 0$$

[348, p. 374] , en la que t es la coordenada homogénea. Igual que en Mundi, la notación está adaptada a un caso aislado y no a la consideración de un método que sirve en diferentes dimensiones. Por otra parte, ambos se refieren a la ecuación general en la forma abreviada $f(x, y, z, t) = 0$, utilizando la notación tradicional de las derivadas parciales f_x, etc., cuando conviene acortar las expresiones.

Un aspecto en el que Vegas supera a Mundi es en la exposición de la "transformación homográfica", que para ambos es un tema que se deja para el final de la exposición, ya sea en el plano o en el espacio, como si fuera un asunto difícil y no necesario para el estudio de las formas geométricas vistas con anterioridad. Al no usar coordenadas homogéneas, Mundi expresa la transformación en el plano de la forma

$$x = \frac{a'x_1 + b'y_1 + c'}{ax_1 + by_1 + c}, \quad x = \frac{a''x_1 + b''y_1 + c''}{ax_1 + by_1 + c}.$$

Con esta expresión todavía realiza ciertos desarrollos, pero al llegar al espacio, con una variable más, esta presentación es poco manejable y Mundi realiza con ella un recorrido muy corto al final de su libro. Por el contrario, Vegas utiliza coordenadas homogéneas, lo que le permite escribir las ecuaciones de la transformación en el plano[6] como Mundi pero en forma proporcional usando la variable homogénea z, es decir,

$$\frac{x'}{a_1x + b_1y + c_1z} = \frac{y'}{a_2x + b_2y + c_2z} = \frac{z'}{a_3x + b_3y + c_3z}.$$

Hecho esto, llamando "$\frac{1}{K}$ al valor común de dichas relaciones", obtiene la expresión de la transformación $a_ix + b_iy + c_iz = Kx'$, con $i = 1, 2, 3$, que se consolidaría con el tiempo. Al estudiar en este formato sintáctico los puntos dobles de la transformación surge de modo natural la ecuación secular, ahora sin la simetría de la matriz,

$$\begin{vmatrix} a_1 - \rho & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \rho & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Vegas se limita a considerar la raíces de esta ecuación y llegar más lejos en el uso de esta herramienta algebraica para el estudio de las homografías. En cuanto a la determinación de tales transformaciones se limita a decir:

> Dos formas planas homográficas quedan determinadas, cuando se conocen cuatro pares de puntos ó de rectas correspondientes: ó en otros términos, cuando se conoce un cuadrivértices en la una, y su homólogo en la otra; ó bien un cuadrilátero y su homólogo. [348, p. 259]

En el correspondiente capítulo del espacio (capítulo II: *Formas homográficas en el espacio*) repite la exposición con una variable más y concluye que

[6]Sección II, libro III: *Estudio de algunas curvas particulares y formas planas en general*, capítulo II: *Formas planas homográficas.*

> Dos formas homográficas quedan determinadas por cinco pares de puntos ó de planos correspondientes". [348, p. 534]

Aunque repite el tratamiento de este asunto en la segunda edición, saca algo más de partido a la ecuación secular, por ejemplo para demostrar que

> Si dos figuras planas homográficas tienen dobles los vértices de un cuadrivértice plano completo ó los lados de un cuadrilátero plano completo, tiene dobles todos sus elementos. [349, p. 552]

5.1.2 La ecuación secular en el análisis de García de Galdeano, 1906

Para conocer el uso que se hacía de la ecuación secular en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias es suficiente con fijarnos en el tratado de análisis que escribió García de Galdeano entre 1904 y 1906 bajo el título global de *Nueva enciclopedia matemática*, un ambicioso proyecto en numerosos volúmenes. En 1906 interrumpió el proyecto por falta de éxito editorial, seguido lo cual publicó en 1907 una obra titulada *Exposición sumaria de las teoría matemáticas* [104], en la que daba cuenta de los muchos temas que faltaban por exponer porque era necesario introducirlos en la matemática española. En el prólogo de la *Exposición sumaria* explica de este modo su proyecto fallido:

> Hemos publicado seis tomos de la Nueva enciclopedia matemática, á saber: 4.º *Cálculo diferencial*, 5.º *Principios generales de la teoría de las funciones*, 6.º *Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas*, 7º *Cálculo integral*, 8.º *Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras en el espacio*, 9.º *Teoría de las ecuaciones diferenciales*, que eran los de más perentoria necesidad para nuestra deficientísima enseñanza, con el propósito de publicar inmediatamente los tomos anunciados, ya dispuestos para imprimirse, que son: 1.º *Resumen y Complemento de la teoría de los números*, 2.º *Teoría de los grupos de sustituciones*, 3.º *Aplicación de la teoría de los grupos á la resolución de las ecuaciones algebraicas*, pues tanto los tomos publicados, como éstos por publicar, y que acaso no se publiquen, son hoy indispensables en la enseñanza, y forman, no el todo, sino una parte de lo que se enseña en las universidades extranjeras; y además sería preciso haber continuado la Nueva enciclopedia con otros tomos, que completasen el conocimiento de teorías, corrientes en Alemania, Estados Unidos, Francia, Inglaterra, Italia, etc. [104, p. 3]

Veamos pues el asunto que nos ocupa, que estará en el tomo noveno, una gruesa obra de 840 páginas, dividida en doce capítulos, en cuyo índice el autor titula *Integración clásica de las ecuaciones* para indicar el carácter práctico de la misma, enfocado en la integración de los diferentes tipos de ecuaciones.

Teoría de las ecuaciones diferenciales [103]

Los métodos algebraicos empleados en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes se presentan de forma implícita en su exposición, tal como se puede apreciar a continuación:

Nos fijamos en el capítulo II: *Ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden*, en el que Galdeano aborda la integración de sistemas reducidos a la "forma normal o canónica"

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x.y, \ldots), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(t, x.y, \ldots), \ldots$$

Tras otras cuestiones, aborda el caso lineal explicando el "método de d'Alembert" cuando los coeficientes son constantes. Siguiendo su estilo siempre didáctico, propone primero resolver dos ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} + Px + Qy = V, \quad \frac{dy}{dt} + P_1x + Q_1y = V_1,$$

donde P, Q, P_1, Q_1 son constantes y V, V_1 funciones de t, luego otro de tres, para finalmente formular el método en general, que aplica a varios ejemplos, todos de dos ecuaciones.

Antes de dar el método general, en la fase didáctica introductoria con dos ecuaciones, ilustra el procedimiento con el ejemplo [103, p. 179] siguiente:

$$\frac{dx}{dt} + 4x + 3y = t, \quad \frac{dx}{dt} + 2x + 5y = e^t.$$

Restando de la primera ecuación la segunda multiplicada por una constante λ y sustituyendo x por la nueva variable $u = x - \lambda y$ obtiene

$$\frac{du}{dt} + (4 - 2\lambda)u + (3 - \lambda - 2\lambda^2)y = t - \lambda e^t,$$

una ecuación que ya sabe resolver si no aparece la variable y, es decir, para los valores de λ que cumplan $3 - \lambda - 2\lambda^2 = 0$, que son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Para estos valores obtiene por integración[7] funciones u_1, u_2, con las que forma el sistema $u_i = x - \lambda_i y$, $i = 1,2$ que le permite calcular las soluciones x, y.

El método aplicado en este ejemplo con dos ecuaciones es un poco más directo que el que luego dará como general. La ecuación de segundo grado anterior no es la ecuación secular

$$\begin{vmatrix} 4-r & 3 \\ 2 & 5-r \end{vmatrix} = r^2 + 9r + 14$$

que el autor va a proponer en el caso general, pero se reduce a ella por un cambio de variable lineal $r = 4 - 2\lambda$.

La explicación que da para el caso de tres ecuaciones, funciones x, y, z de la variable t y cambio de variable $u = x + \theta y + \lambda z$, ya muestra mejor lo que será el método general, pero el autor no desarrolla en detalle ejemplos concretos de tres ecuaciones.

Finalmente, presenta el caso general con el sistema escrito así[8]:

$$\left.\begin{array}{rl} a_1 x + \frac{dx}{dt} + b_1 y + c_1 z + \cdots = & V_1 \\ a_2 x + b_2 y + \frac{dy}{dt} + c_2 z + \cdots = & V_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \frac{dz}{dt} + \cdots = & V_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \end{array}\right\}$$

Para resolverlo, Galdeano expone la siguiente estrategia, que explica de un modo no demasiado claro que intentamos mejorar:

Sumando a la primera de estas ecuaciones las siguientes multiplicadas respectivamente por los parámetros $\lambda, \mu, \dots$ y efectuando luego la sustitución $u = x + \lambda y + \mu z + \dots$, resulta

$$\frac{du}{dt} + (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu + \dots)x + (b_1 + b_2\lambda + b_3\mu + \dots)y + (c_1 + c_2\lambda + c_3\mu + \dots)z + \dots = V,$$

siendo $V = V_1 + V_2\lambda + V_3\mu \dots$ Esta ecuación se transforma en una de integración conocida

$$\frac{du}{dt} + (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu + \dots)u = V$$

[7]Da la solución de la ecuación $\frac{du}{dt} + ax = f(t)$ en la forma $u = e^{-at}(c + \int f(t)e^{at}dt)$.

[8]En una notación vectorial y matricial moderna el sistema se escribiría de la forma $\frac{dx}{dt} + Ax = V$, siendo x, V vectores columna y A una matriz cuadrada.

siempre que se cumplan las condiciones de proporcionalidad

$$a_1 + \lambda a_2 + \dots = \frac{b_1 + b_2\lambda + \dots}{\lambda} = \frac{c_1 + c_2\lambda + \dots}{\mu} = \dots = r.$$

Esta proporcionalidad es un sistema de ecuaciones lineales en $\lambda, \mu, \dots$ que será compatible cuando se verifique la ecuación

$$R = \begin{vmatrix} a_1 - r & a_2 & & \vdots \\ b_1 & b_2 - r & & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 - r & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Esta ecuación, a la que Galdeano no asigna nombre, es la ecuación secular correspondiente a este problema. Es similar a la que hemos visto para calcular los ejes de las curvas y superficies de segundo orden, pero ahora sin la condición de simetría en los coeficientes[9].

A partir de la ecuación secular, el proceso de resolución del sistema diferencial propuesto sigue así: Para cada raíz r_i de la ecuación polinómica $R = 0$, se obtienen a partir del sistema lineal valores numéricos $\lambda_i, \mu_i, \dots$ de los parámetros y con ellos una función $u_i = x + \lambda_i y + \mu_i z + \dots$ que verifica una ecuación diferencial que se sabe integrar. Calculadas todas la funciones u_i, sus expresiones en función de las $x, y, z, \dots$ se juntan en un sistema a partir del cual determinar, en la medida de lo posible, las funciones $x, y, z, \dots$ solución del sistema diferencial lineal planteado inicialmente.

García de Galdeano no entra a discutir las diferentes posibilidades que pueden presentar con la ecuación y los sistemas lineales que aparecen en el procedimiento, es decir, no aborda el estudio independiente del "método algebraico" aplicable en este proceso. Por eso también todos los ejemplos que ofrece son de dos ecuaciones, caso simple en el que las dificultades algebraicas quedan minimizadas. En algunos de los ejemplos no sigue exactamente el método general propuesto, pero sí lo hace en el primero de ellos, que es el siguiente:

$$\frac{dx}{dt} + 5x - 2y = e^t, \quad \frac{dy}{dt} - x + 6y = e^{2t}.$$

[9]Los coeficientes de las funciones $x, y, z, \dots$ aparecen en forma transpuesta, pero esto no afecta al determinante.

Primero obtiene

$$\begin{vmatrix} 5-r & -1 \\ -2 & 6-r \end{vmatrix} = 0, \quad r^2 - 11r + 28 = 0, \quad r_1 = 4, \quad r_2 = 7.$$

Ya que es $r = 5 - \lambda = \frac{-2+6\lambda}{\lambda}$, resulta $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Tendremos pues $u_1 = x + y$, $u_2 = x - 2y$, de donde resultarán las soluciones $x = \frac{2u_1+u_2}{3}$, $y = \frac{u_1-u_2}{3}$, donde las funciones u_i se obtienen integrando las ecuaciones diferenciales

$$\frac{du_1}{dt} + 4u_1 = e^t + e^{2t}, \quad \frac{du_2}{dt} + 7u_2 = e^t - 2e^{2t}.$$

Después del método de d'Alembert, García de Galdeano expone el "método de Lagrange de la variación de las constantes", que explica con un sistema de tres ecuaciones como los anteriores de tres ecuaciones. En la primer fase del método se buscan soluciones de la forma $e^{-\rho t}$ para el sistema homogéneo, encontrando aquéllas en las que ρ es solución de la ecuación secular; luego se forma una combinación lineal de las mismas a la que aplica el método de variación de las constantes.

5.1.3 Someras menciones a los divisores elementales.

En estas primeras décadas del siglo XX son muy pocas las referencias que hemos encontrado a los divisores elementales. Mostraremos tres en su orden cronológico y también en un orden creciente de comprensión del tema. La primera es una simple mención realizada por García de Galdeano en 1907, en la segunda, de 1917, Rey Pastor expone no más que la definición y en al tercera, de 1918, los divisores elementales de Weierstrass aparecen en investigaciones geométricas de Olegario Fernández Baños durante una estancia con F. Enriques en Bolonia becado por la JAE.

Galdeano, 1907.

Ya nos hemos referido antes al libro de 1907 *Exposición sumaria de las teorías matemáticas* [104] de García de Galdeano, en el que el autor dio un rápido repaso a "lo que está por hacer entre nosotros, lo que falta a nuestros planes de enseñanza", presentando su contenido de este modo:

> Terminando nuestras publicaciones, acerca de la enseñanza, con la *Exposición sumaria de las teorías matemáticas*, que es un índice de las materias hoy estudiadas en las universidades extranjeras, [...] [104, p. 6]

La *Exposición* está dividida en dos grandes capítulos, uno dedicado a la matemática clásica (11 pp.) y el otro a la moderna (190 pp.). En éste último, encontramos una sección dedicada a las Transformaciones lineales, con una subsección sobre invariantes, en la que se lee:

> También los divisores elementales, invariantes racionales de un haz de formas, sirven de criterio para la transformación de éstos. Así, para que dos haces se transformen entre sí es necesario que, *los determinantes admitan los mismos divisores elementales*. Weierstrass y Kronecker fueron los primeros que se dedicaron á estas investigaciones. [104, p. 195]

Esto es todo, una breve mención a los divisores elementales como uno de los temas dignos de estudio que todavía no habían sido abordados por los matemáticos españoles.

Desde el análisis algebraico de Rey Pastor, 1917

De la obra *Elementos de Análisis Algebraico* [286], libro de texto para la asignatura Análisis matemático 1º publicado por Rey Pastor en 1917, nos ocuparemos con más detalle en la sección siguiente, de momento adelantamos un breve fragmento dedicado a dar a conocer los divisores elementales. Al final de los capítulos de este libro el autor colocaba un apartado titulado "Notas" en el que incluía observaciones bibliográficas, complementos, noticia de temas más avanzados, notas históricas, etc. El fragmento que vamos a comentar está en la nota IV del capítulo VII dedicado a los "Algoritmos algebraicos", título que incluye incluye, referido al álgebra sobre los números los números racionales[10], la divisibilidad de polinomios ("funciones enteras") de varias variables, los determinantes y los sistemas de ecuaciones lineales.

Rey Pastor alude a los divisores elementales en su aspecto algorítmico, como datos asociados a ciertos determinantes "cuyos elementos son funciones enteras de una variable". Como no es largo, mejor que resumirlo será transcribirlo en su contenido íntegro:

[10]Aunque extenderá todo lo dicho a los reales y complejos porque comparten con los racionales las propiedades básicas de las operaciones aritméticas.

> **IV. Teoría de divisores elementales.-** En Geometría analítica se presentan frecuentemente determinantes cuyos elementos son funciones enteras de una variable x. Designemos por D_h el m.c.d de todos los polinomios en que se desarrollan los menores de orden h. Evidentemente es D_h divisible por D_{h-1}; el cociente suele designarse por E_h. Estas funciones E_h se llaman *factores invariantes* de la matriz ó *divisores compuestos.*
> Multiplicando las identidades
>
> $$D_1 \equiv E_1, \;\; D_2 \equiv D_1 \cdot E_2, \;\; D_3 \equiv D_2 \cdot E_3, \cdots, D_h \equiv D_{h-1} \cdot Eh,$$
>
> resulta
>
> $$D_h \equiv E_1 E_2 E_3 \cdots E_h.$$
>
> Se demuestra fácilmente que cada uno de estos factores E_i es divisible por el anterior E_{i-1}; por tanto, cad uno contiene todos los factores primos de los anteriores, con exponentes iguales ó mayores. Si el factor $x - \alpha$ figura en E_h con exponente ν, la expresión $(x - \alpha)^\nu$ se llama *divisor elemental del determinante.*
>
> Paralelamente á la teoría de estos divisores elementales *algebraicos*, puede desarrollarse la teoría de los divisores elementales *numéricos*, que se definen de igual modo, partiendo de un determinante cuyos elementos son números enteros, y aplicando la divisibilidad numérica en vez de la algebraica.
>
> La índole de esta obra no consiente desarrollar ni una ni otra de estas dos interesantes teorías. [286, p. 306]

Los divisores elementales se presentan frecuentemente, dice el autor, en geometría analítica, pero no se refiere explícitamente a los problemas concretos en los que surgen. Al mencionar esta procedencia, Rey Pastor pensaría en las ecuaciones seculares que ya hemos visto al ocuparnos del libro de Vegas, las más generales (no necesariamente simétricas) asociadas a las homografías o colineaciones; pero también aparecen al tratar con haces de homografías $A + \lambda B$ (o de cónicas o cuádricas) en cuyo caso los determinantes tiene polinomios de primer grado en todas las posiciones, no sólo en la diagonal principal.

En el momento de empezar la docencia de su cátedra en Madrid, Rey Pastor era ya bien consciente de que diversas teorías algebraicas surgían como elaboración autónoma de lo que tenían en común cálculos realizados en diversos contextos de geometría o análisis, el proceso de aislar conocimiento que Lagrange había expresado como el "método algebraico". Así se puso de manifiesto en una artículo sobre formas cuadráticas [278] que publicó Rey Pastor en la Academia de Ciencias en 1911, el año en que ganó su primera cátedra. En él argumenta que en cursos de análisis y de geometría, allí donde aparecen polinomios de segundo grado que han de tener signo constante, "se repiten casi idénticas consideraciones, que aparecen allí como fuera de su verdadero lugar", de modo que el alumno "separa su atención del objeto principal á que éstas se aplican". Por ello, dice:

> Reportaría, á nuestro juicio, una gran economía de tiempo y de trabajo, el obtener dichos caracteres analíticos en su verdadero lugar, esto es, en el Álgebra, del mismo modo que se hace en el caso de una variable; estando así las conclusiones obtenidas, en disposición de ser aplicadas cuantas veces sea preciso, en toda cuestión que lo requiera, sin prolijas disgresiones. [278, p. 549]

En este artículo demuestra de modo elemental un teorema sobre determinantes que es un caso particular de otro dado por Sylvester[11] y luego lo aplica a las condiciones para que: a) una forma cuadrática real sea definida, b) una ecuación represente una cuádrica imaginaria, c) máximos y mínimos de funciones y d), realidad de las raíces de una ecuación algebraica.

Volviendo a los divisores elementales, hemos visto que en su definición interviene la divisibilidad de polinomios en varias variables, que en principio es un tema bastante más complejo que con sólo una variable y que pudiera parecer excesivo para un primer curso universitario con el nivel existente en España en ese momento. Al estudiar la divisibilidad algebraica, Rey Pastor había indicado:

> Damos en este artículo las nociones estrictamente necesarias para llegar al cálculo del m. c. d. Una exposición más completa tendrá lugar adecuado en nuestro tratado especial de Álgebra. [286, p. 279]

Justo el cálculo del máximo común divisor es lo que se necesita para obtener los divisores elementales de las matrices de polinomios[12]. Es posible que se encuentre en los divisores elementales la justificación de la introducción de la divisiblidad de polinomios en *Elementos*, antes del tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales y después del algoritmo de los determinantes; quizá Rey Pastor tuvo el propósito de exponer determinantes de

[11]Para el que refiere al *Álgebra* de Weber.

[12]Rey Pastor dio un mayor desarrollo a la divisibilidad algebraica al ocuparse de la eliminación en su libro de texto de álgebra de 1924 [284].

polinomios, desistiendo al ver que esta materia se escapaba de los objetivos de curso, en cuyo texto dejó anotada tan sólo una huella inicial de la materia pendiente.

Por otra parte, es digno de ser señalado que Rey Pastor menciona que hay otra teoría paralela de "divisores elementales numéricos" para determinantes "cuyos elementos son números enteros" con su propia divisibilidad[13]. Rey Pastor no trató en *Elementos* de los números enteros, pasó directamente de los naturales (con su divisibilidad) a los racionales. Según Rey Pastor, la divisibilidad de los enteros y la de los polinomios (con coeficientes en un cuerpo de números) tiene cierta similitud pero no son iguales, antes bien, le parece que las diferencias son esenciales. En este punto Rey Pastor está instalado en su tiempo, en el mismo nivel de uso de la abstracción (distintivo de modernidad) que otros autores relevantes que consultó, por ejemplo la obra de Bôcher de 1907 [36], aunque no tardaron en aislarse las leyes formales de la estructura de anillo que con el tiempo dieron lugar el tratamiento unificado de ambas divisibilidades basado en las propiedades formales del algoritmo de Euclides.

Desde la investigación geométrica de Fernández-Baños

Al año siguiente de la publicación de *Elementos* de Rey Pastor, encontramos el trabajo titulado *Contribución al estudio de las redes de homografías que contienen la identidad en E_n. Generalización de un teorema de Weierstrass* (1918) [147] de Olegario Fernández-Baños[14] (1886-1946). Se trata de la segunda parte de la memoria presentada por Fernández-Baños a la JAE al final de su estancia de investigación en Geometría Superior con el profesor Federigo Enriques (1871-1946) en Bolonia.

El trabajo está fechado en Bolonia, el día 15 de diciembre de 1917, y fue publicado en los *Anales de la JAE* en 1918. El objetivo del artículo es generalizar un teorema de Weierstrass sobre haces a cierto tipo de redes, lo que supone un parámetro más. Weierstrass, siguiendo a Kronecker, consideró el problema de determinar las condiciones necesarias y suficientes para que un par de formas bilineales P and Q se transformen en otro par P' and Q' por medio de una transformación lineal no singular. La condición es que los determinantes $\mid pP+qQ\mid$ and $\mid pP'+qQ'\mid$ tengan los mismos divisores elementales [359]. El tratamiento

[13]Estos divisores elementales aparecen al reducir los sistemas lineales de ecuaciones diofánticas, en lenguaje moderno, en la clasificación de los grupos abelianos finitamente engendrados.

[14]Fernández-Baños obtuvo el título de Licenciado en Exactas en la Universidad de Barcelona, y el de doctor en la Universidad de Madrid. Fue uno de los primeros investigadores jóvenes que hizo su tesis doctoral en el Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE. Veáse [255]

de Weierstrass fue completamente algebraico y se aplicaba a transformaciones lineales, aunque él prefería ver las matrices como asociadas a una forma bilineal. La generalización que ocupó a Fernández Baños era extender el resultado a tres transformaciones lineales (I, P, Q), pero siendo una de ellas la identidad. El enfoque de Fernández Baños fue geométrico siguiendo las ideas de Segre, según las cuales "una homografía general queda perfecta y unívocamente determinada por sus *espacios fundamentales*" y sus "invariantes absolutos". Este enfoque ya había sido planteado por Roberto Bonola (1874-1911) para espacios E_2 y E_3, caracterizando en E_2 una red de homografías (I, P, Q) por medio de una curva cúbica C y una involución g, con una versión análoga para E_3. Fernández-Baños extendió los resultados de Bonola [38] a espacios E_n de dimensión finita arbitraria. Su resultado general establece que "la condición necesaria y suficiente para que dos redes de homografías generales en E_n, que contengan la identidad, sean proyectivamente idénticas, es que tengan la misma línea de elementos dobles, y la misma involución en ella, es decir, el mismo par C, g". [147, p. 245]

El autor termina el artículo con estas palabras:

> . . . esperando que los procedimientos que hemos empleado adquieran algún desarrollo en nuestra patria, a fin de aportar algún progreso a la geometría algébrica moderna". [147, p. 249]

Vemos que continúan los esfuerzos aislados por introducir conceptos nuevos, la modernidad de entonces, en la matemática española, entre ellos los métodos lineales avanzados, pero sin mucho éxito. No hubo quien se ocupara de estos temas en el futuro próximo, tampoco Fernández-Baños continuó investigando en ellos, encauzó su investigación hacia la estadística, llegando a ganar por oposición la primera cátedra de Estadística Matemática en la Universidad de Madrid en 1933.

5.2 Lo lineal en el análisis algebraico español del siglo XX

Esta sección es la continuación natural del capítulo anterior. Los métodos algebraicos lineales presentes en la tradición del análisis algebraico español enraizada en Baltzer llegan hasta Luis Octavio de Toledo[15] (1857-1934), que vio como su joven colega Rey Pastor,

[15]Toledo realizó estudios de Licenciatura en Ciencias Exactas y el doctorado en Madrid. Fue nombrado Catedrático de Análisis Matemático 1º y 2º cursos en la Universidad de Zaragoza en 1893, y en la

desde 1915, introdujo unas referencias más modernas, principalmente la obra de A.Capelli [60] y un nuevo estilo de libro de texto más conciso y a la vez más ambicioso, con mayor uso del lenguaje simbólico aunque en menor medida de lo habitual en libros europeos. Comenzaremos describiendo el fragmento que recoge nuestro tema en la obra de Octavio de Toledo de 1914-16 y después el de Rey Pastor de 1917, que son las última obras emblemáticas de este formato. El de Octavio de Toledo casi desapareció, mientras que el de Rey Pastor tuvo larga vigencia debido a que en el país nadie le hizo la competencia y también a que tardaron en aparecer en España obras de “álgebra moderna” escritas por autores españoles, lo que sucedió pasada ya la frontera de 1950 que limita este trabajo.

Terminada la descripción de la obra algebraica lineal de Rey Pastor haremos su comparación con la de Octavio de Toledo y también con la del italiano A. Capelli vista en el capítulo anterior.

5.2.1 L. Octavio de Toledo, 1914-16

Nos vamos a referir a la obra en varios volúmenes escrita por Octavio de Toledo siguiendo, al igual que Marzal, el esquema trazado por Baltzer. Se trata de un conjunto de obras que juntas constituyen un tratado de análisis elemental (el análisis algebraico con el habitual añadido de la trigonometría[16]). Al estar publicados por separado, cada volumen tuvo una vigencia diferente según su valor como libro de texto en diversos centros.

Los volúmenes que contienen el análisis algebraico son los siguientes:

Elementos de aritmética universal

Tomo I: Calculatoria (1ª ed. 1900-1902)[17]

Tomo II: Coordinatoria. Determinantes. Algoritmos ilimitados (1916)

Tratado de álgebra

Tomo I. - Parte elemental (1ª ed. 1905, 2ª 1914)

Tomo II. - Parte superior (sin publicar)

Se estudiará a continuación la parte correspondiente a determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, que se ubican en el tomo II de *Elementos de Aritmética Universal* [111] y

Universidad de Madrid en 1898. Veáse [289].

[16] *Tratado de trigonometría rectilínea y esférica* (1ª ed. 1905, 2ª ed. 1914, 3ª ed. 1916, 4ª ed. 1922, 5ª ed. 1930.

[17] 2ª ed. 1903, 3ª ed. 1909, 4ª ed. 1925.

en el *Tratado de álgebra* [109], respectivamente. Su desglose por capítulos se relaciona a continuación:

Tras ocuparse de la coordinatoria, Toledo da inicio a la exposición de la teoría de los determinantes en siete capítulos (150 páginas). El primer capítulo comienza con las definiciones y la nomenclatura a emplear.

> **335. Matrices: primeras nociones.-** Si consideramos varias series o colecciones de objetos conteniendo todas el mismo número de ellos, y las colocamos formando un cuadro o tabla de manera que se correspondan en líneas horizontales / verticales, los que ocupan el mismo lugar en cada serie o colección, el cuadro así formado recibe el nombre de *matriz* de esos objetos. Así, si consideramos las tres series de cinco objetos (a, b, c, d, e), (f, g, h, i, j), (k, l, m, n, o), formaremos el cuadro
>
> $$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \end{vmatrix}$$
>
> que será la *matriz* de los objetos considerados. Como lo acabamos de hacer, acostúmbrase a encerrar los objetos que forman una matriz entre dos líneas verticales que reciben el nombre de *barras.* [111, p. 131]

Las matrices cuadradas y los determinantes se representan con la misma notación, de modo que para distinguir entre unos y otras hay que recurrir al contexto.

Una de las razones por las que Octavio de Toledo se alarga tanto en las exposiciones sobre determinantes es porque no usa la notación de subíndices y su discurso escrito es en exceso retórico. Como ejemplo de su tono expositivo bastante minucioso y a veces innecesariamente detallista, damos un fragmento del texto.

> Se llama *orden* o *grado* de una matriz cuadrada el número que expresa cuantas series de objetos la constituyen, o, lo que es igual, cuantos objetos forman cada serie; [...] Es evidente que el número total de objetos que contiene una matriz cuadrada es igual al cuadrado del número que expresa su grado; así, la matriz de 4.º grado antes escrita, contiene 42=16 objetos, y, en general, la de orden n contendrá n^2 elementos [111, p. 132]

Considera en el primer capítulo también las matrices asimétricas o disimétricas, simétricas, semisimétricas o hemisimétricas y pseudosimétricas. Al igual que sus predecesores se ocupa de las notaciones empleadas. Finaliza con la noción de matriz menor, llamada para simplificar simplemente "menor", que simboliza entre barras verticales.

En el capítulo II, el autor define los determinantes vía combinatoria y vuelve a hacer referencia a las notaciones. Introduce "algunas reglas prácticas" donde explica gráficamente el cálculo de un determinante de orden dos y tres. A ésta última se refiere como a un procedimiento empírico muy útil del profesor Sarrus. Para los determinantes de cuarto orden incluye una regla "debida al profesor español D. Luis G. Gascó" acompañada de una nota a pie de página: "Esta regla, en unión de otras dos, la publicó D. Luis G. Gascó en el nº 1 del *Archivo de Matemáticas*.-Valencia enero 1896- Pág. 11 y siguientes".

Define también la característica, en estos términos:

> *Se da el nombre de CARACTERÍSTICA de un determinante menor, la potencia de -1 que tiene por exponente la suma de indicadores de las filas y las columnas de la matriz completa que entran en su formación.* [111, p. 158]

Las propiedades de los determinantes se encuentran en el capítulo III. El autor las enuncia como teoremas y corolarios que no demuestra.

Octavio de Toledo expone en el capítulo IV diversos casos sobre posibles desarrollos de un determinante, y en el capítulo siguiente considera la suma, resta, multiplicación, división y potenciación de determinantes. Transcribimos el apartado inicial donde se evidencia la concepción de matriz y determinante que persiste.

> **359. Preliminar.**- Las dificultades que se presentan en el desarrollo de los determinantes, y la frecuencia con que se emplea este algoritmo en multitud de cuestiones de Análisis matemático, ha obligado a investigar reglas o medios de verificar operaciones con los determinantes en su forma matriz, no sólo para evitar esos laboriosos desarrollos, sino también para eludir, en lo posible, las operaciones con los polinomios de muchos términos a que esos desarrollos conducen en general. [111, p. 208]

Acorde con la tendencia, el producto que se define es fila-fila. Aplica el producto columna fila en un ejemplo y añade la siguiente observación,

> NOTA IMPORTANTE.- El producto de dos matrices de orden n que acabamos de obtener tiene por elementos los productos de las columnas de la primera matriz por las filas de la segunda; mas como las matrices dadas no se alteran si se permutan en ellas sus columnas por sus filas conjugadas, realizando esta operación en una u otra, o en las dos matrices, el producto de ambas puede obtenerse formando sus elementos por uno de los cuatro métodos [111, p. 217]

Seguidamente procede a tratar el teorema de Binet-Cauchy, del cual indica que sigue la demostración, salvo variantes de forma, dada en la traducción del libro de Baltzer por Hoüel [195, pp. 36-38]. Como aplicación obtiene la fórmula de Euler y Lagrange, de uso frecuente en Geometría.

Los determinantes especiales son tratados en el capítulo sexto. Considera los recíprocos o adjuntos, simétricos, semisimétricos, Pfaffianos. Para este último además de la traducción francesa del Baltzer recomienda el libro de Pascal [277]. También trata los pseudosimétricos, centrosimétricos, ortosimétricos, circulantes, de Vandermonde, orlados, múltiples y continuantes. Para estos últimos hace referencia al vol. 1 del libro de Muir [266].

El séptimo y último capítulo está dedicado a los determinantes cúbicos. Comienza con la noción de matriz cúbica,

> **377. Matrices cúbicas.**–DEFINICIÓN.–Imaginemos un paralelepípedo rectangular, en el cual las tres aristas que concurren en uno de sus vértices tienen longitudes que representaremos por los números enteros m, n, p, partes iguales a la unidad, respectivamente, y que por los puntos de división de cada una de ellas trazamos planos paralelos al determinado por las otras dos; en los $m \times n \times p$ puntos de intersección

> de estos planos entre sí y con los que limitan el cubo, coloquemos $m \times n \times p$ objetos cualesquiera; la figura así formada la denominaremos *matriz de tercera clase* de los objetos considerados.
>
> En el caso de suponerse $m = n = p$, único que nosotros consideraremos, la matriz se denomina *matriz cúbica de orden n*, pues entonces el paralelepípedo se convierte en un cubo, [...] [111, p. 272]

En el apartado siguiente, define los determinantes cúbicos calculados a partir de una matriz cúbica:

> **378. Determinantes cúbicos.**–Dada una matriz cúbica cualquiera, con elementos numéricos, formemos el producto de sus elementos principales en el orden en que aparecen situados en la diagonal principal; este producto es
>
> $$a_{111}a_{222}\cdots a_{nnn}.$$
>
> Una vez formado este producto, permutemos en sus elementos los segundos y terceros índices, de todos los modos posibles, dejando invariables los primeros, y demos a cada uno de los términos así obtenidos el signo + o el -, según sea par o impar la suma del número de inversiones contenidas en las permutaciones de de estos segundos y terceros índices; el polinomio, suma general de todos los términos así obtenidos, ha recibido el nombre de *determinante* de la matriz cúbica dada, y por abreviación, el de *determinante cúbico*. [111, p. 273]

Para ampliar el estudio de los determinantes cúbicos y su extensión a n dimensiones remite a las obras de Pascal [277], Scott [320] y Lecat [238].

El libro de Octavio de Toledo fue citado por Muir con este comentario:

> Más de un tercio de este volumen (pp. 131-280) está dedicado a los determinantes, y la sección sobre el tema es precedida por otra de medida muy similar tratando con las combinaciones, permutaciones, y temas afines. De los siete capítulos asignados a los determinantes, uno trata de los de tres dimensiones. La conexión del tema general con las ecuaciones lineales no se menciona. [266, Vol. II p. 116]

En efecto, en *Elementos de Aritmética Universal* II, no encontramos mención a los sistemas lineales, hay que ir al *Tratado de álgebra*, libro que citaremos por su segunda y última edición (1914) [109, p. 81-169]. Antes de entrar en el tema que nos ocupa comentaremos la advertencia inicial que hace Octavio de Toledo en referencia al título del libro, el mismo año en que Rey Pastor llegó a Madrid para iniciar su implantación docente de una materia a la que llamaba análisis algebraico.

