

---

MATERIAL DIDÁCTICO  
MATEMÁTICAS

---

12

# Notas de ecuaciones en derivadas parciales

José Antonio Ezquerro Fernández  
José Manuel Gutiérrez Jiménez  
Víctor Lanchares Barrasa



**campus  
iberus**

CAMPUS DE EXCELENCIA  
INTERNACIONAL  
DEL VALLE DEL EBRO



**UNIVERSIDAD  
DE LA RIOJA**



José Antonio Ezquerro Fernández  
José Manuel Gutiérrez Jiménez  
V́ctor Lanchares Barrasa

NOTAS DE ECUACIONES  
EN DERIVADAS PARCIALES

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA  
SERVICIO DE PUBLICACIONES

2021

Nombres: Ezquerro Fernández, José Antonio, autor | Gutiérrez Jiménez, José Manuel, autor | Lanchares Barrasa, Víctor, autor.  
Título: Notas de Ecuaciones en Derivadas Parciales / José Antonio Ezquerro Fernández, José Manuel Gutiérrez Jiménez, Víctor Lanchares Barrasa.  
Descripción: Primera edición. | Logroño : Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones, 2021.  
Identificadores: ISBN 978-84-09-31365-5 (pdf)  
Temas: Ecuaciones en derivadas parciales  
Clasificación: CDU 517.95(075.8) | Thema 1.0 PBKJ | Thema 1.0 4CT



**Notas de ecuaciones en derivadas parciales**, de José Antonio Ezquerro Fernández, José Manuel Gutiérrez Jiménez y Víctor Lanchares Barrasa (publicado por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Unported.  
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.

Versión revisada, febrero 2025

© Los autores

© Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones, 2021  
publicaciones.unirioja.es  
E-mail: publicaciones@unirioja.es

ISBN 978-84-09-31365-5

Edita: Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones

*A María y Emma, que son una bendición.  
JAE.*

*A mi familia y amigos, el tesoro más  
preciado en estos tiempos de pandemia. Y  
sin pandemia, también. JMG.*

*A mi mujer y mis hijos. VL.*



# Prólogo

La teoría de las ecuaciones en derivadas parciales (en adelante, EDP) ha sido y es uno de los campos más importantes de estudio en matemáticas. Esto se debe fundamentalmente a la frecuente aparición de EDP en muchas ramas de la física, la ingeniería y otras ciencias. Las EDP representan una de las herramientas más poderosas de la modelización matemática de problemas del «mundo real». Al principio, su estudio dependía del planteamiento físico o técnico de las ecuaciones surgidas, pero, con el tiempo, la teoría de las EDP también ha ido abarcando problemas que surgen de contextos teóricos en los que se prescinde de su relación con los problemas reales.

Como el estudio de las EDP toma muchas formas, existe una vasta literatura matemática sobre ellas y sus diferentes tratamientos. Esto complica mucho la orientación de su estudio para los estudiantes principiantes en la materia. De ahí la elaboración de estas notas, que sirven para iniciar a los estudiantes en la teoría de las EDP y que se centran en los aspectos que creemos más esenciales de la materia. Están preparadas fundamentalmente para presentar un enfoque basado principalmente en problemas matemáticos y sus soluciones. Su interés, por tanto, no es dar a conocer una teoría general, sino proporcionar a los estudiantes conceptos fundamentales y principios básicos, junto con algunas técnicas y métodos de resolución de problemas con EDP.

El objetivo de estas notas es presentar algunos elementos de la teoría de las EDP de forma muy sencilla y cuyo principal interés reside en el cálculo de soluciones de ecuaciones particulares. Con este objetivo hemos intentado obtener fórmulas de la forma más explícita posible, permitiendo a los estudiantes seguir fácilmente las notas y, a la vez, proporcionarles un repaso de las habilidades matemáticas adquiridas previamente. La presentación es intuitiva y está orientada a la técnica. Los ejemplos reemplazan la secuencia formal de probar teoremas.

La forma en que se presentan las notas ha sido desarrollada por los autores en cursos impartidos durante los últimos años en el primer semestre del cuarto curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de La Rioja. Teniendo en cuenta las limitaciones de tiempo que tiene un semestre de cuatro horas a la semana, no pretendemos que estas notas sean completas, puesto que contienen una selección subjetiva, pero que, en nuestra opinión, cubren el mínimo que debería conocer un estudiante de cualquier titulación científica o técnica que va a estudiar EDP por primera vez y que luego quiera estudiar la teoría de las EDP de forma más profunda. Para un mayor estudio se pueden consultar algunas de las referencias que aparecen en la bibliografía.

Los aspectos tratados en estas notas constituyen materia suficiente para un curso introductorio sobre EDP y están organizados en torno a dos partes, cada una de las cuales está a su vez dividida en capítulos.

La primera parte de las notas comienza con un capítulo de preliminares en el que se introducen las EDP y se presentan algunos problemas físicos modelizados a partir de estas ecuaciones. En los siguientes dos capítulos se desarrollan las técnicas más básicas de las EDP de primer orden, materia que la mayoría de textos de EDP trata brevemente (y esto en el caso de que las traten). El capítulo 2 muestra un tratamiento elemental de EDP cuasilineales (lineales) de primer orden, desarrollando un contexto geométrico necesario para el estudio de estas ecuaciones, así como la resolución de problemas de valor inicial mediante el método de las características inventado por Hamilton. En el capítulo 3 estudiamos las EDP generales (no lineales) y las resolvemos mediante una extensión del método de las características.

Los siguientes seis capítulos forman la segunda parte de estas notas y están dedicados a las EDP de segundo orden, donde nos hemos centrado en las EDP lineales de segundo orden del tipo que aparecen en los problemas más simples de la Física Matemática, como son la ecuación de ondas, la ecuación del calor y la ecuación de Laplace. Fundamentalmente, se tratan dos métodos de resolución: el método de separación de variables y el método de la transformada de Fourier. También se incluyen soluciones en forma cerrada, como la fórmula de D'Alembert para la ecuación de ondas. Estos métodos dan a los estudiantes una visión general del tema y abordan sus necesidades prácticas en otras materias. Comenzamos con el capítulo 4, donde se presenta el concepto de operador diferenciable, se clasifican las EDP en diferentes tipos y se obtienen formas canónicas simplificadas para las EDP lineales de segundo orden. Además, se muestran el tipo de condiciones adicionales que suelen acompañar a las EDP, de manera que los problemas resultantes estén razonablemente bien formulados. El método de separación de variables, basado en series de Fourier, se introduce en este capítulo para resolver la ecuación del calor en una varilla unidimensional y después se utiliza de nuevo en los capítulos dedicados a las ecuaciones de ondas, calor y Laplace. En el capítulo 5 hablamos sobre la ecuación de ondas en una dimensión espacial, discutiendo los métodos de separación de variables y de D'Alembert. Vemos la unicidad de solución a partir del método de la energía. En el capítulo 6 se estudia la ecuación del calor y se destaca el método del desarrollo en autofunciones para problemas no homogéneos. El capítulo 7 está dedicado a las ecuaciones de ondas y del calor bidimensionales. En el capítulo 8 analizamos la ecuación de Laplace y su variante no homogénea, la ecuación de Poisson, tanto en regiones rectangulares como circulares. Terminamos con el capítulo 9, donde se ve la transformada de Fourier y su aplicación a las EDP cuando los dominios de integración no están acotados.

Hemos hecho especial hincapié en los métodos de resolución y no hemos prestado atención a las soluciones, de manera que no se tratan las funciones especiales que aparecen en ciertos tipos de problemas, como son las funciones de Bessel, los polinomios de Legendre, etc.

Hay ejemplos hechos a lo largo de las notas que ilustran los conceptos y métodos estudiados y, al final de cada capítulo, se proponen ejercicios para que los estudiantes practiquen la resolución de problemas y con el ánimo de ayudarles a afianzar los conocimientos adquiridos a lo largo del capítulo. Casi todos los ejercicios que aparecen al final de cada capítulo, algunos

con pequeñas modificaciones o transformaciones, están sacados de las referencias que aparecen en la bibliografía.

Para seguir estas notas sin dificultad, solo son necesarios algunos conocimientos estándares de cálculo que incluyan EDO lineales de primer y segundo órdenes. No es esencial un conocimiento de la física involucrada para seguir los aspectos matemáticos en la resolución de estos problemas.

Al final encontramos la bibliografía básica utilizada para elaborar estas notas. Además de los numerosos textos que existen sobre EDP, también se encuentran múltiples referencias electrónicas en Internet.

*Logroño, La Rioja*  
*Septiembre 2021*

J. A. Ezquerro  
J. M. Gutiérrez  
V. Lanchares



# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares . . . . .	1
1.1.1. Cálculo de variaciones . . . . .	2
1.1.2. Ecuación de ondas . . . . .	5
1.1.3. Ecuación del calor . . . . .	9
1.1.4. Ecuaciones de Poisson y Laplace . . . . .	10
1.2. Sobre las soluciones de las EDP . . . . .	12
1.3. Ejercicios . . . . .	19
<b>2. EDP cuasilineales de primer orden</b>	<b>21</b>
2.1. Curvas características . . . . .	21
2.2. Problema de Cauchy . . . . .	28
2.3. Ejercicios . . . . .	36
<b>3. EDP generales de primer orden</b>	<b>39</b>
3.1. Curvas características . . . . .	39
3.2. Problema de Cauchy . . . . .	45
3.3. Integral completa . . . . .	49
3.3.1. Método de Lagrange-Charpit . . . . .	53
3.3.2. Ecuaciones en diferenciales totales . . . . .	56
3.3.3. Integral completa y el problema de Cauchy . . . . .	60
3.4. Ejercicios . . . . .	62
<b>4. EDP de segundo orden</b>	<b>63</b>
4.1. Operadores diferenciales y el principio de superposición . . . . .	63
4.2. Clasificación . . . . .	71
4.3. Formas canónicas . . . . .	72
4.4. Problema de Cauchy . . . . .	77
4.5. Condiciones asociadas . . . . .	81
4.6. Reducción de problemas a otros más sencillos . . . . .	84
4.7. Principio del método de separación de variables . . . . .	85
4.8. Series de Fourier . . . . .	91

4.9. Ejercicios . . . . .	102
<b>5. Ecuación de ondas</b>	<b>105</b>
5.1. Solución de Bernoulli . . . . .	106
5.2. Solución de D'Alembert . . . . .	107
5.3. Comparación entre las soluciones de Bernoulli y D'Alembert . . . . .	110
5.4. Solución mediante separación de variables . . . . .	111
5.5. Unicidad y la integral de energía . . . . .	115
5.6. Ejercicios . . . . .	117
<b>6. Ecuación del calor</b>	<b>121</b>
6.1. Solución mediante separación de variables . . . . .	121
6.2. Condiciones de contorno no homogéneas . . . . .	122
6.3. Otras condiciones de contorno . . . . .	125
6.4. Método de la energía y unicidad de solución . . . . .	129
6.5. Método del desarrollo en autofunciones . . . . .	130
6.6. Ejercicios . . . . .	134
<b>7. Ecuaciones de ondas y del calor bidimensionales</b>	<b>137</b>
7.1. Ecuación de ondas bidimensional . . . . .	137
7.2. Ecuación del calor bidimensional . . . . .	141
7.3. Ejercicios . . . . .	141
<b>8. Ecuación de Laplace</b>	<b>143</b>
8.1. Ecuación de Laplace en un rectángulo . . . . .	144
8.2. El principio del máximo/mínimo y unicidad de solución . . . . .	147
8.3. Ecuación de Poisson en un rectángulo . . . . .	147
8.4. Ecuación de Laplace en regiones circulares . . . . .	150
8.4.1. Ecuación de Laplace en un círculo . . . . .	152
8.4.2. Variación de la región y de las condiciones de contorno . . . . .	159
8.5. Ejercicios . . . . .	161
<b>9. Transformada de Fourier</b>	<b>163</b>
9.1. Transformada de Fourier . . . . .	163
9.2. Aplicaciones de la transformada de Fourier a las EDP . . . . .	169
9.3. Transformadas de Fourier en coseno y en seno . . . . .	176
9.4. Tablas de transformadas de Fourier . . . . .	180
9.5. Ejercicios . . . . .	185
<b>Epílogo</b>	<b>187</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>191</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Muchas formulaciones de modelos matemáticos utilizan derivadas parciales para representar cantidades físicas. Estas derivadas siempre involucran más de una variable independiente, generalmente variables espacio  $x, y, \dots$  y una variable tiempo  $t$ . Dichas formulaciones tienen una o más variables dependientes que son las funciones desconocidas de las variables independientes. Las ecuaciones resultantes se llaman *ecuaciones en derivadas parciales* (en adelante, EDP), que, junto con condiciones adicionales (iniciales y/o de contorno), representan fenómenos físicos y se conocen como problemas de contorno (con condiciones iniciales). Para entender el comportamiento físico de los modelos matemáticos es necesario tener algún conocimiento del carácter matemático, de las propiedades y de la solución de las EDP que rigen los modelos.

Las EDP aparecen frecuentemente en todas las áreas de la física y la ingeniería. Además, recientemente, hemos visto su habitual uso en áreas como la biología, la química, las ciencias de la computación (particularmente en relación con el procesamiento de imágenes y gráficos) y en la economía (finanzas).

Este primer capítulo introductorio lo dedicamos esencialmente a la naturaleza y generación de algunas EDP, que, desde un punto de vista práctico, surgen naturalmente como modelos matemáticos para varios problemas físicos.

### 1.1. Preliminares

Podemos decir que una EDP es una relación de la forma

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, z, z_{x_1}, z_{x_2}, \dots, z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2}, \dots) = 0,$$

donde  $F$  es una función suficientemente buena de sus argumentos,  $m > 1$  y  $z$  es una función de las variables independientes  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Es decir, es una relación de igualdad entre una función de varias variables, sus variables independientes y sus derivadas parciales hasta un cierto orden  $n$ , que recibe el nombre de orden de la ecuación.

Las EDP aparecen en diversos problemas reales relacionados con la modelización de problemas de interés, aunque también las encontramos dentro de diferentes ámbitos de las Matemáticas. Veamos algunos ejemplos en los que nos encontramos con este tipo de ecuaciones.

### 1.1.1. Cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones es una rama del análisis que permite abordar numerosos problemas de muy diferente índole y que ha servido para establecer los principios variacionales de la Mecánica, así como de base para los trabajos de Einstein sobre relatividad general y de Schrödinger sobre la mecánica cuántica.

Supongamos que tenemos dos puntos  $P$  y  $Q$  de coordenadas  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y consideremos la familia de funciones,  $y = y(x)$ , que pasan por los puntos  $P$  y  $Q$ . Es decir, se verifica  $y(x_1) = y_1$ ,  $y(x_2) = y_2$ . El problema que planteamos es el de encontrar la función de esta familia, si es que existe, que minimiza la integral

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx. \quad (1.1)$$

Aquí supondremos que tanto  $f(x, y, y')$  como  $y(x)$  son de clase  $\mathcal{C}^2$ , es decir, son continuas, con derivadas parciales continuas hasta segundo orden.

Sea  $\eta(x)$  una función de clase  $\mathcal{C}^2$  tal que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  y consideremos la familia uniparamétrica de funciones

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \alpha \eta(x), \quad (1.2)$$

donde  $y(x)$  es la función que minimiza (1.1). Notemos que todas las funciones de clase  $\mathcal{C}^2$  que pasan por los puntos  $P$  y  $Q$  se pueden expresar de la forma (1.2), para alguna función  $\eta(x)$  y para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La diferencia  $\tilde{y}(x) - y(x) = \alpha \eta(x)$  se denomina *variación*, y de aquí deriva el nombre de *cálculo de variaciones*.

Fijemos una función  $\eta(x)$  y consideremos la ecuación (1.1) como una función de  $\alpha$

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx.$$

Entonces,  $I(\alpha)$  será mínimo para  $\alpha = 0$  y, por tanto,  $I'(0) = 0$ . Ahora bien

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx.$$

Integrando por partes el segundo sumando de la integral resulta

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx,$$

y, teniendo en cuenta que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , resulta

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \eta(x) dx,$$

cualquiera que sea la función  $\eta(x)$ . De aquí se deduce

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, \quad (1.3)$$

que recibe el nombre de ecuación de Euler, que es una EDP<sup>1</sup>. No obstante esta ecuación se reduce a una ecuación diferencial ordinaria, como en los ejemplos siguientes.

**Ejemplo 1.1.** Determinése la ecuación de la curva que minimiza la distancia entre dos puntos dados  $P \equiv (x_1, y_1)$  y  $Q \equiv (x_2, y_2)$ .

Sea  $y(x)$  la función que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ , entonces la distancia a lo largo de la curva  $y = y(x)$  entre dichos puntos viene dada por la integral

$$d(P, Q) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación de Euler (1.3), se tiene que  $d(P, Q)$  es mínima cuando se verifica

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}} = 0,$$

es decir, cuando  $y''(x) = 0$ . De aquí se deduce que la solución es la recta que une los puntos  $P$  y  $Q$ . ◀

**Ejemplo 1.2.** Determinése la curva que pasa por los puntos  $P \equiv (x_1, y_1)$  y  $Q \equiv (x_2, y_2)$  situados en el primer cuadrante y que hace mínima el área de la superficie de revolución que se genera al girar alrededor del eje  $x$ .

El área que genera una curva  $y(x)$  al girar alrededor del eje  $x$  entre los puntos de coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  viene dada por la integral

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Por la ecuación de Euler, la condición necesaria para que la integral anterior sea mínima es

$$\frac{1 + y'(x)^2 - y(x)y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}} = 0.$$

Si tenemos en cuenta que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) = y'(x) \frac{1 + y'(x)^2 - y(x)y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}},$$

resulta

$$\frac{y(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 y'(x) = \sqrt{y(x)^2 - C_1^2}.$$

Separando las variables se tiene

$$x = C_1 \int \frac{dy}{\sqrt{y(x)^2 - C_1^2}} + C_2 = C_1 \ln \left( \frac{y(x) + \sqrt{y(x)^2 - C_1^2}}{C_1} \right) + C_2,$$

---

<sup>1</sup>Nótese que la ecuación de Euler da una condición necesaria para la existencia de mínimo, pero no suficiente.

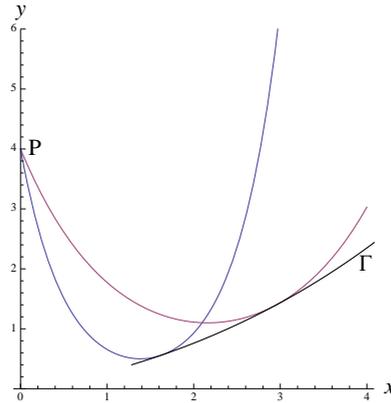


Figura 1.1: Diferentes curvas solución para la ecuación de Euler en el problema de minimizar el área de una superficie de revolución.

y, despejando  $y(x)$ ,

$$y(x) = C_1 \cosh\left(\frac{x - C_2}{C_1}\right).$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se determinan de manera que  $y(x)$  pase por los puntos  $P$  y  $Q$ , es decir,

$$y(x_1) = C_1 \cosh\left(\frac{x_1 - C_2}{C_1}\right) = y_1, \quad y(x_2) = C_1 \cosh\left(\frac{x_2 - C_2}{C_1}\right) = y_2.$$

Fijada la condición  $y(x_1) = y_1$ , se puede determinar  $C_2$  en términos de  $C_1$  y se obtiene una familia uniparamétrica de curvas que pasan por el punto  $P \equiv (x_1, y_1)$ . Esta familia aparece en la figura 1.1, donde se ve que tiene una envolvente, que es la curva  $\Gamma$  de la figura 1.1. De este modo, si el punto  $Q$  está por debajo de la curva  $\Gamma$  el problema no tiene solución. Por el contrario, si está por encima de  $\Gamma$  hay dos posibles soluciones, de las cuales la que da el área mínima es la superior. Por último, si  $Q$  se encuentra sobre  $\Gamma$ , habría una única solución a la ecuación de Euler, pero la superficie que se genera no es mínima. ◀

El método expuesto puede generalizarse cuando (1.1) es una integral múltiple, dando lugar a verdaderas EDP. Veamos el caso de una integral doble. En concreto, consideremos un dominio  $D$  del plano, delimitado por una curva cerrada  $C$ , y sea  $z = z(x, y)$  una función de clase  $\mathcal{C}^2$  en  $D$ , que toma valores prefijados sobre la curva  $C$ . El objetivo es encontrar la función que minimiza

$$I(z) = \int \int_D f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy. \quad (1.4)$$

Para ello procedemos como en el caso de una variable, introduciendo la familia uniparamétrica de funciones

$$\tilde{z}(x, y) = z(x, y) + \alpha \eta(x, y),$$

donde  $z(x, y)$  es la solución mínima y  $\eta(x, y)$  una función de clase  $\mathcal{C}^2$  en  $D$ , que se anula en  $C$ . Sustituyendo en (1.4)  $z$  por  $\tilde{z}$  se obtiene  $I$  como una función de  $\alpha$ . Como el mínimo se

alcanza cuando  $\alpha = 0$ , una condición necesaria es  $I'(0) = 0$ , esto es

$$\int \int_D \left( \frac{\partial f}{\partial z} \eta + \frac{\partial f}{\partial z_x} \eta_x + \frac{\partial f}{\partial z_y} \eta_y \right) dx dy = 0.$$

Podemos aplicar integración por partes en los dos últimos sumandos para transformar esta condición en

$$\int \int_D \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z_y} \right) \right) \eta dx dy.$$

Puesto que la función  $\eta$  es arbitraria resulta

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z_y} \right) = 0. \quad (1.5)$$

**Ejemplo 1.3.** Encuéntrese la ecuación de la superficie de menor área, limitada por una curva cerrada en el espacio.

Este problema se conoce como el *problema de las superficies mínimas* y fue propuesto por Euler. En nuestro caso, suponiendo que la curva cerrada se proyecte sobre el plano  $xy$  en otra curva cerrada  $C$  que delimita un dominio  $D$ , se trata de minimizar

$$\int \int_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy,$$

donde la función  $z(x, y)$  toma valores prefijados sobre la curva  $C$ . En este caso, la ecuación de Euler (1.5) resulta ser

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0,$$

que puede escribirse como

$$(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy} = 0,$$

que es una EDP de segundo orden. No es fácil probar que esta ecuación, con las condiciones prefijadas sobre  $C$ , tiene solución. La demostración rigurosa fue dada por T. Radó y J. Douglas, de manera independiente, en los años 1930 y 1931. Más información sobre este problema se puede encontrar en [1]. ◀

### 1.1.2. Ecuación de ondas

En algunos problemas clásicos de modelización nos encontramos con EDP. Algunas de estas ecuaciones sirven de modelo para un gran número de fenómenos que presentan comportamientos similares. Es lo que sucede con la ecuación de ondas. Aquí, presentaremos dos problemas que conducen a EDP de orden uno y orden dos, cuyas soluciones están relacionadas. El primero servirá para modelizar el flujo del tráfico en una carretera de un solo carril, mientras que el otro nos llevará a considerar el problema de la cuerda vibrante. En este último caso se trata de describir las pequeñas oscilaciones de una cuerda sujeta por sus extremos.

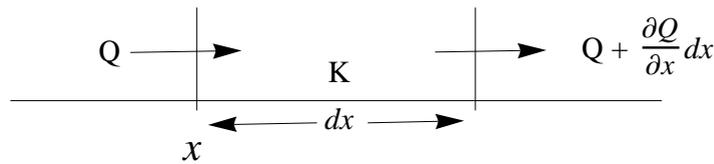


Figura 1.2: Esquema del flujo de tráfico en un tramo de carretera.

## Un modelo de tráfico

Uno de los problemas que se presenta en el estudio del tráfico es el determinar la capacidad de un determinado tramo de carretera. Es decir, determinar cuál es el número de vehículos por hora que soporta, su velocidad media y la separación entre ellos. El problema se puede abordar desde un punto de vista técnico, con tomas de datos y un posterior procesado de los mismos, o bien proponiendo modelos matemáticos. Aquí presentaremos uno que tiene analogía con el movimiento de un fluido a lo largo de un conducto, sustituyendo el flujo discreto de los vehículos por un flujo continuo. Es el denominado modelo de Lighthill-Whithman-Richards [15, 24].

Consideremos una carretera con un solo carril de circulación y sobre el mismo un pequeño tramo de longitud  $dx$ . La tasa o cantidad de vehículos que entran en el tramo, viniendo desde la parte izquierda (véase la figura 1.2), por unidad de tiempo la denominaremos  $Q$  (vehículos/hora). Decimos que  $Q$  es el flujo y, en general, variará con el tiempo,  $t$ , y con la posición,  $x$ . El flujo en la parte derecha del tramo considerado, teniendo en cuenta que  $dx$  es pequeño, puede aproximarse mediante un desarrollo en serie de Taylor hasta primer orden por  $Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$ .

Tengamos en cuenta ahora la densidad del tráfico, es decir el número de vehículos por unidad de longitud y designemos a esta cantidad por  $K$  (vehículos/kilómetro). En general, esta cantidad también depende de la posición y del tiempo. En cualquier caso, en un instante  $t$ , la cantidad de vehículos en un tramo de longitud  $dx$  vendrá dada por  $K dx$ . Por tanto, la tasa de cambio del número de vehículos en el tramo de longitud  $dx$  resulta ser  $\frac{\partial K}{\partial t} dx$ .

La tasa de cambio del número de vehículos en el tramo de longitud  $dx$  puede expresarse en términos de  $Q$ . Esta no es otra cosa que la diferencia entre los vehículos que entran y los que salen. Por tanto debe cumplirse

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial t} = 0, \quad (1.6)$$

que es la denominada *ecuación de continuidad*, que es una EDP de primer orden.

Es conveniente introducir una nueva variable en la ecuación (1.6) para relacionar  $K$  y  $Q$ . De este modo, se introduce  $U = Q/K$ , como la velocidad media de los vehículos por el carril de circulación<sup>2</sup>. Ahora bien,  $U$  puede relacionarse con la densidad del tráfico mediante consideraciones más o menos razonables. De hecho,  $U$  será mayor cuando la densidad del

<sup>2</sup>Nótese que  $U$  tiene unidades de velocidad, ya que  $Q$  se mide en vehículos/hora y  $K$  en vehículos/kilómetro.

tráfico sea menor y viceversa. Así, podemos usar una relación lineal sencilla entre  $U$  y  $K$  dada por

$$U = U_* \left(1 - \frac{K}{K_*}\right), \quad (1.7)$$

donde  $U_*$  es la velocidad máxima (que puede ser igual al límite legal para la carretera considerada) y  $K_*$  es la densidad crítica o de atasco. Por tanto, si  $K = 0$ , la velocidad será la máxima permitida, mientras que si  $K = K_*$ , la velocidad será igual a 0. Es decir, en este caso los vehículos permanecerán parados o en situación de atasco. Teniendo en cuenta que  $Q = UK$ , a partir de (1.7), resulta

$$Q = KU_* \left(1 - \frac{K}{K_*}\right), \quad (1.8)$$

de donde se deduce que el flujo es 0 si  $K = 0$  o  $K = K_*$ .

Reescribiendo la ecuación (1.6) como

$$\frac{\partial Q}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial t} = 0,$$

y llamando  $C$  a  $\partial Q/\partial K$ , se obtiene la denominada *ecuación del transporte*

$$\frac{\partial K}{\partial t} + C \frac{\partial K}{\partial x} = 0, \quad (1.9)$$

donde  $C$  representa la velocidad de una onda cinemática que se mueve a lo largo del flujo de vehículos. Bajo la suposición de que  $K$  y  $Q$  estén relacionados a través de (1.8), resulta

$$C = U_* \left(1 - \frac{2K}{K_*}\right).$$

La solución general de (1.9) es de la forma

$$K = f(x - Ct),$$

donde  $f$  es una función que viene determinada por las condiciones iniciales del tráfico.

## El problema de la cuerda vibrante

El problema de la cuerda vibrante es un problema clásico, cuya solución, dada por D'Alembert en 1747, condujo a la primera EDP de la historia. Supongamos que tenemos una cuerda flexible, tensada y fija en sus extremos, como puede ser la cuerda de una guitarra o la de un violín, que supondremos se extiende a lo largo del eje  $x$  entre los puntos  $x = 0$  y  $x = \ell$ . Tiramos de la cuerda hacia arriba, de manera que su nueva forma venga dada por una función  $f(x)$ . El objetivo es describir el movimiento de la cuerda cuando se suelta de su posición inicial dada por la curva  $f(x)$ .

Haremos varias suposiciones que simplificarán el problema. En primer lugar, supondremos que cada punto de la cuerda tiene coordenada  $x$  constante, es decir el movimiento solo tiene lugar en la dirección vertical. Por tanto, la coordenada  $y$  es función de la posición  $x$  y el tiempo

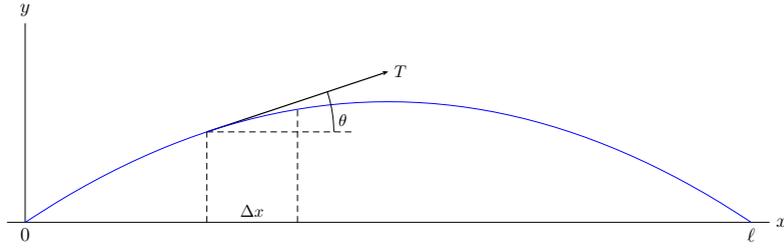


Figura 1.3: Elementos principales en el problema de la cuerda vibrante.

$t$ , es decir, el movimiento de la cuerda viene dado por una función  $y(x, t)$ . De este modo,  $\frac{\partial y}{\partial t}$  y  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  representan la velocidad y la aceleración en un punto de la cuerda. Consideremos el movimiento de una pequeña porción de cuerda de longitud  $\Delta x$ . Si la densidad de masa de la cuerda es constante e igual a  $\rho$ , la masa total del elemento de cuerda considerado será  $\rho\Delta x$ . Aplicando la segunda ley de Newton obtenemos

$$\rho\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F, \quad (1.10)$$

siendo  $F$  la fuerza que actúa en la dirección vertical. Despreciando fuerzas como la gravedad o el rozamiento, la única fuerza que actúa sobre el elemento de cuerda es la tensión, que va dirigida en la dirección tangente a la cuerda, como se ve en la figura 1.3. La componente vertical neta de la fuerza que actúa sobre el elemento de cuerda es

$$F = \Delta(T \operatorname{sen} \theta),$$

por lo que la ecuación (1.10) queda como

$$\Delta(T \operatorname{sen} \theta) = \rho\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Supongamos que la amplitud de las vibraciones no es muy grande, de manera que el ángulo  $\theta$  es pequeño. Bajo esta suposición se tiene que  $\operatorname{sen} \theta \approx \tan \theta$ , pero  $\tan \theta = \partial y / \partial x$ , por lo que podemos escribir

$$\Delta \left( T \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \rho\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Haciendo tender  $\Delta x$  a 0 se llega a la *ecuación de ondas*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (1.11)$$

donde  $c^2 = T/\rho$ , siempre que la tensión sea constante a lo largo de la cuerda.

La ecuación de ondas puede deducirse, también, a partir de principios variacionales, como es el principio de Hamilton o de mínima acción. Para ello debemos obtener la energía total del sistema, que vendrá dada por las energías cinética y potencial. La energía cinética, para un elemento de masa  $\rho dx$ , será

$$\frac{1}{2} \rho y_t^2 dx,$$

siendo  $y_t = \frac{\partial y}{\partial t}$  la velocidad del elemento de masa considerado. Por tanto, la energía cinética total de la cuerda será

$$E = \frac{1}{2} \rho \int_0^\ell y_t^2 dx.$$

Por otra parte, la energía potencial se puede calcular a partir del trabajo realizado por la tensión  $T$ . Aquí, tendremos en cuenta que cuando se desplaza la cuerda, un elemento de longitud  $dx$  se estira hasta uno de longitud

$$ds = \sqrt{1 + y_x^2} dx.$$

Si aproximamos  $ds$  por el desarrollo en serie de Taylor hasta orden uno, se tiene que

$$ds \approx \left(1 + \frac{1}{2} y_x^2\right) dx,$$

por lo que el trabajo realizado por la tensión sobre el elemento de cuerda de longitud  $dx$  es

$$T(ds - dx) = \frac{1}{2} T y_x^2 dx.$$

Finalmente, la energía potencial de la cuerda vendrá dada por

$$V = \frac{1}{2} T \int_0^\ell y_x^2 dx.$$

Con la energía cinética y potencial se obtiene el *lagrangiano*, que viene dado por

$$L = E - V = \frac{1}{2} \int_0^\ell (\rho y_t^2 - T y_x^2) dx.$$

Por el principio de Hamilton, la acción, dada por la integral doble

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell (\rho y_t^2 - T y_x^2) dx dt,$$

debe ser mínima. Usando (1.5) se obtiene la ecuación de ondas dada por (1.11).

### 1.1.3. Ecuación del calor

Otro de los problemas clásicos que dio origen al estudio de EDP es el de la difusión del calor, que fue tratado por Fourier a principios del siglo XIX en su libro *Theorie de la propagation de la chaleur dans les solides*. Supongamos que tenemos una varilla de metal, u otro material, donde la distribución de temperatura no es uniforme. Entonces, el calor, o energía térmica, se transfiere de las zonas de mayor temperatura a las zonas con menor temperatura. Tres principios físicos nos ayudarán a deducir la EDP que regula este proceso de transferencia de calor.

1. El calor o energía térmica de un cuerpo homogéneo es proporcional a su masa y temperatura. Es decir,

$$E = c m u,$$

donde  $E$  es la energía térmica,  $m$  la masa,  $u$  la temperatura y  $c$  el calor específico, que depende del tipo de material del que esté hecho el cuerpo. En realidad,  $c$  es la energía necesaria para elevar la temperatura de una unidad de masa, una unidad de temperatura.

2. La ley de Fourier que dice que la tasa de transferencia de calor, por unidad de área, es proporcional y de sentido contrario al gradiente de la temperatura

$$\frac{\text{tasa de transferencia de calor}}{\text{área}} = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x},$$

donde  $K_0$  es la conductividad térmica, que depende de la estructura microscópica del material.

3. La ley de conservación de la energía.

Consideremos una varilla homogénea de longitud  $l$  con temperatura no uniforme, que supondremos situada sobre el eje  $x$ , con sus extremos en  $x = 0$  y  $x = l$ . Entenderemos por homogénea que tanto su densidad  $\rho$ , como su calor específico  $c$ , como su conductividad térmica  $K_0$ , así como su sección transversal  $A$ , son constantes a lo largo de la varilla en todo instante de tiempo. Supongamos que la varilla está aislada y que solo los extremos están expuestos a cambios térmicos desde el exterior. Bajo estas condiciones tomamos una sección de la varilla de longitud  $dx$  entre los puntos  $x$  y  $x + dx$ . Supondremos que el grosor de la varilla es tan fino que la temperatura es función de  $x$  y  $t$ , es decir  $u = u(x, t)$ . Entonces, por el primero de los principios físicos considerados, tenemos

$$E_x = c \rho A dx u(x, t).$$

Por otra parte, por la ley de conservación de la energía, se tiene que el cambio de la energía térmica, en la sección considerada, en un intervalo de tiempo  $dt$  debe ser igual a la diferencia entre el flujo de calor en los extremos de la sección. Aplicando la ley de Fourier se obtiene la ecuación

$$c\rho A dx u(x, t + dt) - c\rho A dx u(x, t) = A dt \left( K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - A dt \left( K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x.$$

Tomado límites cuando  $dx$  y  $dt$  tienden a 0, se llega a la *ecuación del calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde  $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$  recibe el nombre de difusividad térmica.

#### 1.1.4. Ecuaciones de Poisson y Laplace

El advenimiento de la teoría física de la gravitación, así como de la electricidad y el magnetismo, derivó en el estudio de potenciales, origen de las denominadas ecuaciones de Poisson y Laplace. No obstante, estas ecuaciones aparecen en la descripción de otros fenómenos, como, por ejemplo, en las soluciones estacionarias de la ecuación del calor.

Las ecuaciones de Poisson y Laplace son EDP que aparecen en diversos problemas físicos, en general relacionados con procesos estacionarios. Aquí veremos su deducción a partir de la teoría del potencial. En concreto, trataremos de determinar la fuerza  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  generada por la

atracción gravitatoria de una distribución de masas  $\rho(\mathbf{x})$  sobre una partícula de masa unidad situada en una posición  $\mathbf{x}$ .

De acuerdo con la ley de gravitación universal de Newton, la fuerza  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  puede obtenerse como la suma de pequeñas contribuciones de la forma

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}) = G \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} dm(\mathbf{x}') = G \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}',$$

ejercidas por cada pequeño elemento de volumen  $d^3\mathbf{x}'$  situado en la posición  $\mathbf{x}'$ . De este modo

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'. \quad (1.12)$$

Si definimos el *potencial gravitatorio*  $\Phi(\mathbf{x})$  como

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3\mathbf{x}'$$

y tenemos en cuenta que

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \right) = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3},$$

entonces se tiene que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3\mathbf{x}' = -\nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}).$$

El potencial es útil porque, siendo un campo escalar, es más fácil de visualizar que un campo vectorial de fuerzas. Además, en ocasiones, la mejor forma de obtener la fuerza  $\mathbf{F}$  es a través de su potencial.

Calculemos ahora la divergencia de la fuerza  $\mathbf{F}$ , dada por la ecuación (1.12), de donde resulta

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = G \int \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'. \quad (1.13)$$

Ahora bien, se tiene que

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = -\frac{3}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} + \frac{3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^5}. \quad (1.14)$$

Por tanto, si  $\mathbf{x}' - \mathbf{x} \neq 0$ , el segundo sumando de (1.14) es igual que el primero, pero de signo contrario, por lo que

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = 0, \quad (\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}).$$

Así pues, cualquier contribución al valor de la integral que aparece en (1.13) debe provenir del punto  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ , por lo que el volumen de integración puede restringirse a una pequeña esfera de radio  $h$  centrada en dicho punto. Para dicha esfera podemos suponer que la densidad es constante, por lo que

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq h} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) d^3\mathbf{x}'.$$

Debido a la simetría de la función del integrando, podemos escribir

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|\leq h} \nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) d^3\mathbf{x}',$$

y, aplicando el teorema de la divergencia, podemos transformar la integral de volumen en otra de superficie, quedando

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|=h} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot d^2S'.$$

Sobre la superficie de la esfera de radio  $h$  y tomando coordenadas esféricas se tiene que

$$d^2S' = (\mathbf{x}' - \mathbf{x})h \cos \theta d\theta d\phi,$$

siendo  $\theta$  el ángulo de latitud que varía entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$  y  $\phi$  el ángulo de longitud, que varía entre 0 y  $2\pi$ . Por tanto,

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta d\phi = -4\pi G\rho(\mathbf{x}).$$

Si sustituimos  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  por  $\nabla\Phi$  se obtiene la *ecuación de Poisson*, que relaciona el potencial con la densidad de masas

$$\nabla^2\Phi = \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -4\pi G\rho(x, y, z).$$

En el caso especial en que  $\rho = 0$  se tiene la *ecuación de Laplace*

$$\Delta\Phi = 0.$$

## 1.2. Sobre las soluciones de las EDP

Antes de hablar de las soluciones de una EDP, vamos a introducir algunas ecuaciones que, por su naturaleza, presentan buenas propiedades y son más fáciles de analizar. Se trata de las ecuaciones lineales y cuasilineales.

**Definición 1.4.** Una EDP se dice que es lineal si es lineal en la función y sus derivadas parciales, con coeficientes que son funciones de las variables independientes.

**Ejemplo 1.5.** La forma más general de una ecuación lineal de primer orden en dos variables es

$$P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + R(x, y)z + S(x, y) = 0,$$

donde  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  son funciones al menos de clase  $\mathcal{C}^1$  y  $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$ . ◀

**Definición 1.6.** Una EDP de orden  $n$  se dice que es cuasilineal si es lineal en las derivadas parciales de orden  $n$ , y los coeficientes de estas derivadas son funciones de las variables independientes, de la función y de las derivadas parciales hasta orden  $n - 1$ .

**Ejemplo 1.7.** La forma más general de una ecuación cuasilineal de primer orden en dos variables es

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z),$$

donde  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son funciones al menos de clase  $\mathcal{C}^1$  y  $P^2(x, y, z) + Q^2(x, y, z) \neq 0$ . ◀

Una parte importante del curso está dedicada al estudio de este tipo de ecuaciones, aunque también abordamos el estudio de la ecuación general de primer orden. En concreto, trataremos de encontrar soluciones, pero primero tendremos que decir qué entendemos por solución y de ahí la siguiente definición.

**Definición 1.8.** Decimos que  $z = \phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$  es una solución de una EDP de orden  $n$  si  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$  es de clase  $\mathcal{C}^n$  en un dominio abierto, conexo y no vacío de  $\mathbb{R}^m$  y satisface la EDP en dicho dominio.

**Ejemplo 1.9.** Para ver que la función  $z = -x \cos y$  es una solución de la ecuación lineal de primer orden

$$z_x \cos y - z_y + \cos^2 y + x \operatorname{sen} y = 0, \quad (1.15)$$

basta sustituir  $z$  por  $-x \cos y$  en la ecuación para verificar que se tiene una identidad. Por otra parte, es claro que la función solución es al menos  $\mathcal{C}^1$  en todo  $\mathbb{R}^2$ . ◀

No obstante, en el estudio de las soluciones de una EDP, no solo estaremos interesados en una solución particular, sino en el conjunto de todas las posibles soluciones. Es decir, trataremos de encontrar la forma más general de la solución, de manera que a partir de la misma se puedan caracterizar soluciones concretas, una vez se impongan condiciones sobre la solución o sobre la propia ecuación. Así, es fácil ver que a partir de la solución particular dada para la ecuación del ejemplo 1.9 se pueden generar nuevas soluciones, añadiendo una constante aditiva. En este sentido, las funciones de la forma

$$z(x, y) = -x \cos y + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (1.16)$$

son soluciones de la ecuación. ¿Se trata de la solución general? Si así fuera, habría una gran similitud con las ecuaciones diferenciales ordinarias, donde la solución general de una ecuación de orden  $n$  depende de  $n$  constantes arbitrarias. Sin embargo, esto no es así en las EDP y vamos a ver que podemos encontrar nuevas soluciones que no son de la forma (1.16). Para ello, tendremos en cuenta que la ecuación del ejemplo es lineal y podemos aplicar una propiedad muy útil, como es un principio de superposición. Así, si a una solución de la ecuación (1.15) le añadimos cualquier solución de la ecuación homogénea

$$z_x \cos y - z_y = 0, \quad (1.17)$$

obtenemos una nueva solución de (1.15).

Con el fin de obtener soluciones de (1.17) vamos a usar el *método de separación de variables*. Consiste en buscar soluciones en las que la dependencia de las variables independientes viene dada a través de una función para cada una de ellas. Según esto, se pueden buscar soluciones que sean de la forma

$$z(x, y) = f(x) + g(y) \quad \text{o} \quad z(x, y) = f(x)g(y).$$

**Ejemplo 1.10.** Encuéntrese una solución de la forma  $z(x, y) = f(x) + g(y)$  para la ecuación (1.17)<sup>3</sup>.

Teniendo en cuenta la forma de  $z(x, y)$ , se tiene

$$z_x = f'(x), \quad z_y = g'(y),$$

y sustituyendo en la ecuación resulta

$$f'(x) \cos y - g'(y) = 0. \quad (1.18)$$

Manipulando la expresión anterior es posible *separar* las variables, de manera que en un lado de la igualdad tengamos una función de  $x$  y en el otro lado una función de  $y$ . En efecto, (1.18) se puede escribir como

$$f'(x) = \frac{g'(y)}{\cos y}. \quad (1.19)$$

Puesto que se trata de una identidad entre dos expresiones, una que depende de  $x$  y otra que depende de  $y$ , esto solo es posible si se trata de una constante. Sea dicha constante  $\alpha$ , que llamaremos *constante de separación*, entonces (1.19) da lugar a dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$f'(x) = \alpha, \quad \frac{g'(y)}{\cos y} = \alpha,$$

que, una vez resueltas, nos dan las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ . En este caso resulta

$$f(x) = \alpha x + \beta_1, \quad g(y) = \alpha \operatorname{sen} y + \beta_2,$$

donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son constantes arbitrarias. Si  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ , entonces

$$z_h(x, y) = \alpha(x + \operatorname{sen} y) + \beta$$

es solución de (1.17). Además, en consecuencia,

$$z(x, y) = \alpha(x + \operatorname{sen} y) + \beta - x \cos y$$

es solución de (1.15), cualesquiera que sean las constantes  $\alpha$  y  $\beta$ . ◀

La solución obtenida es más general que (1.16), pero todavía no es la solución general. Para llegar a ella, hacemos uso de un resultado sobre dependencia funcional entre dos funciones dadas de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ . En concreto, sea

$$J = \frac{D(u(x, y), v(x, y))}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

el jacobiano de las funciones  $u$  y  $v$  respecto a  $x, y$ , entonces

**Teorema 1.11.** ([10]) *Dos funciones  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  y de clase  $\mathcal{C}^1$  son funcionalmente dependientes, es decir existe una función  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u(x, y) = \omega(v(x, y))$ , si y solo si  $J = 0$ .*

---

<sup>3</sup>Puede obtenerse también una solución de la forma  $z(x, y) = f(x)g(y)$ .

A partir del teorema anterior podemos encontrar la solución general de la EDP homogénea (1.17). En efecto, observemos que (1.17) puede escribirse como

$$z_x \cos y - z_y = \begin{vmatrix} z_x & z_y \\ 1 & \cos y \end{vmatrix} = 0.$$

Sea  $u(x, y)$  una función tal que  $u_x = 1$  y  $u_y = \cos y$ , entonces, por el teorema 1.11, las funciones  $z$  y  $u$  son funcionalmente dependientes. En consecuencia, se tiene

$$z(x, y) = \omega(u(x, y)),$$

donde  $\omega$  es una función arbitraria. Ahora bien, la función  $u(x, y)$  es fácil de encontrar a partir de

$$u_x = 1, \quad u_y = \cos y.$$

Basta con integrar las ecuaciones para obtener  $u(x, y) = x + \sin y$ . Por tanto, la solución general de (1.15) es

$$z(x, y) = \omega(x + \sin y) - x \cos y,$$

con  $\omega$  una función arbitraria<sup>4</sup>.

El ejemplo anterior nos hace pensar que en la resolución de EDP nos encontraremos con elementos arbitrarios que son funciones, lo que se pone de manifiesto de nuevo en los siguientes ejemplos sencillos.

**Ejemplo 1.12.** Encuéntrese la solución general de cada una de las siguientes EDP:  $u_y(x, y) = 0$ ,  $v_z(x, y, z) = 0$  y  $w_{xy}(x, y) = 0$ .

La solución de la primera ecuación es cualquier expresión que no dependa de  $y$ , por tanto

$$u(x, y) = \omega(x),$$

donde  $\omega$  es una función arbitraria de clase  $\mathcal{C}^1$ .

Análogamente, la solución de la segunda ecuación es una expresión que no depende de  $z$ , por tanto

$$v(x, y, z) = \omega(x, y),$$

con  $\omega$  una función arbitraria de clase  $\mathcal{C}^1$ .

Por último, podemos encontrar la solución de la tercera ecuación por integración reiterada. En este sentido, sea  $W(x, y) = w_x(x, y)$ , entonces la tercera ecuación puede escribirse como

$$w_{xy}(x, y) = W_y(x, y) = 0,$$

por lo que  $W(x, y) = f(x)$ . Así, se tiene

$$w_x(x, y) = f(x) \quad \Rightarrow \quad w(x, y) = F(x) + G(y),$$

donde la función  $F(x)$  es tal que  $F'(x) = f(x)$  y  $F$  y  $G$  son funciones arbitrarias al menos de clase  $\mathcal{C}^1$ . ◀

---

<sup>4</sup>Nótese que podemos asegurar que es la solución general, pues si  $z_1$  y  $z_2$  son soluciones de (1.15), entonces  $z_1 - z_2$  es solución de (1.17). Es decir, dos soluciones de una ecuación lineal se diferencian en una función que es solución de la correspondiente ecuación homogénea.

De los ejemplos anteriores parece deducirse que la solución general de una EDP en  $m$  variables de orden  $n$  depende de  $n$  funciones arbitrarias de  $\mathbb{R}^{m-1}$  en  $\mathbb{R}$ . Esto es así en general y guarda un cierto paralelismo con las ecuaciones diferenciales ordinarias, donde la solución general de una ecuación de orden  $n$  depende de  $n$  constantes arbitrarias, mientras en las EDP los elementos arbitrarios son funciones. En las ecuaciones diferenciales ordinarias (abreviadamente, EDO), además, dada una familia  $n$ -paramétrica de funciones

$$y = \phi(x; c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (1.20)$$

existe una ecuación diferencial de orden  $n$  cuya solución general está dada por (1.20). Esta ecuación se obtiene eliminando las  $n$  constantes  $c_i$  del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= \phi(x; c_1, c_2, \dots, c_n), \\ y' &= \phi'(x; c_1, c_2, \dots, c_n), \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \phi^{(n)}(x; c_1, c_2, \dots, c_n). \end{aligned}$$

Podemos hacernos una pregunta similar para las EDP, tratando de ver si es posible construir una EDP de orden  $n$  en  $m$  variables independientes a partir de una familia de funciones que depende de  $n$  funciones arbitrarias en  $m - 1$  variables. Por simplificar, tomemos el caso de una familia de funciones de la forma

$$z = F(x, y; \omega(g(x, y))), \quad (1.21)$$

donde  $F$  y  $g$  son funciones conocidas de sus argumentos y  $\omega$  es una función arbitraria. La expresión (1.21) puede representar cualquier solución de una ecuación de primer orden en dos variables. No obstante, veamos qué tipo de EDP se obtiene eliminando el elemento arbitrario  $\omega$ . Para ello, derivamos (1.21) respecto a  $x$  y respecto a  $y$ , de donde se obtiene

$$z_x = F_x + F_\omega \omega' g_x, \quad z_y = F_y + F_\omega \omega' g_y.$$

Eliminando  $\omega'$  se obtiene la EDP

$$z_x g_y - z_y g_x = F_x g_y - F_y g_x.$$

Es posible que  $\omega$  aparezca todavía en  $F_x$  y  $F_y$ . En este caso, a partir de (1.21) se puede obtener  $\omega$  en función de  $x, y, z$ . Sea como fuere, la EDP a la que hemos llegado no es una ecuación general de primer orden. Se trata de una ecuación cuasilineal de primer orden. En consecuencia, podemos deducir que la expresión (1.21) no es lo suficientemente general como para dar lugar a cualquier EDP de primer orden.

Podemos encontrar muchos ejemplos de EDP que se deducen de familias de superficies. En el que se expone a continuación se determina la EDP asociada a las superficies generadas por la revolución de una curva alrededor del eje  $z$ .

