TESIS DOCTORAL

# Álgebras de composición

**José María Pérez Izquierdo**

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

**TESIS DOCTORAL**

# Álgebras de composición

**José María Pérez Izquierdo**

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2008

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. Alberto Elduque Palomo, fue leída el 27 de abril de 1996, y obtuvo la calificación de Apto Cum Laude.



Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-691-1312-7

Universidad de Zaragoza
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

# Algebras de Composición

José María Pérez Izquierdo

Memoria presentada para
optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas

Zaragoza, Marzo de 1996

La presente memoria se ha llevado a cabo en el Departamento de Mantemáticas de la Universidad de Zaragoza bajo la dirección del profesor Alberto Elduque. A lo largo del periodo de su realización he disfrutado de una beca de Formación del Personal Investigador.

En primer lugar me gustaría agradecer a Alberto todo el interés que ha puesto, el tiempo del que ha tenido que prescindir, sus pormenorizadas revisiones de mi trabajo, sus ordenados y maduros puntos de vista que se encuentran por todos los lados de la memoria, sus ánimos cuando las cosas no salían y, por supuesto, su amistad.

Igualmente me gustaría mencionar al equipo de investigación del profesor Santos González, bajo cuyo amparo me inicié en estas artes.

Sería injusto olvidar en estos momentos a las personas de este Departamento que día a día me han ido echando pequeños cables y me han animado a acabar la labor.

Por último, darle las gracias a la persona que ha puesto color en mi esperanza durante todos y cada uno de los días desde que la conozco. Gracias Yolanda por echarme una mano con esto.

A mi padre y a mi madre, quienes seguro que no entienden ni una palabra de lo que aquí se cuenta, pero que no han dudado en sacrificar su vida e incluso su salud para que esto sea posible.

# Indice


Introducción i

1 Preliminares 1

1 Algebras Hurwitz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.1 Proceso de Cayley-Dickson. Teorema generalizado de Hurwitz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.2 Algebras Hurwitz "split" . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.3 Derivaciones de las álgebras Hurwitz. . . . . . . . . . . 9

1.4 Automorfismos de las álgebras Hurwitz . . . . . . . . . 15

2 Algebras de composición estándar . . . . . . . . . . . . . . . . 17

3 Forma bilineal asociativa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

4 Algebras flexibles y de potencias asociativas . . . . . . . . . . 26

2 Forma bilineal asociativa 31

1 Preliminares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

2 Caracterización . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

3 Definición general de pseudooctoniones . . . . . . . . . . . . . 38

4 Algebras $C_\tau$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40

5 Descripción de las álgebras $C_\tau$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

5.1 Demostración del teorema 2.1 . . . . . . . . . . . . . . 50

5.2 Demostración del teorema 2.2 . . . . . . . . . . . . . . 51

6 Algebras $C(\alpha)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52

**3 Algebras de grado dos** **57**

1 Algebras de dimensión dos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

2 Algebras de grado dos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61

3 Algebras de potencias 3-asociativas . . . . . . . . . . . . . . . 68

**4 Algebra de derivaciones grande** **73**

1 Antisimetría de las derivaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77

2 Dimensiones 1,2 y 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81

3 Subálgebras de Cartan . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91

4 Algebras de rango toral 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99

5 Ejemplos de álgebras de división . . . . . . . . . . . . . . . . . 111

6 Algebra de derivaciones de tipo $A_2$ . . . . . . . . . . . . . . . 119

**5 Otras álgebras de derivaciones** **127**

1 Exposición de resultados . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127

2 Ejemplos de álgebras de división . . . . . . . . . . . . . . . . . 140

3 Algebras de rango toral 1 y rango 2 . . . . . . . . . . . . . . . 145

3.1 Subálgebras de Cartan cortas . . . . . . . . . . . . . . . 146

3.2 Subálgebras de Cartan largas . . . . . . . . . . . . . . . 154

4 Der $A$ no resoluble de rango 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162

4.1 Algebras $A \cong 4V(0) \oplus 2V(1)$ . . . . . . . . . . . . . . . 166

4.2 Algebras $A \cong V(0) \oplus V(2) \oplus 2V(1)$ . . . . . . . . . . . 170

4.3 Algebras $A \cong V(2) \oplus V(4)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 177

4.4 Algebras $A \cong 2V(0) \oplus 2V(2)$ . . . . . . . . . . . . . . . 185

5 Der $A$ resoluble de rango 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 188

6 Rango toral cero . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 193

# Introducción

Los números complejos $\mathbb{C}$ pueden verse como un espacio vectorial real de dimensión 2 donde se ha definido un producto con unidad para el cual la norma euclídea es multiplicativa (i.e. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$). A mediados del siglo pasado, Hamilton se planteó la posibilidad de extender esta construcción a dimensiones mayores que 2. Tras una infructuosa búsqueda para $\mathbb{R}^3$, a finales de 1843 encuentra un producto adecuado para $\mathbb{R}^4$ estableciendo, así, su conocida álgebra de cuaternios. Poco después Graves, en 1844, e independientemente Cayley en 1845, da el producto en $\mathbb{R}^8$ de la que hoy conocemos como álgebra de octoniones de Cayley.

La existencia de un álgebra de dimensión $m$ sobre $\mathbb{R}$ con unidad para la cual la norma euclídea sea multiplicativa equivale a una respuesta afirmativa al problema de Hurwitz: ¿Existe una fórmula

$$(x_1^2 + \cdots + x_m^2)(y_1^2 + \cdots + y_m^2) = (z_1^2 + \cdots + z_m^2)$$

donde los $z_i' s$ sean formas bilineales en $(x_j)_{j=1}^m$ e $(y_j)_{j=1}^m$ con coeficientes en el cuerpo $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ de los números reales?. En 1898 Hurwitz [Hur 98] prueba sobre $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ (y en particular sobre $\mathcal{F} = \mathbb{R}$) que tales fórmulas sólo se dan si $m = 1, 2, 4$ u 8. Así, los intentos de Hamilton de encontrar productos adecuados en $\mathbb{R}^3$ estaban condenados al "fracaso".

La definición de los cuaternios dada por Hamilton y la de los octoniones dada por Cayley se generalizan de un modo inmediato a cuerpos algebraicamente cerrados de característica $\neq 2$. Así, en 1914, Cartan [C 14] muestra que, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, el álgebra de derivaciones del álgebra de octoniones es el álgebra de Lie simple de dimensión 14 que aparece en la clasificación de Killing-Cartan [C].

Las formas de las álgebras de cuaternios y de los octoniones vienen de la mano de Dickson. Este autor idea un proceso (proceso de Cayley-Dickson) por el cual, a partir de un cuerpo arbitrario, se obtienen ciertas álgebras de dimensiones $1, 2, 4$ y $8$ de tal modo que al pasar a la clausura algebraica, las de dimensión 4 (también llamadas cuaternios generalizados) se convierten en el álgebra de cuaternios, y las de dimensión 8 (álgebras de Cayley-Dickson) se transforman en los octoniones.

Las nuevas álgebras creadas por Dickson se incorporan rápidamente a la investigación matemática. Así, en 1939, Jacobson [J 39] muestra que sobre cuerpos de característica cero toda álgebra de Lie simple central de tipo $G_2$ es isomorfa al álgebra de derivaciones de un álgebra de Cayley-Dickson y que dos de estas álgebras de Lie son isomorfas si y sólo si lo son sus respectivas álgebras de Cayley-Dickson. Por otro lado, en 1930 Zorn [Z 30] prueba que sobre cuerpos algebraicamente cerrados las únicas álgebras simples alternativas de dimensión finita son las álgebras de matrices y las álgebras de octoniones.

Volviendo a la idea original de Hamilton, para cualquier álgebra obtenida por el proceso de Cayley-Dickson existe, no ya una norma euclídea, pero sí una forma cuadrática $n(\cdot)$ que es multiplicativa respecto del producto (i.e $n(xy) = n(x)n(y)\ \forall x, y$). Esto origina una generalización del problema de Hurwitz. Dada una forma cuadrática $n : A \to F$ y $f(x,y) = n(x+y) - n(x) - n(y)$ su forma bilineal asociada, se dice que $n(\cdot)$ es no degenerada si

$n(x) = 0 = f(x,y)$ $\forall y$ implica $x = 0$; se dice que $n(\cdot)$ es estrictamente no degenerada si $f(x,y) = 0$ $\forall y$ implica $x = 0$. Ambos conceptos equivalen sobre cuerpos de característica $\neq 2$. La forma cuadrática $n(\cdot)$ permite composición si existe un producto $xy$ en $A$ de tal modo que $n(xy) = n(x)n(y)$ $\forall x, y \in A$. El nuevo problema consiste en encontrar las formas cuadráticas (no degeneradas o estrictamente no degeneradas) que permiten composición.

Las forma cuadráticas no degeneradas sobre espacios de dimensión finita que permiten composición fueron estudiadas por Albert [A 42]. Esencialmente resultan ser las del tipo $n(x) = x\bar{x}$ donde $xy$ denota el producto de un álgebra alternativa de dimensión finita que posee unidad y también una involución $x \mapsto \bar{x}$ de tal modo que para todo $x$, los elementos $x + \bar{x}$ y $x\bar{x}$ pertenecen al cuerpo base. Además, estas formas cuadráticas sólo se pueden dar o bien sobre espacios vectoriales de dimensión 1, 2, 4 u 8 o bien, si el cuerpo base es de característica 2 y la forma cuadrática es diagonal, sobre extensiones puramente inseparables de grado potencia de 2 y exponente 1. Para la forma cuadrática $n((x_1, \ldots, x_n)) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ y el cuerpo base $\mathbb{C}$ se recupera el resultado de Hurwitz.

El desarrollo de la teoría de álgebras modifica el punto de vista desde el que se estudian las formas cuadráticas no degeneradas que permiten composición. Kaplansky [K 53] prueba que cualquier álgebra con unidad que admita una forma cuadrática $n(\cdot)$ no degenerada multiplicativa respecto del producto es necesariamente un álgebra alternativa y, excepto que se trate de una extensión puramente inseparable de un cuerpo de característica 2, su dimensión es 1, 2, 4 u 8. Además, el álgebra posee una involución $x \mapsto \bar{x}$ para la cual $n(x) = x\bar{x}$.

Para evitar el caso patológico en el resultado de Kaplansky, se define un álgebra de composición como aquélla para la cual existe una forma cuadrática estrictamente no degenerada que es multiplicativa para el producto. Si además el álgebra tiene elemento unidad entonces se llama álgebra Hurwitz. En virtud del resultado de Kaplansky, las álgebras Hurwitz son alternativas, poseen una cierta involución (involución estándar) y sus dimensiones son 1, 2, 4 u 8. En el mismo trabajo, Kaplansky prueba que si en un álgebra de composición existe un elemento cuyos operadores de multiplicación son biyectivos entonces el álgebra es isótopa a una Hurwitz y, en consecuencia, su dimensión es 1, 2, 4 u 8. Tales elementos existen, por ejemplo, en cualquier álgebra de composición de dimensión finita.

Finalmente es Jacobson [J2 58] quien, basándose en los resultados de Kaplansky y Albert, demuestra, sobre cuerpos de característica $\neq 2$, el conocido teorema generalizado de Hurwitz, el cual asegura que las álgebras Hurwitz sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ son: $\mathcal{F}, \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}$, extensiones cuadráticas separables de $\mathcal{F}$, álgebras generalizadas de cuaternios o álgebras de Cayley-Dickson.

La clasificación de las álgebras de composición no unitales resulta, como es lógico, mucho más complicada. Los casos de dimensión 2 y 4 han sido tratados por Petersson [Pet 71] y Stampfli-Rollier [St 83] respectivamente. Para álgebras de dimensión 8, Petersson probó que, incluso sobre cuerpos algebraicamente cerrados, hay infinitas clases de isomorfía.

Ciertas clases de álgebras de composición no unitales surgieron en un estudio de Petersson acerca de las álgebras involutivas [Pet 69]; sin embargo, no habrá de nuevo un verdadero interés por las álgebras de composición no unitales hasta la aparición en 1978 de una nueva álgebra en física relacionada con la teoría de partículas elementales. Esta álgebra, $\tilde{\mathrm{P}}_8(\mathbb{R})$, introducida por Okubo [O1 78] se construye a partir del conjunto de matrices $3\times 3$ complejas de traza cero hermitianas definiendo un nuevo producto

$$x * y = \mu xy + (1-\mu)yx - \frac{1}{3}traza(xy)I$$

donde $\mu = \frac{1}{6}(3+\sqrt{3}i)$, $xy$ es el producto usual de matrices e $I$ la matriz identidad. Esta álgebra es un álgebra de composición con la forma cuadrática

$$n(x) = \frac{1}{6}traza(x^2).$$

La misma construcción se puede plantear sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ algebraicamente cerrado de característica $\neq 2$ y 3. El resultado es un álgebra de composición, $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$, sin elemento unidad a la que se conoce como álgebra de pseudooctoniones sobre $\mathcal{F}$. Las formas de $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$ se dicen álgebras de Okubo. El álgebra $\tilde{\mathrm{P}}_8(\mathbb{R})$ suscitó un interés inmediato debido también a que es un álgebra real flexible (i.e. $x(yx) = (xy)x$) Lie-admisible de división, y a que se puede utilizar para construir nuevas álgebras de división [O-M 80].

La forma cuadrática en un álgebra de composición es única [Pet 71]. En el caso de un álgebra de Okubo su forma bilineal cumple

$$f(x * y, z) = f(x, y * z),$$

es decir, es asociativa. Okubo y Osborn [O-O1 81] prueban que, sobre cuerpos de característica $\neq 2$ y 3, las únicas álgebras de composición con forma bilineal asociativa e idempotentes no nulos (esta hipótesis puede suprimirse mediante una extensión de escalares) son las álgebras paraHurwitz y las de Okubo. Las álgebras paraHurwitz se forman cambiando el producto $xy$ en un álgebra Hurwitz por $x * y = \bar{x}\bar{y}$, donde $x \mapsto \bar{x}$ denota la involución estándar del álgebra Hurwitz. El resultado análogo sobre cuerpos de característica 3 deviene enormemente largo y artificioso [O-O2 81], debido a que sobre estos cuerpos la única definición del álgebra de pseudooctoniones proviene de su tabla de multiplicación. En dicho trabajo, los autores manifiestan explícitamente su deseo de que en un futuro se encuentre un modo "teóricamente agradable" de presentar las álgebras de pseudooctoniones.

Una línea importante de investigación que ha abierto este resultado es el estudio de ciertas identidades para las álgebras de composición. En este orden de ideas, Okubo [O 81] demostró que las únicas álgebras de composición de potencias asociativas y dimensión finita sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ y 3 son las Hurwitz. Agrupando dentro de una misma familia a las álgebras Hurwitz, las paraHurwitz y las de Okubo, el mencionado autor prueba que éstas son las únicas álgebras de composición flexibles de dimensión finita sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica $\neq 2$. Para cuerpos de característica $\neq 2$ y 3, la demostración de este resultado ha sido notablemente simplificada [E-M 91]. En dicho trabajo Elduque y Myung estudian, además, las formas de las álgebras paraHurwitz y Okubo, con lo que extienden la clasificación de Okubo a cuerpos arbitrarios. Más recientemente [E-M 93] los mismos autores encuentran una sorprendente equivalencia de categorías entre las álgebras de composición flexibles sin unidad de dimensión finita sobre cuerpos de característica $\neq 2$ y 3, y cierta categoría de álgebras alternativas separables de grado 3. Esta equivalencia resuelve de un modo simple y elegante la clasificación de dichas álgebras de composición.

El estudio de identidades para álgebras resulta siempre un tema interesante. Paralelamente al trabajo realizado sobre álgebras de composición no unitales se ha ido desarrollando el estudio de las álgebras absolutamente valuadas. Retomando el planteamiento inicial de Hamilton de extender el producto de los números complejos a dimensiones superiores, se define un álgebra absolutamente valuada como un álgebra no trivial sobre los números reales que posee una norma $||\cdot||$ verificando $||xy|| = ||x||||y||$ para cualesquiera $x$ e $y$. Los primeros ejemplos que se conocen de álgebras absolutamente valuadas son $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, el álgebra de cuaternios de Hamilton y el álgebra de octoniones de Cayley (la norma en todos los casos es la euclídea). Un teorema central en esta teoría [U-W 60] nos dice que éstas son las únicas algebras absolutamente valuadas que poseen identidad (teorema análogo al generalizado de Hurwitz). Se conocen álgebras absolutamente valuadas con unidad a un lado de dimensión infinita [Cu, Rod 92, E-P2].

A la hora de estudiar álgebras absolutamente valuadas que satisfagan ciertas identidades, una de las técnicas más difundidas es comprobar si el cumplimiento de tales identidades obliga a que la norma proceda de un producto escalar (esto no siempre es cierto [Rod]), o si la dimensión del álgebra es finita. Este tipo de ideas se encuentran muy presentes, por ejemplo, en los trabajos de El-Mallah sobre álgebras absolutamente valuadas de potencias 3-asociativas (i.e. $x^2x = xx^2$) o en el trabajo de Rodríguez Palacios sobre álgebras absolutamente valuadas de grado 2 [El 83, El 87, El 90, Rod 94]. Una vez determinado que la norma procede de un producto escalar, nos encontramos con un álgebra de composición cuya forma cuadrática es definida, lo cual facilita el posterior análisis.

El otro carácter por el que destaca el álgebra $\tilde{\mathrm{P}}_8(\mathbb{R})$ es el de ser un álgebra de división. En [Ho 40] Hopf demuestra que toda álgebra de división real de dimensión finita posee dimensión potencia de 2. Más tarde, Bott y Milnor [B-M 58] e, independientemente, Kervaire [Ke 58] prueban que las únicas dimensiones finitas posibles son 1, 2, 4 y 8. El interés desatado a principios de los años ochenta por las álgebras flexibles conduce a la clasificación de las álgebras reales de división flexibles de dimensión finita [B-B-O 82]. El punto inicial para tal clasificación es el estudio de las álgebras de derivaciones. De un modo poco riguroso podríamos decir que el grupo de automorfismos mide la simetría de un álgebra: cuanto "mayor" sea este grupo mayor es el grado de simetría del álgebra. En el caso real el grupo de automorfismos es un grupo de Lie cuya álgebra de Lie asociada es el álgebra de derivaciones; cabe esperar, pues, que las álgebras de derivaciones de mayor "riqueza" se correspondan con las álgebras de mayor interés. En el caso de un álgebra de división real de dimensión 8 las posibilidades son [B-O1 81]: el álgebra compacta $G_2$, su(3), su(2) $\oplus$ su(2), su(2) $\oplus \mathcal{N}$ con $\mathcal{N}$ un ideal abeliano de dimensión $\leq 2$ y, por último, un álgebra de Lie abeliana de dimensión a lo sumo 2. Dentro de las álgebras que tienen como derivaciones a $G_2$ se encuentra el álgebra de octoniones de Cayley; a $\tilde{\mathrm{P}}_8(\mathbb{R})$, sin embargo, le corresponde su(3).

Una vez calculada el álgebra de derivaciones, la descomposición del álgebra como módulo para su álgebra de derivaciones proporciona una aproximación del producto. En este orden de ideas se sitúa el trabajo de Okubo [O 86], donde, a través del álgebra de derivaciones, redescubre el álgebra de Cayley, la de Albert, sistemas triples de Freudenthal, etc. En [B-O2 81] Benkart y Osborn examinan las posibilidades que aparecen para álgebras reales de división. Algunas de las posibilidades planteadas son teóricas y no se avalan con ejemplos concretos. Posteriormente algunos autores han resuelto afirmativamente la existencia de ciertos tipos de estas álgebras [Roc 94, Roc 95].

## Objetivo de la memoria

El objetivo de esta memoria es múltiple. Por una lado, conseguir resultados más generales que los conocidos sobre identidades en álgebras de composición. Para ello hemos introducido un modo de operar bastante combinatorio, prescindiendo en gran medida del uso de idempotentes, tan presentes en anteriores trabajos. Por otro lado, profundizar en el conocimiento del álgebra de pseudooctoniones; hacernos eco de la deficiencia en la definición e intentar dar una nueva que sea de fácil manejo. En este sentido los métodos de clasificación de las álgebras de composición con forma bilineal asociativa e idempotentes no nulos que aparecen en el capítulo 2 son una bonita muestra. Por último, traspasar los métodos empleados por Benkart y Osborn en el estudio de las álgebras reales de división a las álgebras de composición.

Los capítulos se reparten de acuerdo a los siguientes contenidos:

CAPITULO 1: Aquí recopilamos gran cantidad de resultados conocidos. Destacamos entre ellos los referentes al álgebra de derivaciones de un álgebra de Cayley, ya que serán utilizados constantemente en los dos últimos capítulos. Algunos resultados de este capítulo son originales (teorema 1.15, proposición 1.17). También destacamos el concepto de álgebras de composición estándar, cuya importancia se explica en los capítulos 3 y 4.

CAPITULO 2: En este capítulo juntamos dos líneas de investigación separadas: la de Petersson y la de Okubo y Osborn. Del contraste de ambas surge nuestra definición del álgebra de pseudooctoniones, la cual es válida sobre cualquier cuerpo de cualquier característica. Con ella llevamos a cabo la clasificación de las álgebras de composición con forma bilineal asociativa e idempotentes no nulos. La demostración presenta grandes ventajas frente a la original (y por ello más importante que la que nosotros mostramos) de Okubo y Osborn. En primer lugar corrige un error en el enunciado, donde son necesarias hipótesis extras; es una demostración unificada, donde queda claro el porqué de la complejidad a la hora de operar sobre cuerpos de característica 3; extiende los resultados a característica 2; es drásticamente más corta y, por último, permite avanzar en el problema de determinar las álgebras de Okubo en el caso de característica 3, tema en el que las definiciones dadas hasta ahora no aportaban claridad.

CAPITULO 3: Aquí, orientados por el trabajo de [Rod 94], nos ocupamos de las álgebras de grado dos, las cuales resultan ser, esencialmente, las álgebras estándar introducidas en el capítulo 1. También generalizamos la clasificación de las álgebras de composición flexibles sobre cuerpos de característica $\neq 2$ y 3 a álgebras de potencias 3-asociativas (los trabajos de El-Mallah sobre álgebras absolutamente valuadas guiaron inicialmente nuestra intuición). Además logramos una generalización de un teorema de Okubo sobre álgebras de composición de potencias asociativas. Es interesante el contraejemplo que se muestra al final sobre la falsedad de un teorema análogo para cuerpos de característica 2.

CAPITULO 4: Pasar la teoría de Benkart y Osborn a álgebras de composición resulta sorprendentemente largo. La cantidad de nuevas álgebras de composición con propiedades inesperadas que salen a la luz es abrumadora. Por ejemplo, sobre cualquier cuerpo algebraicamente cerrado hay álgebras de composición que no proceden de álgebras de división por extensión de escalares, al igual que, sobre estos cuerpos, también hay infinitas clases de isomorfía de álgebras de composición cuya álgebra de derivaciones es isomorfa a un álgebra $A_2$ (esto generaliza un resultado de Petersson). En este capítulo nos centramos en las que poseen el mayor rango toral. Estas son las que mejor se corresponden con las álgebras de división reales. De hecho, la no existencia de paralelismo entre una de las posibilidades plantedas por Benkart y Osborn, y nuestras álgebras de composición nos conduce, con acierto, a demostrar que tal álgebra de división no existe. Seremos capaces de encontrar ejemplos de álgebras de composición de división sobre los reales para todas las posibilidades (excepto para la anterior, naturalmente) planteadas por Benkart y Osborn. Se clasifican las álgebras de composición cuyas álgebras de derivaciones sean de tipo $A_2$ y no actúen de modo irreducible.

CAPITULO 5: En este último capítulo completamos el estudio de las álgebras de derivaciones de álgebras de composición. Los resultados más interesantes se refieren a cómo en muchas ocasiones el álgebra de derivaciones de un álgebra de composición queda inducida por las derivaciones de un álgebra de Cayley o una de Okubo. También es interesante la manera en que las álgebras de Okubo se caracterizan por su álgebra de derivaciones.

# Capítulo 1

# Preliminares

Dada una forma cuadrática $n(\cdot)$ sobre un $\mathcal{F}$-espacio vectorial $A$, su forma bilineal simétrica asociada se denotará por

$$f(x,y) = n(x+y) - n(x) - n(y). \tag{1.1}$$

Sobre cuerpos de característica distinta de 2 es habitual considerar como forma bilineal asociada a $n(\cdot)$ la forma $(x,y) = \frac{1}{2}f(x,y)$ en lugar de $f(x,y)$. La forma cuadrática se dice estrictamente no degenerada si su forma bilineal asociada es no degenerada.

Una forma cuadrática $n(\cdot)$ sobre un $\mathcal{F}$-espacio vectorial $A$ se dice que permite composición si existe una aplicación bilineal $P : A \times A \to A$ tal que

$$n(x)n(y) = n(P(x,y)).$$

Si en lugar de fijarnos en la forma cuadrática nos fijamos en la operación $P$ tenemos

**Definición.** *Un álgebra con producto $xy$ se dice álgebra de composición si existe una forma cuadrática estrictamente no degenerada $n(\cdot)$ verificando la ley de composición*

$$n(xy) = n(x)n(y) \tag{1.2}$$

Toda forma cuadrática (estrictamente no degenerada) que permite composición $P(x, y)$ es forma cuadrática de un álgebra de composición. Para ello basta definir un producto mediante $xy = P(x, y)$.

Consecuencias inmediatas de (1.1) y (1.2), e igualmente importantes por el constante uso que haremos de ellas, son las siguientes identidades derivadas:

$$f(xy, xz) = n(x)f(y, z) = f(yx, zx)$$

$$f(xy, wz) + f(wy, xz) = f(x, w)f(y, z)$$

## 1. Algebras Hurwitz

Como comentábamos en la introducción, las primeras formas cuadráticas para las que se estudia la existencia de composición son las del tipo $n(x) = \sum x_i^2$. En una lectura moderna del trabajo de Hurwitz [Hur 98], podríamos decir que Hurwitz asoció a cada una de estas formas cuadráticas un álgebra de composición con unidad para estudiar luego sus posibles dimensiones. Esto justifica la siguiente definición:

**Definición.** *Un álgebra de composición se dice Hurwitz si posee elemento unidad.*

Los procedimientos de Albert y Kaplansky [A 42, K 53] de asociar un álgebra Hurwitz a una forma cuadrática, en un número finito de variables, que permite composición son esencialmente el mismo. Nosotros usamos el de Kaplansky puesto que resulta más natural dentro de la teoría de álgebras.

Dada $n(\cdot)$ consideramos un álgebra de composición $A$ de dimensión finita, con producto $xy$, que la tenga como forma cuadrática. Sean $R_x : a \mapsto ax$ y $L_x : a \mapsto xa$ los operadores de multiplicación por $x$ en $A$. Se tiene:

**Lema 1.1.** *Dado $x \in A$, equivalen:*

i) $L_x$ *es biyectivo.*

ii) $n(x) \neq 0$.

iii) $R_x$ *es biyectivo.*

Para álgebras de dimensión infinita este lema es falso; sin embargo, se mantiene que si $n(x) \neq 0$ entonces los operadores de multiplicación son inyectivos.

Sea $a \in A$ con $n(a) \neq 0$ y $u = a^2/n(a)$. Definimos un nuevo producto en $A$ mediante

$$x \circ y = (xR_u^{-1})(yL_u^{-1}) \tag{1.3}$$

Kaplansky demuestra que $(A, \circ)$ es un álgebra Hurwitz, la cual denotaremos por $(A, a)$, con unidad $u^2$ y norma $n(\cdot)$. Siguiendo la terminología de [B-B-O 82] un álgebra $A$ con producto $xy$ se dice isótopa principal de otra $(A, \circ)$ si existen transformaciones lineales biyectivas $\varphi$ y $\psi$ en $A$ de tal modo que $xy = x^\varphi \circ y^\psi$. El resultado de Kaplansky nos dice que toda álgebra de composición de dimensión finita es isótopa principal (o simplemente isótopa) de una Hurwitz.

**Notación:** Usaremos el producto $xy$ para álgebras arbitrarias y al producto $x \circ y$ lo iremos reservando para álgebras Hurwitz. Los operadores de multiplicación para estos productos se denotarán por $L_x$, $R_x$ y $\tilde{L}_x$, $\tilde{R}_x$ respectivamente. En bastantes álgebras de composición tendremos idempotentes $e$ con $n(e) = 1$ que nos permitirán pasar a un álgebra $(A, e)$ la unidad es precisamente $e$. Usaremos indistintamente las notaciones 1 y $e$ para el elemento unidad de un álgebra Hurwitz.

Los números complejos $\mathbb{C}$ , los cuatérnios de Hamilton $\mathbb{H}$ y los octoniones de Cayley $\mathbb{O}$ constituyen las primeras álgebras Hurwitz que aparecieron en la literatura matemática. Los productos en ellas fueron definidos, en un principio, mediante sus tablas de multiplicación. Así pues, comprobar que la norma de los octoniones es multiplicativa resultaba cuando menos bastante tedioso. Dickson [D 19], basándose en una construcción de los octoniones a partir de los cuaternios, demuestra esta propiedad con gran sencillez. Más tarde generaliza este proceso y nos deja un procedimiento sistemático para construir todas las álgebras Hurwitz sobre cualquier cuerpo.

## 1.1. Proceso de Cayley-Dickson. Teorema generalizado de Hurwitz

El proceso de Cayley-Dickson consiste en construir, a partir de cualquier álgebra unital $A$ con una involución $x \mapsto \bar{x}$ tal que $x+\bar{x}$ y $x\bar{x} \in \mathcal{F}$, una nueva álgebra con estas mismas propiedades que contenga a $A$ como subálgebra y que tenga dimensión $2m$ si la dimensión de $A$ es $m$.

Dado $0 \neq \alpha \in \mathcal{F}$, Dickson define un álgebra $(A, \alpha)$ con espacio subyacente $A \times A$ y producto

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1 + \alpha y_2\bar{x}_2, \bar{x}_1y_2 + y_1x_2). \tag{1.4}$$

El elemento $(1,0)$ es la unidad de $(A, \alpha)$. $A$ es isomorfa a la subálgebra $A' = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in A\}$. Identificando $A$ con $A'$, podemos escribir $(A, \alpha) = A \oplus vA$ con $v = (0,1)$. El producto (1.4) pasa a

$$(x_1 + vx_2)(y_1 + vy_2) = x_1y_1 + \alpha y_2\bar{x}_2 + v(\bar{x}_1y_2 + y_1x_2)$$

La aplicación $x = x_1 + vx_2 \mapsto \bar{x} = \bar{x}_1 - vx_2$ es una involución en $(A, \alpha)$ que extiende a $x_1 \mapsto \bar{x}_1$.

Usando este proceso Jacobson [J2 58] clasificó las álgebras Hurwitz sobre cuerpos $\mathcal{F}$ de caracterísitica $\neq 2$. Sus resultados y los análogos en característica 2 pueden encontrarse en [ZSSS].

Jacobson demuestra que en un álgebra Hurwitz la aplicación

$$x \mapsto \bar{x} = f(1,x)1 - x \tag{1.5}$$

define una involución que satisface $x + \bar{x}$, $x \circ \bar{x} \in \mathcal{F}$ y respecto de la cual la forma cuadrática se expresa como

$$n(x) = x \circ \bar{x}. \tag{1.6}$$

Esta involución se dirá *involución estándar.* A veces también la denotaremos por $J : x \mapsto x^J = \bar{x}$.

Sobre cuerpos $\mathcal{F}$ de característica $\neq 2$, Jacobson prueba que toda álgebra Hurwitz se puede construir partiendo del cuerpo base y reiterando el proceso de Cayley-Dickson. Si car$\mathcal{F} = 2$ entonces $\mathcal{F}$ no es un álgebra Hurwitz, pues la norma $n(\alpha) = \alpha^2$ no es estrictamente no degenerada. En este caso hay que partir de un álgebra Hurwitz de dimensión 2. Esto conduce al teorema generalizado de Hurwitz.

**Teorema 1.2 (Teorema generalizado de Hurwitz).**

*Cualquier álgebra Hurwitz es isomorfa a una de las siguientes:*

I) *El cuerpo base $\mathcal{F}$, si car$\mathcal{F} \neq 2$.*

II) $K(\mu) = \mathcal{F}1 + \mathcal{F}v$ *con* $v \circ v = v + \mu$ *y* $4\mu + 1 \neq 0$. *La involución estándar queda definida por la asignación* $v \mapsto 1 - v$.

III) *Un álgebra generalizada de cuaternios* $Q(\mu, \beta) = (K(\mu), \beta)$ *con* $\beta \neq 0$.

IV) *Un álgebra generalizada de Cayley* $C(\mu, \beta, \gamma) = (Q(\mu, \beta), \gamma)$ *con* $\gamma \neq 0$.

**Corolario.** *Las álgebras Hurwitz tienen dimensiones 1, 2, 4 u 8.*

La involución estándar es la misma que se obtiene del proceso de Cayley-Dickson. La aplicación $t(x) = f(1,x)1$ se dice *traza.* De las ecuaciones (1.5) y (1.6) obtenemos

$$x \circ x - t(x)x + n(x)1 = 0. \tag{1.7}$$

Así pues, las álgebras Hurwitz son álgebras *cuadráticas.* Además la norma y la traza como álgebras Hurwitz coinciden con la norma y la traza como álgebras cuadráticas. Esto demuestra que la norma de un álgebra Hurwitz es única.

Referente a sus propiedades algebraicas, debemos destacar que $Q(\mu,\beta)$ es un álgebra simple central asociativa; sin embargo, $C(\mu,\beta,\gamma)$ es un álgebra simple central alternativa. Un álgebra se dice *alternativa* si satisface las identidades

$$(yx)x = yx^2 \text{ y } x(xy) = x^2y$$

Las álgebras alternativas se hallan muy próximas a las asociativas.

**Teorema 1.3 (Artin).** *Un álgebra es alternativa si y sólamente si cualesquiera dos elementos generan una subálgebra asociativa.*

## 1.2. Algebras Hurwitz "split"

Que las álgebras de Cayley-Dickson son alternativas no resultaba nada nuevo cuando Jacobson publicó su trabajo en 1958. De hecho Zorn [Z 30] había demostrado que un álgebra simple central alternativa no asociativa con idempotentes $\neq 0,1$ es un álgebra de Cayley-Dickson. Sorprendentemente esta álgebra, a la que denotaremos por $\mathfrak{C}$, es única salvo isomorfismo.

**Definición.** *Un álgebra Hurwitz se dice split si posee idempotentes* $\neq 0,1$.

El siguiente lema, que se deduce de la ecuación (1.7), caracteriza a estos idempotentes.

**Lema 1.4.** *Sea $C$ un álgebra de Cayley, un elemento $e'$ es un idempotente $\neq 0, 1$ si y sólo si $t(e') = 1$ y $n(e') = 0$.*

Jacobson [J 39] da una explicación más natural de esta unicidad al resolver el problema del isomorfismo para las álgebras Hurwitz.

**Teorema 1.5 (Jacobson).** *Dos álgebras Hurwitz son isomorfas si y sólo si sus normas son equivalentes.*

En el caso de álgebras split tenemos:

**Proposición 1.6.** *Para un álgebra Hurwitz $A$ equivalen:*

i) *$A$ es split.*

ii) *$A$ posee divisores de cero.*

iii) *$A$ posee elementos no nulos con norma cero.*

iv) *El índice de Witt de $n(\cdot)$ es máximo.*

Como consecuencia, por los teoremas de Witt:

**Teorema 1.7.**

i) *Dos álgebras split de la misma dimensión son isomorfas.*

ii) *Sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica distinta de dos sólamente existen cuatro álgebras Hurwitz no isomorfas entre sí (tres si la característica es dos).*

Los argumentos de Zorn nada tienen que ver con éstos. Siguiendo los trabajos de Wedderburn, Zorn se apoya en la descomposición de Peirce aplicada a las álgebras alternativas.

La unidad de $\mathfrak{C}$ se expresa como $e = e_1 + e_2$ con $e_i$ idempotentes ortogonales primitivos. Esto proporciona la descomposición

$$\mathfrak{C} = \mathcal{F}e_1 \oplus \mathcal{F}e_2 \oplus U \oplus V \tag{1.8}$$

con $U = U(e_1) = \{x \in \mathfrak{C} \,|\, e_1 \circ x = x = x \circ e_2\}$ y $V = V(e_1) = \{x \in \mathfrak{C} \,|\, e_2 \circ x = x = x \circ e_1\}$. A través de esta descomposición, Zorn encuentra el único producto posible en $\mathfrak{C}$ que la convierte en un álgebra alternativa simple central no asociativa.

En $\mathfrak{C}$ podemos elegir una base $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ para la cual los productos vienen dados por la tabla 1.

| | $e_1$ | $e_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | 0 | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | 0 | 0 | 0 |
| $e_2$ | 0 | $e_2$ | 0 | 0 | 0 | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |
| $u_1$ | 0 | $u_1$ | 0 | $v_3$ | $-v_2$ | $-e_1$ | 0 | 0 |
| $u_2$ | 0 | $u_2$ | $-v_3$ | 0 | $v_1$ | 0 | $-e_1$ | 0 |
| $u_3$ | 0 | $u_3$ | $v_2$ | $-v_1$ | 0 | 0 | 0 | $-e_1$ |
| $v_1$ | $v_1$ | 0 | $-e_2$ | 0 | 0 | 0 | $u_3$ | $-u_2$ |
| $v_2$ | $v_2$ | 0 | 0 | $-e_2$ | 0 | $-u_3$ | 0 | $u_1$ |
| $v_3$ | $v_3$ | 0 | 0 | 0 | $-e_2$ | $u_2$ | $-u_1$ | 0 |

Tabla 1

Estas bases tendrán un papel muy importante a lo largo de esta memoria.

**Definición.** *Una base con una tabla de multiplicación como la tabla* 1 *se dirá base canónica.*

Los espacios $U$ y $V$ de la descomposición de Peirce son totalmente isótropos. La forma bilineal nos permite interpretarlos uno como dual del otro. De hecho, la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ es la dual de $\{v_1, v_2, v_3\}$ para la forma bilineal

$f(\ ,\ )$. Los idempotentes $e_1$ y $e_2$ son vectores isótropos, duales uno del otro, y ortogonales a los subespacios $U$ y $V$.

El subespacio $\langle e_1, e_2, u_1, v_1\rangle$ es el álgebra de cuaternios split. Cualquier base $\{e_1, e_2, u_1, v_1\}$ de ella cuyos productos vengan dados por la tabla 1 se dirá, también, *canónica.* Es sencillo observar que esta álgebra es isomorfa al álgebra de matrices 2 por 2 con la forma cuadrática dada por el determinante.

## 1.3. Derivaciones de las álgebras Hurwitz.

El siguiente lema justifica el que normalmente se estudie el álgebra de derivaciones sobre cuerpos algebraicamente cerrados o extensiones de Galois y después se analicen las formas.

**Lema 1.8.** *Sea $A$ una $\mathcal{F}$-álgebra y $K$ un cuerpo extensión de $\mathcal{F}$, se tiene que* $\mathrm{Der}\,(K \otimes_{\mathcal{F}} A) \cong K \otimes_{\mathcal{F}} \mathrm{Der}\,A$.

Para las álgebras Hurwitz de dimensiones 1, 2 y 4, sus derivaciones no han supuesto históricamente ningún problema. Podemos considerar como folklore matemático el siguiente lema:

**Lema 1.9.**

i) $\mathrm{Der}\,\mathcal{F} = 0$.

ii) $\mathrm{Der}\,K(\mu) = 0$.

iii) $\mathrm{Der}\,Q(\mu, \beta)$ *es simple central de tipo* $A_1$ $(\mathrm{car}\mathcal{F} \neq 2)$.

Sin embargo, las derivaciones de las álgebras de Cayley-Dickson tienen gran importancia dentro de la teoría de álgebras de Lie. Cartan fue el primero en observar que sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero formaban un álgebra simple de tipo $G_2$. Jacobson probó el mismo resultado para cuerpos arbitrarios de característica $\neq 2, 3$.

Sobre cuerpos algebraicamente cerrados la única álgebra de tipo $G_2$ es la split. Desde el punto de vista teórico, esta álgebra es un álgebra clásica simple que posee una subálgebra de Cartan de dimensión 2 con raíces positivas $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_1+3\alpha_2, 2\alpha_1+3\alpha_2\}$; sin embargo, a nivel práctico, esta descripción resulta pobre.

Schafer [Sch] muestra que en un álgebra alternativa sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ las siguientes aplicaciones son derivaciones:

$$D_{x,y} = R_{[x,y]} - L_{[x,y]} - 3[L_x, R_y] \tag{1.9}$$

donde $[x, y] = xy - yx$.

Para el álgebra de Cayley split, los operadores $D_{x,y}$ proporcionan una descripción muy sencilla del álgebra $G_2$. En los capítulos 4 y 5 mostraremos que muchas álgebras de composición de dimensión ocho heredan sus derivaciones de una adecuada álgebra de Cayley-Dickson, por lo que estos operadores aparecerán con relativa frecuencia. Conviene dar unas reglas de manejo que deberemos tener bien presentes siempre que hablemos de ellos. En lo que resta de subsección supondremos que la característica del cuerpo base es $\neq 2$ y 3. Consideremos una base canónica $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathfrak{C}$ y sean $U(e_1)$ y $V(e_1)$ los subespacios de la descomposición de Peirce,

i) Para cualquier $D \in \operatorname{Der} \mathfrak{C}$ se tiene que $D_{x,y}ad_D = [D_{x,y}, D] = D_{xD,y} + D_{x,yD}$.

ii) Para cualesquiera $x, y, z$ se tiene que $D_{x \circ y,z} + D_{y \circ z,x} + D_{z \circ x,y} = 0$.

iii) *Operadores* $\mathcal{D}_{e_1,u}$: Sea $u \in U(e_1)$ el operador $D_{e_1,u}$ verifica

$$e_1 D_{e_1,u} = u$$

$$u' D_{e_1,u} = u \circ u' \quad \forall u' \in U(e_1)$$

$$v D_{e_1,u} = 2(u,v)(e_1 - e_2) \quad \forall v \in V(e_1)$$

Cambiando $e_1$ por $e_2$ y $u, u'$ por $v, v'$ se tienen propiedades análogas para $D_{e_2,v}$.

iv) *Operadores* $D_{u,v}$: Sean $u \in U(e_1)$ y $v \in V(e_1)$, se tiene que $u' D_{u,v} = -2(v,u)u' + 6(u',v)u$ y $e_i D_{u,v} = 0$. Si representamos estos operadores por sus matrices coordenadas en la base canónica observamos que existe un isomorfismo entre $\{D_{u,v} \mid u \in U(e_1), v \in V(e_1)\}$ y $\mathrm{sl}(3)$ el conjunto de matrices $3 \times 3$ de traza cero, dado por asociar la matriz coordenada a la restricción de $D_{u,v}$ en $U(e_1)$. Si $E_{ij}$ denota la matriz que tiene un 1 en la posición $(i,j)$ y ceros en el resto, entonces $D_{u_i,v_j}$ se corresponde con $3E_{ji}$ si $i \neq j$ y $D_{u_i,v_i}$ con $3E_{ii} - I_3$, donde $I_3$ es la matriz identidad de orden 3 (las filas de la matriz coordenada representan las coordenadas de las imágenes de los distintos elementos básicos). En particular, $D_{u_1,v_1} + D_{u_2,v_2} + D_{u_3,v_3} = 0$ y si $D_{u_1,y_1} + D_{u_2,y_2} + D_{u_3,y_3} = 0$ con $y_i \in V(e_1)$ entonces $y_i = \lambda v_i$ $\forall i$ y para algún cierto $\lambda \in \mathcal{F}$.

Trabajar dentro del álgebra de Lie $G_2$ facilitará notablemente nuestros cálculos. Estos operadores son nuestra vía de acceso. Las derivaciones $H_1 = \frac{1}{3}(D_{u_2,v_2} - D_{u_1,v_1})$ y $H_2 = D_{u_2,v_2}$ tienen matrices coordenadas diagonales en la base canónica y generan una subálgebra de Cartan $\mathcal{H}$. La base dual $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ de $\{H_1, H_2\}$ es un sistema fundamental de raíces. Una comprobación directa muestra que los generadores de los distintos espacios raíces vienen dados por la tabla 2, y que los pesos de $\mathcal{H}$ en $\mathfrak{C}$ son exactamente $\{0, \pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta)\}$

| *Raíz* | *Gener.* | *Raíz* | *Gener.* |
|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | $D_{u_3,v_1}$ | $-\alpha_1$ | $D_{u_1,v_3}$ |
| $\alpha_2$ | $D_{e_2,v_3}$ | $-\alpha_2$ | $D_{e_1,u_3}$ |
| $\alpha_1+\alpha_2$ | $D_{e_2,v_1}$ | $-(\alpha_1+\alpha_2)$ | $D_{e_1,u_1}$ |
| $\alpha_1+2\alpha_2$ | $D_{e_1,u_2}$ | $-(\alpha_1+2\alpha_2)$ | $D_{e_2,v_2}$ |
| $\alpha_1+3\alpha_2$ | $D_{u_2,v_3}$ | $-(\alpha_1+3\alpha_2)$ | $D_{u_3,v_2}$ |
| $2\alpha_1+3\alpha_2$ | $D_{u_2,v_1}$ | $-(2\alpha_1+3\alpha_2)$ | $D_{u_1,v_2}$ |

Tabla 2

con $\alpha = \alpha_2$ y $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$. Así pues, $\mathcal{H}$ actúa con dos pesos linealmente independientes en $\mathfrak{C}$.

La tabla 2 muestra que, en términos de álgebras de Lie, la raíz $\alpha_1$ es larga mientras que $\alpha_2$ es corta.

Por comodidad a la hora de referirnos a ciertas derivaciones $D_{x,y}$ de las cuales sólo nos iteresen sus propiedades dentro de $G_2$ hablaremos de vectores raíces como elementos de los subespacios raíces. Por ejemplo, $D_{u_3,v_1}$ es un vector de raíz $\alpha_1$, y el hecho de que $D_{u_3,v_1}$ conmute con $D_{e_1,u_3}$ queda asociado a que son vectores de raíces $\alpha_1$ y $-\alpha_2$ pero $\alpha_1 - \alpha_2$ no es raíz.

El álgebra $\mathfrak{C}$ es un álgebra $\mathbb{Z}_3$ graduada, es decir, admite una descomposición $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{(0)} \oplus \mathfrak{C}^{(1)} \oplus \mathfrak{C}^{(2)}$ con $\mathfrak{C}^{(i)} \circ \mathfrak{C}^{(j)} \subseteq \mathfrak{C}^{(i+j)}$ donde los índices se entienden módulo 3. Podemos encontrar, y será objeto de un análisis posterior, esencialmente dos $\mathbb{Z}_3$ graduaciones diferentes en $\mathfrak{C}$:

**Definición.** *Una $\mathbb{Z}_3$ graduación $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{(0)} \oplus \mathfrak{C}^{(1)} \oplus \mathfrak{C}^{(2)}$ de $\mathfrak{C}$ se dirá corta si existe una base canónica en la que $\mathfrak{C}^{(0)} = \langle e_1, e_2\rangle$, $\mathfrak{C}^{(1)} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathfrak{C}^{(2)} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Diremos que la $\mathbb{Z}_3$ graduación es larga si existe una base canónica en la que $\mathfrak{C}^{(0)} = \langle e_1, e_2, u_1, v_1\rangle$, $\mathfrak{C}^{(1)} = \langle u_2, v_3\rangle$ y $\mathfrak{C}^{(2)} = \langle u_3, v_2\rangle$.*

Dada una $\mathbb{Z}_3$ graduación en un álgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)} \oplus A^{(2)}$, los subespacios $(\operatorname{Der} A)^{(i)} = \{D \in \operatorname{Der} A \mid A^{(j)}D \subseteq A^{(i+j)}\ j = 0, 1, 2\}$ forman una $\mathbb{Z}_3$ graduación de $\operatorname{Der} A$. Así, en $\operatorname{Der} \mathfrak{C}$ tenemos dos tipos de $\mathbb{Z}_3$ graduaciones:

i) *Graduación corta:* Esta queda inducida por la graduación corta de $\mathfrak{C}$ y es de la forma

$$\operatorname{Der} \mathfrak{C} = \mathcal{D}^{(0)} \oplus \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(2)}$$

con

$$\mathcal{D}^{(0)} = \langle D_{u_i,v_j} \mid i,j = 1,2,3\rangle, \quad \mathcal{D}^{(1)} = \langle D_{e_1,u_i} \mid i = 1,2,3\rangle$$

$$\mathcal{D}^{(2)} = \langle D_{e_2,v_i} \mid i = 1,2,3\rangle.$$

ii) *Graduación larga:* Esta la induce la graduación larga de $\mathfrak{C}$ y difiere notablemente de la anterior, tiene la forma

$$\operatorname{Der} \mathfrak{C} = \bar{\mathcal{D}}^{(0)} \oplus \bar{\mathcal{D}}^{(1)} \oplus \bar{\mathcal{D}}^{(2)}$$

con

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{D}}^{(0)} &= \langle D_{u_i,v_i}, D_{e_1,u_1}, D_{e_2,v_1} \mid i,j = 1,2\rangle \\
\bar{\mathcal{D}}^{(1)} &= \langle D_{u_1,v_3}, D_{e_2,v_3}, D_{e_1,u_2}, D_{u_3,v_2}, D_{u_2,v_1}\rangle \\
\bar{\mathcal{D}}^{(2)} &= \langle D_{u_3,v_1}, D_{e_1,u_3}, D_{e_2,v_2}, D_{u_2,v_3}, D_{u_1,v_2}\rangle.
\end{aligned}$$

Para algunos cálculos quizás sea conveniente tener en mente que $\bar{\mathcal{D}}^{(0)}$ lo forman los subespacios de raíces $\{0, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}$, $\bar{\mathcal{D}}^{(1)}$ lo forman los de raíces $\{-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -(\alpha_1 + 3\alpha_2), 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$ y $\bar{\mathcal{D}}^{(2)}$ los restantes.

Las $\mathbb{Z}_3$ graduaciones de $\mathfrak{C}$ mantienen una estrecha relación con la subálgebra de Cartan $\mathcal{H} = \langle D_{u_i,v_i} \mid i = 1,2\rangle$. Denotemos por $\mathfrak{C}_i$ el subespacio fundamental de valor propio $i$ de una cierta derivación $H \in \mathcal{H}$. Si escogemos $H = D_{u_1,v_1}$ entonces $\mathfrak{C}$ se descompone como

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 \bigoplus (\mathfrak{C}_2 \oplus \mathfrak{C}_{-1}) \bigoplus (\mathfrak{C}_{-2} \oplus \mathfrak{C}_1) .$$

Esta descomposición proporciona una $\mathbb{Z}_3$ graduación corta de $\mathfrak{C}$. La adjunción por $H$, $ad_H : D \mapsto [D, H]$, actúa diagonalizáblemente en $\mathrm{Der}\,\mathfrak{C}$ y la descompone en subespacios fundamentales. Sea $\mathcal{D}_i$ el de valor propio $i$,

$$\mathrm{Der}\,\mathfrak{C} = (\mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_3 \oplus \mathcal{D}_{-3}) \bigoplus (\mathcal{D}_{-1} \oplus \mathcal{D}_2) \bigoplus (\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_{-2}) \tag{1.10}$$

donde $\mathcal{D}_0$ está formado por los subespacios de raíces $\{0, \pm(\alpha_1 + 3\alpha_2)\}$, $\mathcal{D}_1$ por los de raíces $\{\alpha_2, -(\alpha_1 + 2\alpha_2)\}$, $\mathcal{D}_2$ sólamente por el de raíz $-(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\mathcal{D}_3$ por los de raíces $\{-\alpha_1, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\}$ y los de valores propios opuestos a los mencionados contienen los subespacios de raíces opuestas.

Si en lugar de la anterior $H$ consideramos $H = \frac{1}{3}(D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3})$ tenemos

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 \oplus \mathfrak{C}_1 \oplus \mathfrak{C}_{-1}$$

que puede interpretarse como una $\mathbb{Z}_3$ graduación larga. Como antes, la adjunción por $H$ descompone a $\mathrm{Der}\,\mathfrak{C}$ en subespacios fundamentales $\bar{\mathcal{D}}_i$:

$$\mathrm{Der}\,\mathfrak{C} = \bar{\mathcal{D}}_0 \bigoplus \left(\bar{\mathcal{D}}_1 \oplus \bar{\mathcal{D}}_{-2}\right) \bigoplus \left(\bar{\mathcal{D}}_{-1} \oplus \bar{\mathcal{D}}_2\right), \tag{1.11}$$

donde $\bar{\mathcal{D}}_0$ lo conforman los subespacios de raíces $\{0, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}$, $\bar{\mathcal{D}}_1$ los de raíces $\{-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$, $\bar{\mathcal{D}}_2$ sólamente el de raíz $\alpha_1 + 3\alpha_2$ y los de valores propios opuestos a los anteriores contienen los subespacios de raíces opuestas.

Es inmediato comprobar que las descomposiciones (1.10) y (1.11) se corresponden con las $\mathbb{Z}_3$ graduaciones corta y larga respectivamente de $\mathrm{Der}\,\mathfrak{C}$. Estas $\mathbb{Z}_3$ graduaciones nos serán de ayuda a la hora de examinar las derivaciones de las álgebras de composición.

## 1.4. Automorfismos de las álgebras Hurwitz

Los automorfismos, al igual que otros grupos que actúan sobre estructuras algebraicas, permiten operar dentro de la estructura de forma más cómoda. Los automorfismos de las álgebras de Cayley-Dickson han sido estudiados por Jacobson [J2 58]. En el estudio de Jacobson aparecen como subgrupos destacados los que fijan a subálgebras de composición de dimensiones dos y cuatro. Dependiendo de si las subálgebras de composición de dimensión dos son o no split, tenemos dos formulaciones similares pero distintas de los subgrupos que las fijan. Para alterar la parte en $U(e_1)$ de una base canónica y seguir teniendo una base canónica usaremos con gran frecuencia automorfismos que fijen subálgebras de composición split de dimensión dos. En esta subsección supondremos que la característica del cuerpo base es $\neq 2$.

Sean $\mathfrak{C}$ el álgebra de Cayley split con producto $xy$, y $e_1, e_2, U$ y $V$ como en (1.8), la forma $(x, yz)$ es trilineal alternada en $U$ y, por lo tanto,

$$(x^{\tau_U}, y^{\tau_U} z^{\tau_U}) = \det(\tau_U)(x, yz) \quad \forall \tau_U \in \mathrm{End}_F(U(e_1)).$$

A partir de (1.7) resulta evidente que cualquier automorfismo de un álgebra Hurwitz es una isometría para su norma. Si consideramos los automorfismos $\tau$ que fijan la subálgebra $\langle e_1, e_2 \rangle$ vemos que inducen aplicaciones $\tau_U$ en $U$ que respetan la anterior forma trilineal y que, por lo tanto, $\det(\tau_U) = 1$. Recíprocamente, denotemos por $\mathrm{SL}(U)$ el conjunto de transformaciones lineales de $U$ con determinante 1. Dada $\tau_U \in \mathrm{SL}(U)$ la podemos extender a una aplicación $\tau$ de $\mathfrak{C}$ mediante

$$e_i^\tau = e_i \ i = 1, 2, \ u^\tau = u^{\tau_U}, \ v^\tau = v^{{\tau_U^*}^{-1}} \quad \forall u \in U, v \in V \tag{1.12}$$

donde $\tau_U^*$ es la aplicación dual de $\tau_U$ (recuérdese que $V$ se identifica a través de la forma bilineal con el dual de $U$). Jacobson [J2 58] ha probado el siguiente resultado:

**Teorema 1.10.** *La aplicación* $\tau_U \mapsto \tau$ *anterior es un isomorfismo de grupos entre* $\mathrm{SL}(U)$ *y* $\{\tau \in \mathrm{Aut}\mathfrak{C} \mid e_i^\tau = e_i \ i = 1, 2\}$.

Como consecuencia:

**Corolario.** *Para cualquier base canónica* $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ *de* $\mathfrak{C}$ *y cualquier* $\tau_U \in \mathrm{SL}(U(e_1))$, *la base* $\{e_1, e_2\} \cup \{u_i^{\tau_U}\}_{i=1}^3 \cup \{v_i^{\tau_U^{*-1}}\}_{i=1}^3$ *también es canónica.*

En el siguiente capítulo necesitaremos alterar automorfismos de un álgebra de Cayley-Dickson $C$, con producto $xy$, que fijen los elementos de una extensión cuadrática $K \subset C$ de $\mathcal{F}$. Una descripción sencilla de estos automorfismos se obtiene a través de $K^\perp$, el cual, por el teorema de Artin, es un $K$-espacio vectorial de dimensión tres. El producto de elementos de $K^\perp$ puede ser descompuesto como sigue [J2 58, E-M 95]:

$$uv = -\sigma(u, v) + u \times v. \tag{1.13}$$

La aplicación $\sigma : K^\perp \times K^\perp \to K$ es una forma hermitiana no degenerada ya que, además de ser bilineal y no degenerada, cumple:

$$\sigma(au, v) = a\sigma(u, v) \quad \text{y} \quad \sigma(u, v) = \overline{\sigma(v, u)} \quad \forall a \in K,\ u, v \in K^\perp. \tag{1.14}$$

El producto $\times : K^\perp \times K^\perp \to K^\perp$ es anticonmutativo y verifica

$$a(u \times v) = (\bar{a}u) \times v = u \times (\bar{a}v);$$

además, la aplicación trilineal $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \sigma(x_1, x_2 \times x_3)$ es alternada y cumple

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)\overline{\Phi(x_1, x_2, x_3)} = \det(\sigma(x_i, x_j)).$$

Es sencillo observar, por (1.13) y la definición de $\Phi$, que todo automorfismo $\tau$ de $C$ que fija los elementos de $K$ es una isometría de $\sigma$ y satisface

$$\Phi(x_1^\tau, x_2^\tau, x_3^\tau) = \Phi(x_1, x_2, x_3),$$

o equivalentemente, al ser $\Phi$ trilineal alternada, $\tau$ es una isometría de $\sigma$ de determinante 1. Sea

$$\mathrm{SU}(K^{\perp},\sigma) = \{\tau' \in \mathrm{End}_K(K^{\perp}) \mid \sigma(u^{\tau'}, v^{\tau'}) = \sigma(u,v) \text{ y } \det \tau' = 1\},$$

se tiene

**Teorema 1.11.** *La restricción $\tau \mapsto \tau|_{K^{\perp}}$ es un isomorfismo de grupos entre $\{\tau \in \mathrm{Aut}C \mid a^{\tau} = a \ \forall a \in K\}$ y $\mathrm{SU}(K^{\perp},\sigma)$.*

Sea $B$ una subálgebra de cuaternios de $C$, por el proceso de Cayley-Dickson $C = B \oplus vB$ con $v^2 \in \mathcal{F}$. Dado $a \in B$ con $n(a) = 1$ podemos construir la siguiente aplicación $\tau_a$:

$$b^{\tau_a} = b, \quad (vb)^{\tau_a} = (va)b \quad \forall b \in B \tag{1.15}$$

Jacobson ha probado

**Teorema 1.12.** *La aplicación $a \mapsto \tau_a$ es un isomorfismo de grupos entre $\{a \in B \mid n(a) = 1\}$ y $\{\tau \in \mathrm{Aut}C \mid b^{\tau} = b \ \forall b \in B\}$.*

## 2. Algebras de composición estándar

En esta sección, aunque no se diga de forma explícita, únicamente haremos referencia a álgebras de dimensión finita sobre cuerpos de característica $\neq 2$.

Hay ciertas propiedades de un álgebra que se mantienen al pasar por isotopía a otra. Una de ellas es, por ejemplo, la dimensión; así, como consecuencia inmediata del corolario al teorema 1.2, tenemos

**Proposición 1.13.** *Las únicas dimensiones posibles para un álgebra de composición de dimensión finita son 1, 2, 4 u 8.*

En este mismo orden de ideas, Petersson demostró, basándose en la unicidad de la norma de las álgebras Hurwitz, el siguiente resultado [Pet 71]:

**Proposición 1.14 (Petersson).** *La norma en un álgebra de composición es única.*

Como consecuencia:

**Corolario.** *Los automorfismos y antiautomorfismos de un álgebra de composición son isometrías para su norma.*

Sea $A$ un álgebra de composición y $a$ un elemento de norma no nula. Fijémonos en que las aplicaciones que hemos utilizado para pasar por isotopía en (1.3) de $A$ a $(A, a)$ son isometrías; además, en cuanto que el elemento $a$ es bastante arbitrario, de $A$ podríamos pasar, en principio, a muchas álgebras Hurwitz diferentes; no obstante, esto no es cierto: puesto que la norma es la misma en $A$ que en la isótopa, todas las álgebras Hurwitz a las que pasemos tendrán la misma norma y, en consecuencia, por el teorema 1.5, serán isomorfas. Olvidémonos del elemento $a$ y pensemos que el producto en $A$ viene dado por $xy = x^\varphi \circ y^\psi$ con $(A, \circ)$ Hurwitz y $\varphi, \psi$ isometrías de $(A, \circ)$. Las isometrías de una forma cuadrática en un espacio vectorial pueden ser de dos tipos: propias (determinante 1) o impropias (determinante $-1$). En un álgebra Hurwitz de dimensión mayor que uno la isometría impropia más destacada es la involución estándar $x \mapsto \bar{x}$; al componerla con cualquier otra isometría cambiamos esta última de tipo. En función de las isometrías que permiten pasar a un álgebra Hurwitz, podemos hablar de cuatro tipos de álgebras de composición:

$$\begin{array}{ll} xy = x^\varphi \circ y^\psi & \text{Tipo I} \\ xy = \bar{x}^\varphi \circ y^\psi & \text{Tipo II} \\ xy = x^\varphi \circ \bar{y}^\psi & \text{Tipo III} \\ xy = \bar{x}^\varphi \circ \bar{y}^\psi & \text{Tipo IV} \end{array}$$

donde $\varphi$ y $\psi$ representan isometrías de determinante 1. El siguiente resultado nos muestra que las clases son, esencialmente, disjuntas.

**Teorema 1.15.** *Algebras de composición de dimensión mayor que uno y de tipos diferentes no son isomorfas.*

*Demostración.* Para un álgebra Hurwitz se comprueba fácilmente, a partir del teorema de Artin y de (1.7), que los operadores de multiplicación por elementos de norma 1 son isometrías de determinante 1. Por ello, los tipos I-IV quedan totalmente determinados por los operadores de multiplicación $R_x$ y $L_x$, con $n(x) = 1$, en el siguiente sentido:

$$\begin{array}{ll}
\text{Tipo I} & \det R_x = 1 = \det L_x \\
\text{Tipo II} & -\det R_x = 1 = \det L_x \\
\text{Tipo III} & -\det R_x = -1 = \det L_x \\
\text{Tipo IV} & \det R_x = -1 = \det L_x
\end{array}$$

En particular, álgebras de diferentes tipos y de dimensión $\geq 2$ no pueden ser isomorfas.

QED

El teorema nos dice que si utilizamos únicamente cambios por isotopía por medio de isometrías propias no logramos, en general, un álgebra Hurwitz sino un *álgebra estándar*:

**Definición.** *Dada un álgebra Hurwitz $(C, \circ)$, llamaremos álgebras estándar asociadas a $(C, \circ)$ a aquéllas cuyo producto viene dado por una de las siguientes fórmulas:*

$$\text{I) } xy = x \circ y, \quad \text{II) } xy = \bar{x} \circ y, \quad \text{III) } xy = x \circ \bar{y} \quad \textit{o} \quad \text{IV) } xy = \bar{x} \circ \bar{y}.$$

Para un álgebra el pertenecer a una de las clases anteriores es una propiedad lineal, es decir, se mantiene al extender escalares; más aún, un álgebra pertenece a una de estas clases si y sólo si al hacer alguna extensión de escalares el álgebra resultante está dentro de la misma clase. Esto se sigue como consecuencia directa del siguiente resultado

**Proposición 1.16.** *Sea $A$ un álgebra sobre un cuerpo $\mathcal{F}$, $K$ una extensión de $\mathcal{F}$ y $A_K = K \otimes_{\mathcal{F}} A$. Se tiene que $A_K$ es un álgebra de composición si y sólo si $A$ lo es. Además, en tal caso la norma de $A$ es la restricción de la de $A_K$.*

*Demostración.* El recíproco es inmediato. Respecto al directo, supongamos primero que $A_K$ es Hurwitz con norma $n(\cdot)$. Como $n(\cdot)$ es estrictamente no degenerada en $A_K$ también así en $A$, por lo que podemos considerar $a \in A$ con $n(a) \neq 0$. En virtud del lema 1.1, el elemento $1 = aL_a^{-1}$ pertenece a $A$, y por (1.7) se obtiene que $n(x) \in \mathcal{F}$ $\forall x \in A$, lo que demuestra la proposición en este caso.

Sea $A_K$ arbitraria. Como antes, tomamos un elemento $a \in A$ con $n(a) \neq 0$. Claramente se tiene que $(A_K, a) = (A, a)_K$, por lo que, por el caso Hurwitz, $(A, a)$ es Hurwitz con la restricción de la norma de $(A_K, a)$. Así pues, $A$ es también de composición con la restricción de la norma de $(A_K, a)$, o lo que es lo mismo, con la restricción de la norma de $A_K$.