> Si conservo a este libro el título de Tratado de Álgebra de su primera edición, a pesar de que, por las materias que contiene, tal vez fuera más propio titularlo Análisis algébrica, es porque concedo muy escaso valor a los títulos o nombres que llevan los libros; lo interesante en un libro es la materia en él contenida, su título importa poco, y libros de nombres iguales tienen necesariamente que cambiar su contenido y evolucionar con el transcurso del tiempo. [109, p. v]

Es hora ya de avanzar al tratamiento aplicado por Octavio de Toledo a los sistemas de ecuaciones lineales. Tras una introducción a la materia o capítulo cero, dedica el primer capítulo a las ecuaciones de primer grado con una incógnita y se ocupa de los sistemas lineales en el capítulo siguiente. Explica la solución de los sistemas empleando los procedimientos de sustitución, igualación, reducción. Considera también el método de eliminación de Bézout, el de los coeficientes indeterminados y por último el de eliminación por determinantes donde enuncia la regla de Cramer. Para el estudio de éste último remite a la cuarta edición del libro de Villafañe [353].

A cada uno de ellos dedica en promedio seis páginas, en particular, en referencia al método de los coeficientes indeterminados señala que mejora en cierto modo el de Bézout porque permite sustituir una de las ecuaciones por la ecuación de condición, exceptuando aquellas en las cuales el multiplicador empleado se anule. Octavio de Toledo lo atribuye al matemático francés Gergonne. Para finalizar el capítulo aborda casos especiales que le dan pie para entrar en el tercer capítulo.

Capítulo III. Sistemas de ecuaciones de primer grado: discusión. En el capítulo tercero el autor discute el caso general, mediante la explicación del teorema de Rouché.

> El teorema de Rouché, que en uno de los párrafos siguientes exponemos, resuelve de una manera tan completa y general como satisfactoria el problema que aquí nos planteamos; pero como su demostración suele presentar a los lectores algunas dificultades de inteligencia, nos ha parecido conveniente hacer preceder a su exposición el estudio de un caso particular que, sobre tener una importancia grandísima, pre-

> para y facilita el estudio del interesante teorema del distinguido profesor francés antes citado. [109, p. 147]

El autor aborda primero el caso de un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, y posteriormente el caso general. Luego, considera los casos especiales: sistemas de $n+1$ ecuaciones con n incógnitas, y sistemas homogéneos. Finaliza el libro 1º con dos capítulos, uno dedicado a los problemas que se resuelven mediante ecuaciones lineales y otro al estudio de desigualdades de primer grado.

En general, se puede afirmar que el estilo de Octavio de Toledo es bastante descriptivo. Mantiene la línea expositiva de Baltzer-Marzal y Villafañe, por tanto su exposición realizada en el siglo XX sigue los métodos expuestos desde mediados del siglo XIX.

5.2.2 Julio Rey Pastor, 1917

Las cuestiones que ahora nos ocupan las enseñó Julio Rey Pastor[18] (1888-1962) por primera vez en Madrid el curso 1914-15. Sus lecciones de este curso y el siguiente (Análisis Matemático 1º y 2º respectivamente) quedaron recogidas en unos apuntes que se titulan *Resumen de las lecciones de análisis matemático (primer curso)* [280], y *Resumen de las lecciones de análisis matemático (segundo curso)* [282]. En un artículo reciente del grupo de trabajo en el que se ha realizado esta memoria [135] ha quedado justificado que los *Resúmenes* se ubican en la corriente europea del análisis algebraico. A partir de esta experiencia docente, repetida en cursos posteriores, elaboró varios libros de texto, el primero de los cuales fue *Elementos de Análisis Algebraico* [286], aparecido en 1917, que es una reelaboración mejorada y ampliada del primer *Resumen* y del primer capítulo del segundo. El contenido algebraico que nos ocupa está en el primero de ellos. *Elementos* tuvo dos ediciones renovadas[19] y hasta diez reimpresiones en vida del autor, más otras posteriores a cargo de sus herederos. Los métodos algebraicos lineales que vamos a reseñar quedaron establecidos, salvo pequeños cambios, en la primera edición.

La introducción que el autor escribió para la primera edición de *Elementos* empieza con este párrafo:

[18] Rey Pastor realizó estudios de Licenciatura en Ciencias Exactas en la Universidad de Zaragoza, y de doctorado en la Universidad de Madrid. Disfrutó de dos estancias en Alemania donde entra en contacto con destacados matemáticos. Para su biografía anterior a 1920, veáse [133] y también [168]. Para su biografía completa véase [298, 260]

[19] Ediciones: 2ª 1922, 3ª 1930.

> Agotada rápidamente la corta tirada que hicimos del primer tomo de nuestro curso autografiado, en que resumíamos las lecciones explicadas en la Universidad de Madrid, nos hemos creído obligados a corresponder a la benévola acogida del público, abordando la publicación de un tratado de Análisis algebraico. [286, p. 3]

Los apuntes fueron un texto rápido para las necesidades de la clase, pero *Elementos* ya era un trabajo más elaborado que merecía el nombre de tratado, como explicaba su autor en la misma introducción:

> Un curso es una selección de cuestiones fundamentales, aunque no constituyan sistema; es una excursión exploradora por el campo de una Ciencia; es como un plano que sirve de preparación y guía para el estudio de los tratados. Un tratado general debe contener, en cambio, una exposición sistemática del organismo de una ciencia; debe ser la cantera de donde puedan extraerse cursos variados. [286, p. 4]

El objetivo que nos proponemos en este apartado es extraer el curso de métodos algebraicos lineales[20] contenido en *Elementos.* Rey Pastor asume plenamente el espíritu del tradicional análisis algebraico basado en la introducción de los números por el método genético, ampliación sometida al principio de permanencia de las leyes formales de Hermann Hankel (1839-1873) [176]. Esto significa que cada sistema de números se construye a partir del anterior y se definen las operaciones del sistema nuevo de modo que extienden las del anterior y conservan sus propiedades básicas (asociativa, conmutativa, distributiva). Este criterio está más bien implícito en las diferentes obras que le precedieron, pero Rey Pastor lo hace explícito, convirtiéndolo en una propuesta programática:

> Puesto que los números son el objeto del análisis algebraico, y los diversos campos numéricos nacen por ampliaciones sucesivas, y cada uno de ellos tiene sus problemas propios, estos sucesivos grados de amplitud del concepto de número señalan la clasificación natural del análisis algebraico, más adecuada para su estudio. [286, p. 4]

[20]Hablar de "álgebra lineal" a la altura de la Primera Guerra Mundial es algo prematuro, ya que dicha expresión pertenece más bien al lenguaje acuñado en los años treinta una vez que el álgebra adoptó su nueva imagen pasando a ser una teoría de las estructuras algebraicas [89]. Pero para el joven catedrático Rey Pastor, igual que, en general, para los matemáticos de su tiempo, el álgebra tenía su sentido clásico como resolución de las ecuaciones dadas por polinomios. Si el grado de los polinomios no pasa de la unidad se está en el caso lineal, en el cual la teoría se convierte en la resolución de sistemas lineales, que utiliza determinantes.

En consecuencia, el libro está organizado en cuatro partes, de modo que en cada una de ellas se define un sistema de números, con sus operaciones y propiedades, y se desarrolla la teoría matemática que le corresponde. Las cuatro partes se dedican respectivamente a los números naturales, racionales, reales y complejos[21]. El "álgebra" y sus algoritmos finitos están en las dos primeras y el "análisis", con sus algoritmos indefinidos basados en la noción de límite, en la tercera y la cuarta.

Antes de entrar en la materia que nos ocupa, daremos una somera descripción del diseño metodológico de *Elementos*. El libro está escrito en tres niveles, utilizando distintos tamaños de letra y espacios entre líneas, lo que da un carácter cíclico a la obra, preparada para ser asimilada en varias lecturas. El tipo mayor se usa en el cuerpo central del texto, organizado en capítulos divididos en secciones y éstas a su vez en apartados distinguidos por números resaltados en negrita que se suceden de manera continua a lo largo de todo el libro. El autor los utiliza para las citas dentro del texto y como referencia en el índice de materias. Algunos de estos apartados van en tipo menor y en líneas más apretadas, para indicar que se trata de temas complementarios que pueden dejarse para una segunda lectura. Esta estructura está ocasionada por la variedad de estudiantes a los que el autor se dirigía, pues la asignatura Análisis Matemático 1º era cursada por todos los estudiantes de ciencias, no sólo de exactas, a los que el autor consideraba, no obstante, como los destinatarios principales de su obra.

En su afán por proponer a los estudiantes de matemáticas, ya desde el primer curso, temas que pudieran provocar interés y orientar hacia estudios más avanzados, Rey Pastor añadió al cuerpo principal de su libro de texto, al final de los capítulos y en texto apretado, notas y comentarios con remisión a un escogido repertorio de obras para el estudio avanzado de los asuntos propuestos, y también para el conocimiento de su evolución histórica.

Esta estructura, que se repite en sus obras posteriores, se corresponde con un objetivo general del autor, profundamente involucrado en incrementar la recepción en España de la matemática europea más avanzada, esfuerzo que se inscribe en el proyecto de regeneración nacional y progreso científico liderado en esos años por el filósofo Ortega, al que se sumó un nutrido grupo de artistas e intelectuales de la llamada "generación de 1914".

[21] Como era habitual al principio del siglo, los números negativos son introducidos a la vez que las fracciones, aunque su ausencia genera algún inconveniente al explicar la divisibilidad y las ecuaciones diofánticas lineales en la primera parte. La ausencia de los números enteros se corresponde con que la noción abstracta de anillo se empezó a configurar más tarde que las de grupo y cuerpo.

Los universitarios y científicos de esta generación, Rey Pastor entre ellos, recibieron una formación europea a través de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas[22] (JAE).

En líneas generales, *Elementos* reduce sensiblemente el uso del lenguaje ordinario imperante en los textos españoles de matemáticas, aproximándose a los estilos más directos y concisos de textos extranjeros que conocía bien, en los que el lenguaje simbólico es usado con más amplitud:

> También nos hemos preocupado de alcanzar en el lenguaje el grado de concisión y precisión usuales en casi todos los libros extranjeros. Es seguro que el poco éxito conseguido en España por algunos excelentes libros importados radica en las dificultades que las inteligencias españolas encuentran para su lectura, y no por inferioridad nativa, sino por equivocada educación; pues acostumbradas a delegar en las páginas impresas el trabajo de discurrir, son incapaces de hacerlo por cuenta propia, cuando ello es necesario. [286, p. 6]

Para Rey Pastor ahorrar espacio y tiempo expositivo significa tener la posibilidad de llegar más lejos:

> También hemos puesto especial cuidado en omitir toda clase de detalles superfluos o secundarios, que solo cansancio y desorientación producen. Deteniéndose solamente en las estaciones principales, es posible llegar en poco tiempo bastante lejos: mientras que perderse en una selva de minucias y casos particulares, que confunden y oscurecen los troncos primarios, es esconderse voluntariamente a no salir nunca de la Matemática elemental. [286, p. 4]

Elementos fue una obra recibida como una gran novedad en la matemática española, así se apreció ya el primer *Resumen*, tanto por los contenidos matemáticos y los aspectos generales del diseño del libro —aún mejorados en *Elementos*— como por otros aspectos:

> Dejamos para el final dar cuenta de una utilísima innovación que presenta esta obra. Nos referimos a los artículos titulados "Notas y adiciones" con que finaliza cada capítulo. En ellos se exponen sobriamente algunas ampliaciones de importancia

[22] Sobre la "generación de 1914" y su relación con la "generación del 98" véanse las obras de Tuñón de Lara (1973) y Cacho Viu (1997). Véase [136] y las referencias allí dadas para situar a Rey Pastor en este contexto.

> secundaria en el "Curso" y se indican listas de libros en diferentes idiomas para el lector que desee profundizar en un determinado tema. Las citas están hechas de manera que evitan toda duda. Hay también al final una lista de tratados completos de Análisis. [87, p. 298]

Similar acogida mereció la segunda edición de 1922[23]:

> La literatura española necesita esta obra de Rey, que como todas las suyas, tienden a llenar un vacío que nos falta para llegar a los problemas actuales de la matemática. [290, p.84]

Sin duda este entusiasmo puesto en la recepción de lo nuevo reflejaba que el joven Rey Pastor superaba a los profesores de la materia en aquel tiempo. *Elementos* tuvo la tercera edición en 1930, con modificaciones y ampliaciones sobre la anterior, pero que no afectaron al contenido de álgebra lineal que protagoniza nuestro trabajo; esta edición también fue reseñada, esta vez por Bonet [37]. Las ediciones posteriores fueron ya simples reimpresiones, que se prolongaron veinte años más allá de la muerte de su autor.

Entre los "tratados completos de Análisis" reseñados en *Elementos* citamos aquéllos que el autor señala que le sirvieron de guía:

> Cesáro, Ernesto (1859-1906). *Corso di Analisi Algebrica*, 1894.
> Ricci, Gregorio (1853-1925). *Lezioni di Algebra complementare*, 1900.
> Picherle, Salvatore (1853-1936). *Lezioni di Algebra complementare*, 1906.
> Burkhardt, Heinrich (1861-1914). *Algebraishe Analysis*, 1908.
> Capelli, Alfredo (1855-1910). *Istituzioni di Analisi Algebrica*, 1909.
> Cipolla, Michelle (1880-1947). *Analisi Algebrica*, 1914.
> Levi, Beppo (1875-1961). *Introduzione alla Analisi Matematica*, 1916.

Llama la atención que en la lista de tratados básicos que ofrece hay una notable mayoría de italianos, entre los cuales el que más influyó en el autor español fue *Istituzioni di analisi algebrica*, de A. Capelli (4ª ed. Nápoles 1909). Resulta un poco sorprendente que también apareciera *Introduzione alla analisi matematica* del matemático italiano Beppo Levi (1875-1961), que destaca por la fecha de publicación, 1916, tan próxima a *Elementos*,

[23]Citamos la reseña del *Resumen* porque la primera edición de *Elementos* no pudo ser comentada en la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, que cerró en abril de 1917. Con el nombre de *Revista Matemática Hispano-Americana* reapareció en 1919 y en ella se publicó una breve reseña de Pineda (1923) a la segunda edición de *Elementos*.

y también por su contenido, netamente algebraico y con un "grado de modernidad" en su tratamiento del álgebra bien diferenciado del adoptado por Rey Pastor.

Entramos ya en la descripción de los métodos algebraicos lineales expuestos por Rey Pastor. En su primera edición, *Elementos* consta de diez capítulos divididos en cuatro partes, estas a su vez se dividen en capítulos, estos en secciones y por último en apartados distinguidos por números escritos entre paréntesis y en negrita. El esquema de los contenidos de la obra, tal como aparece en su primera edición esta dada por:

1. *Parte Primera: El número natural*
   - I. Operaciones aritméticas fundamentales
   - II. Teoría de la divisibilidad numérica
   - III. Análisis combinatorio
2. *Parte Segunda: El número racional*
   - IV. Operaciones elementales
   - V. Algoritmos de iteración
   - VI. Algoritmo de los determinantes
   - VII. Algoritmo algebraico
3. *Parte Tercera: El número real*
   - VIII. Operaciones elementales
   - IX. Algoritmos indefinidos
4. *Parte Cuarta: El número complejo*
   - X. Operaciones elementales y aplicaciones

Esta estructura general se mantiene en la segunda edición, salvo variaciones en la estructuración del capítulo IV, pero se modifica bastante para la tercera, en donde surge un nuevo capítulo IX, denominado *Aritmética decimal de los números reales* y en consecuencia los capítulos IX y X existentes pasan a ser los X y XI y así la obra completa toma su forma final quedando constituida por once capítulos. Estos cambios no afectaron a la parte algebraica lineal, recogida en la segunda parte del texto dedicada a los números racionales, haciendo mayor énfasis en los capítulos IV, VI y VII específicamente a las secciones y apartados correspondientes a nuestro tema, haremos también una breve mención a los números complejos.

Se observa en el índice anterior que los "problemas propios" del número natural son la divisibilidad y la combinatoria; mientras que son propios del número racional, algoritmos como las progresiones, las fracciones continuas (finitas y periódicas) o los determinantes, así como el "algoritmo algebraico". Por tal entiende Rey Pastor el estudio de los polinomios de varias variables y su divisibilidad, que realiza en los cuatro primeros apartados del capítulo VII. En el quinto explica con ejemplos la idea general del álgebra como resolución de sistemas de ecuaciones polinómicas, pero, ya en el sexto, advierte que si el grado es mayor que uno se pasa al álgebra superior, quedando para un primer curso tan sólo los sistemas lineales.

En lo que sigue prescindiremos del algoritmo algebraico general para poner de manifiesto la continuidad en el tratamiento de determinantes, matrices y sistemas, pues esta secuencia lineal no necesita de la teoría general de los polinomios. Tampoco incluiremos la primera parte, evidentemente necesaria como requisito previo, principalmente la combinatoria utilizada en el estudio de los determinantes.

Rey Pastor explica de modo muy claro por qué el algoritmo algebraico es un tema "propio del número racional". Los números adecuados para tratar estos temas son los racionales porque forman un "cuerpo", noción que Rey Pastor asocia a los números en sus sucesivas ampliaciones, siendo el de los racionales el primer cuerpo que se presenta. Lo expresa así:

> **189. Cuerpo de números.** [...] Se llama *cuerpo de números o campo de racionalidad* a un conjunto de números, si toda operación racional (adición, sustracción, multiplicación o división de divisor no nulo), con números arbitrarios del conjunto, es siempre posible y el resultado pertenece también al conjunto.
>
> Todos los números racionales forman, pues, un cuerpo, y éste es el cuerpo más sencillo. En efecto, en cualquier cuerpo de números figura el número 0 (como diferencia entre un número del cuerpo y él mismo), y también el número 1 (como cociente de un número por sí mismo); por tanto, figuran todos los números enteros (como resultado de sumar o restar unidades); luego también figuran todos los números racionales (como cociente de estos enteros).
>
> Más adelante veremos cuerpos más extensos que éste. [286, p. 189]

Las únicas ampliaciones del cuerpo[24] de los números racionales propuestas en *Elementos* son los cuerpos de los números reales y de los números complejos, que lo son en virtud

[24]Análogamente, Rey Pastor [286, pp. 189-190] define "anillo", "módulo" y "grupo", todo ello referido a estructuras numéricas concretas. Usa anillo y grupo según la definición actual (el grupo siempre referido al producto) y sus módulos (como en Dedekind) son los hoy llamados ideales

del principio de permanencia de las leyes formales. La teoría de la divisibilidad de los polinomios de varias variables con coeficientes racionales se repite tal cual, dice Rey Pastor, cuando los coeficientes son reales o complejos. Parece tener claro que lo que expone para el número racional valdrá para cualquier otro cuerpo de números, es decir, cualquier cuerpo intermedio entre los racionales y los complejos, pero sólo los tres básicos -racionales, reales, complejos- aparecen en *Elementos*.

Esta forma de acceder a primeros conceptos abstractos como herramientas que permiten unificar y simplificar la explicación del álgebra clásica en el marco de los sistemas numéricos, es la misma que fue utilizada en las primeras décadas del siglo XX por no pocos algebristas, sobre todo alemanes, anteriores a la implantación generalizada en los años treinta de la nueva imagen del álgebra como teoría de las estructuras algebraicas[25].

Después de las consideraciones anteriores, nos centraremos en los capítulos VI y VII. La teoría de los determinantes está expuesta en las cinco secciones y las notas del sexto capítulo *Algoritmo de los determinantes*, a saber:

§1. Definiciones y propiedades fundamentales (p. 223)
§2. Desarrollo de un determinante en suma de varios (p. 229)
§3. Desarrollo por menores complementarios. Producto de determinantes (p. 235)
§4. Determinantes especiales (p. 242)
§5. Cálculo de matrices (p. 250)
Notas (P. 257-258)

Veamos el contenido de cada sección.

§1. Definiciones y propiedades fundamentales. En esta sección, el autor define el determinante de una matriz usando permutaciones, continúa con el desarrollo para los casos $n = 2$ y $n = 3$. En éste último, explica la regla de Sarrus. Aparecen las propiedades de los determinantes enunciadas como transformaciones de un determinante y por último plantea dos ejercicios de tipo teórico. Rey Pastor comienza con el concepto de matriz cuadrada,

Matrices cuadradas.- Dado un cuadro de n^2 números, distribuídos en n

[25] Son los algebristas situados entre las obras [355], conocida en España, pero apenas estudiada, a través de la traducción francesa a la segunda edición alemana de 1898- y [344], según el bien conocido análisis histórico de Corry [89]. Rey Pastor no utiliza en sus obras otros "cuerpos de números" hasta que en la segunda edición de sus Lecciones de álgebra, de 1935, introduce la teoría de Galois; entonces aparecen también, como en el libro de Weber, "cuerpos de funciones racionales". Pero no se ocupó de la noción abstracta de cuerpo hasta la última edición de Lecciones de álgebra [285], véase [132].

filas y en n columnas, designaremos todos ellos por una misma letra a con dos índices: el *número* de orden de la *fila*, contando de arriba abajo, y el que indica la *columna* contando de izquierda á derecha. [...]

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Este cuadro, formado por los n^2 números dados, se llama *matriz cuadrada de orden n*; y los números que la forman se llaman sus *elementos*. [286, p. 223]

§2. Desarrollo de un determinante en suma de varios. Introduce la definición de menor de una matriz cuadrada, plantea el desarrollo por cofactores e introduce más propiedades, terminando con dos ejercicios de tipo general.

§3. Desarrollo por menores complementarios. Producto de determinantes. Para calcular el producto de un determinante $|a_{ij}|$ de orden n por uno $|b_{ij}|$ de orden m, Rey Pastor, siguiendo el modo usual, construye un determinante de orden $m+n$, poniendo $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ en la diagonal principal y en la secundaria la matriz O con todos sus elementos nulos y una matriz arbitraria $X = x_{ij}$, cada una de ellas con la dimensión rectangular adecuada. Entonces el determinante de la matriz así obtenida

$$\left|\begin{array}{c|c} a_{ij} & O \\ \hline x_{ij} & b_{ij} \end{array}\right|$$

se puede calcular desarrollando por los menores de orden n de las primeras n filas; como de todos ellos es $|a_{ij}|$ el único no nulo, resulta el producto $|a_{ij}||b_{ij}|$.
Rey Pastor obtiene la tradicional fórmula de Binet-Cauchy haciendo $m = n$, y tomando $x_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $x_{ii} = -1$, resultando la matriz $-I$ opuesta de la matriz identidad de orden n. Mediante cálculos adecuados plantea una cadena de determinantes iguales:

$$\left|\begin{array}{c|c} a_{ij} & O \\ \hline -I & b_{ij} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} a_{ij} & O \\ \hline x_{ij} & b_{ji} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} O & c_{ij} \\ \hline -I & b_{ji} \end{array}\right|$$

donde (b_{ij}) es la matriz que cambia las filas y las columnas de la matriz $B = (b_{ij})$, cambio que no altera el valor del determinante (la hoy llamada matriz transpuesta). Esta propiedad es enunciada en los siguientes términos:

> **220. Transformaciones de un determinante.**- Dos elementos a_{ji} y a_{ij}, simétricos respecto de la diagonal principal $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$, se llaman conjugados. Los elementos de ésta son conjugados entre sí mismos.
>
> I. *El valor de un determinante no varía si se sustituye cada elemento por su conjugado, es decir, si se cambian las filas por columnas, y éstas por aquellas, sin alterar el orden relativo de los elementos de cada una.* [286, p. 226]

Para justificar la segunda igualdad se sustituye cada una de las primeras filas R_i de la matriz por la combinación lineal $R_i + a_{i1}R_{n+1} + a_{i2}R_{n+2} + \cdots + a_{in}R_{2n}$, resultando la matriz nula O en lugar de $A = (a_{ij})$ y apareciendo una matriz $C = (c_{ij})$ cuyo elemento c_{ij} es la "suma de los productos" de los a_{ij} con el índice i fijo por los b_{ji} con j fijo, es decir, el "producto'" de la fila i de A por la fila j de B. Finalmente, aplicando de nuevo un desarrollo por menores y realizando un ajuste de signo se concluye la fórmula de Binet-Cauchy $|a_{ij}||b_{ij}| = |c_{ij}|$.

Desde el punto de vista algorítmico seguido por Rey Pastor hay cierta libertad al confeccionar las operaciones, como hemos visto en casi todos los autores anteriores y él mismo señala después de la exposición anterior:

> ESCOLIO. Como el valor de un determinante no altera si se cambian entre sí las filas y las columnas, puede hacerse también el producto por columnas; la fórmula es la misma, designando el producto de la columna i del primero por la columna j del segundo. Finalmente, puede hacerse multiplicando las filas del primero por las columnas del segundo, ó inversamente. [286, p. 241]

§4. Determinantes especiales. Aquí considera el determinante de Vandermonde, determinantes simétricos y hemisimétricos, y el determinante de Hankel. Finaliza con dos ejercicios que no son de cálculo, en ellos se pide demostrar resultados enunciados.

§5. Cálculo de matrices. En esta sección intervienen las matrices rectangulares. Se define independencia lineal de las filas y columnas de una matriz, la característica, y el producto de matrices.

> 236. **Característica de una matriz.**-DEFINICIÓN. -Si en una matriz hay algún menor no nulo de orden h, y son nulos todos los elementos menores de órdenes superiores á h, éste número se llama *característica* de la matriz [Los autores alemanes, siguiendo a FROBENIUS, llaman a éste número *Rang*]. Todo menor no nulo de orden h, se llama *principal.* [286, p. 252]

Aplica estas nociones para hallar las relaciones geométricas que ligan un conjunto de puntos en un espacio de cualquier número de dimensiones. Seguidamente aborda el producto de matrices:

> 239. **Producto de Matrices.**- Dadas dos matrices A y B con igual número n de filas y el mismo número m de columnas (matrices llamadas semejantes):
>
> $$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{array}$$
>
> formemos la matriz cuadrada C de orden n, cuyo elemento general c_{ij} sea el producto de la fila i de la primera por la fila j de la segunda:
>
> $$c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \cdots + a_{im}b_{jm},$$
>
> y vamos á estudiar la relación que liga las matrices A y B, con esta otra C, llamada *producto* de ambas. [286, p. 254]

Luego, con cálculos similares a los utilizados para demostrar la fórmula de Binet-Cauchy $(n = m)$ obtiene Rey Pastor los resultados clásicos para $n \neq m$.

Llegamos a las notas al capítulo VI, donde encontramos: I. Bibliografía, II. Teorema de Hadamard, III. Teorema de Sylvester y IV. Determinantes de varias dimensiones.

En la bibliografía Rey Pastor remite a las obras de Puchta-Nöther para el estudio de determinantes especiales y a las de Pascal, Muir, Fredholm y Kowalewski para temática diversa sobre los determinantes.

Se refiere al teorema de Hadamard por su importancia en la teoría de ecuaciones integrales y al de Sylvester por su interés en la teoría de la eliminación, en ambos casos recomienda obras donde se pueden encontrar las demostraciones.

En cuanto a los determinantes de varias dimensiones, indica que no es un tema de importancia suficiente para figurar en los tratados elementales, y solo considera el caso $n = 3$[26], para ampliar las nociones en el caso particular remite al trabajo de Pascal [277], y para el caso general recomienda el libro de Lecat [238].

Capítulo VII: *Algoritmo Algebraico.* Está compuesto de seis secciones, de las cuales las cinco primeras tratan las operaciones básicas y factorización de polinomios en una variable y la división entera de polinomios en varias variables, la divisibilidad algebraica y el planteamiento y tratamiento de las ecuaciones en general. La última considera el caso de los sistemas de ecuaciones de primer grado.

Rey Pastor plantea de modo conciso y completo la discusión general de los sistemas lineales (p.294-303). Comienza observando, y llama al resultado "teorema fundamental de equivalencia", que dos sistemas tienen las mismas soluciones si uno de ellos resulta del otro sumando a una de sus ecuaciones una combinación lineal de otras. Pasa enseguida a resolver los sistemas de igual número de ecuaciones que de incógnitas, para los que da dos métodos. El primero, que recomienda para la resolución práctica en el caso de tener coeficientes numéricos, es el "método de reducción" de Gauss, consistente en triangular el sistema mediante combinaciones lineales de sus ecuaciones. Pero para la discusión completa del sistema debe seguirse, afirma el autor, el método de los determinantes de Cramer, que expone de modo claro y sucinto. Finalmente, explica de modo breve pero completo la solución de los sistemas generales de n ecuaciones con m incógnitas, utilizando el resultado de Cramer y la noción de característica; termina con los sistemas homogéneos tratados como un caso particular. Así enuncia el teorema general:

> I. *La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución, es que la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada con los términos constantes, tengan igual característica.*
>
> II. *Si la característica h es igual al número m de incógnitas, la solución es única; si es $h < m$, hay infinitas soluciones, cada una de las cuales está determinada dando un sistema arbitrario de valores a las $m - h$ incógnitas no principales (ROUCHÉ-FROBENIUS).* [286, p. 300]

[26] También llamados por otros autores, como Octavio de Toledo, determinantes cúbicos.

En el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales, sí puede decirse que Rey Pastor ofrece un tratamiento bien actualizado para su tiempo incorporando la noción de característica (el "rango" de Frobenius) en la formulación y demostración del teorema de Rouché. Además, incluye también el nombre de Frobenius en el teorema. Se comprende el juicio que emitió sobre la obra (todavía como *Resumen*) M. Correa:

> Muy notable también todo lo relativo a ecuaciones algébricas y determinantes, donde señalaremos como excepcional el teorema de Rouché. Tratado con mucha concisión, no se concibe ni mayor rigor ni más sencillez. [87, p. 297]

Las notas al capítulo VII (p. 304-306) hacen referencia a algunos temas avanzados de álgebra lineal: I. Grupo de una transformación entera, II. Transformadas de una función entera, III. Sustituciones lineales, IV. Teoría de los divisores elementales, y V. Bibliografía.

En la nota III retoma el producto de matrices cuadradas, donde explica que los coeficientes de una sustitución lineal S forman una matriz cuadrada A, cuyo determinante se denomina el módulo de la sustitución. Dadas dos sustituciones S, T de matrices respectivas A y B, el producto (composición) de las mismas tiene la matriz c_{ij} en la que cada elemento es

> [...] el producto de la fila i de la matriz B por la columna j de la matriz A; luego esta matriz es el producto de ambas matrices. Por tanto: El módulo del producto de las dos sustituciones lineales, es el producto de los módulos de ambas. [286, p. 305]

La afirmación anterior sobre el producto de las matrices es errónea porque Rey Pastor definió el producto "fila por fila" y ahora lo usa en la forma "fila por columna", aunque el fallo se suaviza teniendo en cuenta el escolio antes citado, según el cual se recupera la verdad en la afirmación sobre los módulos, pues $|b_{ij}| = |b_{ji}|$.

En este punto vale la pena señalar la falta de coherencia que se advierte entre la definición del producto de matrices expuesto con estilo algorítmico tradicional y éste último en relación con las sustituciones lineales en la que el autor se asoma a un modo funcional más moderno de entender las matrices.

Esto se explica debido a que la exposición de los métodos algebraicos lineales realizada por Rey Pastor se produce en una etapa de solapamiento de los métodos algorítmicos propios de la teoría de los determinantes que recorre el siglo XIX y las nuevas orientaciones algebraico funcionales introducidas en el último tercio del siglo. Cuando las matrices se asocian a las sustituciones lineales, su producto queda fijado en consonancia con la forma de operar éstas como transformaciones que se componen, apareciendo el producto de matrices estandarizado en la forma "filas por columnas", dejando de lado la ambigüedad propia del método algorítmico. Aunque no comete un error grave, Rey Pastor tiene al menos un desliz al realizar incorrectamente, dentro de una misma obra, el encaje entre la tradición algorítmica que mantiene en el curso básico y el estilo funcional algebraico más moderno que propone como material avanzado complementario.

En la nota V[27] recomienda se refiere a los tratados elementales de Octavio de Toledo, Salinas y Benítez, Bourlet, etc., pero para introducirse en temas de álgebra superior remite a las obras generales citadas al inicio del libro, además de las "especiales" de Netto, Pund y Bôcher. Esta última se trata del libro de *Álgebra Superior* de Bôcher [36], donde aparece la definición funcional del producto de matrices junto con las propiedades algebraicas de este producto; pero Rey Pastor no incorpora a *Elementos* el álgebra matricial.

Como ya dijimos, estos temas lineales algebraicos están expuestos el el capítulo VII, que pertenece a la parte segunda de *Elementos* dedicada a la matemática del número racional, que es el que proporciona la noción aritmética de cuerpo. La tercera parte (capítulos VIII y IX) se dedica al número real, que comparte las propiedades aritméticas de cuerpo, luego se le aplica, dice Rey Pastor, todo lo dicho desde el punto de vista algebraico para los racionales. Y lo mismo sucede con los complejos, a los que dedica el último capítulo, capítulo X, que es el único de la breve cuarta parte del libro. Este capítulo termina con un esbozo del tema de los números hipercomplejos y la llegada del álgebra lineal a España. Al terminar con una nota bibliográfica sobre la aritmética de los números complejos, Rey Pastor recuerda las dificultades que tuvieron los matemáticos españoles para considerar los números imaginarios no como un extraño ente metafísico sino como un número más que amplía la aritmética hasta entonces usual[28]:

> El periodo de polémica sobre el imaginarismo que cerraron definitivamente Gauss y Cauchy, no llegó á nuestro país hasta el último tercio del siglo. No es extraño, por tanto, que los autores españoles de obras sobre el imaginarismo se colocaran todavía en el punto de vista de Argand; por esto no parece discreto recomendarlas á los principiantes. [286, p. 488]

[27]La nota IV sobre divisores elementales ya fue tratada en la sección anterior.

[28]Sobre este aspecto del inaginarismo en España véase la tesis doctoral de J.J. Escribano ya citada, en concreto sus trabajos [127, 128].

5.2.3 Un poco de análisis comparado

Para terminar esta sección contrastaremos el tratamiento dado por Rey Pastor al fragmento de *Elementos* con el dado a los mismos temas por su veterano colega Octavio de Toledo, ambos recién descritos, así como con la voluminosa obra *Istituzioni di analisi algebrica* del italiano A. Capelli (1909), de la que dimos una ligera descripción en el capítulo anterior. Octavio de Toledo y Capelli son de edad similar y poco más de treinta años mayores que Rey Pastor. Lo que el italiano presenta en un grueso libro de casi mil páginas, los autores españoles de finales del XIX y principios del XX lo ofertaban en varios volúmenes editados y reeditados en años diferentes según las necesidades del mercado[29]. Aunque algunos juicios tengan valor general para el conjunto de las obras de los autores señalados, la comparación se centrará en lo que a la parte lineal se refiere. Nos limitaremos a algunos aspectos en los que las diferencias son dignas de destacarse.

Desde su creación en 1909 se encargaba de Complementos de Cálculo Infinitesimal José Ruiz-Castizo, el catedrático de Mecánica Racional, que compartió la asignatura con Rey Pastor una vez que en 1915 la nueva asignatura aumentó una hora semanal de clase. Cuando en 1918 se jubiló Irueste, el encargo de Elementos de Cálculo Infinitesimal pasó a Rey Pastor[30], que de este modo expandía su tarea docente en la dirección del análisis superior, sin llegar, como era su ferviente deseo, a la asignatura de análisis del doctorado, que tenía acumulada Octavio de Toledo. En el periodo 1914-20 hubo una clara competencia entre los dos catedráticos de análisis matemático, separados por treinta años de edad, tanto en el ámbito académico cuanto en el de la producción de libros de texto [133].

Rey Pastor y Octavio de Toledo

Aun limitándonos a la parcela algebraica lineal que nos ocupa en esta memoria, hay varias diferencias que llaman la atención en cuanto se revisan en paralelo las obras de Octavio de Toledo y Rey Pastor. No es tanto el contenido lo que marca el contraste, sino el estilo y el ritmo expositivo, ágil y profundo en Rey Pastor, sosegado, incluso premioso, en Octavio de Toledo. Rey Pastor hace su planteamiento del algoritmo de los determinantes en 36 páginas, mientras que Octavio de Toledo emplea para lo mismo 150 páginas. Con los

[29] De igual modo, para una completa comparación de la obra de Capelli [1909] con la análoga de Rey Pastor hay que poner en liza los tres libros en los que este último completó su exposición del análisis algebraico [286, 284]. Véase [135].

[30] No por mucho tiempo, pues marchó a Buenos Aires en 1921.

sistemas de ecuaciones lineales se observa igual tendencia, Rey Pastor los trata en 10 páginas mientras que Octavio de Toledo emplea 89 páginas.

