TESIS DOCTORAL

Sobre invariantes de homotopía propia y sus relaciones

María Teresa Rivas Rodríguez

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TESIS DOCTORAL

Sobre invariantes de homotopía propia y sus relaciones

María Teresa Rivas Rodríguez

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones
2011

Esta tesis doctoral, dirigida por el doctor D. Luis Javier Hernández Paricio, fue leída el 30 de septiembre de 1986, y obtuvo la calificación de Apto "Cum Laude".

Edita: Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-693-6032-3

- Colegio Universitario de la Rioja -

- Universidad de Zaragoza -

"SOBRE INVARIANTES DE HOMOTOPIA PROPIA Y SUS RELACIONES"

Por

María Teresa Rivas Rodríguez

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias (Sección de Matemáticas) bajo la dirección del Dr. D. Luis Javier Hernández Paricio.
(Septiembre 1986).

SECCION DE MATEMATICAS

Para la realización de este trabajo la autora ha contado con una ayuda del Instituto de Estudios Riojanos (I.E.R.), organismo al que quiero expresar mi agradecimiento.

Quiero agradecer al director de esta memoria, Luis Javier Hernández, a quién debo todo lo que se de homotopía propia, además de las enseñanzas, orientación y dedicación que he recibido de su parte, el ánimo y el trato afectivo que me ha brindado en todo momento.

También, a José Ignacio Extremiana, amigo y compañero del Colegio Universitario de la Rioja, todas las sugerencias, apoyo y colaboración que me ha ofrecido durante la realización de este trabajo.

A María Lourdes Rivas, María Dolores Extremiana y José Manuel Gil, la dedicación, cuidado y cariño que han puesto en la pesada tarea de mecanografiado

Deseo hacer extensivo mi agradecimiento a los demás compañeros del Colegio Universitario de la Rioja por las facilidades con que he contado durante la elaboración de esta memoria y a todas aquellas personas que generosamente me han ofrecido su ayuda y comprensión en los momentos difíciles que se han presentado.

INDICE

INTRODUCCION

La presente memoria tiene como objetivo estudiar algunos invariantes de homotopía propia y las relaciones que existen entre ellos. Con esto se intenta establecer una base adecuada sobre la que elaborar un estudio de la extensión y clasificación de aplicaciones propias (tema central de la memoria que está realizando J.I. Extremiana, compañero con el que mantenemos una estrecha colaboración) y que podría resultar interesante de cara a la clasificación de variedades abiertas.

Este tema fué sugerido por el Dr.L.J.Hernández, bajo cuya dirección se ha realizado todo el trabajo, en Octubre de 1 983 cuando inició un curso especial sobre "Elementos de homotopía propia" en el Colegio Universitario de la Rioja.

Al cominenzo de cada uno de los cuatro capítulos de que consta la memoria hemos hecho un breve resumen. No obstante, realizaremos uno aquí, para que el lector pueda tener una idea general sobre el trabajo realizado.

En el Capítulo I se hace un estudio detallado de los grupos de homotopía propia $\underline{\pi}_n$ definidos por Čerin [Ce] y $\underline{\underline{\pi}}_n$ definidos por L.J.Hernández [He.] para espacios topológicos con rayo base o pares propios con rayo base.

Para ello se dan otras definiciones alternativas de estos grupos, considerando como espacio de partida un $(n+1)$-cubo no compacto $I^n \times J$ $(I = [0,1],\ J = [0,+\infty))$ y aplicaciones propias bastante "rígidas" Estas definiciones permiten demostrar muchas propiedades con una formulación geométricamente muy cómoda, como ocurre cuando se elige como espacio de partida el n-cubo compacto I^n para definir los grupos de homotopía de Hurewicz, π_n

En este mismo capítulo se obtiene, tanto para el caso absoluto como para el relativo, que la relación existente entre los grupos anteriormente citados viene dada por una sucesión exacta:

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1} \longrightarrow \underline{\underline{J}}_n \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n \longrightarrow \pi_n \longrightarrow \cdots$$

Por otra parte, se demuestra que, entre otras, existe una acción del primer grupo de homotopía propia absoluta de Čerin, $\underline{\underline{\pi}}_1$, en todos los demás grupos (tanto en el caso absoluto como en el relativo) que además es compatible con la sucesión exacta que los relaciona.

Así como la acción del grupo fundamental en los demás grupos de homotopía de Hurewicz conduce a la interesante noción de n-simplicidad (que en este trabajo llamaremos (π)n-simplicidad), condición que permite dar una interpretación geométrica de los grupos de Hurewicz independiente del punto base, las acciones definidas dan lugar a nociones de $(\underline{\underline{J}})$ n-simplicidad y $(\underline{\underline{\pi}})$ n-simplicidad, con las que se obtienen interpretaciones geométricas de los grupos de homotopía propia $\underline{\mathrm{I}}_n$ y $\underline{\pi}_n$ independientes del rayo base

En 1.984, L.J.Hernández (de quien fueron las ideas originales) junto con J.I.Extremiana y la autora de este trabajo, definieron unas nuevas teorías de (co)homología $(J^*)J_*$ y $(E^*)E_*$ que llamaron (co)homología singular propia y (co)homología final propia respectivamente [E-H-R]. Ambas están definidas en la categoría de los pares propios y aplicaciones propias, y constituyen invariantes del tipo de homotopía propia.

Estas teorías están inspiradas en la teoría de homología singular H_* que W.S.Massey desarrolla en [M] utilizando n-cubos singulares (aplicaciones continuas de un n-cubo compacto en el espacio en cuestión). Con técnicas parecidas a las suyas pero utilizando n-cubos singulares propios (aplicaciones propias de n-cubos compactos o no compactos en el espacio) se obtiene la homología J_* y factorizando por los cubos compactos la E_*.

Estas teorías están relacionadas por una sucesión exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1} \longrightarrow J_{n+1} \longrightarrow E_{n+1} \longrightarrow H_n \longrightarrow \cdots$$

En [E-H-R] se desarrollan algunas propiedades de estas teorías de homología y se definen unos nuevos complejos, los complejos cúbicos propios finitos (espacios construidos con un número finito de cubos compactos o no compactos) inspirados en los complejos simpliciales, pero con los que es posible conseguir espacios no compactos de un modo finito.

Esos nuevos complejos resultan adecuados para estudiar las homologías propias pues en ellos es posible dar un algoritmo de cálculo basado en la estructura esqueletal.

El Capítulo II de la memoria está dedicado a introducir estas teorías y completar algunas de sus propiedades, así como a establecer teoremas de escisión y Mayer-Vietoris para la categoría de los complejos cúbicos propios finitos con hipótesis menos restrictivas, pues en general para estas homologías propias a las condiciones habituales para estos teoremas hay que añadir otras concernientes a finales de Freudenthal de los espacios involucrados.

En toda teoría de homotopía es importante encontrar la relación existente entre grupos de homotopía y grupos de homología. Aquí nos planteamos también este problema y a él está dedicado todo el Capítulo III.

La relación entre los grupos de homotopía de Hurewicz y los de homología singular es ampliamente conocida, viene dada por la aplicación de Hurewicz, que denotamos $\rho_\pi : \pi_n \longrightarrow H_n$, y los respectivos teoremas de Hurewicz para el caso absoluto y relativo

Por otra parte, para el caso absoluto, en [He.], se prueba que los grupos de homología final propia $E_{n+1}(X)$ son isomorfos a $L_n(\hat{X},\infty)$, siendo estos últimos los grupos de homología local de Hu [Hu.1] y $\hat{X}$ la compactificación de Alexandroff de X por el punto ∞. Esto, unido al hecho de que los grupos de Čerin $\underline{\underline{\pi}}_n$ son los de homotopía local de Hu [Hu.1] de la compactificación de Alexandroff del espacio en cuestión (también en el caso relativo), conduce a obtener en [He.] un homomorfismo de

Hurewicz (para el caso absoluto y $n \geq 1$) $\rho_{\underline{\underline{\pi}}} : \underline{\underline{\pi}}_n \longrightarrow E_{n+1}$ que satisface el teorema de Hurewicz. También en [He.] se obtiene para el caso absoluto y $n \geq 1$, un homomorfismo natural de tipo Hurewicz, $\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n \longrightarrow J_{n+1}$ (isomorfismo si los grupos π_r y $\underline{\underline{I}}_{r-1}$ son triviales para $r \leq n$, con $n \geq 2$) que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\rho_\chi"] & \underline{\underline{I}}_n \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\underline{\underline{I}}}"] & \underline{\underline{\pi}}_n \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\underline{\underline{\pi}}}"] & \pi_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1} \arrow[r] & J_{n+1} \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r] & H_n \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

De manera sencilla en el párrafo 1 del Capítulo III se obtiene un homomorfismo de Hurewicz y el correspondiente teorema, entre los grupos $\underline{\underline{\pi}}_n$ y E_{n+1} para el caso relativo y $n \geq 2$

Posteriormente, en el párrafo 2, se define una aplicación de tipo Hurewicz para el caso relativo y $n \geq 1$, $\rho_{\underline{\underline{I}}}$, entre los grupos $\underline{\underline{I}}_n$ y J_{n+1}. Se comprueba que es homomorfismo para $n \geq 2$. Asimismo se observa que hace conmutativo un diagrama análogo al anterior para el caso relativo. También, que para un par propio con un rayo base (X, A, α) de forma que los grupos $\pi_r(X, A, \alpha(0)) = 0$ para cada $r \leq n$, $\underline{\underline{I}}_r(X, A, \alpha) = 0$ para cada $r \leq n-1$, y $\pi_0(X)$, $\pi_0(A)$, $\underline{\underline{I}}_0(X, \alpha)$, $\underline{\underline{I}}_0(A, \alpha)$ son triviales, $\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n(X, A, \alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X, A)$ es un epimorfismo cuyo núcleo contiene al subgrupo generado por los elementos de la forma $\xi - u * \xi$, donde $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(X, A, \alpha)$, $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(A, \alpha)$ y $u * \xi$ denota la acción de u en ξ.

Intuyendo que ésta puede ser efectivamente la forma del núcleo (nótese que no es la habitual), el resto del cápitulo va encaminado a demostrarlo, siguiendo un proceso en cierto modo paralelo al que suele utilizarse para probar el Teorema de Hurewicz entre los grupos π_n y H_n.

Para ello, se estudia otra manera menos "rígida" de definir los grupos $\underline{J}_n$ que la dada en el Capítulo I, aunque se siga utilizando como espacio de partida $I^n \times J$, estructura que aún nos interesa conservar para tener formulaciones geométricas sencillas. Esto permite dar un Teorema de adición de homotopía propia, parecido al clásico, en el que está involucrado el homomorfismo $\pi_{n+1} \longrightarrow \underline{J}_n$. Más adelante se contruyen unos complejos de cadenas parecidos a los de Eilenberg-Blakers para homología singular, que dan lugar a grupos de homología propia que son una especie de puente entre los grupos $\underline{J}_n$ y J_{n+1} y a través de ellos se obtiene finalmente el resultado deseado.

Es bien conocida la importancia de los CW complejos (que aquí llamaremos clásicos), generalización de los complejos simpliciales, en la teoría de homotopía. Nos habíamos planteado el problema de encontrar espacios que generalizaran a los complejos cúbicos propios finitos y a los CW complejos clásicos y que fuesen un marco adecuado para el estudio de la homotopía propia.

Esta generalización se da en el Cápitulo IV, donde se definen los CW complejos propios (intuitivamente, son espacios construidos pegando sucesivamente celdas compactas y no compactas por aplicaciones propias de sus bordes)

En el párrafo 1 se da una definición que no corresponde a esta idea intuitiva (lo que se hace en el párrafo 2 introduciendo los espacios celulares propios y viendo que son equivalentes las dos definiciones) pero con la que se demuestran más fácilmente algunas propiedades básicas.

Entre otras, se prueba que todo subcomplejo de un CW complejo propio finito posee la propiedad absoluta de extensión de homotopía propia en éste.

También se observa que es posible obtener un algoritmo de cálculo de las homologías H_*, J_* y E_*, a través de la estructura esqueletal, para un CW complejo propio regular finito (en el caso de J_* y E_*, debe añadirse la condición de que la dimensión sea menor o igual que 3).

Si X es un CW complejo clásico, X^n el n-esqueleto y $x_0 \in X^n$ el hecho de que $\pi_r(X, X^n, x_0) = 0$ para cada $r \leq n$, permite demostrar de manera sencilla el Teorema de aproximación celular (ambos resultados fueron probados por J.H.C. Whitehead [Wh.2]). Si se obtuviera para los grupos π_r y $\underline{I}_{r-1}$ del par (X, X^n), donde X es un CW-complejo propio, la trivialidad para $r \leq n$, sería fácil entonces demostrar un Teorema de aproximación celular propia. En el caso de los grupos de Hurewicz demostramos que el resultado de Whitehead puede generalizarse sin ninguna restricción, pero en el caso de los grupos $\underline{I}_{r-1}$ sólo se obtiene trivialidad para $r < n$, y ya con algunas restricciones. No obstante, utilizando los nuevos Teoremas de tipo Hurewicz y los grupos de homología propia, se van elaborando una serie de teoremas que permiten dar condiciones suficientes para que exista aproximación celular propia.

* * *

A continuación, incluimos unas pequeñas notas históricas sobre algunos conceptos fundamentales que aparecen en este trabajo

El concepto de homotopía, al menos para aplicaciones del intervalo unidad, es debido a C. Jordan en un artículo de 1.866 [J]. La palabra homotopía fué utilizada en primer lugar por N. Dehn y P. Heegard en un artículo conjunto de 1.907 [D-H]

El grupo fundamental, uno de los conceptos más importantes de la topología algebraica, es debido a H. Poincaré, que habló de él en su "Analysis situs" de 1.895 [Po]. En este mismo artículo dió también varios ejemplos de cálculo, algunas aplicaciones e introdujo el término simplemente conexo. En 1.908, H.Tietze [T] demostró para poliedros diveros teoremas de cálculo del grupo fundamental. Uno de los teoremas de cálculo más importantes, el Teorema de Van Kampen, fué probado originalmente por Seifert y posterior e independientemente por Van Kampen en 1.933 [V.K.2]. H.B. Griffits [Gi.2] en 1.955 vió con un ejemplo que el teorema no es válido para espacios más generales. No obstante, P. Olum [O] en 1.958 y R. Brown [Bro] en 1.967 dieron generalizaciones del teorema.

La noción de grupos de homotopía de dimensión superior es debida a E. Čech [C.1] en 1.932, sin embargo quien los estudió y desarrolló fué W.Hurewicz [Hw 1] en una serie de artículos de los años 1.935-36. Trabajo con ellos como grupos de homotopía de espacios de funciones apropiados y la notación π_n que hoy es habitual es debida a él.

El primero en demostrar que el grupo fundamental actúa en los grupos de homotopía de dimensión superior fué S. Eilenberg [E.1] en 1.939.

Los grupos de homotopía relativa de un espacio topológico, módulo un subespacio, en un punto dado, fueron introducidos en un artículo conjunto por W. Hurewicz y N. E. Steenrod [Hw-S] en 1.941, e independientemente en 1.944 por J.H.C. Whitehead [Wh.1]. Grupos de homotopía de un triple fueron definidos por A.L. Blackers y W.S. Massey en 1.951 [Bl-M].

Seifert y Trelfall [S-T] en 1.934 definieron grupos fundamentales locales de espacios triangulares, que obviamente se generalizaron a grupos de homotopía locales de mayor dimensión. En espacios generales, un metodo para definir grupos fundamentales locales, y por tanto grupos de homotopía local de mayor dimensión, fué sugerido por O.G. Harrold [Ha] en 1.940. Una definición explícita de éstos fué dada por Griffits [Gi.1] en 1.953 y en 1.958 S.T. Hu [Hu.1] definió grupos de homotopía local como grupos de homotopía de Hurewicz de un espacio tangente, que en buenas condiones coinciden con los de Griffits y Harrold.

La utilidad de estos grupos es grande y muy importantes sus aplicaciones al campo de la topología algebraica, la bibliografía al respecto es demasiado extensa como para intentar siquiera resumirla aquí. Con estos conceptos se trabajó siempre, en diferentes categorías, con aplicaciones continuas.

En el estudio de espacios no compactos, el primero en proponer que las hipótesis de homotopía deberían darse en la categoría de las aplicaciones propias mejor que en la de todas las aplicaciones continuas fué L.C. Siebenmann [Si] en 1.970.

Functores del tipo de los grupos de homotopía, pero que son invariantes del tipo de homotopía propia, fueron dados por E.M. Brown en 1.974, [Brw.1] y [Brw-T]. Definió éstos como clases de homotopía propia (relativas a $[0,+\infty)$) de aplicaciones propias de $\underline{S}^n$ ($[0,+\infty)$ junto con una n-esfera distinta pegada en cada entero) en un espacio X.

En [Brw.1] caracterizó las equivalencias de homotopía propia en la categoría de los complejos simpliciales conexos localmente finitos y de dimensión finita en función de estos nuevos grupos y de los π_n. Además hizo cálculos de estos grupos tomando el límite inverso de sitemas inversos de grupos de homotopía clásicos.

En [Brw-T], [Brw-2], y [Brw-M] se dedica a estudiar con estos grupos variedades abiertas.

T.Porter en [Pr.] indica que Waldhausen, en una comunicación privada en 1.980, le había sugerido una idea, en el marco de la pro-homotopía, para construir nuevos grupos de homotopía propia.

Estos grupos, con una traducción geométrica, y algunos más aparecen definidos en un artículo de Z.Čerin [Ce] de 1.980.

Los denota $\underline{\underline{\pi}}_n$ y los relaciona con los grupos de homotopía local de Hu. También relaciona estos grupos y los de Brown con los definidos por Quigley [Q.2] en el marco de la teoría shape. Independientemente, T.Porter obtiene en [Pr.] esta relación.

Grupos de homotopía propia asociados a una teoría de bordismo fueron definidos por E.Domínguez y L.J. Hernández en un artículo conjunto de 1.982 [Dm-He.2].

Posteriormente en 1.984, L.J. Hernández define unos nuevos grupos de homotopía propia, que denota $\underline{\underline{\tau}}_n$ [He.], que junto con los de Čerin y los de Hurewicz son los que se utilizarán, como hemos señalado anteriormente, en la presente memoria.

En cuanto a la homología, los grupos de homología de un poliedro fueron introducidos por Poincaré [Po] en 1.895. La generalización de éstos para el caso relativo fué dada por S. Lefschetz en 1.927. S. Eilenberg, en el prólogo de su artículo "Singular Homology Theory" [E.4], esencial para el desarrollo posterior de la teoría de homología, relaciona los grupos de homología con la teoría de complejos abstractos [L.3], y dice que para construir una teoría de homología para espacios topológicos existen dos métodos. El primero de ellos está basado en el estudio de aplicaciones continuas de un espacio topológico dado en un poliedro. El segundo es opuesto, pues se basa en el estudio de aplicaciones continuas de un poliedro en el espacio topológico dado.

El primer método está ilustrado por el proceso de

Alexandroff-Čech [Al],[C.1], en el que el espacio es enviado sobre los nervios de sus cubrimientos. También en la teoría de Viétoris [Vi.1], en la de Alexander [A.3] y en la de los ciclos regulares de Steenrod [St.] se utilizan métodos de este tipo (Dowker probó en [Dw] que las definiciones de Viétoris y Alexander son equivalentes a las de Čech).

El segundo método conduce a la teoría de homología singular, desarrollada en primer lugar por S. Lefschetz [L.2] en 1.933, utilizando simples singulares (pareja (s.T) donde s es un simple orientado y T una aplicación continua de s en el espacio dado). Parece ser que la idea original fué de Veblen [Ve] en 1.922.

Posteriormente, S. Eilenberg, siguiendo la idea de Lefschetz pero utilizando simples con vértices ordenados, desarrolló más la teoria de homología singular.

La demostración de que los grupos de homología son invariantes del tipo de homotopía fué dada por Veblen [Ve] y Alexander [A.1] (ambos trabajos están realizados en el contexto de homología simplicial de un poliedro).

La sucesión exacta de homología asociada a un par fué formulada por Eilenberg y Steenrod [E-S.1] en 1.945, aunque la idea fué de Hurewicz [Hw.2].

La fórmula para los grupos de homología de la unión de dos poliedros (teorema de Mayer Viétoris) fué dada por Mayer [My] y Viétoris [Vi.2]. La formulación actual del teorema es debida a Eilenberg y Steenrod [E-S 2] en 1.952.

La homología con coeficientes en un grupo fué utilizada en primer lugar por Tietze en 1.908 y por Alexander y Veblen en 1.913 [A-V], todos consideraron el grupo $\mathbb{Z}_2$. La generalización a coeficientes en $\mathbb{Z}_p$, para varios enteros p, fué hecha por Alexander [A.1] en 1.926. Čech [C.2], en 1.935, definió homología con coeficientes en un grupo arbitrario y estableció un teorema de coeficientes universales.

La teoría de cohomología se originó con los pseudocidos de Lefschetz [L.1] en 1.930 y fué desarrollada posteriormente por Alexander [A.2], Whitney (a quien se debe la palabra cohomología) [Wi.] y el propio Lefschetz [L.3].

Grupos de homología local fueron introducidos en primer lugar por E.R. Van Kampen [V.K.1] en su tesis (1.929) y otros por H.B. Griffits [Gi.1] en 1.953 y por F.R. Brahama [Br] en 1.957 mediante procesos de límites. En 1.958 S.T. Hu [Hu.1] introdujo grupos de homología local como grupos de homología de un espacio tangente.

Recientemente (1.980), W.S.Massey [M] desarrolla toda la teoría de homología singular utilizando cubos singulares en lugar de simples singulares y haciendo cociente por los degenerados. Sin embargo, ya habían sido utilizados cubos singulares para desarrollar los grupos de homología por G.W.Whitehead en [W.G.1] donde alude a los trabajos de Eilenberg y Maclane [E-M]de 1.953 y de Serre [Se] de 1.951. Parece,por tanto, que la idea original de construir la homología singular con cubos es de Serre.

Existe una relación natural entre los grupos de homología singular y los grupos de homotopía de Hurewiccz, dada por un homomorfismo natural que en buenas condiciones es isomorfismo (Teorema de Hurewicz, ya citado anterioremente). El teorema fué establecido en términos de homología simplicial y grupos de homotopía absoluta por el propio Hurewicz en 1.935 para poliedros simplemente conexos. Fué S.Eilenberg [E.2] quién en 1.944 demostró que el primer grupo de homología singular es el abelianizado del grupo fundamental y Blakers [Bl] (quién introdujo los grupos de homología relativa que generalizaban a los de Lefschetz) demostró en 1.948 el teorema de Hurewicz para el caso relativo determinando el núcleo del homomorfismo.

Teoremas de tipo Hurewicz se intentan obtener en toda teoría de homotopía.

Así en 1.972, K.Kuperberg [Ku] prueba otro teorema de tipo Hurewicz entre los grupos de homotopía definidos por Borsuk [Bo] (grupos de teoría shape) y los grupos de homología de Viétoris-Čech, para el caso absoluto y dimensión mayor o igual que 2. En 1.979, Y.Kodama y A.Koyama [K-K] demuestran, en este mismo marco de la teoría shape, otro teorema de tipo Hurewicz entre los grupos de homotopía de Quigley [Q.2] y los de homología de Steenrod [St.] para el caso absoluto. Trabajos como los de Mardešic y Ungar [Mr-U] y K.Morita [Mo] dentro de la teoría shape y de M.Raussen [R] en procategorías se refieren también a teoremas de este tipo.

En el marco de la homotopía propia, como se ha citado ya, teoremas de tipo Hurewicz para el caso absoluto han sido establecidos por L.J.Hernández [He.] en 1.984.

Tanto los grupos de homotopía como los de homología se definieron en principio para complejos simpliciales o poliedros, espacios muy sencillos construidos con simples.

El estudio de los complejos simpliciales de dimensión 1 y 2 se remonta al menos a los tiempos de Euler. Un estudio de complejos simpliciales de mayor dimensión puede verse en un artículo de J.B.Listing [Ls] de 1.862. Estos complejos fueron generalizados en varias direcciones.

S.Lefschetz [L.1] en 1.930 trabajó con complejos simpliciales construidos con infinitos simples. Reduciendo condiciones de linealidad se llega a la noción de CW complejos, introducidos por J.H.C.Whitehead [Wh.2] en 1.949.

Los complejos semisimpliciales fueron definidos por S.Eilenberg y J.A.Zilber [E-Z] en 1.950. Otros tipos de complejos, han ido apareciendo posteriormente en la literatura matemática, como los complejos de celdas [Lu-W] y los complejos de bolas [Bu-R-S].

* * *

<u>Nota</u>.- La memoria está ordenada por capítulos y éstos por párrafos. En cada párrafo se han numerado correlativa y no separadamente las definiciones, teoremas, proposiciones, etc, por orden de aparición. Cuando se hace alguna referencia, si por ejemplo ésta es al Teorema 3, significa que éste se encuentra en el mismo párrafo que estamos leyendo; si es al

Teorema 3.4 significa que es al Teorema 3 del párrafo 4 del mismo capítulo que estamos leyendo; si es al Teorema 3.4.III significa que es al Teorema 3 del párrafo 4 del Capítulo III.

El símbolo # denota el final de una demostración.

Las referencias bibliográficas que se realizan, aparecen en la Bibliografía ordenadas alfabéticamente, dando prioridad en cada letra a los artículos o libros de un solo autor.

CAPITULO I

GRUPOS DE HOMOTOPIA PROPIA

El presente capitulo tiene como objetivo estudiar detalladamente los grupos de homotopia propia $\underline{\underline{\pi}}_n$, definidos por Z.Čerin en [Ce], y $\underline{\underline{\pi}}_n$ definidos por L.J. Hernández en [He.] e independientemente por M G.Brin y T.L.Thikstun en [B-T].

Z.Čerin define, para un espacio X y un rayo α en X, $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ como el conjunto de clases de aplicaciones propias $f\colon (\underline{\underline{S}}^n, \underline{*}) \longrightarrow (X,\alpha)$ tales que $f(*,t) = \alpha(t)$ donde $\underline{\underline{S}}^n = S^n \times J$ y $\underline{*} = * \times J$ con $* \in S^n$, bajo la relación de homotopia propia (rel $\underline{*}$).

Para un par propio (X,A) y un rayo α en A define $\underline{\underline{\pi}}_n\ (X,A,\alpha)$ considerando aplicaciones propias del tipo $(\underline{\underline{D}}^n, \underline{\underline{S}}^{n-1}, \underline{*}) \longrightarrow (X,A,\alpha)$ donde $\underline{\underline{D}}^n = D^n \times J$.

L.J. Hernández define $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ y $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ de manera analoga pero utilizando en el primer caso aplicaciones propias del tipo: $(\underline{\underline{S}}^n_0, \underline{*}) \longrightarrow (X,\alpha)$ donde $\underline{\underline{S}}^n_0 = \underline{\underline{S}}^n / S^n \times 0$, y en el segundo, aplicaciones propias del tipo ($\underline{\underline{D}}^n_0, \underline{\underline{S}}^{n-1}_0, \underline{*}$), donde $\underline{\underline{D}}^n_0 = \underline{\underline{D}}^n / D^n \times 0$.

En los parrafos 2 y 3 damos definiciones alternativas de estos grupos, considerando por ejemplo, para definir $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$, aplicaciones propias del tipo:

$$(I^n \times J,\ \partial I^n \times J,\ \partial I^n \times 0) \longrightarrow (X, \alpha, \alpha(0))$$

y homotopías propias relativas a $(\partial I^n \times J,\ \partial I^n \times 0)$.

Si p es la identificación: $I^n \longrightarrow I^n/\partial I^n \equiv S^n$, como J es localmente compacto, $p \times id_J: I^n \times J \longrightarrow (I^n/\partial I^n) \times J \equiv S^n \times J$ es una identificación propia.

El lector observará rápidamente que $f \longrightarrow f \circ (p \times id_J)$ induce una equivalencia natural entre el funotor $\underline{\underline{\pi}}_n$ definido por Čerin y el que definimos en el párrafo 3, para el caso absoluto. Consideraciones parecidas conducen a obsevar que lo mismo ocurre en el caso relativo y tambien para $\underline{\underline{\tau}}_n$.

Un motivo para preferir, en principio, las definiciones que damos para estos grupos utilizando como espacio de partida $I^n \times J$ y aplicaciones propias bastante "rígidas", comparables a la definición de los grupos de Hurewicz π_n que puede verse por ejemplo en 2.IV y 3.IV de [Hu.2], es que la demostracion de muchas propiedades puede hacerse con una formulacion geométricamente muy cómoda, y por otra parte son adecuadas para el desarrollo de capitulos posteriores .

En el párrafo 4 demostramos que la relación existente entre estos grupos y los de Hurewicz viene dada por una sucesión exacta :

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1} \longrightarrow \underline{\underline{\tau}}_n \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n \longrightarrow \pi_n \longrightarrow \cdots$$

tanto para el caso absoluto como para el relativo.

En los párrafos 5,6 y 7 se analiza el papel que juega el rayo base en la definición de estos grupos, obteniendose una acción de $\underline{\underline{\pi}}_1$ (incluso en toda la sucesión exacta anterior), que da lugar a conceptos de $\underline{\underline{\tau}}$-simplicidad y $\underline{\underline{\pi}}$-simplicidad, interesantes en la medida en que son condiciones que permitirán dar interpretaciones geométricas de estos grupos independientes del rayo base.

1.- Notación y preliminares

I es el intervalo cerrado $[0,1]$

$I^n = I \times \overset{n}{\overbrace{\ldots}} \times I$, $I^0 = \{0\}$

J es el intervalo semiabierto $[0,+\infty)$

$J^n = J \times \overset{n}{\overbrace{\ldots}} \times J$

$\mathbb{R}$ es la recta real

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \overset{n}{\overbrace{\ldots}} \times \mathbb{R}$

D^n es la n-bola unidad

S^n es la n-esfera unidad

Llamaremos n-cubo propio a $K_1 \times \ldots \times K_n$ donde $K_i = I$ ó J para todo $i = 1,\ldots,n$ (compacto si para todo $i = 1,\ldots,n$, $K_i = I$ y no compacto en otro caso).

Denotaremos $\partial(K_1 \times \ldots \times K_n)$ (y leeremos borde de $K_1 \times \ldots \times K_n$) a $\{ (t_1,\ldots,t_n) \in K_1 \times \ldots \times K_n \mid$ existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tal que, $t_i = 0$ ó 1 si $K_i = I$ ó bien $t_i = 0$ si $K_i = J \}$

int A se leerá interior de A.

cl A se leerá clausura de A.

Fr A se leerá frontera de A.

En general a las aplicaciones continuas entre espacios topológicos las llamaremos sencillamente aplicaciones y sólo emplearemos la palabra continua para el caso en el que deseemos resaltar por algún motivo este hecho

Tanto en este capítulo como en posteriores trabajaremos en diversas categorías :

1.- La categoría de los espacios topológicos y aplicaciones propias (ver [Dm-He 1])

Definición 1.- Sean X , Y espacios topológicos. Diremos que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es propia sii es continua y $f^{-1}(K)$ es compacto para todo K compacto-cerrado de Y .

Definición 2.- Dos aplicaciones propias f , $g: X \longrightarrow Y$ se dicen homótopas propiamente ($f \simeq_p g$) sii existe una homotopía entre ellas ($H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $H_0(x) = H(x,0) = f(x)$ y $H_1(x) = H(x,1) = g(x)$ para cada $x \in X$) que es propia .

2 - La categoría de los espacios topológicos con rayo base (X,α). Llamaremos rayo en X a toda aplicación $\alpha: J \longrightarrow X$ propia

Las aplicaciones $f: (X,\alpha) \longrightarrow (Y,\beta)$ son propias y basadas ($f \circ \alpha = \beta$)

Las homotopías H entre aplicaciones f y g son propias y basadas ($H(\alpha(t),s)) = \beta(t)$ para cada $t \in J$ y $s \in I$)

Lo indicamos por $f \simeq_p g$ (rel α)

3 - La categoría de los pares propios (X,A) (A es un subespacio de X y la inclusión $i: A \longrightarrow X$ es propia), y aplicaciones propias entre pares propios $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$

Las homotopías H en esta categoría, entre dos aplicaciones f y g, son propias y verifican $H(A \times I) \subset B$. Lo indicamos por $f \simeq_p g$ (rel(A,B)) . Cuando no haya lugar a confusión indicaremos sencillamente (rel A)

Notar que en este contexto, aunque $f|_A = g|_A$, la notación anterior no significa que la homotopía H sea necesariamente estacionaria en A ($H(a,t) = f(a) = g(a)$ para cada $a \in A$).

4 - La categoría de los pares propios con rayo base (X,A,α) (a los que a veces llamaremos también triples propios, donde (X,A) es un par propio y α un rayo en A) y aplicaciones propias $f: (X,A,\alpha) \longrightarrow (Y,B,\beta)$ (aplicaciones propias entre pares propios basadas)

Las homotopías entre aplicaciones f y g, en esta categoría verifican las condiciones de 3) y además son basadas. Lo indicamos por $f \simeq_p g$ (rel $((A,\alpha),(B,\beta))$) Cuando no haya lugar a confusión solamente escribiremos $f \simeq_p g$ (rel(A,α))

De manera análoga se describen las categorías de triples propios, triples propios basados, etc., junto con sus correspondientes categorías homotópicas

$F(X)$ denotará el conjunto de los finales propios de X , es decir, las clases de homotopía propia de aplicaciones propias $f: J \longrightarrow X$.

Utilizaremos los siguientes resultados sobre aplicaciones propias

<u>**Proposición 3**</u>.- Sean $f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow Z$ aplicaciones continuas:

i) Si f y g son propias entonces $g \circ f$ es propia

ii) Si f es suprayectiva y $g \circ f$ es propia, entonces g es propia.

iii) Si g es inyectiva y $g \circ f$ es propia, entonces f es propia

<u>**Proposición 4**</u>.- (Lema de pegado propio)

Sean A y B subespacios propios cerrados de X tales que $X = A \cup B$ y $f_1: A \longrightarrow Y$ y $f_2: B \longrightarrow Y$ aplicaciones propias con $f_1|_{A \cap B} = f_2|_{A \cap B}$.

Entonces, la aplicación $f: X \longrightarrow Y$ definida por $f|_A = f_1$ y $f|_B = f_2$ es propia.

<u>**Proposición 5**</u>.- Sea $f: X \longrightarrow Y$ continua y $\hat{f}: \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$ la aplicación inducida entre las compactificaciones de Alexandroff de X e Y

Entonces, f es propia si y sólo si $\hat{f}$ es continua

<u>**Proposición 6**</u>.- Sean $f_i: X_i \longrightarrow Y_i$, $i \in \mathcal{A}$, una familia de aplicaciones entre dos familias de espacios. Entonces, la aplicación definida entre los respectivos productos

$\Pi f_i: \Pi X_i \longrightarrow \Pi Y_i$ por $\{x_i\} \longrightarrow \{f_i(x_i)\}$, es propia si y sólo si para cada $i \in \mathcal{A}$, f_i es propia

Proposición 7.- Sean $f_i: X \longrightarrow X_i$, $i \in \mathcal{A}$, una familia de aplicaciones continuas entre un espacio topológico y una familia de espacios.

Si existe $i \in \mathcal{A}$ tal que f_i es propia, entonces la aplicación $\Delta f_i: X \longrightarrow \Pi X_i$ dada por $x \longrightarrow \{f_i(x)\}$ es propia .

Nota.- Dada $f: X \longrightarrow Y$ continua , si f es perfecta (o propia) en el sentido de [Du] o [G-M-M] implica que f es propia en el sentido de la Definición 1 .

Si Y es Hausdorff y localmente compacto, las definiciones anteriores son equivalentes

Definición 8.- Sea (X,A) un par propio Diremos que A es un retracto propio de X sii existe una aplicación $r: X \longrightarrow A$ tal que $r \circ i = id_A$ (i es la inclusión de A en X e id_A es la aplicación identidad en A) y r es propia. Llamaremos a r retración propia de X en A

Diremos que A es un retracto por deformación propia si además $i \circ r \simeq_p id_X$.

Y si la homotopía propia $H: X \times I \longrightarrow X$ entre $i \circ r$ y id_X verifica que $H(a,t) = a$ para todo $a \in A$, diremos que A es un retracto por deformación propia fuerte de X

Definición 9.- Sea $f: X \longrightarrow Y$ propia y A un subespacio propio de X Una aplicación propia $H: A \times I \longrightarrow Y$ se dice homotopía parcial de f si $H_0 = f|_A$

Definición 10.- Sea (X,A) un par propio. Diremos que A tiene la propiedad de extensión de homotopía propia en X respecto a un espacio Y, sii toda homotopía propia parcial $H: A \times I \longrightarrow Y$ de una aplicación propia arbitraria $f: X \longrightarrow Y$, se extiende a una homotopía propia $F: X \times I \longrightarrow Y$ de f

Si A posee la propiedad anterior respecto a cualquier espacio Y diremos que tiene la propiedad absoluta de extensión de homotopía propia en X .

Proposición 11.- Sea $K_1 \times \ldots \times K_n$ un n-cubo propio Entonces $\partial(K_1 \times \ldots \times K_n)$ posee la propiedad absoluta de extensión de homotopía propia en $K_1 \times \ldots \times K_n$.

Demostración.- Si $K_1 \times \ldots \times K_n$ es un n-cubo compacto, aplicar la propiedad absoluta de extensión de homotopía clásica (ver § I [Hu 2])

Si $K_1 \times \ldots \times K_n$ es un n-cubo no compacto, consideramos
$r: K_1 \times \ldots \times K_n \times I \longrightarrow K_1 \times \ldots \times K_n \times 0 \cup \partial(K_1 \times \ldots \times K_n) \times I$
la proyección desde el punto $(1/2, \ldots, 1/2, 2) \in \mathbb{R}^{n+1}$
r es una retraoión y es propia pues es continua y $r^{-1}(K)$, donde K es un compacto cerrado en $K_1 \times \ldots \times K_n \times 0 \cup \partial(K_1 \times \ldots \times K_n) \times I$, es homeomorfo a $K \times I$ y en consecuencia es compacto .

Sea $f: K_1 \times \ldots \times K_n \longrightarrow Y$ una aplicación propia arbitraria y supongamos que existe una homotopía propia parcial de f,

$$H: \partial(K_1 \times \ldots \times K_n) \times I \longrightarrow Y$$

Definimos $G: K_1 \times \ldots \times K_n \times 0 \cup \partial(K_1 \times \ldots \times K_n) \times I \longrightarrow Y$ como:

$$G(x,0) = f(x) \qquad \text{si} \quad x \in K_1 \times \ldots \times K_n$$

$$G(x,t) = H(x,t) \qquad \text{si } (x,t) \in \partial(K_1 \times \ldots \times K_n) \times I$$

El lema de pegado propio demuestra que G es propia

Considerando ahora la aplicación $F: K_1 \times \ldots \times K_n \times I \longrightarrow Y$ dada por $F = G \circ r$, F es propia por serlo G y r, y verifica:

$$F(x,t) = H(x,t) \quad \text{para cada } (x,t) \in \partial(K_1 \times \ldots \times K_n) \times I$$

$$F_0(x) = f(x) \quad \text{para cada} \quad x \in K_1 \times \ldots \times K_n \qquad \#$$

2- El functor $\underline{\underline{I}}$.

Sea X un espacio topológico que admite una aplicación propia $\alpha: J \longrightarrow X$

<u>Definición 1</u>.- Para $n > 0$, $\underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ es el conjunto de las clases de aplicaciones propias

$$f: (I^n \times J,\ \partial I^n \times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X, \alpha, \alpha(0))$$

tales que $f(x,t) = \alpha(t)$ para cada $(x,t) \in \partial I^n \times J$; donde dos aplicaciones f y g del tipo anterior están relacionadas sii existe una homotopía propia

$$H: (I^n \times J \times I,\ \partial I^n \times J \times I,\ I^n \times 0 \times I) \longrightarrow (X, \alpha, \alpha(0))$$

tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y $H(x,t,s) = \alpha(t)$ para cada $(x,t,s) \in \partial I^n \times J \times I$. Denotaremos $f \simeq_p g$ (rel $(\partial I^n \times J,\ I^n \times 0)$)

Estos conjuntos admiten estructura de grupos para $n \geq 1$

(y abelianos para $n \geq 2$) respecto a la operación (+) definida de la siguiente manera:

Si f, g son representantes de $\xi, \eta \in \underline{\underline{J}}_n(X,\alpha)$, $\xi+\eta$ es el elemento de $\underline{\underline{J}}_n(X,\alpha)$ representado por la aplicación propia h dada por:

$$h(t_1,t_2,\ldots,t_n,t) = \begin{cases} f\ (2t_1,t_2,\ldots,t_n,t) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ \\ g\ (2t_1-1,t_2,\ldots,t_n,t) & \text{si } 1/2 \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Observemos que el elemento neutro de $\underline{\underline{J}}_n(X,\alpha)$ es el representado por la aplicación constante rayo α, ϑ_α , definida por $\vartheta_\alpha(x,t) = \alpha(t)$ para cada $(x,t) \in I^n \times J$, y lo denotamos por 0 El elemento inverso de un elemento de $\underline{\underline{J}}_n(X,\alpha)$ representado por f está representado por $\bar{f}$ donde

$$\bar{f}(t_1,t_2,\ \ ,t_n,t) = f(1-t_1,t_2,\ \ ,\ t_n\ ,t)$$

Para propiedades que sólo se refieran al caso no abeliano utilizaremos notación multiplicativa ($\xi\cdot\eta$), y el elemento neutro se denotará 1 .

Para $n = 0$, definimos $\underline{\underline{J}}_0(X,\alpha)$ como el conjunto de las clases de homotopía propia (rel{0}) de las aplicaciones propias del tipo

$$f\cdot\ (J,0) \longrightarrow (X,\alpha(0))$$

Denotaremos por 0 la clase representada por α.

Es evidente que aplicaciones que representan al mismo elemento de $\underline{\underline{J}}_0(X,\alpha)$, también representan el mismo final propio de X Se tiene entonces la aplicación

$$\Psi: \underline{\underline{J}}_0(X,\alpha) \longrightarrow F(X)$$

que envía el elemento de $\underline{\underline{I}}_0(X,\alpha)$ de representante f en el final propio representado por f

Notar que esta aplicación no es en general suprayectiva Considerar por ejemplo $X = \{0,1\} \times J$ y $\alpha: J \longrightarrow X$ la aplicación propia dada por $\alpha(t) = (1,t)$. Claramente $\underline{\underline{I}}_0(X,\alpha) = 0$ y X tiene dos finales propios.

Abora bien, si X es arco-conexo entonces Ψ es suprayectiva.

En efecto, dada una aplicación propia $f: J \longrightarrow X$ representante de un final propio "a" de X, podemos elegir un camino $\beta: I \longrightarrow X$ con $\beta(0) = \alpha(0)$ y $\beta(1) = f(0)$. Entonces la aplicación propia $g:(J,0) \longrightarrow (X,\alpha(0))$ definida por

$$g(t) = \begin{cases} \beta(t) & \text{para } 0 \leq t \leq 1 \\ \\ f(t-1) & \text{para } 1 \leq t \end{cases}$$

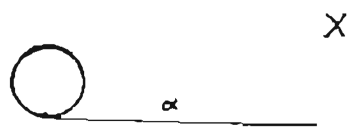
representa un elemento $\xi \in \underline{\underline{I}}_0(X,\alpha)$

La aplicación $H: J \times I \longrightarrow X$

$$H(s,t) = \begin{cases} \beta(s+t) & \text{para } 0 \leq s \leq 1-t \\ \\ f(s+t-1) & \text{para } 1-t \leq s \end{cases}$$

es una homotopía propia entre g y f (aunque no es relativa a $\{0\}$) y por tanto $\Psi(\xi) = a$.

Deducimos de lo anterior que si X es arco-conexo, la condición $\underline{\underline{I}}_0(X,\alpha) = 0$ es suficiente para garantizar que X sólo posee un final propio. Notar que no es necesaria, pues basta considerar el espacio X con el rayo α representados en la siguiente figura:



Claramente, $\underline{\underline{I}}_0(X,\alpha)$ está en correspondencia biyectiva con $\mathbb{Z}$ (números enteros) y X sólo posee un final propio .

En el caso en el que X no es arco-conexo pero $\underline{\underline{I}}_0(X,\alpha) = 0$, sólo se deduce que la arco componente del punto $\alpha(0)$ posee un único final propio .

Consideremos ahora un par propio (X,A) que admite una aplicación propia $\alpha\colon J \longrightarrow A$.

<u>Definición 2</u>.- Para $n \geq 1$, $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ es el conjunto de las clases de aplicaciones propias

$$f\colon (I^n \times J,\ I^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times J, I^n \times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

tales que $f(x,t) = \alpha(t)$ para cada $(x,t) \in T^{n-1} \times J$; donde dos aplicaciones f y g del tipo anterior están relacionadas sii existe una homotopía propia

$$H\colon (I^n \times J \times I,\ I^{n-1} \times J \times I,\ T^{n-1} \times J \times I,\ I^n \times 0 \times I) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y $H(x,t,s) = \alpha(t)$ para cada $(x,t,s) \in T^{n-1} \times J \times I$.

Denotaremos $f \simeq_p g$ (rel. $(I^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times J,\ I^n \times 0)$).

I^{n-1} denota la (n-1) cara de I^n correspondiente a $x_n = 0$, y T^{n-1} la unión del resto de las (n-1) caras de I^n.

Es inmediato comprobar que estos conjuntos admiten estructura de grupos para $n \geq 2$ (y abelianos para $n \geq 3$) con la operación $(+)$ definida al comienzo del párrafo.

Observamos que, como en el caso absoluto, el elemento neutro, que denotamos 0, es el representado por la aplicación constante ϑ_α y el inverso de un elemento representado por f está representado por $\bar{f}$.

Para propiedades que sólo se refieran al caso no abeliano utilizaremos notación multiplicativa.

Proposición 3.- Si $\xi \in \underline{\tau}_n(X,A,\alpha)$ está represantado por f, con $f(I^n \times J) \subset A$ entonces ξ es la clase trivial.

Demostración.- La aplicación

$F:(I^n \times J \times I,\ I^{n-1} \times J \times I, T^{n-1} \times J \times I,\ I^n \times 0 \times I) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$

definida por:

$$F(t_1,t_2,\dots t_{n-1},t_n,t,s) = f\,(t_1,t_2,\dots t_{n-1},s+t_n-st_n,t)$$

es propia y además $F_0 = f$ y $F_1 = \vartheta_\alpha$. #

Consideremos ahora dos triples propios (X,A,α) e (Y,B,β) y una aplicación propia $f\colon (X,A,\alpha) \longrightarrow (Y,B,\beta)$. Esta aplicación induce para cada $n \geq 1$ una transformación (que es homomorfismo para $n \geq 2$):

$$f_* = \underline{\tau}_n(f)\colon \tau_n(X,A,\alpha) \longrightarrow \tau_n(Y,B,\beta)$$

definida por ser $f_*(\xi)$ el elemento de $\underline{\tau}_n(Y,B,\beta)$ representado por $f \circ g$ donde g es un representante cualquiera de ξ.

De manera análoga puede definirse la transformación inducida f_* para el caso absoluto, siendo homomorfismo para $n \geq 1$.

Es inmediato comprobar que para $n \geq 1$ (resp. $n \geq 2$), $\underline{\underline{I}}_n$ es un functor covariante de la categoría de los espacios topológicos (resp. de los pares propios) con rayo base y aplicaciones propias en la categoría de los grupos y homomorfismos.

Además, son invariantes del tipo de homotopía propia.

En efecto, si consideramos dos triples propios (X,A,α) e (Y,B,β) y dos aplicaciones propias $f,g\colon (X,A,\alpha) \longrightarrow (Y,B,\beta)$ homótopas de manera propia (rel. (A,α)), es decir que existe una homotopía propia.

$$H\colon (X \times I\ ,\ A \times I\ ) \longrightarrow (Y,B)$$

tal que $H\ (\alpha(t),s) = \beta(t)$, $H_0 = f$ y $H_1 = g$

entonces, para una aplicación propia

$$h\colon (I^n \times J,\ I^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

que representa a un elemento de $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$, $H \circ (h \times id_I)$ es una homotopía propia (rel ($I^{n-1} \times J, T^{n-1} \times J,\ I^n \times 0$)) entre $f \circ h$ y $g \circ h$. Y por tanto las trasformaciones inducidas $f_*,\ g_*\colon \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(Y,B,\beta)$ coinciden.

Análogamente para el caso absoluto.

__Definición 4__.- Una aplicación propia $f\colon (X,A,\alpha) \longrightarrow (Y,B,\beta)$ es una equivalencia de homotopía propia sii existe una aplicación propia $g\colon (Y,B,\beta) \longrightarrow (X,A,\alpha)$ verificando que $g \circ f \simeq_p id_X$ (rel (A,α)) y $f \circ g \simeq_p id_Y$ (rel (B,β)).

Para el caso absoluto la definición es análoga

Es evidente que si f es una equivalencia de homotopía propia, f_* es biyectiva. Por lo tanto $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ depende sólo del tipo de homotopía propia de (X,A,α). Análogamente para el caso absoluto.

En particular si A es un retracto por deformación propia fuerte de X, la aplicación inducida por la inclusión $i_*: \underline{\underline{I}}_n(A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ es una biyección para cada n y cada $\alpha: J \longrightarrow A$ propia

Dado un triple propio (X,A,α), para cada $n \geq 1$ podemos definir una transformación

$$\partial: \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n-1}(A,\alpha)$$

de la manera siguiente:

Sea ξ un elemento de $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ representado por la aplicación propia

$$f:(I^n \times J,\ I^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

entonces $f|_{I^{n-1} \times J}$ es una aplicación propia del tipo

$$(I^{n-1} \times J,\ \partial I^{n-1} \times J,\ I^{n-1} \times 0) \longrightarrow (A,\alpha,\alpha(0)) \qquad \text{si } n > 1$$

ó bien $$(J,0) \longrightarrow (A,\alpha(0)) \qquad \text{si } n = 1$$

y por tanto representa un elemento η de $\underline{\underline{I}}_{n-1}(A,\alpha)$

Definimos $\partial(\xi) = \eta$

A la transformación ∂ la llamamos operador borde, y es un homomorfismo para $n \geq 2$.

Las inclusiones propias $i:(A,\alpha) \longrightarrow (X,\alpha)$ y $j:(X,\alpha) \longrightarrow (X,A,\alpha)$

inducen i_*, j_* que junto con el operador borde definen una sucesión:

$$\cdots \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{n+1}(X,A,\alpha) \xrightarrow{\partial} \underline{\underline{I}}_n(A,\alpha) \xrightarrow{i_*} \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \xrightarrow{j_*} \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \underline{\underline{I}}_1(X,A,\alpha) \xrightarrow{\partial} \underline{\underline{I}}_0(A,\alpha) \xrightarrow{i_*} \underline{\underline{I}}_0(X,\alpha)$$

que llamamos ($\underline{\underline{I}}$)sucesión de homotopía propia asociada a (X,A,α)

Teorema 6.- La sucesión anterior es exacta.

Demostración.- En esta demostración el 0 indicará la clase trivial en todos los casos.

$\operatorname{Im} i_* \subset \ker j_*$: Para cada $n > 0$ sea f una aplicación propia del tipo $(I^n \times J,\ \partial I^n \times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (A,\alpha,\alpha(0))$ que representa a un elemento $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(A,\alpha)$. Entonces el elemento $j_* i_*(\xi) \in \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ está representado por la aplicación propia $j \circ i \circ f$. Como $j \circ i \circ f\,(I^n \times J) \subset A$ deducimos de la Proposición 3 que $j_* i_*(\xi) = 0$.

$\operatorname{Im} j_* \subset \operatorname{Ker} \partial$: Para cada $n > 0$, sea $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ Elegimos una aplicación propia $f:(I^n \times J,\ \partial I^n \times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$ que represente a ξ. Entonces $\partial j_*(\xi)$ es el elemento de $\underline{\underline{I}}_{n-1}(A,\alpha)$ representado por la aplicación propia $j \circ f\,|_{I^{n-1} \times J} = f\,|_{I^{n-1} \times J}$ pero esta aplicación es ϑ_α. Por lo tanto $\partial j_*(\xi) = 0$

$\operatorname{Im} \partial \subset \operatorname{Ker} i_*$: Para cada $n > 0$, sea f una aplicación propia del tipo $(I^n \times J,\ I^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$ que representa a un elemento $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$. Entonces el elemento $i_*\partial(\xi)$ está representado por la aplicación propia $i \circ f\,|_{I^{n-1} \times J} = g$.

Pero la aplicación propia

$$G: (I^{n-1}\times J\times I,\ \partial I^{n-1}\times J\times I,\ I^{n-1}\times 0\times I) \longrightarrow (A,\alpha,\alpha(0))$$

definida por $G(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},t,s) = f(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},s,t)$ verifica $G_0 = g$, $G_1 = \vartheta_\alpha$ y por tanto $i_*\partial(\xi) = 0$

Ker $j_* \subset$ Im i_*: Sea $\xi \in \underline{\pi}_n(X,\alpha)$ representado por una aplicación propia f. Si $j_*(\xi) = 0$, existe una homotopía propia

$$H: (I^n\times J\times I,\ I^{n-1}\times J\times I, T^{n-1}\times J\times I,\ I^n\times 0\times I) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

tal que $H_0 = f$ y $H_1 = \vartheta_\alpha$.

Entonces definimos

$$G: (I^n\times J\times I,\ \partial I^n\times J\times I,\ I^n\times 0\times I) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$$

por:

$$G(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},t_n,t,s)=\begin{cases} H(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},0,t,2t_n) & \text{si } 0\le t_n\le s/2 \\ H(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},(2t_n-s)/(2-s),t,s) & \text{si } s/2\le t_n\le 1 \end{cases}$$

G es una aplicación propia, $G_0 = f$ y G_1 es una aplicación propia del tipo

$$(I^n\times J,\ \partial I^n\times J,\ I^n\times 0) \longrightarrow (A,\alpha,\alpha(0))$$

y por lo tanto representa un elemento $\eta \in \underline{\pi}_n(A,\alpha)$. La homotopía propia G prueba que $i_*(\eta) = \xi$.

Ker $\partial \subset$ Im j_*: Sea $\xi \in \underline{\pi}_n(X,A,\alpha)$ representado por una aplicación propia f La condición $\partial\xi = 0$ implica que existe una homotopía propia

$$H: (I^{n-1}\times J\times I,\ \partial I^{n-1}\times J\times I,\ I^{n-1}\times 0\times I) \longrightarrow (A,\alpha,\alpha(0))$$

Si $n = 1$, $\quad H: (0\times J\times I, 0\times 0\times I) \longrightarrow (A,\alpha(0))$

tal que $H_0 = f|_{I^{n-1}\times J}$ y $H_1 = \vartheta_\alpha$.

Como $\partial(I^n\times J) = I^{n-1}\times J \cup T^{n-1}\times J \cup I^n\times 0$, podemos definir una homotopía propia parcial $G: \partial(I^n \times J) \times I \longrightarrow A$ por

$G|_{I^{n-1} \times J \times I} = H$, $G|_{\dot{I}^{n-1} \times J \times I} = \vartheta_\alpha$ y $G|_{I^n \times 0 \times I} = \alpha(0)$

Aplicando la propiedad de extensión de homotopía propia, G se extiende a una homotopía propia $F: I^n \times J \times I \longrightarrow X$ con $F_0 = f$

Entonces F_1 es una aplicación propia del tipo

$$(I^n \times J,\ \partial I^n \times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X, \alpha, \alpha(0))$$

y por tanto representa un elemento $\eta \in \underline{\pi}_n(X,\alpha)$. La homotopía propia F demuestra que $j_*(\eta) = \xi$.