**Ejemplo 1.13.** Encuéntrese la EDP asociada a las superficies de revolución de eje  $z$ .

Sabemos que al cortar una superficie de la familia por un plano perpendicular al eje  $z$  se obtiene una circunferencia de un cierto radio  $R$

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

donde el valor de  $R$  va a depender de  $z$  y de la curva que define la superficie de revolución. Así, podemos escribir

$$x^2 + y^2 = f(z),$$

donde  $f$  es una función arbitraria no negativa. Si suponemos que  $f$  es inyectiva y denotamos su inversa por  $\phi$ , se tiene que

$$z = \phi(x^2 + y^2), \quad (1.22)$$

donde también  $\phi$  es arbitraria. Ahora, podemos eliminar la función arbitraria  $\phi$  derivando parcialmente la ecuación de la familia respecto a  $x$  e  $y$ .

$$z_x = 2x\phi'(x^2 + y^2), \quad z_y = 2y\phi'(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad yz_x - xz_y = 0.$$

Podemos ver que la solución general de esta EDP es justamente la dada por (1.22). Basta con aplicar el teorema 1.11. En efecto, hay una dependencia funcional entre  $z$  y una función  $g(x, y)$  que verifica

$$g_x = x, \quad g_y = y.$$

Integrando la primera ecuación resulta  $g(x, y) = \frac{x^2}{2} + h(y)$ . Derivando esta expresión respecto a  $y$  e igualando a la segunda de las ecuaciones se tiene  $g(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$  y, por tanto

$$z = \phi(x^2 + y^2),$$

que es la ecuación de la familia. ◀

En general la ecuación de una familia de superficies viene dada como

$$F(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)) = 0, \quad (1.23)$$

donde  $F$  es una función arbitraria de las dos funciones conocidas  $u_1$  y  $u_2$ . Para hallar la EDP asociada a la familia debemos eliminar  $F$  a partir de las derivadas de la ecuación de la familia respecto a  $x$  e  $y$ . Haciendo esto resulta el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (u_{1x} + u_{1z}z_x)F_1 + (u_{2x} + u_{2z}z_x)F_2 &= 0, \\ (u_{1y} + u_{1z}z_y)F_1 + (u_{2y} + u_{2z}z_y)F_2 &= 0, \end{aligned}$$

que es lineal y homogéneo en las incógnitas  $F_1$  y  $F_2$ , las derivadas parciales de  $F$  respecto a su primer y segundo argumento, respectivamente. Como  $F$  es arbitraria, existen soluciones no triviales del sistema, por lo que el determinante de la matriz de coeficientes debe anularse. Así pues, debe ser

$$\begin{vmatrix} u_{1x} + u_{1z}z_x & u_{2x} + u_{2z}z_x \\ u_{1y} + u_{1z}z_y & u_{2y} + u_{2z}z_y \end{vmatrix} = 0,$$

de donde se sigue la EDP

$$(u_{2y}u_{1z} - u_{1y}u_{2z})z_x + (u_{1x}u_{2z} - u_{2x}u_{1z})z_y = u_{2x}u_{1y} - u_{1x}u_{2y}.$$

**Ejemplo 1.14.** Determinése la EDP asociada a la familia de superficies formada por rectas que pasan por el origen.

Una recta que pasa por el origen de coordenadas es de la forma

$$\frac{x}{C_1} = \frac{y}{C_2} = \frac{z}{1},$$

donde  $(C_1, C_2, 1)$  es el vector director de la recta<sup>5</sup>. Por tanto, cualquier superficie formada por estas rectas es una función arbitraria de los dos parámetros  $C_1$  y  $C_2$ . Ahora bien,

$$C_1 = \frac{x}{z}, \quad C_2 = \frac{y}{z},$$

por lo que la ecuación de la familia es  $F(x/z, y/z) = 0$ . Derivando parcialmente respecto a  $x$  e  $y$ , resulta

$$\frac{z - xz_x}{z^2} F_1 - \frac{yz_x}{z^2} F_2 = 0, \quad -\frac{xz_y}{z^2} F_1 + \frac{z - yz_y}{z^2} F_2 = 0,$$

que es un sistema homogéneo en  $F_1$  y  $F_2$  con solución no trivial, por lo que

$$\begin{vmatrix} z - xz_x & -yz_x \\ -xz_y & z - yz_y \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad xz_x + yz_y = z,$$

que es la EDP de la familia. ◀

Como vemos, las expresiones correspondientes a familias de superficies dadas por (1.21) o por (1.23) dan lugar a EDP cuasilineales, por lo que la solución general de cualquier ecuación de primer orden tiene que tener una forma diferente. Así, sea  $z = F(x, y; \alpha, \beta)$ , con  $\alpha$  y  $\beta$  parámetros reales y  $F$  una función conocida de sus argumentos. Entonces, eliminando  $\alpha$  y  $\beta$  de las ecuaciones

$$z = F(x, y; \alpha, \beta), \quad z_x = F_x(x, y; \alpha, \beta), \quad z_y = F_y(x, y; \alpha, \beta),$$

se obtiene una EDP de primer orden que no tiene por qué ser cuasilineal. La pregunta que se suscita ahora es: ¿dónde está la función arbitraria que aparece al resolver una EDP de primer orden? La respuesta no es sencilla y veremos que esta función aparece de una manera rebuscada. En concreto, esta función aparece cuando uno de los parámetros, por ejemplo  $\beta$ , se toma como una función arbitraria del otro. Así se llega a una expresión de la forma

$$z = F(x, y; \alpha, \omega(\alpha)),$$

y, eliminando  $\alpha$  de las ecuaciones

$$z = F(x, y; \alpha, \omega(\alpha)), \quad \frac{dF(x, y; \alpha, \omega(\alpha))}{d\alpha} = 0,$$

se obtiene la expresión correspondiente a la solución general de una EDP de primer orden cualquiera, que depende de una función arbitraria  $\omega$ . La expresión de partida

$$z = F(x, y; \alpha, \beta)$$

se denomina *integral completa* y es la ecuación a la que se puede llegar a partir de la EDP.

<sup>5</sup>La suposición de que la tercera componente del vector es no nula no resta generalidad a la ecuación.

**Ejemplo 1.15.** Determinése la EDP correspondiente a la familia de esferas de radio uno, cuyos centros se encuentran sobre el plano  $xy$ .

Al estar el centro de la esfera sobre el plano  $xy$ , éste será un punto de coordenadas  $(\alpha, \beta, 0)$ , con  $\alpha$  y  $\beta$  números reales arbitrarios. Por tanto, la ecuación de la familia será

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = 1.$$

Para obtener la EDP asociada, eliminamos  $\alpha$  y  $\beta$  de la ecuación de la familia y de las dos ecuaciones que resultan de derivar parcialmente respecto a  $x$  y respecto a  $y$

$$(x - \alpha) + zz_x = 0, \quad (y - \beta) + zz_y = 0.$$

Entonces,

$$x - \alpha = -zz_x, \quad y - \beta = zz_y.$$

Sustituyendo en la ecuación de la familia se llega a la EDP

$$z^2(z_x^2 + z_y^2 + 1) = 1,$$

que, como se ve, no es ni lineal ni cuasilineal. ◀

### 1.3. Ejercicios

1. Compruébese que  $z_1(x, y) = e^y(\sin 2x + \cos 2x)$  y  $z_2(x, y) = e^{-y}(\sin 2x + \cos 2x)$  satisfacen la EDP

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

2. Sea la EDP  $z_x - z_y = 0$ . Realícese el cambio de variable

$$\varphi = x - y, \quad \eta = x + y$$

y compruébese que la EDP en las nuevas variables es  $z_\varphi = 0$ .

3. Dada la EDP lineal de primer orden  $\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ , con  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ , encuéntrese una transformación lineal

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \eta \\ \varphi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que convierta la EDP en  $\delta\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ , con  $\delta \neq 0$ . A continuación, hállese la solución general de la EDP.

4. Usando un cambio de variable apropiado, hállese la solución general de la EDP

$$\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

5. Encuéntrese la EDP cuya solución general es  $z = \phi(x + y)$ , eliminando la función arbitraria  $\phi(x + y)$ .

6. Determínese la EDP de primer orden cuya solución general es

$$z = (x + y)f(y^2 - x^2) + 1.$$

7. Hállese la EDP que se deduce de  $F(z/x^3, y/x) = 0$ , donde  $F$  es una función arbitraria de sus argumentos.

8. Encuéntrese la EDP que se deduce de  $F(x + y + z, x^2 + y^2 - z^2) = 0$ .

9. Hállese la EDP correspondiente a la familia de conos de vértice  $A = (a, b, c)$ , que son de la forma

$$F\left(\frac{x - a}{z - c}, \frac{y - b}{z - c}\right) = 0.$$

10. Encuéntrese la EDP de segundo orden cuya solución general es

$$z = f(3x - y) + g(x + 5y) - xy.$$

11. Determínese la EDP de la familia de esferas de radio 5 cuyos centros están sobre el plano  $x = y$ .

# Capítulo 2

## EDP cuasilineales de primer orden

Es común encontrarse con textos actuales de EDP en los que se ignoran totalmente las EDP de primer orden a pesar de que su estudio es fundamental, dado que estas ecuaciones son importantes desde los puntos de vista físico y geométrico, y que sirven de guía para las soluciones de EDP de orden superior. No obstante hay textos clásicos de EDP donde se tratan con detalle este tipo de ecuaciones [6, 13, 21, 30].

Las EDP de primer orden aparecen en una variedad de problemas físicos, algunos de los más comunes son, entre otros, el flujo de tráfico, las redes telefónicas, las leyes de conservación, las relaciones Mainardi-Codazzi en geometría diferencial, las ondas de choque en mecánica cuántica no lineal, la dinámica de gases, los procesos de nacimiento y muerte y control de enfermedades, así como los procesos estocásticos. Sin embargo, aparecen con menor frecuencia que las EDP de segundo orden. Generalmente, las EDP de primer orden pueden resolverse explícitamente utilizando *el método de las características*, que explicamos a continuación. El método de las características reduce la determinación de soluciones explícitas a la resolución de EDO. Por simplicidad, limitamos su presentación a funciones de dos variables. Una extensión a funciones de más variables, aunque rutinaria, es más complicada.

En este capítulo, estudiamos las EDP cuasilineales (y lineales) de primer orden, en las que las derivadas de primer orden de la variable dependiente se dan linealmente y los coeficientes pueden depender de la variable dependiente.

### 2.1. Curvas características

Como ya se vio en el ejemplo 1.7, la forma más general de una ecuación cuasilineal de primer orden en dos variables es

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z), \quad (2.1)$$

donde  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son funciones suficientemente buenas y  $P$  y  $Q$  no se anulan al mismo tiempo en algún dominio  $D$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Nuestro objetivo es encontrar la solución general de (2.1). Para ello, hacemos una interpretación geométrica de la ecuación. Supongamos que  $z = \phi(x, y)$  es una solución (no

necesariamente la solución general, sino una solución concreta) de la EDP. Podemos ver esta solución como una superficie  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$ , que denominaremos *superficie solución*.

Sea  $(x, y, z)$  un punto de  $\Sigma$ , entonces el vector normal a  $\Sigma$  en dicho punto viene dado por

$$\vec{n} = (\phi_x(x, y), \phi_y(x, y), -1).$$

Por tanto, podemos interpretar la EDP como una condición sobre los vectores normales a una superficie solución. De hecho, estos deben ser ortogonales a los vectores del campo vectorial definido en  $\mathbb{R}^3$  por las funciones  $P$ ,  $Q$  y  $R$ .

$$\vec{n} \cdot (P, Q, R) = 0 \quad \Rightarrow \quad P\phi_x + Q\phi_y - R = 0.$$

Dicho de otra manera, el vector  $(P, Q, R)$  es tangente a  $\Sigma$  en todos sus puntos. Así, parece natural construir las superficies a partir de curvas asociadas al campo vectorial  $(P, Q, R)$ .

**Definición 2.1.** *Dada la EDP cuasilineal (2.1), llamamos direcciones características a las direcciones del campo vectorial  $(P, Q, R)$ .*

**Definición 2.2.** *Decimos que una curva  $\gamma$  es una curva característica de la EDP cuasilineal (2.1) si el vector tangente en cada punto de  $\gamma$  lleva la dirección característica.*

Como veremos más adelante, las superficies solución están construidas por superposición de curvas características (véase la figura 2.1). Para determinar estas curvas características, debemos resolver un sistema de EDO. En efecto, si  $\gamma \equiv (x(s), y(s), z(s))$  es una curva característica, por definición, debe satisfacerse

$$\frac{dx}{ds} = \mu P(x, y, z), \quad \frac{dy}{ds} = \mu Q(x, y, z), \quad \frac{dz}{ds} = \mu R(x, y, z),$$

donde, en general,  $\mu = \mu(x, y, z)$ . De este sistema pueden eliminarse el parámetro  $s$  y la función de proporcionalidad  $\mu$  introduciendo como variable independiente  $x$ ,  $y$  o  $z$ . De este modo, se llega a un sistema equivalente

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{2.2}$$

que recibe el nombre de *sistema característico*.

**Definición 2.3.** *Una solución  $u(x, y, z) = C$  del sistema característico (2.2) se denomina integral primera.*

Veremos que, a partir de integrales primeras, puede encontrarse la solución general de la ecuación cuasilineal de primer orden. Para ello, damos algunos resultados previos.

**Proposición 2.4.** *Si  $u(x, y, z) = C$  es una integral primera, entonces se cumple*

$$P(x, y, z)u_x + Q(x, y, z)u_y + R(x, y, z)u_z = 0.$$

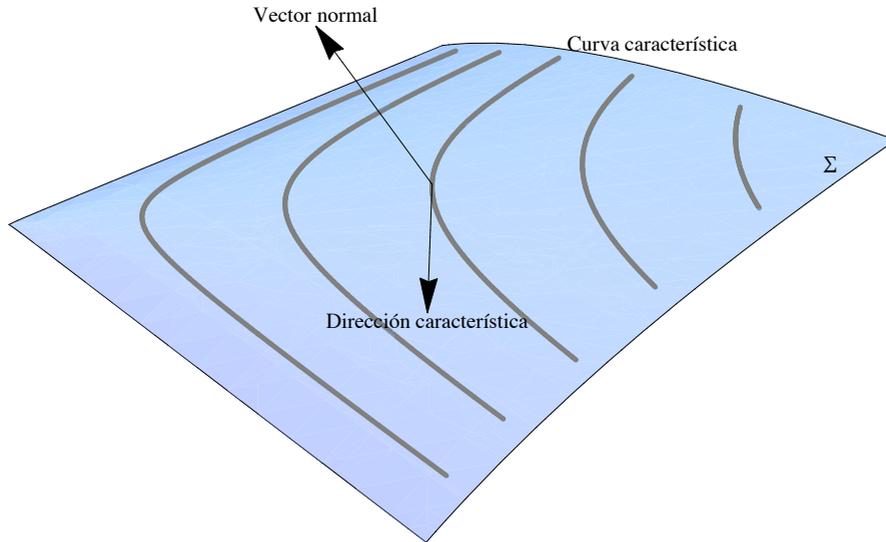


Figura 2.1: Superficie solución  $\Sigma$  de una EDP cuasilineal de primer orden formada por curvas características.

**Demostración.** Una integral primera es solución del sistema característico, por lo que se tiene que, en función de  $s$ ,

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \mu P(x(s), y(s), z(s)), \\ \frac{dy}{ds} = \mu Q(x(s), y(s), z(s)), \\ \frac{dz}{ds} = \mu R(x(s), y(s), z(s)). \end{cases} \quad (2.3)$$

Si derivamos la expresión de la integral primera  $u(x, y, z) = C$  respecto a  $s$ , se obtiene

$$0 = \frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} + u_z \frac{dz}{ds}$$

y, teniendo en cuenta (2.3), resulta finalmente

$$P(x, y, z)u_x + Q(x, y, z)u_y + R(x, y, z)u_z = 0,$$

lo que prueba la proposición. ■

**Proposición 2.5.** Sean  $u_1(x, y, z) = C_1$  y  $u_2(x, y, z) = C_2$  dos integrales primeras funcionalmente independientes, es decir

$$\text{rango} \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \end{pmatrix} = 2.$$

Entonces,  $F(u_1, u_2) = 0$ , con  $F$  una función arbitraria de clase  $\mathcal{C}^1$ , define a  $z = \phi(x, y)$  como función de  $x, y$ , que es solución de la ecuación cuasilineal (2.1).

**Demostración.** Para ver que  $z = \phi(x, y)$  es solución de la EDP (2.1) vamos a eliminar la función  $F$  de la ecuación

$$F(u_1(x, y, \phi(x, y)), u_2(x, y, \phi(x, y))) = 0,$$

derivando parcialmente respecto a  $x$  e  $y$ . Denotando de nuevo por  $F_1$  y  $F_2$  a las derivadas parciales de  $F$  respecto a su primer y segundo argumento, resulta el sistema

$$\begin{aligned} (u_{1x} + u_{1z}\phi_x)F_1 + (u_{2x} + u_{2z}\phi_x)F_2 &= 0, \\ (u_{1y} + u_{1z}\phi_y)F_1 + (u_{2y} + u_{2z}\phi_y)F_2 &= 0, \end{aligned}$$

que es lineal y homogéneo en las incógnitas  $F_1$  y  $F_2$ . Como  $F$  es arbitraria, existen soluciones no triviales del sistema, por lo que el determinante de la matriz de coeficientes debe anularse, de donde se sigue que

$$(u_{2y}u_{1z} - u_{1y}u_{2z})\phi_x + (u_{1x}u_{2z} - u_{2x}u_{1z})\phi_y = u_{2x}u_{1y} - u_{1x}u_{2y}. \quad (2.4)$$

Por otra parte, al ser  $u_1$  y  $u_2$  integrales primeras, por el resultado anterior se verifica

$$\begin{cases} Pu_{1x} + Qu_{1y} + Ru_{1z} = 0, \\ Pu_{2x} + Qu_{2y} + Ru_{2z} = 0. \end{cases}$$

Si vemos el sistema anterior como un sistema lineal en  $P, Q, R$ , se podrá resolver siempre que el rango de la matriz de coeficientes sea máximo. En ese caso, dos de las incógnitas se expresarán de manera única en términos de la tercera. Pero la matriz de coeficientes tiene rango máximo por hipótesis al ser  $u_1$  y  $u_2$  funcionalmente independientes.

Supongamos, sin pérdida de generalidad alguna, que se cumple  $D = u_{1x}u_{2y} - u_{2x}u_{1y} \neq 0$ , entonces

$$P = -R \frac{u_{1z}u_{2y} - u_{2z}u_{1y}}{D}, \quad Q = -R \frac{u_{1x}u_{2z} - u_{2x}u_{1z}}{D}. \quad (2.5)$$

Observemos que los numeradores de las fracciones anteriores son los coeficientes de  $\phi_x$  y  $\phi_y$  en la ecuación (2.4) y que  $D$  es el término independiente, por lo que podemos escribir

$$-\frac{DP}{R}\phi_x - \frac{DQ}{R}\phi_y + D = 0 \quad \Rightarrow \quad P\phi_x + Q\phi_y = R.$$

Es decir,  $z = \phi(x, y)$  es solución de la EDP cuasilineal (2.1). ■

**Definición 2.6.** La expresión  $F(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)) = 0$ , donde  $u_1 = C_1$  y  $u_2 = C_2$  son integrales primeras funcionalmente independientes y  $F$  una función arbitraria de clase  $\mathcal{C}^1$ , recibe el nombre de integral general o solución general de la EDP cuasilineal de primer orden (2.1).

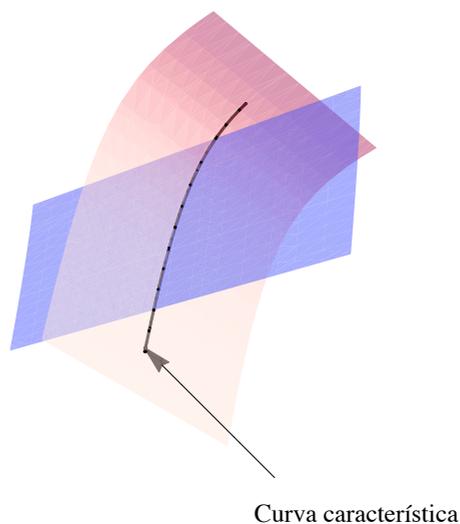


Figura 2.2: Las curvas características aparecen como intersección de integrales primeras.

A pesar de la definición anterior, la solución general de una EDP cuasilineal de primer orden puede darse de otras formas, siempre que se defina una relación entre las constantes  $C_1$  y  $C_2$  que definen las integrales primeras. Por ejemplo

$$u_1(x, y, z) = f(u_2(x, y, z)),$$

donde  $f$  es una función arbitraria de clase  $\mathcal{C}^1$ , también puede considerarse como solución general.

Es importante hacer notar que las integrales primeras quedan definidas como familias de superficies cuya intersección da lugar a curvas características (véase la figura 2.2). En efecto, sean  $u_1(x, y, z) = C_1$  y  $u_2(x, y, z) = C_2$  dos integrales primeras funcionalmente independientes que se cortan a lo largo de una curva  $\gamma$ . El vector tangente,  $\vec{\tau}$ , en un punto de  $\gamma$  se obtiene como el producto vectorial de los vectores normales a  $u_1$  y  $u_2$  en dicho punto. Es decir,  $\vec{\tau} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ , donde

$$\vec{n}_1 = (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z}), \quad \vec{n}_2 = (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}).$$

Ahora bien,

$$\vec{\tau} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (u_{1y}u_{2z} - u_{2y}u_{1z}, u_{1z}u_{2x} - u_{2z}u_{1x}, u_{1x}u_{2y} - u_{2x}u_{1y}),$$

y, a partir de (2.5), resulta

$$\vec{\tau} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \frac{D}{R}(P, Q, R),$$

que nos indica que  $\vec{\tau}$  es una dirección característica y, por tanto,  $\gamma$  una curva característica.

Como se ha visto, para encontrar la solución general de la EDP cuasilineal de primer orden (2.1) basta con encontrar dos integrales primeras del sistema característico funcionalmente independientes. A veces esto puede hacerse directamente a partir de las dos ecuaciones diferenciales independientes que resultan de (2.2), como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.7.** Encuéntrese la solución general de la ecuación  $x^2 z_x - y^2 z_y = 0$ .

El sistema característico correspondiente es

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{0},$$

de donde resultan las siguientes dos ecuaciones diferenciales independientes

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-y^2}, \quad dz = 0.$$

La primera de ellas es una ecuación en variables separadas con solución

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = C_1,$$

mientras que la segunda da  $z = C_2$ . Así pues, la solución general es de la forma

$$z = f\left(\frac{x+y}{xy}\right),$$

con  $f$  una función arbitraria de clase  $\mathcal{C}^1$ . ◀

En otros casos no siempre es posible resolver directamente las ecuaciones del sistema característico y para obtener integrales primeras se usa el llamado *método de los multiplicadores*. Este método consiste en transformar el sistema característico en otro equivalente mediante combinaciones apropiadas de las ecuaciones. En concreto, sean  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  funciones arbitrarias, entonces

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{k_1 dx + k_2 dy + k_3 dz}{k_1 P + k_2 Q + k_3 R}. \quad (2.6)$$

La demostración de lo anterior es trivial cuando  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  son constantes. Para el caso general, consideremos una función  $A(x, y, z)$  cuya diferencial sea

$$dA = k_1 dx + k_2 dy + k_3 dz.$$

Tomando  $A(x, y, z)$  sobre las curvas características y derivando respecto al parámetro de las mismas, resulta

$$\frac{dA}{ds} = k_1 \frac{dx}{ds} + k_2 \frac{dy}{ds} + k_3 \frac{dz}{ds}.$$

Pero sobre las curvas características

$$\frac{dx}{ds} = \mu P, \quad \frac{dy}{ds} = \mu Q, \quad \frac{dz}{ds} = \mu R,$$

por lo que, eliminando  $s$  y  $\mu$ , se llega a (2.6).

Veamos un ejemplo en el que se aplica este método para obtener integrales primeras.

**Ejemplo 2.8.** Encuéntrese la solución general de la ecuación cuasilineal de primer orden  $(y - z)z_x + (z - x)z_y = x - y$ .

En este caso, el sistema característico es

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y}.$$

Ninguna de las ecuaciones diferenciales que resultan de este sistema es directamente resoluble, ya que aparecen involucradas las tres variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Por tanto, mientras no se conozca la dependencia de la tercera en términos de las otras dos, no se podrá resolver. Sin embargo, usando multiplicadores adecuados se pueden encontrar fácilmente dos integrales primeras.

Observemos que en los denominadores del sistema característico aparecen las tres variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  exactamente dos veces y con el signo cambiado, por tanto se tiene

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y} = \frac{dx + dy + dz}{0},$$

por lo que  $dx + dy + dz = d(x + y + z) = 0$ . De aquí se sigue la integral primera

$$x + y + z = C_1.$$

Si multiplicamos, ahora, cada uno de los cocientes por la variable que no aparece en el denominador, tendremos los dobles productos dos veces y con signos opuestos, por lo que resulta

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}.$$

Puesto que

$$xdx + ydy + zdz = d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right),$$

otra integral primera es

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2,$$

por lo que la solución general de la EDP es  $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ , donde  $F$  es una función arbitraria de clase  $\mathcal{C}^1$ . ◀

En general, con el procedimiento de los multiplicadores, ya sean constantes o variables, se trata de elegir los multiplicadores de manera que el denominador de la fracción sea 0 y el numerador, que también ha de serlo, sea una diferencial exacta.

También pueden obtenerse integrales primeras a partir de una conocida  $u_1(x, y, z) = C_1$ . Así, intentamos eliminar una de las variables de una de las ecuaciones del sistema característico (2.2) e intentamos resolver la EDO resultante en las dos variables restantes.

**Ejemplo 2.9.** Encuéntrense dos integrales primeras funcionalmente independientes para la EDP cuasilineal  $z_x + xz_y = y$ .

El correspondiente sistema característico es

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{y},$$

y una de las integrales primeras aparece de la ecuación diferencial

$$xdx = dy \quad \Rightarrow \quad y - \frac{x^2}{2} = C_1.$$

De aquí se obtiene  $y = x^2/2 + C_1$ , que podemos sustituir en el denominador de la tercera fracción del sistema característico para obtener la ecuación diferencial en variables separadas,

$$dx = \frac{dz}{x^2/2 + C_1}.$$

Resolviendo esta ecuación resulta

$$\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2 = z.$$

Ahora, se sustituye  $C_1$  por su expresión en términos de  $x$  e  $y$ , llegando a

$$z = \frac{x^3}{6} + \left(y - \frac{x^2}{2}\right)x + C_2 = xy - \frac{x^3}{3} + C_2,$$

que es otra integral primera, funcionalmente independiente de la primera. ◀

El procedimiento anterior se puede llevar a cabo en las EDP lineales de primer orden bajo dos supuestos. Uno, que la primera ecuación del sistema característico sea fácilmente integrable. Y dos, que se pueda despejar  $x$  o  $y$  en la integral. Si no se da el primer supuesto, se puede utilizar el método de los multiplicadores para intentar llegar a ecuaciones fácilmente integrables.

## 2.2. Problema de Cauchy

En la resolución de una EDP no solo estamos interesados en encontrar la solución general, sino en buscar una que verifique unas ciertas condiciones. En este sentido, nos plantearemos un problema similar al de las ecuaciones diferenciales ordinarias, donde se busca una solución que verifica unas condiciones iniciales dadas. En el caso de las EDO, si la ecuación diferencial satisface unas ciertas condiciones de regularidad, se puede asegurar la existencia y unicidad de la solución en un entorno de las condiciones iniciales. ¿Cómo ha de plantearse un problema de valores iniciales para una EDP cuasilineal?

Para dar una respuesta a esta pregunta, podemos ver que lo que tratamos es de determinar el elemento arbitrario que aparece en la solución general, prescribiendo una condición. Si la solución general viene dada por

$$F(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)) = 0,$$

con  $F$  una función arbitraria, parece razonable seleccionar, de entre la familia de superficies anterior, la que contiene a una curva dada, que supondremos definida a partir de la intersección de dos superficies

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0.$$

De este modo  $F$  queda determinada al eliminar  $x, y, z$  de las ecuaciones

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0, \quad u_1(x, y, z) = C_1, \quad u_2(x, y, z) = C_2,$$

ya que de aquí resultará  $\mathcal{F}(C_1, C_2) = 0$ , siendo  $\mathcal{F}$  una función concreta. Por lo tanto, la solución de la EDP que contiene a la curva dada será

$$\mathcal{F}(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)) = 0.$$

Si la curva inicial  $\gamma$  tiene la parametrización

$$\gamma \equiv (x_0(t), y_0(t), z_0(t)),$$

podemos aplicar el *método de las características* para encontrar una superficie solución que contenga a  $\gamma$ . En efecto, por cada punto de la curva trazamos una curva característica para construir una superficie. En este sentido, la superficie vendría dada por la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = P(x, y, z), & x(s=0) = x_0(t), \\ \frac{dy}{ds} = Q(x, y, z), & y(s=0) = y_0(t), \\ \frac{dz}{ds} = R(x, y, z), & z(s=0) = z_0(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

Observemos que la solución del sistema anterior es de la forma

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad z = z(s, t),$$

por lo que si pudiéramos invertir las dos primeras ecuaciones para obtener  $s$  y  $t$  en función de  $x, y$ , se tendría  $z = z(x, y)$ , que sería la función candidata a solución. Para llegar a la expresión final  $z = z(x, y)$  se necesitan varias hipótesis:

1. Las funciones  $P, Q$  y  $R$  tienen que ser lo suficientemente regulares, en un dominio  $D$  de  $\mathbb{R}^3$ , como para asegurar que el sistema característico tenga solución única.
2. La curva  $\gamma$  tiene que ser regular para  $t \in I$ , un intervalo real, y estar contenida en  $D$ . Además, deberemos exigir que la proyección de  $\gamma$  sobre el plano  $xy$  no tenga puntos dobles<sup>1</sup>. Es decir, no existen  $t_1 \neq t_2 \in I$  tales que

$$(x_0(t_1), y_0(t_1)) = (x_0(t_2), y_0(t_2)).$$

3. Las ecuaciones  $x = x(s, t), y = y(s, t)$  se pueden invertir, al menos en un entorno de  $\gamma$ . Eso requiere que se cumplan las condiciones del teorema de la función inversa. En concreto, debe ser

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}_{\gamma} \neq 0. \quad (2.8)$$

---

<sup>1</sup>Esta condición exige que la función  $z(x, y)$  es univaluada. De otro modo, a un mismo par  $(x, y)$ , le corresponderían dos valores de  $z$ .

Las tres condiciones anteriores asegurarían la existencia de una única función  $z = z(x, y)$  que es solución del sistema característico y que contiene a la curva  $\gamma$  en un entorno de la misma. Esto nos lleva a enunciar el siguiente teorema de existencia y unicidad de soluciones para el problema de Cauchy de la ecuación cuasilineal de primer orden.

**Teorema 2.10.** Sean  $P$ ,  $Q$  y  $R$  funciones de clase  $\mathcal{C}^1$  en un dominio  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\gamma \equiv (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$  una curva de clase  $\mathcal{C}^1$  definida en un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , tal que  $\gamma \subset D$ . Si  $x'_0(t)^2 + y'_0(t)^2 \neq 0$  (esta condición establece que en ningún punto la curva  $\gamma$  tiene tangente paralela al eje  $Z$ ), para todo  $t \in I$ , y la proyección de  $\gamma$  sobre el plano  $xy$  no tiene puntos dobles, entonces si se verifica la condición de transversalidad

$$\begin{vmatrix} P(x_0(t), y_0(t), z_0(t)) & Q(x_0(t), y_0(t), z_0(t)) \\ x'_0(t) & y'_0(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad t \in I,$$

existe una única solución  $z = z(x, y)$  de clase  $\mathcal{C}^1$  del problema de valor inicial

$$\begin{cases} P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z), \\ z(x_0(t), y_0(t)) = z_0(t). \end{cases}$$

definida en un entorno de  $\gamma$ .

**Demostración.** Como ya se ha dicho, buscamos la solución del sistema característico, con condiciones iniciales sobre la curva  $\gamma$ . Es decir, para cada  $t \in I$  resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (2.7). Las condiciones de regularidad de las funciones  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  y  $z_0$  garantizan la existencia de una solución única

$$x(s, t), \quad y(s, t), \quad z(s, t),$$

que es de clase  $\mathcal{C}^1$  en un entorno de  $\gamma$ . Además sobre  $\gamma$ , por la condición de transversalidad, se verifica (2.8), por lo que podemos escribir

$$s = s(x, y), \quad t = t(x, y),$$

y, sustituyendo en  $z(s, t)$  se llega a  $z = z(x, y)$ . Falta ver que  $z(x, y)$  verifica la EDP y que cumple la condición inicial.

Empecemos por ver que  $z(x, y)$  es solución. Calculando la derivada de  $z$  respecto a  $x$ ,  $y$  resulta

$$z_x = z_s s_x + z_t t_x, \quad z_y = z_s s_y + z_t t_y,$$

por lo que

$$Pz_x + Qz_y = (Ps_x + Qs_y)z_s + (Pt_x + Qt_y)z_t.$$

Al ser  $x$ ,  $y$  soluciones del sistema característico, podemos escribir

$$P = x_s, \quad Q = y_s$$

y entonces

$$Ps_x + Qs_y = x_s s_x + y_s s_y = \frac{\partial s(x, y)}{\partial s} = 1,$$

$$Pt_x + Qt_y = x_s t_x + y_s t_y = \frac{\partial t(x, y)}{\partial s} = 0.$$

Por tanto se tiene que

$$Pz_x + Qz_y = (Ps_x + Qs_y)z_s + (Pt_x + Qt_y)z_t = z_s = R,$$

ya que  $z$  es solución del sistema característico. Es decir,  $z(x, y)$  verifica la EDP.

Ahora veremos que se cumple la condición inicial. Pero esto es evidente ya que

$$z(x_0(t), y_0(t)) = z(x(0, t), y(0, t)) = z(0, t) = z_0(t).$$

Así,  $z(x, y)$  es solución que verifica la condición inicial. Por último hay que probar que esta solución es única.

Sea  $z = \phi(x, y)$  otra solución diferente de la calculada anteriormente que es solución del problema de valor inicial. Consideremos la diferencia entre la solución construida por el método de las características y la otra solución a lo largo de las características

$$u(s) = z(s) - \phi(x(s), y(s)).$$

Para  $s = 0$ , nos encontramos sobre  $\gamma$  y, por tanto,  $u(0) = 0$ . Si ahora derivamos respecto a  $s$  se tiene que

$$u'(s) = z'(s) - \phi_x(x(s), y(s))x'(s) - \phi_y(x(s), y(s))y'(s).$$

Como  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$  son soluciones del sistema característico resulta

$$\begin{aligned} u'(s) &= R(x(s), y(s), z(s)) - \phi_x(x(s), y(s))P(x(s), y(s), z(s)) \\ &\quad - \phi_y(x(s), y(s))Q(x(s), y(s), z(s)). \end{aligned}$$

Reemplazando  $z(s)$  por  $u(s) + \phi(x(s), y(s))$  se llega a que  $u$  es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(s) = F(s, u(s)), \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

donde  $F$  es una función conocida de clase  $\mathcal{C}^1$ . Este problema tiene solución única, pero es fácil comprobar que  $u = 0$  es solución, por lo que  $z(s) = \phi(x(s), y(s))$ . Es decir,  $\phi(x, y)$  coincide con la solución obtenida por el método de las características. ■

**Ejemplo 2.11.** Encuéntrese la solución de la ecuación  $zz_x - yz_y = x$ , que verifica  $z(2y, y) = 0$ .

Veamos primero si se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad. Las funciones  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son funciones de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathbb{R}^3$  y la curva dato es  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathbb{R}$ , sin puntos dobles. Por otra parte, la condición de transversalidad, parametrizando la curva inicial  $\gamma$  como  $(2t, t, 0)$ , se cumple, ya que

$$\begin{vmatrix} 0 & -t \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2t \neq 0 \quad \text{siempre que } t \neq 0.$$

Por tanto, por el teorema 2.10, el problema tiene solución única siempre que  $t \neq 0$ . En este caso, la solución resulta de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = z, & x(s=0) = 2t, \\ \frac{dy}{ds} = -y, & y(s=0) = t, \\ \frac{dz}{ds} = x, & z(s=0) = 0. \end{cases}$$

La segunda ecuación se resuelve de manera inmediata y nos da  $y(s, t) = te^{-s}$ . Para resolver las otras dos, derivamos la primera ecuación respecto a  $s$ , por lo que llegamos al problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dz}{ds} = x, \quad x(0) = 2t, \quad x'(0) = z(0) = 0.$$

La solución viene dada por  $x(s, t) = t(e^s + e^{-s})$ . Y como  $z = x'(s)$  resulta  $z(s, t) = t(e^s - e^{-s})$ . Es decir tenemos

$$x(s, t) = t(e^s + e^{-s}), \quad y(s, t) = te^{-s}, \quad z(s, t) = t(e^s - e^{-s}).$$

De las dos primeras ecuaciones se obtiene

$$te^{-s} = y, \quad te^s = x - y$$

y, finalmente,  $z(x, y) = x - 2y$ .

A esta misma solución puede llegarse a partir de la solución general. En efecto, determinar la solución que verifica la condición inicial equivale a determinar la función arbitraria que aparece en la misma. En este caso, puede comprobarse que dos integrales primeras funcionalmente independientes son

$$z^2 - x^2 = C_1, \quad (x + z)y = C_2,$$

que definen la solución general como  $F(z^2 - x^2, (x + z)y) = 0$ . Como se tiene que cumplir la condición inicial, evaluando las integrales primeras sobre la misma, se tiene

$$-4t^2 = C_1, \quad 2t^2 = C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 + 2C_2 = 0,$$

relación que determina la función  $F$ . Así pues, la solución que buscamos es

$$z^2 - x^2 + 2(x + z)y = 0 \quad \Rightarrow \quad (z + x)(z - x + 2y) = 0.$$

Puesto que  $z = -x$  no satisface la condición inicial, tiene que ser  $z = x - 2y$ , que es la solución obtenida siguiendo el esquema constructivo de la demostración del teorema de existencia y unicidad de soluciones. ◀

Cuando no se verifica la condición de transversalidad para el problema de Cauchy, decimos que el problema es *característico*, ya que en este caso la proyección de la curva inicial sobre el plano  $xy$  lleva la dirección del vector característico. La existencia de solución queda

condicionada por la naturaleza de la ecuación y de la curva inicial. Así, si la curva inicial es característica existe una colección infinita de soluciones. En efecto, sean

$$u_1(x, y, z) = C_1, \quad u_2(x, y, z) = C_2$$

dos integrales primeras funcionalmente independientes de la EDP cuasilineal. Si la curva inicial  $\gamma$  es característica, existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que

$$\gamma \equiv \{u_1(x, y, z) = \alpha, u_2(x, y, z) = \beta\}. \quad (2.9)$$

Puesto que la integral general es de la forma

$$u_1(x, y, z) = f(u_2(x, y, z)),$$

la solución de la EDP, que contiene a la curva (2.9), viene dada por la expresión anterior, siendo  $f$  una función arbitraria de clase  $\mathcal{C}^1$  tal que  $f(\beta) = \alpha$ .

**Ejemplo 2.12.** Hállese la solución de la EDP  $yz_x + xz_y = x + y$  que contiene a la curva  $\gamma \equiv \{2x = 2y = z\}$ .

Veamos que se trata de un problema característico. En efecto, si miramos la condición de transversalidad, parametrizando la curva inicial como  $(t, t, 2t)$ , resulta

$$\begin{vmatrix} t & t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto la proyección de la curva inicial es característica. Pero toda la curva es característica ya que, sobre la misma, el vector tangente y el vector característico van en la misma dirección

$$(P, Q, R)_\gamma \equiv (t, t, 2t), \quad (x'_0(t), y'_0(t), z'_0(t)) \equiv (1, 1, 2).$$

La solución general de la EDP es, en este caso,

$$z = x + y + f(x^2 - y^2),$$

con  $f$  una función arbitraria de clase  $\mathcal{C}^1$ . Si imponemos la condición de que la solución contenga a  $\gamma$  se obtiene

$$f(0) = 0,$$

por lo que la función  $f$  no queda determinada, salvo su valor en el 0. Así pues, cualquier función de clase  $\mathcal{C}^1$  que verifique  $f(0) = 0$ , da lugar a una solución de la EDP que contiene a la curva  $\gamma$ . ◀

Si el problema es característico, pero la curva inicial no es característica, puede construirse una superficie mediante el método de las características, pero no es una solución en el sentido estricto o no define a  $z$  como una función de  $x, y$ .

**Proposición 2.13.** Dadas una EDP de la forma  $P(x, y)z_x + Q(x, y)z_y = R(x, y, z)$  y una curva  $\gamma \equiv (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$  tales que se cumple

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ x'_0(t) & y'_0(t) \end{vmatrix}_\gamma = 0, \quad \begin{vmatrix} Q & R \\ y'_0(t) & z'_0(t) \end{vmatrix}_\gamma \neq 0,$$

entonces la superficie construida por el método de las características es una superficie cilíndrica de eje  $z$ . En este caso el problema de Cauchy no tiene solución, al no poderse definir  $z$  como función de  $x, y$ .

**Demostración.** Al resolver el sistema característico, con condiciones iniciales sobre  $\gamma$ , se obtiene

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t) \quad z = z(s, t). \quad (2.10)$$

Puesto que, por hipótesis,

$$\begin{vmatrix} y_s & z_s \\ y_t & z_t \end{vmatrix}_\gamma \neq 0,$$

podemos invertir las dos últimas ecuaciones de (2.10), en un entorno de  $\gamma$ , y escribir

$$s = s(y, z), \quad t = t(y, z).$$

Por tanto, se tiene  $x = f(y, z)$ . Teniendo en cuenta que  $y$  y  $z$  son funciones de  $s$  y  $t$ , llegamos a

$$x_s = f_y y_s + f_z z_s, \quad x_t = f_y y_t + f_z z_t$$

y de aquí se deduce

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s = (z_s y_t - z_t y_s) f_z. \quad (2.11)$$

Sabemos que  $\Delta = 0$  sobre  $\gamma$ , pero también lo es en un entorno de  $\gamma$ . En efecto,

$$\Delta_s = x_{ss} y_t + x_s y_{st} - x_{st} y_s - x_t y_{ss}.$$

Teniendo en cuenta que  $x_s = P(x, y)$  y  $y_s = Q(x, y)$  resulta

$$\begin{aligned} x_{ss} &= P_s = P_x x_s + P_y y_s, & x_{st} &= P_t = P_x x_t + P_y y_t, \\ y_{ss} &= Q_s = Q_x x_s + Q_y y_s, & y_{st} &= Q_t = Q_x x_t + Q_y y_t, \end{aligned}$$

por lo que

$$\Delta_s = (P_x + Q_y)(x_s y_t - x_t y_s) = (P_x + Q_y)\Delta.$$

Entonces  $\Delta$  es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \Delta_s = (P_x + Q_y)\Delta \\ \Delta(s=0) = 0. \end{cases}$$

Puesto que el problema tiene solución única y  $\Delta = 0$  es solución, entonces  $\Delta = 0$  en un entorno de  $s = 0$ . Finalmente, de (2.11) resulta  $f_z = 0$ , por lo que la función  $f$  es independiente de  $z$  y entonces  $x = f(y)$ , que es una superficie cilíndrica. ■

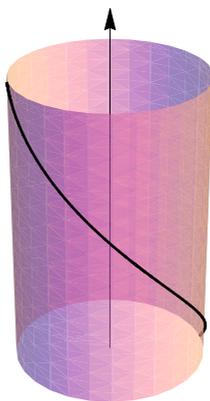


Figura 2.3: Curva inicial y superficie construida por el método de las características para una ecuación lineal. Se trata de una superficie cilíndrica de eje  $z$  y por tanto no se puede definir  $z$  como función de  $x, y$ .

**Ejemplo 2.14.** Un ejemplo de la situación anterior lo podemos ver con la EDP  $yz_x - xz_y = 0$  y la superficie construida por el método de las características que contiene a la curva  $\gamma \equiv (\sin t, \cos t, t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Esta superficie es  $x^2 + y^2 = 1$ , que es un cilindro (véase la figura 2.3) y, por tanto, no define a  $z$  como función de  $x, y$ . De hecho, la solución general de la EDP es

$$z = f(x^2 + y^2),$$

y si imponemos que contenga a la curva inicial llegamos a

$$t = f(1).$$

Pero esto es absurdo, ya que el miembro de la izquierda es una función creciente de  $t$ , mientras que el de la derecha es constante. Luego, no existe solución. ◀

Si la EDP no es lineal, no tiene por qué darse el resultado de la Proposición anterior. En general va a ser posible construir una solución  $z = z(x, y)$ , pero habrá pérdida de regularidad en la misma, en el sentido de que no va a ser  $\mathcal{C}^1$ . Esto queda claro en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.15.** Encuéntrese una superficie solución de la EDP  $zz_x + z_y = 1$  que contenga a la curva inicial  $\gamma \equiv (t^2, 2t, t)$ .

Para encontrar la superficie resolvemos el sistema característico de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = z, & x(s=0) = t^2, \\ \frac{dy}{ds} = 1, & y(s=0) = 2t, \\ \frac{dz}{ds} = 1, & z(s=0) = t, \end{cases}$$

cuya solución es

$$x(s, t) = \frac{s^2}{2} + st + t^2, \quad y(s, t) = s + 2t, \quad z(s, t) = s + t.$$

Para invertir las dos primeras ecuaciones vemos que

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s = s,$$

que es cero sobre  $\gamma$ , por lo que el problema es característico. No obstante, es posible invertir las ecuaciones y llegar a

$$z = \frac{y}{2} \pm \sqrt{x - \frac{y^2}{4}}.$$

Como se ve,  $z$  está definida para  $x > y^2/4$  y, en ese caso, no es univaluada. Por otra parte, se tiene que  $z_x$  y  $z_y$  no están definidas para  $x = y^2/4$ , es decir sobre la curva  $\gamma$ , por lo que  $z$  no es de clase  $\mathcal{C}^1$ . Esto nos llevaría a considerar las soluciones de una EDP en una clase de funciones menos restrictiva, lo que se denomina *soluciones débiles*, pero ese es un problema que queda fuera del ámbito de este curso. ◀

## 2.3. Ejercicios

1. Hállese la integral general de cada una de las siguientes EDP:

a)  $az_x + bz_y + cz = 0$

b)  $2z_x + z_y + z = 0$

c)  $z_x - 3z_y + 2z = 0$

d)  $2z_x + 3z_y + 5z = 0$

e)  $z_y + 2z = 0$

f)  $z_x + z_y = z$

g)  $z_x + 2xyz_y = x$

h)  $2xyz_x + z_y - z = 0$

i)  $z_x - yz_y - z = 1$

j)  $2z_x + 3z_y = 1$

k)  $xz_x + yz_y = 3z$

l)  $y^2 z z_x - x^2 z z_y = x^2 y$

m)  $(y - z)z_x + (x - y)z_y = z - x$

n)  $(x^2 - y^2 - z^2)z_x + 2xyz_y = 2xz$

2. Hállese la integral general de cada una de las siguientes EDP:

a)  $xu_x + yu_y + zu_z = xyz$

b)  $xu_x + yu_y + (z - 1)u_z = 0$

c)  $2xz_{xx} - yz_{xy} + 2x + 2z_x = 0$

3. Una solución del sistema característico de la ecuación  $Pz_x + Qz_y = y^2 - x^2$  es  $z - xy = c_1$ . Con solo este dato hay infinitas funciones de  $P$  y  $Q$  que puestas en la ecuación conducen a la solución mencionada. Determinense cualesquiera  $P$  y  $Q$  y hállese la integral general de la ecuación.

4. Sabiendo que la función  $z = x^2 - y^2$  es una solución particular de una EDP de la forma  $Pz_x + Qz_y = R$  y que  $\ln|z| - x^2/2 = c_1$  es una integral del sistema característico, determínese dicha ecuación.

5. Dos superficies se dicen ortogonales si sus planos tangentes en los puntos en que se cortan son ortogonales.
- a) Pruébese que para que la gráfica de la función  $z = \phi(x, y)$  sea una superficie ortogonal a la familia uniparamétrica de superficies definida implícitamente por  $F(x, y, z, C) = 0$  es necesario y suficiente que se verifique la ecuación  $F_x \phi_x + F_y \phi_y = F_z$ .
- b) Hállense las superficies que cortan ortogonalmente al haz de paraboloides  $x^2 + y^2 = Cz$ .
6. Encuéntrense las superficies que cortan ortogonalmente la familia de conos  $x^2 + y^2 = a^2 z^2$ .
7. Determínese la familia de curvas ortogonales a  $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = C$ .
8. Calcúlense las superficies tales que el ángulo  $\widehat{OMN}$  sea  $\pi/2$ , donde  $M$  es un punto de la superficie y  $N$  el punto de intersección de la normal en  $M$  con el plano  $XY$ .
9. Sea el sistema diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(z - y + a)}{y^2 + z^2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{-x(y + z - a)}{y^2 + z^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- a) ¿Qué valor hay que imponer al parámetro  $a$  para que las curvas integrales del sistema estén trazadas sobre esferas centradas en el origen?
- b) Determínense las curvas características del sistema anterior si  $a$  toma el valor impuesto en el apartado anterior.
10. Encuéntrense, si es posible, las soluciones de las siguientes EDP que pasan por las curvas dadas:

- a)  $x^2 z_x + y^2 z_y + z^2 = 0; \quad xy = x + y, z = 1.$
- b)  $(y - z)z_x + (x - y)z_y = z - x; \quad y = -1/2, z = x^2.$
- c)  $z_x + z_y = 2; \quad z(x, 0) = x^2.$
- d)  $z_x = 1; \quad z(0, y) = g(y)$  con  $g$  una función arbitraria.
- e)  $z_x = 1; \quad z(x, 0) = h(x)$  con  $h$  una función arbitraria.
- f)  $x(x + y)z_x + y^2 z_y = yz^2; \quad x = t, y = 3t, z = 3, t \in \mathbb{R}.$
- g)  $z_x + e^x z_y = y; \quad z(0, y) = 1 + y.$

11. a) Hállese la superficie tal que el plano tangente en  $A(x, y, z)$  contenga a la recta

$$\frac{X - x}{-y} = \frac{Y - y}{x} = \frac{Z - z}{0}.$$

- b) Calcúlese la solución particular que contenga a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4, z = 10$ , ¿es única?, ¿por qué?

12. Sea la EDP  $(x^2 - y^2 - z^2)z_x + 2xyz_y = 2xz$ .
- Compruébese que  $y = z$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$  es una curva característica.
  - Hállese la superficie integral que contiene a la curva  $x = yz$ ,  $x + y^2 = 0$ .
13. Sean la EDP  $(x^2 + 1)z_x - xyz_y = \frac{z}{x}$  y la curva  $x = 1$ ,  $z = y$ .
- Encuéntrese la integral general.
  - Compruébese si se cumple la condición de transversalidad. En el caso de que se cumpla, hállese la solución que contiene a la curva.
14. Sea la familia de superficies  $x^2 + y^2 + z^2 = Cx$ .
- Hállese la EDP correspondiente a la familia de superficies ortogonales.
  - Encuéntrese la solución general.
  - Determinése la superficie solución que pasa por la recta  $y = x$ ,  $z = 1$ , comprobando que se cumple la condición de transversalidad.
15. Sea la EDP lineal de la forma  $z_x - h(x)z_y = h(x)$ , donde  $h(x)$  es distinta de cero excepto, a lo sumo, en un número finito de puntos.
- Calcúlese una solución particular de la EDP.
  - Si  $h(x) = (f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt$  es la convolución de las funciones  $f(x) = 3e^{-x}$  y  $g(x) = e^{2x}$ , hállese otra superficie integral en forma explícita  $z = \phi(x, y)$  que sea independiente de la solución anterior.
  - Con la expresión de  $h(x)$  obtenida antes, hállese la superficie integral que pasa por la curva  $e^x = y$ ,  $z = 3$ , comprobando previamente que la curva no es característica y que se cumplen las condiciones de existencia y unicidad de la solución.
16. Sea la EDP  $yz_x + xz_y = x + y$ .
- Encuéntrese la solución general.
  - Discútase, en términos de  $\alpha$ , si existe solución que pasa por la recta  $x = y = \alpha z$ .
  - Determinése la superficie solución que pasa por la recta  $x + y = 2$ ,  $z = 1$ , comprobando que se cumple la condición de transversalidad.
17. Sea la EDP lineal de primer orden  $xz_x + (1 + x + y)z_y = axz$ , con  $a \in \mathbb{R}$ .
- Encuéntrese la integral general.
  - Discútase si existe solución que pasa por la curva  $z = 7$ ,  $y = -1 + \alpha x \ln x$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) y calcularla cuando exista.

# Capítulo 3

## EDP generales de primer orden

Hasta ahora nos hemos limitado al estudio de una clase bastante restringida de EDP de primer orden. Consideramos ahora el problema más general de encontrar las soluciones de la EDP

$$\varphi(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$

donde la función  $\varphi$  no es necesariamente lineal en  $z_x$  y  $z_y$ . Desarrollamos un método de resolución para estas ecuaciones, que es una extensión del método de las características visto en el capítulo anterior. Para simplificar la presentación, utilizamos la notación  $z_x = p$  y  $z_y = q$ .

### 3.1. Curvas características, curvas focales y cono de Monge

Consideraremos la EDP

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0, \tag{3.1}$$

donde  $\varphi$  es una función de clase  $\mathcal{C}^2$  en un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$  que verifica  $\varphi_p^2 + \varphi_q^2 \neq 0$ <sup>1</sup> en todo punto  $(x, y, z, p, q) \in D$ , siendo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{y} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

**Definición 3.1.** Decimos que  $z = \phi(x, y)$ , definida en un dominio  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ , es una solución de (3.1) si  $\phi \in \mathcal{C}^2(G)$  y  $\varphi\left(x, y, \phi(x, y), \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)\right) = 0$ , para todo  $(x, y) \in G$ .

Es importante hacer notar que, en la definición anterior, se exige que la solución sea  $\mathcal{C}^2$ , que es más de lo que en principio exigíamos a una solución de una ecuación de primer orden (véase la definición 1.8). La justificación de este hecho radica en que, en algunas demostraciones, nos hará falta más regularidad en la función solución.

Para encontrar la solución de (3.1) trataremos de seguir las mismas ideas que en el caso de la ecuación cuasilineal, buscando una interpretación geométrica de la ecuación y su solución.

---

<sup>1</sup>Condición para que el teorema de la función implícita se pueda aplicar.

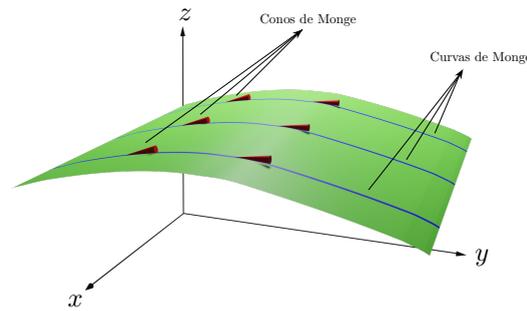


Figura 3.1: Curvas y conos de Monge.

En este sentido, si  $z = z(x, y)$  es una solución, puede verse como una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , cuyo vector normal en un punto de la misma viene dado por  $(p, q, -1)$  y verifica la relación

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0.$$

Esta ecuación da lugar a una familia uniparamétrica de vectores normales o, lo que es lo mismo, a una familia de planos tangentes. La envolvente de esta familia de planos define, localmente, una superficie cónica, de vértice  $(x, y, z(x, y))$ , de manera que la superficie solución es tangente a dicho cono. Este cono recibe el nombre de *cono de Monge*<sup>2</sup>. Así, mientras que en el caso cuasilineal la ecuación asigna a cada punto un vector, en el caso general asigna a cada punto el cono de Monge correspondiente.