Destacamos también diferencias en la concepción y estructura metodológica del texto. Rey Pastor utiliza diversos tamaños de letra para discriminar la importancia de los temas y facilitar el estudio cíclico del libro, mientras que Octavio de Toledo usa la misma grafía y énfasis a lo largo de todo el texto. Rey Pastor propone ejemplos y ejercicios para los temas tratados, mientras que Octavio de Toledo sólo proporciona ejemplos. Además, Rey Pastor no sólo introduce un índice general muy detallado, sino también índices alfabéticos de materia y autores, ofreciendo así un libro que facilita su consulta permanente; fiel a la costumbre imperante, Octavio de Toledo incorpora sólo el índice general. Señalemos para terminar, como un aspecto diferencial muy importante, la gran riqueza de fuentes bibliográficas clásicas y actualizadas que Rey Pastor propone.

Entrando con algún detalle en el contenido, una de las razones por las que Octavio de Toledo se alarga tanto en las exposiciones sobre determinantes es porque no usa, como vimos, la notación de subíndices y su discurso escrito es en exceso retórico. Como ejemplo de su tono expositivo bastante minucioso y a veces innecesariamente detallista, damos el fragmento que sigue:

> Se llama orden o grado de una matriz cuadrada el número que expresa cuantas series de objetos la constituyen, o, lo que es igual, cuantos objetos forman cada serie; [...] Es evidente que el número total de objetos que contiene una matriz cuadrada es igual al cuadrado del número que expresa su grado; así, la matriz de 4.º grado [...] contiene $4^2 = 16$ objetos, y, en general, la de orden n contendrá n^2 elementos.

Octavio de Toledo plantea [111, p. 208] que la suma de determinantes que “no difieren más que en una fila o columna de un cierto orden” es el determinante de “la matriz que tiene por fila o columna correspondiente la suma general de esas líneas diversas, y las restantes líneas idénticas a las de las matrices dadas”. Por el contrario, Rey Pastor [286, p. 231] plantea la cuestión en orden inverso, como descomposición de un “determinante en suma de p determinantes” cuando “los elementos de una línea son polinomios de p términos”. Ambos resultados son correctos, pero Rey Pastor resalta la descomposición del determinante como método eficaz para su cálculo. El enunciado elegido por Rey Pastor se abrevia gracias al uso del término técnico “polinomio”, entendido esta vez como expresión de solamente “sumas y diferencias de números o de productos de números”.

En la introducción del producto de determinantes Rey Pastor [286, p. 239-241] pone lo imprescindible para exponer la fórmula de Binet-Cauchy, relegando el producto general de matrices a un momento posterior como tema complementario, mientras que Octavio de Toledo [111, p. 212-219], que sigue a Baltzer, trata la multiplicación en general desde un principio, con lo que tarda en aparecer el teorema principal.

Rey Pastor también es más ágil y completo en la exposición de los determinantes especiales y en algunas de sus aplicaciones. Por ejemplo, presenta los pfaffianos [1917, pp. 248-248] como caso análogo a un determinante hemisimétrico, mientras que Octavio de Toledo [1916, pp. 268 y sigs.] los expone con todo detalle. También expone con mucho detalle la obtención de una fórmula de Euler-Lagrange como aplicación del teorema de Binet-Cauchy en el caso $n = 3$, mientras que Rey Pastor [1917, p. 256] presenta lo mismo como un simple ejemplo[31]. Digamos también que Octavio de Toledo [1916, pp. 275 y sigs.] trata los determinantes cúbicos de modo minucioso, pero Rey Pastor prefiere hacerlo de forma tangencial indicando bibliografía para seguir su estudio.

En lo referente a los sistemas de ecuaciones lineales, la presentación de Octavio de Toledo sigue el uso de los determinantes característicos y principales que hiciera Rouché, mientras que Rey Pastor, como ya dijimos, sigue el método mejorado de Frobenius usando el rango o característica de una matriz. Octavio de Toledo pudo haber actualizado su exposición a través de la obra de Capelli, pues tenemos constancia de que la conocía; había publicado un artículo [110] en el que refiere a Capelli [60] para caracterizar la convergencia de una serie doble. Este artículo de Octavio de Toledo se publicó en el cuarto tomo de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, con una indicación del autor sobre la falta de originalidad del trabajo, que reproducía una de las lecciones que explicaba en sus clases.

La vigencia en España de la obra de Capelli durante la segunda década del siglo XX se reconoce también en Roberto Araujo García, un matemático español de la edad de Rey Pastor y doctorado en 1912, que publicó en el tercer volumen de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* un artículo [14] sobre la resolución de los sistemas lineales, calificado en su título como "breve ensayo", que le puede disputar a Rey Pastor la prioridad en el uso de la característica (rango) en la exposición de los sistemas lineales en lengua española. Se trata de un artículo carente completamente de referencias que, una vez analizado cuidadosamente, se califica sin duda como un "ensayo libre" sobre la parte que Capelli [1909] dedica al tema. Araujo utiliza la característica sin vincularla a Frobenius, como

[31] Que es un ejercicio propuesto en el libro de Capelli [60, p. 257].

Capelli, sigue el orden expositivo del italiano, utiliza las mismas notaciones, contiene párrafos literalmente traducidos, etc.[32]

Rey Pastor y Capelli

En *Istituzioni di analisi algebrica*, Capelli se ajusta perfectamente al plan del análisis algebraico (completado con cálculo diferencial), procede a la construcción sucesiva de los sistemas de números y expone tras cada uno de ellos los temas que le son propios. Esto lo hace de modo natural, sin necesidad de explicar los motivos para hacerlo así. Por el contrario, a Rey Pastor le parece imprescindible hacer explícita la doctrina sobre este método expositivo de introducción al análisis matemático. Centrándonos en el álgebra lineal, que Capelli también introduce en el ámbito del número racional, el contenido está expuesto en el sexto capítulo del italiano, con el siguiente índice:

> VI. Teoría de los determinantes y su aplicación en la resolución de problemas algebraicos de primer grado: Definición de determinante. Propiedades fundamentales de los determinantes. Suma de determinantes. Sistemas de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas. Característica de una matriz. Dependencia e independencia lineal de una forma lineal. Resolución de un sistema de m ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas. Dependencia e independencia de las ecuaciones. Sistemas de m ecuaciones lineales no homogéneas con n incógnitas. Condición de compatibilidad. Desarrollo de un determinante por medio de un producto de menores complementarios. Regla del producto de dos determinantes. Multiplicación de Matrices. Sustituciones lineales. Reducción de matrices.

Este contenido es muy similar al dado por Rey Pastor en *Elementos*, con algunas variaciones en el orden de exposición. El texto de Capelli es riguroso y conciso en su exposición, haciendo un uso intensivo del lenguaje simbólico; presenta abundantes ejemplos y cuenta con notas y ejercicios al final del capítulo. El joven matemático español no es menos riguroso, pero sí menos conciso que Capelli, limitando en alguna medida el uso del lenguaje simbólico a favor de la expresión en lenguaje ordinario.

En lo que a la resolución de sistemas se refiere, Kronecker había establecido en sus cursos de la Universidad de Berlín en los años 1860 un tratamiento de la resolución de sistemas

[32]Estos datos se añaden a los ya aportados en otros lugares para explicar la severa crítica ejercida por Rey Pastor a partir de 1915 por el bajo nivel de la revista que era en ese momento el reflejo de la matemática española.

lineales considerando primero el caso homogéneo y deduciendo de éste el general añadiendo una variable más que debería admitir el valor 1 en la solución. Entre 1877 y 1881 Capelli, recién licenciado en la Universidad de Roma, fue ayudante de Felice Casorati (1835-1890) en la Universidad de Pavía. A finales de los años 70 realizó una estancia en Berlín, donde recibió cursos de Weierstrass y Kronecker, lo que explica que Capelli siga la línea expositiva de este último, empezando por los sistemas homogéneos y refiriendo a ellos el caso general. Pero su tratamiento mejora porque introduce la noción de característica que clarifica notablemente la exposición[33]. El autor italiano no cita fuentes ni para su modo de proceder ni para la noción y uso de la característica. La demostración directa, sin pasar por los sistemas homogéneos, del caso general de resolución de sistemas lineales corresponde, como vimos en la primera parte de esta memoria, a Rouché y Fontené, que no usaron el concepto de característica.

Rey Pastor —que estuvo en la Universidad de Berlín durante el curso 1911-12, cuando Frobenius era uno de los principales matemáticos de esa universidad— expone directamente la resolución del sistema lineal general, deduciendo el homogéneo como caso particular, en esto sigue a Rouché; por otro lado, también introduce la característica, pero el nombre que asigna al teorema indica que atribuye esta noción a Frobenius, que la llamó rango, y no a Capelli, del que toma Rey Pastor el término "característica". Para establecer su asignación de prioridad Rey Pastor pudo haber sido influido por Netto[34], para quien el introductor del concepto fue Frobenius, mientras que "A. Capelli demuestra las ventajas didácticas de la noción de rango de una matriz (que él llama la característica de la matriz)" .

Capelli y Rey Pastor plantean de modo análogo el producto de determinantes y matrices. El italiano multiplica las matrices por filas y también menciona el producto de sustituciones, pero sin indicar cómo se realiza, limitándose a enunciar el resultado con determinantes, así que no podemos saber si hubiera cometido un desajuste similar al apreciado en *Elementos*.

[33]El tratamiento de los sistemas lineales por Capelli no cambió desde la primera edición de su obra Istituzioni, publicada en 1894.

[34]E. Netto, graduado en Berlín en 1870, fue un autor que Rey Pastor citó con frecuencia en *Elementos* y otras obras.

5.3 A partir de 1920

Los treinta años que quedan del periodo de estudio planteado no son demasiado fructíferos para el avance en los temas algebraicos lineales que nos ocupan. Como este periodo está interrumpido por la Guerra Civil, será este corte dramático que cercenó el progreso científico el que aplicaremos a esta sección. En esta sección se diluye la presencia de Rey Pastor, durante la primera mitad de los años veinte permaneció en Buenos Aires, la década siguiente hasta la Guerra Civil venía a España aproximadamente un trimestre en torno al cambio de año, visitas que terminaron para no reanudarse hasta los últimos años cuarenta.

Hasta 1936 los planes de estudios apenas cambiaron y no dieron ocasión a una mejor enseñanza de los métodos algebraicos lineales básicos. Veremos cómo en este periodo hubo intentos de incorporar la ecuación secular y los divisores elementales en geometría analítica y en ecuaciones diferenciales, pero por diversas causas no llegaron a fructificar.

A partir de 1939, sobre todo después del plan de estudios de 1943, empieza a notarse que la nueva álgebra axiomática va llegando a España, ya se habla de "álgebra lineal", si bien todavía dentro de la asignatura Análisis matemático 1º. Pero los cambios reales en este ámbito no llegarán hasta avanzada la década de los cincuenta.

5.3.1 Hasta la Guerra Civil

El estudio directo de los temas algebraicos lineales no evoluciona respecto al contenido de *Elementos* de Rey Pastor, cuyo libro seguía siendo usado a pesar de marcharse su autor a Buenos Aires en 1921. Todavía la evolución de los estudios de matemáticas en la Universidad Central de Madrid es representativo de la marcha general del país en este asunto[35]. El Análisis matemático de primer curso quedó a cargo de Octavio de Toledo hasta que se jubiló en 1929, entonces se hicieron cargo de la asignatura otros veteranos, los geómetras C. Jiménez Rueda (jubilado en 1930) y M. Vegas, hasta que la sustitución definitiva llegó en 1931 con el nuevo catedrático José Barinaga[36], al tiempo que entraba en vigor el plan de estudios de la República, en principio provisional pero que duró hasta

[35]La obra de E. Outerelo [275] ofrece numerosos datos sobre la evolución de la licenciatura en exactas/matemáticas de le Universidad Central.

[36]Barinaga también escribió artículos sobre determinantes, veáse [17, p. 770].

la guerra, sin cambios especiales respecto al anterior. La posible acción renovadora de Barinaga apenas se pudo manifestar hasta 1936, aunque estaba bien informado de los progresos del álgebra.

Geometría analítica: el intento periférico de Cámara, 1920-21

Sixto Cámara Tecedor[37] (1878-1964) obtuvo la cátedra de Geometría Analítica en la Universidad de Valencia en 1917, en cuya Facultad de Ciencias no había sección de Exactas, lo que sin duda condicionaba, condicionó de hecho, las posibilidades reales que tenía de mejorar el nivel matemático de su asignatura actualizando sus contenidos. Entretanto, Vegas estaba instalado en Madrid con su bien experimentado modelo docente con vida activa todavía para casi veinte años más.

A pesar de encontrarse en la periferia de la matemática universitaria española, Cámara inició la enseñanza de la geometría analítica con el espíritu renovador y los conocimiento actualizados que bullían en el Laboratorio Matemático de Madrid. Así, en poco años, tras ensayar con unos apuntes de curso, compuso un libro de texto con importantes novedades pero que quedó como una obra provisional e inconclusa. Se trata de su libro *Elementos de geometría analítica* (1920-21) [50] que vamos a comentar a continuación en los aspectos que a nuestro tema se refieren, teniendo como guía la obra de J.J. Escribano [130, 129], que completaremos con observaciones propias. Cámara se presenta fuertemente influenciado por su amigo y maestro, aunque diez años más joven, Rey Pastor. El autor sigue los lineamientos del Programa de Erlangen de Félix Klein, en los que la geometría se caracteriza por el estudio de los invariantes bajo un grupo de transformaciones. En sus palabras:

> El maestro Julio Rey Pastor ha señalado los jalones que deben guiarnos para el progreso matemático de nuestra Patria; en ellos nos hemos inspirado al escribir este libro, fruto del ambiente del Seminario Matemático, orientador de nuestros estudios hacia las altas cuestiones de la Matemática actual. [...] colocados en el punto de vista

[37] Cámara estudió Ciencias Exactas en Zaragoza siendo un oficial de infantería casado y con hijos, se licenció en 1906. En 1908 obtuvo el doctorado con una tesis de geometría sintética al estilo de Torroja y en 1913 se incorporó a la Facultad de Ciencias de la Universidad Central como Profesor Auxiliar de Geometría , iniciando así su separación paulatina de la carrera militar. Desde la fundación en 1915 del Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE fue un miembro activo del mismo junto a Rey Pastor. Esta situación académica en la capital duró poco, pues pronto se incorporó como catedrático a la Universidad de Valencia. Su vida y obra ha sido ampliamente estudiada por Javier Escribano en su tesis doctoral [130] y en [129].

> de Klein y Rey Pastor hemos inspirado nuestra obra en las grandes síntesis de los grupos de trasformaciones geométricas, cuyas propiedades invariantes caracterizan la Geometría del grupo. Claro está que por la índole elemental y objeto perseguido en el libro solo hemos podido referirnos a las transformaciones lineales y a la teoría de cónicas. [50, Prefacio]

Con esta clara orientación basada en los grupos de transformaciones, plantea la geometría proyectiva como marco general que se puede restringir, limitando el grupo, a la subgeometría afín y en un paso más a la geometría métrica euclidiana.

Por otra parte, el autor expresa de forma explícita su propósito de incluir aplicaciones a otras ciencias, dado que la los estudiantes de Cámara eran de Arquitectura o Químicas:

> En estas pocas páginas hemos perseguido, por una parte, la difusión de los métodos actuales de la Geometría Analítica dentro del campo elemental, y, por otra, despertar el estímulo de los que sólo ven en ella un eslabón de relativa utilidad para sus estudios posteriores. A este fin hemos procurado señalar en notas y ejercicios las conexiones con la Física, Química, Mecánica y otras aplicaciones; [...] [50, Prefacio]

El formato del primer libro de Cámara es similar al primero de Rey Pastor, cuenta con tres tipos de letra para indicar los niveles de profundización del mismo y con dos índices, el general y el alfabético, de materias y autores.

El libro se ocupa con más detalle de la geometría plana pero contiene un resumen de la geometría del espacio. Está estructurado en dos partes con títulos todavía clásicos, la primera (capítulo I, pp. 9-56) dedicada a las figuras de primera categoría (la serie de puntos y el haz de rectas) y la segunda (capítulos II-V, pp. 57-384) a las de segunda categoría (sólo el plano de puntos o rectas), precedidas por unas nociones preliminares (p. 1-8). En la segunda parte del libro introduce los vectores (capítulo II) y las matrices en el capítulo III, en cuya sección §5. *Transformaciones lineales*, se encuentra esta definición en coordenas homogéneas:

> Diremos que los dos campos de puntos están ligados por una *transformación lineal*, o que son *colineales* u *homográficos*, cuando se ha establecido una coordinación entre los puntos (x, y, z) del primero y los (x', y', z') del segundo definida por la

sustitución lineal de módulo distinto de cero,

$$\left.\begin{aligned} \rho x' &= ax + by + cz \\ \rho y' &= a'x + b'y + c'z \\ \rho z' &= a''x + b''y + c''z \end{aligned}\right\} \quad o \quad \begin{array}{c} \\ \rho x' \\ \rho y' \\ \rho z' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \hline \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \end{array} \equiv T \tag{5.3.1}$$

en la que ρ es un número, o magnitud arbitraria, distinto de cero. [50, p. 140]

Establece también que las colineaciones u homografías forman un grupo con el producto (composición) representado por el producto de sus matrices, que de este modo resulta realizado por el algoritmo fila-columna.

Para el caso de planos superpuestos, señala que la transformación T cambia las figuras de uno en otras del mismo, pudiendo existir puntos y rectas invariantes a los que denomina *dobles* o de *coincidencia*. Dichos puntos y rectas se determinan tomando el mismo sistema de referencia en los dos planos y luego haciendo $x = x', y = y', z = z'$ en (5.3.1). De donde resulta que el estudio de la colineación entre planos superpuestos conduce a la ecuación característica

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

En el estudio de esta ecuación de tercer grado en ρ distingue tres casos, a saber:

1. Si una raíz ρ_1 hace que la característica del determinante $D(\rho)$ sea 2, las tres ecuaciones se reducen a dos; y a esta raíz ρ_1 corresponde un solo punto doble, [...]

2. Si ρ_1 hace que la característica sea 1, corresponde a dicha raíz una serie de puntos dobles y un haz de rectas dobles; [...] La transformación se llama *homológica*, y las dos figuras planas correspondientes reciben el nombre de *homológicas*; siendo el vértice del haz de rectas dobles el *centro de homología*, y la serie de puntos dobles el *eje de homología*. La sustitución lineal deja invariantes todos los puntos del eje, el centro de homología, las rectas que pasan por el centro y el eje de homología.

3. Si ρ_1 hace que la característica sea 0, todos los puntos y rectas del plano son dobles y la transformación se llama *idéntica*. [50, p. 143]

Pero es más interesante que su estudio de la colineación según las raíces de su ecuación característica es que aborda la clasificación según los divisores elementales. En efecto, al final de la sección, en seis páginas de *Notas* escritas en letra pequeña, bajo el título de *Clasificación de las colineaciones* Cámara explica que "los divisores elementales de Weierstrass" permiten clasificar colineaciones, porque ellos[38] determinan

> elementos dobles; su posición relativa; los invariantes absolutos de la colineación, y las ecuaciones canónicas [50, p. 160]

Su exposición de la clasificación de colineación termina con la explicación de la tabla que sigue, presenta por el autor de este modo:

> Escribiendo en una horizontal los números (111 21 3), que indican el orden de multiplicidad de las raíces de $D(\rho) = 0$, y en una vertical, estos mismos números que expresen exponentes de los divisores elementales de Weierstrass, se forma el siguiente cuadro clasificador de las proyectividades, trazando horizontales y verticales:

Exponentes de los divisores elementales de Weierstras	Orden de multiplicidad de las raices: 1 1 1	2 1	3
1 1 1	$(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3)=0$ Un triángulo de elementos dobles; dos vértices, y los lados opuestos, pueden ser imaginarios conjs.	$(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)=0$ Homología con centro exterior al eje.	$(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1)=0$ Coincidencia de los dos planos; todos sus elementos son dobles
2 1		$(\rho-\rho_1)^2\ (\rho-\rho_2)=0$ Un punto y una recta dobles, incidentes; y otro punto y otra recta dobles, no incidentes.	$(\rho-\rho_1)^2\ (\rho-\rho_1)=0$ Homología con el centro en el eje.
3			$(\rho-\rho_1)^3=0$ Un solo punto y una sola recta dobles, incidentes.

Figura 5.1: Clasificación de colineaciones [50, p. 153]

[38]Cámara refiere a la breve nota de Rey Pastor sobre los divisores elementales que ya vimos en un apartado anterior de esta memoria.

El quinto y último capítulo *Elementos de la teoría general de las cónicas* se ocupa de la intersección de cónicas y los haces. Considera los puntos comunes a dos líneas de segundo orden dadas por la ecuaciones $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$, que se suponen irreducibles y sin factor común. $f + \lambda g = 0$ representa la cónica que pasa por los puntos comunes a ellas. Cámara explica que la condición para que ésta se descomponga en dos rectas distintas, o en una doble, es que el parámetro λ anule el discriminante:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} A + \lambda A' & H + \lambda H' & G + \lambda G' \\ H + \lambda H' & B + \lambda B' & F + \lambda F' \\ G + \lambda G' & F + \lambda F' & C + \lambda C' \end{vmatrix} = 0$$

Como en la clasificación de colineaciones, muestra que el estudio de esta ecuación determina la posición relativa de las cónicas, y obtiene una tabla similar [50, p. 380]. En notas a pie de página, encontramos las siguientes observaciones:

> Si en lugar de ser $f + \lambda g = 0$ una forma cuadrática ternaria lo fuese de n variables, el determinante $D(\lambda)$ tendría n líneas y la ecuación $D(\lambda) = 0$ sería de orden n. [...]
>
> El carácter elemental de este libro impide dedicar a los invariantes de los sistemas de cónicas todo el espacio que le corresponde; por ello nos limitamos aquí a dar sólo la interpretación geométrica de la anulación de los invariantes simultáneos remitiendo al lector que desee estudiar a fondo el asunto a la *Geometría Analítica* de Clebsch, Tomo I, a la de Salmon y a la *Theorie des formes* de Andoyer. [50, p. 380-81]

En cuanto a referencias, Cámara también sigue la nueva pauta, impuesta desde el Laboratorio Matemático, de reflejar las fuentes de información utilizadas por el autor. Así, en el prefacio del que ya hemos dado un para de citas, explica al final que para redactar su obra ha

> tenido en cuenta las obras de Geometría Analítica de Vegas, Bianchi, Castelnuovo, Berzolari, Bocher, Salmon-Fiedler, Clebsch, Ovidio, Nivenglowsky y otros autores que se citan en el texto. [50, Prefacio]

El seguimiento por parte de Cámara de las obras de estos autores extranjeros queda documentado en la amplia reseña que publicó el año 1920, en la revista *Revista Matemática Hispano Americana*, del primer volumen, segunda edición, del libro del italiano Luigi Berzolari [31]. Esta obra era la edición modificada de la primera publicada en 1911. Afirma

Cámara que una de las principales diferencias introducidas en la segunda edición es un "apéndice de análisis vectorial" de unas cincuenta páginas (sobre quinientas del volumen completo), con lo que el autor italiano se suma a "la tendencia cada vez más pronunciada a introducir este instrumento de cálculo en la Matemática elemental por lo mucho que simplifica la exposición de las propiedades métricas". También destaca el uso que Berzolari hace de las "transformaciones lineales". Hacia 1920, la presencia de estos lenguajes simbólicos marcaban la modernidad de la obra, y Cámara fue bien moderno entonces por iniciar su obra con el cálculo (álgebra) de vectores y por usar las transformaciones lineales como parte fundamental de su exposición. También era plenamente novedosa en el panorama español su clasificación de las colineaciones, y los haces por factores invariantes y divisores elementales.

Pero el libro no avanzó más allá de este primer boceto, estar en una universidad "de provincias", como se decía entonces, no ayudaba al autor a completar y mejorar una obra de estas características. Cuando Cámara llegó a la cátedra de la Central en 1935, como sustituto de Vegas, retomó el proyecto como veremos en una sección posterior. Entretanto, la implantación de los vectores en geometría, por la que Cámara había optado, avanzaba lentamente. En 1927 Cámara publicó otra interesante reseña, dedicada esta vez a la obra de B. Niewenglowsky [273], en la que glosaba el cuarto volumen de una obra sobre geometría analítica iniciada en 1907, y que entonces se completaba con un cuarto volumen en el que la geometría del espacio tridimensional se basaba en el cálculo con cuaternios; en esta reseña Cámara defiende la primacía del método vectorial.

También merece mención especial la referencia de Cámara a la obra del americano Maxime Bôcher (1867-1918), que era la principal referencias del momento en el mundo para el estudio de los factores invariantes y los divisores elementales de las matrices de polinomios.

Bôcher anunciaba en esa obra que se podía hacer un estudio similar con matrices de números enteros, pero no lo aborda. Se trataba de los "divisores elementales aritméticos" que mencionara Rey Pastor en 1917. Por los años veinte hubo un artículo de H. Weyl en la *Revista Matemática Hispano-Americana* [361] en el que hay una rápida y plenamente moderna introducción de los divisores elementales aritméticos como pórtico para el estudio del "análisis situs combinatorio" (topología) entonces incipiente. El autor expone la forma canónica diagonal de una transformación lineal entre grupos abelianos, donde los últimos coeficientes son los divisores elementales, poniendo de manifiesto su carácter invariante. Por entonces estas nuevas matemáticas no llamaron la atención de los matemáticos españoles.

Ecuaciones diferenciales: el intento fallido de Terradas, 1928-32

Esteban Terradas i Illa[39] (1883-1950) es uno de los principales científico-técnicos españoles de su tiempo. Fue catedrático de Análisis Matemático 3º (ecuaciones diferenciales) en la Universidad de Madrid entre 1928 y 1931, se incorporó por un procedimiento especial y fue destituido por motivos también confusos [299]; entonces tuvo que optar a la cátedra por oposición pero no pasó las pruebas, por lo que tuvo que abandonar definitivamente esa cátedra. Como acto de desagravio fue nombrado aspirante a la Academia de Ciencias, lo que aprovechó para ofrecer como discurso de ingreso, ya en 1932, el programa presentado en las oposiciones: *Programa de un curso sobre ecuaciones diferenciales* [342]

Su exposición está dividida en dos partes precedidas de una breve introducción (pp. 3-4), la primera se ocupa de los fundamentos del programa expuestos como un relato histórico (pp. 5-101) y la segunda del texto del programa y los comentarios al mismo (pp. 102-179). El contenido de las partes está a su vez dividido por apartados numerados en romano. Vamos directamente a considerar la segunda parte, donde encontramos el contenido del programa de Terradas desarrollado en 125 lecciones, de las cuales distingue las que conforman un mínimo de conocimientos (lecciones sin asterisco) de las que son opcionales (con asterisco). El programa está estructurado en tres secciones, una dedicada a las ecuaciones diferenciales ordinarias (lecciones 1-48), otra a las ecuaciones en derivadas parciales (lecciones 49-92) y por último una para los complementos (lecciones 93-125) en los que incluye las ecuaciones integrales, cálculo de variaciones, ecuaciones de la física matemática, ecuaciones en diferencias, entre otros. Cada una de las secciones comprende dos divisiones.

En la introducción el autor manifiesta que:

> [...] me he forjado la ilusión de que tal vez no desmereciera de solemnidad como la presente una breve relación de métodos, horizontes y problemas que se ofrecen al estudioso al recorrer el campo de las funciones definidas por dependencias entre sus valores en lugares bien determinados, especialmente cuando se hallan indefinida-

[39] Doctor en Física y también en Matemáticas (1905) por la Universidad de Madrid. Ingeniero Industrial (1909). Obtuvo la cátedra de Mecánica Racional en la Universidad de Zaragoza (1906-1907) y al año siguiente la de Acústica y Óptica en la Universidad de Barcelona (1907-1927). En 1928 se trasladó a Madrid para hacerse cargo de la naciente Compañía Telefónica y se incorporó también a la Universidad Central. Catedrático de Análisis Matemático en la Universidad de Madrid (1928-1931). Para completar su biografía, véase [300].

> mente próximos. Va a ser primera y última lección de un curso que no llegue nunca a explicarse, pero en cuya preparación puse cuanto estuvo de mi parte esperando pudiera aprovechar a la selección de estudiosos que lo siguiera. [342, pp. 3-4]

Nos fijaremos solo en la primera sección dedicada a las ecuaciones diferenciales ordinarias y, dentro de ella, en la segunda parte de titulada *Estudio monográfico de las ecuaciones diferenciales lineales.* Allí destacamos dos lecciones cuyo temario transcribimos a continuación:

> Lección 24. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes. –Relación de recurrencia entre los coeficientes de la solución holomorfa. –Ecuación característica. –Sustituciones de la forma $y = ze^{\alpha x}$. Examen del caso de tener la ecuación característica raíces iguales. –Demostración de que constituyen sistema completo. Caso de raíces imaginarias y coeficientes reales. –Error en la expresión analítica de la integral cuando se limita a la serie. –Ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes. –Integrales cuando el segundo miembro tiene expresión determinada. [342, p. 109]

> Lección 28. Ecuaciones diferenciales cuyas integrales son regulares, es decir, de la forma $(x - a)^k \varphi(x - a)$ ó $(x - a)^k [\log(x - a)]^n \varphi(x - a)$ siendo φ uniforme y k un valor complejo. –Permutación de las integrales alrededor de los puntos críticos de la ecuación diferencial. –Ecuación secular. –Caso de raíces distintas y determinación de los valores de k. –Caso de raíces múltiples en la ecuación secular. –Divisores elementales. Grupo de integrales y relaciones funcionales dentro de cada grupo. –Demostración del teorema de Fuch por Jordan. –Forma analítica de las integrales. –Condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación diferencial homogénea lineal tenga todas sus integrales regulares. –Caso del segundo orden y de un orden cualquiera. –Demostración de la convergencia de los desarrollos. –Caso de raíces de la ecuación determinante que difieran en un número entero. [342, p. 109-110]

En estas lecciones se puede apreciar que Terradas incluía en su curso no solo el estudio habitual de la ecuación secular o característica sino la aplicación a los sistemas de ecuaciones lineales de la teoría de los divisores elementales. En cierto modo, Terradas avanzaba en el uso de métodos algebraicos lineales en ecuaciones diferenciales ordinarias como Cámara lo había hecho en geometría analítica. La diferencia es que el curso de Terradas no se llevó a efecto y no hay constancia del modo y la amplitud con que hubiera podido llegar a desarrollar estos temas. Terradas destaca el carácter motivador del programa que propone, pues es consciente de la amplitud de su propuesta y pone de manifiesto que no es posible abarcarla debido a los prerrequisitos, entre los cuales bien podían figurar los métodos algebraicos lineales:

> Grandes secciones quedan fuera del programa, especialmente cuando exigen conocimientos previos muy dilatados; con todo, es de esperar que contiene los elementos que pueden contribuir a despertar el interés del neófito. [342, pp. 131]

Como orientación, en el propio *Programa*, después de la enumeración de las lecciones, hace comentarios sobre el material bibliográfico de referencia que propone:

> [...] las bibliotecas públicas en Madrid y en Barcelona, acaso también en Zaragoza, son lo suficientemente completas para incluir las obras de los grandes maestros, la Enciclopedia Teubner y colecciones de las revistas más importantes. Por razones didácticas y de lenguaje, por ser inmejorables en multitud de aspectos, se han elegido fundamentalmente obras francesas: los textos de Goursat (tomos II y III de su Tratado de Análisis, y libros sobre problema de Pfaff y ecuaciones en derivadas parciales de primero y segundo orden). [342, p. 125]

Después de estas referencias generales y unificadoras, Terradas se centra en "las ecuaciones ordinarias lineales y sus sistemas", respecto a las cuales afirma:

> No pretende agotar la materia, y el contenido del programa es sólo una introducción para que el estudiante pueda hallarse en condiciones de mayor adelanto sobre la base del tratado de Schlesinger, 1899, y su complemento hasta el día. Como quiera que el texto de Goursat es deficiente, se completa con otros, especialmente con el Ince, que es excelente, desde el punto de vista didáctico. [342, p. 131]

Sobre estas referencias cabe hacer algunas observaciones. El tratado de Ludwig Schlesinger (1864-1933), publicado en dos volúmenes (1895, 1898) [317] es la misma referencia que había dado García de Galdeano para avanzar en el estudio de estos temas:

> Pudiéndose estudiar detenidamente en la obra del profesor L. Schlesinger, *Handbuch der linearen Differentialgleichumgen* los descubrimientos de Herr Fuchs, bastará citar de entre éstos, el de la consideración de los puntos *críticos fijos* y sus cuatro categorías de puntos singulares. [104, p. 187]

Esta obra de L. I. Fuschs (1833-1902)[40] que Galdeano propone como un tema avanzado está incluida en el programa de Terradas, quien afirma:

> En la lección 28 comienza el análisis de puntos regulares y ecuaciones del tipo Fuchs con un estudio completo del caso de raíces simples y múltiples en la ecuación secular [...] [342, p. 132]

Por otra parte, el libro más didáctico que recomineda Terradas para mejorar en este punto al del francés Édouard Goursat (1858-1936) es *Ordinary Differential Equations* [197] (1926), del británico Edward Lindsay Ince (1891-1941), profesor de matemáticas en la Universidad de Egipto. Al final de la primera parte del libro, dedicada a la ecuaciones "en el dominio real", el autor coloca el capítulo IX: "La teoría algebraica de los sistemas diferenciales lineales", en el que pretende

> mostrar la muy estrecha analogía que existe entre la teoría de los sistemas diferenciales lineales por una parte y la teoría de las las ecuaciones algebraicas lineales simultáneas por otro. [342, p. 205]

Para ello incorpora las definiciones básicas de las formas bilineales y matrices remitiendo para la ampliación de estos temas al libro de álgebra superior de Bôcher[41], que surgió también como referencia para Cámara. Se observa pues, en Terradas y en Cámara, la coexistencia de referencias ya clásicas con otras de notable modernidad. Ambos intentaron promover la mejora de la enseñanza en sus campos respectivos incorporando a ellos como recurso los métodos algebraicos lineales pero, como no había asignatura previa de álgebra o análisis que enseñara previamente estos métodos, el tiempo disponible para el desarrollo de los programas impedía realizar en la práctica este tipo de progreso modernizador. Terradas, tras una breve experiencia, suponía que iba a ser así pero no pudo comprobarlo.

[40] Schlesinger, profesor de la universidad de Berlín, era discípulo de Fuschs y de Kronecker. Fusch había estudiado con Weierstrass y conocía bien la obra de éste y la de Riemann sobre ecuaciones diferenciales, tema que fue su especialidad.

[41] El matemático norteamericano Bôcher estudió en Alemania, no en Berlín sino en Gotinga, y fue un especialista en ecuaciones diferenciales que compuso una obra de gran difusión e influencia explicando el "método algebraico" necesario para estudiar las ecuaciones lineales, debido básicamente a Weierstrass, método aplicable tanto al análisis como a la geometría. En una reseña al primer volumen del *Handbuch* de Schlesinger aparecida en 1897 [35], Bôcher es algo crítico con el libro del alemán, por una parte porque faltan temas recientes y por otra porque el exceso de datos en los que considera ocultan en alguna medida los desarrollos principales. Los autores norteamericanos de las primera décadas del siglo XX cambiaron el estilo de los libros llamados a ser útiles en la enseñanza superior y empezaron a tener gran influencia también en Europa. El libro de álgebra superior de Bôcher es uno de los primeros libros norteamericanos que tuvieron influencia reseñable en España.

Cámara lo experimentó durante más tiempo en la periferia de Valencia, viendo cómo su proyecto se estancaba.

Una vez desprovisto Terradas de la cátedra de ecuaciones diferenciales, se ocuparon de impartirla Tomás Rodríguez Bachiller y Daniel Marín Toyos, pero la Guerra Civil se echó encima y habrá que recuperar la historia de este proceso una vez terminada. Del lado de la geometría analítica, Vegas se jubiló en 1935 y le sustituyó Cámara, pero se estrenó en Madrid prácticamente con la Guerra Civil y no pudo actuar realmente hasta que la contienda terminó.