Ker $i_* \subset$ Im ∂ : Para $n > 1$, sea f una aplicación propia que representa a $\xi \in \underline{\pi}_{n-1}(A,\alpha)$. La condición $i_*(\xi) = 0$ implica que existe una homotopía propia

$$F: (I^{n-1} \times J \times I, \partial I^{n-1} \times J \times I, I^{n-1} \times 0 \times I) \longrightarrow (X, \alpha, \alpha(0))$$

tal que $F_0 = f$ y $F_1 = \vartheta_\alpha$

Entonces la aplicación propia

$$g: (I^n \times J, I^{n-1} \times J, \dot{I}^{n-1} \times J, I^n \times 0) \longrightarrow (X, A, \alpha, \alpha(0))$$

definida por $g(t_1, t_2, \ldots, t_n, t) = F(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t, t_n)$ representa un elemento η de $\underline{\pi}_n(X,A,\alpha)$. Como $g|_{I^{n-1} \times J} = f$ deducimos que $\partial(\eta) = \xi$.

Para $n = 1$, sea $f: (J, 0) \longrightarrow (A, \alpha(0))$ una aplicación propia que representa a un elemento $\xi \in \underline{\pi}_0(A,\alpha)$. La condición $i_*(\xi) = 0$ implica que existe una homotopía propia

$$F: (J \times I, 0 \times I) \longrightarrow (X, \alpha(0))$$

tal que $F_0 = f$ y $F_1 = \alpha$. Entonces la aplicación propia

$$g: (I \times J, 0 \times J, 1 \times J, I \times 0) \longrightarrow (X, A, \alpha, \alpha(0))$$

definida por $g(t,s) = F(s,t)$ representa un elemento η de $\underline{\pi}_1(X,A,\alpha)$. Como $g|_{0 \times J} = f$ deducimos que $\partial(\eta) = \xi$. #

Es inmediato demostrar la siguiente:

Proposición 7. La ($\underline{\underline{I}}$) sucesión exacta de homotopía propia es functorial respecto a aplicaciones propias entre triples propios del tipo (X,A,α).

Consideremos ahora una cuaterna propia del tipo (X,A,B,α), y las inclusiones propias

$$\begin{array}{llll} i: (A,B,\alpha) \longrightarrow (X,B,\alpha) & & j: (X,B,\alpha) \longrightarrow (X,A,\alpha) \\ i_1: (B,\alpha) \longrightarrow (A,\alpha) & & j_1: (A,\alpha) \longrightarrow (A,B,\alpha) \\ i_2: (B,\alpha) \longrightarrow (X,\alpha) & & j_2: (X,\alpha) \longrightarrow (X,B,\alpha) \\ i_3: (A,\alpha) \longrightarrow (X,\alpha) & & j_3: (X,\alpha) \longrightarrow (X,A,\alpha) \end{array}$$

Sean ∂_1, ∂_2, ∂_3 los operadores bordes de las ($\underline{\underline{I}}$) sucesiones exactas asociadas a (A,B,α), (X,B,α) y (X,A,α) respectivamente.

Definiendo $\partial : \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(A,B,\alpha)$ como $\partial = j_{1*}\partial_3$

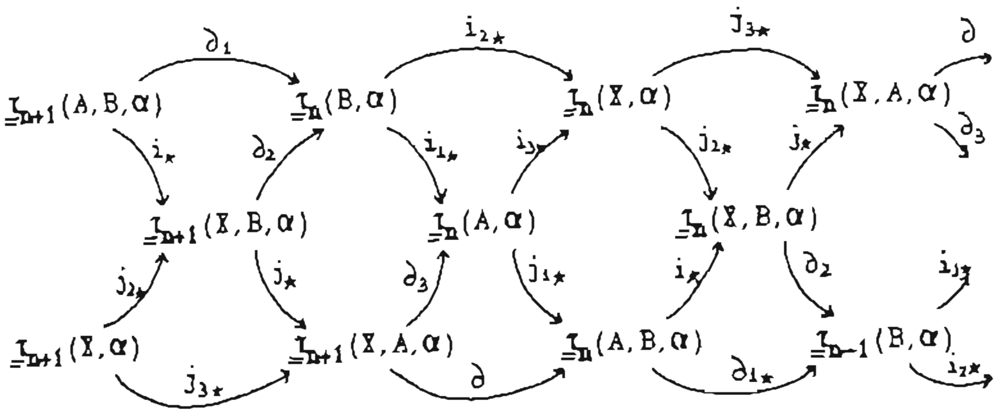
Obtenemos una sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \underline{\underline{I}}_n(A,B,\alpha) \xrightarrow{i_*} \underline{\underline{I}}_n(X,B,\alpha) \xrightarrow{j_*} \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \xrightarrow{\partial} \underline{\underline{I}}_{n-1}(A,B,\alpha) \longrightarrow \cdots$$

que llamaremos ($\underline{\underline{I}}_n$) sucesión de homotopía propia asociada a (X,A,B,α).

Proposición 8.- La sucesión definida anteriormente es exacta y functorial respecto a aplicaciones propias entre cuaternas propias del tipo (X,A,B,α).

Demostración.- Observemos que tenemos el siguiente diagrama sinusoidal conmutativo:



Sabemos por [W] que en estas condiciones

$\ker \partial = \operatorname{Im} j_*$, $\ker i_* = \operatorname{Im} \partial$ y además

$(\ker j_* / \ker j_* \cap \operatorname{Im} i_*) \equiv (\operatorname{Im} i_* / \ker j_* \cap \operatorname{Im} i_*)$

Entonces si $\operatorname{Im} i_* \subset \ker j_*$ ó $\ker j_* \subset \operatorname{Im} i_*$ la sucesión es exacta.

Consideremos ahora las inclusiones propias

$I:(A,B,\alpha) \longrightarrow (A,A,\alpha)$ y $J:(A,A,\alpha) \longrightarrow (X,A,\alpha)$

Como $j \circ i = J \circ I$ las aplicaciones inducidas

$(j \circ i)_*$ y $(J \circ I)_* : \underline{\underline{I}}_n(A,B,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ coinciden

Pero como por la Proposición 3, $\underline{\underline{I}}_n(A,A,\alpha) = 0$ obtenemos que $j_* i_* = 0$ de donde $\operatorname{Im} i_* \subset \ker j_*$.

La segunda afirmación de la proposición es inmediata. #

Utilizaremos la notación $\underline{\underline{I}}_0(X,A,\alpha) = 0$ para indicar que $i_*: \underline{\underline{I}}_0(A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_0(X,\alpha)$ es sobre, es decir que es siempre posible mover dentro de X un rayo que se inicie en $\alpha(0)$ basta un rayo en A iniciado en $\alpha(0)$ y además que el punto $\alpha(0)$ permanezca inmóvil.

Notar que en general i_* no es suprayectiva . Por ejemplo sea $X = \mathbf{R}$, $A = J$ y $\alpha = id_J$. Entonces $\underline{\underline{I}}_0(A,\alpha) = 0$ y $\underline{\underline{I}}_0(X,\alpha)$

tiene dos elementos

Definición 9.- Diremos que un par propio (X,α) es $(\underline{\underline{\pi}})$n-conexo sii $\underline{\underline{\pi}}_q(X,\alpha)$ es trivial para todo $q \leq n$.

Diremos que un triple propio (X,A,α) es $(\underline{\underline{\pi}})$ n-conexo sii $\underline{\underline{\pi}}_q(X,A,\alpha)$ es trivial para todo $q \leq n$.

3.- El funtor $\underline{\underline{\pi}}$.

El desarrollo de este párrafo es análogo al anterior. Las demostraciones se omiten pues se realizan de forma muy parecida a las de los correspondientes teoremas del párrafo 2.

Sea X un espacio topológico que admite una aplicación propia $\alpha: J \longrightarrow X$.

Definición 1.- Para $n \geq 1$, $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ es el conjunto de las clases de aplicaciones propias

$$f:\ (I^n \times J, \partial I^n \times J, \partial I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$$

tales que $f(x,t) = \alpha(t)$ para cada $(x,t) \in \partial I^n \times J$; donde dos aplicaciones f y g del tipo anterior están relacionadas sii existe una homotopía propia

$$H:\ (I^n \times J \times I, \partial I^n \times J \times I, \partial I^n \times 0 \times I) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$$

tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y $H(x,t,s) = \alpha(t)$ para cada $(x,t,s) \in \partial I^n \times J \times I$.

Denotaremos $f \simeq_p g$ (rel. $(\partial I^n \times J,\ \partial I^n \times 0\ )$).

Estos conjuntos admiten una estructura de grupos para $n \geq 1$ (abelianos para $n \geq 2$) definiendo la operación (+) en $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ de manera análoga a la dada en el párrafo 2.

El elemento neutro es el representado por la aplicación ϑ_α y lo denotaremos 0. El inverso de un elemento representado por f está representado por $\bar{f}$. Para el caso no abeliano se utilizará notación multiplicativa y el neutro se denotará por 1.

Para $n=0$, definimos $\underline{\underline{\pi}}_0(X,\alpha)$ como el conjunto de los finales propios de X. Denotamos por 0 el final propio representado por α.

Consideremos ahora un par propio (X,A) que admite una aplicación propia $\alpha: J \longrightarrow A$.

<u>**Definición 2**</u>.- Para $n \geq 1$, $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ es el conjunto de las clases de aplicaciones propias

$$f:(I^n\times J, I^{n-1}\times J, T^{n-1}\times J, T^{n-1}\times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

tales que $f(x,t) = \alpha(t)$ para cada $(x,t) \in T^{n-1}\times J$; donde dos aplicaciones f y g del tipo anterior están relacionadas sii existe una homotopía propia

$$H: (I^n\times J\times I,\ I^{n-1}\times J \times I,\ T^{n-1}\times J \times I,\ T^{n-1}\times 0 \times I) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y $H(x,t,s) = \alpha(t)$ para cada $(x,t,s) \in T^{n-1} \times J \times I$.

Denotaremos $f \simeq_p g$ (rel. $(I^{n-1} \times J\ ,\ T^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times 0)$)

Definiendo la operación (+) como antes, estos conjuntos admiten estructura de grupos para $n \geq 2$ (abelianos para $n \geq 3$). El elemento neutro y el inverso de un elemento de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ son análogos al caso absoluto.

Para $n=2$, también se utilizará notación multiplicativa.

Proposición 3.- Si $\xi \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ está representado por f, con $f(I^n \times J) \subset A$ entonces ξ es la clase trivial.

Como ocurría en el párrafo 1, si consideramos dos triples propios (X,A,α) e (Y,B,β) y una aplicación $f:(X,A,\alpha) \longrightarrow (Y,B,\beta)$ queda inducida de manera natural una transformación

$$\underline{\underline{\pi}}_n(f) = f_*: \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n(Y,B,\beta)$$

que es homomorfismo para $n \geq 2$.

Análogamente se define f_* para el caso absoluto, siendo homomorfismo para $n \geq 1$.

Como ocurría con $\underline{\underline{\tau}}_n$, es inmediato comprobar que para $n \geq 1$ (resp. $n \geq 2$), $\underline{\underline{\pi}}_n$ es un functor covariante de la categoría de los espacios topológicos (resp. de los pares propios) con rayo base y aplicaciones propias en la categoría de los grupos y homomorfismos.

Además también son invariantes del tipo de homotopía propia verificando propiedades análogas a las descritas para los $\underline{\underline{\tau}}_n$.

De manera análoga al caso de los $\underline{\underline{\tau}}_n$, dado un triple propio (X,A,α), para cada $n \geq 1$ podemos definir una transformación

$$\partial : \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n(A,\alpha)$$

que llamaremos operador borde y es un homomorfismo para $n \geq 2$.

Y para cada triple propio del tipo (X,A,α) tenemos una sucesión asociada.

$$\cdots \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_{n+1}(X,A,\alpha) \xrightarrow{\partial} \underline{\underline{\pi}}_n(A,\alpha) \xrightarrow{i_*} \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) \xrightarrow{j_*} \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \xrightarrow{\partial} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{j_*} \underline{\underline{\pi}}_1(X,A,\alpha) \xrightarrow{\partial} \underline{\underline{\pi}}_0(A,\alpha) \xrightarrow{i_*} \underline{\underline{\pi}}_0'(X,\alpha)$$

que llamaremos $(\underline{\underline{\pi}})$ sucesión de homotopía propia asociada a (X,A,α).

Teorema 4.- La sucesión anterior es exacta y functorial respecto a aplicaciones propias entre triples propios del tipo (X,A,α)

Como en el párrafo 2, para una cuaterna propia (X,A,B,α) obtenemos una sucesión

$$\cdots \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n(A,B,\alpha) \xrightarrow{i_*} \underline{\underline{\pi}}_n(X,B,\alpha) \xrightarrow{j_*} \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \xrightarrow{\partial} \underline{\underline{\pi}}_{n-1}(A,B,\alpha) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

que llamaremos $(\underline{\underline{\pi}})$sucesión de homotopía propia asociada a (X,A,B,α) y es exacta y functorial respecto a aplicaciones propias del tipo $f\colon (X,A,B,\alpha) \longrightarrow (X',A',B',\alpha')$

Utilizaremos la notación $\underline{\underline{\pi}}_0(X,A,\alpha) = 0$ para indicar que $i_*\colon \underline{\underline{\pi}}_0(A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_0\ (X,\alpha)$ es suprayectiva. Esto significa que dado un rayo cualquiera en X, siempre es posible moverlo (de manera libre) dentro de X hasta un rayo en A.

Notemos que en general esta aplicación no es suprayectiva. Basta considerar el ejemplo del párrafo 2.

Definición 5.- Diremos que un par propio (X,α) es $(\underline{\underline{\pi}})$ n-conexo sii $\underline{\underline{\pi}}_q(X,\alpha)$ es trivial para todo $q \leq n$

Diremos que un triple propio (X,A,α) es $(\underline{\underline{\pi}})$n-conexo sii

$\underline{\underline{\pi}}_q(X,\alpha)$ es trivial para todo $q \le n$

4.- La sucesión exacta $\pi \longrightarrow \underline{\underline{\tau}} \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}$

Sea X un espacio topológico que admite una aplicación propia $\alpha : J \longrightarrow X$

Existe una transformación natural (que es homomorfismo para $n \ge 1$)

$$\varphi_\alpha : \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) \longrightarrow \underline{\underline{\tau}}_n(X,\alpha)$$

definida de la siguiente manera:

Sea $\xi \in \pi_{n+1}(X,\alpha(0))$ representado por $f:(I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \longrightarrow (X,\alpha(0))$

Consideramos la aplicación propia

$$G \cdot I^n \times I \times 0 \cup I^n \times 0 \times J \cup \partial I^n \times I \times J \longrightarrow X$$

dada por:

$$G(x,t,0) = f(x,t) \qquad \text{si } (x,t) \in I^n \times I$$

$$G(x,0,s) = \alpha(s) \qquad \text{si } (x,s) \in I^n \times J$$

$$G(y,t,s) = \alpha(s) \qquad \text{si } (y,t,s) \in \partial I^n \times I \times J$$

Ahora, utilizando la propiedad de extensión de homotopía propia podemos encontrar una extensión propia de G,

$$F : I^n \times I \times J \longrightarrow X$$

Como F_1, donde $F_1(x,s) = F(x,1,s)$ para cada $(x,s) \in I^n \times J$, es del tipo $(I^n \times J,\ \partial I^n \times I,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$, representa un elemento $\xi' \in \underline{\underline{\tau}}_n(X,\alpha)$

Definimos $\qquad \varphi_\alpha(\xi) = \xi'$

También existe una transformación natural (que es homomorfismo para $n \geq 1$)

$$\Psi : \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$$

definida así:

Sea $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$, representado por una aplicación propia

$$f:(I^n \times J,\ \partial I^n \times I,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$$

Entonces f es del tipo $(I^n \times J, \partial I^n \times I, \partial I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$ y representa a un elemento $\xi' \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$

Definimos $\quad \Psi(\xi) = \xi'$

Por último, consideramos la transformación natural (que es homomorfismo para $n \geq 1$)

$$\eth : \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) \longrightarrow \pi_n(X,\alpha(0))$$

definida del siguiente modo:

Sea $f:(I^n \times J,\ \partial I^n \times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\ \alpha(0))$, una aplicación propia representante de $\xi \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$. Entonces la aplicación $\eth_0 f$, dada por $\eth_0 f(x) = f(x,0)$ para cada $x \in I^n$ es del tipo $(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X,\alpha(0))$ y representa a un elemento ξ' de $\pi_n(X,\alpha(0))$

Definimos $\quad \eth(\xi) = \xi'$

Teorema 1.- Para $n \geq 0$, la siguiente sucesión es exacta .

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) \xrightarrow{\varphi_\alpha} \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \xrightarrow{\Psi} \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) \xrightarrow{\eth} \pi_n(X,\alpha(0)) \longrightarrow \cdots$$

Demostración.- Es inmediato comprobar que $\Psi \circ \varphi_\alpha$, $\eth \circ \Psi$ y $\varphi_\alpha \circ \eth$ son aplicaciones triviales.

Sólo queda demostrar que

$$(1)\ \mathrm{Ker}\ \varphi_\alpha \subset \mathrm{Im}\,\eth$$

$$(2)\ \mathrm{Ker}\,\psi \subset \mathrm{Im}\,\varphi_\alpha$$

$$(3)\ \mathrm{Ker}\,\partial \subset \mathrm{Im}\,\psi$$

Para probar (1) consideramos un elemento $\xi \in \pi_{n+1}(X,\alpha(0))$ representado por una aplicación $f:(I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \longrightarrow (X,\alpha(0))$. Sea F una extensión propia a $I^n \times I \times J$ de la aplicación propia:

$$G:\ I^n \times I \times 0 \cup I^n \times 0 \times J \cup \partial I^n \times I \times J \longrightarrow X$$

definida al comienzo de este párrafo

La condición $\varphi_\alpha(\xi) = 0$ implica que existe una homotopía propia

$$H : I^n \times I \times J \longrightarrow X$$

tal que

$$\begin{array}{lll} H(x,t,0) = \alpha(0) & \text{si } (x,t)\in I^n \times I \\ H(y,t,s) = \alpha(s) & \text{si } (y,t,s)\in \partial I^n \times I \times J \\ H(x,1,s) = \alpha(s) & \text{si } (x,s)\in I^n \times J \\ H(x,0,s) = F_1(x,s) & \text{si } (x,s)\in I^n \times J \end{array}$$

Consideramos ahora la aplicación propia

$$K:\ I^n \times I \times J \longrightarrow X$$

$$K(x,t,s) = \begin{cases} F(x,2t,s) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ \\ H(x,2t-1,s) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Notemos que K representa un elemento $\bar{\xi} \in \underline{\pi}_{n+1}(X,\alpha)$ y $\partial(\bar{\xi})$ está representado por $\partial_0(K)$. Como $\partial_0(K) = f + cte_{\alpha(0)}$, representa el mismo elemento que f en $\pi_{n+1}(X,\alpha(0))$ y por tanto $\partial(\bar{\xi}) = \xi$.

Para probar (2), consideramos una aplicación propia $g:(I^n \times J, \partial I^n \times I, I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$ que representa a $\xi \in \underline{\pi}_n(X,\alpha)$ con $\psi(\xi) = 0$. Entonces existe una homotopía propia

$$F:\ I^n \times J \times I \longrightarrow X$$

satisfaciendo que

$$F(x,s,0) = g(x,s) \qquad \text{si } (x,s) \in I^n \times J$$

$$F(y,s,t) = \alpha(s) \qquad \text{si } (y,s,t) \in \partial I^n \times J \times I$$

$$F(x,s,1) = \alpha(s) \qquad \text{si } (x,s) \in I^n \times J$$

Definiendo ahora $\overline{F}: I^n \times I \times J \longrightarrow X$

por $\overline{F}(x,t,s) = F(x,s,1-t)$

y $f: I^n \times I \longrightarrow X$ por $f(x,t) = \overline{F}(x,t,0)$

f representa un elemento $\xi' \in \pi_{n+1}(X,\alpha(0))$ y $\varphi_\alpha(\xi')$ es el elemento de $\underline{\pi}_n(X,\alpha)$ representado por $\overline{F}_1 = F_0 = g$.

Para probar (3), consideremos un elemento $\overline{\xi} \in \underline{\pi}_n(X,\alpha)$ representado por una aplicación propia

$$h: (I^n \times J,\ \partial I^n \times J,\ \partial I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0)).$$

La condición $\partial(\overline{\xi}) = 0$ implica que existe una homotopía

$$F: I^n \times I \longrightarrow X$$

tal que

$$F(x,0) = \partial_0 h(x) \qquad \text{si } x \in I^n$$

$$F(y,t) = \alpha(0) \qquad \text{si } (y,t) \in \partial I^n \times I$$

$$F(x,1) = \alpha(0) \qquad \text{si } x \in I^n$$

Definiendo ahora la aplicación propia

$$G: I^n \times I \times 0 \cup I^n \times 0 \times J \cup \partial I^n \times I \times J \longrightarrow X$$

como
$$G(x,t,0) = F(x,t) \qquad \text{si } (x,t) \in I^n \times I$$

$$G(x,0,s) = h(x,s) \qquad \text{si } (x,s) \in I^n \times J$$

$$G(y,t,s) = \alpha(s) \qquad \text{si } (y,t,s) \in \partial I^n \times I \times J$$

y aplicando la propiedad de extensión de homotopía propia, obtenemos una extensión propia de G, $H: I^n \times I \times J \longrightarrow X$.

Entonces H_1, definida por $H_1(x,s) = H(x,1,s)$ representa un elemento $\xi \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$.

La homotopía H demuestra que $\Psi(\xi) = \bar{\xi}$. #

Consideremos ahora un par propio (X,A) que admite una aplicación propia $\alpha: J \longrightarrow A$

Existe una transformación natural (homorfismo para $n \geq 2$)

$$\varphi_\alpha : \pi_{n+1}(X,A,\alpha,\alpha(0)) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$$

definida del siguiente modo:

Sea $\xi \in \pi_{n+1}(X,A,\alpha(0))$ representado por una aplicación

$$f: (I^n \times I,\ I^{n-1}\times 0 \times I,\ P^n) \longrightarrow (X,A,\alpha(0))$$

donde P^n denota la unión de las n-caras de I^{n+1} distintas de $I^{n-1}\times 0 \times I$.

Entonces $f|_{I^{n-1}\times 0\times I}$ representa al elemento $\partial(\xi) \in \pi_n(A,\alpha(0))$.

Si consideramos la aplicación propia

$$G: I^{n-1}\times 0\times I\times 0 \cup I^{n-1}\times 0 \times 0\times J \cup \partial I^{n-1}\times 0\times I\times J \longrightarrow A$$

dada por:

$$\begin{array}{lll} G(x,0,t,0) = f(x,0,t) & \text{si } (x,0,t) & \in I^{n-1}\times 0\times I \\ G(x,0,0,s) = \alpha(s) & \text{si } (x,0,s) & \in I^{n-1}\times 0\times J \\ G(y,0,t,s) = \alpha(s) & \text{si } (y,0,t,s) & \in \partial I^{n-1}\times 0\times I\times J \end{array}$$

aplicando la propiedad de extensión de homotopía propia encontramos una extensión propia de G

$$G': I^{n-1}\times 0\times I\times J \longrightarrow A$$

Notemos que $G'_1 : I^{n-1}\times 0\times J \longrightarrow A$ representa al elemento $\varphi_\alpha\partial(\xi) \in \underline{\underline{\pi}}_{n-1}(A,\alpha)$.

Definimos ahora la aplicación propia:

$\bar{G}: I^n\times I\times 0 \cup I^n\times 0\times J \cup \partial I^{n-1}\times I\times I\times J \cup I^{n-1}\times 1\times I\times J \cup I^{n-1}\times 0\times I\times J$-

$\longrightarrow X$

como:

$$
\begin{array}{lll}
\bar{G}(a,t,0) = f(a,t) & \text{si } (a,t) & \in I^n \times I \\
\bar{G}(a,0,s) = \alpha(s) & \text{si } (a,s) & \in I^n \times J \\
\bar{G}(y,r,t,s) = \alpha(s) & \text{si } (y,r,t,s) & \in \partial I^{n-1} \times I \times I \times J \\
\bar{G}(x,1,t,s) = \alpha(s) & \text{si } (x,1,t,s) & \in I^{n-1} \times 1 \times I \times J \\
\bar{G}(x,0,t,s) = G'(x,0,t,s) & \text{si } (x,0,t,s) & \in I^{n-1} \times 0 \times I \times J
\end{array}
$$

Utilizando de nuevo la propiedad de extensión de homotopía propia se extiende $\bar{G}$ a una aplicación propia

$$F\colon I^n \times I \times J \longrightarrow X$$

Como F_1 (con $F_1(x,s) = F(x,1,s)$) es una aplicación propia del tipo

$$(I^n \times J,\ I^{n-1} \times 0 \times J,\ T^{n-1} \times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X, A, \alpha, \alpha(0))$$

representa un elemento $\xi' \in \underline{\underline{\tau}}_n(X,A,\alpha)$

Definimos ahora $\varphi_\alpha(\xi) = \xi'$

Notemos que de la propia definición se deduce inmediatamente que el cuadrado

$$
\begin{array}{ccc}
\pi_{n+1}(X,A,\alpha(0)) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \tau_n(X,A,\alpha) \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
\pi_n(A,\alpha(0)) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \tau_{n-1}(A,\alpha)
\end{array}
$$

es conmutativo.

También pueden definirse de modo análogo al caso absoluto las transformaciones

$$\Psi\colon \underline{\underline{\tau}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$$

$$\vartheta : \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow \pi_n(X,A,\alpha)$$

que son homomorfismos para cada $n \geq 2$.

Resulta inmediato comprobar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\partial"] & \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "\partial"] & \pi_n(X,A,\alpha(0)) \arrow[d, "\partial"] \\
\underline{\underline{I}}_{n-1}(A,\alpha) \arrow[r, "\psi"] & \underline{\underline{\pi}}_{n-1}(A,\alpha) \arrow[r, "\vartheta"] & \pi_{n-1}(A,\alpha(0))
\end{tikzcd}$$

y de manera análoga al caso absoluto puede demostrarse que:

Teorema 2.- La sucesión

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n-1}(X,A,\alpha(0)) \xrightarrow{\varphi_\alpha} \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \xrightarrow{\psi} \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \xrightarrow{\vartheta} \pi_n(X,A,\alpha(0)) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

5.- El papel del rayo base en los grupos $\underline{\underline{I}}_n$ para el caso absoluto. Acción de $\underline{\underline{\pi}}_1$

Sea X un espacio topológico con algún final propio y $\alpha, \beta : J \longrightarrow X$ aplicaciones propias.

Definición 1.- Llamaremos camino entre los rayos α y β a una aplicación propia $\mu : I \times J \longrightarrow X$ tal que $\mu(0,t) = \alpha(t)$ y $\mu(1,t) = \beta(t)$ para cada $t \in I$.

Observemos que un camino entre los rayos α y β es una homotopía propia libre entre ambos. Luego es equivalente asegurar que existe un camino entre dos rayos en X a decir que ambos representan el mismo final propio de X.

Notemos que para cada $t_0 \in J$, la aplicación $\mu^{t_0}: I \longrightarrow X$ dada por $\mu^{t_0}(s) = \mu(s,t_0)$ es un camino en X entre $\alpha(t_0)$ y $\beta(t_0)$.

Si μ y υ son dos caminos entre los rayos α y β, se dice que son homótopos propiamente (rel. $(0 \times J, 1 \times J)$) sii existe una homotopía propia $H : I \times J \times I \longrightarrow X$ tal que $H_0 = \mu$, $H_1 = \upsilon$ y $H(0,t,s) = \alpha(t)$ y $H(1,t,s) = \beta(t)$ para cada $(t,s) \in J \times I$

Sea $\gamma: J \longrightarrow X$ una aplicación propia y ρ un camino entre β y γ. Definimos el camino $\mu \cdot \rho$ entre α y γ como:

$$\begin{cases} \mu(2s,t) & \text{si} \quad 0 \le s \le 1/2 \\ \rho(2s-1,t) & \text{si} \quad 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

Teorema 2.- Para cada $n \geq 1$, todo camino μ entre dos rayos α y β en X induce de una forma natural un isomorfismo

$$\mu_n: \underline{\pi}_n(X,\beta) \longrightarrow \underline{\pi}_n(X,\alpha)$$

que depende únicamente de la clase de homotopía propia de μ (rel$(0 \times J, 1 \times J)$). Además verifica:

1) Si μ es el camino degenerado ϑ_α, μ_n es el automorfismo identidad.

2) Si μ y ρ son caminos entre rayos de X de tal forma que $\mu(1,t) = \rho(0,t)$ para cada $t \in J$, entonces $(\mu \cdot \rho)_n = \mu_n \circ \rho_n$.

3) Para cada camino μ entre dos rayos α y β de X, y cada aplicación propia $f: X \longrightarrow Y$, el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{\Pi}}_n(X,\beta) \arrow[r, "\mu_n"] \arrow[d, "f_*"] & \underline{\underline{\Pi}}_n(X,\alpha) \arrow[d, "f_*"] \\
\underline{\underline{\Pi}}_n(Y,f\circ\beta) \arrow[r, "(f\cdot\mu)_n"] & \underline{\underline{\Pi}}_n(Y,f\circ\alpha)
\end{tikzcd}$$

<u>Demostración</u>.- Dado un camino μ entre α y β, definimos μ_n de la siguiente manera:

Sea $f: (I^n \times J, \partial I^n \times J, I^n \times 0) \longrightarrow (X,\beta,\beta(0))$ una aplicación propia que representa a $\xi \in \underline{\underline{\Pi}}_n(X,\beta)$. Definimos una homotopía propia parcial de f,

$$\phi: \partial(I^n \times J) \times I \longrightarrow X$$

como $\phi(x,t,s) = \mu(1-s,t)$ para cada $(x,t,s) \in \partial(I^n \times J) \times I$ (notemos que para cada $(x,0,s) \in I^n \times 0 \times I$, $\phi(x,0,s) = (\mu^0)^{-1}(s)$)

Aplicando la propiedad de extensión de homotopía propia, encontramos una extensión propia de ϕ,

$$F: I^n \times J \times I \longrightarrow X$$

(A este tipo de homotopías propias que verifican $F_0 = f$ y $F(x,t,s) = \mu(1-s,t)$ para cada $(x,t,s) \in \partial(I^n \times J) \times I$, las llamaremos a partir de este momento homotopías propias de f a través de μ).

Como F_1 es una aplicación propia del tipo

$$(I^n \times J, \partial I^n \times J, I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$$

representa un elemento η de $\underline{\underline{\Pi}}_n(X,\alpha)$

Definimos $\mu_n(\xi) = \eta$

Que $\mu_n(\xi)$ está bien definida y sólo depende de la clase de homotopía propia $(rel(0\times J, 1\times J))$ de μ se deduce inmediatamente del siguiente:

Lema 3.- Sean f y g dos representantes cualesquiera de $\xi \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,\beta)$; μ, ρ dos caminos entre los rayos α y β de X homótopos propiamente (rel $(0\times J, 1\times J)$) y $F,G\colon I^n\times J\times I \longrightarrow X$ homotopías propias de f a través de μ y de g a través de ρ respectivamente. Entonces F_1 y G_1 son homótopas propiamente (rel$(\partial I^n\times J,\ I^n\times 0)$).

Demostración.- Como $f,g\colon(I^n\times J,\ \partial I^n\times J,\ I^n\times 0) \longrightarrow (X,\beta,\beta(0))$ representan a ξ, existe una homotopía propia(rel$(\partial I^n\times J,\ I^n\times 0)$)

$$R\colon I^n\times J\times I \longrightarrow X$$

tal que $R_0 = f$ y $R_1 = g$.

Por hipótesis, existe una homotopía propia (rel$(0\times J, 1\times J)$)

$$l\colon I\times J\times I \longrightarrow X$$

tal que $l_0 = \mu$ y $l_1 = \rho$

Consideramos la aplicación propia

$$\bar{H}\colon I^n\times J\times 0\times I \ \cup \partial(I^n\times J)\times I\times I \longrightarrow X$$

dada por:

$$\bar{H}(x,t,0,s) = R(x,t,s) \qquad \text{si } (x,t,0,s) \in I^n\times J\times 0\times I$$

$$\bar{H}(x,t,r,s) = l(1-r,t,s) \qquad \text{si } (x,t,r,s) \in \partial(I^n\times J)\times I\times I$$

Observamos que

$$\bar{H}_0 = F|_{I^n\times J\times 0\ \cup\,\partial(I^n\times J)\times I}$$

$$\bar{H}_1 = G|_{I^n\times J\times 0\ \cup\,\partial(I^n\times J)\times I}$$

y además $\bar{H}$ es relativa a $(\partial(I^n\times J)\times 0,\ \partial(I^n\times J)\times 1)$

Aplicando la propiedad de extensión de homotopía propia, $\bar{H}$ se extiende a una aplicación propia

$$H\colon I^n\times J\times I\times I \longrightarrow X$$

con $H_0 = F$

$$H_1|_{I^n \times J \times 0 \cup \partial(I^n \times J) \times I} = G|_{I^n \times J \times 0 \cup \partial(I^n \times J) \times I}$$

$$H(x,t,1,s) = \alpha(t) \quad \text{si } (x,t,1,s) \in \partial(I^n \times J) \times 1 \times I$$

y $H_1 \colon I^n \times J \times I \longrightarrow X$ es una homotopía propia de g a través de ρ.

Entonces la aplicación propia

$$h_1 \colon (I^n \times J, \partial I^n \times J, I^n \times 0) \longrightarrow (X, \alpha, \alpha(0))$$

dada por $h_1(x,t) = H_1(x,t,1)$ para cada $(x,t) \in I^n \times J$ es homótopa propiamente (rel $(\partial I^n \times J, I^n \times 0)$) a F_1 (basta considerar la homotopía $H|_{I^n \times J \times 1 \times I}$).

Ahora definimos la aplicación propia

$$M \colon I^n \times J \times I \longrightarrow X$$

como:

$$M(x,t,s) = \begin{cases} G(x,t,1-2s) & \text{si } 0 \le s \le 1/2 \\ \\ H_1(x,t,2s-1) & \text{si } 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

Observemos que $M(x,t,s) = M(x,t,1-s)$ para cada $(x,t,s) \in \partial(I^n \times J) \times I$

Consideramos ahora la aplicación propia

$$N \colon \partial(I^n \times J) \times I \longrightarrow X$$

dada por:

$N(x,t,s,r) = M(x,t,s)$ si $(x,t,s,r) \in I^n \times J \times \partial I \times I$

$N(x,t,s,r) = M(x,t,s-rs)$ si $(x,t,s,r) \in \partial(I^n \times J) \times I \times I$ con $0 \le s \le 1/2$

$N(x,t,s,r) = N(x,t,1-s,r)$ si $(x,t,s,r) \in \partial(I^n \times J) \times I \times I$ con $1/2 \le s \le 1$

Notemos que
$$N_0(x,t,s) = M(x,t,s) \quad \text{si } (x,t,s) \in \partial(I^n \times J \times I)$$
$$N_1(x,t,s) = M(x,t,s) \quad \text{si } (x,t,s) \in I^n \times J \times \partial I$$
$$N_1(x,0,s) = \alpha(0) \quad \text{si } (x,0,s) \in I^n \times 0 \times I$$
$$N_1(x,t,s) = \alpha(t) \quad \text{si } (x,t,s) \in \partial I^n \times J \times I$$

Aplicando de nuevo la propiedad de extensión de homotopía propia,

N se extiende a una aplicación propia

$$L: (I^n \times J \times I) \times I \longrightarrow X$$

Entonces L_1 es una aplicación propia del tipo:

$$(I^n \times J \times I, \partial I^n \times J \times I, I^n \times 0 \times I) \longrightarrow (X, \alpha, \alpha(0))$$

con $\quad L_1(x,t,0) = G_1(x,t) \quad$ para cada $(x,t) \in I^n \times J$

$\qquad L_1(x,t,1) = h_1(x,t) \quad$ para cada $(x,t) \in I^n \times J$

De esto se deduce que h_1 y G_1 (y por lo tanto F_1 y G_1) representan el mismo elemnento de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$. #

En orden a probar el resto de las afirmaciones del Teorema 2, notemos que 1) es inmediata sin más que considerar para una aplicación propia

$$f: (I^n \times J, \partial I^n \times J, I^n \times 0) \longrightarrow (X, \alpha, \alpha(0))$$

la homotopía propia $F: I^n \times J \times I \longrightarrow X$ definida por:

$$F(x,t,s) = f(x,t) \text{ para cada } (x,t,s) \in I^n \times J \times I.$$

2) se deduce inmediatamente de la definición y del Lema 3.

Para probar 3) consideremos un representante g de $\xi \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,\beta)$ y una homotopía F de g a través de μ. Entonces F_1 representa a $\mu_n(\xi) \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$. La aplicación propia $G = f \circ F$, verifica que $G_0 = f \circ g$ y por tanto representa a $f_*(\xi) \in \underline{\underline{\pi}}_n(Y, f \circ \beta)$. Además G es una homotopía de $f \circ g$ a través del camino $f \circ \mu$, luego G_1 representa a $(f \circ \mu)_n(f_*(\xi)) \in \underline{\underline{\pi}}_n(Y, f \circ \alpha)$. Pero $G_1 = f \circ F_1$ representa a $f_* \mu_n(\xi)$, de donde se deduce 3).

Sólo queda demostrar que μ_n es un isomorfismo:

Sean ξ y ξ' dos elementos cualesquiera de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\beta)$ representados por f, g respectivamente. Sean F,G dos homotopías propias de f y g respectivamente a través de μ. Entonces F_1 y G_1 representan a $\mu_n(\xi)$

y $\mu_n(\xi')$.

Si consideramos ahora la homotopía propia:

$$H : I^n \times J \times I \longrightarrow X$$

dada por:

$$H(t_1, t_2 \dots t_n, t, s) = \begin{cases} F(2t_1, t_2 \dots t_n, t, s) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ \\ G(2t_1-1, t_2 \dots t_n, t, s) & \text{si } 1/2 \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

obtenemos inmediatamente que H_0 representa al elemento $\xi + \xi' \in \underline{\underline{I}}_n(X,\beta)$ y H_1 representa al elemento $\mu_n(\xi) + \mu_n(\xi') \in \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$.

Como $H(t_1, \dots, t_n, t, s) = \mu(1-s,t)$ si $(t_1, \dots, t_n, t, s) \in \partial(I^n \times J) \times I$, H_1 también representa a $\mu_n(\xi + \xi')$, de donde deducimos que μ_n es homomorfismo.

Para ver que es biyección basta considerar el camino ρ definido por $\rho(s,t) = \mu(1-s,t)$ para cada $(s,t) \in I \times J$ y aplicar 1) y 2). #

<u>Corolario 4</u>.- $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ actúa en $\underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ como un grupo de operadores.

<u>Demostración</u>.- Definimos la acción $(*)$: $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha) \times \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ por $u * \xi = \mu_n(\xi)$ donde μ es un representante cualquiera de u.

Es inmediato comprobar que se verifica:

$$u * (\xi + \xi') = u * \xi + u * \xi'$$

$$u * (v * \xi) = (u \cdot v) * \xi$$

$$1 * \xi = \xi \qquad \#$$

Notemos que si $\pi_1(X,\alpha(0)) = 0$, entonces $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ actúa en $\underline{\underline{I}}_1(X,\alpha)$ por "conjugación".

En efecto, si consideramos la sucesión exacta:

$$\cdots \longrightarrow \underline{\underline{I}}_1(X,\alpha) \xrightarrow{\psi} \underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha) \xrightarrow{\partial} \pi_1(X,\alpha(0)) \longrightarrow \cdots$$

ψ es suprayectiva, luego dado $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$, existe $\xi' \in \underline{\underline{I}}_1(X,\alpha)$ con $\psi(\xi') = u$.

Sea f un representante de ξ' (y por tanto de u) y sea g un representante de un elemento cualquiera $\xi \in \underline{\underline{I}}_1(X,\alpha)$.

Sea $F\colon I \times J \times I \longrightarrow X$ una extensión propia de la aplicación propia

$$G\colon I \times J \times 0 \cup \partial(I \times J) \times I \longrightarrow X$$

definida por:

$$G(x,t,0) = g(x,t) \qquad \text{si } (x,t) \in I \times J$$

$$G(x,t,s) = f(1-s,t) \qquad \text{si } (x,t,s) \in \partial(I \times J) \times I$$

Entonces F_1 representa a $u * \xi$.

Pero precisamente, F proporciona una homotopía propia ($\mathrm{rel}(\partial I \times J,\ I \times 0)$) entre F_1 y la aplicación propia

$h\colon (I \times J, \partial I \times J, I \times 0) \longrightarrow (X, \alpha, \alpha(0))$ dada por:

$$h(x,t) = \begin{cases} f(3x,t) & \text{si } 0 \le x \le 1/3 \\ g(3x-1,t) & \text{si } 1/3 \le x \le 2/3 \\ f(3(1-x),t) & \text{si } 2/3 \le x \le 1 \end{cases}$$

Como h representa a $\xi' . \xi . (\xi')^{-1} \in \underline{\underline{I}}_1(X,\alpha)$ deducimos que

$$u * \xi = \xi' . \xi . (\xi')^{-1}$$

Es inmediata la siguiente:

Proposición 5.- Si $\pi_1(X,\alpha(0)) = 0$, son equivalentes

a) $\underline{\underline{I}}_1(X,\alpha)$ es abeliano

b) $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ actúa trivialmente en $\underline{\underline{I}}_1(X,\alpha)$

Observamos, a partir del Teorema 2, que para un espacio X con un final propio $\mathbf{a}$, todos los grupos $\underline{\underline{\tau}}_n(X, \alpha)$ donde α es un representante cualquiera del final propio $\mathbf{a}$, son isomorfos, luego como grupo abstracto $\underline{\underline{\tau}}_n(X, \alpha)$ no depende del rayo base α elegido para representar $\mathbf{a}$ y podemos denotarlo simplemente por $\underline{\underline{\tau}}_n(X, \mathbf{a})$. Lo llamaremos ($\underline{\underline{\tau}}$) n-ésimo grupo abstracto de homotopia propia de X en $\mathbf{a}$.

Si X sólo posee un final propio, todos los grupos $\underline{\underline{\tau}}_n(X, \alpha)$ son isomorfos para cualquier $\alpha : J \longrightarrow X$ propia y como grupo abstracto $\underline{\underline{\tau}}_n(X, \alpha)$ no depende del rayo base α. Entonces podemos denotarlo $\underline{\underline{\tau}}_n(X)$ y lo llamaremos ($\underline{\underline{\tau}}$) n-ésimo grupo abstracto de homotopia propia de X.

Definición 6.- Diremos que X es ($\underline{\underline{\tau}}$) n-simple sii para todo rayo α en X , $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ actúa trivialmente en $\underline{\underline{\tau}}_n(X, \alpha)$.

Son inmediatas las siguientes proposiciones:

Proposición 7.- Si X posee un único final propio, X es ($\underline{\underline{\tau}}$) n-simple si y solo si existe un rayo α en X tal que $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ actúa trivialmente en $\underline{\underline{\tau}}_n(X, \alpha)$.

Proposición 8.- Si para algún rayo α en X, (X,α) es ($\underline{\underline{\pi}}$) 1-conexo entonces X es ($\underline{\underline{\tau}}$) n-simple.

Proposición 9.- Si X posee un único final propio y $\underline{\underline{\tau}}_n(X) = 0$, entonces X es ($\underline{\underline{\tau}}$) n-simple

Teorema 10.- X es $(\underline{\underline{\pi}})$ n-simple si y solo si, dado un rayo cualquiera α en X, si dos aplicaciones propias $f,g:(I^n\times J,\ \partial I^n\times J,\ I^n\times 0)\longrightarrow (X,\ \alpha,\alpha(0))$ verifican que $f\simeq_p g$ mediante una homotopía propia H tal que:

$H(x,t,s) = H(x',t,s)$ para (x',t,s) y $(x,t,s)\in\partial(I^n\times J)\times I$, entonces $f\simeq_p g$ $(\mathrm{rel}(\partial I^n\times J,\ I^n\times 0))$.

Demostración.- Supongamos que X es $(\underline{\underline{\pi}})$ n-simple. Sea α un rayo cualquiera en X y $f,\ g:\ (I^n\times J,\ \partial I^n\times J, I^n\times 0)\longrightarrow (X,\ \alpha,\alpha(0))$ dos aplicaciones propias (que representarán elementos ξ y ξ' respectivamente de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\ \alpha))$ de forma que existe una homotopía propia,

$$H:\ I^n\times J\times I\longrightarrow X$$

con $H_0=f, H_1=g$ y $H(x,t,s)=H(x',t,s)$ para (x',t,s) y $(x,t,s)\in\partial(I\times J)\times I$

Definimos ahora un camino cerrado en α

$$\mu:\ I\times J\longrightarrow X$$

por $\mu(s,t) = H(x,t,s)$ con $x\in\partial I^n$

Entonces μ representa a un elemento $u\in\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ y $u_*\xi'=\mu_n(\xi')=\xi$

Como por hipótesis la acción es trivial, $\xi'=\xi$, de donde $f\simeq_p g$ $(\mathrm{rel}\ (\partial I^n\times J, I^n\times 0))$.

Supongamos ahora que se satisface la otra condición. Sea u un elemento de $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ representado por $\mu:I\times J\longrightarrow X$.

Sea $f:\ (I^n\times J,\ \partial I^n\times J, I^n\times 0)\longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$ una aplicación propia que represente a $\xi\in\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$. Entonces el elemento $u_*\xi\in\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ está representado por una aplicación propia

$$g:(I^n\times J,\partial I^n\times J, I^n\times 0)\longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$$

tal que $f\simeq_p g$ mediante una homotopía propia H donde

$H(x,t,s) = \mu(1-s,t)$ para cada $(x,t,s) \in \partial(I^n \times J) \times I$. Luego por hipótesis $f \simeq_p g$ $(\mathrm{rel}(\partial I^n \times J, I^n \times 0))$, de donde $u_* \xi = \xi$. #

Definición 11.- $\underline{\pi}_n^*(X)$ es el conjunto de las clases de aplicaciones propias $f\colon I^n \times J \longrightarrow X$ tales que $f(x,t) = f(x',t)$ para todo (x',t) y $(x,t) \in \partial(I^n \times J)$; donde f y g están relacionadas sii existe una homotopía propia

$$H\colon I^n \times J \times I \longrightarrow X$$

tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y $H(x',t,s) = H(x,t,s)$ para (x',t,s), $(x,t,s) \in \partial(I^n \times J) \times I$.

Es obvio que para cada $\alpha\colon J \longrightarrow X$ propia, tenemos una transformación inducida por la inclusión.

$$\chi = \chi_\alpha\colon \underline{\pi}_n(X,\alpha) \longrightarrow \underline{\pi}_n^*(X)$$

Teorema 12.- Si X posee un único final propio y es $(\underline{\pi})$ n-simple, entonces χ es una biyección.

Demostración.- Sea ξ un elemento de $\underline{\pi}_n^*(X)$ representado por f. Entonces podemos definir una aplicación propia $\beta\colon J \longrightarrow X$ por $\beta(t) = f(x,t)$ con $x \in \partial I^n$. Es evidente que f representa un elemento $\xi' \in \underline{\pi}_n(X,\beta)$.

Como X sólo posee un final propio, existe un camino μ entre α y β.

Por definición $\mu_n(\xi') \in \underline{\pi}_n(X,\alpha)$ está representado por una aplicación propia

$$g\colon (I^n \times J, \partial I^n \times J, I^n \times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$$

tal que g es homótopa a f por medio de una homotopía propia a través de μ, luego $\chi(\mu_n(\xi'))=\xi$. Por tanto χ es suprayectiva.

Consideremos ahora dos elementos $\xi, \xi' \in \underline{\underline{L}}_n(X,\alpha)$ representados por f,g respectivamente, tales que $\chi(\xi)=\chi(\xi')$. Entonces existe una aplicación propia

$$H : I^n \times J \times I \longrightarrow X$$

tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y $H(x,t,s) = H(x',t,s)$ para (x',t,s), $(x,t,s) \in \partial(I^n \times J)\times I$. Aplicando el Teorema 10, deducimos que $\xi=\xi'$. Por lo tanto χ es inyectiva. $\ast$

Notemos que, en las condiciones del Teorema anterior, por medio de χ podemos definir en $\underline{\underline{L}}_n^*(X)$ una estructura de grupo respecto a la cual χ es isomorfismo. Comprobaremos a continuación que la estructura de grupo inducida en $\underline{\underline{L}}_n^*(X)$ por χ es independiente de la elección del rayo base α en X:

Sean $(I^n\times J)_+ = \{(t_1,t_2,\ldots,t_n,t)\in I^n\times J \mid 0\le t_1\le 1/2\}$

$(I^n\times J)_- = \{(t_1,t_2,\ldots,t_n,t)\in I^n\times J \mid 1/2\le t_1\le 1\}$

El significado geométrico de la operación de grupo en $\underline{\underline{L}}_n^*(X)$ es el siguiente:

Sean ξ y $\xi' \in \underline{\underline{L}}_n^*(X)$, entonces existen aplicaciones propias

$$f,g : (I^n\times J, \partial I^n\times J, I^n\times 0) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$$

tales que representan a ξ y ξ' respectivamente y además

$$f|_{(I^n\times J)_-} = \vartheta_\alpha \qquad \text{y} \qquad g|_{(I^n\times J)_+} = \vartheta_\alpha$$

Definiendo $h: I^n\times J \longrightarrow X$ como $h(y)=f(y)$ si $y\in(I^n\times J)_+$, $h(y)=g(y)$ si $y\in(I^n\times J)_-$.

h representa la suma $\xi+\xi'$ en $\underline{\underline{L}}_n^*(X)$.

Consideremos otro rayo β en X. Como α y β representan al mismo final propio de X, existe un camino μ entre β y α.

Construimos ahora una homotopía propia $F: I^n \times J \times I \longrightarrow X$ a través de μ de forma que $F_0 = f$ y $F(t_1,\dots,t_n,t,s) = \mu(1-s,t)$ si $(t_1,\dots,t_n,t,s) \in (I^n \times J)_- \times I$

Análogamente construimos una homotopía propia $G: I^n \times J \times I \longrightarrow X$ a través de μ tal que $G_0 = g$ y $G(t_1,\dots,t_n,t,s) = \mu(1-s,t)$ si $(t_1,\dots,t_n,t,s) \in (I^n \times J)_+ \times I$.

Notar que $F_1|_{(I^n \times J)_-} = \vartheta_\beta$ y $G_1|_{(I^n \times J)_+} = \vartheta_\beta$

Si definimos la aplicación propia

$$H: I^n \times J \times I \longrightarrow X$$

por:

$$H(y,t) = F(y,t) \quad \text{si} \quad (y,t) \in (I^n \times J)_+ \times I$$

$$H(y,t) = G(y,t) \quad \text{si} \quad (y,t) \in (I^n \times J)_- \times I$$

Obtenemos que $H_0 = h$ y $H(x,t,s) = \mu(1-s,t)$ si $(x,t,s) \in \partial(I^n \times J) \times I$ luego H_1 representa el mismo elemento que h en $\underline{\underline{\pi}}_n^*(X)$, esto es $\xi + \xi'$

Pero por otra parte H_1 representa la suma en $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\beta)$ de los elementos representados por F_1 y G_1. Por lo tanto, la estructura de grupo en $\underline{\underline{\pi}}_n^*(X)$ no depende de la elección del rayo base en el caso de ser X $(\underline{\underline{\pi}})$ n-simple y con un solo final propio.

Definición 13.- Para cada $n \geq 1$, $\Omega_{\underline{\underline{\pi}}}^n(X,\alpha)$ es el subgrupo de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$, generado por los elementos de la forma $\xi - u \ast \xi$ donde $\xi \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ y $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$.

Proposición 14.- Para cada $n \geq 1$, $\Omega_{\underline{\underline{\pi}}}^n(X,\alpha)$ es un subgrupo normal de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$. En particular, $\Omega_{\underline{\underline{\pi}}}^1(X,\alpha)$ contiene al subgrupo conmutador de $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$.

Demostración. Para $n > 1$, $\underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ es abeliano, luego $\Omega_{\underline{\underline{I}}}^n(X,\alpha)$ es normal.

Para $n = 1$, $\Omega_{\underline{\underline{I}}}^1(X,\alpha)$ está generado por los elementos de la forma $\xi.(u * \xi)^{-1}$ con $\xi \in \underline{\underline{I}}_1(X,\alpha)$, $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$. Observemos que si $\xi, \xi' \in \underline{\underline{I}}_1(X,\alpha)$, $\xi.\xi'.(\xi)^{-1} = \Psi(\xi) * \xi'$ donde $\Psi\colon \underline{\underline{I}}_1(X,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ es la transformación habitual definida anteriormente.

Consideramos $\xi, \xi' \in \underline{\underline{I}}_1(X,\alpha)$, $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(X\backslash\alpha)$.

$$\xi.\xi'(u * \xi')^{-1}.\xi^{-1} = \xi.\xi'.\xi^{-1}.\xi.(u * \xi')^{-1}.\xi^{-1} = (\Psi(\xi) * \xi').(\xi.(u * \xi').\xi^{-1})^{-1}$$
$$= (\Psi(\xi) * \xi').(\Psi(\xi) * (u * \xi'))^{-1} = (\Psi(\xi) * \xi').((\Psi(\xi).u) * \xi')^{-1} =$$
$$= (\Psi(\xi) * \xi').((\Psi(\xi).u.(\Psi(\xi))^{-1}.\Psi(\xi)) * \xi')^{-1} =$$
$$= (\Psi(\xi) * \xi').((\Psi(\xi).u.(\Psi(\xi))^{-1} * (\Psi(\xi) * \xi'))^{-1} \in \Omega_{\underline{\underline{I}}}^1(X,\alpha).$$

Esto prueba que $\Omega_{\underline{\underline{I}}}^1(X,\alpha)$ es normal.

Ahora, consideremos un generador $\xi.\xi'.\xi^{-1}.(\xi')^{-1}$ del conmutador de $\underline{\underline{I}}_1(X,\alpha)$.

Entonces $\xi.\xi'.\xi^{-1}.(\xi')^{-1} = (\Psi(\xi) * \xi').(\xi')^{-1} = (\xi'.(\Psi(\xi) * \xi')^{-1})^{-1}$ $\in \Omega_{\underline{\underline{I}}}^1(X,\alpha)$ #

Corolario 15.- Para $n \geq 1$, $\underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) / \Omega^n_{\underline{\underline{1}}}(X,\alpha)$ que denotaremos $\underline{\underline{I}}_n^*(X,\alpha)$ es abeliano

Observemos que el Teorema 12 puede enunciarse de esta manera:

Si X posee un único final propio, la aplicación inducida por la inclusión,

$$\underline{\underline{I}}_n^*(X,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n^*(X)$$

es una biyección.

Nota.- Para no inducir a confusión, diremos que X es (π)n-simple sii para todo $x_0 \in X$, $\pi_1(X,x_0)$ actúa trivialmente en $\pi_n(X,x_0)$. Y diremos que X es (π)n-conexo sii para todo $x_0 \in X$, $\pi_n(X,x_0)$ es trivial . Análogamente para el caso relativo.