En el caso de una EDP cuasilineal el cono de Monge es degenerado, ya que al ser la EDP lineal en  $p$  y  $q$ , todos los vectores normales están en un mismo plano, por lo que la familia de planos tangentes no es otra cosa que un haz de planos. La envolvente es la recta común al haz y lleva la dirección del vector normal al plano que contiene a los vectores  $(p, q, -1)$ . Es decir, es la recta que lleva la dirección característica.

En el caso de la ecuación general, a cada punto del espacio  $\mathbb{R}^3$  se le asigna un cono, el cono de Monge (véase la figura 3.1), y las direcciones de sus generatrices se denominan direcciones características. De este modo, a cada punto de  $\mathbb{R}^3$  le corresponde una familia uniparamétrica de direcciones características. Análogamente al caso de las ecuaciones cuasilineales, el problema de encontrar una solución de la EDP (3.1) consiste en encontrar superficies que se ajusten al campo de conos de Monge, es decir, superficies que en cada punto sean tangentes a dicho cono (el vector tangente está dirigido según una dirección característica).

Para determinar el cono de Monge debemos calcular la envolvente de la familia de planos tangentes. Así, si  $(x_0, y_0, z_0)$  es el punto donde vamos a calcular el cono de Monge, tenemos que calcular la envolvente de la familia de planos tangentes dada por

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \quad \varphi(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0. \quad (3.2)$$

Puesto que  $\varphi_p^2 + \varphi_q^2 \neq 0$ , o bien  $p$  o bien  $q$  puede obtenerse como función del resto de variables en la segunda ecuación de (3.2). Supongamos que  $p = f(x_0, y_0, z_0, q)$ , entonces la envolvente

<sup>2</sup>En honor del geómetra francés Gaspard Monge (1746-1818).

de la familia uniparamétrica de planos (3.2), de parámetro  $q$ , viene dada por

$$\begin{cases} z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \\ \frac{dp}{dq}(x - x_0) + (y - y_0) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Notemos que la segunda ecuación de (3.3) se obtiene de derivar la primera ecuación con respecto a  $q$ . Derivando la segunda ecuación de (3.2) respecto a  $q$  resulta

$$\varphi_p p' + \varphi_q = 0 \quad \Rightarrow \quad p' = -\frac{\varphi_q}{\varphi_p},$$

y, sustituyendo en (3.3), se tiene

$$\frac{x - x_0}{\varphi_p} = \frac{y - y_0}{\varphi_q} = \frac{z - z_0}{p\varphi_p + q\varphi_q}. \quad (3.4)$$

Resumiendo, las generatrices del cono de Monge escritas en forma continua son

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{\varphi_p(x_0, y_0, z_0, p, q)} = \frac{y - y_0}{\varphi_q(x_0, y_0, z_0, p, q)} = \frac{z - z_0}{p\varphi_p(x_0, y_0, z_0, p, q) + q\varphi_q(x_0, y_0, z_0, p, q)}, \\ \varphi(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0. \end{cases}$$

Como hemos dicho, en el caso de una EDP cuasilineal, obtenemos un cono degenerado, que es una recta al fijar un solo punto, donde  $\varphi_p = P$  y  $\varphi_q = Q$ , y la ecuación del cono es

$$\frac{x - x_0}{P} = \frac{y - y_0}{Q} = \frac{z - z_0}{R}.$$

De las ecuaciones (3.4) se sigue que los vectores tangentes a las generatrices del cono de Monge, las direcciones características, vienen dados por

$$(\varphi_p, \varphi_q, p\varphi_p + q\varphi_q).$$

Aquellas curvas que tienen una dirección característica en cada uno de sus puntos reciben el nombre de *curvas focales* o *curvas de Monge*, que son tangentes al cono de Monge en cada punto. Estas curvas son las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \varphi_p(x, y, z, p, q), \\ \frac{dy}{ds} = \varphi_q(x, y, z, p, q), \\ \frac{dz}{ds} = p\varphi_p(x, y, z, p, q) + q\varphi_q(x, y, z, p, q), \end{cases} \quad (3.5)$$

donde la última de las ecuaciones anteriores se conoce como la *condición de banda*. De hecho, lo que se tiene es que las funciones  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$ ,  $p(s)$ ,  $q(s)$  no solo definen una curva en el espacio, sino que al mismo tiempo definen un plano tangente en cada punto, como se ve en la figura 3.2.

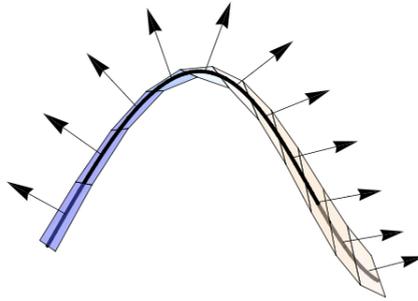


Figura 3.2: Una banda. Configuración consistente en una curva y una familia de planos tangentes a la misma.

**Definición 3.2.** Una configuración consistente en una curva y una familia de planos tangentes se denomina banda, y la curva recibe el nombre de curva soporte. Si fijamos un valor  $s_0$ , entonces  $(x(s_0), y(s_0), z(s_0), p(s_0), q(s_0))$  recibe el nombre de elemento de banda.

El sistema de ecuaciones diferenciales (3.5), junto con la relación

$$\varphi(x(s), y(s), z(s), p(s), q(s)) = 0,$$

dan lugar a las denominadas *bandas focales*. Si exigimos que las bandas focales estén incrustadas en superficies solución de la EDP, entonces tenemos las denominadas *bandas características*. El requerimiento de que una curva de Monge esté sobre una superficie solución da lugar a dos ecuaciones diferenciales adicionales. En efecto, sobre la superficie solución debe cumplirse

$$p = z_x, \quad q = z_y,$$

y como  $x$ ,  $y$  y  $z$  son funciones de  $s$ , al verificar el sistema de ecuaciones diferenciales dado en (3.5), tendremos

$$p = p(x(s), y(s)), \quad q = q(x(s), y(s)).$$

Por tanto, derivando respecto a  $s$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \varphi_p p_x + \varphi_q p_y, \\ \frac{dq}{ds} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \varphi_p q_x + \varphi_q q_y. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Derivando ahora la ecuación de la EDP (3.1), respecto a  $x$  e  $y$  respectivamente, resulta

$$\begin{aligned} \varphi_x + \varphi_z z_x + \varphi_p p_x + \varphi_q q_x &= 0, \\ \varphi_y + \varphi_z z_y + \varphi_p p_y + \varphi_q q_y &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Asumiendo que  $z(x, y)$  es una función de clase  $\mathcal{C}^2$ , se tiene

$$p_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = q_x,$$

y de (3.7) obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi_p p_x + \varphi_q p_y &= -\varphi_x - p\varphi_z, \\ \varphi_p q_x + \varphi_q q_y &= -\varphi_y - q\varphi_z.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.6) llegamos a

$$\frac{dp}{ds} = -\varphi_x - p\varphi_z, \quad \frac{dq}{ds} = -\varphi_y - q\varphi_z,$$

que junto a (3.5) dan lugar al denominado sistema característico

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{ds} = \varphi_p(x, y, z, p, q), \\ \frac{dy}{ds} = \varphi_q(x, y, z, p, q), \\ \frac{dz}{ds} = p\varphi_p(x, y, z, p, q) + q\varphi_q(x, y, z, p, q), \\ \frac{dp}{ds} = -\varphi_x(x, y, z, p, q) - p\varphi_z(x, y, z, p, q), \\ \frac{dq}{ds} = -\varphi_y(x, y, z, p, q) - q\varphi_z(x, y, z, p, q), \end{array} \right.\tag{3.9}$$

que debe satisfacerse junto con la EDP (3.1). Las soluciones de (3.9) que verifican (3.1) son las bandas características y las curvas soporte de dichas bandas, dadas por  $(x(s), y(s), z(s))$ , reciben el nombre de *curvas características*.

Antes de pasar a ver cómo podemos encontrar soluciones de la ecuación (3.1) vemos los conceptos e ideas introducidos hasta ahora en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.3.** Encuéntrese el cono de Monge y las bandas características para la ecuación  $p^2 + q^2 = 1$ .

Comencemos por determinar la ecuación del cono de Monge en un punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . De las ecuaciones (3.4) se deduce

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \underbrace{\frac{z - z_0}{p^2 + q^2}}_1.$$

Teniendo en cuenta que  $p^2 + q^2 = 1$  y eliminando  $p$  y  $q$ , se tiene

$$p = \frac{x - x_0}{z - z_0}, \quad q = \frac{y - y_0}{z - z_0} \quad \Rightarrow \quad (z - z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

que, en este caso, resulta ser un cono recto de eje  $z$  con vértice en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Las bandas características serán las soluciones del sistema característico. Es decir, son las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{ds} = 2p, \quad \frac{dy}{ds} = 2q, \quad \frac{dz}{ds} = 2, \quad \frac{dp}{ds} = 0, \quad \frac{dq}{ds} = 0,$$

que vienen dadas por

$$x(s) = 2p_0s + x_0, \quad y(s) = 2q_0s + y_0, \quad z(s) = 2s + z_0, \quad p(s) = p_0, \quad q(s) = q_0.$$

Además, deberá cumplirse  $p_0^2 + q_0^2 = 1$ . Nótese que de aquí también se deduce la ecuación del cono, ya que eliminando  $s$  de las ecuaciones para  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$ , y teniendo en cuenta que  $p_0^2 + q_0^2 = 1$ , se obtiene

$$(z - z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

La EDP del ejemplo se conoce como *ecuación eiconal* y aparece en la descripción de la propagación de los rayos de luz en un medio homogéneo. Las curvas características son rectas, como puede verse, y corresponden a los rayos de luz. Las curvas  $z(x, y) = cte$  representan los *frentes de onda*. ◀

Parece lógico y natural que las superficies solución de una EDP general de primer orden estén construidas a partir de bandas características. En este sentido, se tiene un resultado que viene a avalar este hecho, ya que si una banda característica y una superficie solución comparten un elemento de banda, entonces toda la banda característica está contenida en la superficie solución.

**Teorema 3.4.** Sean  $(x(s), y(s), z(s), p(s), q(s))$ ,  $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ , una banda característica y  $z = \phi(x, y)$  una superficie solución de la EDP (3.1). Si se verifica

$$(z(s_0), p(s_0), q(s_0)) = (\phi(x(s_0), y(s_0)), \phi_x(x(s_0), y(s_0)), \phi_y(x(s_0), y(s_0))),$$

para algún  $s_0 \in I$ , entonces

$$(z(s), p(s), q(s)) = (\phi(x(s), y(s)), \phi_x(x(s), y(s)), \phi_y(x(s), y(s))), \forall s \in I.$$

**Demostración.** Consideramos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \bar{x}'(s) = \phi_p(\bar{x}(s), \bar{y}(s), \phi(\bar{x}(s), \bar{y}(s)), \phi_x(\bar{x}(s), \bar{y}(s)), \phi_y(\bar{x}(s), \bar{y}(s))), \\ \bar{y}'(s) = \phi_q(\bar{x}(s), \bar{y}(s), \phi(\bar{x}(s), \bar{y}(s)), \phi_x(\bar{x}(s), \bar{y}(s)), \phi_y(\bar{x}(s), \bar{y}(s))), \\ \bar{x}(s_0) = x(s_0), \quad \bar{y}(s_0) = y(s_0), \end{cases}$$

cuya solución es única, y definimos  $\bar{z}(s) = \phi(\bar{x}(s), \bar{y}(s))$ , es decir,  $(\bar{x}(s), \bar{y}(s), \bar{z}(s))$  está sobre la superficie solución. Derivando respecto a  $s$ , se llega a

$$\begin{cases} \bar{z}'(s) = \phi'(s) = \phi_x \bar{x}'(s) + \phi_y \bar{y}'(s) = \phi_x \varphi_p + \phi_y \varphi_q, \\ \phi'_x(s) = \phi_{xx} \bar{x}'(s) + \phi_{xy} \bar{y}'(s) = \phi_{xx} \varphi_p + \phi_{xy} \varphi_q = p_x \varphi_p + p_y \varphi_q, \\ \phi'_y(s) = \phi_{xy} \bar{x}'(s) + \phi_{yy} \bar{y}'(s) = \phi_{xy} \varphi_p + \phi_{yy} \varphi_q = q_x \varphi_p + q_y \varphi_q. \end{cases}$$

Además, por hipótesis,  $\bar{z}(s_0) = z(s_0)$ ,  $\phi_x(s_0) = p_0$ ,  $\phi_y(s_0) = q_0$ . Como  $\phi(x, y)$  es solución, se cumplen las ecuaciones (3.8) y, por tanto,

$$\begin{cases} \phi'_x(s) = -\varphi_x - \phi_x \varphi_z, \\ \phi'_y(s) = -\varphi_y - \phi_y \varphi_z. \end{cases}$$

Es decir,  $(\bar{x}(s), \bar{y}(s), \phi(s), \phi_x(s), \phi_y(s))$  es solución del sistema característico que satisface la misma condición inicial que la banda característica. Por la unicidad de la solución del problema de valor inicial, esta solución coincide con la de la banda característica y, por tanto, la banda está sobre la superficie solución. ■

A partir del resultado anterior, parece natural que la forma de proceder para construir soluciones de la EDP general es la de calcular, para una banda inicial dada, las bandas características que la tienen por dato inicial.

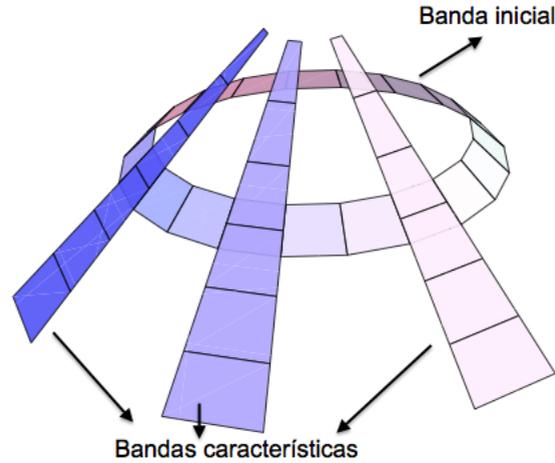


Figura 3.3: Construcción de una solución de una EDP general de primer orden. Por cada uno de los elementos de la banda inicial se hace pasar una banda característica.

## 3.2. Problema de Cauchy

El problema de valor inicial, o de Cauchy, consiste en encontrar la superficie solución que contiene a una curva dada. No obstante, lo que parece natural es que se proporcione una banda inicial y, a partir de ella, construir la superficie solución haciendo pasar una banda característica por cada uno de los elementos de la banda inicial, tal y como puede verse en la figura 3.3, procedimiento que se conoce como *método de Darboux* o *de las características*. Así, deberíamos dar una banda inicial

$$B_1 \equiv (x_0(t), y_0(t), z_0(t), p_0(t), q_0(t)),$$

cuya curva soporte viene dada por  $\Gamma \equiv (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$  y cumpliendo:

1. la *condición de banda*:  $\frac{dz_0(t)}{dt} = p_0(t) \frac{dx_0(t)}{dt} + q_0(t) \frac{dy_0(t)}{dt}$ ,
2. la *condición de compatibilidad*:  $\varphi(x_0(t), y_0(t), z_0(t), p_0(t), q_0(t)) = 0$ .

Si  $\Gamma_0 \equiv (x_0(t), y_0(t))$ , el problema de Cauchy consiste en encontrar una función  $z(x, y)$  de clase  $\mathcal{C}^2$  en un entorno de  $\Gamma_0$  que satisfaga la EDP y que contenga a la banda  $B_1$ .

Al igual que para la ecuación cuasilineal, para garantizar la existencia y unicidad de la solución es preciso exigir alguna *condición de transversalidad*. De hecho, según se ve en la figura 3.3, la banda inicial y las bandas características deben cortarse de manera transversal. Para ello los vectores normales a dichas bandas, en cada elemento de la banda inicial, no deben ser paralelos. Más concretamente, no deberían ser paralelas las proyecciones de los vectores normales. Es decir, se tendría que cumplir

$$\begin{vmatrix} \varphi_p(x_0(t), y_0(t), z_0(t), p_0(t), q_0(t)) & \varphi_q(x_0(t), y_0(t), z_0(t), p_0(t), q_0(t)) \\ x'_0(t) & y'_0(t) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.10)$$

Así, llegamos al teorema de existencia y unicidad de soluciones para el problema de valor inicial, o de Cauchy, para la ecuación general de primer orden.

**Teorema 3.5.** *Sea la ecuación en derivadas parciales dada por  $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ , donde  $\varphi : D \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $\mathcal{C}^2$  y  $\varphi_p^2 + \varphi_q^2 \neq 0$ . Sean  $x_0(t), y_0(t), z_0(t)$  de clase  $\mathcal{C}^2$  en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  y sean  $p_0(t), q_0(t)$  de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $I$  verificando las condiciones de banda, compatibilidad y transversalidad. Entonces, existe un entorno  $G \subset \mathbb{R}^2$  de la curva  $(x_0(t), y_0(t))$  y una única función  $z : G \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) = 0, & \forall (x, y) \in G, \\ z(x_0(t), y_0(t)) = z_0(t), \\ z_x(x_0(t), y_0(t)) = p_0(t), \\ z_y(x_0(t), y_0(t)) = q_0(t). \end{cases}$$

**Demostración.** Para encontrar la solución, resolvemos el sistema característico, tomando como condición inicial, la banda inicial dada por  $(x_0(t), y_0(t), z_0(t), p_0(t), q_0(t))$ . Es decir, resolvemos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \varphi_p, & x(s=0) = x_0(t), \\ \frac{dy}{ds} = \varphi_q, & y(s=0) = y_0(t), \\ \frac{dz}{ds} = p\varphi_p + q\varphi_q, & z(s=0) = z_0(t), \\ \frac{dp}{ds} = -\varphi_x - p\varphi_z, & p(s=0) = p_0(t), \\ \frac{dq}{ds} = -\varphi_y - q\varphi_z, & q(s=0) = q_0(t). \end{cases} \quad (3.11)$$

Las soluciones de (3.11) serán funciones de  $s$  y  $t$

$$x(s, t), y(s, t), z(s, t), p(s, t), q(s, t),$$

cuya existencia y unicidad se derivan de las condiciones que satisfacen  $\varphi$  y las condiciones iniciales. Si  $\Delta = x_s y_t - x_t y_s \neq 0$  en un entorno de  $(x_0(t), y_0(t))$ , las ecuaciones

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t)$$

se pueden invertir y obtener  $s = s(x, y), t = t(x, y)$ . Entonces se tiene

$$\begin{aligned} z &= z(s(x, y), t(x, y)) = z(x, y), \\ p(s(x, y), t(x, y)) &= p(x, y), \quad q(s(x, y), t(x, y)) = q(x, y). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por la condición de transversalidad sabemos que  $\Delta \neq 0$  sobre la curva  $(x_0(t), y_0(t))$  y, por tanto,  $\Delta \neq 0$  en un entorno  $G$  de la misma. Por tanto, las funciones dadas en (3.12) están bien definidas en  $G$  y, además, por ser soluciones del sistema característico y verificarse la condición de compatibilidad resulta

$$\varphi(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)) = 0.$$

Para completar la demostración, solo falta ver que  $p(x, y) = z_x(x, y)$  y  $q(x, y) = z_y(x, y)$ . Para ello, introducimos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} U &= z_t - px_t - qy_t, \\ V &= z_s - px_s - qy_s. \end{aligned} \tag{3.13}$$

La idea es probar que  $U = V = 0$  en  $G$ , por lo que  $p$  y  $q$  serían soluciones de un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz es distinto de cero en  $G$ , ya que  $\Delta \neq 0$ . Por tanto la solución es única. Ahora bien,  $z_x$  y  $z_y$  es también una solución del sistema (3.13) cuando  $U = V = 0$  y, por la unicidad de la solución,  $p = z_x$ ,  $q = z_y$ . Así, pues, debemos probar que  $U = V = 0$  en  $G$ .

Tenemos que  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $p$  y  $q$  son soluciones del sistema característico, por lo que de la tercera ecuación de (3.11) se deduce inmediatamente que  $V = 0$ . Para ver que  $U = 0$ , tomamos la siguiente expresión

$$\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial t} = -p_s x_t - q_s y_t + p_t x_s + q_t y_s.$$

Teniendo en cuenta que  $V = 0$  y que se verifica el sistema característico, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s} &= -(-\varphi_x - p\varphi_z)x_t - (-\varphi_y - q\varphi_z)y_t + p_t\varphi_p + q_t\varphi_q \\ &= \varphi_x x_t + \varphi_y y_t + \varphi_p p_t + \varphi_q q_t + \varphi_z(px_t + qy_t). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Derivando  $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$  respecto a  $t$  se obtiene

$$\varphi_x x_t + \varphi_y y_t + \varphi_z z_t + \varphi_p p_t + \varphi_q q_t = 0,$$

por lo que

$$\varphi_x x_t + \varphi_y y_t + \varphi_p p_t + \varphi_q q_t = -\varphi_z z_t.$$

Sustituyendo en (3.14) resulta

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -\varphi_z(z_t - px_t - qy_t) = -\varphi_z U.$$

Para  $s = 0$  nos encontramos sobre la curva inicial y, por la condición de banda,  $U(0) = 0$ . Así, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales,  $U(s, t) = 0$  en  $G$ . Es decir,

$$z_x(x, y) = p(x, y), \quad z_y(x, y) = q(x, y).$$

Y además es evidente que se cumplen las condiciones iniciales, ya que

$$\begin{aligned} z(x_0(t), y_0(t)) &= z(x(0, t), y(0, t)) = z(0, t) = z_0(t), \\ z_x(x_0(t), y_0(t)) &= p((x_0(t), y_0(t))) = p(x(0, t), y(0, t)) = p(0, t) = p_0(t), \\ z_y(x_0(t), y_0(t)) &= q((x_0(t), y_0(t))) = q(x(0, t), y(0, t)) = q(0, t) = q_0(t). \end{aligned}$$

Para concluir la demostración del teorema, es necesario probar la unicidad, pero ésta es consecuencia del teorema 3.4. ■

Nótese que el teorema 3.5 garantiza la existencia y unicidad de soluciones a partir de una banda inicial. Sin embargo, si lo que se da inicialmente es una curva, el problema puede tener más de una solución, ya que puede haber más de una banda inicial que contenga a la curva. De hecho,  $p_0(t)$  y  $q_0(t)$  deben satisfacer las condiciones de banda y de compatibilidad. Esto da lugar a un sistema de ecuaciones no lineales que puede tener más de una solución.

**Ejemplo 3.6.** Hállense las superficies solución de la EDP general de primer orden  $p^2 + q^2 = 1$  que contienen a la circunferencia  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$ .

Para encontrar la o las soluciones de este problema, lo primero que debemos hacer es completar la curva inicial hasta una banda. Así, partiendo de una parametrización de la curva

$$x_0(t) = \cos t, \quad y_0(t) = \sen t, \quad z_0(t) = 1,$$

las condiciones de banda y de compatibilidad quedarían de la forma

$$\text{banda: } 0 = -p_0(t) \sen t + q_0(t) \cos t,$$

$$\text{compatibilidad: } p_0(t)^2 + q_0(t)^2 = 1.$$

De aquí se deduce que hay dos soluciones posibles, la primera

$$p_0(t) = \cos t, \quad q_0(t) = \sen t,$$

y la segunda

$$p_0(t) = -\cos t, \quad q_0(t) = -\sen t.$$

Por tanto existen dos bandas iniciales, que darán lugar a dos soluciones, si se cumple la condición de transversalidad. En este caso, esta condición viene dada por

$$\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ x'_0(t) & y'_0(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cos t & 2 \sen t \\ -\sen t & \cos t \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

para la primera de las bandas. Para la segunda, se tiene que el determinante anterior es  $-2$ , por lo que en los dos casos se cumple la condición de transversalidad. En consecuencia, cada una de las dos bandas va a dar lugar a una solución de la EDP que contiene a la circunferencia inicial.

Comencemos calculando la primera solución, mediante el procedimiento descrito en el teorema 3.5, a partir del sistema característico

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \varphi_p = 2p, & x(s=0) = x_0(t) = \cos t, \\ \frac{dy}{ds} = \varphi_q = 2q, & y(s=0) = y_0(t) = \sen t, \\ \frac{dz}{ds} = p\varphi_p + q\varphi_q = 2, & z(s=0) = z_0(t) = 1, \\ \frac{dp}{ds} = -\varphi_x - p\varphi_z = 0, & p(s=0) = p_0(t) = \cos t, \\ \frac{dq}{ds} = -\varphi_y - q\varphi_z = 0, & q(s=0) = q_0(t) = \sen t. \end{cases}$$

Las tres últimas ecuaciones son directamente resolubles, obteniéndose

$$z(s, t) = 2s + 1, \quad p(s, t) = \cos t, \quad q(s, t) = \operatorname{sen} t.$$

Llevando las expresiones de  $p(s, t)$  y  $q(s, t)$  a las dos primeras ecuaciones, resulta

$$x(s, t) = (2s + 1) \cos t, \quad y(s, t) = (2s + 1) \operatorname{sen} t.$$

Ahora es inmediato comprobar que, eliminando  $s$  y  $t$  se obtiene

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

que es una solución de la EDP que contiene a la curva inicial (solución calculada a partir de la primera banda).

Procediendo de manera análoga con la otra banda, llegamos a

$$\begin{aligned} x(s, t) &= (-2s + 1) \cos t, & y(s, t) &= (-2s + 1) \operatorname{sen} t, & z(s, t) &= 2s + 1, \\ p(s, t) &= -\cos t, & q(s, t) &= -\operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Para eliminar  $s$  y  $t$  de las ecuaciones de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , observamos que

$$z(s, t) - 2 = 2s - 1.$$

Por tanto, la otra solución buscada es

$$(z - 2)^2 = x^2 + y^2.$$

Nótese que estas soluciones son compatibles con lo que ya se dijo en el ejemplo 3.3. ◀

El teorema 3.5 no puede aplicarse en el caso de que no se cumpla la condición de transversalidad. En ese caso, el problema tendrá infinitas soluciones si la banda inicial es característica, de modo análogo a lo que sucedía para las ecuaciones cuasilineales. En otro caso, no habrá solución en el sentido riguroso dado en la definición 3.1.

### 3.3. Integral completa, integral general e integral singular

Como ya se vio en el capítulo 1 la solución general de una ecuación no lineal de primer orden aparece a través de lo que se denomina *integral completa*, que consiste en una familia biparamétrica de soluciones de la forma

$$z = F(x, y; a, b).$$

De manera más precisa damos la siguiente definición.

**Definición 3.7.** Una familia biparamétrica de soluciones  $z = F(x, y; a, b)$  se dice que es una integral completa de la ecuación (3.1) si existe un dominio en el cual el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} F_a & F_{xa} & F_{ya} \\ F_b & F_{xb} & F_{yb} \end{pmatrix}$$

es máximo<sup>3</sup>. En particular, si  $J = F_{xa}F_{yb} - F_{xb}F_{ya} \neq 0$ .

A veces también se llama integral completa a una relación de la forma

$$\Phi(x, y, z; a, b) = 0,$$

de donde se deduce una familia de soluciones de la forma  $z = F(x, y; a, b)$  que verifica las condiciones de la definición anterior. En este caso, debe cumplirse la condición

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \Phi_a & \Phi_{xa} & \Phi_{ya} & \Phi_{za} \\ \Phi_b & \Phi_{xb} & \Phi_{yb} & \Phi_{zb} \end{pmatrix} = 2. \quad (3.15)$$

El significado del concepto de integral completa proviene de la idea de que mediante la formación de envolventes, a través de un proceso de diferenciación y eliminación, se puede obtener un conjunto de soluciones de la ecuación (3.1) que dependen de una función arbitraria. En este proceso constructivo se relaciona  $b$  con  $a$  a través de una función arbitraria, de manera que  $b = \omega(a)$ , y luego se elimina  $a$  de las ecuaciones

$$z = F(x, y; a, \omega(a)), \quad F_a(x, y; a, \omega(a)) + F_b(x, y; a, \omega(a))\omega'(a) = 0. \quad (3.16)$$

De la segunda ecuación se obtiene  $a = a(x, y)$ , que llevado a la primera ecuación nos da

$$z = F(x, y; a(x, y), \omega(a(x, y))),$$

obteniéndose así una solución de la ecuación (3.1), denominada *integral general* de (3.1) correspondiente a la integral completa, que depende de la función arbitraria  $\omega$ . Veamos que esta integral completa es una solución de la ecuación (3.1).

Derivando esta expresión respecto a  $x$  y respecto a  $y$  y teniendo en cuenta la segunda igualdad de (3.16), resulta

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial a}{\partial x} \omega' = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} \omega' \right) = \frac{\partial F}{\partial x}, \\ z_y &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial a}{\partial y} \omega' = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} \omega' \right) = \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned}$$

de donde se sigue, de manera evidente, que la envolvente es una superficie solución, ya que se cumple

$$\varphi(x, y, F, F_x, F_y) = 0.$$

Podemos llegar a la misma conclusión con un enfoque diferente. En concreto, para cada valor de  $a$ , las ecuaciones (3.16) representan una curva, que es la curva de contacto entre

<sup>3</sup>Esta condición garantiza que los parámetros  $a$  y  $b$  son funcionalmente independientes.

la superficie integral  $z = F(x, y; a, \omega(a))$  y la envolvente. Puesto que tanto  $\omega(a)$  como  $\omega'(a)$  pueden ser elegidos de manera arbitraria, podemos escribir  $\omega(a) = b$  y  $\omega'(a) = c$ , de manera que las ecuaciones (3.16) quedan

$$z = F(x, y; a, b), \quad F_a(x, y; a, b) + F_b(x, y; a, b) c = 0. \quad (3.17)$$

Estas ecuaciones dependen de tres parámetros y, como ya hemos dicho, son las curvas de contacto entre las superficies solución y la envolvente. Ahora bien, estas curvas son características y las bandas correspondientes, que se obtienen a partir de  $p = F_x(x, y; a, b)$  y  $q = F_y(x, y; a, b)$ , son también características, por lo que la envolvente es una superficie solución.

Para ver que las curvas son características, debemos ver que se cumplen las ecuaciones (3.5). Supondremos que se verifica la condición  $J \neq 0$  con la notación de la definición 3.7. Tomamos  $x$  en lugar de  $s$  como variable independiente, de manera que  $y$  dependerá de  $x$ , y derivamos la segunda ecuación del sistema (3.17) respecto a  $x$ . De este modo se obtiene

$$F_{ax} + F_{ay}y_x + (F_{bx} + F_{by}y_x)c = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ax} + cF_{bx} = -y_x(F_{ay} + cF_{by}). \quad (3.18)$$

Por la suposición de que  $J \neq 0$  se sigue que  $F_{ax} + cF_{bx} \neq 0$ . Teniendo en cuenta que  $z = F(x, y; a, b)$  define una familia biparamétrica de soluciones, resulta

$$\varphi(x, y, F(x, y; a, b), F_x(x, y; a, b), F_y(x, y; a, b)) = 0,$$

y derivando respecta a  $a$  y  $b$  se tiene

$$\varphi_z F_a + \varphi_p F_{xa} + \varphi_q F_{ya} = 0, \quad \varphi_z F_b + \varphi_p F_{xb} + \varphi_q F_{yb} = 0. \quad (3.19)$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por  $c$  y le sumamos la primera llegamos a

$$\varphi_z(F_a + cF_b) + \varphi_p(F_{xa} + cF_{xb}) + \varphi_q(F_{ya} + cF_{yb}) = 0.$$

Teniendo en cuenta (3.17) y (3.18), resulta

$$(F_{ya} + cF_{yb})(\varphi_p y_x - \varphi_q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\varphi_p} = \frac{dy}{\varphi_q},$$

por lo que las curvas son características<sup>4</sup>.

Según lo anterior, si la familia de superficies biparamétrica tiene una envolvente respecto a los dos parámetros, esta superficie también será una solución que recibe el nombre de *integral singular* y será entonces la superficie envolvente de todas las integrales completas. Esta solución resulta de eliminar  $a$  y  $b$  del sistema de ecuaciones

$$z = F(x, y; a, b), \quad F_a(x, y; a, b) = 0, \quad F_b(x, y; a, b) = 0. \quad (3.20)$$

Es interesante notar que se puede obtener la integral singular a partir de la propia ecuación en derivadas parciales, sin necesidad de conocer una integral completa. En efecto, de las ecuaciones (3.19), y teniendo en cuenta las dos últimas ecuaciones de (3.20), se tiene

$$\varphi_p F_{xa} + \varphi_q F_{ya} = 0, \quad \varphi_p F_{xb} + \varphi_q F_{yb} = 0,$$

---

<sup>4</sup>El resto de ecuaciones características se sigue por el hecho de ser  $z = F(x, y; a, b)$  solución.

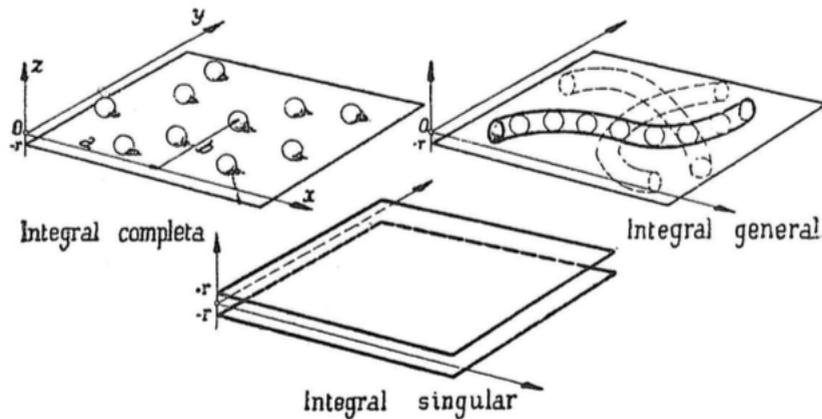


Figura 3.4: Integral completa, integral general e integral singular de  $z^2(p^2 + q^2 + 1) = r^2$ .

que es un sistema homogéneo de ecuaciones en  $\varphi_p$  y  $\varphi_q$ . Puesto que  $z = F(x, y; a, b)$  es una integral completa y  $F_a = F_b = 0$ , tiene que cumplirse que  $J \neq 0$  y por tanto el sistema anterior tiene solución única. De aquí se deduce que  $\varphi_p = \varphi_q = 0$ . Así, la solución singular se obtiene como la envolvente de la familia biparamétrica de superficies, de parámetros  $p$  y  $q$ , definida por la ecuación en derivadas parciales. Es decir, la solución singular, en caso de que exista, se obtiene eliminando  $p$  y  $q$  del sistema

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0, \quad \varphi_p(x, y, z, p, q) = 0, \quad \varphi_q(x, y, z, p, q) = 0.$$

Vemos a continuación un ejemplo intuitivo en el que se aclara esta diversidad de soluciones.

**Ejemplo 3.8.** Imaginémonos todas las posiciones de una bola de billar sobre el plano en que rueda. Cada posición tiene una superficie definida por dos constantes: las coordenadas  $a$  y  $b$  de su centro (en el plano que los contienen a todos y que tomaremos como  $xy$ ). Véase la figura 3.4<sup>5</sup>. Tenemos entonces una familia doblemente infinita de superficies de ecuación  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2$ , donde  $r$  es constante. La eliminación de las constantes  $a$  y  $b$  entre la ecuación anterior y la que resulta de derivarla con respecto a  $x$  e  $y$  nos da fácilmente la EDP que cumplen las superficies, que es:

$$z^2(p^2 + q^2 + 1) = r^2.$$

La superficie  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2$  con las dos constantes arbitrarias constituye una integral completa de la EDP anterior. Su imagen intuitiva la da el conjunto de todas las posiciones de la bola quieta sobre el plano.

Si a continuación deslizamos la bola sobre el plano de modo que su centro siga una trayectoria arbitraria  $b = \omega(a)$ , las infinitas superficies tubulares que de esta forma podríamos obtener como envolventes de las posiciones de la bola en cada trayectoria darán la imagen de la integral general.

Finalmente, los planos tangentes inferior y superior envolventes de todas las posiciones, así como de todas las superficies tubulares, darán la solución singular  $z^2 = r^2$ . ◀

<sup>5</sup>Tomada de [23].

### 3.3.1. Método de Lagrange-Charpit

Como se ha visto, obtener la solución general de una EDP no lineal de primer orden pasa por encontrar una integral completa. Una manera de hacerlo es mediante el método de Lagrange-Charpit. El método consiste en la búsqueda de una integral primera  $G(x, y, z, p, q, a) = 0$  del sistema característico

$$\frac{dx}{\varphi_p} = \frac{dy}{\varphi_q} = \frac{dz}{p\varphi_p + q\varphi_q} = \frac{dp}{-\varphi_x - p\varphi_z} = \frac{dq}{-\varphi_y - q\varphi_z},$$

de manera que, en un cierto dominio  $D$ ,

$$\frac{\partial(\varphi, G)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix} \neq 0.$$

Esta condición nos dice que la integral primera debe depender explícitamente o de  $p$ , o de  $q$  o de ambas a la vez. Ahora resolvemos el sistema

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0, \quad G(x, y, p, q, a) = 0,$$

para obtener  $p = p(x, y, z, a)$ ,  $q = q(x, y, z, a)$  y planteamos la ecuación en diferenciales totales

$$p(x, y, z, a)dx + q(x, y, z, a)dy - dz = 0,$$

cuya solución nos proporciona una integral completa  $\Phi(x, y, z; a, b) = 0$ .

**Ejemplo 3.9.** Encuéntrese una integral completa de la ecuación en derivadas parciales  $pq = z$ .

A partir del sistema característico

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q},$$

es fácil encontrar una integral primera en las condiciones que hemos mencionado anteriormente. En concreto, de  $\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$ , obtenemos  $\frac{p}{q} = a$ , lo que juntamente con  $pq = z$  da

$$p^2 = az, \quad p = \sqrt{az}, \quad q^2 = \frac{z}{a}, \quad q = \sqrt{\frac{z}{a}}.$$

Sustituyendo ahora en  $dz = p dx + q dy$ , da

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{a} dx + \frac{dy}{\sqrt{a}},$$

cuya solución es  $2\sqrt{z} + b = \sqrt{a}x + \frac{y}{\sqrt{a}}$ , que es una integral completa de la ecuación en derivadas parciales.

Pero, también podríamos haber partido de  $\frac{dx}{q} = \frac{dq}{q}$  y  $\frac{dy}{p} = \frac{dp}{p}$ , obteniendo así  $q = x + a$  y  $p = y + b$ . Formamos entonces la ecuación en diferenciales totales

$$dz = (y + b)dx + (x + a)dy,$$

cuya solución es  $z = (x+a)(y+b) + c$ . Ahora tenemos que eliminar una de las tres constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  que aparecen en la expresión anterior. Para ello, hacemos que se cumpla la ecuación en derivadas parciales. Así,  $p = z_x = y + b$ ,  $q = z_y = x + a$  y  $z = pq = (y + b)(x + a)$ . Luego,  $c = 0$  y la integral completa resultante es  $z = (y + b)(x + a)$ . ◀

Como se deduce del procedimiento seguido, y puesto de manifiesto en el ejemplo anterior, pueden existir diferentes sistemas de integrales completas, de manera que la solución obtenida dista mucho de darnos todas las superficies que verifican la ecuación general (3.1).

El método de Lagrange-Charpit se reduce a la resolución de una ecuación en diferenciales totales, que habrá que probar que siempre puede resolverse. Para ello se tiene que cumplir la condición de integrabilidad de una ecuación en diferenciales totales. En este sentido, consideremos la ecuación

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0. \quad (3.21)$$

Esta ecuación tendrá solución si existen funciones  $F(x, y, z) = C$  y  $\mu(x, y, z)$  tales que

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \mu(Pdx + Qdy + Rdz) = 0. \quad (3.22)$$

Si la función  $F$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ , se cumple la igualdad entre derivadas cruzadas y se satisfacen las ecuaciones

$$F_{xy} = F_{yx}, \quad F_{xz} = F_{zx}, \quad F_{yz} = F_{zy}.$$

Luego, teniendo en cuenta (3.22), se sigue que

$$F_x = \mu P, \quad F_y = \mu Q \quad \text{y} \quad F_z = \mu R,$$

de manera que, si se cumplen las tres igualdades anteriores, debe verificarse respectivamente

$$\begin{aligned} \mu_y P + \mu P_y &= \mu_x Q + \mu Q_x, \\ \mu_z P + \mu P_z &= \mu_x R + \mu R_x, \\ \mu_z Q + \mu Q_z &= \mu_y R + \mu R_y. \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por  $R$ , la segunda por  $Q$  y la tercera por  $P$ , sumamos la primera y la tercera y restamos la segunda, resulta

$$P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0, \quad (3.23)$$

que es condición necesaria y suficiente para que la ecuación (3.21) pueda resolverse. Ahora podemos enunciar un teorema que nos garantiza que el método de Lagrange-Charpit da lugar a una ecuación en diferenciales totales que es resoluble.

**Teorema 3.10.** Sean la ecuación en derivadas parciales  $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ , con  $\varphi$  de clase  $\mathcal{C}^2$ , y  $G(x, y, z, p, q, a) = 0$  una integral primera de clase  $\mathcal{C}^2$  del sistema característico, de manera que existe un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^6$  donde

$$\frac{\partial(\varphi, G)}{\partial(p, q)} \neq 0.$$

Entonces, existe un dominio  $U \subset \mathbb{R}^4$  y funciones  $p(x, y, z, a)$  y  $q(x, y, z, a)$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , definidas en  $U$ , tales que

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, p(x, y, z, a), q(x, y, z, a)) &= 0, \\ G(x, y, z, p(x, y, z, a), q(x, y, z, a), a) &= 0,\end{aligned}\tag{3.24}$$

para todo  $(x, y, z, a) \in U$  y la ecuación en diferenciales totales

$$p(x, y, z, a)dx + q(x, y, z, a)dy - dz = 0,$$

cumple la condición de integrabilidad (3.23).

**Demostración.** La existencia de las funciones  $p$  y  $q$  se sigue de manera inmediata de la condición

$$\frac{\partial(\varphi, G)}{\partial(p, q)} \neq 0,$$

por lo que debemos ver que la ecuación en diferenciales totales cumple la condición de integrabilidad. Para ello, derivamos las ecuaciones (3.24) respecto a  $x, y, z$ . De este modo, empezando por  $x$ , se obtiene

$$\begin{cases} \varphi_x + \varphi_p p_x + \varphi_q q_x = 0, \\ G_x + G_p p_x + G_q q_x = 0. \end{cases}$$

Si eliminamos  $p_x$  del sistema de ecuaciones anterior resulta

$$\varphi_x G_p - \varphi_p G_x - \frac{\partial(\varphi, G)}{\partial(p, q)} q_x = 0.\tag{3.25}$$

De manera análoga, repitiendo el proceso para  $y$  y  $z$ , llegamos a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\varphi_y G_q - \varphi_q G_y + \frac{\partial(\varphi, G)}{\partial(p, q)} p_y &= 0, \\ \varphi_z G_p - \varphi_p G_z - \frac{\partial(\varphi, G)}{\partial(p, q)} q_z &= 0, \\ \varphi_z G_q - \varphi_q G_z + \frac{\partial(\varphi, G)}{\partial(p, q)} p_z &= 0.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Combinando (3.26) y (3.25), se llega a

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi, G)}{\partial(p, q)}(qp_z - pq_z + p_y - q_x) - \varphi_p G_x - \varphi_q G_y - (p\varphi_p + q\varphi_q)G_z \\ + (\varphi_x + p\varphi_z)G_p + (\varphi_y + q\varphi_z)G_q = 0.\end{aligned}$$

Ahora bien, por ser  $G$  integral primera, se cumple

$$-\varphi_p G_x - \varphi_q G_y - (p\varphi_p + q\varphi_q)G_z + (\varphi_x + p\varphi_z)G_p + (\varphi_y + q\varphi_z)G_q = 0,$$

por lo que

$$qp_z - pq_z + p_y - q_x = 0,$$

que es la condición de integrabilidad asociada a la ecuación en diferenciales totales

$$p(x, y, z, a)dx + q(x, y, z, a)dy - dz = 0. \quad (3.27)$$

La demostración está entonces completa. ■

Para acabar de justificar el método de Lagrange-Charpit falta probar que la solución de la ecuación en diferenciales totales da lugar a una integral completa. Ahora bien, por verificar (3.27) la condición de integrabilidad, existen funciones  $\Psi$  y  $\mu$  tales que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y, z, a) &= \mu(x, y, z, a)p(x, y, z, a), \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y, z, a) &= \mu(x, y, z, a)q(x, y, z, a), \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z}(x, y, z, a) &= -\mu(x, y, z, a), \end{aligned} \quad (3.28)$$

de manera que la solución general de (3.27) se puede expresar como

$$\Psi(x, y, z, a) = b.$$

Puesto que  $\frac{\partial \Psi}{\partial z} \neq 0$ , el teorema de la función implícita nos permite definir una función  $F$  tal que  $z = F(x, y; a, b)$  de manera que

$$\Psi(x, y, F(x, y; a, b), a) = b.$$

Derivando respecto a  $x$ , resulta

$$\Psi_x + \Psi_z F_x = 0$$

y, teniendo en cuenta (3.28), se llega a

$$\mu p - \mu F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x(x, y; a, b) = p(x, y, F(x, y; a, b), a).$$

Análogamente,  $F_y(x, y; a, b) = q(x, y, F(x, y; a, b), a)$  y, por (3.24), se sigue

$$\varphi(x, y, F(x, y; a, b), F_x(x, y; a, b), F_y(x, y; a, b)) = 0.$$

Por otra parte, tomando  $\Phi(x, y, z; a, b) = \Psi(x, y, z, a) - b = 0$ , se verifica la condición (3.15) y entonces  $\Psi(x, y, z, a) = b$  es una integral completa.

### 3.3.2. Ecuaciones en diferenciales totales

Puesto que el método de Lagrange-Charpit implica la resolución de una ecuación en diferenciales totales

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0,$$

vamos a dar algunas técnicas que permiten obtener soluciones, siempre que se cumpla la condición de integrabilidad. En concreto, integraremos este tipo de ecuaciones en tres situaciones diferentes.

1. Cuando la ecuación es exacta, es decir, se cumple

$$P_y = Q_x, \quad P_z = R_x, \quad Q_z = R_y.$$

2. Cuando la ecuación no es exacta, pero se cumple alguna de las tres igualdades anteriores (ecuaciones de exactitud).

3. Cuando la ecuación es homogénea, es decir, cuando las funciones  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son homogéneas del mismo grado

$$P(tx, ty, tz) = t^\alpha P(x, y, z),$$

$$Q(tx, ty, tz) = t^\alpha Q(x, y, z),$$

$$R(tx, ty, tz) = t^\alpha R(x, y, z).$$

**Caso 1.** Si la ecuación es exacta, basta con encontrar una función  $F(x, y, z)$  que verifique

$$F_x = P, \quad F_y = Q, \quad F_z = R.$$

En este caso, la solución general será  $F(x, y, z) = a$ .

**Ejemplo 3.11.** Hállese la solución general de la ecuación en diferenciales totales

$$(y \cos x - ze^x)dx + (2yz^2 + \operatorname{sen} x)dy + (2y^2z - e^x)dz = 0.$$

Es inmediato comprobar que se cumplen las condiciones de exactitud, ya que

$$P_y = \cos x = Q_x, \quad P_z = -e^x = R_x, \quad Q_z = 4yz = R_y.$$

Por tanto la solución será de la forma  $F(x, y, z) = a$ , donde  $F$  cumple

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \cos x - ze^x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2yz^2 + \operatorname{sen} x, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2y^2z - e^x.$$

Integrando la primera de las tres ecuaciones respecto a  $x$  resulta  $F(x, y, z) = y \operatorname{sen} x - ze^x + G(y, z)$ , siendo  $G(y, z)$  es una función arbitraria. Imponiendo que se verifique la segunda ecuación se llega a

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \operatorname{sen} x + \frac{\partial G}{\partial y} = 2yz^2 + \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 2yz^2,$$

de donde  $G(y, z) = y^2z^2 + H(z)$ , con  $H$  arbitraria y, por tanto,

$$F(x, y, z) = y \operatorname{sen} x - ze^x + y^2z^2 + H(z).$$

Finalmente de la tercera ecuación podemos obtener  $H(z) = C$ , de manera que la solución general es

$$y \operatorname{sen} x - ze^x + y^2z^2 = a. \quad \blacktriangleleft$$

**Caso 2.** Si la ecuación no es exacta, pero cumple alguna de las tres ecuaciones de exactitud, puede resolverse tomando una de las variables como constante. Por ejemplo, si es exacta en  $x$  e  $y$  tomaremos  $z$  como constante, por lo que  $dz = 0$  y la ecuación se reduce a una exacta en dos variables, resoluble, que dependerá de una constante de integración que será una función arbitraria  $g(z)$ . Tomando la diferencial total de esta solución y comparando con la ecuación en diferenciales totales, es posible determinar  $g(z)$  y así encontrar la solución general.

**Ejemplo 3.12.** Encuéntrese la solución general de la ecuación en diferenciales totales

$$(3xz + 2y)dx + xdy + x^2dz = 0.$$

Esta ecuación no es exacta, pero cumple la condición de integrabilidad, ya que, como puede comprobarse,

$$P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0.$$

Además, cumple la condición de exactitud en las variables  $y, z$ , pues

$$Q_z = 0 = R_y,$$

por tanto tomamos  $x$  como constante,  $dx = 0$  y resolvemos la ecuación exacta en  $y, z$

$$xdy + x^2dz = 0.$$

Su solución es de la forma

$$xy + x^2z - g(x) = 0. \quad (3.29)$$

Tomando la diferencial total de esta expresión llegamos a

$$(y + 2xz - g'(x))dx + xdy + x^2dz = 0,$$

que, comparando con la ecuación en diferenciales totales original, nos lleva a

$$y + 2xz - g'(x) = 3xz + 2y \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -xz - y = -\frac{1}{x}(x^2z + xy).$$

Teniendo en cuenta (3.29), resulta

$$g'(x) = -\frac{g(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad g(x) = \frac{a}{x},$$

y, finalmente, la solución de la ecuación queda como

$$x^2y + x^3z = a.$$

Nótese que  $\mu(x, y, z) = x$  es un factor integrante de la ecuación, ya que al multiplicarla por  $x$  se convierte en exacta. ◀

**Caso 3.** Cuando la ecuación es homogénea, el cambio de variable  $x = uz$ ,  $y = vz$ , permite reducir la ecuación a una del caso 1 y, por tanto, resolver el problema. En particular, podemos *separar* una variable mediante una manipulación apropiada y transformarla en exacta.

**Ejemplo 3.13.** Hállese la solución general de la ecuación en diferenciales totales

$$(x - z)dx + (2x + 2y)dy + (x + 2y + z)dz = 0.$$

Podemos ver que la ecuación cumple la condición de integrabilidad, pero no es exacta, ni tampoco verifica alguna de las tres ecuaciones de exactitud. Sin embargo, es evidente que la ecuación es homogénea, ya que las tres funciones  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  y  $R(x, y, z)$  son polinómios homogéneos de primer grado. Por tanto hacemos el cambio de variable  $x = uz$ ,  $y = vz$ . Según esto se tiene

$$dx =udz + zdu, \quad dy =vdz + zdv,$$

que llevado a la ecuación diferencial resulta

$$(uz - z)(udz + zdu) + (2uz + 2vz)(vdz + zdv) + (uz + 2vz + z)dz = 0.$$

Eliminando el factor común  $z$  y agrupando términos se llega a

$$z(u - 1)du + 2z(u + v)dv + (u^2 + 2uv + 2v^2 + 2v + 1)dz = 0.$$

En esta ecuación, las variables están de algún modo separadas, ya que si dividimos toda la ecuación por  $z(u^2 + 2uv + 2v^2 + 2v + 1)$  y, tenemos en cuenta que

$$u^2 + 2uv + 2v^2 + 2v + 1 = (u + v)^2 + (v + 1)^2,$$

obtenemos

$$\frac{u - 1}{(u + v)^2 + (v + 1)^2}du + 2\frac{u + v}{(u + v)^2 + (v + 1)^2}dv + \frac{1}{z}dz = 0,$$

que es una ecuación exacta. Detallaremos el primer paso de su resolución, pues lo que sigue luego es inmediato. Buscamos  $F(u, v, z)$  tal que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{u - 1}{(u + v)^2 + (v + 1)^2} \Rightarrow F = \int \frac{u - 1}{(u + v)^2 + (v + 1)^2} du.$$

Haciendo el cambio de variable  $u + v = t$ , llegamos a

$$F = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + (v + 1)^2} dt - (v + 1) \int \frac{dt}{t^2 + (v + 1)^2},$$

de donde se sigue que

$$F(u, v, z) = \frac{1}{2} \ln \left( (u + v)^2 + (v + 1)^2 \right) - \arctan \frac{u + v}{v + 1} + G(v, z).$$

Una vez determinada la función  $G(v, z) = \ln z$ , la solución de la ecuación queda como

$$\frac{1}{2} \ln \left( (u + v)^2 + (v + 1)^2 \right) - \arctan \frac{u + v}{v + 1} + \ln z = a.$$

Finalmente, solo queda deshacer el cambio de variable inicial para llegar a

$$\frac{1}{2} \ln \frac{(x + y)^2 + (y + z)^2}{z^2} - \arctan \frac{x + y}{y + z} + \ln z = a. \quad \blacktriangleleft$$

### 3.3.3. Integral completa y el problema de Cauchy

El problema de Cauchy o de valor inicial lo hemos resuelto por el método de las características, pero también es posible hacerlo una vez conocida una integral completa. De alguna forma, se trata de determinar la función arbitraria  $b = \omega(a)$  a partir de las condiciones iniciales y la envolvente de la familia uniparamétrica de superficies será la solución del problema de Cauchy.