5.3.2 Después de la Guerra Civil

Recuperada la actividad matemática, con mermas notables, tras la Guerra Civil, sólo queda dejar constancia de que apenas se amplía la enseñanza de los métodos algebraicos lineales, su aplicación a las ecuaciones diferenciales se estabiliza en la situación en que quedó antes de la sublevación militar de 1936 y en el campo de la geometría analítica se opera la mejora que supone la presencia de Cámara en Madrid, con la capacidad de acción que no tenía en Valencia. Tampoco la traducción de libros trajo conocimientos más avanzados. Pero sí que se aprecia en las publicaciones periódicas y en algunas obras que se va introduciendo la nueva imagen del álgebra que representó el álgebra de van der Waerden [344].

La asignatura Análisis Matemático 1º quedó desasistida tras la guerra por la represalia sufrida por el catedrático Barinaga, expulsado de la universidad, y por el exilio de su ayudante L.A. Santaló. Tuvo profesores provisionales hasta que Barinaga fue rehabilitado en 1946 y volvió a ejercer su cátedra cuando contaba cincuenta y seis años, continuó quince años más. Desde el plan de estudios de 1943 la asignatura mantenía el contenido tradicional pero su parte algebraica ya se llamaba "álgebra lineal", lo que significaba que la nueva álgebra iba llegando, por ejemplo se estudiaba el álgebra de matrices. No obstante, para que el álgebra lineal se incorpore completamente a la universidad española y se aplique claramente a la geometría y al análisis, hay que entrar en la segunda mitad del siglo, cuando se inicia otro capítulo bien diferenciado de esta historia: la historia del álgebra lineal en España. La modernización completa en este ámbito no sucedió hasta que se crearon en primer curso las asignaturas separadas Álgebra lineal y Cálculo infinitesimal; esto fue en los primeros años sesenta, en las reformas educativas que acompañaron a la

España de los Planes de Desarrollo de la segunda etapa del Franquismo.

Por eso en este apartado nos limitaremos a seguir el camino de los métodos algebraicos lineales en la geometría analítica y las ecuaciones diferenciales, lo que significa la terminación o extinción de la época anterior. Veremos también algunos ejemplos de obras traducidas sobre los temas de los que nos ocupamos y también rasgos anunciadores de los cambios que tardaban en llegar.

5.3.3 Geometría analítica: Cámara culmina su obra

Una vez instalado como catedrático en la Central, Cámara se aplicó a completar[42] la obra de geometría analítica que había iniciado en Valencia en 1920/21, aunque ya tenía limitado su horizonte profesional, se jubilaría en 1948. Antes, su obra tuvo dos ediciones, en 1941 y 1945, la última se hizo pensando más en su utilidad en las escuelas superiores de ingenieros por la gran cantidad de problemas y aplicaciones que ofrecía[43]. La obra fue ampliada[44] y mejoró en diversos aspectos, pero vio mermado su condición de moderna al mantener la división en geometría del plano y del espacio.

Empezaremos viendo que en lo que se refiere al uso de la ecuación secular y los divisores elementales no tuvo mejoras significativas respecto a la primera edición, de modo que lo que entonces fue un claro avance en modernidad no puede considerarse de igual modo veinte años después. Luego comentaremos la introducción del álgebra de matrices, que era una novedad en España.

Ecuación secular y divisores elementales

Al estar la obra dividida en geometría del plano y del espacio, algunos temas debían mostrarse dos veces si no se recurría a exponerlos de una vez en dimensión finita cualquiera. En la primera edición, principalmente de geometría plana, Cámara expuso y utilizó la ecuación secular y los divisores elementales, en un apartado complementario en letra de cuerpo menor, para clasificar colineaciones y haces de cónicas. En la segunda, al haber

[42] Reconoció la ayuda que encontró en su colega de cátedra José G. Álvarez Ude.

[43] Poco antes de fallecer, todavía hizo Cámara una cuarta edición en 1963 efectuando algunos arreglos. Como la primera edición, estas de la posguerra han sido estudiadas por J.J. Escribano en las obras ya citadas.

[44] La segunda edición fue un volumen de casi 700 páginas y la tercera, alcanzó las 755.

completado la exposición de la geometría del espacio, pasó a ésta la aplicación, pero sólo para los haces de cuádricas[45], de los divisores elementales, cuya explicación algebraica dio en el marco n-dimensional. Daremos una idea de su proceder en la edición de 1941.

Por una parte, en el "capítulo XVII. Propiedades principales de las cuádricas", encontramos una nota algebraica titulada "Propiedades de la ecuación característica", en la que Cámara se ocupa de la ecuación $D(S) = |a^i_j + b^i_j S| = 0$ obtenida al igualar a cero el determinante de la combinación lineal de las matrices de orden n, $\|a^i_j\| + S\|b^i_j\|$. La exposición algebraica es n-dimensional, aunque el contexto geométrico en el que tendrá aplicación es tridimensional. El autor realiza algunos cálculos para determinar en general, mediante determinantes, los coeficientes del polinomio $D(S) = 0$, pero enseguida se coloca en el caso particular con $\|b^i_j\| = -Id$ y $\|a^i_j\|$ simétrica[46], que escribe $|a^i_j + S\delta^i_j| = 0$ usando la delta de Kronecker. La nota comprende la demostración de la realidad de las raíces y de la perpendicularidad de los vectores asociados a dos raíces distintas. También el siguiente "Teorema de Weierstrass"[47]:

> Si una raíz S_1, de la ecuación $D(S) = |a^i_j + \delta^i_j S| = 0$ es múltiple de orden p, la característica de $D(S_1)$ es igual a $n - p$; y, recíprocamente, si para una raíz S_1 la característica es $n - p$ la raíz S_1 es múltiple de orden p. [51, p. 566]

Por otra parte, en el capítulo XVIII dedicado a la teoría general de cuádricas, en el "artículo III: Intersección de dos cuádricas", Cámara emplea los divisores elementales de Weierstrass para la clasificación de los haces de cuádricas como lo hiciera en la primera edición para el caso de las cónicas. Realmente lo hace un poco diferente, pues en el espacio se deja llevar por el punto de vista geométrico de la escuela de Torroja en la que hizo su doctorado, en el que el haz de cuádricas se representa por la curva "cuártica alabeada de primera especie" intersección de las cuádricas que definen el haz. De este modo, en vez de clasificar haces de cuádricas clasifica cuárticas alabeadas. Cámara escribe la ecuación de una cuádrica en la forma breve $f(x, y, x, t) = 0$ con coordenadas homogéneas, desplegando

[45] Como señala J.J. Escribano, evitó el tema correspondiente del plano para no caer en repetición y pensando que quien lo entiende en el espacio puede con cierta facilidad reproducirlo en el plano. Por otra parte, suprimir la clasificación de colineaciones puede deberse a que en la segunda edición centró la obra en los aspectos métricos, dejando la geometría proyectiva para un segundo volumen que no llegó a realizar.

[46] En cuyo caso, escribe, recibe el nombre de "*ecuación secular de Laplace*", por su aplicación en la teoría de las perturbaciones de los planetas.

[47] Cámara afirma que lo demuestra siguiendo a Karl Kommerell [222].

lo coeficientes de la matriz simétrica correspondiente sólo cuando lo considera imprescindible. El haz de cuádricas tiene pues la forma $f(x,y,x,t) + \lambda g(x,y,x,t) = 0$ y la cuártica asociada es la curva dada por las ecuaciones simultáneas $f = 0$ y $g = 0$. Cámara plantea el sistema homogéneo de las cuatro derivadas parciales $f_u + \lambda g_u = 0$, con $u = x, y, z, t$, cuya condición de compatibilidad es la anulación del determinante de polinomios (lineales) siguiente, que muestra ya los coeficientes de f y g:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} A+\lambda A' & H+\lambda H' & G+\lambda G' & L+\lambda L' \\ H+\lambda H' & B+\lambda B' & F+\lambda F' & M+\lambda M' \\ G+\lambda G' & F+\lambda F' & C+\lambda C' & N+\lambda N' \\ L+\lambda L' & M+\lambda M' & N+\lambda N' & D+\lambda D' \end{vmatrix} = 0.$$

Se trata de un polinomio en λ de grado n siempre que el determinante de g no se anule. Cámara estudia esta ecuación $D(\lambda) = 0$ probando, entre otras propiedades, que sus "raíces o valores característicos son invariantes para todas las transformaciones lineales o de coordenadas" y que

> La condición necesaria y suficiente para que a una raíz λ corresponda un punto incidente con su plano polar es que λ sea raíz doble, por lo menos, y la característica sea 3 a lo sumo. [51, p. 623]

A continuación Cámara expone la teoría de los divisores elementales de una matriz $\|A + \lambda B\|$ de orden n, volviendo a considerar la dimensión finita arbitraria en la exposición meramente algebraica, aunque luego la aplique al espacio tridimensional. Empieza con las mismas definiciones y notaciones que usara Rey Pastor en la nota que ya vista de *Elementos* [, p. 306], pero Cámara la desarrolla resumiendo en tres páginas en letra pequeña la exposición de Bôcher en su libro de *Álgebra* [36], que recomienda por su sencillez para el estudio de estos temas[48].

Empieza asociando polinomios D_h de la matriz $\|A + \lambda B\|$, con $h = 1, \dots, n$, siendo D_h el máximo común divisor de los menores de orden h, de modo que cada D_h divide a los de orden mayor y se tienen los polinomios $E_1 = D_1$, $E_h = \frac{D_h}{D_{h-1}}$ para $h = 2, \dots, n$, a los que llama "divisores elementales compuestos". Cámara explica (no demuestra, remite a Bôcher) que los D_h no cambian por las transformaciones elementales así definidas:

[48]Recomienda también la obra de 1932 de O. Schreier y E. Sperner [319], en la que se realiza un estudio integrado de geometría analítica y álgebra más avanzado que el planteamiento de Cámara, que se ajusta más a la obra de Bôcher.

621. Transformaciones elementales.- La teoría de los divisores elementales se apoya en las llamadas *transformaciones elementales* de una matriz, que son las siguientes:

1. La permutación de dos filas (o de dos columnas).
2. Producto de una fila (o columna) por una constante o por un polinomio en λ.
3. Suma de una fila (o columna) con otra fila (o columna) previamente multiplicada por un polinomio en λ o una constante. [51, p. 624]

En consecuencia, los divisores elementales compuestos son invariantes para la relación de equivalencia de matrices de polinomios definida por la aplicación sucesiva de transformaciones elementales. La matriz $\|A + \lambda B\|$ resulta equivalente a la matriz diagonal cuyos elementos no nulos son los E_h, cada uno divisor de los de orden mayor. Continúa su exposición factorizando D_n según sus raíces (ecuación característica $D_n = 0$) y llamando a los factores "divisores elementales simples". Con divisores de estos factores se pueden a su vez factorizar todos los divisores elementales compuestos E_h, con factores de la forma $(\lambda - \lambda_i)^{e_{ih}}$, siendo los exponentes e_{ih} corespondientes a cada raíz números crecientes a la vez que h. Estos números se ordenan formando el símbolo de Segre de la matriz que sirve para codificar su clase de equivalencia.

Tras la exposición resumida de la teoría algebraica general, Cámara expone el cuadro de símbolos de Segre posibles con $n = 4$ y pasa a estudiar las cuárticas correspondientes a cada caso en clave geométrica.

Con este tipo de exposición, la obra de Cámara representa una clara evolución respecto a la de Vegas hacia la fusión de la geometría analítica y el ágebra lineal, pero al confeccionar libros solo con la finalidad de que sirvan de texto para las asignaturas, la estructura del plan de estudios actúa como elemento limitador pues, al igual que dijera Terradas para las ecuaciones diferenciales, la necesidad de requisitos previos algebraicos impedía o dificultaba alcanzar los mejores niveles de explicación para la geometría. Como el álgebra lineal tenía un recorrido muy corto en la asignatura de Análisis matemático 1º, de la que no hubo libro de texo significativo desde los *Elementos* de Rey Pastor, Cámara se veía necesitado de incorporar el álgebra presida a lo largo de su exposición de la geometría. Además de la dificultad asociada a ajustar la materia a la duración de un curso o algo más, seguir dividiendo la geometría en plana y del espacio era una tradición que lastraba la algebrización que Cámara pretendió desde su primera edición planteando una geometría analítica basada en los vectores y no en la clásica formulación cartesiana.

Las ediciones siguientes del libro de Cámara no presentan cambios en este asunto. Podemos decir que la idea de la geometría analítica que Cámara plasmó en su libro de texto la tenía ya estudiada y concebida desde la primera edición de 1920, pero las circunstancias del país y de la universidad sólo le permitieron llevarla a cabo cuando ya resultaba superada por las nuevas corrientes de álgebra y geometría que introducirían en la universidad española los discípulos de Cámara.

El álgebra de matrices

El objetivo de este último apartado dedicado a Cámara es dar una idea cómo introdujo en las sucesivas ediciones de su obra geométrica la teoría de matrices, tema en el que sí se aprecian ciertos cambios. En la primera edición aparecen las matrices cuadradas para expresar las transformaciones y se multiplican como resultado de la composición de éstas, pero no se presentan como un objeto matemático con su propia teoría.

En la segunda edición de 1941 Cámara avanza un poco en la consideración de las matrices, reconociendo que son objetos matemáticos con su propia teoría. En el prólogo[49] las menciona como un elemento necesario para la exposición moderna de la geometría analítica, lo que justifica, como había hecho en la primera edición con los vectores, por la importancia de las matrices en las aplicaciones y también por razones de propia índole matemática. Cámara lo expresa de este modo:

> [...] atendiendo a la gran importancia que en la Física moderna tiene la teoría de matrices en relación con la estructura de la materia, aparte la gran simplificación que este instrumento de cálculo introduce en el campo de las transformaciones lineales y de las formas cuadráticas, hemos decidido introducirlo, aunque tímidamente por la inercia natural de la actual generación intelectual que quizá la considere innecesaria, con el deseo de ir familiarizando con ella al alumno desde su primera formación científica. [51, Prólogo]

Muy pronto, en el capítulo III dedicado a las transformaciones lineales de la recta proyectiva (en su concepción y lenguaje son los espacios rectilíneos "serie rectilínea" o los "haces" de rectas o planos), ya aparecen las matrices como un objeto que se aplica a las

[49]Este prólogo lo repitió en la edición de 1945. Tanto éste como el de la primera edición están reproducidos íntegros en la tesis doctoral de J. J. Escribano [130].

transformaciones lineales y se aprecia la notación que va a usar para las mismas. Cámara considera la transformación proyectiva de los "espacios rectilíneos" con la formulación clásica implícita $Axx' + Bx + Cx' + D = 0$ y en la forma explícita $x' = -\frac{Bx+D}{Ax+C}$, o bien en coordenadas homogéneas $\frac{x'}{y'} = -\frac{Bx+D}{Ax+C}$. En el apartado titulado "Aplicación de la teoría de matrices a la representación de las transformaciones lineales" empieza con la expresión matricial de las coordenadas:

> Si (x, y) son las coordenadas homogéneas de un punto o rayo le escribiremos, como en la teoría de matrices, como una matriz vertical de una sola columna y dos filas, así: $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$, o, $\begin{Vmatrix} x \\ 1 \end{Vmatrix}$. [51, p. 50]

Luego Cámara escribe la transformación lineal en la forma abreviada $P' = \tau P$ cuya expresión matricial es

$$\begin{Vmatrix} x' \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -B & -D \\ A & C \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (-Bx - D) \\ (Ax + C) \end{Vmatrix}$$

Explica que la transformación adjunta, el determinante y la inversa de la manera habitual. Igualmente el producto de matrices resulta de la aplicación sucesiva de las transformaciones:

> El producto de los $\tau\tau'$ es otra τ''. En efecto, de $P' = \tau P$ y $P'' = \tau' P'$ se deduce: $P'' = \tau'\tau P = \tau'' P$ en la que la matriz τ'' se forma multiplicando las filas de τ' (multiplicando) escrita a la izquierda, por las columnas de τ (multiplicador) escrita a la derecha, así:
>
> $$\tau'' = \begin{Vmatrix} -B'' & -D'' \\ A'' & C'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -B' & -D' \\ A' & C' \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -B & -D \\ A & C \end{Vmatrix} =$$
>
> $$= \begin{Vmatrix} B'B - D'A & B'D - D'C \\ -A'B + C'A & -A'D + C'C \end{Vmatrix}$$
>
> como puede comprobarse realizando las operaciones en la forma ordinaria. [51, p. 51]

A lo largo del texto y como de paso, Cámara aprovecha para dar las nociones de grupo, cuerpo, anillo, isomorfismo y automorfismo, aludiendo como referencia a Bôcher y V. Van der Waerden. En particular, encontramos en la nota que contiene la definición de grupo señala que el sistema de matrices de segundo orden con el producto no forma un grupo, pero si se excluyen todas las de determinante nulo entonces sí lo forman.

Un paso más da en el capítulo IV dedicado a los vectores, donde encontramos la nota II sobre matrices, en la que el autor señala que “las matrices pueden considerarse como una generalización de los vectores”, y por tanto se puede “construir una teoría análoga de matrices sobre un campo de racionalidad o cuerpo de números F”, considerando entre ellas igualdad, suma y producto por un escalar y la independencia lineal de filas o columnas. Cámara se refiere en general a matrices rectangulares:

> *Una matriz es un cuadro de números ordenados en filas y columnas.* Si se tiene n filas y m columnas con $n < m$ se dice que es *rectangular horizontal*; si es $n > m$ se llama *vertical*, y cuadrada si $m = n$. [51, p. 124]

Cámara explica la posibilidad de denotar los elementos de la matriz con subíndice para columnas y superíndice para filas[50], o bien con dos subíndices, señalando que esta última se emplea “cuando la matriz es la de una forma cuadrática”. Declara sus fuentes de información en este comentario final[51]:

> Con estos elementos se pueden considerar las matrices como entes que, con el auxilio de un cuerpo o anillo de números K, se defina con ellos un álgebra lineal de las matrices. (V. Dickson, *Linear algebras*; Mac-Duffee, *The theory of matrices*, y Wedderburn, J.H.M., *Lectures on Matrices*). [51, p. 124-25]

Consideradas la matrices como entes autónomos, Cámara plantea así su producto:

> En general, el producto de dos matrices tales que el número de elementos de cada fila de la multiplicando escrita siempre a la izquierda, sea igual al de los elementos de cada columna del multiplicador escrita a la derecha, efectuando la suma de productos de cada elemento de una fila de la izquierda por los correspondientes de

[50]Ya vimos en el apartado anterior ejemplos del uso de esta notación por Cámara, que llegó a introducir la notación tensorial y la abreviaturas en la escritura que basan en la presencia de índices y superíndices.

[51]Tras el cual indica que para un estudio completo de la teoría de matrices debe recurrirse también a la bibliografía “copiosísima que incluye Wedderburn en *Lectures on Matrices*”[51, p. 126]. Recomienda consultar el resumen y bibliografía contenida en la obra de Pascal [277].

> cada columna de la derecha, [...]
>
> $$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 & a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 & a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 \\ a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1 & a_3x_2 + b_31y_2 + c_3z_2 \end{Vmatrix} =$$
>
> $$= \begin{Vmatrix} (1,1) & (1,2) \\ (2,1) & (2,2) \\ (3,1) & (3,2) \end{Vmatrix}$$
>
> en cuyo último miembro el símbolo (i, j) significa la suma de productos de los elementos de la fila i^{sima} del multiplicando por la columna j^{sima} del multiplicador. [51, p. 125]

Cámara presenta la edición de 1945 como un simple arreglo de la anterior:

> En esta tercera edición hemos procurado subsanar los defectos de la agotada, revisando el contenido de la misma y modificando y ampliando detalles aclaratorios aconsejables para la mejor comprensión del texto por los estudiantes que comienzan el estudio de esta disciplina. [53, Prólogo]

Pero en lo que respecta al tema que recibe nuestra atención hay una diferencia significativa porque destaca de modo más visible el carácter autónomo de la teoría de matrices. Más que la ligera ampliación de contenidos que presenta respecto a la segunda edición interesa destacar que las matrices aparecen como parte de un preámbulo de la obra, que bien puede considerarse como un capítulo cero, dedicado a nociones previas geométrica por un lado y a las matrices por otro. Bajo el título *Nociones sobre matrices*, en apenas seis páginas (el doble que en la edición anterior), expone los rudimentos de la teoría con esta presentación:

> Un instrumento de cálculo que simplifica y sistematiza notablemente el desarrollo de muchas teorías y cuestiones de Geometría Analítica es la teoría de Matrices, de la que vamos a dar unas nociones preliminares, dejando otros desarrollos de la misma para introducirlos a medida que sean necesarios. [53, p. 11]

Al hacer el producto de matrices independiente de las transformaciones lineales, Cámara ya no duda en usar el producto fila-columna, ni siquiera menciona las otras posibilidades algorítmicas siempre mencionadas en los libros anteriores. Esa variedad de productos posibles queda superada por la siguiente afirmación:

> *el producto de dos matrices no es conmutativo*, en general, mientras que el producto de los correspondientes determinantes si lo es, puesto que el producto de dos determinantes puede realizarse con la misma regla que el de las correspondientes matrices y además no se altera el valor de un determinante cambiando sus filas por sus columnas.[53, p. 14-15]

Cámara, que daba por supuesto el conocimiento de los determinantes porque se estudiaban en la asignatura Análisis matemático 1º, se limita a recordar la regla del producto de determinantes del mismo orden, pero vista al revés, como el cálculo del determinante de una matriz poroducto de matrices cuadradas. Luego enuncia un teorema más general:

> Se demuestra también que el determinante de la matriz cuadrada producto de otras dos, una de m filas y n columnas por otra de m columnas y n filas, es una suma de determinantes de orden m de la multiplicando por los correspondientes de orden m de la multiplicador. [53, p. 15]

Para la demostración de este teorema remite a un artículo suyo titulado *Teoremas Elementales*, publicado en la revista elemental de la RSME el año 1941 [52].

Resultaba premonitorio que la reseña de la tercera edición del libro de geometría de Cámara fuera hecha por Pedro Abellanas, entonces catedrático reciente con destino en Zaragoza, que fue quien, una vez trasladado a Madrid y con la llegada de nuevos planes de estudios, ya en la segunda mitad del siglo, incorporó definitivamente a la matemática universitaria española una geometría analítica plenamente algebraica. Respecto al uso por Cámara de las matrices, Abellanas escribió:

> En cuanto a la teoría de matrices, es empleada a lo largo de todo el libro en la parte que podríamos decir complementaria del mismo, así se hacen aplicaciones de la misma en el estudio de las proyectividades, de las transformaciones euclídeas, en el estudio general de cónicas y cuádricas y en la teoría de los divisores elementales de Weierstrass. [7, p. 217]

Al mencionar la parte complementaria del libro Abellanas alude a los apartados en letra de cuerpo menor que proliferan a lo largo de la obra, llevando al lector más allá de lo que es la parte central imprescindible formada por las lecciones de un curso académico anual. También en este aspecto, diseñando el libro así, Cámara siguió a Rey Pastor, de modo que los Elementos de uno y otro, uno de análisis algebraico y el otro de geometría analítica presentan sin duda paralelismos, entre otros que ambos pretenden modernizar los cursos que imparten añadiendo al libro de texto propiamente dicho páginas complementarias que proponen un estudio más avanzado, incluyendo referencia a obras de actualidad. Rey Pastor no cambió sus *Elementos* desde 1930, mientras que Cámara completó y actualizó los suyos en los primeros años cuarenta, lo que le permitió incorporar referencias algebraicas más actualizadas.

Mientras Cámara hacía sus libros los protagonistas de la nueva actualización se iban preparando. La edición de 1941 del libro de Cámara sirvió de motivo para la publicación de artículos explicativos de cuestiones allí tratadas. En la revista *Matemática Elemental*[52] encontramos dos artículos de Francisco Botella Raduán (1915-1987), futuro catedrático de geometría en Madrid, en los que difunde criterios metodológicos consistentes al desarrollo en paralelo de temas algebraicos y geométricos [40, 39].

En lo que a la elaboración de libros de texto universitarios de amplia difusión e influencia, correspondió a Pedro Abellanas Cebollero[53] (1914-1999), una vez instalado en su cátedra de Geometría proyectiva en Madrid el año 1949, el papel de continuador de Cámara. Pero esto sucedió a finales de los años cincuenta y principios de los sesenta. Encontramos en el volumen de 1957 de la *Revista Matemática Hispano-Americana* una publicación de Abellanas titulada *Matrices de polinomios en varias indeterminadas* [8], de once páginas, dividida en 3 secciones dedicadas respectivamente a los factores invariantes de una matriz de polinomios, las transformaciones elementales y la forma canónica diagonal. Con este trabajo, cuya única referencia es el segundo volumen del álgebra de van der Waerden [344], Abellanas recoge en una revista española y con la imagen de la nueva álgebra los resultados que Cámara había expuesto en líneas generales resumiendo a Bôcher [36].

[52] La revista tenía como finalidad "vulgarizar la matemática y a despertar la vocación a estos estudios entre el elemento escolar". Desde 1941 se publicaba, igual que la *Revista Matemática Hispano-Americana*, la otra revista de la RSME, conjuntamente con el Instituto Jorge Juan del Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, la instituciones franquistas sustitutas del Laboratorio Matemático y de la JAE.

[53] Véase la biografía realizada por T. Recio [295].

5.3.4 Las ecuaciones diferenciales de Marín Toyos

Tras el breve periodo de Terradas a cargo de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ciencias de Madrid, esta materia quedó a cargo de Daniel Marín Toyos[54] (1890-1948) a partir de 1935. Apenas pudo ejercer esta función porque en 1937 fue separado de su cátedra, siendo reintegrado tras la Guerra Civil. Poco después, en 1942, publicó un libro de texto titulado *Tratado de ecuaciones diferenciales* [253] que se utilizó también en otras universidades. Le acompañó en sus clases de la materia hasta su fallecimiento en 1948, todavía lejos de la edad de jubilación.

El libro de Marín Toyos era menos ambicioso que el programa de Terradas, se ajustaba a las necesidades docentes. Reproducimos a continuación unos párrafos del prólogo:

> Es empresa nada fácil el componer una obra sobre Ecuaciones diferenciales adaptada a las necesidades de la enseñanza en España. El campo es por sí tan extenso que vacila el ánimo al tratar de formar el plan de redacción de un trabajo que por fuerza ha de acomodarse a la preparación matemática de los estudiantes españoles y a la organización de los cuadros oficiales de los cursos en las Facultades de Ciencias y en las Escuelas especiales de Ingenieros y Arquitectos. [...]
>
> Se pretende, pues, con el presente volumen, no agotar ningún tema, sino orientar al lector en las distintas teorías que forman hoy parte del estudio de las Ecuaciones diferenciales. [...]
>
> Se ha procurado, según se ha dicho, simplificar en la medida de lo posible todas las teorías, sin merma del rigor científico. [...]
>
> Sólo nos anima un deseo, a saber: facilitar a los estudiosos el conocimiento de las más útil y de mayor aplicación rama del Análisis matemático, y sólo nos guía un propósito, siquiera sea malogrado: contribuir dentro de la modestia de nuestros medios a liberar a España del vasallaje de tener que recurrir a la bibliografía científica extranjera tan pronto se pretende profundizar un tanto en el campo de la Ciencia. [253, p. v-vi]

En la bibliografía que propone Marín Toyos todos los libros son extranjeros, excepto un

[54] Nacido en Haro, en la entonces provincia de Logroño, fue Licenciado en Ciencias Exactas y Doctor (1911), ambos con premio extraordinario. Ejerció como profesor de universidad e ingeniero geógrafo, situación común en su tiempo. Fue profesor en la Universidad de Zaragoza y en 1918 catedrático en la de Barcelona, donde permaneció hasta ser nombrado en 1935 catedrático de Análisis matemático 3º (Ecuaciones diferenciales) de la Universidad de Madrid, [275, pp. 423-24].

libro de análisis matemático para ingenieros que había publicado V. Navarro Borrás el mismo año 1942. En la lista seguía estando el ya veterano tratado de Schlesinger que recomendaran García de Galdeano y Terradas.

No nos corresponde describir la obra más que en lo relativo al uso de métodos algebraicos lineales en el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, tema ubicados en el sexto capítulo de la primera sección del libro, la dedicada a las ecuaciones diferenciales ordinarias. Nos limitaremos a decir que el uso que Marín Toyos realiza de la ecuación secular o característica para la integración de los sistemas lineales de primer orden con coeficientes constantes es similar a la realizada por García de Galdeano, si bien con un mayor cuidado expositivo.

Como curiosidad, digamos que uno de los ejemplos prácticos propuestos por Marín Toyos, aunque no lo declara, está sacado del libro de Galdeano. Se trata del sistema

$$\frac{dx}{dt} + 4x + 3y = t, \quad \frac{dx}{dt} + 2x + 5y = e^t,$$

que ya consideramos en el apartado que dedicamos al catedrático de Zaragoza. Allí vimos cómo el ejercicio fue resuelto por García de Galdeano con una solución directa que no seguía el método general; ahora, Marín Toyos lo resuelve por el dicho método. Marín explica también ejemplos de tres ecuaciones y con raíces complejas, lo que Galdeano no hizo.

La afección de Marín Toyos hacia García de Galdeano quedó reflejada en las palabras que le dedicó al final del prólogo:

> En nuestra Patria, los tratadistas de Cálculo integral suelen terminar sus trabajos con algunos capítulos dedicados a las Ecuaciones diferenciales de tipo más sencillo. Pero es de justicia rendir aquí un tributo de veneración a un insigne profesor español: Don Zoel García de Galdeano. Regentando la cátedra de Cálculo infinitesimal de la Universidad de Zaragoza publicó don Zoel, en 1906, un volumen de más de 800 páginas titulado “Teoría de las Ecuaciones Diferenciales”, en donde recogió buena parte de las materias clásicas en esta rama del Análisis matemático. ¡Honor al sabio maestro, ya desaparecido! [253, p. vii]

Un paso adelante en la modernización de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales llegó también, como en el caso anterior, hacia finales de los años cincuenta y principios de los sesenta en la persona de Alberto Dou[55] (1915-2009).

5.3.5 Nota sobre traducciones

En este apartado señalaremos, en relación con las obras comentadas de Cámara y Marín Toyos, la presencia en competencia editorial de algunas traducciones.

Empezando por Marín Toyos, entre las referencias incluidas en su obra no aparecía una que había sido ponderada por Terradas en su programa de 1932, precisamente en relación con los métodos algebraicos lineales aplicables a los sistemas de ecuaciones diferenciales, nos referimos al libro de E. L. Ince ya comentado [197]. En 1943 apareció traducido no este libro principal de Ince, sino uno más elemental y parecido a lo que en España se estaba enseñando. Se trata de la obra *Integración de ecuaciones diferenciales ordinarias* [42] que el autor británico preparó con fines escolares recogiendo la parte más simple de los métodos de integración. Así lo expresó en el prólogo:

> El objeto de este libro es el de facilitar, resumidos en forma concisa, los métodos de integración de los tipos más corrientes de ecuaciones diferenciales ordinarias, y se ocupa en particular de la integración de aquellas ecuaciones originadas por la consideración de problemas de Geometría o de Matemática Aplicada. [...]
>
> Da por demostrados los teoremas de existencia de soluciones y por ello, los lectores que deseen estudiar más a fondo la base teórica de los métodos aquí esbozados, pueden consultar mi tratado sobre Ordinary Differential Equations (Longmans, Green & Co., Ltd., 1927). En cambio, hallarán en él todo el material que precisan nuestros estudiantes universitarios, no especializados en ecuaciones diferenciales, cubriendo también las necesidades de los estudiantes de Física Matemática y especialidades técnicas. [42, Prefacio]

En el capítulo quinto dedicado a las ecuaciones lineales está el apartado "Sistemas lineales con coeficientes constantes" (pp. 117-120), en el que solo trata con sistemas de dos ecuaciones $\frac{dx}{dt} = lx + my$, $\frac{dy}{dt} = ax + by$. Considerando soluciones $x = Ae^{rt}$, $y = A_1 e^{rt}$ llega a la ecuación $r^2 - (b+l)r + bl - am = 0$. En los ejemplos esta ecuación aparece escrita en forma de determinante. Comparado con este nivel expositivo, lo expuesto por Marín Toyos es algo más completo.

[55]Véase el artículo sobre Dou escrito por J.I. Díaz [112].

La obra original de Ince es de 1939 [198] y forma parte de una colección de textos breves monográficos de las universidades de Oxford, Cambridge, Londres, Edimburgo, etc., dirigida por Alexander C. Aitken y Daniel E. Rutherford. La Editorial Dossat, con sede en Madrid y Buenos Aires, obtuvo los derechos de traducción en lengua castellana, formando en los años cuarenta la colección española bajo la dirección de Tomás Rodríguez Bachiller, cuyos libros tuvieron diversas reediciones.

El propio director de la colección tradujo para la misma la obra de A.C. Aitken sobre *Determinantes y matrices* [301], cuyo índice es:

I. Definiciones y operaciones fundamentales con las matrices

II. Definición y propiedades de los determinantes

III. Matriz adjunta y matriz recíproca: resolución de ecuaciones simultáneas: rango y dependencia lineal

IV. Desarrollo de Cauchy y de Laplace. Teoremas de multiplicación

V. Matrices y determinantes compuestos. Teoremas duales

VI. Determinantes especiales: Alternante, pesimétrico, bigradiente y centrosimétrico, Jacobiano, Hessiano, Wronskiano

Al revés que en el título, el autor empieza por las matrices, de las que realiza un estudio autónomo pero advirtiendo que hay que pensarlas como transformaciones lineales:

> Para resumir, la matriz $A \equiv [a_{ij}]$ es el esquema de los coeficientes destacados de alguna transformación lineal actual o posible. No es un símbolo inerte, sino que hay que imaginarla como un operador. [301, p. 6]

El estilo del libro es similar a lo que podemos encontrar en los libros de Rey Pastor y Cámara ya comentados, pero ningún autor español realizó un compendio tan completo y accesible de esta materia. Pero los determinantes seguían dando lugar, durante los años cuarenta, a algunos trabajos que publicaban las revistas españolas: uno de M. Calderón en la *Revista Matemática Hispano-Americana* de 1945 sobre determinantes rectangulares [49] a los que extiende algunas propiedades de los determinantes cuadrados; y, en la revista elemental, el artículo de S. Dwinas [119] expresando una fórmula de estadística en forma de determinante.

5.3.6 Nota final: hacia el álgebra lineal

A partir de 1943 aparece de forma explícita la expresión "álgebra lineal" en los planes de estudio universitarios. En ese año se promulga la Ley de 29 de julio sobre ordenación de la universidad en cuyo desarrollo[56], al determinar el contenido de la asignaturas de análisis matemático del primer curso, asigna el calificativo de álgebra lineal a los mismos temas que hasta ahora veníamos recogiendo como métodos algebraicos lineales, básicamente determinantes y sistemas lineales, pero añadiendo el álgebra de matrices. Completaban el curso: número real, número complejo y cálculo diferencial, un programa muy similar al anterior, que impartiría Barinaga desde su reincorporación en 1946 hasta su jubilación en 1960.

Si recordamos que Cámara se jubiló en 1948, el año de fallecimiento de Marín Toyos, y que Álvarez Ude se había jubilado dos años antes, cuando fallecía también prematuramente Olegario Fernández Baños, entonces catedrático de Estadística matemática, vemos que finalizando el primer cuarto del siglo XX, poco después del cambio legislativo, se producían en la Facultad de Ciencias de Madrid, que era la fuente principal hasta entonces de los libros de texto universitarios con influencia en todo el país, un número de bajas casi simultáneas que obligaría a una sensible renovación del profesorado.

Justo antes de promulgarse la nueva ley, en 1942, las cátedras de Geometría analítica de Barcelona y Zaragoza fueron obtenidas, respectivamente, por Botella y Abellanas. A partir del traslado de ambos a Madrid, Abellamas en 1949 y un año después Botella, se fue gestando la incorparación de la nueva álgebra moderna a la universidad española. Algunos matemáticos jóvenes, principalmente el propio Abellanas y Federico Gaeta (1923-2007)[57], ya introducían el álgebra moderna en sus trabajos de investigación sobre la moderna geometría algebraica, de la que los aspectos que tratamos sobre geometría analítica no son sino su parte más elemental. Pero ahora nos ocupamos de la medida en que la nueva imagen del álgebra era divulgada hacia toda la comunidad matemática española.