Denotaremos $\Omega_\pi^n(X,x_0)$ al subgrupo de $\pi_n(X,x_0)$ generado por los elementos de la forma $\xi - u * \xi$ donde $\xi \in \pi_n(X,x_0)$, $u \in \pi_1(X,x_0)$ y $u * \xi$ denota la acción de u en ξ (ver 14.IV.de [Hu.2]).

Consideremos un espacio X arco conexo, con un solo final propio, $(\pi)(n+1)$-simple y $(\underline{\underline{I}})$ n-simple, $n \geq 1$. En estas condiciones, los grupos abstractos $\pi_{n+1}(X)$ y $\underline{\underline{I}}_n(X)$ tienen su correspondiente interpretación geométrica , $\pi_{n+1}^*(X)$, $\underline{\underline{I}}_n^*(X)$.

Es obvio que podemos definir un homomorfismo:

$$\varphi^* : \pi_{n+1}^*(X) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n^*(X)$$

de la manera siguiente:

Elegimos un rayo α en X y consideramos el homomorfismo $\varphi_\alpha : \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$ y los isomorfismos inducidos por la inclusión, $\chi_{\alpha(0)} : \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) \longrightarrow \pi_{n+1}^*(X)$ y $\chi_\alpha : \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n^*(X)$.

Definimos ahora $\varphi^* = \chi_\alpha \circ \varphi_\alpha \circ \chi_{\alpha(0)}^{-1}$.

Surge el problema de saber si este homomorfismo depende realmente del rayo base α que elegimos en X.

Sea β otro rayo en X, entonces existe un camino $\mu : I \times J \longrightarrow X$ entre β y α .

Denotamos $(\mu^0)_{n+1} : \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) \longrightarrow \pi_{n+1}(X,\beta(0))$ al isomorfismo inducido por el camino μ^0 entre $\beta(0)$ y $\alpha(0)$, y consideramos el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}^{*}(X) \arrow[rr, "\varphi^{*}"] \arrow[d, "\chi^{-1}_{\alpha(0)}"'] \arrow[ddr, "\chi^{-1}_{\beta(0)}"] & & \underline{\underline{I}}_n^{*}(X) & \\
\pi_{n+1}(X,\alpha(0)) \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "(\mu^0)_{n+1}"'] & & \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \arrow[u, "\chi_\alpha"'] \arrow[dr, "\mu_n"'] & \\
 & \pi_{n+1}(X,\beta(0)) \arrow[rr, "\varphi_\beta"'] & & \underline{\underline{I}}_n(X,\beta) \arrow[uul, "\chi_\beta"']
\end{tikzcd}
$$

Como los triángulos son conmutativos, basta probar la conmutatividad del rectángulo de la base para demostrar la independencia de φ^* respecto al rayo base elegido para definirla.

Sea $f:(I^{n+1},\partial I^{n+1}) \longrightarrow (X,\alpha(0))$ un representante de $\xi\in \pi_{n+1}(X,\alpha(0))$, y $F\colon I^n\times I\times J \longrightarrow X$ una extensión propia de la aplicación propia.

$$G\colon I^n\times I\times 0 \cup I^n\times 0\times J \cup \partial I^n\times I\times J \longrightarrow X$$

dada por:

$$G(x,t,0)=f(x,t) \qquad \text{si } (x,t) \in I^n\times J$$

$$G(x,0,s)=\alpha(s) \qquad \text{si } (x,0,s)\in I^n\times 0\times J$$

$$G(y,t,s)=\alpha(s) \qquad \text{si } (y,t,s)\in \partial I^n\times I\times J$$

Entonces $F_1\colon I^n\times J \longrightarrow X$ definida por $F_1(x,s)=F(x,1,s)$ representa a $\varphi_\alpha(\xi)\in \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$.

Condideremos ahora una homotopía

$$H\colon I^{n+1}\times I \longrightarrow X$$

tal que:

$H_0 = f$ y $H(z,r) = \mu^0(1-r)$ para cada $(z,r)\in \partial I^{n+1}\times I$..

Luego H_1 representa a $(\mu^0)_{n+1}(\xi) \in \pi_{n+1}(X,\beta(0))$

A continuación construimos una aplicoación propia

$$R: I^n \times I \times 0 \times I \cup I^n \times 0 \times J \times I \cup \partial I^n \times I \times J \times I \longrightarrow X$$

como: $R(x,t,0,r) = H(x,t,r)$ si $(x,t,0,r) \in I^n \times I \times 0 \times I$

$R(x,0,s,r) = \mu(1-r,s)$ si $(x,0,s,r) \in I^n \times 0 \times J \times I$

$R(y,t,s,r) = \mu(1-r,s)$ si $(y,t,s,r) \in \partial I^n \times I \times J \times I$

Observemos que $R_0 = G$. Aplicando la propiedad de extensión de homotopía propia, R se extiende a una aplicación propia

$$L : I^n \times I \times J \times I \longrightarrow X$$

tal que $L_0 = F$.

Observemos que $L_1 : I^n \times I \times J \longrightarrow X$ verifica que

$L_1 (x,t,0) = H_1 (x,t)$ si $(x,t) \in I^n \times I$

$L_1 (y,t,s) = \beta(s)$ si $(y,t,s) \in \partial I^n \times I \times J$

$L_1 (x,0,s) = \beta(s)$ si $(x,0,s) \in I^n \times 0 \times J$

Por lo tanto $L_{11} : I^n \times J \longrightarrow X$ definida por:

$L_{11}(x,s) = L_1(x,1,s)$ para cada $(x,s) \in I^n \times J$

representa a $\varphi_\beta ((\mu^0)_{n+1}(\xi)) \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,\beta)$.

Ahora bien, la aplicación propia

$$M : I^n \times I \times J \times I \longrightarrow X$$

dada por $M(x,s,r) = L(x,1,s,r)$ para cada $(x,s,r) \in I^n \times J \times I$ es una homotopía propia de F_1 a través de μ y por tanto M_1 representa a $\mu_n (\varphi_\alpha(\xi)) \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,\beta)$.

Pero $M_1(x,s) = L(x,1,s,1) = L_{11}(x,s)$ para cada $(x,s) \in I^n \times J$ de donde se deduce que $\varphi_\beta (\mu^0)_{n+1}(\xi) = \mu_n \varphi_\alpha (\xi)$. #

6.- El papel del rayo base en los grupos $\underline{\underline{\pi}}_n$ para el caso relativo. Acción de $\underline{\underline{\pi}}_1$

Este párrafo tiene un desarrollo similar al anterior. La mayoría de las demostraciones se omiten pues se hacen de modo análogo a las de los correspondientes teoremas del párrafo 5.

Sea (X,A) un par propio, donde A posee algún final propio.

<u>**Teorema 1**</u>.- Para cada $n \geq 1$, todo camino en A, μ, entre dos rayos α y β de A induce de forma natural una biyección

$$\mu_n : \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\beta) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$$

que depende únicamente de la clase de homotopía de $\mu(\mathrm{rel}(0\times J, 1\times J))$

Además se verifica:

1) Para cada $n \geq 2$, μ_n es homomorfismo.

2) Si μ es el camino degenerado ϑ_α, μ_n es el automorfismo identidad

3) Si μ y ρ son caminos en A entre rayos de A, de tal forma que $\mu(1,t) = \rho(0,t)$ para cada $t \in J$, entonces $(\mu.\rho)_n = \mu_n \circ \rho_n$

4) Para cada camino μ en A entre dos rayos α, β de A, y cada aplicación propia $f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$, el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\beta) \arrow[r, "\mu_n"] \arrow[d, "f_*"'] & \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \arrow[d, "f_*"] \\
\underline{\underline{\pi}}_n(Y,B,f\circ\beta) \arrow[r, "(f\circ\mu)_n"] & \underline{\underline{\pi}}_n(Y,B,f\circ\alpha)
\end{tikzcd}$$

5) El siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & \underline{\underline{\Pi}}_n(A,\beta) & \xrightarrow{i_*} & \underline{\underline{\Pi}}_n(X,\beta) & \xrightarrow{j_*} & \underline{\underline{\Pi}}_n(X,A,\beta) & \xrightarrow{\partial} & \underline{\underline{\Pi}}_{n-1}(A,\beta) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow \mu_n & & \downarrow \mu_n & & \downarrow \mu_n & & \downarrow \mu_{n-1} & \\
\cdots \longrightarrow & \underline{\underline{\Pi}}_n(A,\alpha) & \xrightarrow{i_*} & \underline{\underline{\Pi}}_n(X,\alpha) & \xrightarrow{j_*} & \underline{\underline{\Pi}}_n(X,A,\alpha) & \xrightarrow{\partial} & \underline{\underline{\Pi}}_{n-1}(A,\alpha) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

<u>Demostración</u>.- Definimos μ_n de la siguiente manera:

Sea $f\colon (I^n\times J,\ I^{n-1}\times J, T^{n-1}\times J, I^n\times 0) \longrightarrow (X,A,\beta,\beta(0))$ una aplicación propia que representa a $\xi \in \underline{\underline{\Pi}}_n(X,A,\beta)$

Definimos ahora una homotopía propia parcial de f,

$$\phi : I^n\times 0\times I \cup T^{n-1}\times J\times I \longrightarrow A \subset X$$

por $\phi(x,t,s) = \mu(1-s,t)$ para cada $(x,t,s) \in (I^n\times 0 \cup T^{n-1}\times J)\times I$

Como $\phi\big|_{\partial(I^{n-1}\times J)\times I}$ es una homotopía propia en A de $f\big|_{\partial(I^{n-1}\times J)}$, aplicando la propiedad de extensión de homotopía propia, encontramos una extensión propia de $\phi\big|_{\partial(I^{n-1}\times J)\times I}$

$$F : (I^{n-1}\times J)\times I \longrightarrow A$$

(observemos que F es una homotopía propia en A de $f\big|_{I^{n-1}\times J}$ a través de μ y F_1 representa al elemento $\mu_{n-1}(\partial(\xi)) \in \underline{\underline{\Pi}}_{n-1}(A,\alpha)$).

LLamando $\Phi\colon \partial(I^{n-1}\times J)\times I \longrightarrow A$ a la aplicación propia definida por

$$\Phi(x,t,s) = \phi(x,t,s) \quad \text{si } (x,t,s) \in I^n\times 0 \cup (T^{n-1}\times J)\times I$$

$$\Phi(y,t,s) = F(y,t,s) \quad \text{si } (y,t,s) \in I^{n-1}\times J\times I$$

y aplicando de nuevo la propiedad de extensión de homotopía propia, Φ se extiende a una homotopía propia

$$G\colon I^n\times J\times I \longrightarrow X$$

con $G_0 = f$ (Diremos que G es una homotopía propia de f a través de μ).

Como G_1 es una aplicación propia del tipo:

$$(I^n\times J,\ I^{n-1}\times J, T^{n-1}\times J,\ I^n\times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

representa un elemento $\eta \in \underline{\underline{\Pi}}_n(X,A,\alpha)$

Definimos $\mu_n(\xi) = \eta$.

La demostración de que μ_n está bien definida y sólo depende de la clase de homotopía propia de μ (rel($0 \times J, 1 \times J$)) es análoga a la realizada para el caso absoluto, así como la demostración de 1), 2), 3) y 4).

Por otra parte resulta inmediato comprobar que $i_* \mu_n = \mu_n i_*$, $j_* \mu_n = \mu_n j_*$ y de la definición se deduce que $\partial \mu_n = \mu_{n-1} \partial$, por tanto se verifica 5). #

Corolario 2.- Para $n \geq 2$, $\underline{\pi}_1(A,\alpha)$ actúa en $\underline{\tau}_n(X,A,\alpha)$ como un grupo de operadores .(Utilizamos la misma notación $u * \xi$ que en el caso absoluto).

Notemos que si **a** es un final propio en A, a partir del Teorema 1, se deduce que todos los grupos $\underline{\tau}_n(X,A,\alpha)$ donde α es un representante cualquiera de **a**, son isomorfos y por tanto, como grupo abstracto $\underline{\tau}_n(X,A,\alpha)$ no depende de la elección del rayo base α elegido para representar **a**, y podemos denotarlo simplemente por $\underline{\tau}_n(X,A,\mathbf{a})$, (lo llamaremos ($\underline{\tau}$) n-ésimo grupo abstracto de homotopía propia del par (X,A) en **a**). Si A posee un único final propio, todos los grupos $\underline{\tau}_n(X,A,\alpha)$ son isomorfos para cualquier rayo α en A y como grupo abstracto $\underline{\tau}_n(X,A,\alpha)$ no depende del rayo base. Podemos denotarlo $\underline{\tau}_n(X,A)$ y lo llamamos ($\underline{\tau}$) n-ésimo grupo abstracto de homotopía propia del par (X,A).

Definición 3.- Diremos que el par propio (X,A) es ($\underline{\tau}$) n-simple sii para todo rayo α en A, $\underline{\pi}_1(A,\alpha)$ actúa trivialmente en $\underline{\tau}_n(X,A,\alpha)$.

Proposición 4.- Si A posee un único final propio, el par (X,A) es $(\underline{\underline{\tau}})$ n-simple si y sólo si existe un rayo α en A tal que $\underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha)$ actúa trivialmente en $\underline{\underline{\tau}}_n(X,A,\alpha)$.

Proposición 5.- Si para algún rayo α en A, (A,α) es $(\underline{\underline{\pi}})$ 1-conexo entonces el par (X,A) es $(\underline{\underline{\tau}})$ n-simple.

Proposición 6.- Si A posee un único final propio y $\underline{\underline{\tau}}_n(X,A)=0$, entonces el par (X,A) es $(\underline{\underline{\tau}})$ n-simple.

Teorema 7.- (X,A) es $(\underline{\underline{\tau}})$ n-simple si y sólo si se verifica, para cada rayo α en A, que si dos aplicaciones propias f,g del tipo

$$(I^n\times J,\ I^{n-1}\times J, T^{n-1}\times J,\ I^n\times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

son homótopas propiamente mediante una homotopía H tal que $H(\partial(I^n\times J)\times I) \subset A$ y $H(x,t,s) = H(x',t,s)$ para (x,t,s), $(x',t,s)\in (I^n\times 0 \cup T^{n-1}\times J)\times I$ entonces son homótopas propiamente $(\mathrm{rel}(I^{n-1}\times J, T^{n-1}\times J, I^n\times 0)$

Como ocurre en el caso absoluto, si A posee un único final propio y el par propio (X,A) es $(\underline{\underline{\tau}})$ n-simple, el grupo abstracto $\underline{\underline{\tau}}_n(X,A)$ tiene la correspondiente interpretación geométrica:

Definición 8.- $\underline{\underline{\tau}}_n^*(X,A)$ es el conjunto de las clases de aplicaciones propias

$$f\colon (I^n\times J,\ \partial(I^n\times J)) \longrightarrow (X,A)$$

tales que $f(x,t)=f(x',t)$ para todo (x,t) y $(x',t)\in I^n\times 0\cup T^{n-1}\times J$; donde f y g están relacionadas sii existe una homotopía propia

$$H\ (I^n \times J \times I, \partial(I^n \times J) \times I) \longrightarrow (X, A)$$

tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y $H(x',t,s) = H(x,t,s)$ para todo (x',t,s) y $(x,t,s) \in (I^n \times 0 \cup T^{n-1} \times J) \times I$

Entonces para cada rayo α en A, tenemos una trasformación inducida por la inclusión

$$\chi = \chi_\alpha : \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n^*(X,A)$$

Teorema 9.- Si A posee un único final propio y el par propio (X,A) es $(\underline{\underline{I}})$ n-simple entonces χ es una biyección.

Análogamente al caso absoluto, podemos definir en $\underline{\underline{\pi}}_n^*(X,A)$ una estructura de grupo respecto a la cuál χ es un isomorfismo, comprobándose además que esta estructura no depende de la elección del rayo base que representa al final propio de A.

Definición 10.- Para cada $n \geq 2$, $\Omega_{\underline{\underline{I}}}^n(X,A,\alpha)$ es el subgrupo de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ generado por los elementos de la forma $\xi - u * \xi$ donde $\xi \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ y $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha)$.

Proposición 11.- Para cada $n \geq 2$, $\Omega_{\underline{\underline{I}}}^n(X,A,\alpha)$ es un subgrupo normal de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$. En particular, $\Omega_{\underline{\underline{I}}}^2(X,A,\alpha)$ contiene al subgrupo conmutador de $\underline{\underline{\pi}}_2(X,A,\alpha)$.

Demostración. Para $n > 2$, $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ es abeliano.

Para $n = 2$, $\Omega_{\underline{\underline{I}}}^2(X,A,\alpha)$ está generado por los elementos de la forma $\xi \cdot (u * \xi)^{-1}$ con $\xi \in \underline{\underline{\pi}}_2(X,A,\alpha)$, $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha)$. Observando que

si $\xi, \xi' \in \underline{\underline{I}}_2(X,A,\alpha)$, $\xi.\xi'.\xi^{-1} = \psi\partial(\xi).\xi'$ donde
$\partial: \underline{\underline{I}}_2(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_1(A,\alpha)$ y $\psi: \underline{\underline{I}}_1(A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha)$,
la demostración se hace de modo similar a la de la Proposición 14.5. #

Corolario 12.- Para $n \geq 2$, $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) / \Omega_{\underline{\underline{I}}}^n(X,A,\alpha)$ (que denotaremos $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$) es abeliano.

Notemos que el Teorema 9 puede enunciarse así:

Si A posee un único final propio, la aplicación inducida por la inclusión

$$\underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$$

es una biyeccion.

También para el caso relativo, las condiciones de (π) simplicidad y ($\underline{\underline{I}}$) simplicidad permiten relacionar los grupos de homotopía de Hurewicz y los de homotopía propia construidos geométricamente.

Para $n \geq 2$. Dado un par propio (X,A) con A arco conexo y con un solo final propio. Si (X,A) es $(\pi)(n+1)$-simple y $(\underline{\underline{I}})n$-simple, los grupos abstractos $\pi_{n+1}(X,A)$ y $\underline{\underline{I}}_n(X,A)$ tienen su correspondiente interpretación geométrica $\pi_{n+1}^*(X,A)$ y $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$. Es evidente que podemos definir un homomorfismo

$$\varphi^* : \pi_{n+1}^*(X,A) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$$

por
$$\varphi^* = \chi_\alpha \circ \varphi_\alpha \circ \chi_{\alpha(0)}^{-1}$$

donde α es un rayo elegido para representar el final propio de A,
$\varphi_\alpha : \pi_{n+1}(X,A,\alpha(0)) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$, $\chi_{\alpha(0)}: \pi_{n+1}(X,A,\alpha(0)) \equiv \pi_{n+1}^*(X,A)$
y $\chi_\alpha : \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \equiv \underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$

Como en el caso absoluto, se comprueba que φ^* no depende de la elección del rayo base.

7.- El papel del rayo base en los grupos $\underline{\underline{\pi}}_n$. Acción de $\underline{\underline{\pi}}_1$

El desarrollo del presente párrafo es paralelo al de los dos anteriores. Las demostraciones se omiten pues se hacen de forma muy parecida a las de los correspondientes teoremas de los párrafos 5 y 6.

Sea X un espacio topológico con algún final propio.

<u>Teorema 1.</u> Para cada $n \geq 1$, todo camino μ entre dos rayos α y β de X induce de manera natural un isomorfismo

$$\mu_n : \underline{\underline{\pi}}_n(X,\beta) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$$

que depende únicamente de la clase de homotopía propia de μ (rel$((0 \times J, 1 \times J))$.

Además, se verifican propiedades análogas a 1),2) y 3) del Teorema 2.5

<u>Demostración</u>.- Sólo daremos la definición de μ_n:

Sea ξ un elemento cualquiera de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\beta)$. Elegimos una aplicación propia $f:(I^n \times J, \partial I^n \times J, \partial I^n \times 0) \longrightarrow (X,\beta,\beta(0))$ que representa a ξ.

Definimos ahora una homotopía propia parcial de f

$$\phi : (\partial I^n \times J) \times I \longrightarrow X$$

por: $\phi(x,t,s) = \mu(1-s,t)$ para cada $(x,t,s) \in (\partial I^n \times J) \times I$.

Notemos que para cada $(x,0,s) \in \partial I^n \times 0 \times I$, $\phi(x,0,s) = (\mu^0)^{-1}(s)$.

Aplicando la propiedad de extensión de homotopía, obtenemos una extensión de $\phi\big|_{I^n\times 0\times I}$

$$\bar{\phi} : I^n \times 0 \times I \longrightarrow X$$

tal que $\bar{\phi}_0 = f\big|_{I^n \times 0}$

Consideramos a continuación la aplicación propia

$$\Phi: \partial(I^n \times J) \times I \longrightarrow X$$

dada por $\Phi\big|_{I^n\times 0 \times I} = \bar{\phi}$ y $\Phi\big|_{(\partial I^n \times J)\times I} = \phi$

Observemos que $\Phi_0 = f\big|_{\partial(I^n \times J)}$

Aplicando de nuevo la propiedad de extensión de homotopía propia, obtenemos una extensión propia de Φ

$$F: I^n \times J \times I \longrightarrow X$$

(a estas homotopías propias que verifican $F_0 = f$ y $F(x,t,s) = \mu(1-s,t)$ si $(x,t,s) \in \partial I^n \times J \times I$, para f del tipo descrito, las llamamos también homotopías de f a través de μ).

Como F_1 es una aplicación propia del tipo:

$$(I^n \times J, \partial I^n \times J, \partial I^n \times 0) \longrightarrow (X, \alpha, \alpha(0))$$

representa un elemento η de $\underline{\pi}_n(X,\alpha)$. Definimos $\mu_n(\xi) = \eta$ #

Para un camino μ entre los rayos α y β de X, el camino μ^0 entre $\alpha(0)$ y $\beta(0)$ induce de forma natural un isomorfismo $(\mu^0)_n : \pi_n(X,\beta(0)) \longrightarrow \pi_n(X,\alpha(0))$ para cada $n \geq 1$. Observemos que de la propia definición se deduce de forma inmediata que el cuadro

$$\begin{tikzcd}
\underline{\pi}_n(X,\beta) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mu_n"'] & \pi_n(X,\beta(0)) \arrow[d, "(\mu^0)_n"] \\
\underline{\pi}_n(X,\alpha) \arrow[r, "\partial"] & \pi_n(X,\alpha(0))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Corolario 2.- $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ actúa en $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ como grupo de operadores. La acción $(*): \underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha) \times \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ está definida por $u * \xi = \mu_n(\xi)$ donde μ es un representante cualquiera de u.

Observemos que dados $\xi, \xi' \in \underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$, $\xi * \xi' = \xi . \xi' . \xi^{-1}$, es decir que $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ actúa en $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ por conjugación. Entonces son equivalentes:

a) $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ es abeliano y b) $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ actúa trivialmente en $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$.

Notemos que si **a** es un final propio de X, del Teorema 1 se deduce que todos los grupos $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ con α un representante cualquiera de **a**, son isomorfos. Por tanto como grupo abstracto $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ no depende del rayo base α elegido para representar **a** y podemos denotarlo $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\mathbf{a})$. Lo llamamos ($\underline{\underline{\pi}}$) n-ésimo grupo de homotopía propia de X en el final propio **a**. Si X posee un único final propio, como grupo abstracto $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ no depende del rayo base **a**. Lo denotamos simplemente como $\underline{\underline{\pi}}_n(X)$ y lo llamaremos ($\underline{\underline{\pi}}$) n-ésimo grupo de homotopía propia de X.

Definición 3.- Diremos que X es ($\underline{\underline{\pi}}$) n-simple sii para todo rayo α en X, $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ actúa trivialmente en $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$.

Se verifican Proposiciones 4,5,6 análogas a las Proposiciones 7.5,8.5,9.5.

Teorema 7.- X es ($\underline{\underline{\pi}}$) n-simple si y solo si se verifica, para cada rayo α en X, que si dos aplicaciones propias f, g del tipo:

$$(I^n \times J, \partial I^n \times J, \partial I^n \times 0) \longrightarrow (X, \alpha, \alpha(0))$$

son homótopas propiamente mediante una homotopía H que cumpla: $H(x,t,s) = H(x',t,s)$ para cada (x,t,s) y $(x',t,s) \in \partial I^n \times J \times I$, entonces son homótopas propiamente $(rel(\partial I^n \times J, \partial I^n \times 0))$.

Definición 8.- $\underline{\underline{\pi}}_n^*(X)$ es el conjunto de las clases de aplicaciones propias $f: I^n \times J \longrightarrow X$

tales que $f(x,t) = f(x',t)$ para cada (x,t) y $(x',t) \in \partial I^n \times J$; donde f y g están relacionadas sii existe una homotopía propia:

$$H: I^n \times J \times I \longrightarrow X$$

tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y $H(x',t,s) = H(x,t,s)$ para cada (x',t,s) y $(x,t,s) \in \partial I^n \times J \times I$.

Para cada rayo α en X tenemos una transformación inducida por la inclusión:

$$\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n^*(X)$$

que en el caso de poseer X un único final propio y ser $(\underline{\underline{\pi}})$ n-simple es una biyección y podemos inducir en $\underline{\underline{\pi}}_n^*(X)$ una estructura de grupo, independiente del rayo base α, que hace de esta biyección un isomorfismo. En este caso $\underline{\underline{\pi}}_n^*(X)$ es la interpretación geométrica del gupo abstracto $\underline{\underline{\pi}}_n(X)$.

Definición 9.- Para cada $n \geq 1$, $\Omega_{\underline{\underline{\pi}}}^n(X,\alpha)$ es el subgrupo de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ generado por los elementos de la forma $\xi - u * \xi$ donde $\xi \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$ y $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$.

Proposición 10.- Para cada $n \geq 1$, $\Omega_{\underline{\underline{\pi}}}^{n}(X,\alpha)$ es un subgrupo normal de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)$. En particular, $\Omega_{\underline{\underline{\pi}}}^{1}(X,\alpha)$ es el subgrupo conmutador de $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$.

Corolario 11.- Para $n \geq 1$, $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) / \Omega_{\underline{\underline{\pi}}}^{n}(X,\alpha)$ (que denotaremos $\underline{\underline{\pi}}_n^{*}(X,\alpha)$) es abeliano.

La utilización de este grupo suple la condición de ($\underline{\underline{\pi}}$)n-simplicidad y obtenemos que si X posee un único final propio, la aplicación inducida por la inclusión

$$\underline{\underline{\pi}}_n^{*}(X,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n^{*}(X)$$

es una biyección.

Consideremos ahora un par propio (X,A) donde A posee algún final propio.

Teorema 12.- Para $n \geq 1$, todo camino μ en A entre dos rayos α y β de A, induce de forma natural una biyección

$$\mu_n : \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\beta) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$$

que depende únicamente de la clase de homotopía propia de μ (rel$(0 \times J, 1 \times J)$). Y se verifican propiedades análogas a 1), 2), 3), 4) y 5) del Teorema 1.6.

Demostración.- La manera de definir μ_n es la siguiente:

Sea $f : (I^n \times J,\ I^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times 0) \longrightarrow (X, A, \beta, \beta(0))$ una aplicación propia que representa a $\xi \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\beta)$

Definimos una homotopía propia parcial de f

$$\phi : (T^{n-1} \times 0 \cup T^{n-1} \times J) \times I \longrightarrow A \subset X$$

por: $\phi(x,t,s) = \mu(1-s,t)$ para cada $(x,t,s) \in (I^{n-1}\times J)\times I$

Como $\phi|_{\partial I^{n-1}\times 0\times I}$ es una homotopía en A de $f|_{\partial I^{n-1}\times 0}$, aplicando la propiedad de extensión de homotopía, encontramos una extensión

$$F: I^{n-1}\times 0\times I \longrightarrow A$$

con $F_0 = f|_{I^{n-1}\times 0}$

Considerando ahora la aplicación propia

$$G : \partial(I^{n-1}\times J)\times I \longrightarrow A$$

dada por $G|_{I^{n-1}\times 0\times I} = F$ y $G|_{\partial I^{n-1}\times J\times I} = \phi|_{\partial I^{n-1}\times J\times I}$ y aplicando la propiedad de extensión de homotopía propia, obtenemos una extensión propia de G,

$$\bar{G}: I^{n-1}\times J\times I \longrightarrow A$$

tal que $\bar{G}_0 = f|_{I^{n-1}\times J}$

Llamando $H : \partial I^n\times I \longrightarrow X$ a la aplicación definida por:

$$H|_{I^{n-1}\times 0\times I} = F \quad \text{y} \quad H|_{I^{n-1}\times 0\times I} = \phi|_{I^{n-1}\times 0\times I}$$

y utilizando la propiedad de extensión de homtopía, H se extiende a una homotopía $\bar{H} : I^n\times 0\times I \longrightarrow X$ con $\bar{H}_0 = f|_{I^n\times 0}$

Si ahora definimos la aplicación propia

$$S : \partial(I^n\times J)\times I \longrightarrow X$$

por $S|_{I^n\times 0\times I} = \bar{H}$, $S|_{I^{n-1}\times J\times I} = \bar{G}$ y $S|_{I^{n-1}\times J\times I} = \phi|_{I^{n-1}\times J\times I}$ y aplicamos una vez más la propiedad de extensión de homotopía propia, obtenemos una extensión propia de S,

$$R : I^n\times J\times I \longrightarrow X$$

tal que $R_0 = f$.

Como R_1 es una aplicación propia del tipo

$$(I^n\times J, I^{n-1}\times J, I^{n-1}\times J, I^{n-1}\times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

representa un elemento η de $\underline{\pi}_n(X,A,\alpha)$

Definimos $\mu_n(\xi) = \eta$

Corolario 13.- Para $n \geq 2$, $\underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha)$ actúa en $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ como un grupo de operadores. (Seguimos utilizando la misma notación $u * \xi$ que en el caso absoluto).

Observemos que, análogamente al caso absoluto, para un camino μ en A entre dos rayos α y β de A, se deduce de la propia definición que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\beta) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mu_n"'] & \pi_n(X,A,\beta(0)) \arrow[d, "(\mu^0)_n"] \\
\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \arrow[r, "\partial"] & \pi_n(X,A,\alpha(0))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Del Teorema 12 obtenemos que si $\mathbf{a}$ es un final propio de A, como grupo abstracto $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ no depende del rayo α elegido para representar $\mathbf{a}$ y lo denotamos $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\mathbf{a})$. Si A posee un único final propio lo denotamos $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A)$ y lo llamamos $(\underline{\underline{\pi}})$ n-ésimo grupo de homotopía propia de par (X,A).

Definición 14.- Diremos que el par (X,A) es $(\underline{\underline{\pi}})$ n-simple sii para todo rayo α en A, $\underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha)$ actúa trivialmente en $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$.

Se tienen Proposiciones 15,16,17 análogas a las Proposiciones 4.6,5.6,6.6.

Teorema 18.- (X,A) es $(\underline{\underline{\pi}})$n-simple si y sólo si se verifica, para cada rayo α en A, que si dos aplicaciones propias f, g del tipo

$$(I^n \times J,\ I^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times J, T^{n-1} \times 0) \longrightarrow (X, A, \alpha, \alpha(0))$$

son homótopas propiamente mediante una homotopía H tal que $H(\partial I^n \times J \times I) \subset A$ y $H(x,t,s) = H(x',t,s)$ para cada (x',t,s) y $(x,t,s) \in T^{n-1} \times J \times I$, entonces son homótopas propiamente $(\mathrm{rel}(I^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times J, T^{n-1} \times 0))$.

Definición 19.- $\underline{\underline{\pi}}_n^{*}(X,A)$ es el conjunto de las clases de aplicaciones propias

$$f\colon (I^n \times J, \partial I^n \times J) \longrightarrow (X,A)$$

tales que $f(x,t) = f(x',t)$ para todo (x,t) y $(x',t) \in T^{n-1} \times J$; donde f y g están relacionadas sii existe una homotopía propia

$$H\colon (I^n \times J,\ \partial I^n \times J \times I) \longrightarrow (X,A)$$

tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y $H(x,t,s) = H(x',t,s)$ para todo (x,t,s) y $(x',t,s) \in T^{n-1} \times J \times I$

Para cada rayo α en A, tenemos una transformación inducida por la inclusión

$$\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n^{*}(X,A)$$

que en el caso de poseer A un único final propio y ser (X,A) $(\underline{\underline{\pi}})$n-simple es una biyección y podemos inducir en $\underline{\underline{\pi}}_n^{*}(X,A)$ una estructura de grupo, independiente del rayo base α, que hace de esta biyección un isomorfismo. En este caso, $\underline{\underline{\pi}}_n^{*}(X,A)$ es la interpretación geométrica del grupo abstracto $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A)$.

Definición 20.- Para cada $n \geq 2$, $\Omega_{\underline{\underline{\pi}}}^{n}(X,A,\alpha)$ es el subgrupo de $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ generado por los elementos de la forma $\xi - u * \xi$ donde $\xi \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ y $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha)$.

Y se tienen proposición y corolario análogos a ...6 y 12.6

*　　　*　　　*

Notemos que si μ es un camino en X entre dos rayos α y β, de la última demostración del párrafo 5, de la propia definición de μ_n para $\underline{\underline{I}}$ y $\underline{\underline{\pi}}$ y de la observación al Teorema 1.7, deducimos inmediatamente que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & \pi_{n+1}(X,\beta(0)) & \xrightarrow{\varphi_\beta} & \underline{\underline{I}}_n(X,\beta) & \xrightarrow{\Psi} & \underline{\underline{\pi}}_n(X,\beta) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(X,\beta(0)) & \longrightarrow \cdots \\
& \Big\downarrow (\mu^0)_{n+1} & & \Big\downarrow \mu_n & & \Big\downarrow \mu_n & & \Big\downarrow (\mu^0)_n & \\
\cdots \longrightarrow & \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) & \xrightarrow{\Psi} & \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(X,\alpha(0)) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Similar resultado se obtiene para un par propio (X,A) y un camino μ en A entre dos rayos α y β.

Para cada rayo α en X, definimos una acción de $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ en $\pi_n(X,\alpha(0))$

$$(*):\ \underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha) \times \pi_n(X,\alpha(0)) \longrightarrow \pi_n(X,\alpha(0))$$

como $u * \xi = \partial(u) * \xi$ para cada $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ y $\xi \in \pi_n(X,\alpha(0))$ $\partial(u) * \xi$ corresponde a la acción de $\pi_1(X,\alpha(0))$ en $\pi_n(X,\alpha(0))$.

Análogamente para un par propio (X,A) y cada rayo α en A, definimos una acción de $\underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha)$ en $\pi_n(X,A,\alpha(0))$

$$(*):\ \underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha) \times \pi_n(X,A,\alpha(0)) \longrightarrow \pi_n(X,A,\alpha(0))$$

como $u * \xi = \partial(u) * \xi$ para cada $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha)$ y $\xi \in \pi_n(X,A,\alpha(0))$ $\partial(u) * \xi$ corresponde a la acción de $\pi_1(A,\alpha(0))$ en $\pi_n(X,A,\alpha(0))$.

Son inmediatas las siguientes proposiciones:

<u>Proposición 21</u>.- Si X $((X,A))$ es (π) n-simple, entonces la acción de $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ $(\underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha))$ en $\pi_n(X,\alpha(0))$ $(\pi_n(X,A,\alpha(0)))$ es trivial para cada rayo α en X (en A).

<u>Proposición 22</u>.- Sea X un espacio ((X,A) un par propio)) tal que para algún rayo α en X (en A), $\pi_0(X,\alpha(0))$, $\underline{\underline{I}}_0(X,\alpha)$ y $\underline{\underline{I}}_{n-1}(X,\alpha)$ $(\pi_0(A,\alpha(0))$, $\underline{\underline{I}}_0(A,\alpha)$ y $\underline{\underline{I}}_{n-1}(X,A,\alpha)$) son triviales.

Si X $((X,A))$ es $(\underline{\underline{\pi}})$ n-simple, entonces X $((X,A))$ es (π) n-simple.

Un resultado inmediato es que para cada rayo α en X, $\underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ actúa en la sucesión exacta $\pi \longrightarrow \underline{\underline{I}} \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}$ asociada a (X,α)

<u>Proposición 23</u>.- Para cada $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(X,\alpha)$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "u_*"] & \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "u_*"] & \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "u_*"] & \pi_n(X,\alpha(0)) \arrow[r] \arrow[d, "u_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \arrow[r, "\Psi"] & \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) \arrow[r, "\partial"] & \pi_n(X,\alpha(0)) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Análogo resultado se obtiene para el caso relativo.

<u>Nota</u>.- De manera similar a la realizada en los párrafos 5, 6 y 7 pueden definirse acciones de $\underline{\underline{I}}_1(A,\alpha)$ en $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$, $\underline{\underline{\pi}}_n(A,\alpha)$ y $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$, para todo rayo α en A y (X,A) par propio. No desarrollamos su estudio pues no resulta interesante para el resto del presente trabajo.

CAPITULO II

GRUPOS DE (CO) HOMOLOGIA PROPIA

El objetivo de este capítulo es introducir teorías de (co) homología propia que se utilizarán en capítulos posteriores. Estas teorías ya han sido definidas en [E-H-R].

W. S. Massey desarrolla en [M] la teoría de (co) homología $(H^*)H_*$ utilizando cubos singulares en lugar de simples singulares (un n-cubo singular en un espacio X es una aplicación continua de $I^n \longrightarrow X$, para $n \geq 0$). La ventaja de trabajar con n-cubos en lugar de n-simples es que, en principio, se obtienen descripciones geométricamente más sencillas y muchas demostraciones tienen también formulaciones más cómodas, debido a que el producto de un cubo por I sigue siendo un cubo y al hecho que la subdivisión de un cubo es muy sencilla.

Con técnicas parecidas a las de Massey, pero utilizando n-cubos propios (1.I) y aplicaciones propias, se obtiene la homología singular propia J_* y factorizando por los n-cubos compactos la homología final propia E_*, ambas en la categoría de los pares propios, y relacionadas con la homología singular H_* por una sucesión exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1} \longrightarrow J_{n+1} \longrightarrow E_{n+1} \longrightarrow H_n \longrightarrow \cdots$$

Daremos las propiedades más interesantes de estas teorías de (co) homología propia, completadas respecto a las de [E-H-R] por el Teorema de la sucesión de Mayer-Viétoris. Asimismo recordaremos el algoritmo de cálculo que existe para estos homologías en la categoría de los complejos cúbicos propios finitos y estableceremos en esta categoría teoremas de escisión y Mayer - Viétoris con hipótesis menos restrictivas que serán útiles en capítulos posteriores.

1.- Grupos de homología propia

Sea X un espacio topológico.

<u>**Definición 1**</u>.- Un n-cubo singular propio de X es una aplicación propia $T: K_1 \times \ldots \times K_n \longrightarrow X$ donde $K_1 \times \ldots \times K_n$ es un n-cubo propio (1.I). Se dice degenerado si existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $T(x_1,\ldots, x_i,\ldots, x_n)$ no depende de x_i (en tal caso $K_i = I$, pues T es propia).

Sea $Q_n(X)$ el grupo abeliano libre generado por todos los n-cubos singulares propios de X y sea $D_n(X)$ el grupo abeliano libre generado por los n-cubos singulares propios degenerados de X. Se denota $C_n(X)$ al grupo cociente $Q_n(X) / D_n(X)$.

Para cada $i = 1,\ldots, n$, se consideran las inclusiones

$$\alpha_i^{l} : K_1 \times \ldots \times K_{i-1} \times K_{i+1} \times \ldots \times K_n \longrightarrow K_1 \times \ldots \times K_n$$

$$\alpha_i^{l}(x_1,\ldots, x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) = (x_1,\ldots, x_{i-1},l,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

donde $l = 0$ ó 1 si $K_i = I$ y $l = 0$ si $K_i = J$

Estas inclusiones inducen

$$(\alpha_i^1)^*: Q_n(X) \longrightarrow Q_{n-1}(X).$$

Para el caso $K_i = J$ definimos $(\alpha_i^1)^* = 0$

Se define un homomorfismo borde $\partial_n : Q_n(X) \longrightarrow Q_{n-1}(X)$ por:

$$\partial T = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left((\alpha_i^0)^* T - (\alpha_i^1)^* T \right)$$

Como $\partial\partial = 0$ y $\partial(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X)$ queda inducido

$$\partial : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

El complejo de cadenas obtenido se denota por $C_*(X)$.

Definición 2.- Se llama n-ésimo grupo de homología singular propia de X y se denota $J_n(X)$ a $H_n(C_*(X))$.

Para un par propio (X,A), se denota $C_*(X,A)$ al complejo cociente $C_*(X) / C_*(A)$.

Se llama n-ésimo grupo de homología singular propia del par (X,A) y se denota $J_n(X,A)$ a $H_n(C_*(X,A))$.

Sea G un grupo abeliano. Se define el n-ésimo grupo de cohomología singular propia del par (X,A) con coeficientes en G, $J^n(X,A;G) = H^n(C^*(X,A;G)$ donde $C^*(X,A;G) = \mathrm{Hom}(C_*(X,A);G)$. Como en la homología singular puede definirse:

$$J_n(X,A;G) = H_n(C_*(X,A) \otimes G)$$

Sea $S_*(X)$ el complejo de cadenas de cubos singulares de X. Notar que $S_*(X)$ es un subcomplejo de $C_*(X)$.

Definición 3.- Se llama n-ésimo grupo de homología final propia de X y se denota $E_n(X)$ a $H_n(C_*(X) / S_*(X))$.

De la manera habitual se definen $E_n(X,A)$, $E_n(X,A;G)$ y

$E^n(X,A;G)$ para un par propio (X,A) y un grupo abeliano G.

<u>Nota</u>.- Para los complejos S_*, C_*, C_*/S_* se denotarán los ciclos por Z_S, Z_C, $Z_{C/S}$ y los bordes por B_S, B_C, $B_{C/S}$ respectivamente.

Dada una aplicación propia $f: X \longrightarrow Y$ la correspondencia $T \longrightarrow f \circ T$ induce homomorfismos

$$J_n(f) = f_* : J_n(X) \longrightarrow J_n(Y)$$

$$E_n(f) = f_* : E_n(X) \longrightarrow E_n(Y)$$

Análogamente para el caso relativo.

Así J_* y E_* son functores covariantes de la categoría de los espacios topológicos (o bien pares propios) y aplicaciones propias, en la categoría de los grupos abelianos y homomorfismos.

J^* y E^* son functores contravariantes entre las mismas categorías.

Dado un espacio topológico X, considerando la sucesión exacta corta de complejos de cadenas :

$$0 \longrightarrow S_*(X) \longrightarrow C_*(X) \longrightarrow (C_*/S_*)(X) \longrightarrow 0$$

se deduce que X tiene asociada la siguiente sucesión exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_q(X) \longrightarrow J_q(X) \longrightarrow E_q(X) \longrightarrow H_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Análogamente para todo par propio (X,A).

2.-Principales propiedades de los grupos de homología propia.

Definición 1.- Para un espacio X, se considera el conjunto de los subespacios compacto-cerrados de X dirigido por la inclusión. Si K es un compacto-cerrado de X, $c(X-K)$ denota el conjunto de componentes conexas de $X-K$.

El conjunto de finales de Freudenthal de X se define como el límite inverso $\mathcal{F}(X) = \varprojlim c(X-K)$. Un final Freudenthal e de X se representa por $e = \{U_K\} \in \varprojlim c(X-K)$.

Sea U un subconjuto de X, se denota:

$$e < U, \text{ si existe un } K \text{ tal que } U_K \subset U$$

$$U^{\mathcal{F}} = \{e \in \mathcal{F}(X) \mid e < U\}, \quad U^* = U \cup U^{\mathcal{F}}$$

Se llama topología de Freudenthal a la topología inducida en $X \cup \mathcal{F}(X)$ por la base $\{U^* \mid U$ es un abierto de $X\}$. Este espacio topológico se denota X^* y es una extensión de X.

X^* fué estudiado por Freudenthal en [F.H].

Recordamos que se verifican los siguientes teoremas:

Teorema 2.- Sea X un espacio T_2, localmente arco conexo, localmente compacto y con un número finito de componentes conexas. Entonces X es abierto en X^* y X^* es T_2, localmente conexo y además compacto.(Entonces X^* se llama compactificación de Freudenthal de X).

Teorema 3.- Sea $f: X \longrightarrow Y$ propia, donde Y tiene como base los abiertos con frontera compacta y además Y es localmente conexo.

Entonces, existe una única aplicación continua $f^*: X^* \longrightarrow Y^*$ tal que $f^*(\mathcal{F}(X)) \subset \mathcal{F}(Y)$ y el cuadrado:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\ X^* \arrow[r, "f^*"] & Y^* \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Un estudio detallado sobre las propiedades de X^* y su relación con otros espacios topológicos que extienden X, a través de los finales de Freudenthal, y a través de los finales propios $F(X)$ está realizado en [Dm.-He.1], de donde puede obtenerse el siguiente:

<u>Corolario 4</u>.- Sea X un espacio topológico, $K_1 \times \ldots \times K_n$ un n-cubo propio y $f: K_1 \times \ldots \times K_n \longrightarrow X$ una aplicación propia. Entonces queda inducida de modo natural $f^*: (K_1 \times \ldots \times K_n)^* \longrightarrow X^*$ continua.

Ahora, daremos una lista de propiedades que verifica la homología singular propia:

P1) Existe una sucesión exacta asociada a cada par propio (X, A).

$$\cdots \longrightarrow J_q(A) \longrightarrow J_q(X) \longrightarrow J_q(X,A) \longrightarrow J_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

P2) Sean $f, g: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ aplicaciones propias entre pares propios.

Si f y g son homótopas propiamente, entonces los homomorfismos inducidos $f_*, g_*: J_q(X,A) \longrightarrow J_q(Y,B)$ son iguales.

P3) Sea P un punto, entonces $J_q(P) = 0$ si $q \neq 0$ y $J_0(P) = \mathbb{Z}$

P4) Sean X_γ las arco componentes de X. Si cada X_γ es propia en X, entonces $J_q(X,A) = \bigoplus_\gamma J_q(X_\gamma, A \cap X_\gamma)$ para cada subespacio propio A de X.

P5) Si X es compacto, $J_q(X) = H_q(X)$.

P6) (Propiedad de fuga). Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación propia tal que existe $F : J \times X \longrightarrow Y$ propia y $F(0,x) = f(x)$ para cada $x \in X$.

Entonces el homomorfismo inducido $f_*: J_q(X) \longrightarrow J_q(Y)$ es nulo.

Corolario de P6) : $J_q(X \times J) = 0$ para todo q.

P7) Sea $U \subset X$ tal que $\mathrm{cl}\,U \subset \mathrm{int}\,A$ y $A^{\mathcal{F}} \cup (X-U)^{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(X)$. Entonces, $J_q(X-U, A-U) \longrightarrow J_q(X,A)$ es isomorfismo. Notar que P7) es una propiedad débil de escisión pues a la condición habitual hay que añadir la que concierne directamente a los finales de Freudenthal.

La homología final propia verifica propiedades similares a P1), P2), P4), P7) y además las siguientes:

PE3) $E_q(X \times J) \cong H_{q-1}(X)$. En particular $E_q(J) = 0$ si $q \neq 1$ y $E_1(J) \cong \mathbb{Z}$.

PE5) Si X es compacto, $E_q(X) = 0$ para todo q.

PE6) $E_1(X)$ es el grupo abeliano libre sobre el conjunto de finales propios de X.

PE7) Sea (X,A) un par propio de espacios compactos y $U \subset X$

tal que $\operatorname{cl} U \subset \operatorname{int} A$. Entonces:

$$E_q((X-U)\times J,\ (A-U)\times J) \longrightarrow E_q(X\times J,\ A\times J)$$

es un isomorfismo.

Utilizando las propiedades anteriores se obtiene que:

$J_q(\mathbb{R}^n) = 0$ si $q \neq n$ y $J_n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}$

$J_q(\mathbb{R}_+^n,\ \mathbb{R}^{n-1}) = 0$ si $q \neq n$ y $J_n(\mathbb{R}_+^n,\ \mathbb{R}^{n-1}) = \mathbb{Z}$.

($\mathbb{R}_+^n$ es el semiespacio euclídeo correspondiente a $x_n \geq 0$).

$E_q(D^{n-1}\times J, S^{n-2}\times J) = 0$ si $q \neq n$ y $E_n(D^{n-1}\times J, S^{n-2}\times J) = \mathbb{Z}$

A continuación daremos un teorema que completa las propiedades de las homologias J_* y E_* y no está recogido en [E-H-R].

<u>Sucesión exacta de Mayer-Vietoris.</u>

Sean A y B dos subespacios propios de un espacio topológico X. Se consideran las inclusiones propias:

$$\begin{aligned} j_1 &: A\cap B \longrightarrow A \\ j_2 &: A\cap B \longrightarrow B \\ k &: A \longrightarrow X \\ l &: B \longrightarrow X \end{aligned}$$

que inducen los homomorfismos j_{1*}, j_{2*}, k_*, l_* en los correspondientes grupos dé homología singular propia.

Definimos ahora los homomorfismos

$$\varphi : J_n(A\cap B) \longrightarrow J_n(A) \oplus J_n(B)$$

$$\psi : J_n(A) \oplus J_n(B) \longrightarrow J_n(X)$$

por:

$\varphi(x) = (j_{1*}(x), j_{2*}(x))$ para $x \in J_n(A \cap B)$

$\Psi(u,v) = k_*(u) - l_*(v)$ para $u \in J_n(A)$ y $v \in J_n(B)$

Teorema 5.- Sean A y B subespacios propios de X, tales que $X = \text{int } A \cup \text{int } B$ y $\mathcal{F}(X) = A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}}$. Entonces existe un homomorfismo natural para cada n,

$$\Delta : J_n(X) \longrightarrow J_{n-1}(A \cap B)$$

tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} J_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} J_n(A) \oplus J_n(B) \xrightarrow{\Psi} J_n(X) \xrightarrow{\Delta} J_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

(la llamaremos sucesión de Mayer-Vietoris para la homología J_*)

Demostración.- Sea $\mathcal{U} = \{A,B\}$. Como Massey en [M], diremos que un n-cubo singular propio T es menor de orden $\mathcal{U}$ si $\text{Im}T \subset A$ ó $\text{Im}T \subset B$. LLamamos $Q_n(X, \mathcal{U})$ al subgrupo de $Q_n(X)$ generado por los n-cubos singulares propios de orden $\mathcal{U}$. De manera análoga definimos $D_n(X, \mathcal{U})$, y $C_n(X, \mathcal{U}) = Q_n(X, \mathcal{U}) / D_n(X, \mathcal{U})$

Es claro que $\partial(Q_n(X, \mathcal{U})) \subset Q_{n-1}(X, \mathcal{U})$ y por tanto podemos definir $Z_n(X, \mathcal{U})$, $B_n(X, \mathcal{U})$ y $J_n(X, \mathcal{U})$ de la manera habitual.

Análogamente a lo que ocurre en P7), ver [E-H-R], la condición sobre los finales de Freudenthal, junto con el hecho de ser homótopos el operador subdivisión Sd y la identidad id: $C_*(X) \longrightarrow C_*(X)$, permitirán demostrar en este caso que el homomorfismo inducido por la inclusión $\sigma_\#: C_*(X, \mathcal{U}) \longrightarrow C_*(X)$ induce un isomorfismo $\sigma_*: J_*(X, \mathcal{U}) \longrightarrow J_*(X)$.

Notemos que $C_n(X, \mathcal{U}) = C_n(A) + C_n(B)$

σ_* es suprayectiva: Sea $[z] \in J_n(X)$ donde $z =$

$= T_1 + \ldots + T_m \in C_n(X)$ es un ciclo.

Para cada n-cubo singular propio T_i de la cadena z, donde $T_i : \sigma_i \longrightarrow X$ con σ_i = n-cubo no compacto, consideramos la aplicación continua inducida en los espacios de Freudental $T_i^* : \sigma_i \cup e \longrightarrow X \cup \mathcal{F}(X)$ donde $e = \{U_K\}$ es el único final de Freudenthal de σ_i. $T_i^*(e) \in \mathcal{F}(X) = A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}}$. Por tanto $T_i^*(e) \in A^{\mathcal{F}}$ ó bien $T_i^*(e) \in B^{\mathcal{F}}$. En el primer caso, existe un compacto K en σ_i, con $U_K \in e$ tal que $T_i(U_K) \subset A$. Entonces existe un $n_i \in N$ tal que $Sd^{n_i}(T_i) = \sum_j T_i^j$ verifica que para todos los n-cubos singulares propios no compactos T_i^j, $Im(T_i^j) \subset A$.

En el segundo caso, un razonamiento análogo conduce a una conclusión similar con $Im(T_i^j) \subset B$.

Como z es una suma finita de n-cubos singulares propios, el razonamiento anterior junto con el de Massey en [M] (7.II), permiten encontrar un $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que todos los n-cubos singulares propios correspondientes a $Sd^N(z)$ estén totalmente contenidos en A o en B. Entonces $Sd^N(z) \in C_n(X, \mathcal{U})$. Además es un ciclo por serlo z y como Sd e id son aplicaciones de cadenas homótopas $[Sd^N(z)] \in J_n(X, \mathcal{U})$ verifica $\sigma_* [Sd^N(z)] = [z]$.

σ_* es inyectiva: Sea $[z] \in J_n(X, \mathcal{U})$ donde z es un n-ciclo de $C_n(X, \mathcal{U})$. Supongamos que $\sigma_*[z] = 0 \in J_n(X)$. Entonces existe una (n+1) cadena $w \in C_{n+1}(X, \mathcal{U})$ tal que $\partial(w) = z$.

Aplicando el razonamiento anterior, podemos encontrar $q \in N$ con $Sd^q(w) \in C_{n+1}(X, \mathcal{U})$. Utilizando de nuevo que Sd e id son homótopas y razonando igual que Massey, obtenemos que z es el borde de una (n+1)-cadena de $C_{n+1}(X, \mathcal{U})$, por lo tanto $[z] = 0 \in J_n(X, \mathcal{U})$

Considerando ahora los homomorfismos inducidos:

$$k_\# : C_n(A) \longrightarrow C_n(X) \qquad l_\# : C_n(B) \longrightarrow C_n(X)$$

$$k'_\# : C_n(A) \longrightarrow C_n(X, \mathcal{U}) \qquad l'_\# : C_n(B) \longrightarrow C_n(X, \mathcal{U})$$

$$j_{1\#} : C_n(A \cap B) \longrightarrow C_n(A) \qquad j_{2\#} : C_n(A \cap B) \longrightarrow C_n(B)$$

los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & C_n(X, \mathcal{U}) \arrow[d, "\sigma_\#"] \\ C_n(A) \arrow[ur, "k'_\#"] \arrow[dr, "k_\#"'] & \\ & C_n(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C_n(X, \mathcal{U}) \arrow[d, "\sigma_\#"] \\ C_n(B) \arrow[ur, "l'_\#"] \arrow[dr, "l_\#"'] & \\ & C_n(X) \end{tikzcd}$$

Definiendo los homomorfismos:

$$\varphi : C_n(A \cap B) \longrightarrow C_n(A) \oplus C_n(B)$$

$$\psi : C_n(A) \oplus C_n(B) \longrightarrow C_n(X, \mathcal{U})$$

por:

$\varphi(x) = (j_{1\#}(x), j_{2\#}(x))$ para cada $x \in C_n(A \cap B)$

$\psi(u, v) = k'_\#(u) - l'_\#(v)$ para cada $u \in C_n(A)$ y $v \in C_n(B)$

podemos formar la sucesión exacta corta de complejos de cadenas:

$$0 \longrightarrow C_*(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{\psi} C_*(X, \mathcal{U}) \longrightarrow 0$$

Aplicando el Lema de la serpiente, existe un homomorfismo natural de conexión:

$$\Delta_n : J_n(X, \mathcal{U}) \longrightarrow J_{n-1}(A \cap B)$$

que hace exacta la sucesión:

$$\longrightarrow J_n(A\cap B) \xrightarrow{\varphi} J_n(A)\oplus J_n(B) \xrightarrow{\Psi} J_n(X, \mathcal{U}) \xrightarrow{\Delta} J_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow$$

Como $J_n(X, \mathcal{U})$ es isomorfo a $J_n(X)$ a través de la inclusión y los diagramas son conmutativos, obtenemos la sucesión exacta:

$$\longrightarrow J_n(A\cap B) \xrightarrow{\varphi} J_n(A)\oplus J_n(B) \xrightarrow{\Psi} J_n(X) \xrightarrow{\Delta} J_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \quad \#$$

Notas.- 1) Un teorema análogo al anterior se obtiene para la homología E_*

2) De manera similar a la de la (co)homología singular, se demuestra que las (co)homologías propias (J^*, E^*) J_*, E_* satisfacen un teorema de los coeficientes universales análogo al de la (co)homología singular $(H^*)H_*$

3.- Homología propia para complejos cúbicos propios finitos.