Supongamos que tenemos una curva inicial dada  $(x(t), y(t), z(t))$  y una integral completa  $F(x, y, z; a, b) = 0$ . Como la curva inicial tiene que estar contenida en la superficie solución, su vector tangente tiene que ser ortogonal al vector normal a la superficie solución, por lo que debe cumplirse

$$F_x(x(t), y(t), z(t); a, b)x'(t) + F_y(x(t), y(t), z(t); a, b)y'(t) + F_z(x(t), y(t), z(t); a, b)z'(t) = 0. \quad (3.30)$$

De la ecuación anterior y de la ecuación  $F(x(t), y(t), z(t); a, b) = 0$  podemos eliminar  $t$  para encontrar una relación de la forma  $b = \omega(a)$ , con lo que queda determinada la función arbitraria. Ahora, calculando la envolvente de la familia de superficies  $F(x, y, z; a, \omega(a)) = 0$ , se obtiene la solución al problema de Cauchy.

Observamos que la ecuación (3.30) también se obtiene derivando respecto a  $t$  la ecuación que define la integral completa, una vez que se han sustituido  $x, y, z$  por los datos iniciales. El procedimiento así empleado se conoce como *método de Lagrange* o *de la envolvente de la integral completa*.

**Ejemplo 3.14.** Determinése la solución de la ecuación en derivadas parciales

$$(p^2 + q^2)x = pz$$

que contiene a la curva  $x = 0, z^2 = 4y$ .

En primer lugar debemos obtener una integral completa, por lo que usamos el método de Lagrange-Charpit. A partir del sistema característico

$$\frac{dx}{2px - z} = \frac{dy}{2qx} = \frac{dz}{pz} = \frac{dp}{-q^2} = \frac{dq}{pq},$$

es fácil obtener una integral primera a partir de

$$\frac{dp}{-q} = \frac{dq}{p} \Rightarrow p^2 + q^2 = a^2.$$

Con esta integral y la ecuación en derivadas parciales, resulta

$$p = \frac{a^2 x}{z}, \quad q = \frac{\sqrt{a^2 z^2 - a^4 x^2}}{z},$$

por lo que podemos obtener una integral completa resolviendo la ecuación en diferenciales totales

$$\frac{a^2 x}{z} dx + \frac{\sqrt{a^2 z^2 - a^4 x^2}}{z} dy = dz.$$

Si dividimos toda la ecuación por el coeficiente de  $dy$  y multiplicamos por  $a^2$ , llegamos a

$$\frac{a^2 z dz}{\sqrt{a^2 z^2 - a^4 x^2}} - \frac{a^4 x dx}{\sqrt{a^2 z^2 - a^4 x^2}} = a^2 dy,$$

que es una ecuación diferencial exacta, cuya solución es

$$\sqrt{a^2 z^2 - a^4 x^2} = a^2 y + ab,$$

donde la constante arbitraria la hemos expresado de la forma  $ab$ . Elevando al cuadrado y simplificando, se tiene una integral completa

$$F(x, y, z; a, b) = z^2 - a^2 x^2 - (ay + b)^2 = 0.$$

Para resolver ahora el problema de Cauchy, parametrizamos la curva inicial, como

$$x(t) = 0, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = 2t,$$

que, puede comprobarse que cumple la condición de transversalidad (3.10). En efecto, si completamos la curva inicial hasta una banda, imponiendo las condiciones de compatibilidad y banda, resulta

$$p(t) = 0, \quad q(t) = \frac{1}{t},$$

por lo que

$$\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2t & 0 \\ 0 & 2t \end{vmatrix} = -4t^2 \neq 0, \text{ si } t \neq 0.$$

En estas circunstancias tenemos garantizada la existencia de una única solución del problema. Para obtenerla a partir de la integral completa, formamos el sistema de ecuaciones

$$F(x(t), y(t), z(t); a, b) = 0, \quad \frac{dF(x(t), y(t), z(t); a, b)}{dt} = 0,$$

como se ha expuesto anteriormente. Este sistema queda como

$$4t^2 - (at^2 + b)^2 = 0, \quad 2t - at(at^2 + b) = 0,$$

de donde resulta la relación  $ab = 1$ , o bien  $b = 1/a$ . Esta relación determina la función arbitraria que define a  $b$  como función de  $a$ , que llevada a la integral completa da lugar a la familia uniparamétrica de superficies

$$z^2 - a^2 x^2 - \left(ay + \frac{1}{a}\right)^2 = 0.$$

La envolvente de esta familia se obtiene eliminando  $a$  de la ecuación anterior y de la que resulta de derivar ésta respecto al parámetro  $a$

$$ax^2 + \left(ay + \frac{1}{a}\right) \left(y - \frac{1}{a^2}\right) = 0.$$

De aquí se obtiene

$$a = (x^2 + y^2)^{-1/4},$$

que llevado a la ecuación de la familia da lugar a la solución del problema de Cauchy

$$(z^2 - 2y)^2 = 4(x^2 + y^2). \quad \blacktriangleleft$$

### 3.4. Ejercicios

1. Resuélvanse las siguientes ecuaciones diferenciales totales:

a)  $(x - y)dx - xdy + zdz = 0$

b)  $y^2dx - zdy + ydz = 0$

c)  $(2x^3y + 1)dx + x^4dy + x^2 \tan z dz = 0$

d)  $2(y + z)dx - (x + z)dy + (2y - x + z)dz = 0$

e)  $yzdx - z^2dy - xydz = 0$

f)  $(e^xy + e^z)dx + (e^yz + e^x)dy + (e^y - e^xy - e^yz)dz = 0$

g)  $yzdx + (xz - yz^3)dy - 2xydz = 0$

2. Obténgase, si existe, la familia de curvas solución del sistema

$$\begin{cases} (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz = 0 \\ (x + z)dx + ydy + xdz = 0 \end{cases}$$

y hállese una EDP cuasi lineal de la que el sistema de curvas anterior es la familia de curvas características.

3. Obténgase una integral completa y la solución singular (si existe) de las siguientes EDP:

a)  $(z_x)^2 + yz_y = z$

b)  $(z_x)^2 + (z_y)^2 = x$

c)  $z_y = -xz_x + (z_x)^2$

d)  $16z^2(z_x)^2 + 9z^2(z_y)^2 + 4z^2 - 4 = 0$

e)  $(z_x)^2 - (z_y)^2 = 1$

f)  $z = xz_x + yz_y + z_xz_y$

g)  $z = (z_x)^2 + (z_y)^2$

h)  $z_x - z_y = x^2 + y^2$

4. Sea  $(z_x)^2 + (z_y)^2 = f(x, y)$  con  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y de clase  $\mathcal{C}^2$ . Hállese la banda característica que verifica el dato  $(0, 1, 13, 2, 0)$  sabiendo que  $z = x^2 + y^2 - 7$  es solución de la EDP. ¿Es banda integral?

5. Determínese la solución de la EDP que contiene a la curva dada:

a)  $z_xz_y = 1, \quad \{y = 0, z = x\}$

b)  $(z_x)^2 + z_y = y, \quad \{y = 0, z = 0\}$

c)  $z\sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} = 2, \quad \{x^2 + y^2 = 2, z = 2\}$

d)  $(z_x)^2 = z_y, \quad \{y = 0, z = x^2\}$

e)  $z_xz_y = z, \quad \{x = 0, z = y^2\}$

f)  $z_xz_y = z_x + z_y, \quad \{x + y = 0, z = 1\}$

6. Sean  $M(x, y, z)$  un punto de una superficie  $\mathcal{S}$ ,  $P$  la proyección ortogonal de  $M$  sobre el eje  $Z$ ,  $N$  la proyección ortogonal de  $P$  sobre la normal en  $M$  a  $\mathcal{S}$ . Determínese las superficies  $\mathcal{S}$  tales que  $\|\overrightarrow{NM}\| = a$  ( $a > 0$ ).

# Capítulo 4

## EDP de segundo orden

En los dos capítulos anteriores consideramos la resolución de EDP de primer orden. Ahora pasamos a la discusión de EDP de segundo orden. En este capítulo nos limitamos a una discusión preliminar de estas ecuaciones, y luego, en los siguientes capítulos, consideramos con más detalle los tres tipos principales de ecuaciones lineales.

Comenzamos introduciendo los operadores diferenciables, el principio de superposición y la ecuación condicionante, así como su aplicación a la resolución de EDP sencillas de segundo orden. A continuación, estudiamos la clasificación de las EDP lineales de segundo orden con dos variables independientes, que se clasifican en tres tipos fundamentales, cada uno de los cuales es específico del tipo de fenómenos que describe, de las propiedades de sus soluciones y de las técnicas que se emplean para resolverlas. La clasificación esclarece y unifica los conceptos de características para ecuaciones de primero y segundo órdenes. También vemos que cualquier ecuación de un tipo particular se puede transformar, mediante un cambio de variables, en una forma canónica que está asociada a su tipo. Luego, hablamos del problema de Cauchy para EDP lineales y del teorema de Cauchy-Kowalewsky, junto con el tipo de condiciones adicionales (iniciales y de contorno) que podemos encontrar asociadas a una EDP y de la reducción de problemas con EDP a otros más sencillos. Terminamos introduciendo el conocido método de separación de variables para resolver problemas de contorno con EDP, que está basado en los desarrollos en series de Fourier y que terminan el capítulo.

### 4.1. Operadores diferenciales y el principio de superposición

Las aplicaciones entre diferentes conjuntos de funciones reciben frecuentemente el nombre de *operadores*. La operación de un operador  $L$  sobre una función  $u$  se denota por  $L[u]$ . En particular, los operadores definidos mediante derivadas parciales de funciones se llaman *operadores diferenciales* y son aplicaciones entre diferentes clases de  $\mathcal{C}^n$ .

Un operador que satisface la relación

$$L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L[u_1] + c_2L[u_2],$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias y  $u_1$  y  $u_2$  son funciones arbitrarias, se llama *operador lineal*. Una ecuación diferencial lineal define un operador lineal: la ecuación se puede expresar como  $L[u] = v$ , donde  $L$  es un operador lineal y  $v$  es una función dada.

Una ecuación diferencial lineal de la forma  $L[u] = 0$ , donde  $L$  es un operador lineal, se llama *ecuación homogénea*. Por ejemplo, si definimos el operador  $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , entonces la ecuación

$$L[u] = u_{xx} - u_{yy} = 0$$

es una ecuación homogénea, mientras que la ecuación

$$L[u] = u_{xx} - u_{yy} = x^2$$

es una ecuación no homogénea.

Los operadores lineales juegan un papel central en matemáticas en general y en la teoría de EDP en particular. Esto resulta de la siguiente importante propiedad (que se sigue a la vez de la definición):

Si las funciones  $u_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ , satisfacen las ecuaciones diferenciales  $L[u_i] = v_i$ , entonces la combinación lineal  $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ , donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  son constantes arbitrarias, satisface la ecuación  $L[w] = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ . En particular, si cada una de las funciones  $u_1, u_2, \dots, u_n$  satisface la ecuación homogénea  $L[u_i] = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces toda combinación lineal de ellas satisface también la ecuación.

Esta propiedad se llama **principio de superposición**. Este principio permite la construcción de soluciones complejas mediante combinaciones de soluciones simples. Además, también se utiliza para probar la unicidad de soluciones de EDP lineales.

### Ecuación condicionante

Consideramos ahora una clase de EDP lineales de segundo orden, las denominadas EDP *lineales homogéneas con coeficientes constantes*. Una ecuación de esta clase es de la forma

$$L[u] = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0 \quad \text{con } A, B \text{ y } C \text{ constantes.} \quad (4.1)$$

La palabra *homogénea* hace referencia aquí al hecho de que todos los términos en (4.1) contienen derivadas del *mismo* orden (el segundo).

Buscamos ahora una solución de (4.1) de la forma:

$$u(x, y) = f(y + \lambda x), \quad (4.2)$$

donde  $f$  es una función arbitraria de su argumento y  $\lambda$  es una constante. Derivando (4.2), obtenemos

$$u_{xx}(x, y) = \lambda^2 f''(y + \lambda x), \quad u_{xy}(x, y) = \lambda f''(y + \lambda x), \quad u_{yy}(x, y) = f''(y + \lambda x),$$

y sustituyéndolas en (4.1) da

$$A\lambda^2 f''(y + \lambda x) + B\lambda f''(y + \lambda x) + C f''(y + \lambda x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f''(y + \lambda x)[A\lambda^2 + B\lambda + C] = 0,$$

de manera que  $u(x, y) = f(y + \lambda x)$  es una solución de (4.1) si  $\lambda$  satisface la ecuación de segundo grado

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

que llamaremos **ecuación condicionante**.

Consideramos ahora los siguientes cuatro casos de la EDP (4.1):

1.  $A \neq 0$  y las raíces de la ecuación condicionante diferentes,
2.  $A \neq 0$  y las raíces de la ecuación condicionante iguales,
3.  $A = 0$ ,  $B \neq 0$ ,
4.  $A = 0$ ,  $B = 0$  y  $C \neq 0$ .

En el caso 1, la EDP (4.1) posee dos soluciones  $u(x, y) = f(y + \lambda_1 x)$  y  $u(x, y) = g(y + \lambda_2 x)$ , donde  $f$  y  $g$  son dos funciones arbitrarias de sus respectivos argumentos y  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las raíces distintas de la ecuación condicionante. Aplicando el principio de superposición se deduce que

$$u(x, y) = f(y + \lambda_1 x) + g(y + \lambda_2 x)$$

es una solución de la EDP (4.1).

En el caso 2, la EDP (4.1) posee la solución  $u(x, y) = f(y + \lambda_1 x)$ , donde  $f$  es una función arbitraria de su argumento y  $\lambda_1$  es la raíz doble de la ecuación condicionante. Además, se puede comprobar fácilmente que en este caso la EDP (4.1) posee también la solución  $u(x, y) = xg(y + \lambda_1 x)$ , donde  $g$  es una función arbitraria de su argumento. Según el principio de superposición vemos que

$$u(x, y) = f(y + \lambda_1 x) + xg(y + \lambda_1 x)$$

es una solución de la EDP (4.1).

En el caso 3, la ecuación condicionante se reduce a  $B\lambda + C = 0$ , por lo que tiene una única raíz  $\lambda_1 = -\frac{C}{B}$ . La EDP (4.1) posee la solución  $u(x, y) = f(y + \lambda_1 x)$ , donde  $f$  es una función arbitraria de su argumento. Se puede comprobar además que en este caso  $g(x)$ , donde  $g$  es una función arbitraria de  $x$  solamente, es también una solución de la EDP (4.1). Según el principio de superposición tenemos entonces que

$$u(x, y) = f(y + \lambda_1 x) + g(x)$$

es una solución de la EDP (4.1).

Finalmente, en el caso 4, la ecuación condicionante se reduce a  $C = 0$ , lo que es imposible. Vemos que en este caso no existen soluciones de la forma (4.2). No obstante, la EDP es ahora simplemente

$$C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Integrando parcialmente respecto a  $y$  dos veces, obtenemos  $u(x, y) = f(x) + yg(x)$ , donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias de  $x$  solamente. Por tanto, en este caso,

$$u(x, y) = f(x) + yg(x)$$

es una solución de la EDP (4.1).

Notemos que toda EDP con coeficientes constantes del tipo (4.1) está dentro de una y solo una de las cuatro categorías cubiertas por los casos 1 al 4.

**Ejemplo 4.1.** Consideramos la EDP

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0.$$

La ecuación condicionante es  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ , que tiene por solución la raíz doble  $\lambda = 2$ . Estamos entonces en el caso 2, por lo que

$$u(x, y) = f(y + 2x) + xg(y + 2x)$$

es una solución de la ecuación conteniendo dos funciones arbitrarias  $f$  y  $g$  de clase  $\mathcal{C}^2$ . ◀

### Ecuaciones reducibles

A continuación, nos centramos en las ecuaciones lineales de segundo orden de funciones de dos variables independientes  $x$  e  $y$ , que son de la forma:

$$L[u] = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (4.3)$$

donde  $A, B, C, D, E, F, G$  son funciones dadas de  $x$  e  $y$ , y  $u(x, y)$  es la función desconocida. Suponemos que los coeficientes  $A, B, C$  no se anulan simultáneamente.

Si introducimos los operadores  $D_x, D_y, D_{xx}^2, D_{xy}^2, D_{yy}^2$  con el siguiente significado

$$D_x u = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad D_y u = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad D_{xx}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad D_{xy}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad D_{yy}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

entonces el operador

$$L[u] = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu$$

representa un *polinomio formal* de segundo grado en los operadores dados.

Desde el punto de vista *formal*, la EDP anterior *homogénea* (es decir, con  $G = 0$ ) recuerda a la ecuación de una cónica en el plano si los coeficientes son constantes,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (4.4)$$

Si la cónica es factorizable

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

entonces la EDP del tipo (4.3) homogénea se puede *reducir* a dos EDP de primer orden.

A veces, teniendo en cuenta  $D_{xx}^2 = D_x \cdot D_x$ , el polinomio formal representado por  $L[u]$  se puede «factorizar» fácilmente descomponiéndolo en el producto formal de dos polinomios de primer grado en  $D_x$  y  $D_y$ . Diremos entonces que el operador es *reducible*. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} L[u] &= (D_{xx}^2 + 3D_{xy}^2 - D_x - 6D_y - 2)u \\ &= (D_x(D_x - 2) + 3D_y(D_x - 2) + D_x - 2)u \\ &= (D_x + 3D_y + 1)(D_x - 2)u. \end{aligned}$$

Observamos también que la cónica asociada es factorizable

$$0 = x^2 + 3xy - x - 6y - 2 = (x + 3y + 1)(x - 2)$$

y los factores nos dan una idea de cómo podemos factorizar el operador anterior  $L$ .

Es evidente que si los coeficientes son constantes, el producto formal de dos polinomios de primer grado es conmutativo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} L[u] &= (D_{xx}^2 - D_{yy}^2)u \\ &= (D_x + D_y)(D_x - D_y)u \\ &= (D_x + D_y)(u_x - u_y) \\ &= u_{xx} - u_{xy} + u_{xy} - u_{yy} \\ &= u_{xx} - u_{yy} \\ &= (D_x - D_y)(D_x + D_y)u. \end{aligned}$$

En este caso, la cónica asociada,

$$0 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = (x - y)(x + y), \quad (4.5)$$

también es factorizable y su producto conmutativo.

Si los coeficientes no son constantes, el producto formal no es, en general, conmutativo, tal como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} L_1[u] &= (xD_x - D_y)(D_x + yD_y)u \\ &= (xD_x - D_y)(u_x + yu_y) \\ &= xu_{xx} + (xy - 1)u_{xy} - \underbrace{u_y}_{-yu_{yy}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2[u] &= (D_x + yD_y)(xD_x - D_y)u \\ &= (D_x + yD_y)(xu_x - u_y) \\ &= \underbrace{u_x}_{+xu_{xx}} + (xy - 1)u_{xy} - yu_{yy}, \end{aligned}$$

de manera que  $L_1[u] \neq L_2[u]$ .

La idea de «factorizar» una EDP nos permite resolverla en algunos casos mediante el principio de superposición. Veámoslo con las conocidas ecuaciones de ondas y de Laplace.

**Ejemplo 4.2.** Dada la ecuación de ondas

$$u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

cuya cónica asociada es (4.5), hemos visto que se puede factorizar de dos maneras porque sus coeficientes son constantes:

$$0 = (D_{xx}^2 - D_{yy}^2)u = (D_x + D_y) \underbrace{(D_x - D_y)}_{\text{factor}} u = (D_x - D_y) \underbrace{(D_x + D_y)}_{\text{factor}} u.$$

En ambas factorizaciones, los dos primeros miembros son nulos si se verifica respectivamente

$$(D_x - D_y)u = 0 \quad \text{y} \quad (D_x + D_y)u = 0,$$

que son dos ecuaciones lineales de primer orden y cuyas soluciones son respectivamente

$$u = f(x + y) \quad \text{y} \quad u = g(x - y),$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ . Según el principio de superposición, la función

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$$

es una solución de la ecuación de ondas.

Por otra parte, la ecuación de ondas también la podemos resolver de la siguiente forma. Si la factorizamos como

$$0 = u_{xx} - u_{yy} = (D_x - D_y)(D_x + D_y)u,$$

podemos tomar  $(D_x + D_y)u = v$ , de manera que

$$0 = u_{xx} - u_{yy} = (D_x - D_y) \underbrace{(D_x + D_y)u}_v = (D_x - D_y)v$$

y siendo  $(D_x - D_y)v = 0$  una ecuación lineal de primer orden. La ecuación anterior es fácilmente resoluble y su solución es

$$v = \phi(x + y),$$

donde  $\phi$  es una función arbitraria de su argumento. Una vez encontrada  $v$ , buscamos  $u$ , que es la solución de la ecuación lineal de primer orden

$$(D_x + D_y)u = v = \phi(x + y).$$

Para ello, a partir del sistema característico,

$$dx = dy = \frac{du}{\phi(x + y)},$$

buscamos dos integrales primeras:  $x - y = c_1$  y

$$u(x, y) = \int \phi(x + y) dx = \int \phi(2x - c_1) dx = f(2x - c_1) + c_2 = f(x + y) + c_2,$$

que son inmediatas de calcular. Entonces,

$$u(x, y) - f(x + y) = c_2 = g(c_1) = g(x - y) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = f(x + y) + g(x - y),$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ . ◀

**Ejemplo 4.3.** La ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

cuya cónica asociada es

$$0 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = (x - iy)(x + iy),$$

también es factorizable de dos formas:

$$0 = (D_{xx}^2 + D_{yy}^2)u = (D_x + iD_y)(D_x - iD_y)u = (D_x - iD_y)(D_x + iD_y)u.$$

Análogamente a la ecuación de ondas, el producto de los operadores de primer orden es conmutativo, de manera que los dos primeros miembros son nulos si se verifica respectivamente

$$(D_x - iD_y)u = 0 \quad \text{y} \quad (D_x + iD_y)u = 0,$$

cuyas soluciones son respectivamente

$$u = f(x - iy) \quad \text{y} \quad u = g(x + iy),$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ . Aplicando el principio de superposición, tenemos que

$$u(x, y) = f(x - iy) + g(x + iy)$$

es una solución de la ecuación de Laplace. ◀

A continuación, damos algunos casos básicos. Consideramos  $a$ ,  $b$  y  $c$  constantes. Así:

- La solución de  $au_x + bu_y = 0$  es:  $u(x, y) = f(bx - ay)$ , donde  $f$  es una función arbitraria de su argumento.
- La solución de  $au_x + bu_y = c$  es:
  - Si  $a \neq 0$ , entonces  $u(x, y) = \frac{c}{a}x + f(bx - ay)$ , donde  $f$  es una función arbitraria de su argumento.
  - Si  $a = 0$  y  $b \neq 0$ , entonces  $u(x, y) = \frac{c}{b}y + f(x)$ , donde  $f$  es una función arbitraria de su argumento.
- La solución de  $au_x + bu_y = cu$  es:
  - Si  $a \neq 0$ , entonces  $u(x, y) = f(bx - ay)e^{\frac{c}{a}x}$ , donde  $f$  es una función arbitraria de su argumento.
  - Si  $a = 0$  y  $b \neq 0$ , entonces  $u(x, y) = f(x)e^{\frac{c}{b}y}$ , donde  $f$  es una función arbitraria de su argumento.

Hay un caso particular que merece la pena estudiar por el «método de factorización», que es el de la EDP

$$(aD_x + bD_y + c)^2 u = 0 \quad \text{con } a, b \text{ y } c \text{ constantes.}$$

En este caso,

$$0 = (aD_x + bD_y + c) \underbrace{(aD_x + bD_y + c)u}_v = (aD_x + bD_y + c)v,$$

de manera que la resolución de la ecuación anterior se reduce a la resolución de dos ecuaciones lineales de primer orden:

$$(aD_x + bD_y + c)v = 0 \quad \text{y} \quad (aD_x + bD_y + c)u = v.$$

Según lo visto en el párrafo anterior, la solución de la primera ecuación es, si  $a \neq 0$ ,

$$v(x, y) = \phi(bx - ay)e^{-\frac{c}{a}x},$$

donde  $\phi$  es una función arbitraria de su argumento. Para resolver la segunda, consideramos el sistema característico,

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{v - cu},$$

y calculamos dos integrales primeras. De  $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$ , obtenemos obviamente la integral primera  $bx - ay = c_1$ . Si tomamos  $\frac{dx}{a} = \frac{du}{v - cu}$ , entonces hallamos la integral primera  $e^{\frac{c}{a}x}u - \frac{1}{a}\phi(c_1)x = c_2$  sin más que resolver la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{du}{dx} = \frac{v - cu}{a} = \frac{1}{a}\phi(c_1)e^{-\frac{c}{a}x} - \frac{cu}{a},$$

cuya solución es

$$u(x, y) = \left( \frac{1}{a}\phi(c_1)x + c_2 \right) e^{-\frac{c}{a}x}.$$

Por tanto, la solución de la EDP es:

$$u(x, y) = (f(bx - ay)x + g(bx - ay)) e^{-\frac{c}{a}x},$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ .

**Ejemplo 4.4.** Consideramos de nuevo la EDP del ejemplo 4.1,

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0,$$

cuya cónica asociada es

$$0 = x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2.$$

Observamos entonces que

$$0 = u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = (D_x - 2D_y)^2 u,$$

de manera que  $a = 1$ ,  $b = -2$  y  $c = 0$  en lo visto anteriormente y, en consecuencia, obtenemos:

$$u(x, y) = f(2x + y)x + g(2x + y),$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ . ◀

## 4.2. Clasificación

El operador

$$L_0[u] = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy}$$

se llama *parte principal* del operador  $L$  definido en (4.3). Veremos que la parte principal determina las propiedades fundamentales de la solución de (4.3) y más precisamente el signo del discriminante  $(B^2 - 4AC)$  de la ecuación.

La clasificación de las EDP del tipo (4.3) surge por su analogía con la ecuación de las cónicas en el plano: ecuación (4.4). Así, dependiendo de si la cantidad  $(B^2 - 4AC)$  es positiva, negativa o nula, hablaremos respectivamente de EDP hiperbólicas, elípticas o parabólicas.

Generalizando la definición anterior, decimos que la EDP (4.3) es de tipo

1. *hiperbólico* en todos los puntos en los que  $(B^2 - 4AC) > 0$ ,
2. *elíptico* en todos los puntos en los que  $(B^2 - 4AC) < 0$ ,
3. *parabólico* en todos los puntos en los que  $(B^2 - 4AC) = 0$ .

Esta clasificación puramente matemática se relaciona con una división global de los fenómenos físicos que se describen mediante tales ecuaciones, a saber: *procesos vibratorios* (ecuaciones hiperbólicas), *estacionarios* (ecuaciones elípticas), o de *difusión* (ecuaciones parabólicas). Es por ello que las soluciones de cada uno de los tipos de ecuaciones tienen particularidades que le son específicas (si bien pueden existir puntos de contacto). Por ejemplo, las ecuaciones hiperbólicas se caracterizan por poseer soluciones en forma de ondas que se desplazan con una velocidad finita. Las ecuaciones elípticas poseen soluciones suaves (infinitamente diferenciables). Las ecuaciones parabólicas, en cierto sentido, tienen propiedades intermedias entre las hiperbólicas y las elípticas.

Ilustramos esta clasificación con las tres EDP más famosas de la física matemática y ya vistas en el capítulo 1.

**Ejemplo 4.5.** La ecuación  $u_{xx} - u_{yy} = 0$  es hiperbólica puesto que  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = -1$  y  $(B^2 - 4AC) = 4 > 0$ . Es un caso especial de la denominada *ecuación unidimensional de ondas*, que es satisfecha por los pequeños desplazamientos transversales de los puntos de una cuerda vibrante. Esta EDP es lineal y homogénea con coeficientes constantes y posee la solución

$$u(x, y) = f(y + x) + g(y - x),$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ . ◀

**Ejemplo 4.6.** La ecuación  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  es elíptica puesto que  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$  y  $(B^2 - 4AC) = -4 < 0$ . Esta EDP se denomina *ecuación bidimensional de Laplace* y es satisfecha por la temperatura de los puntos de una placa rectangular delgada en estado estacionario. Observemos que esta EDP es lineal homogénea con coeficientes constantes, por lo que su solución es

$$u(x, y) = f(y + ix) + g(y - ix),$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ . ◀

**Ejemplo 4.7.** La ecuación  $u_{xx} - u_y = 0$  es parabólica puesto que  $A = 1$ ,  $B = C = 0$  y  $(B^2 - 4AC) = 0$ . Es un caso especial de la *ecuación unidimensional del calor* (o *ecuación de difusión*), que es satisfecha por la temperatura de un punto de una barra homogénea. Esta EDP no es homogénea. ◀

Si los coeficientes la EDP son variables, la ecuación puede ser de diferente tipo dependiendo de la región del plano que se considere.

**Ejemplo 4.8.** Dada la *ecuación de Tricomi*,  $u_{yy} - yu_{xx} = 0$ , vemos que  $A = -y$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$  y  $(B^2 - 4AC) = 4y$ , de manera que la cantidad  $(B^2 - 4AC)$  puede ser positiva, negativa o nula, dependiendo del valor que tome  $y$ . La ecuación será entonces hiperbólica si  $y > 0$ , elíptica si  $y < 0$  o parabólica si  $y = 0$ . ◀

### 4.3. Formas canónicas

La utilidad de la clasificación anterior se basa esencialmente en la posibilidad de reducir (4.3), en cada uno de los tres casos mencionados, a una *forma canónica* mediante un adecuado cambio de variables independientes.

Para determinar estas formas canónicas, empezamos considerando un cambio genérico de variables independientes:

$$s = s(x, y) \quad \text{y} \quad t = t(x, y),$$

donde supondremos que  $s$  y  $t$  son funciones de  $x$  e  $y$  dos veces derivables, de manera que el jacobiano de la transformación,

$$J = \begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix},$$

es distinto de cero en la región en que estemos interesados. Entonces, suponiendo que  $x$  e  $y$  son a su vez funciones de  $s$  y  $t$  dos veces derivables, las derivadas que aparecen en (4.3) se transforman en

$$\begin{aligned} u_x &= u_s s_x + u_t t_x \\ u_y &= u_s s_y + u_t t_y \\ u_{xx} &= u_{ss} s_x^2 + 2u_{st} s_x t_x + u_{tt} t_x^2 + u_s s_{xx} + u_t t_{xx} \\ u_{xy} &= u_{ss} s_x s_y + u_{st} (s_x t_y + s_y t_x) + u_{tt} t_x t_y + u_s s_{xy} + u_t t_{xy} \\ u_{yy} &= u_{ss} s_y^2 + 2u_{st} s_y t_y + u_{tt} t_y^2 + u_s s_{yy} + u_t t_{yy} \end{aligned}$$

que al sustituir en (4.3) da

$$A_1 u_{ss} + B_1 u_{st} + C_1 u_{tt} + R(s, t, u, u_s, u_t) = 0, \quad (4.6)$$

donde  $R$  es una función lineal en  $u$ ,  $u_t$ ,  $u_s$  e independiente de las derivadas segundas. Los nuevos coeficientes son

$$\begin{aligned} A_1 &= A s_x^2 + B s_x s_y + C s_y^2, \\ B_1 &= 2A s_x t_x + B (s_x t_y + s_y t_x) + 2C s_y t_y, \\ C_1 &= A t_x^2 + B t_x t_y + C t_y^2. \end{aligned}$$

Obsérvese que la naturaleza de (4.3) permanece invariante ante la transformación efectuada, puesto que como puede comprobarse fácilmente

$$B_1^2 - 4A_1C_1 = J^2(B^2 - 4AC),$$

y por tanto la ecuación, después del cambio, continúa perteneciendo a la misma clase, sin más que exigir que  $J \neq 0$ .

A continuación, consideramos el problema de reducir la ecuación (4.3) a forma canónica. Suponemos entonces que  $A$ ,  $B$  y  $C$  son distintas de cero. Sean  $s$  y  $t$  dos nuevas variables tales que los coeficientes  $A_1$  y  $C_1$  de la ecuación (4.6) sean cero. Así,

$$A_1 = As_x^2 + Bs_xs_y + Cs_y^2 = 0, \quad C_1 = At_x^2 + Bt_xt_y + Ct_y^2 = 0.$$

Ambas ecuaciones son del mismo tipo, de manera que podemos escribirlas de la forma

$$Av_x^2 + Bv_xv_y + Cv_y^2 = 0,$$

donde  $v$  representa cualquiera de las funciones  $s$  o  $t$ . Como  $J \neq 0$ ,  $v_x$  o  $v_y$  son distintos de cero y podemos dividir por  $v_y^2$ , de manera que la ecuación anterior queda

$$A \left( \frac{v_x}{v_y} \right)^2 + B \left( \frac{v_x}{v_y} \right) + C = 0. \quad (4.7)$$

A lo largo de la curva  $v = \text{constante}$ , tenemos

$$dv = v_x dx + v_y dy = 0.$$

Luego,  $\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y}$  y, por tanto, (4.7) se puede escribir como

$$A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left( \frac{dy}{dx} \right) + C = 0,$$

cuyas raíces son

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (4.8)$$

Estas dos ecuaciones se conocen como *ecuaciones características* y son EDO de familias de curvas en el plano  $xy$  a lo largo de las cuales  $s = \text{constante}$  y  $t = \text{constante}$ . (Un tipo de curva característica para una EDP dada es una curva sobre la cual la solución toma un valor constante.) Las integrales de las dos EDO anteriores se llaman **curvas características**. Como las EDO son de primer orden, podemos escribir las soluciones como

$$\varphi_1(x, y) = c_1 = \text{constante} \quad \text{y} \quad \varphi_2(x, y) = c_2 = \text{constante}.$$

Entonces, el cambio de variables

$$s = \varphi_1(x, y) \quad \text{y} \quad t = \varphi_2(x, y)$$

transforma la ecuación a una forma canónica.

**Ecuaciones hiperbólicas.** En el caso concerniente a la forma canónica en el caso hiperbólico,  $(B^2 - 4AC) > 0$ , las integraciones de (4.8) dan dos familias de características reales y distintas. El cambio de variables anterior reduce la EDP (4.6) a

$$u_{st} = -\frac{R}{B_1},$$

que se denomina *primera forma canónica de las EDP hiperbólicas*. Se puede ver fácilmente que  $B_1 \neq 0$ .

Si introducimos nuevas variables  $w$  y  $z$ , mediante las fórmulas

$$w = \frac{s+t}{2} \quad \text{y} \quad z = \frac{s-t}{2},$$

obtenemos

$$u_{ww} - u_{zz} = -4\frac{R}{B_1},$$

que recibe el nombre de *segunda forma canónica de las EDP hiperbólicas*.

**Ecuaciones elípticas.** En este caso el procedimiento es el mismo que para las ecuaciones hiperbólicas, pero, como  $(B^2 - 4AC) < 0$ , (4.8) no tienen soluciones reales, sino que tienen dos soluciones complejas conjugadas,  $s = \alpha + i\beta$  y  $t = \alpha - i\beta = \bar{s}$ , que son funciones complejas continuas de las variables reales  $x$  e  $y$ . En este caso, no hay curvas características reales. Para no trabajar con cantidades complejas, considerando el cambio de variables

$$w = \frac{s+t}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad z = \frac{s-t}{2i} = \beta,$$

llegamos a la *forma canónica de las EDP elípticas*

$$u_{ww} + u_{zz} = -\frac{4R}{B_1}.$$

**Ecuaciones parabólicas.** Como  $(B^2 - 4AC) = 0$ , de (4.8) vemos que se satisface la misma EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}.$$

Entonces, existe una familia de características real y obtenemos solo una integral  $\varphi_1(x, y) = \text{constante}$ . Tomando  $s = \varphi_1(x, y)$ , podemos tomar una función arbitraria  $t = t(x, y)$  que complete el cambio de variables y tal que el jacobiano  $J \neq 0$ . Se suele tomar  $t = y$ . En resumen, la ecuación se reduce a la *forma canónica de las EDP parabólicas*

$$u_{tt} = -\frac{R}{C_1}.$$

**Ejemplo 4.9.** La ecuación de Tricomi,  $u_{yy} - yu_{xx} = 0$ , introducida anteriormente, se puede reducir a tres formas canónicas, dependiendo de la región del plano considerada.

Si  $y > 0$ , entonces es una ecuación hiperbólica y la transformación que se obtiene a partir de las soluciones de (4.8) es  $s = x + \frac{2}{3}y^{3/2}$  y  $t = x - \frac{2}{3}y^{3/2}$ . Llevando esta transformación a la EDP, tenemos

$$u_x = u_s + u_t, \quad u_y = (u_s - u_t)y^{1/2},$$

$$u_{xx} = u_{ss} + 2u_{st} + u_{tt}, \quad u_{yy} = \frac{1}{2}(u_s - u_t)y^{-1/2} + (u_{ss} - 2u_{st} + u_{tt})y,$$

que nos lleva a la forma canónica  $u_{st} - \frac{1}{6} \frac{u_s - u_t}{s - t} = 0$ .

Si  $y < 0$ , entonces la ecuación es elíptica, la transformación a considerar es  $s = x + i\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$  y  $t = x - i\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$ , que se obtiene a partir de las soluciones de (4.8), y, para no trabajar con cantidades complejas, consideramos el cambio  $w = x$  y  $z = \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$ . En este caso,

$$u_x = u_w, \quad u_y = -(-y)^{1/2}u_z, \quad u_{xx} = u_{ww}, \quad u_{yy} = \frac{1}{2}(-y)^{-1/2}u_z - yu_{zz}$$

y la forma canónica es  $u_{ww} + u_{zz} + \frac{u_z}{3z} = 0$ .

Finalmente, si  $y = 0$ , la ecuación es parabólica y la forma canónica es  $u_{yy} = 0$ . ◀

### Caso particular: $A$ , $B$ y $C$ constantes

Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes, la cantidad  $(B^2 - 4AC)$  también es constante, y las EDO (4.8) se pueden escribir como

$$y'(x) = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \lambda_1 \quad \text{e} \quad y'(x) = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \lambda_2;$$

es decir, dos EDO de primer orden, cuyas soluciones se obtienen mediante integración directa

$$y(x) = \lambda_1 x + K_1 \quad \text{e} \quad y(x) = \lambda_2 x + K_2.$$

Como las dos familias de curvas características dependen de una constante arbitraria, basta elegir  $s$  como una de ellas y  $t$  como la otra para obtener el cambio de variables

$$s = y - \lambda_1 x, \quad t = y - \lambda_2 x.$$

Obsérvese que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las raíces de la ecuación de segundo grado  $A\lambda^2 - B\lambda + C = 0$ .

1. **Caso hiperbólico:** hay dos familias de rectas características. El cambio de variables es

$$s = y - \lambda_1 x \quad \text{y} \quad t = y - \lambda_2 x.$$

2. **Caso elíptico:** no hay características. El cambio de variables es

$$s = \frac{2Ay - Bx}{\sqrt{4AC - B^2}}, \quad t = x,$$

puesto que, como  $s = y - \lambda_1 x$ , se tiene que

$$s = \frac{2Ay - Bx}{2A} + i \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} x = \text{constante},$$

que es equivalente a

$$s = \frac{2Ay - Bx}{\sqrt{4AC - B^2}} + ix = \text{constante.}$$

3. **Caso parabólico:** hay una familia de rectas características. El cambio de variables es

$$s = y - \frac{B}{2A}x, \quad t = y.$$

### Formas canónicas resolubles

En algunos casos será posible hallar elementalmente la solución general de la EDP (4.3) una vez escrita en su forma canónica, pero en la mayoría de los casos será imposible. Identifiquemos dos casos en los que sí es posible:

- Si solo aparecen derivadas respecto a una variable. Por ejemplo,

$$u_{tt} + E_1 u_t + F_1 u = G_1.$$

La EDP se integra considerando la otra variable como parámetro. La EDP es parabólica.

- Si solo aparecen  $u_{st}$  y una de las derivadas primeras. Por ejemplo,

$$u_{st} + D_1 u_s = G_1.$$

La EDP se resuelve haciendo el cambio  $u_s = v$ , ya que la ecuación resultante  $v_t + D_1 v = G_1$  se puede integrar considerando  $s$  como parámetro. La EDP es hiperbólica.

Vemos a continuación un ejemplo de cada caso.

**Ejemplo 4.10.** Consideramos otra vez la EDP del ejemplo 4.1

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0.$$

Como  $A = 1$ ,  $B = -4$ ,  $C = 4$  y  $(B^2 - 4AC) = 0$ , entonces la ecuación es parabólica. Al ser  $A$ ,  $B$  y  $C$  constantes, consideramos la transformación  $s = y - \frac{B}{2A}x = y + 2x$  y  $t = y$ . Llevando esta transformación a la EDP, tenemos

$$u_x = 2u_s, \quad u_y = u_s + u_t,$$

$$u_{xx} = 4u_{ss}, \quad u_{xy} = 2(u_{ss} + u_{st}), \quad u_{yy} = u_{ss} + 2u_{st} + u_{tt},$$

que conduce a la forma canónica

$$u_{tt} = 0,$$

cuya integración es inmediata:

$$u_t = f(s) \quad \text{y} \quad u(s, t) = tf(s) + g(s),$$

donde  $f$  y  $g$  son dos funciones arbitrarias de sus argumentos. En consecuencia,

$$u(x, y) = yf(y + 2x) + g(y + 2x)$$

con  $f$  y  $g$  dos funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ . ◀

**Ejemplo 4.11.** Sea la EDP

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2.$$

En primer lugar, vemos que  $A = 4$ ,  $B = 5$ ,  $C = 1$  y  $(B^2 - 4AC) = 9 > 0$ , de modo que la ecuación es hiperbólica. Como  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes, consideramos la transformación  $s = y - \lambda_1 x$  y  $t = y - \lambda_2 x$ , donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las raíces de la ecuación de segundo grado  $4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$ . Luego,  $\lambda_1 = \frac{1}{4}$  y  $\lambda_2 = 1$ , de manera que  $s = y - \frac{x}{4}$  y  $t = y - x$ . Aplicando esta transformación a la EDP, obtenemos su forma canónica

$$u_{st} - \frac{u_s}{3} = -\frac{8}{9}.$$

Hacemos  $u_s = v$  y la ecuación resultante,  $v_t = \frac{v}{3} - \frac{8}{9}$ , es una EDO separable de primer orden, manteniendo  $s$  constante. Por tanto,  $v = \phi(s)e^{\frac{t}{3}} + \frac{8}{3}$ , donde  $\phi$  es una función arbitraria de  $s$ . Integramos a continuación este resultado parcialmente respecto a  $s$ , manteniendo  $t$  constante, para obtener

$$u(s, t) = f(s)e^{\frac{t}{3}} + \frac{8}{3}s + g(t),$$

donde  $f$  es una función arbitraria de  $s$  que está definida por  $f(s) = \int \phi(s) ds$  y  $g$  es una función arbitraria de  $t$ . En consecuencia,

$$u(x, y) = f\left(y - \frac{x}{4}\right)e^{\frac{1}{3}(y-x)} + \frac{8}{3}\left(y - \frac{x}{4}\right) + g(y - x),$$

donde  $f$  y  $g$  son dos funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ . ◀

## 4.4. Problema de Cauchy

Dada la ecuación (4.3), ahora nos preguntamos: ¿qué datos adicionales proporcionan problemas bien planteados para la EDP anterior?

Hemos visto que en una EDP lineal de primer orden hay que fijar los valores de la solución en toda una curva  $\gamma$  que no sea tangente a las características. Acabamos de ver también que, en los pocos casos en que (4.3) es resoluble, aparecen dos funciones arbitrarias en la solución. Recordemos además que, para una EDO de segundo orden, es necesario fijar el valor de la solución y de su derivada en el instante inicial para tener una única solución.

Planteamos entonces el siguiente problema de Cauchy para (4.3):

Hállese la solución de (4.3) que tome unos valores dados de  $u$  y  $u_y$  a lo largo de una curva dada en el plano  $XY$ .

La interpretación geométrica nos lleva a encontrar una superficie solución que pase por una curva dada y tenga en cada punto de esta curva un plano tangente también dado. Alternativamente, se pueden fijar sobre la curva dada los valores de  $u_x$  o de la derivada de  $u$  en la dirección de la normal a la curva:  $u_n$ .

Como ocurría en las EDP de primer orden, se puede decir que el problema de Cauchy tiene una única solución en las proximidades de una curva  $\gamma$  si los datos son regulares y  $\gamma$  no es tangente en ningún punto a una característica.

Sean  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$  y  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función  $\gamma = (x(t), y(t))$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , inyectiva en  $I$  y tal que  $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$ , para todo  $t \in I$ . Estas condiciones hacen que

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in [A, B] \subset I\}$$

sea un arco de la curva que admite tangente en todo punto y no se corta a sí misma. Sobre él definiremos las condiciones iniciales.

Supongamos también dadas tres funciones  $\omega, p, q$  de  $I$  en  $\mathbb{R}$ , tales que  $\omega$  es de clase  $\mathcal{C}^2$  y  $p, q$  son de clase  $\mathcal{C}^1$ .

El problema de Cauchy trata de encontrar una solución  $u$  de (4.3) que cumpla

$$u(x(t), y(t)) = \omega(t) \tag{4.9}$$

$$u_x(x(t), y(t)) = p(t), \quad u_y(x(t), y(t)) = q(t). \tag{4.10}$$

Notemos que (4.9) equivale a exigir que la superficie  $(x, y, u(x, y))$  contenga a la curva  $(x(t), y(t), \omega(t))$  y (4.10) a fijar la orientación del plano tangente a esa superficie en los puntos de la curva.

Observemos también que (4.9) y (4.10) no son independientes. En efecto, derivando (4.9) con respecto a  $t$ , resulta

$$u_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + u_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = \omega'(t),$$

y combinando con (4.10) queda

$$p(t) \cdot x'(t) + q(t) \cdot y'(t) = \omega'(t),$$

condición que restringe las condiciones iniciales que se pueden fijar sobre cada curva.

La razón de que aparezca esta condición está en que, al fijar los valores de  $u$  sobre  $\Gamma$ , queda determinada la derivada de  $u$  en la dirección de la tangente a  $\Gamma$ , que también queda determinada por las derivadas parciales de  $u$ . Si sustituimos (4.10) por

$$u_n(x(t), y(t)) = k(t),$$

donde  $u_n(x(t), y(t))$  indica la derivada de  $u$  en la dirección de la normal a  $\Gamma$  en  $(x(t), y(t))$  y  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ , tenemos unos datos iniciales totalmente independientes.

Las dos cuestiones básicas que se plantean en el problema de Cauchy sobre la existencia y unicidad de solución pueden demostrarse para ciertas condiciones que debe cumplir (4.9). Por supuesto, esta solución está definida solo de modo local, es decir, en un cierto abierto de  $\mathbb{R}^2$  que contiene a  $\Gamma$ . Este estudio es notablemente complicado y supera ampliamente el objetivo de este curso. Lo único que veremos es la necesidad de imponer a las curvas  $\Gamma$ , sobre las que se fijan los datos iniciales, ciertas restricciones para que el problema tenga solución única.

### Dos problemas de Cauchy para la ecuación de ondas

Consideramos la ecuación de ondas  $u_{xx} - u_{yy} = 0$ , cuya integral general hemos visto que es  $u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$ , siendo  $f$  y  $g$  dos funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ .

Planteamos a continuación dos problemas de Cauchy para la ecuación de ondas, aparentemente similares, y comprobamos que uno tiene solución y otro no.

**Problema 1.** Supongamos que buscamos la solución de la ecuación de ondas que cumpla las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , donde  $\phi$  y  $\psi$  son dos funciones adecuadas. Observamos que estamos fijando sobre la recta  $y = 0$  los valores de  $u$  y de la derivada de  $u$  en la dirección normal a la recta.

Como  $u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \phi(x) &= u(x, 0) = f(x) + g(x), \\ \psi(x) &= u_y(x, 0) = f'(x) - g'(x), \end{aligned}$$

que han de ser válidas para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Derivando la primera,

$$\phi'(x) = f'(x) + g'(x)$$

y teniendo en cuenta la segunda, se sigue

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\phi'(x) + \psi(x)), \quad g'(x) = \frac{1}{2}(\phi'(x) - \psi(x)).$$

Si ahora integramos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{1}{2} \int_0^x (\phi'(t) + \psi(t)) dt = f(0) + \frac{1}{2}(\phi(x) - \phi(0)) + \frac{1}{2} \int_0^x \psi(t) dt, \\ g(x) &= g(0) + \frac{1}{2}(\phi(x) - \phi(0)) - \frac{1}{2} \int_0^x \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora  $f$  y  $g$  en la integral general

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f(0) + \frac{1}{2}(\phi(x + y) - \phi(0)) + \frac{1}{2} \int_0^{x+y} \psi(t) dt \\ &\quad + g(0) + \frac{1}{2}(\phi(x - y) - \phi(0)) - \frac{1}{2} \int_0^{x-y} \psi(t) dt \\ &= \frac{1}{2}(\phi(x + y) + \phi(x - y)) + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Luego, el problema de Cauchy dado por

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x),$$

tiene solución única en todo  $\mathbb{R}^2$ . ◀

**Problema 2.** Intentamos ahora buscar la solución de la ecuación de ondas que cumpla las condiciones iniciales

$$u(x, x) = \phi(x), \quad u_x(x, x) - u_y(x, x) = \psi(x),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , donde  $\phi$  y  $\psi$  son dos funciones adecuadas. Observamos que estamos fijando sobre la recta  $y = x$  los valores de  $u$  y de la derivada de  $u$  en la dirección normal a la recta.

Como  $u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$ , donde  $f$  y  $g$  son dos funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ , tenemos:

$$\phi(x) = u(x, x) = f(2x) + g(0),$$

$$\psi(x) = u_x(x, x) - u_y(x, x) = f'(2x) + g'(0) - f'(2x) + g'(0) = 2g'(0),$$

que han de ser válidas para todo  $x \in \mathbb{R}$ . La segunda igualdad implica que  $\psi(x) = c$ , constante, para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Luego, en este caso, cualquier función de la forma

$$u(x, y) = \phi\left(\frac{x + y}{2}\right) + g(x - y),$$

donde  $g$  es una función arbitraria de clase  $\mathcal{C}^2$  tal que

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = \frac{c}{2}$$

es una solución del problema de Cauchy. A diferencia del problema anterior, este problema no siempre tiene solución y, cuando tiene, no es única. ◀

El problema de Cauchy aparece en pocos problemas reales. La cuestión normalmente es determinar soluciones de EDP que cumplen condiciones adicionales, de manera que la situación es más complicada, ya que, junto a problemas de valor inicial y problemas de contorno, se plantean problemas en los que se mezclan condiciones de ambos tipos. Los ejemplos que veremos de la ecuación de ondas y de la del calor son de esta naturaleza. Para la ecuación de Laplace, los problemas usuales son los que tienen condiciones de contorno.

Una cuestión importante desde el punto de vista matemático es la comprobación de que los problemas estén bien planteados en el sentido de que tengan solución única y que esta, además, dependa continuamente de los datos. Estas cuestiones tienen diferente discusión según sea el conjunto de funciones en el que se busque la solución. Tomando una clase de funciones suficientemente amplia es posible que exista solución sin que sea única. Si buscando la unicidad se restringe la clase de funciones admisibles como soluciones, puede perderse la existencia de solución.

### Teorema de Cauchy-Kowalewskaya

El *teorema de Cauchy-Kowalewskaya* garantiza la existencia y unicidad de solución para EDP bajo ciertas condiciones específicas. Su demostración escapa a los contenidos de este curso, pero puede verse en [6, 13]. A continuación, enunciamos este teorema para el caso particular de dos variables independientes.

**Teorema 4.12.** *Consideramos una EDP de segundo orden que pueda escribirse como*

$$u_{xx} = \varphi(x, y, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}),$$

donde  $\varphi$  es una función analítica en todas sus variables en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Sobre la curva  $x = x_0$ , se da el dato de Cauchy

$$u(x_0, y) = \phi(y) \quad y \quad u_x(x_0, y) = \psi(y),$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son dos funciones analíticas en todas sus variables en un entorno de un punto  $(x_0, y_0)$ . Entonces, el problema de Cauchy tiene una solución analítica en algún entorno del punto  $(x_0, y_0)$  y esta solución es única en la clase de funciones analíticas.

Este teorema garantiza una solución única  $u(x, y)$  en forma de una serie de Taylor en un entorno del punto  $(x_0, y_0)$ . El enunciado anterior es cierto si la EDP se puede resolver para  $u_{xx}$  o  $u_{yy}$ . Un resultado similar se da para EDP de primer orden. Sin embargo, existe una excepción: si el dato de Cauchy se da sobre una característica, puede que no exista solución única. Por ejemplo, si consideramos  $u_x = 0$ , cuya solución es  $u(x, y) = f(y)$ , y el dato de Cauchy  $u(x, y) = \phi(x)$ , con  $\phi(x) = \text{constante}$ , entonces no se puede encontrar una solución.