En los primeros números de la nueva serie de posguerra iniciada por la revista *Matemática Elemental*, en los que también publicaron Cámara y Botella como hemos visto en un

[56] Órdenes ministeriales de 4 se de septiembre de 1943 (BOE del 7 de septiembre de 1943). Decreto de 7 de julio de 1944 (BOE del 4 de agosto de 1944) [275, p. 407].

[57] Véase por ejemplo, sin citar publicaciones en revistas extranjeras, su artículo [161] en la *Revista Matemática Hispano-Americana*, donde en escasas cuatro páginas presenta la extensión simple de un cuerpo empleando matrices.

apartado anterior, Abellanas inició un trabajo en cinco entregas (sólo una en 1941, el resto en 1942) [5], publicado bajo el epígrafe "Divulgación matemática", en el que desarrollaba un curso de "Teoría de grupos", ese era el título del artículo, en la línea del álgebra de van der Waerden, que figuraba como referncia junto a otras obras con la de Schreier y Sperner que también recomendara Cámara. En realidad, Abellanas hace algo más que teoría de grupos, pues incluye "grupos con operadores" que no son sino módulos sobre un anillo y termina con el teorema "fundamental de grupos abelianos con un número finito de generadores" que engloba a los divisores elementales aritméticos y polinómicos, pues considera "un grupo abeliano G que tiene por dominio de operadores U un anillo euclídeo", condición de los operadores que cumplen los números enteros y los polinomios sobre un cuerpo.

Además de esta difusión de "álgebra pura", aparecieron también artículos en los que se daba a conocer el vínculo entre la geometría y el álgebra. Por ejemplo, Abellanas publicó en 1943, en la revista de investigación [6] un artículo sobre los "números elementales" en las cuádricas y J. Molina otro sobre el mismo tema de geometría numerativa en la revista elemental [261], basado en la obra de van der Waerden y Abellanas[58].

Pero esta sucinta enumeración de trabajos significa más el inicio de una nueva etapa de la matemática española, la que sigue, con una mezcla de salto y continuidad, a la que hemos venido considerando hasta ahora.

Terminaremos viendo someramente otras líneas de desarrollo que confluyeron en la llegada definitiva del álgebra lineal a España después de 1950.

Sistemas hipercomplejos

La aparición de los sistemas hipercomplejos esta inspirada, como su nombre lo indica, en la búsqueda de la ampliación del campo de los números complejos. Surge así el sistema de los cuaternios, presentado por William Rowan Hamilton (1805-1865) en 1843 durante una reunión de la Real Academia Irlandesa [174]. Los cuaternios se introdujeron como expresiones $Q = w + ix + jy + kz$ en las que se suponía que no existe ninguna relación lineal entre la unidades imaginarias i, j, k, y con las que se operaba con las reglas habituales de

[58]Abellanas había permanecido unos meses en 1942, en plena guerra, especializándose con van der Waerden en Leipzig, véase [295].

la artimética más los nuevos productos

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j;$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Paralelo al trabajo de Hamilton, pero sin tener la misma acogida, se desarrolló la teoría de la extensión de Hermann Gunther Grassmann (1809-1877) de 1844 [171], que se considera fundadora del álgebra lineal, multilineal y exterior[59]. En el texto *Lecciones sobre números complejos y sus funciones. I. Teoría del sistema de números complejos / Theorie der complexen Zahlensysteme* (1867) [176], Hermann Hankel (1839-1873) presenta la teoría de Grassmannn, así como la de Hamilton y el principio de permanencia de las leyes formales, previamente enunciado aunque de manera incompleta por Peacock.

Estos avances ya fueron conocidos y brevemente difundidos por Rey Pasotor desde la primera edición de *Elementos de Análisis algebraico* (1917). Allí presentó los "números complejos de varias unidades" con su suma, pero dando cuenta las dificultades que presentaba multiplicarlos con permanencia completa de las leyes formales de la aritmética, lo que le llevó a exponer[60], el que llamaba "teorema final de la aritmética":

> No existe ningún sistema de números complejos de más de dos unidades en que el producto satisfaga á todas las leyes formales de la aritmética. [286, p. 481]

Sentado esto, señaló que los "números alternados de GRASSMANN" presentan números distintos de cero cuyo producto es nulo y realizó una breve introducción a los "cuaternios o cuaterniones introducidos por HAMILTON". En las notas finales del capítulo, el último del libro, indica que el teorema final de la aritmética se debe a Weierstrass (1863) y que fue Frobenius quien demostró que excluida sólo la conmutatividad los cuaternios son la única posibilidad de números complejos de más de dos unidades, pero no dio la demostración de este resultado.

[59]Véase lo publicado por Fearnley-Sander [143].

[60]Con demostración sólo para tres y cuatro unidades complejas, indicando como referencia para la demostración general la obra de O. Stolz y J.A. Gmeiner *Theoretische Arithmetik*, Leipzig, Teubner, 1909, una de sus referencias básicas para los sistemas de números y la aritmética. También indicó las dos reconocidas obras de Ch-A. Laisant [236] y de P. Tait [341].

Es también importante reseñar que Rey Pastor enunció y demostró el "teorema fundamental de los números complejos":

> Todo número complejo x, de n unidades, es raíz de una ecuación algebraica, de grado n á lo sumo, con coeficientes reales. [286, p. 481]

Este teorema es la primera versión del famoso teorema de Hamilton-Cayley de las matrices, pero Rey Pastor no se ocupó de las matrices y no dio esta conexión.

Los desarrollos de los números hipercomplejos llevaron al concepto de álgebra lineal asociativa finito-dimensional presentado por Benjamin Osgood Peirce (1809-1880) ante la Academia de Ciencias de Washington, que se publicó en forma de libro litografiado de 153 páginas con el título *Álgebra lineal asociativa* (1870). Por esta vía se llega a las obras de los algebristas Joseph Henry Maclagen Wedderburn (1882-1948) y Leonard Eugene Dickson (1874-1954) que fueron citadas por Cámara como referencias para la teoría de matrices que apenas iniciaba en su libro de geometría.

Espacios vectoriales y módulos

A partir de las abstracciones algebraicas realizadas por Grassmann del cálculo geométrico y de otras influencias[61], Giuseppe Peano (1858-1932) fue el primero en dar una definición axiomática de un espacio vectorial. Lo hizo en su libro *Cálculo geométrico según la teoría de la extensión de H. Grassmann; precedido de las operaciones de la lógica deductiva* (1888) [288], en cuyo prólogo se expresó así:

> El cálculo geométrico consiste en un sistema de operaciones análogas a las del cálculo algebraico, pero en el que los entes en los que se ejecutan los cálculos, en vez de números, son entes geométricos. [288, p. v]

En el capítulo introductorio da las bases para el cálculo de las operaciones entre conjuntos introduciendo la notación moderna $\cup, \cap, \in$, para la intersección, unión y pertenencia. Igualmente se destaca por contener una introducción casi moderna a los espacios vectoriales y álgebra lineal, escribiendo siempre en un contexto geométrico. Una segunda axiomatiza-

[61] Desde Leibniz y su cálculo geométrico de 1679 hasta el cálculo baricéntrico de August Ferdinand Möbius (1790-1868) y las equipolencias de Giusto Bellavitis (1803-1880) y los cuaternios de Hamilton.

ción de espacio vectorial tuvo lugar en 1898 en su artículo *Análisis de la teoría de vectores* en el cual introdujo una estructura adicional que viene dada por el producto escalar.

El inicio de la difusión de los espacios vectoriales tiene lugar con la publicación del libro *Espacio. Tiempo. Materia. Lecciones sobre la relatividad general* (1918) de Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955). Para lograr la fundamentación matemática para el estudio de la teoría de la relatividad general desarrolla, de modo más depurado que Peano, una presentación axiomática de lo que hoy se conoce por el espacio vectorial, la geometría afín y la métrica euclídea introducida por un producto escalar.

Hacia 1920 la noción abstracta de espacio vectorial fue retomada por Stefan Banach (1892-1945), Hans Hahn (1879-1934), Norbert Wiener (1894-1964) y Emmy Amalie Noether (1882-1935) quienes la direccionarían en torno al análisis funcional y a la teoría de anillos. Esta evolución llevó a G.H. Moore a plantear así los orígenes del álgebra lineal:

> El álgebra lineal moderna esta basada sobre espacios vectoriales, o más generalmente, sobre módulos. La noción abstracta de espacio vectorial fue aislada por primera vez por Peano (1888) en geometría. No fue influyente, ni cuando Weyl la redescubrió en 1918. Hacia 1920 fue redescubierta de nuevo por tres analistas —Banach, Hahn, y Wiener— y una algebrista, Noether. Entonces la noción se desarrolló rápidamente, pero en dos áreas diferentes: análisis funcional, con énfasis sobre espacios vectoriales normados infinito dimensionales, y la teoría de anillos, enfatizando los módulos finitamente generados los cuales no suelen ser espacios vectoriales. Incluso antes de Peano, una noción más restringida de espacio vectorial sobre los números reales fue axiomatizada por Darboux (1875). [262, p. 262]

En los años cuarenta hubo señales de la llegada a España de estas tendencias del álgebra abstracta. Ya vimos que Abellanas había difundido en *Matemática elemental* (1941) la teoría de grupos, incluyendo al final la clasificación de "grupos abelianos con operadores", que eran un tipo de módulos. Por los mismos años, Ricardo San Juan Llosá (1908-1969) impartió un curso en la Fundación Conde de Cartagena [216], dirigido a explicar el fundamento matemático del análisis dimensional de los físicos, en el que seguía a van der Waerden en la exposición previa de grupos, anillos, cuerpos y álgebra lineal[62].

[62] R. San Juan fue el discípulo español predilecto de Rey Pastor, catedrático de Análisis matemático 2º en la Universidad de Madrid. Ayudó a Rey Pastor en la preparación de sus libros de texto, particularmente en la versión final de *Elementos*. En la segunda edición de esta obra (1922) Rey Pastor había incluido, al final del capítulo dedicado al número racional, un apartado no esencial sobre "teoría de las magnitudes"

En cuanto al espacio vectorial expuesto en trabajos de análisis funcional, tema que se aleja de nuestro estudio, baste citar la monografía de J. M. Íñiguez Almech *Operadores lineales en los espacios métricos*, publicada en Zaragoza en 1946 [199], en la que se estudian espacios vectoriales complejos, espacios de Hilbert y valores propios de las transformaciones lineales entre ellos.

La anterior sucinta enumeración de trabajos significa más el inicio de la nueva etapa de la matemática española que sigue tras 1950, caracterizada por la llegada de la "matemática moderna", que una culminación, con una mezcla de salto y continuidad, de la que hemos venido considerando en esta memoria de doctorado.

en el que presentaba una primera idea de las nociones abstractas vinculadas a las magnitudes geométricas y físicas.

Capítulo 6

Sistemas y Determinantes en Colombia 1850-1950

En el capítulo final de esta memoria estudiamos los sistemas de ecuaciones lineales y determinantes en la matemática superior colombiana de la segunda mitad del siglo XIX y primera del XX. Durante este periodo el país vivió una inestabilidad social, política y económica característica de la construcción de un proyecto de estado-nación después de su independencia en 1810. Haremos mención a distintas denominaciones del país, según el periodo, es decir, la Nueva Granada (1832-1857), Estados Unidos de Colombia (1869-1886) y de ahí en adelante el nombre actual, *República de Colombia*. En todo caso, hubo preocupación de sus dirigentes por el estudio de las ciencias[1], lo que conlleva a la puesta en marcha en 1848 del *Colejio Militar*[2] orientado hacia la formación en ingeniería civil y militar. A mediados del primer gobierno (1845-1849) del general Tomás Cipriano de Mosquera (1798-1878) se creó el Colegio, se impulsó también la importación de libros y la puesta en funcionamiento del observatorio astronómico. El colegio sufrió cierres permanentes debido a la situación social y política de la Nueva Granada, y un cierre duradero se dio en 1854. Fue puesto en funcionamiento de nuevo en 1866, para un tercer mandato (1866-1867) de Mosquera, y al año siguiente pasó a formar parte de la naciente *Escuela de Ingeniería* de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia[3].

En el capítulo se hace el seguimiento de la temática lineal que nos ocupa en textos de álgebra publicados en Bogotá en la época de nuestro estudio, que reflejan de algún modo el estado de la materia en Colombia. La primera sección se dedica a los libros que se publicaron a lo largo de la segunda mitad del siglo XIX, junto con una breve nota sobre las publicaciones periódicas que hubo entonces. En la segunda sección veremos lo poco que evolucionó el tema durante la primera mitad del siglo XX; en realidad podríamos decir del primer cuarto, pues durante el segundo el estado de la educación en matemática fue estacionario.

[1]Hubo varios intentos durante cuarenta años, veáse [365, pp. 255-260]
[2]Decreto Orgánico de 20 de julio de 1847.
[3]Un estudio de las matemáticas en Colombia puede verse en [312, ?].

6.1 Los autores del siglo XIX

Por orden cronológico, describiremos la obra de tres autores que dominaron el panorama colombiano[4] en el tema que nos ocupa desde el Colegio Militar hasta la Universidad Nacional de Colombia. Se trata de Pombo, Liévano y Rueda, el último de los cuales se proyectó largamente en el siglo XX.

6.1.1 L. de Pombo, 1858

Lino de Pombo O'Donnell[5] (1797-1862) fue profesor de matemáticas en la Universidad del Cauca (1830-1833) y en el Colegio Militar[6] desde su fundación en 1848 hasta su cierre en 1854.

Tras un periodo de formación en España, a su regreso al país, Pombo se reintegró al cuerpo militar, y fue enviado al departamento del Cauca. Allí alternó sus actividades militares con la academia. En 1829, solicitó la baja definitiva de las fuerzas militares para dedicarse a labores administrativas y docentes. En su discurso[7]. pronunciado en Popayán en 1830, con motivo de la apertura de estudios en la Universidad del Cauca, como catedrático de Matemáticas Pombo se refirió "a las letras, las ciencias y las artes" en estos términos:

> La Francia, la Inglaterra, la Alemania y la Italia, las recibieron con entusiasmo, las cultivaron con afición y las protegieron con esmero.

En este contexto, Pombo nos ubica en un atraso de dos siglos en comparación con la Europa avanzada:

> Nuestro país marchaba, Señores, en la carrera de la civilización, dos siglos atrás de las naciones cultas de Europa. Incomunicado con ellas, por un efecto del monopolio

[4] Un estudio sobre los textos de álgebra destinados a la enseñanza secundaria y universitaria, publicados en Colombia en el siglo XIX, se ha desarrollado en la tesis de maestría de D. Camargo, [54].

[5] Natural de Cartagena, hijo de Manuel de Pombo y Beatriz Odonnell, española de origen irlandés. Inició estudios de Filosofía y Letras en el Colegio Nuestra Señora del Rosario de Bogotá en 1808 y su formación militar como cadete del Regimiento auxiliar en 1810. Fue tomado prisionero en Cartagena y trasladado a España, donde realizó estudios en la Academia de Ingenieros de Alcalá de Henares. Fue cadete del Regimiento de Caballería de Sagundo. Subteniente Aspirante al Cuerpo Nacional de Ingenieros de Ejércitos, plazas y fronteras, con agregación al Regimiento de Zapadores, Minadores y Pontoneros. Para su biografía, veáse [105] y demás referencias listadas en `http://www.accefyn.org.co/proyecto/Biografias/LinoPombo/LinoPombo.html`.

[6] Sobre el Colegio Militar, consultar [29, 365].

[7] Veáse, *Fuentes para la historia de la matemática en Colombia* [313]

> y de los celos de su antigua metrópolis, yacía en una ignorancia profunda de cuanto pasaba en el resto del universo: y si algún rayo de luz alcanzaba á penetrar por casualidad hasta estas apartadas regiones, la política sombría de los gobernantes, se alarmaba y hacía esfuerzos para obscurecer su brillo.
>
> [...]
>
> los americanos españoles, sin modelos, sin protección y sin estímulos, estaban imposibilitados para cultivar las ciencias, y consagrarse al estudio de los conocimientos útiles. [313, p. 121]

Tiene Pombo también unas palabras para referirse a España, país que conocía y donde se había formado:

> Por otra parte, la nación á que pertenecían, víctima ella misma del sistema inquisitorial, y encorvada bajo el yugo de un gobierno absoluto, intolerante y fanático, no participaba sino muy ligeramente de las adquisiciones científicas de los pueblos vecinos, y vivía separada del movimiento hacia la perfección social, que se hacía sentir generalmente en el resto de Europa. [313, p. 121]

En el mismo discurso, Pombo describe la situación de la matemática en Colombia, con estas palabras:

> Los estudios que se hacían en las capitales, estaban planteados bajo reglas análogas a las antiquísimas que gobernaban en las universidades de España, y circunscrito solo á la latinidad, la rancia filosofía, las jurisprudencia civil y canónica, la medicina y la teología. Libros totalmente desacreditados, y llenos de sandeces e impertinencias escolásticas, eran los que servían de texto para la enseñanza ridícula, que no variaba de forma ni de sustancia por espacio de medio siglo: de manera que las ciencias de colegio estaban con diferencia, lo mismo que nuestros usos y hasta nuestros trajes, en el mismo pie de allá por los tiempos de la conquista. [313, p. 121]

Tras su labor en el Cauca, es requerido en Bogotá por el gobierno de Francisco de Paula Santander (1832-1837) como Secretario del Interior y Relaciones Exteriores. Instalado en la capital alternó actividades administrativas y diplomáticas[8] con la enseñanza en el Colegio Militar (1848-1854), en el Colegio de la Independencia de Bogotá (1853-1855) y en el Colegio San Bartolomé (1857-1858) y en el Colegio de Pérez Hermanos. Veáse, [105].

[8] Ver listado en [55, p. 28].

En el decreto orgánico del colegio militar[9], quedó organizada la enseñanza de las matemáticas de éste modo:

> Art. 10. Habrá tres cursos sucesivos de matemáticas, a saber:
>
> Curso 1º: Aritmética, áljebra, jeometría especulativa, jeometría práctica, trigonometría rectilínea i trigonometría esférica.
>
> Curso 2º: Jeometría analítica, secciones cónicas, jeometría descriptiva con sus aplicaciones, i los principios de óptica aplicables a la perspectiva i a la teoría de las sombras.
>
> Curso 3º: Cálculos diferencial e integral, mecánica i maquinaria, cosmografía, caminos, puentes i calzadas.

Sobre la formación ofrecida en Colombia en la época, se pronuncia Arboleda de este modo:

> Los planes de estudio y la enseñanza de las matemáticas (al menos en su modelo inicial, aunque probablemente no siempre en su aplicación a la realidad), fueron todos de inspiración francesa. [16, p. 537]

Aunque no tenemos certeza de la temática algebraica tratada, en el programa de examen del curso primero de matemáticas[10] a cargo del profesor Aimé Bergeron[11] encontramos: "Ecuaciones de primer grado i su discusión. Teorema de Laplace", lo que indica que los sistemas de ecuaciones lineales eran tema de estudio en el Colegio.

Pombo inicia su labor de escritor de libros de matemáticas con *Lecciones de jeometría analítica* (1850) [106], siendo profesor de dicha asignatura en el Colegio. En 1858 publicó su segundo libro *Lecciones de aritmética i aljebra* (1858) [107] estando ya cerrado el colegio. Estos textos respondían a las necesidades latentes de la naciente comunidad académica, y hacen parte de una tarea más grande que apenas vislumbraba el autor en la introducción de *Lecciones de jeometría analítica*:

[9]Gaceta de la Nueva Granada correspondiente al mes de agosto de 1847, pp. 533-536, `http://www.bibliotecanacional.gov.co/recursos_user/hemerografico/ps19_gacetadelanuevagranada_1847_pte8.pdf`

[10]*Colejio Militar. Programa de los exámenes de las clases de instrucción científica de dicho establecimiento, correspondiente al año académico de 1849, que ha tenido lugar en los días del 19 al 23 de noviembre.* Disponible en los recursos digitales de `www.bibliotecanacional.gov.co`

[11]Matemático francés, profesor del Colegio Militar, quien publicó *Lecciones de Matemáticas. Parte primera. Aritmética* (1848). Sobre Bergeron, veáse [10, 11].

> La falta de testos adecuados para la enseñanza ó solitario aprendizaje de varios ramos de las matemáticas puras en su estado actual de adelanto, falta lamentable en la presente época en que principia a estar en boga en el pais el estudio reflexivo de las ciencias esactas, es lo que ha motivado la publicacion de esta obra, como ensayo para otras de la misma especie. [106, p. iii]

Pasamos ya a describir su obra algebraica.

Lecciones de aritmética i aljebra, 1858 [107]

Es un texto compuesto de 35 lecciones[12], subdivididas a su vez por apartados cuya numeración reinicia con cada una de ellas. Aunque su título incluya la aritmética, se trata de tan sólo 8 lecciones, y las restantes son de álgebra. Su autor inicia el prólogo explicando el título de la obra:

> No es cosa inusitada la combinación de la Aritmética con el Aljebra, para la mejor enseñanza de estos dos ramos de las Matemáticas que en realidad constituyen uno solo, *la ciencia elemental del cálculo*: compruébalo la simple cita del curso francés del Abate La-Caille, tan acreditado en su tiempo. [107, p. v]

Pombo se refiere al astrónomo francés Nicolas Loius de La Caille (1713-1762) quien escribió numerosos tratados de matemáticas, en términos de lecciones de aritmética, álgebra, geometría, óptica, entre otros.

El autor argumenta sobre las ventajas que representa el plantear el libro con elementos de aritmética y álgebra:

> Desde que, al tratarse de las operaciones con las diversas clases de números, quedan atrás las cuatro fundamentales, los raciocinios a los que hai que ocurrir se complican i oscurecen, e insuficientes al fin, tienen que ser suplidos o complementados por esfuerzos de memoria con detrimento de las facultades intelectuales si no interviene con oportunidad el Aljebra. Esta aclara, simplifica i generaliza las cuestiones, pone en evidencia para su resolución el enlace de los datos, fija con rigor los principios, abre certera vía para establecer y perfeccionar las reglas de procedimiento: i sin la percepción lúcida de la verdad que ella procura, sin los recursos que brinda, puede

[12] Para detalles de carácter general de éste libro, veáse [55].

> adquirirse ciertamente soltura i versación en todo jénero de cuentas numéricas usuales, pero nó confianza plena en si mismo, ni suficiencia para los casos extraordinarios. [107, p. v]

Pombo es consciente de los avances del álgebra y extrae un grupo selecto de temas de carácter elemental para exponerlos de forma breve y clara:

> Mui estenso y variado es hoi día el cuerpo de doctrinas del Aljebra, aplicada por tantas manos hábiles a tantas exijencias científicas, artísticas e industriales de una civilizacion en portentoso auje. Tal riqueza produce embarazos para la elección discriminativa, dificultades para la condensacion prudente i coordinacion acertada, al emprenderse un trabajo didáctico de carácter elemental: los nuevos métodos, las nuevas disquisiciones, demandan escrupuloso exámen. El Autor de esta obra confía en que algunos años de esperiencia profesional en establecimientos públicos, el estudio reflexivo de los grandes maestros i no pocas investigaciones propias, le habrán hecho capaz de escoger i encadenar bien las materias comprendidas dentro de los forzosos límites de su plan, darles en ciertos puntos diverso jiro o más ventajosa forma, i facilitar el acceso a ellas para toda regular inteligencia, esponiéndolas con laconismo sin perjuicio de la claridad. [107, p. v]

El autor muestra que sus publicaciones matemáticas hacen parte de un proyecto editorial, motivado por el deseo de difundir los conocimientos en la Nueva Granada:

> En el año 1850 se publicaron las *Lecciones de jeometría analítica*[13], destinadas a servir de testo de enseñanza en el Colejio Militar de Bogotá en reemplazo de los cuadros sinópticos empleados por necesidad hasta entonces. Las de *Aritmética i Aljebra* guardan concordancia con aquellas, amplificando i corrijiendo los cuadros semejantes que, revisados i mejorados anualmente, estaban en uso para la instrucción de los alumnos de mencionado Colejio. Entre estos dos trabajos correlativos existe un vacío para formar continuidad de cursos regulares, que es lo concerniente a la Jeometría y sus complementos, las dos Trigonometrías, la Topografía i Agrimensura, vacío difícil de llenar por obstáculos materiales: andando el tiempo se le llenará sin embargo, si posible fuere, por el deseo de vulgarizar y nacionalizar teorías recientes de utilidad incontestable, siendo condicion esencial de posibilidad la aceptacion benévola de lo dado a luz hasta ahora, que aliente los esfuerzos ulteriores e inspire confianza para completarlos. [107, p. v-vi]

[13]Para un estudio en contexto de ésta obra, veáse la tesis de maestría de B. Eychenne, [140].

Este proyecto no siguió adelante, y las razones son el cierre del Colejio Militar en 1854, sus múltiples actividades en la política, y su muerte en 1862.

El autor deja escuchar su voz de inconformidad, primero con respecto a los textos empleados, y también en lo relativo a la situación de la matemática en el país:

> [...] peor será mil veces continuar echando mano de los insustanciales catecismos de importación extranjera que han estado en boga, apenas adaptables a las escuelas primarias, en que la voz viva tiene tanto que suplir o comentar. [...]
>
> A pesar de la revolucion de ideas i de necesidades sociales, que naturalmente ha ido encaminando por mejor sendero los estudios en la Nueva Granada, el de las ciencias esactas ha prosperado poco, i aun no goza del crédito i del patrocinio que merece. [107, p. vi]

Unas palabras tiene Pombo para manifestar las necesidades latentes, reconocer los avances alcanzados y animar para seguir con una tarea que apenas comienza,

> Escaseando los profesores, careciéndose de testos adecuados, i no estando en práctica cual debiera el sistema de las lecciones orales que esplota y aprovecha con criterio lo publicado en idiomas i lugares diversos, hace por tanto un servicio meritorio al pais quien algo escribe sobre esta ciencia madre, cual lo han hecho entre otros jóvenes instruidos Indalecio Liévano en su injenioso tratado elemental de Aritmética, i Manuel Peña en sus problemas de Jeometría: toca a sus compatriotas, i sobre todo a los hombres influyentes, a los lejisladores y gobernantes, otorgar favor i estímulo a tales empresas, que irán poniendo en circulación i reproduccion un capital científico de valiosa importancia. [107, p. vi]

Antes de examinar el contenido del libro de Pombo que nos ocupa, dedicaremos un breve comentario a la mención que el autor ha realizado en una cita anterior a los "insustanciales catecismos de importación extranjera". Se refiere Pombo a lo que ha sido calificado por E. Ausejo [18, p. 70] como "el gran proyecto editorial que el editor alemán afincado en Londres Rudolph Ackermann concibiera para la recién liberada Hispanoamérica —un mercado que escapaba a la España absolutista— [y que] fue providencial para la digna supervivencia de un núcleo importante de la emigración, que pudo ganar su sustento en calidad de escritor, editor o traductor". La emigración citada es la de los liberales españoles que se exiliaron en Londres después del Trienio Liberal (1820-23). Con un formato inspirado en los catecismos religiosos existentes desde le siglo XVI, los dedicados a temas sociales, económicos, literarios, artísticos y científicos y técnicos desde la Ilustración eran libros dedicados a la enseñanza popular: "Se trata de obras claras, concisas y sencillas, de un carácter doctrinal que deriva de su redacción en forma de preguntas y respuestas. De pequeño formato (12ª) y a menudo ilustrados, adaptan el método y el mensaje al gran público, facilitando la memorización" [18, p. 74]. Catecismos de este tipo sobre ciencias se publicaron en España en la primera mitad del siglo XIX, lo exiliados españoles los produjeron en Londres para Ackermann y a la muerte de éste el proceso de su edición destinada al mercado Hispanoamericano se instaló en París [18][14]. Los catecismos a los que se refirió Pombo bien pudieron ser el *Catecismo de Aritmética Comercial* de José de Urcullu (1825) o el *Catecismo de Algebra* de José Núñez de Arenas (1828)[15].

Pasamos a describir el contenido resumido de la obra de Pombo, que el autor presenta en detalle en dos páginas escritas a dos columnas.

[14] Véase también el artículo [20] de E, Ausejo y M. Hormigón.

[15] Ambos autores fueron militares españoles liberales que fueron al exilio. Véase de nuevo [18].

14. Raíz cuadrada de los polinomios. Símbolos $\frac{1}{0}, \frac{1}{\infty}, \frac{0}{0}$ y a^0. Cantidades negativas. Permutaciones y combinaciones (p. 56)
15. Fórmula del binomio de Newton. Raíces numéricas de todos los grados (p. 61)
16. *Ecuaciones de primer grado* (p. 66)
17. *Ecuaciones de primer grado (continuación)* (p. 71)
18. *Conclusión de la teoría* (p. 75)
19. Desigualdades. Ecuaciones de segundo grado (p. 80)
20. Aplicación del análisis de 2º grado a los máximos y mínimos. Eliminación entre dos ecuaciones de 2º grado (p. 86)
21. Razones y proporciones en general (p. 91)
22. Progresiones - Series (p. 96)
23. Números figurados. Análisis indeterminado de primer grado (p. 102)
24. Ecuaciones de tercer grado (p. 108)
25. Carácter y composición de las ecuaciones en general (p. 113)
26. Transformación de las ecuaciones - Ecuaciones recíprocas (p. 118)
27. Método de los coeficientes indeterminados (p. 123)
28. Resolución de las ecuaciones numéricas de todos los grados (p. 129)
29. Resolución de las ecuaciones numéricas (continuación) (p. 134)
30. Resolución de las ecuaciones numéricas (continuación) (p. 138)
31. Resolución de las ecuaciones numéricas (continuación) (p. 144)
32. Eliminación en general - Funciones simétricas de las raíces de las ecuaciones (p. 149)
33. Teoría de los logaritmos - Ecuaciones exponenciales (p. 154)
34. Práctica de los logaritmos - Tablas (p. 158)
35. Regla de aligación: casos diversos (p. 163)

    Apéndice. Sistemas de numeración sobre diferentes bases - Sistema duodecimal en particular - Menor multíplice y máximo común divisor comunes, entre fracciones irreductibles (pp. 169-176)

De las 35 lecciones, nos ocuparemos de tres dedicadas a los sistemas de ecuaciones lineales, que hemos resaltado en cursiva en el índice. No obstante haremos una mención a cuatro más en las que el autor plantea su concepción del álgebra e introduce las permutaciones y la eliminación.

En la lección 9, encontramos el planteamiento de Pombo acerca de la materia en cuestión,

> El *Áljebra* es la ciencia del cálculo en jeneral: llamábala Newton *Aritmética Universal.* Con símbolos i notaciones convencionales, sencillos artificios, i combinaciones elegantes en que nunca se confunden ni pierden de vista los datos o elementos de la cuestión propuesta, ella facilita, abrevia i jeneraliza los procedimientos de resolución o análisis de cualesquiera cuestiones relativas a la cantidad, discreta o continua, i conduce por certera vía al descubrimiento o demostración de importantes verdades.
>
> [...]
>
> Las soluciones son *fórmulas jenerales*, aplicables a todos los casos análogos, i jérmen fecundo a veces de sorprendentes i fructuosas consecuencias. [107, pp. 32-33]

La lección 14, consta de dos páginas que contienen las nociones elementales de combinatoria y sus fórmulas: permutaciones, ordenaciones, combinaciones; lo que denomina *Teoría de las permutaciones y combinaciones.* Pombo expone lo necesario para explicar la fórmula del binomio de Newton (lección 15).

La lección 16, titulada ecuaciones de primer grado, está subtitulada en, ecuaciones de primer grado con una incógnita y ecuaciones con dos incógnitas. Para estas últimas plantea dos ecuaciones con dos incógnitas en forma general $ax + by = c$; $a'x + b'y = c'$ y explica los métodos de eliminación (por sustitución, por igualación, por adición o sustracción y por división o multiplicación).

La lección 17 da continuación a la anterior, y esta vez considera: ecuaciones con más de dos incógnitas y fórmulas generales de primer grado. La primera parte está motivada por tres problemas y la segunda proporciona la solución general para un sistema de tres ecuaciones y tres variables e introduce el Método de Bézout de modo inductivo, primero a las ecuaciones con dos, tres, cuatro, cinco y seis incógnitas. Veamos una amplia muestra del procedimiento expositivo:

> 3 - La ecuación general del primer grado con dos incógnitas la escribiremos asi; $ax + by = k$.
>
> Con tres incógnitas; $ax + by + cz = k$.
>
> Con cuatro, $ax + by + cz + du = k$.

Sucesivamente, con cinco o más incógnitas, de la misma manera.

Las fórmulas de solución para el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se dedujeron ya en la lección precedente; y son, poniendo k por c;

$$(A)\ \ x = \frac{kb' - bk'}{ab' - ba'} \quad (B)\ \ y = \frac{ak' - ka'}{ab' - ba'} \tag{6.1.1}$$

Para obtener las fórmulas de solución del sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, pudiera eliminarse escribiéndolas del modo que sigue;

$$\begin{aligned} &(1) \quad ax + by = k - cz = m \\ &(2) \quad a'x + b'y = k' - c'z = m' \\ &(3) \quad a''x + b''y + c''z = k'' \end{aligned}$$

Entre (1) i (2), empleando las fórmulas (A) i (B), se obtiene;

$$x = \frac{mb' - bm'}{ab' - ba'} = \frac{b'(k - cz) - b(k' - c'z)}{ab' - ba'};$$

$$y = \frac{am' - ma'}{ab' - ba'} = \frac{a(k' - c'z) - a'(k - cz)}{ab' - ba'}$$

Sustituyendo en (3) por x i por y estos valores en función de z, quedaria sola esta incógnita para despejarla: su valor se pondria en seguida en los deducidos aqui para x i para y, i se tendrian las tres fórmulas pedidas.

Para cuatro o más ecuaciones, con igual número de incógnitas, el procedimiento directo daría también las respectivas fórmulas de solución, pero iria complicándose mucho. El método de *Bezout*, que va a esplicarse, ha allanado las dificultades hasta el punto de hacer innecesario todo cálculo, conduciendo al descubrimiento de la lei de jeneración de las fórmulas para cualquier número de ecuaciones, demostrada por LAPLACE en 1772.

4- *Método de Bezout.* Consiste en la introducción de ciertos factores indeterminados, a los cuales se asignan en tiempo oportuno valores que satisfagan a ciertas condiciones útiles. Para comprenderlo se le aplicará primero a las ecuaciones con dos incógnitas, $ax + by = k$; $a'x + b'y = k'$. [107, p. 72-73]

El procedimiento de Pombo sigue efectivamente el planteamiento de Bézout: Multiplicando la primera ecuación por un factor indeterminado m y restando la segunda resulta

$$(am - a')x + (bm - b')y = km - k' \tag{6.1.2}$$

Para eliminar la y se anula su coeficiente; $bm - b' = 0$, lo que es la *ecuación de condición* para el valor de m, de donde se obtiene $m = \frac{b'}{b}$. De (6.1.2) resulta $x = \dfrac{km - k'}{am - a'}$ y sustituyendo el valor de m, $x = \dfrac{kb' - k'b}{ab' - a'b}$. Para eliminar x, se hace $am - a' = 0$; de donde $m = \frac{a'}{a}$ y en consecuencia, $y = \dfrac{ak' - ka'}{ab' - ba'}$. Pombo concluye de este modo:

> Son las fórmulas conocidas. El denominador le forman las dos permutaciones de las letras a, b (coeficientes de las incógnitas), acentuadas en la 2.ª letra i separadas por el signos sustractivo. El numerador se forma por el denominador, cambiando por la k la a para x (su coeficiente), i la b para y.