Recordamos en este párrafo, el algoritmo de cálculo de las homologías propias, definidas en el párrafo 1, en la categoría de los complejos cúbicos propios finitos y aplicaciones propias

Sea a^n un n-cubo propio $K_1 \times \cdots \times K_n$. Notemos que está contenido en $\mathbb{R}^n$ Si g es un isomorfismo lineal y t una traslación en $\mathbb{R}^q$ $(q \geq n)$, el subespacio de $\mathbb{R}^q$ que es de la forma $tg(a^n)$ se llamará también n-cubo propio y lo denotaremos σ^n Los 0-cubos son los puntos.

Una (n-1) cara de a^n es un subespacio de la forma:

$$a^{n-1} = K_1 \times \dots \times K_{i-1} \times 1 \times K_{i+1} \times \dots \times K_n$$

donde $l = 0$ ó 1 si $K_i = I$ y $l = 0$ si $K_i = J$.

Los subespacios de σ^n de la forma $t_g(a^{n-1})$ se llamarán $(n-1)$ caras de σ^n.

Iterando este proceso pueden definirse todas las caras de menor dimensión

La unión de todas las caras de σ^n se llamará borde de σ^n y se denotará $\partial\sigma^n$ ó $\dot{\sigma}^n$.

<u>**Definición 1**</u>.- Un complejo cúbico propio finito X es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ con una familia finita de subespacios $\mathcal{S} = \{\sigma_i\}_{i=1}^{p}$ verificando:

(i) σ_i es un n-cubo propio, para algún n con $0 \leq n \leq m$

(ii) $\bigcup_{i=1}^{p} \sigma_i = X$

(iii) Si σ_i es cara de σ_j y σ_j pertenece a $\mathcal{S}$ entonces σ_i pertenece a $\mathcal{S}$.

(iv) Si σ_i y σ_j pertenecen a $\mathcal{S}$ entonces $\sigma_i \cap \sigma_j$ es vacío ó una cara común de σ_i y σ_j

Los σ_i se dirán cubos propios de X.

Un subcomplejo cúbico propio de X es un subespacio propio A de X y una subfamilia $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ satisfaciendo (ii) e (iii) (y por tanto (i) e (iv)). Al par (X,A) lo llamaremos par cúbico propio finito.

Definimos el r-esqueleto de X y lo denotamos X^r como el subespacio unión de todos los cubos propios de X de dimensión menor o igual que r La dimensión de X, que denotamos dim X, es el máximo de las dimensiones de sus cubos

Llamaremos también complejo cúbico propio finito a todo espacio homeomorfo a uno de los anteriormente definidos.

Teorema 2.- Sea X un complejo cúbico propio finito. Entonces:

i) $J_n(X^n, X^{n-1})$ es un grupo abeliano libre generado por $\{i_*(x)\}$ donde x es un generador de $J_n(\sigma^n, \partial\sigma^n)$ e $i: (\sigma^n, \partial\sigma^n) \longrightarrow (X^n, X^{n-1})$ es la aplicación inclusión de un n-cubo propio σ^n de X.

$J_q(X^n, X^{n-1}) = 0 \quad$ si $q \neq n$

ii) $E_n(X^n, X^{n-1})$ es un grupo abeliano libre generado por $\{i_*(x)\}$, donde x es un generador de $E_n(\sigma^n, \partial\sigma^n)$, y σ^n un n-cubo propio no compacto de X.

$E_q(X^n, X^{n-1}) = 0 \quad$ si $q \neq n$.

Teorema 3.- Para todo $q > n$:

i) $J_q(X^n) = 0$

ii) $E_q(X^n) = 0$

Si se consideran las aplicaciones:

$$d_J: J_n(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow J_{n-1}(X^{n-1}) \longrightarrow J_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

$$d_E: E_n(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow E_{n-1}(X^{n-1}) \longrightarrow E_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

de manera análoga a la homología singular se tiene que:

$\{J_q(X^q, X^{q-1}), d_J\}$ y $\{E_q(X^q, X^{q-1}), d_E\}$ son complejos de cadenas de grupos abelianos libres y además se obtine el siguiente:

Teorema 4.- (Algoritmo de Cálculo).

Las homologías de los complejos de cadenas anteriores son respectivamente $J_*(X)$ y $E_*(X)$.

Observemos que por todo lo expuesto anteriormente, si X es un complejo cúbico propio finito, para calcular las homologías H_*, J_*, E_* podemos proceder de la siguiente manera:

Elegida una orientación en cada n-cubo propio σ^n de X, se considera el grupo abeliano libre generado por los cubos propios compactos de X, el generado por todos los cubos propios, y el generado por los cubos propios no compactos respectivamente. Posteriormente se toma la frontera geométrica, pero en el caso de la homología E_*, se consideran sólo las caras no compactas

En el caso de un par cúbico finito propio (X,A), se consideran los complejos de cadenas $\{J_q(\overline{X}^q, \overline{X}^{q-1}), d_J\}$ y $\{E_q(\overline{X}^q, \overline{X}^{q-1}), d_E\}$ donde $\overline{X}^q = X^q \cup A$, $J_q(\overline{X}^q, \overline{X}^{q-1})$ está generado por los n-cubos propios de X que no están en A y $E_q(\overline{X}^q, \overline{X}^{q-1})$ está generado por los n-cubos propios no compactos de X que no están en A. Para efectuar los cálculos se procede como en el cálculo de los grupos de homología absolutos.

Por otra parte, si para cada n-cubo propio de X, σ^n, correspondiente a $K_1 \times \ldots \times K_n$ con $K_{i_1} = \ldots = k_{i_s} = J$ y $K_{i_{s+1}} = \ldots = K_{i_n} = I$, denotamos por M_{n-1} al subespacio dado por $t_{i_1} + \ldots + t_{i_s} = 1$, observamos que si $s = 0$, $M_{n-1} = \emptyset$ y en cualquier otro caso M_{n-1} es un (n-1) simple o un (n-1) cubo compacto

Llamando L^{n-1} al subespacio $\cup M_{n-1}$ (unión extendida a todos los n-cubos propios de X), L^{n-1} es un complejo de bolas clásico ([Bu-R-S].I 1) con tantas (n-1) bolas (que son (n-1) cubos compactos o (n-1) simples) como n-cubos propios no compactos tiene X^n.

Denotando, para cada σ^n, por R_n al subespacio dado por $t_{i1}+\ldots+t_{is}<1$ observamos que $\sigma^n - R_n$ es homeomorfo a $M_{n-1}\times J$. En este sentido, $L^{n-1}\times J \subset X^n$. Entonces se verifica el siguiente teorema:

Teorema 5.- i) $J_q(X^n) \cong H_q(X^n, L^{n-1}\times J)$

ii) $E_q(X^n) \cong H_{q-1}(L^{n-1})$

Sean X^* y $\hat{X}$ las compactificaciones de Freudenthal y Alexandroff respectivamente del complejo cúbico propio finito X. Entonces se tiene:

Teorema 6 - i) $J_q(X) \cong H_q(X^*, \mathcal{F}(X))$

ii) $J_q(X) \cong H_q(\hat{X},\infty)$

Además, si $\bar{J}_*$ (resp. $\bar{E}_*$), es una teoría de homología que satisface las propiedades descritas en el párrafo 2, en la categoría de los complejos cúbicos propios finitos y aplicaciones propias, existe una equivalencia natural $\bar{J}_* \longrightarrow J_*$ (resp. $\bar{E}_* \longrightarrow E_*$)

Debido al algoritmo de cálculo que existe en esta categoria es posible dar teoremas de escisión y sucesión de Mayer Vietoris para homologías propias donde las hipótesis de P7).2 y del Teorema 5.2 están sensiblemente rebajadas.

Para un complejo cúbico propio finito X, denotaremos $S_q(|X|)$ al grupo abeliano libre generado por los q-cubos propios compactos de X, $H_q(X^q, X^{q-1})$; $C_q(|X|)$ al grupo abeliano libre generado por los q-cubos propios de X, $J_q(X^q, X^{q-1})$; y $(C/S)_q(|X|)$ al grupo abeliano libre generado por los q-cubos propios no compactos de X, $E_q(X^q, X^{q-1})$.

El algoritmo de cálculo permite computar las homologías H_*, J_*, E_* del complejo X como las homologías de los complejos $\{S_*(|X|), d_H\}$, $\{C_*(|X|), d_J\}$ y $\{(C/S)_*(|X|), d_E\}$ respectivamente. En este caso diremos que hacemos el cómputo a través de la estructura esqueletal de X.

Análogas notaciones se emplean para el caso relativo

<u>**Teorema 7.-**</u> Sean X_1 y X_2 subcomplejos del complejo cúbico propio finito X, verificando que $X = X_1 \cup X_2$. Entonces:

$$J_q(X_1 \cup X_2, X_2) \cong J_q(X_1, X_2 \cap X_1) \quad \text{para cada } q$$

<u>Demostración:</u> Observar que $X_2 \cap X_1$ es un subcomplejo de X.

Por el algoritmo de cálculo, $J_q(X_1 \cup X_2, X_2)$ y $J_q(X_1, X_2 \cap X_1)$ son los q-ésimos grupos de homología de los complejos $\{C_*(|X_1 \cup X_2, X_2|), d_J\}$ y $\{C_*(|X_1, X_2 \cap X_1|), d_J\}$, respectivamente.

Ahora bien, para cada n, $C_n(|X_1 \cup X_2, X_2|)$ es el grupo abeliano libre generado por los n-cubos propios de $X_1 \cup X_2$ que no están en X_2, y $C_n(X_1, X_2 \cap X_1)$ es el grupo abeliano libre generado por los n-cubos propios de X_1 que no están en $X_1 \cap X_2$, es decir, los de X_1 que no están en X_2. #

<u>Nota</u>.- Llamando $U = X_2 - (X_1 \cap X_2)$, el enunciado del teorema anterior es claramente de escisión: $J_q(X, X_2) \cong J_q(X-U, X_2-U)$

<u>Teorema 8</u>.- Sea X un complejo cúbico propio finito, X_1 y X_2 subcomplejos de X con $X = X_1 \cup X_2$. Entonces existe un homomorfismo

$$\Delta: J_n(X) \longrightarrow J_{n-1}(X_1 \cap X_2)$$

que hace exacta la siguiente sucesión:

$$\cdots \longrightarrow J_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\varphi} J_n(X_1) \oplus J_n(X_2) \xrightarrow{\Psi} J_n(X) \xrightarrow{\Delta} J_{n-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdots$$

<u>Demostración</u> .- Consideramos los complejos de cadenas $C_*(|X|)$, $C_*(|X_1|)$, $C_*(|X_2|)$, $C_*(|X_1 \cap X_2|)$ asociados a las estructuras esqueletales de los complejos cúbicos finitos propios X, X_1, X_2, $X_1 \cap X_2$ respectivamente.

Notemos que $C_q(|X|) = C_q(|X_1|) + C_q(|X_2|)$ para cada q.

Sean los homomorfismos inducidos por las inclusiones:

$$\Psi_1: C_*(|X_1|) \longrightarrow C_*(|X|)$$
$$\Psi_2: C_*(|X_2|) \longrightarrow C_*(|X|)$$
$$i_1: C_*(|X_1 \cap X_2|) \longrightarrow C_*(|X_1|)$$
$$i_2: C_*(|X_1 \cap X_2|) \longrightarrow C_*(|X_2|)$$

donde para un cubo propio de $X_1 \cap X_2$, consideramos que i_1 ó i_2 cambian la orientación del cubo

Si definimos los homomorfismos:

$$\varphi: C_*(|X_1 \cap X_2|) \longrightarrow C_*(|X_1|) \oplus C_*(|X_2|)$$

$$\Psi: C_*(|X_1|) \oplus C_*(|X_2|) \longrightarrow C_*(|X|)$$

por:

$$\varphi(x) = (i_1(x),\ i_2(x))$$

$$\Psi(u,v) = \Psi_1(u) + \Psi_2(v)$$

Obtenemos la sucesión exacta corta del complejos de cadenas:

$$0 \longrightarrow C_*(|X_1 \cap X_2|) \xrightarrow{\varphi} C_*(|X_1|) \oplus C_*(|X_2|) \xrightarrow{\Psi} C_*(|X|) \longrightarrow 0$$

Por lo tanto, existe un homomorfismo

$$\Delta: H_n(C_*(|X|)) \longrightarrow H_{n-1}(C_*(|X_1 \cap X_2|))$$

que hace exacta la sucesión:

$$\cdots \longrightarrow H_n(C_*(|X_1 \cap X_2|)) \xrightarrow{\varphi} H_n(C_*(|X_1|)) \oplus H_n(C_*(|X_2|)) \xrightarrow{\Psi}$$

$$\longrightarrow H_n(C_*(|X|)) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C_*(|X_1 \cap X_2|)) \longrightarrow \cdots$$

Luego obtenemos la sucesión exacta:

$$\longrightarrow J_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\varphi} J_n(X_1) \oplus J_n(X_2) \xrightarrow{\Psi} J_n(X) \xrightarrow{\Delta} J_{n-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdot \quad \#$$

Teoremas analogos a los Teoremas 7 y 8 se obtienen para los homologías H_* y E_*.

<u>Nota</u> - L.J Hernández demuestra en [He.] que las homologías J_* y E_* definidas en el párrafo 1, pueden obtenerse utilizando simplemente n-cubos propios de la forma I^n ó $I^{n-1} \times J$.

Seguiremos usando las mismas notaciones C_* y C_* / S_* en este caso.

CAPITULO III

TEOREMAS DE TIPO HUREWICZ PARA EL CASO PROPIO

El presente capítulo se dedica a analizar la relación existente entre los invariantes estudiados en los Capítulos I y II Entre los grupos de homotopía de Hurewicz, π_n, y los de homología singular, H_n, esta relación viene dada por la aplicación de Hurewicz $\rho_\pi : \pi_n \longrightarrow H_n$ y los respectivos teoremas de Hurewicz para los casos absoluto y relativo (ver [W G.2] (7.1) IV, (7.2) IV y (7.10) V).

En el párrafo 1, recordamos cómo L. J. Hernández obtiene en [He.] para un espacio X y un rayo α en X, homomorfismos naturales de Hurewicz, $\rho_{\underline{\underline{\pi}}} : \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) \longrightarrow E_{n+1}(X)$ y $\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X)$ que verifican el Teorema de Hurewicz para $n \geq 1$, y $n \geq 2$ respectimamente, y hacen conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) & \longrightarrow & \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) & \longrightarrow & \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) & \longrightarrow & \pi_n(X,\alpha(0)) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow \rho_\pi & & \downarrow \rho_{\underline{\underline{I}}} & & \downarrow \rho_{\underline{\underline{\pi}}} & & \downarrow \rho_\pi & \\
\cdots \longrightarrow & H_{n+1}(X) & \longrightarrow & J_{n+1}(X) & \longrightarrow & E_{n+1}(X) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

También en este párrafo se demuestra el Teorema de Hurewicz para $\rho_{\underline{\underline{\pi}}}$ en el caso relativo.

En el párrafo 2, se define para un par propio (X,A) y un rayo α en A, la aplicación (homomorfismo si $n \geq 2$) $\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X,A)$ y se observa que hace conmutativo un diagrama análogo al anterior pero para el caso relativo, obteniendo que, cuando (X,A,α) es (π) n-conexo, $(\underline{\underline{I}})$ (n-1)-conexo, y $\pi_0(A)$, $\pi_0(X)$, $\underline{\underline{I}}_0\ (A,\alpha)$ y $\underline{\underline{I}}_0(X,\alpha)$ son triviales, $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ es un epimorfismo cuyo núcleo contiene al subgrupo generado por los elementos de la forma $\xi - u_* \xi$ donde $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ y $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha)$, que denotábamos en el Capítulo I, $\Omega_{\underline{\underline{I}}}^n(X,A,\alpha)$. El resto del capítulo tiene como objetivo demostrar que este contenido es una igualdad. Para ello, en el párrafo 3, se estudia otra manera menos rígida de definir los grupos $\underline{\underline{I}}_n$ que la dada en 2.I aún en el caso en el que se sigue utilizando la celda $I^n \times J$, obteniendo una interpretación geométrica de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha) = \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) / \Omega_{\underline{\underline{I}}}^n(X,A,\alpha)$, cuando A posee un único final propio, como clases de homotopía propia de aplicaciones propias del tipo $(I^n \times J\ ,\ \partial(I^n \times J)) \longrightarrow (X,A)$.

En el párrafo 4, se da un teorema de adición de homotopía propia y en el 5 se definen unos nuevos complejos de cadenas similares a los complejos de Eilenberg-Blakers para homología singular y, que en las hipótesis del Teorema de Hurewicz, resultan ser homotópicamente equivalentes al de la homología singular propia dado en el Capítulo II.

Utilizando los grupos de homología de estos complejos, intermedios entre los grupos $\underline{\underline{I}}_n$ y J_{n+1}, en el párrafo 6 se establecen los teoremas de tipo Hurewicz para nuestro caso

1.- Relación de los grupos $\mathbf{X}_*$ y E_* con los grupos de homotopía y homología local de Hu. Homomorfismos de Hurewicz entre estos grupos.

S. T. Hu introduce en [Hu.1] los grupos de homología local de un par (X,A) en un punto $x_0 \in A$ de la siguiente manera:

Considera el conjunto de los caminos en X que comienzan en x_0 y no vuelven a pasar por ese punto

$\{ \sigma : I \longrightarrow X \mid \sigma(t) = x_0$ si y sólo si $t = 0 \}$ dotándolo de la topología compacto-abierta ; lo llama espacio tangente a X en el punto x_0, y lo denota $T(X,x_0)$ o bien X^*. (Nosotros lo denotaremos X_* para no inducir a error con la compactificación de Freudenthal de X)

Notar que $A_* \subset X_*$. Define entonces el n-ésimo grupo de homología local del par (X,A) en el punto x_0 con coeficientes en un grupo G y lo denota $L_n(X,A,x_0;G)$ como el n-ésimo grupo de homología singular del par (X_*,A_*) con coeficientes en G. Es decir $L_n(X,A,x_0;G) = H_n(X_*,A_*;G)$.

Si $G = \mathbb{Z}$ se denota $L_n(X,A,x_0)$ y si $A = x_0$, se obtiene $L_n(X,x_0) = H_n(X_*)$.

También en [Hu.1] define los grupos de homotopía local de un espacio X en un punto x_0, basados en $\sigma \in X_*$, y los denota $\lambda_n(X,x_0;\sigma)$, como $\lambda_n(X,x_0;\sigma) = \pi_n(X_*,\sigma)$.

(Aquí exige que la arco componente de X que contiene a x_0 sea no degenerada para que $T(X,x_0)$ no sea vacío).

Cuando X es arco conexo "alrededor de x_0", (X_* arco conexo),

$\pi_n(X_*,\sigma)$ no depende de la elección del camino σ de X_* y en este caso se denotan $\lambda_n(X,x_0)$.

Si A es un subespacio de X que contiene a x_0 y la arco componente de A que contiene a x_0 es no degenerada, define los grupos de homotopía local del par (X,A) en el punto x_0 para un camino base $\sigma \in A_*$, denotándolos $\lambda_n(X,A,x_0;\sigma)$, como:

$$\lambda_n(X,A,x_0;\sigma) = \pi_n(X_*,A_*;\sigma)$$

Asimismo, establece un Teorema de Hurewicz entre $\lambda_n(X,x_0)$ y $L_n(X,x_0)$.

Para el caso relativo es inmediato comprobar que también se verifica un teorema de Hurewicz.

Por otra parte, dado un par propio (X,A) y una aplicación propia, $\alpha : J \longrightarrow A$, Z. Čerin demuestra en [Ce] que:

$$\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \cong \pi_n \circ I(X,A,\alpha)$$

siendo $I(X,A,\alpha) = ((\hat{X})_*, (\hat{A})_*, p_\alpha)$ donde $\hat{X}$ y $\hat{A}$ denotan las respectivas compactificaciones de Alexandroff de X y A, $(\hat{X})_*$ (análogamente $(\hat{A})_*$) es el espacio tangente a $\hat{X}$ en el punto ∞, pero considerando ahora caminos, que en vez de comenzar, acaban en ∞ sin haber pasado antes por ese punto, es decir:

$$(\hat{X})_* = \{\sigma : (I,1) \longrightarrow (\hat{X},\infty) \mid \sigma^{-1}(\infty) = 1\}, \quad \text{y}$$

$p_\alpha \in (\hat{A})_*$ es el camino definido por $p_\alpha(t) = \alpha(t/1-t)$ si $0 \leq t < 1$ y $p_\alpha(1) = \infty$.

Análogamente para el caso absoluto.

También en [Ce], Čerin define los grupos de homología propia $\underline{\underline{H}}_n = H_n \circ I$ y hace notar que $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ y $\underline{\underline{H}}_n(X,A)$ son precisamente los grupos de homotopía y homología local de Hu, $\lambda_n(\hat{X},\hat{A},\infty;p_\alpha)$ y $L_n(\hat{X},\hat{A},\infty)$ respectivamente.

En [He], L.J.Hernández demuestra que los grupos de homología final propia de X son los grupos de homología local de $\hat{X}$ en ∞, pero de una dimensión menos, es decir:

$$E_{n+1}(X) \cong L_n(\hat{X},\infty)$$

Deduce de forma inmediata que para un espacio X con un rayo α, existe un homomorfismo de Hurewicz:

$$\rho_{\underline{\underline{\pi}}}: \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) \longrightarrow E_{n+1}(X)$$

que satisface el Teorema de Hurewicz para $n \geq 1$.

Observa también, que puede definir un homomorfismo natural de tipo Hurewicz $\rho_{\underline{\underline{I}}}: \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \longrightarrow E_{n+1}(X)$ para cada $n \geq 1$, haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(X,\alpha(0)) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_\pi"] & \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\underline{\underline{I}}}"] & \underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\underline{\underline{\pi}}}"] & \pi_n(X,\alpha(0)) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X) \arrow[r] & J_{n+1}(X) \arrow[r] & E_{n+1}(X) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

y de manera inmediata obtiene que si para $n \geq 2$, (X,α) es $(\underline{\underline{\pi}})$ n-conexo y $(\underline{\underline{I}})$ (n-1)-conexo, entonces $\rho_{\underline{\underline{I}}}: \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X)$ es isomorfismo

Notemos que podemos generalizar el resultado de L.J. Hernández en [He] para el caso relativo

$$E_{n+1}(X,A) \cong L_n(\hat{X},\hat{A},\infty)$$

y así obtenemos el siguiente:

Teorema 1.- Sea (X,A) un par propio donde X y A poseen un único final propio. Sea α un rayo en A.

Para cada $n \geq 1$, existe una aplicación natural (homomorfismo si $n \geq 2$)

$$\rho_{\underline{\underline{\pi}}} : \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow E_{n+1}(X,A)$$

verificando que si $\underline{\underline{\pi}}_i(X,A,\alpha) = 0$ para todo $i < n$ $(n \geq 2)$, entonces $\rho_{\underline{\underline{\pi}}}$ es un epimorfismo cuyo núcleo es $\Omega^n_{\underline{\underline{\pi}}}(X,A,\alpha)$ (Def 20 7.I).

Demostración.- La manera natural de definir la aplicación $\rho_{\underline{\underline{\pi}}}$ es la siguiente:

Sea $f : (I^n \times J,\ I^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$ una aplicación propia representante de un elemento $\xi \in \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ Entonces f también es una aplicación propia del tipo $(I^n \times J, \partial I^n \times J) \longrightarrow (X,A)$ e induce $f_* : E_{n+1}(I^n \times J, \partial I^n \times J) \longrightarrow E_{n+1}(X,A)$. Si denotamos $i_{n+1} : I^n \times J \longrightarrow I^n \times J$ la aplicación identidad, la clase $[i_{n+1}]$ en el $(n+1)$-ésimo grupo de homología final propia $E_{n+1}(I^n \times J,\ \partial I^n \times J)$ genera a éste como cíclico infinito (ver 3.II). Se define $\rho_{\underline{\underline{\pi}}}(\xi) = f_*([i_{n+1}]) = [f \circ i_{n+1}]$, es decir como la $(n+1)$ clase de homología final propia representada por $f \circ i_{n+1}$

Para demostrar el Teorema, basta comprobar que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\lambda_n(\hat{X},\hat{A},\infty;\rho_\alpha) & = & \pi_n((\hat{X})_*,(\hat{A})_*,\rho_\alpha) & \overset{\Psi_1}{\equiv} & \underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha) \\
\downarrow \rho_\pi & & & & \downarrow \rho_{\underline{\underline{\pi}}} \\
L_n(\hat{X},\hat{A},\infty) & = & H_n((\hat{X})_*,(\hat{A})_*) & \overset{\Psi_2}{\equiv} & E_{n+1}(X,A)
\end{array}$$

es conmutativo.

El isomorfismo Ψ_1 viene definido de la siguiente forma:

Sea $\xi' \in \pi_n((\hat{X})_*,(\hat{A})_*,\rho_\alpha)$ representado por una aplicación

$$f:(I^n,I^{n-1},T^{n-1}) \longrightarrow ((\hat{X})_*,(\hat{A})_*,\rho_\alpha)$$

Como para cada $x \in I^n$, $f(x)$ es un camino en $\hat{X}$ que acaba en ∞ y no ha pasado anteriormente por ese punto, f induce la aplicación propia

$$\bar{f}:(I^n \times J,\ I^{n-1}\times J,\ T^{n-1}\times J,\ T^{n-1}\times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

dada por: $\qquad \bar{f}(x,t) = f(x)(t/1+t)$

$\bar{f}$ representa a un elemento $\xi \in \underline{\pi}_n(X,A,\alpha)$ y se define $\Psi_1(\xi') = \xi$

Para un n-cubo singular en $(\hat{X})_*$, $T: I^n \longrightarrow (\hat{X})_*$, se define $\Psi_2(T) = \bar{T}$, donde $\bar{T}(x,t) = T(x)(t/1+t)$. Notemos que si $T \in S_*((\hat{A})_*)$, entonces $\bar{T} \in (C_*/S_*)(A)$.

Ahora, consideramos $\xi' \in \pi_n((\hat{X})_*,(\hat{A})_*,\rho_\alpha)$ representado por f Entonces f induce $f_*: H_n(I^n,\partial I^n) \longrightarrow H_n((\hat{X})_*,(\hat{A})_*)$.

Si denotamos por $i_n: I^n \longrightarrow I^n$ la identidad, la clase $[i_n]$ genera $H_n(I^n,\partial I^n)$ como grupo cíclico infinito y $\rho_\pi(\xi') = = f_*([i_n])$, es decir la n-clase de homología de $f\circ i_n$ en $H_n((\hat{X})_*,(\hat{A})_*)$. Entonces $\Psi_2([f\circ i_n])$ es la (n+1)-clase de homología final propia de $\overline{f\circ i_n}$.

Como $\overline{f\circ i_n}(x,t) = (f\circ i_n)(x)(t/1+t) = f(x)(t/1+t) = \bar{f}(x,t) = = \bar{f}\circ i_{n+1}(x,t)$ y $\bar{f}$ representa a $\Psi_1(\xi)$, deducimos que $\Psi_2(\rho_\pi(\xi)) = \underline{\rho}_\pi \Psi_1(\xi)$. #

2.- El homomorfismo de Hurewicz $\rho_{\underline{\underline{I}}}$

Sea (X,A) un par propio y α un rayo en A.

Definimos para $n \geq 1$:

$$\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X,A)$$

de la siguiente forma:

Sea ξ un elemento de $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ representado por una aplicación propia

$$f:(I^n \times J\ ,\ I^{n-1}\times J\ ,\ T^{n-1}\times J\ ,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

Entonces f también es del tipo $(I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \longrightarrow (X,A)$ e induce por tanto $f_*: J_{n+1}(I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \longrightarrow J_{n+1}(X, A)$. Si denotamos ω_{n+1} la clase $[i_{n+1}]$ en el $(n+1)$-ésimo grupo de homología propia $J_{n+1}(I^n \times J, \partial(I^{n-1}\times J))$, donde $i_{n+1} : I^n \times J \longrightarrow I^n \times J$ es la identidad, ω_{n+1} genera este grupo como cíclico infinito (ver 3.II)

Definimos: $\rho_{\underline{\underline{I}}}(\xi) = f_*(\omega_{n+1})$

Más explícitamente, f es un $(n+1)$-cubo singular propio en X cuyo borde es una n-cadena singular propia en A. Si denotamos por $[f]$ al $(n+1)$ ciclo de $Z_c^{n+1}(X,A)$ que representa f, entonces $\rho_{\underline{\underline{I}}}(\xi)$ es la $(n+1)$-clase de homología propia de $[f]$.

Notar que si f' también representa a ξ, $f_* = f'_*$, luego $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ está bien definida.

De manera análoga está definida $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ para el caso absoluto y $n \geq 1$.

<u>Nota</u>.- Alguna vez, cuando no haya lugar a confusión, denotaremos $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ simplemente por ρ.

Proposición 1.- Sea $g: (X,A,\alpha) \longrightarrow (Y,B,\beta)$ una aplicación propia.

Entonces el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \underline{\Pi}_n(X,A,\alpha) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\rho"] & \underline{\Pi}_n(Y,B,\beta) \arrow[d, "\rho"] \\ J_{n+1}(X,A) \arrow[r, "g_*"] & J_{n+1}(Y,B) \end{tikzcd}$$

Demostración.- Sea

$$f: (I^n \times J, I^{n-1} \times J, T^{n-1} \times J, I^n \times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

una aplicación propia que representa a $\xi \in \underline{\Pi}_n(X,A,\alpha)$. Entonces $g \circ f$ representa a $g_*(\xi) \in \underline{\Pi}_n(Y,B,\beta)$, luego $\rho\, g_*(\xi) = [g \circ f] + B_c^{n+1}(Y,B)$.

Como $\rho\,(\xi) = [f] + B_c^{n+1}(X,A)$, $g_* \circ \rho\,(\xi) = [g \circ f] + B_c^{n+1}(Y,B)$, y por tanto $\rho\, g_* = g_* \rho$. #

Teorema 2.- Si $n > 1$, la aplicación

$$\rho: \underline{\Pi}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X,A) \quad \text{es un homomorfismo}$$

Demostración.- Sean:

$$(I^n \times J)_- = \{(t_1,\ldots,t_n,t) \in I^n \times J \mid 0 \le t_1 \le 1/2\}$$

$$(I^n \times J)_+ = \{(t_1,\ldots,t_n,t) \in I^n \times J \mid 1/2 \le t_1 \le 1\}$$

Llamamos $K^n = \partial((I^n \times J)_-) \cup \partial((I^n \times J)_+)$ y consideramos las inclusiones propias:

$$\Psi_+ : ((I^n \times J)_+, \partial(I^n \times J)_+) \longrightarrow (I^n \times J, K^n)$$

$$\Psi_- : ((I^n \times J)_-, \partial(I^n \times J)_-) \longrightarrow (I^n \times J, K^n)$$

Daremos a continuación dos lemas:

Lema 3.- Las inclusiones Ψ_+ y Ψ_- inducen un isomorfismo:

$\Psi_*: J_{n+1}((I^n\times J)_+, \partial(I^n\times J)_+) \oplus J_{n+1}((I^n\times J)_-, \partial(I^n\times J)_-) \longrightarrow J_{n+1}(I^n\times J, K^n)$

definido por $\Psi_*(a \oplus b) = (\Psi_+)_*(a) + (\Psi_-)_*(b)$.

Demostración.- Como $I^n \times J$, $(I^n\times J)_+$ e $(I^n\times J)_-$ retraotan propiamente a J, considerando las sucesiones de homología propia (J_*) de los pares respectivos obtenemos:

$$J_{n+1}(I^n\times J, K^n) \cong J_n(K^n)$$

$$J_{n+1}((I^n\times J)_+, \partial((I^n\times J)_+)) \cong J_n(\partial((I^n\times J)_+))$$

$$J_{n+1}((I^n\times J)_-, \partial((I^n\times J)_-)) \cong J_n(\partial((I^n\times J)_-)).$$

Por tanto, basta probar que:

$$J_n(\partial((I^n\times J)_+)) \oplus J_n(\partial((I^n\times J)_-)) \cong J_n(K^n)$$

bajo las aplicaciones inclusión.

Observemos que en este caso no se verifican las hipótesis de Mayer-Viétoris para homología propia, pero el hecho de que $\partial((I^n\times J)_+)$ y $\partial((I^n\times J)_-)$ sean subcomplejos del complejo cúbico propio finito K^n haoe que se verifique la tesis (ver el Teorema 8.3 II), es decir, existe:

$$\Delta: J_q(K^n) \longrightarrow J_{q-1}(\partial((I^n\times J)_+) \cap \partial((I^n\times J)_-))$$

haciendo exacta la siguiente sucesión:

$$\longrightarrow J_q(\partial((I^n\times J)_+) \cap \partial((I^n\times J)_-)) \xrightarrow{\varphi_*} J_q(\partial((I^n\times J)_+) \oplus J_q(\partial((I^n\times J)_-))$$
$$\xrightarrow{\Psi_*} J_q(K^n) \xrightarrow{\Delta} J_{q-1}(\partial((I^n\times J)_+) \cap \partial((I^n\times J)_-)) \longrightarrow \cdots$$

Como $\partial((I^n\times J)_+) \cap \partial((I^n\times J)_-) = I^{n-1}\times J$ retracta propiamente a J, deducimos que $\Psi_*: J_q(\partial((I^n\times J)_+)) \oplus J_q(\partial((I^n\times J)_-)) \longrightarrow J_q(K^n)$ es isomorfismo. En particular

$$\Psi_*: J_n(\partial((I^n\times J)_+)) \oplus J_n(\partial((I^n\times J)_-)) \longrightarrow J_n(K^n) \qquad \#$$

Lema 4.- Sean f_+ y f_- aplicaciones propias del tipo

$$(I^n\times J,\ I^{n-1}\times J,\ T^{n-1}\times J,\ I^n\times 0) \longrightarrow (X, A, \alpha, \alpha(0))$$

tales que $\quad f_+((I^n\times J)_-) = \vartheta_\alpha = f_-((I^n\times J)_+)$

y sea $\quad g: (I^n\times J,\ \partial(I^n\times J)) \longrightarrow (X, A)$

la aplicación propia dada por:

$$g\Big|_{(I^n\times J)+} = f_+\Big|_{(I^n\times J)+} \quad , \quad g\Big|_{(I^n\times J)-} = f_-\Big|_{(I^n\times J)-}$$

Entonces, $\qquad g_*(\omega_{n+1}) = (f_+)_*(\omega_{n+1}) + (f_-)_*(\omega_{n+1})$

Demostración.- Sea $\eta: (I^n\times J,\ \partial(I^n\times J)) \longrightarrow (I^n\times J,\ K^n)$ la aplicación inclusión. Notar que es propia.

Como $\eta_*(\omega_{n+1}) \in J_{n+1}(I^n\times J\ ,\ K^n)$ del lema 2 deducimos que $\eta_*(\omega_{n+1}) = (\Psi_+)_*(\omega_+) + (\Psi_-)_*(\omega_-)$ con $\omega_+\in J_{n+1}((I^n\times J)_+, \partial((I^n\times J)_+))$ y $\omega_- \in J_{n+1}((I^n\times J)_-, \partial((I^n\times J)_-))$.

Sea $\quad g_1: (I^n\times J,\ K^n) \longrightarrow (X, A)$ la aplicación definida por la restricción de g. Como $g = g_1\circ\eta$, tenemos:

$g_*(\omega_{n+1}) = (g_1)_*(\eta_*(\omega_{n+1})) = (g_1)_*((\Psi_+)_*(\omega_+) + (\Psi_-)_*(\omega_-)) =$

$= (g_1)_*(\Psi_+)_*(\omega_+) + (g_1)_*(\Psi_-)_*(\omega_-)$

Ahora bien, $g_1\circ\Psi_+ = f_+\circ\Psi_+$ y $g_1\circ\Psi_- = f_-\circ\Psi_-$, por lo tanto

$$g_*(\omega_{n+1}) = (f_+)_*(\Psi_+)_*(\omega_+) + (f_-)_*(\Psi_-)_*(\omega_-)$$

Haciendo lo mismo para $(f_+)_*$ y $(f_-)_*$ obtenemos:

$(f_+)_*(\omega_{n+1}) = (f_+)_*((\Psi_+)_*(\omega_+) + (\Psi_-)_*(\omega_-)) = (f_+)_*(\Psi_+)_*(\omega_+)$ ya que $\quad (f_+)_*\circ(\Psi_-)_* = 0 \quad$ pues $\quad f_+\circ\Psi_-((I^n\times J)_-) \subset A$.

Análogamente, como $f_-\circ\Psi_+((I^n\times J)_+) \subset A$, deducimos que

$$(f_-)_*(\omega_{n+1}) = (f_-)_*(\Psi_-)_*(\omega_-).$$

Por lo tanto, $\quad g_*(\omega_{n+1}) = (f_+)_*(\omega_{n+1}) + (f_-)_*(\omega_{n+1})$. #

Demostraremos ahora el Teorema 2:

Sean $\xi, \eta \in \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ y g_+, g_- representantes de ξ y η respectivamente. Consideramos $g = g_+ + g_-$, $f_+ = g_+ + \vartheta_\alpha$ y $f_- = \vartheta_\alpha + g_-$ (en el sentido de 1.2.I).

f_+, f_-, g satisfacen la hipótesis del Lema 4, luego:

$$g_*(\omega_{n+1}) = (f_+)_*(\omega_{n+1}) + (f_-)_*(\omega_{n+1})$$

Notemos que f_+ y f_- representan los mismos elementos $\xi, \eta \in \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ que g_+ y g_- respectivamente. Por tanto

$$(f_+)_*(\omega_{n+1}) = (g_+)_*(\omega_{n+1}) \quad \text{y} \quad (f_-)_*(\omega_{n+1}) = (g_-)_*(\omega_{n+1}).$$

Entonces obtenemos:

$$\rho(\xi + \eta) = g_*(\omega_{n+1}) = (g_+)_*(\omega_{n+1}) + (g_-)_*(\omega_{n+1}) = \rho(\xi) + \rho(\eta). \qquad \#$$

A continuación introducimos algunas notaciones y observaciones que tendremos en cuenta en el desarrollo posterior de este capítulo.

Para $I^n \times J$, denotaremos:

$$(I^n \times J)_{i,l} = \begin{cases} \alpha_i^l(I^{n-1} \times J) & \text{si } 1 \le i \le n \text{ y } l \in \{0,1\} \\ \\ \alpha_i^l(I^n) & \text{si } i = n+1 \text{ y } l = 0 \end{cases}$$

(donde α_i^l están definidas en 1.II)

$$H^n_{i,l} = \bigcup_{(j,\varepsilon) \neq (i,l)} (I^n \times J)_{j,\varepsilon}$$

Para cada $1 \le i \le n$, $l \in \{0,1\}$; consideramos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
J_n(I^{n-1}\times J\,,\,\partial(I^{n-1}\times J)) \arrow[rr, "(\alpha_i^1)_*"] & & J_n((I^n\times J)_{i,1}\,,\,\partial(I^n\times J)_{i,1}) \arrow[d, equal] \\
 & & J_n((I^n\times J)_{i,1}\,,\,H^n_{i,1}\cap(I^n\times J)_{i,1}) \arrow[d, "e_*"] \\
 & & J_n(H^n_{i,1}\cup(I^n\times J)_{i,1}\,,\,H^n_{i,1}) \arrow[d, equal] \\
J_{n+1}(I^n\times J\,,\,\partial(I^n\times J)) \arrow[r, "\partial_*"] & J_n(\partial(I^n\times J)) \arrow[r, "j_*"] & J_n(\partial(I^n\times J),\,H^n_{i,1})
\end{tikzcd}
$$

Es evidente que $(\alpha_i^1)_*$ es isomorfismo. e_* es el isomorfismo de escisión (Teorema 7.3.II). Para ver que j_* (inducido por la inclusión) es isomorfismo, basta considerar la (J_*)-sucesión del par $(\partial(I^n\times J),H^n_{i,1})$ y tener en cuenta que $H^n_{i,1}$ retracta propiamente a J. Utilizando la sucesión de homología propia asociada al par $(I^n\times J,\,\partial(I^n\times J))$, como $I^n\times J$ retracta propiamente a J, se deduce que ∂_* es isomorfismo.

Definiendo $\Psi_i^1 : J_n(I^{n-1}\times J,\partial(I^n\times J)) \longrightarrow J_{n+1}(I^n\times J,\partial(I^n\times J))$ como la composición $\partial_*^{-1}\circ j_*^{-1}\circ e_*\circ(\alpha_i^1)_*$, tenemos que Ψ_i^1 es un isomorfismo.

Sea ω_n el generador de $J_n(I^{n-1}\times J,\partial(I^{n-1}\times J))$ inducido por la $id_{I^{n-1}\times J}$.

$(\alpha_i^1)_*$ transforma ω_n en el elemento ω'_n inducido por:

$$\alpha_i^1 : I^{n-1}\times J \longrightarrow (I^n\times J)_{i,1}$$

El isomorfismo de escisión e_* transforma ω'_n en el elemento ω''_n inducido por $\alpha_i^1 : I^{n-1}\times J \longrightarrow \partial(I^{n-1}\times J)$.

Como $\mathrm{Im}\,\alpha_j^\varepsilon \subset H^n_{i,1}$ cuando $j\neq i$ ó si $j=i$, $\varepsilon\neq 1$, deducimos que:

$$\sum_{n\geq j\neq i} (-1)^j ((\alpha_j^{\,0}) - (\alpha_j^{\,1})) + (-1)^{n+1} (\alpha^0_{n+1}) + (-1)^{i+l'} (\alpha_i^{\,l'}) = 0$$

(mód $C_*(H^n_{i,l})$) donde $l' \in \{0,1\} - \{l\}$.

Entonces llamando z a la cadena

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j ((\alpha_j^{\,0}) - (\alpha_j^{\,1})) + (-1)^{n+1} (\alpha^0_{n+1})$$

$$(-1)^{i+1} z = \alpha_i^{\,1} \ (\text{mód } C_*(H^n_{i,1}))$$

y por tanto ω''_n está inducida por $(-1)^{i+1} z$.

Como j_* está inducido por la inclusión, la cadena $(-1)^{i+1} z$ induce $\omega'''_n = j_*^{-1}(\omega''_n)$

Ahora bien,

$$\partial_*(\omega_{n+1}) = [\partial id_{I^n \times J}] = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j ((\alpha_j^{\,0}) - (\alpha_j^{\,1})) + (-1)^{n+1} (\alpha^0_{n+1}),$$

luego $\partial_*(\omega_{n+1})$ está inducido por z , de donde

$$\Psi_i^{\,1}(\omega_n) = (-1)^{i+1}(\omega_{n+1})$$

Analogamente, para $i = n+1$ y $l = 0$, consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& J_n(I^n, \partial I^n) \arrow[r, "(\alpha^0_{n+1})_*"] & J_n((I^n \times J)_{n+1,0}, \partial(I^n \times J)_{n+1,0}) \arrow[d, equal] \\
& & J_n((I^n \times J)_{n+1,0}, H^n_{n+1,0} \cap (I^n \times J)_{n+1,0}) \arrow[d, "\bar{e}_*"] \\
& & J_n(H^n_{n+1,0} \cup (I^n \times J)_{n+1,0}, H^n_{n+1,0}) \arrow[d, equal] \\
J_{n+1}(I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \arrow[r, "\partial_*"] & J_n(\partial(I^n \times J)) \arrow[r, "\bar{j}_*"] & J_n(\partial(I^n \times J), H^n_{n+1,0})
\end{tikzcd}$$

Como antes, es evidente que $(\alpha^0_{n+1})_*$ es isomorfismo. $\bar{e}_*$ es el isomorfismo de escisión (ver Teorema 7.3.II). Que $\bar{j}_*$ (inducido por la inolusión) es isomorfismo se deduce de considerar la sucesión de homología propia del par $(\partial(I^n\times J), H^n_{n+1,0})$ y observar que $J_n(H^n_{n+1,0}) = 0 = J_{n-1}(H^n_{n+1,0})$ pues $H^n_{n+1,0} = \partial I^n \times J$ y podemos aplicar la propiedad de fuga (ver P6).2.II).

Definiendo $\Psi^0_{n+1} : J_n(I^n, \partial I^n) \longrightarrow J_{n+1}((I^n\times J), \partial(I^n\times J))$ como la composición $\partial_*^{-1}\circ \bar{j}_*^{-1}\circ \bar{e}_*\circ (\alpha^0_{n+1})_*$, Ψ^0_{n+1} es isomorfismo. Si denotamos $\bar{\omega}_n$ al generador de $J_n(I^n, \partial I^n)$ inducido por la id_{I^n}, $(\alpha^0_{n+1})_*$ transforma $\bar{\omega}_n$ en el elemento $\bar{\omega}'_n$ inducido por $\alpha^0_{n+1} : I^n \longrightarrow (I^n\times J)_{n+1,0}$.

El isomorfismo de escisión $\bar{e}_*$ transforma $\bar{\omega}'_n$ en el elemento $\bar{\omega}''_n$ inducido por $\alpha^0_{n+1} : I^n \longrightarrow \partial(I^n\times J)$. Como $\mathrm{Im}\ \alpha_j^l \in H^n_{n+1,0}$ para $1\le j\le n$ y $l \in \{0,1\}$, deducimos que

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j ((\alpha_j^0) - (\alpha_j^1)) = 0 \ (\text{mód } C_*(H^n_{n+1,0})).$$

Entonces la cadena $z = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j ((\alpha_j^0) - (\alpha_j^1)) + (-1)^{n+1}(\alpha^0_{n+1})$ verifica:

$$(-1)^{n+1} z = \alpha^0_{n+1} \ (\text{mód } C_*(H^n_{n+1,0}))$$

y por lo tanto $\bar{\omega}''_n$ está inducido por $(-1)^{n+1}z$.

Como $\bar{j}_*$ está inducido por la inclusión, la cadena $(-1)^{n+1} z$ induce $\omega'''_n = \bar{j}^{-1}(\bar{\omega}''_n)$.

Como $\partial_*(\omega_{n+1})$ viene inducido por z, obtenemos que $\Psi^0_{n+1}(\bar{\omega}_n) = (-1)^{n+1}\omega_{n+1}$.

Teorema 5.- El diagrama siguiente es "conmutativo":

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \underline{I}_n(X,A,\alpha) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\rho"] & \underline{I}_{n-1}(A,\alpha) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\rho"] & \underline{I}_{n-1}(X,\alpha) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\rho"] & \underline{I}_{n-1}(X,A,\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & J_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] & J_n(A) \arrow[r, "i_*"] & J_n(X) \arrow[r, "j_*"] & J_n(X,A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración.- Sea $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(A,\alpha)$ representado por la aplicación propia $f: (I^n \times J, \partial I^n \times J, I^n \times 0) \longrightarrow (A,\alpha,\alpha(0))$; $i\circ f$, donde i es la inclusión $(A,\alpha,\alpha(0)) \longrightarrow (X,\alpha,\alpha(0))$, representa a $i_*(\xi) \in \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha)$, por tanto $\rho\, i_*(\xi) = [i\circ f] + B_C^{n+1}(X)$.

Como $i_*\, \rho(\xi) = i_*([f] + B_C^{n+1}(A)) = [i\circ f] + B_C^{n+1}(X)$, deducimos que $\rho\, i_* = i_*\, \rho$.

De manera análoga se prueba que $\rho\, j_* = j_*\, \rho$.

Consideramos ahora $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$, representado por una aplicación propia

$$f: (I^n \times J,\ I^{n-1}\times J,\ T^{n-1}\times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

Entonces $\rho(\xi) = [f] + B_C^{n+1}(X,A)$ y $\partial_*\rho(\xi) = [\partial f] + B_C^{n+1}(A)$, donde

$$\partial f = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left((\alpha_i^{\,0})^*(f) - (\alpha_i^{\,1})^*(f) \right) + (-1)^{n+1}(\alpha_{n+1}^{\,0})^*(f).$$

Como $f(x,t) = \alpha(t)$ para $x \in T^{n-1}$, $f(y,0) = \alpha(0)$ para $y \in I^n$, deducimos que todos los n-cubos singulares propios $f\circ\alpha_i^{\,l}$ son degenerados excepto para $i=n$ y $l=0$. Por tanto,

$$\partial_*\rho(\xi) = (-1)^n [f\circ\alpha_n^{\,0}] + B_C^{\,n}(A).$$

Por otra parte, $\partial(\xi)$ está representado por $f|_{I^{n-1}\times J}$, es decir por $f\circ\alpha_n^{\,0}$, luego $\rho\,\partial(\xi) = [f\circ\alpha_n^{\,0}] + B_C^{\,n}(A)$.

Así se obtiene que $\partial_*\,\rho(\xi) = (-1)^n\,\rho\,\partial(\xi)$. ∎

Nota.- Observemos que el diagrama puede ser estrictamente conmutativo, definiendo $\rho_{\mp}$ para dimensiones consecutivas, teniendo en cuenta el signo. Es decir, si en dimensión n se elige el generador $\omega_n = [id_{I^{n-1}\times J}] \in (I^{n-1}\times J, \partial(I^{n-1}\times J))$ en dimensión $n+1$ se toma el generador

$$(-1)^n \omega_{n+1} \in J_{n+1}(I^n \times J, \partial(I^n\times J))$$

y se define $\rho_{\underline{\underline{I}}}([f]) = (-1)^n f_*(\omega_{n+1})$.

Esto corresponde a considerar orientaciones coherentes, pues según hemos visto anteriormente, el isomorfismo

$$\Psi_n^0 : J_n(I^{n-1}\times J, \partial(I^{n-1}\times J)) \longrightarrow J_n(I^n\times J, \partial(I^n\times J))$$

transforma ω_n en $(-1)^n\,\omega_{n+1}$.

Haremos ahora alguna consideración sobre el homomorfismo de Hurewicz $\qquad \rho_H : \pi_n(X,A,*) \longrightarrow H_n(X,A)$

Los grupos de homotopía de Hurewicz pueden definirse considerando aplicaciones del tipo:

$$(I^n, I^{n-1}\times 0, T^{n-1}) \longrightarrow (X,A,*)$$

ó bien $\qquad (I^n, I^{n-2}\times 0\times I, P^{n-1}) \longrightarrow (X,A,*)$

entre otras. Ambas han sido utilizadas a lo largo de este trabajo, y la equivalencia viene inducida claramente por el homeomorfismo:

$$L : (I^n, I^{n-1}\times 0, T^{n-1}) \longrightarrow (I^n, I^{n-2}\times 0\times I, P^{n-1})$$

dado por $L(t_1,t_2,\dots,t_{n-1},t_n) = (t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n-1})$ para cada $(t_1,\dots,t_n)\in I^n$.

Ahora bien, L es un homeomorfismo que invierte la orientación del cubo I^n. En efecto, si $\tilde{\omega}_n$ es el generador de $H_n(I^n,\partial I^n)$ inducido por la id_{I^n}, sabemos (ver Lema 2.4.4. de [W.G.1]) que $L_*(\tilde{\omega}_n) = -\tilde{\omega}_n$.

Entonces, cuando se toma como definición de ρ_H la siguiente:

Para un elemento $\xi\in\pi_n(X,A,*)$ representado por

$$f : (I^n, I^{n-1}\times 0, T^{n-1}) \longrightarrow (X,A,*)$$

$\rho_H(\xi) = f_*(\tilde{\omega}_n)$, es decir, la clase de f en $H_n(X,A)$.

Si para representar ξ se elige una aplicación g del tipo:

$$(I^n, I^{n-2}\times 0\times J, P^{n-1}) \longrightarrow (X, A, *)$$

$\rho_\pi(\xi) = -g_*(\bar{\omega}_n)$, es decir la clase de $-g$ en $H_n(X,A)$.

Teorema 6.- El siguiente diagrama es "conmutativo":

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\longrightarrow \pi_{n+1}(X,A,\alpha(0)) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \underline{I}_n(X,A,\alpha) & \xrightarrow{\Psi} & \underline{\pi}_n(X,A,\alpha) & \xrightarrow{\mathcal{D}} & \pi_n(X,A,\alpha(0))\longrightarrow\cdots \\
\downarrow \rho_\pi & & \downarrow \rho_{\underline{I}} & & \downarrow \rho_{\underline{\pi}} & & \downarrow \rho_\pi \\
\cdots\longrightarrow H_{n+1}(X,A) & \xrightarrow{i} & J_{n+1}(X,A) & \xrightarrow{p} & E_{n+1}(X,A) & \xrightarrow{\partial} & H_n(X,A)\longrightarrow\cdots
\end{array}$$

Demostración.- Sea $\xi\in\pi_{n+1}(X,A,\alpha(0))$ representado por una aplicación f del tipo $(I^{n+1}, I^{n-1}\times 0\times I, P^n) \longrightarrow (X,A,\alpha(0))$

Entonces $\rho_\pi(\xi) = [-f] + B_S^{n+1}(X,A)$.

$\varphi_\alpha(\xi)$ (ver párrafo 4. Cap.I) es el elemento de $\underline{I}_n(X,A,\alpha)$ representado por

$$F_1 : (I^n\times J, I^{n-1}\times 0\times J, T^{n-1}\times J, I^n\times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

definida como $F_1(x,s) = F(x,1,s)$ para cada $(x,s)\in I^n\times J$, donde F es una aplicación propia de $I^n\times I\times J \longrightarrow X$ verificando que

$F(x,t,0) = f(x,t)$ para cada $(x,t)\in I^n\times I$

$F(y,t,s)\in A$ para cada $(y,t,s)\in I^n\times 0\times J \cup \partial I^n\times I\times J$

Entonces F es un (n+2)-cubo singular propio en X, cuyo borde es:

$$\partial F = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (F\circ\alpha_i^0 - F\circ\alpha_i^1) + (-1)^{n+2} F\circ\alpha^0_{n+2}$$

$F\circ\alpha^1_{n+1} = F_1$, $F\circ\alpha^0_{n+2} = f$ y los demás (n+1)-cubos del borde de F, son degenerados o están en A. Por lo tanto:

$$[-f] + B_C^{n+1}(X,A) = [F_1] + B_C^{n+1}(X,A)$$

Como $\rho_{\underline{\underline{I}}}\phi_\alpha(\xi) = [F_1] + B_C^{n+1}(X,A)$ y $l([-f] + B_S^{n+1}(X,A)) = [-f] + B_C^{n+1}(X,A)$, obtenemos que $l\,\rho_\pi(\xi) = \rho_{\underline{\underline{I}}}\phi_\alpha(\xi)$.