QED

Las álgebras estándar, como elementos destacados de las distintas clases, verifican una propiedad similar a la anterior:

**Proposición 1.17.** *Excepto para el tipo* IV *y dimensión* 2*, las formas de álgebras estándar son de nuevo álgebras estándar y del mismo tipo.*

*Demostración.* Denotemos la clausura algebraica de $\mathcal{F}$ por $\bar{\mathcal{F}}$. Sea $A$ un álgebra de tal modo que $A_{\bar{\mathcal{F}}}$ es estándar de tipo II, así $xy = \bar{x} \circ y \; \forall x, y \in A_{\bar{\mathcal{F}}}$ donde $(A_{\bar{\mathcal{F}}}, \circ)$ es un álgebra Hurwitz con unidad $e$. Dado $x \in A$ con $n(x) \neq 0$, $ex = x$ implica que $e = xR_x^{-1} \in A$ y $\bar{x} = xe \in A$, de lo que deducimos que $x \circ y \in A \; \forall x, y \in A$; es decir, $(A, \circ)$ es Hurwitz y $A$ es el álgebra estándar de tipo II asociada a $(A, \circ)$. Análogamente se resolverían los tipos I y III.

Sea ahora $A$ de tal modo que $A_{\bar{\mathcal{F}}}$ es estándar de tipo IV asociada a un álgebra Hurwitz $(A_{\bar{\mathcal{F}}}, \circ)$ con unidad $e$. Si la dimensión de $A$ no es dos entonces el centro conmutativo de $(A_{\bar{\mathcal{F}}}, \circ)$ (esto es, los elementos que conmutan con $(A_{\bar{\mathcal{F}}}, \circ)$) es $\bar{\mathcal{F}}e$. Así, el centro conmutativo de $A_{\bar{\mathcal{F}}}$ es también $\bar{\mathcal{F}}e$. Puesto que la dimensión del centro conmutativo es una propiedad lineal (corresponde a la solución de un sistema homogéneo de ecuaciones), el centro conmutativo de $A$ tiene dimensión uno y, en consecuencia, $e = \lambda a$ con $a \in A$ y $\lambda \in \bar{\mathcal{F}}$. Ahora $\lambda a = e = e^2 = \lambda^2 a^2$, de donde $\lambda \in \mathcal{F}$. Podemos concluir que $e$ pertenece a $A$. La demostración se terminaría de modo análogo al caso anterior.

QED

## 3. Forma bilineal asociativa

En un álgebra de dimensión arbitraria con una forma cuadrática $n(\cdot)$ estrictamente no degenerada y forma bilineal asociada $f( \, , \, )$, la identidad

$$(xy)x = x(yx) = n(x)y \tag{1.16}$$

es equivalente [O2 78] a que el álgebra sea de composición y su forma bilineal sea asociativa, es decir, satisfaga la identidad

$$f(xy, z) = f(x, yz) \tag{1.17}$$

Además, en tal caso, la dimensión del álgebra es necesariamente finita.

Este tipo de álgebras, que proviene del estudio de sistemas de partículas SU(3) en Física y que ha proporcionado nuevos ejemplos de álgebras de división reales, ha sido estudiado por Okubo y Osborn [O-O1 81, O-O2 81] y, más recientemente, por Elduque y Myung [E-M 91, E-M 93].

Las álgebras Hurwitz verifican la relación

$$f(x \circ y, z) = f(x, z \circ \bar{y}) \tag{1.18}$$

por lo que para dimensión mayor que uno no cumplen la identidad (1.17). Conviene presentar a continuación los ejemplos que aparecerán en la clasificación.

### 3.1. Algebras paraHurwitz y Okubo

El primero de los ejemplos ya ha aparecido antes, aunque entonces no hicimos mención a la asociatividad de su forma bilineal: se trata de las álgebras estándar de tipo IV. Se dice *álgebra paraHurwitz* asociada a un álgebra Hurwitz $(C, \circ)$, al álgebra que se obtiene cambiando el producto de $(C, \circ)$ por

$$x * y = \bar{x} \circ \bar{y}.$$

Una simple comprobación usando el corolario a la proposición 1.14 y la ecuación (1.18) muestra que las álgebras paraHurwitz poseen forma bilineal asociativa. Salvo en dimensión uno, hemos visto que estas álgebras no son Hurwitz. De hecho, la unidad $e$ de $(C, \circ)$ satisface

$$x * e = e * x = f(e, x)e - x. \tag{1.19}$$

Un elemento de un álgebra de composición que cumpla (1.19) se llama paraunidad. Las paraunidades son elementos característicos de las álgebras paraHurwitz [E-M 91].

**Teorema 1.18.** *Un álgebra de composición es paraHurwitz si y sólo si posee paraunidades.*

La dimensión dos es especial para estas álgebras. En la proposición 1.17 vimos que las formas de álgebras paraHurwitz son de nuevo álgebras paraHurwitz excepto en dimensión dos. También se sigue de la demostración que si la dimensión es mayor que dos entonces el centro conmutativo del álgebra paraHurwitz tiene dimensión uno y lo genera la paraunidad, por lo que ésta es única; sin embargo, esto no es cierto si la dimensión del álgebra paraHurwitz es dos. Una comprobación directa muestra

**Lema 1.19.** *Sea $\mathcal{F}e_1 + \mathcal{F}e_2$ el álgebra Hurwitz split de dimensión dos sobre un cuerpo que contiene una raiz $\omega$ 3-primitiva de la unidad, los elementos $\omega^i e_1 + \omega^{-i} e_2$ $i = 0, 1, 2$ son las paraunidades del álgebra paraHurwitz asociada a $\mathcal{F}e_1 + \mathcal{F}e_2$.*

La formulación inicial del siguiente ejemplo parece alejada del contexto de las álgebras de composición. Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo con car$\mathcal{F} \neq 2$ y 3 que contiene una raíz $\mu$ de la ecuación $3\mu(1-\mu) = 1$. Definimos un producto en el espacio vectorial $\mathrm{sl}(3, \mathcal{F})$ de las matrices $3 \times 3$ de traza cero mediante:

$$x * y = \mu xy + (1-\mu)yx - \frac{1}{3}\mathrm{traza}(xy)I_3 \tag{1.20}$$

donde $xy$ representa el producto usual de matrices. El álgebra $(\mathrm{sl}(3, \mathcal{F}), *)$ se denota por $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$ y se llama *álgebra de pseudooctoniones* (sobre $\mathcal{F}$). La forma cuadrática $n(x) = \frac{1}{6}\mathrm{traza}(x^2)$ la convierte en un álgebra de composición que verifica (1.17).

Sobre cuerpos de característica 3 la definición del álgebra de pseudooctoniones es totalmente diferente y, en principio, nada teórica. Okubo y Osborn han definido esta álgebra dando su tabla de multiplicación (tabla 3 con $\alpha = 1$) y como forma bilineal

$$f(x_{ij}, x_{pq}) = \delta_{i,(-p)}\delta_{j,(-q)}.$$

| | $x_{01}$ | $x_{02}$ | $x_{10}$ | $x_{20}$ | $x_{11}$ | $x_{22}$ | $x_{12}$ | $x_{21}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{01}$ | $-x_{02}$ | $0$ | $0$ | $x_{21}$ | $0$ | $x_{20}$ | $0$ | $x_{22}$ |
| $x_{02}$ | $0$ | $-x_{01}$ | $x_{12}$ | $0$ | $x_{10}$ | $0$ | $x_{11}$ | $0$ |
| $x_{10}$ | $x_{11}$ | $0$ | $-\alpha x_{20}$ | $0$ | $\alpha x_{21}$ | $0$ | $0$ | $x_{01}$ |
| $x_{20}$ | $0$ | $x_{22}$ | $0$ | $\frac{-1}{\alpha}x_{10}$ | $0$ | $\frac{1}{\alpha}x_{12}$ | $x_{02}$ | $0$ |
| $x_{11}$ | $x_{12}$ | $0$ | $0$ | $x_{01}$ | $-\alpha x_{22}$ | $0$ | $\alpha$ | $0$ |
| $x_{22}$ | $0$ | $x_{21}$ | $x_{02}$ | $0$ | $0$ | $\frac{-1}{\alpha}x_{11}$ | $0$ | $\frac{1}{\alpha}x_{10}$ |
| $x_{12}$ | $x_{10}$ | $0$ | $\alpha x_{22}$ | $0$ | $0$ | $x_{01}$ | $-\alpha x_{21}$ | $0$ |
| $x_{21}$ | $0$ | $x_{20}$ | $0$ | $\frac{1}{\alpha}x_{11}$ | $x_{02}$ | $0$ | $0$ | $\frac{-1}{\alpha}x_{12}$ |

Tabla 3

Las formas de las álgebras que verifican (1.17) son también álgebras de composición con forma bilineal asociativa. Es razonable dar la siguiente definición:

**Definición.** *Llamaremos álgebras de Okubo sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ a las formas de* $\mathrm{P}_8(\bar{\mathcal{F}})$, *donde $\bar{\mathcal{F}}$ denota la clausura algebraica de $\mathcal{F}$.*

## 3.2. Algebras $\mathbf{C}_\tau$ de Petersson

En el trabajo de Petersson [Pet 69] aparecen ciertos tipos de álgebras de composición que satisfacen (1.17). Sea $C$ un álgebra Hurwitz con producto $xy$ y $\tau$ un automorfismo que verifica $\tau^3 = id$, donde $id$ representa la aplicación identidad. Definimos un nuevo producto en $C$ mediante

$$x * y = \bar{x}^{\tau}\bar{y}^{\tau^{-1}} \tag{1.21}$$

El álgebra $(C, *)$ se denota por $C_\tau$ y es un álgebra de composición con la misma norma que $C$. El producto $*$ satisface

$$(x * y) * x = \left(\overline{\bar{x}^{\tau}\bar{y}^{\tau^{-1}}}\right)^{\tau} \bar{x}^{\tau^{-1}} = (yx^{\tau^2})\bar{x}^{\tau^{-1}} = n(x)y = x * (y * x),$$

por lo que la forma bilineal de $C_\tau$ es asociativa; además, el elemento unidad de $C$ pasa a ser un idempotente en $C_\tau$.

## 3.3. Clasificación

La primera clasificación de las álgebras que cumplen las identidades (1.17) es debida a Okubo y Osborn [O-O1 81, O-O2 81]

**Teorema 1.20 (Okubo-Osborn).** *Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo de característica distinta de 2 y 3. $A$ es un álgebra de composición con forma bilineal asociativa y con idempotentes no nulos si y sólo si o bien $A$ es paraHurwitz o bien $A$ es un álgebra de Okubo $(C, *)$ construida a partir de un álgebra de Cayley-Dickson $C = C(-1, \beta, \gamma)$ de la siguiente manera: Sea $\{x_0, \dots, x_7\}$ una base de $C$ dada por*

$x_0 = 1$, $x_1 = \gamma q$ ($q \in K(-1) \subseteq C$ *con* $q^2 = -3$),

$x_2$ *ortogonal a* $x_0$ *y* $x_1$ *con* $n(x_2) = -\beta$,

$x_3 = x_1x_2$, $x_4$ *ortogonal a* $x_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ *y* $n(x_4) = -\gamma$,

$x_i = x_{i-4}x_4$, $i = 5, 6, 7$.

*Consideramos la aplicación $T$ definida mediante*

| | $1$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $1$ | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2\gamma}x_5$ | $\frac{3}{2}\gamma x_4 + \frac{1}{2}x_5$ | $\frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2\gamma}x_7$ | $\frac{3}{2}\gamma x_6 + \frac{1}{2}x_7$ |

*El producto de* $(C, *)$ *es* $x * y = x^T y^{T^{-1}}$.

Sobre cuerpos de característica 3, después de una complicada demostración, se consigue [O-O2 81]:

**Teorema 1.21 (Okubo-Osborn).** *Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo perfecto de característica 3 sin extensiones cuadráticas propias, $A$ es un álgebra de composición con forma bilineal asociativa e idempotentes no nulos si y sólo si $A$ es o bien paraHurwitz o bien el álgebra de pseudooctoniones sobre $\mathcal{F}$.*

En el mismo trabajo demuestran que la condición de existencia de idempotentes no nulos no es demasiado restrictiva.

**Proposición 1.22.** *Sea $A$ un álgebra de composición con forma bilineal asociativa sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ con* $\mathrm{car}\mathcal{F} \neq 2$. *Se tiene que o bien $A$ contiene un idempotente o bien existe una extensión $K$ de $\mathcal{F}$ de grado 3 de tal modo que $A_K$ posee un idempotente.*

Puesto que en la clasificación anterior sólamente aparecen formas de álgebras paraHurwitz y álgebras de Okubo, surge una pregunta inevitable: ¿Qué tipo de álgebras son las álgebras $C_\tau$ de Petersson?. En el siguiente capítulo veremos que las álgebras $C_\tau$ modelizan todas las álgebras de composición con forma bilineal asociativa e idempotentes no nulos.

## 4. Algebras flexibles y de potencias asociativas

La identidad flexible

$$x(yx) = (xy)x \tag{1.22}$$

puede entenderse como una debilitación de la conmutatividad (en este sentido, por ejemplo, se definen las álgebras de Jordan no conmutativas). Esta una de las identidades más habituales en Algebra y que se satisface en gran cantidad de variedades de álgebras.

El primer procedimiento para el estudio de las álgebras de composición flexibles de dimensión finita fue reducir su clasificación a la de las que poseen forma bilineal asociativa. Okubo [O 82], apoyándose en los teoremas anteriores, demuestra:

**Teorema 1.23 (Okubo).** *Las únicas álgebras de composición flexibles de dimensión finita sobre un cuerpo de característica* $\neq 2$ *son las álgebras Hurwitz, las formas de las paraHurwitz y las de Okubo.*

Más tarde Elduque y Myung, basándose en un artículo de Faulkner, encuentran una sorprendente relación entre las álgebras de composición flexibles sobre cuerpos de característica distinta de dos y tres, y las álgebras alternativas separables de grado 3. Esta relación les permite ver de un modo unificado y elegante tales álgebras de composición:

Diremos que un cuerpo es de *tipo I* si contiene una raíz $\mu$ de la ecuación $3\mu(1-\mu) = 1$, y de *tipo II* en otro caso. Sea $A$ un álgebra alternativa separable de dimensión finita y de grado 3 sobre un cuerpo de tipo I. Su polinomio mínimo genérico tiene la forma

$$p_x(\lambda) = \lambda^3 - T(x)\lambda^2 + S(x)\lambda - N(x)1,$$

donde $T$ es una forma lineal llamada traza y $S$ una forma cuadrática no degenerada. Sea $A_0$ el subespacio vectorial de los elementos de $A$ de traza cero. Definimos una nueva multiplicación en $A_0$ mediante

$$x * y = \omega xy - \omega^2 yx - \frac{2\omega + 1}{3} T(xy)1 \tag{1.23}$$

donde $\omega = \mu^{-1}(\mu - 1)$ es una raíz 3-primitiva de la unidad. El álgebra $(A_0, *)$ con la forma cuadrática $S(\cdot)$ es un álgebra de composición.

Si el cuerpo $\mathcal{F}$ es de tipo II entonces tomamos un álgebra $A$ alternativa, separable de dimensión finita y de grado 3 sobre $K = \mathcal{F}(\omega)$ dotada de una involución $x \mapsto x^J$ de segunda clase, es decir, $\omega^J = \omega^2$. Sea

$$\tilde{A}_0 = \{x \in A \mid T(x) = 0 \text{ y } x^J = -x\}, \tag{1.24}$$

si $*$ denota el producto definido por (1.23) entonces $(\tilde{A}_0, *)$ es un álgebra de composición con la forma cuadrática $S(\cdot)$.

La construcción de Elduque y Myung proporciona el teorema 1.23 para cuerpos de característica $\neq 2$ y 3. La ventaja de esta aproximación radica en que con ella se pueden clasificar todas las álgebras de Okubo y las formas de las álgebras paraHurwitz, además de no hacer uso del teorema 1.20.

**Teorema 1.24 (Elduque-Myung).** *Sea $U$ un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ de característica $\neq 2$ y 3, se tiene:*

(I) *Si $\mathcal{F}$ es de tipo I entonces $U$ es un álgebra flexible de composición, no Hurwitz, sobre $\mathcal{F}$ si y sólo si existe un álgebra $A$ alternativa separable de grado 3 sobre $\mathcal{F}$ tal que $U$ es isomorfa al álgebra $(A_0, *)$ dada por (1.23). Además, dos de estas álgebras $U$ son isomorfas si y sólo si lo son sus correspondientes álgebras alternativas $A$.*

(II) *Si $\mathcal{F}$ es de tipo II entonces $U$ es un álgebra flexible de composición, no Hurwitz, sobre $\mathcal{F}$ si y sólo si existe un álgebra $A$ alternativa separable de grado 3 sobre $K = \mathcal{F}(\omega)$ con una involución de segunda clase $J$ tal que $U$ es isomorfa al álgebra $(\tilde{A}_0, *)$ dada por (1.23) y (1.24). Además, dos de estas álgebras $U$ son isomorfas si y sólo si lo son sus correspondientes álgebras alternativas como álgebras con involución.*

Las álgebras alternativas separables de grado 3 son conocidas. Denotando $F$ por $K$ si $\mathcal{F}$ es de tipo I, tenemos las siguientes posibilidades para $A$:

(Ia-IIa) $A$ es un álgebra asociativa simple central de grado 3. En este caso $A \cong M_3(K)$ o $A$ es un álgebra de división.

(Ib-IIb) $A$ es asociativa simple no central. En tal caso, $A$ es un cuerpo extensión cúbica de $K$.

(Ic-IIc) $A = K \oplus C$ para cierta álgebra Hurwitz $C$ de grado 2 sobre $K$. En particular, $C$ será isomorfa a $K \oplus K$, una extensión cuadrática de $K$, un álgebra de cuaternios o un álgebra de octoniones sobre $K$.

Debemos notar que el tipo IIb se incluye en el IIc al extender escalares. Examinando las distintas posibilidades, Elduque y Myung prueban:

**Teorema 1.25 (Elduque-Myung).** *Sea $(U, *)$ un álgebra de composición no Hurwitz, flexible de dimensión finita sobre $\mathcal{F}$. Como en el teorema 1.24, sea $A$ ($(A, J)$ para $\mathcal{F}$ de tipo (II)) un álgebra alternativa separable de grado 3 sobre $\mathcal{F}$ ($K$ respec.) tal que $(U, *) \cong A_0$ ($\tilde{A}_0$ respec.). Se tiene que $(U, *)$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras:*

(Ia-IIa) *Un álgebra de Okubo sobre $\mathcal{F}$ si $A$ es de tipo Ia o IIa.*

(Ib-IIb) *Una forma, de dimensión 2 sobre $\mathcal{F}$, de un álgebra paraHurwitz si $A$ es de tipo Ib o IIb.*

(Ic-IIc) *Un álgebra paraHurwitz si $A$ es de tipo Ic o IIc.*

En un trabajo no publicado el primer autor modifica la anterior construcción para clasificar, en términos semejantes, las álgebras de composición flexibles de dimensión finita sobre cuerpos de característica 2. Para más detalles remitimos al artículo original [E-M 93].

Se definen recursivamente las potencias a izquierda de un elemento como $x^{i+1} = xx^i \ \forall i \geq 1$ y $x^1 = x$. Esto conduce al concepto de álgebra de potencias asociativas como aquélla que verifica

$$x^{i+j} = x^i x^j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Muchas variedades de álgebras usuales son de potencias asociativas como por ejemplo las de Jordan, Lie, Alternativas (teorema de Artin),... Las álgebras Hurwitz son alternativas y, por lo tanto, de potencias asociativas. El siguiente resultado de Okubo [O 81] nos revela que son las únicas álgebras de composición de potencias asociativas:

**Teorema 1.26 (Okubo).** *Sea $A$ un álgebra de composición de potencias asociativas sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ de característica $\neq 2$ y $3$. Si $A$ es o bien de dimensión finita o bien de división entonces $A$ es un álgebra Hurwitz.*

# Capítulo 2

# Forma bilineal asociativa

En este capítulo veremos cómo un estudio de la pregunta formulada en el apartado 3.3 del capítulo anterior nos conduce a un análisis más profundo de las álgebras de composición con forma bilineal asociativa.

En primer lugar mostraremos que toda álgebra de composición con forma bilineal asociativa e idempotentes no nulos es del tipo $C_\tau$, así pues, la clasificación de las primeras equivale a la de estas últimas. En particular, las álgebras de pseudooctoniones tendrán la forma $\mathfrak{C}_\tau$ para un cierto $\tau$. Adoptaremos esta realización como definición, pues es independiente de la característica y amplía las conocidas a cuerpos arbitrarios de característica arbitraria. A partir de ese momento nuestro objetivo será doble. Por un lado, demostrar que las álgebras $C_\tau$ son paraHurwitz u Okubo, lo cual dependerá únicamente del subespacio fundamental de valor propio 1 de $\tau$. Así, sobre cuerpos de característica $\neq 3$, $\tau^3 = id$ implica que $\tau$ es diagonalizable sobre la clausura algebraica, hecho que facilitará el análisis; sin embargo, sobre cuerpos de característica 3, $\tau^3 = id$ equivale a $(\tau - id)^3 = 0$, por lo que, salvo en el caso trivial $\tau = id$, $\tau$ no es diagonalizable en ninguna extensión del cuerpo base. Tendremos que ir cambiando de $\tau$ hasta encontrar uno susceptible de ser analizado. Esta y no otra es la causa que determina la complejidad del análisis sobre cuerpos de característica 3. Por otro lado, expresando $\tau$ en una base canónica adecuada, describiremos las álgebras $C_\tau$. En este sentido demostraremos los siguientes teoremas, análogos de los teoremas 1.20 y 1.21:

**Teorema 2.1.** *Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo de característica $\neq 3$, $A$ es un álgebra de composición con forma bilineal asociativa e idempotentes no nulos si y sólo si o bien $A$ es paraHurwitz o bien $A$ es un álgebra de Okubo $(C,*)$ construida a partir de un álgebra de Cayley-Dickson $C$ tomando una base $\{x_0,\dots,x_7\}$ de $C$ como sigue:*

$$x_0 = 1,\ x_1 \in K(-1) \text{ con } x_1^2 = -x_1 - 1,$$

$$x_2 \text{ ortogonal a } x_0 \text{ y } x_1 \text{ y } n(x_2) = -\beta,$$

$$x_3 = x_1x_2,\ x_4 \text{ ortogonal a } x_i, i = 0,\dots,3 \text{ y } n(x_4) = -\gamma,$$

$$x_i = x_{i-4}x_4\ i = 5,6,7,$$

*y considerando la aplicación lineal $S$ definida mediante*

| | $1$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | $1$ | $-1-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_5$ | $x_4+x_5$ | $-x_7$ | $x_6+x_7$ |

*y el producto $x * y = x^S y^{S^{-1}}$.*

**Teorema 2.2.** *Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo de característica 3, $A$ es un álgebra de composición con forma bilineal asociativa e idempotentes no nulos si y sólo si o bien $A$ es paraHurwitz o bien $A$ es un álgebra de Okubo cuya tabla de multiplicación viene dada por la tabla 3 (capítulo 1, sección 3).*

Las álgebras definidas por la tabla 3 las denotaremos por $C(\alpha)$. Por último daremos un criterio de isomorfía entre las distintas álgebras $C(\alpha)$ (teorema 2.16).

# 1. Preliminares

En esta sección estableceremos algunos hechos sobre álgebras Hurwitz que nos serán de utilidad a lo largo de la memoria y que tienen interés por sí mismos.

Empezaremos con alguna linealización. De la ecuación (1.7):

$$xy + yx - t(y)x - t(x)y + f(x,y)1 = 0. \tag{2.1}$$

Recordemos las linealizaciones de la ley de composición en un álgebra $(A,*)$:

$$f(x*y, x*z) = n(x)f(y,z) = f(y*x, z*x) \tag{2.2}$$

volviendo a linealizar

$$f(x*y, w*z) + f(w*y, x*z) = f(w,x)f(y,z) \tag{2.3}$$

Sea $A$ un álgebra arbitraria, no necesariamente de composición, sobre un cuerpo de característica $\neq 3$ que contiene una raíz 3-primitiva $\omega$ de la unidad. Dar un automorfismo $\tau$ de $A$ que satisfaga $\tau^3 = id \neq \tau$ equivale a dar una $\mathbb{Z}_3$ graduación de $A$, pues si $\tau$ es un tal automorfismo y $S(\omega^i)$ $i = 0,1,2$ sus subespacios fundamentales, entonces los subespacios $A^{(i)} = S(\omega^i)$ verifican $A^{(i)}A^{(j)} \subseteq A^{(i+j)}$ (coeficientes módulo 3). Recíprocamente, dada una $\mathbb{Z}_3$ graduación $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)} \oplus A^{(2)}$ de $A$, la aplicación $\tau : x_i \mapsto \omega^i x_i$ $\forall x_i \in A^{(i)}$ es un automorfismo de grado 3 de $A$.

El estudio de estas graduaciones en las álgebras de Cayley-Dickson arrojará luz sobre las álgebras $C_\tau$.

**Lema 2.3.** *Sea $C$ un álgebra de Cayley-Dickson y $C = C^{(0)} \oplus C^{(1)} \oplus C^{(2)}$ una $\mathbb{Z}_3$ graduacón no trivial de $C$, entonces $C$ es el álgebra de Cayley split, $1 \in C^{(0)}$ y $f(C^{(i)}, C^{(j)}) = 0$ si $i + j \neq 0 \pmod 3$.*

*Demostración.* Sea $1 = x_0 + x_1 + x_2$ con $x_i \in C^{(i)}$. Dado $a_i \in C^{(i)}$ tenemos que $a_i = a_i 1 = \sum_j a_i x_j$. Como $a_i x_j$ pertenece a $C^{(i+j)}$ entonces $a_i = a_i x_0$ (análogamente $x_0 a_i = a_i$), por lo que $1 = x_0 \in C^{(0)}$.

Dados $a_i, a_j$ con $i + j \neq 0 \pmod 3$ sustituimos $x = a_i, y = a_j$ en (2.1). Mirando a qué subespacio $C^{(k)}$ pertenece cada uno de los sumandos, observamos que si $i, j \neq 0$ entonces $f(C^{(i)}, C^{(j)}) = 0$. Si $i = 0 \neq j$ entonces por (1.7) tenemos que $t(a_j) = 0$. Con este dato la ecuación (2.1) nos dice que $f(C^{(0)}, C^{(j)}) = 0$.

Evidentemente $C$ es split pues $f(C^{(i)}, C^{(i)}) = 0$ si $i \neq 0$.

QED

La siguiente proposición sitúa bases canónicas dentro de las $\mathbb{Z}_3$ graduaciones. Tiene gran importancia en este capítulo y, como veremos, resulta fundamental en los capítulos 4 y 5.

**Proposición 2.4.** *Sea $C$ un álgebra de Cayley que posee una $\mathbb{Z}_3$ graduación no trivial, entonces $C$ es split y la graduación es o bien corta o bien larga.*

*Demostración.* Por la no degeneración de $f$ y por el lema anterior tenemos que $\dim C^{(1)} = \dim C^{(2)}, \dim C = \dim C^{(0)} + 2 \dim C^{(1)}$ y $C^{(0)}$ es una subálgebra propia de composición. En particular, la dimensión de $C^{(0)}$ ha de ser par, y por lo tanto 2 ó 4.

Fijemos $a_i \in C^{(i)}$ $i = 1, 2$ con $f(a_1, a_2) = -1$. Por el lema anterior $0 = t(a_i) = n(a_i)$ y así, en virtud de (1.7), tenemos que $a_i^2 = 0$. Definamos $e_1 = a_1 a_2$ y $e_2 = a_2 a_1$. Estos elementos verifican que $n(e_i) = n(a_1)n(a_2) = 0$ y $t(e_i) = -f(a_1, a_2) = 1$, por lo que por el lema 1.4 son idempotentes. Más aún, por el teorema de Artin, $e_1 e_2 = (a_1 a_2)(a_2 a_1) = a_1 a_2^2 a_1 = 0 = e_2 e_1$; así, $e_1 + e_2$ es un idempotente de norma uno y por lo tanto $e_1 + e_2 = 1$.

Supongamos ahora que $\dim C^{(0)} = 2$, entonces $C^{(0)} = \mathcal{F}e_1 \oplus \mathcal{F}e_2$. Sean $b_1 \in C^{(1)}$ y $b_2 \in C^{(2)}$. Por dualidad podemos escribir $b_1 = \alpha a_1 + \tilde{a}_1$ con $f(\tilde{a}_1, a_2) = 0$. Aplicando (2.2) y (2.3) tenemos

$$\begin{aligned} f(e_1, b_1b_2) &= f(a_1a_2, b_1b_2) = f(a_1a_2, \alpha a_1b_2) + f(a_1a_2, \tilde{a}_1b_2) = \\ &= f(a_1a_2, \tilde{a}_1b_2) = f(a_1, \tilde{a}_1)f(a_2, b_2) - f(a_1b_2, \tilde{a}_1a_2) = -f(a_1b_2, \tilde{a}_1a_2). \end{aligned}$$

Por otro lado, $(\tilde{a}_1a_2)^2 = t(\tilde{a}_1a_2)\tilde{a}_1a_2 = -f(\tilde{a}_1, a_2)\tilde{a}_1a_2 = 0$. Sin embargo $\mathcal{F}e_1 \oplus \mathcal{F}e_2$ no posee elementos nilpotentes, por lo que $\tilde{a}_1a_2 = 0$. Así pues, $f(e_1, b_1b_2) = 0$ y $b_1b_2 \in \mathcal{F}e_1$. Podemos concluir que $C^{(1)}C^{(2)} = \mathcal{F}e_1$. Análogamente obtendríamos que $C^{(2)}C^{(1)} = \mathcal{F}e_2$.

Dado $0 \neq b_1 \in C^{(1)}$ podemos elegir, por dualidad, $b_2 \in C^{(2)}$ con $f(b_1, b_2) = -1$. Así, por lo anterior, $b_1b_2 = e_1$ y $b_2b_1 = e_2$. Como consecuencia, $e_1b_1 = (1-e_2)b_1 = b_1 - b_2b_1^2 = b_1$. Similares comprobaciones muestran que $C^{(1)} = U(e_1)$ y $C^{(2)} = V(e_1)$ son los subespacios de la descomposición de Peirce. De aquí se sigue que la $\mathbb{Z}_3$ graduación es corta.

Resta examinar qué ocurre si $\dim C^{(0)} = 4$. Como $e_1, e_2 \in C^{(0)}$ entonces $C^{(0)}$ es el álgebra de cuaternios split. Completemos $\{e_1, e_2\}$ a una base canónica $\{e_1, e_2, u_1, v_1\}$ de $C^{(0)}$ y definamos $u_2 = -a_1$ y $v_2 = a_2$. Claramente $e_1u_2 = (1 - e_2)u_2 = u_2 - e_2u_2 = u_2 - a_1a_2^2 = u_2$; en particular, $u_2 \in U(e_1)$ y, de igual modo, $v_2 \in V(e_1)$. Completamos $\{e_1, e_2, u_1, u_2, v_1, v_2\}$ a una base canónica $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ de $C$, basta observar que $u_3 = v_1v_2 \in C^{(2)}$ y que $v_3 = u_1u_2 \in C^{(1)}$ para concluir que la $\mathbb{Z}_3$ graduación es larga.

QED

## 2. Caracterización

La primera caracterización de las álgebras de composición con forma bilineal asociativa nos las muestra como álgebras que satisfacen ciertas identidades "genéricas" (identidad (1.16)) [M]:

**Lema 2.5.** *Para un álgebra $(A,*)$ y una forma cuadrática estrictamente no degenerada $n(\cdot)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *El producto de $(A,*)$ satisface $(x*y)*x = n(x)y = x*(y*x)$ $\forall x,y \in A$.*

ii) *$A$ es un álgebra de composición con la forma cuadrática $n(\cdot)$ y su forma bilineal es asociativa.*

*Además, cualquiera de los apartados anteriores implica que la dimensión de $A$ es finita.*

Resultará especialmente útil la linealización de la identidad del apartado i) del lema:

$$(x*y)*z+(z*y)*x = f(x,z)y = z*(y*x)+x*(y*z) \tag{2.4}$$

El siguiente teorema sitúa el problema que abordamos en este capítulo dentro del contexto adecuado.

**Teorema 2.6.** *Un álgebra es de composición con forma bilineal asociativa y elementos idempotentes no nulos si y sólo si es isomorfa a un álgebra $C_\tau$.*

*Demostración.* Sean $(A,*)$ un álgebra de composición con forma bilineal asociativa y $e$ un idempotente no nulo en $A$. Por el lema 2.5 tenemos que $e=(e*e)*e=n(e)e$, por lo que $n(e)=1$ y, así, los operadores $L_e, R_e$

de multiplicación en $A$ son, por (1.16), inversos uno del otro. Definimos como $C$ el álgebra $(A, e)$ (véase sección 1), por lo anterior $x \circ y = (e*x)*(y*e)$ y $e$ es la unidad de $C$.

Sustituyendo $y = e = z$ en la ecuación de la izquierda de (2.4) tenemos

$$(x * e) * e + e * x = f(e, x)e.$$

Multiplicando esta ecuación a derecha por $e$,

$$xR_e^3 = f(e, x)e - x. \tag{2.5}$$

Contrastando esta ecuación con (1.5), observamos que $R_e^3$ es la involución estándar $x \mapsto \bar{x}$ de $C$.

Sustituimos $x = e * x$ y $z = e$ en la igualdad del lado derecho de (2.4):

$$x \circ y = (e * x) * (y * e) = f(e, x)y - e * (y * (e * x)),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} (x \circ y) * e &= y * (f(x, e)e - e * x) = y * (\bar{x}L_e) = y * (xR_e^2) \\ &= (e * (y * e)) * ((x * e) * e) = (y * e) \circ (x * e). \end{aligned}$$

Esto demuestra que el operador $R_e$ es un antiautomorfismo de $C$ que elevado al cubo da la involución estándar. Puesto que la involución estándar conmuta con los antiautomorfismos de $C$, la aplicación $\tau : x \mapsto \bar{x}R_e$ es un automorfismo de $C$ de grado 3. Además $x * y = \bar{x}^{\tau} \circ \bar{y}^{\tau^{-1}}$, por lo que $(A, *) = C_{\tau}$.

QED

**Nota:** La demostración del teorema anterior nos da un método para cambiar la realización de $A$ como álgebra $C_{\tau}$. Cada idempotente $e$ de $A$ proporciona un par $(C, \tau)$ para el cual $A = C_{\tau}$. El producto en $C$ viene dado por $xy = (e * x) * (y * e)$, $e$ es el elemento unidad de $C$ y $\tau$ queda definido por:

$$x^\tau = f(x, e)e - x * e. \tag{2.6}$$

Si $C_\tau \cong C'_{\tau'}$ entonces, por la unicidad de la norma, sus normas son equivalentes y, por el teorema 1.5, $C$ y $C'$ son isomorfas. Esto nos dice que en realidad no cambiamos de álgebra $C$ sino de automorfismo $\tau$.

**Ejemplo:** Este teorema nos permite ver de un modo natural los enunciados de los teoremas 1.20 y 2.1. Respetando la notación del teorema 1.20, definimos $\tau : x \mapsto \bar{x}^T$ y $B = \langle x_0, \ldots, x_3 \rangle$. $B$ es una subálgebra de cuaternios de $C$ sobre la que $\tau$ actúa como la identidad. De hecho, una comprobación directa muestra que la aplicación $\tau$ se puede expresar como

$$b^\tau = b \quad (x_4 b)^\tau = (x_4 a)b \quad \forall b \in B$$

con $a = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2\gamma}x_1$. En particular, $\tau$ coincide con el automorfismo $\tau_a$ que aparece en (1.15); además, $a^3 = 1$ implica que $\tau^3 = id$. El producto del álgebra $(C, *)$ del enunciado del teorema 1.20 viene dado por $x * y = \bar{x}^\tau \bar{y}^{\tau^{-1}}$, lo que muestra que $(C, *) = C_\tau$ y, como consecuencia, que la forma bilineal de $(C, *)$ es asociativa.

De igual modo se comprueba que definiendo $\tau : x \mapsto \bar{x}^S$, el álgebra del teorema 2.1 coincide con $C_\tau$ y que, por lo tanto, su forma bilineal es también asociativa.

## 3. Definición general de pseudooctoniones

La justificación de la definición de pseudooctoniones que proponemos la iremos viendo según avancemos en el estudio de las álgebras $C_\tau$.

**Definición.** *Sea* $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ *una base canónica de* $\mathfrak{C}$, *consideramos el automorfismo (ver teorema 1.10)* $\tau$ *dado por*

$$e_i^\tau = e_i, \ i = 1, 2, \quad u_i^\tau = u_{i+1}, \quad v_i^\tau = v_{i+1} \tag{2.7}$$

*donde los índices se toman módulo* 3. *El álgebra* $\mathfrak{C}_\tau$ *se llamará álgebra de pseudooctoniones sobre* $\mathcal{F}$ *y la denotaremos por* $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$. *Las formas de* $\mathrm{P}_8(\bar{\mathcal{F}})$ *las seguiremos llamando álgebras de Okubo.*

Necesitaremos un criterio para dilucidar, en términos de $\tau$, bajo qué condiciones un álgebra $C_\tau$ es de Okubo. La siguiente proposición nos da una idea de hacia qué tipo de automorfismos hemos de acercarnos.

**Proposición 2.7.** *Sea* $C$ *un álgebra de Cayley-Dickson y* $\tau$ *un automorfismo de* $C$ *que verifica* $\tau^3 = id$ *y para el cual existe una subálgebra de composición* $K$ *de dimensión* 2 *respecto a la cual* $\tau|_K = id$ *y el polinomio mínimo de* $\tau|_{K^\perp}$ *es* $T^3 - 1$. *Entonces, el álgebra* $C_\tau$ *es un álgebra de Okubo*

*Demostración.* Basta comprobar que al extender escalares a $\bar{\mathcal{F}}$ tenemos un álgebra de pseudooctoniones. Supongamos pues que $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}$. La subálgebra $K$ se escinde como $K = \mathcal{F}e_1 \oplus \mathcal{F}e_2$. Podemos completar estos idempotentes hasta una base canónica $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ de $C$. Por el teorema 1.10 los subespacios $U$ y $V$ de la descomposición de Peirce son $\tau$ invariantes. Manteniendo la notación previa al teorema 1.10, $\tau$ actúa como $\tau_U$ en $U$ y como $(\tau_U^*)^{-1}$ en $V$. El polinomio mínimo de $\tau_U$ divide al de $\tau$, por lo que es uno de los siguientes: $T - 1, T^2 + T + 1$ o $T^3 - 1$. En el primer y segundo caso el polinomio mínimo de $(\tau_U^*)^{-1}$ sería el mismo que el de $\tau_U$ y, por lo tanto, el de $\tau$ no podría valer $T^3 - 1$, lo que contradice las hipótesis. En consecuencia el polinomio mínimo de $\tau_U$ es $T^3 - 1$ y podemos encontrar una base de $U$ de la forma $\{u, u^\tau, u^{\tau^2}\}$. Al ser el cuerpo algebraicamente cerrado, podemos elegir $u$ para que la aplicación que cambia las bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ y $\{u, u^\tau, u^{\tau^2}\}$ tenga determinante 1. Podemos entonces, por el corolario al teorema 1.10, suponer sin pérdida de generalidad que $u_i = u^{\tau^{i-1}}$, $i = 1, 2, 3$ y así $u_i^\tau = u_{i+1}$ (donde los índices se interpretan módulo 3), por lo que el álgebra $C_\tau$ es el álgebra de pseudooctoniones anteriormente definida.

QED

## 4. Algebras $C_\tau$

El propósito de esta sección es, dada un álgebra $C_\tau$, comprobar si posee una paraunidad o, en caso de no existir dicha paraunidad, ir cambiando el automorfismo $\tau$, según la nota al teorema 2.6, hasta encontrar uno que se ajuste a la proposición 2.7.

Como vamos a ver, los casos de dimensión 1, 2, 4 o de dimensión 8 y car$\mathcal{F} \neq 3$ no esconderán especial complicación y ningún cambio de $\tau$ es preciso. Por ello, deseamos notar una vez más la importancia que supone el que, sobre cuerpos de característica $\neq 3$, $\tau$ sea diagonalizable sobre la clausura algebraica e induzca una $\mathbb{Z}_3$ graduación.

**Teorema 2.8.** *Cualquier álgebra $C_\tau$ de dimensión $1, 2$ ó $4$ es paraHurwitz.*

*Demostración.* El resultado es evidente para álgebras de dimensión 1. Supongamos que $\dim C = 2$. Si car$\mathcal{F} \neq 2$ entonces $C$ posee una base ortogonal $\{1, a\}$. Puesto que $1^\tau = 1$ entonces $a^\tau = \alpha a$. Por un lado $\tau$ es una isometría, por lo que $\alpha^2 = 1$; pero por otro $\tau^3 = id$, por lo que $\alpha^3 = 1$. En consecuencia $\alpha = 1$ y $\tau = id$, lo que demuestra el teorema en este caso. Si car$\mathcal{F} = 2$ entonces podemos encontrar una base $\{1, a\}$ de $C$ de tal modo que

$f(1,a) = 1, 1^\tau = 1$ y $a^\tau = \alpha 1 + a$. Puesto que $\tau^3 = id$, se sigue que $\alpha = 0$ y de nuevo $\tau = id$.

Consideremos ahora el caso en que $\dim C = 4$. $C$ es un álgebra de cuaternios y por lo tanto un álgebra asociativa simple central. Por el teorema de Noether-Skolem los automorfismos de $C$ son internos y así $x^\tau = a^{-1}xa$ para algún elemento $a$ de norma no nula. Puesto que $\tau^3 = id$ entonces $a^3 = \alpha 1$, donde $0 \neq \alpha \in \mathcal{F}$. Consideremos $\omega = a^2/n(a)$, tenemos que $\omega^3 = a^6/n(a)^3 = 1$, $n(\omega) = 1$ y $\bar{\omega} = w^2$. Expresando $\tau$ en función de $\omega$ obtenemos

$$x^\tau = a^{-1}xa = \frac{1}{\alpha}a^2xa = \omega x \omega^2.$$

Por otro lado, utilizando esta expresión,

$$x * \omega = \bar{x}^\tau \bar{\omega}^{\tau^{-1}} = \omega\bar{x}\omega = (f(\omega\bar{x},1)1 - x\omega^2)\omega = f(\omega,x)\omega - x$$

De forma análoga se prueba que $\omega * x = f(\omega,x)\omega - x$. En particular, $\omega$ es una paraunidad de $C_\tau$ y así, por el teorema 1.18, el álgebra $C_\tau$ es paraHurwitz.

QED

El subespacio fundamental de valor propio $\alpha$ de $\tau$ se denotará por $S(\alpha,\tau)$ o, cuando el contexto no de lugar a confusión, por $S(\alpha)$.

El siguiente teorema clasifica las álgebras $C_\tau$ sobre cuerpos de característica $\neq 3$.

**Teorema 2.9.** *Sea $C$ un álgebra de Cayley-Dickson sobre un cuerpo de característica $\neq 3$ y $\tau$ un automorfismo de $C$ que cumple $\tau^3 = id$. $C_\tau$ es paraHurwitz si y sólo si $\dim S(1,\tau) \neq 4$; en otro caso, $C_\tau$ es un álgebra de Okubo.*

*Demostración.* En virtud del lema 1.17 basta demostrar el enunciado para cuerpos algebraicamente cerrados, por lo que consideraremos $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}$.

Supongamos primero que $\dim S(1,\tau) \neq 4$. Si $\tau = id$ el resultado es obvio, por lo que también supondremos que $\tau \neq id$. En tal caso $C$ se descompone como $C = S(1) \oplus S(\omega) \oplus S(\omega^2)$ donde $\omega$ denota una raíz 3-primitiva de la unidad. Tal descomposición es una $\mathbb{Z}_3$ graduación de $C$, por lo que, aplicando la proposición 2.4, existe una base canónica $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ de $C$ para la cual $S(1) = \langle e_1, e_2\rangle$, $S(\omega) = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $S(\omega^2) = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Calculando los productos de $\omega^2 e_1 + \omega e_2$ por los elementos de los distintos subespacios fundamentales se obtiene que $\omega^2 e_1 + \omega e_2$ es una paraunidad, y en consecuencia, por el teorema 1.18, $C_\tau$ es paraHurwitz.

Veamos qué ocurre si $\dim S(1,\tau) = 4$. Análogamente al caso anterior, los subespacios fundamentales proporcionan una $\mathbb{Z}_3$ graduación que, por la proposición 2.4, tiene la forma $S(1) = \langle e_1, e_2, u_1, v_1\rangle$, $S(\omega) = \langle u_2, v_3\rangle$ y $S(\omega^2) = \langle v_2, u_3\rangle$ para alguna base canónica $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ de $C$. Basta aplicar la proposición 2.7 con $K = \langle e_1, e_2\rangle$ para obtener el enunciado.

QED

**Corolario.** *Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo de característica distinta de 3 que contiene las raíces cúbicas de la unidad, entonces el álgebra de pseudooctoniones es, salvo isomorfismo, la única álgebra $C_\tau$ que no es paraHurwitz.*

*Demostración.* Sea $\tau$ un automorfismo para el cual $C_\tau$ no es paraHurwitz, por el teorema anterior $\dim S(1) = 4$. Como los subespacios fundamentales de $\tau$ forman una $\mathbb{Z}_3$ graduación entonces, por la proposición 2.4, podemos encontrar una base canónica $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ de $C$, de tal modo que $\tau$ fije a $e_1, e_2, u_1$ y $v_1$, $u_2$ y $v_3$ sean vectores propios de valor propio $\omega$ mientras que $v_2$ y $u_3$ tengan valor propio $\omega^2$. Esto muestra que $\tau$ queda unívocamente determinado, por lo que únicamente existe, salvo isomorfismo, un álgebra $C_\tau$

de este tipo, que necesariamente coincide con la de pseudooctoniones.

QED

Este corolario justifica sobre cuerpos de característica $\neq 3$ nuestra definición de $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$ y muestra su equivalencia con la dada por Okubo.

Hasta el final de la sección consideraremos únicamente cuerpos $\mathcal{F}$ de característica 3. Si car$\mathcal{F} = 3$, la existencia de un automorfismo $\tau \neq id$ con $\tau^3 = id$ determina completamente la estructura de $C$.

**Lema 2.10.** *Si $\tau \neq id = \tau^3$ entonces $C$ es split.*

*Demostración.* Sea $\tau$ un automorfismo como el del enunciado, definiendo $\delta = \tau - id$ tenemos que $\delta^3 = 0$, por lo que podemos encontrar un elemento $a \in C$ de tal modo que $a^\delta \neq 0$ y $a^{\delta^2} = 0$. Por el corolario a la proposición 1.14, $f(a^\delta, a^\delta) = f(a^\tau, a^\delta) - f(a, a^\delta) = f(a, a^{\delta\tau^2}) - f(a, a^\delta) = f(a, a^{\delta^2(\tau - id)}) = 0$. La isotropía de $a^\delta$ muestra que $C$ es split.

QED

Contrariamente a lo que ocurre sobre cuerpos de característica $\neq 3$, en general, para $\tau \neq id$ no podemos asegurar que $S(1, \tau)$ sea una subálgebra de composición, ni tampoco se puede hacer uso directo de la proposición 2.7. Es necesario cambiar $\tau$ por uno cuyo comportamiento controlemos. Por la nota a la demostración del teorema 2.6, a partir de cualquier idempotente de $C_\tau$ se puede proceder al cambio de $\tau$. Nuestra principal fuente de idempotentes es la siguiente:

**Lema 2.11.** *Sea $u \in C$ un elemento que satisface $f(1, u) = 0 = n(u)$ y $u^\tau = u$. Entonces, $1 + u$ es idempotente en el álgebra $C_\tau$.*

*Demostración.* $(1+u)*(1+u) = (\overline{1+u})^{\tau}(\overline{1+u})^{\tau^{-1}} = (1-u)(1-u) = 1-2u+u^2$. Por (1.7) $u^2 = 0$ y además, por tener $\mathcal{F}$ característica 3, $-2 = 1$. Esto demuestra el enunciado.

QED

Los siguientes dos lemas muestran cómo cambiar de $\tau$.

**Lema 2.12.** *Supongamos que $\tau$ satisface $(\tau - id)^2 = 0 \neq (\tau - id)$ y que $S(1,\tau)$ contiene una subálgebra $K$ de composición de dimensión 2 de $C$. Entonces existe un automorfismo $\tilde{\tau}$ de $C$, con $(\tilde{\tau} - id)^3 = 0 \neq (\tilde{\tau} - id)^2$, que fija los elementos de una subálgebra de composición split de dimensión 2 de $C$ y para el cual $C_{\tilde{\tau}}$ es isomorfa a $C_\tau$.*

*Demostración.* Consideremos la siguiente forma bilineal definida sobre $K^\perp$:

$$h(x,y) = f(x^\delta, y)$$

donde $\delta = \tau - id$. Por un lado, $\tau^2 = -\tau - id$ y $\tau$ es una isometría, por lo que $h(x,y) = f(x^\delta, y) = f(x, y^{\tau^2}) - f(x,y) = -h(y,x)$, o lo que es lo mismo, $h$ es alternada; por otro, $\ker\delta \cap K^\perp = \{x \in K^\perp \mid h(x, K^\perp) = 0\}$ (radical de $h$). Así pues, por la teoría de formas bilineales alternadas tenemos que la dimensión de $\ker\delta \cap K^\perp$ es par. Más aún, puesto que $\delta^2 = 0 \neq \delta$ entonces la dimensión de este subespacio ha de ser estrictamente mayor que 2. Concluimos que $\dim\ker\delta \cap K^\perp = 4$.

Por la no degeneración de $f$, existe $a \in \ker\delta \cap K^\perp$ con $n(a) \neq 0$. Con esta elección, la subálgebra $H$ de $C$ generada por $a$ y $K$ es de cuaternios y además $H \subseteq S(1,\tau)$. Usando el proceso de Cayley-Dickson, $C = H \oplus bH$ con $b \in H^\perp$ y $n(b) \neq 0$. Ahora, $b^\tau = bu$ para algún $1 \neq u \in H$. Como $\delta^2 = 0$ tenemos que $0 = b^{\delta^2} = b(u-1)^2$, por lo que $(u-1)^2 = u^2 + u + 1 = 0$.

De esto deducimos que $H$ es split. Sea $\{e_1, e_2, u_1, v_1\}$ una base canónica de $H$. La completamos a una base canónica $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ de $C$. El subespacio $U(e_1)$ de la descomposición de Peirce es $\tau$ invariante, por lo que, usando el corolario al teorema 1.10, podemos cambiar $u_2$ y $u_3$ para que $u_2^\tau = u_2$. También, salvo cambio escalar en $u_1$ y en este nuevo $u_2$, podemos suponer que $u_3^\tau = u_3 - u_2$. Por ser $\tau$ una isometría se tiene que $v_2^\tau = v_2 + v_3$ y $v_3^\tau = v_3$.

Consideramos $e = 1 + u_1$, que por el lema 2.11 es un idempotente de $C_\tau$. Por la nota al teorema 2.6, $e$ proporciona un par $(C', \tau')$ para el cual $C'_{\tau'} = C_\tau$. El producto en $C'$ (que es isomorfa a $C$) viene dado por $x \circ y = (e * x) * (y * e)$ y el automorfismo $\tau'$ queda definido por $x^{\tau'} = f(e, x)e - x * e$.

Sea $x = u_2 - v_2$, $f(e, x) = f(1 + u_1, u_2 - v_2) = 0$ y $n(x) = -1$. El elemento $x$ cumple que $x^{\tau'} = -x * e = x^\tau \bar{e} = (u_2 - v_2 - v_3)(1 - u_1) = u_2 - v_2 = x$ y, por (1.7), $x \circ x = e$. Esto nos dice que $\langle e, x\rangle$ es una subálgebra split de dimensión 2 de $C'$ cuyos elementos permanecen fijos por $\tau'$. Además $v_1^{\tau'} = f(v_1, e)e - v_1 * e = e + v_1(1 - u_1) = e + v_1 + e_2 = v_1 + (e_1 - e_2 + u_1)$ y $(e_1 - e_2 + u_1)^{\tau'} = f(e_1 - e_2 + u_1, e)e - (e_1 - e_2 + u_1) * e = (e_1 - e_2 + u_1)(1 - u_1) = e_1 - e_2$. Así $v_1^{(\tau' - id)^2} = v_1^{(\tau')^2 + \tau' + id} = (v_1 + (e_1 - e_2 + u_1) + (e_1 - e_2)) + (v_1 + (e_1 - e_2 + u_1)) + v_1 = -u_1 \neq 0$. Concluimos que $\tau'$ verifica $(\tau' - id)^2 \neq 0 = (\tau' - id)^3$. Al ser $C$ y $C'$ isomorfas, el automorfismo $\tilde{\tau}$ inducido en $C$ por $\tau'$ es el que buscamos.

QED

**Lema 2.13.** *Supongamos que $(\tau - id)^2 \neq 0 = (\tau - id)^3$ y que existe una subálgebra de composición $K$ de $C$ de dimensión 2 contenida en $S(1, \tau)$. Entonces podemos encontrar un automorfismo $\tilde{\tau}$ de $C$ de tal modo que: $(\tilde{\tau} - id)^2 \neq 0 = (\tilde{\tau} - id)^3$, $\tilde{\tau}$ fije los elementos de una subálgebra de composición split de dimensión 2 de $C$, y $C_{\tilde{\tau}}$ sea isomorfa a $C_\tau$.*

*Demostración.* Si el álgebra $K$ del enunciado es split entonces no hay nada que demostrar. En lo que sigue supondremos que $K$ es una extensión cuadrática de $\mathcal{F}$. Como $\tau$ fija los elementos de $K$ entonces, por el teorema 1.11, $\tau$ puede ser considerado como un elemento de $\mathrm{SU}(K^{\perp}, \sigma)$. Encontrar un idempotente que nos proporcione el automorfismo $\tilde{\tau}$ del enunciado pasa por buscar una descripción sencilla de $\tau$ en una $K$-base adecuada de $K^{\perp}$. Nos remitimos a los comentarios previos al teorema 1.11 para la notación $\sigma$, $\times$ y $\Phi$.

Puesto que en $K^{\perp}$ se tiene que $(\tau - id)^2 \neq 0 = (\tau - id)^3$, entonces podemos encontrar un elemento $u \in K^{\perp}$ de tal modo que $\{u, u^{\delta}, u^{\delta^2}\}$ sea un $K$-base de $K^{\perp}$. Este es el tipo de base de $K^{\perp}$ en que expresaremos $\tau$.

Puesto que $\tau$ es un automorfismo de $C$, también así una isometría para la forma hermitiana $\sigma$. Dados $x, y \in K^{\perp}$:

$$\begin{aligned} \sigma(x^{\delta}, y) &= \sigma(x^{\tau} - x, y) = \sigma(x, y^{\tau^{-1}}) - \sigma(x, y) \\ &= \sigma(x, y^{\tau^{-1} - id}) = \sigma(x, y^{\tau^2 - id}) = \sigma(x, y^{\delta^2 - \delta}). \end{aligned}$$

Esto, junto con la no degeneración de $\sigma$, nos da:

$$\begin{aligned} \sigma(u^{\delta}, u^{\delta^2}) = \sigma(u^{\delta^2}, u^{\delta^2}) = 0 \\ \sigma(u^{\delta}, u^{\delta}) = n(u^{\delta}) = -\sigma(u, u^{\delta^2}) \neq 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

La elección de $u$ puede ser mejorada. De hecho vamos a encontrar un $u$ que satisfaga:

$$\begin{aligned} \sigma(u^{\delta} + u^{\delta^2}, u) = 0 = \sigma(u, u) = n(u) \\ \sigma(u^{\delta}, u) = \sigma(u^{\delta}, u^{\delta}) = n(u^{\delta}) = -1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Veamos que podemos conseguirlo. Cambiamos $u$ por $v = u + au^{\delta} + bu^{\delta^2}$ con $a, b \in K$ elementos arbitrarios. El conjunto $\{v, v^{\delta}, v^{\delta^2}\}$ es $K$-linealmente independiente, por lo que verifica (2.8).

Usando (2.8) tenemos que

$$n(v) = \sigma(v, v) = \sigma(u + au^{\delta}, u + au^{\delta}) + (b + \bar{b})\sigma(u, u^{\delta^2}) = n(u + au^{\delta}) - (b + \bar{b})n(u^{\delta}),$$

por lo que es factible elegir $b$ para que $n(v) = 0$.

Por otro lado,

$$\sigma(v^\delta, v) = \sigma(u^\delta, u) + (\bar{a} - a)n(u^\delta),$$

por lo que también podemos escoger el elemento $a$ para que $\sigma(v^\delta, v) = -1$. Ahora bien, por la definición de $\sigma$, $\sigma(v^\delta, v) = \frac{1}{2}f(v^\delta, v) = -f(v^\delta, v)$ y $\sigma(v^\delta, v^\delta) = \frac{1}{2}f(v^\delta, v^\delta) = -f(v^\tau - v, v^\tau - v) = -2f(v, v) + 2f(v^\delta, v) = -f(v^\delta, v)$, de lo que concluimos que

$$\sigma(v^\delta, v) = n(v^\delta) = -1.$$

Además, $\sigma(v^\delta + v^{\delta^2}, v) = \sigma(v^\delta, v) + \sigma(v^{\delta^2}, v) = n(v^\delta) - n(v^\delta) = 0$. Queda demostrado entonces que podemos elegir un elemento $u$ para el cual la $K$-base $\{u, u^\delta, u^{\delta^2}\}$ de $K^\perp$ cumple (2.8) y (2.9).

Esta base nos proporciona el idempotente $e$. Sea $a = \Phi(u, u^\delta, u^{\delta^2}) \in K$. Por los comentarios previos al teorema 1.11,

$$n(a) = a\bar{a} = \Phi(u, u^\delta, u^{\delta^2})\overline{\Phi(u, u^\delta, u^{\delta^2})} = \det(\sigma(u^{\delta^i}, u^{\delta^j}))\ i, j = 0, 1, 2;$$

sin embargo, de las ecuaciones (2.8) y (2.9) fácilmente se comprueba que este determinante vale 1 y, en consecuencia, $n(a) = 1$. Definimos

$$e = 1 + \bar{a}u^{\delta^2}.$$

Como la norma y la traza de $\bar{a}u^{\delta^2}$ son nulas y además este elemento queda fijo por $\tau$, el lema 2.11 nos dice que $e$ es un idempotente de $C_\tau$. Sea $(C', \tau')$ el par asociado a $e$. Por (2.8) se tiene:

$$(u^\delta)^{\tau'} = f(e, u^\delta)e - u^\delta * e = (u^\delta + u^{\delta^2})(1 - \bar{a}u^{\delta^2}). \qquad (2.10)$$

Sin embargo, por un lado

$$u^{\delta^2}(\bar{a}u^{\delta^2}) = a(-\sigma(u^{\delta^2}, u^{\delta^2}) + u^{\delta^2} \times u^{\delta^2}) = 0$$

y por otro, puesto que, por la alternancia de $\Phi$, $u^\delta \times u^{\delta^2}$ es ortogonal respecto de $\sigma$ a $u^\delta$ y $u^{\delta^2}$, por (2.8) se tiene que $u^\delta \times u^{\delta^2} = bu^{\delta^2}$ para algún $b \in K$. Además, por (2.9), $\bar{b} = \sigma(u, u^\delta \times u^{\delta^2}) = \Phi(u, u^\delta, u^{\delta^2}) = a$. De lo que concluimos que $u^\delta \times u^{\delta^2} = \bar{a}u^{\delta^2}$. Volviendo a la ecuación (2.10):

$$\begin{aligned} (u^\delta)^{\tau'} &= (u^\delta + u^{\delta^2}) - u^\delta(\bar{a}u^{\delta^2}) = (u^\delta + u^{\delta^2}) - u^\delta \times (\bar{a}u^{\delta^2}) \\ &= (u^\delta + u^{\delta^2}) - a(u^\delta \times u^{\delta^2}) = (u^\delta + u^{\delta^2}) - a\bar{a}u^{\delta^2} = u^\delta \end{aligned}$$

muestra que $u^\delta$ es un elemento fijo por $\tau'$. Notemos, por último, que $f(u^\delta, e) = 0$ y $n(u^\delta) = -1$, por lo que $\mathcal{F}e + \mathcal{F}u^\delta$ es una subálgebra de composición split de $C'$ de dimensión 2 cuyos elementos son fijos por $\tau'$. Si $(\tau' - id)^2$ fuese no nulo entonces quedaría demostrado el enunciado; en caso contrario, aplicando el lema 2.12 concluimos la demostración.

QED

Con estos lemas podemos demostrar el análogo del teorema 2.9 para cuerpos de característica 3.

**Teorema 2.14.** *Sea $C$ un álgebra de Cayley-Dickson sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ de característica 3 y $\tau$ un automorfismo de $C$ que verifica $\tau^3 = id$. Entonces o bien $C_\tau$ es paraHurwitz o bien un álgebra de Okubo. En este último caso, $C$ es split y existe un automorfismo $\tilde{\tau}$ de $C$ de tal modo que $(\tilde{\tau} - id)^3 = 0 \neq (\tilde{\tau} - id)^2$, $\tilde{\tau}$ fija los elementos de una subálgebra de composición split de dimensión 2, y $C_{\tilde{\tau}}$ es isomorfo a $C_\tau$.*

*Demostración.* Si $\tau$ fuese la identidad entonces $C_\tau$ sería paraHurwitz y el teorema quedaría demostrado. En lo que sigue supondremos que $\tau \neq id$. En vista del lema 2.10 $C$ es split. Si $\tau$ fijase los elementos de una subálgebra de composición de dimensión 2 entonces, por los lemas previos, $C_\tau$ sería isomorfa a $C_{\tilde\tau}$ para un cierto automorfismo $\tilde\tau$ de grado 3 de $C$ que fija los elementos de una subálgebra $K$ de composición split de dimensión 2 y que además verifica $(\tilde\tau - id)^3 = 0 \neq (\tilde\tau - id)^2$. El polinomio mínimo de $\tilde\tau$ en $K^\perp$ es $T^3 - 1$ por lo que, aplicando la proposición 2.7, $C_\tau$ sería un álgebra de Okubo y el teorema quedaría demostrado también en este caso.

Resta examinar qué ocurre si $\tau \neq id$, $C$ es split y no existe ninguna subálgebra de composición de dimensión 2 contenida en $S(1,\tau)$. En tal caso $W = (\mathcal{F}1)^\perp \cap S(1,\tau)$ ha de ser totalmente isótropo y, por lo tanto, $\dim W \leq 3$. Ahora bien, $(\tau - id)^3 = 0$ implica que $\dim W = 3$. Por los teoremas de Witt, podemos encontrar un subespacio $W'$ de $(\mathcal{F}1)^\perp$ totalmente isótropo para el cual $(\mathcal{F}1)^\perp = W \oplus W' \oplus \mathcal{F}a$, donde $a$ es un elemento ortogonal a $W \oplus W'$ y $n(a) \neq 0$. Para este elemento $a$ tenemos que $a^\tau = w + w' + \alpha a$ con $w \in W, w' \in W'$ y $\alpha \in \mathcal{F}$. Por ser $\tau$ una isometría y $W$ $\tau$-invariante, $f(w', W) = f(a^\tau, W) = f(a, W) = 0$ y, en consecuencia, $w' = 0$ y $a^\tau = w + \alpha a$. Como $\tau^3 = id$ entonces $\alpha = 1$ y $a^\tau = w + a$. Ahora bien, puesto que $f(1, W) = f(W, W) = 0$, los cuadrados de elementos de $W$ son nulos, por lo que $(wa)^\tau = w(w+a) = wa$. Por último, como $f(1, wa) = 0 = f(wa, a)$, podemos concluir que $wa \in W$.

Consideramos el elemento

$$e = 1 + \frac{wa}{n(a)}.$$

Por tener el elemento $wa/n(a)$ norma y traza nulas y mantenerse fijo por $\tau$, el lema 2.11 nos asegura que $e$ es idempotente en $C_\tau$. Sea $(C', \tau')$ el par asociado a $e$. Como $a$ es ortogonal a $e$ tenemos que:

$$a^{\tau'} = f(a,e)e - a * e = -a * e = a^\tau(1 - \frac{wa}{n(a)}) = (a + w)(1 - \frac{wa}{n(a)}) = a.$$

Así, $\mathcal{F}e + \mathcal{F}a$ es una subálgebra de composición de dimensión 2 de $C'$ cuyos elementos son fijos por $\tau'$ y $C'_{\tau'}$ es isomorfa a $C_\tau$. Si $\tau' = id$ entonces

$C_\tau$ es paraHurwitz; en otro caso, por la primera parte de la demostración, concluiríamos que $C_\tau$ es un álgebra de Okubo.

QED

# 5. Descripción de las álgebras $C_\tau$

En esta sección demostraremos los teoremas 2.1 y 2.2, los cuales presentan una posible descripción de las álgebras $C_\tau$.

## 5.1. Demostración del teorema 2.1

Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo de característica $\neq 3$. En vista de los teoremas 2.6, 2.8 y 2.9, para demostrar el teorema 2.1 basta únicamente probar que si $C$ es un álgebra de Cayley-Dickson sobre $\mathcal{F}$ y $\tau$ un automorfismo de $C$ con dim $S(1,\tau$ entonces existen $\beta, \gamma \in \mathcal{F}$ tales que $C = C(-1,\beta,\gamma)$ y $C_\tau$ es isomorfa al álgebra construida en el enunciado del teorema.