## 4.5. Condiciones asociadas

El objetivo principal es encontrar las soluciones particulares que satisfagan una EDP con ciertas condiciones auxiliares. Las condiciones auxiliares que consideraremos asociadas a cada EDP concreta van a depender esencialmente de que el tiempo aparezca o no como variable independiente. Así, distinguiremos entre las *ecuaciones de evolución* (ecuaciones de ondas y de difusión), que describen procesos que cambian con el tiempo y que contienen entonces a éste como variable independiente, y las *ecuaciones estacionarias* (ecuación de Laplace), que describen procesos estáticos y no dependen del tiempo.

Para las primeras, las ecuaciones de evolución, aparecen de forma natural en las aplicaciones dos tipos de condiciones auxiliares:

1. *Condiciones iniciales.* Al igual que en el caso de las EDO, prescriben el valor de la función y/o sus derivadas en un cierto instante  $t_0$ . Supondremos que  $t_0 = 0$ , lo cual no resta generalidad a los resultados que se obtengan. El número de condiciones iniciales a considerar depende del orden de la derivada parcial con respecto al tiempo que contenga la ecuación y coincide con éste. Así, para la ecuación de ondas ( $u_{tt} = c u_{xx} + G(x, t)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ) se considerarán dos condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f_1(x) \quad y \quad u_t(x, 0) = f_2(x),$$

mientras que para la ecuación de difusión ( $u_t = c u_{xx} + G(x, t)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ) sólo una

$$u(x, 0) = g(x).$$

2. *Condiciones de contorno.* Están asociadas a variables que representan alguna dimensión espacial y que por tanto se hallan restringidas a una cierta región  $\Omega$  finita o semi-infinita del espacio. Si la EDP es de segundo orden, va a ser necesario conocer el valor de la solución, de su derivada o de una combinación lineal de ellas en la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . Entonces, trataremos tres tipos de condiciones de frontera:

a) *Condiciones de Dirichlet.* Se prescribe el valor de la solución en la frontera y pueden representarse por

$$u(x, t)|_{\partial\Omega} = g(t).$$

b) *Condiciones de Neumann.* Se prescribe el valor de la derivada de la solución según la dirección de la normal en la frontera y pueden representarse por

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) \right|_{\partial\Omega} = g(t).$$

c) *Condiciones de Robin (o mixtas).* Se prescribe el valor de una combinación lineal de la solución y su derivada según la dirección normal en la frontera. Se pueden representar por

$$u(x, t)|_{\partial\Omega} + k \left. \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) \right|_{\partial\Omega} = g(t), \quad k \in \mathbb{R}.$$

En cuanto a las segundas, las ecuaciones estacionarias, sólo consideraremos problemas de contorno, puesto que son independientes del tiempo.

Resumiendo, para las ecuaciones de evolución nos ocuparemos de resolver problemas de valores iniciales con condiciones de contorno de uno de los tres tipos anteriores. Damos a continuación algunos ejemplos de este tipo de problemas cuando se considera una *región unidimensional acotada*.

i. Problema de Dirichlet para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + G(x, t), & 0 < x < \ell, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad u_t(x, 0) = f_2(x) & \text{(condiciones iniciales)} \\ u(0, t) = g_1(t), \quad u(\ell, t) = g_2(t) & \text{(condiciones de contorno)} \end{cases}$$

ii. Problema de Neumann para la ecuación de difusión:

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} + G(x, t), & 0 < x < \ell, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = f(x) & \text{(condición inicial)} \\ u_x(0, t) = g_1(t), \quad u_x(\ell, t) = g_2(t) & \text{(condiciones de contorno)} \end{cases}$$

iii. Problema de Robin para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + G(x, t), & 0 < x < \ell, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad u_t(x, 0) = f_2(x) & \text{(condiciones iniciales)} \\ \left. \begin{aligned} u(0, t) + h_1 u_x(0, t) &= g_1(t) \\ u(\ell, t) + h_2 u_x(\ell, t) &= g_2(t) \end{aligned} \right\} & \text{(condiciones de contorno)} \end{cases}$$

Como las ecuaciones estacionarias son independientes del tiempo, abordaremos en este caso los problemas de Dirichlet, Neumann y Robin para este tipo de ecuaciones, que formulados en coordenadas cartesianas para un rectángulo de longitud  $a$  y anchura  $b$ , son:

*i.* Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x) & \text{(condiciones de contorno en } y) \\ u(0, y) = g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y) & \text{(condiciones de contorno en } x) \end{cases}$$

*ii.* Problema de Neumann para la ecuación de Poisson:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = G(x, y), & 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ u_y(x, 0) = f_1(x), \quad u_y(x, b) = f_2(x) & \text{(condiciones de contorno en } y) \\ u_x(0, y) = g_1(y), \quad u_x(a, y) = g_2(y) & \text{(condiciones de contorno en } x) \end{cases}$$

*iii.* Problema de Robin para la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ \left. \begin{array}{l} u(x, 0) + h_1 u_y(x, 0) = f_1(x) \\ u(x, b) + h_2 u_y(x, b) = f_2(x) \end{array} \right\} & \text{(condiciones de contorno en } y) \\ \left. \begin{array}{l} u(0, y) + h_3 u_x(0, y) = g_1(y) \\ u(a, y) + h_4 u_x(a, y) = g_2(y) \end{array} \right\} & \text{(condiciones de contorno en } x) \end{cases}$$

En cada uno de los ejemplos anteriores se han dado siempre el mismo tipo de condiciones de contorno para los dos extremos del intervalo y para las dos variables  $x$  e  $y$  en las ecuaciones estacionarias. Sin embargo, pueden aparecer condiciones de distinto tipo asociadas a un mismo problema e incluso a una misma variable. Por ejemplo:

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u_x(\ell, t) = g_2(t),$$

o bien

$$\begin{aligned} u_y(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, 0) + h_1 u_y(x, 0) = f_2(x), \\ u(0, y) = g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y). \end{aligned}$$

Cuando se trata de *dominios no acotados*, se suelen dar ciertas condiciones de regularidad para la solución. Como ejemplos de este tipo de problemas, podemos considerar:

*i.* Para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + G(x, t), & x \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad u_t(x, 0) = f_2(x) & \text{(condiciones iniciales)} \\ u(0, t) = g_1(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) < +\infty & \text{(condiciones de contorno)} \end{cases}$$

ii. Para la ecuación de difusión:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + G(x, t), & x \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = f(x) & \text{(condición inicial)} \\ u(0, t) = g_1(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) < +\infty & \text{(condiciones de contorno)} \end{cases}$$

iii. Para la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0, & r > a, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, 2\pi) & \text{(condiciones de contorno en } \theta) \\ u(a, \theta) = f(\theta), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta) < +\infty & \text{(condiciones de contorno en } r) \end{cases}$$

donde  $r$  y  $\theta$  representan las coordenadas polares en el plano.

En general, el problema de decidir qué tipo de condiciones iniciales y/o de contorno son apropiadas para una EDP dada es bastante complicado. Hadamard sugirió tres condiciones que deber cumplirse cuando se formula un problema de valor inicial y/o de contorno asociado a una EDP para que esté bien planteado, que son:

- la solución debe existir,
- la solución debe ser única,
- la solución debe depender de forma continua de los datos iniciales y/o de los datos de frontera.

Las dos primeras condiciones exigen que el problema formado por la EDP y las condiciones auxiliares tenga una única solución. La tercera establece que pequeñas variaciones en las condiciones auxiliares deben provocar pequeñas variaciones en la solución; es decir, exige la estabilidad de la solución con respecto a las condiciones auxiliares.

## 4.6. Reducción de problemas a otros más sencillos

Debido a la *linealidad* de las ecuaciones y de las condiciones de contorno de algunos problemas, es posible reducir un problema a otros más sencillos mediante *superposición*. Por ejemplo, sea el problema:

$$(P) \begin{cases} L[u] = G \\ M_1[u] = f \\ M_2[u] = g \\ M_3[u] = h \end{cases}$$

donde  $L[u] = G$  es una ecuación lineal y  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  son condiciones adicionales tales que

$$L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L[u_1] + c_2L[u_2],$$

$$M_i[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1M_i[u_1] + c_2M_i[u_2], \quad i = 1, 2, 3.$$

El problema de resolver  $(P)$  se puede reducir a resolver otros problemas más sencillos. Por ejemplo, si  $u_1, u_2, u_3$  y  $u_4$  son soluciones respectivas de

$$\begin{cases} L[u_1] = G \\ M_1[u_1] = 0 \\ M_2[u_1] = 0 \\ M_3[u_1] = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L[u_2] = 0 \\ M_1[u_2] = f \\ M_2[u_2] = 0 \\ M_3[u_2] = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L[u_3] = 0 \\ M_1[u_3] = 0 \\ M_2[u_3] = g \\ M_3[u_3] = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L[u_4] = 0 \\ M_1[u_4] = 0 \\ M_2[u_4] = 0 \\ M_3[u_4] = h \end{cases}$$

entonces  $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$  es solución de  $(P)$ .

En algunos ejemplos puede que nos interese convertir la ecuación o alguna de las condiciones adicionales en homogénea. Por ejemplo, si conocemos una solución particular  $v$  de la ecuación, el cambio de variable  $w = u - v$  convierte  $(P)$  en el problema:

$$\begin{cases} L[w] = 0 \\ M_1[w] = f - M_1[v] \\ M_2[w] = g - M_2[v] \\ M_3[w] = h - M_3[v] \end{cases}$$

Si disponemos de una función  $v$  que satisfaga, por ejemplo, dos condiciones adicionales  $M_2[v] = g$  y  $M_3[v] = h$ , conseguimos convertir el problema con el mismo cambio de variable anterior  $w = u - v$  en:

$$\begin{cases} L[w] = G - L[v] \\ M_1[w] = f - M_1[v] \\ M_2[w] = 0 \\ M_3[w] = 0 \end{cases}$$

Hay una gran variedad en los posibles cambios. En cada problema concreto hay que plantearse cuáles son los cambios que nos conducen a problemas más asequibles. Si inicialmente hay algunas condiciones homogéneas, intentaremos que los cambios realizados no nos hagan perder la homogeneidad de esas condiciones.

Por último, observemos que si  $u_1, u_2, \dots, u_n$  satisfacen algunas condiciones homogéneas (por ejemplo:  $L[u_i] = M_2[u_i] = M_3[u_i] = 0$ ), entonces  $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n$  sigue satisfaciendo esas mismas condiciones homogéneas ( $L[u] = M_2[u] = M_3[u] = 0$ ). Si son infinitas las  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ , la suma  $\sum_{n=1}^{\infty} c_nu_n$  también satisfará dichas condiciones homogéneas, siempre que las cuestiones de convergencia vayan bien.

## 4.7. Principio del método de separación de variables

En esta sección introducimos el *método de separación de variables*, que es un método fundamental y potente para obtener soluciones particulares de problemas de contorno con

EDP. Aunque la clase de problemas a los que se puede aplicar este método es relativamente limitada, incluye no obstante muchos casos de gran interés físico.

El desarrollo del método requiere conectar con dos clases importantes de problemas que históricamente surgieron precisamente de él: los problemas de contorno para EDO de segundo orden y el problema de representación de una función en forma de serie trigonométrica (series de Fourier).

El enunciado matemático de tales problemas contiene una EDP y ciertas condiciones auxiliares (condiciones de contorno, condiciones iniciales o ambas), y la solución del problema es una función que satisface tanto la EDP como las condiciones auxiliares.

Si una EDP con dos o más variables independientes puede reducirse a un conjunto de EDO, una para cada variable, la ecuación se dice *separable*. Las soluciones de la EDP son entonces los productos de las soluciones de las EDO.

Si consideramos, por ejemplo, una EDP lineal de segundo orden con una sola variable dependiente  $u$  que es una función de dos variables independientes  $x$  e  $y$ , la idea del método de separación de variables consiste en buscar una solución de la forma  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ . En el caso en que sea aplicable este método, su aplicación lleva tres pasos:

1. obtención de dos EDO,
2. obtención de las soluciones de las dos EDO que cumplan las condiciones de contorno,
3. formación de una combinación lineal infinita de las soluciones para satisfacer las condiciones iniciales del problema.

El paso 3 se consigue primeramente aplicando la siguiente **generalización del principio de superposición** visto anteriormente:

Sean  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  una infinidad de soluciones de una EDP lineal homogénea. Supongamos que la serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge a  $u$  y es derivable término a término para obtener las diversas derivadas de  $u$  que aparecen en la EDP. La función  $u$ , definida por  $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , también es una solución de la EDP.

El objetivo es obtener una solución en forma de serie y exigir después que satisfaga las condiciones iniciales del problema.

Señalemos que el procedimiento así esquematizado es estrictamente *formal*. En un tratamiento riguroso se ha de demostrar que la *solución formal* obtenida satisface realmente tanto la EDP como las condiciones auxiliares y que la solución así construida es la única solución del problema.

Una característica del método de separación de variables es que el procedimiento constructivo de la solución, lo que se denomina *resolución formal*, es relativamente simple, pero la comprobación rigurosa de que en efecto ese procedimiento proporciona la solución es generalmente complicada. En las aplicaciones físicas es bastante normal que se haga solo la parte formal, tal y como se hace aquí, pero conviene destacar que el razonamiento en estos casos es incompleto.

**Ejemplo: problema de difusión del calor**

Ilustraremos los principios esenciales del método de separación de variables considerando el mismo problema que consideró Fourier sobre la conducción de calor en una varilla unidimensional cuyos extremos se mantienen a la temperatura constante de  $0^\circ\text{C}$  cuando la distribución de temperatura inicial está dada por la función  $f(x)$ . El modelo matemático que lo rige es el siguiente problema de contorno con condición inicial:

$$u_t = \beta u_{xx}, \quad \text{para } 0 < x < \ell \text{ y } t > 0 \quad (\beta = \text{constante}),$$

bajo las siguientes condiciones auxiliares

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad t > 0 \quad (\text{condiciones de contorno}),$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \ell \quad (\text{condición inicial}).$$

La idea es buscar soluciones de la forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , para lo que se ha de verificar la EDP

$$X(x)T'(t) = \beta X''(x)T(t), \quad \text{o bien,} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\beta T(t)} = \lambda,$$

donde  $\lambda$  ha de ser necesariamente una constante, que se denomina *constante de separación*. Por tanto, fijando  $\lambda$ , se tienen las dos EDO

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{y} \quad T'(t) = \beta \lambda T(t).$$

Como  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , las condiciones de contorno son

$$X(0)T(t) = 0 \quad \text{y} \quad X(\ell)T(t) = 0, \quad t > 0,$$

de manera que  $T(t) \equiv 0$ , para todo  $t > 0$ , lo que implica que  $u(x, t) \equiv 0$ , o bien

$$X(0) = X(\ell) = 0.$$

Ignorando la solución trivial, se combinan estas últimas condiciones de contorno con la EDO correspondiente a  $X(x)$  para obtener el problema de contorno

$$X''(x) = \lambda X(x); \quad X(0) = X(\ell) = 0, \quad (4.11)$$

donde  $\lambda$  puede ser cualquier constante.

Notemos que la función  $X(x) \equiv 0$  es una solución para todo  $\lambda$  y, dependiendo de la elección de  $\lambda$ , esta puede ser la única solución del problema de contorno (4.11). Así que si se busca una solución no trivial  $u(x, t) = X(x)T(t)$  del problema original, primero se deben determinar aquellos valores de  $\lambda$  para los cuales el problema de contorno (4.11) tiene una solución no trivial. Dichos valores especiales de  $\lambda$  se llaman *valores propios* (o *autovalores*), y las correspondientes soluciones no triviales se denominan *funciones propias* (o *autofunciones*).

Para resolver el problema de contorno (4.11), se empieza con la ecuación auxiliar  $r^2 - \lambda = 0$  y se consideran tres casos:

Caso 1:  $\lambda > 0$ . Las raíces de la ecuación auxiliar son  $r = \pm\sqrt{\lambda}$ , de modo que la solución general de la EDO que aparece en (4.11) es

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Para determinar  $C_1$  y  $C_2$ , recurrimos a las condiciones de contorno

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad \text{y} \quad X(\ell) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\ell} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\ell} = 0,$$

de forma que si  $C_2 = -C_1$ , tenemos que  $C_1 (e^{\sqrt{\lambda}\ell} - e^{-\sqrt{\lambda}\ell}) = 0$  o  $C_1 (e^{2\sqrt{\lambda}\ell} - 1) = 0$ . Como hemos supuesto que  $\lambda > 0$ , resulta que  $e^{2\sqrt{\lambda}\ell} - 1 > 0$ . Por lo tanto,  $C_1$  y, en consecuencia,  $C_2$  son iguales a cero. Por consiguiente, no existe solución no trivial de (4.11) para  $\lambda > 0$ .

Caso 2:  $\lambda = 0$ . Aquí  $r = 0$  es una raíz doble de la ecuación auxiliar y la solución general de la EDO es entonces

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Las condiciones de contorno dadas en (4.11) originan las ecuaciones  $C_1 = 0$  y  $C_1 + C_2 \ell = 0$ , las cuales implican que  $C_1 = C_2 = 0$ . Consecuentemente, para  $\lambda = 0$ , no existe solución no trivial de (4.11).

Caso 3:  $\lambda < 0$ . Las raíces de la ecuación auxiliar son  $r = \pm i\sqrt{-\lambda}$ , de modo que la solución general de la EDO que aparece en (4.11) es

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda}x.$$

Ahora las condiciones de contorno de (4.11) dan lugar al sistema

$$C_1 = 0, \quad C_1 \cos \sqrt{-\lambda}\ell + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda}\ell = 0.$$

Como  $C_1 = 0$ , el sistema se reduce a resolver  $C_2 \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda}\ell = 0$ . Por lo tanto,  $\operatorname{sen} \sqrt{-\lambda}\ell = 0$  o  $C_2 = 0$ . Ahora bien

$$\operatorname{sen} \sqrt{-\lambda}\ell = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{-\lambda}\ell = n\pi, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Por consiguiente, (4.11) tiene una solución no trivial ( $C_2 \neq 0$ ) cuando  $\sqrt{-\lambda}\ell = n\pi$  o  $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Además, las soluciones no triviales (funciones propias)  $X_n(x)$  correspondientes al valor propio  $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$  están dadas por

$$X_n(x) = a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde los valores  $a_n$  son constantes arbitrarias distintas de cero.

Una vez determinado  $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ , para algún entero positivo  $n$ , consideremos la segunda EDO,  $T'(t) = \beta\lambda T(t)$  con  $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ ; es decir,

$$T'(t) + \beta \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 T(t) = 0,$$

cuya solución general, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , es

$$T_n(t) = b_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t},$$

donde los valores  $b_n$  son constantes arbitrarias distintas de cero. Combinando ahora esta solución con la anterior, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se obtiene la función

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) b_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} = c_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right),$$

donde  $c_n$  es una constante arbitraria.

Señalemos que cada una de estas funciones  $u_n$  satisface tanto la EDP como las dos condiciones de contorno para todos los valores de las constantes  $c_n$  (compruébese como ejercicio).

Hemos de intentar ahora satisfacer la condición inicial. En general, por sí sola, ninguna de las anteriores soluciones  $u_n(x, t)$  satisfará la condición inicial. Por ejemplo, si aplicamos la condición inicial a una solución  $u_n(x, t)$ , hemos de tener

$$f(x) = u_n(x, 0) = c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad 0 < x < \ell,$$

donde  $n$  es un entero positivo, y esto es evidentemente imposible, a menos que  $f$  sea una función sinusoidal de la forma  $K \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right)$ , para algún entero positivo  $n$ .

¿Qué hemos de hacer entonces? Según la generalización del principio de superposición visto anteriormente, suponiendo la convergencia apropiada, una serie infinita de soluciones de la EDP del problema original es también solución. Formamos entonces una serie infinita de las soluciones  $u_n(x, t)$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right),$$

que, por la generalización del principio de superposición y suponiendo la convergencia apropiada, nos asegura que la suma de esta serie es también una solución de la EDP. Simbolizando dicha suma por  $u(x, t)$ , escribimos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right). \quad (4.12)$$

Observamos que  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ ,  $t > 0$ . Suponiendo entonces la convergencia apropiada, la función  $u(x, t)$ , dada por (4.12), satisface la EDP y las condiciones de contorno.

Aplicamos ahora la condición inicial a la solución (4.12):

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad 0 < x < \ell.$$

De esta manera, el problema original de conducción de calor en una varilla unidimensional se ha reducido al problema de determinar un desarrollo de  $f(x)$  de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right). \quad (4.13)$$

Un desarrollo de este tipo se llama *serie senoidal de Fourier*. Si se eligen los  $c_n$  de manera que la igualdad anterior sea válida, entonces el desarrollo de  $u(x, t)$ , dado por (4.12), se denomina *solución formal* del problema de conducción de calor en una varilla unidimensional. La teoría de las series de Fourier prueba que tales  $c_n$  son de la forma:

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(s) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi s}{\ell} \right) ds, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que el procedimiento empleado ha sido poco riguroso y deja muchas cuestiones abiertas: ¿realmente la serie de Fourier es convergente? ¿Para toda  $f$ ? ¿Debe cumplir  $f$  alguna condición? Y si la serie es convergente, ¿realmente converge a  $f(x)$ ?

Todas estas cuestiones fueron abordadas por Fourier a finales del siglo XVIII para resolver algunas EDP clásicas, dando respuestas a los interrogantes planteados por Bernoulli un cuarto de siglo antes. Actualmente la teoría de las series de Fourier (también conocida como Análisis Armónico) es una disciplina enmarcada dentro del Análisis Funcional, que cuenta con una teoría matemática bien desarrollada y con aplicaciones en campos diversos como el procesamiento de señales, la mecánica cuántica o la neurociencia.

**Ejemplo 4.13.** Encuéntrese la solución del siguiente problema de difusión

$$\begin{cases} u_t = 7u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 3 \operatorname{sen} 2x - 6 \operatorname{sen} 5x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Observemos que  $\beta = 7$  y  $\ell = \pi$ . Por tanto, se requiere solo determinar los valores de  $c_n$  incluidos en la fórmula (4.13). Esto es

$$u(x, 0) = 3 \operatorname{sen} 2x - 6 \operatorname{sen} 5x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx.$$

Igualando los coeficientes de términos semejantes, se encuentra que

$$c_2 = 3, \quad c_5 = -6 \quad \text{y} \quad c_n = 0, \quad \text{para todo } n \neq 2, 5.$$

Por consiguiente, de (4.12), se sigue que la solución del problema anterior de difusión es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= c_2 e^{-\beta \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{\ell} \right) + c_5 e^{-\beta \left(\frac{5\pi}{\ell}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi x}{\ell} \right) \\ &= 3e^{-28t} \operatorname{sen} 2x - 6e^{-175t} \operatorname{sen} 5x. \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

Posteriormente, se utiliza el método de separación de variables para estudiar una gran variedad de problemas referentes a las ecuaciones del calor, de ondas y de Laplace. Sin embargo, para aplicar el método de manera eficiente se requiere calcular series trigonométricas (o, de modo más general, desarrollos en funciones propias) tales como las series senoidales de Fourier. Estos desarrollos se estudian a continuación, pero antes veamos cuáles son los requisitos apropiados para poder aplicar separación de variables.

### Requisitos para poder aplicar separación de variables

Como se acaba de poner de manifiesto, y al igual que ocurría con la estructura de las EDP, para aplicar el procedimiento de separación de variables existen ciertos requisitos que deben satisfacer tanto las condiciones de contorno, como la región del espacio donde se considere definida la EDP. Estos provienen de la necesidad de definir un adecuado problema de contorno para alguna de las variables y se pueden resumir en dos condiciones:

1. La región del espacio donde se considere la EDP ha de ser tal que las condiciones sobre su frontera puedan definirse sobre variables independientes de forma separada. Por ejemplo, si la región es un círculo de radio  $\rho$  y centro el origen, su frontera, en coordenadas cartesianas, viene definida por la ecuación  $x^2 + y^2 = \rho^2$ . Entonces, las condiciones de contorno vienen dadas en la forma:

$$u(x, y)|_{x^2+y^2=\rho^2} = G(x, y)|_{x^2+y^2=\rho^2},$$

que obviamente no nos van a permitir definir condiciones separadas sobre  $x$  e  $y$ . En esta situación será imposible definir el problema de contorno que necesitamos. Sin embargo, si para esta misma región se consideran coordenadas polares, las condiciones de contorno vendrán dadas por:

$$u(\rho, \theta) = G(\theta), \quad u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, 2\pi),$$

que tienen la estructura deseada.

2. Las condiciones de contorno deben ser homogéneas. (También mediante un adecuado cambio de función se pueden abordar problemas con condiciones no homogéneas.)

## 4.8. Series de Fourier

La resolución de problemas de contorno con EDP nos llevan al manejo de series trigonométricas. Dichas series fueron introducidas por Fourier (1768–1830) en un tratado dedicado a la ecuación del calor y publicado en 1822: *Théorie Analytique de la Chaleur*. Además de su indudable interés práctico, motivado por su multitud de aplicaciones, las series trigonométricas tienen también un reconocido interés teórico, no en vano jugaron un papel fundamental en el desarrollo histórico de la noción de función. En la actualidad siguen siendo un activo campo de investigación matemática.

En esta sección vamos a considerar series trigonométricas escritas de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \quad (4.14)$$

Además, vamos a trabajar sobre el intervalo cerrado  $-\pi \leq x \leq \pi$ . Notemos que este planteamiento es ligeramente diferente al considerado en la sección anterior, donde considerábamos una serie de senos definida en  $[0, \ell]$ . No obstante, veremos que ambos planteamientos son equivalentes.

Nuestro primer objetivo es determinar los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ . Para ello, integramos la serie (4.14) término a término<sup>1</sup> después de multiplicar por  $\text{sen } nx$  o  $\text{cos } nx$  y tenemos en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones seno y coseno en  $[-\pi, \pi]$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{cos } x \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mx \text{cos } nx \, dx = 0, \quad m, n \geq 1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mx \text{sen } nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{cos } mx \text{cos } nx \, dx = 0, \quad m, n \geq 1, \quad m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}^2 nx \, dx = \pi, \quad n \geq 1.$$

Se obtiene entonces:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \quad (4.15)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{cos } nx \, dx, \quad n \geq 1, \quad (4.16)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen } nx \, dx, \quad n \geq 1. \quad (4.17)$$

**Definición 4.14** (Coeficientes de Fourier y serie de Fourier). *Los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  definidos en (4.15)-(4.16)-(4.17) se llaman coeficientes de Fourier de  $f(x)$ . A la serie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{cos } nx + b_n \text{sen } nx). \quad (4.18)$$

*se le denomina serie de Fourier de  $f(x)$ .*

Notemos que en (4.18) se ha suprimido la igualdad que aparece en (4.14). No ha sido ningún despiste y este hecho requiere algunos comentarios:

- Para definir la serie de Fourier (4.18) asociada a una función  $f(x)$  no hace falta exigir que ésta sea continua. Basta con que sea integrable en  $[-\pi, \pi]$ .
- Ahora bien, una cosa es que la serie de Fourier (4.18) esté definida y otra que sea convergente y, en el caso de que lo sea, lo haga a  $f(x)$ . Esto no siempre es así. Se conocen ejemplos de funciones integrables, e incluso continuas, cuyas series de Fourier son divergentes en uno o más puntos. Por este motivo, los tratados avanzados sobre series de Fourier evitan la igualdad en (4.14) y la sustituyen por el signo  $\sim$  en su lugar. Sin embargo, en el nivel de este curso, todas las series que nos aparecerán son convergentes y podemos usar sin miedo dicha igualdad. En [8, 20] podemos encontrar un tratamiento riguroso de esta teoría.

---

<sup>1</sup>Este procedimiento no siempre se puede hacer y necesita una justificación teórica que vamos a obviar.

- No toda serie trigonométrica es una serie de Fourier. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{sen} nx}{\log(1+n)},$$

que es convergente para todo  $x \in \mathbb{R}$ , no es una serie de Fourier, pues sus coeficientes no se pueden obtener, para ninguna función  $f(x)$ , a partir de las expresiones (4.15)-(4.16)-(4.17).

- Una condición necesaria para que  $f(x)$  sea representada por la serie de Fourier (4.18), es que sea  $2\pi$ -periódica; es decir, debe estar definida en  $[-\pi, \pi]$  y  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Para valores de  $x$  fuera del intervalo  $[-\pi, \pi]$ , se considera la llamada *extensión  $2\pi$ -periódica* de  $f$ :

$$f(x+2\pi) = f(x). \quad (4.19)$$

El problema de la convergencia de la serie de Fourier fue abordado por la comunidad matemática una vez publicado el trabajo de Fourier. En concreto, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) caracterizó la convergencia de la serie de Fourier para unas determinadas funciones.

**Teorema 4.15** (Teorema de Dirichlet: convergencia puntual, [26]). *Sea  $f(x)$  una función definida y acotada en  $[-\pi, \pi)$ , con solo un número finito de discontinuidades (de salto) y un número finito de máximos y mínimos en el intervalo, y se define para otros valores de  $x$  por la condición de periodicidad (4.19). Entonces, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \quad (4.20)$$

donde los coeficientes de Fourier  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  están definidos en (4.15)-(4.16)-(4.17) y  $f(x^+)$  y  $f(x^-)$  representan, respectivamente, los límites por la derecha y por la izquierda de  $f$  en  $x$  ( $f(x^+) = \lim_{z \rightarrow x^+} f(z)$  y  $f(x^-) = \lim_{z \rightarrow x^-} f(z)$ ). En particular, si  $f(x)$  es continua en  $x$ , entonces

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Existen varias variantes, con condiciones más o menos generales sobre la función  $f$ , que garantizan la convergencia punto a punto de la serie de Fourier. Una de ellas puede verse en el Apéndice A del capítulo 6 del libro de Simmons [26]. Notemos que la continuidad de  $f$  no es una condición suficiente para la convergencia de la serie de Fourier, ni tampoco necesaria. Así, existen funciones continuas cuya serie de Fourier es divergente y funciones discontinuas con serie de Fourier convergente. La igualdad (4.20) garantiza la convergencia de la serie de Fourier a  $f(x)$  si  $f(x)$  es continua en  $x$  y, en las discontinuidades de salto, la convergencia al valor medio de las discontinuidades.

**Ejemplo 4.16.** Encuéntrese la serie de Fourier de  $f(x) = x$ , con  $-\pi \leq x < \pi$ , y dibújense esta función y algunas sumas parciales de la serie de Fourier.

Buscamos en primer lugar los coeficientes de Fourier, que vienen dados por (4.15)-(4.16)-(4.17) y que, en este caso, son:

$$a_n = 0, \quad n \geq 0, \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \geq 1.$$

La serie de Fourier (4.18) es entonces:

$$2 \left( \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \dots \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx.$$

Denotamos a las sumas parciales de  $N$  términos de la serie de Fourier de  $f(x) = x$  por

$$S_N f(x) = 2 \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

En las gráficas de las figuras 4.1 y 4.2 podemos apreciar la convergencia de la serie a la función  $f(x) = x$  en los puntos del intervalo  $(-\pi, \pi)$  y, en general, en la recta real exceptuando los puntos de la forma  $(2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Para estos puntos, es claro que todos los términos de la serie de Fourier se anulan, luego ésta converge a 0, que es el valor intermedio entre los puntos de salto de las discontinuidades:  $(2n-1)\pi$  y  $(-2n+1)\pi$  con  $n \in \mathbb{N}$ . ◀

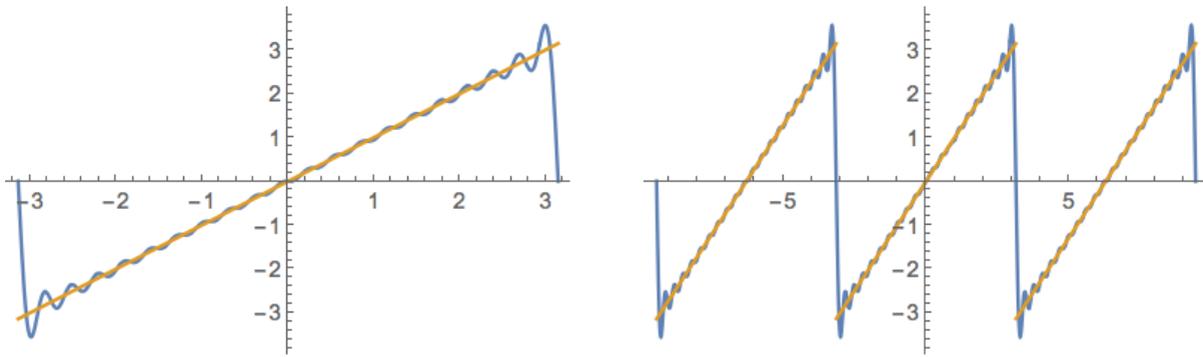


Figura 4.1: Suma parcial con  $N = 20$  de la serie de Fourier de  $f(x) = x$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  (Ejemplo 4.16) y extendida al intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$ .

**Ejemplo 4.17.** Calcúlese la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ x, & \text{si } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

y analícese su comportamiento en los puntos de discontinuidad.

Una vez calculados los coeficientes dados por (4.15)-(4.16)-(4.17),

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{-1 + (-1)^n}{\pi n^2}, \quad n \geq 1, \quad \text{y} \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \geq 1,$$

obtenemos la serie de Fourier

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx.$$

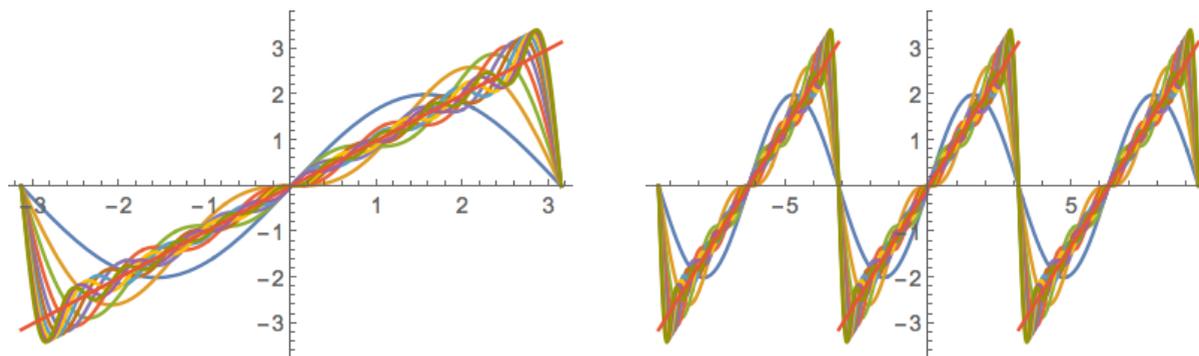


Figura 4.2: Sumas parciales de la serie de Fourier de  $f(x) = x$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  (Ejemplo 4.16) y extendida al intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$  para  $N = 1, 2, \dots, 10$ .

Por el teorema de Dirichlet, esta serie converge a  $f(x)$  en todos los puntos de continuidad. Sin embargo, en los puntos de discontinuidad (por ejemplo,  $x = \pi$ ), la serie converge a  $\pi/2$ . Este hecho nos conduce a una aplicación interesante. Al sustituir  $x = \pi$  en la serie anterior:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

A la misma conclusión hubiésemos llegado si sustituyésemos en  $x = 0$ . De aquí es sencillo deducir la suma de los recíprocos de los cuadrados de los números enteros positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacktriangleleft$$

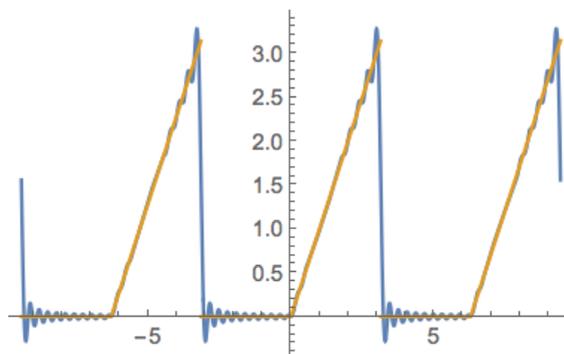


Figura 4.3: Suma parcial con  $N = 20$  de la serie de Fourier de la función del Ejemplo 4.17 extendida al intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$ .

En ocasiones, las propiedades de simetría de una función (que sea par o impar) producen efectos notorios sobre su serie de Fourier. De hecho, se puede hablar de series de Fourier de senos y de cosenos, como vemos a continuación.

**Definición 4.18** (Serie senoidal de Fourier). *Sea  $f(x)$  una función impar e integrable, definida en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Entonces, la serie de Fourier de  $f(x)$  solo contiene términos en*

senos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx.$$

Notemos que  $a_n = 0$  para todo  $n \geq 0$ .

**Definición 4.19** (Serie cosenoidal de Fourier). Sea  $f(x)$  una función par e integrable, definida en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Entonces, la serie de Fourier de  $f(x)$  solo contiene términos en cosenos:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Notemos que  $b_n = 0$  para todo  $n \geq 1$ .

Las dos definiciones anteriores podrían haber sido enunciadas como resultados que requieren su demostración. Así, si  $f(x)$  es impar, entonces  $f(x) \cos x$  es impar y, por tanto,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad n \geq 0.$$

Por otra parte, como  $f(x) \operatorname{sen} x$  es par, entonces

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx, \quad n \geq 1.$$

De igual forma se procede si  $f(x)$  es par.

**Ejemplo 4.20.** Calcúlese la serie cosenoidal de Fourier de la función  $f(x) = |x|$  con  $x \in [-\pi, \pi]$ .

Como  $f(x)$  es par, obtenemos una serie de Fourier de cosenos. En este caso, los coeficientes son

$$a_0 = \pi, \quad a_n = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1), \quad n \geq 1;$$

es decir,

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = -\frac{4}{\pi(2n-1)^2}, \quad n \geq 1.$$

En consecuencia, se llega al desarrollo

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},$$

que es válido para todo  $x \in [-\pi, \pi]$ . Notemos que evaluando el desarrollo anterior en  $x = 0$  se obtiene también la suma de los recíprocos de los cuadrados de los números impares positivos. ◀

Notemos que las funciones definidas en los tres ejemplos anteriores coinciden en el intervalo  $[0, \pi]$ . No obstante, como la función definida en el Ejemplo 4.16 es impar, su serie de Fourier se reduce a una serie senoidal. Del mismo modo, como la función definida en el Ejemplo 4.20 es par, su serie de Fourier se reduce a una serie cosenoidal. No ocurre lo mismo con la función del Ejemplo 4.17, que no es ni par ni impar.

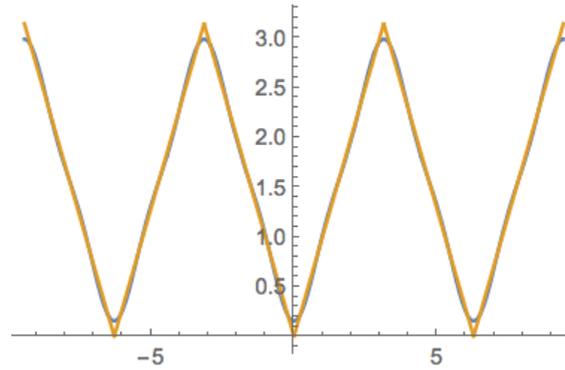


Figura 4.4: Suma parcial con  $N = 3$  de la serie de Fourier de  $f(x) = |x|$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  (Ejemplo 4.20) extendida al intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$ .

Hasta ahora hemos trabajado con series de Fourier definidas en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Sin embargo, en muchas aplicaciones es conveniente considerar intervalos diferentes. Por ejemplo, podemos pasar a intervalos de la forma  $[-\ell, \ell]$  sin más que considerar el cambio de variable

$$x = \frac{\ell t}{\pi}.$$

**Definición 4.21** (Serie de Fourier en  $[-\ell, \ell]$ ). *Sea  $f(x)$  una función definida e integrable en  $[-\ell, \ell]$  y extendida por  $2\ell$ -periodicidad fuera de dicho intervalo. Entonces, la serie de Fourier de  $f(x)$  es:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right),$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad n \geq 1.$$

**Definición 4.22** (Serie cosenoidal de Fourier en  $[-\ell, \ell]$ ). *Sea  $f(x)$  una función par e integrable en  $[-\ell, \ell]$  y extendida por  $2\ell$ -periodicidad fuera de dicho intervalo. Entonces, la serie de Fourier de  $f(x)$  es:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad n \geq 1.$$

**Definición 4.23** (Serie senoidal de Fourier en  $[-\ell, \ell]$ ). *Sea  $f(x)$  una función impar e integrable en  $[-\ell, \ell]$  y extendida por  $2\ell$ -periodicidad fuera de dicho intervalo. Entonces, la serie de Fourier de  $f(x)$  es:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad n \geq 1.$$

**Ejemplo 4.24.** Dada la función  $f(x) = 1 - x^2$  con  $x \in [-1, 1]$ , veamos cuál es su serie de Fourier.

Notemos que  $f(x)$  es par y que debe ser entendida como extendida con periodo 2 fuera del intervalo  $[-1, 1]$ . Unas sencillas integrales nos llevan a los coeficientes de una serie cosenoidal de Fourier:

$$a_0 = \frac{4}{3}, \quad a_n = -\frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}, \quad n \geq 1.$$

En consecuencia, se llega al desarrollo

$$1 - x^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x),$$

que es válido para  $x \in [-1, 1]$ . Notemos que, para  $x = 0$ , se obtiene la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad \blacktriangleleft$$

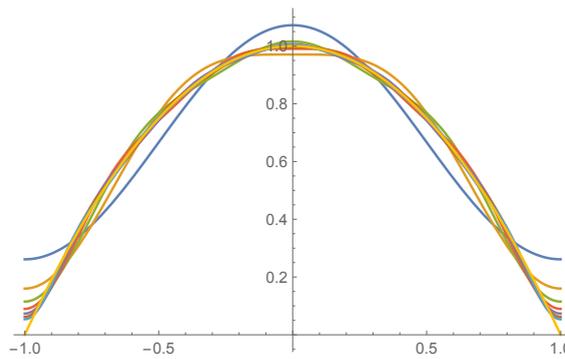


Figura 4.5: Sumas parciales de la serie de Fourier de la función  $f(x) = 1 - x^2$  en el intervalo  $[-1, 1]$  (Ejemplo 4.24) para  $N = 1, 2, \dots, 7$ .

**Ejemplo 4.25.** Veamos ahora cuál es la serie de Fourier de la función  $f(x) = x \cos x$  con  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Notemos que  $f(x)$  es impar y que debe ser entendida como extendida con periodo  $\pi$  fuera del intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ . En este caso, se obtiene la serie senoidal de Fourier

$$x \cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(2nx)$$

con

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cos x \operatorname{sen}(2nx) dx = (-1)^{n+1} \frac{16n}{\pi(2n+1)^2(2n-1)^2}. \quad \blacktriangleleft$$

**Ejemplo 4.26.** Consideremos la función  $f(x) = \operatorname{sen} x$  definida en  $[0, \pi]$ . La extensión impar de esta función nos lleva a la función  $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ , la habitual función seno definida en toda

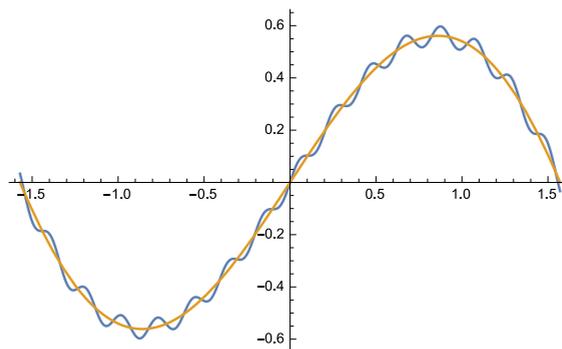


Figura 4.6: Suma parcial con  $N = 30$  de la serie de Fourier de la función  $f(x) = x \cos x$  en el intervalo  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  (Ejemplo 4.25).

la recta real, y la extensión par a  $f_2(x) = |\operatorname{sen} x|$ . Evidentemente, estas dos funciones son diferentes y dan lugar a desarrollos de Fourier distintos que no conviene confundir.

La serie de Fourier de  $f_1(x) = \operatorname{sen} x$  es simplemente  $\operatorname{sen} x$ . Sin embargo, la función  $f_2(x) = |\operatorname{sen} x|$ , que es par y admite el desarrollo en serie de cosenos

$$|\operatorname{sen} x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2nx), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Luego, el desarrollo en serie de cosenos de  $\operatorname{sen} x$  es

$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2nx), \quad \text{para } x \in [0, \pi]. \quad \blacktriangleleft$$

**Fenómeno de Gibbs.** Recordemos que una serie de Fourier converge, en los saltos de discontinuidad, al valor medio de los dos límites laterales de la función. Si observamos las gráficas de las sumas parciales de los  $N$  primeros términos de una serie de Fourier, vemos que aparecen oscilaciones cerca de los puntos de discontinuidad. Las oscilaciones persisten aunque aumentemos el número de términos de la serie. Estas oscilaciones, que aparecen solo para las sumas finitas, se conocen como *fenómeno de Gibbs*, después de que el científico americano Josiah Willard Gibbs (1839–1903) las descubriese. A continuación, mostramos el fenómeno de Gibbs en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.27.** Consideramos la función «diente de sierra» definida por  $f(x) = (\pi - x)/2$ , si  $0 < x \leq 2\pi$ , y  $f(x) = f(x + 2\pi)$  en otro caso.

En primer lugar, se tiene que la función «diente de sierra» así definida es  $2\pi$ -periódica, impar y con discontinuidades de salto en los puntos de la forma  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . En consecuencia, admite el desarrollo en serie senoidal de Fourier

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

Este desarrollo es válido para todos los puntos de continuidad de  $f(x)$ . En particular, es válido en  $(0, 2\pi)$ , donde  $S_f(x) = f(x) = (\pi - x)/2$ . Sin embargo, en los puntos de discontinuidad,  $f(x) = -\pi/2$ , pero  $S_f(x) = 0$ , que es el valor medio de  $f(x^+) = -\pi/2$  y  $f(x^-) = \pi/2$ .

En las gráficas de las sumas parciales  $S_N f(x)$  de la serie de Fourier de  $f(x)$  se aprecia que según aumenta el número de términos  $N$ , la serie se aproxima mejor a la función (figura 4.7). También se aprecia la aparición de unas ondas que se mueven hacia las discontinuidades. Si bien la función «diente de sierra» está acotada entre  $-\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{2}$ , vemos que las sumas parciales de su serie de Fourier sobrepasan estos límites, dando lugar a lo que se conoce como *fenómeno de Gibbs*.

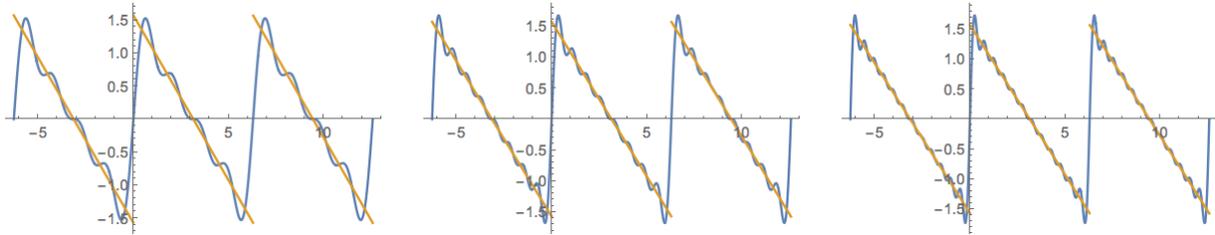


Figura 4.7: Fenómeno de Gibbs en las sumas parciales de la serie de Fourier de la función «diente de sierra» (Ejemplo 4.27) para  $N = 4, 8, 12$ .

Podemos hacernos una idea de lo bien que aproximan las sumas parciales de la serie de Fourier a la función  $f(x)$  con los gráficos de los errores cometidos (figura 4.8). Notemos que cerca de  $0$  y  $2\pi$ , los puntos de discontinuidad de la función «diente de sierra», aparecen unas ondas que indican el sobrepaso de la serie de Fourier. Las alturas de estas ondas, lejos de disiparse cuando aumenta  $N$ , parece que se aproximan a un valor cercano a  $0.28$ , por una simple inspección gráfica.

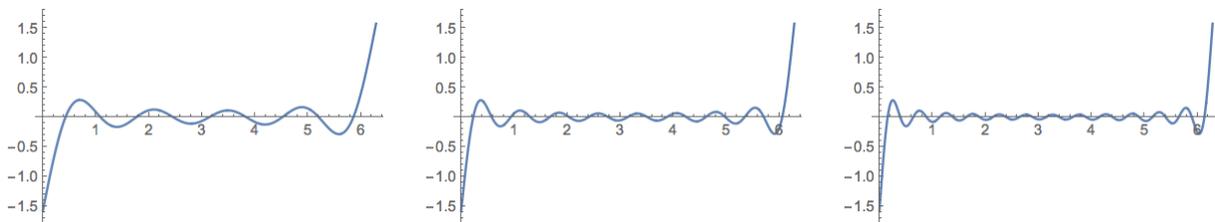


Figura 4.8: Errores  $S_N f(x) - f(x)$  en las sumas parciales de la serie de Fourier de la función «diente de sierra» (Ejemplo 4.27) para  $N = 4, 8, 12$ .

Podemos estimar con más rigor el error cometido por la serie de Fourier teniendo en cuenta que  $S_N f(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\text{sen } nx}{n}$  y

$$S_N f\left(\frac{\pi}{N}\right) = \sum_{n=1}^N \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{\pi}{N} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{\frac{n\pi}{N}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } x}{x} dx \approx 1.85194.$$

De hecho, el sobrepaso por exceso que ocurre cerca de  $x = 0$  (hay otro sobrepaso por defecto cerca de  $x = 2\pi$ ) es

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( S_N f\left(\frac{\pi}{N}\right) - f(0^+) \right) = \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } x}{x} dx - \frac{\pi}{2} \approx 1.85194 - 1.5708 = 0.281141. \quad \blacktriangleleft$$

En general, en el fenómeno de Gibbs, para  $N$  grande, existe un sobrepaso por exceso y por defecto de aproximadamente un 9% del valor de la discontinuidad de salto.

## Desarrollos ortogonales

Las series de Fourier son ejemplos de desarrollos ortogonales. Decimos que un conjunto de funciones  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  es un *sistema ortogonal* o simplemente ortogonal con respecto a la función de peso no negativa  $w(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  si

$$\int_a^b f_m(x)f_n(x)w(x) dx = 0, \quad \text{siempre que } m \neq n. \quad (4.21)$$

Hemos mencionado que el conjunto de funciones trigonométricas

$$\left\{1, \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right), \dots\right\} \quad (4.22)$$

es ortogonal en  $[-\ell, \ell]$  con respecto a la función peso  $w(x) = 1$ .

Si definimos la *norma* de  $f$  como

$$\|f\| = \left(\int_a^b f(x)^2 w(x) dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

entonces se dice que un conjunto de funciones  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  es un *sistema ortonormal* con respecto a  $w(x)$  si se satisface (4.21) y  $\|f_n\| = 1$  para todo  $n \geq 1$ . Equivalentemente, decimos que el conjunto es un sistema ortonormal si

$$\int_a^b f_m(x)f_n(x)w(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ 1, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Siempre podemos obtener un sistema ortonormal a partir de un sistema ortogonal dividiendo cada función por su norma. En particular, como

$$\int_{-\ell}^{\ell} 1 dx = 2\ell, \quad \int_{-\ell}^{\ell} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \ell, \quad n \geq 1,$$

entonces el sistema ortogonal (4.22) da lugar en  $[-\ell, \ell]$  al sistema ortonormal con respecto a la función peso  $w(x) = 1$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \frac{1}{\sqrt{\ell}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right), \frac{1}{\sqrt{\ell}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right), \dots\right\}.$$

Si  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  es un sistema ortogonal con respecto a  $w(x)$  en  $[a, b]$ , podemos preguntarnos si es posible desarrollar una función  $f(x)$  en términos de estas funciones; es decir, si podemos expresar  $f$  de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \quad (4.23)$$

para una elección apropiada de las constantes  $c_n$ ,  $n \geq 1$ , en (4.23). Llamamos *desarrollo ortogonal* o *serie de Fourier generalizada* de  $f$  a un desarrollo de este tipo.

Para determinar las constantes  $c_n$ ,  $n \geq 1$ , utilizamos la ortogonalidad del sistema y procedemos como hicimos para obtener los coeficientes de una serie de Fourier. Así, multiplicamos (4.23) por  $f_m(x)w(x)$  e integramos para obtener

$$\int_a^b f(x)f_m(x)w(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b f_m(x)f_n(x)w(x) dx. \quad (4.24)$$

(Aquí suponemos que la serie es uniformemente convergente para poder intercambiar la suma infinita y la integral definida.) Como el sistema es ortogonal con respecto a  $w(x)$ , cada una de las integrales de la parte derecha de (4.24) es igual a cero excepto cuando  $m = n$ . Entonces, despejando  $c_m$ , resulta

$$c_m = \frac{\int_a^b f(x)f_m(x)w(x) dx}{\int_a^b f_m^2(x)w(x) dx} = \frac{\int_a^b f(x)f_m(x)w(x) dx}{\|f_m\|^2}, \quad m \geq 1. \quad (4.25)$$

La deducción de (4.25) es solo *formal*, ya que la convergencia del desarrollo (4.23) no ha sido estudiada. Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$  converge uniformemente a  $f(x)$  en  $[a, b]$ , entonces los coeficientes  $c_n$  están bien definidos por (4.25).