Por otra parte es inmediato comprobar que $\rho_\pi \Psi = p\,\rho_{\underline{\underline{I}}}$ y $\partial \rho_{\underline{\underline{\pi}}} = (-1)^{n+1}\rho_\pi \partial$. #

Notemos que la conmutatividad resulta estricta, sin más que definir los respectivos homomorfismos de Hurewicz con el signo adecuado ($(-1)^{n+1}$ en el paso de dimensión n a $(n+1)$).

<u>Teorema 7</u>.- Para $n \geq 2$, si (X,A,α) es (π) n-conexo y $(\underline{\underline{I}})(n-1)$conexo, y además $\pi_0(A)$, $\pi_0(X)$, $\underline{\underline{I}}_0(A,\alpha)$ y $\underline{\underline{I}}_0(X,\alpha)$ son triviales, entonces

$$\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X,A) \quad \text{es epimorfismo}$$

<u>Demostración</u>.- Las hipótesis garantizan que A y X poseen un único final propio y que (X,A,α) es $(\underline{\underline{\pi}})(n-1)$ conexo. Entonces se verifica el Teorema 1.1. Además se verifica el Teorema de Hurewicz para ρ_π^q con $q \leq n+1$. Aplicando el Lema de los cuatro al diagrama del Teorema 6, se obtiene la tesis. #

Notar que resulta inmediato comprobar que $\Omega_{\underline{\underline{I}}}^n(X,A,\alpha)$ (Def.10.6.I) está contenido en Ker $\rho_{\underline{\underline{I}}}^n$.

Notar también que si un espacio X con un rayo α, verifica que (X,α) es (π)1-conexo y $(\underline{\underline{I}})$ 0-conexo, entonces $\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_1(X,\alpha) \longrightarrow J_2(X)$ es epimorfismo. (Basta razonar como el el Teorema 7) y además $\underline{\underline{\Omega}}_1^1(X,\alpha)$ (Def. 13.5.I) está contenido en $\operatorname{Ker} \underline{\underline{\rho}}_1^1$.

El objetivo de los siguientes párrafos es demostrar que los contenidos a los que hemos aludido son igualdades.

3.- Otras interpretaciones de los grupos $\underline{\underline{\pi}}$.

Dado un triple propio (X,A,α) se ha definido en el Capitulo I, $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ como el conjunto de clases de homotopía propia $(\mathrm{rel}(I^{n-1}\times J, T^{n-1}\times J, I^n\times 0)$ de aplicaciones propias del tipo:

$$(I^n\times J, I^{n-1}\times J, T^{n-1}\times J, I^n\times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

tales que $f(x,t)=\alpha(t)$ si $(x,t) \in T^{n-1}\times J$.

Notar que son también aplicaciones del tipo.

$$(I^n\times J, \partial(I^n\times J), T^{n-1}\times J, I^n\times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

y los homotopías son relativas a $(\partial(I^n\times J), T^{n-1}\times J, I^n\times 0))$ Y viceversa.

Para propósitos posteriores, desearíamos tener una definición menos rígida de los grupos $\underline{\underline{\pi}}_n(X,A,\alpha)$ y la posibilidad de tomar como referencia una $(n+1)$-celda no compacta cualquiera E (espacio homeomorfo a $I^n\times J$).

Si $l : I^n\times J \longrightarrow E$ es el homeomorfismo, denotamos $\partial E = l(\partial(I^n\times J)$

Considerando en $\partial(I^n\times J)$ el rayo dado por $v\times J$ con $v = (1,0,\ldots,0) \in I^n$, tenemos un rayo e en ∂E definido por $e(t)=l(v,t)$ para cada $t \in J$.

Dada una aplicación propia

$$\phi : (I^n\times J, \partial(I^n\times J), T^{n-1}\times J, I^n\times 0) \longrightarrow (E,\partial E,e,e(0))$$

con $\phi(x,t) = e(t)$ si $(x,t) \in T^{n-1} \times J$; para cada aplicación propia $f : (E, \partial E, e) \longrightarrow (X, A, \alpha)$ con . $f \circ e = \alpha$, $f \circ \phi$ es una aplicación propia del tipo:

$$(I^n \times J, \partial(I^n \times J), T^{n-1} \times J, I^n \times 0) \longrightarrow (X, A, \alpha, \alpha(0))$$

Si denotamos $C_n(X,A,\alpha)$ al conjunto de las clases de homotopía propia $(rel(\partial E, e, e(0))$ de aplicaciones propias del tipo:

$$(E, \partial E, e) \longrightarrow (X, A, \alpha) \text{ con } f \circ e = \alpha.$$

La correspondencia $f \longrightarrow f \circ \phi$ induce una aplicación

$$\theta_\phi : C_n(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$$

Además si ϕ' representa el mismo elemento de $\underline{\underline{I}}_n(E, \partial E, e)$ que ϕ, es fácil ver que $\theta_\phi = \theta_{\phi'}$, luego θ_ϕ sólo depende de la clase de ϕ en $\underline{\underline{I}}_n(E, \partial E, e)$.

En el caso de ser θ_ϕ una biyección, induce en $C_n(X,A,\alpha)$ una operación que lo dota de estructura de grupo y hace de θ_ϕ un isomorfismo de grupos. Entonces podríamos representar $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ de la manera descrita.

En orden a estudiar $\underline{\underline{I}}_n(E, \partial E, e)$ damos los siguientes teoremas.

Teorema 1.- Sea $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ propia. Para $n > 1$:

$$\underline{\underline{\pi}}_q(\mathbb{R}^n, \alpha) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = n-1 \\ \\ 0 & \text{si } q < n-1 \end{cases}$$

Demostración.-

$$\underline{\underline{\pi}}_q(\mathbb{R}^n, \alpha) = \pi_q((\hat{\mathbb{R}}^n)_*, \infty) = \pi_q((S^n)_*, *) = \lambda_q(S^n, *)$$

Por [Hu.1], si X es un complejo simplicial, $*$ un punto de X y F la frontera de la $st(*)$ en X (ver definiciones en 2.3 y

2.4 de [Ma]), entonces $\lambda_q(X,*) \cong \pi_q(F)$ para cada $q \geq 1$.

Considerando S^n con un estructura de complejo simplicial, F es homotópicamente equivalente a S^{n-1} y por tanto

$$\lambda_q(S^n,*) \cong \pi_q(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = n-1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq q < n-1 \end{cases}$$

Luego obtenemos que

$$\underline{\pi}_q(\mathbb{R}^n, \alpha) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = n-1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq q < n-1 \end{cases}$$

Ahora bien, como para $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ pose un único final propio, $\underline{\pi}_0(\mathbb{R}^n) = 0$, lo que completa la demostración. #

<u>Corolario 2</u> - Para $n > 1$ y $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ propia,

$$\underline{J}_q(\mathbb{R}^n, \alpha) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = n-1 \\ 0 & \text{si } q < n-1 \end{cases}$$

<u>Demostración</u>.- Por ser $\mathbb{R}^n$ contractible, $\pi_m(\mathbb{R}^n, \alpha(0)) = 0$ para todo m.

Considerando la sucesión exacta :

$$\cdots \to \pi_{q+1}(\mathbb{R}^n,\alpha(0)) \longrightarrow \underline{J}_q(\mathbb{R}^n,\alpha) \longrightarrow \underline{\pi}_q(\mathbb{R}^n,\alpha) \longrightarrow \pi_q(\mathbb{R}^n,\alpha(0)) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}^n,\alpha(0)) \longrightarrow \underline{J}_0(\mathbb{R}^n,\alpha) \longrightarrow \underline{\pi}_0(\mathbb{R}^n,\alpha) \longrightarrow \pi_0(\mathbb{R}^n,\alpha(0))$$

deducimos que $\underline{J}_q(\mathbb{R}^n,\alpha) \cong \underline{\pi}_q(\mathbb{R}^n,\alpha)$ para todo q. #

<u>Corolario 3</u>.- Para $n > 1$ y $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ propia,

$$\underline{\underline{I}}_q(\mathbf{R}_+^{n+1},\mathbf{R}^n,\alpha) \cong \underline{\underline{\pi}}_q(\mathbf{R}_+^{n+1},\mathbf{R}^n,\alpha) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si } q=n \\ 0 & \text{si } q<n \end{cases}$$

<u>Demostración</u>.- Por ser $\mathbf{R}_+^{n+1}$ y $\mathbf{R}^n$ contractibles, $\pi_q(\mathbf{R}_+^{n+1},\mathbf{R}^n,\alpha(0)) = 0$ para todo q. Por tanto:

$$\underline{\underline{I}}_q(\mathbf{R}_+^{n+1},\mathbf{R}^n,\alpha) \cong \underline{\underline{\pi}}_q(\mathbf{R}_+^{n+1},\mathbf{R}^n,\alpha) \quad \text{para todo } q .$$

Si consideramos ahora la ($\underline{\underline{I}}$) sucesión exacta asociada a $(\mathbf{R}_+^{n+1},\mathbf{R}^n,\alpha)$:

$$\cdots\to \underline{\underline{I}}_q(\mathbf{R}_+^{n+1},\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_q(\mathbf{R}_+^{n+1},\mathbf{R}^n,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{q-1}(\mathbf{R}^n,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_{q-1}(\mathbf{R}_+^{n+1},\alpha) \to\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow \underline{\underline{I}}_1(\mathbf{R}_+^{n+1},\mathbf{R}^n,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_0(\mathbf{R}^n,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_0(\mathbf{R}_+^{n+1},\alpha)$$

Como $\mathbf{R}_+^{n+1}$ retracta por deformación propia fuerte a J, $\underline{\underline{I}}_i(\mathbf{R}_+^{n+1},\alpha) = 0$ para todo i, luego $\underline{\underline{I}}_{i+1}(\mathbf{R}_+^{n+1},\mathbf{R}^n,\alpha) \cong \underline{\underline{I}}_i(\mathbf{R}^n,\alpha)$ para todo i. Además $\underline{\underline{I}}_0(\mathbf{R}_+^{n+1},\mathbf{R}^n) = 0$.

Basta aplicar el Corolario 2 para obtener el resultado. ∎

<u>Nota</u> - $\mathbf{R}$ tiene dos finales propios, luego dada $\alpha : J \longrightarrow \mathbf{R}$ propia, $\underline{\underline{\pi}}_0(\mathbf{R},\alpha) = \{1,0\}$ donde 0 indica el final propio representado por α. Por ser $\pi_0(\mathbf{R},\alpha(0))$ y $\pi_1(\mathbf{R},\alpha(0))$ triviales, deducimos que $\underline{\underline{I}}_0(\mathbf{R},\alpha)$ tiene sólo dos elementos y lo indioamos $\{1,0\}$ donde 0 representa la clase de α .

Ahora bien, $\mathbf{R}_+^2$ retracta por deformación propia fuerte a J, luego $\underline{\underline{I}}_i(\mathbf{R}_+^2,\alpha) = 0$ para todo i, de donde $\underline{\underline{I}}_0(\mathbf{R}_+^2,\mathbf{R},\alpha) = 0$.

Considerando ahora la ($\underline{\underline{I}}$)sucesión exacta asociada a$(\mathbf{R}_+^2,\mathbf{R},\alpha)$

$$\cdots\longrightarrow \underline{\underline{I}}_1(\mathbf{R}_+^2,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_1(\mathbf{R}_+^2,\mathbf{R},\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_0(\mathbf{R},\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_0(\mathbf{R}_+^2,\alpha)$$

deducimos que $\underline{\underline{I}}_1(\mathbf{R}_+^2,\mathbf{R},\alpha)$ tiene dos elementos y lo indicamos como antes por $\{1,0\}$

<u>Corolario 4</u>.- Para $n \geq 1$ y $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ propia,

$$\rho_{\underline{\underline{\pi}}} : \underline{\underline{\pi}}_n(\mathbb{R}^{n+1}, \alpha) \longrightarrow E_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})$$

$$\text{y} \quad \rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n(\mathbb{R}^{n+1}, \alpha) \longrightarrow J_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})$$

son isomorfismos.

<u>Demostración</u>.- $\mathbb{R}^{n+1}$ contractible, junto con el Teorema 1 y Corolario 2, aseguran que $(\mathbb{R}^{n+1},\alpha)$ es (π)-conexo, $(\underline{\underline{I}})(n-1)$conexo y $(\underline{\underline{\pi}})(n-1)$ conexo Por lo tanto (ver párrafo 1), $\rho_{\underline{\underline{\pi}}}$ y $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ son epimorfismos.

Por otra parte (ver párrafo 2.II), $E_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}) = J_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{Z}$. Del Teorema 1 y Corolario 2, deducimos que $\rho_{\underline{\underline{\pi}}}$ y $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ son isomorfismos. #

<u>Corolario 5</u>.- Para $n \geq 2$ y $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ propia.

$$\rho_{\underline{\underline{\pi}}} : \underline{\underline{\pi}}_n(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n,\alpha) \longrightarrow E_{n+1}(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n)$$

$$\text{y} \quad \rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n) \quad \text{son isomorfismos.}$$

<u>Demostración</u>.- Por el Corolario 3, $(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n, \alpha)$ es (π)n-conexo, $(\underline{\underline{I}})(n-1)$conexo y $(\underline{\underline{\pi}})(n-1)$ conexo.

Luego, por los Teoremas 1.1 y 7.2, $\rho_{\underline{\underline{\pi}}}$ y $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ son epimorfismos.

Además (ver párrafo 2.II) $E_{n+1}(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n) = J_{n+1}(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}$.

Del Corolario 3 de nuevo, obtenemos que $\rho_{\underline{\underline{\pi}}}$ y $\rho_{\underline{\underline{I}}}$ son isomorfismos. #

<u>Corolario 6</u>.- Para $n \geq 2$,

$$\rho_{\underline{\underline{\pi}}} : \underline{\underline{\pi}}_n(E,\partial E,e) \longrightarrow E_{n+1}(E,\partial E)$$

$$\text{y} \quad \rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n(E,\partial E,e) \longrightarrow J_{n+1}(E,\partial E)$$

son isomorfismos.

Deseamos probar ahora que sólo el elemento generador $[\phi]$ (ó el opuesto) de $\underline{\underline{I}}_n(E,\partial E,e)$ induce θ_ϕ biyección.

Consideramos la siguiente categoría $\mathcal{C}$:

Los objetos son cuaternas (X,A,B,C) donde X es un espacio topológico, A un subespacio propio de X, B un subespacio propio de A tal que $B = \bigcup_{t\in J} B_t$ y que admite una aplicación propia $\alpha : J \longrightarrow B$, C es un subespacio compacto de A tal que $C \cap B = B_0$ y además existe una retracción propia $r : (X,A,B,C) \longrightarrow (X,A,\alpha(J),\alpha(0))$ tal que $r(x_t) = \alpha(t)$ para cada $x_t \in B_t$ es una retracción por deformación fuerte de B a $\alpha(J)$.

Cuando $B = \bigcup_{t\in J} \alpha(t)$ y $C = \alpha(0)$, indicaremos $(X,A,\alpha,\alpha(0))$.

Los morfismos de (X,A,B,C) en (X',A',B',C') son las clases de homotopía de aplicaciones propias

$$f : (X,A,B,C) \longrightarrow (X',A',B',C')$$

tales que $f(B_t) \subset B'_t$ para cada $t \in J$ y $f\alpha(t) = \alpha'(t)$ para cada $t \in J$.

Donde $f \simeq g$ si existe una aplicación propia:

$$H : (X\times I, A\times I, B\times I, C\times I) \longrightarrow (X', A', B', C')$$

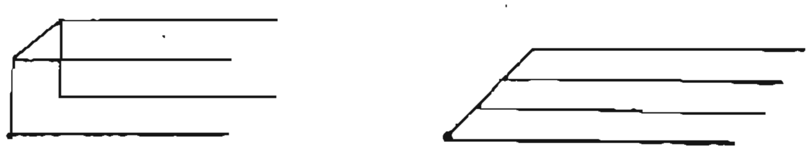
tal que

$$H(x,0) = f(x) \quad \text{para cada} \quad x \in X$$
$$H(x,1) = g(x) \quad \text{para cada} \quad x \in X$$
$$H(\alpha(t),s) = \alpha'(t) \quad \text{para cada} \quad t \in J \quad y \quad s \in I$$
$$H(B_t \times I) \subset B_t' \quad \text{para cada} \quad t \in J$$

Observemos que $(I^n \times J, \partial(I^n \times J), T^{n-1} \times J, I^n \times 0)$ es un objeto de $\mathcal{C}$:

Consideramos la aplicación propia $J \longrightarrow T^{n-1} \times J$ dada por $t \longrightarrow (v,t)$ donde $v = (1,0,\ldots,0) \in T^{n-1}$.

Sea L un homeomorfismo de $T^{n-1} \times J \longrightarrow I^{n-1} \times J$ con $L(v,t) = (1,0,\ldots,0,t)$; que por ejemplo para dimensión 2 se puede representar por el siguiente dibujo:



Sea G la aplicación propia definida por:

$$T^{n-1} \times J \times I \xrightarrow{L \times id_I} I^{n-1} \times J \times I \xrightarrow{\beta} I^{n-1} \times J \xrightarrow{L^{-1}} T^{n-1} \times J$$

donde $\beta(L(x,t),s) = (1-s)\,L(x,t) + s\,L(v,t)$

para cada $(x,t,s) \in T^{n-1} \times J \times I$.

Notar que $G(x,t,0) = (x,t)$ y $G(x,t,1) = (v,t)$ para cada $(x,t) \in T^{n-1} \times J$ y además

$$G(x,t,s) \subset T^{n-1} \times \{t\} \quad \text{para cada} \quad (x,t,s) \in T^{n-1} \times J \times I$$

y $\quad G(v,t,s) = (v,t) \quad$ para cada $\quad (t,s) \in J \times I$

Definimos ahora

$$h : T^{n-1} \times 0 \times I \cup I^n \times 0 \times 0 \cup I^n \times 0 \times 1 \longrightarrow I^n \times 0$$

por: $h(x,0,s)=G(x,0,s)$ si $(x,0,s)\in T^{n-1}\times 0\times I$

$h(x,0,0)=(x,0)$ si $x\in I^n$

$h(x,0,1)=(v,0)$ si $x\in I^n$

Aplicando la propiedad de extensión de homotopía, obtenemos una extensión de h,

$$H\colon I^n\times 0\times I \longrightarrow I^n\times 0$$

Si definimos $F\colon I^n\times 0\times I \cup T^{n-1}\times J\times I \longrightarrow I^n\times J$

como $F|_{I^n\times 0\times I}=H$; $F|_{T^{n-1}\times J\times I}=G$

F es propia, $F(x,t,0)=(x,t)$ y $F(x,t,1)=(v,t)$ para cada $(x,t)\in I^n\times 0\cup T^{n-1}\times J$

Aplicando sucesivamente la propiedad de extensión de homotopía propia, encontramos una extensión propia de F

$$\Delta : I^n\times J\times I \longrightarrow I^n\times J$$

verificando que:

$\Delta(x,t,0)=(x,t)$ para cada $(x,t)\in I^n\times J$

$\Delta(v,t,s)=(v,t)$ para cada $(t,s)\in J\times I$

$\Delta(x,t,s)\subset T^{n-1}\times\{t\}$ para cada $(x,t,s)\in T^{n-1}\times J\times I$

$\Delta(x,0,s)\subset I^n\times 0$ para cada $(x,0,s)\in I^n\times 0\times I$

$\Delta(x,t,s)\subset \partial(I^n\times J)$ para cada $(x,t,s)\in \partial(I^n\times J)\times I$

$\Delta(x,t,1)=(v,t)$ para cada $(x,t)\in I^n\times 0\cup T^{n-1}\times J$

La aplicación propia $\Delta_1\colon I^n\times J\times I \longrightarrow I^n\times J$ definida por

$$\Delta_1(x,t)=\Delta(x,t,1)$$

prueba que $(I^n\times J,\partial(I^n\times J),T^{n-1}\times J,I^n\times 0)$ es un objeto de $\mathcal{C}$

Notemos también que todo morfismo $f\colon(X,A,B,C)\longrightarrow(X',A',B',C')$ induce de la manera habitual $f_*\colon J_q(X,A)\longrightarrow J_q(X',A')$ para todo q (si $f\simeq g$, $f_*=g_*$).

Consideramos los objetos fijos de $\mathcal{C}$:

$(I^n\times J,\ \partial(I^n\times J),\ T^{n-1}\times J,\ I^n\times 0)$ que denotamos $\overline{I}$

$(E,\partial E,e,e(0))$ que denotamos $\overline{E}$.

Aplicando el Lema de Yoneda (ver [P] 1.14 y 1.15):

$$Mor_{\mathcal{C}}(\overline{I},\overline{E}) \ni \phi \longrightarrow h^{\phi} \in Mor_{\mathcal{J}}(h^{\overline{E}},\ h^{\overline{I}})$$

es una biyección que induce biyección entre los isomorfismos en $Mor_{\mathcal{C}}(\overline{I},\overline{E})$ y los isomorfismos naturales en $Mor_{\mathcal{J}}(h^{\overline{E}},\ h^{\overline{I}})$ donde $h^{\overline{E}}$ es el functor $Mor_{\mathcal{C}}(\overline{E},-)$ y $h^{\overline{I}}$ es $Mor_{\mathcal{C}}(\overline{I},-)$ (notar que $h^{\overline{I}}(X,A,\alpha,\alpha(0))=\underline{\underline{J}}_n(X,A,\alpha)$ y $h^{\overline{E}}(X,A,\alpha,\alpha(0))=C_n(X,A,\alpha)$)
h^{ϕ} es la transformación natural dada por $h^{\phi}(X,A,B,C)(g) = g\circ\phi$ para cada $g\in Mor_{\mathcal{C}}(\overline{E},(X,A,B,C))$

Es fácil observar que la condición necesaria para que $\phi\in Mor_{\mathcal{C}}(\overline{I},\overline{E})$ sea isomorfismo es que la aplicación inducida $\phi_*: J_{n+1}(I^n\times J,\ \partial(I^n\times J)) \longrightarrow J_{n+1}(E,\partial E)$ verifique que $\phi_*(\omega_{n+1}) = \pm\omega$ donde ω es el generador del grupo cíclico infinito $J_{n+1}(E,\partial E)$

Como $Mor_{\mathcal{C}}(\overline{I},\overline{E})=\underline{\underline{J}}_n(E,\partial E,e)$, por el Cororalio 6, sólo existe un elemento (y su opuesto) cumpliendo tal condición.

Ahora bien, utilizando la homotopía propia Δ construida anteriormente, se prueba de modo inmediato que $1\circ\Delta_1$ es un isomorfismo cuyo inverso es $i\circ 1^{-1}\in Mor_{\mathcal{C}}(\overline{E},\overline{I})$ donde

$i: (I^n\times J,\ \partial(I^n\times J),\ v\times J,\ v) \longrightarrow (I^n\times J, \partial(I^n\times J),\ T^{n-1}\times J,\ I^n\times 0)$

es la inclusión.

Por lo tanto las únicas transformaciones naturales que son equivalencias naturales entre los functores $h^{\overline{E}}$ y $h^{\overline{I}}$ son las inducidas por el generador (o el opuesto) de $\underline{\underline{J}}_n(E,\partial E,e)$, que está representado por $1\circ\Delta_1$.

Si consideramos la subcategoría $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son los de la forma $(X,A,\alpha,\alpha(0))$, la propiedad que tiene todo objeto de $\mathcal{C}$ de retractar a un objeto de $\mathcal{C}'$, hace que las únicas equivalencias naturales entre los funtores $h^{\bar{E}}$ y $h^{\bar{I}}$ restringidos a $\mathcal{C}'$ (que son C_n y $\underline{I}_n$ respectivamente) sean las descritas anteriormente. Por lo tanto fijada una orientación para la celda E el isomorfismo $\rho_{\underline{I}}: \underline{I}_n(E,\partial E,e) \longrightarrow J_{n+1}(E,\partial E)$ fija el generador $[\phi]$ de $\underline{I}_n(E,\partial E,e)$ y éste induce la equivalencia natural θ_ϕ.

Entonces podemos representar $\underline{I}_n(X,A,\alpha)$ como el conjunto de las clases de homotopía propia $(rel(\partial E,e,e(0))$ de aplicaciones propias del tipo

$$(E,\partial E,e,e(0)) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

(Análogamente para el caso absoluto $\underline{I}_{n-1}(A,\alpha)$ puede interpretarse como el conjunto de las clases de homotopía propia $(rel(e,e(0)))$ de aplicaciones propias del tipo $(\partial E,e,e(0)) \longrightarrow (A,\alpha,\alpha(0))$).

En el caso particular en el que la celda $E=I^n\times J$ y $l=id_{I^n\times J}$ fijada la orientación ω_{n+1} de $I^n\times J$, existe un único elemento $[\phi]$ de $\underline{I}_n(I^n\times J,\partial(I^n\times J))$ tal que $\rho_{\underline{I}}([\phi])=\phi_*(\omega_{n+1})=\omega_{n+1}$. Notar que ϕ es homóloga a $id_{I^n\times J}$ (rel. $\partial(I^n\times J)$).

Entonces queda inducida la equivalencia natural θ_ϕ cuya inversa es la equivalencia natural inducida por la inclusión i de $(I^n\times J,\partial(I^n\times J),v\times J,v)$ en $(I^n\times J,\partial(I^n\times J),T^{n-1}\times J,I^n\times 0)$ que denotaremos i_*.

Observar que la acción de $\underline{\pi}_1(A,\alpha)$ en $\underline{I}_n(X,A,\alpha)$ induce a través de i_* una acción en $C_n(X,A,\alpha)$.

A partir de ahora denotamos, $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ para referirnos a cualquiera de los dos conjuntos y hacemos un trasvase de las notaciones y del estudio realizado en el Capitulo I.

Así, si utilizamos la notación $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$ para indicar el cociente de $\underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$ por el subgrupo generado por los elementos de la forma $u * \xi$ donde $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(A,\alpha)$ y $\xi \in \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$; en el sentido rígido del Capitulo I hay que interpretarlo como el conjuto de clases de aplicaciones propias del tipo:

$$(I^n \times J,\ I^{n-1} \times J,\ T^{n-1} \times J,\ I^n \times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

donde f , f' pertenecen a la misma clase sii existe una homotopía propia

$$H : (I^n \times J \times I,\ \partial(I^n \times J) \times I) \longrightarrow (X,A)$$

tal que $H_0 = f$, $H_1 = f'$ y $H(x,t,s) = H(x',t,s)$ para cada (x,t,s) y $(x',t,s) \in I^n \times 0 \times I \cup T^{n-1} \times J \times I$.

En el sentido menos rígido que hemos introducido en este párrafo, se interpreta como el conjunto de clases de aplicaciones propias del tipo:

$$(I^n \times J, \partial(I^n \times J) \times I,\ v \times J) \longrightarrow (X,A,\alpha)$$

donde g , g' pertenecen a la misma clase sii existe una homotopía propia $H : (I^n \times J \times I,\ \partial(I^n \times J) \times I) \longrightarrow (X,A)$ tal que $H_0 = g$, $H_1 = g'$.

Para un par propio (X,A) tal que A posee un único final propio, si denotamos $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$ al conjunto de las clases de aplicaciones propias del tipo:

$$(I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \longrightarrow (X,A)$$

donde dos aplicaciones f y g pertenecen a la misma clase sii existe una homotopía propia

$$H : (I^n \times J \times I, \partial(I^n \times J) \times I) \longrightarrow (X,A)$$

tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$;

se tiene que, para cada rayo α en A, la inclusión induce una biyección:

$$\underline{\underline{I}}_n{}^*(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n{}^*(X,A)$$

que dota a $\underline{\underline{I}}_n{}^*(X,A)$ de una estructura de grupo respecto a la cuál es isomorfismo.

Si A es arco conexo y denotamos $\pi^*_{n+1}(X,A)$ (ver [W.G.1]2.2) al conjunto de las clases de aplicaciones del tipo:

$$(I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \longrightarrow (X,A)$$

donde dos aplicaciones f y g del tipo anterior pertenecen a la misma clase sii existe una homotopía

$$H : (I^{n+1} \times I, \partial I^{n+1} \times I) \longrightarrow (X,A)$$

tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$;

se tiene que, para cada punto $x_0 \in A$, la aplicación inducida por la inclusión:

$$\pi_{n+1}(X,A,x_0) \,/\, \Omega_\pi^{n+1}(X,A,x_0) = \pi^*_{n+1}(X,A,x_0) \longrightarrow \pi^*_{n+1}(X,A)$$

dota a $\pi^*_{n+1}(X,A)$ de una estructura de grupo respecto a la cuál es isomorfismo.

Entonces para un par propio (X,A) donde A es arco conexo y posee un único final propio, el homomorfismo

$\varphi_\alpha : \pi_{n+1}(X,A,\alpha(0)) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)$, donde α es un rayo de A, induce $\varphi^*_\alpha : \pi^*_{n+1}(X,A,\alpha(0)) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n{}^*(X,A,\alpha)$ y éste por último un homomorfismo $\varphi^* : \pi^*_{n+1}(X,A,) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n{}^*(X,A)$.

Recordemos (ver [W.G.1].2.2) que la interpretación de la suma en $\pi_n^*(X,A)$ viene dada de la siguiente manera:

Teorema 7.- Sean f, g: $(I^n,\partial I^n) \longrightarrow (X,A)$ aplicaciones tales que $f(1,x) = g(0,x)$ para todo $x \in I^{n-1}$, y $h: (I^n, M^{n-1}) \longrightarrow (X,A)$ la aplicación definida por:

$$h(s,x) = \begin{cases} f(2s,x) & \text{si } 0 \le s \le 1/2 \\ \\ g(2s-1,x) & \text{si } 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

Sean a,b,c los elementos de $\pi_n^*(X,A)$ representados por f, g, h respectivamente. Entonces $c = a + b$

(M^{n-1} denota $\partial I^n_+ \cup \partial I^n_-$, con $I^n_+ = \{(t_1,\ldots,t_n) \in I^n | 1/2 \le t_1 \le 1\}$ e $I^n_- = \{(t_1,\ldots,t_n) \in I^n | 0 \le t_1 \le 1/2\}$

Teorema 8.- Sean f, f': $(I^n,\partial I^n) \longrightarrow (X,A)$ tales que $f'(s,x) = f(1-s,x)$ para todo $(s,x) \in I \times I^{n-1}$. Si a y a' son los elementos de $\pi_n^*(X,A)$ representados por f y f' respectivamente, entonces $a = -a'$.

Los siguientes teoremas darán una interpretación de la suma en $\underline{\underline{\pi}}_n^*(X,A)$.

Teorema 9.- Sean f, g : $(I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \longrightarrow (X,A)$ aplicaciones propias tales que $f(1,t_2,\ldots,t_n,t) = g(0,t_2,\ldots,t_n,t)$ para todo $(t_2,\ldots,t_n,t) \in I^{n-1} \times J$, y $h : (I^n \times J, K^n) \longrightarrow (X,A)$ la aplicación propia definida por:

$$h(t_1,t_2,\ldots,t_n,t)=\begin{cases} f(2t_1,t_2,\ldots,t_n,t) & \text{si } 0\le t_1\le 1/2 \\ \\ g(2t_1-1,t_2,\ldots,t_n,t) & \text{si } 1/2\le t_1\le 1 \end{cases}$$

Sean a,b,c, los elementos de $\underline{\pi}_n^*(X,A)$ representandos por f,g,h respectivamente. Entonces, $c=a+b$

(K^n denota, como en el Teorema 2.2, $\partial(I^n\times J)_+\cup\partial(I^n\times J)_-$)

<u>Demostración</u>.- Sea

$$M.(I^n\times J\times I,\partial(I^n\times J)\times I)\longrightarrow(I^n\times J,\partial(I^n\times J))$$

una aplicación propia tal que

$M(t_1,..,t_n,t,0)=(t_1,..,t_n,t)$ para cada $(t_1,..,t_n,t)\in I^n\times J$

$M(t_1,..,t_n,t,1)=(1,0,..,0,t)$ para cada $(t_1,..,t_n,t)\in I^n\times 0\cup T^{n-1}\times J$

$M(1\times I^{n-1}\times J\times I)\subset 1\times I^{n-1}\times J$

(puede tomarse como M la aplicación Δ construida anteriormente)

Sea $r:I^n\times J\longrightarrow I^n\times J$ la reflexión de $I^n\times J$ respecto a $\{t_1=1/2\}$, $r(t_1,t_2..,t_n,t)=(1-t_1,t_2..,t_n,t)$, que es una aplicación propia.

Definimos $M':(I^n\times J\times I,\partial(I^n\times J)\times I)\longrightarrow(I^n\times J\times I,\partial(I^n\times J))$

por $$M'(t_1,\ldots,t_n,t,s)=r\circ M(r(t_1,\ldots,t_n,t),s)$$

para cada $(t_1,\ldots,t_n,t,s)\in I^n\times J\times I$.

Consideramos ahora las aplicaciones propias $F,G:I^n\times J\times I\longrightarrow X$ dadas por $F=f\circ M$ y $G=g\circ M'$

Llamando l al rayo en A definido por $l(t)=f(1,0,\ldots,0,t)$ para cada $t\in J$, notemos que F_1 y G_1 (definidas por $F_1(t_1,..,t_n,t)=F(t_1,..,t_n,t,1)$ y $G_1(t_1,..,t_n,t)=G(t_1,..,t_n,t,1)$ para cada $(t_1,..,t_n,t)\in I^n\times J$) son aplicaciones propias del tipo

$$(I^n\times J,\partial(I^n\times J),T^{n-1}\times J,I^n\times 0)\longrightarrow(X,A,l,l(0))$$

y representan respectivamente a los elementos a y b de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$.
Como $G(0,t_2,..,t_n,t,s) = g \circ r \circ M(1,t_2,..,t_n,t,s) = g \circ r(1,t'_2,..,t'_n,t') =$
$= f(1,t'_2,..,t'_n,t') = f \circ M(1,t_2,..,t_n,t,s) = F(1,t_2,..,t_n,t,s)$
para cada $(t_2,..,t_n,t,s) \in I^{n-1} \times J \times I$

Podemos definir la aplicación propia

$$H : (I^n \times J \times I, \partial(I^n \times J) \times I) \longrightarrow (X,A)$$

$$H(t_1,t_2,..,t_n,t,s) = \begin{cases} F(2t_1,t_2,..,t_n,t,s) & \text{si} \quad 0 \le t_1 \le 1/2 \\ \\ G(2t_1-1,t_2,..,t_n,t,s) & \text{si} \quad 1/2 \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

Entonces como $H_0 = h$, H_1 representa al elemento c de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$. Pero también H_1 representa al elemento suma en $\underline{\underline{I}}_n(X,A,1)$ de los elementos representados por F_1 y G_1. Por lo tanto H_1 representa al elemento $a+b$ de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$ y obtenemos que $c = a+b$. #

Teorema 10.- Sean $f, f' : (I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \longrightarrow (X,A)$ aplicaciones propias tales que $f'(t_1,t_2,..,t_n,t) = f(1-t_1,t_2,..,t_n,t)$ para cada $(t_1,..,t_n,t) \in I^n \times J$. Sean a y a' los elementos de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$ representados por f y f' respectivamente. Entonces, $a = -a'$.

Demostración.- Sea $g : (I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \longrightarrow (X,A)$ la aplicación propia dada por:

$$g(t_1,t_2,..,t_n,t) = \begin{cases} f(2t_1,t_2,..,t_n,t) & \text{si} \quad 0 \le t_1 \le 1/2 \\ \\ f'(2t_1-1,t_2,..,t_n,t) & \text{si} \quad 1/2 \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

Por el Teorema 9, g representa al elemento $a+a'$ de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$.
Notar que $g(t_1,t_2,..,t_n,t) = g(1-t_1,t_2,..,t_n,t)$
Definimos una aplicación propia $F : I^n \times J \times I \longrightarrow X$ por:

$$F(t_1,t_2,..,t_n,t,s) = \begin{cases} g((1-s)t_1,t_2,..,t_n,t) & \text{si } 0 \le t_1 \le 1/2 \\ \\ g((1-s)t_1+s,t_2,..,t_n,t) & \text{si } 1/2 \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

Como $F_0 = g$ y $F(\partial(I^n \times J)\times I) \subset A$, g y F_1 representan el mismo elemento de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$. Ahora bien, $F_1(I^n \times J) \subset A$ y por tanto g representa al elemento cero de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$. #

Teorema 11.- Sean $\quad f : (I^{n+1},\partial(I^{n+1})) \longrightarrow (X,A)$

y $\quad g : (I^n \times J,\partial(I^n \times J)) \longrightarrow (X,A)$

aplicaciones propias tales que $f(t_1,\ldots,t_n,1) = g(t_1,\ldots,t_n,0)$ para cada $(t_1,\ldots,t_n) \in I^n$. Sea a el elemento de $\pi_{n+1}^*(X,A)$ representado por f y b el elemento de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$ representado por g.

Entonces, el elemento c de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$ representado por la aplicación propia

$$h : (I^n \times J\,,\,\partial(I^n \times J)) \longrightarrow (X,A)$$

definida como:

$$h(t_1,t_2,..,t_n,t) = \begin{cases} f(t_1,\ldots,t_n,2t) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ \\ g(t_1,\ldots,t_n,2t-1) & \text{si } 1/2 \le t \end{cases}$$

verifica que $\quad c = \phi^*(-a) + b$

Demostración.- Construiremos en primer lugar una aplicación de $(I^n \times I \times I\,,\,\partial(I^n \times I)\times I)$ en (X,A) de forma que la restricción a $I^n \times I \times 0$ sea f, la restricción a $I^n \times I \times 1$ sea tal que envie $P^n \times 1$ (donde P^n denota la unión de las n-caras de I^{n+1} distintas de $I^{n-1}\times 0 \times I$) en $f(v')$ (donde $v' = (1,0,..,0,1) \in I^{n+1}$)

y además envíe $(I^n \times 1) \times I$ en $f(I^n \times 1)$.

Sea L' un homeomorfismo de P^n en I^n q.e transforma v' en $(1,0,\dots,1) \in I^n$. Por ejemplo, para $n=2$ el representado por la siguiente figura:

Consideramos ahora la aplicación $F: P^n \times I \longrightarrow A$ definida por la composición:

$$P^n \times I \xrightarrow{L' \times id_I} I^n \times I \xrightarrow{\beta} I^n \xrightarrow{(L')^{-1}} P^n \xrightarrow{f} A$$

donde β viene dada por $\beta(x,s) = (1-s)x + s\,L'(v')$ para cada $(x,s) \in I^n \times I$.

Notemos que para cada $y \in P^n$,

$$F_0(y) = F(y,0) = f(y) \quad , \quad F_1(y) = F(y,1) = f(v').$$

Además para cada $(x,1,s) \in I^n \times 1 \times I$,

$$F(x,1,s) = f \circ (L')^{-1} \circ \beta(L'(x,1),s) \in f \circ (L')^{-1} \circ \beta(L'(I^n \times 1) \times I)$$

que está contenido, por ser $L'(I^n \times 1)$ convexo, en $f \circ (L')^{-1} \circ L'(I^n \times 1) = f(I^n \times 1)$.

Notemos que $\partial(I^n \times 0 \times I) = (I^{n-1} \times 0 \times I) \cap P^n$.

$F|_{\partial(I^{n-1} \times 0 \times I) \times I}$ es una homotopía parcial de $f|_{I^{n-1} \times 0 \times I}$. Aplicando la propiedad de extensión de homotopía, se extiende a una homotopía de $f|_{I^{n-1} \times 0 \times I}$.

Con esto conseguimos una homotopía $F: \partial(I^n \times I) \times I \longrightarrow A$ de $f|_{\partial(I^n \times I)}$. Aplicando de nuevo la propiedad de extensión de homotopía, F se extiende a $F: (I^n \times I \times I, \partial(I^n \times I) \times I) \longrightarrow (X,A)$ verificando que $F_0 = f$, $F_1(P^n) = f(v')$, $f(I^n \times 1 \times I) \subset f(I^n \times 1)$.

Notar que $F(\partial(I^n \times I) \times I) \subset A$ y por tanto F_1 representa el mismo elemento que f en $\pi^*_{n+1}(X,A)$. Además F_1 es una aplicación del tipo

$$(I^n\times I\ ,\ I^{n-1}\times 0\times I\ ,\ P^n) \longrightarrow (X,A,f(v'))$$

luego representa un elemento de $\pi_{n+1}(X,A,f(v'))$.

A continuación definiremos una aplicación propia de $(I^n\times J\times I,\ \partial(I^n\times J)\times I)$ en (X,A) de forma que la restricción a $I^n\times J\times 0$ sea g, la restricción a $I^n\times 0\times 1\cup T^{n-1}\times J\times 1$ sea l (donde $l: J \longrightarrow A$ es la aplicación propia definida por $l(t)=g(1,0,..,0,t)$) y además la restricción a $I^n\times 0\times 1$ coincide con $F|_{I^n\times 1\times I}$.

Sea L un homeomorfismo de $I^n\times 0\cup T^{n-1}\times J$ en $I^{n-1}\times J$ que transforme $(1,0,\ldots,0,t)\in T^{n-1}\times J$ en $(1,0..,0,t)\in I^{n-1}\times J$.

Por ejemplo, para $n=2$, el representado por la siguiente figura

Llamaremos v al punto $(1,0..,0)\in I^n\times J$.

Definimos la aplicación propia $G:(I^n\times 0\cup T^{n-1}\times J)\times I \longrightarrow A$ como la composición:

$$(I^n\times 0\cup T^{n-1}\times J)\times I \xrightarrow{L\times id_I} I^{n-1}\times J\times I \xrightarrow{\gamma} I^{n-1}\times J \xrightarrow{L^{-1}} T^{n-1}\times J \xrightarrow{g} A$$

donde γ está definida por:

$$\gamma(L(x,t),s)=(1-s)L(x,t)+s\,L(1,0,..0,t)$$

Observemos que $G_0(x,t)=G(x,t,0)=g(x,t)$ y $G_1(x,t)=G(x,t,1)=l(t)$ para cada $(x,t)\in I^n\times 0\cup T^{n-1}\times J$.

Además, para cada $(t_1,t_2,\ldots,t_n,0,s)\in I^n\times 0\times I$

$G(t_1,t_2,\ldots,t_n,0,s)=g(\,(1-s)(t_1,\ldots,t_n,0)+s(1,0,\ldots,0)\,)=$

$=f(\,(1-s)(t_1,\ldots,t_n,1)+s(1,0,\ldots,0,1)\,)=F(t_1,\ldots,t_n,1,s).$

Análogamente a lo realizado en la primera parte de la demostración, aplicando sucesivamente la propiedad de extensión de homotopía propia, G se extiende hasta una aplicación propia

$$G:(I^n\times J\times I,\partial(I^n\times J)\times I)\longrightarrow(X,A)$$

verificando las condiciones requeridas.

Entonces G_1 representa el mismo elemento que $G_0=g$ en $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$

Notar que además G_1 es una aplicación del tipo

$$(I^n\times J,\ I^{n-1}\times 0\times J,\ T^{n-1}\times J,\ I^n\times 0)\longrightarrow(X,A,l,l(0))$$

y por tanto representa un elemento de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A,l)$.

Consideramos ahora la aplicación propia $H:I^n\times J\times I\longrightarrow X$ dada por:

$$H(t_1,t_2\ldots,t_n,t,s)=\begin{cases}F(t_1,\ldots,t_n,2t,s) & \text{si}\quad 0\le t\le 1/2\\[2ex] G(t_1,\ldots,t_n,2t-1,s) & \text{si}\quad 1/2\le t\end{cases}$$

Observar que $H_0=h$ y $H(\partial(I^n\times J)\times I)\subset A$, por tanto H_1 representa el mismo elemento que h en $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$.

Definimos ahora otra aplicación propia $R:\ I^n\times J\times I\longrightarrow X$ como $R(t_1,t_2,\ldots,t_n,t,s)=$

$$0\le t\le 1/2\quad\begin{cases}F_1(2t_1/2-s,t_2,\ldots,t_n,2t) & \text{si } 0\le t_1\le 1-s/2\\[2ex] F_1(1,t_2,\ldots,t_n,2t)=l(0) & \text{si } 1-s/2\le t_1\le 1\end{cases}$$

$$1/2 \le t \quad \begin{cases} G_1(0,t_2,\dots,t_n,2t-1)=1(2t-1) & \text{si } 0 \le t_1 \le s/2 \\ \\ G_1((2t_1-s)/2-s,t_2,\dots,t_n,2t-1) & \text{si } s/2 \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

Notar que $R_0 = H_1$ y $R(\partial(I^n \times J) \times I) \subset A$, de donde se deduce que R_1 representa el mismo elemento que H_1 en $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$.

Si consideramos por último las aplicaciones propias K y $K' : I^n \times J \longrightarrow X$ definidas respectivamente por:

$$K(t_1,t_2,\dots,t_n,t) = R_1(t_1/2,t_2,\dots,t_n,t)$$

$$K'(t_1,t_2,\dots,t_n,t) = R_1((t_1+1)/2,t_2,\dots,t_n,t)$$

para cada $(t_1,t_2,\dots,t_n,t) \in I^n \times J$, es evidente que K representa en $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$ la imagen por φ^* del elemento de $\pi^*_{n+1}(X,A)$ representado por $-F_1$, es decir $\varphi^*(-a)$. Y K' representa en $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$ el mismo elemento que representa G_1, es decir b.

Como

$$R_1(t_1,t_2,\dots,t_n,t) = \begin{cases} K(2t_1,t_2,\dots,t_n,t) & \text{si } 0 \le t_1 \le 1/2 \\ \\ K'(2t_1-1,t_2,\dots,t_n,t) & \text{si } 1/2 \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

del Teorema 9 deducimos que R_1 representa en $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$ la suma de los elementos representados por K y K'. Como R_1 representa a c, obtenemos que $c = \varphi^*(-a) + b$. #

4.- Teorema de adición de homotopía propia.

Sea (X,A) un par propio tal que para cada rayo α en A $\underline{\underline{\pi}}_0(A,\alpha)$ y $\pi_0(A,\alpha(0))$ son triviales.

Teorema 1.- Para $n \geq 2$, sea $f: I^{n+1} \times J \longrightarrow X$ una aplicación propia tal que transforma toda n-cara de $I^{n+1} \times J$ en un subespacio propio de A.

Para cada $1 \leq i \leq n+1$ y $l \in \{0,1\}$, sea γ_i^l el elemento de $\underline{\underline{\pi}}_n^*(X,A)$ representado por la aplicación propia

$$f \circ \alpha_i^l : (I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \longrightarrow (X,A)$$

y sea $\gamma = \varphi^*(\overline{\gamma}) \in \underline{\underline{\pi}}_n^*(X,A)$ donde $\overline{\gamma}$ es el elemento de $\pi_{n+1}^*(X,A)$ representado por $f \circ \alpha_{n+2}^0 : (I^{n+1}, \partial(I^{n+1})) \longrightarrow (X,A)$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{l=0}^{1} (-1)^{i+l} \gamma_i^l - (-1)^{n+2} \gamma = 0$$

<u>Demostración</u>.- Supongamos primero que $f(\alpha_i^l(I^n \times J)) \subset A$ para $i > 1$, $l \in \{0,1\}$ y $f(\alpha^0_{n+2}(I^{n+1})) \subset A$, lo que significa que $\gamma_i^l = 0$ para $i > 1$, $l \in \{0,1\}$ y $\gamma = 0$. Entonces f es una homotopía propia entre $f \circ \alpha_1^0$ y $f \circ \alpha_1^1$, con $f(I \times \partial(I^n \times J)) \subset A$, por lo tanto $\gamma_1^0 = \gamma_1^1$ y la fórmula se verifica.

Probaremos el Teorema por inducción sobre el número m de caras (i,l) con $i > 1$ tales que $\mathrm{Im}(f \circ \alpha_i^l) \not\subset A$.

Lo demostrado anteriormente corresponde al caso $m = 0$. Supongamos pues, que la fórmula se verifica para $m \geq 0$ y veamos que también se verifica para $m+1$

Para ello probamos una serie de Lemas:

Lema 2.- Sea σ una permutación de $\{1,..,n\}$ y

$$\tilde{\sigma} : (I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \longrightarrow (I^n \times J, \partial(I^n \times J))$$

la aplicación definida por $\tilde{\sigma}(t_1,..t_n,t) = (t_{\sigma(1)},..\ t_{\sigma(n)},t)$

Entonces, la aplicación inducida

$$\tilde{\sigma}_* : J_{n+1}(I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \longrightarrow J_{n+1}(I^n \times J, \partial(I^n \times J))$$

verifica que $\tilde{\sigma}_*(\omega_{n+1}) = \mathrm{sig}\,\sigma \cdot \omega_{n+1}$.

Demostración.- Notar que σ induce $\bar{\sigma} : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (I^n, \partial I^n)$ definida por $\bar{\sigma}(t_1,..,t_n,t) = (t_{\sigma(1)},\ ..,t_{\sigma(n)})$, y ésta induce

$$\bar{\sigma}_* : J_n(I^n, \partial I^n) \longrightarrow J_n(I^n, \partial I^n)$$

Sabemos, por Lema 2.4.4 de [W.G.1] que $\bar{\sigma}_*(\bar{\omega}_n) = \mathrm{sig}\,\sigma \cdot \bar{\omega}_n$

Entonces, si probamos que el diagrama (ver párrafo 2):

$$\begin{tikzcd}
J_{n+1}(I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \arrow[r, "\tilde{\sigma}_*"] & J_{n+1}(I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \\
J_n(I^n, \partial I^n) \arrow[u, "\Psi^0_{n+1}"] \arrow[r, "\bar{\sigma}_*"] & J_n(I^n, \partial I^n) \arrow[u, "\Psi^0_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

es commutativo, tendremos $\tilde{\sigma}_*(\omega_{n+1}) = \Psi^0_{n+1}\bar{\sigma}_*(\Psi^0_{n+1})^{-1}(\omega_{n+1}) =$
$\Psi^0_{n+1}\bar{\sigma}_*((-1)^{n+1}\bar{\omega}_n) = (-1)^{n+1}\Psi^0_{n+1}(\mathrm{sig}\,\sigma \cdot \bar{\omega}_n) = (-1)^{n+1}\mathrm{sig}\,\sigma(-1)^{n+1}\omega_{n+1}$

El diagrama aludido es en efecto conmutativo, pues como $\partial_*, \bar{j}_*, \bar{e}_*$ conmutan con los homomorfismos inducidos y además $\alpha^0_{n+1}\bar{\sigma}(t_1,...,t_n) = \alpha^0_{n+1}(t_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(n)}) = (t_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(n)},0) =$
$= \tilde{\sigma}\,\alpha^0_{n+1}(t_1,...,t_n)$ para cada $(t_1,...,t_n) \in I^n$, obtenemos que todos los cuadrados que forman el siguiente diagrama son conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
J_{n+1}(I^n\times J,\partial(I^n\times J)) \arrow[r, "\widetilde{\sigma}_*"] \arrow[d, "\partial_*"] & J_{n+1}(I^n\times J,\partial(I^n\times J)) \arrow[d, "\partial_*"] \\
J_n(\partial(I^n\times J)) \arrow[r, "\widetilde{\sigma}_*"] \arrow[d, "\bar{j}_*"] & J_n(\partial(I^n\times J)) \arrow[d, "\bar{j}_*"] \\
J_n(\partial(I^n\times J),H^n_{n+1,0}) \arrow[r, "\widetilde{\sigma}_*"] & J_n(\partial(I^n\times J),H^n_{n+1,0}) \\
J_n((I^n\times J)_{n+1,0},\partial(I^n\times J)_{n+1,0}) \arrow[r, "\widetilde{\sigma}_*"] \arrow[u, "\bar{e}_*"] & J_n((I^n\times J)_{n+1,0},\partial(I^n\times J)_{n+1,0}) \arrow[u, "\bar{e}_*"] \\
J_n(I^n,\partial I^n) \arrow[r, "\bar{\sigma}_*"] \arrow[u, "(\alpha^0_{n+1})_*"] & J_n(I^n,\partial I^n) \arrow[u, "(\alpha^0_{n+1})_*"]
\end{tikzcd}$$

Basta ahora tener en cuenta que $\Psi^0_{n+1} = \partial_*^{-1}(\bar{j}_*)^{-1}\bar{e}_*(\alpha^0_{n+1})_*$ #

Para cada (i,l) con $1<i\le n+1$, llamaremos

$$R_{i,1}=\alpha_i^1(I^n\times J)\cup\alpha_1^1(I^n\times J)\subset I^{n+1}\times J$$

y para $i=n+2$, $l=0$

$$R_{n+2,0}=\alpha^0_{n+2}(I^{n+1})\cup\alpha_1^1(I^n\times J)\subset I^{n+1}\times J$$

y definimos las aplicaciones propias $\phi_i^1\colon I^n\times J\longrightarrow R_{i,1}$

de la manera siguiente:

Si $1<i\le n+1$, $l=0$

$$\phi_i^1(t_1,\dots,t_n,t)=\begin{cases}(2t_{i-1},t_1,..,t_{i-2},0,t_i,..,t_n,t) & \text{si } 0\le t_{i-1}\le 1/2\\[2ex] (1,t_1,..,t_{i-2},2t_{i-1}-1,t_i,..,t_n,t) & \text{si } 1/2\le t_{i-1}\le 1\end{cases}$$

Si $1 < i \leq n+1$, $l = 1$

$$\phi_i^1(t_1,\dots,t_n,t) = \begin{cases} (1,t_1,\dots,t_{i-2},2t_{i-1},t_i,\dots,t_n,t & \text{si } 0 \leq t_{i-1} \leq 1/2 \\ \\ (2-2t_{i-1},t_1,\dots,t_{i-2},1,t_i,\dots,t_n,t) & \text{si } 1/2 \leq t_{i-1} \leq 1 \end{cases}$$

Si $i = n+2$, $l = 0$

$$\phi^0_{n+2}(t_1,\dots,t_n,t) = \begin{cases} (2t,t_1,\dots,t_{n-1},t_n,0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \\ (1,t_1,\dots,t_{n-1},t_n,2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \end{cases}$$

<u>Lema 3</u>.- Para $1 < i \leq n+1$, $l \in \{0,1\}$

$f \circ \phi_i^1 : (I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \longrightarrow (X,A)$ representa al elemento

$$\gamma_1^1 + (-1)^{i+1}\,\gamma_i^1 \in \underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$$

y $f \circ \phi^0_{n+2} : (I^n \times J, \partial(I^n \times J)) \longrightarrow (X,A)$ representa al elemento

$$\gamma_1^1 - (-1)^{n+2}\,\gamma \in \underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$$

<u>Demostración</u>.- Para $1 < i \leq n+1$, sea σ la permutación $(1,2,\dots,i-1)$ de $\{1,\dots,n\}$ y $\tilde{\sigma}$ la aplicación del Lema 2.

Entonces:

si $l = 0$, $f \circ \phi_i^0 = f \circ \alpha_i^0 \circ \tilde{\sigma} + f \circ \alpha_1^1$

si $l = 1$, $f \circ \phi_i^1 = f \circ \alpha_1^1 - f \circ \alpha_i^1 \circ \tilde{\sigma}$

Como por el Lema 2, $\tilde{\sigma}_*(\omega_{n+1}) = \operatorname{sig}\sigma \cdot \omega_{n+1}$ y $\operatorname{sig}\sigma = (-1)^i$, aplicando los Teoremas 9.3 y 10.3, deducimos que $f \circ \phi_i^0$ representa al elemento $(-1)^i \gamma_i^0 + \gamma_1^1$ de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$ y $f \circ \phi_i^1$ representa a $\gamma_1^1 - (-1)^i\gamma_i^1$. Como $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$ es abeliano, $f \circ \phi_i^1$ representa al elemento $\gamma_1^1 + (-1)^{i+1}\gamma_i^1$ de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$.