Por la proposición 2.4 y el teorema 2.9 sabemos que $S(1,\tau)$ es una subálgebra, $H$, de cuaternios de $C$. Sea $v$ un elemento ortogonal a $H$ y $\gamma = -n(v) \neq 0$. Por el proceso de Cayley-Dickson $C = H \oplus vH$. Como $H^\perp$ es $\tau$-invariante se tiene que $v^\tau = v\omega$ para algún $\omega \in H$ y,como $v^{\tau^2+\tau+id} = 0$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Si $\omega$ y 1 fuesen linealmente dependientes entonces $\omega = \alpha 1$ y $v^2 = (v^2)^\tau = (v^\tau)^2 = \alpha^2 v^2$, por lo que $\omega^2 = 1$; sin embargo, $\omega = -1-\omega^2 = -2$ y, así, $1 = \omega^2 = (-2)^2 = 4$, lo que contradice el que la característica de $\mathcal{F}$ sea $\neq 3$. En consecuencia $\{1,\omega\}$ son linealmente independientes y así, por la ecuación (1.7), tenemos que $n(w) = 1$ y $t(w) = -1$. En particular $\mathcal{F}1 + \mathcal{F}\omega$ es una subálgebra de composición de dimensión 2 del tipo $K(-1)$ y, por el proceso de Cayley-Dickson, $H = Q(-1,\beta)$ para algún elemento $0 \neq \beta \in \mathcal{F}$ y $C = C(-1,\beta,\gamma)$.

Consideramos la aplicación $S : x \mapsto \bar{x}^\tau$ y una base de $C$ definida por $x_0 = 1, x_1 = \omega$, $x_2$ ortogonal a $x_0$ y $x_1$ con $n(x_2) = -\beta$, $x_3 = x_1x_2$, $x_4 = v$ y $x_{i+4} = x_4x_i$ $i = 1, 2, 3$. En esta base es sencillo comprobar que la aplicación $S$ es la del enunciado del teorema 2.1 y que el producto en $C_\tau$ es de la forma $x * y = x^S y^{S^{-1}}$, con lo que queda demostrado el teorema.

Si la característa del cuerpo es distinta de dos entonces puede cambiarse esta base por otra definida de igual manera excepto que $x_1 = \gamma q$ con $q = 1 + 2\omega$ $(q^2 = -3)$. En esta nueva base la aplicación $T : x \mapsto \bar{x}^\tau$ coincide con la del teorema 1.20.

**Nota:** Si $\mathcal{F}$ contiene una raíz 3-primitiva de la unidad entonces $K(-1)$ es split, por lo que $C$ es el álgebra de Cayley-Dickson split y los valores $\beta, \gamma$ no representan nada. Puesto que tanto $C$ como $S$ están unívocamente determinados, sólo existe una única, salvo isomorfismos, álgebra $C_\tau$ de Okubo sobre este cuerpo, lo que coincide con el resultado del corolario al teorema 2.9.

## 5.2. Demostración del teorema 2.2

Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo de característica 3. En vista de los teoremas 2.6, 2.8 y 2.14, para demostrar el teorema 2.2 basta probar que si $C$ es el álgebra de Cayley-Dickson split y $\tau$ es un automorfismo de $C$ que fija los elementos de una subálgebra $K$ de composición split de dimensión 2 y que además satisface que $(\tau - id)^3 = 0 \neq (\tau - id)^2$ entonces el álgebra $C_\tau$ es isomorfa al álgebra definida por la tabla 3.

Sea $C$ una tal álgebra y $\tau$ un tal automorfismo. Como $K$ es split entonces $K = \mathcal{F}e_1 + \mathcal{F}e_2$ con $e_i$ idempotentes de norma cero que suman la unidad de $C$. Al fijar $\tau$ los idempotentes $e_i$, los subespacios $U$ y $V$ de la descomposición de Peirece son $\tau$-invariantes. Como en la demostración de la proposición 2.7

podemos tomar una base $\{u, u^\tau, u^{\tau^2}\}$ de $U$; sin embargo, al no ser necesariamente $\mathcal{F}$ algebraicamente cerrado, esta base no tiene por qué poder elegirse como parte de una base canónica. Sea $\alpha = f(u, u^\tau u^{\tau^2}) = f(u, u * u)$, donde $*$ denota el producto en $C_\tau$. Por la nodegeneración de $f$, $\alpha$ es no nulo. Definimos:

$$\begin{array}{lll} u_1 = u, & u_2 = u^\tau, & u_3 = \frac{1}{\alpha}u^{\tau^2}, \\ v_1 = u_2u_3, & v_2 = v_1^\tau, & v_3 = \alpha v_1^{\tau^2}. \end{array}$$

Es sencillo comprobar que la base $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ es una base canónica de $C$. Consideramos la siguiente base:

$$\begin{array}{lll} x_{01} = -e_1, & x_{02} = -e_2, & \\ x_{10} = -u_1, & x_{11} = -u_1^\tau, & x_{12} = -u_1^{\tau^2}, \\ x_{20} = -v_1, & x_{21} = -v_1^{\tau^2}, & x_{22} = -v_1^\tau, \end{array}$$

para la cual $f(x_{ij}, x_{pq}) = \delta_{i(-p)}\delta_{j(-q)}$ donde $\delta_{ij}$ es la delta de Kronecker. Para calcular su tabla de multiplicación basta observar que

$$\begin{array}{ll} u_1^{\tau^i}v_1^{\tau^j} = -\delta_{ij}e_1, & v_1^{\tau^j}u_1^{\tau^i} = -\delta_{ij}e_2, \\ u_1^{\tau^i}u_1^{\tau^j} = \alpha\epsilon_{ijk}v_1^{\tau^k}, & v_1^{\tau^i}v_1^{\tau^j} = \frac{1}{\alpha}\epsilon_{ijk}u_1^{\tau^k}, \end{array}$$

donde $\epsilon_{ijk}$ denota el tensor totalmente antisimétrico con $\epsilon_{123} = 1$. Una comprobación directa, usando las fórmulas anteriores, demuestrá que la tabla de multiplicación de los $x_{ij}$ se corresponde con la tabla 3. Este argumento muestra también cómo ver las álgebras definidas por la tabla 3 como álgebra $C_\tau$. Basta tomar una base canónica de $C$ y definir el siguiente automorfismo:

$$\begin{array}{lll} e_i^\tau = e_i & & \\ u_1^\tau = u_2, & u_2^\tau = \alpha u_3, & u_3^\tau = \frac{1}{\alpha}u_1, \\ v_1^\tau = v_2, & v_2^\tau = \frac{1}{\alpha}v_3, & v_3^\tau = \alpha v_1. \end{array} \tag{2.11}$$

## 6. Algebras $C(\alpha)$

Sobre cuerpos de característica distinta de dos y tres los teoremas 1.24 y 1.25 de Elduque y Myung clasifican todas las formas de las álgebras paraHurwitz y Okubo. Para cuerpos de característica dos es posible la extensión de estos resultados; sin embargo, la característica tres escapa a estos planteamientos. Como hemos visto, sobre cuerpos de característica 3 cualquier álgebra de Okubo con idempotentes no nulos es una $C(\alpha)$; el propósito de esta sección es precisamente dar un criterio de isomorfía entre las distintas $C(\alpha)$.

Sea $(A,*)$ un álgebra de composición con forma bilineal asociativa, es sencillo comprobar a partir de (1.16) y (1.17) que, por tener $\mathcal{F}$ característica 3, la aplicación $g(x) = f(x, x * x)$ verifica $g(x+y) = g(x) + g(y)$ y además $g(\lambda x) = \lambda^3 g(x)$ para cualquier $x$ en $A$ y $\lambda$ en $\mathcal{F}$. En particular, esta aplicación queda determinada por sus valores en una base de $A$ y, además, $g(A) = \{g(x) \mid x \in A\}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathcal{F}^3$. Mirando las álgebras $C(\alpha)$ como álgebras $C_\tau$ con $\tau$ como en (2.11) tenemos que

$$\begin{aligned} &g(e_1) = 1 = g(e_2) \\ &g(u_1) = g(u_2) = \alpha,\ g(u_3) = \tfrac{1}{\alpha^2} = \tfrac{1}{\alpha^3}\alpha \\ &g(v_1) = g(v_2) = \tfrac{1}{\alpha} \text{ y } \ g(v_3) = \alpha^2 = \alpha^3\tfrac{1}{\alpha}; \end{aligned} \tag{2.12}$$

y, en consecuencia, $g(\langle e_1, e_2\rangle) = \mathcal{F}^3$, $g(U(e_1)) = \mathcal{F}^3\alpha$, $g(V(e_1)) = \mathcal{F}^3\frac{1}{\alpha}$; por lo tanto, $g(C(\alpha)) = \mathcal{F}^3(\alpha)$ es un cuerpo extensión de $\mathcal{F}^3$ por $\alpha$.

Sea $(A,*)$ un álgebra de composición de dimensión 8 con forma bilineal asociativa y $e$ un idempotente de tal modo que el automorfismo $\tau$ del par $(C,\tau)$ que proporciona $e$ fija los elementos de una subálgebra split, $K = \mathcal{F}e_1 + \mathcal{F}e_2$, de composición de dimensión 2 de $C$ y además $(\tau - id)^2 \neq 0 = (\tau - id)^3$. Según la demostración del teorema 2.2, para hallar un $\alpha$ que represente a $(A,*)$ como un álgebra $C(\alpha)$ basta elegir $u \in U(e_1)$ con $\{u, u^\tau, u^{\tau^2}\}$ linealmente independientes y tomar $g(u)$ como $\alpha$. Si en lugar de $u$ elegimos $\lambda u$ entonces conseguimos $\lambda^3\alpha$ en lugar de $\alpha$, por lo que

$$C(\alpha) \cong C(\lambda^3\alpha) \tag{2.13}$$

para cualquier elemento $\lambda$ no nulo de $\mathcal{F}$. Cambiando los papeles de $e_1$ y $e_2$ se consigue $\frac{1}{\alpha}$ en lugar de $\alpha$ y, en consecuencia,

$$C(\alpha) \cong C(\frac{1}{\alpha}) \cong C(\alpha^3 \frac{1}{\alpha}) = C(\alpha^2). \tag{2.14}$$

Veamos otra forma alternativa de encontrar $\alpha$. Consideramos $x \in K^\perp$. Si $\circ$ denota el producto en $C$, el elemento $e_2 * x = e_1 \circ (-x^{\tau^2})$ pertenece a $U(e_1)$ por lo que, en vista de (2.12), tendremos que $g(e_2 * x) \in \mathcal{F}^3\alpha$. Si $g(e_2 * x)$ es no nulo entonces (2.13) nos dice que podemos elegirlo en lugar de $\alpha$.

**Lema 2.15.**
*Sean $\alpha, \lambda \in \mathcal{F}$ con $\alpha \neq 0$ y $\lambda^3$, entonces $C(\alpha) \cong C(\alpha - \lambda^3)$.*

*Demostración.* Primero demostraremos el lema para $\lambda = 1$. Consideremos $C(\alpha)$ como $C_\tau$, con $\tau$ como en (2.11). Sean $u = \frac{1}{\alpha}u_1 + \frac{1}{\alpha}u_2 + u_3$, $v = v_1 + v_2 + \frac{1}{\alpha}v_3$ y $e = 1 + u + v$. Los elementos $u, v$ qudan fijos por $\tau$ y, además, $(\mathcal{F}u + \mathcal{F}v)^2 = 0$, por lo que, en vista del lema 2.11, $e$ es un idempotente de $C(\alpha)$. Sea $(C', \tau')$ el par que proporciona este idempotente. Si $a = e_1 + v_2 - v_1$ entonces $f(a, e) = 1$ y $f(a, a) = 0$, por lo que $K = \mathcal{F}e + \mathcal{F}a$ es una subálgebra de composición split de dimensión dos de $C'$ cuyos elementos son fijados por $\tau'$, y $a$ es un idempotente de norma cero en $C'$. Puesto que $\alpha \neq 0$ y $1$, se tiene que $v_1^{(\tau')^2 + \tau' + id} = (1 - \frac{1}{\alpha})(u + v) \neq 0$. Consideramos $x = \alpha u_3 - v_3 \in K^\perp$. Este elemento verifica que $a * x = (e_2 + v_2 - \frac{1}{\alpha}v_3)(\alpha v_2 - u_2) = \alpha v_2 + e_2 + u_1$ y que $g(a * x) = g(e_2) + g(u_1) + \alpha^3 g(v_2) = 1 + \alpha + \alpha^2 = (\alpha - 1)^2$. Por el comentario previo al lema y la igualdad 2.14, esto nos proporciona

$$C(\alpha) \cong C((\alpha - 1)^2) \cong C(\alpha - 1),$$

lo que demuestra el lema en el caso $\lambda = 1$. El caso general se sigue de los siguientes isomorfismos:

$$C(\alpha - \lambda^3) = C(\lambda^3 \left(\frac{1}{\lambda^3}\alpha - 1\right)) \cong C(\frac{1}{\lambda^3}\alpha - 1) \cong C(\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 \alpha) \cong C(\alpha).$$

QED

El siguiente teorema da el criterio de isomorfía:

**Teorema 2.16.** *Dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{F}$ no nulos se tiene que $C(\alpha_1)$ es isomorfa a $C(\alpha_2)$ si y sólo si $\mathcal{F}^3(\alpha_1) = \mathcal{F}^3(\alpha_2)$.*

*Demostración.* El directo es obvio, pues si $C(\alpha_1)$ es isomorfa a $C(\alpha_2)$ entonces $\mathcal{F}^3(\alpha_1) = g(C(\alpha_1)) = g(C(\alpha_2)) = \mathcal{F}^3(\alpha_2)$ y se tiene la tesis. Supongamos que $\mathcal{F}^3(\alpha_1) = \mathcal{F}^3(\alpha_2)$. Si $\alpha_1$ pertence a $\mathcal{F}^3$ entonces también $\alpha_2$, por lo que, en virtud de (2.13), ambas álgebras son isomorfas al álgebra de pseudooctoniones $C(1)$ y, por lo tanto, isomorfas entre sí. Pensemos, pues, que ni $\alpha_1$ ni $\alpha_2$ pertenecen a $\mathcal{F}^3$. En tal caso $\alpha_2 = \lambda_0^3 + \lambda_1^3\alpha_1 + \lambda_2^3\alpha_1^2$ para ciertos $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}$ con $\lambda_1$ o $\lambda_2$ no simultáneamente nulos. Si $\lambda_2 = 0$ entonces, usando (2.13) y el lema anterior,

$$C(\alpha_2) = C(\lambda_0^3 + \lambda_1^3\alpha_1) \cong C(\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^3 + \alpha_1) \cong C(\alpha_1).$$

Si $\lambda_2 \neq 0$ entonces, denotando $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_2}$ $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} C(\alpha_2) &\cong C(\mu_0^3 + \mu_1^3\alpha_1 + \alpha_1^2) \cong C((\alpha_1 - \mu_1^3)^2 + (\mu_0 - \mu_1^2)^3) \\ &\cong C((\alpha_1 - \mu_1^3)^2) \cong C(\alpha_1 - \mu_1^3) \cong C(\alpha_1). \end{aligned}$$

QED

Este teorema explica cual es la consecuencia de añadir como hipótesis en el teorema 1.21 el que el cuerpo sea perfecto. En general, dada un álgebra $A$

de composición con forma bilineal asociativa y con idempotentes no nulos, por el teorema 2.2, $A$ es isomorfa o bien a un álgebra paraHurwitz o bien a un álgebra $C(\alpha)$ con $\alpha \in \mathcal{F}$. En este último caso, si $\mathcal{F}$ es perfecto entonces $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}$, por lo que $\mathcal{F}^3(\alpha) = \mathcal{F} = \mathcal{F}^3(1)$ y así el teorema anterior nos dice que $C(\alpha) \cong C(1)$; es decir, la única álgebra de Okubo que puede aparecer es la de pseudooctoniones.

# Capítulo 3

# Algebras de grado dos

Un álgebra se dice de grado dos si ésta es la mayor de las dimensiones de sus subálgebras monógenas.

La ecuación (1.7) muestra que las álgebras Hurwitz, al igual que el resto de las álgebras estándar, poseen grado 2. También es esto cierto para las álgebras de Okubo ((2.4) con $y = x$ y $z = x * x$). De este modo, los ejemplos más destacados de álgebras de composición aparecen englobadas bajo un mismo concepto.

En general, las álgebras de composición de dimensión infinita no han sido suficientemente estudiadas y no se conocen demasiadas propiedades que, al imponérselas a un álgebra de composición, obliguen a su dimensión a ser finita. Estos problemas provienen de las álgebras absolutamente valuadas, donde una vez determinado que el valor absoluto procede de una forma bilineal (no siempre es así [Rod]) se obtiene un álgebra de composición de dimensión posiblemente infinita. En este orden de ideas se sitúan los trabajos de [Cu-Rod 95, El 83, El 87, El 90].

En este capítulo mostraremos que, sobre cuerpos de característica $\neq 2$ y 3 y con más de cinco elementos, toda álgebra de composición de dimensión arbitraria y grado dos es o estándar o una forma de un álgebra paraHurwitz de dimensión dos o un álgebra de Okubo.

Resultados análogos para álgebras absolutamente valuadas, y que han inspirado este capítulo, han sido obtenidos por Rodríguez-Palacios [Rod 94].

Un álgebra se dice de potencias 3-asociativas si sus elementos verifican la igualdad

$$xx^2 = x^2x. \tag{3.1}$$

Esta identidad puede considerarse como una debilitación de la ley flexible y, por lo tanto, es verificada por las álgebras Hurwitz, paraHurwitz y Okubo. Aunque, en general, la identidad flexible no es consecuencia de (3.1), sin embargo, esto se torna cierto para álgebras de composición de dimensión finita. Usando resultados sobre álgebras de composición de grado dos, demostraremos que un álgebra de dimensión finita, sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y 3, que satisfaga (3.1) o bien es Hurwitz o bien posee una forma bilineal asociativa. Por último ampliaremos el teorema 1.26 a característica tres.

## 1. Algebras de dimensión dos

La estructura de las álgebras de composición de dimensión dos nos dará la llave de la clasificación de las álgebras de grado dos. El siguiente resultado, probado por Petersson [Pet 71] para cuerpos de característica $\neq 2$, determina tales álgebras:

**Proposición 3.1 (Petersson).** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 2 sobre un cuerpo arbitrario. Podemos dotar a $A$ de un nuevo producto $x \circ y$ de tal modo que $(A, \circ)$ sea un álgebra Hurwitz con involución estándar $x \mapsto \bar{x}$ y el producto en $A$ se corresponda con uno de los siguientes:*

I) $xy = x \circ y$

II) $xy = \bar{x} \circ y$

III) $xy = x \circ \bar{y}$

IV) $xy = u \circ \bar{x} \circ \bar{y}$ *con* $n(u) = 1$.

*Demostración.* Sea $v$ un elemento de norma no nula. Denotemos por $\diamond$ al producto del álgebra $(A, v)$ y por $e$ a su unidad. Por definici;on $xy = x^{\varphi} \diamond y^{\psi}$ para ciertas isometrías $\varphi$ y $\psi$. Si denotamos por $\tilde{L}_x$ al operador de multiplicación a izquierda por $x$ en $(A, v)$ entonces $\varphi = \varphi' \tilde{L}_{e^{\varphi}}$ y $\psi = \psi' \tilde{L}_{e^{\psi}}$ para ciertas isometrías $\varphi'$ y $\psi'$ con $e^{\varphi'} = e = e^{\psi'}$. Es sencillo comprobar que las únicas isometrías $\varphi'$ y $\psi'$ que fijan a $e$ son la identidad y la involución estándar $J$, por lo que $xy$ se puede expresar mediante una de las siguientes fórmulas:

$$\text{I) } u \diamond x \diamond y \quad \text{II) } u \diamond x^J \diamond y \quad \text{III) } u \diamond x \diamond y^J \quad \text{o} \quad \text{IV) } u \diamond x^J \diamond y^J$$

para un cierto $u$ con $n(u) = 1$. El apartado IV) se corresponde con el del enunciado. En los tres primeros casos $u$ es o bien unidad o bien unidad a un lado, por lo que si en lugar de $v$ hubiésemos elegido $u$ al inicio de la demostración, entonces $xy$ se expresaría como

$$\text{I) } x \circ y \qquad \text{II) } \bar{x} \circ y \qquad \text{o} \qquad \text{III) } x \circ \bar{y}$$

donde $\circ$ denota el producto de $(A, u)$ y $x \mapsto \bar{x}$ su involución estándar.

QED

**Proposición 3.2.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 2 sobre un cuerpo arbitrario. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *$A$ es conmutativa.*

ii) *A es flexible.*

iii) *A es de potencias* 3*-asociativas.*

iv) *El producto en A corresponde a uno de los apartados* I) *o* IV) *de la proposición 3.1.*

v) *A es o bien Hurwitz o bien una forma de un álgebra paraHurwitz.*

*Demostración.* Las implicaciones i)$\Rightarrow$ii) y ii)$\Rightarrow$iii) son inmediatas. Sea $A$ de potencias 3-asociativas. Para el producto del apartado II) de la proposición 3.1 tenemos que $x^2x = n(x)x$ mientras que $xx^2 = n(x)\bar{x}$, lo que imposibilita que este producto sea de potencias 3-asociativas. Análogamente le ocurre al producto del apartado III). Sin embargo, es inmediato comprobar que los productos $xy$ de los apartados I) y IV) sí son de potencias 3-asociativas.

Respecto a la implicación iv) $\Rightarrow$ v), basta demostrar que al extender escalares las álgebras del apartado IV) son paraHurwitz. Sean $A, u$ y $x \circ y$ como en la proposición anterior y $\mathcal{F}$ algebraicamente cerrado. La única álgebra Hurwitz de dimensión dos sobre $\mathcal{F}$ es la split $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}$, por lo que podemos encontrar $v \in (A, \circ)$ con $n(v) = 1$ y $\bar{v}^3 = u$. $A$ con el nuevo producto $x * y = v \circ x \circ y$ es un álgebra Hurwitz con identidad $\bar{v}$ e involución estándar $x \mapsto x^J = \bar{v}^2 \circ \bar{x}$. Respecto de este nuevo producto tenemos que $xy = u \circ \bar{x} \circ \bar{y} = x^J * y^J$, por lo que $A$ es paraHurwitz.

QED

En lo que resta de capítulo el cuerpo base se supondrá siempre de característica $\neq 2$, por lo que en lugar de la forma bilineal $f(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y)$ consideraremos la forma

$$(x, y) = \frac{1}{2} f(x, y),$$

para la cual $n(x) = (x, x)$.

Conviene notar que si a un álgebra de composición de dimensión dos le exigimos, además de que sea de potencias 3-asociativas, la identidad $(x^2)^2 = x(xx^2)$, entonces únicamente obtenemos las Hurwitz. En efecto, por la proposición anterior basta ver que las álgebras del apartado IV) de la proposición 3.1 no satisfacen esta última identidad. Sea $xy = u \circ \bar{x} \circ \bar{y}$ el producto que aparece en ese apartado. La identidad $(x^2)^2 = x(xx^2)$ se tranforma, en términos de $\circ$, en $\bar{u} \circ x \circ x \circ x \circ x = n(x) u \circ \bar{x} \circ \bar{x}$ ó, equivalentemente, la potencia sexta, $x^6$, en $(A, \circ)$ de cualquier elemento $x$ vale $n(x)^3 u \circ u$. Para $x = e$ esto nos dice que $u \circ u = e$ y que, por lo tanto, $x^6 = n(x)^3 e$. Al considerar elementos ortogonales a $e$, esta última identidad se contradice con (1.7).

Puesto que para analizar las álgebras de grado dos pasaremos a un cuerpo algebraicamente cerrado, las proposiciones anteriores nos dicen que como subálgebras de composición monógenas únicamente aparecerán las estándar. Es sencillo observar que para los distintos tipos I-IV se tiene

$$\begin{array}{rl} \text{I)} & \text{Potencias asociativas.} \\ \text{II)} & x^2 x = n(x)x \text{ y } (x^2)^2 = n(x)x^2. \\ \text{III)} & xx^2 = n(x)x \text{ y } (x^2)^2 = n(x)x^2. \\ \text{IV)} & xx^2 = n(x)x = x^2 x. \end{array} \tag{3.2}$$

Estas son las identidades que usaremos para abordar la clasificación de las álgebras de grado 2.

## 2. Algebras de grado dos

Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión arbitraria y grado dos sobre un cuerpo $\mathcal{F}$:

**Lema 3.3.** *Si $\mathcal{F}$ posee más de cinco elementos entonces $A_K = K \otimes_{\mathcal{F}} A$ es un álgebra de grado dos para cualquier extensión $K$ de $\mathcal{F}$.*

*Demostración.* Denotemos por $A \wedge A \wedge A$ el espacio generado linealmente por los elementos homogéneos de orden tres del álgebra de Grassmann sobre $A$. Puesto que el grado de $A$ es dos, en $A \wedge A \wedge A$ tenemos las siguientes identidades: $x \wedge x^2 \wedge xx^2 = 0$, $x \wedge x^2 \wedge x^2x = 0$ y $x \wedge x^2 \wedge x^2x^2 = 0$. Sobre cuerpos con más de cinco elementos también son identidades sus linealizaciones, las cuales pasan a $A_K \wedge A_K \wedge A_K$ y así $A_K$ tiene grado dos.

QED

La aplicación $(x, x^2)^2 - (x, x)^3$ se anula sólamente si el álgebra $\mathrm{alg}\langle x \rangle$ no es de composición de dimensión dos:

**Lema 3.4.** *Sea $(\ ,\ )$ una forma bilineal simétrica definida sobre un álgebra de dimensión arbitraria y $B$ un subespacio sobre el cual $(\ ,\ )$ es nodegenerada. Si $(x, x^2)^2 = (x, x)^3$ $\forall x \in B$ entonces $\dim B \leq 1$.*

*Demostración.* Sea $m \geq 1$ la dimensión de $B$. Las aplicaciones $n(x) = (x, x)$ y $q(x) = (x, x^2)$ de $B$ en $\mathcal{F}$ son polinómicas en $m$ variables y, por hipótesis, $n(x)^3 = q(x)^2$. El álgebra de polinomios en $m$ variables es un dominio de factorización única, en el cual las posibles factorizaciones del polinomio homogéneo de grado dos $n(x)$ son: $n(x)$ irreducible, $n(x) = p_1(x)p_2(x)$ o $n(x) = p(x)^2$, con $p(x), p_1(x), p_2(x)$ irreducibles lineales. En el primer caso, $n(x)$ irreducible, tenemos que $q(x)^2 = n(x)^3$, lo cual es imposible por la unicidad de la factorización. El mismo argumento es válido para el segundo caso. Respecto a la posibilidad $n(x) = p(x)^2$, linealizando se obtiene que $(x, y) = p(x)p(y)$, por lo que el núcleo de la forma lineal $p(x)$ está contenido en el radical de $(\ ,\ )$. Así, por la no degeneración de $(\ ,\ )$ en $B$, se tiene que

$\dim B = 1$.

QED

En lo que sigue supondremos que car$\mathcal{F} \neq 2$, $\mathcal{F}$ será algebraicamente cerrado y $\dim A > 1$. Sea $B$ un subespacio de dimensión finita $> 1$, para el cual la forma bilineal es no degenerada. Por el lema tenemos que el conjunto abierto en la topologia de Zariski $B' = \{x \in B \mid (x, x^2)^2 - (x, x)^3 \neq 0\}$ es no vacío y, por lo tanto, denso en $B$. Es inmediato comprobar a partir de las definiciones que el hecho de que alg$\langle x \rangle$ sea de uno de los tipos I-IV depende únicamente de identidades polinómicas en $x$ (algunas más de las mostradas en (3.2)) y que, como vimos en (1.15), alg$\langle x \rangle$ sólamente puede pertenecer a un tipo. Esto nos dice que $B'$ es la unión disjunta de cuatro conjuntos cerrados (y por lo tanto también abiertos) $B'_{\mathrm{I}}, \ldots, B'_{\mathrm{IV}}$ que se componen de los elementos de $B'$ que generan una subálgebra del tipo que los subindica. Puesto que en la topología de Zariski dos abiertos no vacíos tienen intersección no trivial, podemos concluir que las álgebras generadas por los distintos elementos de $B'$ son todas del mismo tipo. Por densidad, todos los elementos de $B$ satisfacen uno de los cuatro conjuntos de identidades I-IV que aparecen en (3.2). Como $B$ se puede ampliar para que contenga a cualquier elemento prefijado de $A$, se tiene que $A$ verifica el mismo conjunto de identidades y que ¡TODAS LAS SUBALGEBRAS DE COMPOSICION DE DIMENSION DOS DE $A$ SON DEL MISMO TIPO!

Analicemos los distintos casos. Empecemos con las álgebras de grado dos de potencias asociativas. En este caso, por el comentario posterior a la proposición 3.2, todas las subálgebras de composición de dimensión dos son Hurwitz. Linealizando la identidad (3.1) tenemos

$$[xy + yx, x] + [x^2, y] = 0. \tag{3.3}$$

Sea $e$ un idempotente con $n(e) = 1$, por ejemplo la unidad de una de las subálgebras de dimensión dos. Puesto que $A$ es de potencias asociativas, la descomposición de Peirce de $A$ respecto de $e$ es

$$A = A_0 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_1$$

con $A_i = \{x \in A \mid ex + xe = 2ix\}$ $i = 0, 1/2, 1$ [Sch].

**Proposición 3.5.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión arbitraria sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ y algebraicamente cerrado. Si $A$ es de potencias asociativas y de grado dos entonces $A$ es Hurwitz.*

*Demostración.* Consideremos la anterior descomposición de Peirce. En primer lugar veamos que $A_0 = 0$ y $A_1 = \{x \in A \mid xe = x = ex\}$. En efecto, dado $x_i \in A_i$ sustituimos $x \mapsto e, y \mapsto x_i$ en (3.3) para obtener $(1-2i)[e, x_i] = 0$, por lo que si $i \neq 1/2$ entonces $[e, x_i] = 0$. Para cualquier elemento $x$ de $A_0$ esto significa que $ex = 0$. En consecuencia, por el comentario posterior al lema 1.1, $A_0 = 0$; sin embargo,si $x \in A_1$ entonces se tiene que $xe = x = ex$.

Estudiemos el subespacio $A_{\frac{1}{2}}$. Linealizando la identidad del asociador $(x, x, x^2) = 0$ obtenemos

$$(y, y, x^2) + (y, x, yx + xy) + (x, y, yx + xy) + (x, x, y^2) = 0,$$

que con $x \in A_{\frac{1}{2}}, y = e$ proporciona

$$x^2 e = e(ex^2).$$

Puesto que, por (3.3) con $y = e$, $[e, x^2] = 0$ entonces se tiene que $ex^2 = e(ex^2)$. Simplificando $e$ queda $x^2 = ex^2 = x^2 e$ $\forall x \in A_{\frac{1}{2}}$. Esto nos dice que $x^2 \in A_1$ $\forall x \in A_{\frac{1}{2}}$.

Por otro lado, $(ex_{\frac{1}{2}}, x_1) = (x_{\frac{1}{2}}, x_1) = (x_{\frac{1}{2}}e, x_1)$ implica que $2(x_{\frac{1}{2}}, x_1) = (ex_{\frac{1}{2}} + x_{\frac{1}{2}}e, x_1) = (x_{\frac{1}{2}}, x_1)$, de donde $(A_{\frac{1}{2}}, A_1) = 0$.

Juntemos las dos ideas anteriores. Dado $x \in A_{\frac{1}{2}}$ con $n(x) \neq 0$, tenemos que $x^2 \in A_1$ y $(x, x^2) = 0$. Puesto que el grado de $A$ es dos, podemos concluir que $\mathrm{alg}\langle x \rangle = \mathcal{F}x + \mathcal{F}x^2$ es una subálgebra de composición de dimensión 2 que, por lo visto anteriormente, es Hurwitz. Sea $e_x$ la unidad de $\mathrm{alg}\langle x \rangle$. Observemos que $e_x x^2 = x^2 = ex^2$, por lo cual $(e_x - e)x^2 = 0$; sin embargo, como $n(x^2) \neq 0$ entonces $e_x = e$ y $ex = x = xe$, lo que contradice el hecho de que $x$ se haya tomado en $A_{\frac{1}{2}}$. Como consecuencia, $n(x) = 0 \ \forall x \in A_{\frac{1}{2}}$. Como $A_{\frac{1}{2}}$ también es ortogonal a $A_1$, la no degeneración de $( \ , \ )$ obliga a que $A_{\frac{1}{2}} = 0$ y a que $A = A_1 = \{x \in A \mid ex = x = xe\}$ sea un álgebra Hurwitz.

QED

**Proposición 3.6.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión arbitraria sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ con más de tres elementos, se tiene*

i) *Si para todo $x \in A$ se verifica $x^2 x = n(x)x$ y $(x^2)^2 = n(x)x^2$, entonces $A$ es estándar de tipo II.*

ii) *Si para todo $x \in A$ se verifica $xx^2 = n(x)x$ y $(x^2)^2 = n(x)x^2$, entonces $A$ es estándar de tipo III.*

*Demostración.* Basta demostrar uno de los puntos ya que el otro se obtiene pasando al álgebra opuesta. Demostremos, por ejemplo, el apartado ii). La restricción en $\mathcal{F}$ nos permite linealizar las identidades del enunciado:

$$\begin{aligned} yx^2 + x(xy + yx) &= 2(x, y)x + n(x)y \\ (xy + yx)x^2 + x^2(xy + yx) &= n(x)(xy + yx) + 2(x, y)x^2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sea $e$ un idempotente de norma 1, por ejemplo $x^2/n(x)$ donde $x$ es cualquier elemento con $n(x) \neq 0$. Sustituyendo $x = e$, $y \perp e$ en las identidades anteriores queda

$$ye + e(ey + ye) = y \tag{3.5}$$

$$y(R_e + L_e)^2 = y(R_e + L_e).$$

Por lo tanto, el operador $R_e + L_e$ descompone, como suma de subespacios fundamentales, al subespacio ortogonal a $e$ de la forma $S(0) \oplus S(1)$. Notemos que si $x_0 \in S(0)$ entonces, por (3.5), $x_0 e = x_0 = -ex_0$; así, dado $x_1 \in S(1)$

$$(x_0, x_1) = \begin{cases} (x_0 e, x_1 e) = (x_0, x_1 e) \\ \\ (ex_0, ex_1) = -(x_0, ex_1) \end{cases}$$

y, por lo tanto, $(x_0, x_1) = (x_0, ex_1 + x_1 e) = 0$, es decir, $S(0) \perp S(1)$. Ahora bien, poniendo $x = x_1$, $y = e$ en (3.4) obtenemos

$$x_1 x_1^2 + x_1^2 x_1 = n(x_1) x_1.$$

De aquí, como $x_1 x_1^2 = n(x_1) x_1$, se sigue que $x_1^2 x_1 = 0$ y $n(x_1) = 0$. Por la no degeneración de la forma bilineal, concluimos que $S(1) = 0$ y $A = \mathcal{F}e \oplus S(0)$. Puesto que claramente $L_e$ y $R_e$ son biyectivos, pasando a $(A, e)$ se tiene la proposición.

QED

Por último,

**Proposición 3.7.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión arbitraria, sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ de característica $\neq 2, 3$, de tal modo que $xx^2 = n(x)x = x^2 x$ $\forall x \in A$, entonces la forma bilineal es asociativa.*

*Demostración.* Mediante una extensión de escalares podemos suponer que $\mathcal{F}$ es algebraicamente cerrado. Sea $x$ un elemento de norma no nula. Como

$xx^2 = n(x)x = x^2x$ entonces

$$(xy, x) = \frac{n(x)}{n(x)}(xy, x) = \frac{1}{n(x)}(xy, x^3) = (y, x^2),$$

y análogamente

$$(yx, x) = (y, x^2) = (xy, x).$$

Por densidad, esta igualdad es cierta $\forall x, y \in A$. Linealizándola obtenemos

$$\begin{aligned} (xz + zx, y) &= (zy, x) + (xy, z) \\ (xz - zx, y) &= (x, zy - yz). \end{aligned}$$

Restando estas dos igualdades,

$$2(zx, y) = (xy, z) + (x, yz).$$

Haciendo el cambio cíclico $x \mapsto y, y \mapsto z, z \mapsto x$ obtenemos

$$2(xy, z) = (yz, x) + (y, zx).$$

Multiplicando esta última igualdad por 2 y sumándole la anterior,

$$3(xy, z) = 3(yz, x).$$

Simplificando por 3, ya que car$F \neq 3$ se obtiene el enunciado.

QED

Teniendo en cuenta el teorema 2.1 y la proposición 1.17, queda demostrado el siguiente teorema:

**Teorema 3.8.** *Sea $A$ un álgebra de composición de grado dos sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ y 3 con más de cinco elementos, entonces $A$ tiene dimensión finita y es de una de las siguientes clases: un álgebra estándar, una forma de un álgebra paraHurwitz de dimensión dos o un álgebra de Okubo.*

## 3. Algebras de potencias 3-asociativas

En esta sección $A$ denotará un álgebra de composición de potencias 3-asociativas y dimensión finita ($> 1$) sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ de característica $\neq 2$. Puesto que al extender escalares a la clausura algebraica $\bar{\mathcal{F}}$ el álgebra resultante es nuevamente de potencias 3-asociativas, parece razonable suponer que $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}$. Usaremos de nuevo la notación $[x, y]$ para denotar el elemento $xy - yx$. Nuestro estudio partirá del siguiente lema [E-M 91] aplicado a $x$ y $x^2$:

**Lema 3.9.** *Sea $A$ un álgebra de composición y $x, y \in A$ dos elementos que conmutan entre sí, entonces*

$$n(x)y^2 + n(y)x^2 = 2(x, y)xy. \tag{3.6}$$

Este resultado se extiende a 3 elementos:

**Lema 3.10.** *En un álgebra de composición cualesquiera $x, y, z$ que conmuten entre sí cumplen*

$$(y, z)x^2 + n(x)yz - (y, x)xz - (z, x)xy = 0$$

Sustituyendo $y = x^2$ en (3.6) obtenemos

$$n(x)x^2x^2 + n(x)^2x^2 = 2(x, x^2)x^3 \tag{3.7}$$

Resultará más cómodo operar dentro de un conjunto suficientemente representativo y cuyos elementos tengan "buenas propiedades".

**Lema 3.11.** *El conjunto $S = \{x \in A \mid n(x)(x, x^2)[(x, x)^3 - (x, x^2)^2] \neq 0\}$ es denso en la topología de Zariski.*

*Demostración.* Por el lema 3.4 el conjunto $\{x \in A \mid (x,x)^3 - (x,x^2)^2 \neq 0\}$, al igual que $\{x \in A \mid n(x) \neq 0\}$, es un abierto no vacío y, por lo tanto, denso. En consecuencia, también $S_1 = \{x \in A \mid n(x) \neq 0 \neq (x,x)^3 - (x,x^2)^2\}$ es denso. Para ver que $S \neq \emptyset$ basta demostrar que $S_2 = \{x \in A \mid (x,x^2) \neq 0\} \neq \emptyset$. Dado $x \in S_1$ con $(x,x^2) = 0$, por (3.7) el elemento $a = -n(x)^{-1}x^2$ es idempotente, y así $(a,a^2) = (a,a) = 1$, lo que muestra que $S_2$ no puede ser vacío.

QED

**Nota.** Si $x \in S$ entonces $\dim \mathrm{alg}\langle x\rangle \geq 2$. En efecto, si sucediese lo contrario entonces $\dim \mathrm{alg}\langle x\rangle = 1$ y $\mathrm{alg}\langle x\rangle = \mathcal{F}e$ para algún elemento $e$ idempotente de norma 1. Ahora bien, $x = \alpha e$ implica que $n(x)^3 - (x,x^2)^2 = \alpha^6[n(e) - (e,e)^2] = 0$, lo que contradice que $x \in S$.

Los siguientes lemas nos resultarán de gran ayuda.

**Lema 3.12.** *Para todo $x \in S$ el subespacio $\langle x, x^2, x^3\rangle$ es conmutativo.*

*Demostración.* Usando (3.7) tenemos que $[x^2, x^3] = 0$ y sustituyendo $y = x^2$ en (3.3) obtenemos $[x, x^3] = 0$.

QED

**Lema 3.13.** *Si $\mathrm{alg}\langle x\rangle = \langle x, x^2, x^3\rangle$ para todo $x \in S$ entonces $A$ tiene grado dos.*

*Demostración.* Si $\mathrm{alg}\langle x\rangle \neq \langle x, x^2\rangle$ para algún $x \in S$, entonces $\dim \mathrm{alg}\langle x\rangle = 3$ y, en consecuencia, $\mathrm{alg}\langle x\rangle$ no es de composición y existe un elemento $0 \neq z \in \mathrm{alg}\langle x\rangle$ de tal modo que $(z, \mathrm{alg}\langle x\rangle) = 0$. Como $x \in S$, el conjunto $\{x, n(x)x^2 - (x,x^2)x, z\}$ es una base ortogonal de $\mathrm{alg}\langle x\rangle$. Puesto que, por el lema anterior,

$\mathrm{alg}\langle x\rangle$ es conmutativa, aplicando el lema 3.10 con $y = n(x)x^2 - (x,x^2)x$ tenemos que $2n(x)yz = 0$ y, por lo tanto, $n(y) = 0$ o, equivalentemente, $(x,x)^3 - (x,x^2)^2 = 0$; sin embargo, esto contradice el que $x \in S$. Concluimos que $\mathrm{alg}\langle x\rangle = \langle x, x^2\rangle$ $\forall x \in S$. Por densidad se tiene el lema.

QED

Podemos demostrar, ahora, que estas álgebras tienen grado dos.

**Proposición 3.14.** *Cualquier álgebra de composición de potencias 3-asociativas y dimensión finita sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ tiene grado dos.*

*Demostración.* Linealizando la ecuación (3.7) obtenemos

$$2(x,y)x^2x^2 + n(x)(xy+yx)x^2 + n(x)x^2(xy+yx)+$$

$$+4(x,y)n(x)x^2 + n(x)^2(xy+yx) =$$

$$2(y,x^2)x^3 + 2(x,xy+yx)x^3 + 2(x,x^2)(yx^2 + x(xy+yx)).$$

Sustituyendo $y = x^2$ y usando el lema 3.12,

$$(x,x^2)n(x)x^2 - (x,x^3)x^3 = (x,x^2)x^4 - n(x)x^2x^3. \tag{3.8}$$

Por otro lado, (3.6) con $y \mapsto x^3, x \mapsto x$ y $y \mapsto x^3, x \mapsto x^2$ da

$$\begin{aligned} n(x)x^3x^3 + n(x)^3x^2 &= 2(x,x^3)x^4 \\ n(x)^2x^3x^3 + n(x)^3x^2x^2 &= 2(x^2x^3)x^3x^2. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera igualdad por $n(x)$ y restándole la segunda,

$$n(x)^4x^2 - n(x)^3x^2x^2 = 2n(x)[(x,x^3)x^4 - (x,x^2)x^2x^3].$$

Sea $x \in S$, usando (3.7) y simplificando por $2n(x)$:

$$n(x)^3x^2 - n(x)(x,x^2)x^3 = (x,x^3)x^4 - (x,x^2)x^2x^3, \tag{3.9}$$

relación que por densidad es válida para cualquier elemento de $A$.

Sea $T = \{x \in S \mid (x, x^2)^2 - n(x)(x, x^3) \neq 0\}$. Si $T$ fuese vacío entonces, multiplicando (3.8) por $(x, x^2)$, (3.9) por $n(x)$ y restando ambas igualdades, obtendríamos

$$n(x)[(x, x^2)^2 - n(x)^3]x^2 = (x, x^2)[(x, x^3) - n(x)^2]x^3.$$

Ahora bien, simplificando por $x$ aparece que $x$ y $x^2$ son linealmente dependientes, lo que contradice la nota al lema 3.11; en consecuencia, $T \neq \emptyset$ y, por lo tanto, denso. Resolviendo, para elementos de $T$, el sistema formado por la ecuaciones (3.8) y (3.9) obtenemos que $x^4, x^2x^3 \in \langle x, x^2, x^3 \rangle$ $\forall x \in T$. Por otro lado, usando (3.6) también $x^3x^3$ y $x^2x^2$ están en este subespacio, por lo que podemos concluir entonces que $\mathrm{alg}\langle x \rangle = \langle x, x^2, x^3 \rangle$ $\forall x \in T$. Por densidad esto es válido para todo elemento de $A$. El enunciado se sigue del lema 3.13.

QED

Baste recordar que las únicas álgebras de composición de dimensión dos de potencias 3-asociativas son las Hurwitz y las formas de las paraHurwitz para concluir, por lo expuesto previamente al teorema 3.8, el siguiente teorema:

**Teorema 3.15.** *Sea $A$ un álgebra de composición de potencias 3-asociativas y dimensión finita sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ y 3. Entonces $A$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras: un álgebra Hurwitz, un álgebra paraHurwitz, una forma de un álgebra paraHurwitz de dimensión dos o un álgebra de Okubo.*

Por último,

**Teorema 3.16.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión finita, sobre un cuerpo de característica $\neq 2$, que satisface las identidades $xx^2 = x^2x$ y $(x^2)^2 = (x^2x)x$, entonces $A$ es un álgebra Hurwitz.*

*Demostración.* Extendiendo escalares a la clausura algebraica tenemos que, por la proposición 3.14, el álgebra $A_{\bar{\mathcal{F}}}$ es de grado dos y de potencias 3-asociativas. En consecuencia: o bien $A_{\bar{\mathcal{F}}}$ es de potencias asociativas o bien satisface la identidad $x^3 = n(x)x$. En el primer caso la proposición 3.5 nos dice que $A_{\bar{\mathcal{F}}}$, y por lo tanto $A$, es Hurwitz. En el segundo caso la identidad $x^3 = n(x)x$ junto con $(x^2)^2 = (x^3)x$ y (3.7) nos proporcionan $n(x)^2x^2 = (x, x^2)n(x)x$ $\forall x \in A$, de donde $n(x)^4 = n(x)(x, x^2)^2$. En vista del lema 3.4, concluimos que la dimensión de $A$ es 1 y que, por lo tanto, $A$ es Hurwitz.

QED

**Nota:** El teorema anterior no se puede extender, en general, a cuerpos de característica 2. En efecto, el álgebra paraHurwitz asociada a la extensión cuadrática del cuerpo de dos elementos por una raíz cúbica primitiva de la unidad es un álgebra de potencias asociativas que no es Hurwitz.

# Capítulo 4

# Algebra de derivaciones grande

A lo largo de este capítulo el término álgebra significará álgebra de dimensión finita y el cuerpo base se supondrá de característica $\neq 2$. Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo algebraicamente cerrado, $A$ una $\mathcal{F}$-álgebra y $\operatorname{Der} A$ su álgebra de derivaciones. Diremos que $\operatorname{Der} A$ tiene *rango toral* $m$ en $A$ (o simplemente que $A$ tiene rango toral $m$) si existe una subálgebra de Cartan de $\operatorname{Der} A$ que actúa con $m$ pesos linealmente independientes (sobre el cuerpo primo de $\mathcal{F}$), y no existe ninguna otra con $m+1$. Si la mayor de las dimensiones de las subálgebras de Cartan de $\operatorname{Der} A$ es $k$ entonces se dirá que el rango de $\operatorname{Der} A$ (o alternativamente que el rango de $A$ es $k$).

En [B-O1 81] Benkart y Osborn demuestran:

**Teorema 4.1.** *Sea* $\operatorname{Der} A$ *el álgebra de derivaciones de un álgebra de división* $A$ *de dimensión finita sobre el cuerpo de los números reales, entonces:*

(i) $\dim A = 1$ *o* $2$ *implica* $\operatorname{Der} A = 0$.

(ii) $\dim A = 4$ *implica que o bien* $\operatorname{Der} A = \mathrm{su}(2)$ *o bien* $\dim \operatorname{Der} A \leq 1$.

(iii) $\dim A = 8$ *implica que* $\operatorname{Der} A$ *es una de las siguientes álgebras de Lie:*

(1) *El álgebra compacta* $G_2$.

(2) su(3).

(3) su(2) $\oplus$ su(2).

(4) su(2) $\oplus Z$, *donde* $Z$ *denota un ideal abeliano (el centro del álgebra de Lie* Der $A$*) de dimensión* 0 *o* 1.

(5) *Un álgebra abeliana* $\mathcal{H}$ *de dimensión* 0, 1 *o* 2.

A lo largo de este capítulo iremos desarrollando diversos resultados sobre el álgebra de derivaciones de un álgebra de composición que tendrán como consecuencia la siguiente clasificación:

**Teorema 4.2.** *Sea* $A$ *un álgebra de composición de dimensión finita sobre un cuerpo de característica* $\neq 2$ *y* 3, $\bar{\mathcal{F}}$ *la clausura álgebraica de* $\mathcal{F}$ *y* $A_{\bar{\mathcal{F}}} = \bar{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{F}} A$. *Entonces:*

(i) $\dim A = 1, 2$ *implica* $\operatorname{Der} A = 0$.

(ii) $\dim A = 4$ *implica que o bien* $\operatorname{Der} A$ *es un álgebra de Lie simple central de tipo* $A_1$ *o bien* $\dim \operatorname{Der} A \leq 1$. *Además, podemos encontrar un producto* $x \circ y$ *en* $A$ *con respecto al cual* $(A, \circ)$ *es Hurwitz y* $\operatorname{Der} A \subseteq \operatorname{Der}(A, \circ)$.

(iii) *Si* $\dim A = 8$ *y* $\operatorname{Der} A_{\bar{\mathcal{F}}}$ *posee rango toral* $\geq 2$ *sobre* $A_{\bar{\mathcal{F}}}$, *entonces o bien*

(I) $A$ *es un álgebra de Okubo y* $\operatorname{Der} A$ *es un álgebra de Lie simple central de tipo* $A_2$.

*o bien*

(II) *Existe un producto* $x \circ y$ *en* $A$ *para el cual* $(A, \circ)$ *es Hurwitz y* $\operatorname{Der} A \subseteq \operatorname{Der}(A, \circ)$. *En tal caso,* $\operatorname{Der} A$ *es una forma de una de las siguientes álgebras:*

(II$_1$) $G_2$.

(II$_2$) sl(3).

(II$_3$) sl(2) $\oplus$ sl(2).

(II$_4$) sl(2) $\oplus Z$, *donde* $Z$ *es un ideal abeliano de dimensión* 1.

(II$_5$) *Un álgebra abeliana* $\mathcal{H}$ *de dimensión* 2.

Las analogías entre los teoremas 4.1 y 4.2 son obvias.

Para demostrar el teorema 4.2 se necesita un esquema de trabajo, el cual volverá a utilizarse reiteradas veces en el próximo capítulo, donde se estudiarán otras álgebras de composición "menos simétricas" (rango toral $\leq 1$). Brevemente podemos exponerlo como sigue: Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8 que posee rango toral dos al extender escalares a la clausura algebraica. El teorema anterior nos dice que, excepto si $A$ es de Okubo, $\mathrm{Der}\, A \subseteq \mathrm{Der}\,(A, \circ)$ para una cierta álgebra Hurwitz $(A, \circ)$. Este hecho puede interpretarse en términos de los submódulos de $A$ para $\mathrm{Der}\, A$:

**Lema 4.3.** *Sea* $A$ *de composición y* $e \in A$ *con* $n(e) = 1$. *Se tiene*

$$\{D \in \mathrm{Der}\, A \mid eD = 0\} = \{D \in \mathrm{Der}\,(A, e) \mid [L_e, D] = 0 = [R_e, D]\},$$

*donde* $R_e$ *y* $L_e$ *denotan los operadores de multiplicación en* $A$.

*Demostración.* Por ser $D$ una derivación, para cualquier $a \in A$ se tiene que $[L_a, D] = L_{aD}$ y $[R_a, D] = R_{aD}$. Si $eD = 0$ entonces $[L_e, D] = L_{eD} = 0 = R_{eD} = [R_e, D]$. Consecuentemente $[L_e^{-1}, D] = 0 = [R_e^{-1}, D]$. Puesto que el producto en $(A, e)$ viene definido por $x \circ y = (xR_e^{-1})(yL_e^{-1})$, es fácil ver que $D \in \mathrm{Der}\,(A, e)$, lo que demuestra un contenido. Recíprocamente, sea ahora $D \in \mathrm{Der}\,(A, e)$ una derivación que conmuta con $R_e$ y $L_e$. Por la definición de $x \circ y$, $D$ también es una derivación en $A$. Además, como $e^2$ es la unidad de

$(A, e)$ entonces $0 = (e^2)D = (eL_e)D = (eD)L_e = e(eD)$, lo que implica que $eD = 0$.

QED

Una vez que sepamos de la existencia de un elemento $e$ tal que $e(\mathrm{Der}\, A) = 0$ y $n(e) = 1$, basta conocer $L_e$ y $R_e$ para poder calcular $\mathrm{Der}\, A = \{D \in \mathrm{Der}\,(A, e) \mid [L_e, D] = 0 = [R_e, D]\}$. Expliquemos cómo llevar a cabo esto. Dada $\mathcal{H}$ una subálgebra de Cartan de $\mathrm{Der}\, A$ y $A = A_0 \oplus \sum_{\gamma \neq 0} A_{\pm\gamma}$ la descomposición de $A$ en subespacios peso para $\mathcal{H}$ (sección 1), es evidente que de existir un tal elemento $e$, éste se encontraría en $A_0$. Los subespacios peso son invariantes para $L_e$ y $R_e$ ($A_0 A_\gamma \subseteq A_\gamma \supseteq A_\gamma A_0$), por lo que estos operadores se pueden expresar de un modo "sencillo" en una base formada por vectores peso. Más aún, en la sección 3 veremos que la descomposición de $A$ en subespacios peso proporciona una $\mathbb{Z}_3$ graduación de $A$ y también de $(A, e)$; en consecuencia, por la proposición 2.4, podemos encontrar una base canónica de $(A, e)$ donde $L_e$ y $R_e$ sean "sencillos". Basta entonces usar lo expuesto en el capítulo 1 sobre $\mathrm{Der}\,(A, e)$ para calcular $\mathrm{Der}\, A$ (sección 4).

Por otro lado, si no existe dicho elemento $e$, entonces $\forall a \in A_0$ con $n(a) = 1$ existe una derivación $D$ con $aD \neq 0$. Este hecho, como veremos, aporta información suficiente para determinar $A$ (sección 4).

En [B-O2 81] se deja sin resolver el problema de la existencia de ciertas álgebras de división reales a las cuales se les ha impuesto una determinada estructura como módulo para su álgebra de derivaciones. Excepto en un caso, todas las posibilidades con rango toral 2 (al extender escalares) o dimensión $\leq 4$ planteadas en [B-O2 81] tienen su análogo en álgebras de composición, lo cual nos permitirá, en estos casos, responder afimativamente al problema de la existencia; de hecho, los ejemplos que conseguiremos (sobre cuerpos más generales que los números reales), además de álgebras de división, serán también de composición. El caso excepcional al que hacemos mención es aquél en que $\dim A = 8$, $\operatorname{Der} A = \mathrm{su}(2) \oplus N$ con $\dim N = 1$ y $A$ es suma de cuatro su(2)-módulos irreducibles de dimensiones $1, 1, 3$ y $3$. Este, como veremos, no tiene contrapartida en álgebras de composición, lo cual nos motivará para demostrar que no existen tales álgebras de división reales (sección 5).

En [Pet 71] Petersson demostró de forma no constructiva que, contrariamente a lo que sucede para álgebras de composición con unidad, sobre cuerpos algebraicamente cerrados hay infinitas clases de isomorfía de álgebras de composición de dimensión 8. En la sección 6 mostraremos, dando esplícitamente una familia de álgebras de composición, que esto es cierto incluso si exigimos que las álgebras de composición posean un álgebra de derivaciones grande (isomorfa a $A_2$). Dichas álgebras de composición tienen una estrecha relación con las *álgebras vectoriales de color* introducidas en [D-KD 78] por su conexión con el modelo de quarks de Gell-Mann, y estudiadas más tarde por otros autores [E 88, E-M 92, Sch 93, Sch 94, E-M 95].

## 1. Antisimetría de las derivaciones

Los automorfismos de un álgebra de composición son isometrías para la forma bilineal del álgebra [Pet 71]. Sobre los números reales la teoría de grupos de Lie nos diría que las derivaciones son aplicaciones antisimétricas. Para cuerpos arbitrarios esto puede deducirse a través de los números duales.

**Lema 4.4.** *Sea $K = \mathcal{F}[t]$ con $t^2 = 0$ el álgebra de los números duales y $V$ un espacio vectorial sobre $\mathcal{F}$. Sean $v, w \in V$ vectores linealmente independientes y $v', w' \in V$ arbitrarios. Entonces $v+tv', w+tw'$ son elementos $K$-linealmente independientes de $K \otimes_{\mathcal{F}} V$.*

*Demostración.* Sean $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 t$ y $\beta = \beta_0 + \beta_1 t$ tales que $\alpha(v + tv') + \beta(w + tw') = 0$ o, equivalentemente, $\alpha_0 v + \beta_0 w = 0$ y $\alpha_0 v' + \alpha_1 v + \beta_0 w' + \beta_1 w = 0$. Por la independencia lineal de $v, w$ tenemos que $\alpha = 0 = \beta$.

QED

**Lema 4.5.** *Sea $C$ un álgebra Hurwitz de dimensión $> 1$, $K$ el álgebra de números duales y $\widetilde{A} = K \otimes_{\mathcal{F}} A$. Supongamos que $\langle\,,\,\rangle : \widetilde{A} \times \widetilde{A} \to K$ es una $K$-forma bilineal simétrica que permite composición*

$$\langle xy, xy \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \ \forall x, y \in \widetilde{A}$$

*y que además no existe $0 \neq x \in \widetilde{A}$ con $\langle x, \widetilde{A} \rangle = 0$. Entonces la forma $\langle\,,\,\rangle$ es la extensión natural de $(\,,\,)$ a $\widetilde{A}$ ($\langle a + tb, c + td \rangle = (a, c) + t((a, d) + (b, c))$).*

*Demostración.* Linealizando la identidad $\langle xy, xy \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ tenemos

$$\langle xy, xz \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, z \rangle \text{ y } \langle xy, wz \rangle + \langle xz, wy \rangle = 2\langle x, w \rangle \langle y, z \rangle \ \forall x, y, w, z \in \widetilde{A}.$$

Sustituyendo $y = x, w = 1$:

$$\langle x^2, z \rangle + \langle x, xz \rangle = 2\langle x, z \rangle \langle x, 1 \rangle.$$

Puesto que $\langle x, zx \rangle = \langle x, x \rangle \langle 1, z \rangle$, tenemos

$$\langle x^2 - 2\langle x, 1 \rangle x + \langle x, x \rangle 1, z \rangle = 0$$

para cualquier $z \in \widetilde{A}$. Por nuestras hipótesis esto conduce a

$$x^2 - 2\langle x, 1 \rangle x + \langle x, x \rangle 1 = 0 \ \ \forall x \in \widetilde{A}.$$

Por otro lado, denotando también por $(\,,\,)$ la extensión de $(\,,\,)$ a $\widetilde{A}$, la misma expresión es válida para $(\,,\,)$, es decir,

$$x^2 - 2(x, 1)x + (x, x)1 = 0 \ \ \forall x \in \widetilde{A}.$$

Restando las dos ecuaciones cuadráticas y usando el lema anterior obtenemos que si $a \in A$ y $a$ es linealmente independiente con 1 entonces

$$\langle a+tb, 1\rangle = (a+tb, 1) \text{ y } \langle a+tb, a+tb\rangle = (a+tb, a+tb),$$

lo que demuestra el lema.

QED

**Teorema 4.6.** *Sea $A$ un álgebra de composición y $D$ una derivación de $A$ entonces*

$$(xD, y) + (x, yD) = 0$$

*Demostración.* Fijemos un elemento $a$ con $n(a) \neq 0$. Como los operadores de multiplicación por $a$ son biyectivos entonces existe $e \in A$ de tal modo que $ae = a$, por lo que, tomando normas, $n(e) = 1$. Sea $K = \mathcal{F}[t]$ el álgebra de números duales y $\widetilde{A} = K \otimes_{\mathcal{F}} A$. Denotemos por $D$ la derivación de $\widetilde{A}$ extensión de $D$. Consideramos la aplicación $\varphi : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ que asocia a cada elemento $x$ el elemento $x + t(xD)$. Puesto que $D$ es una derivación de $\widetilde{A}$, entonces $\varphi$ es un automorfismo de $\widetilde{A}$. Definimos una $K$-forma bilineal simétrica no degenerada $\langle x, y\rangle = (x^\varphi, y^\varphi)\ \forall x, y \in \widetilde{A}$.

Sean $x, y \in \widetilde{A}$ y consideremos $\hat{x} = xR_e^{-1}$, $\hat{y} = yL_e^{-1}$, se tiene que

$$\begin{aligned}(x^\varphi, x^\varphi) &= ((\hat{x}e)^\varphi, (\hat{x}e)^\varphi) = \\ &= (\hat{x}^\varphi e^\varphi, \hat{x}^\varphi e^\varphi) = (\hat{x}^\varphi, \hat{x}^\varphi)(e^\varphi, e^\varphi).\end{aligned} \tag{4.1}$$

Por otro lado, puesto que $ae = a$, también se tiene que $(aD, a) = ((ae)D, a) = ((aD)e, ae) + (a(eD), ae) = (aD, a) + (a, a)(eD, e)$. De lo cual, al ser $a$ un elemento de norma no nula, $(eD, e) = 0$. Con esta información,

$$(e^\varphi, e^\varphi) = (e + t(eD), e + t(eD)) = (e, e) + 2t(eD, e) = 1.$$

Retomando la ecuación (4.1), tenemos $(x^\varphi, x^\varphi) = (\hat{x}^\varphi, \hat{x}^\varphi)$ y, análogamente, $(y^\varphi, y^\varphi) = (\hat{y}^\varphi, \hat{y}^\varphi)$. Consideramos el álgebra Hurwitz $(\tilde{A}, e)$, cuyo producto se denota por $x \circ y$. La forma $\langle\, , \rangle$ permite composición para este producto ya que

$$\begin{aligned}\langle x \circ y, x \circ y\rangle &= ((x \circ y)^\varphi, (x \circ y)^\varphi) = ((\hat{x}\hat{y})^\varphi, (\hat{x}\hat{y})^\varphi)\\ &= (\hat{x}^\varphi, \hat{x}^\varphi)(\hat{y}^\varphi, \hat{y}^\varphi) = (x^\varphi, x^\varphi)(y^\varphi, y^\varphi)\\ &= \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.\end{aligned}$$

Usando el lema anterior podemos concluir que $\langle\, , \rangle$ es la extensión de $(\, , )$. En particular, para cualquier $a \in A$ se tiene que

$$(a, a) = \langle a, a\rangle = (a + t(aD), a + t(aD)) = (a, a) + 2(a, aD)t$$

por lo que $(a, aD) = 0$. Linealizando esta igualdad deducimos la antisimetría de las derivaciones respecto de la forma bilineal.

QED

Cualquier subálgebra nilpotente $\mathcal{H}$ de $\operatorname{Der} A$ descompone a $A$ como $A = \sum_\gamma A_\gamma$ donde $\gamma$ es una aplicación (no necesariamente lineal) de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{F}$ y $A_\gamma = \{x \in A \mid \forall D \in \mathcal{H}\ \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } x(D - \gamma(D)id)^m = 0\}$ (véase [Se]). El teorema anterior proporciona simetría en esta descomposición.

**Lema 4.7.** *Sea $\mathcal{H}$ una subálgebra nilpotente de* $\operatorname{Der} A$ *y* $A = \sum A_\gamma$ *la descomposición de $A$ respecto de $\mathcal{H}$. Se tiene que $(A_\alpha, A_\beta) = 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$ y, además,* $\dim A_\alpha = \dim A_{-\alpha}$.

*Demostración.* Si $\alpha \neq -\beta$ entonces podemos escoger $D \in \mathcal{H}$ con $\alpha(D) \neq -\beta(D)$. Con esta elección la aplicación $D + \alpha(D)id$ actúa biyectivamente en $A_\beta$. En particular, dado $m \in \mathbb{N}$, los elementos de $A_\beta$ son de la forma

$y(D + \alpha(D)id)^m$ con $y \in A_\beta$. Dado $x \in A_\alpha$ existe $m \in \mathbb{N}$ de tal modo que $x(D - \alpha(D)id)^m = 0$, así, para cualquier $z = y(D + \alpha(D)id)^m \in A_\beta$ se tiene que $0 = (x(D - \alpha(D)id)^m, y) = (-1)^m(x, y(D + \alpha(D)id)^m) = (-1)^m(x, z)$, de lo que deducimos que $(A_\alpha, A_\beta) = 0$. Como la forma bilineal es no degenerada fácilmente se observa que $A_\alpha$ y $A_{-\alpha}$ tienen la misma dimensión.

QED

# 2. Dimensiones 1,2 y 4

Empezaremos examinando los casos de dimensiones 1 y 2. Recordemos que si $\mathcal{F}e_1 + \mathcal{F}e_2$ es el álgebra Hurwitz split de dimensión dos, entonces el álgebra paraHurwit asociada tiene productos

$$e_1^2 = e_2, \quad e_2^2 = e_1 \quad \text{y} \quad e_1e_2 = e_2e_1 = 0. \tag{4.2}$$

**Teorema 4.8.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión $\leq 2$. Si $A$ es una forma de un álgebra paraHurwitz sobre un cuerpo de característica 3 entonces* $\operatorname{Der} A = \langle H \rangle$ *para cierta $H$ semisimple y biyectiva; en otro caso,* $\operatorname{Der} A = 0$.

*Demostración.* El caso de dimensión 1 es trivial. Para demostrar el teorema podemos suponer que $\dim A = 2$ y, por el lema 1.8, que el cuerpo base $\mathcal{F}$ es algebraicamente cerrado. En tal caso, el conjunto de aplicaciones antisimétricas de la forma bilineal es $\langle H \rangle$ donde $uH = u$ y $vH = -v$ para una cierta base $\{u, v\}$ con $(u, u) = 0 = (v, v)$ y $(u, v) = 1$. Por el teorema 4.6, si $\operatorname{Der} A \neq 0$ entonces $\operatorname{Der} A = \langle H \rangle$.