## 4.9. Ejercicios

1. Factoricéense y resuélvanse las siguientes EDP:

$$\begin{array}{ll} a) & (D_{xx}^2 - D_{xy}^2 - 6D_{yy}^2)u = 0 \\ b) & (D_{xx}^2 - 2D_{xy}^2 + 5D_{yy}^2)u = 0 \\ c) & (D_{xx}^2 + 2D_{xy}^2 - 8D_{yy}^2)u = 0 \\ d) & (D_{xx}^2 - 2D_{xy}^2)u = 0 \\ e) & (D_{xx}^2 - D_{xy}^2 - 2D_{yy}^2 + 6D_x - 9D_y + 5)u = 0 \\ f) & (D_{xy}^2 + D_x - D_y - 1)u = 0 \\ g) & (D_{xx}^2 - 3D_{xy}^2 + D_x - 3D_y)u = 0 \\ h) & (D_{xy}^2 - D_{yy}^2 + D_x - D_y)u = 0 \end{array}$$

2. Formúlese una EDP de segundo orden tal que las funciones:  $u_1 = e^{-y}(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)$ ,  $u_2 = e^y(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)$  sean soluciones particulares de la EDP y obténgase la integral general.

3. Resuélvanse las siguientes EDP:

$$\begin{array}{ll} a) & (D_{xxx}^3 - 7D_{xyy}^3 - 6D_{yyy}^3)u = 0 \\ b) & (D_{xxx}^3 - D_{xxy}^3 - 8D_{xyy}^3 + 12D_{yyy}^3)u = 0 \\ c) & (D_{xxx}^3 + D_{xxy}^3 - D_{xyy}^3 - D_{yyy}^3)u = 0 \\ d) & (D_{xxxx}^4 - 2D_{xxyy}^4 + D_{yyyy}^4)u = 0 \end{array}$$

4. Resuélvanse, sin reducir a forma canónica, las siguientes EDP:

$$\begin{array}{ll} a) & (xD_{xy}^2 + yD_{yy}^2 + D_y)u = 10x^3y \\ b) & (D_{xx}^2 - 2D_{xy}^2)u = e^{2x} + x^3y \\ c) & (yD_{xy}^2 + D_x - yD_y - 1)u = (1-x)(1+\ln y) \\ d) & (D_{xx}^2 - 3yD_x + 2y^2)u = y \end{array}$$

5. Clasifíquense, redúzcanse a forma canónica y, si es posible, encuéntrese la solución general de las siguientes EDP:

$$\begin{array}{ll} a) & x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0 \quad (x \neq 0, y \neq 0) \\ b) & e^x u_{xx} + e^y u_{yy} = u \\ c) & u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0 \\ d) & x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = e^x \\ e) & u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + 6u_x + 3u_y = 9u \\ f) & u_{xx} - 3yu_x + 2y^2u = y \end{array}$$

6. Sea la EDP  $x^2 u_{xx} - u_{yy} + u_y = 0$ , con  $x \neq 0$ .
- Redúzcase la EDP a su forma canónica y encuéntrase la solución general.
  - Determinése la solución que verifica:  $u(x, 0) = 2x$ ,  $u_y(x, 0) = x$ .
  - Escríbese alguna solución distinta de la trivial ( $u = 0$ ) y tal que  $u(e^y, y) = u_y(e^y, y) = 0$ .
7. Sea la EDP  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 2u/y^2$ , con  $y \neq 0$ .
- Redúzcase la EDP a su forma canónica y encuéntrase la solución general.
  - Calcúlese la solución que satisface:  $u(x, 1) = 0$ ,  $u_y(x, 1) = G(x)$ .
  - Hállese y dibújese  $u(x, 2)$  si  $G(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ (\text{sen } \pi x)^4, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$
8. Dados los siguientes problemas de Cauchy, hállese las formas canónicas de las EDP y encuéntrase las soluciones:
- $4u_{xx} - u_{yy} = 0$ ,  $u(x, x) = x^2$ ,  $u_y(x, x) = 0$
  - $u_{xx} - u_{yy} = 0$ ,  $u(x, x) = 0$ ,  $u_y(x, x) = 0$
  - $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$ ,  $u(x, 0) = x$ ,  $u_y(x, 0) = 0$
9. Encuéntrase la serie de Fourier de la función  $f$  dada en los intervalos indicados:
- $f(x) = \cos^2 x$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ .
  - $f(x) = \text{sen}^3 x$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ .
  - $f(x) = -1$  si  $x \in [-1, 0)$  y  $f(x) = 1$  si  $x \in [0, 1]$ .
  - $f(x) = 1$  si  $x \in [-2, 0)$ ,  $f(x) = 0$  si  $x \in [0, 1)$  y  $f(x) = 1$  si  $x \in [1, 2]$ .
  - $f(x) = |\text{sen } x|$  si  $x \in [-\pi, \pi]$ .
  - $f(x) = |\cos x|$  si  $x \in [-\pi, \pi]$ .
10. Si  $f(x)$  admite un desarrollo en serie de Fourier de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx),$$

demuéstrese la conocida *identidad de Parseval*:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

11. Encuéntrase la serie de Fourier de  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y utilícese la identidad de Parseval para probar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

12. Sea la función  $2\pi$ -periódica definida por  $f(x) = x$  en  $(-\pi, \pi]$ . Determinése su serie de Fourier y analícese la presencia del fenómeno de Gibbs en el punto  $x = \pi$ .



# Capítulo 5

## Ecuación de ondas

El origen de la conocida como *ecuación de ondas* se encuentra en el interés de algunos científicos del siglo XVIII por modelizar el comportamiento de una cuerda que vibra. Además de su indudable interés histórico, a tenor de la relevancia de los matemáticos que trabajaron en ella (Daniel Bernoulli, Jean le Rond D'Alembert, Leonhard Euler, Jean Baptiste Joseph Fourier, etc.), tiene un gran interés desde el punto de vista matemático, pues para su resolución se desarrollaron técnicas que se usan para resolver problemas más sofisticados.

Una parte del problema de la cuerda vibrante consiste en resolver la EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

donde  $u = u(x, t)$  y  $\alpha$  es una constante que depende de ciertos parámetros físicos relacionados con la cuerda: densidad, tensión, etc.

Se puede deducir la EDP (5.1) teniendo en cuenta las fuerzas que actúan sobre el sistema y realizando una serie de simplificaciones: el movimiento de la cuerda es plano, la coordenada  $u$  solo depende de la abscisa  $x$  y del tiempo  $t$ , no hay fuerzas exteriores actuando sobre la cuerda, etc. En la sección 1.1.2 se puede ver la deducción de (5.1).

Veamos a continuación algunas consideraciones acerca de la ecuación de ondas (5.1) y su solución:

- La solución  $u(x, t)$  es una función de dos variables en la que  $u(x, 0)$  es la posición inicial de la cuerda y, para un tiempo fijo  $t$ ,  $u(x, t)$  indica la posición de la cuerda en el tiempo  $t$ .
- Una sencilla interpretación física de (5.1) nos muestra una relación entre la aceleración de la cuerda ( $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ), y por tanto de la fuerza ejercida sobre ella, y la concavidad-convexidad de la misma ( $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ). La fuerza ejercida sobre la cuerda depende de su concavidad.
- La ecuación (5.1) admite infinitas soluciones:  $u(x, t) = ax + bt$  con  $a$  y  $b$  constantes;  $u(x, t) = x^2 + \alpha^2 t^2$ ;  $u(x, t) = e^x e^{\alpha t}$ ;  $u(x, t) = \sin x \sin \alpha t$ ;  $u(x, t) = \sin x \cos \alpha t$ ; combinaciones lineales de las anteriores;  $u(x, t) = f(x + \alpha t) + g(x - \alpha t)$  con  $f$  y  $g$  funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ ; etc.

- Desde el punto de vista físico, la EDP (5.1) se debe complementar con unas *condiciones iniciales* ( $u(x, 0) = f(x)$ , donde  $f$  es una función dada que simula la deformación inicial;  $u_t(x, 0) = g(x)$ , donde  $g$  es una función dada que simula la velocidad inicial) y unas *condiciones de contorno*, que por conveniencia se toman  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ , donde  $\ell$  es la longitud de la cuerda (es decir, la cuerda está fija en los extremos). Por comodidad, se suele tomar  $\ell = \pi$ .
- Además, la imposición de condiciones iniciales y de contorno puede permitir determinar de forma única una solución, reducir el rango de posibles soluciones o impedir que exista alguna solución.

El problema de la cuerda vibrante, sección 1.1.2, analiza las vibraciones transversales de una cuerda sujeta entre dos puntos, tal como una cuerda de guitarra o de piano. El propósito es encontrar una función  $u(x, t)$  que proporcione el desplazamiento (deflexión) de la cuerda en cualquier punto  $x \in [0, \ell]$  y cualquier instante  $t \geq 0$ .

En el desarrollo del modelo matemático se supone que la cuerda es totalmente flexible y tiene una densidad lineal constante, la tensión en la cuerda es constante, la gravedad es despreciable y no actúan otras fuerzas sobre la cuerda. En estas condiciones y la hipótesis adicional de que los desplazamientos  $u(x, t)$  son pequeños comparados con la longitud de la cuerda, resulta que el movimiento de dicha cuerda se rige por el siguiente problema de valores inicial y de contorno:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

La constante  $\alpha^2$  que aparece en la EDP es estrictamente positiva y depende de la densidad lineal y la tensión de la cuerda. Las condiciones de contorno reflejan el hecho de que la cuerda se mantiene fija en los extremos  $x = 0$  y  $x = \ell$ . Las condiciones iniciales especifican, respectivamente, el desplazamiento inicial de la cuerda y la velocidad inicial de cada punto de la cuerda. Para que las condiciones inicial y de contorno sean consistentes, se supone que  $f(0) = f(\ell) = 0$  y  $g(0) = g(\ell) = 0$ .

## 5.1. Solución de Bernoulli

Por comodidad, pensemos en la ecuación de ondas (5.1) con condiciones de frontera<sup>1</sup>

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.3)$$

Demostrar que las funciones de la forma  $u(x, t) = \text{sen}(nx) \cos(\alpha nt)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , son soluciones de (5.1) que cumplen (5.3) es una comprobación inmediata. El *principio de superposición*

<sup>1</sup>Se podrían generalizar sin mayor problema a  $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$  con  $\ell > 0$ .

garantiza que la combinación lineal de dos soluciones de una ecuación lineal homogénea (como lo es (5.1)), también es solución. En general, cualquier suma finita de la forma

$$\sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen}(nx) \cos(\alpha nt)$$

también es solución.

En 1753, Bernoulli conjeturó que las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) \cos(\alpha nt), \quad \text{con } b_n \text{ constantes,} \quad (5.4)$$

también son soluciones. En principio, Bernoulli no se planteó las cuestiones relacionadas con la convergencia y derivabilidad de dichas series. Notemos que cuando  $t = 0$ , la serie anterior queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) = f(x),$$

donde  $f(x)$  debería ser la deformación inicial de la cuerda. Surge aquí el gran interrogante: ¿cualquier función  $f(x)$  puede desarrollarse en serie de senos?

## 5.2. Solución de D'Alembert

Comenzamos resolviendo la ecuación de ondas por el método de las características descrito en el capítulo anterior. Según este método, las ecuaciones características se reducen a

$$dx + \alpha dt = 0, \quad dx - \alpha dt = 0,$$

cuyas integrales son las rectas

$$x + \alpha t = c_1, \quad x - \alpha t = c_2.$$

Haciendo ahora el cambio de variable

$$z = x + \alpha t, \quad w = x - \alpha t,$$

obtenemos

$$u_{xx} = u_{zz} + 2u_{zw} + u_{ww}, \quad u_{tt} = \alpha^2(u_{zz} - 2u_{zw} + u_{ww}),$$

que, al sustituirlas en la EDP, da  $-4\alpha^2 u_{zw} = 0$  y, como  $\alpha \neq 0$ , tenemos

$$u_{zw} = 0.$$

Integrando con respecto a  $z$ , obtenemos  $u_w = \tilde{\psi}(w)$ , donde  $\tilde{\psi}$  es una función arbitraria de  $w$ . Integrando ahora con respecto a  $w$ , obtenemos  $u(z, w) = \int \tilde{\psi}(w) dw + \phi(z)$ . Si  $\psi(w) = \int \tilde{\psi}(w) dw$ , entonces

$$u(z, w) = \phi(z) + \psi(w),$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son funciones arbitrarias. Deshaciendo el cambio de variable, encontramos la solución general de la ecuación de ondas

$$u(x, t) = \phi(x + \alpha t) + \psi(x - \alpha t),$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son dos funciones arbitrarias de clase  $\mathcal{C}^2$ .

Si la deformación inicial es  $f(x)$  y la velocidad inicial con la que se suelta la cuerda es  $g(x)$  se llega a que la solución de la ecuación de ondas es de la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f^*(x + \alpha t) + f^*(x - \alpha t)) + \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} g^*(z) dz, \quad (5.5)$$

donde  $f^*$  y  $g^*$  denotan las extensiones impares y  $2\ell$ -periódicas de la deformación inicial  $f$  y de la velocidad inicial  $g$ , respectivamente (véase [4] para mayor detalle).

Notemos que la deformación inicial  $f(x)$  y la velocidad inicial  $g(x)$  son funciones definidas inicialmente en el intervalo  $[0, \ell]$ . Sin embargo, la solución de D'Alembert (5.5) requiere evaluar estas funciones fuera de dicho intervalo. Para solucionar este problema, se extiende la función  $f$  fuera del intervalo, definiendo  $f^*(x) = f(x)$  si  $x \in [0, \ell]$  y haciéndola impar (i.e.:  $f^*(-x) = -f^*(x)$ ) y de periodo  $2\ell$  (i.e.:  $f^*(x + 2\ell) = f^*(x)$ ). De forma análoga se procede con  $g$ .

Cuando la velocidad inicial es nula y la deformación inicial es una función impar y  $2\ell$ -periódica, se obtiene la solución

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + \alpha t) + f(x - \alpha t)), \quad (5.6)$$

que se conoce como *solución de D'Alembert*.

**Ejemplo 5.1.** Utilícese la fórmula de D'Alembert para resolver la ecuación de ondas dada por (5.2) con  $\ell = \pi$ ,  $\alpha = 1$ ,  $f(x) = \text{sen } x$  y  $g(x) = 0$ . Determínese la forma de la cuerda en los tiempos  $t = k\pi/4$  con  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  y calcúlese el primer tiempo en el que la cuerda vuelve a su forma inicial.

Como la velocidad inicial es nula,  $g(x) = 0$ , y la deformación inicial,  $f(x) = \text{sen } x$ , es una función impar y  $2\pi$ -periódica, utilizamos (5.6),

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\text{sen}(x + t) + \text{sen}(x - t)),$$

y obtenemos:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \text{sen } x, \\ u(x, \pi/4) &= \frac{1}{2}(\text{sen}(x + \pi/4) + \text{sen}(x - \pi/4)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen } x, \\ u(x, \pi/2) &= \frac{1}{2}(\text{sen}(x + \pi/2) + \text{sen}(x - \pi/2)) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos x) = 0, \\ u(x, 3\pi/4) &= \frac{1}{2}(\text{sen}(x + 3\pi/4) + \text{sen}(x - 3\pi/4)) = \frac{1}{2}(\text{sen}(\pi/4 - x) - \text{sen}(\pi/4 + x)) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen } x, \\ u(x, \pi) &= \frac{1}{2}(\text{sen}(x + \pi) + \text{sen}(x - \pi)) = \frac{1}{2}(-\text{sen } x - \text{sen } x) = -\text{sen } x. \end{aligned}$$

Podemos ver las formas de la cuerda en la figura 5.1; es como hacer fotografías en instantes de  $t$ .



Figura 5.1: Forma de la cuerda en los tiempos  $t = \frac{k\pi}{4}$  con  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

La cuerda vuelve a su forma inicial cuando

$$\frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) = f(x).$$

Como  $f$  es  $2\pi$ -periódica, esto ocurre cuando  $t = 2\pi$ . ◀

### Interpretación geométrica de la solución de D'Alembert

Cuando la velocidad inicial es cero,  $g(x) = 0$ , la solución de D'Alembert se simplifica a

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f^*(x + \alpha t) + f^*(x - \alpha t)), \quad (5.7)$$

que tiene una interesante interpretación geométrica. Para  $t$  fijo, la gráfica de  $f^*(x - \alpha t)$  (como función de  $x$ ) se obtiene trasladando la gráfica de  $f^*(x)$  mediante  $\alpha t$  unidades a la derecha. A medida que  $t$  aumenta, la gráfica representa una onda que viaja hacia la derecha con velocidad  $\alpha$ . Similarmente, la gráfica de  $f^*(x + \alpha t)$  es una onda que viaja hacia la izquierda con velocidad  $\alpha$ . Si observamos (5.7), vemos que esta solución de la ecuación de ondas es un promedio de dos ondas que viajan en direcciones opuestas y cuyas formas están determinadas a partir de la forma inicial de la cuerda.

Cuando  $g(x) \neq 0$ , la solución de D'Alembert es más difícil de interpretar geoméricamente, puesto que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f^*(x + \alpha t) + f^*(x - \alpha t)) + \frac{1}{2\alpha}(G(x + \alpha t) - G(x - \alpha t))$$

donde  $G(z) = \int_{x_0}^z g^*(y) dy$ , ya no es un promedio de una misma función evaluada en dos puntos porque intervienen dos funciones diferentes  $\frac{1}{2}(f^*(x) + \frac{1}{\alpha}G(x))$  y  $\frac{1}{2}(f^*(x) - \frac{1}{\alpha}G(x))$ , que dan las formas de las ondas moviéndose a izquierda y a derecha, respectivamente. Para mayor detalle, véase pág. 127 de [3].

**Ejemplo 5.2.** (Solución de D'Alembert con velocidad inicial cero.) Utilícese la fórmula de D'Alembert para resolver la ecuación de ondas dada por (5.2) con  $\ell = \pi$ ,  $\alpha = 1$ ,  $f(x) = x(\pi - x)$ , con  $x \in [0, \pi]$ , y  $g(x) = 0$ . Determínese la forma de la cuerda en el tiempo  $t = \pi/4$ . Y calcúlese el primer tiempo en el que la cuerda vuelve a su forma inicial.

Como  $g(x) = 0$ , utilizamos (5.7) y obtenemos la forma de la cuerda en el tiempo  $t = \pi/4$  como la gráfica de

$$\frac{1}{2}(f^*(x + \pi/4) + f^*(x - \pi/4)).$$

Para dibujar esta gráfica, primero dibujamos  $f^*(x)$ , la extensión impar  $2\pi$ -periódica de  $f$  (véase la figura 5.2):

$$f^*(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & \text{si } x \in [0, \pi], \\ x(\pi + x), & \text{si } x \in [-\pi, 0], \end{cases} \quad \text{y} \quad f^*(x) = f^*(x + 2\pi).$$

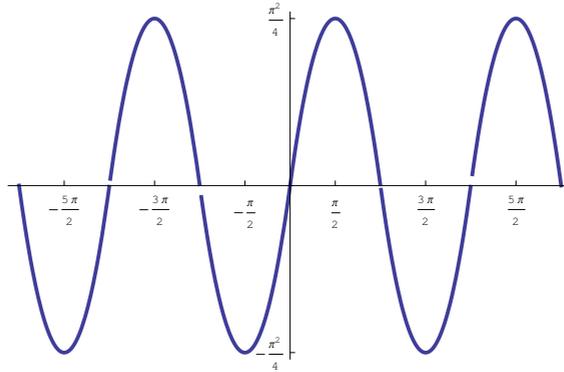


Figura 5.2: Extensión impar y  $2\pi$ -periódica  $f^*(x)$  de la forma inicial de la cuerda  $f(x) = x(\pi - x)$  en  $[0, \pi]$ .

Trasladando esta gráfica  $\pi/4$  unidades a la derecha, obtenemos la gráfica de  $f^*(x - \pi/4)$  y trasladando esta gráfica  $\pi/4$  unidades a la izquierda, obtenemos la gráfica de  $f^*(x + \pi/4)$ . Ahora, la forma de la cuerda en el tiempo  $t = \pi/4$  se obtiene mediante el promedio (sumando y dividiendo por 2) las gráficas de  $f^*(x - \pi/4)$  y  $f^*(x + \pi/4)$ . Como solo estamos interesados en la forma de la cuerda, restringimos las gráficas al intervalo  $x \in [0, \pi]$  (véase la figura 5.3):

$$u(x, \pi/4) = \begin{cases} \frac{\pi x}{2}, & \text{si } x \in [0, \pi/4], \\ -x^2 + \pi x - \frac{\pi^2}{16}, & \text{si } x \in [\pi/4, 3\pi/4], \\ \frac{\pi}{2}(\pi - x), & \text{si } x \in [3\pi/4, \pi]. \end{cases}$$

La cuerda vuelve a su forma inicial cuando

$$\frac{1}{2}(f^*(x+t) + f^*(x-t)) = f^*(x).$$

Como  $f^*$  es  $2\pi$ -periódica, esto ocurre cuando  $t = 2\pi$ . ◀

### 5.3. Comparación entre las soluciones de Bernoulli y D'Alembert

Llegados a este punto, parece inevitable comparar las soluciones obtenidas en (5.4) y (5.7). Cuando  $t = 0$  se obtiene

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(nx).$$

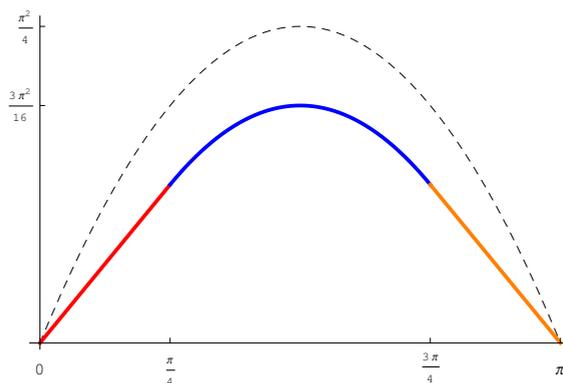
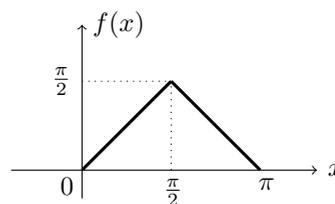


Figura 5.3: Instantáneas de la cuerda en los tiempo  $t = 0$  (línea discontinua) y  $t = \frac{\pi}{4}$  (línea continua).

En consecuencia, una función genérica  $f(x)$ , que simula la forma de una cuerda deformada pasando por  $(0, 0)$  y  $(\pi, 0)$ , tendría que poder desarrollarse en una serie trigonométrica de la forma anterior. Este planteamiento, propuesto por Bernoulli, fue rechazado por otros científicos de la época, incluidos D'Alembert y Euler. Argumentaban que no parecía razonable que funciones (con picos) del tipo

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi - x, & \text{si } \pi/2 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$



pudieran aproximarse por funciones trigonométricas (sin picos). A falta de demostración a favor o en contra, y sin argumentos rigurosos, el problema permaneció abierto durante años.

## 5.4. Solución mediante separación de variables

Para aplicar el método de separación de variables al problema de la cuerda vibrante, empezamos suponiendo que la EDP tiene una solución de la forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , donde  $X$  es una función que depende solo de  $x$  y  $T$  es una función que depende solo de  $t$ . Por tanto, se tiene que cumplir

$$X(x)T''(t) = \alpha^2 X''(x)T(t),$$

y separando variables

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = \lambda,$$

donde  $\lambda$  ha de ser necesariamente una constante. Por tanto, fijando  $\lambda$ , se tienen las dos EDO

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{y} \quad T''(t) = \alpha^2 \lambda T(t).$$

Como  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , las condiciones de contorno dan lugar a

$$X(0)T(t) = 0 \quad \text{y} \quad X(\ell)T(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Para que las dos igualdades anteriores sean válidas para todo  $t \geq 0$ , se debe tener  $T(t) \equiv 0$ , para todo  $t \geq 0$ , lo que implica que  $u(x, t) \equiv 0$ , o bien

$$X(0) = X(\ell) = 0.$$

Ignorando la solución trivial, se combinan estas últimas condiciones de contorno con la EDO correspondiente a  $X(x)$  para obtener el problema de contorno

$$X''(x) = \lambda X(x); \quad X(0) = X(\ell) = 0, \quad (5.8)$$

donde  $\lambda$  puede ser cualquier constante.

Como (5.8) es el mismo problema de contorno que hemos encontrado anteriormente para la ecuación del calor, los valores propios son

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

y sus correspondientes funciones propias (soluciones no triviales)

$$X_n(x) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde los coeficientes  $c_n$  son constantes arbitrarias distintas de cero.

Una vez determinado  $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ , para algún entero positivo  $n$ , consideremos la segunda EDO,

$$T''(t) + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{\ell^2} T(t) = 0.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la solución general de la EDO anterior es

$$T_n(t) = d_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{\ell}\right) + e_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\alpha t}{\ell}\right).$$

Al combinar esta con  $X_n(x)$ , se obtiene, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la función

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= \left(c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right) \left(d_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{\ell}\right) + e_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\alpha t}{\ell}\right)\right) \\ &= \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{\ell}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\alpha t}{\ell}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \end{aligned}$$

donde  $a_n$  y  $b_n$  son constantes arbitrarias.

Llamamos ondas estacionarias o *modos normales* de vibración de la cuerda a las soluciones  $u_n(x, t)$ . Cuando  $n = 1$ ,  $u_1(x, t)$  se llama primera onda estacionaria, primer modo normal o *modo fundamental* de vibración, y los demás son los *armónicos* (musicalmente dan la octava, la octava más la quinta, etc.). Los  $n - 1$  valores

$$x = \frac{\ell}{n}, \frac{2\ell}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\ell, \quad \text{donde} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = 0,$$

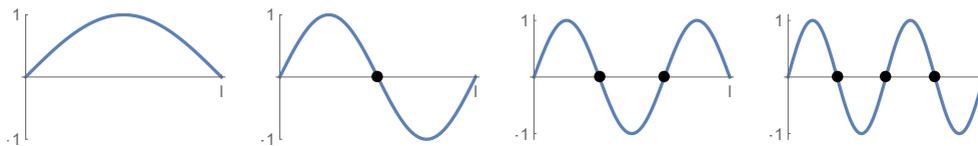


Figura 5.4: Modos normales  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  y  $u_4$ , respectivamente, de la cuerda.

son llamados *odos* del armónico  $u_n$ , que son puntos de la cuerda que no se mueven (figura 5.4).

En la figura 5.5 se muestra el segundo modo normal para diversos valores de  $t$ . En cualquier instante, la cuerda tiene la forma de una onda senoidal. Cuando la parte izquierda de la cuerda se está moviendo hacia abajo, la otra mitad se está moviendo hacia arriba, e inversamente. Para otros modos la situación es similar.

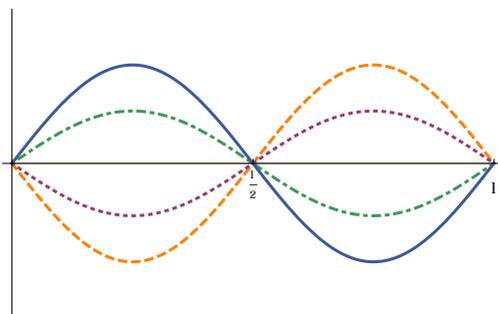


Figura 5.5: Segundo modo normal  $u_2$  para diferentes valores de  $t$ .

Aplicando el hecho de que las combinaciones lineales de las funciones  $u_n$  satisfacen la EDP y las dos condiciones de contorno para todos los valores de las constantes  $a_n$  y  $b_n$ , consideramos su suma infinita

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi\alpha t}{\ell} \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi\alpha t}{\ell} \right) \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right). \quad (5.9)$$

Sustituyendo ahora la función anterior  $u(x, t)$  en las condiciones iniciales, resulta:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi\alpha}{\ell} b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (5.11)$$

El problema de la cuerda vibrante (5.2) se reduce ahora al problema de calcular los desarrollos en series senoidales de Fourier de  $f(x)$  y  $g(x)$ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad \text{con} \quad B_n = \left( \frac{n\pi\alpha}{\ell} \right) b_n.$$

Si se eligen las constantes  $a_n$  y  $b_n$  de manera que se satisfagan las ecuaciones (5.10) y (5.11), entonces el desarrollo de  $u(x, t)$  dado en (5.9) es una solución formal del problema de la cuerda

vibrante (5.2). Si este desarrollo converge a una función con derivadas segundas parciales continuas, entonces la solución formal es una solución verdadera (genuina).

**Ejemplo 5.3.** Encuéntrese la solución del siguiente problema de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \sin 3x - 4 \sin 10x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(x, 0) = 2 \sin 4x + \sin 6x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Observemos que  $\alpha = 2$  y  $\ell = \pi$ . Por tanto, solo se requiere determinar los valores de las constantes  $a_n$  y  $b_n$  de la fórmula (5.9). Esto es:

$$u(x, 0) = \sin 3x - 4 \sin 10x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx.$$

Igualando los coeficientes de términos semejantes, se encuentra que

$$a_3 = 1, \quad a_{10} = -4 \quad \text{y} \quad a_n = 0, \quad \text{para todo } n \neq 3, 10.$$

Análogamente,

$$u_t(x, 0) = 2 \sin 4x + \sin 6x = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin nx$$

y al comparar coeficientes, resulta

$$b_4 = \frac{1}{4}, \quad b_6 = \frac{1}{12} \quad \text{y} \quad b_n = 0, \quad \text{para todo } n \neq 4, 6.$$

En consecuencia, de (5.9) se sigue que la solución del problema anterior es

$$u(x, t) = \cos 6t \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 8t \sin 4x + \frac{1}{12} \sin 12t \sin 6x - 4 \cos 20t \sin 10x. \quad \blacktriangleleft$$

### Modos normales

Si  $a_n$  y  $b_n$  no son ambos cero, podemos escribir  $u_n(x, t)$  como vemos a continuación. Si  $R_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ , entonces existe  $\theta_n$  tal que  $\cos(\theta_n) = \frac{a_n}{R_n}$  y  $\sin(\theta_n) = \frac{b_n}{R_n}$ , puesto que  $\left(\frac{a_n}{R_n}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{R_n}\right)^2 = 1$ . Así,

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= R_n \left( \cos(\theta_n) \sin\left(\frac{n\pi\alpha t}{\ell}\right) + \sin(\theta_n) \cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{\ell}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \\ &= R_n \sin\left(\left(\frac{n\pi\alpha t}{\ell}\right) + \theta_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \end{aligned}$$

Vemos que  $u_n(x, t)$  oscila entre  $\pm R_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$  cuando  $t$  varía. Llamamos *amplitud* de  $u_n(x, t)$  a  $R_n$  y *fase* de  $u_n(x, t)$  a  $\theta_n$ . (Véase la figura 5.6, donde  $R_n = 1$  y  $\ell = 6$ .) El tiempo que toma un modo normal para completar una oscilación se llama *periodo*. El periodo es inversamente

proporcional a  $n$ . Para encontrar el periodo del  $n$ -ésimo modo normal, tomamos  $\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)t = 2\pi$  y resolvemos para  $t$ , obteniendo  $t = \frac{2\ell}{n\alpha}$ . La *frecuencia* de un modo normal es el número de oscilaciones por unidad de tiempo, que es justamente el recíproco del periodo, de manera que el periodo y la frecuencia del  $n$ -ésimo modo normal de la cuerda (con extremos fijos) están dados respectivamente por

$$P_n = \frac{2\ell}{n\alpha} \quad \text{y} \quad \nu_n = \frac{1}{P_n} = \frac{n\alpha}{2\ell}.$$

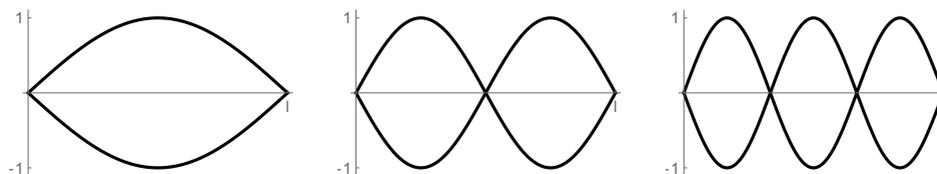


Figura 5.6:  $\pm R_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$  con  $n = 1, 2, 3$ .

## 5.5. Unicidad y la integral de energía

El método de la energía es una herramienta fundamental en la teoría de las EDP. Una de sus principales aplicaciones es la de demostrar la unicidad de solución de problemas de valor inicial con condiciones de contorno. El método se basa en el principio físico de conservación de la energía, aunque en algunas aplicaciones el concepto matemático al que nos referimos como «energía» no tiene por qué corresponder con una energía en el sentido físico.

Para probar la unicidad de solución de un problema diferencial lineal es suficiente probar que la solución de la correspondiente EDP homogénea con condiciones iniciales y de contorno homogéneas es necesariamente la solución nula.

Para ciertos problemas homogéneos es posible definir una integral de energía que sea no negativa y sea una función no creciente en el tiempo  $t$ . Además, como la energía es cero para  $t = 0$ , la energía es cero para todo  $t \geq 0$ . Debido a que la energía es positiva y las condiciones iniciales y de contorno son nulas, obtenemos que la solución es cero.

Primero obtenemos la *integral de energía* para la ecuación de ondas  $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ . Para ello, multiplicamos esta ecuación por  $u_t$  e integramos en el intervalo  $[0, \ell]$ , y obtenemos

$$\int_0^\ell u_{tt}u_t \, dx = \alpha^2 \int_0^\ell u_{xx}u_t \, dx$$

Reescribiendo  $u_{tt}u_t$  como  $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2)$  e integrando el miembro derecho de la igualdad anterior por partes,

$$y(x, t) = u_t(x, t), \quad dy = u_{xt}(x, t)dx; \quad dz = u_{xx}(x, t) \, dx, \quad z(x, t) = u_x(x, t),$$

llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\ell u_t^2 dx &= \alpha^2 \left( u_x u_t \Big|_{x=0}^{x=\ell} - \int_0^\ell u_x u_{xt} dx \right) \\ &= \alpha^2 \left( u_x u_t \Big|_{x=0}^{x=\ell} - \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_x^2}{2} \right) dx \right) \\ &= \alpha^2 \left( u_x u_t \Big|_{x=0}^{x=\ell} - \frac{d}{dt} \int_0^\ell \frac{u_x^2}{2} dx \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\ell (u_t^2 + \alpha^2 u_x^2) dx = \alpha^2 (u_x u_t \Big|_{x=0}^{x=\ell}).$$

La expresión

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (u_t^2 + \alpha^2 u_x^2) dx$$

se llama *integral de energía* de  $u$  en  $[0, \ell]$  para la ecuación  $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ . La idea del método se basa en el principio de conservación de la energía:  $E(t) \equiv \text{constante}$ .

**Ejemplo 5.4.** La solución del problema (5.2) es única.

Si  $u_1$  y  $u_2$  son dos soluciones distintas del problema (5.2), entonces  $w = u_1 - u_2$  es una solución del problema

$$\begin{cases} w_{tt} = \alpha^2 w_{xx}, \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ w(0, t) = w(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Definimos la energía total de la solución  $w$  en el tiempo  $t$  como

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (w_t^2(x, t) + \alpha^2 w_x^2(x, t)) dx.$$

El primer término representa la energía cinética total de la cuerda y el segundo es la energía potencial total. Además,

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_0^\ell (w_t^2 + \alpha^2 w_x^2) dx \right) = \int_0^\ell (w_t w_{tt} + \alpha^2 w_x w_{xt}) dx$$

y como

$$\alpha^2 w_x w_{xt} = \alpha^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} (w_x w_t) - w_{xx} w_t \right) = \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} (w_x w_t) - w_{tt} w_t,$$

se sigue, a partir del teorema fundamental del cálculo, que

$$E'(t) = \alpha^2 \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x} (w_x w_t) dx = \alpha^2 (w_x w_t) \Big|_{x=0}^{x=\ell}.$$

Puesto que  $w(0, t) = w(\ell, t) = 0$ , tenemos  $w_t(0, t) = w_t(\ell, t) = 0$  y, por tanto,  $E'(t) = 0$ . Luego,  $E(t) = \text{constante}$  y la energía se conserva.

Por otra parte, como  $w(x, 0) = 0$ , entonces  $w_x(x, 0) = 0$ . Además,  $w_t(x, 0) = 0$ . Luego,  $E(0) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (w_t^2(x, 0) + \alpha^2 w_x^2(x, 0)) dx = 0$ . Por tanto,  $E(t) = 0$  para todo  $t$ .

Finalmente, como  $w_t^2 + \alpha^2 w_x^2 \geq 0$  y  $E(t) = 0$  para todo  $t$ , se sigue que  $w_t^2 + \alpha^2 w_x^2 = 0$  y, en particular,  $w_t(x, t) = w_x(x, t) = 0$ . En consecuencia,  $w(x, t)$  es una constante. Y, por la condición inicial  $w(x, 0) = 0$ , tenemos  $w(x, t) = 0$  y el problema anterior tiene a lo sumo una solución. ◀

## 5.6. Ejercicios

- Utilícese la fórmula de D'Alembert para resolver la ecuación de ondas sujeta a las condiciones que se indican. Apoyándose en *Mathematica* (o cualquier otro programa capaz de realizar representaciones gráficas), dibújese el movimiento de la cuerda para diferentes valores de  $t$ .

a)  $\ell = \pi$ ;  $\alpha = 1$ ;  $f(x) = \sin x \cos x$ ;  $g(x) = 0$ . Calcúlese  $u(x, \pi/6)$  y  $u(x, \pi/3)$ .

b)  $\ell = 1$ ;  $\alpha = 1$ ;  $f(x) = 0$ ;  $g(x) = 1$ . Calcúlese  $u(x, k/4)$  para  $k = 1, 2, 3, 4$ .

c)  $\ell = 1$ ;  $\alpha = 1$ ;  $f(x) = 0$ ;  $g(x) = x$  con  $x \in [0, 1]$ . Calcúlese  $u(x, k/4)$  para  $k = 1, 2, 3, 4$ .

d)  $\ell = 1$ ;  $\alpha = 1$ ;  $f(x) = 2x$  si  $0 \leq x \leq 1/2$  y  $f(x) = 2(1-x)$  si  $1/2 < x < 1$ ;  $g(x) = x$ . Calcúlese  $u(x, 1/2)$ .

- Calcúlese la solución de D'Alembert para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = x(\pi - x), \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

con  $t > 0$  y  $0 < x < \pi$ . Para  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 2$ , obténganse  $u(x, \pi/3)$ ,  $u(x, \pi/6)$  y representéense gráficamente.

- Usando la solución de D'Alembert, resuélvase el problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad u_t(x, 0) = -10, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0. \end{cases}$$

Calcúlese explícitamente la solución obtenida para  $t = 1/2$  y representéense gráficamente. Hágase un esbozo gráfico de las soluciones obtenidas para  $t > 0$ .

- Sea  $G(x) = \int_{x_0}^x g^*(y) dy$ , donde  $g^*$  está definida en (5.5) y  $x_0$  es un valor fijo. Demuéstrese que  $G$  es una función  $2\ell$ -periódica.

- Utilícese el método de separación de variables para resolver la ecuación de ondas sujeta a las condiciones que se indican:

- a)  $\ell = 1; \alpha = 1/\pi; f(x) = 7 \operatorname{sen} 3\pi x; g(x) = 0.$   
 b)  $\ell = \pi; \alpha = 1; f(x) = \operatorname{sen} x \cos x; g(x) = 0.$   
 c)  $\ell = \pi; \alpha = 1; f(x) = \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{sen} 4x; g(x) = 0.$

6. Utilícese el método de separación de variables para resolver la ecuación de ondas sujeta a las condiciones dadas. Apoyándose en *Mathematica* (o cualquier otro programa capaz de realizar representaciones gráficas), dibújese el movimiento de la cuerda para diferentes valores de  $t$  y para una suma parcial de la serie solución. Decídase cuántos términos incluir en dicha suma parcial comparando el gráfico correspondiente para  $t = 0$  con el gráfico de la deformación inicial  $f(x)$ .

$$a) \ell = 1; \alpha = 1/\pi; g(x) = 0; f(x) = \begin{cases} 3x/10, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/3, \\ 3(1-x)/20, & \text{si } 1/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$b) \ell = 1; \alpha = 4; g(x) = 0; f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x), & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$c) \ell = 1; \alpha = 4; g(x) = 1; f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/4, \\ 1, & \text{si } 1/4 \leq x \leq 3/4, \\ 4(1-x), & \text{si } 3/4 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$d) \ell = \pi; \alpha = 1; g(x) = 0; f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/4, \\ \pi/4, & \text{si } \pi/4 \leq x \leq 3\pi/4, \\ \pi - x, & \text{si } 3\pi/4 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$e) \ell = \pi/2; \alpha = 1; f(x) = 0; g(x) = x \cos x.$$

$$f) \ell = 1; \alpha = 1; f(x) = x(1-x); g(x) = \operatorname{sen} \pi x.$$

7. Resuélvanse por el método de separación de variables los siguientes problemas:

$$a) \begin{cases} u_{tt} + u_t - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \operatorname{sen} x, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_{tt} + u_t - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x \operatorname{sen} x, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_{tt} + 4u_t - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \operatorname{sen} 2x, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} u_{tt} + 3u_t - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \operatorname{sen} x, \quad u_t(x, 0) = 10, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

8. Supóngase que  $u = u(x, t)$  satisface la ecuación de ondas  $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ ,  $\alpha > 0$ , y sea  $v(x, t) = u(x, ct)$ . Determinése  $c > 0$  de forma que  $v(x, t)$  satisfaga la ecuación de ondas con  $\alpha = 1$ , es decir,  $v_{tt} = v_{xx}$ .
9. Utilícese el método de conservación de la energía para probar la unicidad del siguiente problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = G(x, t), & x \in (0, \ell), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \\ u_x(0, t) = p(t), \quad u_x(\ell, t) = q(t). \end{cases}$$



# Capítulo 6

## Ecuación del calor

La ecuación del calor es una EDP que aparece al estudiar el flujo de calor en un cuerpo térmicamente conductor y se dedujo en la sección 1.1.3. Fue planteada en un trabajo de gran relevancia histórica por Fourier en 1811. En su versión unidimensional, se trata de estudiar una varilla cilíndrica delgada, de manera que podemos suponer que la temperatura es la misma en cada sección transversal del cilindro. Supondremos que la varilla tiene longitud  $\ell$ , que está situada sobre el eje  $X$ , entre los puntos  $x = 0$  y  $x = \ell$  y que la temperatura es  $0^\circ$  en los extremos. La función  $u(x, t)$  representa la temperatura en el instante  $t$  de un punto de la varilla situado a una distancia  $x$  del origen. La formulación general de la ecuación del calor viene dada por la siguiente EDP de tipo parabólico junto con condiciones de contorno y condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

En este problema,  $f(x)$  representa la temperatura inicial y  $\beta$  es una constante que depende de parámetros físicos: densidad, conductividad, calor específico, etc.

### 6.1. Solución mediante separación de variables

Hemos visto con anterioridad, en la sección dedicada al principio del método de separación de variables, que la *solución formal* del problema anterior es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad (6.2)$$

donde

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(s) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi s}{\ell} \right) ds, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.3)$$

**Ejemplo 6.1.** Encuéntrese la solución del siguiente problema del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = 100, \quad x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Los coeficientes dados por (6.3) son

$$c_n = \frac{200}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{400}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

La solución es entonces

$$u(x, t) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 t} \operatorname{sen}(2n-1)x.$$

En la figura 6.1 se han considerado las sumas parciales del desarrollo anterior

$$u_N(x, t) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 t} \operatorname{sen}(2n-1)x, \quad (6.4)$$

con  $N = 10$ , y se han dibujado las soluciones aproximadas para distintos valores de  $t$ . Notemos que en este ejemplo la temperatura decae a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ , debido al rápido decrecimiento de la función exponencial que aparece en la solución. Desde el punto de vista físico, esto también es claro ya que los extremos de la varilla están a  $0^\circ$  y no hay ninguna fuente interna de calor. El fenómeno de Gibbs que se aprecia claramente para  $t = 0$ , desaparece rápidamente según aumenta  $t$ . Además, desde valores de  $t$  relativamente pequeños (aproximadamente,  $t \geq 0.5$ ), las curvas obtenidas con la suma de varios términos de (6.4) no se distinguen apenas con las curvas obtenidas con el primer modo normal ( $N = 1$  en (6.4)):

$$u_1(x, t) = \frac{400}{\pi} e^{-t} \operatorname{sen} x. \quad \blacktriangleleft$$

Notemos que la temperatura obtenida cuando  $t \rightarrow \infty$  será una función que depende solo de  $x$ . A esta solución se la llama *solución estacionaria*. En el ejemplo anterior es la función constante igual a 0.

## 6.2. Condiciones de contorno no homogéneas

Desarrollamos aquí un procedimiento para resolver una ecuación del calor en la que las condiciones de contorno no son homogéneas. Este procedimiento es exportable a otro tipo de problemas, siempre y cuando la EDP asociada sea *lineal*. En general, sea  $v(x)$  la solución estacionaria de una ecuación del calor. Como no depende del tiempo, se tiene que  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ .

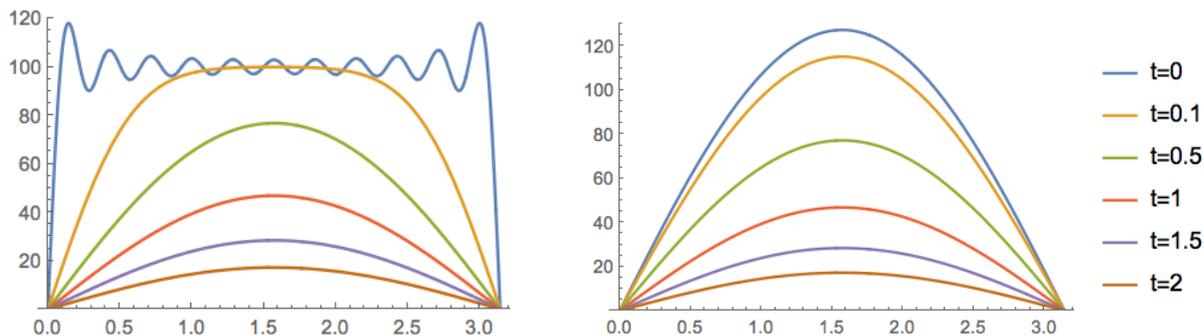


Figura 6.1: En la izquierda, la distribución de temperaturas en el ejemplo 6.1 para distintos valores de  $t$  (suma parcial con  $N = 10$  en (6.4)). En la derecha, la aproximación de la temperatura por el primer modo normal  $u_1(x, t)$ .

Por tanto, al sustituir en (6.1) se tiene que  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ , luego  $v(x) = Ax + B$ . Las constantes  $A$  y  $B$  se determinan por las condiciones auxiliares (o de contorno). Por ejemplo, pensemos en una ecuación del calor donde las temperaturas en los extremos son  $u(0, t) = T_1$  y  $u(\ell, t) = T_2$ . Entonces, la solución estacionaria debe cumplir  $v(0) = T_1 = B$  y  $v(\ell) = T_2 = A\ell + B$ . Y, por tanto, dicha solución estacionaria es la recta que pasa por los puntos  $(0, T_1)$  y  $(\ell, T_2)$ , es decir

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{\ell} x + T_1. \quad (6.5)$$

La situación anterior nos lleva a resolver la ecuación del calor con condiciones de contorno no homogéneas dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, \ell), \\ u(0, t) = T_1, \quad u(\ell, t) = T_2, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

En lugar de aplicar el método de separación de variables directamente, consideramos la solución estacionaria  $v(x)$  definida en (6.5) y hacemos el cambio de variable

$$z(x, t) = u(x, t) - v(x).$$

Entonces,  $z_t = u_t$ ,  $z_{xx} = u_{xx}$ ,  $z(0, t) = 0$ ,  $z(\ell, t) = 0$  y  $z(x, 0) = f(x) - v(x)$ . Tenemos que resolver por tanto un problema homogéneo en  $z$  con distinta función de temperatura inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \\ z(x, 0) = f(x) - v(x), \quad x \in (0, \ell), \\ z(0, t) = z(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

Si  $z(x, t)$  es la solución de (6.7), entonces  $u(x, t) = z(x, t) + v(x)$  es la solución de (6.6), de manera que

$$u(x, t) = \frac{T_2 - T_1}{\ell} x + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right),$$

donde

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell (f(s) - v(s)) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi s}{\ell} \right) ds. \quad (6.8)$$

**Ejemplo 6.2.** (Problema de contorno no homogéneo.) Encuéntrese la solución del siguiente problema del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = 100, \quad x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 100, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Como la solución estacionaria es  $v(x) = \frac{100x}{\pi}$  y los coeficientes dados por (6.8) son  $c_n = \frac{200}{n\pi}$ , entonces la solución formal del problema es:

$$u(x, t) = \frac{100x}{\pi} + \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx.$$

Como podemos comprobar, cuando  $t \rightarrow \infty$ , la solución anterior tiende a la solución estacionaria:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{100x}{\pi} = v(x).$$

Ahora bien, como la imposición de condiciones iniciales y de contorno puede impedir que exista alguna solución (o reducir el rango de posibles soluciones), ¿es cierto que  $u(x, 0) = 100$ ?; es decir,

$$¿100 = \frac{100x}{\pi} + \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}, \quad 0 < x < \pi?$$

Reconociendo la serie infinita como la serie de Fourier de la función «diente de sierra», figura 6.2,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < \pi,$$

obtenemos

$$u(x, 0) = \frac{100x}{\pi} + \frac{200}{\pi} \frac{\pi - x}{2} = 100, \quad \text{para } 0 < x < \pi.$$

Luego, la respuesta es afirmativa. ◀

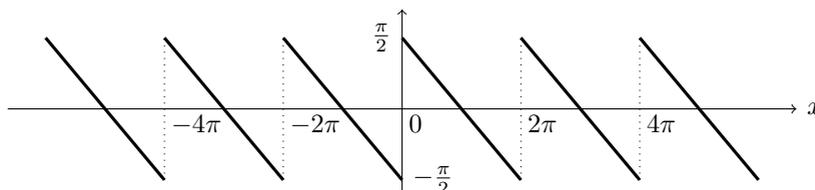


Figura 6.2: Función «diente de sierra»  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ ,  $0 < x \leq 2\pi$ .

La situación anterior se da frecuentemente en problemas de flujo de calor. Observamos que la solución  $u(x, t)$  consiste de dos partes: la serie infinita, que depende de  $x$  y de  $t$ , y la parte restante  $v(x)$  que depende solo de  $x$ . A partir del término exponencial de la serie infinita, vemos que la serie se aproxima a cero cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Esta parte de la solución se llama *solución transitoria* porque pasa rápidamente.

De nuevo, notamos que debido a que el factor  $n^2$  aparece en la exponencial de la serie, los términos disminuyen rápidamente en tamaño, incluso para valores pequeños de  $t$ . Por tanto, a menudo podemos obtener una buena aproximación del término transitorio tomando solo uno o dos términos. La otra parte de la solución,  $v(x)$ , no varía con el tiempo y es la solución estacionaria.

### 6.3. Otras condiciones de contorno

Hasta ahora hemos considerado la ecuación del calor asociada a varillas con temperaturas constantes en los extremos. En muchas aplicaciones físicas las condiciones de Dirichlet que aparecen en el problema (6.1) pueden variar, de manera que las funciones que aparecen en la solución de la ecuación del calor también cambien. Veamos a continuación algunos ejemplos.

1. Una varilla de longitud  $\ell$  con los extremos aislados, es decir, no hay transferencia de calor hacia el entorno. Esto nos lleva a condiciones de Neumann de la forma

$$u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \quad t > 0.$$

2. Una varilla de longitud  $\ell$  con un extremo a temperatura constante y el otro irradiando calor al entorno de forma proporcional a la temperatura:

$$u(0, t) = T_1, \quad u_x(\ell, t) = -k u(\ell, t), \quad t > 0.$$

Este tipo de condiciones de contorno se generalizan a condiciones de Robin dadas por condiciones de contorno lineales del tipo

$$Au(x_0, t) + Bu_x(x_0, t) = h(t), \quad t > 0.$$

3. Ecuación del calor en un anillo circular delgado y aislado del entorno. El problema puede interpretarse en una dimensión tomando la variable  $x$  como la longitud de arco. En este caso, las condiciones de contorno son periódicas, esto es,

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0.$$

Las condiciones de contorno determinan el tipo de funciones que hay que utilizar para construir la solución. En las secciones anteriores, la solución se expresa como una serie de Fourier en senos (*serie senoidal de Fourier*). Aquí, la solución se expresa como serie de Fourier en cosenos (*serie cosenoidal de Fourier*) u otros desarrollos relacionados conocidos como *series de Fourier generalizadas*.