Ahora, para $i = n+2$, $l = 0$, sea κ la permutación $(1,2,\dots,n+1)$ en $\{1,\dots,n+1\}$. Si $\bar{\kappa} : I^{n+1} \longrightarrow I^{n+1}$ está definida por

$\bar{\kappa}(t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}) = (t_{n+1},t_1,\ldots,t_n)$, por el Lema 2.4.4 de [W.G.1] la inducida $\bar{\kappa}_*: J_{n+1}(I^{n+1},\partial I^{n+1}) \longrightarrow J_{n+1}(I^{n+1},\partial I^{n+1})$ verifica que $\bar{\kappa}_*(\bar{\omega}_{n+1}) = \operatorname{sig}\kappa \cdot \bar{\omega}_{n+1}$.

Notemos que $\operatorname{sig}\kappa = (-1)^{n+2}$.

Como $f\circ\phi^0_{n+2} = f\circ\alpha^0_{n+2}\circ\bar{\kappa} + f\circ\alpha_1{}^1$ (en el sentido del Teorema 11.3) aplicando los Teoremas 8.3, 10.3, 11.3 y $\underline{\underline{I}}_n{}^*(X,A)$ abeliano, obtenemos que $f\circ\phi^0_{n+2}$ representa al elemento $\gamma_1{}^1-(-1)^{n+2}\gamma$ de $\underline{\underline{I}}_n{}^*(X,A)$. #

Lema 4.- Para cada (i,l) (donde si $1 < i \le n+1$, $l \in \{0,1\}$ y si $i = n+2, l = 0$), existe una aplicación propia

$$\Phi: I^{n+1}\times J\times I \longrightarrow X$$

verificando:

1) $\Phi(u,0) = f(u)$ para cada $u \in I^{n+1}\times J$

2) $\Phi(u,s) \in A$ si $(u,s) \in \partial((I^{n+1}\times J)_{j,\eta})\times I$ con $(1,1) \preceq (j,\eta) \preceq (i,l)$

3) $\Phi(u,1) \in A$ si $u \in (I^{n+1}\times J)_{i,l}$

4) $\Phi(u,s) \in A$ si $(u,s) \in (I^{n+1}\times J)_{j,\eta}\times I$ con $f((I^{n+1}\times J)_{j,\eta}) \subset A$

5) $\Phi(\alpha_i{}^l(x),1) = f\circ\phi_i{}^l(x)$ para cada $x \in I^n\times J$.

Demostración.- Para cada (i,l) con $1 < i \le n+1$, $l \in \{0,1\}$ construimos una aplicación propia

$$\Phi: (I^{n+1}\times J)_{1,1}\times I \longrightarrow X$$

definida como sigue:

Para $l = 0$, $\Phi(\alpha_i{}^l(t_1,\ldots,t_n,t),s) =$

$$\begin{cases} 0\le s\le 1/2 \begin{cases} f(1,t_1,\ldots,t_{i-2},(1-2s)t_{i-1},t_i,\ldots,t_n,t) & \text{si } 0\le t_{i-1}\le 1/2 \\ f(1,t_1,..,t_{i-2},(1+2s)t_{i-1}-2s,t_i,..,t_n,t) & \text{si } 1/2\le t_{i-1}\le 1 \end{cases} \\ 1/2\le s\le 1 \begin{cases} f(2(1-s)+2(2s-1)t_{i-1},t_1,..,t_{i-2},0,t_i,..,t_n,t) & \text{si } 0\le t_{i-1}\le 1/2 \\ f(1,t_1,..,t_{i-2},2t_{i-1}-1,t_i,..,t_n,t) & \text{si } 1/2\le t_{i-1}\le 1 \end{cases} \end{cases}$$

Para $l = 1$, $\Phi(\alpha_i{}^l(t_1,\ldots,t_n,t),s) =$

$$\begin{cases} 0\le s\le 1/2 \begin{cases} f(1,t_1,\ldots,t_{i-2},(1+2s)t_{i-1},t_i,\ldots,t_n,t) & \text{si } 0\le t_{i-1}\le 1/2 \\ f(1,t_1,..,t_{i-2},(1-2s)t_{i-1}+2s,t_i,..,t_n,t) & \text{si } 1/2\le t_{i-1}\le 1 \end{cases} \\ 1/2\le s\le 1 \begin{cases} f(1,t_1,..,t_{i-2},2t_{i-1},t_i,..,t_n,t) & \text{si } 0\le t_{i-1}\le 1/2 \\ f(2(1-s)+2(2s-1)(1-t_{i-1}),t_1,t_{i-2},1,t_i,..,t_n,t) & \text{si } 1/2\le t_{i-1}\le 1 \end{cases} \end{cases}$$

y definimos la aplicación propia $\quad \Phi : (I^{n+1}\times J)_{i,l}\times I \longrightarrow X$

como:

$$\Phi(\alpha_i{}^l(t_1,..,t_n,t),s)=\begin{cases} f\circ\alpha_i{}^l(t_1,\ldots,t_n,t) & \text{si } 0\le s\le 1/2 \\ f(2(1-s)t_1,t_2,..,t_{i-1},1,t_i,..,t_n,t) & \text{si } 1/2\le s\le 1 \end{cases}$$

Para el caso $i = n+2$, $l = 0$, construimos la aplicación propia

$$\Phi : (I^{n+1}\times J)_{1,1}\times I \longrightarrow X$$

de la siguiente manera.

$$\Phi(\alpha_1^{1}(t_1,..,t_n,t),s) =$$

$$\begin{cases} 0 \le s \le 1/2 & \begin{cases} f(1,t_1,..,t_n,(1-2s)t) & \text{si} \quad 0 \le t \le 1/2 \\ \\ f(1,t_1,..,tn,(1+2s)t-2s) & \text{si} \quad 1/2 \le t \end{cases} \\ 1/2 \le s \le 1 & \begin{cases} f(2(1-s)+2(2s-1)t,t_1,..,t_n,0) & \text{si} \quad 0 \le t \le 1/2 \\ \\ f(1,t_1,..,t_n,2t-1) & \text{si} \quad 1/2 \le t \end{cases} \end{cases}$$

y definimos la aplicación propia $\Phi : (I^{n+1} \times J)_{n+2,0} \times I \longrightarrow X$ oomo:

$$\Phi(\alpha^0_{n+2}(t_1,..,t_n,t_{n+1}),s) = \begin{cases} f \circ \alpha^0_{n+2}(t_1,..,t_n,t_{n+1}) & \text{si } 0 \le s \le 1/2 \\ \\ f(2(1-s)t_1,t_2,..,t_{n+1},0) & \text{si } 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

Así para cada (i,l) (donde si $1 < i \le n+1$, $l \in \{0,1\}$ y si $i = n+2$, $l = 0$), tenemos definida una aplicación propia

$$\Phi : R_{i,l} \times I \longrightarrow X$$

Llamando K a la unión de las n-caras de $I^{n+1} \times J$ y de aquellas (n+1)-caras $(I^{n+1} \times J)_{j,\eta}$ con $j > 1$, para las cuales $f((I^{n+1} \times J)_{j,\eta}) \subset A$, tenemos definida de manera propia

$$\Phi : (R_{i,l} \times I, (K \cap R_{i,l}) \times I) \longrightarrow (X,A)$$

Aplicando la propiedad de extensión de homotopía propia, Φ se extiende a una aplicación propia

$$\Phi : (I^{n+1} \times J \times I, K \times I) \longrightarrow (X,A)$$

cumpliendo las condiciones requeridas. #

Estamos ahora en oondiciones de realizar el prooeso inductivo al que nos referíamos al comienzo de la demostración del Teorema 1.

Sea f una aplicación propia de $I^{n+1}\times J$ en X que envía todas las n-caras de $I^{n+1}\times J$ de manera propia a A y tal que para m+1 (n+1)-caras $(I^{n+1}\times J)_{i,l}$ con $i>1$, $f((I^{n+1}\times J)_{i,l})\not\subset A$.

Elegimos uno de estos pares (i,l) y para éste, consideramos la aplicación propia Φ del Lema 4. Entonces definimos $f':I^{n+1}\times J \longrightarrow X$ como $f'(u)=\Phi(u,1)$ para cada $u\in I^{n+1}\times J$.

La aplicación f' satisface las hipótesis del Teorema 1 y además sólo hay como máximo m caras $(I^{n+1}\times J)_{j,\eta}$ con $j>1$ para las que $f'((I^{n+1}\times J)_{j,\eta})\not\subset A$. Por lo tanto podemos aplicar la hipótesis de inducción a f'.

Si denotamos $\gamma_j'^{\eta}$ al elemento de $\underline{\pi}_n^*(X,A)$ representado por $f'\circ\alpha_j^{\eta}$, de las condiciones que verifica Φ en el Lema 4, deducimos inmediatamente que

$\gamma_j'^{\eta}=\gamma_j^{\eta}$ salvo para $(j,\eta)=(1,1)$ ó $(j,\eta)=(i,l)$

$\gamma_i'^{l}=0$

Como, por el Lema 3, $f\circ\phi_i^{l}$, representa al elemento

$\gamma_1^{1}+(-1)^{i+l}\gamma_i^{l}$ si $(i,l)\neq(n+2,0)$ ó a

$\gamma_1^{1}-(-1)^{n+2}\gamma$ si $(i,l)=(n+2,0)$,

obtenemos que

$$\gamma_1'^{1}=\gamma_1^{1}+(-1)^{i+l}\gamma_i^{l} \qquad \text{si } (i,l)\neq(n+2,0)$$

ó bien
$$\gamma_1'^{1}=\gamma_1^{1}-(-1)^{n+2}\gamma \qquad \text{si } (i,l)=(n+2,0)$$

Aplicando la hipótesis de inducción,

$$0=\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{\eta=0}^{1}(-1)^{j+\eta}\gamma_j'^{\eta}-(-1)^{n+2}\gamma_{n+2}'^{0}=\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{\eta=0}^{1}(-1)^{j+\eta}\gamma_j^{\eta}-(-1)^{n+2}\gamma$$

#

Observación.- Para el caso relativo, hemos supuesto $n\geq 2$, pues $\underline{\underline{I}}_1(X,A,\alpha)$ no es un grupo. Ahora bien, para el caso absoluto, si $n=1$, el resultado es análogo. Hay que reemplazar A por α y $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A)$ por $\underline{\underline{I}}_n^*(X)$, imponer las condiciones $\underline{\underline{I}}_0(X,\alpha) = 0 = \pi_0(X,\alpha(0))$ y la demostración es más sencilla.

5.-Grupos de homología propia del tipo Eilenberg-Blakers

En este párrafo consideraremos un par propio (X,A) tal que para cada rayo α en A, $\pi_0(X,\alpha(0))$, $\pi_0(A,\alpha(0))$, $\underline{\underline{I}}_0(X,\alpha)$, $\underline{\underline{I}}_0(A,\alpha)$ son triviales, e introduciremos unos grupos que son intermedios entre los grupos de homotopía propia $\underline{\underline{I}}_n$, y los de homología propia J_{n+1}. Estos grupos jugarán el mismo papel que los grupos de Eilenberg-Blakers, para la homología singular (ver 5.IV [W G.2]) en orden a probar el Teorema de Hurewicz

Para un rayo α en A, definimos $C_*^{(n)}(X,A)$ como el subcomplejo del complejo de cadenas $C_*(X)$ (ver Capítulo II, nota final) generado por todos los cubos singulares propios $T:\sigma \longrightarrow X$ (donde $\sigma = I^{q-1}\times J$ ó $\sigma = I^q$) que verifican:

1) T envía todos los vértices de σ a $\alpha(0)$
2) T envía el n-esqueleto de σ a A
3) Si σ es un q-cubo no compacto, T envía todas las 1-caras no compactas de σ a $\dot{\alpha}$.

Notemos que se verifica:

1) $C_*(X) \supset C_*^{(0)}(X,A) \supset C_*^{(1)}(X,A) \supset \ldots$
2) $\bigcap_n C_*^{(n)}(X,A) = C_*^{(0)}(A,\alpha)$
3) $C_*^{(n)}(X,A)$ y $C_*^{(0)}(A,\alpha)$ tienen los mismos q-cubos

singulares propios para $q \leq n$.

4) Si $q > n$, un q-cubo singular propio pertenece a $C_*^{(n)}(X,A)$ si y sólo si todas sus caras pertenecen a $C_*^{(n)}(X,A)$

Teorema 1.- Si (X,A,α) es (π) n-conexo y $(\underline{I})$ (n-1)-conexo, la inclusión

$$i : (C_*^{(n)}(X,A), C_*^{(0)}(A,\alpha)) \longrightarrow (C_*(X), C_*(A))$$

es una equivalencia de pares de complejos de cadenas.

Demostración.- Construiremos $F = \{F_q\}$ con $F_q : C_q(X) \longrightarrow C_{q+1}(X)$ verificando:

1) Si T es un q-cubo singular propio compacto (no compacto), F_qT es (q+1)-cubo singular propio compacto (no compacto) $(T.\sigma \longrightarrow X,\ F_qT : I \times \sigma \longrightarrow X)$.

2) $(F_qT) \circ \alpha_1^0 = T$

3) $(F_qT) \circ \alpha_1^1 \in C_q^{(n)}(X,A)$

4) $F_q(T \circ \alpha_i^1) = (F_qT) \circ (1 \times \alpha_i^1)$ para cada $i \geq 1$

5) F_qT es estacionaria si $T \in C_q^{(n)}(X,A)$

6) Si $T \in C_q(A)$ entonces $F_qT \in C_{q+1}(A)$

Definiendo $r : C_*(X) \longrightarrow C_*^{(n)}(X,A)$ por $rT = FT|_{1\times\sigma}$ para cada cubo singular propio $T : \sigma \longrightarrow X$, se obtiene que $r \circ i = \mathrm{id}_{C_*^{(n)}(X,A)}$ e $r \circ i \simeq \mathrm{id}_{C_*(X)}$ siendo F la homotopía de cadenas.

Definimos F de manera inductiva:

Para $q = 0$, sea $T \in C_0(X)$. Como X es arco conexo podemos elegir un camino $\lambda_T : I \longrightarrow X$ de $T(e_0)$ a $\alpha(0)$. Si $T(e_0) \in A$, elegimos el camino λ_T en A pues A es arco conexo. Si $T(e_0) = \alpha(0)$, tomamos λ_T el camino constante.

Entonces, definimos $FT(t,e_0) = \lambda_T(t)$ para cada $t \in I$.

Si $q=1$, para construir $F_1 : C_1(X) \longrightarrow C_2(X)$, consideramos un 1-cubo singular propio $T : \sigma \longrightarrow X$, donde $\sigma = I$ ó $\sigma = J$.

Si $T \in C_1^{(n)}(X,A)$, tomamos FT estacionaria. En otro caso:

Si $\sigma = I$, definimos $g : 0 \times I \cup I \times \partial I \longrightarrow X$ por $g|_{0\times I} = T$ y $g|_{I \times \partial I} = F(T|_{\partial I})$. Entonces g representa un elemento de $\pi_1(X,A,\alpha(0))$ que es trivial y por tanto g se extiende a una aplicación $FT : I \times I \longrightarrow X$.

Si $\sigma = J$, definimos la aplicación propia $g' : 0 \times J \cup I \times \partial J \longrightarrow X$ por $g'|_{0\times J} = T$ y $g'|_{I\times \partial J} = F(T|_{\partial J})$ Entonces g' representa un elemento de $\underline{I}_0(X,\alpha)$ que es trivial y por tanto g' se extiende a una aplicacion

$$FT \; I \times J \longrightarrow X \qquad \text{que verifica} \qquad FT|_{1\times J} = \alpha$$

Es inmediato comprobar que $F : C_1(X) \longrightarrow C_2(X)$ así construida verifica las condiciones requeridas.

Supongamos F construida hasta $F_{q-1} : C_{q-1}(X) \longrightarrow C_q(X)$

Sea $T \in C_q(X)$ Si $T \in C_q^{(n)}(X,A)$, consideramos FT estacionaria.

En otro caso :

Si T es un q-cubo singular propio compacto, $T : I^q \longrightarrow X$, se hace un razonamiento similar al caso $q=1$ y el hecho de ser $\pi_q(X,A,\alpha(0))$ trivial garantiza que existe $FT : I \times I^q \longrightarrow X$ cumpliendo las condiciones requeridas.

Si T es un q-cubo singular propio no compacto, $T : I^{q-1} \times J \longrightarrow X$ definimos

$$h : 0 \times I^{q-1} \times J \cup I \times \partial(I^{q-1} \times J) \longrightarrow X \quad \text{por}$$

$$h|_{0 \times I^{q-1} \times J} = T \qquad y \qquad h|_{I \times \partial(I^{q-1} \times J)} = F(T|_{\partial(I^{q-1} \times J)})$$

Entonces h representa un elemento de $\underline{I}_{q-1}(X,A,\alpha)$ que es trivial y por tanto existe una extensión propia de h, $FT : I \times I^{q-1} \times J \longrightarrow X$ que verifica las condiciones requeridas.

Como (X,A,α) es (π) n-conexo y $(\underline{I})$ (n-1)conexo, este proceso es valido para $q \leq n$. En el caso de $q = n+1$, procedemos de la siguiente manera:

Si T es un (n+1) cubo singular compacto en X, definimos,

$$g : 0 \times I^{n+1} \cup I \times \partial I^{n+1} \longrightarrow X \quad \text{por}$$

$$g|_{0 \times I^{n+1}} = T \qquad y \qquad g|_{I \times \partial I^{n+1}} = F(T|_{\partial I^{n+1}})$$

Aplicando la propiedad de extensión de homotopia se extiende g a una aplicacion $FT : I \times I^{n+1} \longrightarrow X$, con las condiciones requeridas. Notar que $FT \circ \alpha_1^1 \in C^{(n)}_{n+1}(X,A)$ a pesar de que $FT(1 \times I^{n+1})$ pueda no estar contenido en A.

Si T es un (n+1) cubo singular propio no compacto en X, el razonamiento es analogo utilizando la propiedad de extension de homotopia propia.

Para $q > n+1$, se hace lo mismo. #

Por ser X arco-conexo, tomando $A = \alpha$, obtenemos el siguiente

Corolario 2.- $i : C_*^{(0)}(X,\alpha) \longrightarrow C_*(X)$ es una equivalencia de homotopia.

Como A es un subespacio propio de X, por definicion $C_*^{(0)}(X,A) = C_*^{(0)}(X,\alpha)$, por tanto:

Corolario 3.- $i : C_*^{(0)}(X,A) \longrightarrow C_*(X)$ es una equivalencia de homotopía

Definición 4.- Definimos los grupos de homología propia del tipo Eilenberg-Blackers para (X,A,α):

$$J_n^{(q)}(X,A)=H_n(C_*^{(q)}(X,A)\,,\,C_*^{(q)}(A,\alpha))$$

(Cuando sea preciso especificar el rayo α, $C_*^{(q)}(X,A)$ lo escribiremos $C_*^{(q)}(X,A,\alpha)$ y $J_n^{(q)}(X,A)$ lo denotaremos $J_n^{(q)}(X,A,\alpha)$)

En el caso absoluto, dado α rayo en X, definimos:

$$J_n^{(q)}(X)=H_n(C_*^{(q)}(X,\alpha)\,,\,C_*^{(q)}(\alpha))$$

Notar que $J_n^{(q)}(X,A)=0$ para $n\le q$.

Si $f:(X,A,\alpha)\longrightarrow(Y,B,\beta)$ es una aplicación propia, entonces la aplicación de cadenas de $C_*(X)$ en $C_*(Y)$ inducida por f, envía $C_*^{(q)}(X,A)$ en $C_*^{(q)}(Y,B)$ induciendo homomorfismos

$$f_*^{(q)}:J_n^{(q)}(X,A)\longrightarrow J_n^{(q)}(Y,B)\,.$$

Así $J_n^{(q)}$ es un functor. Además los homomorfismos inducidos por las inclusiones

$$\rightarrow 0=J_n^{(n)}(X,A)\rightarrow J_n^{(n-1)}(X,A)\rightarrow J_n^{(n-2)}(X,A)\rightarrow\cdots\rightarrow J_n^{(0)}(X,A)\rightarrow J_n(X,A)$$

son transformaciones naturales.

Por otra parte, como los grupos $J_n^{(q)}(X,A)$ son grupos de homología del par $(C_*^{(q)}(X,A),C_*^{(0)}(A,\alpha))$, existen operadores borde

$$\partial_*^{(q)}:J_n^{(q)}(X,A)\longrightarrow J_{n-1}^{(0)}(A)$$

Aplicando el Corolario 2, $i_*^{(0)}:J_{n-1}^{(0)}(A)\longrightarrow J_{n-1}(A)$ es isomorfismo y podemos por tanto considerar los operadores borde como homomorfismos

$$\partial_*^{(q)}: J_n^{(q)}(X,A) \longrightarrow J_{n-1}(A)$$

Así $\partial_*^{(q)}$ es una transformación natural de functores y además se observa claramente que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} J_n^{(q)}(X,A) \arrow[rr, "i_*"] \arrow[dr, "\partial_*^{(q)}"'] & & J_n(X,A) \arrow[dl, "\partial_*"] \\ & J_{n-1}(A) & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

6.-Teoremas de tipo Hurewicz para el caso propio

Teorema 1.- Sea (X,A) un par propio con $\pi_0(X)$, $\pi_0(A)$, $\underline{\underline{I}}_0(X)$ $\underline{\underline{I}}_0(A)$ triviales. Sea α un rayo en A. Entonces, para $n>1$:

$$\underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha) \cong J_{n+1}^{(n)}(X,A,\alpha)$$

Demostración.- Definimos

$$\bar{\rho}_{\underline{I}}: \underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}^{(n)}(X,A,\alpha) = H_{n+1}(C_*^{(n)}(X,A,\alpha), C_*^{(0)}(A,\alpha))$$

del siguiente modo:

Dada un aplicación propia

$$f(I^n\times J, I^{n-1}\times J, T^{n-1}\times J, I^n\times 0) \longrightarrow (X,A,\alpha,\alpha(0))$$

que representa a un elemento $\xi\in\underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$, f es un $(n+1)$-cubo singular propio en X que envía las n-caras de $I^n\times J$ a A, todas las 1-caras no compactas a α y todos los vértices a $\alpha(0)$. Es decir, es un $(n+1)$-cubo singular propio que pertenece a $C_*^{(n)}(X,A,\alpha)$ y por tanto es un $(n+1)$-ciclo relativo $(\text{mod } C_*^{(0)}(A,\alpha))$.

Entonces definimos $\bar{\rho}_{\underline{\underline{I}}}(\xi)$ como la clase de f en el $(n+1)$-ésimo grupo de homología propia del tipo E.B, $J_{n+1}^{(n)}(X,A,\alpha)$.

Sea f' otro representante de ξ, del mismo tipo que f. Entonces existe una aplicación propia $F: I\times I^n\times J \longrightarrow X$ tal que $F_0=f$, $F_1=f'$ y $F(I\times\partial(I^n\times J))\subset A$. Notar que F es $(n+2)$ cubo singular propio de $C_*^{(n)}(X,A,\alpha)$

Como $\partial F = f'-f+\sum_{1\leq i\leq n+1}\sum_{\eta=0,1}(-1)^{i+1}F\circ\alpha_i^{\eta}+(-1)^{n+2}F\circ\alpha_{n+2}$ y cada $F\circ\alpha_j^{\eta}$ con $j>1$ es un $(n+1)$-cubo singular propio que pertenece a $C_*^{(0)}(A,\alpha)$, $[f]=[f']$ (mod $C_*^{(0)}(A,\alpha)$)

Luego $\bar{\rho}_{\underline{\underline{I}}}(\xi)$ esta bien definida. La demostración de que es homomorfismo es análoga a la que se dió para $\rho_{\underline{\underline{I}}}$.

Ahora, si $i_*: J_{n+1}^{(n)}(X,A,\alpha)\longrightarrow J_{n+1}(X,A)$ es el homomorfismo inducido por la inclusión

$$i:(C_*^{(n)}(X,A,\alpha),C_*^{(0)}(A,\alpha))\longrightarrow(C_*(X),C_*(A))$$

y denotamos $\rho_{\underline{\underline{I}}}: \underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)\longrightarrow J_{n+1}(X,A)$ al homomorfismo inducido por el homomorfismo $\rho_{\underline{\underline{I}}}: \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha)\longrightarrow J_{n+1}(X,A)$, notemos que $\rho_{\underline{\underline{I}}}=i_*\circ\bar{\rho}_{\underline{\underline{I}}}$.

Sea T un $(n+1)$-cubo singular propio en X, tal que las n-caras las envia a A, los vértices a $\alpha(0)$, y si es no compacto las 1-caras no compactas en α.

Si T es del tipo $I^n\times J\longrightarrow X$, T representa un elemento de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$ que denotamos ηT.

Si T es del tipo $I^n\times J\longrightarrow X$, T representa un elemento T_π de $\pi_{n+1}^*(X,A,\alpha(0))$, y definimos ηT como $\varphi_\alpha^*(-T_\pi)\in\underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$

Cuando T es degenerado, si $T: I^n\times J\longrightarrow X$, $T(I^n\times J)\subset A$, luego $\eta T=0\in\underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$ y si $T: I^{n+1}\longrightarrow X$, $T(I^{n+1})\subset A$, luego $T_\pi = 0 \in \pi^*_{n+1}(X,A,\alpha(0))$ y por tanto $\eta T = 0 \in \underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$

Así tenemos definida

$$\eta : C^{(n)}_{n+1}(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$$

Ahora bien, si T es un $(n+1)$-cubo singular propio de $C^{(0)}_*(A,\alpha)$ $\operatorname{Im} T \subset A$, luego $\eta T = 0$

Además, para un $(n+2)$-cubo singular propio F de $C^{(n)}_*(X,A,\alpha)$, si F es del tipo $I^{n+1} \times J \longrightarrow X$,

$$\partial F = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{l=0}^{1} (-1)^{i+l} F \circ \alpha_i^l + (-1)^{n+2} F \circ \alpha^0_{n+2}$$

$$\eta(\partial F) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{l=0}^{1} (-1)^{i+l} \eta(F \circ \alpha_i^l) + (-1)^{n+2} \eta(F \circ \alpha^0_{n+2})$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{l=0}^{1} (-1)^{i+l} \gamma_i^l - (-1)^{n+2} \gamma$$

donde γ_i^l para $i = 1, \dots, n+1$ es el elemento de $\underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$ representado por $F \circ \alpha_i^l$ y γ es la imagen por φ_α^* del elemento de $\pi^*_{n+1}(X,A,\alpha(0))$ representado por $F \circ \alpha^0_{n+2}$

Aplicando el Teorema de adición de homotopía propia 1.2, deducimos que $\eta(\partial F) = 0 \in \underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$

Si F es del tipo $I^{n+1} \times I \longrightarrow X$. $\partial F = \sum_{i=1}^{n+2} \sum_{l=0}^{1} (-1)^{i+l} F \circ \alpha_i^l$

Llamando γ_i^l al elemento de $\pi^*_{n+1}(X,A,\alpha(0))$ representado por $F \circ \alpha_i^l$, el Teorema de adición de homotopía (ver 2.4.1[W.G.1]) asegura que $\sum_{i=1}^{n+2} \sum_{l=0}^{1} (-1)^{i+l} \gamma_i^l = 0$. Luego $\eta(\partial F) = \varphi^*_\alpha(0) = 0 \in \underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$

Por tanto η envía todo $(n+1)$ borde de $C_*^{(n)}(X,A,\alpha)$ (mód $C_*^{(0)}(A,\alpha)$) al elemento $0 \in \underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$.

Observemos que todo $(n+1)$-cubo de $C_*^{(n)}(X,A,\alpha)$ es un ciclo (mod. $C_*^{(0)}(A,\alpha)$)

Entonces queda inducido

$$\eta_* : J^{(n)}_{n+1}(X,A,\alpha) \longrightarrow \underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)$$

Es inmediato que $\eta_* \bar{\rho}_{\underline{\underline{I}}} = id_{\underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha)}$

Ahora, si denotamos $[T]$ a la $(n+1)$-clase de homología (mód $C_*^{(0)}(A,\alpha)$) de $T \in C_{n+1}^{(n)}(X,A,\alpha)$, es evidente que $\bar{\rho}_{\underline{I}} \eta_* [T] = [T]$ cuando $T: I^n \times J \longrightarrow X$

Si $T: I^{n+1} \longrightarrow X$, por definición $\eta_* [T] = \varphi_\alpha^*(-T_\pi)$

Consideremos un representante de f de T_π, del tipo

$$(I^{n+1}, I^n \times 0 \times I, P^n) \longrightarrow (X, A, \alpha(0)).$$

Notar que f representa la misma $(n+1)$ clase de homología que T.

$\bar{\rho}_{\underline{I}} \eta_* [T]$ es la $(n+1)$ clase de homología de un representante de $\varphi_\alpha^*(-T_\pi) = \varphi_\alpha^*(-f_\pi)$

Recordando la definición de φ_α (ver párrafo 4, Cap I), sabemos que existe una aplicación propia $F: I^n \times I \times J \longrightarrow X$ verificando que $F(x,s,0) = f(x,s)$ para cada $(x,s) \in I^n \times I$, $F(I^n \times 0 \times J \cup \partial I^n \times I \times J) \subset A$ y $F_1: I^n \times J \longrightarrow X$ definida por $F_1(x,t) = F(x,1,t)$ representa a $\varphi_\alpha^*(f_\pi)$. Entonces $\bar{\rho}_{\underline{I}} \eta_* [T] = [-F_1]$

Notemos que F es un $(n+2)$ cubo singular propio de $C_*^{(n)}(X,A,\alpha)$

Como

$$\partial F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=0}^{1} (-1)^{i+l} F \circ \alpha_i^l + (-1)^{n+1}(F \circ \alpha^0_{n+1} - F \circ \alpha^1_{n+1}) + (-1)^{n+2} F \circ \alpha^0_{n+2}$$

donde $\mathrm{Im}(F \circ \alpha_i^l) \subset A$ si $(n+1,1) \neq (i,l) \neq (n+2,0)$, $F \circ \alpha^1_{n+1} = F_1$ y $F \circ \alpha^0_{n+2} = f$, deducimos que $-F_1$ y f representan la misma $(n+1)$ clase en $J_{n+1}^{(n)}(X,A,\alpha)$.

Por lo tanto $\bar{\rho}_{\underline{I}} \eta_* = \mathrm{id}_{J_{n+1}^{(n)}(X,A,\alpha)}$ y $\bar{\rho}_{\underline{I}}$ es isomorfismo. #

<u>Nota</u> - De manera análoga, puede probarse para $n \geq 1$, que si α es un rayo en X con $\pi_0(X)$ y $\underline{I}_0(X)$ triviales, entonces $J_{n+1}^{(n)}(X,\alpha) \cong \underline{I}_n^*(X,\alpha)$.

Como un corolario del Teorema 1 y del Teorema 1.5 se deducen los teoremas de tipo Hurewicz que pretendíamos probar (ver párrafo 2).

Teorema 2.- Para $n \geq 2$, sea (X,A) un par propio con $\pi_0(X)$, $\pi_0(A)$, $\underline{\underline{I}}_0(X)$ y $\underline{\underline{I}}_0(A)$ triviales. Dado un rayo α en A, si (X,A,α) es (π)n-conexo y $(\underline{\underline{I}})(n-1)$-conexo, entonces

$$\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n^*(X,A,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X,A)$$

es un isomorfismo

Corolario 3.- En las condiciones del Teorema 2, si además (A,α) es $(\underline{\underline{\pi}})$1-conexo, entonces

$$\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n(X,A,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X,A)$$

es isomorfismo

Teorema 4.- Para $n \geq 1$. Sea α un rayo en X, donde $\pi_0(X)$, y $\underline{\underline{I}}_0(X)$ son triviales. Si (X,α) es (π)n-conexo y $(\underline{\underline{I}})(n-1)$conexo, entonces

$\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n(X,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X)$ es isomorfismo para $n > 1$.

y $\rho_{\underline{\underline{I}}} : \underline{\underline{I}}_n^*(X,\alpha) \longrightarrow J_{n+1}(X)$ es isomorfismo para $n = 1$

CAPITULO IV

CW COMPLEJOS PROPIOS Y TEOREMAS DE APROXIMACION CELULAR PROPIA.

En este capitulo se introduce una nueva categoria de espacios, los CW complejos propios, que constituyen una generalización de los CW complejos clasicos. Intuitivamente, estos ultimos son espacios construidos partiendo de un espacio discreto y pegando celdas compactas (copias de E^n) sucesivamente por aplicaciones continuas arbitrarias de sus bordes. Los CW complejos propios se construyen partiendo tambien de un espacio discreto y pegando celdas compactas o no compactas (copias de $E^n \times J$) sucesivamente por aplicaciones propias arbitrarias de sus bordes (si éstas son homeomorfismos sobre su imagen se dice que el CW complejo propio es regular). También generalizan a los complejos cúbicos propios finitos.

La definición correspondiente a la idea intuitiva de CW complejo propio no se da hasta el párrafo 2 (espacio celular propio). En el párrafo 1 se da otra definición que resulta más comoda para establecer una serie de propiedades básicas, y en el parrafo 2 se demuestra que las dos definiciones son equivalentes.

El parrafo 3 esta dedicado a dar algunas propiedades de los CW complejos propios. Por ejemplo, que el producto de dos CW complejos propios   un CW complejo propio cuando uno   los dos es localmente compacto

Como ocurre en los CW clásicos, se demuestra que un CW complejo propio es localmente compacto si y sólo si la familia de las celdas es localmente finita, pero no implica que cada celda corte sólo a un número finito de celdas (el recíproco si es cierto) Esta es una diferencia con los CW complejos clásicos, donde las tres propiedades son equivalentes.

Por otra parte, se obtiene que, en el caso de un CW complejo propio finito X, quedan inducidas de modo natural en las compactificaciones de Freudenthal y Alexandroff de X, respectivas estructuras de CW complejo clásico

Tambien se generaliza la Proposición 10.1 I, viendo que todo subcomplejo L de un CW complejo propio finito X, posee la propiedad absoluta de extensión de homotopia propia en X

Finalmente, en este mismo parrafo, se obiene un algoritmo de calculo de las homologías H_*, J_* y E_* para los CW complejos propios regulares finitos de dimensión menor ó igual que 3, similar al dado en 3.II para complejos cúbicos propios finitos.

El párrafo 4 tiene como objetivo establecer las condiciones en las que, dada una aplicación propia estre dos CW complejos propios, existe otra propia y celular que es homótopa de manera propia a la primera. Esto se consigue, a partir de una serie de teoremas que se dan en este mismo párrafo sobre los distintos grupos de homotopia π, $\underline{\underline{\mathrm{I}}}$, $\underline{\underline{\pi}}$ de un CW complejo propio y sus esqueletos.

1.- CW-complejos propios

Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma del máximo

$$(\|x\| = \max_{1\le i\le n} \{|x_i|\},\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

y denotamos
$$E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$$
$$e^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$
$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$
$$\mathfrak{e}^{n+1} = e^n \times J - (e^n \times \{0\}) \quad (n \ge 0) \quad \text{donde } J = [0, +\infty)$$
$$\mathfrak{e}^0 = e^0 = E^0 = \{0\}$$

<u>Definición 1</u>.- Un CW-complejo propio es un espacio de Hausdorff X, junto con dos conjuntos de índices A_n y B_n para cada entero $n \ge 0$ tales que $A_0 = B_0$, y $A_n \cap B_n = \emptyset$, para $n > 0$ y aplicaciones propias

$$\phi_\alpha^n : E^n \longrightarrow X \qquad \text{para cada } n \ge 0 \ \text{ y } \ \alpha \in A_n$$
$$\phi_\beta^n : E^{n-1} \times J \longrightarrow X \qquad \text{para cada } n > 0 \ \text{ y } \ \beta \in B_n$$

verificando las siguientes propiedades:

P1) $\bigcup_{n,\gamma} \phi_\gamma^n(c^n) = X$ para todo $n \ge 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$
donde $c^n = e^n$ si $\gamma \in A_n$ y $c^n = \mathfrak{e}^n$ si $\gamma \in B_n$

P2) $\phi_\gamma^n(c^n) \cap \phi_\delta^m(c^m) = \emptyset$ salvo para $n = m$ y $\gamma = \delta$

P3) $\phi_\gamma^n|_{c^n}$ es (1.1) para todo $n \ge 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$

P4) Sea $X^n = \bigcup \phi_\gamma^m(c^m)$ para todo $0 \le m \le n$ y todo $\gamma \in A_m \cup B_m$.
Entonces:

$$\phi_\alpha^n(S^{n-1}) \subset X^{n-1} \qquad \text{para cada } n \ge 1 \ \text{ y } \ \alpha \in A_n$$

$\phi_\beta{}^n(E^{n-1}\times\{0\}\cup S^{n-2}\times J)\subset X^{n-1}$ para cada $n\geq 2$ y $\beta\in B_n$

$\phi_\beta{}^1(E^0)\subset X^0$

P5) Un subconjunto F de X es cerrado en X si y sólo si para cada $n\geq 0$ y cada $\gamma\in A_n\cup B_n$, $(\phi_\gamma{}^n)^{-1}(F)$ es cerrado en E^n si $\gamma\in A_n$ ó en $E^{n-1}\times J$ si $\gamma\in B_n$ $(n>0)$

P6) Para cada $n\geq 0$ se verifica:

a) $\phi_\alpha{}^n(E^n)$ está contenido en la unión de un número finito de conjuntos de la forma $\phi_\delta{}^m(c^m)$, para cada $\alpha\in A_n$

b) $\phi_\beta{}^n(E^{n-1}\times J)$ $(n>0)$ está contenido en la unión de un número finito de conjuntos de la forma $\phi_\delta{}^m(c^m)$, para cada $\beta\in B_n$

Las aplicaciones $\phi_\gamma{}^n$ se llaman aplicaciones características para X Los subespacios $\phi_\alpha{}^n(E^n)$ n-celdas compactas de X ; los subespacios $\phi_\beta{}^n(E^{n-1}\times J)$ n-celdas no compactas de X. X^n se llamará n-esqueleto de X, y si $X^n=X$ para algún n, se dice que X es de dimensión finita. El menor n para el que esto ocurre se llama dimensión de X. Si no existe n tal que $X^n=X$ se dice que X tiene dimensión infinita.

Si X sólo tiene un número finito de celdas se dice que es finito Observar que en este caso X es de dimensión finita.

Notemos que para cada n y cada $\gamma\in A_n\cup B_n$, $\phi_\gamma{}^n:\Sigma^n\longrightarrow\phi_\gamma{}^n(\Sigma^n)$, donde Σ^n denota E^n si $\gamma\in A_n$ y Σ^n denota $E^{n-1}\times J$ si $\gamma\in B_n$ $(n>0)$, es una aplicación propia

Asimismo, notemos que X tiene la topología coherente con la familia de sus celdas, y además cada celda es un subespacio propio de X.

Si X es un CW propio con $B_n = \emptyset$ para todo $n > 0$, entonces X es un CW clásico (Def.7.3.1 [Ma.]) y viceversa.

Notar que un mismo espacio topológico X puede tener diferentes estructuras de CW propio.

Por otra parte, si X es un espacio topológico no compacto que admite una estructura de CW propio con un número finito de celdas, en caso de admitir X una estructura de CW clásico, ésta debe tener un número infinito de celdas.

Es inmediata la siguiente:

<u>**Proposición 2**</u>.- Sea X un CW propio e Y un espacio topológico. Entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si $f \circ \phi_\gamma^n$ es continua para cada $n \geq 0$.

<u>**Proposición 3**</u>.- Si X es un CW propio, entonces es un K-espacio.

<u>Demostración</u>.- Trivialmente, si F es cerrado en X, $F \cap K$ es cerrado para todo subespacio compacto K de X.

Supongamos ahora que $F \subset X$ verifica que $F \cap K$ es cerrado en K para todo K compacto en X. Entonces:

Para cada $n \geq 0$ y $\alpha \in A_n$, como E^n es compacto, $F \cap \phi_\alpha^n(E^n)$ es cerrado en $\phi_\alpha^n(E^n)$, por tanto $(\phi_\alpha^n)^{-1}(F) = (\phi_\alpha^n)^{-1}(F \cap \phi_\alpha^n(E^n))$ es cerrado en E^n.

Para cada $n > 0$ y $\beta \in B_n$, sea L un compacto cualquiera de $E^{n-1} \times J$, entonces $\phi_\beta^n(L)$ es compacto en $\phi_\beta^n(E^{n-1} \times J)$, luego

$F \cap \phi_\beta^n(L)$ es cerrado en $\phi_\beta^n(L)$. Como $\phi_\beta^n(E^{n-1} \times J)$ es Hausdorff por serlo X, $\phi_\beta^n(L)$ es un compacto cerrado en $\phi_\beta^n(E^{n-1} \times J)$, entonces $F \cap \phi_\beta^n(L)$ es cerrado en $\phi_\beta^n(E^{n-1} \times J)$ y por tanto $(\phi_\beta^n)^{-1}(F \cap \phi_\beta^n(L))$ es cerrado en $E^{n-1} \times J$. Ahora bien, como $(\phi_\beta^n)^{-1}(F) \cap L = (\phi_\beta^n)^{-1}(F) \cap (\phi_\beta^n)^{-1}(\phi_\beta^n(L)) \cap L)$, deducimos que $(\phi_\beta^n)^{-1}(F) \cap L$ es cerrado en L.

Por ser $E^{n-1} \times J$ un K-espacio, obtenemos que $(\phi_\beta^n)^{-1}(F)$ es cerrado en $E^{n-1} \times J$, para cada $n > 0$ y $\beta \in B_n$

Esto demuestra que F es cerrado en X. #

__Corolario 4__.- Toda celda de un CW complejo propio X es un cerrado en X

__Demostración__.- Para cada $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$, $\phi_\gamma^n : \Sigma^n \longrightarrow X$ es propia y, por ser X K-espacio, cerrada, por tanto $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ es cerrado en X #

__Corolario 4'__.- Para cada celda $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ de un CW complejo propio X se verifica

Si C es un cerrado de $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ entonces C es un cerrado de X.

__Corolario 5__.- Toda celda de un CW propio es un K-espacio

__Demostración__.- Aplicar 8.4 de [G.B] y Corolario 4. #

__Corolario 6__.- Sea X un CW propio, entonces para cada $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$, $\phi_\gamma^n : \Sigma^n \longrightarrow \phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ es una identificación

Demostración.- $\Phi_\gamma^n : \Sigma^n \longrightarrow \Phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ es propia y suprayectiva. Aplicar ahora el Corolario 5 y V.2.16 de [G-M-M] #

Proposición 7.- Sea X un CW propio finito e Y un espacio topológico. Entonces, $f : X \longrightarrow Y$ es propia si y sólo si $f \circ \Phi_\gamma^n : \Sigma^n \longrightarrow Y$ es propia para todo $n \geq 0$ y todo $\gamma \in A_n \cup B_n$

Demostración.- Supongamos que $f \circ \Phi_\gamma^n$ es propia para todo $n \geq 0$ y todo $\gamma \in A_n \cup B_n$. Por la Proposición 2, f es continua.

Sea K un compacto cerrado cualquiera de Y, entonces $(\Phi_\gamma^n)^{-1}(f^{-1}(K))$ es compacto cerrado en Σ^n para cada $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$. Por lo tanto $\Phi_\gamma^n((\Phi_\gamma^n)^{-1}(f^{-1}(K)))$ es compacto en X y, por ser X finito, $\bigcup_{n,\gamma} \Phi_\gamma^n((\Phi_\gamma^n)^{-1}(f^{-1}(K)))$ es compacto en X.

Ahora bien, $X = \bigcup_{n,\gamma} \Phi_\gamma^n(c^n)$, luego $f^{-1}(K) = \bigcup_{n,\gamma} (f^{-1}(K) \cap \Phi_\gamma^n(c^n)) =$
$= \bigcup_{n,\gamma} \Phi_\gamma^n((\Phi_\gamma)^{-1}(f^{-1}(K) \cap (\Phi_\gamma^n)(c^n))$ por ser $\Phi_\gamma^n|_{c^n}$ (1-1) para todo $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$

De aquí deducimos que $f^{-1}(K) = \bigcup_{n,\gamma} \Phi_\gamma^n((\Phi_\gamma^n)^{-1}(f^{-1}(K))$, y por tanto f es propia.

La otra implicación es inmediata. #

Notar que si el CW propio no es finito, en general sólo es cierta la implicación hacia la derecha.

Corolario 7.- Sea X un CW propio finito e Y un espacio topológico. Entonces, $f : X \longrightarrow Y$ es propia si y sólo si $f|_{\Phi_\gamma^n(\Sigma^n)}$ es propia para todo $n \geq 0$ y todo $\gamma \in A_n \cup B_n$

Definición 8.- Dado un CW complejo propio X, un subespacio L de X se dice que es un subcomplejo de X si para cada $n \geq 0$ existen subconjuntos A_n' y B_n' de A_n y B_n respectivamente (con $A_0' = B_0'$) tales que:

(a) $L = \cup \phi_\gamma^n(c^n)$ para todo $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n' \cup B_n'$.

(b) $\phi_\gamma^n(\Sigma^n) \subset L$ para todo $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n' \cup B_n'$

L se llama subcomplejo finito si tiene sólo un numero finito de celdas

Notar que las uniones e intersecciones arbitrarias de subcomplejos tambien son subcomplejos

Observacion.- Para cada $n \geq 0$, el n-esqueleto X^n es un subcomplejo de X

Proposición 9.- Sea X un CW complejo propio, entonces para cada $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$, $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ esta contenido en un subcomplejo finito de X.

Demostracion.- Analoga a la de la Prop 7 3 6 de [Ma]

Proposición 10.- Si L es un subcomplejo de un CW complejo propio X, entonces L es un CW complejo propio y ademas un subespacio cerrado de X.

Demostracion.- Evidentemente L es Hausdorff y satisface P1), P2), P3), P4), y P6) de la Definicion 1, reemplazando A_n y B_n por A_n' y B_n' respectivamente.

Por otra parte las aplicaciones $\phi_\gamma^n : \Sigma^n \longrightarrow L$ para cada $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n' \cup B_n'$, son continuas y además propias, pues $\phi_\gamma^n : \Sigma^n \longrightarrow X$ son propias, la inclusión $i : L \longrightarrow X$ es inyectiva y el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Sigma^n \arrow[rr, "\phi_\gamma^n"] \arrow[dr, "\phi_\gamma^n"'] & & X \\ & L \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo

Veamos ahora que para $A \subset L$, A es cerrado en L si y sólo si $(\phi_\gamma^n)^{-1}(A)$ es cerrado en Σ^n para todo $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n' \cup B_n'$.

Supongamos que $A \cap \phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ es cerrado en $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ para todo $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n' \cup B_n'$ Entonces, para cada $m \geq 0$ y $\rho \in A_n \cup B_n$, tenemos:

$A \cap \phi_\rho^m(\Sigma^m) = A \cap L \cap \phi_\rho^m(\Sigma^m) = \cup (A \cap \phi_\gamma^n(\Sigma^n) \cap \phi_\rho^m(\Sigma^m))$ donde $\gamma \in A_n' \cup B_n'$ Esta unión es finita pues por la Proposición 9, $\phi_\rho^m(\Sigma^m)$ está contenido en un subcomplejo finito M de X, y la intersección $L \cap M$ es un subcomplejo finito contenido en L.

Ahora bien, cada $A \cap \phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ es cerrado en $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ y por tanto cerrado en X luego $A \cap \phi_\gamma^n(\Sigma^n) \cap \phi_\rho^m(\Sigma^m)$ es cerrado en $\phi_\rho^m(\Sigma^m)$, de donde $A \cap \phi_\rho^m(\Sigma^m)$ resulta ser cerrado en $\phi_\rho^m(\Sigma^m)$

Deducimos así que A es cerrado en X y por tanto $A = A \cap L$ es cerrado en L (Notar que sustituyendo A por L, se obtiene que L es cerrado en X)

La otra implicación es inmediata. #

__Corolario 11__.- Si L es un subcomplejo de un CW complejo propio X, L es un subespacio propio de X

__Proposición 12__.- Si X es un CW complejo propio, las arco componentes de X son subcomplejos. Y si X es conexo, entonces es arco conexo.

<u>Demostración</u>.- Análoga a la de la Prop. 7.3.8 de [Ma.].

<u>Proposición 13</u>.- Si K es un subespacio compacto de un CW complejo propio X, entonces K está contenido en un subcomplejo finito de X

<u>Demostración</u>.- Análoga a la de la Prop. 7.3.9 de [Ma.].

<u>Corolario 14</u>.- K es un subespacio compacto de un CW complejo propio X si y solo si K está contenido en un subcomplejo finito de X y además $K \cap \phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ es compacto en $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ para todo $n \geq 0$, $\gamma \in A_n \cup B_n$.

<u>Definición 15</u>.- Un CW complejo propio X se llama regular si para cada $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$ $\phi_\gamma^n : \Sigma^n \longrightarrow X$ es inyectiva. Notar que entonces $\phi_\gamma^n : \Sigma^n \longrightarrow \phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ es homeomorfismo para $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$.

Observar que todo complejo cúbico propio finito (Def.1.3.II) es un CW complejo propio regular finito.

2.- Espacios celulares propios.

<u>**Definición 1**</u>.- Un espacio celular propio es un espacio topológico X, con una sucesión de subespacios,

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots \subset X,$$

tales que $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$, y se verifican las siguientes propiedades:

(a) X^0 es un espacio discreto

(b) Para cada $n > 0$ existen dos conjuntos de índices A_n, B_n y aplicaciones propias

$$\phi_\alpha^n : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1} \quad \text{para cada } n > 0 \text{ y } \alpha \in A_n$$

$$\phi_\beta^n : E^{n-1} \times \{0\} \cup S^{n-2} \times J \longrightarrow X^{n-1} \quad \text{para cada } n > 1 \text{ y } \beta \in B_n$$

$$\phi_\beta^n : E^{n-1} \times \{0\} \longrightarrow X^{n-1} \quad \text{para cada } n = 1 \text{ y } \beta \in B_n$$

X^n es el espacio obtenido de X^{n-1} y copias disjuntas E^n_α de E^n (una para cada $\alpha \in A_n$) y copias disjuntas $(E^{n-1} \times J)_\beta$ de $E^{n-1} \times J$ (una para cada $\beta \in B_n$) por identificación de los puntos x y $\phi_\alpha^n(x)$ para cada $x \in S^{n-1}_\alpha$ y cada $\alpha \in A_n$, y de los puntos x y $\phi_\beta^n(x)$ para cada $x \in (E^{n-1} \times \{0\} \cup S^{n-2} \times J)_\beta$ ($(E^{n-1} \times \{0\})_\beta$ si $n = 1$) y cada $\beta \in B_n$

Además para cada $n > 1$ y $\beta \in B_n$, $\phi_\beta^n (E^{n-1} \times \{0\} \cup S^{n-2} \times J)$ está contenido en la unión de un número finito de conjuntos de la forma Σ^m_δ con $m < n$ (donde Σ^m_δ denota E^m_δ si $\delta \in A_m$ ó bien denota $(E^{m-1} \times J)_\delta$ si $\delta \in B_m$)

(c) Un subconjunto F de X es cerrado en X si y sólo si para cada $n \geq 0$ $F \cap X^n$ es cerrado en X^n

Teorema 2.- Todo CW complejo propio es un espacio celular propio y todo espacio celular propio es un CW complejo propio.

Demostración.- Supongamos que X es CW complejo propio. Entonces los n-esqueletos forman una sucesión de subespacios

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots \subset X$$

X^0 es un CW complejo y cada punto de X^0 es un subcomplejo, por lo tanto todo subconjunto de X^0 es un subcomplejo de X^0, luego es un cerrado en X^0. De aquí se deduce que X^0 es un espacio discreto.

Por otra parte, para cada $n > 0$, consideramos la restricción de las aplicaciones características

$\phi_\alpha^n : E^n \longrightarrow X \quad (\alpha \in A_n)$ y $\phi_\beta^n : E^{n-1} \times J \longrightarrow X \quad (\beta \in B_n)$ a

$$\phi_\alpha^n|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1} \quad (\alpha \in A_n)$$
$$\phi_\beta^n|_{E^{n-1}\times\{0\}\cup S^{n-2}\times J} : E^{n-1}\times\{0\}\cup S^{n-2}\times J \longrightarrow X^{n-1} \quad (\beta \in B_n \text{ y } n > 1)$$
$$\phi_\beta^n|_{E^{n-1}\times\{0\}} : E^{n-1}\times\{0\} \longrightarrow X^{n-1} \quad (\beta \in B_n \text{ y } n = 1)$$

respectivamente. Notar que estas aplicaciones son propias.

X^n es unión de X^{n-1} y todas las n-celdas de X. Veamos que la topología restricción de X a X^n coincide con la topología que se obtiene en X^n considerando la unión disjunta de X^{n-1} y copias Σ^n_δ de Σ^n, por identificación de los puntos x y $\phi_\alpha^n(x)$ para todo $x \in S^{n-1}$ y $\alpha \in A_n$ y de los puntos x y $\phi_\beta^n(x)$ para todo $x \in (E^{n-1}\times\{0\}\cup S^{n-2}\times J)_\beta$ $((E^{n-1}\times\{0\})_\beta$ si $n=1)$ y $\beta \in B_n$.

Sea F un cerrado en X^n con la topología restricción de X, es decir $F = X^n \cap F'$ donde F' es un cerrado en X. Entonces

$(\phi_\delta^n)^{-1}(F) = (\phi_\delta^n)^{-1}(X^n) \cap (\phi_\delta^n)^{-1}(F') = \Sigma^n{}_\delta \cap (\phi_\delta)^{-1}(F') = (\phi_\delta^n)^{-1}(F')$ cerrado en Σ_δ^n para todo $\delta \in A_n \cup B_n$, por ser F' cerrado en X y X un CW complejo propio. Por otra parte $F \cap X^{n-1} = F' \cap X^{n-1}$ es cerrado en X^{n-1} trivialmente. Luego F es un cerrado en X^n con la topología identificación.

Recíprocamente, sea F un cerrado en X^n con la topología identificación. Entonces $(\phi_\delta^n)^{-1}(F)$ es cerrado en $\Sigma^n{}_\delta$ para $\delta \in A_n \cup B_n$ y $F \cap X^{n-1}$ es cerrado en X^{n-1}. Ahora bien si $F \cap X^{n-1}$ es cerrado en X^{n-1} entonces $(\phi_\gamma^m)^{-1}(F \cap X^{n-1}) = (\phi_\gamma^m)^{-1}(F)$ es cerrado en $\Sigma^m{}_\gamma$ para todo $m<n$ y $\gamma \in A_m \cup B_m$ (ver Proposición 10), por tanto F es cerrado en X^n con la topología restricción de X

Ademas por ser X un CW complejo propio un subconjunto Y de X es cerrado en X si y sólo si $Y \cap X^n$ es cerrado en X^n para todo $n \geq 0$

Todo lo anterior prueba que X es un espacio celular propio.

Supongamos ahora que X es un espacio celular propio . En primer lugar, veamos que X es Hausdorff:

Sean x e y dos puntos distintos de X. Notar que existen unos únicos n, $\gamma \in A_n \cup B_n$ y m, $\delta \in A_m \cup B_m$ tales que $x \in c_\gamma^n$ e $y \in c_\delta^m$ respectivamente . Supongamos que $n \leq m$. Entonces existen U_m y V_m abiertos en X^m tales que $x \in U_m$, $y \in V_m$, $U_m \cap V_m = 0$.