Por otro lado, $(uv)H = (uH)v + u(vH) = uv - uv = 0$. Puesto que $H$ es biyectiva se tiene que $uv = 0$ y, análogamente, $vu = 0$. En particular, $A$ es conmutativa. Ahora, $u^2H = 2u(uH) = 2u^2$ y $v^2H = -2v^2$. Como los valores propios de $H$ son $\{1, -1\}$ entonces car$\mathcal{F} = 3, u^2 = \lambda v$ y $v^2 = \nu u$. También, al admitir $A$ composición,

$$1 = 4 = (u + v, u + v)^2 = ((u + v)^2, (u + v)^2) = (\lambda v + \nu u, \lambda v + \nu u) = 2\lambda\nu,$$

por lo que $\lambda\nu = -1$. Sea $\mu$ la raíz cúbica de $\lambda^{-1}$, consideramos $e_1 = -\mu u$ y $e_2 = \mu^{-1}v$. Para esta nueva base, $e_1^2 = e_2, e_2^2 = e_1$ y $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$, lo que demuestra el teorema

QED

En lo que resta de sección nos centraremos únicamente en álgebras de composición de dimensión 4. El siguiente teorema reducirá las posibilidades de Der $A$.

**Lema 4.9.** *Sea $N$ una derivación nilpotente no nula de un álgebra de composición de dimensión 4, entonces $N^2 \neq 0 = N^3$ y $\ker N$ no es totalmente isótropo.*

*Demostración.* Si $N^3$ fuese no nula entonces existiría una base de la forma $\{x, xN, xN^2, xN^3\}$; sin embargo, como $N^4 = 0$, por antisimetría se tendría

$$(xN^3, xN^3) = 0 = (xN^3, xN^2) = (xN^3, xN)$$

y también

$$(xN^3, x) = -(xN^2, xN) = (xN, xN^2) = -(x, xN^3),$$

por lo que $(xN^3, x) = 0$. En vista de la no degeneración de $( , )$ concluimos que $N^3 = 0$, lo que es absurdo.

Si $N^2 = 0$ entonces o bien tenemos una base del tipo $\{v, vN, w, wN\}$ o bien del tipo $\{v, vN, x, y\}$ con $xN = yN = 0$. En el segundo caso $vN$ pertenecería al radical de la forma bilineal, lo cual no es posible. En el primero, $\ker N = \langle vN, wN\rangle$ es una subálgebra trivial de $A$ puesto que $0 = (xy)N^2 = (xN^2)y + 2(xN)(yN) + x(yN^2) = 2(xN)(yN)\ \forall x, y \in A$. Además, dado $xN \in \ker N$ e $y \in A$ tenemos que $((xN)y)N = (xN)(yN) = 0 = ((yN)x)N$, por lo que $\ker N$ es un ideal de $A$. Sin embargo, es sabido [Pet 71] que $A$ es simple y que, por lo tanto, no tiene ideales no triviales. En consecuencia $N^2 \neq 0$.

Puesto que $N^2 \neq 0 = N^3$, existe una base de la forma $\{v, vN, vN^2, w\}$ con $wN = 0$; en particular, $\langle vN, vN^2\rangle \subseteq \langle vN^2, w\rangle^{\perp}$ y, por la no degeneración de $(\ ,\ )$, se da la igualdad. Así, $w \notin \langle vN^2, w\rangle^{\perp}$ y $n(w) \neq 0$.

QED

**Lema 4.10.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 4, cualquier subálgebra de* $\operatorname{Der} A$ *formada por derivaciones nilpotentes tiene dimensión* $\leq 1$.

*Demostración.* Sea $0 \neq \mathcal{N}$ una subálgebra como la del enunciado y consideremos $A_0 = \{x \in A \mid x\mathcal{N} = 0\}$. Por el teorema de Engel este conjunto es no nulo. Supongamos que existe un elemento $a \in A_0$ con $n(a) \neq 0$. En tal caso $e = a^2/n(a)$ también pertenece a $A_0$ y, por lo tanto, $[L_e, N] = 0 = [R_e, N]\ \forall N \in \mathcal{N}$. Esto nos dice que $\mathcal{N} \subseteq \operatorname{Der}(A, e)$ (recordemos que el producto en $(A, e)$ viene dado por $x \circ y = (xR_e^{-1})(yL_e^{-1})$). Puesto que $\operatorname{Der}(A, e)$ es un álgebra simple central de dimensión 3, se concluye que $\dim \mathcal{N} = 1$, lo cual demuestra el lema para el caso en que $A_0$ no sea totalmente isótropo.

Terminaremos la demostración cuando probemos que, necesariamente, $A_0$ no es totalmente isótropo. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que $A_0$ es totalmente isótropo. Si $\dim A_0 = 2$ entonces, puesto que $(xN, A_0) = 0 \forall x \in A$ y $N \in \mathcal{N}$, se tiene que $A\mathcal{N} \subseteq A_0$ y, por lo tanto, $N^2 = 0 \forall N \in \mathcal{N}$, lo que contradice al lema 4.9. En consecuencia, $\dim A_0 = 1$ y, por el lema 4.9, $\dim \mathcal{N} \geq 2$. Sea $\{a, u, v, z\}$ una base de $A$, formada por vectores isótropos de modo que $A_0 = \mathcal{F}a$, $A_0^{\perp} = \langle a, u, v \rangle$, $(a, z) = 1 = (u, v)$ y $(u, z) = 0 = (v, z)$. Por antisimetría se tiene que $uN \in A_0^{\perp}$ y $(u, uN) = 0$; así, $uN = \lambda u + \alpha a$. Por otro lado, al ser $N$ nilpotente se sigue que $\lambda = 0$ y $uN = \alpha a$. Análogamente $vN = \beta a$. Por último, $zN = \gamma u + \delta v$ ya que $zN \perp a, z$. Ahora,

$$\begin{aligned} 0 &= (uN, z) + (u, zN) = \alpha + \delta, \\ 0 &= (vN, z) + (v, zN) = \beta + \gamma, \end{aligned}$$

de donde $\dim \mathcal{N} = 2$ y la aplicación lineal dada por $aN = 0 = vN$, $uN = a$ y $zN = -v$ pertenece a $\mathcal{N}$. Ahora bien, el hecho de que $N^2$ sea nula se contradice con el lema 4.9.

QED

Un resultado similar se obtiene, sobre cuerpos algebraicamente cerrados, para subálgebras formadas por derivaciones diagonalizables:

**Lema 4.11.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 4 sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ algebraicamente cerrado y $\mathcal{H}$ una subálgebra, no nula, de* $\operatorname{Der} A$ *formada únicamente por derivaciones diagonalizables, entonces existe $H \in \mathcal{H}$ de tal modo que $\mathcal{H} = \langle H \rangle$ y además* $\ker H$ *es una subálgebra de composición de $A$ de dimensión 2.*

*Demostración.* Sean $0 \neq H \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathcal{F}$ un valor propio no nulo de $H$ y $A_\alpha$ el espacio fundamental asociado a $\alpha$. Por el lema 4.7, $A$ se puede descomponer como $A = A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_*$ donde $A_*$ denota una cierta suma de subespacios fundamentales de $H$. Elijamos $a_{\pm\alpha} \in A_{\pm\alpha}$ con $(a_\alpha, a_{-\alpha}) \neq 0$. Como $n(a_\alpha + a_{-\alpha}) = 2(a_\alpha, a_{-\alpha}) \neq 0$, se tiene que $0 \neq (a_\alpha + a_{-\alpha})A_\alpha \subseteq A_0 \oplus A_{2\alpha}$ y, por lo tanto, o bien $A_0 \neq 0$ o bien $A_{2\alpha} \neq 0$. De hecho siempre ocurre que $A_0 \neq 0$ pero los argumentos para demostrarlo dependerán de la característica del cuerpo base.

Empezaremos considerando el caso en que car$\mathcal{F} \neq 3$ y $A_0 = 0$. Bajo estas hipótesis, $A = A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_{2\alpha} \oplus A_{-2\alpha}$, y como, por un argumento similar al anterior, $A_{\pm 4\alpha} \neq 0$ entonces car$\mathcal{F} = 5$. Sean $a_{i\alpha} \in A_{i\alpha}$ con $(a_{i\alpha}, a_{-i\alpha}) \neq 0$, como $0 \neq (a_\alpha + a_{-\alpha})A_\alpha = a_\alpha A_\alpha$ y $\dim A_\alpha = 1$, se tiene que $a_\alpha^2 \neq 0$. Así, $(a_\alpha a_{2\alpha}, a_\alpha^2) = n(a_\alpha)(a_{2\alpha}, a_\alpha) = 0$, de donde $a_\alpha a_{2\alpha} = 0$ y, análogamente, $a_\alpha a_{-2\alpha} = 0$. Por lo tanto $a_\alpha(a_{2\alpha} + a_{-2\alpha}) = 0$, lo cual se contradice con que la norma de $a_{2\alpha} + a_{-2\alpha}$ sea no nula. En consecuencia, si car$\mathcal{F} \neq 3$ entonces $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$.

Supongamos ahora que, aparte de tener $\mathcal{F}$ característica $\neq 3$, además $\dim \mathcal{H} > 1$. Como la adjunción por $H$ actúa diagonalizablemente en $\mathcal{H}$, entonces existe $H' \in \mathcal{H}$ linealmente independiente con $H$ tal que $[H', H] = \lambda H'$. Por lo anterior, $H'$ proporciona una descomposición de $A$ de la forma $A = A'_0 \oplus A'_\beta \oplus A'_{-\beta}$ con $\dim A'_0 = 2$ y $\dim A'_{\pm\beta} = 1$. Ahora bien, $0 = \lambda(A'_0)H' = A'_0[H', H] = A'_0 H H'$ implica que $A'_0 H \subseteq A'_0$, $A'_0 = A_0$ y, por ortogonalidad, $A_\alpha \oplus A_{-\alpha} = A_\beta \oplus A_{-\beta}$; sin embargo, puesto que $H$ y $H'$ son antisimétricas en $A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$, esto conduce a que $H$ y $H'$ son proporcionales, lo cual se contradice con la elección de $H'$. En consecuencia, $\mathcal{H} = \langle H \rangle$ y $\ker H$ es una subálgebra de composición de dimensión 2.

Para concluir la demostración del lema falta analizar qué ocurre sobre cuerpos de característica 3. Sea $\mathcal{F}$ un tal cuerpo y supongamos que $A_0 = 0$. Como $A = A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_*$ entonces o bien $A_* = 0$ o bien $A_* = A_\beta \oplus A_{-\beta}$

con $\alpha$ y $\beta$ linealmente independientes sobre el cuerpo primo de $\mathcal{F}$. En el primer caso $A = A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$ con $\dim A_{\pm\alpha} = 2$ y $A_\alpha A_{-\alpha} = 0 = A_{-\alpha}A_\alpha$, por lo que dados $0 \neq a_\alpha \in A_\alpha$ y $a_{-\alpha} \in A_{-\alpha}$ con $(a_\alpha, a_{-\alpha}) \neq 0$, por dimensiones, $a_\alpha A_\alpha = (a_\alpha + a_{-\alpha})A_\alpha = A_{-\alpha}$. Elijamos $b_{-\alpha}$ con $(a_\alpha, b_{-\alpha}) = 0$. Tenemos que $(a_\alpha x_\alpha, b_{-\alpha}^2) = 2(a_\alpha, b_{-\alpha})(x_\alpha, b_{-\alpha}) - (a_\alpha b_{-\alpha}, b_{-\alpha}x_\alpha) = 0 \ \forall x_\alpha$, es decir, $(A_{-\alpha}, b_{-\alpha}^2) = (a_\alpha A_\alpha, b_{-\alpha}^2) = 0$ y, por lo tanto, $0 = b_{-\alpha}^2 = (b_{-\alpha} + b_\alpha)b_{-\alpha}$ para cualquier $b_\alpha$ con $(b_\alpha, b_{-\alpha}) \neq 0$, lo cual no es posible. Consecuentemente $A = A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_\beta \oplus A_{-\beta}$. Sin embargo, este caso tampoco es factible. En efecto, dados $(a_\alpha, a_{-\alpha}) \neq 0$ se tiene que $0 \neq (a_\alpha + a_{-\alpha})A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta} \oplus A_{\beta-\alpha}$ y, en consecuencia, $\beta + \alpha$ ó $\beta - \alpha \in \{\pm\alpha, \pm\beta\}$, lo que se contradice con la independencia lineal de $\{\alpha, \beta\}$. Así pues, concluimos que $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$ con $\dim A_0 = 2$ y $\dim A_{\pm\alpha} = 1$.

Si $\dim \mathcal{H} > 1$ entonces, al igual que en el caso de car$\mathcal{F} > 3$, existe $H' \in \mathcal{H}$ linealmente independiente con $H$ y tal que $[H', H] = \lambda H'$. Sea $A = A_0' \oplus A_\beta' \oplus A_{-\beta}'$ la descomposición de $A$ respecto de $H'$. Como en el caso anterior $(A_0')H \subseteq A_0'$; sin embargo, ahora $\operatorname{Der} A_0'$ no siempre es nula, por lo que no podemos asegurar que $H$ se anule en $A_0'$. De hecho, en caso de anularse, de modo análogo a lo visto para car$\mathcal{F} > 3$, obtendríamos una contradicción. Por otro lado, si $(A_0')H \neq 0$ entonces, por el teorema 4.8, $H$ actúa en $A_0'$ con dos valores propios no nulos, que obligatoriamente son $\pm\alpha$. Así, $A_\alpha \oplus A_{-\alpha} = A_0'$ es una subálgebra de $A$, pero como también $A_0(A_{\pm\alpha}) = A_{\pm\alpha} = (A_{\pm\alpha})A_0$, entonces $A_{\pm\alpha}$ es un ideal de $A$, lo que se contradice con la simplicidad de $A$. En consecuencia, $\mathcal{H} = \langle H \rangle$ y $\ker H$ es una subálgebra de composición de dimensión 2.

QED

**Teorema 4.12.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 4 sobre un cuerpo de característica $\neq 2$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *$A$ es un álgebra de composición estándar.*

ii) $\dim \operatorname{Der} A \geq 2$.

iii) $\operatorname{Der} A$ *es un álgebra de Lie simple central de dimensión* 3.

*Demostración.* Sea $A$ un álgebra de composición estándar asociada al álgebra Hurwitz $(A, \circ)$ con involución estándar $x \mapsto x^J$ y elemento unidad $e$. Si $A$ es de tipo I, II o III entonces $e$ es unidad a un lado (al menos) de $A$, por lo que $e(\operatorname{Der} A) = 0$. En el caso paraHurwitz se tiene que $\mathcal{F}e = \{x \in A \,|\, x \circ y = y \circ x \,\forall y \in A\} = \{x \in A \,|\, xy = yx \,\forall y \in A\}$ [ZSSS] y, por lo tanto, $eD \in \mathcal{F}e \,\forall D \in \operatorname{Der} A$, pero como $(eD, e) = 0$, también en este caso $e(\operatorname{Der} A) = 0$. Así, cualquiera que sea el tipo de $A$ se tiene que $e(\operatorname{Der} A) = 0$ y, en consecuencia, $[L_e, D] = 0 = [R_e, D] \;\forall D \in \operatorname{Der} A$. Puesto que $(A, \circ) = (A, e)$ entonces $\operatorname{Der} A \subseteq \operatorname{Der}(A, e)$. Por otro lado, las derivaciones de $\operatorname{Der}(A, e)$ conmutan con $J$ y, por lo tanto, con $R_e$ y $L_e$ ya que, como sabemos, estos operadores pertencen a $\{id, J\}$. Así pues, $\operatorname{Der}(A, e) \subseteq \operatorname{Der} A$ y $\operatorname{Der}(A, e) = \operatorname{Der} A$, lo cual demuestra la implicación i)$\Rightarrow$ iii).

La implicación iii)$\Rightarrow$ ii) es obvia.

Supongamos ahora que $\dim \operatorname{Der} A \geq 2$ y veamos que necesariamente $A$ es estándar. Por el teorema 1.17 podemos suponer que $\mathcal{F}$ es algebraicamente cerrado. Por la descomposición de Jordan-Chevalley y los lemas 4.10 y 4.11 se tiene que en $\operatorname{Der} A$ hay derivaciones tanto nilpotentes como diagonalizables. El lema 4.11 nos permite elegir una derivación $H$ diagonalizable de modo que $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_{-1}$ con $A_\mu = \{x \in A \,|\, xH = \mu x\}$. Puesto que también la aplicación $ad_H : D \mapsto [D, H]$ es diagonalizable, entonces $\mathcal{L} = \oplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{L}_\lambda$ donde $\mathcal{L}_\lambda = \{D \in \operatorname{Der} A \,|\, [D, H] = \lambda D\}$. Ahora bien, como $(A_\mu)\mathcal{L}_\lambda \subseteq A_{\mu+\lambda}$, es inmediato observar que los únicos valores que puede tomar $\lambda$ se hallan en $\{0, \pm 1, \pm 2\}$. Además, del hecho de que $\dim A_{\pm 1} = 1$, del teorema 4.8 y del lema 4.11 se sigue que $\mathcal{L}_0 = \langle H \rangle$.

Si la característica de $\mathcal{F}$ es $\neq 3$ entonces $\forall D \in \mathcal{L}_2$ se tiene que $A_{-1}D \subseteq A_1$ y $(A_{-1}D, A_{-1}) = 0$ y, en consecuencia, $A_{\pm 1}D = 0 = A_0 D$ y $\mathcal{L}_{\pm 2} = 0$. Si la característica de $\mathcal{F}$ es 3 entonces $\mathcal{L}_{\pm 2} = \mathcal{L}_{\mp 1}$ y $\forall D \in \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{-1}$ se tiene, como antes, que $A_{-1}D = 0$. Por lo tanto, $D^3 = 0$ ya que $A_1 D \subseteq A_0$ y $A_0 D \subseteq A_{-1}$. Concluimos de esto que, independientemente de la característica ($\neq 2$) del cuerpo base, $\mathcal{L} = \mathcal{F}H \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_{-1}$ y toda derivación $D_i$ en $\mathcal{L}_i$ con $i = \pm 1$ cumple que $A_i D_i = 0$ y, en consecuencia, es nilpotente.

Puesto que $\dim \operatorname{Der} A \geq 2$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $0 \neq D \in \mathcal{L}_1$. El lema 4.9 nos dice que $\ker D$ tiene dimensión 2 y no es totalmente isótropo. Ahora bien, puesto que $\ker D$ se puede expresar como $\ker D = (\ker D)_0 \oplus (\ker D)_1$ con $(\ker D)_i \subseteq A_i$, y $((\ker D)_1, (\ker D)_i) = 0$, se sigue que $(\ker D)_0 = (\ker D) \cap A_0 = \mathcal{F}e$ con $n(e) \neq 0$. Además, $e^2 \in (\ker D) \cap A_0$, por lo que podemos suponer que $e^2 = e$ y $n(e) = 1$. También, como $D^2 \neq 0 = D^3$, es inmediato observar que dado $0 \neq a \in A_{-1}$, los elementos $\{a, aD, aD^2\}$ forman una base del subespacio ortogonal a $e$. Notemos que como $a \in A_{-1}$ y $\dim A_{-1} = 1$, entonces $ea = \mu a$ para algún $\mu \in \mathcal{F}$, así

$$e(aD) = (ea)D = \mu(aD), \quad e(aD^2) = \mu a D^2$$

y

$$0 \neq n(aD) = n(e)n(aD) = n(e(aD)) = \mu^2 n(aD),$$

de donde $\mu^2 = 1$ y la restricción de $L_e$ al subespacio ortogonal a $e$ es $\pm id$. Idénticas afirmaciones se consiguen para $R_e$. Es sencillo, ahora, concluir que $A$ es un álgebra estándar asociada a $(A, e)$.

QED

Como consecuencia de los anteriores resultados tenemos el siguiente teorema que clasifica el álgebra de derivaciones de un álgebra de composición de dimensión 4:

**Teorema 4.13.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 4 sobre un cuerpo de característica $\neq 2$, entonces una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

i) $\operatorname{Der} A$ *es un álgebra de Lie simple central de dimensión* 3. *Esto ocurre si y sólo si $A$ es estándar.*

ii) $\dim \operatorname{Der} A = 1$ *y* $\operatorname{Der} A = \langle H \rangle$ *con $H$ semisimple y* $\dim \ker H = 2$.

iii) $\dim \operatorname{Der} A = 1$ *y* $\operatorname{Der} A = \langle N \rangle$ *para alguna derivación $N$ con $N^2 \neq 0 = N^3$ y cuyo núcleo no es totalmente isótropo.*

iv) $\operatorname{Der} A = 0$.

Es interesante observar que, de nuevo, las álgebras estándar se presentan como elementos destacados de la teoría.

Antes de pasar a estudiar el álgebra de derivaciones de un álgebra de composición de dimensión ocho, permítasenos ilustrar el teorema anterior con algunos ejemplos:

**Ejemplo 1.** Sea $(A, \circ)$ un álgebra de cuaternios de división sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ (por ejemplo el álgebra de cuaternios de Hamilton $\mathbb{H}$ sobre los números reales). Fijemos un elemento no nulo $a$ ortogonal a la unidad $e$ de $(A, \circ)$ y consideremos el automorfismo de $(A, \circ)$ dado por $\varphi : x \mapsto a^{-1} \circ x \circ a$. Definimos en $A$ un nuevo producto mediante $xy = x^{\varphi} \circ y$, con lo cual obtenemos una nueva álgebra de composición que es, además, de división.

Observemos que $A$ no es estándar. En efecto, si $A$ fuese estándar entonces, al poseer unidad a izquierda, sería de tipo I o II; sin embargo, en tal caso $R_e = \varphi$ debería coincidir o bien con la identidad o bien con la involución estándar de $(A, \circ)$, lo que no es cierto. Por lo tanto, por el teorema 4.13, $\dim \operatorname{Der} A \leq 1$. Puesto que la derivación de $(A, \circ)$ dada por $ad_a : x \mapsto x \circ a - a \circ x$ conmuta con $\varphi$ se sigue que $ad_a \in \operatorname{Der} A$ y, en consecuencia, $\operatorname{Der} A = \langle ad_a \rangle$. Es sencillo comprobar que esta derivación es semisimple.

Si consideramos como álgebra $(A, \circ)$ el álgebra de cuaternios de Hamilton entonces esta construcción proporciona ejemplos para el apartado (ii) del teorema 4.1.

**Ejemplo 2.** Sea $(A, \circ)$ el álgebra de cuaternios split y $\{e_1, e_2, u_1, v_1\}$ una base canónica. A partir de la derivación $ad_{u_1} : x \mapsto x \circ u_1 - u_1 \circ x$ construimos el automorfismo $\varphi = id + ad_{u_1} + \frac{1}{2} ad_{u_1}^2$ (exponencial de $ad_{u_1}$). Es sencillo comprobar que el álgebra de composición con producto $xy = x^\varphi \circ y$ tiene como álgebra de derivaciones el subespacio $\langle ad_{u_1} \rangle$ y, así, constituye un ejemplo para el apartado iii) del teorema 4.13.

**Ejemplo 3.** Sea $(A, \circ)$ un álgebra de cuaternios de división con unidad $e$, y $\{e, a, b, a \circ b\}$ una base ortogonal de $(A, \circ)$. Consideramos los automorfimos de $(A, \circ)$ dados por $\varphi : x \mapsto a^{-1} \circ x \circ a$ y $\psi : x \mapsto b^{-1} \circ x \circ b$, y definimos un nuevo producto en $A$ mediante $xy = x^\varphi \circ y^\psi$. El elemento $e$ pasa a ser un idempotente de $A$. En particular, $eD = e(eD) + (eD)e = (eD)^{\varphi + \psi}$ $\forall D \in \operatorname{Der} A$; ahora bien, es inmediato comprobar que los valores propios de $\varphi + \psi$ son 0 y $\pm 2$, por lo que $eD = 0$ $\forall D \in \operatorname{Der} A$. Puesto que $\varphi = R_e$ y $\psi = L_e$, se tiene que $[\varphi, D] = 0 = [\psi, D]$ $\forall D \in \operatorname{Der} A$ y, como consecuencia, $\operatorname{Der} A \subseteq \operatorname{Der}(A, e) = \operatorname{Der}(A, \circ)$. En particular, cualquier derivación $D$ de $A$ es de la forma $D = ad_z : x \mapsto x \circ z - z \circ x$ para un adecuado $z \in (A, \circ)$. La igualdad $[\varphi, D] = 0$ se puede escribir en la forma $\varphi^{-1} D \varphi = D$ de donde, como

$\varphi \in \mathrm{Aut}(A, \circ)$, $z^{\varphi} = z$ y, análogamente, $z^{\psi} = z$. Sin embargo, la intersección de los subespacios fundamentales de valor propio 1 de $\varphi$ y $\psi$ es $\langle e \rangle$, por lo que $D = ad_z = 0$. Concluimos que $\mathrm{Der}\, A = 0$.

Esta construcción nos da, en particular, ejemplos de álgebras de división reales para el apartado (ii) del teorema 4.1.

## 3. Subálgebras de Cartan

El propósito de esta sección es clasificar las subálgebras de Cartan $\mathcal{H}$ del álgebra de derivaciones de un álgebra de composición $A$ de dimensión ocho sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathcal{F}$ de característica $\neq 2$ y 3 (hipótesis que se mantendrá a lo largo de la sección), al igual que las posibles descomposiciones de $A$ en subespacios peso para $\mathcal{H}$ (teorema 4.19). Todo el análisis que desarrollaremos en este capítulo y en el siguiente tiene su origen en esta clasificación, por lo que no exageramos al destacarla, junto con la proposición 2.4, como un punto crucial de la investigación.

**Lema 4.14.** *$\mathcal{H}$ contiene las componentes diagonalizable y nilpotente de la descomposición de Jordan-Chevalley de todos sus elementos.*

*Demostración.* Sea $H \in \mathcal{H}$ y $H = H_s + H_n$ la descomposición de Jordan-Chevalley de $H$ con $H_s$ diagonalizable y $H_n$ nilpotente. Es sabido [Se] que $H_s$ y $H_n$ son combinaciones polinómicas en $H$ y que, por lo tanto, $[\mathcal{H}, H_s]$ y $[\mathcal{H}, H_n] \subseteq \mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}$ es autonormalizada, se sigue que $H_s$ y $H_n \in \mathcal{H}$.

QED

**Lema 4.15.** *Si la acción de* $\mathrm{Der}\, A$ *en* $A$ *no es nilpotente entonces cualquier subálgebra de Cartan de* $\mathrm{Der}\, A$ *posee derivaciones diagonalizables no nulas.*

*Demostración.* Procedemos por reducción al absurdo. Sea $\mathcal{H}$ una subálgebra de Cartan de $\operatorname{Der} A$ que no contiene ninguna derivación diagonalizable. En vista del lema anterior todas las derivaciones en $\mathcal{H}$ son nilpotentes y, por lo tanto, el único peso de $\mathcal{H}$ en $A$ es el nulo. Como las raíces de $\mathcal{H}$ en $\operatorname{Der} A$ son diferencias de pesos, se tiene que $\operatorname{Der} A = \mathcal{H}$ y, de este modo, la acción es nilpotente, lo que se contradice con nuestras hipótesis.

QED

Cuanto menor es la dimensión de los subespacios peso de $A$, más sencilla de construir resulta el álgebra $A$. Sea

$$A = \sum_{\gamma} A_{\gamma} \tag{4.3}$$

la descomposición de $A$ como suma directa de subespacios peso para $\mathcal{H}$.

**Lema 4.16.** *Sea $\mathcal{H}$ una subálgebra de Cartan para la cual la descomposición (4.3) verifica que $\dim A_0 = 2$ y $\dim A_{\gamma} = 1$ $\forall \gamma \neq 0$. Entonces, denotando por $e$ la unidad, unidad lateral o una paraunidad de $A_0$, existe una base canónica de $(A, e)$ formada por vectores peso de $\mathcal{H}$ de tal modo que en la base $\{e, e_1 - e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ las matrices coordenadas de los operadores $L_e$ y $R_e$ son de la forma*

$$\operatorname{diag}(1, \pm 1, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_1^{-1}, \epsilon_2^{-1}, \epsilon_3^{-1})$$

*para ciertos $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \mathcal{F}$.*

*Demostración.* Por el lema 4.7, es sencillo observar que $A_0$ es una subálgebra de composición de dimensión 2 de $A$. Sea $e$ la unidad, unidad a un lado o una paraunidad de $A_0$. $A_0$ también es una subálgebra de $(A, e)$ y, por lo tanto, $A_0 = \mathcal{F}e_1 + \mathcal{F}e_2$ con $e_i$ idempotentes de $(A, e)$. Como $\mathcal{H}$ induce derivaciones en $A_0$, por el teorema 4.8 se tiene que $e_1\mathcal{H} = 0 = e_2\mathcal{H}$. Sea ahora $(A, e) = A_0 \oplus U(e_1) \oplus V(e_1)$ la descomposición de Peirce de $(A, e)$ respecto de $e_1$. Por el lema 4.3 $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Der}\,(A, e)$ y así, al anular $\mathcal{H}$ a $A_0$, los subespacios $U, V$ son $\mathcal{H}$-invariantes. En consecuencia, $U$ y $V$ son suma de subespacios peso. Como los subespacios de pesos no nulos tienen dimensión uno, una base de un tal subespacio es siempre un vector propio para todas las derivaciones de $\mathcal{H}$. Además, puesto que $A_0A_\gamma, A_\gamma A_0 \subseteq A_\gamma$, los elementos de estas bases también son vectores propios de $L_e$ y $R_e$. Consideramos una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $U$ y otra $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $V$ cuyos elementos están ordenados de tal modo que si $u_i$ genera $A_\gamma$ entonces $v_i$ genera $A_{-\gamma}$. Como el cuerpo es algebraicamente cerrado, podemos dividir por un escalar para que $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ sea canónica (corolario al teorema 1.10). Por la elección de $e$ se tiene el lema.

QED

Esta descomposición corresponde a las álgebras de composición de rango toral dos.

**Lema 4.17.** *Para una subálgebra de Cartan $\mathcal{H}$ de* $\mathrm{Der}\, A$ *equivalen*

i) *$\mathcal{H}$ actúa con al menos dos pesos linealmente independientes.*

ii) *$\mathcal{H} = \mathcal{F}H_1 + \mathcal{F}H_2$ con $H_1, H_2$ derivaciones diagonalizables y la descomposición de $A$ en espacios peso respecto de $\mathcal{H}$ es*

$$A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_\beta \oplus A_{-\beta} \oplus A_{\alpha+\beta} \oplus A_{-(\alpha+\beta)}.$$

iii) *La descomposición de $A$ respecto de $\mathcal{H}$ es $A = A_0 \oplus \sum A_\gamma$ con* $\dim A_0 =$ 2 *y* $\dim A_\gamma = 1$ *para todo* $\gamma \neq 0$.

*Demostración.* Sea $\mathcal{H}$ como en el apartado i) y $\alpha, \beta$ dos pesos linealmente independientes. Por el lema 4.7 se tiene que $A = A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_\beta \oplus A_{-\beta} \oplus A_*$ para algún cierto subespacio $\mathcal{H}$-invariante $A_*$. Para elementos $a_\alpha, a_{-\alpha}$ con $(a_\alpha, a_{-\alpha}) \neq 0$ el subespacio $(a_\alpha + a_{-\alpha})A_\beta$ es no nulo y se halla contenido en $A_{\alpha+\beta} \oplus A_{\beta-\alpha}$; en consecuencia, o bien $\beta + \alpha$ o bien $\beta - \alpha$ es también un peso. Denotemos por $\Gamma$ el conjunto de pesos no nulos de $\mathcal{H}$ en $A$. Salvo cambio de $\beta$ por $-\beta$, tenemos que $\{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha + \beta)\} \subseteq \Gamma$. Si $A_0$ fuese nulo entonces $A_{2\alpha}$ contendría al subespacio $(a_\alpha + a_{-\alpha})A_\alpha \neq 0$ y, por lo tanto, sería no nulo. Análogamente le ocurriría a $A_{2\beta}$. Esto implicaría que $\pm 2\alpha, \pm 2\beta \in \Gamma$; sin embargo, puesto que la dimensión de $A$ es ocho y ya hemos encontrado diez elementos en $\Gamma$, se sigue que alguno está repetido, lo cual contradice la independencia lineal de $\alpha$ y $\beta$. Concluimos que $\Gamma = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha + \beta)\}$ y $A = A_0 \oplus \sum_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ con $\dim A_0 = 2$ y $\dim A_\gamma = 1$. Esto junto con elteorema 4.8 nos dice que todos los elementos de $\mathcal{H}$ son diagonalizables, y también que los pesos son necesariamente lineales. En consecuencia, podemos encontrar en $\mathcal{H}$ derivaciones diagonalizables $\{H_1, H_2\}$ duales de $\{\alpha, \beta\}$. Dada cualquier otra derivación $H \in \mathcal{H}$ basta aplicarla a los espacios peso para ver que se expresa como $H = \alpha(H)H_1 + \beta(H)H_2$, con lo que queda demostrado el apartado ii).

iii) es inmediato a partir de ii)

Para demostrar que iii) implica i), fijamos $e$ la unidad, unidad a un lado o una paraunidad de $A_0$ y consideramos una base canónica como la del lema anterior. Sea $\widetilde{\mathcal{H}}$ la subálgebra de Cartan de $\mathrm{Der}\,(A, e)$ generada linealmente por $\{D_{u_1,v_1}, D_{u_2,v_2}\}$, $\widetilde{\mathcal{H}}$ se representa por matrices diagonales y, por lo tanto, $[\mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}}] = 0$ $\mathcal{H} \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}$ y $[\widetilde{\mathcal{H}}, R_e] = 0 = [\widetilde{\mathcal{H}}, L_e]$; sin embargo, por el lema 4.3, $\widetilde{\mathcal{H}} \subseteq \mathrm{Der}\, A$ y así $\widetilde{\mathcal{H}}$ está contenida en el normalizador de $\mathcal{H}$ en $\mathrm{Der}\, A$, pero como $\mathcal{H}$ es autonormalizada, entonces $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}}$. Como vimos en el capítulo 1, $\widetilde{\mathcal{H}}$, y en consecuencia $\mathcal{H}$, actúa con dos pesos linealmente independientes.

QED

**Lema 4.18.** *Para cualquier subálgebra de Cartan $\mathcal{H}$ de* $\mathrm{Der}\, A$ *el subespacio $A_0$ de peso nulo en la descomposición de $A$ respecto de $\mathcal{H}$ es no nulo.*

*Demostración.* El caso en que $A$ posee al menos dos pesos linealmente independientes se ha estudiado en el lema 4.17 por lo que en adelante supondremos que todos los pesos de $A$ son proporcionales y, para razonar por reducción al absurdo, que ninguno de ellos es nulo. Sea $\alpha$ un peso de $A$, por el lema 4.7 $A$ se descompone como $A = A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_*$ para algún subespacio $\mathcal{H}$-invariante $A_*$. Denotemos por $\mathcal{F}_0$ el cuerpo primo de $\mathcal{F}$ y por $\mathcal{F}_0^*$ los elementos no nulos de $\mathcal{F}_0$. La subálgebra $\sum_{i\in\mathcal{F}_0^*} A_{i\alpha}$ es de composición y por los teoremas 4.8 y 4.13 no puede tener dimensiones 1, 2 ó 4, por lo que $A = \sum_{i\in\Gamma} A_{i\alpha}$, donde $\Gamma$ denota el conjunto $\{i \in \mathcal{F}_0 \mid A_{i\alpha} \neq 0\}$. Por tener $\mathcal{F}$ característica distinta de 3, $\{\pm1, \pm2\} \subseteq \Gamma$. Además, como venimos notando, $\forall i \in \Gamma$ también $2i \in \Gamma$. Si $4 \in \{\pm1, \pm2\}$ entonces $\mathrm{car}\mathcal{F} = 5$ y $A = \sum_{i\in\mathcal{F}_0^*} A_{i\alpha}$. Esto es imposible. En efecto, en tal caso $\dim A_{i\alpha} = 2\ \forall i \in \mathcal{F}_0^*$, y para todo $a_{i\alpha}$ no nulo se tiene que, eligiendo $a_{-i\alpha}$ con $(a_{i\alpha}, a_{-i\alpha}) \neq 0$, $a_{i\alpha}A_{i\alpha} = (a_{i\alpha} + a_{-i\alpha})A_{i\alpha} = A_{2i\alpha}$. Así, $0 = n(a_{i\alpha})(A_{i\alpha}, A_{2i\alpha}) = (a_{i\alpha}A_{i\alpha}, a_{i\alpha}A_{2i\alpha}) = (A_{2i\alpha}, a_{i\alpha}A_{2i\alpha})$, por lo que $A_{i\alpha}A_{2i\alpha} = 0$. Análogamente $A_{2i\alpha}A_{i\alpha} = 0$. Dando valores 1,2 a $i$ tenemos $A_\alpha A_{2\alpha} = 0 = A_{-\alpha}A_{2\alpha}$, lo que se contradice con que $n(A_\alpha + A_{-\alpha}) \neq 0$. En consecuencia, $4 \notin \{\pm1, \pm2\}$ y $\Gamma$ contiene a $\{\pm1, \pm2, \pm4\}$. Duplicando el 4 tenemos $\pm8 \in \Gamma$. Si $8 \in \{\pm1, \pm2, \pm4\}$ entonces $\mathrm{car}\mathcal{F} = 7$ y fácilmente se ve que $\dim A_{i\alpha} = \dim A_{j\alpha}\ \forall i, j$, lo cual obliga a que $8 = \dim A = 6 \dim A_{i\alpha}$, que no es posible. En resumen, $\Gamma = \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8\}$. Ahora $(a_\alpha + a_{-\alpha})A_{4\alpha} \subseteq A_{3\alpha} + A_{5\alpha}$, por lo que 3 ó $5 \in \Gamma$. Así, $\mathrm{car}\mathcal{F} = 11$ ó 13. Si $\mathrm{car}\mathcal{F} = 11$ entonces $5 = 16 \in \Gamma$, lo cual no es cierto, y si $\mathrm{car}\mathcal{F} = 13$ entonces $3 = 16 \in \Gamma$ que tampoco es cierto. Consecuentemente hemos llegado a una contradicción, por lo tanto $A_0 \neq 0$.

QED

El siguiente teorema clasifica las subálgebras de Cartan.

**Teorema 4.19.** *Sea $\mathcal{H}$ una subálgebra de Cartan del álgebra de derivaciones de un álgebra de composición de dimensión ocho sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $\neq 2,3$. Entonces o bien la acción de* $\operatorname{Der} A$ *en $A$ es nilpotente o bien se cumple una de las siguientes afirmaciones:*

I) $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_\beta \oplus A_{-\beta} \oplus A_{\alpha+\beta} \oplus A_{-(\alpha+\beta)}$ *con $\alpha, \beta$ pesos linealmente independientes,* $\dim A_\gamma = 1$ $\forall \gamma \neq 0$, $\dim A_0 = 2$ *y* $\mathcal{H} = \mathcal{F}H_1 + \mathcal{F}H_2$ *con $H_1$ y $H_2$ derivaciones diagonalizables linealmente independientes.*

II) $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_{2\alpha} \oplus A_{-2\alpha}$ *con* $\dim A_{\pm\alpha} = 2$, $\dim A_{\pm 2\alpha} = 1$, $\dim A_0 = 2$ *y o bien* $\mathcal{H} = \mathcal{F}H_s + \mathcal{F}H_n$ *o bien* $\mathcal{H} = \mathcal{F}H_s$ *con $H_s$ diagonalizable y $H_n$ nilpotente.*

III) $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$ *con* $\dim A_{\pm\alpha} = 2$, $\dim A_0 = 4$ *y o bien* $\mathcal{H} = \mathcal{F}H_s + \mathcal{F}H_n$ *o bien* $\mathcal{H} = \mathcal{F}H_s$ *con $H_s$ diagonalizable y $H_n$ nilpotente.*

*Demostración.* El caso en que $A$ posee al menos dos pesos linealmente independientes se sigue del lema 4.17. Así, para demostrar el teorema, podemos suponer que todos los pesos de $\mathcal{H}$ en $A$ son proporcionales y alguno no nulo. Por el lema anterior se tiene que $A$ se descompone respecto de $\mathcal{H}$ como $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_*$ con $A_0 \neq 0$.
Caso III) Si $A_* = 0$ entonces $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$. Como $(a_\alpha + a_{-\alpha})A_0 \subseteq A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$ y $(a_\alpha + a_{-\alpha})(A_\alpha \oplus A_{-\alpha}) \subseteq A_0$, eligiendo $a_\alpha$ y $a_{-\alpha}$ con $(a_\alpha, a_{-\alpha}) \neq 0$

deducimos que $\dim A_{\pm\alpha} = 2$ y $\dim A_0 = 4$. Con respecto a la forma de $\mathcal{H}$, observemos que por antisimetría, dada $H \in \mathcal{H}$ con $(A_\alpha)H = 0$ también $(A_{-\alpha})H = 0$ y $(A_0)H = (A_\alpha A_{-\alpha} + A_{-\alpha}A_\alpha)H = 0$; así, la aplicación $H \mapsto H|_{A_\alpha}$ de $\mathcal{H}$ en $\mathrm{End}_{\mathcal{F}}(\mathrm{A}_\alpha)$ es inyectiva. Denotando por sl(2) los endomorfismos de traza cero en $A_\alpha$, por la nilpotencia de $\mathcal{H}$ se tiene que $\dim(\mathrm{sl}(2) \cap \mathcal{H}) \leq 1$ y, por lo tanto, $\dim \mathcal{H} \leq 2$. Como $A$ no puede tener dos derivaciones diagonalizables independientes, ya que todos sus pesos son proporcionales, concluimos que $\mathcal{H} = \mathcal{F}H_s$ ó $\mathcal{H} = \mathcal{F}H_s + \mathcal{F}H_n$.

Caso II) Si $A_* \neq 0$ entonces, en vista del lema 4.17, $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_{2\alpha} \oplus A_{-2\alpha}$. Por un lado $(a_{2\alpha} + a_{-2\alpha})A_0 \subseteq A_{2\alpha} + A_{-2\alpha}$ implica que $\dim A_0 \leq 2 \dim A_\alpha$ y por lo tanto $\dim A_0 = 2$. Por otro lado, si car$\mathcal{F} > 5$, el que $(a_{2\alpha} + a_{-2\alpha})(A_{2\alpha} + A_{-2\alpha}) \subseteq A_0$ obliga a que $\dim A_{\pm 2\alpha} = 1$ y $\dim A_{\pm\alpha} = 2$. Para car$\mathcal{F} = 5$ cambiando el $i\alpha$ con $\dim A_{i\alpha} = 2$ por $\alpha$ se vuelve a tener $\dim A_{\pm\alpha} = 2$ y $\dim A_{\pm 2\alpha} = 1$.

Por último, observamos que si $H \in \mathcal{H}$ con $(A_\alpha)H = 0$ entonces por antisimetría $(A_{-\alpha})H = 0$ y, puesto que por dimensiones $(a_\alpha + a_{-\alpha})(A_\alpha + A_{-\alpha}) = A_0 + A_{2\alpha} + A_{-2\alpha}$, se sigue que $H = 0$. Como antes, la aplicación $H \mapsto H|_{A_\alpha}$ es inyectiva y los mismos argumentos son válidos para este caso.

QED

## Subálgebras de Cartan y $\mathbb{Z}_3$ graduaciones.

En cualquier álgebra de composición $A$ de rango toral no nulo la descomposición en espacios peso proporciona una $\mathbb{Z}_3$ graduación no trivial de $A$. Para las álgebras de los distintos apartados del teorema 4.19 las asignaciones

$$
\begin{aligned}
&\text{I)}\quad A^{(0)} = A_0,\ A^{(1)} = A_\alpha \oplus A_\beta \oplus A_{-(\alpha+\beta)},\ \text{y } A^{(2)} = A_{-\alpha} \oplus A_{-\beta} \oplus A_{\alpha+\beta} \\
&\text{II)}\quad A^{(0)} = A_0,\ A^{(1)} = A_\alpha \oplus A_{-2\alpha},\ \text{y } A^{(2)} = A_{-\alpha} \oplus A_{2\alpha} \\
&\text{III)}\quad A^{(0)} = A_0,\ A^{(1)} = A_\alpha,\ \text{y } A^{(2)} = A_{-\alpha}
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

constituyen una $\mathbb{Z}_3$ graduación de $A$. Dado $e \in A_0$ con $n(e) \neq 0$, la descomposición $(A,e) = A^{(0)} \oplus A^{(1)} \oplus A^{(2)}$ es también una $\mathbb{Z}_3$ graduación de $(A,e)$; así, por la proposición 2.4, es o bien corta o bien larga. Por tanto, existe una base canónica de $(A,e)$ de tal modo que las anteriores graduaciones se expresan como

$$
\begin{aligned}
\text{I) y II)}\quad & A^{(0)} = \langle e_1, e_2 \rangle,\ A^{(1)} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \quad \text{y} \quad A^{(2)} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \\
\text{III)}\quad & A^{(0)} = \langle e_1, e_2, u_1, v_1 \rangle,\ A^{(1)} = \langle u_2, v_3 \rangle \quad \text{y} \quad A^{(2)} = \langle u_3, v_2 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Al ser el cuerpo base algebraicamente cerrado, por el corolario al teorema 1.10 podemos cambiar esta base canónica para que los espacios peso que conforman las $\mathbb{Z}_3$ graduaciones en (4.4) sean

$$
\begin{aligned}
\text{I)}\quad & A_0 = \langle e_1, e_2 \rangle,\ A_\alpha = \mathcal{F}u_1,\ A_\beta = \mathcal{F}u_2,\ A_{-(\alpha+\beta)} = \mathcal{F}u_3, \\
& A_{-\alpha} = \mathcal{F}v_1,\ A_{-\beta} = \mathcal{F}v_2 \text{ y } A_{\alpha+\beta} = \mathcal{F}v_3 \\
\text{II)}\quad & A_0 = \langle e_1, e_2 \rangle,\ A_\alpha = \langle u_2, u_3 \rangle,\ A_{-2\alpha} = \mathcal{F}u_1,\ A_{-\alpha} = \langle v_2, v_3 \rangle \\
& \text{y } A_{2\alpha} = \mathcal{F}v_1 \\
\text{III)}\quad & A_0 = \langle e_1, e_2, u_1, v_1 \rangle,\ A_\alpha = \langle u_2, v_3 \rangle \text{ y } A_{-\alpha} = \langle v_2, u_3 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Es importante que notemos que los subespacios peso son $L_e$ y $R_e$ invariantes, por lo que las isometrías que cambian $A$ por $(A,e)$ tienen un comportamiento relativamente controlado.

Por último, puesto que las $\mathbb{Z}_3$ graduaciones de los apartados II y III de 4.4 se convierten en 4.5 en $\mathbb{Z}_3$ graduaciones cortas y largas, respectivamente, de un álgebra de Cayley, parece razonable, por comodidad en el lenguaje, dar la siguiente definición:

**Definición.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión ocho y rango toral uno sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica distinta de* 2 *y* 3. *Una subálgebra de Cartan de* $\operatorname{Der} A$ *que proporcione una descomposición en subespacios peso de $A$ como la del apartado II del teorema 4.19 se dirá corta; si la descomposición es como la del apartado III entonces la llamaremos larga.*

## 4. Algebras de rango toral 2

En esta sección, a menos que se establezcan explícitamente otras hipótesis, el cuerpo base $\mathcal{F}$ se supondrá algebraicamente cerrado (y de característica $\neq 2$ y 3). Dada $A$ un álgebra de composición de rango toral 2 y $\mathcal{H}$ una subálgebra de Cartan de $\operatorname{Der} A$ que actúa con dos pesos linealmente independientes en $A$,

$$A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_\beta \oplus A_{-\beta} \oplus A_{\alpha+\beta} \oplus A_{-(\alpha+\beta)} \tag{4.7}$$

denotará la descomposición de $A$ en subespacios peso respecto de $\mathcal{H}$ (lema 4.17).

El lema 4.16 nos da las pistas para construir todas estas álgebras.

**Proposición 4.20.** *Las álgebras de composición de rango toral* 2 *son aquellas álgebras cuyo producto $xy$ se construye a partir del álgebra de Cayley split $(\mathfrak{C}, \circ)$, con unidad $e$, y una base canónica $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ definiendo $xy = x^\varphi \circ y^\psi$ donde $\varphi$ y $\psi$ representan cualquier aplicación lineal* *cuya matriz coordenada en base*

$$\{e, e_1 - e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\} \tag{4.8}$$

*tenga la forma*

$$\mathrm{diag}(1, \pm 1, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_1^{-1}, \epsilon_2^{-1}, \epsilon_3^{-1}) \tag{4.9}$$

*con* $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \mathcal{F}$ *no nulos.*

*Demostración.* El lema 4.16 dice que toda álgebra de rango toral dos es de la forma indicada, por lo que únicamente debemos comprobar que toda álgebra construida como en el enunciado tiene rango toral dos. Sea $A$ una tal álgebra, notemos primero que, por la forma de las matrices coordenadas, las aplicaciones $\varphi$ y $\psi$ son isometrías, además $e^{\varphi} = e = e^{\psi}$, por lo que $ee = e^{\varphi} \circ e^{\psi} = e$, $\varphi = R_e$ y $\psi = L_e$; en consecuencia, $(\mathfrak{C}, \circ) = (A, e)$. La subálgebra de Cartan $\widetilde{\mathcal{H}} = \langle D_{u_1,v_1}, D_{u_2,v_2} \rangle$ de $\mathrm{Der}\,(A, e)$ se representa en la base (4.8) por matrices diagonales y, así, $[\widetilde{\mathcal{H}}, R_e] = 0 = [\widetilde{\mathcal{H}}, L_e]$ y $\widetilde{\mathcal{H}} \subseteq \mathrm{Der}\, A$. Por lo comentado en el capítulo 1, $\widetilde{\mathcal{H}}$ proporciona una descomposición de $A$ del tipo (4.7). Para demostrar la proposición faltaría comprobar que $\widetilde{\mathcal{H}}$ es también subálgebra de Cartan de $\mathrm{Der}\, A$. Sea $D \in \mathrm{Der}\, A$ con $[\widetilde{\mathcal{H}}, D] \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}$, fácilmente se comprueba que $(A_0)D \subseteq A_0$, lo que, por el teorema 4.8, equivale a $(A_0)D = 0$. Así, $D \in \mathrm{Der}\,(A, e)$ y $[\widetilde{\mathcal{H}}, D] \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}$. Puesto que $\widetilde{\mathcal{H}}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathrm{Der}\,(A, e)$, se sigue que $D \in \widetilde{\mathcal{H}}$.

QED

Sea $A$ un álgebra de composición de rango toral dos, el próximo teorema nos dirá que si $A$ no es un álgebra de Okubo entonces todas sus derivaciones quedan inducidas por un álgebra de Cayley-Dickson. Esta situación es un poco más general y tiene relación con la presencia de una $\mathbb{Z}_3$ graduación en $A$.

**Lema 4.21.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8 que posee una $\mathbb{Z}_3$ graduación no trivial $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)} \oplus A^{(2)}$ con $\dim A^{(0)} = 2$. Si existe una unidad o unidad a un lado $e$ de $A^{(0)}$ cuyos operadores de multiplicación conmutan, entonces toda derivación anula a $e$ y, por lo tanto,* $\mathrm{Der}\, A \subseteq \mathrm{Der}\,(A, e)$.

*Demostración.* Es claro que, puesto que $e \in A^{(0)}$, la $\mathbb{Z}_3$ graduación de $A$ es también una $\mathbb{Z}_3$ graduación en $(A, e)$, que por la proposición 2.4 es necesariamente corta. Así, existe una base canónica en $(A, e)$ de tal modo que $A^{(0)} = \mathcal{F}e_1 + \mathcal{F}e_2$, $A^{(1)} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle = U(e_1)$ y $A^{(2)} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle = V(e_1)$. Por otro lado, la $\mathbb{Z}_3$ graduación de $A$ también induce una $\mathbb{Z}_3$ graduación en $\mathcal{L} = \mathrm{Der}\, A = \mathcal{L}^{(0)} \oplus \mathcal{L}^{(1)} \oplus \mathcal{L}^{(2)}$ con $\mathcal{L}^{(i)} = \{D \in \mathcal{L} \mid A^{(i)}D \subseteq A^{(i+j)}\}$ (donde los índices se consideran módulo 3).

Por el teorema 4.8, las derivaciones en $\mathcal{L}^{(0)}$ inducen derivaciones triviales en $A^{(0)}$ y por lo tanto anulan a $e$. Sea, pues, $D \in \mathcal{L}^{(1)}$, por la clasificación de Petersson (proposición 3.1) puede ocurrir:

i) *$e$ es la unidad de $A^{(0)}$*: En tal caso $e_i^2 = e_i$ y $e_ie_j = 0$, $i \neq j$. Se tiene $e_iD = e_i^2D = (e_iD)e_i + e_i(e_iD) = (e_iD)e \circ e_i + e_i \circ e(e_iD)$. Como $e_iD \in U(e_1)$, poniendo $i = 1$ en esta igualdad queda $e_1D = e(e_1D)$ y con $i = 2$ da $e_2D = (e_2D)e$. En consecuencia,

$$(e_1D)e = (e(e_1D))e \quad e(e_2D) = e((e_2D)e)$$

Por último, usando estas relaciones y el hecho de que $[L_e, R_e] = 0$, obtenemos $0 = (e_1e_2)D = ((e_1D)e) \circ e_2 + e_1 \circ e(e_2D) = (e_1D)e + e(e_2D) = (e(e_1D))e + e((e_2D)e) = e(eD)e$. Concluimos que $eD = 0$.

ii) *$e$ es unidad a izquierda, pero no a derecha, de $A_0$*: Entonces $e_i^2 = 0$, $i = 1, 2$; $e_1e_2 = e_2$ y $e_2e_1 = e_1$. Por un lado $e_1D = (e_2e_1)D = (e_2D)e \circ (ee_1) + (e_2e) \circ e(e_1D) = (e_2D)e \circ e_1 + e_1 \circ e(e_1D) = e(e_1D)$, y por otro

$e_2D = (e_1e_2)D = (e_1D)e \circ (ee_2) + (e_1e) \circ e(e_2D) = (e_1D)e$. Por último, $0 = e_2^2D = (e_2D)e \circ (ee_2) + (e_2e) \circ e(e_2D) = (e_2D)e + e(e_2D) = (e_2D)e + e(e_1D)e = (eD)e$, de donde $eD = 0$.

iii) *$e$ es unidad a derecha, pero no a izquierda, de $A_0$*: Análogamente al caso anterior se obtiene que $eD = 0$.

En conclusión $e\mathcal{L}^{(1)} = 0$. Como lo mismo se puede deducir para $\mathcal{L}^{(2)}$, se tiene el lema.

QED

Sea $A$ un álgebra de rango toral dos y $e$ la unidad, unidad a un lado o una paraunidad del subespacio peso $A_0$ de la descomposición (4.7) de $A$. Puesto que los subespacios peso son $L_e$ y $R_e$ invariantes, es inmediato observar que $[L_e, R_e] = 0$. Así, el lema anterior resuelve parte del siguiente teorema.

**Teorema 4.22.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8, sobre un cuerpo arbitrario $\mathcal{F}$ de característica $\neq 2$ y 3, de tal modo que $\bar{A} = \bar{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{F}} A$ tiene rango toral 2. Entonces o bien*

i) *$A$ es un álgebra de Okubo*

*o bien*

ii) *Existe un elemento $e \in A$ con $n(e) = 1$ de tal modo que $e(\mathrm{Der}\, A) = 0$ y, en consecuencia, $\mathrm{Der}\, A \subseteq \mathrm{Der}\,(A, e)$.*

*Demostración.* Empecemos observando que $\bar{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{F}} \{x \in A \,|\, x(\mathrm{Der}\, A) = 0\} = \{y \in \bar{A} \,|\, y(\mathrm{Der}\, \bar{A}) = 0\}$, por lo que si existiese $y \in \bar{A}$ con $y(\mathrm{Der}\, \bar{A}) = 0$ y $n(y) \neq 0$, también así $x \in A$ con $x(\mathrm{Der}\, A) = 0$ y $n(x) \neq 0$. Tomando $e = \frac{x^2}{n(x)}$ tendríamos que el teorema es cierto para $A$. Podemos, por lo tanto, suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}$ y $A = \bar{A}$. Denotemos por $\mathcal{L}$ el álgebra $\operatorname{Der} A$, y sea (4.7) la descomposición de $A$ respecto a una subálgebra de Cartan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{L}$. El lema anterior resuelve los casos en que $A_0$ no sea paraHurwitz, así que en adelante supondremos que $A_0$ es paraHurwitz y que ninguna de sus tres paraunidades (recordemos el lema 1.19) es anulada por $\operatorname{Der} A$.

Sea $z$ una paraunidad de $A_0$, en algún subespacio raíz $\mathcal{L}_\gamma$ existe una derivación $D \in \mathcal{L}_\gamma$ con $zD \neq 0$. Como $zD \in A_\gamma$, se sigue que $\gamma$ es un peso de $A$. Sin pérdida de generalidad puede considerarse que $\gamma = \alpha$. La subálgebra de composición $A(\alpha) = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$ tiene a $D$ como derivación nilpotente, a $A_0$ como subálgebra de tipo paraHurwitz y al menos una derivación diagonalizable, por lo que, en vista del teorema 4.13, $A(\alpha)$ es paraHurwitz y, por supuesto, su paraunidad $e$ pertenece a $A_0$. Consideremos una base canónica de $(A, e)$ como la que aparece en (4.6), las matrices coordenadas de $R_e$ y $L_e$ en base $\{e, e_1 - e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ tienen la forma

$$
\begin{aligned}
L_e &\leftrightarrow \operatorname{diag}(1, -1, \epsilon_{l1}, \epsilon_{l2}, \epsilon_{l3}, \epsilon_{l1}^{-1}, \epsilon_{l2}^{-1}, \epsilon_{l3}^{-1}) \\
R_e &\leftrightarrow \operatorname{diag}(1, -1, \epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}, \epsilon_{r3}, \epsilon_{r1}^{-1}, \epsilon_{r2}^{-1}, \epsilon_{r3}^{-1})
\end{aligned}
$$

Por ser $e$ la paraunidad de $A(\alpha)$ se tiene que

$$\epsilon_{l1} = -1 = \epsilon_{r1}.$$

Como $zD \neq 0 = eD$ y $D \in \mathcal{L}_\alpha$ entonces $0 \neq e_1 D = -e_2 D \in A_\alpha = \mathcal{F}u_1$ y $D \in \operatorname{Der}(A, e)$. Multiplicando $D$ escalarmente si fuese necesario, tenemos

$$e_1 D = u_1.$$

Al pertenecer $u_2 D$ a $A_{\alpha+\beta} = \mathcal{F}v_3$ ocurre que

$$u_2 D = (e_1 \circ u_2) D = e_1 D \circ u_2 + e_1 \circ (u_2 D) = u_1 \circ u_2 = v_3.$$

Ahora $\epsilon_{l3}^{-1}v_3 = e(u_2D) = (eu_2)D = \epsilon_{l2}u_2D = \epsilon_{l2}v_3$. De modo similar conseguimos

$$\epsilon_{l3} = \epsilon_{l2}^{-1} \quad \text{y} \quad \epsilon_{r3} = \epsilon_{r2}^{-1}. \tag{4.10}$$

Por otro lado, como hemos supuesto que $\operatorname{Der} A$ no anula a $e$, debe existir $D'$ en algún subespacio raíz con $eD' \neq 0$. Sin pérdida de generalidad

$$D' \in \mathcal{L}_\beta \quad \text{y} \quad eD' = u_2.$$

Aparecen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} e_2D' &= e_1^2D' = (e_1D')e_1 + e_1(e_1D') \\ &= ((e_1D')e) \circ e_2 + e_2 \circ e(e_1D') = (e_1D')e \\ e_1D' &= (e_2^2D') = e(e_2D') \\ 0 &= (e_2e_1)D' = (e_2D')e + e(e_1D') \end{aligned} \tag{4.11}$$

Como $[L_e, R_e] = 0$, usando estas relaciones obtenemos que

$$e_1D'L_e^3 = -((e_2D')e)L_e^2 = -((e_1D')e)L_e = -e_1D'.$$

Análogamente

$$e_1D'R_e^3 = -e_1D', \quad e_2D'L_e^3 = -e_2D' \quad \text{y} \quad e_2D'R_e^3 = -e_2D'.$$

Ahora bien, $e_iD'$ pertenece a $A_\beta = \mathcal{F}u_2$ y por lo tanto es un vector propio de valores propios $\epsilon_{l2}$ y $\epsilon_{r2}$ para los operadores $L_e$ y $R_e$ respectivamente; en consecuencia,

$$\epsilon_{l2}^3 = -1 = \epsilon_{r2}^3.$$

Más aún, si por ejemplo $\epsilon_{l2}$ fuese $-1$ entonces ocurriría que $e(e_1D') = -e_1D'$ y, por (4.11), $e_1D' = e(e(e_1D')) = -e(e_2D')e = -(e_1D')e = -e_2D'$, lo que se contradice con que $eD' \neq 0$. Por lo tanto

$$\epsilon_{l2} = -\omega, \quad \epsilon_{l3} = \epsilon_{l2}^{-1} = -\omega^2 \quad \text{y} \quad eu_2 = -\omega u_2$$

con $\omega$ raíz cúbica primitiva de la unidad.

Por último, como $0 \neq eD' \in \mathcal{F}u_2$, se tiene que $eD' = e^2D' = eD'(L_e + R_e) = (-\omega + \epsilon_{r2})eD'$ y, así,

$$\epsilon_{r2} = 1 + \omega = -\omega^2 \quad \text{y} \quad \epsilon_{r3} = \epsilon_{r2}^{-1} = -\omega \ .$$

Así, la matriz coordenada de $L_e$ en base $\{e, e_1 - e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ es

$$\mathrm{diag}(1, -1, -1, -\omega, -\omega^2, -1, -\omega^2, -\omega)$$

y $R_e = L_e^{-1}$. El producto en $A$ se puede expresar como $xy = xe \circ ey = \bar{x}^{\tau}\bar{y}^{\tau^{-1}}$ donde $\tau$ representa una aplicación lineal de $A$ cuya matriz coordenada en la base canónica es $\mathrm{diag}(1, 1, 1, \omega, \omega^2, 1, \omega^2, \omega)$. Puesto que por el teorema 1.10 $\tau$ es un automorfismo de $(A, e)$, podemos concluir, por la proposición 2.7, que $A$ es un álgebra de Okubo.

QED

Es sabido [E-M 91] que el álgebra de derivaciones de un álgebra de Okubo es un álgebra de Lie simple central de tipo $A_2$. Nuestro propósito en lo que resta de sección es determinar *sobre cuerpos algebraicamente cerrados* el álgebra de derivaciones de las álgebras de composición del apartado ii) del teorema anterior. Sea $A$ una tal álgebra de composición, consideramos $e$ la unidad, unidad a un lado o cierta paraunidad de $A_0$ para la cual $e(\mathrm{Der}\, A) = 0$ y fijamos una base canónica de $(A, e)$ como la que aparece en (4.6). Las matrices coordenadas de $L_e$ y $R_e$ en $\{e, e_1 - e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ tienen la forma (4.9).

*Reducción: El signo $\pm 1$ que aparece en las matrices coordenadas de $L_e$ y $R_e$ es irrelevante para nuestros cálculos y puede suponerse 1.* En efecto, sea $x \mapsto x^J$ la involución canónica de $(A, e)$ y elijamos $i, j \in \{0, 1\}$ de tal modo que las matrices coordenadas de $\varphi = J^i R_e$ y $\psi = J^j L_e$ tengan un 1 en la segunda posición de la diagonal. Es inmediato observar que el álgebra $x * y = x^\varphi \circ y^\psi$ es de rango toral 2 y que la subálgebra de Cartan $\mathcal{H} = \langle D_{u_i,v_i} \mid i = 1,2\rangle$ de $\operatorname{Der}(A,e)$ lo es también de $\operatorname{Der}(A,*)$ (recordemos la demostración de la proposición 4.20) y tiene como espacio de peso nulo a $A_0$. Como $(A_0,*)$ es subálgebra Hurwitz, con unidad $e$, de $(A,*)$ y las derivaciones en $\operatorname{Der}(A,e)$ conmutan con $J$, se sigue que $\operatorname{Der}(A,*) = \{D \in \operatorname{Der}(A,e) \mid [\varphi, D] = 0 = [\psi, D]\} = \operatorname{Der} A$. Bastaría entonces considerar $(A,*)$ en lugar de $A$ para hacer los cálculos. En consecuencia, podemos suponer en lo que sigue que los operadores $L_e$ y $R_e$ tienen matrices coordenadas

$$\begin{aligned} L_e &\leftrightarrow \operatorname{diag}(1,1,\epsilon_{l1},\epsilon_{l2},\epsilon_{l3},\epsilon_{l1}^{-1},\epsilon_{l2}^{-1},\epsilon_{l3}^{-1}) \\ R_e &\leftrightarrow \operatorname{diag}(1,1,\epsilon_{r1},\epsilon_{r2},\epsilon_{r3},\epsilon_{r1}^{-1},\epsilon_{r2}^{-1},\epsilon_{r3}^{-1}). \end{aligned}$$

Recordemos que la $\mathbb{Z}_3$ graduación (4.4) asociada a la descomposición en espacios peso de $A$ es una $\mathbb{Z}_3$ graduación corta de $(A,e)$ que, por lo visto en el capítulo 1, induce una $\mathbb{Z}_3$ graduación corta en $\operatorname{Der}(A,e)$:

$$\operatorname{Der}(A,e) = \mathcal{D}^{(0)} \oplus \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(2)}$$

con $\mathcal{D}^{(0)} = \langle D_{u_i,v} \mid i = 1,2,3 \text{ y } v \in V(e_1)\rangle$, $\mathcal{D}^{(1)} = \{D_{e_1,u} \mid u \in U(e_1)\}$ y $\mathcal{D}^{(2)} = \{D_{e_2,v} \mid v \in V(e_1)\}$.