Para las tres ecuaciones generales con tres incógnitas, se multiplican dos de ellas por dos factores indeterminados, se suman luego, y de la suma se resta la tercera ecuación, esto es,

$$\left.\begin{array}{ll} (4) & ax + by + cz = k \\ (5) & a'x + b'y + c'z = k' \\ (6) & a''x + b''y + c''z = k'' \end{array}\right\} \begin{array}{l} amx + bmy + cmz = km \\ a'nx + b'ny + c'nz = k'n \end{array}$$

Los factores indeterminados son m y n, siendo

$$(am + a'n - a'')x + (bm + b'n - b'')y + (cm + c'n - c'')z = km + k'n - k''. \tag{6.1.3}$$

Para hallar x, se determinan los valores m y n suponiendo nulos los coeficientes de y y z. Las *ecuaciones de condición* son ahora $bm + b'n - b'' = 0$ y $cm + c'n - c'' = 0$. Sustituyendo en (6.1.3) se obtiene $x = \dfrac{km + k'n - k''}{am + a'n - a''}$. Aplicando las fórmulas (A) y (B) se hallan m y n:

$$m = \frac{c'b'' - b'c''}{bc' - cb'} \quad \text{y} \quad n = \frac{bc'' - cb''}{bc' - cb'}.$$

Ahora, reemplazando m y n en el denominador de x,

$$am + a'n - a'' = \frac{a(c'b'' - b'c'') + a'(bc'' - cb'')}{bc' - cb'} - a'' =$$

$$= \frac{a(c'b'' - b'c'') + a'(bc'' - cb'') - a''(bc' - cb')}{bc' - cb'}.$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas, ordenando las letras de cada término por los acentos, cambiando los signos y suprimiendo el denominador por ser común a los dos términos de la fracción (6.1.3); su denominador será:

$$D = ab'c'' - ba'c'' + bc'a'' - ac'b'' + ca'b'' - cb'a'',$$

que el autor describe de este modo:

> Son las seis *ordenaciones* posibles de las tres letras a, b, c, con signos contrarios las dos que empiezan por una misma letra, i marcadas la 2.ª letra de cada término con un acento i la 3.ª con dos acentos". Queda formado este polinomio tomando la diferencia $bc - cb$, introduciendo la letra a al principio, al medio i al fin de cada término, i cambiando de signo cada vez que a muda de lugar. [107, p. 74]

Reemplazando las a por las k para obtener el numerador en (6.1.3), resulta:

$$x = \frac{kb'c'' - bk'c'' + bc'k'' - kc'b'' + ck'b'' - cb'k''}{D}.$$

Para obtener directamente y, se determinan m y n por la condición de anularse en (6.1.3) los términos en x y en z,

$$y = \frac{ak'c'' - ka'c'' + kc'a'' - ac'k'' + ca'k'' - ck'a''}{D}.$$

Análogamente para la 3.ª incógnita,

$$z = \frac{ab'k'' - ba'k'' + bk'a'' - ak'b'' + ka'b'' - kb'a''}{D}.$$

Pombo indica que para la comodidad en las sustituciones, y para la discusión analítica de las tres fórmulas encontradas, estas se pueden escribir de la forma

$$\begin{aligned}
x &= \frac{k(b'c'' - c'b'') - k'(bc'' - cb'') + k''(bc' - cb')}{a(b'c'' - c'b'') - a'(bc'' - cb'') + a''(bc' - cb')}\\
y &= \frac{k(c'a'' - a'c'') - k'(ca'' - cb'') + k''(ca' - ac')}{b(c'a'' - a'c'') - b'(ca'' - ac'') + b''(ca' - ac')}\\
z &= \frac{k(a'b'' - b'a'') - k'(ab'' - ba'') + k''(ab' - ba')}{c(a'b'' - b'a'') - c'(ab'' - ba'') + c''(ab' - ba')},
\end{aligned}$$

lo que le da pie a destacar la simetría de las expresiones:

> No hai que extrañar la simetría perfecta de estas tres fórmulas: ella viene de la simetría de las ecuaciones de donde proceden, i en que entran de una misma manera

las tres incógnitas con sus respectivos coeficientes. Otro tanto se observa en las (A) i (B), i lo mismo ha de suceder por igual razon para cualquier número de incógnitas.

En el denominador solo figuran todos los coeficientes de las incógnitas.

En el numerador faltan los de la incógnita despejada, que son reemplazados por los términos k, *independientes* de las incógnitas.

Sin más que estas i las antecedentes observaciones, pueden escribirse las fórmulas de los valores de las incógnitas para las ecuaciones jenerales con cuatro, con cinco, &.ª

Sean las $ax + by + cz + du = k$; $a'x + b'y + c'z + d'u = k'$; $a''x + \&.$; $a'''x + \&.^{a}$

Denominador: las *ordenaciones* posibles de a, b, c, d, con los signos alternados, con un acento en la 2ª letra de cada término, dos en la 3.ª i tres en la 4ª. Se tomará el polinomio D sin acentos: en cada término se pondrá la letra d al principio, despues de la 1.ª letra, despues de la 2.ª i al fin: se marcarán los acentos, i a cada mudanza de la letra d se mudará de signo: dando cada término 4, el total será 24.

Resultado; $D' = da'b''c''' - ad'b''c''' + ab'd''c''' - ab'c''d''' - db'a''c''' + bd'a''c''' - \&.^{a}$

Numerador: para x se reemplazarán las a por las k, asi; $dk'b''c''' - kd'b''c'''\&.^{a}$; i se pondrá k por b para y, por c para z, i por d para u.

Tratándose de cinco incógnitas, siendo e el 5º coeficiente, las ordenaciones de las cinco letras para el denominador de las fórmulas se formarian por las D' de a cuatro introduciendo la letra e.

Sería $D'' = ed'a''b'''c^{iv} - de'a''b'''c^{iv} + da'e''b'''c^{iv} - \&.^{a}$; 120 términos.

Para seis incógnitas; $D''' = fe'd''a'''b^{iv}c^{v} - ef'd''a'''b^{iv}c^{v} + \&.^{a}$; $120 \times 6 = 720$ términos. [107, p. 74]

El autor finaliza esta lección 17 con seis problemas para resolver. En cada caso ofrece los resultados.

En la lección 18, sigue el estudio de las ecuaciones de primer grado. Esta vez se dedica a la *discusión analítica* de las cuestiones algebraicas, y la naturaleza e interpretación de las soluciones. Considera el caso de dos ecuaciones y dos incógnitas en general, y su solución dada por la ecuación (6.1.1). Realiza un estudio general de los sistemas, para ello considera cinco casos, 1º: $ab' - ba' \neq 0$ por tanto, los valores de x e y serán determinados y finitos. Los cuatro restantes consideran el caso $ab' - ba' = 0$ suponiendo distintas posibilidades para los numeradores. Finaliza la lección indicando que se puede analizar el caso de tres ecuaciones y tres variables, haciendo todas las suposiciones que permiten los seis trinomios y concluye que esto es innecesario y fatigoso, y daría resultados análogos a los obtenidos.

Las lecciones 20 y 32, tratan sobre la eliminación, en la primera considera dos ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas, y en la segunda dos ecuaciones de grado superior con dos incógnitas, donde explica el método de Euler. Los autores referidos en esta lección son Sarrus de quien afirma (p. 150) está su teoría desarrollada en el *Álgebra* de Mayer y Choquet, 4ª edición de 1845. En lo relativo a funciones simétricas de las raíces de las ecuaciones, remite al *Álgebra* de Bourdon (p. 150)[16].

Se observa en el desarrollo que acabamos de describir que el tratamiento de los sistemas lineales que realiza Pombo en Colombia en estos años centrales del siglo XIX se encuentra, al igual que observamos en España con Cortázar en el estadio que los países europeos avanzados recorrieron en el siglo XVIII[17]. Se trata de la fase calculatoria de aplicación de los métodos de eliminación previa al desarrollo del algoritmo de los determinantes, que se vislumbra en la repetición y simetría de las fórmulas.

En el apéndice, último apartado, Pombo permite a uno de sus estudiantes plasmar sus ideas dentro de su libro. Es justamente el autor que será tratado en la próxima sección. Lo presenta así:

> 10-*Menor multíplice i máximo divisor comunes, entre fracciones irreductibles.*–Lo siguiente es comunicado por el Sr. Indalecio Liévano, alumno distinguido que fué del Colejio Militar de Bogotá. [107, p. 175]

Sobre la obra matemática de Pombo, Liévano comenta en una breve nota sobre el fallecimiento del autor, al final del Almanaque correspondiente al año 1863:

> Entre las publicaciones del Sr. POMBO se encuentran la Jeometría Analítica del plano i del espacio: obra maestra i que revela toda la profundidad de sus conocimientos i lo elevado de su jenio analítico. Ultimamente nos legó su escelente obra de Aritmética i Áljebra; de mucho mérito por su estensión, por el elegante método en la esposición i por estar adornada con no pocas investigaciones propias. [243]

[16]Pombo menciona también a los siguientes autores: La-Caille (p. v), Bézout (p. 74).
[17]Veáse el capítulo cuatro de ésta memoria.

6.1.2 I. Liévano, 1875

Indalecio Liévano Reyes[18] (1834-1913) fue profesor de matemáticas en el Colegio San Bartolomé, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia y director del Observatorio Astronómico Nacional. Liévano realizó varias publicaciones matemáticas[19] en las que destacan *Tratado elemental de aritmética* (1856), *Investigaciones científicas*[20] (1871) y *Tratado de áljebra* (1875). También realizó obras de ingeniería civil y cálculos astronómicos que le permitieron ser miembro de la Sociedad Astronómica de Francia.

En el libro de aritmética encontramos una página dedicatoria al que fuera su maestro, don L. de Pombo, al cual se dirige como señor Lino de Pombo, profesor de matemáticas, y firma como su discípulo.

> ¿De qué modo podria yo corresponder a las distinguidas consideraciones con que me habeis estimulado al estudio de esta ciencia tan importante? ¿De qué modo corresponder por mi parte a vuestro ardiente celo en la enseñanza de ella, i a vuestros vehementes deseos de trasmitir a la juventud los vastos conocimientos que poseeis, contribuyendo de tal modo, el mas eficaz sin duda, al progreso i engrandecimiento de nuestra Patria? A estas preguntas que hace tiempo me dirijo a mí mismo, no he vacilado en responder siempre: "coadyuvando su celo patriótico, satisfaciendo sus filantrópicos deseos, imitando su ejemplo."
>
> Cumplir con estos preceptos de mi gratitud ácia vos i de mi amor a la República, tales son hoi los objetos de todos mis esfuerzos.
>
> Aceptad pues, señor, el primer ensayo que, como fruto de tales esfuerzos, os dedico. [...]

El principio que rige la obra de Liévano queda explícito en el prólogo de su primer libro de matemáticas:

> Cuando hice el estudio de los ramos superiores de las Matemáticas, en el Colejio militar de Bogotá, con los mui distinguidos Profesores Lino de Pombo i Aimé Bergeron, me convencí prácticamente de que los mas grandes y numerosos obstáculos que se presentan para hacer rápidos progresos en dichos estudios, dependen precisamente

[18] Oriundo del municipio de Carmen de Apicalá. Ingeniero civil formado en el Colegio Militar, recibió diploma de idoneidad, según la Ley del 4 de julio de 1866, [29].

[19] Parte de su obra ha sido estudiada en [12, 15].

[20] Sobre éste trabajo, veáse su reseña en `http://www.banrepcultural.org/blaavirtual`.

> de escasos conocimientos en Aritmética, o en otros términos, de ignorancia en los principios i propiedades de los números que son del dominio de la Aritmética. Por esta razón tuve inmediatamente la idea de formar un plan de esposición rigurosa de la naturaleza de las seis operaciones de la Aritmética i de las principales propiedades de los números, i a precio de muchísimos esfuerzos lo encontré; pero enteramente diferente del rumbo ordinario seguido por todos los autores i, tal vez, algo difícil para trasmitirlo a jóvenes, no mui dotados por la naturaleza para estos estudios; por lo que no lo he seguido con entusiasmo. [242, p. 5]

En efecto, el planteamiento de Liévano ha merecido ser detacado por Víctor Albis en su artículo *The work of Indalecio Liévano on the foundations of real numbers* [12], donde afirma que hacia 1856, el joven profesor colombiano "concordaba con K. Weierstrass y otros, quienes, en la sexta década del siglo pasado, sintieron la necesidad de una formulación aritmética más precisa de los fundamentos de los números reales".

Nos ocuparemos ahora de la descripción de su libro de álgebra.

Tratado de Áljebra [244]

En una primera "Advertencia" el autor expresa su objetivo de este modo:

> Me he propuesto hacer la esposicion del Áljebra con el mayor rigor, sencillez i claridad que es posible; i he procurado que tenga este Tratado únicamente lo indispensable i nada más, para adaptarlo a la enseñanza. Si me hubiere aproximado a conseguirlo, aunque a costa de muy grandes esfuerzos, habré alcanzado a la mejor recompensa a la que he aspirado: la de satisfacer el deseo de contribuir al cultivo de las ciencias matemáticas en Colombia; de estas ciencias que forman la base principal del progreso i engrandecimiento de las naciones. [244, p. iii-iv]

Tras la "Advertencia" sigue el índice de la obra, que está dividida en dos partes, una llamada elemental (capítulos I-VII) y la otra dedicada a la teoría general de las ecuaciones con una sola incógnita (capítulos VIII-XII):

Siguiendo el hilo conductor de la obra de Liévano, encontramos su concepción del álgebra en el primer capítulo, donde en otras palabras vemos el carácter del análisis algebraico estudiado en los capítulos previos de esta memoria:

> DEFINICIÓN DEL ÁLJEBRA. El *áljebra* es la segunda parte del ramo del cálculo, que fundándose en la primera, o sea en la Aritmética, su objeto es resolver completa, sencilla y jeneralmente las cuestiones relativas a los números. [244, p. 1]

Vamos directamente al capítulo II, donde encontramos el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. El autor empieza el segundo capítulo con unas nociones preliminares sobre ecuaciones en general, y luego entra en materia, con el tratamiento de los sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas. Aquí expone los métodos de igualación (comparación), sustitución y reducción. Luego, explica cómo plantear problemas mediante ecuaciones y la interpretación de los resultados. Finaliza la sección con este comentario:

> 104. En jeneral, *si se tienen m ecuaciones de primer grado con m incógnitas, respecto de sus soluciones, pueden suceder tres casos: o hai una sola solución (que es el caso jeneral); o no hai ninguna por haber ecuaciones incompatibles; o hai infinidad de soluciones, pero adviértase que algunas incógnitas pueden tener valores determinados.* [244, pp. 53-54]

Luego, se concentra en la resolución de las ecuaciones de primer grado, donde introduce un cuarto método, el *método de Bezout*, siguiendo en principio el esquema de Pombo para sistemas cuadrados de dos y tres variables. Liévano incluye en su presentación, una sección titulada *Teorema de Laplace* en la que explica el método de Bézout como nosotros lo hemos descrito del original intercalando notas explicativas:

> 109. La lei de formacion de los valores de las incógnitas que se observa para dos i para tres ecuaciones, jeneralizadas es:
>
> REGLA 1.ª.- El denominador es comun para todas las incógnitas, i se forma así: con las dos letras a y b fórmense las permutaciones [las permutaciones de muchas letras son las diferentes ordenaciones que se pueden formar escribiendo estas letras unas en seguida de otras de todas las maneras posibles. (cap. III)] ab, ba, interpóngase el signo - i se tendrá
>
> $$ab - ba.$$

> Si no hai mas que dos ecuaciones, póngase un acento en la segunda letra de cada término, i el resultado $ab' - ba'$ será el denominador comun.
>
> Si hai tres ecuaciones, hágase pasar la letra c a todos los lugares en cada término de la espresion $ab - ba$, [...]
>
> REGLA 2.ª.- Formado ya el denominador comun, los numeradores se deducen de él: [...] [244, p. 58]

Enuncia el caso general cuando se tienen n ecuaciones de primer grado con n variables y esboza la demostración mediante una serie de seis notas. Considera un problema y sigue con la discusión de los sistemas en una sección titulada *del cero i del infinito* donde discute las posibles formas indeterminadas. Cierra la sección retomando los cinco casos planteados por Pombo a los que Liévano denomina "hipótesis". El capítulo II concluye con los principios sobre las desigualdades.

En el capítulo III se ocupa de las nociones básicas sobre las permutaciones para explicar el binomio de Newton. En el capítulo IV aparecen los radicales algebraicos cuyas propiedades demuestra, según señala en las notas al final del libro, siguiendo a Lefebure de Fourcy. Nótese que Liévano ha seguido el hilo conductor de Pombo en su obra, imprimiéndole un toque novedoso centrado en los números, y ha publicado tratados separados de aritmética y álgebra.

Sobre el texto de Álgebra de Liévano, Julio Garavito Armero (1865-1920) comenta:

> El *Tratado de Áljebra* de Liévano, resume en 277 páginas los principios más importantes del extenso ramo y constituye una obra didáctica y rigurosa a la vez, condiciones casi siempre opuestas. [29, p. 103]

6.1.3 M. A. Rueda, 1887 y 1891

De este autor, Manuel Antonio Rueda[21] (1858-1907), recogemos dos obras de álgebra[22], la primera de ellas escrita en colaboración con su alumno Aníbal Brito. Como veremos, las obras de Rueda tendrán una vigencia muy dilatada en el tiempo.

[21]Ingeniero civil por la Universidad Nacional en 1876, socio fundador de la Sociedad Colombiana de Ingenieros (1887), director de su revista *Anales de Ingeniería*. Fue profesor de colegios y de la Universidad Nacional de Colombia. Ver `http://www.accefyn.org.co/proyecto/Galeria/rueda.htm`.

[22]El listado de su obra completa puede verse en [54, p. 66]

Lecciones de álgebra, 1887 [309]

Los autores de esta obra[23], profesor y alumno, realizan una publicación conjunta en la que encontramos tres "Advertencias", una por cada uno de los autores al inicio del libro y otra al final del mismo, en la primera se lee:

> He recogido las lecciones de Álgebra que durante algunos años dicté oralmente en la Universidad Nacional, y me he asociado con mi antiguo discípulo, el señor Don Aníbal Brito, para el objeto de complementarlas, ordenarlas y publicarlas.
>
> Emprendo el trabajo con el propósito de servir a la instrucción en Colombia, y animado de un grande deseo; que con el estudio de este texto llegue a formarse un joven como el que hoy me acompaña en la redacción de la obra. [309, p. 3]

En una segunda advertencia, titulada "Al lector" y firmada en Bogotá el 28 de enero de 1887, se lee:

> Claridad y concisión: hé ahí la norma en la exposición de toda obra didáctica.
>
> Deficiencia, circunloquio y oscuridad: hé ahí el defecto trascendental y palpitante de las obras didácticas que se precian de táles, y que sólo lo fueran por ensalmo.
>
> Si la presente cumple las condiciones que su objeto requiere no sabré decirlo. [309, p. 3]

En la advertencia final se pone de manifiesto la intención fallida de ampliar la obra:

> Estando ya tan próxima la apertura de los establecimientos de instrucción, la premura del tiempo nos impide publicar en esta edición el APÉNDICE que hemos prometido. [309, p. 262]

El libro, que sigue el esquema de Liévano, está compuesto por las veintidós lecciones que forman el siguiente índice:

[23] Es un libro de tamaño 13×17 cm., aproximadamente.

Nos detendremos en las lecciones IX y X, destacadas en cursiva en el índice, las cuales hacen referencia a nuestra temática de estudio. No obstante, haremos mención a las nociones preliminares incluidas en la lección primera en la que los autores afirman:

> OBJETO DEL ÁLGEBRA. - *Álgebra* es la ciencia que tiene por objeto abreviar y generalizar todas las cuestiones relativas a los números. En esto estriban las denominaciones de *Ciencia del cálculo en general y Aritmética Universal* que ha recibido. [309, p. 5]

Los autores siguen el esquema de sus predecesores, en una lección exponen las definiciones y seis procedimientos de solución de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, el método de Bézout es el último. La otra lección (la décima) está dedicada a ecuaciones con varias incógnitas, considerando de dos, tres y cuatro y n variables. Para éste último exponen el Teorema de Laplace.

> Cuando el número de ecuaciones de un sistema es bastante considerable, la resolución de éste suele ser sumamente prolija. Laplace logró eludir este inconveniente de un modo en extremo plausible: sentó él que los valores de las incógnitas, en un sistema de varias ecuaciones con el mismo número de incógnitas, formadas con ciertas leyes, satisfacen las ecuaciones.
>
> Las leyes formuladas por LAPLACE, de las cuales siete se refieren al denominador de los valores de las incógnitas y una al numerador, son las siguientes:
>
> 1.ª. El denominador es común a todos los valores de las incógnitas.
>
> 2.ª. Está formado de las ordenaciones que pueden hacerse con los coeficientes de las incógnitas.
>
> 3.ª. Sus signos son alternativamente positivos y negativos principiando por positivo.
>
> 4.ª. La primera letra de cada término carece de acento; la segunda tiene uno; la tercera, dos; la cuarta, tres; la quinta, cuatro, y así sucesivamente.
>
> 5.ª. Si en el denominador se agrega ó se suprime un número igual de acentos á las letras semejantemente acentuadas, de modo que igualmente acentuadas, aquél se anula.
>
> 6.ª. El denominador se anula, si en él se cambia una letra por otra.
>
> 7.ª. Los términos positivos provienen de inversiones alfabéticas en número par, los negativos de inversiones alfabéticas impares. [309, p. 117]

Para sistemas con tres ecuaciones y tres variables, los autores verifican todas y cada una de las leyes, y dejan por demostrar que éstas leyes se satisfacen cualquiera que sea el número de las ecuaciones de un sistema. Consideran tres casos de imposibilidad en los problemas de primer grado, cuando el valor de la incógnita es $0, \infty$ o cuando la solución es absurda.

Pasamos a considerar la segunda obra algebraica de Rueda.

Curso de álgebra, 1891 [307]

Cuatro años después del anterior libro, Rueda publica un *Curso de Álgebra* [307], presentado con estas palabras:

> Este libro está destinado á servir de texto de enseñanza. En consecuencia, no contiene menos de lo necesario ni más de lo suficiente.
>
> La obra está dividida en dos partes: *curso inferior* y *curso superior*. El curso inferior es adecuado para la enseñanza elemental del álgebra en las Escuelas de Literatura. El superior sirve para los estudiantes de Ingeniería.
>
> Cada curso termina por una serie de problemas interesantes, que deben estudiarse cuando se termine el primer repaso.
>
> El índice del libro sirve también de programa de enseñanza y de examen. Los números que marcan las proposiciones del programa corresponden a los artículos del texto. [307, p. 3]

Como en las obras anteriores, en esta con mayor claridad, el contenido se corresponde, al nivel que la obra alcanza, con el del análisis algebraico que hemos comentado en relación con las obras españolas del periodo. En esta memoria estamos interesados en el Curso inferior, que en esencia corresponde a las *Lecciones* reorganizadas y ampliadas. No obstante, a continuación transcribimos el índice del curso completo en sus dos partes, que van precedidas de unas "Advertencias" (pp. 3-4) y tienen como colofón unas "Notas finales" (pp. 237-274).

Este es el índice:

Curso Inferior

12. *Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas* (p. 61)
13. *Ecuaciones de primer grado con más de dos incógnitas* (p. 68)
14. Desigualdades (p. 77)
15. Análisis indeterminado de primer grado (p. 82)
16. Ecuaciones de segundo grado con una sola incógnita (p. 89)
17. Cuestiones relativas al segundo grado (p. 100)
18. Cuestiones relativas al segundo grado (p. 105)
19. Fracciones continuas (p. 108)
20. Progresiones aritméticas (p. 117)
21. Progresiones geométricas (p. 123)
22. Teoría de los logaritmos (p. 130)
23. Continuación de la teoría de los logaritmos (p. 135)
24. Tablas de los logaritmos (p. 140)
25. Aplicaciones de los logaritmos (p. 152-155)

Curso Superior

1. Límites y series (p. 168)
2. Continuación de la teoría de las series (p. 174)
3. Teoría elemental de las derivadas (p. 183)
4. Continuación de la teoría elemental de las derivadas (p. 189)
5. Cálculo de las cantidades imaginarias (p. 194)
6. Teoría general de las ecuaciones algebraicas (p. 197)
7. Continuación de la teoría general de las ecuaciones algebraicas (p. 200)
8. Transformación de las ecuaciones (p. 205)
9. Raíces iguales (p. 208)
10. Límites de las raíces (p. 210)
11. Teorema de Sturm (p. 214)
12. Raíces conmensurables (p. 218)
13. Raíces conmensurables (p. 218)
14. Ecuaciones de tercer grado (p. 224)
15. Ecuaciones recíprocas, binomias y trinomias (p. 228-233)

Vale la pena indicar que en la lección primera el autor plantea su concepción del álgebra de este modo:

> 1. Objeto del álgebra.
>
> El álgebra es un ramo de las Matemáticas que tiene por objeto generalizar y simplificar la Aritmética. Enseña á encontrar la serie de operaciones que deben ejecutarse con números conocidos, para encontrar otros números que dependen de los primeros en virtud de condiciones establecidas.
>
> El álgebra realiza su objeto por medio de *fórmulas* ó modelos que sirven para indicar el curso de las operaciones que deben practicarse para resolver las cuestiones de una misma especie. [307, p. 5]

Nuestros temas se encuentran en las lecciones XII y XIII, tal y como fueron expuestos en la obra anterior, agregando la Regla de Cramer y su demostración. Señala Rueda: "Esta regla, inventada por *Cramer* y demostrada por *Laplace*". Este planteamiento se mantiene en las demás ediciones publicadas, dos más en vida del autor[24], y en las restantes 7 ediciones que alcanzó a tener el libro en mención. Sólo en la quinta edición, como veremos más adelante, se agrega un apéndice que incluye los determinantes, sin modificar el texto previo, en un proceso similar al ocurrido en España con el libro de Cortázar ampliado por su hijo, Daniel.

6.1.4 Publicaciones periódicas

Con la creación en 1887 de la Sociedad Colombiana de Ingenieros, se da un primer paso en el periodismo científico e industrial colombiano. El mismo año se empieza a publicar los *Anales de Ingeniería* con el subtítulo *Órgano de difusión de la Sociedad Colombiana de Ingenieros*. El propio Rueda fue su director y explicó así los objetivos de la revista:

> El prospecto de este periódico se desprende de la naturaleza de la Corporación que representa. En sus columnas aparecerán, pues, los estudios, trabajos, datos, conferencias y enseñanzas que se consideren de mayor importancia y de más oportunidad para el conveniente desarrollo y acertada organización de las empresas materiales, y para la generalización del cultivo de las ciencias matemáticas entre otros. [...]

[24] 2ª ed. 1893, 3ª ed. rev. 1905.

> Como hijo de la paz, vivirá de la concordia; como como eco del patriotismo, se alimentará del esfuerzo de los patriotas; como vocero de la ciencia, se mantendrá en la atmósfera apacible del estudio; como obrero del progreso material, señalará con prudencia los límites de su acción; y como propagador de la verdad matemática, razonará con lógica, demostrará con exactitud y opinará con respeto. [306, pp. 4-5] y [311, p. 106]

En el mismo número, el presidente de la Sociedad se expresaba de este modo:

> [...] conceptuamos que sería cuerdo y conducente constituir en Sociedad Científica á los Ingenieros, Agrimensores, Arquitectos, Mecánicos, Profesores en Matemáticas y Naturalistas; y crear un órgano de publicidad dedicado á los estudios elevados de las mejoras materiales del país; á la investigación científica en el vasto campo de las matemáticas puras y aplicadas, así como de los ramos congéneres de las Ciencias Naturales; á la traducción y reproducción de las publicaciones extranjeras útiles á la Ingeniería en Colombia, y á la difusión de los elementos estimuladores del progreso material de la Nación y del Profesorado [...] [293, p. 9] y [311, p. 106]

De la temática lineal que nos atañe, encontramos en los *Anales*[25] los trabajos que se relacionan a continuación:

1. Pedro José Sosa[26] (1851-1898). Cuaternios. *Anales de ingeniería*, 3 (1889-1890) pp. 253-258; 4 (1890-1891) pp. 116-128, 150-159; 4 (1890-1891) pp. 211-223, 246-255, 312-316, 335-340, 364-370; 5 (1891-1892) pp. 3-11.
2. José Herrera Olarte[27] (1857-1892). Demostración directa del teorema de Laplace. *Anales de ingeniería*, 4 (1890-1891) pp. 74-76.

Sobre los artículos de Sosa, veáse [9], donde los autores sostienen que Sosa tenía planeado escribir un trabajo sobre determinantes,

> Actualmente estoy terminando un modesto trabajo sobre la teoría de los Determinantes, y como una parte, por lo menos, de esta importante teoría es de utilidad

[25]Un estudio general de las publicaciones matemáticas puede verse en [311].

[26]Ingeniero neogranadino formado en el *Instituto Politécnico Rensselaer* de Nueva York, miembro de la Sociedad Colombiana de Ingenieros desde 1887, [9].

[27]Ingeniero Civil graduado por la Universidad Nacional de Colombia. Fue publicista científico y político, y también se desempeñó como profesor de la Facultad de Ingeniería, [315].

> práctica para el ingeniero que se dedica a ciertos ramos de la profesión, me ha venido la idea de hacer un extracto de dicha parte y enviarlo a los Anales.
>
> Recordando que en época pasada ofrecí á ustedes una colaboración [el trabajo sobre determinantes] que nunca mandé debido á circunstancias análogas a las presentes [su falta de tiempo por sus múltiples viajes relacionados con su trabajo en el canal]. [9, p. 530]

En efecto, no hay registro de memoria alguna sobre determinantes escrita por P. J. Sosa.

Del trabajo de Olarte se destaca su contribución en la divulgación de una temática que estaba siendo estudiada en la Universidad, y que estaba presente en la primera edición del libro de Rueda.

6.2 Sobre determinantes y sistemas en el siglo XX

En esta sección nos ocuparemos de la introducción de los determinantes en la matemática superior colombiana entrado el siglo XX. Solo aparecerá un nuevo autor, pero veremos la continuidad y prolongación de la obra de Rueda.

6.2.1 D. Cifuentes, 1912

Delio Cifuentes Porras[28] (1867-1921) fue profesor de Matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia y miembro de la Sociedad Geográfica de Colombia. Tras esta breve presentación, pasamos a describir su libro de álgebra.

Lecciones de álgebra superior, 1912 [86]

Esta obra fue publicada en mimeógrafo con originales manuscritos, [314, p. 165-66]. Está constituida por dos partes, la primera parte (trece lecciones) publicada en 1912, pero la segunda parte (once lecciones) se anticipó apareciendo en 1911. Cada parte está compuesta de 253 páginas.

Veamos el índice de la obra en sus dos partes:

[28] Oriundo de la capital del país, Profesor de Matemáticas en 1891, e Ingenierio Civil en 1892 por la Universidad Nacional de Colombia.

En la lección primera de la primera parte, Cifuentes expresa su concepción del álgebra, en estos términos:

> 1. Objeto del algebra. El Algebra Superior tiene como objeto principal, facilitar y generalizar los procedimientos de resolución o análisis de cualesquiera cuestiones relativas a la cantidad continua y conducir además, al descubrimiento y demostración de importantes verdades.

> Las soluciones deducidas por el análisis algebraico son fórmulas o reglas generales de procedimientos aplicables a todos los casos análogos. [86, pp. 2-3]

También hace mención al algoritmo algebraico,

> En el cálculo algebraico se designan las cantidades a que él se contrae por las letras de abecedario común, mayúsculo ó minúsculo, y las letras del alfabeto griego; las cifras numéricas y los signos ya convenidos de adición, sustracción, etc., son los elementos del lenguaje y notación del Algebra. Las cantidades constantes, que se consideran susceptibles de no variar, se designan por las primeras letras del abecedario. Sus magnitudes variables, que son las que pueden tomar diferentes valores, se expresan por las últimas letras: t, u, v, x, y, z.
>
> En caso necesario unas mismas letras se repiten con diversa pero análoga significación acentuándolas en lo alto o en lo bajo y aún se emplean algunas otras señales para distinguir sus acepciones, según las experiencias del cálculo. [86, p. 3]

De aquí nos centramos en la segunda parte, en la que nos encontramos una primera lección dedicada a la teoría de las determinantes, en la que el autor esboza la teoría a través de la solución de los sistemas de ecuaciones lineales.

> –Sumario–
>
> Permutaciones – Inversiones – Ecuaciones lineales con dos incógnitas – Determinante de 2° grado – Ecuaciones lineales con tres incógnitas – Determinante de 3° grado

Tras introducir las nociones sobre permutaciones, Cifuentes considera dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

cuya solución está dada por

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

En el siguiente apartado, define determinante de segundo grado, como sigue:

> La cantidad $ab' - ba'$ se llama determinante de segundo grado, y se representa por el símbolo
>
> $$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

> que se obtiene colocando los cuatro números a, a', b, b' unos debajo de otros de modo que se correspondan. Estas cantidades se llaman elementos del determinante, y el cuadro que se forma, matris. [...]
>
> cuando se tiene el cuadro matris de un determinante, puede formarse éste, observando que el producto ab' son los elementos de la primera diagonal del cuadrado, y que el otro término se obtiene permutando las letras anteriores sin cambiar la colocación de los acentos. [85, pp. 13-14]

Finalmente plantea que los numeradores también son expresables como determinantes y ofrece un ejemplo numérico.

Continúa su exposición con los sistemas lineales con tres incógnitas, indicando que los procedimientos aplicados se pueden extender a sistemas más generales, pero que se complican en la medida que aumenta el número de incógnitas. Como hicieran sus predecesores, Cifuentes afirma que "Bezout allanó las dificultades descubriendo la ley de generación de las fórmulas de solución para esta clase de sistemas". Aquí encontramos el mismo desarrollo ya planteado por Pombo en [107]. Aborda los determinantes de tercer grado, del mismo modo que tratara los de segundo. Incluye también la regla de Sarrus (sin mencionar nombre alguno), como "un procedimiento práctico para formar el determinante de tercer grado".

En la Lección II. Funciones determinantes, Cifuentes hace un planteamiento general.

> –Sumario–
>
> Definición general de las determinantes y notaciones simbólicas– Formación de las determinantes – Determinantes menores – Propiedades de las determinantes – Cálculo de un determinante.

El autor da la noción de matriz cuadrada primero:

> Si se tienen n elementos numéricos o literales ordenados en series que formen n líneas horizontales, llamadas filas, y n verticales, denominadas columnas, de modo que se correspondan sus términos, se formaría un cuadrado que se denomina una *matriz.* [85, pp. 24-25]

La simboliza entre líneas verticales punteadas y ofrece un ejemplo de una matriz de orden tres. Luego, trata con matrices de orden n, para las que explica las notaciones de Cauchy (empleada en [65]) y Leibniz. Finalmente, da la noción de determinante de este modo:

> Al polinomio que resulta de permutar de todas las maneras posibles los diversos elementos de un cuadro matriz, de modo que en ninguna de dichas permutaciones entren dos elementos de una misma línea, se denomina determinante. A los términos de este polinomio se les afecta de signo + ó del signo -, según que sea par o impar el número de inversiones de cada permutación. [85, pp. 27-28]

En el apartado siguiente dedicado a la formación de los determinantes, considera los elementos de la diagonal principal y explica la permutación de los índices. Damos como ejemplo de su forma de expresarse la noción que ofrece Cifuentes sobre determinantes menores:

> Cuando en un cuadro generador se suprime el mismo número de columnas que de filas, el nuevo cuadro que se obtiene aproximando los elementos contenidos en las líneas que quedan, se llama determinante menor.
>
> El grado de la determinante menor es dado por el número de las filas o columnas suprimidas, de manera que al suprimir una fila y una columna se obtiene un determinante de primer grado; y cuando se suprimen s filas y s columnas, se hallará un determinante del orden s. Se representan simbólicamente las determinantes menores por la letra griega Δ afectada de un sub-índice que expresen los números de órden de las filas suprimidas y con un índice que contenga los números de las columnas de que se haya prescindido. Según esto, en la expresión
>
> $$\Delta_{2,4,6 \text{ fila}}^{1,3,5 \text{ columna}}$$
>
> indicará un determinante menor de tercer órden, que se obtiene prescindiendo de las filas 2ª, 4ª y 6ª y de las columnas 1ª, 3ª y 5ª, en el cuadro primero. [85, pp. 32-33]

Las propiedades de los determinantes se encuentran enunciadas como teoremas y corolarios. Son ocho teoremas, de los cuales transcribimos el cuarto a continuación para marcar la diferencia entre las dos menciones que hace a los determinantes menores:

> Todo determinante es una función lineal y homogénea de los elementos de una misma fila ó de una misma columna, y se puede ordenar según los elementos de esta fila ó columna. [85, p. 38]

De la expresión general del determinantes deduce la siguiente regla general básica para el cálculo de un determinante, que es su desarrollo por los elementos de una línea:

> Toda determinante es la suma algebraica de los productos de los elementos de una misma línea por los determinantes menores que se obtienen del propuesto, suprimiendo la fila y la columna que se cruzan sobre el elemento ordenado del generador considerado. [85, p. 41]

En la lección III aborda los sistemas de ecuaciones lineales.