**Ejemplo: la ecuación del calor en una varilla con extremos aislados**

Si nos centramos en el caso de una varilla con los extremos aislados, problema de contorno con condiciones de Neumann, vemos que la solución se expresa mediante una serie cosenoidal de Fourier. Así, consideramos el problema del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, \ell), \\ u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Para aplicar separación de variables, suponemos que la EDP tiene una solución de la forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Por tanto, se tiene que cumplir

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\beta T(t)} = \lambda,$$

donde  $\lambda$  es la constante de separación. Fijando entonces  $\lambda$ , se tienen dos EDO:

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{y} \quad T'(t) = \beta \lambda T(t).$$

Como  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , las condiciones de contorno dan lugar a

$$X'(0) = X'(\ell) = 0,$$

que, al combinarlas con la EDO correspondiente a  $X(x)$ , conduce al problema de contorno

$$X''(x) = \lambda X(x); \quad X'(0) = X'(\ell) = 0. \quad (6.9)$$

Para resolver el problema de contorno (6.9), empezamos con la ecuación auxiliar  $r^2 - \lambda = 0$  y consideramos tres casos:

Caso 1:  $\lambda > 0$ . Las raíces de la ecuación auxiliar son  $r = \pm\sqrt{\lambda}$ , de modo que la solución general de la EDO que aparece en (6.9) es

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Para determinar  $C_1$  y  $C_2$ , recurrimos a las condiciones de contorno

$$X'(0) = \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) = 0 \quad \text{y} \quad X'(\ell) = \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}\ell} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\ell}) = 0.$$

de forma que si  $C_2 = C_1$ , tenemos que  $C_1(e^{\sqrt{\lambda}\ell} - e^{-\sqrt{\lambda}\ell}) = 0$  o  $C_1(e^{2\sqrt{\lambda}\ell} - 1) = 0$ . Como hemos supuesto que  $\lambda > 0$ , resulta  $e^{2\sqrt{\lambda}\ell} - 1 > 0$ . Por lo tanto,  $C_1 = C_2 = 0$ . Por consiguiente, no existe solución no trivial de (6.9) para  $\lambda > 0$ .

Caso 2:  $\lambda = 0$ . Aquí  $r = 0$  es una raíz real doble de la ecuación auxiliar y la solución general de la EDO es entonces

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Las dos condiciones de contorno dan la misma condición  $C_2 = 0$ . Por tanto, existen soluciones no triviales del problema de contorno para  $\lambda = 0$ , las funciones  $X(x) = X_0(x) = C_1$ .

Caso 3:  $\lambda < 0$ . Las raíces de la ecuación auxiliar son  $r = \pm i\sqrt{-\lambda}$ , de modo que la solución general de la EDO que aparece en (6.9) es

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-\lambda} x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda} x.$$

Ahora las condiciones de contorno de (6.9) conducen a

$$C_2 = 0, \quad -C_1 \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda} \ell + C_2 \cos \sqrt{-\lambda} \ell = 0.$$

Por tanto,  $C_1 \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda} \ell = 0$  y, en consecuencia,  $\operatorname{sen} \sqrt{-\lambda} \ell = 0$  o  $C_1 = 0$ . Ahora bien,

$$\operatorname{sen} \sqrt{-\lambda} \ell = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{-\lambda} \ell = n\pi, \text{ donde } n \text{ es un entero.}$$

Por consiguiente, (6.9) tiene una solución no trivial ( $C_1 \neq 0$ ) cuando  $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , y sus correspondientes funciones propias son:

$$X(x) = X_n(x) = a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde los coeficientes  $a_n$  son constantes arbitrarias distintas de cero.

Ahora, podemos agrupar los casos  $\lambda = 0$  y  $\lambda < 0$  en  $\lambda \leq 0$ , de manera que

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad \text{y} \quad X_n(x) = a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

A continuación, consideremos la segunda EDO,  $T'(t) = \beta\lambda T(t)$  con  $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ ,

$$T'(t) + \beta \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 T(t) = 0,$$

cuya solución general es

$$T_n(t) = b_n e^{-\beta \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

donde los valores  $b_n$  son constantes arbitrarias distintas de cero.

Antes de imponer la condición inicial, utilizamos el principio de superposición y tomamos así una combinación lineal de todas las soluciones producto de la EDP. Así,

$$u(x, t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 t} \cos \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\beta \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 t} \cos \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad (6.10)$$

donde  $c_n$  es una constante arbitraria distinta de cero.

La condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$  se cumple si

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad \text{para } x \in [0, \ell].$$

Finalmente, para completar la solución, necesitamos determinar los coeficientes  $c_n$  con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ :

$$c_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f(s) ds, \quad c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(s) \cos\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right) ds, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.11)$$

Existe una diferencia significativa entre las soluciones de la EDP para  $\lambda < 0$  y la solución para  $\lambda = 0$ . Todas las soluciones para  $\lambda < 0$  decaen exponencialmente con el tiempo, mientras que la solución para  $\lambda = 0$  permanece constante en el tiempo. Así, a medida que  $t$  tiende a infinito, la solución (complicada) en serie infinita (6.10) se aproxima al estado estacionario,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = c_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f(s) ds.$$

No solamente es constante la temperatura en equilibrio  $c_0$ , sino que esta constante es la media de la distribución inicial de temperaturas.

**Interpretación física.** A partir de la ley de conservación de la energía térmica de la varilla, se sigue que la energía térmica debe permanecer constante como consecuencia de que ambos extremos están aislados. Si denotamos la energía térmica total de la varilla como

$$\int_0^\ell u(x, t) dx,$$

se sigue que

$$\frac{d}{dt} \int_0^\ell u(x, t) dx = \int_0^\ell u_t(x, t) dx = \beta \int_0^\ell u_{xx}(x, t) dx = \beta (u_x(\ell, t) - u_x(0, t)) = 0.$$

(La primera igualdad se da porque los extremos de integración son constantes y el integrando continuo. La tercera igualdad se da porque  $u_x$  tiene derivada continua.) Por tanto,  $\int_0^\ell u(x, t) dx$  no depende de  $t$ , de manera que se conserva a lo largo del tiempo y la energía térmica inicial debe ser entonces igual a la final ( $\lim_{t \rightarrow \infty}$ ).

Como  $u(x, 0) = f(x)$ , la energía térmica inicial es

$$\int_0^\ell u(x, 0) dx = \int_0^\ell f(x) dx,$$

mientras que la energía térmica en equilibrio es  $\int_0^\ell C dx = C\ell$ , puesto que la distribución de temperaturas en equilibrio es una constante  $u(x, t) = C$ . La constante  $C$  se determina igualando estas dos expresiones para la energía térmica total,  $\int_0^\ell f(x) dx = C\ell$ . Despejando  $C$ , vemos que la única solución de equilibrio debe ser  $u(x, t) = C = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f(x) dx$ , es decir, el promedio de la distribución inicial de temperaturas. (Por tanto, la condición inicial no se olvida por completo.)

**Ejemplo 6.3.** Encuéntrese la solución del siguiente problema del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 24 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = 1 + \operatorname{sen}^3 x, \quad x \in (0, \pi), \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Los coeficientes dados por (6.11) son

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 + \operatorname{sen}^3 s) ds = 1 + \frac{4}{3\pi}, \\ c_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 + \operatorname{sen}^3 s) \cos ns ds \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{6(1 + (-1)^n)}{n^4 - 10n^2 + 9} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{24}{\pi(n^2 - 9)(n^2 - 1)}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned}$$

La solución es entonces

$$u(x, t) = 1 + \frac{4}{3\pi} + \frac{24}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 9)(4n^2 - 1)} e^{-96n^2 t} \cos(2nx).$$

Cuando  $t \rightarrow \infty$ , la solución anterior tiende a la solución estacionaria:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 1 + \frac{4}{3\pi} = c_0.$$

La serie converge uniformemente a una temperatura constante. ◀

## 6.4. Método de la energía y unicidad de solución

Como para la ecuación de ondas, podemos utilizar un razonamiento de energía para la unicidad de solución de la ecuación del calor.

**Ejemplo 6.4.** La idea es probar que el problema de Dirichlet no homogéneo,

$$\begin{cases} u_t - \beta u_{xx} = G(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, \ell), \\ u(0, t) = g(t), \quad u(\ell, t) = h(t), \quad t \geq 0, \end{cases}$$

tiene solución única si el correspondiente problema homogéneo ( $G(x, t) = 0$ ,  $f(x) = 0$ ,  $g(t) = 0$  y  $h(t) = 0$ ) solo tiene como solución la nula.

Sean  $u_1$  y  $u_2$  dos soluciones del problema anterior y  $w = u_1 - u_2$  con

$$\begin{cases} w_t = \beta w_{xx}, \\ w(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \ell), \\ w(0, t) = w(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Definimos la integral de energía del problema como

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell w(x, t)^2 dx.$$

Recordamos que la idea del método se basa en el principio de conservación de la energía:  $E(t) \equiv \text{constante}$ .

De

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_0^\ell w(x,t)^2 dx \right) = \int_0^\ell w(x,t)w_t(x,t) dx = \beta \int_0^\ell w(x,t)w_{xx}(x,t) dx,$$

aplicando partes,

$$y(x,t) = w(x,t), \quad dy = w_x(x,t)dx; \quad dz = w_{xx}(x,t) dx, \quad z(x,t) = w_x(x,t),$$

y teniendo en cuenta que  $w(0,t) = w(\ell,t) = 0$ , se sigue que

$$E'(t) = \beta \left( \underbrace{w(x,t)w_x(x,t)}_{=0} \Big|_{x=0}^{x=\ell} - \int_0^\ell w_x(x,t)^2 dx \right) = -\beta \underbrace{\int_0^\ell w_x(x,t)^2 dx}_{\geq 0} \leq 0.$$

Luego,  $E(t)$  es decreciente.

Ahora, como  $E(0) = \frac{1}{2} \int_0^\ell w(x,0)^2 dx = 0$  y  $E(t) \geq 0$ , entonces  $E(t) = 0$ , para todo  $t$ . En consecuencia,  $w(x,t) = 0$  y  $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ , para todo  $t$ . Por lo tanto,  $u_1(x,t) = u_2(x,t)$  y la solución es única si existe. ◀

## 6.5. Método del desarrollo en autofunciones

Hasta ahora solo hemos considerado el método de separación de variables para resolver EDP de segundo orden. Recordamos que, para aplicar este método, la EDP tiene que ser lineal y homogénea. Además, los problemas tienen que estar formulados mediante condiciones de contorno lineales y homogéneas. Sin embargo, ya sabemos que algunos problemas no tienen condiciones homogéneas.

En la sección 6.2, hemos visto cómo podemos proceder si las condiciones de contorno son no homogéneas e independientes del tiempo. Si ahora permitimos que en el problema del calor la temperatura en los extremos de la varilla varíe en el tiempo, entonces las condiciones de contorno lineales no homogéneas dependen del tiempo y ya no podemos utilizar el método de separación de variables. En este caso, resolvemos el problema mediante el *método del desarrollo en autofunciones* que describimos a continuación.

Consideramos el problema del calor dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in (0, \ell), \\ u(0,t) = g_1(t), \quad u(\ell,t) = g_2(t), \quad t \geq 0. \end{cases}$$

En general, el problema anterior puede reducirse a otro con condiciones de contorno homogéneas con un cambio de función. Por ejemplo, buscando una función  $r(x,t)$  tal que  $r(0,t) = g_1(t)$  y  $r(\ell,t) = g_2(t)$ .

Notemos que  $r(x,t)$  no tiene por qué ser la temperatura estacionaria. Una posibilidad (no la única) es:

$$r(x,t) = g_1(t) + \frac{x}{\ell}(g_2(t) - g_1(t))$$

Otras opciones para  $r(x, t)$  dan lugar a soluciones equivalentes (pág. 373 de [11]).

Si hacemos la diferencia entre la solución deseada  $u(x, t)$  y la función elegida  $r(x, t)$ ,

$$z(x, t) = u(x, t) - r(x, t),$$

entonces

$$z_t(x, t) = u_t(x, t) - r_t(x, t) \quad \text{y} \quad z_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t) - r_{xx}(x, t),$$

lo que conduce al problema

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \overbrace{\beta \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial r}{\partial t}}^{G(x,t)}, \\ z(x, 0) = f(x) - r(x, 0) = f_1(x), \quad x \in (0, \ell), \\ z(0, t) = z(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Así, observamos que los efectos producidos por el cambio son tres: las condiciones de contorno se transforman en homogéneas, la temperatura inicial se modifica de  $f(x)$  a  $f_1(x)$  y la EDP es ahora no homogénea con término independiente  $G(x, t)$ , de manera que no podemos aplicar el método de separación de variables. Notemos que si la EDP inicial es no homogénea con término independiente  $G(x, t)$ , podemos hacer el mismo cambio de variable, puesto que este nos conduce a una nueva EDP no homogénea con término independiente  $G_1(x, t)$  distinto de  $G(x, t)$ , pero de la misma forma.

A continuación, nos centramos en resolver el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + G(x, t), \\ z(x, 0) = f_1(x), \quad x \in (0, \ell), \\ z(0, t) = z(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Resolvemos (6.12) mediante el método del desarrollo en autofunciones. Para ello, en primer lugar, consideramos los autovalores y las autofunciones del problema homogéneo asociado,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \\ z(x, 0) = f_1(x), \quad x \in (0, \ell), \\ z(0, t) = z(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

que hemos visto anteriormente que son respectivamente:

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad \text{y} \quad X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si cambiamos las condiciones de Dirichlet,  $z(0, t) = z(\ell, t) = 0$ , por otras, obtenemos otras autofunciones, pero podemos aplicar el mismo procedimiento.

El método del desarrollo en autofunciones para resolver (6.12) consiste en desarrollar la solución  $z(x, t)$  de (6.12) en serie de las autofunciones asociadas, de manera que

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)V_n(t), \quad (6.13)$$

donde  $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$  y las funciones  $V_n(t)$  quedan por determinar (no tienen por qué coincidir con la solución  $T_n(t)$  de la EDO  $T'(t) = \beta\lambda T(t)$  del caso homogéneo). Y, por tanto,  $z(x, t)$  tendrá una *serie de Fourier generalizada*.

La función  $z(x, t)$  así definida satisface las condiciones de contorno de (6.12). Para que se cumpla la condición inicial de (6.12), vemos que

$$f_1(x) = z(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)V_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) V_n(0),$$

de manera que  $V_n(0)$  son los coeficientes del desarrollo en serie senoidal de Fourier de  $f_1(x)$  o de las correspondientes autofunciones ortogonales  $X_n(x)$  que pudieran resultar:

$$V_n(0) = \frac{\int_0^{\ell} f_1(s)X_n(s) ds}{\int_0^{\ell} X_n^2(s) ds}.$$

En el caso que nos ocupa,

$$V_n(0) = \frac{\int_0^{\ell} f_1(s)X_n(s) ds}{\int_0^{\ell} X_n^2(s) ds} = \frac{\int_0^{\ell} f_1(s) \sin\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right) ds}{\int_0^{\ell} \sin^2\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right) ds} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f_1(s) \sin\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right) ds.$$

Para que se cumpla la EDP, vemos que

$$\begin{aligned} z_t &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)V_n'(t), \\ z_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{X_n''(x)}_{\lambda_n X_n} V_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n(x)V_n(t), \\ z_t - \beta z_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \underbrace{(V_n'(t) - \beta\lambda_n V_n(t))}_{C_n(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)C_n(t) = G(x, t) \end{aligned}$$

y, para obtener  $C_n(t)$ , las funciones  $X_n(x)$  han de ser ortogonales:

$$C_n(t) = \frac{\int_0^{\ell} G(s, t)X_n(s) ds}{\int_0^{\ell} X_n^2(s) ds}.$$

En el caso que nos ocupa,

$$C_n(t) = \frac{\int_0^{\ell} G(s, t)X_n(s) ds}{\int_0^{\ell} X_n^2(s) ds} = \frac{\int_0^{\ell} G(s, t) \sin\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right) ds}{\int_0^{\ell} \sin^2\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right) ds} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} G(s, t) \sin\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right) ds.$$

Una vez encontradas  $C_n(t)$ , resolvemos el problema de valor inicial (abreviadamente, PVI) dado por

$$\begin{cases} V_n'(t) - \beta\lambda_n V_n(t) = C_n(t), \\ V_n(0) = \frac{\int_0^\ell f_1(s)X_n(s) ds}{\int_0^\ell X_n^2(s) ds}. \end{cases}$$

Notemos que, si  $G(x, t) = 0$ , entonces  $C_n(t) = 0$  y el PVI anterior se reduce al que sale en el método de separación de variables.

A partir de las soluciones del PVI anterior, ya podemos escribir  $z(x, t)$  de la forma (6.13) y, en consecuencia, obtener la solución del problema no homogéneo original dada por

$$u(x, t) = r(x, t) + z(x, t) = g_1(t) + \frac{x}{\ell}(g_2(t) - g_1(t)) + z(x, t).$$

**Ejemplo 6.5.** Encuéntrese la solución del siguiente problema del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \operatorname{sen} 3x, \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 1, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Hacemos  $z(x, t) = u(x, t) - r(x, t)$  con  $r(x, t) = \frac{x}{\pi}$  y resolvemos

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^{-t} \operatorname{sen} 3x, \\ z(x, 0) = -\frac{x}{\pi}, \quad x \in (0, \pi), \\ z(0, t) = z(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Los autovalores y autofunciones del problema homogéneo asociado son respectivamente:

$$\lambda_n = -n^2 \quad \text{y} \quad X_n(x) = \operatorname{sen} nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Buscamos ahora

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \operatorname{sen} nx$$

tal que

$$\begin{aligned} -\frac{x}{\pi} &= z(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(0) \operatorname{sen} nx, \\ e^{-t} \operatorname{sen} 3x &= z_t - z_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} (V_n'(t) + n^2 V_n(t)) \operatorname{sen} nx. \end{aligned}$$

De la primera expresión se sigue

$$V_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{s}{\pi}\right) \operatorname{sen} ns ds = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos n\pi}{n}\right) = \frac{2(-1)^n}{n\pi},$$

y de la segunda

$$V_3'(t) + 9V_3(t) = e^{-t} \quad \text{y} \quad V_n'(t) + n^2V_n(t) = 0, \quad n \neq 3.$$

Y, en consecuencia, tenemos que resolver los dos siguientes PVI:

$$\begin{cases} V_3'(t) + 9V_3(t) = e^{-t}, \\ V_3(0) = \frac{-2}{3\pi}, \end{cases} \quad \begin{cases} V_n'(t) + n^2V_n(t) = 0, \quad n \neq 3, \\ V_n(0) = \frac{2(-1)^n}{n\pi}, \end{cases}$$

cuyas soluciones son respectivamente

$$V_3(t) = \frac{e^{-9t}}{24\pi} (3\pi e^{8t} - 3\pi - 16) \quad \text{y} \quad V_n(t) = \frac{2(-1)^n}{n\pi} e^{-n^2t}, \quad n \neq 3.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} z(x, t) &= X_3(x)V_3(t) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 3}}^{\infty} X_n(x)V_n(t) \\ &= \frac{1}{24\pi} (3\pi e^{8t} - 3\pi - 16) \operatorname{sen} 3x e^{-9t} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 3}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen} nx e^{-n^2t}, \\ u(x, t) &= z(x, t) + r(x, t) \\ &= \frac{x}{\pi} + \frac{1}{24\pi} (3\pi e^{8t} - 3\pi - 16) \operatorname{sen} 3x e^{-9t} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 3}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen} nx e^{-n^2t}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

## 6.6. Ejercicios

1. Dedúzcase la ecuación del calor unidimensional a partir de las leyes de conservación de la energía.
2. Resuélvanse por el método de separación de variables los siguientes problemas con condiciones de contorno de tipo Dirichlet:

$$a) \begin{cases} u_t = 17u_{xx}, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi/2; \quad u(x, 0) = 2, \quad \pi/2 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_t - u_{xx} - 4u_x - 4u = 0, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-2x}, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

3. Encuéntrense las soluciones de la ecuación del calor con condiciones de contorno no homogéneas,

$$\begin{cases} u_t = \beta u_{xx}, & x \in (0, \ell), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u(0, t) = T_1, \quad u(\ell, t) = T_2. \end{cases}$$

Determinése la solución estacionaria e intérpretese de forma gráfica el comportamiento de las temperaturas obtenidas para diversos valores de  $t > 0$  si

$$a) T_1 = 100, T_2 = 0, \ell = 1, \beta = 1, f(x) = 10 \operatorname{sen}(\pi x).$$

$$b) T_1 = 100, T_2 = 100, \ell = 1, \beta = 1, f(x) = 50x(1 - x).$$

4. Resuélvase la ecuación del calor con condiciones de contorno de tipo Neumann

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \cos \pi x, \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0. \end{cases}$$

5. Resuélvase la ecuación del calor con condiciones de contorno de tipo Robin:

$$\begin{cases} u_t = \beta u_{xx}, & x \in (0, \ell), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(\ell, t) = -k u(\ell, t), \quad k > 0. \end{cases}$$

Encuéntrese la solución y represéntese gráficamente en los siguientes casos:

$$a) \ell = \beta = k = 1, f(x) = x(1 - x).$$

$$b) \ell = \pi, \beta = 1, k = 1/2, f(x) = 100.$$

6. Calcúlese la solución de las siguientes ecuaciones del calor con condiciones de contorno de tipo Robin. Analícese la influencia de las condiciones de contorno en los autovalores y las autofunciones del problema.

$$a) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 1, \quad u_x(\pi, t) = 0, \end{cases} \quad b) \begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 100, \\ u_x(0, t) = -u(0, t), \quad u_x(1, t) = -u(1, t). \end{cases}$$

7. Encuéntrese la solución de la distribución de calor en un anillo delgado

$$\begin{cases} u_t = \beta u_{xx}, & x \in (-\ell, \ell), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u(-\ell, t) = u(\ell, t), \quad u_x(-\ell, t) = u_x(\ell, t). \end{cases}$$

Calcúlese la solución y represéntese gráficamente en los siguientes casos:

$$a) \ell = \beta = 1, f(x) = 100.$$

$$b) \ell = \pi, \beta = 1, f(x) = x \text{ si } 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ y } f(x) = \pi - x \text{ si } \pi/2 \leq x \leq \pi.$$

8. Resuélvase el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = A, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = B, \\ u_x(0, t) = C, \quad u_x(1, t) = D, \end{cases}$$

y determínese para qué relación entre las constantes existe solución estacionaria.

9. Resuélvase el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = G(x, t), & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \end{cases}$$

y hállese la temperatura estacionaria si

a)  $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$  y  $G(x, t) = e^{-t}$ .

b)  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{2}$  y  $G(x, t) = t + \cos x$ .

10. Utilícese el método de conservación de la energía para probar que el problema

$$\begin{cases} u_t - \beta u_{xx} = G(x, t), & x \in (0, \ell), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_x(0, t) = g(t), \quad u_x(\ell, t) = h(t), \end{cases}$$

tiene solución única.

# Capítulo 7

## Ecuaciones de ondas y del calor bidimensionales

En todos los problemas que hemos resuelto hasta ahora la solución dependía de dos variables independientes. En este capítulo vamos a ver cómo se aplica el método de separación de variables para resolver problemas con tres variables independientes. En concreto, lo haremos para las ecuaciones de ondas y del calor, estudiando las vibraciones de una membrana con forma rectangular y la distribución de temperaturas en una placa, respectivamente. También aparecen problemas con más de dos variables independientes en otros modelos relacionados con estas dos ecuaciones.

### 7.1. Ecuación de ondas bidimensional

Sea una membrana elástica sujeta a un marco rectangular de tamaño  $a \times b$  y fijada por los bordes (figura 7.1). La membrana comienza a vibrar mediante desplazamientos verticales y después se suelta. El valor de  $u(x, y, t)$  representa la deformación (altura) de la membrana en un punto de coordenadas  $(x, y)$  y en un tiempo  $t$ . Las vibraciones de la membrana están dadas por la siguiente EDP con condiciones iniciales y de contorno:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = f(x, y) & \text{(forma inicial de la membrana),} \\ u_t(x, y, 0) = g(x, y) & \text{(velocidad inicial de la membrana),} \\ u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, & 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, & 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

Aplicamos *el método de separación de variables* para buscar una solución de la forma:

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t).$$

Derivando y sustituyendo en la EDP, obtenemos

$$X(x)Y(y)T''(t) = c^2(X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t))$$

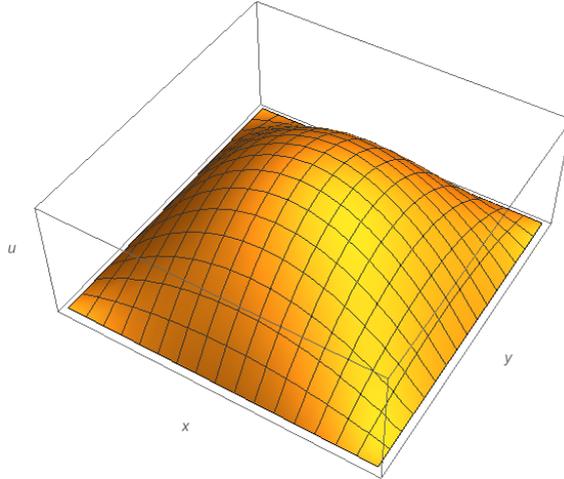


Figura 7.1: Forma inicial de una membrana con los bordes fijados.

y dividiendo ambos lados de la igualdad por  $c^2 X(x)Y(y)T(t)$ , tenemos

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Como el lado izquierdo es una función solo de  $t$  y el lado derecho es una función solo de  $x$  e  $y$ , ambos lados deben ser igual a una constante. Teniendo en cuenta ahora lo ya visto para el método de separación de variables, podemos considerar solo constantes de separación negativas, puesto que las no negativas solo conducen a soluciones triviales. Así,

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -k^2 \quad \text{y} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k^2 \quad (k > 0),$$

de manera que la primera ecuación es

$$T''(t) + k^2 c^2 T(t) = 0$$

y la segunda

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - k^2.$$

De la última ecuación inferimos que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2 \quad \text{e} \quad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - k^2 = -\mu^2 \quad (\mu > 0),$$

o

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \quad \text{e} \quad Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0 \quad \text{con} \quad \nu^2 = k^2 - \mu^2.$$

De nuevo, consideramos solo constantes de separación negativas porque las no negativas solo conducen a soluciones triviales.

Separando ahora variables en las condiciones de contorno, llegamos a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X''(x) + \mu^2 X(x) &= 0 & \text{con} & \quad X(0) = X(a) = 0, \\ Y''(y) + \nu^2 Y(y) &= 0 & \text{con} & \quad Y(0) = Y(b) = 0, \\ T''(t) + k^2 c^2 T(t) &= 0 & \text{con} & \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2. \end{aligned}$$

Las soluciones generales de las tres EDO son respectivamente:

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos \mu x + C_2 \operatorname{sen} \mu x, \\ Y(y) &= D_1 \cos \nu y + D_2 \operatorname{sen} \nu y, \\ T(t) &= E_1 \cos(kct) + E_2 \operatorname{sen}(kct) \quad \text{con} \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2. \end{aligned}$$

A partir de las condiciones de contorno para  $X$  e  $Y$ , obtenemos:

$$C_1 = 0, \quad C_2 \operatorname{sen} \mu a = 0, \quad D_1 = 0, \quad D_2 \operatorname{sen} \nu b = 0.$$

Entonces,

$$\mu = \mu_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \nu = \nu_n = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

y

$$X_m(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad \text{e} \quad Y_n(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Notemos que si  $m = 0$  o  $n = 0$ , las soluciones son idénticamente cero y carecen de interés. También elecciones negativas de  $m$  y  $n$  cambiarían solo los signos de las soluciones, de manera que no contribuyen a nuevas soluciones.

Para  $m, n \in \mathbb{N}$ , tenemos

$$k = k_{m,n} = \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

y entonces

$$T(t) = T_{m,n}(t) = C_{m,n} \cos(\lambda_{m,n}t) + D_{m,n} \operatorname{sen}(\lambda_{m,n}t) \quad \text{con} \quad \lambda_{m,n} = ck_{m,n} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Los valores de  $\lambda_{m,n}$  se llaman *frecuencias características* de la membrana. En contraste con el caso unidimensional de una cuerda vibrante, las frecuencias características no son múltiplos enteros de alguna frecuencia básica.

Por tanto, las soluciones que satisfacen la EDP y las condiciones de contorno son los productos

$$u_{m,n}(x, y, t) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) (C_{m,n} \cos(\lambda_{m,n}t) + D_{m,n} \operatorname{sen}(\lambda_{m,n}t)).$$

Las funciones  $u_{m,n}$  se llaman *modos normales* de la ecuación de ondas bidimensional.

Para encontrar una solución que satisfaga también las condiciones iniciales, recurrimos a la generalización del principio de superposición, sumamos todas las soluciones productos y construimos la solución formal

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{m,n}(x, y, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) (C_{m,n} \cos(\lambda_{m,n}t) + D_{m,n} \operatorname{sen}(\lambda_{m,n}t)). \end{aligned}$$

Buscamos ahora los coeficientes  $C_{m,n}$  y  $D_{m,n}$  a partir de las condiciones iniciales.

A partir de la condición inicial  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ , obtenemos

$$f(x, y) = u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{m,n} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right). \quad (7.1)$$

La clave para calcular los coeficientes  $C_{m,n}$  está en observar que las funciones de (7.1),  $\operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right)$ , son «ortogonales» sobre el rectángulo  $[0, a] \times [0, b]$ ; es decir,

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_0^a \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m'\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n'\pi y}{b} \right) dx dy \\ &= \left( \int_0^a \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m'\pi x}{a} \right) dx \right) \left( \int_0^b \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n'\pi y}{b} \right) dy \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } (m, n) \neq (m', n'), \\ \frac{ab}{4} & \text{si } (m, n) = (m', n'), \end{cases} \end{aligned}$$

puesto que la primera y la segunda integrales son respectivamente

$$\begin{cases} 0 & \text{si } m \neq m', \\ \frac{a}{2} & \text{si } m = m', \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n', \\ \frac{b}{2} & \text{si } n = n'. \end{cases}$$

Multiplicando ahora (7.1) por  $\operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right)$ , integrando sobre el rectángulo  $[0, a] \times [0, b]$  y utilizando las propiedades de ortogonalidad, obtenemos

$$C_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) dx dy. \quad (7.2)$$

La serie (7.1) con los coeficientes (7.2) se llama *serie senoidal de Fourier doble* de  $f(x, y)$ .

Análogamente, utilizando la segunda condición inicial,  $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$ , como

$$u_t(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \lambda_{m,n} (-C_{m,n} \operatorname{sen}(\lambda_{m,n}t) + D_{m,n} \cos(\lambda_{m,n}t)),$$

tenemos

$$g(x, y) = u_t(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{m,n} \lambda_{m,n} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right).$$

Apoyándonos de nuevo en las propiedades de ortogonalidad, obtenemos

$$D_{m,n} = \frac{4}{ab\lambda_{m,n}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) dx dy. \quad (7.3)$$

Finalmente, la solución formal del problema inicial es

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (C_{m,n} \cos(\lambda_{m,n}t) + D_{m,n} \operatorname{sen}(\lambda_{m,n}t)) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right),$$

donde  $\lambda_{m,n} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$  y los coeficientes  $C_{m,n}$  y  $D_{m,n}$  son como en (7.2) y (7.3).

Para justificar la convergencia de la serie que aparece en (7.1), enunciaremos el teorema de representación de la serie senoidal de Fourier doble que se aplica a funciones continuas con primeras y segundas derivadas parciales continuas en  $x$  e  $y$ .

**Teorema 7.1.** (Representación en serie senoidal de Fourier doble, [3]) *Supongamos que  $f(x, y)$  está definida para todo  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  y es continua con primeras y segundas derivadas parciales continuas en  $x$  e  $y$ . Entonces, tenemos el desarrollo en serie senoidal de Fourier doble*

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{m,n} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right).$$

donde los coeficientes de la serie senoidal de Fourier doble  $C_{m,n}$  están definidos en (7.2).

## 7.2. Ecuación del calor bidimensional

Consideramos ahora la ecuación del calor bidimensional con condiciones de contorno homogéneas. Este problema del calor bidimensional modeliza la distribución de temperatura en una placa rectangular delgada con caras aisladas, temperatura cero en los bordes y con una distribución de temperatura inicial  $f(x, y)$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = f(x, y) & \text{(temperatura inicial de la placa),} \\ u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, & 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, & 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

La solución del problema, basada en el método de separación de variables y que se sigue, paso a paso, de la solución de la ecuación de ondas bidimensional es:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,n} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) e^{-\lambda_{m,n}^2 t},$$

donde

$$A_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) dx dy,$$

$$\lambda_{m,n} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

## 7.3. Ejercicios

1. Resuélvase la ecuación de ondas bidimensional para  $a = b = 1$ ,  $c = 1/\pi$ ,  $f(x, y) = x(x-1)y(y-1)$  y  $g(x, y) = 0$ . Apoyándose en *Mathematica* (o cualquier otro programa capaz de realizar representaciones gráficas), dibújese el movimiento de la membrana para diferentes valores de  $t$  y para una suma parcial de la serie solución. Decídase cuántos términos incluir en dicha suma parcial comparando el gráfico correspondiente para  $t = 0$  con el gráfico de la deformación inicial  $f(x, y)$ .

2. Resuélvase la ecuación del calor bidimensional para  $a = b = 1$ ,  $c = 1/\pi$  y  $f(x, y) = 100$  grados centígrados. Apoyándose en *Mathematica* (o cualquier otro programa capaz de realizar representaciones gráficas), dibújense las temperaturas para diferentes valores de  $t$  y para una suma parcial de la serie solución. Decídanse cuántos términos incluir en dicha suma parcial comparando el gráfico correspondiente para  $t = 0$  con el gráfico de la deformación inicial  $f(x, y)$ .

# Capítulo 8

## Ecuación de Laplace

La tercera de las EDP clásicas de la física matemática es la *ecuación de Laplace*, que es una EDP de segundo orden elíptica que en coordenadas cartesianas admite la formulación

$$\Delta u = \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

(El operador  $\Delta u$  recibe el nombre de *laplaciano*.) Esta ecuación aparece en varios ámbitos, fue introducida por Pierre Simon Laplace en 1780 en su trabajo sobre la gravedad y sus soluciones reciben el nombre de *funciones armónicas*. Históricamente, por las necesidades de la mecánica newtoniana, está asociada a la ecuación del calor bidimensional al buscar soluciones estacionarias,  $u_t = \beta(u_{xx} + u_{yy})$ , que se reduce a ella para  $u_t = 0$ . En dos dimensiones, el potencial gravitatorio newtoniano y el potencial electrostático vienen descritos por esta ecuación (sección 1.1.4). Esta ecuación es fundamental en mecánica, electromagnetismo, probabilidad, la teoría matemática de las funciones armónicas, mecánica cuántica, biología, etc. A modo de ejemplo, recordemos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann de una transformación conforme  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  son  $u_x = v_y$  y  $u_y = -v_x$ . Si las derivadas segundas existen y son continuas, podemos derivar la primera igualdad con respecto a  $x$  y la segunda con respecto a  $y$ , de manera que  $u_{xx} = v_{xy}$  y  $u_{yy} = -v_{xy}$ . Por tanto,  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , que es la ecuación de Laplace. Luego, la parte real  $u$  de una transformación conforme cumple la ecuación de Laplace. De forma similar, podemos ver que la parte imaginaria  $v$  de la transformación conforme también cumple la ecuación de Laplace.

Al buscar la temperatura estacionaria en la ecuación del calor unidimensional,  $u_t = \beta u_{xx}$ , hay que resolver  $u_{xx} = 0$ , cuyas soluciones son  $u(x) = C_1 x + C_2$ , puesto que las soluciones estacionarias son independientes del tiempo. De la misma forma, para problemas independientes del tiempo o estacionarios en dos dimensiones,  $u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy})$  en el rectángulo  $[0, a] \times [0, b]$ , hay que resolver

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{con} \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b].$$

En estas circunstancias, en vez de dar la distribución inicial de temperaturas  $f(x)$  a lo largo de una varilla, como se hizo en el problema del calor, se da la distribución de temperaturas en la frontera de la región donde se satisface la ecuación de Laplace.

La ecuación de Laplace admite un gran número de soluciones:  $u(x, y) = x + y$ ,  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ ,  $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ ,  $u(x, y) = e^y \cos x$ , etc. En los problemas físicos, la ecuación de Laplace está complementada con unas condiciones de contorno, que son las que determinan la forma de la solución.

## 8.1. Ecuación de Laplace en un rectángulo

Se conoce como *problema de Dirichlet en un rectángulo* al dado por la ecuación de Laplace cuando se especifica  $u$  a lo largo del contorno de un rectángulo  $[0, a] \times [0, b]$ :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ u(x, 0) = f_1(x), & u(x, b) = f_2(x), & 0 < x < a, \\ u(0, y) = g_1(y), & u(a, y) = g_2(y), & 0 < y < b. \end{cases} \quad (8.1)$$

La idea habitual que se suele utilizar para resolver este problema es descomponerlo en los siguientes cuatro subproblemas:

$$\begin{aligned} [P_1]: & \Delta u = 0, & u(x, 0) = f_1(x), & u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0, \\ [P_2]: & \Delta u = 0, & u(x, b) = f_2(x), & u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0, \\ [P_3]: & \Delta u = 0, & u(0, y) = g_1(y), & u(x, 0) = u(x, b) = u(a, y) = 0, \\ [P_4]: & \Delta u = 0, & u(a, y) = g_2(y), & u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = 0. \end{aligned}$$

Si  $u_i(x, y)$  es la solución del problema  $[P_i]$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , entonces

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y)$$

es la solución del problema de Dirichlet (8.1). Por tanto, el problema se reduce a determinar  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  y  $u_4$ .

Como los cuatro subproblemas son iguales, resolvemos uno de ellos; por ejemplo,  $[P_2]$ . Si aplicamos el método de separación de variables y hacemos  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , llegamos al PVI

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases}$$

Los autovalores y las autofunciones del PVI anterior son respectivamente:

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad \text{y} \quad X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

A continuación, resolvemos:

$$Y''(y) = -\lambda_n Y(y) \quad \text{con} \quad Y(0) = 0.$$

A partir de la EDO anterior, vemos que la ecuación auxiliar es  $r^2 + \lambda_n = 0$ , cuyas soluciones son  $r = \pm\sqrt{-\lambda_n} = \pm\frac{n\pi}{a}$ , de manera que la solución general es:

$$Y(y) = Y_n(y) = M_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + N_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}.$$

Como  $Y(0) = 0$ , entonces  $M_n = -N_n$  y, en consecuencia,

$$Y_n(y) = -N_n \left( e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right) = -2N_n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{a} \right).$$

Por tanto, tenemos que encontrar soluciones producto (básicas) de la forma:

$$B_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{a} \right).$$

Y superponiendo estas soluciones, obtenemos la forma general de la solución de  $[P_2]$ :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{a} \right).$$

Ahora solo falta determinar los coeficientes  $B_n$ . La condición de contorno  $u(x, b) = f_2(x)$ , con  $0 < x < a$ , conduce a

$$f_2(x) = u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi b}{a} \right).$$

Para cumplir este requerimiento, elegimos los coeficientes  $B_n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi b}{a} \right)$  como los coeficientes de la serie senoidal de Fourier de  $f_2(x)$  en el intervalo  $0 < x < a$ . Así,

$$B_n = \frac{2}{a \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi b}{a} \right)} \int_0^a f_2(s) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi s}{a} \right) ds, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.2)$$

Resumiendo, la solución del problema  $[P_2]$  es:

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{a} \right)$$

con los coeficientes  $B_n$  determinados por (8.2).

**Ejemplo 8.1.** (Estado estacionario en una placa cuadrada.) Determínese la temperatura estacionaria en una placa cuadrada  $1 \times 1$  con temperatura  $100^\circ$  centígrados en un lado y  $0^\circ$  centígrados en los otros tres lados. Y, en particular, encuéntrese la temperatura estacionaria en el centro del cuadrado.

Como  $a = b = 1$  y  $f_2(x) = 100$ , entonces

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{senh}(n\pi y),$$

con

$$B_n = \frac{2}{\operatorname{senh}(n\pi)} \int_0^1 100 \operatorname{sen}(n\pi s) ds = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{400}{n\pi \operatorname{senh}(n\pi)} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto,

$$u(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)\pi x) \operatorname{senh}((2n-1)\pi y)}{(2n-1) \operatorname{senh}((2n-1)\pi)}.$$

Notemos que para  $y = 1$ , se obtiene el desarrollo en serie senoidal de Fourier de 100, coincidiendo con la condición de contorno. Si  $0 < y < 1$ , denotando  $p = (2n - 1)\pi$ , tenemos, cuando  $n \rightarrow +\infty$ , que

$$\frac{\sinh(py)}{\sinh p} = \frac{e^{py} - e^{-py}}{e^p - e^{-p}} = \frac{e^{2py} - 1}{e^{2p} - 1} \frac{e^p}{e^{py}} \approx \frac{e^{2py}}{e^{2p}} \frac{e^p}{e^{py}} = e^{2py+p-2p-py} = e^{p(y-1)}$$

y, como  $e^{p(y-1)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ , el cociente de senos hiperbólicos tiende a 0 de forma exponencial, lo que da lugar a una rápida convergencia de la serie.

La temperatura estacionaria en el centro de la placa se obtiene para  $x = y = \frac{1}{2}$ :

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) \sinh\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1) \sinh((2n-1)\pi)}.$$

Teniendo en cuenta  $\sinh x = 2 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$  y  $\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$ , se sigue

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1) \cosh\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}. \quad (8.3) \quad \blacktriangleleft$$

Si ahora volvemos al problema inicial (8.1) y calculamos las soluciones de  $[P_1]$ ,  $[P_3]$  y  $[P_4]$ , que se encuentran de forma análoga a la de  $[P_2]$ ,

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right), \quad A_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f_1(s) \sin\left(\frac{n\pi s}{a}\right) ds,$$

$$u_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi(a-x)}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad C_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b g_1(s) \sin\left(\frac{n\pi s}{b}\right) ds,$$

$$u_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad D_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b g_2(s) \sin\left(\frac{n\pi s}{b}\right) ds,$$

ya tenemos completamente resuelto el problema de Dirichlet (8.1):

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y).$$

**Ejemplo 8.2.** Si consideramos el problema del ejemplo anterior, pero con condiciones de contorno igual a  $100^\circ$  centígrados en cada lado de la placa, la solución es claramente  $u(x, y) = 100$ , puesto que cumple la EDP y las condiciones de contorno.

Por otra parte, como podemos descomponer este problema en los cuatro subproblemas descritos anteriormente, las funciones  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  y  $u_4$  tienen, por simetría, el mismo valor en el centro (aunque las soluciones no sean exactamente las mismas en el rectángulo), de manera que si igualamos las dos versiones de la solución en el centro,

$$100 = u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + u_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + u_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + u_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 4u_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

obtenemos  $u_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 25$ . Luego, así, logramos encontrar el valor exacto, 25, de la serie (8.3).  $\blacktriangleleft$

## 8.2. El principio del máximo/mínimo y unicidad de solución

La unicidad de solución de la ecuación de Laplace con condiciones de contorno de Dirichlet se sigue de la existencia de un principio del máximo para la ecuación de Laplace, cuya demostración puede verse en [18, 28].

**Teorema 8.3.** (Principio del máximo/mínimo para la ecuación de Laplace.) *Si  $u(x, y)$  es una solución de la ecuación de Laplace en un dominio acotado  $D$  del plano- $xy$  y es continua en  $\bar{D} = D \cup \partial D$ , entonces los valores máximo y mínimo de  $u$  se alcanzan en la frontera  $\partial D$ .*

La unicidad de la solución del problema de Dirichlet se deduce entonces del principio del máximo/mínimo anterior.

**Teorema 8.4.** (Unicidad de solución del problema de Dirichlet.) *Sea  $D$  un dominio acotado del plano- $xy$ . Si existe una solución continua del problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } D, \\ u(x, y) = f(x, y) \text{ en } \partial D, \end{cases}$$

*entonces la solución es única.*

**Demostración.** Sean  $u_1$  y  $u_2$  dos soluciones del anterior problema de Dirichlet. La diferencia  $w = u_1 - u_2$  es una solución de  $\Delta w = 0$ . Como  $w = 0$  en  $\partial D$ , entonces los valores máximo y mínimo de  $w$  en  $D$  son cero por el principio del máximo/mínimo, y  $u_1 = u_2$  en  $D$ . ■

Recordamos que la ecuación de Laplace surge de la búsqueda de soluciones estacionarias de la ecuación del calor. Así, como hay principios del máximo/mínimo para la ecuación de Laplace, también hay principios del máximo/mínimo para la ecuación del calor y podemos ver entonces la unicidad de esta ecuación a partir de dichos principios [28].

## 8.3. Ecuación de Poisson en un rectángulo

La ecuación de Poisson es una ecuación de Laplace no homogénea

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \tag{8.4}$$

y surge de problemas de calor estacionarios con fuentes de calor independientes del tiempo, así como de la teoría del potencial (sección 1.1.4). Como la ecuación es no homogénea cuando  $f(x, y) \neq 0$ , no podemos resolverla directamente por el método de separación de variables.

Nuestro objetivo es resolver la ecuación de Poisson en un rectángulo,

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y), & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ u(x, 0) = f_1(x), & u(x, b) = f_2(x), & 0 < x < a, \\ u(0, y) = g_1(y), & u(a, y) = g_2(y), & 0 < y < b. \end{cases} \tag{8.5}$$

mediante el método del desarrollo en autofunciones. Para ello, descomponemos el problema anterior en dos problemas más simples,

$$[P_1]: \quad \Delta u = f(x, y), \quad u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0,$$

$$[P_2]: \quad \Delta u = 0, \quad u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x), \quad u(0, y) = g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y),$$

y, mediante el principio de superposición, la solución del problema (8.5) es

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

donde  $u_i(x, y)$  es la solución del problema  $[P_i]$ ,  $i = 1, 2$ .

Como  $[P_2]$  es el problema de Dirichlet en un rectángulo, podemos resolverlo por el método de separación de variables, tal y como hemos hecho en la sección anterior. Por tanto, para completar la solución de (8.5), solo tenemos que resolver el problema  $[P_1]$ , que es la ecuación de Poisson con condiciones de contorno nulas.

A partir de la solución del problema de Dirichlet en un rectángulo, que es un caso particular del problema de Poisson cuando  $f(x, y) = 0$ , consideramos la función

$$\phi_{m,n}(x, y) = \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right),$$

que claramente satisface las condiciones de contorno de  $[P_1]$ . Además, si calculamos el laplaciano de  $\phi_{m,n}(x, y)$ , vemos que

$$\begin{aligned} \Delta \phi_{m,n} &= \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \right) + \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \right) \\ &= - \left( \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \\ &= - \underbrace{\left( \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)}_{\text{constante}} \phi_{m,n}(x, y), \end{aligned}$$

de manera que el laplaciano de  $\phi_{m,n}(x, y)$  es un múltiplo constante de  $\phi_{m,n}(x, y)$ . Utilizando una terminología común en álgebra lineal, llamamos a la constante

$$\lambda_{m,n} = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2$$

valor propio del laplaciano de  $\phi_{m,n}(x, y)$  y la función

$$\phi_{m,n}(x, y) = \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right)$$

es la correspondiente función propia (bidimensional). Como el efecto del laplaciano de una autofunción es muy simple de describir (multiplica la autofunción por una constante), parece natural tomar como solución del problema  $[P_1]$  una serie de autofunciones de la forma

$$u(x, y) = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} E_{m,n} \phi_{m,n}(x, y),$$

donde las constantes  $E_{m,n}$  quedan por determinar.

Está claro que  $u$  satisface las condiciones de contorno nulas del problema  $[P_1]$ . Para que  $u$  cumpla la EDP, hacemos

$$\begin{aligned} f(x, y) = \Delta u &= \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} E_{m,n} \underbrace{\Delta \phi_{m,n}(x, y)}_{-\lambda_{m,n} \phi_{m,n}(x, y)} = - \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} E_{m,n} \lambda_{m,n} \phi_{m,n}(x, y) \\ &= - \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} E_{m,n} \lambda_{m,n} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right), \end{aligned}$$

de manera que podemos pensar la serie anterior como un desarrollo en serie senoidal de Fourier doble de  $f(x, y)$  y así

$$E_{m,n} = \frac{-4}{ab\lambda_{m,n}} \int_0^b \int_0^a f(s, t) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi s}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi t}{b} \right) ds dt.$$

Ya tenemos entonces resuelto formalmente el problema de Poisson (8.5).

**Ejemplo 8.5.** Resuélvase el problema de Poisson  $\Delta u = 1$  en el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ , sujeto a las condiciones de contorno:  $u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = 0$  y  $u(x, 1) = 100$ .

Tal y como hemos visto anteriormente, podemos descomponer el problema anterior en dos,

$$\begin{aligned} [P_1]: \quad \Delta u &= 1, \quad u(x, 0) = u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 0, \\ [P_2]: \quad \Delta u &= 0, \quad u(x, 1) = 100, \quad u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = 0, \end{aligned}$$

y, mediante el principio de superposición, obtener la solución del problema inicial:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

donde  $u_1(x, y)$  y  $u_2(x, y)$  son las soluciones de  $[P_1]$  y  $[P_2]$ , respectivamente.

Como  $[P_2]$  es el problema de Dirichlet resuelto en el ejemplo 8.1, sabemos que

$$u_2(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)\pi x) \operatorname{senh}((2n-1)\pi y)}{(2n-1) \operatorname{senh}((2n-1)\pi)},$$

así que solo nos tenemos que centrar en resolver  $[P_1]$ .

Teniendo en cuenta lo visto anteriormente, los autovalores y las autofunciones correspondientes a  $[P_1]$  son respectivamente:

$$\lambda_{m,n} = (m^2 + n^2)\pi^2 \quad \text{y} \quad \phi_{m,n}(x, y) = \operatorname{sen}(m\pi x) \operatorname{sen}(n\pi y).$$

Luego,

$$1 = -\pi^2 \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} E_{m,n} (m^2 + n^2) \operatorname{sen}(m\pi x) \operatorname{sen}(n\pi y),$$

donde

$$\begin{aligned} E_{m,n} &= \frac{-4}{(m^2 + n^2)\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi s) \operatorname{sen}(n\pi t) ds dt \\ &= \frac{-4}{(m^2 + n^2)\pi^2} \left( \frac{1 - (-1)^m}{m\pi} \right) \left( \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ o } n \text{ es par,} \\ \frac{-16}{(m^2 + n^2)mn\pi^4} & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$u_1(x, y) = \frac{-16}{\pi^4} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \text{ impar}}} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impar}}} \frac{\operatorname{sen}(m\pi x) \operatorname{sen}(n\pi y)}{(m^2 + n^2)mn}. \quad \blacktriangleleft$$

## 8.4. Ecuación de Laplace en regiones circulares

El laplaciano en dos dimensiones y sus versiones en dimensiones más altas son de crucial importancia en aplicaciones. Aparecen, por ejemplo, en las ecuaciones de ondas, del calor y de Poisson. En las secciones anteriores, hemos resuelto estas ecuaciones en regiones rectangulares. Para extender las aplicaciones a regiones circulares, es una ventaja utilizar coordenadas polares, de manera que la región y sus contornos tengan expresiones simples. Por ejemplo, para problemas sobre un círculo, la ecuación de una circunferencia centrada en el origen y radio  $a$  se reduce a  $r = a$ .

### El laplaciano en coordenadas polares

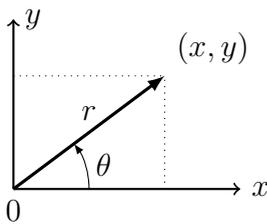


Figura 8.1: Coordenadas polares en el plano.

Las coordenadas polares  $(r, \theta)$  de un punto en el plano (figura 8.1) están relacionadas con las coordenadas rectangulares  $(x, y)$  mediante las relaciones

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta. \quad (8.6)$$

Para cualquier punto fijo  $(x, y)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y hay infinitos valores de  $\theta$  que cumplen las igualdades anteriores. Para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , todos estos valores de  $\theta$  difieren en  $2\pi$ , pero hay un único valor de  $\theta$  que está en el intervalo  $(-\pi, \pi]$ . (También se puede utilizar alternativamente el intervalo  $[0, 2\pi)$ .) Entonces, la transformación (8.6) define una correspondencia uno a uno entre el plano perforado (el plano menos el origen) y el conjunto de pares  $(r, \theta)$  tal que  $r > 0$  y  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . Esta correspondencia falla en el origen, donde  $r = 0$ , pero  $\theta$  es indeterminado. Notemos que cuando un punto en movimiento  $(x, y)$  cruza el semieje negativo de las  $x$ ,  $\theta$  sufre un salto de  $2\pi$ . Luego,  $\theta$  no es una función continua en los puntos del semieje negativo de las  $x$ . Si restringimos  $\theta$  al intervalo  $[0, 2\pi)$ , entonces las discontinuidades ocurren en el semieje

positivo de las  $x$ , pero no hay forma de definir  $\theta$  de manera que sea continua en todo el plano perforado. Siempre hay una curva de discontinuidad que surge del origen. Si eliminamos la curva de discontinuidad del plano perforado, entonces la transformación (8.6) será suavemente invertible en la región resultante. Por ejemplo, si la curva de discontinuidad es el semieje no positivo de las  $x$  y elegimos que  $(-\pi, \pi)$  sea la región de  $\theta$ , entonces, para cualquier punto  $(x, y)$  que no esté en la curva de discontinuidad, podemos definir la transformación inversa (suave) de (8.6) mediante

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & y \geq 0, \\ -\arctan\left(\frac{y}{x}\right), & y < 0. \end{cases}$$

Sin embargo, las coordenadas polares no pueden estar bien definidas en cualquier región que incluya el origen, puesto que son singulares en él. Por tanto, las soluciones de la ecuación de Laplace en términos de coordenadas polares se deben reexaminar en coordenadas rectangulares para ver si son válidas sobre el origen.