El álgebra $\mathcal{L} = \operatorname{Der} A$ se descompone como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} \oplus \mathcal{L}^{(1)} \oplus \mathcal{L}^{(2)}$$

con $\mathcal{L}^{(i)} = \{D \in \mathcal{D}^{(i)} \mid [R_e, D] = 0 = [L_e, D]\}$. El estudio de $\operatorname{Der} A$ pasa por mostrar que o bien $L_e$ y $R_e$ son automorfismos de $(A,e)$ o bien $A$ puede sustituirse, sin alterar el álgebra de derivaciones, por otra donde tales operadores sí lo sean. Aunque la expresión $[\tau, D_{x,y}] = 0$ equivale a $D_{x^\tau,y^\tau} = D_{x,y}$ para cualquier automorfismo $\tau$ (recordemos la forma de los operadores $D_{x,y}$), es sin embargo esta última la que permite un mejor análisis.

Veamos que si $\mathcal{L}^{(1)} \neq 0$ (análogamente $\mathcal{L}^{(2)} \neq 0$) entonces $R_e$ y $L_e$ son automorfismos. En efecto, para ello basta demostrar que $\det L_e|_{U(e_1)} = 1$. Sea $\tau = L_e$ y $D_{e_1,u} \in \mathcal{L}^{(1)}$, tenemos que $u = e_1 D_{e_1,u} = (ee_1)D_{e_1,u} = eu$. Salvo cambio de base canónica, podemos suponer $u_1 = u$ y $eu_1 = u_1$. Por lo comentado en el capítulo 1,

$$u' D_{e_1,u_1} = u_1 \circ u' \quad \forall u' \in U(e_1)$$

En particular, $\epsilon_{l2} v_3 = u_1 \circ (eu_2) = (eu_2)D_{e_1,u_1} = e(u_2 D_{e_1,u_1}) = e(u_1 \circ u_2) = ev_3 = \epsilon_{l3}^{-1} v_3$ por lo que $\epsilon_{l3} = \epsilon_{l2}^{-1}$. Análogamente

$$\epsilon_{l1} = 1 \quad \epsilon_{l3} = \epsilon_{l2}^{-1} \quad \epsilon_{r1} = 1 \quad \text{y} \quad \epsilon_{r3} = \epsilon_{r2}^{-1} \tag{4.12}$$

En consecuencia, $L_e$ y $R_e$ son automorfismos de $(A, e)$ que fijan la subálgebra $B = \langle e_1, e_2, u_1, v_1 \rangle$. Un sencillo cálculo muestra que, con la notación del teorema 1.12, $L_e = \tau_b$ y $R_e = \tau_a$ con $b = \epsilon_{l2} e_1 + \epsilon_{l2}^{-1} e_2$ y $a = \epsilon_{r2} e_1 + \epsilon_{r2}^{-1} e_2$.

Pasemos a calcular $\operatorname{Der} A$ en este caso. Por $\tau$ denotaremos indistintamente las aplicaciones $\tau_a$ y $\tau_b$; $\epsilon_i$ denotará $\epsilon_{ri}$ o $\epsilon_{li}$ dependiendo de $\tau$. Dados $x \in U(e_1)$, $y, y_i \in V(e_1)$, $i = 1,2,3$ tenemos que

$$D_{e_1,x} \in \mathcal{L}^{(1)} \Leftrightarrow D_{e_1,x^\tau} = D_{e_1,x} \forall \tau \Leftrightarrow x^\tau = x \forall \tau$$

y análogamente

$$D_{e_2,y} \in \mathcal{L}^{(2)} \Leftrightarrow y^\tau = y \forall \tau.$$

Esto nos dice que o bien $L_e$ y $R_e$ son la identidad y $A$ es Hurwitz, o bien $\mathcal{L}^{(1)} = \langle D_{e_1,u_1} \rangle$ y $\mathcal{L}^{(2)} = \langle D_{e_2,v_1} \rangle$. Supongamos este último caso. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum D_{u_i,y_i} \in \mathcal{L}^{(0)} &\Leftrightarrow \sum D_{u_i^\tau, y_i^\tau} = \sum D_{u_i,y_i} \forall \tau \\ &\Leftrightarrow \sum D_{u_i, \epsilon_i y_i^\tau} = \sum D_{u_i,y_i} \forall \tau \Leftrightarrow \sum D_{u_i, \epsilon_i y_i^\tau - y_i} = 0. \end{aligned}$$

Como vimos en el capítulo 1, esto ocurre si y sólo si existe $\lambda \in \mathcal{F}$ de tal modo que $\epsilon_i y_i^\tau - y_i = \lambda v_i \,\forall i$. Por lo tanto $y_i^\tau - \epsilon_i^{-1} y_i = \lambda \epsilon_i^{-1} v_i$ e $y_i^{(\tau-\epsilon_i^{-1} id)^2} = 0$; ahora bien, $\tau$ es diagonalizable y, en consecuencia, $\lambda = 0$ e $y_i^\tau = \epsilon_i^{-1} y_i \,\forall i$. De aquí deducimos que

$$\sum D_{u_i,y_i} \in \mathcal{L}^{(0)} \Leftrightarrow y_i^\tau = \epsilon_i^{-1} y_i \,\forall i \Leftrightarrow D_{u_i,y_i} \in \mathcal{L}^{(0)} \,\forall i.$$

Las únicas $D_{u_1,y_1}$ que pueden aparecer son las de $\langle D_{u_1,v_1} \rangle$ ya que $y_1^\tau = y_1 \,\forall \tau$ implica que $y_1 \in \mathcal{F} v_1$. Respecto a $D_{u_2,y_2}$, tenemos que o bien $(\epsilon_{l2}, \epsilon_{r2}) = (\epsilon_{l3}, \epsilon_{r3})$ y entonces $\mathcal{L}^{(0)} = \langle D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}, D_{u_i,v_i} \mid i = 1,2 \rangle$, o bien, en otro caso, $\mathcal{L}^{(0)} = \langle D_{u_i,v_i} \mid i = 1,2 \rangle$. Si usamos (4.12) podemos resumir esto diciendo que si $a = 1 = b$ entonces $\operatorname{Der} A = \operatorname{Der}(A, e)$ y $A$ es Hurwitz, si $a, b = \pm 1$ pero no se tiene $a = b = 1$ entonces $\operatorname{Der} A = \langle D_{e_1,u_1}, D_{e_2,v_1}, D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}, D_{u_i,v_i} \mid i = 1,2 \rangle$ y, por último, si $a$ *o* $b \neq \pm 1$ entonces $\operatorname{Der} A = \langle D_{e_1,u_1}, D_{e_2,v_1}, D_{u_i,v_i} \mid i = 1,2 \rangle$.

Supongamos ahora que $\mathcal{L}^{(1)} = 0 = \mathcal{L}^{(2)}$. En tal caso $\operatorname{Der} A = \mathcal{L}^{(0)}$ y, por consiguiente, todas las derivaciones de $A$ respetan la $\mathbb{Z}_3$ graduación. En particular, cualquier derivación conmuta con la isometría $\rho_\alpha$ definida mediante

$$e_i \mapsto e_i, \quad u \mapsto \alpha u, \quad v \mapsto \tfrac{1}{\alpha} v$$

con $u \in U(e_1), v \in V(e_1)$. Con $\alpha^3 = \det^{-1}(L_e|_{U(e_1)})$ y $\beta^3 = \det^{-1}(R_e|_{U(e_1)})$, las aplicaciones $\rho_\alpha L_e$ y $\rho_\beta R_e$ son isomorfismos de $(A, e)$. Además, $\operatorname{Der} A = \mathcal{L}^{(0)} \subseteq \langle D_{u_i,v} \mid i = 1,2,3 \text{ y } v \in V(e_1) \rangle$ y

$$\begin{aligned} D = \sum D_{u_i,y_i} \in \mathcal{L}^{(0)} \quad &\Leftrightarrow \quad [L_e, D] = [R_e, D] = 0 \Leftrightarrow [\rho_\alpha L_e, D] = [\rho_\beta R_e, D] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum D_{u_i^\tau, v_i^\tau} = \sum D_{u_i,v_i} \,\forall \tau = \rho_\alpha L_e \text{ ó } \rho_\beta R_e, \end{aligned}$$

por lo que, salvo cambio de $xy$ por $(x)\rho_\alpha L_e \circ (y)\rho_\beta R_e$, podemos suponer que $L_e$ y $R_e$ son automorfismos de $(A, e)$.

Análogamente a la situación anterior, consideraremos $\epsilon_i \in \{\epsilon_{ri}, \epsilon_{li}\}$ según la elección de $\tau \in \{L_e, R_e\}$. Se tiene que

$$\sum D_{u_i,y_i} \in \mathcal{L}^{(0)} = \operatorname{Der} A \Leftrightarrow y_i^\tau = \epsilon_i^{-1} y_i \,\forall \tau, i \Leftrightarrow D_{u_i,y_i} \in \mathcal{L}^{(0)}\,\forall i.$$

Fácilmente se deduce que, salvo reordenación de la base canónica, las posibilidades para las ternas $(\epsilon_{l1}, \epsilon_{l2}, \epsilon_{l3})$ y $(\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}, \epsilon_{r3})$ son:

- $(\epsilon, \epsilon, \epsilon)$ y $(\epsilon', \epsilon', \epsilon')$: En este caso $\operatorname{Der} A = \langle D_{u_i,v_j} \,|\, i,j = 1,2,3\rangle$.
- $(\epsilon, \delta, \delta)$ y $(\epsilon', \delta', \delta')$ con $\epsilon \neq \delta$ o $\epsilon' \neq \delta'$: Aquí el álgebra de derivaciones es $\operatorname{Der} A = \langle D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}, D_{u_i,v_i} \,|\, i = 1,2\rangle$.
- Otro caso: $\operatorname{Der} A = \langle D_{u_i,v_i} \,|\, i = 1,2\rangle$.

Agrupando todas las ideas anteriores,

**Teorema 4.23.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8 y rango toral 2 sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Se tiene que o bien*

I) *$A$ es de pseudooctoniones y* $\operatorname{Der} A \cong \mathrm{sl}(3)$

*o bien*

II) *Existe un idempotente $e \in A$ con $n(e) = 1$ y $e(\operatorname{Der} A) = 0$ y una base canónica de $(A, e)$ respecto de la cual se da una de las siguientes situaciones:*

II$_1$) $\operatorname{Der} A = \operatorname{Der}(A, e) \cong G_2$

II$_2$) $\operatorname{Der} A = \langle D_{u_i,v_j} \,|\, i,j = 1,2,3\rangle \cong A_2$

II$_3$) $\operatorname{Der} A = \langle D_{u_1,v_1}, D_{e_1,u_1}, D_{e_2,v_1}\rangle \oplus \langle D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}, D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}\rangle \cong \mathrm{sl}(2) \oplus \mathrm{sl}(2)$

II$_4$) $\mathrm{Der}\, A = \langle D_{u_1,v_1}, D_{e_1,u_1}, D_{e_2,v_1}\rangle \oplus \langle D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}\rangle \cong \mathrm{sl}(2) \oplus Z$ *con* $Z$ *el centro de* $\mathrm{Der}\, A$ *y* $\dim Z = 1$.

II$_5$) $\mathrm{Der}\, A = \langle D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}, D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}\rangle \oplus \langle D_{u_1,v_1}\rangle \cong \mathrm{sl}(2) \oplus Z$ *con* $Z$ *el centro de* $\mathrm{Der}\, A$ *y* $\dim Z = 1$.

II$_6$) $\mathrm{Der}\, A = \langle D_{u_i,v_i} \,|\, i = 1, 2\rangle$ *abeliana.*

*Además, se dan todas las posibilidades.*

**Nota:** Es una consecuencia inmediata de la clasificación y de la teoría de álgebras de Lie que todas las subálgebras de Cartan del álgebra de derivaciones de un álgebra de composición de rango toral dos son conjugadas por automorfismos.

El siguiente corolario se sigue de nuestra discusión

**Corolario.** *Sea* $A$ *un álgebra de composición sobre un cuerpo de característica* $\neq 2$ *y* $3$. $\mathrm{Der}\, A$ *es un álgebra simple central de tipo* $G_2$ *si y sólo si* $A$ *es estándar.*

*Demostración.* El recíproco es inmediato. Para demostrar el directo observamos que, por la proposición 1.17, podemos suponer el cuerpo algebraicamente cerrado. Por el teorema anterior sabemos que $A$ no es de Okubo y que, por lo tanto, existe $e \in A$ con $e(\mathrm{Der}\, A) = 0$. Excepto por el paso de reducción con que comenzábamos el análisis previo al teorema, la única álgebra que aparece con $\mathrm{Der}\, A \cong G_2$ era la Hurwitz; contando el paso de reducción, se tiene que $A$ es estándar.

QED

# 5. Ejemplos de álgebras de división

Los siguientes resultados complementan el teorema 4.1 y pueden encontrarse en [B-O2 81]. Para abreviar, $A$ denotará un álgebra de división real de dimensión ocho.

**Proposición A.** *Si* $\operatorname{Der} A = G_2$ *compacta entonces* $A$ *se descompone, como* $\operatorname{Der} A$*-módulo, en suma de dos submódulos irreducibles de dimensiones* 1 *y* 7 *respectivamente.*

**Proposición B.** *Si* $\operatorname{Der} A = \mathrm{su}(3)$ *entonces o bien*

I) $A$ *es* $\operatorname{Der} A$*-irreducible*

*o bien*

II) $A$ *es suma directa de tres submódulos irreducibles de dimensiones* $1, 1$ *y* 6.

**Proposición C.** *Si* $\operatorname{Der} A = \mathrm{su}(2) \oplus \mathrm{su}(2)$ *entonces* $A$ *es suma directa de: un submódulo de dimensión* 1 *anulado por ambas copias de* $\mathrm{su}(2)$*, otro de dimensión* 3 *que es trivial para una copia de* $\mathrm{su}(2)$ *e irreducible para la otra, y, por último, un tercer submódulo de dimensión* 4 *irreducible para ambas copias de* $\mathrm{su}(2)$.

**Proposición D.** *Si* $\operatorname{Der} A = \mathrm{su}(2) \oplus Z$ *con* $Z$ *ideal abeliano de dimensión* $\leq 1$*, entonces las posibles dimensiones de los sumandos directos en una descomposición de* $A$ *como suma de* $\mathrm{su}(2)$*-módulos irreducibles son.*

I) $1, 1, 3$ *y* 3.

II) $1, 3$ *y* 4.

III) $1, 1, 1, 1$ *y* 4.

IV) 3 *y* 5. *En este caso* $\operatorname{Der} A = \mathrm{su}(2)$.

La existencia de álgebras de división reales para cada una de las posibilidades que aparecen en las distintas proposiciones no quedaba asegurada. En particular, se desconocían ejemplos para los apartados I), II) y IV) de la proposición D. Más tarde, Rochdi [Roc 94, Roc 95] da ejemplos, con álgebra de derivaciones su(2), para el apartado I).

En realidad, no todas las posibilidades son factibles:

**Teorema 4.24.** *No existe ningún álgebra de división real cuya álgebra de derivaciones sea* $\mathrm{su}(2) \oplus Z$, *con* $Z$ *ideal abeliano de dimensión* 1, *y que se descomponga como suma directa de cuatro* su(2)*-módulos irreducibles de dimensiones* $1, 1, 3$ *y* 3.

*Demostración.* Procederemos por reducción al absurdo. Sea $A$ un álgebra de división real con $\operatorname{Der} A = \mathrm{su}(2) \oplus Z$, con $Z$ ideal abeliano de dimensión 1, y $A = V \oplus W$ donde $V = \{x \in A \,|\, x\mathrm{su}(2) = 0\}$ es una subálgebra de dimensión 2 y $W = W_1 \oplus W_2$ para ciertos su(2)-módulos irreducibles $W_i$ $i = 1, 2$ de dimensión 3. Fijemos $0 \neq H \in Z$. Para toda $D \in \mathrm{su}(2)$ se tiene que $(VH)D = (VD)H = 0$; así, $VH \subseteq V$ y, por el apartado (i) del teorema 4.1, $VH = 0$. De hecho, $\ker H = V$. En efecto, es inmediato observar que $\ker H$ es un su(2)-módulo y que $\ker H = V \oplus (W \cap \ker H)$; ahora bien, si $W \cap \ker H$ fuese no nulo, entonces $\ker H$ contendría un submódulo irreducible de dimensión 3, y por tanto la dimensión del núcleo sería $\geq 5$. Como además $\ker H$ es una subálgebra de división de $A$ (en particular, $\dim \ker H = 1, 2, 4$ u 8), entonces $\dim \ker H = 8 = \dim A$ y $H = 0$, que no es el caso. Concluimos que $\ker H = V$.

Sea $\mathrm{sl}(2) = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{su}(2)$, $\widetilde{W} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$, y denotemos por $\tilde{V}_\alpha$ el subespacio fundamental de valor propio $\alpha$ (en $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$) de $H$. Los submódulos $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W_i$ $i = 1, 2$ son sl(2)-irreducibles, y por consiguiente, cualquier submódulo $\neq 0, \widetilde{W}$ en $\widetilde{W}$ es sl(2)-irreducible y tiene dimensión 3. Ahora bien, es sencillo comprobar que $\widetilde{W}_\alpha = \widetilde{V}_\alpha \cap \widetilde{W}$ es un sl(2)-módulo y que $\widetilde{W} = \oplus_\alpha \widetilde{W}_\alpha$ (notemos que por el lema 1 de [B-O1 81], $H$ es semisimple); en consecuencia, o bien $\widetilde{W} = \widetilde{W}_\alpha$ o bien $\widetilde{W} = \widetilde{W}_\alpha \oplus \widetilde{W}_\beta$ con $\alpha, \beta \neq 0$.

Los valores propios no nulos de cualquier derivación de $A$ son imaginarios puros (lema 9 de [B-O1 81]), por lo que la traza de dicha derivación es necesariamente nula. En particular, si $\widetilde{W} = \widetilde{W}_\alpha$ entonces $6\alpha = traza(H) = 0$, lo cual no es cierto. Así pues, $\widetilde{W} = \widetilde{W}_\alpha \oplus \widetilde{W}_\beta$ con $\alpha, \beta \neq 0$. Sin embargo, al ser los valores propios imaginarios puros se tiene que $\beta = -\alpha$ y, en consecuencia, $W^2 \subseteq (\widetilde{W}_\alpha + \widetilde{W}_{-\alpha})^2 \cap A \subseteq (\widetilde{W}_{2\alpha} + \widetilde{V}_0 + \widetilde{W}_{-2\alpha}) \cap A \subseteq \widetilde{V}_0 \cap A = A \cap \ker H = V$. Puesto que $\dim W^2 \geq \dim W = 6$ pero $\dim V = 2$, se sigue que tampoco puede darse el caso $\widetilde{W} = \widetilde{W}_\alpha \oplus \widetilde{W}_\beta$.

QED

Los ejemplos de álgebras de composición de división que daremos ahora se complementan con los de la sección 2 del capítulo 5. Con ellos pretendemos mostrar que todos los casos, excepto el excluido por el teorema anterior, planteados en los teoremas A,B,C y D son factibles. En esta sección desarrollamos únicamente los relativos al rango toral 2. Nuestra argumentación no depende de que el cuerpo base sean los números reales $\mathbb{R}$, por lo que consideraremos cuerpos más generales; bastaría particularizar a $\mathbb{R}$ para obtener ejemplos de álgebras reales de división.

Por comodidad, en lo que sigue $(C, \circ)$ denotará un álgebra de Cayley-Dickson de división, con unidad $e$, sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ (por ejemplo el álgebra de octoniones de división sobre $\mathcal{F} = \mathbb{R}$), $\bar{\mathcal{F}}$ denotará la clausura algebraica de $\mathcal{F}$, $A$ será una copia del espacio vectorial $C$ sobre la cual iremos definiendo distintos productos que nos darán los ejemplos de álgebras de división que buscamos, y para cualquier subespacio $X$ de $C$, $X_{\bar{\mathcal{F}}}$ denotará $\bar{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{F}} X$. También conviene recordar que sobre los números reales las únicas álgebras de Lie simple centrales que aparecen como derivaciones de un álgebra de división son las compactas ([B-O1 81], corolario 6). En general, las álgebra de composición de división no poseen derivaciones nilpotentes no nulas, ya que si $N$ es una tal derivación y $xN^k = 0$ pero $y = xN^{k-1} \neq 0$ entonces es inmediato comprobar, por la antisimetría de $N$, que $(y, y) = 0$; en consecuencia, ninguna de las álgebras de Lie simples centrales que aparecerán es split.

**Ejemplo A:** El álgebra $(C, \circ)$ tiene como álgebra de derivaciones un álgebra de Lie de tipo $G_2$ no split, que en el caso de los octoniones reales es, necesariamente, compacta [J 39].

**Ejemplo $\mathbf{B_I}$:** Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo (de característica $\neq 3$) sobre el cual podemos definir un álgebra de Cayley-Dickson $(C, \circ) = C(-1, \beta, \gamma)$ de división (por ejemplo los números racionales, los reales, etc). Por lo visto en la subsección 5.1 del capítulo 2, podemos encontrar un álgebra $C_\tau$ de Okubo isótopa a $(C, \circ)$. Puesto que el cambio por isotopía respeta el que el álgebra sea de división, $C_\tau$ es un álgebra de Okubo de división. Es sabido [E-M 91] que las álgebras de Okubo tienen como álgebra de derivaciones un álgebra de Lie de tipo $A_2$ para la cual son módulos irreducibles. En el caso real esto significa que $\operatorname{Der} C_\tau = \mathrm{su}(3)$.

**Ejemplo $\mathbf{B_{II}}$:** Sea $K$ una subálgebra de $(C, \circ)$ de dimensión 2 y $\varphi$ la isometría dada por

$$a \mapsto a \quad \text{y} \quad b \mapsto -b \quad \forall a \in K, \, b \in K^\perp.$$

Definimos un producto en $A$ mediante $xy = x^\varphi \circ y$. Es inmediato observar que existe una base canónica de $(C, \circ)_{\bar{\mathcal{F}}}$ donde la matriz coordenada de $\varphi$ es

$$\mathrm{diag}(1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Por la discusión previa al teorema 4.23, se tiene que $\mathrm{Der}\, A_{\bar{\mathcal{F}}} = \langle D_{u_i, v_j} \mid i, j = 1, 2, 3 \rangle = \mathrm{sl}(3)$.

Claramente $K$ y $K^\perp$ son submódulos para $\mathrm{Der}\, A$ y $A = K \oplus K^\perp$. Si $K^\perp$ no fuese irreducible entonces contendría un submódulo propio $W$. Como $S^\perp_{\bar{\mathcal{F}}} = U(e_1) \oplus V(e_1)$ es la suma de dos $\mathrm{sl}(3)$-módulos irreducibles, se tiene que $\dim W = 3$, lo cual es imposible, ya que $\mathrm{Der}\, A$ induce aplicaciones antisimétricas en $W$ para la forma bilineal (recordemos que $A$ es de división y que, por lo tanto, la forma bilineal no tiene vectores isótropos). En consecuencia, $A$ es suma de tres módulos irreducibles de dimensiones $1, 1$ y $6$.

**Ejemplo C:** Sea $B$ una subálgebra de cuaternios de $(C, \circ)$ y $\varphi$ la aplicación dada por

$$b \mapsto b \quad \text{y} \quad v \mapsto -v \quad \forall b \in B,\, v \in B^\perp.$$

Definimos un producto en $A$ mediante $xy = x^\varphi \circ y$. Extendiendo escalares, existe una base canónica de $(C, \circ)_{\bar{\mathcal{F}}}$ de tal modo que $\varphi$ se expresa por la siguiente matriz coordenada:

$$\mathrm{diag}(1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1)$$

($\epsilon_{l2} = 1$ y $\epsilon_{r2} = -1$ en la ecuación (4.12)). Por el análisis previo al teorema 4.23 se tiene que

$$\mathrm{Der}\, A_{\bar{\mathcal{F}}} = \langle D_{u_1, v_1}, D_{e_1, u_1}, D_{e_2, v_1} \rangle \oplus \langle D_{u_2, v_2} - D_{u_3, v_3}, D_{u_2, v_3}, D_{u_3, v_2} \rangle \cong \mathrm{sl}(2) \oplus \mathrm{sl}(2).$$

Sea $0 \neq v \in B^\perp$, para todo $a \in B$ ortogonal a la unidad $e$, la aplicación $D_a$ dada por

$$b \mapsto 0 \quad \text{y} \quad v \circ b \mapsto (v \circ a) \circ b \quad \forall b \in B$$

es una derivación de $(C, \circ)$. Sea $S = \{D_a \mid a \in B \text{ y } a \perp e\}$. Al extender escalares, $S$ pasa a $\langle D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}, D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}\rangle$ (elementos de $\operatorname{Der} A_{\bar{\mathcal{F}}}$ que anulan a $B_{\bar{\mathcal{F}}}$) que es un ideal de $\operatorname{Der} A_{\bar{\mathcal{F}}}$. Fácilmente se sigue que $S$ es un ideal de $\operatorname{Der} A$ y que existe otro ideal, $S'$, de $\operatorname{Der} A$ de tal modo que $\operatorname{Der} A = S \oplus S'$. Además, $S$ y $S'$ son álgebras de Lie simples centrales no split de dimensión 3.

Por último, es sencillo ver que la descomposición de $A$ como $\operatorname{Der} A$-módulo es la que se indica en la proposición C.

A estas alturas conviene hacer notar que, necesariamente, el cuerpo base $\mathcal{F}$ es infinito. Esto se deduce del teorema de Wedderburn ([He], teorema 3.1.1), el cual asegura que cualquier anillo de división (asociativo) con un número finito de elementos es, además, conmutativo. En particular, no existen álgebras de cuaternios de división sobre cuerpos finitos.

Gracias a esta observación podemos asegurar que si $K$ es una subálgebra de dimensión 2 de $(C, \circ)$, entonces la forma traza toma inifinitos valores distintos sobre el conjunto $\{x \in K \mid n(x) = 1\}$. En efecto, puesto que dicho conjunto es irreducible en la topología de Zariski, si la forma traza tomase sólo un número finito de valores entonces sería constante: $t(x) = t(e) = 2\ \forall x$ con $n(x) = 1$; en particular, $t(x^2/n(x)) = 2\ \forall x$ con $n(x) \neq 0$ y, por (1.7), $t(x)^2 = 4n(x)\ \forall x \in K$, lo que se contradice con la no degeneración de $n(\cdot)$.

**Ejemplo $\mathbf{D_{II}}$:** Sea $B$ una subálgebra de cuaternios de $(C, \circ)$ y $a \in B$ con $n(a) = 1$ y $t(a) \neq \pm 2$. Definimos en $A$ un producto dado por $xy = x^{\varphi} \circ y$, donde $\varphi$ denota la aplicación

$$b \mapsto b \quad v \circ b \mapsto (v \circ a) \circ b \quad \forall b \in B$$

con $v$ un elemento fijo no nulo de $B^{\perp}$ (siguiendo la notación del capítulo 1 tenemos que $\varphi$ coincide con el automorfismo $\tau_a$).

Claramente $w^{\varphi^2-t(a)\varphi+id}=0\ \forall w\in B^\perp$, por lo que, al extender escalares, la descomposición de $B^\perp_{\bar{\mathcal{F}}}$ en subespacios fundamentales para $\varphi$ es $B^\perp_{\bar{\mathcal{F}}}=S(\lambda)\oplus S(\frac{1}{\lambda})$ con $\lambda\neq\pm1$ (recordemos que $t(a)\neq\pm2$), mientras que la de $C_{\bar{\mathcal{F}}}$ es $C_{\bar{\mathcal{F}}}=S(1)\oplus S(\lambda)\oplus S(\frac{1}{\lambda})$, donde $S(1)=B_{\bar{\mathcal{F}}}$. Al ser $\varphi$ un automorfismo, esta descomposición es una $\mathbb{Z}_3$ graduación de $(C,\circ)_{\bar{\mathcal{F}}}$. Por la proposición 2.4 existe una base canónica de $(C,\circ)_{\bar{\mathcal{F}}}$ donde $\varphi$ se expresa mediante la matriz

$$\mathrm{diag}(1,1,1,\lambda,\frac{1}{\lambda},1,\frac{1}{\lambda},\lambda)\text{ con }\lambda\neq\pm1.$$

De los comentarios previos al teorema 4.23 obtenemos que

$$\mathrm{Der}\,A_{\bar{\mathcal{F}}}=\langle D_{u_1,v_1},D_{e_1,u_1},D_{e_2,v_1}\rangle\oplus\langle D_{u_2,v_2}-D_{u_3,v_3}\rangle\cong\mathrm{sl}(2)\oplus\widetilde{Z}$$

con $\widetilde{Z}$ el centro de $\mathrm{Der}\,A_{\bar{\mathcal{F}}}$. Es inmediato concluir que $\mathrm{Der}\,A=S\oplus Z$ donde $S$ es una forma de $sl(2)$ y $Z$ el centro de $\mathrm{Der}\,A$ de dimensión 1.

Como $S$-módulo, $B^\perp$ es irreducible, ya que de lo contrario contendría un submódulo de dimensión 2 en el cual $S$ induciría aplicaciones antisimétricas, que no es posible. De modo similar, $B$ es suma de un submódulo trivial y uno irreducible de dimensión 3.

**Ejemplo $\mathbf{D_{III}}$:** Sea $K$ una subálgebra de dimensión 2 de $(C,\circ)$, y $a\in K$ con $n(a)=1$ y $t(a)\neq\pm2$. Fijamos una $K$-base $\{x_1,x_2,x_3\}$ del $K$-espacio vectorial $K^\perp$ que sea ortogonal para la $K$-forma bilineal hermitiana dada por 1.13 y definimos una aplicación $K$-lineal $\varphi$ en $K^\perp$ dada por

$$x_1\mapsto x_1\circ a^{-2}\quad x_2\mapsto x_2\circ a\quad x_3\mapsto x_3\circ a.$$

Puesto que $n(a)=1$, es claro que $\varphi\in\mathrm{SU}(K^\perp)$; además, por el teorema 1.11 $\varphi$ se extiende a un automorfismo $\varphi$ de $(C,\circ)$ que fija los elementos de $K$. Consideramos un producto en $A$ dado por $xy=x^\varphi\circ y$.

Extendiendo escalares, $K_{\bar{\mathcal{F}}} = \langle e_1, e_2\rangle$ para ciertos $e_i$ idempotentes en $(C, \circ)_{\bar{\mathcal{F}}}$ de norma nula y $a = \epsilon^{-1}e_1 + \epsilon e_2$ con $\epsilon \neq \pm 1$ (recordemos que $t(a) \neq \pm 2$). Los subespacios de la descomposición de Peirce de $(C, \circ)_{\bar{\mathcal{F}}}$ son $U(e_1) = \langle e_1 \circ x_1, e_1 \circ x_2, e_1 \circ x_3\rangle$ y $V(e_1) = \langle e_2 \circ x_1, e_2 \circ x_2, e_2 \circ x_3\rangle$. Salvo cambio escalar, podemos suponer que $e_1, e_2$ junto con los elementos básicos mostrados para $U(e_1)$ y $V(e_1)$ forman una base canónica de $(C, \circ)_{\bar{\mathcal{F}}}$. También es sencillo ver que la matriz coordenada de $\varphi$ en esta base canónica es

$$\mathrm{diag}(1, 1, \frac{1}{\epsilon^2}, \epsilon, \epsilon, \epsilon^2, \frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}) \text{ con } \epsilon \neq \pm 1$$

Por el análisis previo al teorema 4.23,

$$\mathrm{Der}\, A_{\bar{\mathcal{F}}} = \langle D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}, D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}\rangle \oplus \langle D_{u_1,v_1}\rangle \cong \mathrm{sl}(2) \oplus \widetilde{Z},$$

con $\widetilde{Z}$ el centro de $\mathrm{Der}\, A_{\bar{\mathcal{F}}}$. Es inmediato deducir que $\mathrm{Der}\, A = S \oplus Z$ donde $S$ denota una forma de sl(2) y $Z$ el centro, de dimensión 1, de $\mathrm{Der}\, A$.

Respecto a la descomposición de $A$ como $S$-módulo, notemos que el álgebra de cuaternios $B$ generada por $K$ y $x_1$ es un módulo trivial para $S$ y que, al igual que en el caso anterior, $B^{\perp}$ es $S$-irreducible.

**Ejemplo:** Por último, pondremos un ejemplo de álgebras de composición, que además son de división, cuya álgebra de derivaciones es abeliana de dimensión 2.

Sea $K$ una subálgebra de dimensión 2 de $(C, \circ)$ y $a \in K$ con $n(a) = 1$. En el $K$-espacio vectorial $K^{\perp} = K\langle x_1, x_2, x_3\rangle$, donde $\{x_1, x_2, x_3\}$ es de nuevo una $K$-base de $K^{\perp}$ ortogonal para la forma bilineal hermitiana $\sigma$ definida en 1.13, definimos la siguiente aplicación $K$-lineal $\varphi$

$$x_1 \mapsto x_1 \circ a^{-3} \quad x_2 \mapsto x_2 \circ a^2 \quad x_3 \mapsto x_3 \circ a$$

Claramente $\varphi \in \mathrm{SU}(K^{\perp})$ y $\varphi$ se extiende a un automorfismo $\varphi$ de $(C, \circ)$ que fija $K$. En $A$ consideramos el producto $xy = x^{\varphi} \circ y$.

Al igual que en el caso anterior, es sencillo ver que existe una base canónica de $(C, \circ)_{\bar{\mathcal{F}}}$ donde la matriz coordenada de $\varphi$ es

$$\mathrm{diag}(1, 1, \frac{1}{\epsilon^3}, \epsilon^2, \epsilon, \epsilon^3, \frac{1}{\epsilon^2}, \frac{1}{\epsilon})$$

y $a = \epsilon^{-1}e_1 + \epsilon e_2$. Basta elegir $a$ para que $\epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3$ sean diferentes entre sí y distintos de 1 para concluir, por lo previo al teorema 4.23, que $\mathrm{Der}\, A$ es un álgebra abeliana de dimensión 2 (notemos que el conjunto $\{x \in K \mid n(x) = 1\}$ es infinito, por lo que se tiene asegurada la existencia de un tal $a$).

## 6. Algebra de derivaciones de tipo $A_2$

La siguiente construcción proporciona las álgebras de composición que no son de Okubo pero cuya álgebra de derivaciones es un álgebra de Lie simple central de tipo $A_2$. Sean:

i) $(C, \circ)$ un álgebra de Cayley-Dickson con involución estándar $J$ y unidad $e$.

ii) $K$ una subálgebra de composición de $(C, \circ)$ de dimensión 2.

iii) $\varphi, \psi$ dos isometrías de $C$ que coinciden con la identidad sobre $K^{\perp}$.

Definimos un nuevo producto en $C$ mediante $xy = x^{\varphi} \circ y^{\psi}$ y denotamos por $C(K, \varphi, \psi)$ al álgebra así construida.

**Lema 4.25.** *Los únicos valores de $(\varphi, \psi)$ para los cuales $C(K, \varphi, \psi)$ es un álgebra estándar son $(id, id), (-J, id), (id, -J)$ y $(-J, -J)$.*

*Demostración.* Es evidente que si $(\varphi, \psi)$ es cualquiera de los pares del enunciado entonces $C(K, \varphi, \psi)$ es estándar. Supongamos, pues, que $C(K, \varphi, \psi)$

es un álgebra estándar asociada a un álgebra Hurwitz $(C, \diamond)$ con unidad $e'$. Puede ocurrir:

a) $C(K, \varphi, \psi)$ *es Hurwitz:* En tal caso, $\forall x \in K^{\perp}$ se tiene que $x = e'x = (e')^{\varphi} \circ x^{\psi} = (e')^{\varphi} \circ x$, de donde $(e')^{\varphi} = e$. Análogamente $(e')^{\psi} = e$. Además, $\forall x \in K$ se cumple $x = e'x = (e')^{\varphi} \circ x^{\psi} = x^{\psi}$, por lo que $\psi = id$ y, de modo similar, $\varphi = id$.

b) $C(K, \varphi, \psi)$ *es de tipo II:* Al igual que en el caso anterior $(e')^{\varphi} = e$, luego $e' \in K$, y $\psi = id$. Para todo $x \in K^{\perp}$ se tiene que $-x = xe' = x^{\varphi} \circ (e')^{\psi} = x \circ e'$, de donde $e' = -e$. Dado $x \in K$ con $(x, e) = 0$ ocurre que $-x = xe' = x^{\varphi} \circ (e')^{\psi} = x^{\varphi} \circ e' = -x^{\varphi}$, por lo que $x^{\varphi} = x$. De aquí se concluye que $(\varphi, \psi) = (-J, id)$.

c) $C(K, \varphi, \psi)$ *es de tipo III:* Análogo al caso b).

d) $C(K, \varphi, \psi)$ *es paraHurwitz:* Sea $x \in K^{\perp}$ con $n(x) \neq 0$ y ortogonal a $e'$, como $-x = e'x = (e')^{\varphi} \circ x^{\psi} = (e')^{\varphi} \circ x$, entonces se tiene que $(e')^{\varphi} = -e$ y, análogamente, $(e')^{\psi} = -e$. Sea $x \in K$ con $(x, e') = 0$, ocurre que $-x = e'x = (e')^{\varphi} \circ x^{\psi} = -e \circ x^{\psi}$, por lo que $x^{\psi} = x$ y también $x^{\varphi} = x$. Puesto que $\varphi$ y $\psi$ son isometrías que fijan el subespacio ortogonal a $e'$, y por lo tanto el generado por $e'$, es inmediato comprobar que $e' = \pm(e')^{\varphi} = \mp e$. Si $e' = -e$ entonces $\varphi$ y $\psi$ coincidirían con la identidad y, por lo tanto, $C(K, \varphi, \psi)$ sería un álgebra Hurwitz, que no es el caso. Así pues, $e' = e$ y $\varphi = -J = \psi$.

QED

**Teorema 4.26.** *Si $A$ es un álgebra de composición para la cual* $\operatorname{Der} A$ *es un álgebra de Lie simple central de tipo $A_2$ y $A$ no es de Okubo, entonces $A$ es isomorfa a algún álgebra $C(K, \varphi, \psi)$. Recíprocamente, exceptuando los casos en que $(\varphi, \psi) = (id, id), (-J, id), (id, -J)$ o $(-J, -J)$, cualquier álgebra*

*$C(K,\varphi,\psi)$ tiene como álgebra de derivaciones un álgebra simple central de tipo $A_2$.*

*Demostración.* Supongamos que $\mathrm{Der}\,A$ es un álgebra de Lie de tipo $A_2$ y que $A$ no es de Okubo. Denotemos por $A_0$ el conjunto $\{x \in A \mid x(\mathrm{Der}\,A) = 0\}$. Pasando a la clausura algebraica $\bar{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$, se sigue del teorema 4.23 que $(A_0)_{\bar{\mathcal{F}}}$ es una subálgebra de composición de $A_{\bar{\mathcal{F}}}$ de dimensión 2 y $(A_0)^{\perp}_{\bar{\mathcal{F}}}$ es suma de dos $\mathrm{Der}\,A_{\bar{\mathcal{F}}}$-módulos irreducibles duales de dimensión 3. Puesto que estos módulos de dimensión 3 no son isomorfos entre sí, es inmediato comprobar que la dimensión del centralizador de la acción de $\mathrm{Der}\,A_{\bar{\mathcal{F}}}$ sobre $(A_0)^{\perp}_{\bar{\mathcal{F}}}$ es 2. Además, dicho centralizador coincide con los conjuntos $\{L_x|_{(A_0)^{\perp}_{\bar{\mathcal{F}}}} \mid x \in (A_0)_{\bar{\mathcal{F}}}\}$ y $\{R_x|_{(A_0)^{\perp}_{\bar{\mathcal{F}}}} \mid x \in (A_0)_{\bar{\mathcal{F}}}\}$ ya que $x(\mathrm{Der}\,A_{\bar{\mathcal{F}}}) = 0$ $\forall x \in (A_0)_{\bar{\mathcal{F}}}$. Las mismas consecuencias se siguen para $A_0$: $A_0$ es una subálgebra de composición de dimensión 2 y el centralizador de la acción de $\mathrm{Der}\,A$ en $A$ es $\{L_x|_{A_0^{\perp}} \mid x \in A_0\} = \{R_x|_{A_0^{\perp}} \mid x \in A_0\}$. En particular, podemos asegurar la existencia de $u, v \in A_0$, de norma 1, con $L_v|_{A_0^{\perp}} = R_v|_{A_0^{\perp}} = id$. Consideramos el álgebra Hurwitz $(C,\circ)$ construida mediante $x \circ y = (xR_u^{-1})(yL_v^{-1})$ $\forall x, y \in C$ (la unidad de este producto es $vu$). Resulta evidente que si denotamos $A_0$ por $K$; $R_u$, por $\varphi$; y $L_v$, por $\psi$, entonces $A = C(K,\varphi,\psi)$.

Respecto al recíproco, es sencillo observar que el álgebra $\mathrm{Der}_K(C,\circ) = \{D \in \mathrm{Der}\,(C,\circ) \mid KD = 0\}$ es un álgebra de Lie simple central de tipo $A_2$ que conmuta con $\varphi$ y $\psi$, y que, por lo tanto, $\mathrm{Der}_K(C,\circ) \subseteq \mathrm{Der}\,C(K,\varphi,\psi)$. En vista del teorema 4.23 y de su corolario, o bien $\mathrm{Der}_K(C,\circ) = \mathrm{Der}\,C(K,\varphi,\psi)$ o bien $C(K,\varphi,\psi)$ es estándar. El teorema se concluye usando el lema 4.25. QED

En (1.13) veíamos que dada un álgebra de Cayley-Dickson $(C,\circ)$ y $K$ una subálgebra de composición suya de dimensión 2, podemos definir un producto en $W = K^{\perp}$ mediante

$$y \times z = \text{ proyección de } y \circ z \text{ en } W. \tag{4.13}$$

Las álgebras así construidas reciben el nombre de *álgebras vectoriales de color.*

En [E-M 95] se muestra que si $\rho : (W_1, \times) \to (W_2, \times)$ es un isomorfismo entre dos álgebras vectoriales de color construidas a partir de dos álgebras de Cayley-Dickson $(C_1, \circ)$ y $(C_2, \circ)$ respectivamente, entonces $\rho$ se extiende a un único isomorfismo $\tilde{\rho}$ entre $(C_1, \circ)$ y $(C_2, \circ)$. Este resultado es de gran utilidad en la demostración del siguiente teorema:

**Teorema 4.27.** *Una aplicación lineal $\rho : C_1(K_1, \varphi_1, \psi_1) \to C_2(K_2, \varphi_2, \psi_2)$ es un isomorfismo entre las álgebras $C_1(K_1, \varphi_1, \psi_1)$ y $C_2(K_2, \varphi_2, \psi_2)$ si y sólamente si $\rho$ es un isomorfismo entre las álgebras de Cayley-Dickson $(C_1, \circ)$ y $(C_2, \circ)$, y además $\varphi_1 = \rho\varphi_2\rho^{-1}$ y $\psi_1 = \rho\psi_2\rho^{-1}$.*

*Demostración.* Los automorfismos entre álgebras estándar lo son también de las respectivas álgebras Hurwitz, por lo que el teorema es trivial si las álgebras $C_i(K_i, \varphi_i, \psi_i)$ son estándar. Supongamos, pues, que $C_i(K_i, \varphi_i, \psi_i)$ $i = 1, 2$ no son estándar. Entonces $K_i = \{x \in C_i \mid x\mathrm{Der}\, C_i(K_i, \varphi_i, \psi_i) = 0\}$, por lo que $(K_1)^\rho = K_2$ y, en consecuencia, $(K_1^{\perp})^\rho = K_2^{\perp}$. Denotemos $K_i^{\perp}$ por $W_i$, y definamos en $W_i$ el producto $\times$ dado por 4.13. Claramente $\rho$ es un isomorfismo entre $(W_1, \times)$ y $(W_2, \times)$, por lo que, por el comentario previo a este teorema, $\rho$ se extiende a un isomorfimso $\tilde{\rho}$ entre $(C_1, \circ)$ y $(C_2, \circ)$. Sea $a \in K_1$, no es difícil observar que existen elementos $y, z \in W_1$ de tal modo que $yz = y \circ z = a + y \times z$. Así,

$$\begin{aligned} a^\rho + (y \times z)^\rho &= (yz)^\rho = y^\rho z^\rho = y^\rho \circ z^\rho = y^{\tilde{\rho}} \circ z^{\tilde{\rho}} \\ &= (y \circ z)^{\tilde{\rho}} = a^{\tilde{\rho}} + (y \times z)^{\tilde{\rho}} = a^{\tilde{\rho}} + (y \times z)^\rho, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $a^\rho = a^{\tilde\rho}$. En consecuencia, $\rho = \tilde\rho$ y $\rho$ es un automorfismo entre $(C_1, \circ)$ y $(C_2, \circ)$. Tomemos un vector no isótropo $y \in W_1$, para cualquier $z \in C_1$ se tiene que $z^{\varphi_1 \rho} \circ y^\rho = z^{\varphi_1\rho} \circ y^{\psi_1\rho} = (z^{\varphi_1} \circ y^{\psi_1})^\rho = (zy)^\rho = z^\rho y^\rho = z^{\rho\varphi_2} \circ y^\rho$, de donde $\varphi_1 = \rho\varphi_2\rho^{-1}$. De igual modo $\psi_1 = \rho\psi_2\rho^{-1}$.

QED

Fijemos dos álgebras $C_i(K_i, \varphi_i, \psi_i)$ $i = 1, 2$ que no sean estándar. El teorema 4.27 y su demostración nos dicen que para que estas álgebras sean isomorfas es necesario que $(C_1, \circ) \cong (C_2, \circ)$ y $(K_1, \circ) \cong (K_2, \circ)$. Supongamos que hemos comprobado que esta condición necesaria se cumple, entonces podemos cambiar $C_2(K_2, \varphi_2, \psi_2)$, mediante isomorfismo, por un álgebra $C_1(K_1, \varphi_2', \psi_2')$ y resolver el problema del isomorfismo entre $C_1(K_1, \varphi_1, \psi_1)$ y $C_1(K_1, \varphi_2', \psi_2')$. Esta reducción también es cierta en el caso de álgebras estándar, ya que la subálgebra $K$ no tiene ningún significado especial para un álgebra estándar $C(K, \varphi, \psi)$.

Así pues, el problema del isomorfismo entre las álgebras $C(K, \varphi, \psi)$ queda resuelto por el teorema 1.5 y el siguiente resultado:

**Teorema 4.28.** *Sea $(C, \circ)$ un álgebra de Cayley-Dickson sobre un cuerpo $\mathcal{F}$, $K$ una subálgebra de composición de dimensión 2 y $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ y $\psi_2$ isometrías de $C$ que coinciden con la identidad sobre $K^\perp$. Denotemos por $\hat\varphi_1, \hat\varphi_2, \hat\psi_1$ y $\hat\psi_2$ sus resctricciones a $K$, se tiene que $C(K, \varphi_1, \psi_1)$ es isomorfa a $C(K, \varphi_2, \psi_2)$ si y sólo si o bien $(\hat\varphi_1, \hat\psi_1) = (\hat\varphi_2, \hat\psi_2)$ o bien $(\hat\varphi_1, \hat\psi_1) = (s\hat\varphi_2 s, s\hat\psi_2 s)$, donde $s$ denota el único $F$-automorfismo no trivial de $K$.*

*Demostración.* Empecemos con el recíproco. Supongamos, por ejemplo, que $(\hat\varphi_1, \hat\psi_1) = (s\hat\varphi_2 s, s\hat\psi_2 s)$. Tomemos un automorfismo $\rho$ de $(C, \circ)$ cuya restricción a $K$ no sea trivial (véase [E-M 95]), es decir, $\rho|_K = s$. Claramente

$\varphi_1 = \rho\varphi_2\rho^{-1}$ y $\psi_1 = \rho\psi_2\rho^{-1}$; así, por el teorema anterior, $C(K, \varphi_1, \psi_1) \cong C(K, \varphi_2, \psi_2)$.

Respecto al directo, sea $\rho$ un isomorfismo entre las álgebras $C(K, \varphi_1, \psi_1)$ y $C(K, \varphi_2, \psi_2)$. En el caso en que una de ellas sea estándar, también así la otra y, además, del mismo tipo. Esto signifca, por el teorema 4.27, que $(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi_2, \psi_2)$ y, en particular, $(\hat{\varphi}_1, \hat{\psi}_1) = (\hat{\varphi}_2, \hat{\psi}_2)$. Supongamos, pues, que ninguna de ellas es estándar. Por la demostración del teorema 4.27 se tiene que $K^\rho = K$, $(K^\perp)^\rho = K^\perp$, $\varphi_1 = \rho\varphi_2\rho^{-1}$ y $\psi_1 = \rho\psi_2\rho^{-1}$. Restringiendo estas dos últimas igualdades a $K$ se tiene que o bien $(\hat{\varphi}_1, \hat{\psi}_1) = (\hat{\varphi}_2, \hat{\psi}_2)$ o bien $(\hat{\varphi}_1, \hat{\psi}_1) = (s\hat{\varphi}_2 s, s\hat{\psi}_2 s)$, ya que $\rho|_K \in \{id, s\}$.

QED

Recordemos que en el capítulo 1 mostramos que las álgebras de composición se dividen en 4 familias (tipos I,..., IV) cuyo único elemento común es el cuerpo base. El que un álgebra $C(K, \varphi, \psi)$ pertenezca a una de estas familias depende únicamente del determinante de $\varphi|_K$ y $\psi|_K$, ya que al restringir estas aplicaciones al subespacio ortogonal de $K$ coinciden con la aplicación identidad. Frente a lo que ocurre para las álgebras de Okubo, sobre cuerpos algebraicamente cerrados existen infinitas clases de isomorfía de álgebras $C(K, \varphi, \psi)$:

**Teorema 4.29.** *Sobre cualquier cuerpo algebraicamente cerrado existen infinitas clases de isomorfía de álgebras $C(K, \varphi, \psi)$ para cada uno de los tipos $I, \ldots, IV$ de álgebras de composición.*

*Demostración.* Sea $(C, \circ)$ el álgebra de Cayley split sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathcal{F}$, y $K = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}$ una subálgebra de composición de dimensión 2 de $(C, \circ)$. Basta observar que el grupo especial ortogonal de $K$

es isomorfo al grupo de matrices $\{\mathrm{diag}(\alpha, \alpha^{-1}) \mid 0 \neq \alpha \in \mathcal{F}\}$, el cual es infinito, y aplicar el teorema anterior.

QED

Este teorema extiende un resultado de Petersson [Pet 71] establecido mediante argumentos de geometría algebraica.

# Capítulo 5

# Otras álgebras de derivaciones

En este capítulo completaremos la clasificación de las álgebras de derivaciones de álgebras de composición sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica $\neq 2, 3$ y 5. Por lo expuesto en el capítulo precedente, falta únicamente considerar aquellas álgebras de composición de rango toral $\leq 1$.

## 1. Exposición de resultados

Empezaremos dando una caracterización del álgebra de derivaciones de un álgebra de composición de dimensión 8 sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ y 3 a partir del principio local de la trialdad. Más detalles acerca de este principio pueden consultarse en [Sch, J 64].

Sea $(C, \circ)$ un álgebra de Cayley-Dickson con unidad $e$ y forma cuadrática $n(\cdot)$. Denotemos por $\mathrm{o}(8, n)$ el conjunto de transformaciones antisimétricas para la forma bilineal asociada a $n(\cdot)$, y sean $\widetilde{R}_x$ y $\widetilde{L}_x$ los operadores de multiplicación por $x$ en $(C, \circ)$. Se tiene:

**Lema 5.1.** $\mathrm{o}(8, n) = \{\widetilde{R}_x \,|\, x \perp e\} \oplus \mathrm{Der}\,(C, \circ) \oplus \{\widetilde{L}_y \,|\, y \perp e\}$

Aunque, en general, una aplicación antisimétrica no es una derivación de $(C, \circ)$, no obstante guarda cierta relación con el producto $\circ$.

**Teorema 5.2 (Principio local de la trialdad).** *Dada $D \in \mathrm{o}(8,n)$ existen únicas $D'$ y $D''$ en $\mathrm{o}(8,n)$ tales que*

$$(x \circ y)D = (xD') \circ y + x \circ (yD'') \quad \forall x, y \in (C, \circ)$$

Las aplicaciones $D \mapsto D'$ y $D \mapsto D''$ quedan definidas en una base de $\mathrm{o}(8,n)$ mediante:

$$\begin{array}{lll} D' = D & D'' = D & \forall D \in \mathrm{Der}\,(C,\circ) \\ \widetilde{L}'_x = \widetilde{R}_x + \widetilde{L}_x & \widetilde{L}''_x = -\widetilde{L}_x & \\ \widetilde{R}'_x = -\widetilde{R}_x & \widetilde{R}''_x = \widetilde{R}_x + \widetilde{L}_x & \forall x \bot e \end{array} \tag{5.1}$$

**Proposición 5.3.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8 sobre un cuerpo arbitrario de característica $\neq 2$ y 3. Dado un elemento $e \in A$ con $n(e) = 1$ se tiene que*

$$\mathrm{Der}\, A = \{D \in \mathrm{o}(8,n) \mid D' = R_e^{-1} D R_e \quad y \quad D'' = L_e^{-1} D L_e\},$$

*donde $D \mapsto D'$ y $D \mapsto D''$ son las aplicaciones que aparecen en el principio local de la trialdad asociado al álgebra de Cayley-Dickson $(A, e)$.*

*Demostración.* Sea $D \in \mathrm{o}(8,n)$, tenemos que $D \in \mathrm{Der}\, A$ si y sólo si $(xy)D = (xD)y + x(yD)$, es decir, $((xe) \circ (ey))D = (xD)e \circ (ey) + (xe) \circ e(yD)$ donde $\circ$ denota el producto de $(A, e)$. Sustituyendo $xR_e^{-1}$, $yL_e^{-1}$ en lugar de $x, y$ queda que $D \in \mathrm{Der}\, A$ si y sólo si $(x \circ y)D = (xR_e^{-1} D R_e) \circ y + x \circ (yL_e^{-1} D L_e) \quad \forall x, y \in A$.

QED

En general, esta caracterización no resulta práctica ya que es muy complicado comprobar si $D' = R_e^{-1} D R_e$ o si $D'' = L_e^{-1} D L_e$. Como veremos, la excepción que justifica el presentarla la constituyen las álgebras en que $R_e$ y $L_e$ son automorfismos o antiautomorfismos de $(A, e)$.

Permítasenos, antes de pasar a enunicar los teoremas a cuya demostración dedicaremos este capítulo, dar unos ejemplos que nos serán de utilidad para establecer nuestros resultados. Se trata de álgebras de composición que, al igual que les ocurre a las álgebras de Okubo, no heredan sus derivaciones de un álgebra Hurwitz.

**Ejemplo 1:** Sea $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ una base canónica del álgebra de Cayley split $(\mathfrak{C}, \circ)$. Denotemos por $e$ la unidad de $\mathfrak{C}$ y por $\widetilde{L}_x$, $\widetilde{R}_x$ los operadores de multiplicación por $x$. Consideremos dos isometrías $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ cuyas matrices coordenadas en la base $\{e, e_2 - e_1, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ sean, respectivamente,

$$\operatorname{diag}(C_1, C_2, (C_2^t)^{-1}) \text{ y } \operatorname{diag}(D_1, D_2, (D_2^t)^{-1}) \tag{5.2}$$

con $C_1 = D_1 = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$ y

$$C_2 = \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} \text{ y } D_2 = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}$$

donde $\omega$ denota una raíz cúbica primitiva de la unidad.

Definimos una nueva álgebra $\mathcal{A}_1$ sobre el espacio vectorial $\mathfrak{C}$ mediante el producto $xy = x^{\tilde{\varphi}} \circ y^{\tilde{\psi}}$.

Calculemos $\operatorname{Der} \mathcal{A}_1$. Empecemos notando que, por el teorema 1.10, los operadores $J\tilde{\varphi}$ y $J\tilde{\psi}$ son automorfismos de $\mathfrak{C}$ ($J$ denota la involución estándar de $\mathfrak{C}$) y, por lo tanto, $\tilde{\varphi} = R_e$ y $\tilde{\psi} = L_e$ son antiautomorfismos de $\mathfrak{C}$. En consecuencia, $\forall x, y \perp e$ y $D \in \operatorname{Der} \mathfrak{C}$ se tiene

$$R_e^{-1} \widetilde{R}_x R_e = \widetilde{L}_{xe}, \quad R_e^{-1} \widetilde{L}_x R_e = \widetilde{R}_{xe} \quad \text{y} \quad R_e^{-1} D R_e \in \operatorname{Der} \mathfrak{C};$$

análogas consecuencias se siguen para $L_e$. Ahora, de la proposición 5.3 es sencillo concluir que una aplicación antisimétrica $\widetilde{R}_x + D + \widetilde{L}_y$ con $x, y \perp e$ y

$D \in \operatorname{Der}\mathfrak{C}$ es una derivación de $\mathcal{A}_1$ si y sólo si

$$\begin{array}{lll} y - x = ye, & y = xe, & D = R_e^{-1} D R_e, \\ x = ey, & x - y = ex, & D = L_e^{-1} D L_e. \end{array}$$

De las condiciones en $D$ se deduce que tanto $D$ como $\widetilde{R}_x + \widetilde{L}_y$ pertenecen a $\operatorname{Der}\mathcal{A}_1$. Además, las restricciones en $x$ e $y$ muestran que $ye - y = (ye)e, e(xe) = x$ y $(ey)e = y$, por lo que, en vista de la forma de $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\psi}$, tenemos que $x, y \in \langle u_3, v_2 \rangle$. Así,

$$\widetilde{R}_x + \widetilde{L}_y \in \langle \widetilde{L}_{v_2} - \omega \widetilde{R}_{v_2}, \widetilde{L}_{u_3} - \omega \widetilde{R}_{u_3} \rangle.$$

Respecto a $D$, observemos que $D$ conmuta con $L_e$ y $R_e$ si y sólo si lo hace con $JL_e$ y $JR_e$, los cuales son automorfismos. Escribamos $D = D_{e_1,u} + D_{e_2,v} + \sum D_{u_i,y_i}$ con $u \in U(e_1)$, $y_i, v \in V(e_1)$. Se tiene que $D \in \operatorname{Der}\mathcal{A}_1$ si y sólo si

$$u^\tau = u, \quad v^\tau = v \text{ y } \sum D_{u_i^\tau, y_i^\tau} = \sum D_{u_i, y_i} \quad \forall \tau \in \{JL_e, JR_e\}.$$

Resolviendo este sistema de modo similar a como lo hicimos en el caso de rango toral 2 tenemos que

$$u \in \langle u_1 \rangle, \quad y_1, v \in \langle v_1 \rangle \quad \text{e} \quad y_2 = y_3 = 0.$$

En consecuencia, $D \in \langle D_{e_1,u_1}, D_{e_2,v_1}, D_{u_1,v_1} \rangle$.

Concluimos que $\operatorname{Der}\mathcal{A}_1 = \langle D_{e_1,u_1}, D_{e_2,v_1}, D_{u_1,v_1} \rangle \oplus \langle \widetilde{L}_{v_2} - \omega \widetilde{R}_{v_2}, \widetilde{L}_{u_3} - \omega \widetilde{R}_{u_3} \rangle \cong \mathrm{sl}(2) \oplus V(1)$, donde $V(1)$ denota el módulo irreducible (de Verma) de dimensión 2 para $\mathrm{sl}(2)$.

Como último comentario sobre este ejemplo, notemos que $\operatorname{Der}\mathcal{A}_1$ no procede de ningún álgebra Hurwitz, en otras palabras, no existe ningún producto $x \circ y$ en $\mathcal{A}_1$ de tal modo que $(\mathcal{A}_1, \circ)$ sea Hurwitz y para el cual $\operatorname{Der}\mathcal{A}_1 \subseteq \operatorname{Der}(\mathcal{A}_1, \circ)$. En efecto, en caso contrario tendríamos un elemento $e'$ (la unidad de $(\mathcal{A}_1, \circ))$ de modo que $e'(\operatorname{Der}\mathcal{A}_1) = 0$; sin embargo, la intersección de los núcleos de $D_{e_1,u_1}, D_{e_2,v_1}$ y $D_{u_1,v_1}$ es $\langle e \rangle$, pero $e(\widetilde{L}_{v_2} - \omega\widetilde{R}_{v_2}) = (1-\omega)v_2 \neq 0$.

El siguiente ejemplo es la otra excepción que aparecerá en nuestros resultados.

**Ejemplo 2:** Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Recordemos (capítulo 1) que el álgebra de pseudooctoniones $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$ se puede construir a partir del conjunto de matrices 3 por 3 de traza cero, $\mathrm{sl}(3,\mathcal{F})$, definiendo un nuevo producto

$$x * y = \mu x \cdot y + (1-\mu) y \cdot x - \frac{1}{3}\mathrm{traza}(x \cdot y) I_3$$

donde $\mu$ es una raíz de la ecuación $3\mu(1-\mu) = 1$, $x \cdot y$ denota el producto usual de matrices e $I_3$ la matriz identidad de orden 3. La forma bilineal en $\mathrm{P}_8(\mathcal{F}) = (\mathrm{sl}(3,\mathcal{F}), *)$ es $(x,y) = \frac{1}{6}\mathrm{traza}(x \cdot y)$.

Sean $H$ y $K$ los conjuntos de matrices simétricas y antisimétricas, respectivamente, de $\mathrm{sl}(3,\mathcal{F})$. Es inmediato comprobar que $H$ y $K$ son ortogonales para la forma bilineal y que, por lo tanto, las aplicaciones $\varphi_\alpha$ dadas por

$$a^{\varphi_\alpha} = \alpha a \quad \text{y} \quad s^{\varphi_\alpha} = s \quad \forall a \in K, s \in H,$$

con $\alpha^2 = 1$, son isometrías.

Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ con $\alpha^2 = 1 = \beta^2$ pero $\alpha$ o $\beta \neq 1$ definimos una nueva álgebra $\mathrm{P}_8(\alpha,\beta)$ cuyo espacio subyacente es $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$ y cuyo producto viene expresado por

$$xy = x^{\varphi_\alpha} * y^{\varphi_\beta}. \tag{5.3}$$

Notemos que $x * y = x^{\varphi_\alpha} y^{\varphi_\beta}$ pues $\varphi_\alpha^2 = id = \varphi_\beta^2$.

Respecto a $\operatorname{Der}\mathrm{P}_8(\alpha,\beta)$, observemos que $\forall x \in \mathrm{P}_8(\mathcal{F})$ la aplicación $ad_x : y \mapsto y * x - x * y = (1-2\mu)(x \cdot y - y \cdot x)$ es una derivación de $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$.

Si $x \in K$ entonces los subespacios $K$ y $H$ son $ad_x$ invariantes, por lo que $[\varphi_\alpha, ad_x] = 0\ \forall\alpha = \pm 1$; en consecuencia, $ad_x \in \operatorname{Der} \mathrm{P}_8(\alpha,\beta)\ \forall x \in K$. El álgebra de Lie $\{ad_x \,|\, x \in K\}$ es isomorfa a $K$ con el producto dado por conmutar matrices, la cual se sabe que es isomorfa a $\mathrm{sl}(2)$. Así, abusando de la notación, $\mathrm{sl}(2) \subseteq \operatorname{Der} \mathrm{P}_8(\alpha,\beta) \cap \operatorname{Der} \mathrm{P}_8(\mathcal{F})$. De hecho $\operatorname{Der} \mathrm{P}_8(\alpha,\beta) = \mathrm{sl}(2)$, pero esto no quedará demostrtado hasta la sección 4.

Tanto $K$ como $H$ son $\mathrm{sl}(2)$-módulos irreducibles, de dimensión 3 el primero y 5 el segundo, por lo que $\mathrm{P}_8(\alpha,\beta) = V(2) \oplus V(4)$ como módulo. Al igual que en el ejemplo anterior, el hecho de que no exista ningún elemento en $\mathrm{P}_8(\alpha,\beta)$ anulado conjuntamente por $\mathrm{sl}(2)$ nos dice que $\operatorname{Der} \mathrm{P}_8(\alpha,\beta)$ no procede de ningún álgebra Hurwitz.

Los siguientes teoremas y corolarios son, esencialmente, los resultados fundamentales del presente capítulo. Su demostración ocupará las próximas secciones. En los enunciados de los teoremas $A$ denotará un álgebra de composición de dimensión 8 y rango toral $\leq 1$ sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $\neq 2, 3$ y 5.

**Teorema 5.4.** *Si* $\operatorname{Der} A$ *posee una subálgebra de Cartan de dimensión* 2 *entonces o bien* $\operatorname{Der} A$ *es resoluble o bien* $\operatorname{Der} A \cong \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$ *con* $\mathcal{N}$ *un ideal nilpotente no nulo de dimensión* $1, 3$ *o* 5. *Además, si* $\operatorname{Der} A$ *no es resoluble entonces existe un elemento* $e \in A$ *con* $n(e) = 1$ *y* $e(\operatorname{Der} A) = 0$, *por lo que* $\operatorname{Der} A \subseteq \operatorname{Der}(A, e)$.

**Teorema 5.5.** *Si* $\operatorname{Der} A$ *no es resoluble y posee una subálgebra de Cartan de dimensión* 1 *entonces* $\operatorname{Der} A = \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$ *con* $\mathcal{N}$ *un ideal abeliano de dimensión* 0 *o* 2. *Además,* $A$ *es completamente reducible como* $\mathrm{sl}(2)$*-módulo y verifica uno de los siguientes apartados:*

I) $A \cong 4V(0) \oplus 2V(1)$. *En este caso existe* $e \in A$ *con* $n(e) = 1$ *y* $e(\operatorname{Der} A) = 0$.