> –Sumario–
>
> Reglas de Cramer– Discusión de las fórmulas – Resolución de un sistema homogéneo – Eliminación de dos incógnitas entre tres ecuaciones lineales.

Tras considerar un sistema de n ecuaciones con el mismo número de variables y explicar cómo encontrar la solución mediante la regla de Cramer. Cifuentes procede a la discusión de las fórmulas, donde enuncia el siguiente resultado:

> Teorema: Cuando en un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas, la determinante de los coeficientes no es nula, el sistema propuesto admite una solución única y determinada. [85, pp. 71-72]

Añade que cuando $D = 0$ el sistema de ecuaciones es imposible o indeterminado. Indica que para hacer más clara la exposición tratará un sistema de tres ecuaciones y tres variables cuyo determinante de los coeficientes es nulo, donde introduce la noción de *determinante característico* y explica los casos que pueden darse. Termina comentando que se realizan razonamientos idénticos para el tratamiento de un sistema general de ecuaciones con el mismo número de incógnitas.

Inmediatamente después aborda los sistemas homogéneos. Por último, trata los sistemas de tres ecuaciones y dos variables y concluye:

> *La condición necesaria pero no suficiente para que tres ecuaciones lineales con dos incógnitas sean compatibles, es que el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes, sea nulo.*
>
> Pueden generalizarse los razonamientos anteriores para el caso de m ecuaciones con n incógnitas y las conclusiones serán idénticas. [85, pp. 86-87]

Finaliza la lección, como todas, con una sección corta de ejercicios.

6.2.2 M. A. Rueda, 1919

Recordemos que Rueda ha fallecido en 1907, pero su libro se sigue editando. Al llegar a la quinta edición de 1919 se produjo una ampliación de la obra[29] afectando a los determinantes, que vamos a considerar.

Curso de álgebra. 5ª ed., 1919 [308]

En esa quinta edición encontramos un apéndice escrito por el profesor Víctor Eduardo Caro[30] (1877-1944). En la parte inicial del libro se lee:

> Advertencia de los editores
>
> Con el fin de poner este texto de Álgebra, insuperable por la concisión, claridad y solidez de la exposición, de acuerdo con el programa que rige sobre la materia en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de Bogotá, el señor Víctor E. Caro, con la aprobación de la familia del autor, ha escrito un Apéndice en que se adicionan y completan algunos capítulos, y se exponen las teorías relativas a la representación gráfica de las ecuaciones, a los determinantes, y a las derivadas de las funciones circulares directas e inversas.
>
> En el texto del autor no se ha hecho adición ni corrección alguna.

Bajo el título *Teoría Elemental de los determinantes* Caro expone las nociones básicas de la teoría de los determinantes. Dedica una página a las inversiones, y considera primero un determinante de tercer orden, luego uno de segundo, y por último el caso general:

> puede definirse un determinante como *una manera peculiar de expresar n columnas y n líneas la suma algebraica de los productos que pueden formarse por ordenaciones, con n elementos, siendo estos productos positivos o negativos según que en cada uno de ellos las inversiones sean pares o impares.* [308, p. 246]

Tras la definición aparecen los determinantes menores y un listado de ocho propiedades de los determinantes enunciadas como teoremas. Introduce la multiplicación de determinantes columna-columna, indicando que se busca "un determinante que sea igual al producto

[29]Recordemos que en una advertencia final de las *Lecciones* los autores tenían pendiente un apéndice.

[30]Nacido en Bogotá, siendo el tercero de los hijos del presidente Miguel Antonio Caro. Recibió el título de Profesor de Matemáticas en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia en 1892. Fue profesor de matemáticas de la misma facultad, miembro de la Academia Colombiana de la Lengua en 1923, y fundador de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en 1932. Obtuvo gran reconocimiento como poeta y escritor.

de dos determinantes de un mismo grado". En las aplicaciones, considera primero un sistema de tres ecuaciones simultáneas de primer grado con tres incógnitas. Añade, que el procedimiento se puede efectuar para el caso general, de n ecuaciones con n incógnitas, cuyo resultado es la regla de Cramer "siendo de advertir que por medio de los determinantes su aplicación es muy sencilla". Aborda el caso de un sistema de tres ecuaciones y dos variables, e indica que para que un sistema de este tipo tenga solución su determinante debe anularse, y señala que la misma condición es válida para el caso general de $n+1$ ecuaciones con n incógnitas. Esta manera da actualizar un libro tradicional de álgebra añadiéndole un contenido más completo de determinantes y sistemas lineales recuerda en buena medida a lo acontecido en España con el libro de Cortázar. En el caso español fue la propia familia quien lo autorizó, por medio del nieto ingeniero de autor de la obra original, mientras que en el caso colombiano se hizo desde fuera de la familia pero con su beneplácito.

En el apéndice, Caro incluye también nociones sobre la representación gráfica de las funciones algebraicas, como es apenas natural inicia con las funciones lineales y explica el método de solución gráfico de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables. Caro concluye la primera nota con la representación gráfica de un trinomio de segundo grado.

Durante buena parte de la primera mitad del siglo XX, en Colombia se siguen utilizando el texto de Rueda. La Librería Colombiana de Bogotá, que había editado en 1919 la quinta edición revisada y aumentada por V. E, Caro, realizó el mismo año una sexta edición, y continuó editando la obra en las décadas siguientes: séptima edición en 1928, octava en 1939 y novena en 1948.

Una etapa de cambio en general, y en los temas de álgebra lineal en particular, no llegó hasta los años cincuenta, cuando se crean las carreras de matemáticas en la Universidad de los Andes y en la Universidad Nacional de Colombia. En 1968 se crearon una maestría en matemáticas en Bogotá y una maestría en matemática aplicada en la Facultad de Minas de Medellín, con el apoyo de los profesores de Bogotá. Pero eso hace parte de otra historia que está fuera de nuestro periodo de estudio.

Conclusiones

Conclusiones

Los logros alcanzados en esta investigación los presentamos en concordancia con los objetivos propuestos, siguiendo la secuencia de los capítulos.

El objetivo de este proyecto de tesis era indagar sobre la introducción de los métodos precursores del álgebra lineal en España durante la segunda mitad del siglo XIX y la primera del siglo XX, y la transferencia de este estudio a la realidad matemática colombiana de la época. El objetivo de esta tesis doctoral se alcanzaba mediante los siguientes objetivos más específicos:

1. Identificar los hitos en la evolución de lo que hoy se conoce como álgebra lineal y su relación con la aritmética, las ecuaciones diferenciales ordinarias y la geometría analítica.
2. Establecer cómo evolucionó la enseñanza del álgebra lineal en la enseñanza universitaria, tanto en España como en Colombia.
3. Señalar los libros que se utilizaban, de acuerdo con los programas de estudio, identificando a los primeros autores sobre estos temas en España y Colombia, y el impacto de su obra.

Para lograr estos objetivos, la memoria se ha dividido en dos partes, dedicando la primera a una puesta a punto sobre aquellos aspectos de la historia general de los temas algebraicos lineales que serán contemplados en la segunda parte con referencia a su inserción en dos países periféricos con es el caso de España y Colombia. El análisis realizado, sobre el contenido algebraico lineal en las obras publicadas durante el periodo de nuestro estudio en los dos países referidos, muestra cómo esa temática se fue incorporando en los planes y programas de estudio con un señalado retraso respecto a los avances producidos en los países de la vanguardia científica europea y, desde el inicio del siglo XX, también norteamericana.

Primera parte. Una guía obligatoria para sintetizar la evolución general de los sistemas lineales y los determinantes, además de otras muchas referencias secundarias, ha sido el libro clásico de Muir repetidamente citado, del que hemos seleccionado datos de acuerdo con nuestro criterio. La originalidad de nuestro trabajo en esta primera parte radica no en los resultados expuestos sino en la selección efectuada dentro del extenso conocimiento publicado disponible sobre estos temas, intentando detectar las líneas maestras del desarrollo de los métodos algebraicos lineales en la investigación puntera y su volcado en libros de amplia difusión.

Las conclusiones que destacamos de esta primera parte son las siguientes:

1. Desde la Antigüedad hasta el siglo XVII inclusive se producen intentos de resolver sistemas lineales en los que se empieza a vislumbrar —al llegar al caso de tres variables, antes no hay complejidad suficiente— un cierto algoritmo con los coeficientes del sistema para formular las soluciones. El chino Seki en Oriente y Leibniz en Occidente tuvieron una clara visión de dicho algoritmo, pero su obra en este campo no tuvo influencia.

2. Son Maclaurin y Cramer los primeros que difunden con claridad que la resolución de los sistemas lineales de orden creciente por métodos de eliminación o similares llevan a unas expresiones que tiene una simetría que tratan de elucidar para conseguir expresarlas directamente sin necesidad de los largos cálculos necesarios para obtenerlas, sobre todo a partir del orden cuatro. Euler, Bézout y Laplace avanzaron en esta dirección. Con Laplace aparecen los problemas lineales en la resolución de ecuaciones y sistemas diferenciales surgidos en problemas de mecánica celeste (ecuación secular).

3. En la aparición de los determinantes con entidad matemática propia destaca el trabajo de Vandermonde, quien formula la primera teoría de los determinantes establecida con autonomía y susceptible de tener aplicaciones, para la que crea una notación simbólica y abreviada similar a la de Leibniz. Al desarrolllar el cálculo del volumen de la pirámide, Lagrange identifica un "método algebraico" que contiene las expresiones y fórmulas de los determinantes, susceptibles, dice, de otras aplicaciones. A su vez, Gauss establece la teoría algebraica de la sustituciones, que permanecerá durante casi todo el siglo XIX ligada a las formas cuadráticas aritméticas y sus invariantes.

4. La obra de Binet y la temprana de Cauchy dan un fuerte impulso y complejidad al estudio de los determinantes. Jacobi refuerza este impulso abriendo además to-

do el abanico de aplicaciones de los determinantes. Hacia mediados del siglo XIX se incorporan al tema Cayley y Sylvester produciendo una mayor algebrización e introduciendo progresivamente la teoría de matrices, asunto que llevará casi toda la segunda mitad del siglo. Surgió el teorema de Hamilton-Cayley, que el primero encontró estudiando los números hipercomplejos (cuaternios etc.) y el segundo con las matrices.

5. En los años cincuenta, cuando ya está claro que existe una teoría propia de determinantes con una pluralidad de aplicaciones, la primera de ellas los sistemas lineales, comienzan a aparecer en Europa los primeros libros consagrados a difundir la teoría por la comunidad matemática escolar superior. A la sombra de Cayley-Sylvester empezó Spotiswoode y siguieron los italianos Brioschi y Trudi, mientras el alemán Baltzer iba gestando en ediciones sucesivas la gran obra que acabaría recogiendo los resultados establecidos por Kronecker en sus cursos de Berlín. A lo largo del último tercio del siglo XIX se va dando forma definitiva al estudio, resolución y discusión de los sistemas lineales, asunto iniciado por los franceses Rouché y Fontené y perfeccionado por los alemanes Kronecker y Frobenius, así como por el italiano Capelli.

6. Hermite fusionó el estudio de las sustituciones y las formas cuadráticas aritméticas que venían desde Gauss, pasando por Eisenstein y Laguerre, tarea que alcanzó gran relevancia con el grupo de Berlín Kronecker-Weirerstrass-Frobenius, que resolvieron la equivalencia de formas con los divisores elementales como invariantes. La más amplia difusión de este nueva álgebra superior en forma de libro de gran influencia correspondió, ya en los primeros años del siglo XX, al norteamericano Bôcher, un especialista en ecuaciones diferenciales formado en Gotinga.

Segunda parte. Nuestra principal contribución original está en la segunda parte de esta memoria. En ella, a través de algunos personajes y obras representativas, trazamos un recorrido histórico por los métodos algebraicos lineales que más tarde se agruparon y organizaron estructuralmente bajo el nombre de álgebra lineal. Describimos cómo fueron llegando de la Europa avanzada hasta dos espacios nacionales científicamente retrasados. Dividiremos las conclusiones de nuestra investigación ateniéndonos a los dos países a los que se refieren.

España. En España se va produciendo con un retraso variable, pero siempre significativo, la recepción de los métodos algebraicos lineales cuya evolución en Europa ha sido realizada en la primera parte.

Las conclusiones de nuestra investigación sobre este aspecto de la historia de la matemática española durante un siglo alrededor de 1900 son las siguientes:

1. En torno a 1850 los libros de álgebra del ingeniero Cortázar ofrecían un tratamiento similar al de Maclaurin en el siglo anterior. Terminando la década de los sesenta, una reacción ante el retraso nacional de otro ingeniero, Echegaray, le llevó a realizar una traducción libre —en el sentido de fiel pero no literal— del primer volumen del libro de Trudi; la segunda parte, la dedicada a las aplicaciones, iba apareciendo en artículos de la *Revista de Obras Públicas* hasta que el Sexenio Revolucionario derivó al autor hacia otras actividades. La obra de Cortázar perduró en uso y su hijo ingeniero la actualizó en 1883 añadiendo un apéndice que modernizaba el estudio de los determinantes.

2. Importador a través de traducción libre fue también Eulogio Jiménez, que incorporó en 1872 las sustituciones lineales y formas cuadráticas aritméticas a través de la obra de teoría de números de Dirichlet editada por Dedekind. Una característica de esta obra, y también de la antes citada de Echegaray, es la elementarización: traducción libre significa en buena medida ampliar con generosidad el número de páginas para añadir detalles explicativos a veces muy elementales. El libro de los profesores A. Suárez y L. G. Gascó, así como el de D. Bacas y R. Escandón, publicados en los primeros años ochenta, inciden en el aspecto elemental de la teoría expuesta, aspecto que continuó con escasos avances hasta entrado el siglo XX.

3. La enseñanza del análisis matemático en los primeros cursos de la universidad española está orientada por los textos de análisis algebraico característicos de tal enseñanza en Europa. El análisis algebraico influye en España a través del libro de Baltzer, que llegó a ser traducido por E. Jiménez en 1879-81. Ya en la segunda década del siglo XX, lo interpreta J. Rey Pastor (1917) bajo la influencia de una obra de la década anterir, de buen nivel en su tiempo, del italiano A. Capelli. En esta parte del análisis, como sucediera desde Cauchy, queda englobado el primer estudio de los determinantes y los sistemas lineales, tratado por tanto por todos los profesores de la asignatura que escribieron libros de texto. Influyentes en la línea de Baltzer fueron los de Villafañe y Marzal, que transitaron hasta el siglo XX, al que pertenece Octavio de Toledo, que enlazó con el reformador Rey Pastor.

4. La tendencia en España a elementarizar los textos añadiendo prolijas explicaciones a lo expuesto en los libros extranjeros, iniciada por Echegaray con su traducción de la obra de Trudi, fue un estilo que duró hasta Octavio de Toledo. Rey Pastor lo combatió propugnando y practicando un método de exposición más directo y selectivo de los aspectos principales, que se manifiesta con claridad en su tratamiento de los métodos algebraicos lineales. No obstante, y en comparación con el italiano A. Capelli que le inspiró en parte, Rey Pastor limita el uso del lenguaje simbólico.

5. En el análisis algebraico español del siglo XX y primeros años del XX, incluso en Rey Pastor, se trata el producto de determinantes al modo clásico algorítmico establecido desde Binet y Caychy, que admite diversas variantes en la combinación de filas y columnas. La implantación definitiva del producto de sustituciones y después del abstracto de matrices, con la forma de producto fila-columna, no se establece en España hasta los complementos algebraicos que acompañan al libro de geometría analítica de Cámara en los años cuarenta.

6. El papel de Z. García de Galdeano en la materia que nos ocupa es relevante. Siendo todavía catedrático de Instituto, a lo largo de la segunda década de los ochenta del siglo XIX, publicó en varias entregas una obra de álgebra que incluye un adecuado tratamiento de los determinantes con un método pedagógico cíclico, primero la parte elemental y más adelante una profundización. En su libro de ecuaciones diferenciales de 1906 presenta los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con un alcance en el uso de la ecuación característica que no fue superado sensiblemente hasta la modernización de la matemáticas española de la segunda mitad del siglo XX. En una obra suya de 1907 se encuentra la primera referencia española a los divisores elementales, simplemente llamando la atención sobre la necesidad de estudiar dicha teoría de Weierstrass. El programa de ecuaciones de E. Terradas (1932) sí menciona los divisores elementales y plantea un avance sobre lo expuesto por García de Galdeano, pero no tuvo desarrollo porque Terradas no obtuvo la cátedra. El libro de texto de su sustituto Marín Toyos, publicado después de la Guerra Civil, apenas marca diferencia en el tema lineal de la ecuación característica respecto a la obra ya clásica de García de Galdeano, a quien rinde homenaje en la introducción.

7. Las obras de geometría analítica que dominaron el panorama español de las primeras décadas del siglo XX, las de Mundi y Vegas, usaron la ecuación secular o la ecuación característica como mera herramienta del cálculo geométrico, sin estudio algebraico

independiente previo. Como tales, los métodos lineales en geometría analítica no se usaron, de modo incipiente, hasta que la obra geométrica de Cámara fue influyente después de la Guerra Civil; pero la implantación completa de la geometría analítica basada en el álgebra lineal tuvo que esperar a la llegada de la llamada matemática moderna en la segunda mitad del siglo XX.

8. Los divisores elementales fueron apenas definidos por Rey Pastor en su libro de análisis algebraico de 1917, al que alude Cámara cuando los usa en sus lecciones de geometría analítica plana de los primeros años veinte del siglo XX, que al ser impartidas en Valencia tuvieron una publicación tan sólo preliminar y apenas conocida. Poco antes, en 1918, el geómetra O, Fernández-Baños publicó un artículo relacionado con los divisores elementales, originado en Italia mientras investigaba con F. Enriques, pero enseguida abandonó esa línea de investigación en geometría algebraica. Los divisores elementales aparecieron con claridad y gran difusión, aunque de modo todavía muy parcial, cuando Cámara pudo completar su libro de geometría analítica tras la Guerra Civil una vez trasladado a Madrid poco antes de la contienda.

9. Después de la Guerra Civil, en los años cuarenta, a la vez que Cámara desarrollaba el libro de geometría analítica que tenía concebido desde veinte años antes, intentando una modernización algebraica casi imposible sin cambiar, que no lo hizo, el clásico esquema de geometría plana y geometría del espacio, la joven generación de sus alumnos, representada sobre todo por P. Abellanas, iniciaba la difusión de los métodos nuevos del álgebra lineal que acabarían formulando la geometría analítica en dimensión finita arbitraria unas décadas después.

Como ampliación de detalle de las conclusiones anteriores reproducimos las que tuvo el artículo publicado en la revista *Llull* [134] con parte del contenido de esta tesis:

1. La exposición del "álgebra lineal" realizada por Rey Pastor en *Elementos* se ha situado en una etapa de solapamiento de los métodos algorítmicos propios de la teoría de los determinantes que recorre el siglo XIX y las nuevas orientaciones algebraico funcionales introducidas en el último tercio del siglo. Esta transición explica una disfunción en el tratamiento del producto de matrices, realizado unas veces "fila por fila" y otras "fila por columna", que da lugar a un relativo error que se subsana al tomar determinantes.

2. Se ha valorado la presencia de los divisores elementales en *Elementos*, que significa la primera vez que esta teoría se ofrece en un libro de texto español, si bien en forma muy escueta limitada a definiciones, animando al lector a proseguir su estudio mediante referencias adecuadas.

3. La obra del italiano Capelli [1909] fue la que más guió a Rey Pastor en la confección de *Elementos*. Se han establecido las similitudes y diferencias principales entre ambas obras en relación con los temas algebraicos que nos ocupan. Al igual que Capelli, Rey Pastor hace uso —por primera vez en España en libro de texto— de la noción de rango o característica en la demostración del teorema general sobre los sistemas lineales. Rey Pastor atribuye dicho teorema a "Rouché-Frobenius" —lo que ha creado hábito en lengua española—, mientras que el italiano no menciona al alemán.

4. Un artículo de Araujo que se adelanta en la introducción en España de la noción de característica de una matriz, publicado en el volumen de 1913-14 de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, es una "adaptación libre" de lo expuesto por Capelli.

5. Cuando Rey Pastor llegó a Madrid inició una competencia profesional con el otro veterano catedrático de la asignatura, Octavio de Toledo, cuya obra sobre los mismos temas queda prácticamente interrumpida a partir de la aparición de *Elementos*. La comparativa realizada entre las obras de Rey Pastor y Octavio de Toledo en similares temas algebraicos ha permitido dar más valor a la obra del matemático joven, confirmando, en los temas lineales del álgebra, que *Elementos* fue un libro que aportó modernidad en 1917 a la obra previa de los matemáticos españoles.

6. Al mismo tiempo, introdujo un nuevo estilo de libro con mejoras de formato, como la variedad de índices, la oferta de una lectura cíclica mediante el uso de tres tipos de letra o una abundante bibliografía orientada; en definitiva, considerando que un libro de texto no es un proyecto cerrado vinculado a un curso, sino que debe ser también un libro de consulta y de motivación hacia estudios más avanzados.

Segunda parte. Colombia.

La transposición de lo estudiado para España al contexto colombiano constituye el sexto y último capítulo de ésta memoria, donde se inserta los avances de la temática lineal en los libros de texto, mostrando un atraso respecto a la Europa de la época. Con el desfase temporal que corresponde, observamos la repetición de un intento de modernización amenazado por la situación política y social del país. En España y Colombia, los métodos algebraicos lineales fueron insertándose en la formación ingenieril a mediados del s. XIX pero fue un siglo después cuando se tomaron los planes y programas de estudio para convertirse en elementos autónomos de estudio. Otra similitud es que los autores españoles y colombianos atendían las problemáticas respectivas de su contexto educativo.

Las conclusiones correspondientes a este último capítulo son las siguientes:

1. Como sucedió en España, la segunda mitad del siglo XIX se inició en Colombia con los estudios matemáticos dominados por la influencia francesa y ejercidos mayoritariamente por ingenieros. En Colombia la presencia de los ingenieros fue más duradera porque los estudios específicos de matemáticas tardaron en aparecer.

2. El primer autor estudiado, L. de Pombo, plantea su esfuerzo modernizador del álgebra para superar el nivel popular de conocimientos que suministraban los catecismos, en cuya producción tuvieron un papel importante los exiliados liberales españoles.

3. Un nuevo impulso fue dado en torno a 1890 por M. A. Rueda, cuya obra refleja el contenido del análisis algebraico que hemos visto en España. Aunque desplazado en el tiempo, su caso presenta una similitud con el de Cortázar, pues elabora una obra que le sobrevive y es actualizada con un anexo que actualiza el tratamiento de los determinantes.

4. La vigencia de la obra de Rueda se extiende en el tiempo significando un estancamiento que no se superará hasta los años cincuenta.

Publicaciones realizadas

Sobre las cuestiones tratadas en esta memoria o relacionadas con ella ya hemos publicado los artículos o capítulos de libros que se relacionan a continuación por orden cronológico:

- L. Español, M.A. Martínez, Y. Álvarez y C. Vela. (2010) *Julio Rey Pastor y el análisis algebraico: de los apuntes de 1914-16 a tres libros de texto (1917-1925).* Zubía 28, pp. 139-166.

- Y. Álvarez, L. Español. (2012) *Algoritmos algebraicos lineales en el primer libro de texto (1917) de Julio Rey Pastor*. Llull 35, pp. 13-36.

- Y. Álvarez, L. Español. (2012) Introduction of elementary divisor theory in Spain. En: Antoni Roca-Rosell (ed.) *The Circulation of Science and Technology*. Barcelona, SCHCYT, pp. 561-567.

- Y. Álvarez, L. Español. (2012) Álgebra en el libro de análisis matemático de Beppo Levi (1916). En: José María Urkia (ed.) *Libro XI Congreso SEHCYT*. San Sebastián, SEHCYT, pp. 491-501.

Trabajo futuro

El curso de esta investigación se puede continuar en algunas direcciones que han quedado abiertas en la presente memoria. Indicaremos algunas de ellas.

1. Respecto a la primera parte, y en lo que se refiere a nuestra aportación más personal sobre los libros de texto, cabe profundizar en la relación de los mismos con las investigaciones que los inspiraron y, cuando hay varias ediciones modificadas, analizar y valorar los cambios producidos.

2. En cuanto a estudios algebraicos que no se limitan al ámbito de los dos países tratados, sino que tienen valor en la historia general del campo, hemos iniciado un estudio de la obra de análisis algebraico del italiano B. Levi (1916) que presenta gran interés. Su relación con esta memoria es que aparece citada por Rey Pastor en *Elementos de análisis algebraico* (1917). El autor español no la sigue en absoluto porque sus planteamientos respecto a la abstracción son radicalmente diferentes.

3. Gran parte de las obras españolas y colombianas analizadas tienen como característica una ausencia casi total de mención a sus fuentes, por lo que investigar su determinación es otro aspecto que ha quedado abierto.

4. La continuidad natural de la investigación en ambos países es la cronológica, avanzar hacia la recepción plena del álgebra lineal moderna en los años sesenta y siguientes.

Bibliografía

[1] Reforma de la facultad de ciencias y de las escuelas especiales. *Revista de Obras Públicas*, 14(22):261–265, 1866.

[2] Lecciones de coordinatoria con las determinantes y sus principales aplicaciones. *Nature*, 32(827):411–412, 1885.

[3] F. Abeles. Determinants and linear systems: Charles L. Dodgson's view. *British J. Hist. Sci.*, 19(3(63)):331–335, 1986.

[4] F. Abeles. Dodgson condensation: the historical and mathematical development of an experimental method development of an experimental method. *Linear Algebra Appl.*, 429(2-3):429–438, 2008.

[5] P. Abellanas. Teoría de grupos. *Mat. Elemental*, 1, 2:140–146, 16–29, 57–67, 104–112, 261–268, 1941-42.

[6] P. Abellanas. Las fórmulas de Schubert para la determinación de los números elementales de las superficies de segundo orden. *Rev. Mat. Hispano-Americana*, 3(3):164–175, 1943.

[7] P. Abellanas. Elementos de Geometría Analítica por el Dr. D. Sixto Cámara Tecedor, Catedrático de la Universidad Central, tercera edición. Madrid, 1945. *Rev. Mat. Hispano-Americana*, 4(5):217–218, 1945.

[8] P. Abellanas. Matrices de polinomios en varias indeterminadas. *Rev. Mat. Hispano-Americana*, 17(6):267–277, 1957.

[9] V. Albis and D. Camargo. Pedro José Sosa: un gran ingeniero matemático. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, 29(113):525–534, 2005.

[10] V. Albis and C.H. Sánchez. A falta de una iconografía de Aimé Bergeron. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, 22(85):587–590, 1998.

[11] V. Albis and C.H. Sánchez. Descripción del curso de Cálculo Diferencial de Aimé Bergeron en el Colejio Militar. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, 23(86):73–79, 1999.

[12] V. Albis and L. Soriano. The work of Indalecio Liévano on the foundations of real numbers. *Historia Math.*, 3(2):161–166, 1976.

[13] S.C. Althoen and R. McLaughlin. Gauss-Jordan reduction: a brief history. *Amer. Math. Monthly*, 94(2):130–142, 1987.

[14] R. Araujo. Breve ensayo sobre los sistemas de ecuaciones lineales. *Rev. de la Soc. Mat. Española*, 3:78–84, 107–113, 1913-14.

[15] G. Arbeláez. Las nociones de infinito y continuo en la obra del matemático Indalecio Liévano Reyes. In *Formación de Cultura Científica en Colombia. Ensayos sobre Matemáticas y Física*, pages 39–61. 2004.

[16] L.C. Arboleda. Los tratados franceses en la enseñanza del análisis en Colombia (1851-1951): Sturm, Humbert y los otros. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, 26(101):533–543, 2002.

[17] E. Ausejo. Galería de Presidentes de la SME: José Barinaga Mata (1890-1965). *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 10(3):763–774, 2007.

[18] E. Ausejo. Matemáticas para las nuevas Repúblicas americanas: del Exilio liberal español a la Restauración. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 7(13):67–84, 2007.

[19] E. Ausejo. Institucionalización e internacionalización de las comunidades matemáticas. Revistas y Sociedades. In *Historia de la Real Sociedad Matemática Española, RSME.* 2011.

[20] E. Ausejo and . Hormigón. Mathematics for independence: From spanish liberal exile to the young american republics. *Historia Math.*, 26:314–326, 1999.

[21] J. Aznar. Contribución a la historia de la matemática española del XIX: Luis G. Gascó (1846-1899) y el Archivo de Matemáticas.

[22] D. Bacas and R. Escandón. *Teoría elemental de las determinantes y sus aplicaciones al álgebra y a la trigonometría.* 1883.

[23] P. Bachmann. Untersuchungen über quadratische formen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, pages 331–341, 1873.

[24] R. Baltzer. *Theorie und Anwendung der Determinanten. Mit Beziehung auf die Originalquellen dargestellt.* S. Hirzel, 1857.

[25] R. Baltzer. *Die Elemente der Mathematik.* S. Hirzel, 1860.

[26] R. Baltzer. *Theorie und Anwendung der Determinanten.* S. Hirzel, 1864. 3ª ed. 1870, 4ª ed. 1875, 5ª ed. 1881.

[27] F. X. Barca-Salom. La difusió dels coneixements matemàtics a Catalunya durant la primera meitat del segle XIX.

[28] V. Barutello, Conti M., S. Terracini, et al. *Analisi Matematica. Dal Calcolo all'Analisi. Vol. 2.* Apogeo, 2008.

[29] A.D. Bateman. *El observatorio astronómico de Bogotá : monografía histórica con ocasión del 150 aniversario de su fundación.* 1954.

[30] E. Bertini. *Geometria Proiettiva degli Iperspazi.* E. Spoerri, 1907.

[31] L. Berzolari. *Geometria analitica. I. Il.* 2ª edition, 1920.

[32] E. Bézout. Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations. *Mémoires de l'Académie Paris*, pages 288–338, 1764.

[33] E. Bézout. *Théorie générale des equations algébriques.* Ph.-D. Pierres, 1779.

[34] J.-P. M. Binet. Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques. *Journal de l'École Polytechnique*, 9:280–354, 1813.

[35] M. Bôcher. Sehlesinger's linear differential equations [review]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 3(4):146–153, 1897.

[36] M. Bôcher. *Introduction to higher algebra.* Macmillan & co, 1907.

[37] E. J. Bonet. Reseña de Rey Pastor J. elementos de análisis algebraico. 3Âª ed. *Rev. Mat. Hispano-Americana*, 5(2):305–307, 1930.

[38] R. Bonola. Ricerche sui sistemi lineari di omografie nello spazio. *Lomb. Ist. Rend.*, 1908.

[39] F. Botella. La signatura y la clasificación de las formas cuadráticas. *Mat. Elemental*, 2(3):95–103, 1942.

[40] F. Botella. Nota sobre el empleo de las transformaciones lineales en cuestiones elementales de geometría analítica. *Mat. Elemental*, 2(1):6–10, 1942.

[41] C.B. Boyer. Colin Maclaurin and Cramer's rule. *Scripta Mathematica*, (27):377–379, 1966.

[42] E. L. Ince. Trad. L. Bravo. *Integración de ecuaciones diferenciales ordinarias*. 1943.

[43] F. Brechenmacher. *Histoire du theoreme de Jordan de la descomposition matricielle (1870-1930)*. PhD thesis, Ecole des hautes etudes en sciences sociales, 2006.

[44] R. Bricard. 5(1):89–104., 1922.

[45] F. Brioschi. *La teorica dei determinanti e le sue principali applicationi*. Eredi Bizzoni, 1854.

[46] T. Bromwich. Muth's elementartheiler. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 7(7):308–316, 1901.

[47] M.C. Caballer. *El álgebra en la enseñanza secundaria en España (1836-1936)*. PhD thesis, Universidad del País Vasco, 2006.

[48] F. Cajori. *An introduction to the modern theory of equations*. Macmillan & co, 1904.

[49] M. Calderón. Determinante de una matriz rectangular. *Rev. Mat. Hispano-Americana*, 6:231–250, 1945.

[50] S. Cámara. *Elementos de Geometría Analítica Plana*. 1920-21.

[51] S. Cámara. *Elementos de Geometría Analítica*. 2 edition, 1941.

[52] S. Cámara. Teoremas elementales. *Mat. Elemental*, 3:89–92, 1941.

[53] S. Cámara. *Elementos de Geometría Analítica*. 3 edition, 1945.

[54] D. Camargo. Los textos de álgebra publicados en Colombia durante el siglo XIX y comienzos del XX. Master's thesis, U. de los Andes, 2008.

[55] D. Camargo. Las lecciones de aritmética i áljebra. In *Historias de escritos. Colombia, 1858-1994*, pages 7–41. 2009.

[56] J. M. Cano. La Escuela Industrial de Valencia (1852-1865). *Llull*, pages 117–142, 1997.

[57] A. Capelli. Sopra la compatibilità o incompatibilità di più equazioni di primo grado fra più incognite. *Rivista di Matematica*, 2:54–58, 1892.

[58] A. Capelli. *Lezioni di algebra complementare Ad Uso Degli Aspiranti Alla Licenza Universitaria in Scienze Fisiche E Matematiche.* Pellerano, 1895.

[59] A. Capelli. *Instituzioni di analisi algebrica.* Pellerano, 3 edition, 1902.

[60] A. Capelli. *Instituzioni di analisi algebrica.* Pellerano, 4 edition, 1909.

[61] A. Capelli and G. Garbieri. *Corso di analisi algebrica. I. Teorie introduttorie.* Sacchetto, 1886.

[62] E. Catalan. Recherches sur les déterminants. *Bulletins de l'Academie Royale des Sciences, des Lettres et Beaux Arts de Belgique*, 13:534–555, 1846.

[63] L.A. Cauchy. Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorqu'on y permute de toutes manières possibles les quantités qu'elle renferme. *Journal de l'École Polytechnique*, 10:1–28, 1815.

[64] L.A. Cauchy. Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suites des transpositions opérées entre variables qu'elles renferment. *Journal de l'École Polytechnique*, 10:29–112, 1815.

[65] L.A. Cauchy. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Première partie.* 1821.

[66] L.A. Cauchy. Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie. *Oeuvres I*, pages 4–318, 1827.

[67] L.A. Cauchy. Sur l'équation à l'aide de laquel le on détermine les inégalités sécu laires des mouvements des planètes. In *Exercices de Mathématiques*, pages 140–160. 1829.

[68] L.A. Cauchy. Mémoiresur l'equation qui a pour racines les moments d'inertie principaux d'un corps solide et sur diverses équations du même genre. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, (9):111–113, 1830.

[69] L.A. Cauchy. Mémoire sur les fonctions alternées. In *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, pages 151–159. 1841.

[70] L.A. Cauchy. Mémoire sur les fonctions différentielles alternées. In *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, pages 177–187. 1841.

[71] L.A. Cauchy. Mémoire sur les sommes le nom de résultantes. In *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, pages 160–176. 1841.

[72] L.A. Cauchy. Note sur les diverses suites que l'on peut former avec des termes donnés. In *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, pages 145–150. 1841.

[73] H. Caussinus and J-B. Hiriart-Urruty. Sarrus, Borel, Deltheil: le Rouergue et ses mathématiciens. *Gaz. Math.*, (104):89–97, 2005.

[74] A. Cayley. On a theorem in the geometry of position. *Cambridge Mathematical Journal*, 2:267–271, 1841.