En efecto, si $n=m$ y $\gamma=\delta$, existe $\varepsilon>0$ tal que las bolas abiertas $U_n = B(x,\varepsilon)$, $V_n = B(y,\varepsilon)$, verifican que $U_n, V_n \subset c_\gamma^n$, $U_n \cap V_n = \emptyset$ y además es claro que U_n y V_n son abiertos en X^n

Si $n=m$ y $\gamma \neq \delta$, es similar.

Si $n<m$, consideramos $\varepsilon>0$ tal que la bola abierta $B(y,\varepsilon)\subset c_\delta^m$, entonces llamando $V_m=B(x,\varepsilon/2)\subset c_\delta^m$ y $U_m=X^m-\overline{B}(y,\varepsilon/2)$ donde $\overline{B}(y,\varepsilon/2)$ es la bola cerrada, V_m y U_m son abtos en X^m verificando las condiciones requeridas.

Ahora, trataremos de ampliar U_m y V_m hasta conseguir dos abiertos U y V de X con $x\in U$, $y\in V$, $U\cap V=\emptyset$. Para ello, veremos primero que pueden obtenerse U_{m+1} y V_{m+1} abiertos en X^{m+1} tales que $U_{m+1}\cap V_{m+1}=\emptyset$, $U_{m+1}\cap X^m=U_m$ y $V_{m+1}\cap X^m=V_m$.

Denotamos $G_\delta=(\phi_\delta^{m+1})^{-1}(U_m)$, $H_\delta=(\phi_\delta^{m+1})^{-1}(V_m)$ para cada $\delta\in A_{m+1}\cup B_{m+1}$

Notar que G_δ y H_δ son abiertos, en S^m si $\delta\in A_{m+1}$, ó bien en $E^m\times 0\cup S^{m-1}\times J$ si $\delta\in B_{m+1}$ Además $G_\delta\cap H_\delta=\emptyset$ para todo $\delta\in A_{m+1}\cup B_{m+1}$.

Para cada $\alpha\in A_{m+1}$, definimos:

$$G'_\alpha=\{z\in e_\alpha^{m+1}\mid \|z\|>1/2 \quad y \quad z/\|z\|\in G_\alpha\}$$
$$H'_\alpha=\{z\in e_\alpha^{m+1}\mid \|z\|>1/2 \quad y \quad z/\|z\|\in H_\alpha\}$$

Consideramos ahora el homeomorfismo $l: E^m\times(-1,1)\longrightarrow E^m\times J$ dado por $l(x_1,\ldots,x_m,t)=(x_1,\ldots,x_m,1+t/1-t)$

Para cada $\beta\in B_{m+1}$, definimos

$$G'_\beta=\{z\in e_\beta^{m+1}\mid \|l^{-1}(z)\|>1/2 \quad y \quad l^{-1}(z)/\|l^{-1}(z)\|\in l^{-1}(G_\beta)\}$$
$$H'_\beta=\{z\in e_\beta^{m+1}\mid \|l^{-1}(z)\|>1/2 \quad y \quad l^{-1}(z)/\|l^{-1}(z)\|\in l^{-1}(H_\beta)\}$$

Llamando $U_{m+1}=U_m\cup(\bigcup_{\delta\in A_{m+1}\cup B_{m+1}} G'_\delta)$

$$V_{m+1}=V_m\cup(\bigcup_{\delta\in A_{m+1}\cup B_{m+1}} H'_\delta)$$

entonces U_{m+1} y V_{m+1} son abiertos disjuntos de X^{m+1},

$U_{m+1} \cap X^m = U_m$ y $V_{m+1} \cap X^m = V_m$.

Considerando por último $U = \bigcup_{m \geq n} U_m$ y $V = \bigcup_{m \geq n} V_m$, obtenemos los abiertos que buscábamos, de donde se deduce que X es Hausdorff

Ahora, para cada $n > 0$, extendemos las aplicaciones propias $\phi_\alpha^n : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1} (\alpha \in A_n)$, $\phi_\beta^n : E^{n-1} \times \{0\} \cup S^{n-2} \times J \longrightarrow X^{n-1} (\beta \in B_n, n>1)$ $\phi_\beta^n : E^{n-1} \times \{0\} \longrightarrow X^{n-1}$ si $n = 1$, $\beta \in B_n$.
a aplicaciones propias $\phi_\alpha^n : E^n_\alpha \longrightarrow X^n \subset X$ $(\alpha \in A_n)$, $\phi_\beta : (E^{n-1} \times J)_\beta \longrightarrow X^n \subset X$ $(\beta \in B_n)$ de la manera natural utilizando las aplicaciones inclusión de cada $c_\gamma^n (\gamma \in A_n \cup B_n)$.

Supongamos que X^{n-1} es un CW complejo propio con estas aplicaciones características (notar que X^0 lo es) para $n \geq 1$ Entonces X^n satisface P1), P2), P3), P4) de la Definición 1.1.

Además $F \subset X^n$ es cerrado en X^n si y sólo si $F \cap X^{n-1}$ es cerrado en X^{n-1} y $(\phi_\delta^n)^{-1}(F)$ es cerrado en Σ_δ^n para cada $\delta \in A_n \cup B_n$

Como X^{n-1} es un CW complejo propio, deducimos que F es cerrado en X^n si y sólo si $(\phi_\gamma^m)^{-1}(F)$ es cerrado en Σ^m_γ para cada $m \leq n$ y $\gamma \in A_m \cup B_m$. Luego se verifica P5)

Por otra parte, como para cada $\alpha \in A_n$ $\phi_\alpha^n (S_\alpha^{n-1})$ es compacto, está contenido en un subcomplejo finito de X^{n-1}(ver Prop. 13.1), entonces $\phi_\alpha^n (E^n_\alpha)$ está contenido en la unión de este subcomplejo y $\phi_\alpha^n (e_\alpha^n)$.

Si $\beta \in B_n$, por (b) de la Def. 1, deducimos que $\phi_\beta^n (E^{n-1} \times \{0\} \cup S^{n-2} \times J)$ está contenido en la unión de un número finito de conjuntos de la forma $\phi_\gamma^m (c_\gamma^m)$ con $m < n$.

Entonces $\phi_\beta^n(E^{n-1}\times J)$ está contenido en esta unión junto con $\phi_\beta^n(c_\beta^n)$ Así pues, se verifica P6) y X^n es un CW complejo propio.

Es inmediato comprobar ahora que X es un CW complejo propio. #

3.-Algunas propiedades de los CW-complejos propios.

<u>Proposición 1</u>.- Sea X un CW complejo propio. Son equivalentes:

(a) Cada punto $x \in X$ posee un entorno que corta sólo a un número finito de celdas

(b) X es localmente compacto.

<u>Demostración</u>.- Supongamos que verifica (b). Entonces para cada $x \in X$, existe un entorno abierto V_x relativamente compacto ($\mathrm{cl}\, V_x$ compacto)

Por la Prop. 13.1, $\mathrm{cl}\, V_x$ está contenido en un subcomplejo finito de X, y por tanto contenido en una unión finita de conjuntos de la forma $\phi_\gamma^n(c^n)$. Luego, por P2) de la Def. 1.1, V_x corta sólo a un número finito de conjuntos de la forma $\phi_\gamma^n(c^n)$.

Ahora bien, notemos que por ser V_x abierto en X, si $V_x \cap \phi_\delta^m(\Sigma^m) \neq \emptyset$, entonces $V_x \cap \phi_\delta^m(c^m) \neq \emptyset$. Deducimos con esto que V_x corta sólo a un número finito de celdas $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$.

Supongamos ahora que se verifica (a). Dado $x \in X$, sea V_x un entorno abierto que corta sólo a un número finito de celdas. Notar que de todas estas celdas sólo existe una $\phi_\delta^m(\Sigma^m)$ tal que $x \in \phi_\delta^m(c^m)$. Además si $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ es otra celda tal que $x \in V_x \cap \phi_\gamma^n(\Sigma^n)$, entonces $x \in \phi_\gamma^n(S^{n-1})$ ó $\phi_\gamma^n(E^{n-1} \times \{0\} \cup S^{n-2} \times J)$ según $\gamma \in A_n$ ó $\gamma \in B_n$, y $m < n$.

Notar que podemos encontrar un entorno de x en $\phi_\delta^m(\Sigma^m)$, W, relativamente compacto, tal que $x \in W \subset V_x \cap \phi_\delta^m(\Sigma^m)$.

Consideremos ahora las demas celdas a las que pertenece x:

$$\phi_{\gamma_1}^{m_1}(\Sigma^{m_1}), \ldots, \phi_{\gamma_{r_1}}^{m_1}(\Sigma^{m_1}), \ldots, \phi_{\rho_1}^{m_s}(\Sigma^{m_s}), \ldots, \phi_{\rho_{r_s}}^{m_s}(\Sigma^{m_s})$$

con $m < m_1 < \ldots < m_s$

Por ser $\phi_{\gamma_1}^{m_1} \colon \Sigma^{m_1} \longrightarrow X$ propia, $W \cap \phi_{\gamma_1}^{m_1}(S^{m_1-1})$ si $\gamma_1 \in A_{m_1}$, ó $W \cap \phi_{\gamma_1}^{m_1}(E^{m_1-1} \times \{0\} \cup S^{m_1-2} \times J)$ si $\gamma_1 \in B_{m_1}$ es un entorno relativamente compacto de x en $\phi_{\gamma_1}^{m_1}(S^{m_1-1})$ o $\phi_{\gamma_1}^{m_1}(E^{m_1-1} \times \{0\} \cup S^{m_1-2} \times J)$ repectivamente. Utilizando ahora un artificio parecido al que se utiliza para demostrar que todo espacio celular propio es Hausdorff, puede encontarse un entorno de x en $\phi_{\gamma_1}^{m_1}(\Sigma^{m_1})$, $Wm_{1,1}$ relativamente compacto y tal que

$$Wm_{1,1} \cap \phi_{\gamma_1}^{m_1}(S^{m_1-1}) = W \cap \phi_{\gamma_1}^{m_1}(S^{m_1-1}) \quad \text{si } \gamma_1 \in A_{m_1} \text{ ó bien}$$

$$Wm_{1,1} \cap \phi_{\gamma_1}^{m_1}(E^{m_1-1} \times \{0\} \cup S^{m_1-2} \times J) = W \cap \phi_{\gamma_1}^{m_1}(E^{m_1-1} \times \{0\} \cup S^{m_1-2} \times J)$$

si $\gamma_1 \in B_{m_1}$

y además $Wm_{1,1} \subset V_x \cap \phi_{\gamma_1}^{m_1}(\Sigma^{m_1})$.

Repetimos esto para cada celda de dimensión m_1, obteniendo $Wm_{1,i}$ entorno de x en $\phi_{\gamma_i}^{m_1}(\Sigma^{m_1})$ relativamente compacto, para cada $i = 1, \ldots, r_1$.

Considerando ahora

$$Wm_1 = W \cup Wm_{1,1} \cup, \ldots, \cup Wm_{1,r_1}$$

(notar que W_{m_1} es relativamente compacto), y procediendo como antes en las celdas de dimensión m_2 (sustituir ahora W por W_{m_1}) encontramos W_{m_2} y reiterando el proceso, se obtiene al final:

$$W_{m_s} \supset W_{m_{s-1}} \supset \ldots\ldots \supset W_{m_1} \supset W \ni x$$

con $W_{m_s} \cap \phi_{\eta_K}^{m_i}(\Sigma^{m_i}) = W_{m_{1,K}}$ para toda celda a la que x pertenece, $W_{m_s} \subset V_x$ y además W_{m_s} es relativamente compacto.

Independientemente, para las celdas $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ tales que $\phi_\gamma^n(\Sigma^n) \cap V_x \neq \emptyset$ y $x \notin \phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ se encuentran entornos relativamente compactos $W_n \subset V_x \cap \phi_\gamma^n(\Sigma^n)$, y $W \cap \phi_\gamma^n(\Sigma^n) \subset W_n$.

Si llamamos q al número de estas celdas y $W_1, \ldots, W_q$ a los respectivos entornos, definiendo $V = W_{m_s} \cup W_1 \cup \ldots \cup W_q$, V es un entorno de x en X relativamente compacto, lo que prueba que X es localmente compacto. #

Nota.- La condición (a) puede expresarse diciendo que la familia de las celdas de X es localmente finita.

Definición 2.- Un CW complejo propio X se dice que es localmente finito si cada celda corta sólo a un número finito de celdas

Proposición 3.- Si un CW complejo propio X es localmente finito entonces es localmente compacto.

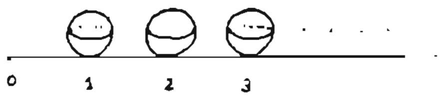
Demostración - Sea x un punto cualquiera de X, entonces existe una única celda $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ tal que $x \in \phi_\gamma^n(c^n)$. Por hipótesis sólo existe un número finito de celdas $\phi_{\gamma_i}^{n_i}(\Sigma^{n_i})$, $i = 1, \ldots, q$

tales que su intersección con $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ es distinta del vacío.

Sean $L, L_1, \ldots, L_q$ los subcomplejos mínimos que contienen a las celdas $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$, $\phi_{\gamma_1}^{n_1}(\Sigma^{n_1}), \ldots, \phi_{\gamma_q}^{n_q}(\Sigma^{n_q})$ respectivamente. (Notar que por la Proposición 9.1, siempre existe un subcomplejo finito que contiene a una celda dada, y que la intersección de subcomplejos es un subcomplejo).

Consideremos ahora el subcomplejo finito $V_x = L \cup L_1 \cup \ldots \cup L_q$ que es un entorno de x. Entonces su interior corta sólo a un número finito de celdas. #

Notar que el recíproco no es cierto para un CW complejo propio X cualquiera (cosa que sí ocurre en un CW complejo clásico, ver Prop. 3.6 II de [Lu-W]). Por ejemplo, consideremos el CW complejo propio X :



con una 0-celda {0}, una 1-celda no compacta J y en cada punto i de J tal que $i \in \mathbb{N}$, una 2-celda compacta E^2_i donde la aplicación característica

$\phi_i : E^2 \longrightarrow J$ viene dada por $\phi_i(x) = i$ para todo $x \in S^1$

X no es localmente finito pues J corta a infinitas celdas. Sin embargo, cada punto de X tiene un entorno que corta sólo a un número finito de celdas.

Es interesante estudiar para propósitos posteriores cuándo dados X e Y CW complejos propios, el espacio topológico producto $X \times Y$ es un CW complejo propio. (para CW clásicos ver Teorema 7.3.16 [Ma.]).

Notemos que $X \times Y$ es Hausdorff. Si A_n, B_n son los conjuntos de índices y ϕ_γ^n, $\gamma \in A_n \cup B_n$ las aplicaciones características para X, y respectivamente A'_n, B'_n, $\Psi_{\gamma'}^n$ los correspondientes a Y, consideramos en $X \times Y$, los conjuntos de índices

$\bar{A}_{n+m} = (A_n \times A'_m) \cup (A_m \times A'_n)$ y

$\bar{B}_{n+m} = (A_n \times B'_m) \cup (B_n \times A'_m) \cup (B_n \times B'_m) \cup (A_m \times B'_n) \cup (B_m \times A'_n) \cup (B_m \times B'_n)$

y las aplicaciones características $\phi_\gamma^i \times \Psi_{\gamma'}^j$

(notar que $E^n \times (E^m \times J) \equiv E^{n+m} \times J \equiv (E^n \times J) \times E^m$, $E^n \times J \times J \equiv E^{n+1} \times J$ $(E^n \times J) \times (E^m \times J) \equiv E^{n+m} \times J \times J \equiv E^{n+m+1} \times J$. Estos homeomorfismos están implícitos en las aplicaciones características de $X \times Y$, pero por comodidad no se escriben). Estas aplicaciones características y la familia de celdas asociada verifican las condiciones necesarias para que el espacio topológico producto $X \times Y$ sea un CW complejo propio, salvo quizás la relativa a la topología coherente (P5). Def. 1.1). En orden a determinar cuándo efectivamente $X \times Y$ es un CW complejo propio daremos los siguiente teoremas.

Proposición 4.- Sean X e Y CW complejos propios localmente compactos, entonces el espacio producto $X \times Y$ es un CW complejo.

Demostración.- Notar que las celdas correspondientes a las aplicaciones $\phi_\gamma^n \times \Psi_{\gamma'}^m$ son precisamente el produoto de las celdas $\phi_\gamma^n(\Sigma^n) \times \Psi_{\gamma'}^m(\Sigma^m)$ que es cerrado en $X \times Y$ por serlo $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ y $\Psi_{\gamma'}^m(\Sigma^m)$ en X e Y respectivamente.

Además la familia de las celdas $\{\phi_\gamma^n(\Sigma^n) \times \Psi_{\gamma'}^m(\Sigma^m)\}$ es localmente finita en el espacio producto $X \times Y$, pues dado $(x,y) \in X \times Y$, por ser X e Y localmente compactos, existen V_x y V_y entornos abiertos de x en X y de y en Y respectivamente, tales que cortan sólo a un número finito de celdas en X y en Y respectivamente. Entonces $V_x \times V_y$ es un entorno abierto de (x,y) en $X \times Y$ y sólo corta a un número finito de elementos de la familia $\{\phi_\gamma^n(\Sigma^n) \times \Psi_{\gamma'}^m(\Sigma^m)\}$

Como $X \times Y = \cup(\phi_\gamma^n(\Sigma^n) \times \Psi_{\gamma'}^m(\Sigma^m))$, aplicando el Teorema V 5.11 de [G-M-M] la topología producto en $X \times Y$ es la coherente con la familia de las celdas. #

<u>**Teorema 5**</u>.- Sean X e Y CW complejos propios. Si uno de los dos es localmente compacto, entonces $X \times Y$ es un CW complejo propio.

<u>Demostración</u>.- Supongamos que X es localmente compacto (la demostración en el caso en el que lo es Y es análoga). Como Y es K-espacio (Prop. 3.1), deducimos del Teorema 8.11 de [G.B] que la topología producto (la denotamos T) en $X \times Y$ coindice con la topología coherente generada por la familia de los compactos de T.

Denotando por τ la topología en $X \times Y$ coherente con la familia de sus celdas (existencia garantizada por la Prop. V.5. 5 de [G-M-M]), $T \subset \tau$ y $(X \times Y, \tau)$ es un CW complejo propio. Entonces por la Proposición 3.1, τ coincide con la topología coherente generada por los compactos de τ.

Para ver que ambas topologías T y τ coinciden bastará pues comprobar que los compactos en una y otra son los mismos.

Si K es un compacto en $(X \times Y, \tau)$ es claro que es compacto en $(X \times Y, T)$ (ver Teor. V.5.7. de [G-M-M]).

Consideremos ahora un compacto K de $(X \times Y, T)$.

Sean $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ las proyecciones; $p_1(K)$ y $p_2(K)$ son compactos en X e Y respectivamente luego existen subcomplejos finitos L_1 y L_2 de X e Y respectivamente tales que $p_1(K) \subset L_1$ y $p_2(K) \subset L_2$.

Así, $K \subset p_1(K) \times p_2(K) \subset L_1 \times L_2 \subset X \times Y$.

Notemos que K es compacto en $L_1 \times L_2$ y como L_1 y L_2 son localmente compactos, $L_1 \times L_2$ con la topología producto (que es $T|_{L_1 \times L_2}$) es un CW complejo propio (por la Proposición 4). Luego $T|_{L_1 \times L_2}$ coincide con la topología coherente con la familia de las celdas de $L_1 \times L_2$, que es precisamente $\tau|_{L_1 \times L_2}$ de donde se deduce que K es compacto en $(X \times Y, \tau)$. #

Corolario 6 .- Si X es un CW complejo propio, entonces $X \times I$ y $X \times J$ son CW complejos propios.

* * *

Supongamos ahora que X es un CW complejo propio finito. Entonces, las arco-componentes X_λ de X son subcomplejos (Prop 12.1) y por tanto cerrados en X (Prop. 10.1).

Como X es finito, $X = \cup X_\lambda$ unión finita y disjunta, de donde se obtiene que cada arco-componente es abierta en X, luego X

es localmente arco-conexo (ver V.5.4. de [Du]). Por otra parte la familia finita de las arco-componentes de X coincide con la de las componentes conexas de X. Además por ser X CW complejo propio finito es localmente compacto (ver Prop. 3.2).

Entonces $X^* = X \cup \mathcal{F}(X)$ con la topología de Freudenthal (la demotaremos T^*), que es la inducida por la base

$\{U^* | \ U$ es abierto en $X\}$, donde $U^* = U \cup U^{\mathcal{F}}$ y

$U^{\mathcal{F}} = \{e \in \mathcal{F}(X) | e < u\}$

es Hausdorff, localmente conexo y compacto (ver Teor 2.2.II) y (X^*, T^*) se llama compactificación de Freudenthal de X.

Notar también que el conjunto de finales de Freudenthal $\mathcal{F}(X)$ es finito.

Teorema 7.- Sea X un CW complejo propio finito, entonces la compactificación de Freudenthal X^* es un CW complejo clásico finito.

Demostración - Sean A_n y B_n, los conjuntos de índices y $\{\phi_\gamma^n\}$ $(n \geq 0,\ \gamma \in A_n \cup B_n)$ las aplicaciones características para X

Sean $e_1, e_2, \ldots, e_q$ los puntos finales de Freudenthal de X.

Consideramos ahora los conjuntos de índices $U_0 = A_0 \cup \{1, \ldots, q\}$, $U_n = A_n \cup B_n$ para cada $n > 0$ y las aplicaciones, inducidas por las aplicaciones características $\phi_\gamma^n : \Sigma^n \longrightarrow X$,

$$(\phi_\gamma^n)^* : (\Sigma^n)^* \longrightarrow X^*$$

donde, si $\gamma \in A_n$, $(\phi_\gamma^n)^* : (E^n)^* = E^n \longrightarrow X^*$

y si $\gamma \in B_n$, $(\phi_\gamma^n)^* : (E^{n-1} \times J)^* \cong E^n \longrightarrow X^*$

y además para $n = 0$ se consideran

Para $i=1,\ldots,q$ $(\phi_i^0)^*: E^0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \subset X^*$ definida por

$$(\phi_i^0)^*(E^0) = e_i.$$

Notar que $(\phi_\gamma^n)^*$ son continuas para todo $n \geq 0$ y $\gamma \in U_n$ (ver Corolario 4.2.II). Además las celdas $(\phi_\alpha^n)^*(E^n)$ son compacto-cerrados en X^* y $(\phi_\gamma^n)^*(e^n) = \phi_\gamma^n(c^n)$ para cada $n \geq 0$ y $\gamma \in A_n \cup B_n$.

Es inmediato comprobar que (X^*,T^*) verifica con estas celdas las propiedades (a),(b),(c) (e) de la Definición 7.3.1 de [Ma]. Queda probar la propiedad (d) que es la referente a la topología coherente, pero esto también resulta sencillo, puesto que cada celda $(\phi_\gamma^n)^*(E^n)$ $(n \geq 0\ ,\ \gamma \in U_n)$ es un subespacio cerrado de (X^*,T^*), $X^* = \bigcup_{\substack{n \geq 0 \\ \gamma \in U_n}} (\phi_\gamma)^*(E^n)$ y sólo hay un número finito de celdas, luego por la Prop. V 5.11 de [G.M.M] T^* es la topología coherente con la familia de las celdas $\{(\phi_\gamma^n)^*(E^n)\}$. #

Notar que en el Teorema anterior si X es además regular, X^* también lo es

De manera similar se obtiene un resultado análogo considerando la compactificación de Alexandroff $\hat{X}$.

* * *

Daremos ahora un teorema que generaliza la Proposicición 10.1.I.

Teorema 8.- (Propiedad absoluta de extensión de homotopía propia para CW pares propios).

Sea (X,L) un par propio donde X es un CW complejo propio finito y L un subcomplejo de X. Entonces L posee la propiedad absoluta de extensión de homotopía propia en X.

Demostración.- Hemos de probar que dado un espacio topológico cualquiera Y, una aplicación propia $f: X \longrightarrow Y$ y una homotopía propia parcial de f, $H : L \times I \longrightarrow Y$, existe una extensión propia de H, $F: X \times I \longrightarrow Y$, que es una homotopía propia de f.

Entonces se trata de extender la aplicación propia $F: X \times I \cup L \times I \longrightarrow Y$, definida por $F(x,0) = f(x)$ para cada $x \in X$, $F(y,t) = H(y,t)$ para cada $(y,t) \in L \times I$, hasta una aplicación propia $F: X \times I \longrightarrow Y$.

Esto lo haremos extendiendo F de forma inductiva a $K^n \times I$, donde $K^n = X^n \cup L$.

Para $n=0$, se extiende F a $K^0 \times I$ definiendo $F(v,t) = f(v)$, para toda 0-celda v de X que no esté en L. Notar que la aplicación obtenida

$$F: X \times 0 \cup K^0 \times I \longrightarrow Y$$

es propia pues es propia en cada celda del CW complejo propio finito $X \times 0 \cup K^0 \times I$

Supongamos ahora que F se ha extendido hasta una aplicación propia

$$F: X\times 0 \cup K^{n-1}\times I \longrightarrow Y$$

Para cada n-celda $\phi_\gamma^n(\Sigma^n) \subset X$ que no esté en L, consideramos la aplicación propia:

. Si $\gamma \in A_n$:

$$E^n\times 0 \cup S^{n-1}\times I \xrightarrow{\phi_\gamma^n\times id_I} \phi_\gamma^n(E^n)\times 0 \cup \phi_\gamma^n(S^{n-1})\times I \subset X\times 0 \cup K^{n-1}\times I \xrightarrow{F} Y$$

Si $\gamma \in B_n$:

$(n>1)$ $$(E^{n-1}\times J)\times 0 \cup (E^{n-1}\times 0 \cup S^{n-2}\times J)\times I \xrightarrow{\phi_\gamma^n\times id_I}$$

$$\longrightarrow \phi_\gamma^n(E^{n-1}\times J)\times 0 \cup \phi_\gamma^n(E^{n-1}\times 0 \cup S^{n-2}\times J)\times I \subset X\times 0 \cup K^{n-1}\times I \xrightarrow{F} Y$$

(En el caso $n=1$ considerar $(E^0\times J)\times 0 \cup E^0\times I$)

En cualquier caso tenemos una retracción propia

$r: \Sigma^n\times I \longrightarrow \Sigma^n\times 0 \cup \partial\Sigma^n\times I$ (ver Proposición 10.1 I)

Entonces, como $\phi_\gamma^n|_{C^n}$ es (1-1) y $r(z,t)=(z,t)$ para cada $(z,t)\in \Sigma^n\times 0 \cup \partial\Sigma^n\times I$, obtenemos una aplicación continua:

$$r': \phi_\gamma^n(\Sigma^n)\times I \longrightarrow \phi_\gamma^n(\Sigma^n)\times 0 \cup \phi_\gamma^n(\partial\Sigma^n)\times I$$

dada por $r'(x,t)=(\phi_\gamma^n\times id_I)\circ r(z,t)$ donde $z\in\Sigma^n$ es tal que $\phi_\gamma^n(z)=x$. Además r' es propia, pues

$r'\circ(\phi_\gamma^n\times id_I)=(\phi_\gamma^n\times id_I)\circ r: \Sigma^n\times I \longrightarrow \phi_\gamma^n(\Sigma^n)\times 0 \cup \phi_\gamma^n(\partial\Sigma^n)\times I$

es propia y $\phi_\gamma^n\times id_I: \Sigma^n\times I \longrightarrow \phi_\gamma^n(\Sigma^n)\times I$ es suprayectiva

Así la aplicación $F\circ r': \phi_\gamma^n(\Sigma^n)\times I \longrightarrow Y$ es una extensión propia de F a cada n-celda $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ de X que no está en L, y ésta nos proporciona

$$F: X\times 0 \cup K^n\times I \longrightarrow Y$$

que es propia por serlo en cada celda del CW complejo propio finito $X\times 0 \cup K^n\times I$.

Como el CW complejo propio $X\times I$ es finito, está claro que así se obtiene un extensión propia $F : X \times I \longrightarrow Y$. (ver Corolario 7.1).

* * *

Dado un CW complejo propio X y un par propio (Y,B), toda aplicación propia $f : (\Phi_\gamma^n(\Sigma^n), \Phi_\gamma^n(\partial\Sigma^n)) \longrightarrow (Y,B)$ representa

(a) un elemento de $\pi_n(Y,B)$ si la celda es compacta.

(b) un elemento de $\underline{\underline{\pi}}_{n-1}(Y,B)$ si la celda es no compacta

en el sentido de que definen unas únicas aplicaciones propias

(a) $f \circ \Phi_\gamma^n : (E^n, S^{n-1}) \longrightarrow (\Phi_\gamma^n(E^n), \Phi_\gamma^n(S^{n-1}) \longrightarrow (Y,B)$

(b) $f \circ \Phi_\gamma^n : (E^{n-1} \times J,\ E^{n-1} \times 0 \cup S^{n-2} \times J) \longrightarrow$

$$\longrightarrow (\Phi_\gamma^n(E^{n-1} \times J)),\ \Phi_\gamma^n(E^{n-1} \times 0 \cup S^{n-2} \times J)) \longrightarrow (Y,B)$$

Asimismo $g : \Phi_\gamma^n(\partial\Sigma^n) \longrightarrow B$ propia representa:

(a) un elemento de $\pi_{n-1}(B)$ si la celda es compacta.

(b) un elemento de $\underline{\underline{\pi}}_{n-2}(B)$ si la celda es no compacta.

(Fijado v perteneciente a S^{n-1}(en el caso (a)) ó bien a S^{n-2} (en el caso (b)), se considera el punto base $f \circ \Phi_\gamma^n(v)$ en el caso (a), y el rayo base $\alpha : J \longrightarrow B$ definido por $\alpha(t) = f \circ \Phi_\gamma^n(v,t)$ en el caso (b). Los omitimos por comodidad).

<u>Proposición 9</u>.- $g : \Phi_\gamma^n(\partial\Sigma^n) \longrightarrow B$ propia se extiende a una aplicación propia $\overline{g}: \Phi_\gamma^n(\Sigma^n) \longrightarrow B$ si y sólo si representa al elemento 0 de:

(a) $\pi_{n-1}(B)$ si $\Phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ es una celda compacta

(b) $\underline{\Pi}_{n-2}(B)$ si $\phi_\gamma^n(\Sigma^n)$ es una celda no compacta

Demostración .- En el caso (a) ver Prop. 14.15 de [G.B].

En el caso (b):

Supongamos que la aplicación propia $g:\phi_\gamma^n(E^{n-1}\times 0 \cup S^{n-2}\times J))\to B$ se extiende a una aplicación propia $\bar{g}:\phi_\gamma^n(E^{n-1}\times J)\longrightarrow B$.

Entonces $\bar{g}\circ\phi_\gamma^n:(E^{n-1}\times J,\ E^{n-1}\times 0\ \cup S^{n-2}\times J)\longrightarrow (B,B)$ representa un elemento de $\underline{\Pi}_{n-1}(B,B)$ que es trivial.

Como $g\circ\phi_\gamma^n|_{E^{n-1}\times 0\,\cup S^{n-2}\times J}$ representa a la imagen mediante el homomorfismo $\partial:\underline{\Pi}_{n-1}(B,B)\longrightarrow \underline{\Pi}_{n-2}(B)$ del elemento de $\underline{\Pi}_{n-1}(B,B)$ representado por $\bar{g}\circ\phi_\gamma^n$ deducimos que representa al 0 de $\underline{\Pi}_{n-2}(B)$.

Supongamos ahora que $g:\phi_\gamma^n(E^{n-1}\times 0\ \cup S^{n-2}\times J))\longrightarrow B$ propia repesenta al elemento 0 de $\underline{\Pi}_{n-2}(B)$.

Entonces existe una aplicación propia

$$G: I\times E^{n-1}\times 0 \cup I\times S^{n-2}\times J\longrightarrow B$$

tal que $G(0,x,t)=g\circ\phi_\gamma^n(x,t)$ y $G(1,x,t)=\alpha(t)$ para todo $(x,t)\in E^{n-1}\times 0\ \cup I\times S^{n-2}\times J$.

Consideramos ahora la identificación propia

$$p: I\times E^{n-1}\times 0\ \cup I\times S^{n-2}\times J\longrightarrow \frac{I\times E^{n-1}}{1\times E^{n-1}}\times 0\ \cup\ \frac{I\times S^{n-2}}{1\times S^{n-2}}\times J$$

Notar que G es compatible con p y por tanto define una aplicacion continua $G':\ \dfrac{I\times E^{n-1}}{1\times E^{n-1}}\times 0\ \cup\ \dfrac{I\times S^{n-2}}{1\times S^{n-2}}\times J\longrightarrow A$

tal que $G'\circ p=G$. (ver Prop. V.2.13 de [G-M-M.])

Además G' es propia por serlo G (ver Prop. 3.1.I)

Por otra parte existe un homeomorfismo

$$l : \frac{I \times E^{n-1}}{1 \times E^{n-1}} \times 0 \cup \frac{I \times S^{n-2}}{1 \times S^{n-2}} \times J \longrightarrow E^{n-1} \times J$$

de modo que $l \circ p(0,x,t) = (x,t)$ para todo $(x,t) \in E^{n-1} \times 0 \cup S^{n-1} \times J$

Llamando $G'' : E^{n-1} \times J \longrightarrow A$ a la aplicación propia dada por $G'' = G' \circ l^{-1}$, notemos que $G''(x,t) = g \circ \phi_\gamma^n (x,t)$ para todo $(x,t) \in E^{n-1} \times 0 \cup S^{n-1} \times J$, y además G'' es compatible con $\phi_\gamma^n : E^{n-1} \times J \longrightarrow \phi_\gamma^n(E^{n-1} \times J)$

Por tanto queda definida una aplicación propia

$$\bar{g} : \phi_\gamma^n(E^{n-1} \times J) \longrightarrow A$$

con $\bar{g} \circ \phi_\gamma^n = G''$, que es una extensión propia de g. #

* * *

Supongamos que X es un CW complejo propio regular finito.

En orden a establecer un algoritmo de calculo para las homologías H_*, J_*, E_* de X, como se daba en 3.II para el caso de los complejos cúbicos propios finitos, no es difícil hacerlo para la homología singular $H_*(X)$, pues debido a que toda celda no compacta retracta por deformación, aunque no de forma propia, a su borde, se obtiene que $H_q(X^n, X^{n-1}) = 0$ para todo $q \neq n$ y $H_n(X^n, X^{n-1})$ es el grupo abeliano libre generado por $\{i_*(x_\alpha)\}_{\alpha \in A_n}$ donde x_α es un generador de $H_n(\Sigma^n_\alpha, \partial\Sigma^n_\alpha)$ e $i : (\Sigma^n_\alpha, \partial\Sigma^n_\alpha) \longrightarrow (X^n, X^{n-1})$ es la inclusión de la n-celda compacta Σ^n_α de X.

Si se obtuviera un Teorema análogo al Teorema 2.3.II para CW complejos propios regulares finitos, procediendo como en iv.4. de [M], tendríamos que las homologías $J_*(X)$ y $E_*(X)$ son las homologías de los complejos de cadenas $\{J_n(X^n,X^{n-1}),d_J\}$ y $\{E_n(X^n,X^{n-1}),d_E\}$ respectivamente, donde

$$d_J : J_n(X^n,X^{n-1}) \longrightarrow J_{n-1}(X^{n-1}) \longrightarrow J_{n-1}(X^{n-1},X^{n-2})$$

y $$d_E : E_n(X^n,X^{n-1}) \longrightarrow E_{n-1}(X^{n-1}) \longrightarrow E_{n-1}(X^{n-1},X^{n-2})$$

Intentamos por tanto probar que dado un CW complejo propio regular finito X:

(1) $J_n(X^n,X^{n-1})$ es el grupo abeliano libre generado por $\{i_*(x_\gamma)\}_{\gamma\in A_n\cup B_n}$ donde x_γ es un generador de $J_n(\Sigma_\gamma^n,\partial\Sigma_\gamma)$ e $i : (\Sigma_\gamma^n,\partial\Sigma_\gamma^n) \longrightarrow (X^n,X^{n-1})$ es la inclusión de la n-celda Σ_γ^n de X.

$J_q(X^n,X^{n-1}) = 0$ para todo $q \neq n$.

(2) $E_n(X^n,X^{n-1})$ es el grupo abeliano libre generado por $\{i_*(x_\beta)\}_{\beta\in B_n}$ donde x_β es un generador de $E_n(\Sigma_\beta^n, \partial\Sigma_\beta^n)$ y Σ_β^n es una n-celda no compacta de X.

$E_q(X^n,X^{n-1}) = 0$ para todo $q \neq n$.

Para ello seguimos un proceso similar al utilizado en [E-H-R] para el caso de los complejos cúbicos propios finitos:

Sea P^{n-1} el subcomplejo de las celdas compactas de X^{n-1}. Las celdas de X^n que no están en P^{n-1} son las celdas no compactas de X^{n-1} y las n-celdas de X^n.

Si encontramos O entorno regular de P^{n-1} (compacto y retracta por deformación a P^{n-1}) y denotamos $N(X^{n-1}) = O \cup X^{n-1}$, $N(X^{n-1})$ retracta propiamente a X^{n-1} y $J_q(X^n,X^{n-1}) \cong J_q(X^n,N(X^{n-1}))$

Considerando un abierto U tal que cl U es un entorno regular de P^{n-1} contenido en O y $P^{n-1} \subset U$, $X^n - U$ "caza" todos los finales de Freudenthal de X y por tanto se puede aplicar la escisión por U (P7).2.II), obteniendo:

$$J_q(X^n, X^{n-1}) \cong J_q(X^n - U, N(X^{n-1}) - U)$$

Notar que para cada n-celda compacta Σ^n_α, $\Sigma^n_\alpha - (U \cap \Sigma^n_\alpha)$ es una n-celda compacta, que denotaremos $\tau(\Sigma^n_\alpha)$. Ademas $\tau(\Sigma^n_\alpha) \cap \tau(\Sigma^n_\beta) = \emptyset$, es decir, las n-celdas compactas que se obtienen ahora están separadas.

Por otra parte $(N(X^{n-1}) \cap \Sigma^n_\alpha) - (U \cap \Sigma^n_\alpha)$ retracta a $\partial\tau(\Sigma^n_\alpha)$, y, $X^n - U = \bigcup_{\alpha \in A_n} \tau(\Sigma_\alpha) \cup L^{n-1} \times J$ con $L^{n-1} \times J$ CW complejo regular clasico con tantas (n-1) celdas compactas como n-celdas no compactas tiene X^n (las uniones son disjuntas).

$N(X^{n-1}) - U = \bigcup_{\alpha \in A_n}(N(X^{n-1}) \cap \Sigma^n_\alpha) - (U \cap \Sigma^n_\alpha) \cup (L^{n-1} \times J) \cap N(X^{n-1})$ retracta propiamente a $\bigcup_{\alpha \in A_n} \partial\tau(\Sigma_\alpha) \cup (L^{n-1} \times 0 \cup L^{n-2} \times J)$ donde L^{n-2} es el (n-2) esqueleto de L^{n-1}.

Asi,

$$J_q(X^n, X^{n-1}) \cong \bigoplus_{\alpha \in A_n} J_q(\tau(\Sigma^n_\alpha), \partial\tau(\Sigma^n_\alpha)) \oplus J_q(L^{n-1} \times J, L^{n-1} \times 0 \cup L^{n-2} \times J)$$

Ahora bien, $J_q(\tau(\Sigma^n_\alpha), \partial\tau(\Sigma^n_\alpha)) = H_q(\tau(\Sigma^n_\alpha), \partial\tau(\Sigma^n_\alpha)) = \mathbb{Z}$

y $J_q(L^{n-1} \times J, L^{n-1} \times 0 \cup L^{n-2} \times J) \cong J_{q-1}(L^{n-1} \times 0 \cup L^{n-2} \times J) \cong$

$\cong J_{q-1}(L^{n-1}, L^{n-2})$.

Estos isomorfismos se obtienen considerando las (J_*) sucesiones exactas asociadas a los pares

$$(L^{n-1} \times J, L^{n-1} \times 0 \cup L^{n-2} \times J) \ , \ (L^{n-1} \times 0 \cup L^{n-2} \times J, L^{n-2} \times J)$$

y utilizando las propiedades de la homologia J_* dadas en 2.II.

Como (L^{n-1}, L^{n-2}) es compacto, $J_{q-1}(L^{n-1}, L^{n-2}) = H_{q-1}(L^{n-1}, L^{n-2}) =$

$$\begin{cases} = 0 & \text{si } q \neq n \\ & \text{si } q = n: \\ \multicolumn{2}{l}{\text{El grupo abeliano libre generado por las } (n-1) \text{ celdas de } L^{n-1}} \end{cases}$$

Finalmente no es difícil ver que los generadores de $J_q(Y^n, Y^{n-1})$ son los indicados.

Haciendo lo mismo para la homología E_* se obtiene:

$$E_q(Y^n, Y^{n-1}) \cong \bigoplus_{\alpha \in A_n} E_q(\tau(\Sigma^n_\alpha), \partial\tau(\Sigma^n_\alpha)) \oplus E_q(L^{n-1} \times J, L^{n-1} \times 0 \cup L^{n-2} \times J)$$

$$E_q(\tau(\Sigma^n_\alpha), \partial\tau(\Sigma^n_\alpha)) = 0 \qquad \text{para todo } q$$

$$E_q(L^{n-1} \times J, L^{n-1} \times 0 \cup L^{n-2} \times J) \cong E_q(L^{n-1} \times J, L^{n-2} \times J) \cong H_{q-1}(L^{n-1}, L^{n-2})$$

Estos isomorfismos se obtienen considerando las (E_*) sucesiones exactas asociadas a los pares

$$(L^{n-1} \times J,\ L^{n-1} \times 0 \cup L^{n-2} \times J) \quad , \quad (L^{n-1} \times J,\ L^{n-2} \times J)$$

y aplicando las propiedades de la homología E_* dadas en 2.II.

Así pues, el problema consiste en encontrar el entorno regular de P^{n-1} que nos permita seguir el proceso descrito.

La parte de este entorno que corresponde a las n-celdas compactas Σ^n_α de Y^n es sencilla, pues basta considerar $\partial\Sigma^n_\alpha \cup \{ x \in \sigma^n \mid \|x\| \geq 1/2 \}$.

El problema está en las celdas no compactas de Y^n, pero éste se soluciona si demostramos el siguiente:

__Lema 9__.- Sea una k-celda no compacta con una estructura de CW regular propio finito M con la característica de que M tenga una sola k-celda y sea no compacta.

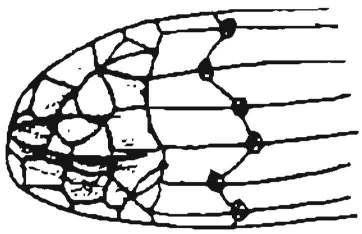
Entonces puede subdividirse M hasta una nueva estructura de CW regular propio M' de modo que $M' \cong E^k \cup_{E^{k-1}} (E^{k-1} \times J)$.

Además, si L es la unión de las celdas compactas de M, $L \subset E^{k} - E^{k-1}$.

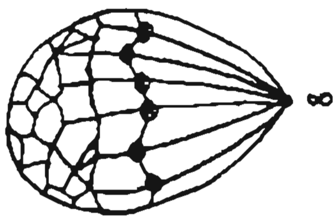
Demostración.- Notar que para $k = 1$ es obvio.

Supongamos que es cierto para $m \geq 1$, vamos a intentar probarlo para una $(m+1)$ celda no compacta M con las características descritas.

Consideramos ahora en las celdas no compactas del borde de M, la estructura regular inducida del hecho que verificase en ellas la hipótesis de inducción. Notar que ésta no afecta a L.



Compactificamos la celda M por el punto ∞, obteniendo una $(m+1)$ bola E^{m+1}, en cuyo borde, que es una m-esfera, queda inducida una estructura de CW regular finito clásico.

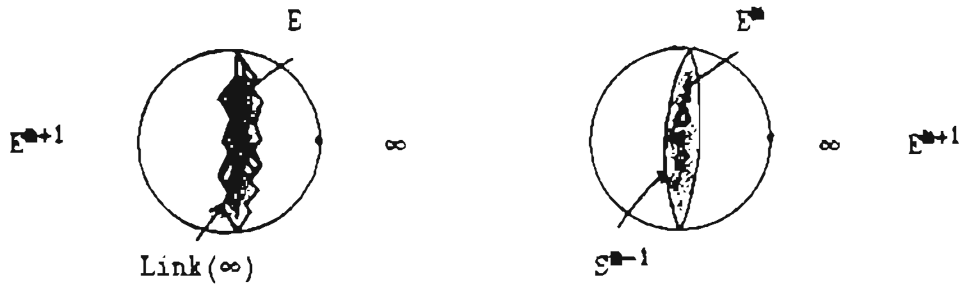


Consideramos ahora una CW estructura simplicial en la m-esfera que sea subdivisión de la anterior (ver Teoremas 1.7.III y 2.1.III de [Lu]). Y denotamos $\bar{M}'$ a la nueva estructura de CW regular inducida en E^{m+1}. Entonces, por Prop. 3.4.3 de [Ma.], Link(∞) (frontera de la estrella st(∞)) es homotópicamente equivalente a S^{m-1}. Si resulta cierta la conjetura de Poincaré, esto significa que es homeomorfa a S^{m-1}, si no, sólo puede asegurarse para $m \neq 4$.

Por la Proposición 5.3.23. de [Ma.], el complemento en la m-esfera del Link (∞) tiene dos componentes conexas de las que Link (∞) es la frontera común.

Para $m \leq 2$, Link $(\infty) \cup Ci$ donde Ci es una componente conexa es una m-bola.

Si elegimos ahora un punto $P \in E^{m+1} - S^m$ y llamamos $E = \{ x \in E^{m+1} \mid x = \lambda P + (1-\lambda) r$ donde $r \in \text{Link}(\infty)$ y $\lambda \in [0,1] \}$ y h al homeomorfismo: $\text{Link}(\infty) \longrightarrow S^{m-1}$, la aplicación $\bar{h} : E \longrightarrow E^m$ dada por $\bar{h}(\lambda P + (1-\lambda) r) = \lambda . 0 + (1-\lambda) h(r)$ es un homeomorfismo de E en E^m.



Esto significa que E es una bola E^m en la bola E^{m+1}, cuyo borde divide al borde de E^{m+1} en dos m-bolas, entonces

$$\tilde{M}' = E^{m+1} \underset{E^m}{\cup} E^{m+1}$$

Arrancando ahora el punto de compactificación ∞, se obtiene una nueva estructura de CW regular propio M' en la $(m+1)$ celda no compacta M de modo que

$$M' \equiv E^{m+1} \underset{E^m}{\cup} E^m \times J$$

Notar que este proceso garantiza que $L \subset E^{m+1} - E^m$.

Por lo tanto el Lema es cierto siempre que $k \leq 3$. Luego, mediante este procedimiento, sólo podemos dar un algoritmo de cálculo de las homologías $J_*(X)$ y $E_*(X)$ para el caso en el que X sea un CW complejo propio regular finito de dimensión menor o igual que 3.

4.- Teoremas de aproximación celular propia.

<u>**Definición 1**</u>.- Sean X e Y CW complejos propios. Una aplicación $g: X \longrightarrow Y$ se dice que es celular si $g(X^n) \subset Y^n$ para todo $n \geq 0$.

Trataremos de establecer en este párrafo cuándo una aplicación propia entre CW complejos propios $f: X \longrightarrow Y$ admite una aproximación celular propia.

Es decir, cuándo existe una aplicación celular propia $g: X \longrightarrow Y$ tal que f y g son homótopas propiamente.

En el caso de aplicaciones continuas y CW complejos clásicos, puede verse un estudio de las aproximaciones celulares continuas en 7.4 de [Ma].

Notemos que si hay aproximación celular propia, ésta es continua, pero en general no es cierto el recíproco. Por ejemplo, consideremos J con las dos estructuras de CW regular propio X e Y siguientes:

X tiene una 0-celda en cada $n \in \mathbb{Z}^+$ y cada intervalo $[n, n+1]$ es una 1-celda compacta. Y tiene una 0-celda en el punto 0, y una 1-celda no compacta J.

La aplicación $f = id_J : X \longrightarrow Y$ tiene una aproximación celular continua $g : X \longrightarrow Y$ con $g(x) = 0$ (Considerar la homotopía $H : J \times I \longrightarrow J$ dada por $H(x,t) = (1-t)x$, $H_0 = f$ y $H_1 = g$), sin embargo no tiene ninguna aproximación celular propia, pues toda aplicación $g : X \longrightarrow Y$ que sea celular verifica que $g^{-1}(0) = \mathbb{Z}$, luego no es propia.

Teorema 2.- Sea X un CW complejo propio m-dimensional. Entonces:

$$\pi_n(X, X^{m-1}, x_0) = 0 \quad \text{para todo} \quad 1 \le n < m \quad y \quad x_0 \in X^{m-1}$$

Demostración.- Sea f una aplicación continua de $(I^n, \partial I^n, *) \longrightarrow (X, X^{m-1}, x_0)$ representante de un elemento cualquiera de $\pi_n(X, X^{m-1}, x_0)$. (en general, no haremos referencia a los puntos base).

Probaremos que f puede "empujarse" de modo continuo hasta X^{m-1}.

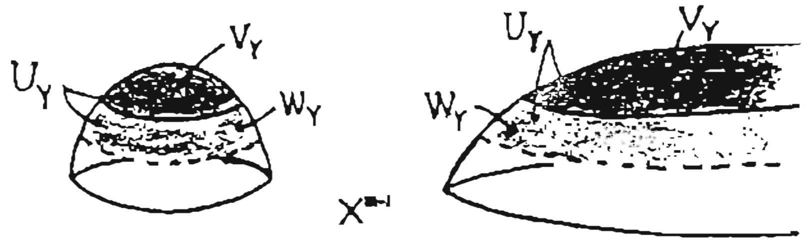
Para ello consideramos las m celdas $\{h_\gamma^m(\Sigma^m_\gamma)\}_{\gamma \in A_m \cup B_m}$ de X, e introducimos algunas notaciones:

En el caso de una m-celda compacta con aplicación característica $h_\gamma^m : E^m \longrightarrow X$
llamamos U_γ al subespacio abierto de X $h^m_\gamma\{x \in E^m |\ \|x\| < 2/3\}$ y V_γ al subespacio cerrado $h_\gamma^m\{x \in E^m |\ \|x\| \le 1/3\}$.

Y en el caso de una m-celda no compacta con aplicación característica $h_\gamma^m : E^{m-1} \times J \longrightarrow X$ llamaremos U_γ al subespacio abierto de X, $h_\gamma^m\{(x,t) \in E^{m-1} \times J \mid \|x\| < 2/3 \ \text{ y } \ t > 1/3\}$ y V_γ al subespacio cerrado $h_\gamma^m\{(x,t) \in E^{m-1} \times J \mid \|x\| \leq 1/3 \text{ y } t \geq 2/3\}$

Si denotamos $L = \cup V_\gamma$, $L \cap h_\beta^n(\Sigma^n) = \emptyset$ para cada $n < m$ y $L \cap h_\gamma^m(\Sigma^m) = V_\gamma$ para cada $\gamma \in A_m \cup B_m$. Por tanto L es un subespacio cerrado de X y $X - L$ es abierto.

Por último, definimos para cada $\gamma \in A_m \cup B_m$, $W_\gamma = U_\gamma \cap (X - L)$. Notar que W_γ es un subespacio abierto de X.



La colección de conjuntos $\{f^{-1}(U_\gamma), f^{-1}(X - L)\}$ forma un cubrimiento abierto de I^n. Como I^n es un espacio métrico compacto, existe un número real $\delta > 0$ (el número de Lebesgue asociado al cubrimiento) tal que todo subconjunto de diámetro menor que δ está contenido en uno de los abiertos del cubrimiento, y por tanto existe una subdivisión de I^n, que induce una estructura de CW regular finito M en I^n tal que cada celda de M es llevada por f a $X - L$ ó bien a uno de los conjuntos U_γ.

Notemos que ∂I^n es un subcomplejo de M.

Ahora construiremos una aplicación $g: M \longrightarrow X$ verificando que para cada r-celda $\phi_\beta^r(E^r)$ de M, si $\phi_\beta^r(E^r) \subset f^{-1}(X-L)$ entonces $g|_{\phi_\beta^r(E^r)} = f|_{\phi_\beta^r(E^r)}$ y si $\phi_\beta^r(E^r) \subset f^{-1}(U_\gamma)$ entonces

$g\,\phi_\beta^r(E^r) \subset W_\gamma$.

Además $f \simeq g$ (rel.∂I^n), los puntos de M que f lleva a U_γ permanecerán en U_γ a lo largo de la homotopía y en particular si una celda de M está contenida en $f^{-1}(X - L)$ la homotopía será "la constante f".

La construcción de g la hacemos por inducción sobre los esqueletos de M:

Dada una 0-celda v de M, si $f(v) \in X - L$ definimos $g(v) = f(v)$ y la homotopía en v como el camino constante. Si $f(v) \in U_\gamma$, como U_γ es arco-conexo, $f(v)$ puede unirse por un camino a un punto de W_γ, elegimos éste como $g(v)$ y el camino como la homotopía

Supongamos que g está definida en M^{r-1}, con $r \leq n$, verificando las condiciones anteriores.

Dada una r-celda $\phi_\beta^r(E^r)$ de M, si $\phi_\beta^r(E^r) \subset f^{-1}(X-L)$ definimos g en $\phi_\beta^r(E^r)$ como f y la homotopía estacionaria.

Si $\phi_\beta^r(E^r) \subset f^{-1}(U_\gamma)$, entonces $f\,\phi_\beta^r(S^{r-1}) \subset U_\gamma$ y por tanto $g\,\phi_\beta^r(S^{r-1}) \subset W_\gamma$. Notar que $g|_{\phi_\beta^r(S^{r-1})}$ representa un elemento de $\pi_{r-1}(W_\gamma)$.

Ahora bien, si W_γ corresponde a una celda no compacta, W_γ retracta por deformación fuerte a S^{m-1} y $\pi_{r-1}(W_\gamma) = \pi_{r-1}(S^{m-1})$, entonces por ser $r \leq n < m$, deducimos que $\pi_{r-1}(W_\gamma) = 0$.

Si W_γ corresponde a una celda no compacta, W_γ retracta por deformación fuerte (aunque no propia) a $\mathbb{R}^{m-1}$ que es contractible, luego también en este caso $\pi_{r-1}(W_\gamma) = 0$

Aplicando ahora la Prop. 9.3, $g|_{\phi_\beta^r(S^{r-1})}$ se extiende a una aplicación g de $\phi_\beta^r(E^r)$ en W_γ.

Por otra parte, la homotopía que existía entre f y g en $\phi_\beta^r(S^{r-1})$, puede extenderse a una homotopía en U_γ entre $f|_{\phi_\beta^r(E^r)}$ y $g|_{\phi_\beta^r(E^r)}$, puesto que la aplicación definida en $\phi_\beta^r(E^r)\times 0 \cup \phi_\beta^r(E^r)\times 1 \cup \phi_\beta^r(S^{r-1})\times I$ por las anteriores representa un elemento de $\pi_r(U_\gamma)$. Como U_γ es comtractible, $\pi_r(U_\gamma)=0$ y existe la extensión citada.