II) $A \cong V(0) \oplus V(2) \oplus 2V(1)$. *Aquí aparecen dos posibilidades:*

II$_1$) *Existe* $e \in A$ *con* $n(e) = 1$ *y* $e(\operatorname{Der} A) = 0$. *En tal caso* $\operatorname{Der} A = \mathrm{sl}(2)$.

II$_2$) *Existe un idempotente* $e \in V(0)$ *con* $n(e) = 1$ *y una base canónica* $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ *de* $(A, e)$ *de tal modo que las matrices coordenadas de* $R_e$ *y* $L_e$ *en la base* $\{e, e_2 - e_1, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ *vienen dadas por (5.2). Así,* $A$ *es isomorfa al álgebra* $\mathcal{A}_1$ *del ejemplo* 1 *y* $\operatorname{Der} A = \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$ *con* $\dim \mathcal{N} = 2$.

III) $A \cong V(2) \oplus V(4)$. *Si esto ocurre entonces existe un isomorfismo entre* $A$ *y un álgebra* $\mathrm{P}_8(\alpha, \beta)$ *de modo que* $V(2)$ *se identifica con* $K$ *y* $V(4)$ *con* $H$ *(véase el ejemplo* 2*). Además* $\operatorname{Der} A = \mathrm{sl}(2)$ *y todas las álgebras* $\mathrm{P}_8(\alpha, \beta)$ *con* $\alpha^2 = 1 = \beta^2$ *y* $\alpha$ *o* $\beta \neq 1$ *aparecen en este apartado.*

IV) $A \cong 2V(0) \oplus 2V(2)$. *En este caso* $\operatorname{Der} A = \mathrm{sl}(2)$ *y existe* $e \in A$ *con* $n(e) = 1$ *y* $e(\operatorname{Der} A) = 0$.

*Además, el tipo de la descomposición de* $A$ *es independiente de la subálgebra* $\mathrm{sl}(2)$ *elegida.*

**Teorema 5.6.** *Si* $\operatorname{Der} A$ *es resoluble pero su acción no es nilpotente entonces* $\dim \operatorname{Der} A \leq 4$ *y el álgebra derivada* $[\operatorname{Der} A, \operatorname{Der} A]$ *está formada por derivaciones nilpotentes.*

**Teorema 5.7.** *Si* $\operatorname{Der} A$ *actúa nilpotentemente en* $A$ *entonces* $\dim \operatorname{Der} A \leq 6$.

Estos resultados aportan claridad e intuición sobre cómo influye el álgebra de derivaciones en las propiedades del álgebra de composición. Los siguientes corolarios son una muestra:

**Corolario.** *Sea $A$ un álgebra de composición con producto $xy$ sobre un cuerpo arbitrario de característica $\neq 2, 3$ y $5$. Si* $\operatorname{Der} A$ *no es resoluble entonces existen isometrías $\varphi$ y $\psi$ de tal modo que con el producto $x * y = x^{\varphi} y^{\psi}$, el álgebra $(A, *)$ es o bien Hurwitz o bien de Okubo; además, en ambos casos,* $\operatorname{Der} A \subseteq \operatorname{Der}(A, *)$.

*Demostración.* Sea $\bar{\mathcal{F}}$ la clausura algebraica de $\mathcal{F}$ y $A_{\bar{\mathcal{F}}} = \bar{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{F}} A$. El caso en que $A_{\bar{\mathcal{F}}}$ tiene rango toral 2 es consecuencia del teorema 4.22. Supongamos, pues, que el rango toral de $A_{\bar{\mathcal{F}}}$ es $\leq 1$. Exceptuando los casos $\mathrm{II}_2$ y III del teorema 5.5 se tiene que existe $e \in A_{\bar{\mathcal{F}}}$ con $n(e) = 1$ y $e\operatorname{Der} A_{\bar{\mathcal{F}}} = 0$. Fácilmente se sigue que hay un elemento $e' \in A$ con $n(e') = 1$ y $e'\operatorname{Der} A = 0$. Basta escoger $R_{e'}^{-1}$ como $\varphi$ y $L_{e'}^{-1}$ como $\psi$ para concluir el corolario.

Estudiemos detenidamente qué ocurre en el caso $\mathrm{II}_2$ del teorema 5.5. El ideal abeliano $\mathcal{N}$ de $\operatorname{Der} A_{\bar{\mathcal{F}}} = \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$ es el radical de la forma de Killing, por lo que existe un ideal abeliano $\mathcal{R}$ en $\operatorname{Der} A$ con $\mathcal{N} = \bar{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{R}$. Del hecho de tener $\mathcal{N}$ una subálgebra suplementaria podemos deducir que existe una subálgebra simple central de dimensión 3, $\mathcal{S}$, en $\operatorname{Der} A$ con $\operatorname{Der} A = \mathcal{S} \oplus \mathcal{R}$. Al ser la descomposición de $A_{\bar{\mathcal{F}}}$ independiente de la subálgebra $\mathrm{sl}(2)$ considerada, nada cambia al elegir $\mathrm{sl}(2) = \bar{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{S}$.

El elemento $e \in A_{\bar{\mathcal{F}}}$ del teorema 5.5 se encuentra, de hecho, en $A$. En efecto, el conjunto $\{x \in A \mid x\operatorname{Der} A = 0\}$ tiene dimensión 1 y al extender escalares pasa a $\bar{\mathcal{F}}e$. Pongamos $e = \lambda x$ con $\lambda \in \bar{\mathcal{F}}$ y $x \in A$. Por ser $e$ indempotente, $\lambda x = e = e^2 = \lambda^2 x^2$, de donde $\lambda \in \mathcal{F}$ y, en consecuencia, $e \in A$.

Sea $\{e, e_2 - e_1, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ la base de $(A_{\bar{\mathcal{F}}}, e)$ donde las matrices coordenadas de $R_e$ y $L_e$ vienen dadas por (5.2). Recordemos que el producto en $(A_{\bar{\mathcal{F}}}, e)$ se denota por $\circ$ y la involución estándar por $J : x \mapsto \bar{x}$. En la base $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ la matriz coordenada de la aplicación $\tau = JL_e^{-1}$ es

$$\mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, \omega, \omega^2, \omega^2, \omega)$$

por lo que, según la proposición 2.7, el álgebra $(A_{\bar{\mathcal{F}}}, *)$ cuyo producto se define mediante

$$x * y = \bar{x}^{\tau} \circ \bar{y}^{\tau^{-1}} = x^{J\tau R_e^{-1}} y^{J\tau^{-1} L_e^{-1}} = x^{L_e^{-1} R_e^{-1}} y$$

para todo $x, y \in A_{\bar{\mathcal{F}}}$ es un álgebra de Okubo. Como $e \in A$, las aplicaciones $\varphi = L_e^{-1} R_e^{-1}$ y $\psi = id$ dejan invariante a $A$ y, así, $A * A \subseteq A^{\varphi} A \subseteq A$; en consecuencia, $(A, *)$ es un álgebra de Okubo.

El teorema 1.10 nos dice que $\varphi$ es un automorfismo de $(A_{\bar{\mathcal{F}}}, e)$, lo cual permite comprobar, usando la descripción de $\mathrm{Der}\, A_{\bar{\mathcal{F}}}$ obtenida en el ejemplo 1, que $[\varphi, \mathrm{Der}\, A_{\bar{\mathcal{F}}}] = 0$. Es inmediato concluir que $[\varphi, \mathrm{Der}\, A] = 0$ y $\mathrm{Der}\, A \subseteq \mathrm{Der}\,(A, *)$, lo que demuestra el corolario en este caso.

Por último, analicemos el caso en que la estructura de $A_{\bar{\mathcal{F}}}$ responda al apartado III del teorema 5.5. Aquí $A_{\bar{\mathcal{F}}} = V(2) \oplus V(4)$ y $\mathrm{Der}\, A$ es una forma de sl(2). De hecho, también $A$ se puede expresar como $A = V \oplus W$ donde $V$ y $W$ son $\mathrm{Der}\, A$-módulos irreducibles de dimensiones 3 y 5 respectivamanete (brevemente: $\mathrm{Der}\, A$ se escinde en una extensión cuadrática $L$ de $\mathcal{F}$ (véase [J]) y al extender escalares a $L$ tenemos $A_L = L \otimes_F A = V(2) \oplus V(4)$. Sean $\tau$ el $\mathcal{F}$-automorfismo no trivial de $L$ y $\tau'$ definida mediante $(\alpha x)^{\tau'} = \alpha^{\tau} x\ \forall \alpha \in L, x \in A$. Puesto que necesariamente $V(2)^{\tau'} = V(2)$ y $V(4)^{\tau'} = V(4)$, basta entonces definir $V = \{x \in V(2) \mid x^{\tau'} = x\}$ y $W = \{x \in V(4) \mid x^{\tau'} = x\}$. Así pues, sin pérdida de generalidad puede suponerse $V(2) = \bar{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{F}} V$ y $V(4) = \bar{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{F}} W$).

Manteniendo la notación $\mathrm{P}_8(\alpha,\beta), K, H$ y $\varphi_\alpha$ del ejemplo 2, el teorema 5.5 nos permite identificar $A_{\bar{\mathcal{F}}}, V(2)$ y $V(4)$ con $\mathrm{P}_8(\alpha,\beta), K$ y $H$ respectivamente, y la igualdad (5.3) nos dice que $A_{\bar{\mathcal{F}}}$ con el producto $x * y = x^{\varphi_\alpha} y^{\varphi_\beta}$ es un álgebra de Okubo. Puesto que $\varphi_\alpha$ (análogamente $\varphi_\beta$) es la extensión a $A_{\bar{\mathcal{F}}}$ de la aplicación $\varphi_\alpha : a \mapsto \alpha a,\ s \mapsto s \quad \forall a \in V, s \in W$, se sigue que $A * A \subseteq A$ y que $(A, *)$ es una $\mathcal{F}$-álgebra de Okubo. Recurriendo de nuevo al ejemplo 2 y al teorema 5.5, tenemos que $[\varphi_\alpha, \mathrm{Der}\, A] = 0 = [\varphi_\beta, \mathrm{Der}\, A]$ y, en consecuencia, $\mathrm{Der}\, A \subseteq \mathrm{Der}\,(A, *)$.

QED

Corolario.*Sea $A$ un álgebra de composición de división sobre un cuerpo de característica $\neq 2, 3$ y $5$, entonces existen isometrías $\varphi$ y $\psi$ de tal modo que el álgebra $(A, *)$ cuyo producto se define mediante $x * y = x^\varphi y^\psi$ es o bien Hurwitz o bien de Okubo y, además,* $\mathrm{Der}\, A \subseteq \mathrm{Der}\,(A, *)$.

*Demostración.* Si $\mathrm{Der}\, A$ no es un álgebra de Lie resoluble entonces el resultado es consecuencia del lema anterior. En otro caso, según el teorema 5.6, $[\mathrm{Der}\, A, \mathrm{Der}\, A]$ únicamente contiene derivaciones nilpotentes; ahora bien, como hicimos notar en la sección 5 del capítulo anterior, $A$ no posee derivaciones nilpotentes no nulas; en consecuencia, $\mathrm{Der}\, A$ es un álgebra abeliana y, por la clasificación de las subálgebra de Cartan, se tiene que existe $a \in A$ con $a(\mathrm{Der}\, A) = 0$. El resultado es, ahora, inmediato.

QED

Nota : Las formas del álgebra $\mathcal{A}_1$ del ejemplo 1 no son álgebras de división. En efecto, en la demostración del primer corolario se vio que si $A$ es una tal forma entonces $\mathrm{Der}\, A = \mathcal{S} \oplus \mathcal{R}$ con $\mathcal{R}$ un ideal de dimensión 2 y $\mathcal{S}$ un álgebra simple central de dimensión 3. Puesto que $\mathcal{S}$ se identifica mediante la adjunción con una subálgebra de $\mathrm{End}_F(\mathcal{R})$ y $[\mathcal{S},\mathcal{S}] = \mathcal{S}$, se sigue que $\mathcal{S} = \mathrm{sl}(2)$; sin embargo, $A$ no puede tener derivaciones nilpotentes, lo que es una contradicción.

**Corolario.** *Sea $A$ un álgebra de composición sobre un cuerpo arbitrario de característica $\neq 2, 3$ y 5. Se tiene que $A$ es un álgebra de Okubo si y sólo si $A$ es un módulo irreducible para su álgebra de derivaciones.*

*Demostración.* El directo es conocido [E-M 91]. Respecto al recíproco, puesto que $A$ es $\mathrm{Der}\, A$-irreducible, $A$ no tiene submódulos triviales y en consecuencia, mirando la clasificación, encontramos que o bien $\mathrm{Der}\, A$ es resoluble o bien $A$ es una forma de una de las siguientes álgebras: un álgebra de pseudooctoniones, $\mathcal{A}_1$ o $\mathrm{P}_8(\alpha,\beta)$.

Supongamos que $\mathcal{I}$ es un ideal abeliano no nulo de $\mathrm{Der}\, A$, por hipótesis $A\mathcal{I} = A$. Pasando a la clausura algebraica, los mismos argumentos que empleamos en la demostración del lema 4.18 muestran que $\{x \in A \,|\, \forall D \in \mathcal{I}\, \exists m \text{ con } xD^m = 0\}$ es no nulo. Así, existe un elemento no nulo $a \in A$ anulado por $\mathcal{I}$ que, por la antisimetría de las derivaciones, también verifica $(A,a) = (A\mathcal{I},a) = (A,a\mathcal{I}) = 0$, lo que da una contradicción. En consecuencia el radical resoluble de $\mathrm{Der}\, A$ es nulo. Esto restringe las posibilidades para $A$: o bien $A$ es un álgebra de Okubo o bien $A$ es una forma de un álgebra $\mathrm{P}_8(\alpha,\beta)$. Lo visto en la demostración del primer corolario elimina la segunda posibilidad.

QED

Antes de detallar la estructura de las secciones nos gustaría mostrar dos ejemplos en los cuales comprobaremos que las cotas de los teoremas 5.6 y 5.7 se alcanzan.

**Ejemplo 3:** Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $\neq 2, 3$ y $5$, y $\mathcal{L} = \mathrm{sl}(3, \mathcal{F})$ el álgebra de derivaciones de $\mathrm{P}_8(\mathcal{F}) = (\mathrm{P}_8(\mathcal{F}), *)$ (véase, por ejemplo, [E-M 91]). Denotemos por $E_{ij}$ la matriz 3 por 3 que tiene un 1 en la posición $(i, j)$ y ceros en el resto, y por $ad_x$ la aplicación $ad_x : y \mapsto y * x - x * y$ que, como sabemos, es una derivación de $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$. Sea $\varphi = exp(ad_{E_{12}}) = id + ad_{E_{12}} + \frac{1}{2} ad^2_{E_{12}}$ el automorfismo exponencial de $ad_{E_{12}}$ en $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$. Definimos una nueva álgebra $A$ cuyo producto viene dado por $xy = x^\varphi * y$.

Consideremos $h = E_{11} + E_{22} - 2E_{33}$. Como $\bar{\mathcal{L}} = \langle ad_h, ad_{E_{12}}, ad_{E_{13}}, ad_{E_{32}} \rangle$ conmuta con $ad_{E_{12}}$, se tiene que $\bar{\mathcal{L}} \subseteq \mathrm{Der}\, A$. Además, $\{x \in A \,|\, x\bar{\mathcal{L}} = 0\} = \langle E_{12} \rangle$ tiene norma cero, por lo que, en vista de nuestra clasificación, o bien $\mathrm{Der}\, A$ es resoluble o bien $A$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras: un álgebra de Okubo, $\mathcal{A}_1$ o $\mathrm{P}_8(\alpha, \beta)$.

La última posibilidad no es factible pues $\dim \mathrm{Der}\, \mathrm{P}_8(\alpha, \beta) = 3$. Por otro lado, si $A$ fuese de Okubo, puesto que el elemento $h$ anterior es fijo por $\varphi$ y su norma es no nula, se tendría $n(h)y = (hy)h = (h * y^\varphi) * h = n(h)y^\varphi$, de donde $\varphi = id$, lo cual es falso. Tampoco $A$ puede ser isomorfa a $\mathcal{A}_1$ ya que $\mathrm{Der}\, \mathcal{A}_1 = \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$ con $\mathcal{N} = V(1)$ (ejemplo 1) mientras que $\mathrm{Der}\, A$ posee una derivación ($ad_{E_{12}}$) que centraliza a una subálgebra ($\bar{\mathcal{L}}$) de dimensión 4. En consecuencia, $\mathrm{Der}\, A$ es resoluble y de dimensión 4.

**Ejemplo 4:** Consideremos una base canónica en $\mathfrak{C}$ y una isometría $\varphi$ dada por la matriz coordenada (5.4). Definimos un nuevo producto en $\mathfrak{C}$ mediante $xy = x^\varphi \circ y$ y denotamos por $A$ el álgebra resultante. Claramente $e$ es la unidad a izquierda de $A$ y, por lo tanto, $e(\mathrm{Der}\, A) = 0$. Así, $\mathrm{Der}\, A = \{D \in \mathrm{Der}\, \mathfrak{C} \,|\, [\varphi, D] = 0\}$.

$$\varphi \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right). \tag{5.4}$$

En la misma base canónica, la matriz

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|ccc}
0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 \\
0 & 0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 \\
\hline
0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\
-\beta_3 & \beta_3 & c & f & 0 & \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 \\
\hline
\lambda_1 & -\lambda_1 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 & -c \\
\lambda_2 & -\lambda_2 & -\beta_3 & 0 & 0 & -d & 0 & -f \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

representa una derivación

$$D = \lambda_1 D_{e_1,u_1} + \lambda_2 D_{e_1,u_2} + \beta_3 D_{e_2,v_3} + cD_{u_1,v_3} + dD_{u_2,v_1} + fD_{u_2,v_3}.$$

Es inmediato comprobar que $[\varphi, D] = 0$ y que, por lo tanto, $\operatorname{Der} A$ contiene el subespacio $\mathcal{L}_0$ de $\operatorname{Der} \mathfrak{C}$ generado por los vectores de raíces $\{-\alpha_1, \alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2), \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$, el cual es una subálgebra nilpotente de $\operatorname{Der} \mathfrak{C}$. Usando nuestra clasificación vemos que, por la dimensión de $\operatorname{Der} A$, o bien $\operatorname{Der} A = \mathcal{L}_0$ o bien $\operatorname{Der} A$ no es resoluble. En este último caso se tendría que o bien $A$ es estándar o bien $\operatorname{Der} A = \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$ con $\mathcal{N}$ ideal nilpotente de dimensión 5. Puesto que $e$ es unidad a un lado de $A$ y $\varphi = R_e$, se sigue que $A$ no es estándar. Respecto a la posibilidad $\operatorname{Der} A = \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$, observemos que si existiesen otras derivaciones, bastaría conmutarlas con $\mathcal{L}_0$ para, usando lo visto en el capítulo 1, concluir que el rango toral de $A$ es 2, lo cual, por el teorema 4.23, es imposible. Esto nos muestra que Der $A$ actúa nilpotentemente y que su dimensión es 6.

En la próxima sección mostraremos aquellos ejemplos de álgebras reales de división que quedaron pendientes en la sección 5 del capítulo anterior. La sección 3 se dedicará a demostrar un resultado más completo que el teorema 5.4. Las técnicas de trabajo son similares a las que usamos al tratar las álgebras de rango toral 2. En la sección 4 abordaremos la demostración del teorema 5.5. Aquí la teoría de representaciónes de sl(2) en característica arbitraria y el principio de la trialdad resultan fundamentales. En la última sección demostraremos los teoremas 5.6 y 5.7.

## 2. Ejemplos de álgebras de división

Permítasenos continuar con la notación establecida en la sección 5 del capítulo anterior.

Observemos que si $B$ es una subálgebra de cuaternios de $(C, \circ)$ y $\bar{D}$ es una derivación en $B$, entonces cualquier elemento $c \in B$ de traza nula proporciona una forma de extender $\bar{D}$ a una derivación $D$ del álgebra $(C, \circ)$ mediante

$$b \mapsto b\bar{D}, \quad v \circ b \mapsto v \circ (b \circ c + b\bar{D}) \quad \forall b \in B,$$

donde $v$ es un elemento prefijado no nulo de $B^{\perp}$.

Sea $K$ una subálgebra de composición de dimensión 2 de $(C, \circ)$ y

$$\mathrm{Der}_K(C, \circ) = \{D \in \mathrm{Der}\,(C, \circ) \mid KD = 0\}.$$

Denotemos por $su(K^{\perp}, \sigma)$ al conjunto

$$\{D' \in \mathrm{End}_K(K^{\perp}) \mid \sigma(xD', y) + \sigma(x, yD') = 0\}$$

donde $\sigma$ es la $K$-forma hermitiana del $K$-espacio vectorial $K^{\perp}$ definida en (1.13). La siguiente caracterización de $\mathrm{Der}_K(C, \circ)$ resultará útil [E-M 95]:

**Teorema 5.8.** *La aplicación* $D \mapsto D|_{K^{\perp}}$ *es un isomorfismo de álgebras de Lie entre* $\mathrm{Der}_K(C, \circ)$ *y* $su(K^{\perp}, \sigma)$.

**Ejemplo D'$_{\mathbf{I}}$:** Sea $K$ una subálgebra de dimensión 2 del álgebra de Cayley-Dickson $(C, \circ)$ y $\{x_1, x_2, x_3 = x_1 \circ x_2\}$ una $K$-base $\sigma$-ortogonal del $K$-espacio vectorial $K^{\perp}$. Fijemos un elemento $a \in K$ ortogonal a la unidad $e$. Consideremos $V$ el $\mathcal{F}$-espacio vectorial generado por $\{x_1, x_2, a \circ x_3\}$ y $V' = a \circ V$; claramente $C = K \oplus V \oplus V'$ es una descomposición en subespacios de $C$ ortogonales entre sí.

Sea $\varphi$ una isometría de $C$ dada por

$$\varphi|_{K \oplus V'} = id, \quad \varphi|_V = -id.$$

Definimos un nuevo producto en $A = C$ mediante $xy = x^{\varphi} \circ y$. Al ser $e$ la unidad a izquierda de $A$ se tiene que $e(\mathrm{Der}\, A) = 0$ y, así, $\mathrm{Der}\, A = \{D \in \mathrm{Der}\,(C, \circ) \mid [\varphi, D] = 0\}$.

Sea $D \in \mathrm{Der}\, A$ y $x \in V$, como $xD\varphi = x\varphi D = -xD$ tenemos que $xD \in V$. Por otro lado, si $VD = 0$ entonces $D$ anula a la subálgebra de $(C, \circ)$ generada por $V$, la cual es $C$; en consecuencia, la aplicacion $D \mapsto D|_V$ es inyectiva y sitúa a $\mathrm{Der}\, A$ dentro de las aplicaciones antisimétricas de $V$. Así, $\mathrm{Der}\, A$ es una subálgebra de un álgebra de Lie simple central de dimensión 3. Recíprocamente, es inmediato comprobar por el teorema 5.8 que cualquier aplicación antisimétrica $D' : V \longrightarrow V$ se extiende a una derivación $D$ de $(C, \circ)$ mediante

$$D|_K = 0, \quad vD = vD' \quad \text{y} \quad (a \circ v)D = a \circ (vD') \quad \forall v \in V.$$

Concluimos que $\mathrm{Der}\, A$ es un álgebra simple central de dimensión 3. Además $K$ es un módulo trivial para $\mathrm{Der}\, A$ y $V, V'$ son irreducibles.

**Ejemplo D'$_{\mathbf{II}}$:** Sea $B$ una subálgebra de cuaternios de $(C, \circ)$, $a, b \in B$ tales que $n(a) = 1 = n(b)$ y $\{a, b, e\}$ son linealmente independientes, y sea $v$ un elemento fijo no nulo en $B^\perp$. A partir de los automorfismos $\tau_a$ y $\tau_b$ construidos mediante

$$x^{\tau_a} = x \quad \text{y} \quad (v \circ x)^{\tau_a} = v \circ (x \circ a) \quad \forall x \in B$$

(análogamente $\tau_b$) definimos una nueva álgebra $A$ cuyo producto viene dado por $xy = x^{\tau_a} \circ y^{\tau_b}$.

Escogiendo $A^{(0)} = B$ y $A^{(1)} = B^\perp$ tenemos que la descomposición $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ es una $\mathbb{Z}_2$ graduación de $A$, la cual induce en $\mathcal{L} = \mathrm{Der}\, A$ otra graduación $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} \oplus \mathcal{L}^{(1)}$ con $\mathcal{L}^{(i)} = \{D \in \mathrm{Der}\, A \mid A^{(j)} D \subseteq A^{(i+j)}\}$ (los índices se consideran módulo 2).

Sea $D \in \mathcal{L}^{(1)}$ y $eD = v \circ c$ para algún $c \in B$. Tenemos $v \circ c = eD = e^2 D = e(eD) + (eD)e = (eD)^{\tau_a + \tau_b} = v \circ (c \circ (a + b))$, de donde $c \circ (a + b - e) = 0$. Puesto que $a, b$ y $e$ son linealmente independientes, se sigue que $c = 0$ y $eD = 0$. Esto implica que $xD = (ex)D = e(xD) = xD\tau_b$ $\forall x \in B$. Ahora bien, $\tau_b$ no tiene valor propio 1 en $B^\perp$, por lo que $BD = 0$ y, por antisimetría, $\mathcal{L}^{(1)} = 0$.

Sea $D \in \mathcal{L}^{(0)}$,

$$xD = (ex)D = e(xD) + (eD)x = xD + (eD)x \quad \forall x \in B,$$

de donde $eD = 0$; así, $\mathrm{Der}\, A = \mathcal{L}^{(0)} \subseteq \mathrm{Der}\,(C, \circ)$ de donde $[\tau_a, D] = 0 = [\tau_b, D]$ $\forall D \in \mathrm{Der}\, A$. Por otro lado, si $vD = v \circ c$ con $c \in B$ y $c \perp e$ entonces, al conmutar $D$ con $\tau_a$ y $\tau_b$, ocurre que $aD = c \circ a - a \circ c$ y $bD = c \circ b - b \circ c$. Puesto que $a$ y $b$ generan $B$, esto nos dice que $D|_B = -ad_c : x \mapsto c \circ x - x \circ c$;

en consecuencia, $(v \circ x)D = v \circ (x \circ c + c \circ x - x \circ c) = (v \circ x) \circ c \; \forall x \in B$. Es sencillo concluir que el álgebra de Lie $\operatorname{Der} A$ es isomorfa al álgebra de Lie $B \cap \langle e \rangle^{\perp}$ con el producto $[x, y] = x \circ y - y \circ x$, que es un álgebra simple central de dimensión 3.

Como $\operatorname{Der} A$-módulos, $B$ es suma de un submódulo trivial de dimensión 1 y otro irreducible de dimensión 3, mientras que $B^{\perp}$ es irreducible.

**Ejemplo D'$_{\text{III}}$:** Sea $B$ una subálgebra de cuaternios de $(C, \circ)$ y $a, b \in B$ ortogonales entre sí y ortogonales con la unidad $e$. Definimos dos isometrías $\varphi, \psi$ mediante

$$\varphi : x \mapsto a^{-1} \circ x \circ a, \quad y \mapsto y$$

$$\psi : x \mapsto b^{-1} \circ x \circ b, \quad y \mapsto y$$

$\forall x \in B$ e $y \in B^{\perp}$. Podemos construir una nueva álgebra de composición $A$ cuyo producto venga dado por $xy = x^{\varphi} \circ y^{\psi}$. Al igual que en el ejemplo anterior, $A$ es un álgebra $\mathbb{Z}_2$ graduada mediante $A = B \oplus B^{\perp}$. Denotemos por $\mathcal{L} = \operatorname{Der} A = \mathcal{L}^{(0)} \oplus \mathcal{L}^{(1)}$ la graduación inducida en $\operatorname{Der} A$.

Sea $D \in \mathcal{L}^{(1)}$, tenemos que $eD = (eD)e + e(eD) = 2eD$, por lo que $eD = 0$. En particular, $\forall y \in B^{\perp}$ ocurre:

$$yD = (ye)D = yD\varphi, \quad yD = yD\psi,$$

de donde, por la definición de $\varphi$ y $\psi$, $yD$ conmuta con $a$ y $b$. Así $yD \in \langle e \rangle$, pero $(yD, e) = -(y, eD) = 0$, por lo que, $B^{\perp}D = 0$. Por la antisimetría de las derivaciones se sigue que $\mathcal{L}^{(1)} = 0$.

Sea $D \in \mathcal{L}^{(0)}$, claramente $yD = (ey)D = (eD)y + yD \; \forall y \in B^{\perp}$ implica que $eD = 0$; así, $\operatorname{Der} A = \mathcal{L}^{(0)} \subseteq \operatorname{Der}(C, \circ)$. Puesto que $D$ conmuta con la acción de $\varphi$ y $\psi$ se sigue que $D|_B = 0$. De nuevo, es sencillo concluir que $\operatorname{Der} A$ es isomorfa al álgebra de Lie $B \cap \langle e \rangle^{\perp}$ con el producto dado por $[x, y] = x \circ y - y \circ x$, la cual es simple central de dimensión 3.

Respecto a la descomposición de $A$ como Der $A$-módulo, resulta claro que $B$ es un módulo trivial mientras que $B^{\perp}$ es irreducible.

**Ejemplo D'$_{\mathbf{IV}}$:** Para este ejemplo es conveniente partir de un álgebra de Okubo de división. Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo que no contenga ninguna raíz cúbica primitiva $\omega$ de la unidad y $K = \mathcal{F}(\omega)$. Consideremos dentro del álgebra de pseudooctoniones $\mathrm{P}_8(K) = (\mathrm{sl}(3, K), *)$ el $\mathcal{F}$-espacio vectorial $A = \{x \in \mathrm{P}_8(K) \mid \bar{x}^t = -x\}$ donde $x \mapsto x^t$ es la trasposición de matrices y $\bar{x}^t$ denota la matriz conjugada hermitiana de $x$. Como vimos en el capítulo 1 (teorema 1.25) $A$ con el producto $*$ heredado de $\mathrm{P}_8(K)$ es una $\mathcal{F}$-álgebra de Okubo. Es sabido [E-M 91] que si $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$ entonces el álgebra $(A, *)$ es la única (salvo isomorfismos) álgebra de Okubo de división sobre $\mathbb{R}$.

Supongamos que, como en el caso real, $(A, *)$ es de división. Sean $K = \{a \in A \mid a^t = -a\}$ y $H = \{s \in A \mid s^t = s\}$. Definimos las siguientes isometrías:

$$a^{\varphi_\alpha} = \alpha a \quad \text{y} \quad s^{\varphi_\alpha} = s \quad \forall a \in K, s \in H$$

donde $\alpha^2 = 1$. Podemos dotar a $A$ con un nuevo producto dado por $xy = x^{\varphi_\alpha} * y^{\varphi_\beta}$ con $\alpha^2 = 1 = \beta^2$ y $\alpha$ o $\beta \neq 1$. Es evidente que $A$ es una forma de un álgebra $\mathrm{P}_8(\alpha, \beta)$, por lo que en vista del teorema 5.5 $\mathrm{Der}\, A = \{ad_z : x \mapsto xa - ax \mid a \in K\}$ es una forma de $\mathrm{sl}(2)$.

Respecto a la descomposición de $A$ como Der $A$-módulo, notemos que $K$ es un módulo irreducible de dimensión 3 mientras que $H$ lo es de dimensión 5.

Los siguientes dos ejemplos muestran álgebras de composición cuyas álgebras de derivaciones tienen dimensiones 1 y 0 respectivamente. Con ellos damos por finalizada nuestra lista de ejemplos de álgebras de división de composición para el teorema 4.1 y las proposiciones A-D.

**Ejemplo 5:** Sea $K$ una subálgebra de dimensión 2 de $(C, \circ)$ y $\varphi, \psi$ dos automorfismos de $(C, \circ)$ que fijen los elementos de $K$ y cuyas matrices coordenadas en una $K$-base $\sigma$-ortonormal de $K^\perp$ (por ejemplo con $(C, \circ)$ los octoniones de división reales y $K = \mathbb{C}$) sean

$$\varphi \leftrightarrow \operatorname{diag}(a, b, (a \circ b)^{-1}) \quad \psi \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $a, b \in K$ tienen norma 1 y en $\{a, b, (a \circ b)^{-1}, e, -e\}$ no hay dos elementos iguales (recordemos el teorema 1.11). Definimos una nueva álgebra $A$ cuyo producto viene dado por $xy = x^\varphi \circ y^\psi$. Puesto que tanto $\varphi$ como $\psi$ son automorfismos de $(C, \circ)$ y además $\varphi$ no tiene valores propios $\pm 1$ en $K^\perp$, es sencillo concluir, por la proposición 5.3, que $\operatorname{Der} A = \{D \in \operatorname{Der}(C, \circ) \mid [\varphi, D] = 0 = [\psi, D]\}$.

Dada $D \in \operatorname{Der} A$ y $x \in K$ tenemos que $xD = x\varphi D = xD\varphi$, de donde $xD \in K$ y así, como $K$ no tiene derivaciones no triviales, $KD = 0$. Podemos ver los elementos de $\operatorname{Der} A$ como transformaciones en $\operatorname{su}(K^\perp, \sigma)$ que conmutan con $\varphi$ y $\psi$ (teorema 5.8). Por la forma de $\varphi$ y $\psi$ se sigue que $\dim \operatorname{Der} A = 1$.

**Ejemplo 6:** Si en el ejemplo anterior en lugar de la $\psi$ escogida consideramos

$$\psi \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces una argumentación análoga a la vista muestra que $\operatorname{Der} A = 0$.

# 3. Algebras de rango toral 1 y rango 2

En esta sección demostraremos algunos resultados que conducirán al teorema 5.4. A lo largo de la sección la característica del cuerpo base se supondrá distinta de 2 y 3. El tratamiento difiere dependiendo de la dimensión del subespacio de peso nulo $A_0$ del álgebra de composición $A$. Si tal dimensión es 2 (subálgebra de Cartan corta) entonces las derivaciones proceden de un álgebra Hurwitz donde encontraremos una base canónica para representarlas. Sin embargo, si la dimensión es 4 (subálgebra de Cartan larga) entonces aparecen como excepciones ciertas álgebras de composición cuya álgebra de derivaciones es resoluble (ejemplo 3).

## 3.1. Subálgebras de Cartan cortas

Sea $\mathcal{H}$ una subálgebra de Cartan corta de dimensión 2 de $\operatorname{Der} A$. Denotemos por $e$ la unidad, unidad a un lado o una paraunidad del espacio de peso nulo $A_0$, y sea

$$A = A_0 \bigoplus (A_\alpha \oplus A_{-2\alpha}) \bigoplus (A_{-\alpha} \oplus A_{2\alpha}) \tag{5.5}$$

la $\mathbb{Z}_3$ graduación asociada a la descomposición en subespacios peso. Elegimos una base canónica en $(A, e)$ de tal modo que

$$\begin{aligned} &A_0 = \mathcal{F}e_1 + \mathcal{F}e_2 \quad A_\alpha = \langle u_2, u_3 \rangle \\ &A_{-\alpha} = \langle v_2, v_3 \rangle \qquad A_{2\alpha} = \langle v_1 \rangle \qquad A_{-2\alpha} = \langle u_1 \rangle \end{aligned} \tag{5.6}$$

(recordemos (4.6)). Pongamos $\mathcal{H} = \mathcal{F}H_s + \mathcal{F}H_n$ con $H_s$ semisimple y $H_n$ nilpotente. Es evidente que $H_n$ anula al subespacio $\langle e_1, e_2, u_1, v_1 \rangle$ y que, salvo cambio de la base canónica, podemos suponer

$$u_3 H_n = u_2 \quad u_2 H_n = 0 \quad v_2 H_n = -v_3 \quad v_3 H_n = 0.$$

**Lema 5.9.** *Para la anterior elección de $e$ y de la base*

$$\{e, e_1 - e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\},$$

*los operadores $L_e$ y $R_e$ tienen matrices coordenadas de la forma*

$$\mathrm{diag}(1, \pm 1, C, (C^t)^{-1}) \quad con \quad C = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \epsilon_2 & \\ & \delta & \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

*donde $t$ denota la trasposición. Además, alguna de ellas es no diagonal.*

*Demostración.* Demostraremos el lema para $L_e$, siendo análogo para $R_e$. Como $e \in A_0$ entonces $eA_{2\alpha} = A_{2\alpha}$ y así $eu_1 = \epsilon_1 u_1$ para algún $\epsilon_1 \in \mathcal{F}$. Por otro lado, $(eu_2)H_n = e(u_2)H_n = 0$ y $eu_2 \in A_\alpha$ implican $eu_2 = \epsilon_2 u_2$ para algún $\epsilon_2 \in \mathcal{F}$. Por último, como $eu_3 = \lambda u_3 + \delta u_2$ para ciertos $\lambda, \delta \in \mathcal{F}$, aplicando $H_n$ a esta expresión se sigue que $\lambda = \epsilon_2$, por lo cual la matriz $C$ del enunciado es la matriz coordenada del operador $L_e$ restringido a $U(e_1)$. Puesto que $L_e$ es una isometría, concluimos que la matriz coordenada de $L_e$ restringido a $V(e_1)$ es $(C^t)^{-1}$.

Si las matrices coordenadas de $L_e$ y $R_e$ en la base que aparece en el enunciado fuesen ambas diagonales entonces, por la proposición 4.20, $A$ tendría rango toral 2, que no es el caso.

QED

La siguiente proposición es análoga a la proposición 4.20

**Proposición 5.10.** *Las álgebras de composición $A$ de rango toral 1, con producto $xy$, cuya álgebra de derivaciones posee una subálgebra de Cartan corta de dimensión 2 son exactamente aqéllas que se construyen a partir del álgebra de Cayley split $(\mathrm{C}, \circ)$, con unidad $e$, y una base canónica $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ definiendo $xy = x^\varphi \circ y^\psi$ para cualesquiera operadores lineales $\varphi, \psi$ de $\mathrm{C}$ cuyas matrices coordenadas en la base*

$$\{e, e_1 - e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$$

*tengan la forma*

$$\mathrm{diag}(1, \pm 1, C, (C^t)^{-1}) \quad con \quad C = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \epsilon_2 & \\ & \delta & \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

*y al menos una de ellas no sea diagonal.*

*Demostración.* El lema anterior demuestra el directo. Respecto al recíproco, sea $A$ un álgebra de composición construida como se indica en el enunciado. La unidad $e$ de $\mathfrak{C}$ pasa a ser un idempotente en $A$ y $\varphi, \psi$ se convierten en los operadores $R_e$ y $L_e$ de $A$ respectivamente; así, $(\mathfrak{C}, \circ) = (A, e)$. La subálgebra $\mathcal{H} = \langle D_{u_1,v_1}, D_{u_2,v_3} \rangle$ de $\mathrm{Der}\,(A, e)$ conmuta con $L_e$ y $R_e$ por lo que $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Der}\, A$ y proporciona una descomposición de $A$ análoga a (5.5). Veamos que $\mathcal{H}$ es subálgebra de Cartan de $\mathrm{Der}\, A$. Dada $D \in \mathrm{Der}\, A$ con $[\mathcal{H}, D] \subseteq \mathcal{H}$ entonces $(A_0)D \subseteq A_0$, por lo que en vista del teorema 4.8 $(A_0)D = 0$ y $D \in \mathrm{Der}\,(A, e)$. Pensando en que la matriz coordenada de $D$ debe conmutar con las de $L_e$ y $R_e$, fácilmente se ve que $D \in \mathcal{H}$. Por lo tanto $\mathcal{H}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathrm{Der}\, A$. Además $A$ no puede tener rango toral 2 ya que en tal caso todas las subálgebras de Cartan son conjugadas y por lo tanto existiría $\xi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Der}\, A)$ con $H_n^\xi$ diagonalizable; en particular, $ad_{H_n} = \xi ad_{H_n^\xi} \xi^{-1}$ sería nilpotente y diagonalizable, es decir nula. Tendríamos que $H_n$ pertenece al centro de $\mathrm{Der}\, A$, $Z(\mathrm{Der}\, A)$, que, como sabemos 4.23, contiene únicamente derivaciones diagonalizables, lo que es una contradicción. Esto demuestra que el rango toral de $A$ es 1.

QED

Sean $e$ y $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ como al inicio de la subsección, por el lema 5.9 los operadores $L_e$ y $R_e$ tienen matrices coordenadas

$$\begin{array}{rcll} L_e & \leftrightarrow & \operatorname{diag}(1, \pm 1, C, (C^t)^{-1}) \quad \text{con} \quad C = \begin{pmatrix} \epsilon_{l1} & & \\ & \epsilon_{l2} & \\ & \delta_l & \epsilon_{l2} \end{pmatrix} \\ R_e & \leftrightarrow & \operatorname{diag}(1, \pm 1, D, (D^t)^{-1}) \quad \text{con} \quad D = \begin{pmatrix} \epsilon_{r1} & & \\ & \epsilon_{r2} & \\ & \delta_r & \epsilon_{r2} \end{pmatrix} \end{array} \tag{5.7}$$

en base $\{e, e_1 - e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$. Sea $\mathcal{L} = \operatorname{Der} A = \mathcal{H} \oplus \sum_{i \neq 0} \mathcal{L}_{i\alpha}$ la descomposición de $\mathcal{L}$ por $\mathcal{H}$ en subespacios raíces. Las álgebras que consideramos necesitan un tratamiento especial para cuerpos de característica 5. Aunque esto se pondrá de manifiesto en la demostración del siguiente teorema, baste señalar que si car$\mathcal{F} > 5$ entonces $A_{\pm 4\alpha} = 0$ y, por lo tanto, $A(\alpha) = A_0 \oplus A_{2\alpha} \oplus A_{-2\alpha}$ es una subálgebra de composición; pero si car$\mathcal{F} = 5$ entonces $A_{\pm 4\alpha} = A_{\mp\alpha} \neq 0$, y el que $A(\alpha)$ sea una subálgebra proviene de que $A_{2\alpha}^2 = \mathcal{F} v_1^2 = 0$, pues $v_1^2 = v_1 e \circ e v_1 = \epsilon_{r1}^{-1} \epsilon_{l1}^{-1} v_1 \circ v_1 = 0$ (análogamente $A_{-2\alpha}^2 = 0$).

**Teorema 5.11.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8 y rango toral 1, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica distinta de 2 y 3, cuya álgebra de derivaciones posee una subálgebra de Cartan corta de dimensión 2. Entonces existe un idempotente $e \in A$ con $n(e) = 1$ de tal modo que $e\operatorname{Der} A = 0$ y $\operatorname{Der} A \subseteq \operatorname{Der}(A, e)$.*

*Demostración.* Si $A_0$ no es paraHurwitz entonces el teorema es consecuencia del lema 4.21. En lo que sigue supondremos que $A_0$ es paraHurwitz y que $e$ es una de sus paraunidades, que consideraremos la de $A(\alpha)$ en caso de ser esta subálgebra paraHurwitz. Fijemos la base canónica de (4.6). Como $A_0 \mathcal{L}_{i\alpha} \subseteq A_{i\alpha}$ entonces $A_0 \mathcal{L}_{i\alpha} = 0$ para $i \neq \pm 1 \pm 2$. Empezaremos mostrando que $e\mathcal{L}_{\pm\alpha} = 0$.

Sea $D \in \mathcal{L}_\alpha$ con $0 \neq eD \in A_\alpha = \langle u_2, u_3 \rangle$. Salvo cambio de $D$ por $[D, H_n]$ podemos suponer que $eD = u_2$. Como veíamos en la demostración del teorema 4.22, por ser $A_0$ paraHurwitz y conmutar $R_e$ y $L_e$, se tiene que $e_2D = (e_1D)e$, $e_1D = e(e_2D)$ y $0 = (e_2D)e + e(e_1D)$, de lo cual

$$e_iDL_e^3 = -e_iD \quad \text{y} \quad e_iDR_e^3 = -e_iD \quad i = 1, 2.$$

Puesto que $e_iD \in A_\alpha$, y en este subespacio $L_e^3$ tiene como único valor propio a $\epsilon_{l2}^3$, entonces $\epsilon_{l2}^3 = -1$; análogamente, $\epsilon_{r2}^3 = -1$. También por la forma de $L_e$ y $R_e$ se sigue que los únicos vectores propios en $A_\alpha$ comunes a ambos operadores son los de $\mathcal{F}u_2$ y, en consecuencia, $e_iD \in \mathcal{F}u_2 \quad i = 1, 2$. Ahora $e_2D = (e_1D)e = \epsilon_{r2}e_1D$ y $e_1D = \epsilon_{l2}e_2D$, por lo que $\epsilon_{l2} \neq -1 \neq \epsilon_{r2}$ y $\epsilon_{l2}\epsilon_{r2} = 1$. Concluimos que $\epsilon_{l2} = -\omega$ y $\epsilon_{r2} = -\omega^2$ con $\omega$ una raíz 3-primitiva de la unidad. De las igualdades $e_1D = -\omega e_2D$ y $e_1D + e_2D = eD = u_2$, fácilmente se sigue que

$$e_1D = \frac{-\omega}{1-\omega}u_2 \quad \text{y} \quad e_2D = \frac{1}{1-\omega}u_2.$$

Por otro lado, $e_1u_1 = (e_1e) \circ (eu_1) = e_2 \circ (eu_1) = 0$ y $u_1D \in A_{-\alpha} = \langle v_2, v_3 \rangle$; así,

$$\begin{aligned} 0 = (e_1u_1)D &= \frac{-\omega}{1-\omega}u_2u_1 + e_1(u_1D) = \frac{-\omega}{1-\omega}u_2e \circ eu_1 + e_2 \circ e(u_1D) \\ &= \frac{-\epsilon_{l1}}{1-\omega}v_3 + e(u_1D). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Sin embargo

$$\epsilon_{l1}u_1D = (e_2u_1)D = \frac{1}{1-\omega}u_2u_1 + e_2(u_1D) = \frac{\omega^2}{1-\omega}\epsilon_{l1}v_3,$$

lo que implica que $e(u_1D) = \frac{-\omega}{1-\omega}v_3$. Esto junto con (5.8) nos da que $\epsilon_{l1} = -\omega$ y, análogamente, $\epsilon_{r1} = -\omega^2$.

Sea $e' = \omega e_1 + \omega^2 e_2$ otra paraunidad de $A_0$ (recordemos el lema 1.19). Tenemos que $e'u_1 = -u_1 = u_1e'$ y $e'v_1 = -v_1 = v_1e'$ por lo que $A(\alpha)$ es un álgebra paraHurwitz con paraunidad $e'$. Esto contradice la elección de $e$ y, por lo tanto, $e\mathcal{L}_{\pm\alpha} = 0$. Puesto que las paraunidades de $A_0$ lo generan linealmente, podemos concluir de lo anterior que o bien $A(\alpha)$ es paraHurwitz con paraunidad $e$, en cuyo caso $e\mathcal{L}_{\pm\alpha} = 0$, o bien $A(\alpha)$ no es paraHurwitz y $A_0\mathcal{L}_{\pm\alpha} = 0$.

Si car$\mathcal{F} > 5$ entonces $\mathcal{L}_{\pm 2\alpha}$ actúa como derivaciones en $A(\alpha)$, por lo que o bien $\mathcal{L}_{\pm 2\alpha}$ actúa trivialmente o bien $A(\alpha)$ es paraHurwitz y $\mathcal{L}_{\pm 2\alpha}$ anula a su paraunidad. Por lo anterior, el teorema quedaría demostrado en ambos casos.

Si car$\mathcal{F} = 5$ entonces no necesariamente $\mathcal{L}_{\pm 2\alpha}$ actúa como derivaciones en $A(\alpha)$, por lo que la argumentación anterior no es válida. Como antes, denotaremos por $e$ la paraunidad de $A(\alpha)$ si esta álgebra es paraHurwitz y en otro caso $e$ representará cualquier paraunidad de $A_0$. Sabemos que $e\mathcal{L}_{\pm\alpha} = 0$, veamos que también $e\mathcal{L}_{\pm 2\alpha} = 0$. Por reducción al absurdo, sea $D \in \mathcal{L}_{2\alpha}$ con $eD \neq 0$. Observemos que $(A_{2\alpha})D \neq 0$ pues de lo contrario $D|_{A(\alpha)}$ pertenecería a Der $(A(\alpha))$ y así $A(\alpha)$ sería paraHurwitz con paraunidad $e$ y $eD = 0$, que no es el caso. Cambiando $D$ por $[D, H_n]$ si fuese preciso, podemos suponer que $0 \neq v_1 D \in \mathcal{F}v_3$ y $eD = v_1$. Se tiene que

$$\epsilon_{l1}^{-1} v_1 D = (ev_1)D = v_1^2 + e(v_1 D) = e(v_1 D) = \epsilon_{l2}^{-1} v_1 D$$

de donde $\epsilon_{l1} = \epsilon_{l2}$ y análogamente $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2}$. Denotemos $\epsilon_{li}$ por $\epsilon_l$ y $\epsilon_{ri}$ por $\epsilon_r \quad i = 1, 2$. Como $eD = e^2 D = e(eD) + (eD)e$, entonces

$$\epsilon_l^{-1} + \epsilon_r^{-1} = 1.$$

Por otro lado $A_{-\alpha}D \subseteq A_\alpha$ y también $D$ es antisimétrica, en consecuencia $v_2 D = \lambda u_3$ y $v_3 D = -\lambda u_2$ para algún $\lambda \in \mathcal{F}$. Con esto

$$-\epsilon_r^{-1}\lambda u_2 = \epsilon_r^{-1} v_3 D = (v_3 e)D = -\lambda u_2 e + v_3 v_1 = (-\epsilon_r \lambda + \epsilon_r^{-1}\epsilon_l^{-1})u_2.$$

Análogamente, con $(ev_3)D$ obtenemos

$$-\epsilon_l^{-1}\lambda u_2 = (\epsilon_l^{-1}\lambda - \epsilon_r^{-1}\epsilon_l^{-1})u_2$$

de donde

$$\epsilon_l\lambda = \epsilon_r^2\epsilon_l\lambda - 1, \quad \epsilon_r\lambda = \epsilon_r\epsilon_l^2\lambda + 1 \quad \text{y} \quad \lambda \neq 0.$$

Sumando ambas expresiones y simplificando $\lambda$ se tiene que

$$\epsilon_l + \epsilon_r = \epsilon_l\epsilon_r(\epsilon_l + \epsilon_r).$$

Como $\epsilon_l+\epsilon_r \neq 0$, pues $\epsilon_l^{-1}+\epsilon_r^{-1} = 1$, entonces $\epsilon_l\epsilon_r = 1$. En consecuencia $\epsilon_l\epsilon_r = 1 = \epsilon_l + \epsilon_r$ y, por lo tanto, $\epsilon_l = -\omega$ y $\epsilon_r = -\omega^2$ con $\omega$ una raíz 3-primitiva de la unidad. Nuevamente $A(\alpha)$ resulta ser paraHurwitz con paraunidad $\omega e_1 + \omega^2 e_2$, lo que contradice la elección de $e$.

QED

**Nota:** De la demostración del teorema se deduce que como elemento $e$ puede tomarse la unidad, unidad a un lado o cierta paraunidad del espacio de peso nulo en la descomposición (5.5).

El resto de la sección lo dedicaremos a calcular las diferentes álgebras de derivaciones que aparecen para estas álgebras de composición. Consideramos el elemento $e$ de la nota anterior y una base $\{e, e_1 - e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ de $(A, e)$ donde $L_e$ y $R_e$ se expresen mediante matrices coordenadas de la forma (5.7). Al igual que mostramos para rango toral 2, no hay pérdida de generalidad en suponer que $A_0$ es Hurwitz con unidad $e$. También, como allí notamos, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} \oplus \mathcal{L}^{(1)} \oplus \mathcal{L}^{(2)}$ con $\mathcal{L}^{(i)} = \{D \in \mathcal{D}^{(i)} \mid [R_e, D] = 0 = [L_e, D]\}$.

Recordemos (capítulo 1) que la forma trilineal $(x \circ y, z)$ es alternada $\forall x, y, z \in U(e_1)$, y por lo tanto $\forall \tau \in \mathrm{End}_{\mathcal{F}}(U(e_1))$ se tiene que $(x^\tau \circ y^\tau, z^\tau) = \det(\tau)(x \circ y, z)$.

Empezaremos examinando el caso en que $\mathcal{L}^{(1)} \neq 0$ (análogamente se desarrollaría $\mathcal{L}^{(2)} \neq 0$). Veamos que $L_e$ y $R_e$ son automorfismos de $(A, e)$. Sea $D_{e_1,u} \in \mathcal{L}^{(1)}$,

$$u = e_1 D_{e_1,u} = (ee_1)D_{e_1,u} = e(e_1 D_{e_1,u}) = eu.$$

Por otro lado, puesto que $u' D_{e_1,u} = u \circ u' \ \forall u' \in U(e_1)$, se tiene que

$$(eu) \circ (eu') = (eu')D_{e_1,u} = e(u' D_{e_1,u}) = e(u \circ u'),$$

de donde

$$\det(L_e|_{U(e_1)})(u \circ u', u'') = ((eu) \circ (eu'), eu'') = (e(u \circ u'), eu'') = (u \circ u', u'')$$

para todo $u', u'' \in U(e_1)$. Así $\det(L_e|_{U(e_1)}) = 1$ y en consecuencia, por el teorema 1.10, $L_e$ es un automorfismo de $(A, e)$ que fija $A_0$. Análogamente le ocurre a $R_e$. Además, como $u$ es un vector propio de valor propio 1 se tiene que o bien $\epsilon_{l1}$ o bien $\epsilon_{l2}$ vale 1; pero como $\epsilon_{l1}\epsilon_{l2}^2 = 1$, entonces necesariamente $\epsilon_{l1} = 1 = \epsilon_{l2}^2$. Análogamente obtendríamos que $\epsilon_{r1} = 1 = \epsilon_{r2}^2$.

Sea $\tau \in \{L_e, R_e\}$. Tenemos que $D_{e_1,x} \in \mathcal{L}^{(1)} \Leftrightarrow x^\tau = x \ \forall \tau$ y $D_{e_2,y} \in \mathcal{L}^{(2)} \Leftrightarrow y^\tau = y \ \forall \tau$. En particular, $D_{e_1,u_1} \in \mathcal{L}^{(1)}$ y $D_{e_2,v_1} \in \mathcal{L}^{(2)}$. Respecto a otras posibles derivaciones en $\mathcal{L}^{(1)}$ y $\mathcal{L}^{(2)}$, es inmediato comprobar que:

a) Si $\epsilon_{l2}$ o $\epsilon_{r2} \neq 1$ entonces $\mathcal{L}^{(1)} = \langle D_{e_1,u_1} \rangle$ y $\mathcal{L}^{(2)} = \langle D_{e_2,v_1} \rangle$.

b) Si $\epsilon_{l2} = 1 = \epsilon_{r2}$ entonces $\mathcal{L}^{(1)} = \langle D_{e_1,u_1}, D_{e_1,u_2} \rangle$ y $\mathcal{L}^{(2)} = \langle D_{e_2,v_1}, D_{e_2,v_3} \rangle$.

De la expresión coordenada de $D_{u,v} \in \mathcal{D}^{(0)}$ (ver capítulo 1) se sigue fácilmente que para el apartado a), $\mathcal{L}^{(0)} = \langle D_{u_1,v_1}, D_{u_2,v_3} \rangle$ y para el b) se tiene que $\mathcal{L}^{(0)} = \langle D_{u_1,v_1}, D_{u_2,v_3}, D_{u_1,v_3}, D_{u_2,v_1} \rangle$.

En el caso en que $\mathcal{L}^{(1)} = 0 = \mathcal{L}^{(2)}$, al igual que antes la expresión coordenada de $D_{u,v} \in \mathcal{D}^{(0)}$ proporciona de modo inmediato a′) Si $\epsilon_{l1} \neq \epsilon_{l2}$ o $\epsilon_{r1} \neq \epsilon_{r2}$ entonces $\operatorname{Der} A = \langle D_{u_1,v_1}, D_{u_2,v_3} \rangle$

b′) Si $\epsilon_{l1} = \epsilon_{l2}$ y $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2}$ entonces $\operatorname{Der} A = \langle D_{u_1,v_1}, D_{u_2,v_3}, D_{u_1,v_3}, D_{u_2,v_1} \rangle$.

Agrupando estos comentarios y denotando por $Z = Z(\operatorname{Der} A)$ el centro de $\operatorname{Der} A$ tenemos:

**Teorema 5.12.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8 y rango toral 1 sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica distinta de 2 y 3. Si $\operatorname{Der} A$ contiene una subálgebra de Cartan corta de dimensión 2 entonces existe un idempotente $e \in A$ con $n(e) = 1$, $e(\operatorname{Der} A) = 0$ y $\operatorname{Der} A \subseteq \operatorname{Der}(A, e)$y y una base canónica de $(A, e)$ respecto de la cual se da una de las siguientes situaciones:*

i) $\operatorname{Der} A = \langle D_{u_1,v_1}, D_{e_1,u_1}, D_{e_2,v_1} \rangle \oplus \langle D_{u_2,v_3}, D_{u_1,v_3}, D_{u_2,v_1}, D_{e_1,u_2}, D_{e_2,v_3} \rangle \cong \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$ *con $\mathcal{N}$ ideal nilpotente, $\mathcal{N}^2 = 0$, $\mathcal{N} \cong V(0) \oplus V(3)$ como* sl(2) *módulo y $Z = \langle D_{u_2,v_3} \rangle$.*

ii) $\operatorname{Der} A = \langle D_{u_1,v_1}, D_{e_1,u_1}, D_{e_2,v_1} \rangle \oplus \langle D_{u_2,v_3} \rangle \cong \mathrm{sl}(2) \oplus Z$.

iii) $\operatorname{Der} A = \langle D_{u_1,v_1} \rangle \oplus \langle D_{u_2,v_3}, D_{u_1,v_3}, D_{u_2,v_1} \rangle = \langle D_{u_1,v_1} \rangle \oplus \mathcal{N}$ *álgebra resoluble con $\mathcal{N}$ ideal nilpotente, $\mathcal{N}^2 = 0$ y $Z = \langle D_{u_2,v_3} \rangle$.*

iv) $\operatorname{Der} A = \langle D_{u_1,v_1}, D_{u_2,v_3} \rangle$ *álgebra abeliana.*

**Nota:** En los casos iii) y iv) del teorema anterior es sencillo comprobar que el álgebra derivada $[\operatorname{Der} A, \operatorname{Der} A]$ está formada por transformaciones nilpotentes, lo que corrobora el teorema 5.6.

## 3.2. Subálgebras de Cartan largas

Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8 sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ algebraicamente cerrado de característica $\neq 2$ y 3, $\mathcal{H} = \mathcal{F}H_s + \mathcal{F}H_n$ una subálgebra de Cartan larga de Der $A$, donde $H_s$ denota una derivación semisimple y $H_n$ una nilpotente y, por último, escribamos

$$A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \tag{5.9}$$

para la descomposición de $A$ respecto de $\mathcal{H}$. Tenemos

**Proposición 5.13.** *Sea $x \in A_0$ con $xA_\alpha = 0$ o $A_\alpha x = 0$ entonces $x = 0$.*

*Demostración.* Sea $0 \neq x \in A_0$ con $xA_\alpha = 0$. Es claro que $xa_{-\alpha} \neq 0$ $\forall a_{-\alpha} \in A_{-\alpha}$. Por lo tanto $xA_{-\alpha} = A_{-\alpha}$. Tomamos $y \in A_0$ con $(x, y) = 0$ y $n(y) \neq 0$, y $0 \neq a_\alpha \in A_\alpha$ cualquiera. Sea $b_{-\alpha} \in A_{-\alpha}$ tal que $(xb_{-\alpha}, ya_\alpha) \neq 0$. Tenemos

$$0 = (yb_{-\alpha}, xa_\alpha) = 2(y, x)(b_{-\alpha}, a_\alpha) - (ya_\alpha, xb_{-\alpha}) = -(ya_\alpha, xb_{-\alpha}),$$

lo cual es una contradicción.

QED

En vista de esta proposición resulta claro que

$$\{L_a|_{A_\alpha} \mid a \in A_0\} = \mathrm{End}_{\mathcal{F}}(A_\alpha) = \{R_b|_{A_\alpha} \mid b \in A_0\}.$$

En particular, existen $a, b \in A_0$ con $n(a) = 1 = n(b)$ tales que $L_a|_{A_\alpha} = \epsilon' id$ y $R_b|_{A_\alpha} = \epsilon id$ para ciertos $\epsilon$ y $\epsilon' \in \mathcal{F}$. Definimos un nuevo producto en $A$ mediante

$$x \circ y = (xR_b^{-1})(yL_a^{-1}).$$

Claramente $(A, \circ)$ es un álgebra Hurwitz con unidad $e = ab$.

**Lema 5.14.** *Para los elementos $a$ y $b$ anteriores se tiene que $aH_n = 0 = bH_n$.*

*Demostración.* Sea $a_\alpha \in A_\alpha$, tenemos

$$\epsilon' a_\alpha H_n = (a a_\alpha) H_n = (a H_n) a_\alpha + \epsilon' a_\alpha H_n,$$

de donde $(aH_n)A_\alpha = 0$. Así, por la proposición anterior, $aH_n = 0$. Análogamente $bH_n = 0$.

QED

Resulta evidente que la $\mathbb{Z}_3$ graduación de $A$ inducida por 5.9 pasa a $(A, \circ)$. Sin embargo, para efectuar nuestros cálculos de un modo más sencillo es necesario elegir adecuadamente la base canónica de $(A, \circ)$ que irá "dentro" de la $\mathbb{Z}_3$ graduación.

**Lema 5.15.** *Existe una base canónica de $(A, \circ)$ de tal modo que $H_n$ se identifica con $D_{e_2, v_1}$ y*

$$A_0 = \langle e, f, u_1, v_1 \rangle, \quad A_\alpha = \langle u_2, v_3 \rangle \quad y \quad A_{-\alpha} = \langle u_3, v_2 \rangle,$$

*donde $f = e_2 - e_1$.*

*Demostración.* Debemos empezar observando que $H_n|_{A_0} \neq 0$. En efecto, de otro modo $H_n$ conmutaría con $\{L_x|_{A_\alpha} \mid x \in A_0\} = \mathrm{End}_{\mathcal{F}}(A_\alpha)$, por lo que $H_n|_{A_\alpha}$ sería escalar; puesto que también es nilpotente, eso nos diría que $H_n|_{A_\alpha} = 0$ y que, por antisimetría, $H_n|_{A_{-\alpha}} = 0$, lo cual es absurdo.

El lema 4.9 nos asegura que existe una base de $A_0$ de la forma $\{e, u_1, u_1 H_n, u_1 H_n^2\}$. Más aún, es sencillo obsevar que $u_1$ puede suponerse isótropo y con $n(u_1 H_n) = -1$. Definamos $f = u_1 H_n$ y $2v_1 = f H_n = u_1 H_n^2$. Puesto que tanto $u_1$ como $v_1$ son isótropos y ortogonales a $e$ y $f$, es fácil deducir que existen $e_1, e_2 \in \langle e, f \rangle$ de tal modo que $\{e_1, e_2, u_1, v_1\}$ es una base canónica de la subálgebra de cuaternios $(A_0, \circ)$ y $f = e_2 - e_1$.

Consideramos $v_3 \in A_\alpha$ con $u_2 = v_3 H_n \neq 0$ (de no existir tal $v_3$ entonces $A_\alpha H_n = 0 = A_{-\alpha} H_n$ y $A_0 H_n = (A_\alpha + A_{-\alpha})^2 H_n = 0$, que no es el caso). Basta elegir, ahora, $u_3$ y $v_2 \in A_{-\alpha}$ con $(u_3, v_3) = \frac{1}{2} = (u_2, v_2)$ y $(u_3, u_2) = 0 = (v_2, v_3)$ para concluir el lema.

QED

Antes de continuar debemos mencionar dos hechos que facilitarán la demostración del próximo resultado. En primer lugar, podemos suponer que tanto $a^2 - a$ como $b^2 - b$ pertenecen a $\langle v_1 \rangle$. En efecto, notemos que $A_0 \cap \ker H_n = \langle e, v_1 \rangle = \langle a, v_1 \rangle = \langle b, v_1 \rangle$, por lo que $a^2 = \lambda a + \mu v_1$ y, como $n(a^2) = n(a)^2 = 1$, $\lambda^2 = 1$. Bastaría cambiar, si fuese necesario, $a$ por $-a$ y $b$ por $-b$ para demostrar la afirmación. Esto nos asegura, de paso, que $a - b \in \langle v_1 \rangle$. En segundo lugar, es evidente que $av_1 = \delta' v_1$ y $v_1 b = \delta v_1$ para ciertos $\delta, \delta' \in \mathcal{F}$. Si tenemos en cuenta que $[L_a, H_n] = 0 = [R_b, H_n]$ entonces

$$2\delta' v_1 = f H_n L_a = (af) H_n;$$

así pues, $af = \delta' f + \mu v_1$ para algún $\mu \in \mathcal{F}$, lo que muestra que $(\delta')^2 = 1$. De modo semejante obtendríamos que $\delta^2 = 1$.