[75] A. Cayley. On the theory of determinants. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8:1–16, 1843.

[76] A. Cayley. On the theory of linear transformations. *Cambridge Mathematical Journal*, 4:193–209, 1845.

[77] A. Cayley. Mémoire sur les hyperdéterminants. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 30:1–37, 1846.

[78] A. Cayley. Sur quelques propriétés des déterminants gauches. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 32:119–123, 1846.

[79] A. Cayley. On the theory of permutants. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 7:40–51, 1852.

[80] A. Cayley. Sept différents mémoires d'analyse. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 50:277–317, 1855.

[81] A. Cayley. A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadric function. *The Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 148:39–46, 1858.

[82] A. Cayley. A memoir on the theory of matrices. *The Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 148:17–37, 1858.

[83] A. Cayley. A supplementary memoir on the theory of matrices. *The Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 156:25–35, 1866.

[84] E. Christoffel. Verallgemeinerung einiger theoreme des hern weierstrass. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 63:255–272, 1864.

[85] D. Cifuentes. *Lecciones de álgebra superior. Segunda parte.* 1911.

[86] D. Cifuentes. *Lecciones de álgebra superior. Primera parte.* 1912.

[87] M. Correa. Reseña de Rey Pastor J. Resumen de las lecciones de Análisis matemático (primer curso). *Rev. de la Soc. Mat. Española*, 4:295–298, 1914-15.

[88] L. Corry. Estructuras algebraicas y textos algebraicos del siglo xix. *Llull*, 14(26):7–30, 1991.

[89] L. Corry. Modern algebra and the rise of mathematical structures. In *Science Networks*, volume 17. Birkhäuser, 1996.

[90] L. Corry. Heinrich Weber, Lehrbuch der algebra (1895–1896). In *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, pages 690–699. Elsevier, 2005.

[91] J. Cortázar. *Tratado de álgebra elemental.* 1848.

[92] J. Cortázar. *Tratado de álgebra elemental.* 8 edition, 1857.

[93] G. Cramer. *Introduction à L'Analyse des Lignes Courbes Algébraiques.* Freres Cramer & Cl. Philibert, 1750.

[94] R. Baltzer. Trad. L. Cremona. *Elementi di matematica.* Tipografia del R. I. de Sordo-Muti, 1865-68.

[95] T. Crilly. Cayley's anticipation of a generalised Cayley-Hamilton theorem. *Historia Math.*, pages 211–219, 1978.

[96] T. Crilly. A gemstone in matrix algebra. *Math. Gazette*, 76:182–188, 1992.

[97] C. Cullis. *Matrices and Determinoids.* Cambridge University Press, 1913.

[98] Z. García de Galdeano. *Tratado de álgebra con arreglo a las teorías modernas. Parte Primera. Tratado elemental.* 1884.

[99] Z. García de Galdeano. *Crítica y Síntesis de Álgebra.* 1888.

[100] Z. García de Galdeano. *Tratado de Álgebra con arreglo al programa oficial publicado para el ingreso en la Escuela Preparatoria. Parte Segunda. Tratado Superior.* 1888.

[101] Z. García de Galdeano. Elementos de la teoría de los determinantes y sus aplicaciones a la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales y a la teoría de las formas. *El Progreso Matemático*, page 96, 1891.

[102] Z. García de Galdeano. Les mathématiques en espagne. *L'Enseignement Mathématique*, 1:1–21, 1899.

[103] Z. García de Galdeano. *Teoría de las ecuaciones diferenciales.* 1906.

[104] Z. García de Galdeano. *Exposición sumaria de las teorías matemáticas.* 1907.

[105] J.M de Mier. *El ingeniero Don Lino de Pombo O'donnell.* 2003.

[106] L. de Pombo. *Lecciones de jeometría analítica.* 1850.

[107] L. de Pombo. *Lecciones de aritmética i áljebra.* 1858.

[108] L. Octavio de Toledo. *Elementos de la teoría de las formas.* 1889.

[109] L. Octavio de Toledo. *Tratado de álgebra.* 1914.

[110] L. Octavio de Toledo. Una lección acerca de las series dobles. *Rev. de la Soc. Mat. Española*, 4:225–241, 1914-15.

[111] L. Octavio de Toledo. *Elementos de Aritmética Universal II.* 1916.

[112] J. I. Díaz. Alberto Dou: su obra matemática y su papel en el progreso de la matemática española. *La Gaceta de la RSME*, 12(2):227–256, 2009.

[113] L. E. Dickson. Definitions of a linear associative algebra by independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society*, 4(1):21–26, 1903.

[114] C.L. Dodgson. Condensation of determinants, being a new and brief method for computing their arithmetical values. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1867.

[115] C.L. Dodgson. *An elementary treatise on determinants with their application to simultaneous linear equations and algebraical geometry.* Macmillan & co, 1867.

[116] J.L. Dorier. Le concept de rang dans les systèmes d'équations linéaires. In IREM des Pays de Loire, editor, *Actes de la 7° université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques*, pages 237–252. Université de Nantes, 1999.

[117] G. Dostor. *Éléments de la théorie des déterminants avec application a l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie analytique dans le plan et dans l'espace, a l'usage des classes de mathématiques spéciales.* Gauthier-Villars, 1877.

[118] J.J. Durán. *Teoría elemental de las formas algebraicas con arreglo al programa de ingreso a la Escuela General de Ingenieros y Arquitectos.* 1889.

[119] S. Dwinas. Sobre ciertos determinantes que se utilizan en estadística matemática. *Mat. Elemental*, 3:79–80, 1948.

[120] J. Echegaray. *Cálculo de variaciones: lecciones esplicadas en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.* 1858.

[121] J. Echegaray. Discurso del sr. don josé echegaray. In *Discursos leídos ante la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, 1866.

[122] J. Echegaray. *Introducción a la geometría superior.* 1867.

[123] J. Echegaray. *Memoria sobre teoría de las determinantes.* 1868.

[124] J. Echegaray. Aplicaciones de las determinantes. *Revista de los Progresos de las Ciencias*, pages 321–333, 1869.

[125] G. Eisenstein. Untersuchungen über die cubischen formen mit zwei variabeln. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 27:89–104., 1844.

[126] G. Eisenstein. Allgemeine untersuchungen über die formen dritten grades mit drei variabeln, welche der kreistheilung ihre entstehung verdanken. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, pages 289–374, 19–53, 1844-45.

[127] J. J. Escribano. El imaginarismo según Rey y Heredia. *Llull*, 21(42):653–676, 1998.

[128] J. J. Escribano. Notas sobre la introducción de los vectores en la matemática española (1865-1920). In *La enseñanza de las ciencias: una perspectiva histórica*, pages 605–620. 2000.

[129] J.J. Escribano. Los elementos de geometría analítica de Sixto Cámara Tecedor. In *Matemática y región : La Rioja : sobre matemáticos riojanos y matemática en La Rioja*, pages 123–135, 1998.

[130] J.J. Escribano. *Estudio histórico de la obra matemática de Sixto Cámara Tecedor (1878-1964) en el contexto de la matemática española*. PhD thesis, Universidad de La Rioja, 2000.

[131] J.J. Escribano and L. Español. Análisis interno de la evolución del libro de texto *Lecciones de Geometría analítica*, de Santiago Mundi y Giró. In *Actes de les V Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, pages 343–350, 2000.

[132] L. Español. Julio Rey Pastor ante los cambios en el álgebra de su tiempo. In *Matemática y región : La Rioja : sobre matemáticos riojanos y matemática en La Rioja*. IER, 1998.

[133] L. Español. Julio Rey Pastor: primeros años españoles: hasta 1920. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 9(2):546–585, 2006.

[134] L. Español and Y. Álvarez. Algoritmos algebraicos lineales en el primer libro de texto (1917) de Julio Rey Pastor. *Llull*, 35(75):13–36, 2012.

[135] L. Español, M.A. Martínez, Y. Álvarez, and C. Vela. Julio Rey Pastor y el análisis algebraico: de los apuntes de 1914-16 a tres libros de texto (1917-1925). *Zubía*, 28:139–166, 2010.

[136] Luis Español. Julio Rey Pastor y el espíritu del 98. In E. Ausejo and M.C. Bernal, editors, *La enseñanza de las ciencias : una perspectiva histórica*, pages 169–203, 2003.

[137] L. Euler. *Introductio in analysin infinitorum I, II.* Laussane, 1748.

[138] L. Euler. Recherches sur la question des inégalités du mouvement de saturne et de jupiter. *Opera*, 2:45–157, 1749.

[139] L. Euler. Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. *Opera*, 4:219–233, 1749.

[140] B. Eychenne. L'enseignement de Lino de Pombo au Colegio Militar de Bogota : Les Leçons de géométrie analytique (1850). Master's thesis, U. de Nantes, 2013.

[141] R.W. Farebrother. Books on determinants 1841-51. *Image*, 36:3,5, 2006.

[142] R.W. Farebrother, S.T. Tensen, and G.P. Styan. Sir Thomas Muir and nineteenth-century books on determinants. *Image*, 28:6–15, 2002.

[143] D. Fearnley-Sander. Hermann Grassmann and the creation of linear algebra. *Amer. Math. Monthly*, pages 809–817, 1979.

[144] G. Fernández. *Elementos de la teoría de los determinantes y sus aplicaciones a la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales y a la teoría de las formas :de acuerdo con los programas oficiales de la Escuela General Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos*. 1891.

[145] G. Fernández. *Elementos de la teoría de los determinantes y sus aplicaciones á la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales y á la teoría de las formas. Con un apéndice que contiene la teoría de los resultantes y su aplicación á la eliminación de grado superior, de acuerdo con los programas oficiales*. 1895.

[146] G. Fernández. *Elementos de la teoría de los determinantes y sus aplicaciones a la eliminación y a la teoría de las formas*. 1902.

[147] O. Fernández. Contribución al estudio de las redes de homografías que contienen la identidad en E_n. generalización de un teorema de Weierstrass. *Anales JAE*, 17(5):233–249, 1918.

[148] P. J. E. Finck. *Éléments d'algebre*. Derivaux, 1846.

[149] G. Fontené. Théorème pour la discussion d'un systeme de n équations du premier degré á n inconnues. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 14:481–487, 1875.

[150] G. Fontené. Réclamation à propos du théorème dit de rouché. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 19:188, 1900.

[151] C. G. Fraser. The calculus as algebraic analysis: some observations on mathematical analysis in the 18th century. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 39(4):317–335, 1989.

[152] G. Frobenius. Ueber das Pfaffsche problem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 82:230–315, 1875.

[153] G. Frobenius. Note sur la théorie des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables. extrait d'une lettre de m. frobenius à m. hermite. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances del'Académie des Sciences*, 1877.

[154] G. Frobenius. Über lineare substitutionen und bilineare formen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84:1–63, 1878.

[155] G. Frobenius. Theorie der linearen formen mit ganzen coefficienten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 86:146–208, 1879.

[156] G. Frobenius. Ueber homogene totale differentialgleichungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 86:1–19, 1879.

[157] G. Frobenius. Über die elementarteiler de determinanten. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 7–20, 1894.

[158] G. Frobenius. Über vertauschbare matrizen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 601–614, 1896.

[159] G. Frobenius. Zur theorie der linearen gleichungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 129:175–180, 1905.

[160] G. Frobenius and L. Stickelberger. Ueber gruppen von vertauschbaren elementen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 86:217–262, 1879.

[161] F. Gaeta. Una aplicación del álgebra lineal a la teoría de las extensiones algebraicas simples de un cuerpo. *Rev. Mat. Hispano-Americana*, 6:251–254, 1945.

[162] S. Garma. Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX. In J. M. Sánchez, editor, *Ciencia y Sociedad en España*, pages 93–127. CSIC, 1988.

[163] C.F. Gauss. *Disquisitiones arithmeticae.* Gerhard Fleischer, 1801.

[164] C.F. Gauss. *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus solem ambientiem.* 1809.

[165] C.F. Gauss. *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803,1804, 1805, 1807, 1808, 1809.* 1810.

[166] C.F. Gauss. *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.* 1823.

[167] C. Goldstein. Johann peter gustav lejeune-dirichlet, vorlesungen über zahlentheorie (1863). In *Landmark writings in Western Mathematics, 1640-1940*, pages 480–490. Elsevier, 2005.

[168] F. González. La actividad del Laboratorio Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios durante la Guerra Civil. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 4(3):675–686, 2001.

[169] F. González. The journals of the Real Sociedad Matemática Española, 1911–2011. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 15:9–36, 2012.

[170] P. Gordan. *Vorlesungen über Invariantentheorie.* B. G. Teubner, 1885.

[171] H. Grassmann. *Die lineale Ausdehnungslehre.* Otto Wigand, 1844.

[172] H. Grassmann. *Die Ausdehnungslehre.* Th. Chr. Fr. Enslin, 1862.

[173] S. Günther. *Lehrbuch der Determinanten. Theorie für Studirende.* E. Besold, 1875.

[174] W. R. Hamilton. On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 2:424–434, 1844.

[175] W. R. Hamilton. *Lectures on Quaternions.* Hodges, Smith, and co., 1853.

[176] H. Hankel. *Theorie der complexen Zahlensysteme.* L. Voss, 1867.

[177] T. Hawkins. Cauchy and the spectral theory of matrices. *Historia Math.*, 2(1-29), 1975.

[178] T. Hawkins. The theory of matrices in the 19th century. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 561–570, 1975.

[179] T. Hawkins. Another look at Cayley and the theory of matrices. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 27:82–112, 1977.

[180] T. Hawkins. Weierstrass and the theory of matrices. *Archive for History of Exact Sciences*, (17):119–163, 1977.

[181] T. Hawkins. Frobenius and the symbolical algebra of matrices. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 62:23–57, 2008.

[182] B.A. Hedman. An earlier date for "Cramer's rule". *Historia Math.*, 26(4):365–368, 1999.

[183] K. Hensel. Ueber die elementartheiler componirter systeme. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 114:109–115, 1895.

[184] C. Hermite. Remarques sur un mémoire de m. cayley relatif aux déterminants gauches. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 9:63–67, 1854.

[185] C. Hermite. Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 47:307–312, 1854.

[186] C. Hermite. Note sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances del'Académie des Sciences*, 40:249–254, 304–309, 365–369, 427–431, 485–489, 536–541, 704–707, 784–787, 1855.

[187] C. Hermite. Remarque sur un théorème de m. cauchy. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances del'Académie des Sciences*, 41:181–183, 1855.

[188] C. Hermite. Extrait d'une lettre de m. ch. hermite à m. borchardt sur la transformation des formes quadratiques ternaires en elles-mèmes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, pages 325–328, 1874.

[189] L. O. Hesse. Ueber die elimination der variabeln aus drei algebraischen gleichungen vom zweiten grade mit zwei variabeln. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 28:68–96, 1844.

[190] A. Horiuchi. *Les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo (1600–1868).* Mathesis. Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1994. Une étude des travaux de Seki Takakazu (?–1708) et de Takebe Katahiro (1664–1739).

[191] M. Hormigón. Una aproximación a la biografía científica de García de Galdeano. *El Basilisco*, 16:38–47, 1983.

[192] M. Hormigón. *Catálogo de la producción matemática en España entre 1870 y 1920.* 1987.

[193] M. Hormigón. Garcia de galdeano's works on algebra. *Historia Math.*, 18(1):1–15, 1991.

[194] M. Hormigón. Una aproximación a la biografía científica de Zoel García de Galdeano. *La Gaceta de la RSME*, 10(1):281–294, 2004.

[195] R. Baltzer. Trad. J. Houel. *Théorie et applications des déterminants.* 1861.

[196] P. Ibarrola. Gauss y la estadística. Universitat Politècnica de Catalunya, 2005-2006.

[197] E. L. Ince. *Ordinary differential equations.* 1926.

[198] E. L. Ince. *Integration of ordinary differential equations.* 1939.

[199] J. M. Íñiguez. *Operadores lineales en los espacios métricos.* 1946.

[200] J.A. Irueste. D. Juan Cortázar. *Revista de la Sociedad Matemática Española*, 1(8):285–290, 1912.

[201] C. G. J. Jacobi. De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicum. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 12:1–69, 1834.

[202] C. G. J. Jacobi. De determinantibus functionibus. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 22:319–359, 1841.

[203] C. G. J. Jacobi. De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 22:360–371, 1841.

[204] C. G. J. Jacobi. Über ein leichtes verfahren, die in der theorie der säcularstörungen vorkommenden gleichungen numerisch aufzulösen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 30:51–94, 1846.

[205] C.G.J. Jacobi. De singulari quadam duplicis integralis transformatione. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2:234–242, 1827.

[206] C.G.J. Jacobi. Ueber die hauptaxen der flächen der zweiten ordnung. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2:227–233, 1827.

[207] C.G.J. Jacobi. Ueber die pfaffsche methode, eine gewöhnliche lineäre differentialgleichung zwischen 2n variabeln durch ein system von n gleichungen zu integriren. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2:347–357, 1827.

[208] C.G.J. Jacobi. De formatione et propietatibus determinantium. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 22:285–318, 1841.

[209] H.N. Jahnke. Algebraic analysis in Germany, 1780–1840: some mathematical and philosophical issues. *Historia Math.*, 20:265–284, 1993.

[210] C. Jiménez. *Prolegómenos de Aritmética universal.* 1889.

[211] E. Jiménez. *Tratado elemental de la teoría de los números*, volume VII. Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, 1877.

[212] R. Baltzer. Trad. E. Jiménez and M. Merelo. *Elementos de Matemáticas.* F. Góngora y Cía., 1879-1881.

[213] A. Jiménez-Landi. *La Institución Libre de Enseñanza y su ambiente.* Universidad Complutense, Editorial Complutense, 1996.

[214] C. Jordan. *Traité des substitutions et des équations algébriques.* Gauthier-Villars, 1870.

[215] W. Jordan. *Handbuch der Wermessungskunde.* Metzler, 1888.

[216] R. San Juan. Teoría de las magnitudes físicas y sus fundamentos algebraicos. *Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid*, 39:11–252, 1945-46.

[217] E. Knobloch. *Der Beginn der Determinantentheorie.* Arbor Scientiarum: Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte, Reihe B: Texte [Arbor Scientiarum: Contributions to the History of Science, Series B: Texts], II. Gerstenberg Verlag, Hildesheim, 1980. Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkül. [Leibniz' studies on the determinant calculus].

[218] E. Knobloch. Determinants. In *Companion Encyclopedia of the history and philosophy of the Mathematical Sciences*, pages 766–774. Routledge, 1994.

[219] E. Knobloch. From Gauss to Weierstrass: determinant theory and its historical evaluations. In *The intersection of history and mathematics*, volume 15 of *Sci. Networks Hist. Stud.*, pages 51–66. Birkhäuser, Basel, 1994.

[220] E. Knobloch. First european theory of determinants. In Karl Popp and Erwin Stein (eds.), editors, *Gottfried Wilhelm Leibniz, The work of the great universal scholar as philosopher, mathematician, physicist, engineer*, 2000.

[221] E. Knobloch. Déterminants et élimination chez Leibniz. *Rev. Histoire Sci.*, 54(2):143–164, 2001. Mathématiques et physique leibniziennes, 1re Partie.

[222] K. Kommerell. *Vorlesungen über analytische geometrie des raumes.* 1940.

[223] L. Kronecker. Ueber bilineare formen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 68:273–285, 1868.

[224] L. Kronecker. Ueber schaaren quadratischer formen. *Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 339–346, 1868.

[225] L. Kronecker. Bemerkungen zur determinanten-theorie. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72, 1870.

[226] L. Kronecker. Ueber schaaren von quadratischen und bilinearen formen. *Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 59–76, 149–156, 206–232, 1874.

[227] L. Kronecker. Ii. vorlesungen über die theorie der determinanten. In *Vorlesungen über Mathematik.* B. G. Teubner, 1903.

[228] J.-L. Lagrange. Recherches sur la méthode de maximis et minimis. *Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurensis*, (1):18–42, 1759.

[229] J.-L. Lagrange. Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératice. *Nouveaux Memoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, pages 85–128, 1775.

[230] J.-L. Lagrange. Recherches d'arithmétique. *Nouveaux Memoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, pages 265–312, 1775.

[231] J.-L. Lagrange. Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires. *Nouveaux Memoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, pages 149–176, 1775.

[232] J.-L. Lagrange. *Théorie des fonctions analytiques.* L'Imprimerie de la République, 1797.

[233] E. Laguerre. Sur le calcul des sytèmes linéaires. *Journal de l'École Polytechnique*, 62:215–264, 1867.

[234] E. Laguerre. Recherches analitiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de steiner. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 11:337–347, 418–428, 1872.

[235] E. Laguerre. Sur la méthode de monge pour l'intégration des équations linéaires simultanées. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances del'Académie des Sciences*, 15:49–58, 1876.

[236] C. A. Laisant. *Méthode des quaternions.* 1881.

[237] P.S. Laplace. Recherches sobre le calcul integral et sur le systeme du monde. *Mémoires de l'Académie Paris*, pages 267–376, 1772.

[238] M. Lecat. *Leçons sur la théorie des déterminantes à n dimensions :avec applications a l'àlgebra, a la géométrie, etc.* 1910.

[239] A.M. Legendre. *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes.* Didot, 1805.

[240] G. W. Leibniz. *Leibnizens Matematishe Schrifen.* Asher & Comp., 1849.

[241] B. Levi. *Introduzione alla analisi matematica.* Hermann, 1916.

[242] I. Liévano. *Tratado elemental de aritmética.* 1856.

[243] I. Liévano. *Almanaque para el año de 1863: calculado para los Estados Unidos de Colombia.* 1863.

[244] I. Liévano. *Tratado de Áljebra.* 1875.

[245] J. Llombart. Un estudio sobre la revista Gaceta de Matemáticas Elementales - Gaceta de Matemáticas (1903-1906). *Llull*, 12:7–32, 1989.

[246] J. Llombart. Cronica cientifica: the articles o the mathematics section. In *Messengers of mathematics: European mathematical journals (1800-1946)*, pages 267–281. 1993.

[247] J. Llombart and J. Lorenzo. De la Escuela General Preparatoria (Santiago de Cuba) a la Universidad Central (Madrid): biografía académico-científica del matemático hispano-cubano José María Villafañe y Viñals (1830–1915). *Revista Ciencias Matemáticas*, 19(2):120–132, 2001.

[248] G. Lusa. *Matemáticas e ingeniería: 1850-1902.* Grup d'Història de la Ciència i de la Tècnica l'ETSEIB, 1994.

[249] C. Maclaurin. *A treatise of algebra in three parts.* A. Millar & J. Nourse, 1748.

[250] P. Mansion. *Éléments de la théorie des déterminants avec de nombreux exercices.* 1883.

[251] P. Mansion. Lecciones de coordinatoria con las determinantes y sus principales aplicaciones. *Revue des questions scientifiques*, XIV:591–594, 1883.

[252] S. Maracchia. *Storia dell'algebra.* Liguori, 2008.

[253] D. Marín. *Tratado de ecuaciones diferenciales.* 1942.

[254] M. A. Martínez. Las matemáticas en la ingeniería: las matemáticas en los planes de estudio de los ingenieros civiles en España en el siglo XIX, I y II. In *Cuadernos de historia de la ciencia*, volume 16. Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón, 2004.

[255] M. V. Martínez. *Olegario Fernández-Baños (Apuntes para uan biografía).* 1995.

[256] M. Marzal. *Resumen de las lecciones de análisis matemático (primer curso).* 1894.

[257] M. Marzal. *Resumen de las lecciones de análisis matemático (segundo curso).* 1899.

[258] M. Menghini. The role of projective geometry in italian education and institutions at the end of the 19th century. *The International Journal for the History of Mathematics Education*, 1(1), 2006.

[259] Ch. Michel. *Cours d'algèbre et d'analyse.* F. Alcan, 1916.

[260] A. Millán. *El matemático Julio Rey Pastor.* 1988.

[261] J. Molina. Los números elementales para las cuádricas. *Mat. Elemental*, 1:11–19, 1946.

[262] G. H. Moore. The axiomatization of linear algebra: 1875–1940. *Historia Math.*, 22(3):262–303, 1995.

[263] T. Muir. List of writings on the theory of matrices (1857-1893). *American Journal of Mathematics*, 20:225–228, 1898.

[264] T. Muir. The theory of deneral determinants in the historical order of development up to 1846. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 25:61–91, 1906.

[265] T. Muir. *Contributions to the history of determinants 1900-1920*. Blackie, 1930.

[266] T. Muir. *Theory of determinants in the historical order of development I, II, III, IV*. Dover, 1960.

[267] S. Mundi. *Apuntes de geometria de posicion: tomados de las esplicaciones del del Dr. D. Santiago Mundi, catedrático de dicha asignatura en esta Universidad*. 1884.

[268] S. Mundi. *Lecciones de geometría analítica*. 1893.

[269] P. Muth. *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*. B. G. Teubner, 1899.

[270] A. Natucci. In memoria di Alfredo Capelli (1855-1910). *Periodico di Matematiche*, 4(33):257–275, 1955.

[271] E. Netto and R. le Vavasseur. I9. Les fonctions rationelles. *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, 2(1):1–232, 1992.

[272] P. M. Neumann. On the date of cauchy's contributions to the founding of the theory of groups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 40:293–302, 1989.

[273] B. Niewenglowsky. *Course de Géométrie Analytique. T. IV. Applications des Quaternions à la Géométrie Analytique*. 1927.

[274] J.M. Núñez and J. Servat. La matemática y la institución libre de enseñanza: concepciones teóricas y pedagógicas. *Llull*, 11(20):75–96, 1988.

[275] E. Outerelo. *Evolución histórica de la Licenciatura en Matemáticas (Exactas) en la Universidad Central*. U. Complutense, 2009.

[276] F. Padula. Ricerche di geometria analitica. *Atti del Real Istituto d'Incoraggiamento alle scienze naturali di Napoli*, 1864.

[277] E. Pascal. *I determinanti. Teoria ed applicazioni con tutte le più recenti ricerche.* Ulrico Hoepli, 1897.

[278] J. Rey Pastor. Caracteres de formas cuadráticas definidas. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Madrid*, 8:540–553, 1911.

[279] J. Rey Pastor. Lección inaugural curso 1913-1914 de la Universidad de Oviedo. 1913.

[280] J. Rey Pastor. *Resumen de las lecciones de análisis matemático (primer curso).* 1914.

[281] J. Rey Pastor. Discurso Inaugural de la Sección de Ciencias Matemáticas. In *Actas V Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias*, volume 1, pages 7–25, 1915.

[282] J. Rey Pastor. *Resumen de las lecciones de análisis matemático (segundo curso).* 1916.

[283] J. Rey Pastor. *Elementos de Análisis Algebraico.* 2 edition, 1922.

[284] J. Rey Pastor. *Lecciones de Álgebra.* 1924.

[285] J. Rey Pastor. *Lecciones de Álgebra.* 1957.

[286] Julio Rey Pastor. *Elementos de Análisis Algebraico.* 1917.

[287] G. Peacock. *A treatise on algebra.* Cambridge, 1830.

[288] G. Peano. *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deductiva.* Bocca, 1888.

[289] J. Peralta. Octavio de Toledo, la sucesión de los promotores de nuestro despertar matemático. *La Gaceta de la RSME*, 8(2):527–547, 2005.

[290] P. Pineda. Reseña de Rey Pastor J. Elementos de análisis algebraico. 2Âª ed. *Rev. Mat. Hispano-Americana*, 5:83–84, 1923.

[291] A. Pringsheim and G. Faber. II7. Analyse Algébrique. *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, 2(1):1–93, 1992.

[292] O. Puche. Daniel Francisco de Paula Cortazar y Larrubia (Madrid, 1844 - madrid, 1927). *Llull*, 27(58):131–146, 2004.

[293] A. Ramos. Discurso del señor Abelardo Ramos. *Anales de ingeniería*, 1(1):6–10, 1887.

[294] A. Ranum. Bôcher's higher algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 16(10):521–523, 1910.

[295] T. Recio. Pedro Abellanas Cebollero: cuarenta años de matemática española. *La Gaceta de la RSME*, 4(1):119–133, 2001.

[296] C. Reyneau. Jacque Quuillau, 1708.

[297] L. Rico. Libros de texto de matemáticas en España durante los siglos XVIII y XIX.

[298] S. Ríos, L.A. Santaló, and M. Balanzat. *Julio Rey Pastor matemático.* 1979.

[299] A. Roca. De la regeneración a la involución: Terradas y Rey Pastor 35 años de amistad científica. In *Estudios sobre Julio Rev Pastor (1888-1962)*, pages 71–104. 1990.

[300] A. Roca and J.M. Sánchez. La vuelta de Esteban Terradas a España (1940-1950). *Llull*, 6:105–142, 1983.

[301] A.C. Aitken. Trad. T. Rodríguez. *Determinantes y Matrices.* 1949.

[302] J. Sánchez Ron. *José Echegaray.* 1990.

[303] E. Rouché. Sur la discussion des équations du premier degré. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances del'Académie des Sciences*, 81:1050–1052, 1875.

[304] E. Rouché. Sur l'élimination. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2(16):105–113, 1877.

[305] E. Rouché. Note sur les équations linéaires. *Journal de l'École Polytechnique*, 48:221–228, 1880.

[306] M.A. Rueda. Sección editorial. *Anales de ingeniería*, 1(1):2–6, 1887.

[307] M.A. Rueda. *Curso de álgebra.* 1891.

[308] M.A. Rueda. *Curso de álgebra.* 5 edition, 1919.

[309] M.A. Rueda and A. Brito. *Lecciones de álgebra.* 1887.

[310] G. Salmon. *Lessons introductory to the modern higher algebra.* Hodges, Smith, and co., 1779.

[311] C.H. Sánchez. Las Matemáticas en los *anales de ingeniería. Mathesis*, 9:105–124, 1993.

[312] C.H. Sánchez. Cien años de historia de la matemática en Colombia. 1848-1948. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, 26(99):239–260, 2002.

[313] C.H. Sánchez. Fuentes para la historia de la matemática en Colombia. Discurso de apertura de estudios pronunciado en la Universidad del Cauca, el día primero de octubre de 1830 por el Catedrático de Matemáticas Lino de Pombo. *Lecturas Matemáticas*, 26:111–124, 2005.

[314] C.H. Sánchez. *Los ingeniero-matemáticos colombianos del siglo XIX y comienzos del siglo XX.* 2007.

[315] D. Sánchez. Sección editorial. Necrología. *Anales de ingeniería*, 6(61):1–2, 1893.

[316] H.F. Scherk. *Mathematischen Abhandlungen.* G. Reimer, 1825.

[317] L. Schlesinger. *Handbuch der Theorie der linearen Differentalgleichungen.* 1898.

[318] O. Schlömilch. *Handbuch der algebraischen Analysis.* Jena, 1845.

[319] O. Schreier and E. Sperner. *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra.* 1932.

[320] R. F. Scott. *A treatise on the theory of determinants and their applications in analysis and geometry.* Cambridge University Press, 1880.

[321] H.J.S. Smith. On systems of linear indeterminate equations and congruences. *The Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 151, 1861.

[322] W. Spottiswoode. An elementary theorems relating to determinants. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 51:209–271, 328–381, 1856.

[323] William Spottiswoode. *An elementary theorems relating to determinants.* Longman, 1851.

[324] O. Stolz. *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik.* 1881.

[325] C. F. Sturm. Extrait d'un mémoire sur l'intégration d'un système d'equations différentielles linéaires. *Bulletin de Férussac*, (XII):313–322, 1829.

[326] A. Suárez and L. G. Gascó. *Lecciones de coordinatoria con las determinantes y sus principales aplicaciones.* 1882.

[327] J.J. Sylvester. Additions to the articles ... "on a new class of theorems", and "on Pascal's theorem". *Philosophical Magazine*, 37:363–370, 1850.

[328] J.J. Sylvester. An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order. *Philosophical Magazine*, 1:119–140, 1851.

[329] J.J. Sylvester. On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic forms. *Philosophical Magazine*, 1:295–305, 1851.

[330] J.J. Sylvester. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. *Philosophical Magazine*, 4:138–142, 1852.

[331] J.J. Sylvester. On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure. *The Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 143:407–548, 1853.

[332] J.J. Sylvester. Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances del'Académie des Sciences*, 94:55–59, 1882.

[333] J.J. Sylvester. Sur les racines des matrices unitaires. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances del'Académie des Sciences*, 94:396–399, 1882.

[334] J.J. Sylvester. A word on nonions. *Johns Hopkins Univ. Circ.*, 17:241–242, 1882.

[335] J.J. Sylvester. On the equation to the secular inequalities in the planetary theory. *Philosophical Magazine*, 16:267–269, 1883.

[336] J.J. Sylvester. The genesis of an idea, or story of a discovery relating to equations in multiple quantity. *Nature*, 31:35–36, 1884.

[337] J.J. Sylvester. Lectures on the principles of universal algebra. *American Journal of Mathematics*, 6:270–286, 1884.

[338] J.J. Sylvester. On quaternions, nonions, sedenions, etc. *Johns Hopkins Univ. Circ.*, pages 7–9, 1884.

[339] J.J. Sylvester. Sur la résolution generale de l'équation linéaire en matrices d'un ordre quelconque. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances del'Académie des Sciences*, 99:409–412, 432–437, 1884.

[340] J.J. Sylvester. Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de hamilton. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances del'Académie des Sciences*, 99:273–276, 471–475, 1884.

[341] P.G. Tait. *Traité élémentaire des quaternions*. 1882-85.

[342] E. Terradas. *Programa de un curso sobre ecuaciones diferenciales*. 1932.

[343] N. Trudi. *Teoria de' determinanti e loro applicazioni*. B. Pellerano, 1862.

[344] B. L. van der Waerden. *Moderne Algebra I, II*. Springer, 1930, 1931.

[345] A.T. Vandermonde. Mémoire sur l'élimination. *Mémoires de l'Académie Paris*, II:516–532, 1772.

[346] F. Vea. Las matemáticas en la enseñanza secundaria en españa en el siglo xix. In *Cuadernos de historia de la ciencia*. U. de Zaragoza, 1995.

[347] J.M. Vegas. Miguel Vegas, la pasión por la Geometría. In *Matemáticos Madrileños*, pages 231–255. 2000.

[348] M. Vegas. *Tratado de geometría analítica*. 1894.

[349] M. Vegas. *Tratado de geometría analítica*. 1906.

[350] F. Viète. *In Artem Analyticem Isagoge*. J. Mettayer, 1591.

[351] J. M. Villafañe. *Teoría de las determinantes*. 1888.

[352] J. M. Villafañe. *Elementos de las teorías coordinatoria y de las determinantes con sus principales aplicaciones*. 1891.

[353] J. M. Villafañe. *Elementos de las teorías coordinatorias y de los determinanates.* 1901.

[354] H. Weber. Theory der Abel'schen Zahlkörper I, II. *Acta Math. Stokh.*, 8,9:193–263, 105–130, 1887.

[355] H. Weber. *Lehrbuch der Algebra I, II.* Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, 1895-96.

[356] J. Wedderburn. *Lectures on Matrices.* American Mathematical Society, 1934.

[357] G. Weichold. *Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen.* Maier, 1893.

[358] K. Weierstrass. Über ein die homogenen functionen zweiten grades betreffendes theorem, nebst anwendung desselben auf die theorie der kleinen schwingungen. *Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 207–220, 233–246, 1858.

[359] K. Weierstrass. Zur theorie der bilinearen und quadratischen formen. *Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 310–338, 1868.

[360] K. Weierstrass. Zur determinantentheorie. In *Werke III*, pages 271–287. J. Knoblauch, 1903.

[361] H. Weyl. Analisis situs combinatorio. *Rev. Mat. Hispano-Americana*, 5:209–218, 1923.

[362] E. Weyr. Sur la théorie des matrices. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances del'Académie des Sciences*, 100:787–789, 1885.

[363] E. Weyr. O theorii forem bilinearnych, 1889.

[364] A. Whitehead. *A treatise on universal algebra with applications.* Cambridge University Press, 1898.

[365] F.R. Safford. Trad. M. González y M.V. Gussoni. *The ideal of the practical: Colombia's struggle to form a technical elite.* 1976.

Índice de Autores