Notar que por ser M un CW complejo la aplicación g así construida es continua y verifica además las condiciones requeridas. Notar también que si $* \in \partial I^n$ y $f(*)=x_0 \in X^{m-1}$, $g(*)=x_0$ y la homotopía en $*$ es la constante.

Entonces f y g representan el mismo elemento de $\pi_n(X, X^{m-1})$. Considerando el homomorfismo inducido por la inclusión $i_*: \pi_n(X-L, X^{m-1}) \longrightarrow \pi_n(X, X^{m-1})$, g representa a la imagen por i_* del elemento de $\pi_n(X-L, X^{m-1})$ representado por $g: (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X-L, X^{m-1})$. Pero X^{m-1} es un retracto por deformación fuerte de $X-L$, luego $\pi_n(X-L, X^{m-1})=0$, de donde deducimos que la clase representada por f en $\pi_n(X, X^{m-1})$ es la clase 0. #

Nota.- Como pegando celdas no se aumenta el número de arco componentes, para cada $m \geq 1$ $i_*: \pi_0(X^{m-1}) \longrightarrow \pi_0(X)$ es sobre, es decir $\pi_0(X, X^{m-1})=0$.

Teorema 3.- Sea X un CW complejo propio, entonces

$$\pi_r(X, X^n)=0 \qquad \text{para todo} \quad r \leq n.$$

Demostración.- Sea $i: X^n \longrightarrow X^{n+1}$ la inclusión. Por el

Teorema 2., $\pi_r(X^{n+1},X^n)=0$ para todo $r\leq n$, y considerando la (π)-sucesión exacta asociada a la pareja (X^{n+1},X^n), deducimos que $i_*: \pi_r(X^n) \longrightarrow \pi_r(X^{n+1})$ es biyección para $0\leq r<n$ si $n\geq 1$ y sobre para $n=0$, e $i_*: \pi_n(X^n) \longrightarrow \pi_n(X^{n+1})$ es sobre.

Por lo tanto para todo $m\geq n$, $\pi_r(X^n) \longrightarrow \pi_r(X^m)$ es una biyección para $r<n$ y $\pi_n(X^n) \longrightarrow \pi_n(X^m)$ es sobre. Luego $\pi_r(X^m,X^n)=0$ para todo $r\leq n$.

Consideremos ahora un elemento cualquiera de $\pi_r(X,X^n)(r\leq n)$ representado por una aplicación $f: (I^r,\partial I^r) \longrightarrow (X,X^n)$. Entonces $f(I^r)$ es un compacto de X, y estará contenido en un esqueleto X^m con $m\geq n$ (ver Prop. 13.2).

Por consiguiente, f representa en $\pi_r(X,X^n)$ la imagen por $i_*: \pi_r(X^m,X^n) \longrightarrow \pi_r(X,X^n)$ del elemento de $\pi_r(X^m,X^n)$ representado por $f: (I^r,\partial I^r) \longrightarrow (X^m,X^n)$. Como $\pi_r(X^m,X^n)=0$ para todo $r\leq n$ deducimos que f representa al elemento 0 de $\pi_r(X,X^n)$. #

Observación.- Dado un CW complejo propio X tal que X^n admita una aplicación propia $\alpha: J \longrightarrow X^n$, considerando la sucesión asociada al triple (X, X^n, α):

$$\cdot\to \pi_q(X,X^n,\alpha(0)) \to \underline{\pi}_{q-1}(X,X^n,\alpha) \to \underline{\underline{\pi}}_{q-1}(X,X^n,\alpha) \to \pi_{q-1}(X,X^n,\alpha)\to$$
$$\cdots\longrightarrow \pi_1(X,X^n,\alpha(0))$$

y aplicando el Teorema 3., obtenemos:

$\underline{\pi}_n(X, X^n, \alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_n(X, X^n, \alpha)$ es suprayectiva para todo $n\geq 1$.

$\underline{\pi}_{q-1}(X,X^n, \alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_{q-1}(X, X^n, \alpha)$ es biyeción para todo $2\leq q\leq n$.

Además, para todo $n\geq 1$:

Si $\underline{\underline{\pi}}_0(X^n, \alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\pi}}_0(X,\alpha)$ es sobre, entonces $\underline{\pi}_0(X^n,\alpha) \longrightarrow \underline{\pi}_0(X,\alpha)$ es sobre.

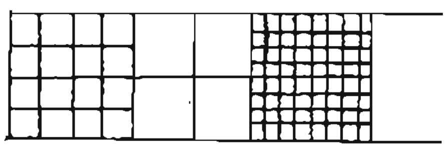
__Teorema 4__.- Sea X un CW complejo propio m-dimensional, tal que toda celda de X^{m-1} corta solamente a un número finito de m-celdas. Entonces, para cada rayo α en X^{m-1}:

$$\underline{\pi}_{n-1}(X, X^{m-1}, \alpha) = 0 \quad \text{para todo} \quad 2 \leq n < m-1$$

__Demostración__.- Sea $f:(I^{n-1} \times J, \partial(I^{n-1} \times J), * \times J) \longrightarrow (X, X^{m-1}, \alpha)$ una aplicación propia que representa a un elemento cualquiera de $\underline{\pi}_{n-1}(X, X^{m-1}, \alpha)$. Probaremos que f puede "empujarse" hasta X^{m-1} de modo propio.

Consideramos las m-celdas $\{h_\gamma^m(\Sigma^m)\}_{\gamma \in A_m \cup B_m}$ de X y utilizamos las mismas notaciones U_γ, V_γ, L y W_γ que en la demostración del Teorema 2.

La colección de abiertos $\{f^{-1}(U_\gamma), f^{-1}(X - L)\}$ cubren $I^{n-1} \times J = \bigcup_{k=0}^{\infty} I^{n-1} \times [k, k+1]$. Para cada k, entero no negativo, $I^{n-1} \times [k, k+1]$ es compacto métrico, luego existe un número real positivo δ_k (número de Lebesgue) tal que todo subconjunto de $I^{n-1} \times [k, k+1]$ de diámetro menor que δ_k está contenido en uno de los abiertos del cubrimiento. Por tanto existe una subdivisión en $I^{n-1} \times [k, k+1]$ tal que toda celda está contenida en uno de estos abiertos.



Entonces, queda inducida en $I^{n-1} \times J$ una estructura de CW complejo regular propio n-dimensional, M, con infinitas celdas compactas verificando que cada celda de M está totalmente contenida en uno de los abiertos del cubrimiento. Observemos que cada n-celda de M tal que una de las celdas de su borde está contenida en $\partial(I^{n-1} \times J)$ es llevada por f a $X - L$.

Por otra parte, para cada m-celda no compacta de X con aplicación característica $h_\gamma^m : E^{m-1} \times J \longrightarrow X$, consideramos en $E^{m-1} \times J$ la sucesión creciente de compactos $\{E^{m-1} \times [0,N]\}_{N=0}^{\infty}$, obteniendo la sucesión creciente de compactos $\{h_\gamma^m(E^{m-1} \times [0,N])\}_{N=0}^{\infty}$ cuya unión es $h_\gamma^m(E^{m-1} \times J)$.

Notar que $h_\gamma^m(E^{m-1} \times [0,N])$ está estrictamente contenido en $h_\gamma^m(E^{m-1} \times [0, N+1])$.

Como f es propia, $f^{-1}(h_\gamma^m(E^{m-1} \times [0,N]))$ es compacto en $I^{n-1} \times J$, luego cerrado y acotado, por lo cual existe una sucesión de compactos $\{I^{n-1} \times [0, d_\gamma^N]\}$ en $I^{n-1} \times J$ con $I^{n-1} \times [0, d_\gamma^N] \subset I^{n-1} \times [0, d_\gamma^{N+1}]$ tales que $f^{-1}(h_\gamma^m(E^{m-1} \times [0,N])) \subset I^{n-1} \times [0, d_\gamma^N]$.

Describiremos a continuación la construcción de una aplicación propia $g : M \longrightarrow X$ verificando que para cada r-celda $\phi_\beta^r(E^r)$ de M, si $\phi_\beta^r(E^r) \subset f^{-1}(X - L)$ entonces $g|_{\phi_\beta^r(E^r)} = f|_{\phi_\beta^r(E^r)}$ y si $\phi_\beta^r(E^r) \subset f^{-1}(U_\gamma)$ entonces $g\, \phi_\beta^r(E^r) \subset W_\gamma$.

Además $f \simeq_p g$ (rel. $\partial(I^{n-1} \times J)$), los puntos de M que f envía en U_γ permanecerán en U_γ a lo largo de la homotopía y en particular si una celda de M está contenida en $f^{-1}(X - L)$ la homotopía será "la constante f".

La construcción la hacemos por inducción sobre los esqueletos de M de la forma siguiente:

Dada una 0-celda v de M, si $f(v) \in X - L$ definimos $g(v) = f(v)$ y la homotopía (que denotaremos F) como $F(v,t) = f(v)$ para todo $t \in I$. Si $f(v) \in U_\gamma$ correspondiente a una m-celda compacta de X, como U_γ es arco conexo $f(v)$ puede unirse por un camino a un punto de W_γ. Elegimos este punto como $g(v)$ y el camino como la homotopía. Si $f(v) \in U_\gamma$ correspondiente a una m-celda no compacta, también U_γ es arco conexo, pero la elección del camino se hace de una manera más especial:

Si $v \in I^{n-1} \times [0, d_\gamma^N]$ entonces $f(v) \in h_\gamma^m(E^{m-1} \times [0,N])$, como $U_\gamma \cap h_\gamma^m(E^{m-1} \times (N,+\infty))$ es arco conexo, entonces $f(v)$ puede unirse por un camino en $U_\gamma \cap h_\gamma^m(E^{m-1} \times (N,+\infty))$ a un punto de $W_\gamma \cap h_\gamma^m(E^{m-1} \times (N,+\infty))$.

Elegimos este punto como $g(v)$ y el camino como la homotopía.

Si $v \in I^{n-1} \times [0, d_\gamma^0]$, como $f(v) \in U_\gamma \cap h_\gamma^m(E^{m-1} \times (0,+\infty))$, se procede como antes para $N = 0$.

Supongamos que tenemos g definida en M^{r-1}, con $r \leq n$, verificando las condiciones requeridas.

Dada una r-celda $\phi_\beta^r(E^r)$ de M, si $\phi_\beta^r(E^r) \subset f^{-1}(X - L)$ definimos g en $\phi_\beta^r(E^r)$ como f y la homotopía estacionaria.

Si $\phi_\beta^r(E^r) \subset f^{-1}(U_\gamma)$ correspondiente a una m-celda compacta de X, razonando como en la demostración del Teorema 2, $g|_{\phi_\beta^r(S^{r-1})}$ se extiende a una aplicación g de $\phi_\beta^r(E^r)$ en W_γ, y la homotopía F existente entre f y g en $\phi_\beta^r(S^{r-1})$ se extiende a una homotopía en U_γ entre $f|_{\phi_\beta^r(E^r)}$ y $g|_{\phi_\beta^r(E^r)}$.

Cuando $\phi_\beta^r(E^r) \subset f^{-1}(U_\gamma)$ correspondiente a una m-celda no compacta de X, se procede de la siguiente manera:

Si $\phi_\beta^r(E^r) \subset I^{n-1} \times J - I^{n-1} \times [0 \times d_\gamma^N]$, entonces $f\ \phi_\beta^r(E^r) \subset (h_\gamma^m(E^{m-1} \times J) - h_\gamma^m(E^{m-1} \times [0,N])) \cap U_\gamma$ (denotaremos a este último $U'_{\gamma N}$) y $g\ \phi_\beta^r(S^{r-1}) \subset U'_{\gamma N} \cap W_\gamma$ (que denotaremos $W'_{\gamma N}$) ; $g|_{\phi\beta^r(S^{r-1})}$ representa un elemento de $\pi_{r-1}(W'_{\gamma N})$. Notar que si $N=0$, $W'_{\gamma N}$ es contractible y para $N \neq 0$, $W'_{\gamma N}$ retracta a S^{m-2} aunque no de manera propia.

Como $r \leq n < m-1$, deducimos que $\pi_{r-1}(W'_{\gamma N}) = 0$ para todo N, y por lo tanto $g|_{\phi\beta^r(S^{r-1})}$ se extiende a una aplicación g de $\phi_\beta^r(E^r)$ en $W'_{\gamma N} \subset U'_{\gamma N}$.

Ahora la homotopía F existente ente f y g en $\phi_\beta^r(S^{r-1})$ se extiende a una homotopía en $U'_{\gamma N}$ entre $f|_{\phi\beta^r(E^r)}$ y $g|_{\phi\beta^r(E^r)}$ ya que la aplicación definida por las anteriores en $\phi_\beta^r(E^r) \times 0 \cup \phi_\beta^r(E^r) \times 1 \cup \phi_\beta^r(S^{r-1}) \times I$ representa un elemento de $\pi_r(U'_{\gamma N}) = 0$.

En el caso en el que $\phi_\beta^r(E^r) \times I^{n-1} \times [0, d_\gamma^0] \neq \emptyset$, notemos que $f\ \phi_\beta^r(E^r) \subset U'_{\gamma 0}$ y por tanto se procede como en el caso anterior para $N=0$.

La homotopía $F: I^{n-1} \times J \times I \longrightarrow X$ construida de la manera indicada anteriormente es continua por ser continua en cada celda del CW complejo M y verifica las condiciones deseadas. Solo queda probar que es propia, lo que hacemos a continuación.

Sea K un compacto cerrado cualquiera de X.

Entonces por la Prop 13.1, $K = \bigcup_{\text{finita}} (K \cap h_\gamma^m(\Sigma^m)) \cup (K \cap (X - \widetilde{L}))$

con $\widetilde{L} = \bigcup_{\eta \in A_m \cup B_m} \widetilde{V}_\eta$ donde :

para $\eta \in A_m$, $\widetilde{V}_\eta = h_\eta^m\{ x \in E^m \mid \|x\| < 1/2 \}$

y para $\eta \in B_m$ $\quad \widetilde{V}_\eta = h_\eta^m\{ (x,t) \in E^{m-1} \times J \mid \|x\| < 1/2$ y $t > 1/2 \}$

Notar que $X - \widetilde{L}$ es un subespacio cerrado de X, contenido en $X - L$, por tanto la homotopía F en $X - \widetilde{L}$ es estacionaria. $K \cap (X - \widetilde{L})$ es un cerrado contenido en el compacto K; como X es Hausdorff, $K \cap (X - \widetilde{L})$ es un compacto cerrado en X y por ser f propia, $f^{-1}(K \cap (X - \widetilde{L}))$ es un compacto cerrado en $I^{n-1} \times J$, luego $f^{-1}(K \cap (X - \widetilde{L})) \times I$ es un compacto cerrado en $I^{n-1} \times J \times I$

Ahora bien, notemos que por la construcción de F, el cerrado $F^{-1}(K \cap (X - \widetilde{L}))$ está contenido en $f^{-1}(K \cap (X - \widetilde{L})) \times I$, luego es compacto.

Si $h_\gamma^m(\Sigma^m)$ es una m-celda compacta de X, observemos que por la construcción de F, el cerrado $F^{-1}(K \cap h_\gamma^m(\Sigma^m))$ está contenido en $f^{-1}(h_\gamma^m(\Sigma^m)) \times I$ que es un compacto en $I^{n-1} \times J \times I$ por ser f propia, luego es compacto

Si $h_\gamma^m(\Sigma^m)$ es una m-celda no compacta de X, como $K \cap h_\gamma^m(\Sigma^m)$ es compacto en $h_\gamma^m(\Sigma^m)$, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que $K \cap h_\gamma^m(\Sigma^m) \subset h_\gamma^m(E^{m-1} \times [0,N])$. Entonces $f^{-1}(K \cap h_\gamma^m(\Sigma^m)) \subset I^{n-1} \times [0, d_\gamma^N]$

De aquí se deduce que $F^{-1}(K \cap h_\gamma^m(\Sigma^m))$ está contenido en $I^{n-1} \times [0, d_\gamma^N] \times I$ (si esto no ocurriera, existiría $(x,t) \in I^{n-1} \times J \times I$ con $F(x,t) \in K \cap h_\gamma^m(\Sigma^m)$ y $x \notin I^{n-1} \times [0, d_\gamma^N]$ Entonces por la construcción de F, $F(x,t) \notin h_\gamma^m(E^{m-1} \times [0,N])$, y por otra parte, $F(x,t) \in K \cap h_\gamma^m(\Sigma^m) \subset h_\gamma^m(E^{m-1} \times [0,N])$, lo que es una contradicción). Luego el cerrado $F^{-1}(K \cap h_\gamma^m(\Sigma^m))$ es compacto

Por consiguiente, $F^{-1}(K) = \bigcup_{\text{finita}} F^{-1}(K \cap h_\gamma^m(\Sigma^m)) \cup F^{-1}(K \cap (X - L))$ es compacto lo que prueba que F es propia y por lo tanto también $F_1 = g$ lo es.

Entonces f y g representan el mismo elemento de $\underline{\pi}_{n-1}(X, X^{m-1}, \alpha)$. Como, por hipótesis, cada celda de X^{m-1} corta sólo a un número finito de m-celdas, X^{m-1} es un retracto por deformación propia fuerte de $X - \operatorname{int} L$ y por tanto, $\underline{\pi}_{n-1}(X - \operatorname{int} L, X^{m-1}, \alpha) = 0$.

Ahora bien,

$g: (I^{n-1} \times J, \partial(I^{n-1} \times J), * \times J) \longrightarrow (X - L, X^{m-1}, \alpha) \subset (X - \operatorname{int} L, X^{m-1}, \alpha)$

luego g representa a la imagen por el homomorfismo inducido por la inclusión

$$i_*: \underline{\pi}_{n-1}(X - \operatorname{int} L, X^{m-1}, \alpha) \longrightarrow \underline{\pi}_{n-1}(X, X^{m-1}, \alpha)$$

del elemento de $\underline{\pi}_{n-1}(X - \operatorname{int} L, X^{m-1}, \alpha)$ representado por g, de donde deducimos que g y por tanto f, representa la clase 0 de $\underline{\pi}_{n-1}(X, X^{m-1}, \alpha)$. #

Nota - Si las m-celdas de X son todas compactas, siguiendo la demostración anterior, se deduce que $\underline{\pi}_{n-1}(X, X^{m-1}, \alpha) = 0$ para todo $2 \leq n \leq m-1$.

Observación.- Si X es un CW complejo propio de dimensión finita ≥ 1, como al adjuntar celdas a X^1 no se aumenta el número de finales propios, la aplicación $\underline{\pi}_0(X^1, \alpha) \longrightarrow \underline{\pi}_0(X, \alpha)$ es suprayectiva, luego para $n \geq 1$, también lo es $\underline{\pi}_0(X^1, \alpha) \longrightarrow \underline{\pi}_0(X^n, \alpha)$ y por lo tanto es suprayectiva la aplicación $\underline{\pi}_0(X^n,\alpha) \longrightarrow \underline{\pi}_0(X,\alpha)$.

Teniendo en cuenta ahora la observación al Teorema 3 deducimos que la aplicación $\underline{\pi}_0(X^n,\alpha) \longrightarrow \underline{\pi}_0(X,\alpha)$ es suprayectiva para cada $n \geq 1$.

Teorema 5.- Sea X un CW complejo propio de dimensión finita $> n$, tal que cada celda de X^k $(k \geq n)$ corta sólo a un número finito de $(k+1)$ celdas de X. Entonces, para cada rayo α en X^n,

$$\underline{\pi}_{r-1}(X, X^n, \alpha) = 0 \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq r < n$$

Demostración - Utilizando el Teorema 4 y razonando de manera similar a la demostración del Teorema 3 se obtiene el resultado #

Lema 6.- Sea X un complejo cúbico finito con un único final propio. Entonces, para cada $n \geq 3$, dada una aplicación propia

$$f:(I^{n-1} \times J, \partial(I^{n-1} \times J)) \longrightarrow (X, X^n)$$

existe un aplicación propia $g: I^{n-1} \times J \longrightarrow X^n$ tal que $f \simeq_p g$, mediante una homotopía propia H con $H(\partial(I^{n-1} \times J) \times I) \subset X^n$.

Demostración.- Para cada rayo α en X^n, se tiene que $\underline{\pi}_1(X, X^n, \alpha) = 0$. Como por hipótesis $\underline{\pi}_0(X) = 0$, se deduce que $\underline{\pi}_0(X^n) = 0$

Además, por el Teorema 3 y el Teorema 5, $\underline{\pi}_{i-1}(X, X^n, \alpha) = 0$ para todo $1 \leq i < n$ y $\pi_i(X, X^n, \alpha(0)) = 0$ para todo $0 \leq i \leq n$, y por tanto $\underline{\pi}_{i-1}(X, X^n, \alpha) = 0$ para todo $1 \leq i < n$. Estamos pues en condiciones de aplicar el Teorema de Hurewicz 1.1.III, obteniendo que $\rho_{\underline{\underline{\pi}}} : \underline{\underline{\pi}}_{n-1}(X, X^n, \alpha) \longrightarrow E_n(X, X^n)$ es un epimorfismo cuyo núcleo es el subgrupo $\Omega_{\underline{\underline{\pi}}}^{n-1}(X, X^n, \alpha)$ generado por los elementos de la forma $\zeta - u * \zeta$ donde $\zeta \in \underline{\underline{\pi}}_{n-1}(X, X^n, \alpha)$, $u \in \underline{\underline{\pi}}_1(X^n, \alpha)$ y $u * \zeta$ denota la acción de u en ζ.

Ahora bien, aplicando el algoritmo de cálculo para las homologías H_*, J_*, E_* de los complejos cúbicos propios finitos (ver 3.II), $H_i(X, X^n) = J_i(X, X^n) = E_i(X, X^n) = 0$ para todo $i \leq n$.

Consideramos ahora el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \rightarrow 0 = \pi_n(X, X^n, \alpha(0)) & \longrightarrow & \underline{\pi}_{n-1}(X, X^n, \alpha) & \longrightarrow & \underline{\underline{\pi}}_{n-1}(X, X^n, \alpha) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(X, X^n, \alpha(0)) = 0 \\
\Big\downarrow \rho_\pi & & \Big\downarrow \rho_{\underline{\pi}} & & \Big\downarrow \rho_{\underline{\underline{\pi}}} & & \Big\downarrow \rho_\pi \\
\cdots \longrightarrow 0 = H_n(X, X^n) & \longrightarrow & 0 = J_n(X, X^n) & \longrightarrow & 0 = E_n(X, X^n) & \longrightarrow & 0 = H_{n-1}(X, X^n) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

y obtenemos

$$\operatorname{Ker} \rho_{\underline{\pi}} = \underline{\pi}_{n-1}(X, X^n, \alpha) \cong \underline{\underline{\pi}}_{n-1}(X, X^n, \alpha) = \operatorname{Ker} \rho_{\underline{\underline{\pi}}} = \Omega_{\underline{\underline{\pi}}}^{n-1}(X, X^n, \alpha)$$

Luego $\underline{\pi}_{n-1}(X, X^n, \alpha) = \Omega_{\underline{\pi}}^{n-1}(X, X^n, \alpha)$, el subgrupo generado por los elementos de la forma $\zeta - u * \zeta$ donde $\zeta \in \underline{\pi}_{n-1}(X, X^n, \alpha)$, $u \in \underline{\pi}_1(X^n, \alpha)$ y $u * \zeta$ denota la acción.

Por lo tanto $\underline{\pi}^*_{n-1}(X, X^n) = 0$. Teniendo en cuenta la interpretación de los elementos de $\underline{\pi}^*_{n-1}(X, X^n)$ (ver 3.III) se deduce el resultado. #

<u>Nota</u>.- Si el algoritmo de cálculo dado en el párrafo 2, pudiera ampliarse para CW complejos regulares finitos de mayor dimensión, notar que la demostración anterior seguiría siendo válida para éstos y por lo tanto el Lema 6 se generalizaría.

Teorema 7.- Sea X un complejo cúbico propio finito Entonces, para $n \geq 3$, dada una aplicación propia

$$f : (I^{n-1} \times J, \partial(I^{n-1} \times J)) \longrightarrow (X, X^n)$$

existe una aplicación propia $g : I^{n-1} \times J \longrightarrow X^n$ tal que $f \simeq_p g$ mediante una homotopía propia T tal que $T(\partial(I^{n-1} \times J) \times I \subset X^n$

Demostración.- f induce de modo natural una aplicación continua $f^* : (I^{n-1} \times J)^* \longrightarrow X^*$ entre las respectivas compactificactiones de Freudenthal (ver Corolario 4.2.II).
f^* envía el punto final de Freudenthal e de $(I^{n-1} \times J)^*$ a un punto final de Freudenthal de X^*, σ. Recordemos que X^* es un CW complejo clásico regular finito y que σ es un vértice de X^* (ver Teorema 7.3).

Consideremos el subcomplejo $Y = cl(st(\sigma))$ de X^*, entonces $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $f(I^{n-1} \times [p, +\infty)) \subset Y - \{\sigma\}$ que es un subcomplejo M de X con un único final propio.

Observemos que la restricción de

$$f : (I^{n-1} \times \{p\}, \partial(I^{n-1}) \times \{p\}) \longrightarrow (M, M^n)$$

representa un elemento de $\pi_{n-1}(M, M^n) = 0$, por lo tanto existe una homotopía

$$F : (I^{n-1} \times \{p\} \times I, \partial(I^{n-1}) \times \{p\} \times I) \longrightarrow (M, M^n)$$

tal que $F_0 = f|_{I^{n-1} \times \{p\}}$ y $F_1(I^{n-1} \times \{p\}) \subset M^n$.

Aplicando ahora la propiedad de extensión de homotopía propia, $F|_{\partial(I^{n-1}) \times \{p\} \times I}$ se extiende a una aplicación propia

$$F : \partial I^{n-1} \times [p, +\infty) \times I \longrightarrow M^n$$

tal que $F_0 = f|_{\partial I^{n-1} \times [p, +\infty)}$

Utilizando de nuevo la propiedad de extensión de homotopía propia, como $\partial(I^{n-1}\times[p,+\infty)) = I^{n-1}\times\{p\}\cup\partial I^{n-1}\times[p,+\infty)$, obtenemos una extensión propia de $F: I^{n-1}\times[p,+\infty)\times I \longrightarrow M$ verificando que $F_1:(I^{n-1}\times[p,+\infty),\partial(I^{n-1}\times[p,+\infty)) \longrightarrow (M, M^n)$

Aplicando ahora el Lema 6, existe una aplicación propia

$$G: I^{n-1}\times[p,+\infty)\times I \longrightarrow M$$

verificando que $G_0=F_1$, $G(\partial(I^{n-1}\times[p,+\infty)\times I) \subset M^n$ y

$$G_1: I^{n-1}\times[p,+\infty) \longrightarrow M^n$$

Definiendo la aplicación $H: I^{n-1}\times[p,+\infty)\times I \longrightarrow M \subset X$ por

$$H(x,t,s) = \begin{cases} F(x,t,2s) & \text{si } 0\le s\le 1/2 \\ \\ G(x,t,2s-1) & \text{si } 1/2\le s\le 1 \end{cases}$$

notemos que H es propia, $H_0 = f|_{I^{n-1}\times[p,+\infty)}$, $H_1: I^{n-1}\times[p,+\infty) \longrightarrow X^n$ y además $H(\partial I^{n-1}\times[p,+\infty)\times I) \subset X^n$.

Considerando $H|_{\partial I^{n-1}\times\{p\}\times I}$ y utilizando la propiedad de extensión de homotopía, se encuentra una extensión de esta aplicación,

$$S: (I^{n-1}\times\{0\} \cup \partial I^{n-1}\times[0,p])\times I \longrightarrow X^n$$

tal que $S_0 = f|_{I^{n-1}\times\{0\}\cup\partial I^{n-1}\times[0,p]}$.

Si llamamos R a la aplicación de $I^{n-1}\times[0,p]\cup\partial(I^{n-1}\times[0,p])\times I$ en X dada por

$$R|_{(I^{n-1}\times\{0\}\cup\partial I^{n-1}\times[0,p])\times I} = S$$

$$R|_{I^{n-1}\times[0,p]} = f|_{I^{n-1}\times[0,p]}$$

$$R|_{I^{n-1}\times\{p\}\times I} = H|_{I^{n-1}\times\{p\}\times I}$$

entonces R representa un elemento de $\pi_n(X,X^n)=0$ y por tanto se extiende a $\bar{R} : I^{n-1} \times [0,p] \times I \longrightarrow X$ tal que

$$\bar{R}(I^{n-1} \times [0,p] \times 1) \subset X^n$$

Si por último definimos $T : I^{n-1} \times J \times I \longrightarrow X$ como:

$$T|_{I^{n-1} \times [0,p] \times I} = \bar{R} \quad , \quad T|_{I^{n-1} \times [p,+\infty] \times I} = H$$

resulta inmediato comprobar que T es propia, $T_0 = f$,

$$T(\partial(I^{n-1} \times J) \times I) \subset X^n \qquad y \qquad T_1 : I^{n-1} \times J \longrightarrow X^n. \quad \#$$

Nota.- Observación análoga para este Teorema que la de la nota anterior.

Teorema 8.- Sea X un CW complejo propio regular finito y de dimensión 3, con un único final propio. Entonces, para todo rayo α en X^2,

$$\underline{\underline{\Pi}}_1(X, X^2, \alpha) = 0$$

Demostración.- Sea $\hat{X}$ la compactificación de Alexandroff de X por el punto ∞ y $\hat{X}^2$ la compactificación de Alexandroff de X^2 por ∞, que es la inducida por la anterior.

$\hat{X}$ es un CW complejo clásico regular y finito del cual ∞ es un vértice (ver 7.3) y $\hat{X}^2$ es el 2-esqueleto de $\hat{X}$.

Deseamos probar que la aplicación inducida por la inclusión $i_* : \underline{\underline{\Pi}}_1(X^2, \alpha) \longrightarrow \underline{\underline{\Pi}}_1(X, \alpha)$ es suprayectiva.

Como $\underline{\underline{\Pi}}_1(X, \alpha) = \pi_1((\hat{X})_*, \infty) = \lambda_1(\hat{X}, \infty)$ y

$$\underline{\underline{\Pi}}_1(X^2, \alpha) = \pi_1((\hat{X}^2)_*, \infty) = \lambda_1(\hat{X}^2, \infty) \qquad \text{(ver 1.III)}$$

bastará probar que la aplicación inducida por la inclusión $i_* : \lambda_1(\hat{X}, \infty) \longrightarrow \lambda_1(\hat{X}^2, \infty)$ es suprayectiva.

Notemos que por ser X un C^r complejo propio regular finito 3-dimensional, existe una subdivisión K, de forma que $U = st_{\hat{K}}(\infty) = (\widehat{L\times J - L\times 0})$ con L CW regular clásico, que induce una subdivisión Y en X^2 de forma que $V = st_{\hat{Y}}(\infty) = (\widehat{L^1\times J - L^1\times 0})$ siendo L^1 el 1-esqueleto de L.

Observemos que U es un entorno cónico de ∞ en $\hat{K}$ y $\mathrm{cl}\,U - U = L\times 0$ y V es un entorno cónico de ∞ en $\hat{Y}$ y $\mathrm{cl}\,V - V = L^1\times 0$. Ahora bien, según [Hu.1], dado un entorno cónico A de un punto $*$ en B, $\lambda_1(B,*) \cong \pi_1(\mathrm{cl}\,A - A)$. Por tanto, obtenemos $\lambda_1(\hat{X},\infty) = \lambda_1(\hat{K},\infty) \cong \pi_1(L\times 0)$ y $\lambda_1(\hat{X}^2,\infty) = \lambda_1(\hat{Y},\infty) \cong \pi_1(L^1\times 0)$.

Pero sabemos que $\pi_1(L\times 0, L^1\times 0) = 0$ (ver Teorema 3), luego la aplicación inducida por la inclusión $\pi_1(L^1\times 0) \longrightarrow \pi_1(L\times 0)$ es suprayectiva, lo que prueba que $i_*: \lambda_1(\hat{X},\infty) \longrightarrow \lambda_1(\hat{X}^2,\infty)$ también lo es.

Considerando ahora la ($\underline{\pi}$) sucesión exacta asociada a (X,X^2,α)

$$\cdots\longrightarrow \underline{\pi}_1(X^2,\alpha) \xrightarrow{i_*} \underline{\pi}_1(X,\alpha) \xrightarrow{j_*} \underline{\pi}_1(X,X^2,\alpha) \longrightarrow \underline{\pi}_0(X^2,\alpha)$$

Por tener X un único final propio, X^2 también posee un único final propio, por lo tanto $\underline{\pi}_0(X^2,\alpha) = 0$ y j_* es suprayectiva. Como i_* también lo es, se deduce que $\underline{\pi}_1(X,X^2,\alpha) = 0$. Aplicando el Teorema 3, $\pi_i(X,X^2) = 0$ para $i \leq 2$, luego $\underline{\mathrm{I}}_1(X,X^2,\alpha) = 0$.

Corolario 9.- Sea X un CW complejo propio regular y finito con un único final propio. Entonces para todo rayo α en X^2,

$$\underline{\mathrm{I}}_1(X,X^2,\alpha) = 0$$

Demostración.- Considerar la ($\underline{\mathrm{I}}$) sucesión exacta asociada a

(X, X^3, X^2, α) (Prop. 8.2.I)

$$\cdots \longrightarrow \underline{\Pi}_2(X, X^3, \alpha) \longrightarrow \underline{\Pi}_1(X^3, X^2, \alpha) \longrightarrow \underline{\Pi}_1(X, X^2, \alpha) \longrightarrow \underline{\Pi}_1(X, X^3, \alpha)$$

Por el Teorema 8, $\underline{\Pi}_1(X^3, X^2, \alpha) = 0$ y por el Teorema 5 $\underline{\Pi}_1(X, X^3, \alpha) = 0$, luego $\underline{\Pi}_1(X, X^2, \alpha) = 0$. #

Teorema 10.- Sea X un CW complejo propio regular y finito. Entonces, dada una aplicación $f\colon (I^n \times J, \partial(I \times J)) \longrightarrow (X, X^2)$, existe una aplicación propia $g\colon I \times J \longrightarrow X^2$ tal que $f \simeq_p g$ mediante una homotopía propia T, con $T(\partial(I \times J) \times I) \subset X^2$.

Demostración.- Haciendo un razonamiento similar al de la demostración del Teorema 7, se deduce que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f(I \times [p, +\infty))$ está contenido en un subcomplejo M de X con un único final propio. Y de manera análoga se obtiene una extensión propia $F\colon I \times \{p\} \times I \longrightarrow M$ tal que $F_0 = f|_{I \times \{p\}}$ $F_1\colon I \times \{p\} \longrightarrow M^2$ y $F(\partial I \times \{p\} \times I) \subset M^2$.

Entonces, la aplicación propia

$$H\colon I \times \{p\} \times I \cup I \times [p, +\infty) \longrightarrow M$$

definida por $H|_{I \times \{p\} \times I} = F$ y $H|_{I \times [p, +\infty)} = f|_{I \times [p, +\infty)}$ representa un elemento de $\underline{\Pi}_1(M, M^2)$ (notar que $(I \times \{p\} \times I \cup I \times [p, +\infty), I \times \{p\} \times I \cup \partial I \times \{p\} \times I \cup \partial I \times [p, +\infty))$ es homeomorfo a $(I \times J, \partial(I \times J))$).

Aplicando el Corolario 9, $\underline{\Pi}_1(M, M^2) = 0$ y por tanto, H se extiende a una aplicación propia

$$\overline{H}\colon I \times [p, +\infty) \times I \longrightarrow M \subset X$$

tal que $\overline{H}(\partial I \times [p, +\infty) \times I) \subset M^2 \subset X^2$ y $\overline{H}_1\colon I \times [p, +\infty) \longrightarrow M^2 \subset X^2$

Por otra parte, la aplicación

$$r : I\times [0,p] \cup I\times \{p\}\times I \longrightarrow X$$

definida por $r|_{I\times[0,p]} = f|_{I\times[0,p]}$, $r|_{I\times\{p\}\times I} = H|_{I\times\{p\}\times I}$ se extiende (como en el demostración del Teorema 9) hasta una aplicación

$$R: I\times [0,p]\times I \longrightarrow X$$

tal que $R(I\times\{0\}\times I \cup \partial I\times [0,p]\times I \cup I\times [0,p]\times 1) \subset X^2$

Entonces definiendo $T : I\times J\times I \longrightarrow X$ por:

$$T|_{I\times[0,p]\times I} = R \qquad y \qquad T|_{I\times[p,+\infty)\times I} = \bar{H}$$

T es propia, $T_0 = f$, $T(\partial(I\times J)\times I) \subset X^2$ y $T_1 = g : I\times J \longrightarrow X^2$

#

Teorema 11.- **(Teorema de Aproximación celular propia).**

Sea X un CW complejo propio finito e Y un complejo cúbico propio finito ó bien un CW complejo propio regular finito de dimensión menor o igual que 3

Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación propia tal que $f|_M$ es celular para algún subcomplejo M de X (M puede ser $\emptyset$). Entonces, existe una aplicación celular y propia $g: X \longrightarrow Y$ tal que $g|_M = f|_M$ y $g \simeq_p f$ mediante una homotopía estacionaria en M.

Demostración.- Consideramos la aplicación propia $F: X\times 0 \cup M\times I \longrightarrow Y$ definida por $F(x,0) = f(x)$ para cada $x\in X$ y $F(a,t) = f(a)$ para cada $a\in M$ y $t\in I$. Trataremos de extender F hasta una aplicación propia $F: X\times I \longrightarrow Y$ tal que $g = F_1 : X \longrightarrow Y$ es una aplicación celular. Esta extensión la haremos de forma inductiva sobre los esqueletos de X.

Para cada 0-celda x de X que no está en M, siempre existe un camino en Y uniendo $f(x)$ con algún vértice v de Y (ver nota al Teorema 2). Elegimos $g(x) = v$ y el camino como la homotopía. Así obtenemos

$$F : X^0 \times I \cup M \times I \longrightarrow Y \quad \text{con} \quad F(X^0 \times 1) \subset Y^0$$

Supongamos ahora que F está bien extendida a $X^{n-1} \times I$ y que $F(X^{n-1} \times 1) \subset Y^{n-1}$. $(n \geq 1)$

Dada una n-celda $h_\gamma^n(\Sigma^n)$ de X que no está en M, definimos la aplicación propia k como la siguiente composición:

$$k : \Sigma^n \times 0 \cup \partial\Sigma^n \times I \xrightarrow{h_\gamma^n \times id_I} h_\gamma^n(\Sigma^n)\times 0 \cup h_\gamma^n(\partial\Sigma^n)\times I \subset X \times 0 \cup X^{n-1}\times I \xrightarrow{F} Y$$

Si la celda es compacta, $(\Sigma^n, \partial\Sigma^n) = (E^n, S^{n-1})$ y k representa un elemento de $\pi_n(Y, Y^n) = 0$ (ver Teorema 3) y por lo tanto k se extiende a una aplicación continua $G : E^n \times I \longrightarrow Y$ con $G(E^n \times 1) \subset Y^n$ y ésta proporciona una extensión continua de $F|_{h_\gamma^n(E^n) \times 0 \cup h_\gamma^n(S^{n-1}) \times I}$,

$$F : h_\gamma^n(E^n) \times I \longrightarrow Y \quad \text{con} \quad F \circ (h_\gamma^n \times id_I) = G$$

y por tanto $F(h_\gamma^n(E^n) \times 1) \subset Y^n$.

Si la celda es no compacta, $(\Sigma^n, \partial\Sigma^n) = (E^{n-1} \times J, \partial(E^{n-1} \times J))$, consideramos un homeomorfismo $l : E^{n-1} \times J \times I \longrightarrow I^{n-1} \times J \times I$ que transforme $E^{n-1} \times J \times 0 \cup \partial(E^{n-1} \times J) \times I$ en $I^{n-1} \times J \times 0$ y $E^{n-1} \times J \times 1$ en $I^{n-1} \times J \times 1 \cup \partial(I^{n-1} \times J) \times I$.

Entonces $k \circ l^{-1}|_{I^{n-1} \times J \times 0} : (I^{n-1} \times J \times 0, \partial(I^{n-1} \times J) \times 0) \longrightarrow (Y, Y^n)$ es una aplicación propia.

En el caso en el que $n = 1$, sea $\beta : (J, 0) \longrightarrow (Y, Y^1)$ la

β representa a un final propio de Y (es decir si X posee alguna 1-celda no compacta Y posee al menos un final propio, y por tanto también Y^1). Como la aplicación inducida por la inclusión $i_* : \underline{\pi}_0(Y^1) \longrightarrow \underline{\pi}_0(Y)$ es sobre, existe una aplicación propia $H : J \times I \longrightarrow Y$ tal que $H_0 = \beta$ y $H(J \times 1) \subset Y^1$. Entonces $H|_{0 \times I}$ representa un elemento de $\pi_1(Y, Y^1, \beta(0)) = 0$. No resulta ahora difícil deducir que existe una aplicación propia

$G: I^0 \times J \times I \longrightarrow Y$ tal que $G|_{I^0 \times J \times 0} = k \circ l^{-1}|_{I^0 \times J \times 0}$ y $G(I^0 \times J \times 1 \cup \partial(I^0 \times J) \times I) \subset Y^1$.

Para $n = 2$ aplicando el Teorema 10 y para $n \geq 3$ observando que $Y = Y^n$ en el caso de ser Y un CW complejo propio regular finito con $\dim Y \leq 3$, ó bien aplicando el Teorema 7 en el caso de ser Y un complejo cúbico propio finito, se deduce que existe una aplicación propia

$$G : I^n \times J \times I \longrightarrow Y \quad \text{tal que}$$

$G|_{I^{n-1} \times J \times 0} = k \circ l^{-1}|_{I^{n-1} \times J \times 0}$ y $G(I^{n-1} \times J \times 1 \cup \partial(I^{n-1} \times J) \times I) \subset Y^n$

Entonces (para $n \geq 1$), $G \circ l : E^{n-1} \times J \times I \longrightarrow Y$ es una extensión propia de k y verifica que $G \circ l(E^{n-1} \times J \times 1) \subset Y^n$, y ésta proporciona una extensión propia de F a

$$F : h_Y^n(E^{n-1} \times J) \times I \longrightarrow Y$$

$(F \circ (h_Y^n \times id_I) = G)$ verificando que $F(h_Y^n(E^{n-1} \times J) \times 1) \subset Y^n$.

Notar que la extensión $F: X \times I \longrightarrow Y$ obtenida mediante este proceso es propia, pues X es un CW complejo propio finito (ver Prop 7.1). #

Observaciones.- De la demostración anterior se deduce que si $\dim X \leq 2$, el Teorema 11 es válido cuando Y es un CW complejo propio regular finito de dimensión cualquiera.

Por otra parte, si X verifica las hipótesis del Teorema 11 e Y es un CW complejo propio regular finito de dimensión cualquiera, pero verificando que las celdas de dimensión mayor o igual que 4 son todas compactas también se verifica el Teorema 11. (ver la nota al Teorema 4).

Si X verifica las hipótesis del Teorema 11 e Y es un CW complejo propio regular finito de dimensión cualquiera, dada una aplicación propia $f : X \longrightarrow Y$, siguiendo la demostración del Teorema 11 y utilizando para $n \geq 3$ el Teorema 5, se obtiene una aplicación propia $F : X \times I \longrightarrow Y$ con $F_0 = f$, F estacionaria en M y $F_1 : X \longrightarrow Y$ verificando que $F_1(X^0) \subset Y^0$, $F_1(X^1) \subset Y^1$, $F_1(X^2) \subset Y^2$ y $F_1(X^n) \subset Y^{n+1}$ para cada $n \geq 3$.

Por último, notar que si el algoritmo de cálculo de las homologías J_*, E_*, H_* se generaliza a CW complejos propios regulares finitos de dimensión cualquiera, también se generaliza el Teorema 7 y se obtiene, siguiendo la demostración del Teorema 11, un Teorema de aproximación celular propia más general.

BIBLIOGRAFIA

[A. 1] **ALEXANDER J.W.** "Combinatorial Analisis situs" Trans. Am. Math. Soc. 28 301-329 (1926)

[A. 2] **ALEXANDER J.W.** "On the chains of a complex and their duals" Proc. Math. Acad. Sci. U.S.A. 21 509-511 (1935)

[A. 3] **ALEXANDER J.W.** "On the connectivity ring of an abstract space" Ann. Math. 37 698-708 (1936)

[Al] **ALEXANDROFF P.** "Untersuchungen uber Gestalt und lage abgeschlossener Mengen beliebiger dimension" Ann. of Math. 30 101-187 (1928)

[A-V] **ALEXANDER J.W.** and **VEBLEN O.** "Manifold of n-dimensions". Ann. Math. 14 163-178 (1913)

[Bl] **BLAKERS A.L.** "Some relations between homology and homotopy groups" Ann of Maths (2) 49 428-461 (1948)

[Bo] **BORSUK K.** "Concerning homotopy properties of compacta" Fund. Math. 62 223-254 (1968)

[Br] **BRAHANA T.R.** "A theorem about local Betti groups" Michigan Math. J. 4 13-37 (1957)

[Bro] **BROWN R.** "Groupoids and van kampen's theorem" Proc. Lond. Math. Soc. (3) 17 385-401 (1967)

[Brw 1] **BROWN E.M.** "On the proper homotopy type of simplicial complexes" L.N.M. nº 375 Springer (1975)

[Brw 2] **BROWN E.M.** "Contractible 3-manifolds of finite genus at infinity" Trans. Amer. Math Soc. 245 503-514 (1978)

[Bl-M] **BLAKERS A.L.** and **MASSEY W.S.** "The homotopy groups of a triad " Ann. of Math. (2) 53 161-205 (1951)

[B-T] **BRIN M.G.** and **THICKSTUN T.L.** " On the proper Steenrod homotopy groups and proper embeddings of planes into 3-manifolds"

[Brw-M] **BROWN E.M.** and **MESSER R.** "The classification of two dimensional manifolds" Trans. Amer. Math. Soc. 255 377-402 (1979)

[Brw-T] **BROWN E.M.** and **TUCKER T.W.** "On proper homotopy theory for non compact 3-manifolds" Trans. Amer. Math. Soc. 188 105-126 (1974)

[Bu-R-S] **BUONCRISTIANO S., ROURKE C.P.** and **SANDERSON B.J.** "A geometric approach to homology theory" London Mathematical Society. Lecture Note Series 18. Cambridge University Press.

[C. 1] **ČECH E.** "Theorie générale de l' homologie dans un space quelconque" Fundam. Math. 19 149-183 (1932)

[C. 2] **ČECH E.** "Les groupes de Betti d'un complexe infini" Fundam. Math. 25 33-44 (1935)

[Ce] **ČERIN Z.** "On various relative proper homotopy groups" Tsukuba J. Math. Vol 4 nº2 177-202 (1980)

[Dw] **DOWKER C.H.** "Homology groups of relations" Ann. Math. 56 84-95 (1952)

[Du] **DUGUNDJI J.** "Topology" Allyn and Bacon Inc. Boston (1966)

[D-H] **DEHN M.** and **HEEGAARD P.** "Analysis situs" Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, III AB, 3 153-220 Leipzig (1907)

[Dm-He 1] **DOMINGUEZ E.** y **HERNANDEZ L. J.** "Some relationships betwen proper ends and Freudenthal's ends" Por aparecer.

[Dm-He 2] **DOMINGUEZ E.** y **HERNANDEZ L.J.** "Groupes d'homotopie prope associés a una categorie de prebordisme " C.R. Acad. Sc. Paris 295 161-166 (1982)

[E. 1] **EILENBERG S.** "On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups" Fund. Math. 32 167-175 (1939)

[E. 2] **EILENBERG S.** "Singular homology theory" Ann. of Math. (2) 45 407-447 (1944)

[Ed-Hs] **EDWARDS D.** and **HASTING H.** "Cech and Steenrod homotopy theories with applications to Geometric Topology" L.N.M. 542 Springer (1976)

[E-M] **EILENBERG S.** and **MAC LANE S.** "Acyclic models" Amer. J. Math. 75 189-199 (1953)

[E-S. 1] **EILENBERG S.** and **STEENROD N. E.** "Axiomatic approach to homology theory" Proc. Math. Acad. Sci. U.S.A. 31 117-120 (1945)

[E-S. 2] **EILENBERG S.** and **STEENROD N.E.** "Foundations of algebraic topology" Princeton University Press (1952)

[E-Z] **EILENBERG S.** and **ZILBER J.A.** "Semi-simplicial complexes and singular homology" Ann. Math. 51 499-513 (1950)

[E-H-R] **EXTREMIANA J.I.**, **HERNANDEZ L.J.** y **RIVAS M.T.** "Una (co) homologia propia " Actas X Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas. Murcia (1985).

[F.H.] **FREUDENTHAL H.** " Uber die enden topologischer raume und gruppen" Math. Z. 33 692-713 (1931)

[G.B.] **GRAY B.** "Homotopy theory" Academic Press (1975)

[Gi.1] **GRIFFITHS H.B.** "Local Topological invariants" Proc. London Math. Soc. (3) 350-367 (1953)

[Gi.2] **GRIFFITHS H.B.** "The fundamental group of two spaces with a common point" Q. J.L. Math. Oxford (2) 5 , 175-190 (1954) ,correction (2) 6 , 154-155 (1955)

[G-M-M] **GARCIA-MARGALEF-OLANO-OUTERELO-PINILLA.** "Topología" Tomo I , Alhambra (1975)

[Ha] **HARROLD O.G.** "Euclidean domains with uniformly abelian local fundamental groups" Trans. Amer. Math. Soc. 67 120-129 (1949)

[He.] **HERNANDEZ L.J.** "A note on proper invariants" Publicaciones del Sem. Mat. García de Galdeano. Serie II, sección 1 nº 12 (1984)

[Hu.1] **HU S.T.** "Algebraic Local invariants of topological spaces" Compositio Math. 13 173-218 (1958)

[Hu 2] **HU S.T.** "Homotopy theory" Academic Press (1959)

[Hw 1] **HUREWICZ W.** "Beiträge Zur topologie der deformationen I-IV" Neder Akad Wetensch Proc. Ser A 38 112-119,521-528 (1935); 39 117-126,215-224 (1936)

[Hw 2] **HUREWICZ W.** "On duality theorems" Bull. Amer. Math. Soc. 47 562-563 (1941)

[Hw-S] **HUREWICZ W.** and **STEENROD N.**" Homotopy relations in fiber spaces" Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. vol 27 60-64 (1941)

[J] **JORDAN C.** "Des contours tracés sur les surfaces" J. Math. pures appl.(2) 11 110-130 (1866)

[K] **KAN D.M.** "Abstract homotopy" Proc. Math. Acad. Sci. U.S.A. 41 1092-1096 (1955);42, 255-258;419-421;542-544 (1956)

[K-K] **KODAMA Y.** and **KOYAMA A.** "Hurewicz isomorphism theorem for Steenrod homology" Am. Math. Soc. 363-367 (1979)

[Ku] **KUPERBERG K.** "An isomorphism theorem of the Hurewicz type in Borsuk's theory of shape" Fundamenta Math. 57 21-33 (1972)

[L 1] **LEFSCHETZ S.** "Topology" Am. Math. Soc. Colloquium Publ. nº 12 New York (1930)

[L 2] **LEFSCHETZ S.** "On singular chains an cycles"

Bull. Am. Math. Soc.39 124-129 (1933)

[L 3] **LEFSCHETZ S.** "Algebraic Topology" Am. Math. Soc. Colloquium Publ. nº 27 New Yok (1942)

[Ls] **LISTING I.B.** "Der Census räumliche complexe" Göttingen (1862)

[Lu-W] **LUNDELL A.T.** and **WEINGRAM S.** "The topology of cw-complexes" The University series in Higher Matematics. Van Nostrad Reinold Company (1969)

[M] **MASSEY W.S.** "Singular homology theory" GTM 70 Springer (1980)

[Ma] **MAUNDER C.R.F.** "Algebraic Topology" Van Nostrand (1970)

[My] **MAYER W.** "Über abstrakte topologie" Mh. Math.36 1-42 (1929)

[Mo] **MORITA K.** "The Hurewicz and Whitehead theorems in shape theory" Sci. Rep. Tokyo Daígaku, Sec A (12), 246-258 (1974)

[Mr-U] **MARDEŠIC S.** and **UNGAR S.** "The relative Hurewicz theorem in shape theory" Glasnik Mat.9 317-327 (1974)

[O] **OLUM P.** "Non-abelian cohomology and van Kampen's theorem" Ann. Math. 68 658-668 (1958)

[P] **PAREIGIS B.** "Categories and functors" Academic Press (1970)

[Po] **POINCARE H.** "Analysis situs" J. Ecole Polytech. (2) 1 1-121 (1895)

[Pr] **PORTER T.** "Homotopy groups for strong shape and proper homotopy theory" Convegno di Topologia Serie II nº4 (1984)

[Q 1] **QUIGLEY J.B.** "Shape theory, Approaching theory and a Hurewicz theorem" thesis Indiana University, Bloomington (1970)

[Q 2] **QUIGLEY J.B.** "An exact sequence from the n^{th} to the $(n-1)^{st}$ fundamental groups" Fund. Math. 77 195-210 (1973)

[R] **RAUSSEN M.** "Hurewicz isomorphism and Whitehead theorems in pro-categories" Arch. Math. (Basel) Vol 30 153-164 (1978)

[Se] **SERRE J.P.** "Homologie singuliére des espaces fibrès" Ann. of Math. 54 425-505 (1951)

[Si] **SIEBENMANN L.C.** "Infinite simple homotopy tipes" Indag. Math. 32 479-495 (1970)

[St] **STEENROD N.E.** "Regular cicles of compact metric spaces" Ann. of Math. Vol 41 nº4 (1940)

[S-T] **SEIFERT H.** and **THRELFALL** "Lehrbuch der Topologie" Teubner Leipzig (1934)

[T] **TIETZE H.** "Über die topologischen invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten" Mh. Math. Phys. 19 1-118 (1908)

[V K 1] **VAN KAMPEN E.R.** "Die kombinatorische topologie und dic dualitatssat" the Hague. Thesis Leyden (1929)

[V K 2] **VAN KAMPEN E.H.** "On the connection between the fundamental groups of some related spaces" Ann. J. Math. 55 261-267 (1933)

[Ve] **VEBLEN O.** "Analysis situs" Ann. Math. Soc. Colloquium Pubb. nº 5 Parte II , New York (1922)

[Vi 1] **VIETORIS L.** "Uber die höheren Zusammenhag kompakter Räume und eine klasse von Zusammenhaugstreuen abbildungen" Math. Annln. 97 454-472 (1927)

[Vi 2] **VIETORIS L.** "Über die homologie gruppen der veireinigung zweier komplexe" Mh. Math. 37 159-162 (1930)

[W] **WALL C.T.C.** "On the exactness of interlooking sequences" L'enseignement Mathematique 12 95-108 (1966)

[W.G. 1] **WHITEHEAD G.W.** "Homotopy theory" Massachusetts Institute of Technology (1966)

[W.G. 2] **WHITEHEAD G.W.** "Elements of homotopy theory"

G.T.M. 61 Springer (1978)

[Wh 1] **WHITEHEAD** J.H.C."On the groups $\pi_r(V_{n,m})$ and spheres bundles" Proc. London Math. Soc.(2) vol 48 243-291 (1944)

[Wh 2] **WHITEHEAD** J.H.C. "Combinatorial homotopy I" Bull. Ann. Math. Soc. 55 213-245 (1949)

[Wi] **WHITNEY** H. "On products in a complex" Ann. Math. 39 397-432 (1938)