**Teorema 5.16.** *Dependiendo del valor de $\epsilon$ y $\epsilon'$ puede ocurrir:*

i) *Si $\epsilon^2 = 1$ y $(\epsilon')^2 = 1$ entonces* $\operatorname{Der} A = \{D \in \operatorname{Der}(A, \circ) \mid [L_a, D] = 0 = [R_b, D]\}$.

ii) *Si $\epsilon^2 \neq 1$ o $(\epsilon')^2 \neq 1$ entonces* $\operatorname{Der} A$ *es un álgebra de Lie resoluble de dimensión $\leq 4$. Además* $[\operatorname{Der} A, \operatorname{Der} A]$ *está formada únicamente por derivaciones nilpotentes.*

*Demostración.* Denotemos por $\bar{\mathcal{L}}$ al conjunto $\{D \in \operatorname{Der}(A, \circ) \mid [L_a, D] = 0 = [R_b, D]\}$, por $\mathcal{L}$ a $\operatorname{Der} A$, y sea $\mathcal{L} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{L}_\alpha \oplus \mathcal{L}_{-\alpha} \oplus \mathcal{L}_{2\alpha} \oplus \mathcal{L}_{-2\alpha}$ la descomposición de $\mathcal{L}$ respecto de $\mathcal{H}$. Es evidente que $\mathcal{L}_{\pm 2\alpha} \subseteq \bar{\mathcal{L}}$, por lo que, para demostrar i), hemos de centrarnos en $\mathcal{L}_{\pm\alpha}$. Por coincidir $\epsilon$ con $1/\epsilon$ y $\epsilon'$ con $1/\epsilon'$, de la forma de la expresión coordenada de $L_a$ y $R_b$ deducimos que la subálgebra $\mathrm{sl}(2) = \langle D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}, D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}\rangle$ de $\mathrm{Der}\,(A, \circ)$ se halla contenida en $\mathrm{Der}\,A$. De existir $D \in \mathcal{L}_\alpha$ con $aD \neq 0$, bastaría conmutar con $H_n$ para obtener que, salvo escalares, $aD = u_2$. Ahora bien, como $D_{u_3,v_2} \in \mathcal{L}_{2\alpha}$, entonces $[D, [D, D_{u_3,v_2}]]$ se encuentra en $\mathcal{H}$ y, por lo tanto, $0 = a[D, [D, D_{u_3,v_2}]] = -2aDD_{u_3,v_2}D = -2u_3D$. Así, la subálgebra de $A$ generada por $u_3, u_2$ y $v_3$ es anulada por $D$. En particular, $e_1, e_2$ y $v_1$ –y en consecuencia $a$– quedan anulados por $D$, lo que no es posible. Concluimos que si $\epsilon^2 = 1 = (\epsilon')^2$ entonces $\mathrm{Der}\,A = \bar{\mathcal{L}}$.

Supongamos en lo que resta de demostración que o bien $\epsilon^2 \neq 1$ o bien $(\epsilon')^2 \neq 1$. Empezaremos mostrando que $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{H}$, para lo cual podemos suponer que $H_s = \frac{1}{3}(D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3})$ y hacer uso de la descomposición $\mathrm{Der}\,(A, \circ) = \sum_{i=-2}^{2} \bar{\mathcal{D}}_i$ vista en el capítulo 1. Escribamos $\mathcal{L}_i$ en lugar de $\mathcal{L}_{i\alpha}$, ya que $\alpha(H_s) = 1$ y $\alpha(H_n) = 0$, y denotemos por $\bar{\mathcal{L}}_i$ el conjunto $\mathcal{L}_i \cap \bar{\mathcal{L}}$. Si $\bar{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L}_2$ fuese no nulo entonces, por lo visto en el capítulo 1, $D_{u_2,v_3}$ pertenecería a $\mathrm{Der}\,A$. Ahora bien,

$$\frac{1}{\epsilon}u_2 = (u_3b)D_{u_2,v_3} = (u_3D_{u_2,v_3})b = u_2b = \epsilon u_2,$$

de donde $\epsilon^2 = 1$. El mismo proceso con $L_a$ en lugar de $R_b$ nos conduce a una contradicción; en consecuencia, $\mathcal{L}_{\pm 2} = 0$. Respecto a $\bar{\mathcal{L}}_{\pm 1}$, observemos que dada $D \in \bar{\mathcal{L}}$ no nula, basta conmutar $D$ con $H_n$, que es un vector de raíz $\alpha_1 + \alpha_2$ en $\mathrm{Der}\,(A, \circ)$, para deducir que $D_{u_2,v_1} \in \mathrm{Der}\,A$; sin embargo,

$$\frac{-1}{\epsilon}v_1 = (v_2b)D_{u_2,v_1} = (v_2D_{u_2,v_1})b = -\delta v_1,$$

y análogamente $\frac{-1}{\epsilon'}v_1 = -\delta' v_1$, donde, por el párrafo previo al teorema, $\delta^2 = 1 = (\delta')^2$. Puesto que esto es incompatible con nuestras hipótesis, concluimos que $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{H}$.

El siguiente paso consiste en demostrar que tanto la dimensión de $\mathcal{L}_1$ como la de $\mathcal{L}_{-1}$ son $\leq 2$. En efecto, supongamos que existiesen $\widetilde{D}$ y $\widetilde{D'}$ en $\mathcal{L}_1$ no nulas con $a\widetilde{D} = 0 = b\widetilde{D'}$. Se tiene

$$\delta' v_1 \widetilde{D} = (av_1)\widetilde{D} = a(v_1\widetilde{D}) = \epsilon' v_1 \widetilde{D},$$

de donde o bien $v_1\widetilde{D} = 0$ o bien $\epsilon' = \delta'$. El primer caso no puede darse ya que $a\widetilde{D} = 0 = v_1\widetilde{D}$ implica que $b\widetilde{D} = 0$ y que, por lo tanto, $\widetilde{D} \in \bar{\mathcal{L}}_1 = 0$. De este modo $\epsilon' = \delta'$ y, procediendo del mismo modo con $\widetilde{D'}$, $\epsilon = \delta$. Así, $\epsilon^2 = 1 = (\epsilon')^2$, que no es el caso. En consecuencia, no existen $\widetilde{D}$ y $\widetilde{D'} \in \mathcal{L}_1$ no nulas con $a\tilde{D} = 0 = b\widetilde{D'}$. Si la dimensión de $\mathcal{L}_1$ fuese $\geq 3$ es evidente que podríamos encontrar tales $\widetilde{D}$ y $\widetilde{D'}$, por lo que $\dim \mathcal{L}_1 \leq 2 \geq \dim \mathcal{L}_{-1}$. Esto demuestra el lema si $\mathcal{L}_1 = 0$ o si $\mathcal{L}_{-1} = 0$.

Por último, veamos qué ocurre si $\mathcal{L}_1 \neq 0 \neq \mathcal{L}_{-1}$. Sean $D \in \mathcal{L}_1$ y $D' \in \mathcal{L}_{-1}$ no nulos con $[D, H_n] = 0 = [D', H_n]$. Tenemos que $u_1DH_n = u_1H_nD = fD$, de donde $fD \in \mathcal{F}u_2$; en consecuencia, $0 = fDH_n = fH_nD = 2v_1D$ (análogamente $v_1D' = 0$). Si $u_3D$ fuese nulo entonces $D$ anularía a la subálgebra de $A$ generada por $u_3, u_2$ y $v_3$, en la cual se hallan $a$ y $b$, lo que daría una contradicción. Así pues, $u_3D \neq 0$. Como $0 = u_3H_nD = u_3DH_n$, es inmediato concluir que, salvo escalares y siguiendo un proceso análogo con $D'$,

$$u_3D = v_1 \quad \text{y} \quad u_2D' = v_1.$$

También, como $a - b \in \langle v_1 \rangle$ y $aDH_n = aH_nD = 0$, se tiene que $0 \neq aD = bD \in \mathcal{F}u_2$.

Supongamos que existiese $\bar{D} \in \mathcal{L}_1$ linealmente independiente con $D$. Si $a\bar{D}$ y $b\bar{D} \in \mathcal{F}u_2$ entonces existirían $\widetilde{D}$ y $\widetilde{D'}$ no nulas con $a\widetilde{D} = 0$ y $b\widetilde{D'} = 0$, lo cual, por lo visto previamente, no puede darse. Así pues, o bien $a\bar{D} \notin \mathcal{F}u_2$ o bien $b\bar{D} \notin \mathcal{F}u_2$. Sea $a\bar{D} \notin \mathcal{F}u_2$ (procederíamos de modo similar si $b\bar{D} \notin \mathcal{F}u_2$), restándole a $\bar{D}$ un múltiplo de $D$ podemos suponer que $a\bar{D} = v_3$. Así,

$$\delta' v_1 \bar{D} = (av_1)\bar{D} = v_3 v_1 + a(v_1\bar{D}) = \epsilon\delta' u_2 + \epsilon' v_1 \bar{D},$$

de donde $v_1\bar{D} = \frac{\epsilon\delta'}{\delta'-\epsilon'}u_2$. En particular, $v_1[\bar{D}, D'] = v_1\bar{D}D' \neq 0$, lo cual se contradice con que $v_1\mathcal{H} = 0$. Es decir, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{F}D$ y, análogamente, $\mathcal{L}_{-1} = \mathcal{F}D'$. Hemos conseguido probar que $\operatorname{Der} A = \langle H_s, H_n, D, D'\rangle$. Respecto a su resolubilidad, baste notar que $u_3[D, D'] = v_1 D' = 0$, por lo que $[D, D'] \in \mathcal{F}H_n$.

QED

**Nota:** El ejemplo 3 muestra que la cota del apartado ii) se alcanza.

Para demostrar el teorema 5.4 basta simplemente calcular $\mathcal{L} = \operatorname{Der} A = \{D \in \operatorname{Der}(A, \circ) \mid [L_a, D] = 0 = [R_b, D]\}$ en el caso en que $\epsilon^2 = 1 = (\epsilon')^2$. Por ser $L_a$ y $R_b$ isometrías que conmutan con $H_n$ se tiene:

**Lema 5.17.** *En la base $\{e, e_1 - e_2, u_1, v_1, u_2, v_3, u_3, v_2\}$ que proporciona el lema 5.15, el operador $R_b$ tiene como matriz coordenada*

$$R_b \leftrightarrow \operatorname{diag}(C, \epsilon I_2, \tfrac{1}{\epsilon} I_2),$$

*donde $I_2$ es la matriz identidad de orden 2 y*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\beta\delta \\ 0 & \delta & 0 & 2\gamma \\ \beta & \gamma & \delta & \delta(\gamma^2 - \beta^2) \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

*con $\beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathcal{F}$ y $\delta^2 = 1$. La matriz coordenada de $L_a$ es del mismo tipo para ciertos $\beta', \gamma', \delta', \epsilon'$ con $(\delta')^2 = 1$.*

Volviendo al problema de calcular $\mathcal{L}$ en el caso en que $\epsilon^2 = 1 = (\epsilon')^2$, es sencillo observar que $\mathcal{L}$ contiene los vectores de raíces $\alpha_1 + \alpha_2$ y $\pm(\alpha_1 + 3\alpha_2)$ de $\mathrm{Der}\,(A, \circ)$. Respecto a otras posibilidades, es rutinario comprobar, usando la descomposición $\mathrm{Der}\,(A, \circ) = \sum_{i=-2}^{2} \bar{\mathcal{D}}_i$ y la tabla 2, que

I) Si $\epsilon \neq \delta$ $\epsilon' \neq \delta'$ entonces $\mathrm{Der}\, A = \langle D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}, D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}, D_{e_2,v_1} \rangle$.

II) Si $\epsilon = \delta$ y $\epsilon' = \delta'$ pero $\gamma \neq 0$ o $\gamma' \neq 0$ entonces $\mathrm{Der}\, A = \langle D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}, D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}, D_{e_2,v_1}, D_{u_2,v_1}, D_{u_3,v_1} \rangle$.

III) Si $\epsilon = \delta$, $\epsilon' = \delta'$ y $\gamma = 0 = \gamma'$ entonces $\mathrm{Der}\, A = \langle D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}, D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}, D_{e_2,v_1}, D_{u_2,v_1}, D_{u_3,v_1}, D_{e_1,u_2}, D_{e_1,u_3} \rangle$.

**Teorema 5.18.** *Sea $A$ un álgebra de composición de rango toral 1 y dimensión 8, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $\neq 2$ y 3, cuya álgebra de derivaciones contiene una subálgebra de Cartan larga de dimensión 2. Si $\mathrm{Der}\, A$ es resoluble entonces $\dim \mathrm{Der}\, A \leq 4$ y $[\mathrm{Der}\, A, \mathrm{Der}\, A]$ contine únicamente derivaciones nilpotentes. En otro caso, si $\mathrm{Der}\, A$ no es resoluble, existe un álgebra Hurwitz $(A, \circ)$ de tal modo que $\mathrm{Der}\, A \subset \mathrm{Der}\,(A, \circ)$ y respecto de una base canónica de $(A, \circ)$ se tiene una de las siguientes posibilidades:*

I) $\mathrm{Der}\, A = \langle D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}, D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2} \rangle \oplus \langle D_{e_2,v_1} \rangle = \mathrm{sl}(2) \oplus Z$, *donde* $Z = Z(\mathrm{Der}\, A)$ *denota el centro de* $\mathrm{Der}\, A$.

II) $\mathrm{Der}\, A = \langle D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}, D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2} \rangle \oplus \langle D_{e_2,v_1}, D_{u_2,v_1}, D_{u_3,v_1} \rangle = \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$, *con $\mathcal{N}$ un ideal resoluble de dimensión* 3. *Aquí* $Z(\mathrm{Der}\, A) = \langle D_{e_2,v_1} \rangle$.

III) $\mathrm{Der}\, A = \langle D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}, D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2} \rangle \oplus \langle D_{e_2,v_1}, D_{u_2,v_1}, D_{u_3,v_1}, D_{e_1,u_2}, D_{e_1,u_3} \rangle = \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$, *con $\mathcal{N}$ un ideal resoluble de dimensión* 5. *En este caso el centro del álgebra de derivaciones es trivial.*

## 4. Der $A$ no resoluble de rango 1

En esta sección demostraremos el teorema 5.5. Denotaremos por $A$ un álgebra de composición de rango 1 y dimensión 8 sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ algebraicamente cerrado. Sea $\mathcal{L} = \operatorname{Der} A$ su álgebra de derivaciones, la cual supondremos no resoluble, y $\mathcal{H} = \mathcal{F}H_s$ una subálgebra de Cartan de Der $A$ generada por una derivación diagonalizable $H_s$. $A = \sum A_{i\alpha}$ y $\mathcal{L} = \sum \mathcal{L}_{i\alpha}$ representarán las descomposiciones de $A$ y $\mathcal{L}$ respectivamente respecto de $\mathcal{H}$. Empezaremos probando que Der $A$ contine una copia de sl(2), después hallaremos las posibles descomposicones de $A$ como sl(2)-módulo (apartados I-IV del teorema 5.5) y, por último, analizaremos cada una de las cuatro posibilidades obtenidas.

Si restringimos la característica de $\mathcal{F}$, las derivaciones en $\mathcal{L}_{i\alpha}$ $i \neq 0$ son nilpotentes:

**Lema 5.19.**

i) *Si* $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$ *y* $\operatorname{car}\mathcal{F} > 3$ *entonces* $D^3 = 0$ $\forall D \in \mathcal{L}_{i\alpha}$ $i \neq 0$.

ii) *Si* $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_{2\alpha} \oplus A_{-2\alpha}$ *y* $\operatorname{car}\mathcal{F} > 5$ *entonces* $D^5 = 0$ $\forall D \in \mathcal{L}_{i\alpha}$ $i \neq 0$.

*Demostración.* El apartado i) es consecuencia de que $A_{\pm 2\alpha} = A_{\pm 3\alpha} = 0$; el ii), de que $A_{\pm 3\alpha} = A_{\pm 4\alpha} = 0$.

QED

*En lo que sigue supondremos que* $\operatorname{car}\mathcal{F} > 5$.

El hecho de que Der $A$ no sea resoluble equivale a que $[\mathcal{L}_{i\alpha}, \mathcal{L}_{-i\alpha}] \neq 0$ para algún $i \neq 0$. En efecto, si $[\mathcal{L}_{i\alpha}, \mathcal{L}_{-i\alpha}] = 0$ para todo $i$ entonces $\mathcal{N} =$

$\oplus \sum_{i\neq 0} \mathcal{L}_{i\alpha}$ sería,en terminología de Jacobson [J], un conjunto de transformaciones nilpotentes débilmente cerrado y, por lo tanto, nilpotente, lo cual implicaría que $\mathcal{L} = \mathcal{F}H_s \oplus \mathcal{N}$ sería resoluble. Esto nos permite encontrar una copia de sl(2) dentro de Der $A$. Recordemos que sl(2) tiene una base $\{E, H, F\}$ cuyos productos vienen dados por

$$[E, H] = 2E, \quad [F, H] = -2F, \quad [F, E] = H.$$

**Lema 5.20.** *Sean $\mathcal{L}_{i\alpha}$ y $\mathcal{L}_{-i\alpha}$ tales que $[\mathcal{L}_{i\alpha}, \mathcal{L}_{-i\alpha}] \neq 0$ entonces $\mathcal{H} \oplus \mathcal{L}_{i\alpha} \oplus \mathcal{L}_{-i\alpha}$ contiene una copia de* sl(2) *de modo que $E \in \mathcal{L}_{i\alpha}$, $F \in \mathcal{L}_{-i\alpha}$ y $\mathcal{H} = \mathcal{F}H$.*

*Demostración.* Sean $D \in \mathcal{L}_{i\alpha}$ y $D' \in \mathcal{L}_{-i\alpha}$ con $[D', D] \neq 0$. Como $\dim \mathcal{H} = 1$ entonces $[D', D] = \lambda H_s$ para algún $0 \neq \lambda \in \mathcal{F}$. Basta elegir $H = \frac{2}{i\alpha(H_s)} H_s$, $E = D$ y $F = \frac{2}{\lambda i\alpha(H_s)} D'$.

QED

Las subálgebras sl(2) que proporciona el lema anterior están "bien situadas" dentro de Der $A$ puesto que verifican la siguiente propiedad:

**Propiedad** $(*)$ sl(2) y Der $A$ comparten alguna subálgebra de Cartan.

Puesto que, por ahora, estamos interesados únicamente en la estructura de Der $A$, y no en el comportamiento de aquellas subálgebras isomorfas a sl(2), los próximos resultados se referirán a subálgebras sl(2) que satisfagan la propiedad $(*)$. Sin embargo, una vez calculadas las estructuras posibles de Der $A$ veremos que cualquier subálgebra sl(2) satisface la propiedad anterior.

Aunque las demostraciones y el lenguaje que planteamos están pensados para car$\mathcal{F} = p > 0$, es inmediato cambiarlos para cubrir el caso car$\mathcal{F} = 0$, donde la teoría de álgebras de Lie aporta resultados más fuertes. Un concepto que no es necesario en característica cero es el de representación restringida. Una representación $\rho : \mathrm{sl}(2) \to \mathrm{End}_{\mathcal{F}}(V)$ se dice restringida si $(E^\rho)^p = 0 = (F^\rho)^p$ y $(H^\rho)^p = H^\rho$. El lema 5.19 nos asegura que $A$ es un módulo restringido; más aún, gracias al siguiente teorema debido a Jacobson [J1 58] podemos asegurar que $A$ es completamente reducible.

**Teorema 5.21 (Jacobson).** *Sea $\rho : \mathrm{sl}(2) \to \mathrm{End}_{\mathcal{F}}(V)$ una representación restringida de* sl(2) *con $(E^\rho)^{p-1} = 0 = (F^\rho)^{p-1}$, entonces $V$ es completamente reducible.*

En característica cero los módulos irreducibles de sl(2) son de Verma (módulos $V(m)$) [Hum], mientras que en característica $p$ esto es cierto si el módulo es, además, entero. Siguiendo [B-O3 81], un módulo se dice entero si $E$ y $F$ actúan nilpotentemente y $H$ tiene todos su valores propios en el cuerpo primo. Para cualquier subálgebra sl(2) que verifique la propiedad $(*)$, $A$ es un módulo entero. Así, sus sumandos irreducibles son de tipo $V(m)$ con $0 \leq m \leq p-1$ ($V(m)$ no es irreducible para otros valores de $m$). El que los valores propios de $H$ en $V(m)$ sean $m, m-2, \ldots, -m+2, -m$ (véase [Se]) limita drásticamente las estructuras posibles de $A$.

**Proposición 5.22.** *Para cualquier subálgebra* sl(2) *de* Der $A$ *que satisfaga la propiedad $(*)$, $A$ tiene una de las siguientes estructuras:*

$$2V(0) \oplus 2V(2), \quad 4V(0) \oplus 2V(1), \quad V(2) \oplus V(4) \quad o \quad V(0) \oplus V(2) \oplus 2V(1).$$

*Demostración.* Sea $\mathcal{H}$ cualquier subálgebra de Cartan compartida por sl(2) y por Der $A$. Supongamos que $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$ es la descomposición de $A$ en subespacios peso para $\mathcal{H}$. Los valores propios de $H$ en $A$ son $\{0, \pm\alpha(H)\}$, por lo que los únicos submódulos $V(m)$ que pueden aparecer como sumandos directos de $A$ son $V(0), V(1)$ o $V(2)$. Si aparece $V(2)$ entonces $A \cong 2V(0) \oplus 2V(2)$; en otro caso $A \cong 4V(0) \oplus 2V(1)$.

Si la descomposición de $A$ es $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \oplus A_{2\alpha} \oplus A_{-2\alpha}$ entonces un razonamiento análogo al anterior muestra que $A \cong V(2) \oplus V(4)$ o $A \cong V(0) \oplus V(2) \oplus 2V(1)$.

QED

El que $\mathrm{Der}\, A$ y sl(2) compartan una subálgebra de Cartan $\mathcal{H}$ nos permite calcular directamente $\mathrm{Der}\, A$ para alguno de los casos de la proposición anterior. Puesto que $\mathcal{H} = \mathcal{F}H$, escribiremos $A_i$ en lugar de $A_\gamma$ si $\gamma(H) = i$; la misma notación se empleará para $\mathcal{L} = \mathrm{Der}\, A$.

**Proposición 5.23.** *Sea* sl(2) *una subálgebra de* $\mathrm{Der}\, A$ *que satisface la propiedad* $(*)$. *Si, como* sl(2)*-módulo,* $A \cong 2V(0) \oplus 2V(2)$ *o* $A \cong V(2) \oplus V(4)$ *entonces* $\mathrm{Der}\, A = \mathrm{sl}(2)$.

*Demostración.* Empecemos suponiendo que $A \cong 2V(0) \oplus 2V(2)$. La adjunción convierte a $\mathcal{L}$ en un sl(2) módulo restringido. Aquí $E^3 = 0 = F^3$, por lo que $ad_E^5 = 0 = ad_F^5$. El teorema de Jacobson nos dice que $\mathcal{L} = \mathrm{sl}(2) \oplus \sum_m V(m)$. Los valores propios de $ad_H$ en $V(m)$ se hallan entre $\{\pm 2, \pm 4\}$. En particular, 1 no es un valor propio, por lo que $m$ es par y, en consecuencia, $ad_H$ tiene valor propio 0 en $V(m)$. En vista de que $\dim \mathcal{H} = 1$, concluimos que $\mathcal{L} = \mathrm{sl}(2)$.

Supongamos que $A \cong V(2) \oplus V(4)$. Sea, por ahora, $\mathrm{car}\mathcal{F} > 7$. Como $E^5 = 0 = F^5$ entonces $ad_E^9 = 0 = ad_F^9$ y, al igual que antes, $\mathcal{L} = \mathrm{sl}(2) \oplus \sum_m V(m)$. Aquí los valores propios de $ad_H$ en $V(m)$ pueden ser $\{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8\}$. En particular, 1 no es valor propio (ya que $\mathrm{car}\mathcal{F} > 7$) y, por lo tanto, $m$ es par. Concluimos, como en el caso anterior, que $\mathcal{L} = \mathrm{sl}(2)$. Sobre cuerpos de característica 7 necesitamos un paso previo para demostrar que $ad_E^5 = 0 = ad_F^5$. Dado $D_1 \in \mathcal{L}_1$ consideramos $D_{-1} = [D_1, F]$.

La restricción en la característica nos dice que $A_{\pm 1} = 0$ y que, por lo tanto, $(A_0)D_1 = (A_2)D_{-1} = 0$. Como $(A_4)D_{-1} \subseteq A_3 = A_{-4}$ y $D_{-1}$ es antisimétrica, se tiene que $(A_4)D_{-1} = 0$ y, por análogas razones, $(A_{-4})D_1 = 0$. Además, $(A_{-2})D_{-1} \subseteq (A_{-2})D_1F + (A_{-2})FD_1 \subseteq (A_{-2})FD_1 \subseteq (A_{-4})D_1$, el cual es nulo. Así, $(A_{\pm 2})D_{-1} = 0$. Ahora bien, como $A_{\pm 2}$ genera $A$ entonces $D_{-1} = [D_1, F] = 0$. Sean $D_3 = [D_1, E], D_5 = [D_3, E]$ y $D_7 = [D_5, E]$. Claramente $D_7 \in \mathcal{H}$ y así $D_7 = \lambda H$. Ahora $D_1 = -[D_3, F], -4D_3 = [D_5, F]$ y $-9D_5 = [D_7, F] = 2\lambda F$ nos muestra que $D_5 \in \mathcal{F}F, D_3 = 0$ y $D_1 = 0$. Concluimos que $\mathcal{L}_1 = 0$. Análogamente, $\mathcal{L}_{-1} = 0$. De aquí se sigue que $ad_E^5 = 0 = ad_F^5$ y, por una argumentación similar a la de los casos anteriores, se concluye que $\mathcal{L} = \mathrm{sl}(2)$.

QED

Puesto que, por el teorema 4.6, la forma bilineal ( , ) pertenece al conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(2)}(A \otimes A, \mathcal{F})$, $V(0) \otimes V(i) \cong V(i)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(2)}(V(i), \mathcal{F}) = 0$ si $i \neq 0$, resulta claro que si $A$ posee algún sl(2)-módulo trivial $V(0)$ entonces la suma de ellos es una subálgebra de composición de $A$ y, por lo tanto, existe un elemento $e$ en $A$ de norma 1 para el cual $\mathrm{sl}(2) \subset \mathrm{Der}\,(A, e)$. Esto demuestra el apartado IV) del teorema 5.5.

## 4.1. Algebras $A \cong 4V(0) \oplus 2V(1)$

Consideremos una subálgebra sl(2) de $\mathrm{Der}\, A$ que verifique la propiedad $(*)$ y respecto de la cual $A$ se descompone como $A \cong 4V(0) \oplus 2V(1)$. Sean $V$ y $V'$ dos copias de $V(1)$ de tal modo que $A = A_0 \oplus V \oplus V'$. Aquí sl(2) no proporciona ninguna información de la estructura de $A_0$, sin embargo, sí que determina la "acción" de $A_0$ sobre $V \oplus V'$ ya que para cualesquiera $a, b \in A_0$ las aplicaciones $R_a|_{V\oplus V'}$ y $L_b|_{V\oplus V'}$ son endomorfismos de sl(2) módulos. Así, puesto que $\dim \mathrm{End}_{\mathrm{sl}(2)}(V \oplus V') = 4 = \dim A_0$ (por ser $\mathcal{F}$ algebraicamente cerrado), tenemos que $\mathrm{End}_{\mathrm{sl}(2)}(V \oplus V') = \{R_a|_{V\oplus V'} \mid a \in A_0\} = \{L_b|_{V\oplus V'} \mid b \in A_0\}$. Parece razonable que los elementos $a, b \in A_0$ tales que $R_a|_{V\oplus V'} = id = L_b|_{V\oplus V'}$ tengan una cierta relevancia. En cuanto que esto, como veremos, es cierto, nos permitimos considerar el siguiente producto en $A$

$$x \circ y = (xR_a^{-1})(yL_b^{-1}).$$

Es inmediato comprobar que $(A, \circ)$ es un álgebra Hurwitz con unidad $e = ba$.

La descomposición $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_{-1}$ de $A$ respecto de la subálgebra de Cartan (de $\mathrm{Der}\, A$) $\mathcal{H} = \mathcal{F}H \subset \mathrm{sl}(2)$ proporciona una $\mathbb{Z}_3$ graduación de $A$, que por el comentario posterior al teorema 4.19 es de la forma

$$A_0 = \langle e_1, e_2, u_1, v_1 \rangle, \quad A_1 = \langle u_2, v_3 \rangle \quad \text{y} \quad A_{-1} = \langle v_2, u_3 \rangle$$

para alguna base canónica de $(A, \circ)$.

Podemos considerar como $V$ el subespacio $\langle u_2, u_2F \rangle$ y como $V'$ el subespacio $\langle v_3, v_3F \rangle$. Si observamos que $u_2F \in A_{-1}$ y $(u_2, u_2F) = 0$ tenemos que $u_2F \in \mathcal{F}u_3$ y $v_3F \in \mathcal{F}v_2$, por lo que $V = \langle u_2, u_3 \rangle$ y $V' = \langle v_2, v_3 \rangle$.

Como $a(\mathrm{sl}(2)) = 0 = b(\mathrm{sl}(2))$, entonces $\mathrm{sl}(2) \subseteq \mathrm{Der}\,(A, \circ)$. De hecho, salvo cambio escalar de los $u_i's$ y $v_i's$ podemos suponer que

$$E = \frac{1}{3} D_{u_2,v_3}, \quad F = \frac{1}{3} D_{u_3,v_2} \quad \text{y} \quad H = \frac{1}{3}(D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}).$$

**Teorema 5.24.** *Para los elementos $a$ y $b$ anteriores se tiene que* $a(\mathrm{Der}\, A) = 0 = b(\mathrm{Der}\, A)$.

*Demostración.* $\mathcal{L} = \mathrm{Der}\, A$ se descompone, respecto de $\mathcal{H}$, como $\mathcal{L} = \mathcal{F}H \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_{-1} \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_{-2}$. Claramente $a\mathcal{L}_{\pm 2} = 0 = b\mathcal{L}_{\pm 2}$, por lo que para demostrar el teorema basta considerar únicamente derivaciones $D \in \mathcal{L}_1$. Sea $aD =$

$\lambda u_2 + \mu v_3$ para ciertos $\lambda, \mu \in \mathcal{F}$. Observemos que $[D,[D,F]] \in \mathcal{F}H$ y que $D^2 = 0$, así, $0 = a[D,[D,F]] = a(D^2F - 2DFD + FD^2) = -2aDFD$. De este modo, por la forma de $F$, podemos concluir que $\lambda u_3 D = \mu v_2 D$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} u_3D &= (u_3a)D = (u_3D)a + u_3(aD) = (u_3D)a + u_3 \circ (\lambda u_2 + \mu v_3) \\ &= (u_3D)a - \lambda v_1 - \mu e_1 \\ v_2D &= (v_2a)D = (v_2D)a + v_2(aD) = (v_2D)a - \lambda e_2 + \mu u_1 \end{aligned}$$

Usando que $\lambda u_3 D = \mu v_2 D$ concluimos que $\lambda = 0 = \mu$ y, en consecuencia, $aD = 0$. Análogo resultado se sigue para $b$.

QED

Este teorema nos permite calcular $\mathrm{Der}\, A$ a partir de la descomposición $\mathrm{Der}\,(A, \circ) = \sum \bar{\mathcal{D}}_i$ vista en el capítulo 1. En particular, puesto que $\dim \bar{\mathcal{D}}_{\pm 2} = 1$, se tiene que $\mathcal{L}_2 = \mathcal{F}E$ y $\mathcal{L}_{-2} = \mathcal{F}F$. Calcular $\mathcal{L}_{\pm 1}$ lleva un poco más de trabajo y pasa por encontrar una base canónica de $(A, \circ)$ en la cual podamos identificar algún elemento $D \in \mathcal{L}_1$. Para ello primero demostraremos que $\dim \ker D|_{A_0} = 3$ $\forall 0 \neq D \in \mathcal{L}_1$. Sea $D' = [D, F] \in \mathcal{L}_{-1}$, claramente $\langle D, D' \rangle$ es un sl(2)-submódulo de $\mathcal{L}$ de tipo $V(1)$. Algunos hechos básicos sobre $V(1)$ nos facilitarán la labor. Recordemos que $V(1) \otimes V(1) \cong V(2) \oplus V(0)$, que $\mathcal{L}$ no posee ningún submódulo isomorfo a $V(0)$ y que el único submódulo isomorfo a $V(2)$ lo da la propia subálgebra sl(2). Para nuestro $V(1) = \langle D, D' \rangle$ el producto de Lie es un homomorfismo de $V(1) \otimes V(1)$ en $\mathcal{L}$, por lo que o bien $[V(1), V(1)] = \mathrm{sl}(2)$ o bien $[V(1), V(1)] = 0$. Basta notar que $[D, D] = 0$ para concluir que $[V(1), V(1)] = 0$. En particular, $[D, D'] = 0$. Ahora un pequeño paso "ad hoc": para cualesquiera $x, y \in A_0$ se tiene que

$$(xD', yD) = -(xD'D, y) = -(xDD', y) = (xD, yD') = (xD, y[D, F])$$

$$= \ -(x[D,F],yD) = -(xD',yD),$$

de donde $(A_0D', A_0D) = 0$ y así, como por antisimetría $A_0D' \neq 0 \neq A_0D$, obtenemos que $\dim A_0D = 1$; en consecuencia, $\dim\ker D|_{A_0} = 3$. Podemos, ahora, cambiar la base canónica de $(A, \circ)$ para que también se "ajuste" a $D$ (este problema volverá a aparecer en la sección 5). Como $\dim\ker D|_{A_0} = 3$ entonces existe $x \in A_0$ tal que $x \perp e = ba, n(x) \neq 0$ y $xD = 0$. El subespacio $\mathcal{F}e + \mathcal{F}x$ es una subálgebra de composición de $(A, \circ)$, la cual se genera linealmente por dos idempotentes $e_1'$ y $e_2'$ con $e = e_1' + e_2'$. Para esta elección sabemos, por lo pronto, que $D$ anula a $e_1'$ y $e_2'$, hecho que con $e_1$ y $e_2$ no resultaba claro. Empleando la $\mathbb{Z}_3$ graduación de $A$, $\{e_1', e_2'\}$ se completa a una base canónica de $(A, \circ)$ para la cual

$$A_0 = \langle e_1', e_2', u_1', v_1' \rangle, \quad A_1 = \langle u_2', v_3' \rangle \quad \text{y} \quad A_{-1} = \langle u_3', v_2' \rangle.$$

Al tener dimensión 3, $\ker D|_{A_0}$ no es una subálgebra de composición, por lo que existe un elemento $y \in A_0$ tal que $yD = 0$, $y \perp e, x$ y además $n(y) = 0$. Podemos suponer, salvo cambio de $e_1'$ por $e_2'$, que $y = u_1'$ y que $\ker D|_{A_0} = \langle e_1', e_2', u_1' \rangle$. Así, $0 = (u_1' \circ v_1')D = u_1' \circ (v_1'D)$, y, como $v_1'D \in \langle u_2', v_3' \rangle$, se tiene que $v_1'D \in \mathcal{F}v_3'$. Por los comentarios del inicio de la subsección aplicados a nuestra nueva base canónica, puede considerarse

$$E = \frac{1}{3}D_{u_2',v_3'}, \quad F = \frac{1}{3}D_{u_3',v_2'} \quad \text{y} \quad H = \frac{1}{3}(D_{u_2',v_2'} - D_{u_3',v_3'}).$$

Del hecho de que $e_1'D = e_2'D = u_1'D = 0$ y $v_1'D \in \mathcal{F}v_3'$ se sigue que, como $\mathcal{L}_1 \subseteq \bar{\mathcal{D}}_1$, $D \in \langle D_{u_1',v_3'} \rangle$ y que $D' = [D, F] \in \langle D_{u_1',v_2'} \rangle$. Llegados a este punto nos olvidamos de la notación con primas. Veamos que $\mathcal{L}_1 = \langle D_{u_1,v_3} \rangle$ y que $\mathcal{L}_{-1} = \langle D_{u_1,v_2} \rangle$. Puesto que $\mathcal{L}_1 \subseteq \bar{\mathcal{D}}_1$, cualquier elemento $\bar{D}$ de $\mathcal{L}_1$ linealmente independiente con $D_{u_1,v_3}$ será una combinación $\bar{D} = \lambda_1 D_{e_2,v_3} + \lambda_2 D_{e_1,u_2} + \lambda_3 D_{u_2,v_1}$ y, en consecuencia, $e_1\bar{D} = -\lambda_1 v_3 + \lambda_2 u_2, u_1\bar{D} = -\lambda_2 v_3 + 3\lambda_3 u_2$ y

$v_1\bar{D} = \lambda_1 u_2$. Como $\dim A_0\bar{D} = 1$, se sigue que $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ y, así, $\bar{D} = \lambda_3 D_{u_2,v_1}$. Ahora bien, conmutando $D_{u_2,v_1}$ con $D_{u_1,v_2}$ obtenemos la derivación $3(D_{u_2,v_2} - D_{u_1,v_1})$, que no pertenece a $\mathrm{Der}\, A$ pues $\mathcal{H} = \mathcal{F}H$. Por lo tanto $\mathcal{L}_1 = \langle D_{u_1,v_3}\rangle$ y $\mathcal{L}_{-1} = \langle D_{u_1,v_2}\rangle$.

**Teorema 5.25.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $> 5$, cuya álgebra de derivaciones posee una subálgebra $\mathrm{sl}(2)$ que satisface la propiedad $(*)$ y que descompone al $\mathrm{sl}(2)$-módulo $A$ como $A \cong 4V(0) \oplus 2V(1)$. Entonces existen ciertos elementos $a, b \in A$ con $n(a) = 1 = n(b)$ tales que $a(\mathrm{Der}\, A) = 0 = b(\mathrm{Der}\, A)$. Además, el álgebra Hurwitz $(A, \circ)$ con producto $x \circ y = (xR_a^{-1})(yL_b^{-1})$ y unidad $e = ba$ posee una base canónica de tal modo que $\mathrm{Der}\, A$ es una de las siguientes álgebras:*

i) $\mathrm{Der}\, A = \langle D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}, D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}\rangle \cong \mathrm{sl}(2)$.

ii) $\mathrm{Der}\, A = \langle D_{u_2,v_3}, D_{u_3,v_2}, D_{u_2,v_2} - D_{u_3,v_3}, D_{u_1,v_3}, D_{u_1,v_2}\rangle \cong \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$ *con $\mathcal{N}$ ideal abeliano isomorfo a $V(1)$ como $\mathrm{sl}(2)$ módulo.*

## 4.2. Algebras $A \cong V(0) \oplus V(2) \oplus 2V(1)$

En esta subsección nos ocuparemos del apartado II) del teorema 5.5 al igual que de demostrar que la descomposición de $A$ como $\mathrm{sl}(2)$-módulo no depende de la copia de $\mathrm{sl}(2)$ escogida. Sea $\mathrm{sl}(2) = \langle E, F, H\rangle$ una subálgebra de $\mathrm{Der}\, A$ que satisface la propiedad $(*)$ y $\mathcal{H} = \mathcal{F}H$ una subálgebra de Cartan de $\mathrm{Der}\, A$ respecto de la cual $A$ se descompone como $A \cong V(0) \oplus V(2) \oplus 2V(1)$. Por el comentario previo a la subsección 4.1, se tiene que $V(0)$ es una subálgebra ortogonal a $V(2) \oplus 2V(1)$ y, por lo tanto, $V(0) = \mathcal{F}e$ con $e^2 = e$ y $n(e) = 1$. Esta elección de $e$ permanecerá fija a lo largo de esta subsección. La $\mathbb{Z}_3$

graduación

$$A = A_0 \bigoplus (A_2 \oplus A_{-1}) \bigoplus (A_{-2} \oplus A_1)$$

pasa a $(A, e)$ donde, por (4.6), existe una base canónica de tal modo que

$$A_0 = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad A_2 = \langle u_1 \rangle, \quad A_{-1} = \langle u_2, u_3 \rangle, \quad A_{-2} = \langle v_1 \rangle, \quad A_1 = \langle v_2, v_3 \rangle.$$

El subespacio $V(0) \oplus V(2)$ es una subálgebra de composición de dimensión 4 sobre la que sl(2) actúa como derivaciones, así, por el teorema 4.13, $V(0) \oplus V(2)$ es estándar y $e$ es su unidad, unidad a un lado o su paraunidad.

Consideremos $V = \langle v_3, v_3F \rangle$ y $V' = \langle v_2, v_2F \rangle$. Puesto que $v_3F \in A_{-1}$ y $(v_3, v_3F) = 0$ se tiene que $v_3F \in \mathcal{F}u_2$ y, análogamente, $v_2F \in \mathcal{F}u_3$. Por lo tanto, $V = \langle v_3, u_2 \rangle$ y $V' = \langle v_2, u_3 \rangle$ son dos sl(2)-módulos de tipo $V(1)$.

Denotaremos por $J$ la involución estándar de $(A, e)$.

**Lema 5.26.** *En la base* $\{e, e_1 - e_2, u_1, v_1, u_2, u_3, v_2, v_3\}$ *anterior las matrices coordenadas de* $R_e$ *y* $L_e$ *tienen la forma*

$$\mathrm{diag}(C_1, C_2, (C_2^t)^{-1}) \quad \textit{con} \quad C_1 = \mathrm{diag}(1, \pm I_3) \quad \textit{y} \quad \det(C_2) = 1.$$

*donde* $I_3$ *denota la matriz identidad de orden* 3. *En particular,* $R_e$ *y* $L_e$ *son automorfismos o antiautomorfismos de* $(A, e)$.

*Demostración.* Empecemos notando que la aplicación $\xi : V' \to V$ definida mediante $(u_3)^\xi = -u_2$ y $(v_2)^\xi = v_3$ es un isomorfismo de sl(2)-módulos. Así, puesto que el operador $R_e|_{V \oplus V'}$ es un sl(2)-endomorfismo de $V \oplus V'$ y que $\mathrm{End}_{\mathrm{sl}(2)}(V) = \mathcal{F}id$, los sl(2)-homomorfismos

$$V \xrightarrow{R_e} V \oplus V' \xrightarrow{\pi} V$$

y

$$V \xrightarrow{R_e} V \oplus V' \xrightarrow{\pi'} V' \xrightarrow{\xi} V$$

son escalares ($\pi$ y $\pi'$ denotan las proyecciones canónicas). De lo cual tenemos que la matriz coordenada de $R_e|_{V\oplus V'}$ en la base $\{u_2, v_3, u_3, v_2\}$ es

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \delta \\ \hline -\gamma & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \beta \end{array}\right)$$

La condición de isometría equivale a $\alpha\beta - \gamma\delta = 1$, de donde se sigue la primera parte del enunciado. El resto es consecuencia directa del teorema 1.10.

QED

Denotaremos por

$$R_e \leftrightarrow \operatorname{diag}(C_1, C_2, (C_2^t)^{-1}) \text{ con } C_1 = \operatorname{diag}(1, \pm I_3) \text{ y } \det(C_2) = 1$$

y

$$L_e \leftrightarrow \operatorname{diag}(D_1, D_2, (D_2^t)^{-1}) \text{ con } D_1 = \operatorname{diag}(1, \pm I_3) \text{ y } \det(D_2) = 1$$

las matrices coordenadas de $R_e$ y $L_e$ en la base $\{e, e_1 - e_2, u_1, v_1, u_2, u_3, v_2, v_3\}$.

**Teorema 5.27.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8 cuya álgebra de derivaciones posee una subálgebra $\mathrm{sl}(2)$ que verifica la propiedad $(*)$ y que descompone a $A$ como $V(0) \oplus V(2) \oplus 2V(1)$. Entonces existe $e \in V(0)$ con $e^2 = e$ y $n(e) = 1$, y una base canónica de $(A, e)$ de tal modo que o bien*

I) $e(\operatorname{Der} A) = 0$ *y* $\operatorname{Der} A = \langle D_{e_1,u_1}, D_{e_2,v_2}, D_{u_1,v_1}\rangle = \mathrm{sl}(2)$

*o bien*

II) *Las matrices coordenadas de $R_e$ y $L_e$ en base $\{e, e_1 - e_2, u_1, v_1, u_2, u_3, v_2, v_3\}$ son*

$$R_e \leftrightarrow \operatorname{diag}(C_1, C_2, (C_2^t)^{-1}) \quad y \quad L_e \leftrightarrow \operatorname{diag}(D_1, D_2, (D_2^t)^{-1})$$

*con*

$$C_1 = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) = D_1$$

*y*

$$C_2 = \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} \text{ y } D_2 = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix},$$

*donde $\omega$ denota una raíz cúbica primitiva de la unidad. Además, en este caso, $A$ es isomorfa al álgebra $\mathcal{A}_1$ del ejemplo* 1 *y, por lo tanto,* $\mathrm{Der}\, A = \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$ *para algún ideal abeliano $\mathcal{N}$ de dimensión* 2.

*Demostración.* Denotemos $\mathrm{Der}\, A$ por $\mathcal{L}$. En primer lugar comprobaremos que la subálgebra $\mathcal{L}' = \{D \in \mathrm{Der}\, A \mid eD = 0\}$ coincide con sl(2). Como de costumbre, para este cálculo podemos suponer que $V(0) \oplus V(2)$ es un álgebra Hurwitz ($C_1 = I_3 = D_1$) y, por el lema previo, que $R_e$ y $L_e$ son automorfismos de $(A, e)$ que fijan $V(0) \oplus V(2)$. La $\mathbb{Z}_3$ graduación corta que induce la de $A$ en $\mathrm{Der}\,(A, e)$ es

$$\mathrm{Der}\,(A, e) = \mathcal{D}^{(0)} \oplus \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(2)}$$

con $\mathcal{D}^{(i)}$ como en el capítulo I. Además, sabemos que $\mathcal{L}' = \sum \mathcal{L}'^{(i)}$ con $\mathcal{L}'^{(i)} = \{D \in \mathcal{D}^{(i)} \mid [R_e, D] = 0 = [L_e, D]\}$. Sea $\tau \in \{R_e, L_e\}$, tenemos que $D_{e_1,u} \in \mathcal{L}'^{(1)} \Leftrightarrow D_{e_1^\tau, u^\tau} = D_{e_1,u}\, \forall \tau \Leftrightarrow u^\tau = u\, \forall \tau$. En particular, $D_{e_1,u_1} \in \mathcal{L}'^{(1)}$. Si existiese algún $u \in \langle u_2, u_3 \rangle$ con $u^\tau = u\ \forall \tau$ entonces podríamos suponer que $u = u_2$ por lo que, en vista de que $\det(C_2) = 1 = \det(D_2)$, encontraríamos una base canónica donde $C_2$ y $D_2$ serían triangulares con unos en la diagonal. En vista de la proposición 5.10 y del teorema 5.12, $\mathrm{Der}\, A$ tendría una derivación nilpotente central que debería aparecer en $\mathcal{H}$, lo cual no es cierto. En consecuencia, $\mathcal{L}'^{(1)} = \langle D_{e_1,u_1} \rangle$ y, análogamente, $\mathcal{L}'^{(2)} = \langle D_{e_2,v_1} \rangle$. Para calcular $\mathcal{L}'^{(0)}$ hacemos uso de la tabla 2, la cual nos dice que $\mathcal{D}^{(0)}$ está formado por subespacios de raíces $\{0, \pm\alpha_1, \pm(\alpha_1 + 3\alpha_2), \pm(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\}$. Dada $D \in \mathcal{L}'^{(0)}$, puesto que $[D, D_{e_1,u_1}] \in \mathcal{L}'^{(1)} = \langle D_{e_1,u_1} \rangle$, vemos que $D$ no tiene componentes en los subespacios asociados a $\alpha_1$ y $2\alpha_1 + 3\alpha_2$. El mismo razonamiento con $[D, D_{e_2,v_1}]$ nos da que $D$ tampoco tiene componentes según $-\alpha_1$ y $-(2\alpha_1 + 3\alpha_2)$. Por último, como la derivación $D_{u_1,v_1}$ genera $\mathcal{H}$ y es centralizada por los subespacios asociados a las raíces 0 y $\pm(\alpha_1 + 3\alpha_2)$, se sigue que $D \in \langle D_{u_1,v_1}\rangle$. Esto demuestra el apartado I) del teorema.

Para demostrar el apartado II) haremos uso del principio local de la trialdad. Dada $D \in \mathrm{Der}\, A$, por el lema 5.1 $D$ se descompone como $D = \tilde{R}_a + \bar{D} + \tilde{L}_b$ con $a, b \perp e$ y $\bar{D} \in \mathrm{Der}\,(A, e)$ (la tilde distingue a los operadores de multiplicación en $(A, e)$). Por la proposición 5.3 y las ecuaciones (5.1) debe cumplirse que

$$\begin{aligned} -\tilde{R}_a + \bar{D} + \tilde{R}_b + \tilde{L}_b &= D' = R_e^{-1} D R_e \\ \tilde{R}_a + \tilde{L}_a + \bar{D} - \tilde{L}_b &= D'' = L_e^{-1} D L_e \end{aligned} \tag{5.10}$$

Examinamos, en función de $R_e$ y $L_e$, los posibles valores de $a$ y $b$ permitidos por las ecuaciones (5.10):

i) *$L_e$ y $R_e$ automorfismos:* El sistema (5.10) queda

$$\begin{aligned} -\tilde{R}_a + \bar{D} + \tilde{R}_b + \tilde{L}_b &= \tilde{R}_{ae} + R_e^{-1} \bar{D} R_e + \tilde{L}_{be} \\ \tilde{R}_a + \tilde{L}_a + \bar{D} - \tilde{L}_b &= \tilde{R}_{ea} + L_e^{-1} \bar{D} L_e + \tilde{L}_{eb} \end{aligned}$$

Puesto que $R_e^{-1}\bar{D}R_e$ y $L_e^{-1}\bar{D}L_e \in \mathrm{Der}\,(A, e)$ (ya que $R_e$ y $L_e$ son automorfismos), por el lema 5.1 tenemos que $\bar{D} \in \mathcal{L}'$ y que

$$\begin{aligned} b - a &= ae, & b &= be, \\ a &= ea, & a - b &= eb. \end{aligned} \tag{5.11}$$

En este sistema la primera fila nos dice que $(b-2a)e = -(b-2a)$ y la segunda que $e(a-2b) = -(a-2b)$. Si $a$ ó $b$ perteneciese a $\langle e_1, e_2, u_1, v_1\rangle$ entonces $ea = a = ae$ ó $eb = b = be$ (recordemos que al ser $R_e$ y $L_e$ automorfismos entonces $C_1$ y $D_1$ son la identidad) de donde, por (5.11), $a = 0 = b$ y, en consecuencia, $D = \bar{D} \in \mathcal{L}'$. En otro caso, $R_e$ y $L_e$ tendrían un vector de valor propio 1 en $\langle u_2, u_3, v_2, v_3 \rangle$; así, por la forma de $R_e$ y $L_e$, 1 sería el único valor propio de estos operadores. En particular, $b - 2a = 0 = a - 2b$, lo que nuevamente obliga a que $D \in \mathcal{L}'$. Concluimos que si $R_e$ y $L_e$ son automorfismos de $(A, e)$ entonces $\operatorname{Der} A = \mathcal{L}' = \mathrm{sl}(2)$.

ii) *$L_e$ automorfismo y $R_e$ antiautomorfismo:* En este caso $R_e^{-1}\tilde{L}_x R_e = \tilde{R}_{xe}$ y $R_e^{-1}\tilde{R}_x R_e = \tilde{L}_{xe}$ $\forall x$. Así las ecuaciones (5.10) se traducen en que $\bar{D} \in \mathcal{L}'$ y que

$$\begin{array}{rclcrcl} b-a & = & be, & \qquad & b & = & ae, \\ a & = & ea, & & a-b & = & eb. \end{array}$$

Un razonamiento como el del caso anterior concluye que $\operatorname{Der} A = \mathcal{L}' = \mathrm{sl}(2)$.

iii) *$L_e$ antiautomorfismo y $R_e$ automorfismo:* Similar al apartado ii).

iv) *$L_e$ y $R_e$ antiautomorfismos:* Observemos que en la descomposición $\mathcal{L} = \oplus_{i=-4}^{4} \mathcal{L}_i$ en subespacios fundamentales para $ad_H$ se tiene que $e\mathcal{L}_j = 0$ $\forall j = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 4$. Así, en orden a demostrar el teorema, basta considerar $D \in \mathcal{L}_1$ con $0 \neq eD \in \langle v_2, v_3 \rangle$. El sistema (5.10) equivale a que $\bar{D} \in \mathcal{L}'$ y

$$\begin{array}{rclcrcl} b-a & = & be, & \qquad & b & = & ae, \\ a & = & eb, & & a-b & = & ea. \end{array} \tag{5.12}$$

Puesto que $eD = a+b \in \langle v_2, v_3 \rangle$ se sigue que $\langle a, b \rangle \subseteq \langle v_2, v_3 \rangle$. Las condiciones en $a$ y $b$ se reescriben como

$$\begin{array}{rclcrcl} (be)e - be + b & = & 0, & \qquad & b & = & ae, \\ a & = & eb, & & e(ea) - ea + a & = & 0. \end{array}$$

Si la dimensión de $\langle a, b \rangle$ fuese 2 entonces $\langle a, b \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$ y $L_e, R_e$ tendrían valores propios $-\omega$ y $-\omega^2$ en $\langle v_2, v_3 \rangle$ (con $\omega$ una raíz 3-primitiva de la unidad). Pero además por (5.12) serían una inversa de la otra, y en particular podríamos expresarlas con matrices diagonales en una base canónica, lo cual por la proposición 4.20 no es cierto. Por consiguiente $a, b$ son proporcionales y salvo cambio de la base canónica, podemos suponer que $a = v_2$ es de valor propio $-\omega^2$ para $R_e$ y $-\omega$ para $L_e$. Cambiando la base canónica podemos elegir $v_3$ para que la matriz coordenada de $L_e$ sea diagonal. La de $R_e$ no puede ser diagonal pues tendríamos rango toral 2. Salvo cambio escalar en la base canónica, obtenemos las matrices del enunciado. En consecuencia $A$ es isomorfa al álgebra $\mathcal{A}_1$ del ejemplo 1.

QED

La siguiente proposición nos dice que la condición $(*)$ es irrelevante para todo lo expuesto con anterioridad.

**Proposición 5.28.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8 cuya álgebra de derivaciones es no resoluble y posee una subálgebra de Cartan de dimensión 1. Entonces cualquier subálgebra isomorfa a* $\mathrm{sl}(2)$ *satisface la propiedad $(*)$. Además la descomposición de $A$ como* $\mathrm{sl}(2)$*-módulo es independiente de la subálgebra* $\mathrm{sl}(2)$ *escogida.*

*Demostración.* Denotemos por $\mathrm{sl}(2)$ una subálgebra que satisfaga la propiedad $(*)$ y por $\mathcal{S}$ cualquier subálgebra isomorfa a $\mathrm{sl}(2)$. Si $\mathrm{Der}\, A = \mathrm{sl}(2)$ entonces el resultado es una trivialidad. En otro caso, hemos visto que $\mathrm{Der}\, A = \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$ para un cierto $\mathcal{N}$ ideal abeliano isomorfo a $V(1)$ como $\mathrm{sl}(2)$-módulo. De hecho también es isomorfo a $V(1)$ como $\mathcal{S}$-módulo. En efecto, es evidente que $\mathrm{Der}\, A = \mathcal{S} \oplus \mathcal{N}$ y, por lo tanto, $\mathcal{N} = [\mathcal{N}, \mathrm{sl}(2)] = [\mathcal{N}, \mathrm{Der}\, A] = [\mathcal{N}, \mathcal{S}]$. Así, $\mathcal{N}$ no es un módulo trivial para $\mathcal{S}$. Por la dimensión de $\mathcal{N}$ se sigue que $\mathcal{N} \cong V(1)$ como $\mathcal{S}$-módulo. Sea $\mathcal{F}H$ una subálgebra de Cartan de $\mathcal{S}$. Se tiene que $ad_H$ es diagonalizable y $\mathcal{F}H$ es el subespacio de valor propio 0. Es inmediato concluir que $\mathcal{F}H$ es autonormalizada en $\mathrm{Der}\, A$ y que, por lo tanto, $\mathcal{S}$ satisface también la propiedad $(*)$. En particular, todos nuestros resultados previos son ciertos para $\mathcal{S}$.

Respecto a la estructura de $A$ como módulo, notemos que $\mathrm{Der}\, A = \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$ aparece sólamente cuando $A \cong 4V(0) \oplus 2V(1)$ o $A \cong V(0) \oplus V(2) \oplus 2V(1)$. En el primer caso $\mathrm{Der}\, A$ posee submódulos propios triviales mientras que en el segundo no. Esto obliga a que la descomposición sea única.

QED

## 4.3. Algebras $A \cong V(2) \oplus V(4)$

Esta subsección está dedicada a probar el apartado III) del teorema 5.5. Una vez establecida la veracidad de ese apartado quedará demostrado dicho teorema.

Para las álgebras de composición de rango 1 que se descomponen como $A \cong V(2) \oplus V(4)$ hemos visto que $\mathrm{Der}\, A \cong \mathrm{sl}(2)$. Sin embargo, dentro de nuestro estudio resultan extrañas pues $A$ no posee submódulos triviales para $\mathrm{sl}(2)$ y así sus derivaciones no provienen de un álgebra Hurwitz. Esto nos obliga a cambiar nuestros métodos para encontrar el origen de tales álgebras.

Sea $B$ un álgebra y $\mathcal{L} = \mathrm{Der}\, B$ su álgebra de derivaciones. A partir de la estructura de $\mathcal{L}$ se puede dar una aproximación del producto de $B$. Supongamos que $B$ es completamente reducible como $\mathcal{L}$-módulo y consideremos $B = \oplus \sum V_i$ una descomposición donde los $V_i$ son submódulos irreducibles. El producto en $B$ es un homomorfismo de $\mathcal{L}$-módulos de $B \otimes B$ en $B$, es decir, un elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(\oplus \sum V_i \otimes V_j, \oplus \sum V_k) \cong \oplus \sum \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(V_i \otimes V_j, V_k)$. Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(V_i \otimes V_j, V_k)$ es conocido entonces el producto en $B$ puede expresarse como combinación lineal de aplicaciones conocidas. De hecho, esta construcción da todos los posibles productos en $B$ que admiten a $\mathcal{L}$ como subálgebra de derivaciones.

Para aplicar estas ideas a nuestro problema debemos pasar por dos puntos:

a) Calcular $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}(V(i)\otimes V(j),V(k))\quad i,j,k=2,4.$

b) Determinar los valores de los coeficientes en la combinación lineal que permiten a nuestro producto en $A$ admitir composición.

Sobre cuerpos de característica cero el módulo $V(i)\otimes V(j)\quad i,j=2,4$ es completamente reducible [Hum] y se tiene:

$$\begin{aligned} V(2)\otimes V(2) &\cong V(4)\oplus V(2)\oplus V(0)\\ V(2)\otimes V(4) &\cong V(4)\otimes V(2)\cong V(6)\oplus V(4)\oplus V(2)\\ V(4)\otimes V(4) &\cong V(8)\oplus V(6)\oplus V(4)\oplus V(2)\oplus V(0). \end{aligned}\tag{5.13}$$

Sin embargo, para característica prima no siempre estos productos tensoriales son completamente reducibles. Siguiendo [B-O3 81] la descomposición (5.13) resulta válida si el cuerpo base $\mathcal{F}$ tiene característica $>7$, mientras que si $\mathrm{car}\mathcal{F}=7$ entonces aparece el siguiente cambio:

$$V(4)\otimes V(4)\cong Q(4)\oplus V(6)\oplus V(2)\oplus V(0)\tag{5.14}$$

donde $Q(4)$ es un cierto módulo de dimensión 14 de tal modo que el cociente por su único submódulo maximal es isomorfo a $V(4)$.

**Lema 5.29.** *Sea $\mathcal{F}$ algebraicamente cerrado y $\mathrm{car}\mathcal{F}>5$, se tiene:*

i) $\dim\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}(V(i)\otimes V(j),V(k))=1\quad i,j,k=2,4.$

ii) $\dim\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}(V(i)\otimes V(i),V(0))=1\quad i=2,4.$

iii) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}(V(2)\otimes V(4),V(0))=0.$

*Demostración.* El lema es inmediato a partir de (5.13) excepto en el caso en que la característica de $\mathcal{F}$ es 7 e $i = j = 4$. En este caso debemos observar que dado un módulo irreducible $V$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(2)}(Q(4), V)$ no nulo, se tiene que $\ker \varphi$ es un submódulo maximal de $Q(4)$. Puesto que $Q(4)$ únicamente contiene un tal submódulo, podemos concluir que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(2)}(Q(4), V) = 0$ si $V \not\cong V(4)$ mientras que $\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(2)}(Q(4), V(4)) = 1$. El lema se sigue de (5.14) y de esta observación.

QED

El apartado iii) nos dice que $V(2)$ y $V(4)$ son ortogonales.

Para calcular los generadores de los espacios de aplicaciones que aparecen en el lema disponemos del álgebra $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$. Recordemos que ésta consta del conjunto de matrices de traza cero sl(3) con producto

$$x * y = \mu x \cdot y + (1 - \mu) y \cdot x - \frac{1}{3} traza(x \cdot y) I_3$$

con $\mu$ solución de la ecuación $3\mu(1 - \mu) = 1$ y $x \cdot y$ el producto usual de matrices. La forma bilineal con la que permite composición es $((x, y)) = \frac{1}{6} traza(x \cdot y)$. Podemos reescribir $x * y$ como

$$x * y = (\frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x) - \frac{1}{3} traza(x \cdot y) I_3) + \lambda [x, y] \qquad (5.15)$$

con $\lambda = (1 - 2\mu)/2$ y $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$.

Denotemos por $x^t$ la traspuesta de la matriz $x$ y sea $K = \{a \in \mathrm{sl}(3) \mid a^t = -a\}$ y $H = \{s \in \mathrm{sl}(3) \mid s^t = s\}$. $K$ es un álgebra de Lie isomorfa a sl(2) que actúa por adjunción como derivaciones en $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$ y $H$ es un submódulo isomorfo a $V(4)$. Así, $\mathrm{P}_8(\mathcal{F}) \cong V(2) \oplus V(4)$ para $K$. Las proyecciones $\pi_2$ y $\pi_4$ del producto $x * y$ en los subespacios $K$ y $H$ respectivamente dan los generadores de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(2)}(V(i) \otimes V(j), V(k)) \quad i, j, k = 2, 4$. Sean $a, a' \in K$ y $s, s' \in H$, por (5.15) se tiene

| *Producto* | *Proyección* $\pi_2$ |
|---|---|
| $a * a'$ | $\lambda[a, a']$ |
| $s * s'$ | $\lambda[s, s']$ |
| $a * s$<br>$s * a$ | $\frac{1}{2}(a \cdot s + s \cdot a) - \frac{1}{3}traza(a \cdot s)$ |

Tabla 4

La proyección $\pi_4$ se obtiene fácilmente de (5.15). La forma bilineal $((\, ,\, ))$ da los generadores de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(2)}(V(i) \otimes V(i), V(0)) \quad i = 2, 4$. Como sl(2)-módulos podemos identificar nuesta álgebra de composición $A$ con $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$. La forma bilineal de $A$ es un elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(2)}(A \otimes A, V(0)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(2)}(K \otimes K, V(0)) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}(2)}(H \otimes H, V(0))$ y por lo tanto se tiene que

$$(\, ,\, )|_{K \otimes K} = \alpha((\, ,\, ))|_{K \otimes K} \quad \text{y} \quad (\, ,\, )|_{H \otimes H} = \beta((\, ,\, ))|_{H \otimes H}.$$

Si $\varphi : \mathrm{P}_8(\mathcal{F}) \longrightarrow A$ es un isomorfismo como módulos entonces la aplicación $\varphi'$ definida por $a^{\varphi'} = \sqrt{\alpha} a^{\varphi}$ y $s^{\varphi'} = \sqrt{\beta} s^{\varphi} \quad \forall a \in K, s \in H$ es también un isomorfismo y una isometría para las formas bilineales, por lo que podemos considerar que la forma bilineal de $A$ y $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$ es la misma y la denotaremos por $(\, ,\, )$.

Por lo dicho al inicio, podemos expresar el producto $xy$ en $A$ mediante

$$\begin{aligned} aa' &= C_1\pi_2(a * a') + C_2\pi_4(a * a') \\ ss' &= C_3\pi_2(s * s') + C_4\pi_4(s * s') \\ as &= C_5\pi_2(a * s) + C_6\pi_4(a * s) \\ sa &= C_7\pi_2(s * a) + C_8\pi_4(s * a) \end{aligned} \tag{5.16}$$

No para cualquier valor de las constantes $C_i$ tenemos un producto de composición. Para hallar las relaciones que nos aseguran la composición no necesitamos utilizar la forma exacta del producto $x * y$, sólamente alguna de sus propiedades. Sean $\{a_{-2}, a_0, a_2\}$ y $\{s_{-4}, s_{-2}, s_0, s_2, s_4\}$ bases de $K$ y $H$ formadas por vectores propios de $ad_{a_0}$. Debemos notar que $(a_i, s_j) = 0\ \forall i, j$ y $(a_i, a_j) = 0 = (s_i, s_j)\ \forall i + j \neq 0$. En particular, $n(a_0) \neq 0 \neq n(s_0)$. Observemos las siguientes propiedades:

$P_1)$ $a_0 * a_0, s_0 * s_0 \in \mathcal{F}s_0$ y $a_0 * s_0, s_0 * a_0 \in \mathcal{F}a_0$: En efecto, basta notar que la proyección en $K$ de $a_0 * a_0$ y $s_0 * s_0$ es nula y que son vectores de valor propio cero para $ad_{a_0}$. Respecto a $a_0 * s_0$ y $s_0 * a_0$, la propiedad es consecuencia de que $(a_0 * s_0, a_0 * a_0) = 0 = (s_0 * a_0, a_0 * a_0)$.

$P_2)$ $a_0 * s_{\pm 4}, s_{\pm 4} * a_0, s_0 * s_{\pm 4}, s_{\pm 4} * s_0 \in \mathcal{F}s_{\pm 4}$: Basta notar que estos vectores son de valor propio $\pm 4$ para $ad_{a_0}$.

$P_3)$ $\pi_4(a_{-2} * a_0) \neq 0 \neq \pi_4(s_0 * a_2)$: En primer lugar observemos que $(K * K) \cap H \neq 0$ pues $a_0 * a_0 \in H$ y $a_0 * a_0$ es no nulo ya que su norma es no nula. En consecuencia, $H \subseteq K * K$. Ahora bien, como $K * K$ tiene proyecciones no nulas en $K$, se sigue que $K * K = K \oplus H$. De este modo, los vectores propios de valor propio 2 para $ad_{a_0}$ se encuentran en $\langle a_0 * a_2, a_2 * a_0\rangle$ y como $\pi_4(a_0 * a_2) = \pi_4(a_2 * a_0)$ se sigue que esta proyección es no nula. La otra desigualdad se sigue de la forma de $\pi_2$ y de que $K$ es un álgebra de Lie isomorfa a sl(2) mediante la adjunción.

$P_4)$ $\pi_2(a_{-2} * a_2) \neq 0$: Esto se deduce de un modo similar a la segunda desigualdad de $P_3$.

Con estas propiedades podemos demostrar

**Lema 5.30.** *Las constantes $C_i$ en (5.16) verifican*

i) $C_i^2 = 1\ \forall i$.

ii) $C_6C_8 = C_2C_4 = C_5C_7, \quad C_3C_7 = C_4C_8 \quad y \quad C_1C_7 = C_2C_8.$

*Demostración.* Por $P_1$ tenemos

$$n(a_0)^2 = n(a_0a_0) = n(C_2a_0 * a_0) = C_2^2 n(a_0)^2$$

de donde $C_2^2 = 1$. El mismo argumento con $s_0$ da $C_4^2 = 1$. Ahora usando $P_2$

$$n(a_0)(s_{-4}, s_4) = (a_0s_{-4}, a_0s_4) = C_6^2(a_0 * s_{-4}, a_0 * s_4) = C_6^2 n(a_0)(s_{-4}, s_4)$$

de donde $C_6^2 = 1$. La misma idea con $(s_{-4}a_0, s_4a_0)$ da $C_8^2 = 1$. Si observamos que

$$\begin{aligned} n(a_{-2}a_2) &= C_1^2 n(\pi_2(a_{-2} * a_2)) + C_2^2 n(\pi_4(a_{-2} * a_2)) \\ n(a_{-2}a_2) &= n(a_{-2})n(a_2) = n(a_{-2} * a_2) = n(\pi_2(a_{-2} * a_2)) + n(\pi_4(a_{-2} * a_2)) \end{aligned}$$

basta usar $P_4$ y que $C_2^2 = 1$ para concluir que $C_1^2 = 1$.

Usando la linealización $(xy, wz) + (xz, wy) = 2(x, w)(y, z)$ de la ley de composición y las propiedades $P_1$ y $P_2$:

$$\begin{aligned} (a_0s_{-4}, s_4a_0) &= -(a_0^2, s_4s_{-4}) = -C_2C_4(a_0 * a_0, s_4 * s_{-4}) \\ (a_0s_{-4}, s_4a_0) &= C_6C_8(a_0 * s_{-4}, s_4 * a_0) = -C_6C_8(a_0 * a_0, s_4 * s_{-4}), \end{aligned}$$

de donde $C_6C_8 = C_2C_4$.

Una argumentación similar a la anterior con $(s_{-4}a_0, s_0s_4)$ y $(a_0s_0, s_0a_0)$ da $C_3C_7 = C_4C_8$ y $C_2C_4 = C_5C_7$. Por último, usando $P_1$ y $P_3$

$$\begin{aligned} (a_{-2}a_0, s_0a_2) &= -(a_{-2}a_2, s_0a_0) = -C_1C_7(a_{-2} * a_2, s_0 * a_0) \\ &= C_1C_7(a_{-2} * a_0, s_0 * a_2) = C_1C_7 \sum_{i=2,4} (\pi_i(a_{-2} * a_0), \pi_i(s_0 * a_2)) \\ (a_{-2}a_0, s_0a_2) &= C_1C_7(\pi_2(a_{-2} * a_0), \pi_2(s_0 * a_2)) + \\ &\qquad +C_2C_8(\pi_4(a_{-2} * a_0), \pi_4(s_0 * a_2)) \end{aligned}$$

que por $P_3$ da $C_1C_7 = C_2C_8$. De las relaciones que tenemos es inmediato concluir que $C_i^2 = 1$ para todo $i$.

QED

**Teorema 5.31.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8 sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $> 5$ tal que $\operatorname{Der} A$ contiene una copia de $\mathrm{sl}(2)$ que descompone a $A$ como $V(2) \oplus V(4)$. Consideremos las isometrías $\varphi, \psi$ dadas por*

$$a^\varphi = \alpha a, \quad s^\varphi = s, \quad a^\psi = \beta a \quad y \quad s^\psi = s \quad \forall a \in V(2), s \in V(4)$$

*con $\alpha^2 = 1 = \beta^2$. Entonces existen únicos $\alpha, \beta$ tales que $A$ con el producto $x * y = x^\varphi y^\psi$ es isomorfa a $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$. Para estos $\alpha, \beta$ se tiene que $\operatorname{Der} A = \{D \in \operatorname{Der}(A, *) \mid [\varphi, D] = 0 = [\psi, D]\}$.*

*Demostración.* Descomponemos el producto de $A$ como en (5.16) respecto de $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$. Identificando $\mathrm{sl}(2)$ y $V(2)$ con $K$, y $V(4)$ con $H$ entonces las constantes $C_i$ satisfacen lo establecido en el lema previo. Más aún, podemos conseguir que $C_3 = C_4$. En efecto, observemos que la trasposición de matrices da un isomorfismo entre $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$ y su álgebra opuesta $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})^{op}$. Los subespacios $H$ y $K$ son invariantes por este isomorfismo. Si descomponemos el producto de $A$ respecto del producto en $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})^{op}$ logramos otras constantes $C_i'$. Por la tabla 4 tenemos que $C_3' = -C_3$ y $C_4' = C_4$, por lo cual o bien $C_3 = C_4$ o bien $C_3' = C_4'$. Obviando la notación con primas supondremos $C_3 = C_4$. También podemos suponer que $C_3 = C_4 = 1$. Para ello basta observar que $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$ con el producto $x \bullet y = -x * y$ es isomorfa a $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$ mediante $x \mapsto -x$. Las constantes que aparecen al descomponer $xy$ respecto de $x \bullet y$ son $-C_i$. Supongamos pues que respecto del producto $x * y$ las constantes verifican

$C_3 = C_4 = 1$. Por el lema anterior

$$C_1 = C_2, \quad C_3 = C_4 = 1, \quad C_5 = C_6, \quad C_7 = C_8 \quad \text{y} \quad C_2C_6 = C_8. \quad (5.17)$$

Definimos

$$a^\varphi = C_6 a, \quad s^\varphi = s, \quad a^\psi = C_8 a \quad \text{y} \quad s^\psi = s \quad \forall a \in K, s \in H.$$

Usando (5.17) y (5.16) se comprueba que $x*y = x^\varphi y^\psi$. Basta entonces tomar $\alpha = C_6$ y $\beta = C_8$ para obtener la primera afirmación del teorema.

Respecto a la unicidad de $\alpha$ y $\beta$, observemos que con la notación previa al teorema $(a_0a_0)a_0 = \alpha\beta(a_0 * a_0)a_0 = \alpha\beta^2(a_0 * a_0) * a_0 = \alpha n(a_0)a_0$, puesto que $a_0 * a_0 \in \mathcal{F}s_0$ y como sabemos en cualquier álgebra de Okubo $x*y*x = n(x)y$. Análogamente $a_0(a_0a_0) = \beta n(a_0)a_0$. Esto determina unívocamente el valor de $\alpha$ y $\beta$ si $*$ es un producto isomorfo al de $\mathrm{P}_8(\mathcal{F})$.

Por último notemos que la posibilidad $\mathrm{sl}(2) \subseteq \mathrm{Der}\, A$ y $A = V(2) \oplus V(4)$ sólamente se da en rango toral 2 y $A$ de Okubo o en rango toral 1 y $\mathrm{Der}\, A = \mathrm{sl}(2)$. En el primer caso, por la unicidad de $\alpha$ y $\beta$ se tiene que $\varphi = id = \psi$ y así, obviamente, $\mathrm{Der}\, A$ es como en el enunciado. En el segundo los contenidos $\mathrm{sl}(2) \subseteq \{D \in \mathrm{Der}\,(A,*) \mid [\varphi, D] = 0 = [\psi, D]\} \subseteq \mathrm{Der}\, A = \mathrm{sl}(2)$ concluyen el teorema.

QED

**Nota:** El teorema nos dice que un álgebra como la del enunciado es o bien de Okubo o bien es isomorfa a una de las álgebras $\mathrm{P}_8(\alpha,\beta)$ definidas en el ejemplo 2. Evidentemente el isomorfismo identifica $V(2)$ con el conjunto $K$ de matrices antisimétricas en $\mathrm{P}_8(\alpha,\beta)$ mientras que $V(4)$ se corresponde con el de simétricas $H$. También es inmediato, por la unicidad de $\alpha$ y $\beta$, que cualquier álgebra $\mathrm{P}_8(\alpha,\beta)$ con $\alpha$ o $\beta \neq 1$ posee exactamente rango 1.

## 4.4. Algebras $A \cong 2V(0) \oplus 2V(2)$

Exceptuando las álgebras de composición de rango 1 isomorfas a $V(2) \oplus V(4)$ y $2V(0) \oplus 2V(2)$, podríamos decir que el proceso para calcular Der $A$ ha sido constructivo (antes de hallar Der $A$ hemos dado una "aproximación" de $A$) mientras que en el caso $V(2) \oplus V(4)$ el orden de exposición ha sido el contrario (proposición 5.23 y subsección 4.3). En esta subsección mostraremos cómo construir las álgebras de composición $A = 2V(0) \oplus 2V(2)$ cuyas álgebras de derivaciones sean sl(2).

Para un álgebra $A$ como la anterior resulta claro, usando el producto tensorial, que $K = 2V(0)$ es una subálgebra de composición. Consideremos $e$ la unidad, unidad a un lado o una paraunidad de $2V(0)$. En $(A, e)$, $K$ es una subálgebra con el producto heredado y, en consecuencia, $K = \langle e_1, e_2 \rangle$ para ciertos idempotentes de $(A, e)$ de norma nula. Puesto que $K\mathrm{sl}(2) = 0$, es evidente que $\mathrm{sl}(2) \subseteq \mathrm{Der}\,(A, e)$ y que los espacios $U(e_1)$ y $V(e_1)$ son sl(2)-módulos isomorfos a $V(2)$.

Sea $\{E, H, F\}$ una base de sl(2), podemos encontrar en $U(e_1)$ un vector $u_1$ de valor propio 2 para $H$ y completarlo mediante $u_2 = u_1 F$, $u_3 = -u_1 F^2$ y $\{v_1, v_2, v_3\}$ adecuados a una base canónica $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ de $(A, e)$. Con esta elección tenemos que

$$\begin{aligned} u_1 H &= 2u_1, & v_1 H &= -2v_1, \\ u_2 H &= 0, & v_2 H &= 0, \\ u_3 H &= -2u_3, & v_3 H &= 2v_3. \end{aligned}$$

También es sencillo calcular la forma exacta de $F$ y $E$; en particular, la aplicación $\xi : V(e_1) \to U(e_1)$ dada por

$$v_1^\xi = u_3, \quad v_2^\xi = u_2 \quad \text{y} \quad v_3^\xi = u_1$$

es un isomorfismo de sl(2)-módulos. Al anular sl(2) a $e$ se tiene que $R_e$ y $L_e \in \mathrm{End}_{\mathrm{sl}(2)}(A)$ y, como además $\mathrm{End}_{\mathrm{sl}(2)}(V(2)) = \mathcal{F}id$, entonces se sigue que las aplicaciones

$$\begin{aligned} &U(e_1) \xrightarrow{R_e} U(e_1) \oplus V(e_1) \xrightarrow{\pi} U(e_1) \\ &U(e_1) \xrightarrow{R_e} U(e_1) \oplus V(e_1) \xrightarrow{\pi'} V(e_1) \xrightarrow{\xi} U(e_1) \end{aligned} \tag{5.18}$$

son escalares ($\pi$ y $\pi'$ denotan las proyecciones canónicas). Esto prueba parte del siguiente teorema:

**Teorema 5.32.** *Las álgebras de composición de rango 1, con producto $xy$, cuyas álgebras de derivaciones poseen una subálgebra* sl(2) *que las descompone como $2V(0) \oplus 2V(2)$ son exactamente aquellas que se construyen a partir del álgebra de Cayley split $(\mathfrak{C}, \circ)$, con unidad $e$, y una base canónica $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ definiendo un nuevo producto dado por $xy = x^{\varphi} \circ y^{\psi}$ donde $\varphi$ y $\psi$ son cualesquiera aplicaciones lineales cuyas matrices coordenadas tengan la forma o bien*

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & & \\ 0 & \pm 1 & & \\ \hline & & \alpha I_3 & 0 \\ \hline & & 0 & \frac{1}{\alpha} I_3 \end{array}\right) \text{ o bien } \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & & \\ 0 & \pm 1 & & \\ \hline & & 0 & \beta D \\ \hline & & \frac{1}{\beta} D & 0 \end{array}\right) \text{ con } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*en la base $\{e, e_2 - e_1, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ y no sean ambas diagonales. Además, su álgebra de derivaciones es*

$$\langle D_{u_1,v_2} - D_{u_2,v_3}, D_{u_1,v_1} - D_{u_3,v_3}, D_{u_2,v_1} - D_{u_3,v_2} \rangle. \tag{5.19}$$

*Demostración.* Respecto del directo, manteniendo la notación previa al teorema, nos faltaría demostrar que las matrices coordenadas de $\varphi = R_e$ y $\psi = L_e$

son como las del enunciado. Por (5.18) es sencillo observar que la matriz coordenada de $R_e|_{U(e_1)\oplus V(e_1)}$ en base $\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ es

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha I_3 & \beta D \\ \hline \gamma D & \delta I_3 \end{array}\right)$$

para ciertos $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{F}$; además, por ser $R_e$ una isometría se sigue que o bien $\beta = 0 = \gamma$ y $\delta = 1/\alpha$ o bien $\alpha = 0 = \delta$ y $\gamma = 1/\beta$. Lo mismo puede decirse para $\psi = L_e$. Por otro lado, si ambas matrices fuesen diagonales entonces $A$ tendría rango toral 2 (proposición 4.20), que no es el caso.

Sea ahora $A$ un álgebra construida como en el enunciado. No es difícil comprobar que el subespacio (5.19) es exactamente la subálgebra $\bar{\mathcal{L}} = \{D \in \langle D_{u_i,v_j} \mid i,j = 1,2,3\rangle \mid [\varphi, D] = 0 = [\psi, D]\}$, por lo que está contenido en $\mathcal{L} = \operatorname{Der} A$. De hecho, esta subálgebra es isomorfa a sl(2) y descompone a $A$ como $A = 2V(0) \oplus 2V(2)$ donde $2V(0) = \langle e_1, e_2\rangle$. Para demostrar que $\operatorname{Der} A = \mathrm{sl}(2)$ se pueden seguir varios caminos, nosotros nos apoyaremos en los resultados anteriores. En primer lugar observemos que, por el teorema 5.21, $\operatorname{Der} A$ es un sl(2)-módulo completamente reducible. Además, si $V(i) \subseteq \operatorname{Der} A$ entonces, como $V(0) \otimes V(i) \cong V(i)$, o bien $A$ también posee un submódulo isomorfo a $V(i)$ o bien $V(i)$ anula a $2V(0)$. Es decir, o bien $V(i) \cong V(2)$ o bien $V(i) \subseteq \bar{\mathcal{L}} = \mathrm{sl}(2)$. En cualquier caso $V(i) \cong V(2)$ y, por lo tanto, $\operatorname{Der} A \cong \sum V(2)$. Consecuencias muy particulares de esto son el que ningún elemento no nulo de $\operatorname{Der} A$ centraliza a sl(2) y el que la dimensión de $\operatorname{Der} A$ es múltiplo de 3. Basta examinar los teoremas 4.23, 5.12, 5.18, 5.25, 5.27 y la proposición 5.23 para comprobar que las únicas álgebras de derivaciones de dimensión múltiplo de 3 que han aparecido son $\mathrm{sl}(2) \oplus \mathrm{sl}(2), \mathrm{sl}(2) \oplus \mathcal{N}$ con $\mathcal{N}$ un ideal resoluble de dimensión 3 (en este caso el centro del álgebra era no trivial) y sl(2). En los dos primeros casos sl(2) es centralizada por elementos no nulos de $\operatorname{Der} A$ por lo que $\operatorname{Der} A = \mathrm{sl}(2)$.

QED

## 5. Der $A$ resoluble de rango 1

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema 5.6. Una parte de este teorema queda cubierta por los teoremas 4.23, 5.12 y 5.18, por lo que basta examinar aquellas álgebras de composición cuya álgebra de derivaciones tenga rango toral 1 y rango 1. La presencia de una derivación diagonalizable aporta simetría:

**Proposición 5.33.** *Sea $A$ un álgebra de composición de rango toral* 1 *y* $A = \bigoplus \sum A_{i\alpha}$ *la descomposición que proporciona el teorema 4.19. Entonces el subespacio de raíz* $2\alpha$ *en* Der $A$ *no es nulo si y sólo si no lo es el de raíz* $-2\alpha$*. Además, en tal caso* $\mathrm{sl}(2) \subseteq \mathrm{Der}\, A$.

*Demostración.* Sea $\mathcal{H}$ la subálgebra de Cartan de $\mathcal{L} = \mathrm{Der}\, A$ que descompone a $A$ como $A = \bigoplus \sum A_{i\alpha}$ y $H \in \mathcal{H}$ una derivación diagonalizable de $A$. Las posibles descomposiciones de $A$ son:

i) $A = A_0 \bigoplus (A_{2\alpha} \oplus A_{-\alpha}) \bigoplus (A_{-2\alpha} \oplus A_{\alpha})$.

ii) $A = A_0 \oplus A_{\alpha} \oplus A_{-\alpha}$.

En el primer caso el subespacio $\mathcal{L}_{2\alpha}$ induce derivaciones en la subálgebra $A_0 \oplus A_{2\alpha} \oplus A_{-2\alpha}$ por lo que existe un elemento $e \in A_0$ con $n(e) = 1$ y $e\mathcal{L}_{2\alpha} = 0$ (lema 4.9 y teorema 4.13). Para el caso ii) esto es obvio. Pasando a $(A, e)$ tenemos que $\mathcal{L}_{2\alpha} \oplus \mathcal{F}H \subseteq \mathrm{Der}\,(A, e)$.

En el caso i) la $\mathbb{Z}_3$ graduación proporciona una base canónica de $(A, e)$ donde $H$ (o un múltiplo suyo) se identifica con $\frac{1}{3}D_{u_1,v_1}$ mientras que $\mathcal{L}_{2\alpha}$ pasa a ser el subespacio de raíz $-(\alpha_1+\alpha_2)$ de Der $(A,e)$. Podemos elegir $D'$ en el de raíz $\alpha_1+\alpha_2$ para que $\mathcal{F}D'+\mathcal{F}H+\mathcal{L}_{2\alpha}$ sea una subálgebra isomorfa a sl(2). Lo mismo puede decirse para el caso ii), excepto que $H$ se identifica con $\frac{1}{3}(D_{u_2,v_2}-D_{u_3,v_3})$, $\mathcal{L}_{2\alpha}$ con el subespacio de raíz $\alpha_1+3\alpha_2$ y $D'$ ha de elegirse en el de raíz $-(\alpha_1+3\alpha_2)$.

En ambos casos $D^3=0=(D')^3$ para cualquier $D\in\mathcal{L}_{2\alpha}$ por lo que $ad^5_{D'}=0=ad^5_D$. Así, el subespacio $\mathrm{End}_{\mathcal{F}}(A)$ es un sl(2)-módulo restringido por adjunción y, por el teorema 5.21, completamente reducible. El submódulo generado por $L_e$ y $R_e$ es trivial ya que estos operadores conmutan con $H$ y $D$. En consecuencia, $[L_e,D']=0=[R_e,D']$ y, por lo tanto, $D'\in\mathrm{Der}\,A$.

QED

El teoerma anterior nos muestra una interesante restricción que cumplen las álgebras que estudiaremos. En lo que sigue $A$ denotará un álgebra de composición, $\mathcal{L}=\mathrm{Der}\,A$, $\mathcal{H}=\mathcal{F}H$ una subálgebra de Cartan de $\mathcal{L}$ con $H$ diagonalizable, y supondremos que $\mathcal{L}$ es resoluble. Como es habitual, el proceso para acotar $\dim\mathrm{Der}\,A$ depende de si $\mathcal{H}$ es corta o larga.

**Proposición 5.34.** *Si $\mathcal{H}$ es corta entonces* $\dim\mathrm{Der}\,A\le 4$ *y* $[\mathrm{Der}\,A,\mathrm{Der}\,A]$ *la forman derivaciones nilpotentes.*

*Demostración.* Sea $A=\sum_{i=-2}^{2}A_i$ la descomposición de $A$ en subespacios fundamentales para $H$ (o un múltiplo suyo) y $\mathcal{L}=\sum\mathcal{L}_i$ la descomposición de $\mathcal{L}$ respecto de $ad_H$. Ya que por el teorema anterior $\mathcal{L}_{\pm2}=0$, la proposición será consecuencia de las siguientes desigualdades:

$$\text{(A)}\ \dim(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_{-1})\le 2 \qquad \text{(B)}\ \dim(\mathcal{L}_3+\mathcal{L}_{-3})\le 1.$$

(notemos que si car$F=7$ los subespacios $\mathcal{L}_{\pm4}$ se corresponden con $\mathcal{L}_{\mp3}$, mientras que si car$\mathcal{F}>7$ entonces es inmediato que $\mathcal{L}_{\pm4}=0$).

Empecemos observando que si $D \in \mathcal{L}_1$ y $A_1D = 0$ entonces $D = 0$. En efecto, por antisimetría $A_{-2}D = 0$ y, como también $A_2D = 0$, entonces $A_0D = (A_2 + A_{-2})^2D = 0$. De nuevo por antisimetría $A_{-1}D = 0$. De este modo queda probado que la aplicación $D \mapsto D|_{A_1}$ de $\mathcal{L}_1$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(A_1, A_2)$ es inyectiva y, en consecuencia, que $\dim \mathcal{L}_1 \leq 2$. Análogamente $\dim \mathcal{L}_{-1} \leq 2$. Supongamos que $\dim \mathcal{L}_1 = 2$ y $\mathcal{L}_{-1} \neq 0$. En tal caso dada $0 \neq D' \in \mathcal{L}_{-1}$ podemos escoger $D \in \mathcal{L}_1$ de tal modo que $A_2D'D \neq 0$ –al igual que antes $A_2D' = 0$ implica $D' = 0$– pero como al ser $\mathcal{L}$ resoluble $[\mathcal{L}_{-1}, \mathcal{L}_1] = 0$, entonces $0 \neq A_2D'D = A_2DD' = 0$, lo que no es posible. Esto demuestra la desigualdad (A).

Para probar la desigualdad (B) pasaremos a un álgebra Hurwitz. Claramente $A_0\mathcal{L}_{\pm 3} = 0$, por lo que $\mathcal{L}_{\pm 3} \subseteq \mathrm{Der}\,(A, e)$ para cualquier $e \in A_0$ con $n(e) = 1$. También $H \in \mathrm{Der}\,(A, e)$, de hecho puede identificarse con $\frac{1}{3}D_{u_1,v_1}$. Los elementos de $\mathcal{L}_3$ son combinación de vectores de raíces $-\alpha_1$ y $-(2\alpha_1 + 3\alpha_2)$ mientras que los de $\mathcal{L}_{-3}$ lo son de vectores asociados a raíces $\alpha_1$ y $2\alpha_1 + 3\alpha_2$. Como $[\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_{-3}] = 0$, es inmediato obsevar que $\mathcal{L}_3$ *o* $\mathcal{L}_{-3} = 0$. Por último, si $\dim \mathcal{L}_3$ fuese 2 entonces una argumentación similar a la esgrimida en la demostración del teorema anterior nos diría que $\mathrm{Der}\, A$ no es resoluble, lo cual es falso.

QED

Centrémonos, pues, en la situación en que $\mathcal{H}$ es larga y la descomposición de $A$ es $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_{-1}$ respecto de $H$. Aquí $\mathcal{L} = \mathrm{Der}\, A = \mathcal{F}H \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_{-1}$.

**Lema 5.35.** *Si* $\mathcal{L}_1$ *o* $\mathcal{L}_{-1} = 0$ *entonces* $\dim \mathrm{Der}\, A \leq 4$.

*Demostración.* Supongamos, por ejemplo, que $\mathcal{L}_{-1} = 0$. Si $\dim \mathrm{Der}\, A$ fuese $\geq 5$ entonces $\dim \mathcal{L}_1$ sería $\geq 4$. Puesto que $\dim A_1 = 2$ se sigue que para todo

$x \in A_0$ existen $D_x$ y $D'_x$ en $\mathcal{L}_1$ linealmente independientes con $xD_x = 0 = xD'_x$. Si existiese $x \in A_0$ con $\dim alg\langle x\rangle \geq 3$ entonces podríamos encontrar $y \in A_0$ tal que $A_0 = alg\langle x\rangle + \mathcal{F}y$. Ahora bien, al ser $D_x$ y $D'_x$ linealmente independientes y anularse en $alg\langle x\rangle$, es claro que dado $a_1 \in A_1$ existe $D \in \mathcal{L}_1$ con $xD = 0$ y $a_1 = yD$; sin embargo, basta elegir $0 \neq z \in alg\langle x\rangle$ con $zy \in alg\langle x\rangle$ para que $0 = (zy)D = z(yD) = za_1$, es decir $zA_1 = 0$, lo cual es una contradicción en virtud de la proposición 5.13. En consecuencia, $\dim alg\langle x\rangle \leq 2$ $\forall x \in A_0$, o lo que es lo mismo, $A_0$ tiene grado 2 y, por lo tanto, es estándar (teorema 3.8). Sea $e$ la unidad, unidad a un lado o la paraunidad y $\{e, x, y, xy\}$ una base ortogonal. Como antes, dado $a_1 \in A_1$ existe $D \in \mathcal{L}_1$ con $xD = 0$ y $a_1 = yD$; así, $\pm a_1 = (ey)D = e(yD) = ea_1$ y $\pm a_1 = (ye)D = a_1 e$. En consecuencia, $L_e$ y $R_e \in \{id, J\}$ donde $J$ denota la involución estándar de $(A, e)$ y, por lo tanto, $A$ es estándar, lo que es absurdo.

QED

**Lema 5.36.** *No existen simutáneamente $D \in \mathcal{L}_1$ y $\mathcal{D}' \in \mathcal{L}_{-1}$ tales que $D|_{A_{-1}}$ y $D'|_{A_1}$ sean inyectivas.*

*Demostración.* Operaremos por reducción al abusurdo. Sean $D \in \mathcal{L}_1$ y $D' \in \mathcal{L}_{-1}$ con $D|_{A_{-1}}$ y $D'|_{A_1}$ inyectivas. Por antisimería, $A_0 D$ y $A_0 D'$ tienen dimensión 2, por lo que $\dim A_0 \cap \ker D = 2 = \dim A_0 \cap \ker D'$. Así, $0 = (A_{-1}D')D = (A_{-1}D)D'$ implica que $A_0 \cap \ker D' = A_{-1}D$. Como $\forall x \in A_0 \cap \ker D'$ se tiene que $(xD)D' = xD'D = 0$ y $D'|_{A_1}$ es inyectiva, es evidente que $A_0 \cap \ker D' = A_0 \cap \ker D$. Por lo tanto, $D^2 = 0$ y, en consecuencia, $(xD)(yD) = 0$ $\forall x, y \in A$. En particular, $A_1(A_{-1}D) = (A_0 D)(A_{-1}D) = 0$, de donde, por la proposición 5.13, $A_{-1}D = 0$, lo que es absurdo.

QED

Por último,

**Teorema 5.37.** *Si* $\mathcal{H}$ *es larga entonces* $\dim \operatorname{Der} A \leq 4$ *y* $[\operatorname{Der} A, \operatorname{Der} A]$ *está formada por derivaciones nilpotentes.*

*Demostración.* Los dos lemas anteriores permiten suponer que $\mathcal{L}_{-1} \neq 0 \neq \mathcal{L}_1$ y que, por ejemplo, existe $D \in \mathcal{L}_1$ tal que $\dim A_0 \cap \ker D = 3$. Los siguientes pasos conducen al resultado:

1) Existe un elemento $e' \in A_0$ con $n(e') = 1$ y $e'D = 0$, y una base canónica de $(A, e')$ de tal modo que $A_1 = \langle u_2, v_3 \rangle$, $A_{-1} = \langle u_3, v_2 \rangle$ y en la cual $D$ se identifica con $\frac{1}{3}D_{u_2,v_1}$: Esto se obtiene tras un razonamiento como el previo al teorema 5.25.

2) Existen $a$ y $b \in A_0$ con $n(a) = 1 = n(b)$ de tal modo que $R_a|_{A_1} = \alpha id$ y $L_b|_{A_1} = \beta id$: Esto es consecuencia de la proposición 5.13.

3) $aD = 0 = bD$: En efecto, $0 = e'(u_3D) = (e'u_3)D$ implica que $e'u_3 = \lambda u_3$ para algún $0 \neq \lambda \in \mathcal{F}$; así, $0 = \beta^{-1}(u_3D) = (bu_3)D = (bD)u_3 = \lambda(bD)e' \circ u_3$. Ahora bien, como $bD \in \langle u_2, v_3 \rangle$ se sigue que $bD = 0$. De igual modo $aD = 0$.

4) Existe una base canónica $\{e_1, e_2, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ en el álgebra Hurwitz $(A, \circ)$, donde $x \circ y = (xR_a^{-1})(yL_b^{-1})$, en la cual $D$ se identifica con $\frac{1}{3}D_{u_2,v_1}$, $A_1 = \langle u_2, v_3 \rangle$ y $A_{-1} = \langle u_3, v_2 \rangle$: Similar al punto 1).

El elemento $v_1$ es un vector propio de $L_b$ y $R_a$, de hecho

$$bv_1 = -(bv_2)D = \beta^{-1}v_1$$

y análogamente $v_1a = \alpha^{-1}v_1$.

5) $\dim \mathcal{L}_{-1} = 1$: De otro modo, como $\forall D' \in \mathcal{L}_{-1}$ se tiene que $u_2D' = u_1DD' = u_1D'D \in \mathcal{F}v_1$, existiría $D' \in A_{-1}$ con $u_2D' = 0$; en consecuencia,

$u_2A_{-1} + A_{-1}u_2 = u_2a \circ bA_{-1} + A_{-1}a \circ bu_2 = \langle e_1, e_2, v_1\rangle = \ker D \subseteq \ker D'$ y, en particular, $aD' = 0 = bD'$. Puesto que $(u_1D', u_2) = 0$, podemos elegir $D'$ con $u_1D' = u_3$ y, por antisimetría $v_3D' = -v_1$. Ahora bien,

$$-\alpha v_1 = (v_3a)D' = (v_3D')a = -v_1a = -\alpha^{-1}v_1$$

y análogamente $\beta v_1 = \beta^{-1}v_1$, es decir, $\alpha = 1/\alpha$ y $\beta = 1/\beta$. Sin embargo, por la forma de $R_a$ y $L_b$, esto permitiría que una subálgebra sl(2) de $\mathrm{Der}\,(A, \circ)$ pasase a $\mathrm{Der}\,A$, lo que no es posible.

Para concluir la demostración basta probar que $\dim \mathcal{L}_1 \leq 2$. Si existiese $0 \neq D' \in \mathcal{L}_{-1}$ tal que $D'|_{A_1}$ no fuese inyectiva entonces los cinco pasos anteriores aplicados a $\mathcal{L}_1$ en lugar de $\mathcal{L}_{-1}$ mostrarían que $\dim \mathcal{L}_1 = 1$. Así pues, podemos suponer que existe $D' \in \mathcal{L}_{-1}$ con $D'|_{A_1}$ inyectiva y que, por el lema previo, ninguna derivación $\bar{D} \in \mathcal{L}_1$ verifica que $\bar{D}|_{A_{-1}}$ es inyectiva. Resulta claro que, por antisimetría, $\dim A_0 \cap \ker D' = 2$ y que la aplicación $\bar{D} \mapsto \bar{D}|_{A_{-1}}$ es inyectiva sobre $\mathcal{L}_1$. Por otro lado, como $0 = A_{-1}D'\bar{D} = A_{-1}\bar{D}D'$ se tiene que $\bar{D}|_{A_{-1}}$ puede verse como un elemento de $\mathrm{Hom}(A_{-1}, A_0 \cap \ker D')$, es decir, $\mathcal{L}_1$ induce aplicaciones no inyectivas entre espacios de dimensión 2. Esto sólamente puede ocurrir si $\dim\langle \bar{D}|_{A_{-1}} \mid \bar{D} \in \mathcal{L}_1\rangle \leq 2$, por lo que $\dim \mathcal{L}_1 \leq 2$ y $\dim \mathrm{Der}\, A \leq 4$.

QED

# 6. Rango toral cero

En esta sección mostraremos que si $A$ es un álgebra de composición cuya álgebra de derivaciones actúa nilpotentemente entonces $\dim \mathrm{Der}\, A \leq 6$ (teorema 5.7). Este resultado es el punto final de nuestro estudio de las álgebras de composición a partir de su álgebra de derivaciones.

El teorema de Engel para álgebras de Lie nos asegura que existe un elemento $a \in A$ con $a(\operatorname{Der} A) = 0$. Si la norma de $a$ no es nula entonces, por antisimetría, existiría otro elemento ortogonal con $a$ anulado por $\operatorname{Der} A$; ahora es fácil escoger un elemento de norma nula anulado por $\operatorname{Der} A$. Así pues, en lo que sigue, nos ocuparemos del caso en que $n(a) = 0$. Mantendremos la hipótesis de que el cuerpo base es algebraicamente cerrado.

La siguiente proposición será de utilidad:

**Proposición 5.38.** *Sea $A$ un álgebra de composición de dimensión 8 sobre un cuerpo arbirario y $x, y \in A$ dos elementos no nulos con $n(x) = 0 = n(y)$. Puede ocurrir:*

i) $(x, y) \neq 0$, *en cuyo caso* $\ker L_x \cap \ker L_y = 0$.

ii) $(x, y) = 0$. *Aquí o bien* $\ker L_x = \ker L_y$ *y $x, y$ son proporcionales o bien* $\dim \ker L_x \cap \ker L_y = 2$.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el cuerpo base $\mathcal{F}$ es algebraicamente cerrado.

El punto i) se sigue de que $\ker L_x \cap \ker L_y \subseteq \ker L_{x+y}$. Supongamos pues que $(x, y) = 0$. Consideremos $e \in A$ con $n(e) = 1$ y $(x, e) = 1/2$. Por la forma del producto en $(A, e)$ se tiene que $\ker L_x = (\ker \tilde{L}_{xe})L_e^{-1}$, donde la tilde distingue a los operadores de multiplicación en $(A, e)$. Así, $\ker L_x \cap \ker L_y = (\ker \tilde{L}_{xe} \cap \ker \tilde{L}_{ye})L_e^{-1}$; en consecuencia, demostrar la proposicón, podemos suponer que $A = (A, e)$ y que, como $n(xe) = 0$ y $(xe, e^2) = 1/2$, $x = e_1$ es un idempotente de norma 0. Claramente $\ker \tilde{L}_{e_1} = \langle e_2, v_1, v_2, v_3 \rangle$ para una cierta base canónica e $y = \alpha e_1 + u + v$ con $u \in U(e_1)$ y $v \in V(e_1)$ subespacios de la descomposición de Peirce. Si $u = 0 = v$ entonces $e_1$ e $y$ son proporcionales. Si $u \neq 0 = v$ entonces, salvo cambio de la base canónica, podemos suponer $u = u_1$. El resultado se sigue de que $\dim \ker \tilde{L}_{e_1} \cap \ker \tilde{L}_{e_1+u_1} = 2$. Por último, si $u \neq 0 \neq v$ entonces cambiamos la base canónica para que $y = \alpha e_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + v_1$. Es rutinario comprobar que la proposición se verifica también en este caso.

QED

**Corolario.** *Sea $A$ un álgebra de composición y $S$ una subálgebra de $A$ con $S^2 = 0$. Se tiene que:*

i) $\dim S \leq 2$.

ii) *Si* $\dim S = 2$ *entonces* $xS = 0$ *implica* $x \in S$.

*Demostración.* Para todo $x, y \in S$ se tiene que $S \subseteq \ker L_x \cap \ker L_y$ y $(x, y) = 0$, por lo que, en vista de la proposición anterior, $\dim S \leq 2$. Un argumento similar con operadores $R$ en lugar de $L$ muestra ii).

QED

Volvamos a nuestra álgebra $A$ para la cual $\mathcal{L} = \operatorname{Der} A$ consta de tranformaciones nilpotentes y fijemos $0 \neq a \in A$ con $n(a) = 0$ y $a(\operatorname{Der} A) = 0$. Para este elemento es evidente que tanto $K = \ker L_a$ como $\operatorname{Im} L_a$ (el subespacio imagen de $L_a$) son $\mathcal{L}$-submódulos de dimensión 4 (recordemos que tanto $K$ como $\operatorname{Im} L_a$ son totalmente isótropos). La aplicación $\mathcal{L} \to \mathrm{sl}(K)$, donde $\mathrm{sl}(K)$ denota los endomorfismos de $K$ de traza cero, dada por la restricción es un homomorfismo de álgebras de Lie y por lo tanto

$$\dim \operatorname{Der} A = \dim\{D|_K \mid D \in \mathcal{L}\} + \dim\{D \in \mathcal{L} \mid KD = 0\}. \qquad (5.20)$$

Denotemos por $\mathcal{L}'$ al ideal $\{D \in \mathcal{L} \mid KD = 0\}$ de $\mathcal{L}$. El primer paso para acotar la dimensión de $\mathcal{L}$ es mostrar que $\dim \mathcal{L}' \leq 2$. Fijemos un subespacio $V$ totalmente isótropo tal que $A = K \oplus V$.

**Lema 5.39.** *Para toda $D \in \mathcal{L}'$ no nula se tiene:*

i) $VD \subseteq K$ *y* $DD' = 0\ \forall D' \in \mathcal{L}'$.

ii) $AD$ *es una subálgebra trivial de dimensión* 2.

iii) $\dim \ker D = 6$ *y* $AD = \mathrm{Rad}(\ker D) = \{x \in \ker D \mid (x, \ker D) = 0\}$.

*Demostración.* Por antisimetría $(VD, K) = -(V, KD) = 0$ por lo que $VD \subseteq K$ y $DD' = 0\ \forall D' \in \mathcal{L}'$. En particualr, $D^2 = 0$ y, así, $(xD)(yD) = 0\ \forall x, y$; es decir, $AD$ es una subálgebra trivial de dimensión no superior a 2 (corolario anterior). De nuevo por antisimetría $\dim AD = 2$ y $\dim \ker D = 6$. Es sencillo concluir que $AD \subseteq \mathrm{Rad}(\ker D)$ y que, por dimensiones, se da la igualdad.

QED

**Lema 5.40.** *Sean $D, D'$ y $D'' \in \mathcal{L}'$ no nulas:*

i) $AD = AD' \Leftrightarrow \ker D = \ker D' \Leftrightarrow D$ *y* $D'$ *son proporcionales.*

ii) $V \cap \ker D \cap \ker D' \neq 0$.

i) *Si $D, D'$ y $D''$ son linealmente independientes entonces* $V \cap \ker D \cap \ker D' \cap \ker D'' = 0$.

*Demostración.* i) Empecemos suponiendo que $\ker D = \ker D'$, claramente $AD = \mathrm{Rad}(\ker D) = \mathrm{Rad}(\ker D') = AD'$. Más aún, dado $S$ un suplementario totalmente isótropo de $\ker D$ dual de $AD$ tenemos que $D$ y $D'$ pueden verse como aplicaciones antisimétricas de $S$ en $AD$, por lo que son proporcionales.

Si $AD = AD'$ entonces $AD \subseteq \mathrm{Rad}(\ker D + \ker D')$ por lo que $\dim(\ker D + \ker D') \leq 6$ y así, $\ker D = \ker D'$.

ii) Supongamos que $V \cap \ker D \cap \ker D' = 0$. Podemos elegir una base $\{x_1, \ldots, x_4\}$ de $V$ con $x_1, x_2 \in \ker D$ y $x_3, x_4 \in \ker D'$. De este modo $AD + AD' \subseteq A(D + D')$. Por dimensiones $AD = AD'$, lo cual, por el punto i), es absurdo.

Respecto a iii), supongamos que existe un elemento $0 \neq x \in V$ con $xD = xD' = xD'' = 0$. Podemos escoger $y \in K$ tal que $n(x+y) = 1$; así, $D, D'$ y $D'' \in \operatorname{Der}(A, e)$ donde $e = x + y$. Puesto que $n(e^2) = 1$, es evidente que $e^2 \notin K$ y, en consecuencia, existe $x' \in K$ tal que $(e^2, x') = 1/2$. El elemento $e_1 = x'$ es un idempotente de norma cero anulado por $D, D'$ y $D''$ por lo que, según vimos en el capítulo 1, las aplicaciones $D|_{U(e_1)}$, $D'|_{U(e_1)}$ y $D''|_{U(e_1)}$ pueden considerarse como elementos (linealmente independientes) de $\mathrm{sl}(3)$. Ahora bien, la composición de estas aplicaciones es nula, lo cual no es posible en $\mathrm{sl}(3)$.

QED

Con estos lemas podemos dar la cota para la dimensión de $\mathcal{L}'$.

**Proposición 5.41.** *La dimensión del ideal $\mathcal{L}'$ es $\leq 2$.*

*Demostración.* Procederemos por reducción al absurdo. Sean $D_1, D_2$ y $D_3 \in \mathcal{L}'$ linealmente independientes. Por el lema anterior existe una base $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de $V$ tal que $x_iD_i \neq 0 \neq x_4D_i$ $i = 1, 2, 3$, mientras que el resto de los elementos $x_jD_i$ son nulos.

Los elementos $x_iD_i$ $i = 1, 2, 3$ son proporcionales entre sí. Supongamos lo contrario: sean, por ejemplo, $x_1D_1$ y $x_2D_2$ linealmente independientes. Consideremos $D = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i D_i$ con $0 \neq \alpha_i \in \mathcal{F}$. Claramente $x_iD = \alpha_i x_i D_i$ $i = 1, 2, 3$ y $x_4D_i = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i x_4 D_i$. Puesto que, por el lema 5.39, $\dim AD = 2$ entonces $AD = \langle x_1D_1, x_2D_2 \rangle$ y, en consecuencia, $\sum \alpha_i x_4 D_i \in \langle x_1D_1, x_2D_2 \rangle$ $\forall \alpha_i \neq 0$.

Eligiendo adecuadamente los $\alpha_i$'s se tiene que $x_4D_i \in \langle x_1D_1, x_2D_2\rangle$. En particular, $(x_4D_3, x_3) = 0 = (x_4D_3, x_1) = (x_4D_3, x_2) = (x_4D_3, x_4)$, lo que muestra que $(x_4D_3, V) = 0$ y así, $x_4D_3 = 0$, que no es cierto.

Los elementos $x_4D_i$ $i = 1, 2, 3$ son linealmente independientes. En efecto, de otro modo existirían $\alpha_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, 3$, no todos nulos con $\sum \alpha_i x_4 D_i = 0$ y, por consiguiente, la derivación $D = \sum_{i=1}^3 \alpha_i D_i$ verificaría $\dim AD = 1$, lo cual, en vista del lema 5.39, es absurdo. Análogamente $\forall i = 1, 2, 3$ $x_iD_i$ es linealmente independiente de la familia $\{x_4D_1, x_4D_2, x_4D_3\}$, así $\{x_iD_i, x_4D_1, x_4D_2, x_4D_3\}$ es una base de $K$.

Ahora bien, puesto que los $x_iD_i$ $i = 1, 2, 3$ son proporcionales y también $(xD)(yD) = 0$ $\forall D \in \mathcal{L}'$ se tiene que $(x_1D_1)(x_4D_i) = (x_iD_i)(x_4D_i) = 0$ y $(x_1D_1)^2 = 0$. En consecuencia, $(x_1D_1)K = 0 = K(x_1D_1)$; sin embargo, como $K = \ker L_a$, la proposición 5.38 nos dice que, salvo escalares, $a = x_1D_1$. Así, $(Va)D = (VD)a \subseteq Ka = 0$ $\forall D \in \mathcal{L}'$, por lo que, en vista del lema anterior, $Va \subseteq K$ y, análogamente, $aV \subseteq K$. De este modo, $K = \ker L_a = \ker R_a = \operatorname{Im} L_a = \operatorname{Im} R_a$. Veamos que esto no es posible. En efecto, para cualquier $x \in A$ tenemos que, como $a^2 = (x_1D_1)^2 = 0$,

$$0 = (xa, ax) = 2(x, a)(a, x) - (x^2, a^2) = 2(x, a)^2,$$

de donde $a = 0$, lo que contradice la elección de $a$.

QED

Por último,

**Demostración del teorema 5.7:** Si $\mathcal{L}'$ fuese nulo entonces el teorema se sigue directamente de la igualdad (5.20). Supondremos, pues, que $\mathcal{L}' \neq 0$. Al ser $\mathcal{L}$ nilpotente su centro $Z(\mathcal{L})$ es un ideal esencial, es decir, corta no trivialmente a todo ideal no nulo, por lo tanto existe $D_0 \in \mathcal{L}' \cap Z(\mathcal{L})$.

Para esta derivación $\ker D_0$ e $\operatorname{Im} D_0$ son $\mathcal{L}$-submódulos de dimensiones 6 y 2 respectivamente e $\operatorname{Im} D_0 = \operatorname{Rad}(\ker D_0)$ es un ideal con producto trivial de $\ker D_0$. El álgebra cociente $B = \ker D_0/\operatorname{Im} D_0$ es un álgebra de composición de dimensión 4 sobre la que $\mathcal{L}$ induce derivaciones nilpotentes. Puesto que, por el teorema 4.13 y el lema 4.10, $\operatorname{Der} B \subseteq \operatorname{sl}(2)$, lo anterior nos dice que la imagen de $\mathcal{L}$ en $\operatorname{Der} B$ tiene dimensión no superior a 1 y, en consecuencia, que $\dim\{D \in \mathcal{L} \mid (\ker D_0)D \subseteq \operatorname{Im} D_0\} \geq \dim \mathcal{L} - 1$.

Supongamos que $\dim \mathcal{L} \geq 7$. En este caso la dimensión del anterior conjunto es $\geq 6$. Además, notemos que si $T$ es un suplementario de $\operatorname{Im} D_0$ en $\ker D_0$ entonces la aplicación $x \mapsto L_x|_{\operatorname{Im} D_0}$ de $T$ en $\operatorname{End}_{\mathcal{F}}(\operatorname{Im} D_0)$ es, por el corolario a la proposición 5.38, un isomorfismo de espacios vectoriales. Así, dada $\{x_1, x_2\}$ una base de $\operatorname{Im} D_0$ con $x_1\mathcal{L} = 0$ y $e_{21} \in T$ con $e_{21}x_1 = x_2$, se tiene que cualquier $D \in \mathcal{L}$ tal que $(\ker D_0)D \subseteq \operatorname{Im} D_0$ verifica que $x_2D = (e_{21}x_1)D = (e_{21}D)x_1 = 0$. En particular, $D$ induce una aplicación $D' \in \operatorname{Hom}(B, \operatorname{Im} D_0)$ dada por $\bar{x}D' = xD$ donde $\bar{x} = x + \operatorname{Im} D_0$. El núcleo de la asignación $D \mapsto D'$ lo forman la derivaciones $D$ tales que $(\ker D_0)D = 0$, que por el lema 5.40 son los elementos de $\mathcal{F}D_0$. Concluimos que $\dim\{D' \mid (\ker D_0)D \subseteq \operatorname{Im} D_0\} \geq 5$ y que, al ser $\dim \operatorname{Im} D_0 = 2$, entonces $\forall \bar{x} \in B$ existen $D'_{1,\bar{x}}, D'_{2,\bar{x}}, D'_{3,\bar{x}}$ linealmente independientes tales que $\bar{x}D'_{i,\bar{x}} = 0$ $i = 1,2,3$. Es consecuencia de esto último que dados $\bar{x}, \bar{y} \in B$ existe $0 \neq D'_{\bar{x},\bar{y}}$ tal que $\bar{x}D'_{\bar{x},\bar{y}} = 0 = \bar{y}D'_{\bar{x},\bar{y}}$. Veamos que esto no es posible. En efecto, esta restricción indica que $B$ no posee subálgebras cíclicas de dimensión $\geq 3$ por lo que, por el teorema 3.8, $B$ tiene grado 2 y es estándar. En particular, $B = alg\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle$ para ciertos $\bar{x}, \bar{y} \in B$ y, en consecuencia, $D'_{\bar{x},\bar{y}}$ ha de ser necesariamente nula, que no es cierto.

QED

# Bibliografía

[A 42] A.A. Albert, "Quadratic forms permitting composition", Ann. of Math. **43** (1942), 161-177.

[B-O1 81] G.M. Benkart y J.M. Osborn, "The derivation algebra of a real division algebra", Amer. J. Math. **103** (1981), 1135-1150.

[B-O2 81] G.M. Benkart y J.M. Osborn, "An investigation of real division algebras using derivations", Pacific J. Math. **96** (1981), 265-300.

[B-O3 81] G.M. Benkart y J.M. Osborn, "Representations of rank one Lie algebras of characteristic p", Lecture Notes in Mathematics **933** (1981), 1-37.

[B-B-O 82] G.M. Benkart, D.J. Britten y J.M. Osborn, "Real flexible division algebras", Can. J. Math. **XXXIV**, No. 3 (1982), 550-588.

[B-M 58] R. Bott y J. Milnor, "On the parallelizability of the spheres", Bull. A.M.S. **64** (1958), 87-89.

[C] E. Cartan, *Thèse*, Paris, 1894, p. 94.

[C 14] E. Cartan, "Les groupes réels simples et continus", Ann. de l'Ecole Normale **31** (1914), p. 298.

[Cu] J.A Cuenca, "On one-sided division infinite-dimensional normed real algebras", Publicacions Matemàtiques **36**(1992), 485-488.

[Cu-Rod 95] J.A Cuenca y A. Rodríguez Palacios, "Absolute values on $H^*$-álgebras", Comm. Algebra **23**(5), 1709-1740 (1995).

[D 19] L.E. Dickson, "On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem", Ann. of Math. **20** (1919), 151-171.

[D-KD 78] G. Domokos y S. Kövesi-Domokos, "The algebra of color", J. Math. Phys.**19** (1978), 1477-1481.

[E 88] A. Elduque, "On the color algebra", Algebras Groups Geom. **5** (1988), 395-410.

[E-M 90] A. Elduque y H.C. Myung, "On Okubo algebras", *Forty Years of Rochester Symposium: From Symmetries to Strins*, A. Das, ed., World Scientific Publ., River Edge, New Jersey, (1990), 299-310.

[E-M 91] A. Elduque y H.C. Myung, "Flexible composition algebras and Okubo algebras", Comm. Algebra **19** (1991), 1197-1227.

[E-M 92] A. Elduque y H.C. Myung, "Color algebras and affine connection on $S^6$", J. Algebra **149** (1992), 234-261.

[E-M 93] A. Elduque y H.C. Myung, "On flexible composition algebras", Comm. Algebra **21** (1993), 2481-2505.

[E-M 95] A. Elduque y H.C. Myung, "Colour algebras and Cayley-Dickson algebras", Proc. Royal Soc. Edinburgh **125A** (1995), 1287-1303.

[E-P 94] A. Elduque y J.M. Pérez, "Third power associative composition algebras", Manuscripta Math. **84** (1994), 73-87.

[E-P1] A. Elduque y J.M. Pérez, "Composition algebras with associative bilinear form", aparecerá en Comm. Algebra.

[E-P2] A. Elduque y J.M. Pérez, "Infinite dimensional quadratic forms admitting composition", aparecerá en Proc. Amer. Math. Soc.

[E-P3] A. Elduque y J.M. Pérez, "Composition algebras with large derivation algebras", prepublicación.

[El 83] M.L. El-Mallah, "Sur les algèbres absolument valués qui vérifient l'identité $(x, x, x) = 0$", J. Algebra **80** (1983), 314-322.

[El 87] M.L. El-Mallah, "On finite dimensional absolute valued algebras satisfying $(x, x, x) = 0$", Arch. Math. **49** (1987), 16-22.

[El 90] M.L. El-Mallah, "Absolute valued algebras containing a central idempotent", J. Algebra **128** (1990), 180-187.

[F 88] J.R. Faulkner, "Finding octonion algebras in associative algebras", Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 1027-1030.

[He] I.N. Herstein, *Noncommutative Rings*, The Carus mathematical monographs, No. **15**, The Mathematical Association of America Pub., 1968.

[Ho 40] H. Hopf, "Ein topologischer Beitrag zur reelen Algebra", Commentarii Mathematici Helvetici **13** (1940), 219-239.

[Hum] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras an Representation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1972.

[Hur 98] A. Hurwitz, "Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen", Gott. Nachrichten (1898), 309-316.

[J] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Interscience, New York, 1962.

[J 39] N. Jacobson, "Cayley numbers and simple Lie algebras of type $G$", Duke Math. J. **5** (1939), 775-783.

[J1 58] N. Jacobson, "A note on three-dimensional simple Lie algebras", J. Math. Mech. **7** (1958), 823-831.

[J2 58] N. Jacobson, "Composition algebras and their automorphisms", Rend. Circ. Mat. Palermo **7** serie II (1958), 55-80.

[J 64] N. Jacobson, "Triality and Lie algebras of type $D_4$", Rend. Circ. Mat. Palermo **XIII** serie II (1964), 55-80.

[K 53] I. Kaplansky, "Infinite-dimensional quadratic forms admitting composition", Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 956-960.

[Ke 58] M. Kervaire, "Non-parallelizability of the n sphere for n¿7", Proc. Nat. Acad. Sci. **44** (1958), 280-283.

[M] H.C. Myung, *Malcev-admissible Algebras*, Prog. Math., vol.**64**, Birkhäuser, Boston, 1986.

[M 94] H.C. Myung, *Non Unital Composition Algebras*, Global Analysis Research Center, Lecture Notes Series No. **22**, Seoul, 1994.

[O1 78] S. Okubo, "Pseudo-quaternion and pseudo-octonion algebras", Hadronic J. **1** (1978), 1250-1278.

[O2 78] S. Okubo, "Deformation of the Lie-admissible pseudo-octonion algebra into the octonion algebra", Hadronic. J. **1** (1978), 1383-1431.

[O 81] S. Okubo, "Dimension and classification of general composition algebras", Hadronic J. **4** (1981), 216-273.

[O 82] S. Okubo, "Classification of flexible composition algebras, I and II", Hadronic J. **5** (1982), 1564-1626.

[O 86] S. Okubo, "Construction of non-associative algebras from representation modules of simple Lie algebras", Algebras, Groups and Geometries **3** (1986), 60-127.

[O-M 80] S. Okubo y H.C. Myung, "Some new classes of division algebras", J. Algebra **67** (1980), 479-490.

[O-O1 81] S. Okubo y J.M. Osborn, "Algebras with nondegenerate associative symmetric bilinear form permitting composition", Comm. Algebra **9** (1981), 1233-1261.

[O-O2 81] S. Okubo y J.M. Osborn, "Algebras with nondegenerate associative symmetric bilinear form permitting composition, II", Comm. Algebra **9** (1981), 2015-2073.

[P 93] J.M. Pérez, "On power associative composition algebras", *Non-Associative Algebra and Its Applications*, S. González, ed., Kluwer Academic Publ., 1994.

[Pet 69] H. Petersson, "Eine Identität fünften Grades, der gewisse Isotope von Kompositions-Algebren genügen", Math. Z. **109** (1969), 217-238.

[Pet 71] H. Petersson, "Quasi-composition algebras", Math. Sem. Univ. Hamburg **35** (1971), 215-222.

[Roc 94] A. Rochdi, "Sur les $\mathbb{R}$-algèbres de Jordan non commutatives, de division, de dimension 8, possédant un automorphisme ou une dérivation non triviaux", *Nonassociative Algebra and Its Applications*, S. González, ed., Kluwer Academic Publ., 1994.

[Roc 95] A. Rochdi, "Etude des algèbres réelles de Jordan non commutatives, de division, de dimension 8, dont l'algèbre de Lie des dérivations n'est triviale", J. Algebra **178** (1995), 843-871.

[Rod] A. Rodríguez Palacios, *Números hipercomplejos en dimensión infinita*, Discurso leido en el acto de su recepción en la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada, Granada, 1993.

[Rod 92] A. Rodríguez Palacios, "One-sided division absolute valued algebras", Publicacions Matemàtiques **36** (1992), 925-954.

[Rod 94] A. Rodríguez Palacios, "Absolute valued algebras of degree two", *Non-Associative Algebra and Its Applications*, S. González, ed., Kluwer Academic Publ., 1994.

[Sch] R.D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, New York, 1966.

[Sch 93] R.D. Schafer, "A generalization of the algebra of color", J. Algebra **160** (1993), 93-129.

[Sch 94] R.D. Schafer, "A generalization of the algebra of color. II", J. Algebra **166** (1994), 296-309.

[Se] G.B. Seligman, *Modular Lie Algebras*, Ergebnisse der Mathematik and ihrer Grenzgebiete, Band 40, Springer-Verlag, New York, 1967.

[St 83] C. Stampfli-Rollier, "4-dimensionale quasikompositionsalgebren", Arch. Math. **40** (1983), 516-525.

[U-W 60] K. Urbanik y F. B. Wright, "Absolute valued algebras", Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 861-866.

[Z 30] M. Zorn, "Theorie der alternativen Ringe", Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. **8** (1930), 123-147.

[ZSSS] K.A. Zhevlakov, A.M. Slin'ko, I.P. Shestakov y A.I. Shirshov, *Rings that are Nearly Associative*, Academic Press, New York, 1982.

## SECCIÓN 1 (1996)

1. - MIGUEL GONZÁLEZ, JAVIER OTAL. EMBEDDING CENTRAL-BY-ČERNIKOV GROUPS. CENTRAL PRODUCTS OF ČERNIKOV GROUPS. 1996

2. - JAVIER OTAL, JUAN MANUEL PEÑA. COMPACT CO-ČERNIKOV CC-GROUPS. 1996

3. - M. ALFARO, F. MARCELLÁN, M.L. REZOLA. ESTIMATES FOR JACOBI-SOBOLEV TYPE ORTHOGONAL POLYNOMIALS. 1996

4. - E. ARTAL BARTOLO, J. CARMONA RUBER. ZARISKI PAIRS, FUNDAMENTAL GROUPS AND ALEXANDER POLYNOMIALS. 1996

5. - M. PILAR GÁLLEGO. FITTING PAIRS FROM DIRECT LIMITS AND THE LOCKETT CONJECTURE. 1996

6. - JAVIER OTAL, JUAN MANUEL PEÑA. FITTING CLASSES AND FORMATIONS OF LOCALLY SOLUBLE CC-GROUPS. 1996

7. - J. M. PEÑA. SHAPE PRESERVING REPRESENTATIONS FOR TRIGONOMETRIC POLYNOMIAL CURVES. 1996

8. - BIENVENIDO CUARTERO, JOSÉ E. GALÉ, ARKADII M. SLINKO. LINEARLY COMPACT ALGEBRAIC LIE ALGEBRAS AND COALGEBRAIC LIE COALGEBRAS. 1996

9. - L. AGUD, R.G. CATALÁN. UNICITY THEOREM AND NEW SAMPLING RECOMPOSITIONS. 1996

## SECCIÓN 2

40. - GABRIELA SANSIGRE VIDAL. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES Y MATRICES BLOQUES. 1992

41. - JESÚS MARÍA MONTANER LAVEDÁN. MATRICES DE TOEPLITZ BANDA Y POLINOMIOS ORTOGONALES SOBRE LA CIRCUNFERENCIA UNIDAD. 1992

42. - JUAN JOSÉ TORRÉNS IÑIGO. INTERPOLACIÓN DE SUPERFICIES PARAMÉTRICAS CON DISCONTINUIDADES MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIONES. 1992

43. - MARÍA DOLORES LERÍS LÓPEZ. COMPORTAMIENTO DE LA GEOMETRÍA DE UNA SUCESIÓN A TRAVÉS DE OPERADORES DEL ESPACIO DE BANACH. 1993

44. - VÍCTOR LANCHARES BARRASA. SISTEMAS DINÁMICOS BAJO LA ACCIÓN DEL GRUPO SO(3): EL CASO DE UN HAMILTONIANO CUADRÁTICO. 1993

45. - JESÚS FRANCISCO PALACIAN SUBIELA. TEORÍA DEL SATÉLITE ARTIFICIAL: ARMÓNICOS TESERALES Y SU RELEGACIÓN MEDIANTE SIMPLIFICACIONES ALGEBRÁICAS. 1993

46. - EDERLINDA VIÑUALES GAVÍN. GENERALIZACIÓN DE MÉTODOS DE CÁLCULO Y CORRECCIÓN DE ÓRBITAS DE ESTRELLAS DOBLES VISUALES. 1994

47. - JOSÉ LUIS ANSORENA BARASOAIN. TEORÍA DE PESOS Y DESCOMPOSICIONES ATÓMICAS EN ESPACIOS DE FUNCIONES. 1994

48. - ANA PEÑA ARENAS. PROBLEMAS FINITO-DIMENSIONALES SOBRE LA GEOMETRÍA DE ESPACIOS DE BANACH. 1995

49. - JOSÉ TOMÁS ALCALÁ NALVAIZ. PROBLEMAS DE INTERÉS EN LA REGRESIÓN LINEAL LOCAL MULTIVARIANTE. 1995

50. - CARLOS GÓMEZ-AMBROSI. ESTRUCTURAS DE LIE Y JORDAN EN SUPERÁLGEBRAS ASOCIATIVAS CON SUPERINVOLUCIÓN. 1995

51. - CARMEN ELVIRA DONAZAR. N-TIPOS Y COHOMOTOPIA. 1995

52. - CARLOS ABAD HIRALDO. DETERMINACIÓN DEL ÁPEX PARA EL CÚMULO ESTELAR ABIERTO EN COMA BERENICES. 1996

53. - JOSÉ MARÍA PÉREZ IZQUIERDO. ÁLGEBRAS DE COMPOSICIÓN. 1996

**SECCIÓN 3**

14. - MANUEL GADELLA.OPERADORES NO ACOTADOS Y SUS APLICACIONES EN LA MECÁNICA CUÁNTICA. 1990

15. - M.J. TOMKINSON. FITTING CLASSES OF INFINITE GROUPS. 1990

16. - MARTYN R. DIXON. SOME TOPICS IN THE THEORY OF AUTOMORPHISM GROUPS. 1990

17. - IEKE MOERDIJK. FOLIATIONS, GROUPOIDS AND GROTHENDIECK ETENDUES. 1993

18. - M. MONTSERRAT BRUGUERA. ORDINAL NUMBERS AND DIAMOND AND CLUB AXIOMS. 1993

19. - SALIM MEDDAHI, FRANCISCO JAVIER SAYAS. INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN DE DOMINIO. 1995

**SECCIÓN 4**

4. - M.A. HERNANDEZ VERÓN, M.A. SALANOVA MARTÍNEZ. GRADOS DE CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE UNA CURVA. SU APLICACIÓN AL ESTUDIO DE PROCESOS ITERATIVOS PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. 1991

5. - M.A. HERNÁNDEZ VERÓN, M.A. SALANOVA MARTÍNEZ. LA CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE PROCESOS ITERATIVOS PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES. 1993

**SECCIÓN 5**

21. - MANUEL GADELLA. TERNAS DE GUELFAND, ESPACIOS DE HARDY Y RESONANCIAS. 1990

22. - MARISOL GÓMEZ FERNÁNDEZ, ESTEBAN INDURAIN ERASO, JOSÉ LUIS MENÉNDEZ RODRÍGUEZ. APLICACIONES CONTRACTIVAS EN EL ANÁLISIS MATEMÁTICO. 1993

23. - ESTEBAN INDURAIN ERASO. RELACIONES FUNCIONALES. 1994

**SECCIÓN 6**

1. - ISABEL GOICOECHEA, JUANA MARÍA MARTÍNEZ, MARÍA DEL CARMEN PRADOS. TRABAJANDO CON LOGO LAS FRACCIONES EN EL CICLO SUPERIOR DE E.G.B. 1987

2. - GUY BROUSSEAU. FUNDAMENTOS DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA. 1989

**SECCIÓN 7**

1. - AURORA LACRUZ. K- ÁLGEBRAS COCARTESIANAS. 1989

2. - MIGUEL A. HERNÁNDEZ. CONDICIONES DE CARDANO EN LOS DESARROLLOS EN SERIE EN EL ORIGEN DE LAS FUNCIONES ENTERAS. 1990

3. - JUAN CARLOS JORGE ULECIA. MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA ADITIVOS PARA LA INTEGRACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS STIFF. 1990

4. - OLGA RAQUEL GARCÍA CATALÁN. APLICACIONES DEL TEOREMA DE SHANNON AL CONOCIMIENTO DE PROPIEDADES DE SEÑALES REALES. 1996

5. - LUCÍA AGUD ALBESA. EL TEOREMA DEL MUESTREO Y SUS APLICACIONES. 1996