Por otra parte, derivando  $r^2 = x^2 + y^2$  con respecto a  $x$ , obtenemos:

$$2rr_x = 2x \quad \Rightarrow \quad r_x = \frac{x}{r}.$$

Derivando una segunda vez con respecto a  $x$  y simplificando, tenemos:

$$r_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) = \frac{r - xr_x}{r^2} = \frac{r - x^2/r}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}.$$

Derivando  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  respecto a  $x$ , obtenemos:

$$\underbrace{(1 + \tan^2 \theta)}_{\frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}} \theta_x = -\frac{y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \theta_x = -\frac{y}{r^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Derivando una segunda vez con respecto a  $x$  y simplificando, tenemos:

$$\theta_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{r^4}.$$

Análogamente,

$$r_y = \frac{y}{r}, \quad r_{yy} = \frac{x^2}{r^3}, \quad \theta_y = \frac{x}{r^2}, \quad \theta_{yy} = -\frac{2xy}{r^4}.$$

Para cambiar a coordenadas polares en el laplaciano,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ , tenemos que utilizar la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x, \\ u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} (u_r r_x + u_\theta \theta_x) = u_{rr} r_x^2 + 2u_{r\theta} r_x \theta_x + u_{\theta\theta} \theta_x^2 + u_r r_{xx} + u_\theta \theta_{xx}, \\ u_y &= u_r r_y + u_\theta \theta_y, \\ u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} (u_r r_y + u_\theta \theta_y) = u_{rr} r_y^2 + 2u_{r\theta} r_y \theta_y + u_{\theta\theta} \theta_y^2 + u_r r_{yy} + u_\theta \theta_{yy}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} \\
 &= u_{rr} \underbrace{(r_x^2 + r_y^2)}_1 + 2u_{r\theta} \underbrace{(r_x\theta_x + r_y\theta_y)}_0 \\
 &\quad + u_{\theta\theta} \underbrace{(\theta_x^2 + \theta_y^2)}_{1/r^2} + u_r \underbrace{(r_{xx} + r_{yy})}_{1/r} + u_\theta \underbrace{(\theta_{xx} + \theta_{yy})}_0 \\
 &= u_{rr} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{u_r}{r}.
 \end{aligned}$$

### 8.4.1. Ecuación de Laplace en un círculo

La distribución de temperatura estacionaria (o independiente del tiempo) en una placa circular de radio  $a$  con temperatura conocida en la frontera satisface la ecuación de Laplace en coordenadas polares

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{u_r}{r} = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

y la condición de contorno

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

recibiendo el nombre de *problema de Dirichlet en un círculo* de radio  $a$ . Notemos que  $f$  debe ser necesariamente acotada y  $2\pi$ -periódica, y que hay cierta libertad en la definición del ángulo  $\theta$ .

Matemáticamente, necesitamos condiciones en los puntos finales de las variables del sistema coordenado,  $r = 0, a$  y  $\theta = 0, 2\pi$ . Aquí, solo  $r = a$  corresponde a una frontera física. Por tanto, necesitamos condiciones que vengan motivadas por el problema físico en los extremos  $r = 0$  y  $\theta = 0, 2\pi$ . Como las coordenadas polares son singulares en  $r = 0$ , suponemos que la temperatura está acotada en ese punto, añadiendo la *condición de regularidad en el origen*:

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r, \theta) < +\infty.$$

Además, el uso de coordenadas polares exige que la solución verifique las condiciones adicionales:

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi) \quad \text{y} \quad u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, 2\pi),$$

ya que los valores  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$  corresponden a la misma parte del dominio que estamos considerando, el intervalo  $[0, a]$  del eje  $X$ , y la solución debe ser de clase  $\mathcal{C}^2$  en la placa circular. Las condiciones anteriores se denominan *condiciones de periodicidad*.

Con todos estos datos, la formulación completa del problema de Dirichlet en una placa circular de radio  $a$  y centro el origen es:

$$\begin{cases}
 \Delta u = 0, & 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \\
 u(a, \theta) = f(\theta), \quad \lim_{r \rightarrow 0} u(r, \theta) < +\infty, & 0 \leq \theta < 2\pi, \\
 u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, 2\pi), & 0 \leq r < a.
 \end{cases}$$

Siguiendo el método de separación de variables, buscamos soluciones de la ecuación de Laplace de la forma  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ . Así,

$$0 = \Delta u = R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta).$$

Multiplicamos por  $r^2$ , dividimos por  $R(r)\Theta(\theta)$  y obtenemos:

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda,$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \quad \text{y} \quad \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0,$$

donde  $\lambda$  es la constante de separación. La ecuación en  $\Theta$  se cumple en el intervalo  $(0, 2\pi)$ . Para que la solución  $u(r, \theta)$  sea de clase  $\mathcal{C}^2$ , necesitamos imponer dos condiciones de periodicidad:

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi),$$

que se obtienen a partir de  $u(r, 0) = u(r, 2\pi)$  y  $u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, 2\pi)$ , respectivamente. Notemos también que la ecuación en  $\Theta$  junto con la primera condición anterior también implica la periodicidad de la segunda derivada con respecto a  $\theta$ .

Como  $\Theta$  es necesariamente  $2\pi$ -periódica,  $\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0$  debe tener soluciones periódicas. Los autovalores  $\lambda$  se determinan de la forma habitual. Supongamos entonces que  $\lambda \geq 0$  (el otro caso no lo consideramos porque nos conduce a una solución trivial). Entonces, hacemos  $\lambda = \mu^2$ , con  $\mu \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ , de manera que

$$\Theta(\theta) = A \cos \mu\theta + B \sin \mu\theta.$$

Para que  $\Theta$  sea  $2\pi$ -periódica, tenemos que  $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$  y, como  $\cos(\mu(\theta + 2\pi)) = \cos \mu\theta$ , vemos que  $\mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Tomamos entonces  $\lambda = n^2$ , con  $n \geq 0$ , para obtener funciones  $2\pi$ -periódicas en  $\theta$ . El caso  $n = 0$  debe estar incluido (siendo la autofunción correspondiente una constante).

Entonces las EDO separadas son:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0 \quad \text{y} \quad \Theta''(\theta) + n^2 \Theta(\theta) = 0.$$

Por tanto, tenemos las soluciones  $2\pi$ -periódicas:

$$\Theta(\theta) = \Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad n \geq 0.$$

Y la ecuación radial en  $R(r)$  es una ecuación conocida por varios nombres: *equidimensional*, *de Cauchy* o *de Euler*. Es una ecuación lineal y homogénea con coeficientes no constantes. Existen muy pocas ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes no constantes que podamos resolver fácilmente. La ecuación anterior es una de ellas. La forma más sencilla de resolverla es observar que para el operador diferencial lineal de esa ecuación, cualquier potencia  $R(r) = r^p$  se reproduce a sí misma<sup>1</sup>. Sustituyendo ahora  $R(r) = r^p$  en la ecuación

<sup>1</sup>Para los operadores lineales con coeficientes constantes, las exponenciales se reproducen a sí mismas.

de Euler, obtenemos  $(p(p-1) + p - n^2)r^p = 0$ . Por tanto, existen normalmente dos soluciones distintas,

$$p = \pm n,$$

excepto cuando  $n = 0$ , en cuyo caso solo hay una solución independiente de la forma  $r^p$ . Para  $n \neq 0$ , la solución general es:

$$R(r) = R_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}.$$

Para  $n = 0$  (y este caso es importante porque  $\lambda = 0$  es un autovalor en este problema), basta con integrar la ecuación resultante,

$$r(rR''(r) + R'(r)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{R''(r)}{R'(r)} = -\frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad R'(r) = \frac{d_0}{r},$$

cuya solución es  $R(r) = R_0(r) = c_0 + d_0 \ln r$ . Por conveniencia, escribimos:

$$R_0(r) = c_0 + d_0 \ln \left( \frac{r}{a} \right) \quad \text{si } n = 0,$$

$$R_n(r) = c_n \left( \frac{r}{a} \right)^n + d_n \left( \frac{r}{a} \right)^{-n} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

Para el problema de Dirichlet en un círculo, la solución debe estar acotada en 0 y, en particular, las funciones  $R_n(r)$ . Así, tomamos  $d_n = 0$ , para todo  $n \geq 0$ , puesto que  $\left(\frac{r}{a}\right)^{-n}$  y  $\ln\left(\frac{r}{a}\right)$  no están acotadas cuando  $r = 0$ . (Otras elecciones de las constantes serán necesarias para el problema de Dirichlet fuera del círculo o en una corona.) Por tanto,

$$R_n(r) = c_n \left( \frac{r}{a} \right)^n, \quad n \geq 0.$$

En consecuencia, llegamos a las soluciones particulares

$$u_0(r, \theta) = a_0,$$

$$u_n(r, \theta) = \left( \frac{r}{a} \right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta), \quad n \in \mathbb{N},$$

y, utilizando el principio de superposición, obtenemos una solución formal de la forma:

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{r}{a} \right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta). \quad (8.7)$$

Teniendo en cuenta ahora

$$f(\theta) = u(a, \theta) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta),$$

podemos identificar los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  como los coeficientes de Fourier de la función  $2\pi$ -periódica  $f(\theta)$  y así

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como la solución (8.7) da la temperatura estacionaria de los puntos interiores del disco, tomando  $r = 0$  en (8.7), obtenemos  $a_0$  como la temperatura del centro. Ahora,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

muestra que la temperatura del centro es igual al valor promedio de la temperatura del contorno.

**Ejemplo 8.6.** (Problema de Dirichlet en un círculo.) Encuéntrese la distribución de temperatura estacionaria en un círculo de radio 1 si la mitad superior de la circunferencia está a  $100^\circ$  centígrados y la mitad inferior a  $0^\circ$  centígrados.

Los valores de contorno se describen mediante la función:

$$u(1, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} 100 & \text{si } 0 < \theta < \pi, \\ 0 & \text{si } \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Según lo visto anteriormente, tenemos

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 100 d\theta = 50,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 100 \cos n\theta d\theta = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 100 \sin n\theta d\theta = \frac{100}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{200}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Y, por tanto, la temperatura estacionaria es:

$$u(r, \theta) = 50 + \frac{200}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{r^{2n-1}}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)\theta.$$

Si  $r = 0$ , vemos que la temperatura en el centro es 50, que corresponde con el promedio de la temperatura de la frontera del círculo.

Si  $r = 1$ , la temperatura sobre la frontera del círculo es:

$$u(1, \theta) = 50 + \frac{200}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)\theta.$$

De acuerdo con los valores de contorno dados, la serie anterior debería representar la función  $f(\theta)$ . De hecho, la serie anterior es la serie de Fourier de  $f(\theta)$ .

En el eje  $X$  ( $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$ , debe salir lo mismo), la temperatura es constante:  $u(r, 0) = u(r, \pi) = 50$ .

En el eje  $Y$  (por ejemplo,  $\theta = \pi/2$ ), la temperatura es:

$$u(r, \pi/2) = 50 + \frac{200}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{r^{2n-1}}{2n-1} \underbrace{\operatorname{sen}\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}_{(-1)^{n+1}} = 50 + \frac{200}{\pi} \arctan r,$$

que ya no es constante (intuitivamente se ve). Si  $\theta = 3\pi/2$ , la temperatura es:

$$u(r, 3\pi/2) = 50 - \frac{200}{\pi} \arctan r. \quad \blacktriangleleft$$

Para convertir la solución del ejemplo anterior a coordenadas cartesianas, nos ayudamos de la fórmula

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} r^n \operatorname{sen} n\theta = \arctan \left( \frac{r \operatorname{sen} \theta}{1 - r \cos \theta} \right), \quad (8.8)$$

que es válida para  $0 < r < 1$  y todo  $\theta$ . Obtenemos dicha fórmula en el apéndice que aparece posteriormente en este capítulo.

**Ejemplo 8.7.** (Conversión a coordenadas cartesianas.) Para escribir en coordenadas cartesianas la solución del ejemplo anterior, reescribimos primero la solución como

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= 50 + \frac{100}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (1 - \cos n\pi) r^n \operatorname{sen} n\theta \\ &= 50 + \frac{100}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} r^n \operatorname{sen} n\theta - \frac{100}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\pi}{n} r^n \operatorname{sen} n\theta. \end{aligned}$$

A partir de (8.8), tenemos para el primer sumatorio

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} r^n \operatorname{sen} n\theta = \arctan \left( \frac{r \operatorname{sen} \theta}{1 - r \cos \theta} \right) = \arctan \left( \frac{y}{1 - x} \right)$$

y para el segundo, teniendo en cuenta previamente que  $\cos n\pi \operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen} n(\theta - \pi)$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} r^n \cos n\pi \operatorname{sen} n\theta &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} r^n \operatorname{sen} n(\theta - \pi) = \arctan \left( \frac{r \operatorname{sen}(\theta - \pi)}{1 - r \cos(\theta - \pi)} \right) \\ &= \arctan \left( \frac{-r \operatorname{sen} \theta}{1 + r \cos \theta} \right) = -\arctan \left( \frac{r \operatorname{sen} \theta}{1 + r \cos \theta} \right) \\ &= -\arctan \left( \frac{y}{1 + x} \right), \end{aligned}$$

sin más que utilizar las identidades  $\operatorname{sen}(\theta - \pi) = -\operatorname{sen} \theta$ ,  $\cos(\theta - \pi) = -\cos \theta$  y  $\arctan(-\alpha) = -\arctan \alpha$ . En consecuencia, la solución del ejemplo anterior en coordenadas cartesianas es

$$u(x, y) = 50 + \frac{100}{\pi} \left( \arctan \left( \frac{y}{1 - x} \right) + \arctan \left( \frac{y}{1 + x} \right) \right). \quad \blacktriangleleft$$

Cuando tratamos con problemas estacionarios, a menudo estamos interesados en determinar los puntos que tienen la misma temperatura. Estos puntos están en *curvas* llamadas *isotermas*. A continuación ilustramos esta idea encontrando las isotermas de la solución del ejemplo anterior.

**Ejemplo 8.8.** (Isotermas.) Dos isotermas extremas son fácilmente localizables en el ejemplo anterior: la semicircunferencia superior con temperatura  $100^\circ$  centígrados y la semicircunferencia inferior con temperatura  $0^\circ$  centígrados. La temperatura de todas las otras isotermas está claramente entre estos dos valores. Por tanto, el resto de isotermas están dadas por  $u(x, y) = T$ , con  $0 < T < 100$ . Así,

$$T = u(x, y) = 50 + \frac{100}{\pi} \left( \arctan \left( \frac{y}{1 - x} \right) + \arctan \left( \frac{y}{1 + x} \right) \right),$$

$$\arctan\left(\frac{y}{1-x}\right) + \arctan\left(\frac{y}{1+x}\right) = \frac{(T-50)\pi}{100}. \quad (8.9)$$

Si  $T = 50$ , el lado derecho de la igualdad anterior es 0, de manera que

$$\arctan\left(\frac{y}{1-x}\right) = -\arctan\left(\frac{y}{1+x}\right) = \arctan\left(\frac{-y}{1+x}\right).$$

Ahora, si

$$\frac{y}{1-x} = -\frac{y}{1+x} \Rightarrow y(1+x) = y(x-1) \Rightarrow 2y = 0,$$

y la solución es  $y = 0$  ( $x$  es arbitrario), que corresponde a los puntos del eje  $X$ .

Si  $T \neq 50$ , aplicamos la tangente a ambos lados de la igualdad (8.9), utilizamos la identidad

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

obtenemos

$$\frac{\frac{y}{1-x} + \frac{y}{1+x}}{1 - \left(\frac{y}{1-x}\right)\left(\frac{y}{1+x}\right)} = \tan\left(\frac{\pi T}{100} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\pi T}{100}\right)} = -\cot\left(\frac{\pi T}{100}\right)$$

y simplificamos para llegar a

$$x^2 + y^2 - 1 - 2y \tan\left(\frac{\pi T}{100}\right) = 0.$$

Completamos ahora cuadrados para reescribir la igualdad anterior como

$$x^2 + \left(y - \tan\left(\frac{\pi T}{100}\right)\right)^2 = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi T}{100}\right).$$

Luego, en este caso, las isotermas corresponden a arcos de circunferencias centradas en  $\left(0, \tan\left(\frac{\pi T}{100}\right)\right)$  y radio  $\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\pi T}{100}\right)} = \left|\sec\left(\frac{\pi T}{100}\right)\right|$ . La figura 8.2 muestra la isoterma  $T = 30$  y la figura 8.3 muestra varias isotermas más. ◀

### Apéndice: identidades notables de análisis complejo

En muchas situaciones interesantes la solución en serie del problema de Dirichlet se puede calcular de forma cerrada con la ayuda de la fórmula (8.8),

$$\sum_{n \geq 1} r^n \frac{\sen n\theta}{n} = \arctan\left(\frac{r \sen \theta}{1 - r \cos \theta}\right),$$

que es válida para  $0 < r < 1$  y todo  $\theta$ . Para obtener esta fórmula, podemos utilizar logaritmos complejos, tal y como vemos a continuación.

Sean  $z = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sen \theta) \in \mathbb{C}$ , tal que  $|z| < 1$ , y el desarrollo en serie

$$\text{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}, \quad \text{válido para } |z| < 1,$$

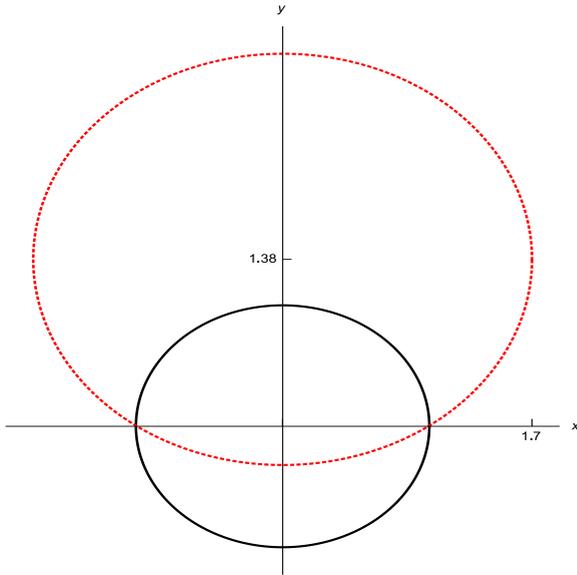


Figura 8.2: El círculo punteado es la isoterma  $u(r, \theta) = 30$  en el disco unidad (círculo continuo), cuyo centro es  $(0, \tan(\frac{3\pi}{10})) \approx (0, 1.38)$  y su radio  $\sec(\frac{3\pi}{10}) \approx 1.7$ .

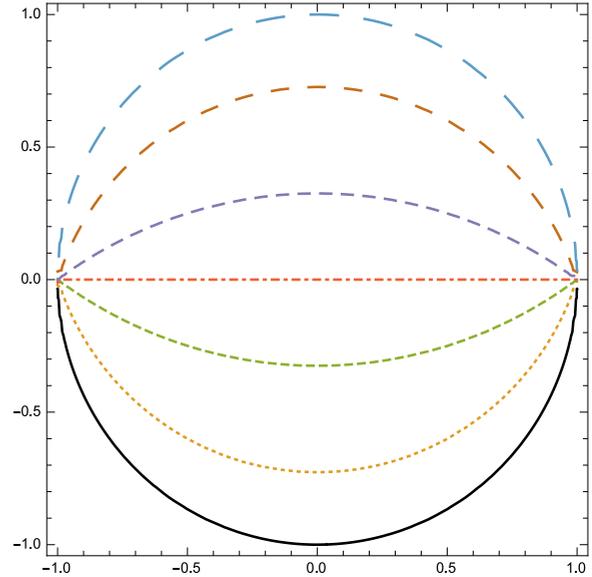


Figura 8.3: Varias isothermas en el círculo unidad. De abajo hacia arriba:  $u = 0$ ,  $u = 10$ ,  $u = 30$ ,  $u = 50$ ,  $u = 70$ ,  $u = 90$ ,  $u = 100$ .

donde  $\text{Log}$  denota la determinación principal del logaritmo. Entonces, calculamos las partes real e imaginaria. Para ello,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1-r\cos\theta) - ir\sin\theta} = \frac{(1-r\cos\theta) + ir\sin\theta}{(1-r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = \frac{(1-r\cos\theta) + ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \\ &= \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} + i \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \alpha + i\beta. \end{aligned}$$

Como  $\text{Log } z = \ln|z| + i\text{Arg } z$ , donde  $\text{Arg } z$  es el argumento principal de  $z$  (es decir,  $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$ ), tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right) &= \ln\left|\frac{1}{1-z}\right| + i\text{Arg}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \ln\left|\frac{1}{1-z}\right| + i\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \\ &= \ln\left|\frac{1}{1-z}\right| + i\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}\right). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Teniendo ahora en cuenta las fórmulas de Euler y de De Moivre, respectivamente

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{y} \quad (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

e igualando las partes imaginarias de (8.10) y

$$\begin{aligned} \text{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right) &= \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{r^n e^{in\theta}}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{n} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{r^n \cos n\theta}{n} + i \sum_{n \geq 1} \frac{r^n \sin n\theta}{n}, \end{aligned}$$

obtenemos la fórmula buscada (8.8).

Además, igualando las partes reales, también tenemos

$$\sum_{n \geq 1} \frac{r^n \cos n\theta}{n} = \ln \left| \frac{1}{1-z} \right| = \ln \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{2} \ln (\alpha^2 + \beta^2) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \right).$$

Si pasamos ahora ambas identidades a coordenadas rectangulares, teniendo en cuenta  $z = x + iy$ ,  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , llegamos a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{r^n \cos n\theta}{n} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} \right).$$

Otras identidades también útiles son:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} r^n \sin n\theta = \arctan \left( \frac{r \sin \theta}{1 + r \cos \theta} \right) = \arctan \left( \frac{y}{1+x} \right),$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} r^n \cos n\theta = \frac{1}{2} \ln (1 + 2r \cos \theta + r^2) = \frac{1}{2} \ln ((x+1)^2 + y^2),$$

que son válidas para  $0 \leq r < 1$  y todo  $0 \leq \theta < 2\pi$ , y se obtienen a partir de las partes real e imaginaria del desarrollo en serie

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad \text{válido para } |z| < 1.$$

### 8.4.2. Variación de la región y de las condiciones de contorno

Utilizando las ideas anteriores podemos resolver problemas sobre regiones planas distintas de círculos, tales como sectores circulares, anillos o una región exterior a un círculo. Estas regiones están convenientemente descritas en coordenadas polares. Además, podemos variar las condiciones de contorno y considerar condiciones de Neumann y de Robin. Recordemos que estas últimas involucran una combinación lineal de la función  $u$  y su derivada normal al contorno. En coordenadas polares, la derivada normal de  $u$  en puntos de una circunferencia centrada en el origen es simplemente la derivada parcial de  $u$  con respecto a  $r$  (figura 8.4). Entonces, para un contorno dado por una circunferencia centrada en el origen, una condición de Neumann determina  $u_r(r, \theta)$  y una condición de Robin determina  $u_r(r, \theta) + d(\theta)u(r, \theta)$ , donde  $d$  es una función de  $\theta$ .

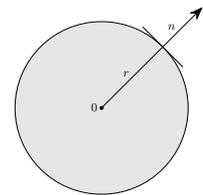
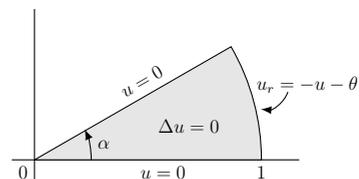


Figura 8.4: La derivada normal de  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , es  $\frac{\partial u}{\partial r}$ .

**Ejemplo 8.9.** (Una condición de Robin sobre un sector circular.) Resolvamos el siguiente problema de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta < \alpha, \\ u_r(1, \theta) = -u(1, \theta) - \theta, & 0 \leq \theta < \alpha, \\ u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, & 0 \leq r < 1. \end{cases}$$



Las condiciones de contorno representan un sector circular cuyos lados se mantienen a temperatura 0 a lo largo de los rayos  $\theta = 0$  y  $\theta = \alpha$  y el sector está intercambiando calor a lo largo del contorno circular dado por la condición de Robin  $u_r(1, \theta) = -u(1, \theta) - \theta$ .

Aplicando el método de separación de variables llegamos a las EDO:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \quad \text{y} \quad \Theta''(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0,$$

donde  $\lambda$  es la constante de separación. Las condiciones de contorno sobre los rayos  $\theta = 0$  y  $\theta = \alpha$  nos conducen a

$$\Theta(0) = \Theta(\alpha) = 0.$$

El problema de contorno en  $\Theta$  es un problema conocido ya resuelto anteriormente. Los autovalores y autofunciones son respectivamente:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 \quad \text{y} \quad \Theta_n(\theta) = \text{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia, la ecuación radial nos lleva a la ecuación de Euler

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 R(r) = 0.$$

La ecuación característica de esta ecuación de Euler es  $p^2 - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 = 0$ , cuyas raíces son  $p = \pm \frac{n\pi}{\alpha}$ . Luego, las soluciones acotadas para  $0 \leq r < 1$  son múltiplos constantes de  $R(r) = R_n(r) = r^{\frac{n\pi}{\alpha}}$ . Por tanto, las soluciones producto son de la forma

$$u_n(r, \theta) = r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \text{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

y, por el principio de superposición, obtenemos la solución formal

$$u(r, \theta) = \sum_{n \geq 1} b_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \text{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right), \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta < \alpha. \quad (8.11)$$

Se puede comprobar fácilmente que la solución formal anterior satisface las condiciones de contorno  $u(r, 0) = 0$  y  $u(r, \alpha) = 0$  para cualesquiera  $b_n$ .

A continuación, determinamos  $b_n$  a partir de la condición de Robin. Así,

$$u(1, \theta) = \sum_{n \geq 1} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right).$$

Derivando  $u(r, \theta)$  con respecto a  $r$ , obtenemos

$$u_r(r, \theta) = \sum_{n \geq 1} b_n \frac{n\pi}{\alpha} r^{\frac{n\pi}{\alpha}-1} \text{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right)$$

y sustituyendo  $r = 1$ ,

$$u_r(1, \theta) = \sum_{n \geq 1} b_n \frac{n\pi}{\alpha} \text{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right).$$

Por tanto, de  $u_r(1, \theta) = -u(1, \theta) - \theta$ , llegamos a

$$\sum_{n \geq 1} b_n \frac{n\pi}{\alpha} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) = - \sum_{n \geq 1} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) - \theta,$$

de manera que

$$-\theta = \sum_{n \geq 1} b_n \left( 1 + \frac{n\pi}{\alpha} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right), \quad 0 \leq \theta < \alpha.$$

Observamos ahora que tenemos un desarrollo en serie de Fourier senoidal de la función  $f(\theta) = -\theta$  en el intervalo  $(0, \alpha)$ , donde  $b_n \left( 1 + \frac{n\pi}{\alpha} \right)$  es el coeficiente del  $n$ -ésimo seno. Luego,

$$b_n \left( 1 + \frac{n\pi}{\alpha} \right) = -\frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \theta \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) d\theta$$

y haciendo la integral por partes, obtenemos

$$\int_0^\alpha \theta \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) d\theta = -\theta \left( \frac{\alpha}{n\pi} \right) \cos \left( \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\alpha} + \frac{\alpha}{n\pi} \int_0^\alpha \cos \left( \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) d\theta = \frac{\alpha^2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Por tanto,

$$b_n = \frac{2\alpha^2(-1)^n}{(\alpha + n\pi)n\pi}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sustituyendo ahora los coeficientes  $b_n$  en (8.11), obtenemos la solución formal del problema:

$$u(r, \theta) = \frac{2\alpha^2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(\alpha + n\pi)} r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right), \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta < \alpha. \quad \blacktriangleleft$$

## 8.5. Ejercicios

1. Compruébese que  $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  es una solución de la ecuación de Laplace tridimensional  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ . ¿Es cierto también que  $u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  es una solución de la ecuación de Laplace bidimensional  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ?
2. Resuélvase el problema de Dirichlet  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$  en el rectángulo de dimensiones  $a \times b$  en los siguientes casos:
  - a)  $a = 1; b = 2; u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0; u(x, b) = x$ .
  - b)  $a = b = 1; u(x, 0) = u(0, y) = 0; u(a, y) = u(x, b) = 100$ .
3. Calcúlese la solución del problema de Poisson  $\Delta u = -1$  en el cuadrado  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ , con  $u(x, 0) = u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, \pi) = 0$ .
4. Resuélvase el problema de Poisson  $\Delta u = f(x)$  en el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ , con  $u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = u(x, 1) = 0$  cuando  $f(x) = x$  y cuando  $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$ .

5. Utilícese el método del desarrollo en autofunciones para resolver el problema de Poisson  $\Delta u = u + 3$  en el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ , con  $u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = u(x, 1) = 0$ .
6. Resuélvase el problema de Poisson  $\Delta u = 2x \cos^2 y$  en el cuadrado  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ , con  $u_y(x, 0) = u(0, y) = u_y(x, \pi) = 0$ ,  $u(\pi, y) = 5 + \cos y$ .
7. Resuélvase el problema de Poisson  $\Delta u = y \cos x$  en  $[0, \pi] \times [0, 1]$ , con  $u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0$ .
8. Resuélvase el problema de Dirichlet en un círculo de radio 1 con las condiciones de contorno indicadas. Resuélvase el problema en coordenadas polares y, si es posible, escríbase la solución en coordenadas cartesianas.
  - a)  $u(1, \theta) = \cos \theta$  si  $0 < \theta < 2\pi$ .
  - b)  $u(1, \theta) = \sin 2\theta$  si  $0 < \theta < 2\pi$ .
  - c)  $u(1, \theta) = \frac{\pi - \theta}{2}$  si  $0 < \theta < 2\pi$ .
9. Resuélvase el problema  $\Delta u = r$ , con  $r < 2$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0$ ,  $u(2, \theta) = 3$ .
10. Resuélvase, para los valores de  $a$  que se pueda, el problema  $\Delta u = \cos^2 \theta - a$ , con  $r < 1$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0$ ,  $u_r(1, \theta) = 0$ .

# Capítulo 9

## Transformada de Fourier

La resolución de algunos problemas prácticos va más allá de la aplicación del método de separación de variables. Este es el caso, por ejemplo, cuando la variable espacio está definida en toda la recta real y, como consecuencia, no hay puntos de contorno. Esto puede conducirnos al problema de no tener un conjunto contable de autovalores. En tales situaciones, necesitamos emplear otras técnicas de resolución. Las *transformadas de Fourier*, desarrolladas a partir de las representaciones en series de Fourier de funciones, son particularmente útiles cuando tenemos regiones espaciales infinitas o semi-infinitas (dominios no acotados).

Los problemas físicos nunca se plantean en dominios no acotados, pero al introducir un modelo matemático con extensión infinita, podemos determinar el comportamiento de problemas en los que se espera que la influencia de la frontera sea despreciable.

Un tratamiento más riguroso de lo desarrollado en este capítulo puede encontrarse en [8, 20].

### 9.1. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier (en adelante, TF) se puede definir de diferentes formas, dependiendo de los autores. Nosotros la definimos como aparece a continuación.

**Definición 9.1.** Sea  $f(x)$  una función definida en  $\mathbb{R}$ . Su transformada de Fourier,  $\mathcal{F}(f)$  o  $F$ , es otra función definida por

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

**Consideraciones sobre la TF.** Algunas consideraciones a tener en cuenta a la hora de trabajar con TF.

1. ¡Cuidado! La definición no es universal y esto es algo a tener en cuenta dependiendo de la bibliografía utilizada. Podemos encontrar:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

y otras expresiones similares para la transformada de Fourier de  $f$ .

2. La TF involucra números complejos. Por ejemplo, la TF de la función real

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

es el número complejo  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)}$ , puesto que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x(1+i\omega)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-x(1+i\omega)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-x(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)} \right|_{x=0}^{x=M} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{e^{-M(1+i\omega)} - 1}{-(1+i\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)}. \end{aligned}$$

3. La TF no siempre existe. Por ejemplo, si  $f(x) = 1$ ,

$$\mathcal{F}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 dx = +\infty$$

y, para  $\omega \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right|_{x=-M}^{x=M} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{e^{-i\omega M} - e^{i\omega M}}{-i\omega} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\omega}} \lim_{M \rightarrow \infty} \text{sen}(\omega M). \end{aligned}$$

Como el último límite no existe, no podemos definir la TF de  $f(x) = 1$ .

4. Una condición suficiente para que la TF exista es que  $f$  sea integrable, es decir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

puesto que

$$|F(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-i\omega x}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ , ya que  $|e^{-i\omega x}| = 1$ .

**Ejemplo 9.2.** A continuación, obtenemos algunas fórmulas a partir de la definición de TF.

(a)  $f(x) = e^{-a|x|}$  con  $a > 0$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-i\omega x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 e^{ax} e^{-i\omega x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^0 e^{x(a-i\omega)} dx + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-x(a+i\omega)} dx \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{e^{x(a-i\omega)} \Big|_{x=-M}^{x=0}}{a-i\omega} + \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{e^{-x(a+i\omega)} \Big|_{x=0}^{x=M}}{-(a+i\omega)} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-M(a-i\omega)}}{a-i\omega} + \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-M(a+i\omega)}}{a+i\omega} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2}.
 \end{aligned}$$

(b)  $f(x) = 1$  si  $|x| \leq a$  y  $f(x) = 0$  si  $|x| > a$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \Big|_{x=-a}^{x=a} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \operatorname{sen}(\omega a)}{\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\omega a)}{\omega},
 \end{aligned}$$

para  $\omega \neq 0$ . Si  $\omega = 0$ ,  $\mathcal{F}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a dx = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a$ . ◀

Al igual que con las integrales, existen tablas con las TF más conocidas. En la sección 9.4 se encuentran algunas de ellas.

**Principales propiedades de la TF.** Las principales propiedades de la TF son las siguientes:

1. La TF es lineal. Si  $f$  y  $g$  son dos funciones integrables, entonces

$$\mathcal{F}(af + bg)(\omega) = a\mathcal{F}(f)(\omega) + b\mathcal{F}(g)(\omega), \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par, entonces  $\mathcal{F}(f)(\omega)$  es real y par.

3. Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  impar, entonces  $\mathcal{F}(f)(\omega)$  es impar e imaginaria pura.

4. *TF de las derivadas de una función.* Supongamos que  $f(x)$  es continua a trozos,  $f(x)$  y  $f'(x)$  son integrables y  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Entonces,

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega).$$

Si además  $f''(x)$  es integrable,  $f'(x)$  es continua a trozos y  $f'(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , entonces

$$\mathcal{F}(f'')(\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}(f)(\omega)$$

En general, si  $f(x)$  y  $f^{(k)}(x)$ , con  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , son continuas a trozos y tienden a 0 cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , y  $f(x)$  y sus derivadas de hasta orden  $n$  son integrables, entonces

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}(f)(\omega).$$

5. *Derivadas de la TF.* Si  $f(x)$  y  $xf(x)$  son integrables, entonces

$$i \frac{d\mathcal{F}(f)(\omega)}{d\omega} = \mathcal{F}(xf(x))(\omega).$$

En general, si  $f(x)$  y  $x^n f(x)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , son integrables, entonces

$$i^n \frac{d^n \mathcal{F}(f)(\omega)}{d\omega^n} = \mathcal{F}(x^n f(x))(\omega).$$

6. En las condiciones de la propiedad 4, se tiene:  $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) = 0$ .

**Convolución de funciones.** La TF tiene un comportamiento especialmente interesante respecto a la operación de funciones conocida como *convolución*. La convolución de dos funciones  $f$  y  $g$  definidas en todo  $\mathbb{R}$  es la función

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

Algunas observaciones:

1. De nuevo no hay unanimidad en la definición. El factor  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  es meramente por conveniencia.
2. La convolución representa en cierto sentido la magnitud en la que se superponen una función trasladada e invertida de  $f$  y  $g$ .
3. Es conmutativa, asociativa y distributiva respecto a la suma. Además,  $f*(cg) = c(f*g)$  con  $c \in \mathbb{C}$ .
4. No siempre está definida. Por ejemplo, si  $f(x) = g(x) = 1$ ,

$$(1 * 1)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 dt = +\infty, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

5. Si una función es integrable y la otra es acotada, entonces la convolución está definida.

No siempre es sencillo «anticipar» cuál será el resultado de una convolución. Como muestra, vemos algunos ejemplos en los que dibujamos las gráficas de las funciones implicadas y las de convolución.

**Ejemplo 9.3.** Sean  $f(x) = 1$  si  $|x| \leq 1$  y  $f(x) = 0$  si  $|x| > 1$ ,  $g(x) = 1$  y  $h(x) = \cos(ax)$ , con  $a \in \mathbb{R}$ . Calculamos  $f * g$ ,  $f * h$  y  $f * f$ .

A partir de  $f$  y  $g$  y la propiedad de la conmutatividad, resulta inmediato comprobar que

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \underbrace{g(x-t)}_1 dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 1 dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Tampoco es difícil ver que

$$\begin{aligned} (f * h)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(a(x-t))f(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \cos(a(x-t)) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(a(x-t))}{-a} \Big|_{t=-1}^{t=1} \\ &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} (\operatorname{sen}(a(x+1)) - \operatorname{sen}(a(x-1))) = \frac{2}{a\sqrt{2\pi}} \cos(ax) \operatorname{sen} a. \end{aligned}$$

Un poco más de trabajo requiere  $f * f$ ,

$$\begin{aligned} (f * f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 f(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -2, \\ 2+x, & \text{si } x \in [-2, 0], \\ 2-x, & \text{si } x \in [0, 2], \\ 0, & \text{si } x \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Observamos que  $f * f$  es continua, aunque  $f$  no lo sea. Véase la figura 9.1. ◀

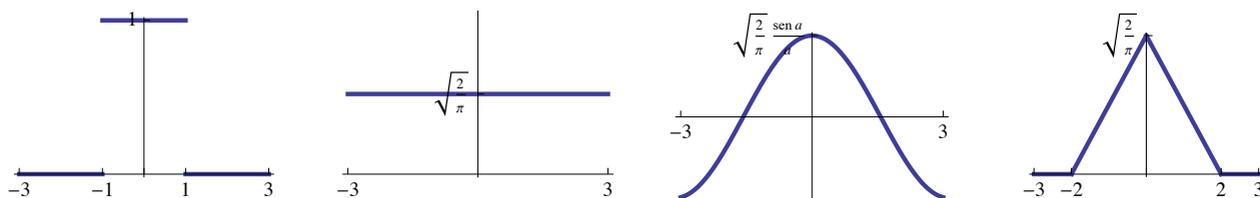


Figura 9.1: Gráficas de  $f$ ,  $f * g$ ,  $f * h$  y  $f * f$ , respectivamente, del ejemplo 9.3.

**Teorema 9.4.** (Transformada de Fourier de una convolución, [8].) *Si  $f$  y  $g$  son integrables, entonces*

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega).$$

**La transformada inversa de Fourier.** A continuación, presentamos la transformada inversa de Fourier.

**Teorema 9.5.** (Teorema de inversión de Fourier, [20].) *Supongamos que  $f$  es de clase  $C^1$  a trozos en cada intervalo de  $\mathbb{R}$  e integrable en  $\mathbb{R}$ . Entonces,*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Este resultado motiva la siguiente definición.

**Definición 9.6.** La transformada inversa de Fourier de una función  $G(\omega)$  definida para  $\omega \in \mathbb{R}$  es otra función denotada por  $\mathcal{F}^{-1}(G)$  y definida por

$$\mathcal{F}^{-1}(G)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Una consecuencia importante del teorema de inversión de Fourier es que, para una función  $f$  continua e integrable en  $\mathbb{R}$  y tal que  $f'$  es continua a trozos en cada intervalo de  $\mathbb{R}$ , se cumple:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f)(x) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(f)(\omega) &= f(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 9.7.** (TF de una convolución.) Dada la función  $f$  del ejemplo anterior, veamos que también podemos calcular la convolución  $f * f$  a partir de la TF de una convolución y de la transformada inversa de Fourier.

A partir de la TF de una convolución y teniendo en cuenta  $F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen } \omega}{\omega}$  (visto con anterioridad), obtenemos

$$\mathcal{F}(f * f)(\omega) = F(\omega)^2 = \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen } \omega}{\omega} \right)^2 = \frac{2 \text{sen}^2 \omega}{\pi \omega^2} = G(\omega).$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier, tenemos, por la propiedad 6 de la tabla de TF dada en la sección 9.4,

$$(f * f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(G)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{cases} 1 - |x|/2, & \text{si } |x| < 2, \\ 0, & \text{si } |x| \geq 2, \end{cases}$$

que coincide con la calculada anteriormente. ◀

**La función gaussiana.** Finalizamos esta introducción a las TF con un ejemplo importante por sus aplicaciones a la hora de resolver EDP: la función gaussiana, que juega un papel importante en la solución de la ecuación del calor.

Veamos que la TF de la función gaussiana  $f(x) = e^{-ax^2/2}$ , con  $a > 0$ , es

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{2a}}.$$

Observamos que también es una gaussiana.

Lo comprobamos de forma indirecta basándonos en algunas propiedades de la TF. A simple vista podemos ver que  $f(x)$  satisface la EDO lineal de primer orden

$$f'(x) + axf(x) = 0.$$

Tomando TF, obtenemos

$$0 = \mathcal{F}(f'(x))(\omega) + a\mathcal{F}(xf(x))(\omega) = i(\omega F(\omega) + aF'(\omega)),$$

de manera que  $F(\omega)$  satisface una EDO lineal de primer orden similar, cuya solución es

$$F(\omega) = A e^{-\frac{\omega^2}{2a}}, \quad A = \text{constante.}$$

Para determinar la constante  $A$ , hacemos

$$A = F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

sin más que hacer el cambio de variable  $z = x\sqrt{\frac{a}{2}}$  y tener en cuenta la conocida integral impropia  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ . Por lo tanto,  $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$ .

Observamos que si  $a = 1$ , obtenemos  $F(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$  y  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ , de manera que  $f(x)$  es su propia TF.

## 9.2. Aplicaciones de la transformada de Fourier a las EDP

Las EDP que nos hemos encontrado hasta ahora estaban definidas sobre dominios acotados y sus soluciones dependían esencialmente de las condiciones de contorno. Mediante las TF podemos analizar problemas que son no acotados al menos en una dirección, de manera que nos permiten resolver problemas infinitos o semiinfinitos.

A continuación supondremos que  $u(x, t)$  es una función de dos variables  $x$  y  $t$  tales que  $-\infty < x < \infty$  y  $t > 0$ . Como  $u(x, t)$  depende de dos variables, tenemos que identificar la variable respecto de la cual vamos a calcular la TF. Así, si fijamos  $t$ , podemos calcular la TF con respecto a la otra variable, obteniendo

$$\mathcal{F}(u(x, t))(\omega) = U(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx.$$

A partir de ahora, supondremos que todas las funciones que aparecen tienen las propiedades suficientes para poder realizar los cálculos que se llevan a cabo.

En líneas generales, la estrategia a seguir consta de tres pasos:

1. Aplicamos la TF a una EDP en  $u(x, t)$  para transformarla en una EDO en  $U(\omega, t)$  de variable  $t$ ,
2. Resolvemos la EDO para encontrar  $U(\omega, t)$ ,
3. Calculamos la transformada inversa de Fourier de  $U(\omega, t)$  para obtener  $u(x, t)$ .

### La ecuación de ondas para una cuerda infinita

Hemos visto el problema de la cuerda vibrante en un intervalo acotado,  $x \in [0, \ell]$ . Estudiamos ahora el problema de la cuerda vibrante en un intervalo no acotado,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

Consideramos entonces el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{(desplazamiento inicial),} \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{(velocidad inicial).} \end{cases}$$

Fijamos  $t$  y calculamos la TF con respecto a  $x$ . Así,

$$\mathcal{F}(u(x, t))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx = U(\omega, t).$$

Aplicando las propiedades de la TF y teniendo en cuenta que

$$\mathcal{F}(u_t(x, t))(\omega) = \frac{dU(\omega, t)}{dt}, \quad \mathcal{F}(u_{tt}(x, t))(\omega) = \frac{d^2U(\omega, t)}{dt^2},$$

el problema anterior se transforma en

$$\begin{cases} U_{tt}(\omega, t) + \alpha^2 \omega^2 U(\omega, t) = 0, \\ U(\omega, 0) = F(\omega), \\ U_t(\omega, 0) = G(\omega). \end{cases}$$

La EDO es lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes y su solución general es

$$U(\omega, t) = A(\omega) \cos(\alpha \omega t) + B(\omega) \operatorname{sen}(\alpha \omega t),$$

donde  $A(\omega)$  y  $B(\omega)$  son constantes en  $t$ . (Notemos que  $A$  y  $B$  son constantes en  $t$ , pero pueden depender de  $\omega$ , lo que se explica escribiendo  $A(\omega)$  y  $B(\omega)$ .) Ahora, determinamos  $A(\omega)$  y  $B(\omega)$  a partir de las condiciones iniciales

$$F(\omega) = U(\omega, 0) = A(\omega), \quad G(\omega) = U_t(\omega, 0) = \alpha \omega B(\omega).$$

Luego,

$$U(\omega, t) = F(\omega) \cos(\alpha \omega t) + \frac{G(\omega)}{\alpha \omega} \operatorname{sen}(\alpha \omega t).$$

Para obtener la solución del problema de la ecuación de ondas, aplicamos la transformada inversa de Fourier

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( F(\omega) \cos(\alpha \omega t) + \frac{G(\omega)}{\alpha \omega} \operatorname{sen}(\alpha \omega t) \right) e^{i\omega x} d\omega. \end{aligned}$$

El método de la TF da buenos resultados en una gran variedad de EDP, pero también tiene sus limitaciones, puesto que se supone que las funciones involucradas en los problemas y sus soluciones tienen TF. Sin embargo, el método va más allá de estas limitaciones, ya que también ofrece oportunidades, tal y como vemos a continuación.

Para simplificar la fórmula anterior, que nos da la solución de la ecuación de ondas en la forma de una transformada inversa de Fourier, consideramos  $g(x) = 0$ . Entonces,  $G(\omega) = 0$  y

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cos(\alpha \omega t) e^{i\omega x} d\omega.$$

Luego,  $u(x, t)$  es la transformada inversa de Fourier de  $F(\omega) \cos(\alpha \omega t)$ .

Además, por la propiedad del desplazamiento de la TF, tenemos

$$\mathcal{F}^{-1} \left( F(\omega) e^{i\omega a} \right) (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega(x+a)} d\omega = \mathcal{F}^{-1} (F) (x + a) = f(x + a).$$

Análogamente,

$$\mathcal{F}^{-1} \left( F(\omega) e^{-i\omega a} \right) (x) = f(x - a).$$

Por tanto,

$$\mathcal{F}^{-1} (F(\omega) \cos(a\omega)) (x) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{e^{i\omega a} F(\omega) + e^{-i\omega a} F(\omega)}{2} \right) = \frac{1}{2} (f(x + a) + f(x - a)).$$

Y, en consecuencia,

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1} (F(\omega) \cos(\alpha \omega t)) (x) = \frac{1}{2} (f(x + \alpha t) + f(x - \alpha t)).$$

Observamos que obtenemos la solución de D'Alembert de la ecuación de ondas para una cuerda de dimensión finita. (Notemos que la solución tiene sentido incluso si  $f$  no tiene TF aunque en el proceso se haya utilizado su existencia.) Por tanto, aunque el método de la TF requiere la existencia de la TF de  $f$ , la solución que obtenemos se puede aplicar en situaciones mucho más generales.

**Ejemplo 9.8.** Aplicamos la TF para encontrar una representación integral de la solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-x^2/2}, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Tomando TF a ambos lados de la EDP con respecto a  $x$ , obtenemos

$$U_{tt}(\omega, t) + (1 + \alpha^2 \omega^2) U(\omega, t) = 0,$$

que es una EDO lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes y solución general

$$U(\omega, t) = A(\omega) \cos \left( \sqrt{1 + \alpha^2 \omega^2} t \right) + B(\omega) \sen \left( \sqrt{1 + \alpha^2 \omega^2} t \right),$$

donde  $A(\omega)$  y  $B(\omega)$  son constantes en  $t$ . Además,

$$U_t(\omega, t) = \sqrt{1 + \alpha^2 \omega^2} \left( -A(\omega) \sen \left( \sqrt{1 + \alpha^2 \omega^2} t \right) + B(\omega) \cos \left( \sqrt{1 + \alpha^2 \omega^2} t \right) \right).$$

Utilizando las condiciones iniciales y la propiedad 12 de la tabla de TF dada en la sección 9.4, vemos que

$$A(\omega) = U(\omega, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\omega x} dx = e^{-\omega^2/2},$$

$$\sqrt{1 + \alpha^2\omega^2} B(\omega) = U_t(\omega, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x, 0) e^{-i\omega x} dx = 0.$$

Luego,  $A(\omega) = e^{-\omega^2/2}$ ,  $B(\omega) = 0$  y

$$U(\omega, t) = e^{-\omega^2/2} \cos(\sqrt{1 + \alpha^2\omega^2}t).$$

A continuación, aplicamos la transformada inversa de Fourier y obtenemos la representación integral

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\omega^2/2} \cos(\sqrt{1 + \alpha^2\omega^2}t) \cos(\omega x) d\omega,$$

puesto que  $U(\omega, t)$  es una función par de  $\omega$ , como solución del problema. ◀

Notemos que el método de la TF puede que no sea aplicable. Por ejemplo, si consideramos el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

no podemos aplicar la TF a ambos lados de la EDP con respecto a  $x$ , puesto que la TF de la función  $x$  no existe, así como tampoco la de  $x^2$ .

### La ecuación del calor en una varilla infinita

Veamos ahora cómo utilizar la TF para resolver la ecuación del calor en toda la recta. Así, consideramos

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{(distribución inicial de temperatura)}. \end{cases}$$

Fijamos  $t$  y calculamos la TF con respecto a  $x$ ,

$$\mathcal{F}(u(x, t))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx = U(\omega, t).$$

Aplicando ahora las propiedades de la TF, el problema anterior se transforma en

$$\begin{cases} U_t(\omega, t) + \beta\omega^2 U(\omega, t) = 0, \\ U(\omega, 0) = F(\omega). \end{cases}$$

La solución general de la EDO del problema anterior es

$$U(\omega, t) = A(\omega) e^{-\beta\omega^2 t},$$

donde  $A(\omega)$  es constante en  $t$ . A continuación, determinamos  $A(\omega)$  a partir de la condición inicial,  $F(\omega) = U(\omega, 0) = A(\omega)$ , de manera que

$$U(\omega, t) = F(\omega) e^{-\beta\omega^2 t}.$$

A continuación, aplicamos la transformada inversa de Fourier y obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \underbrace{e^{-\beta\omega^2 t}}_{H(\omega)} e^{i\omega x} d\omega = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)H(\omega))(x) = (f * h)(x).$$

Tenemos entonces que determinar  $h(x)$ . A partir de la propiedad 12 de la tabla de TF dada en la sección 9.4, vemos que

$$\mathcal{F}^{-1}(H(\omega))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\beta t}} e^{-\frac{x^2}{4\beta t}} = h(x),$$

función que se conoce como *núcleo de Gauss* o *núcleo del calor*. En consecuencia,

$$u(x, t) = (f * h)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)h(x-s) ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\beta t}} ds.$$

Observamos que esta solución muestra claramente la dependencia que tiene la solución de la distribución inicial de temperaturas,  $u(x, 0) = f(x)$ , donde todos los valores de la temperatura inicial «influyen» en la temperatura en un tiempo  $t$ .

La solución anterior tiene una bonita interpretación como una superposición (integral) continua de contribuciones  $\frac{1}{2\sqrt{\pi\beta t}} f(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\beta t}}$  (debido a fuentes de calor en varios puntos  $s$ ) a la temperatura  $u(x, t)$  en  $x$  en el tiempo  $t$ . Los perfiles de estas contribuciones debido a un punto fijo  $s$  en varios tiempos  $t$  se ilustra en la figura 9.2. El área debajo de cada una de estas «curvas gaussianas» es  $f(s)$  (se asume que es positivo aquí) y la altura máxima es  $\frac{1}{2\sqrt{\pi\beta t}} f(s)$ . A medida que  $t$  aumenta, la influencia de la temperatura inicial  $f(s)$  en  $x = s$  se extiende.

Finalmente, veamos que se cumple la condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$ . Alternativamente, vemos que  $\lim_{t \rightarrow 0} (f * h)(x) = f(x)$ . Notemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} U(\omega, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{F}(f * h)(\omega) = \lim_{t \rightarrow 0} F(\omega)H(\omega) = F(\omega) \lim_{t \rightarrow 0} H(\omega) = F(\omega) \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\beta\omega^2 t} = F(\omega).$$

Ahora tomamos la transformada inversa de Fourier para obtener

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\lim_{t \rightarrow 0} U(\omega, t)\right)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)H(\omega))(x) = \left(f * \mathcal{F}^{-1}\left(\lim_{t \rightarrow 0} H(\omega)\right)\right)(x) = f(x).$$

**Ejemplo 9.9.** Podemos utilizar la solución obtenida anteriormente para estudiar cómo se difunde la energía térmica de una varilla que inicialmente está concentrada en su parte derecha con

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 100, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

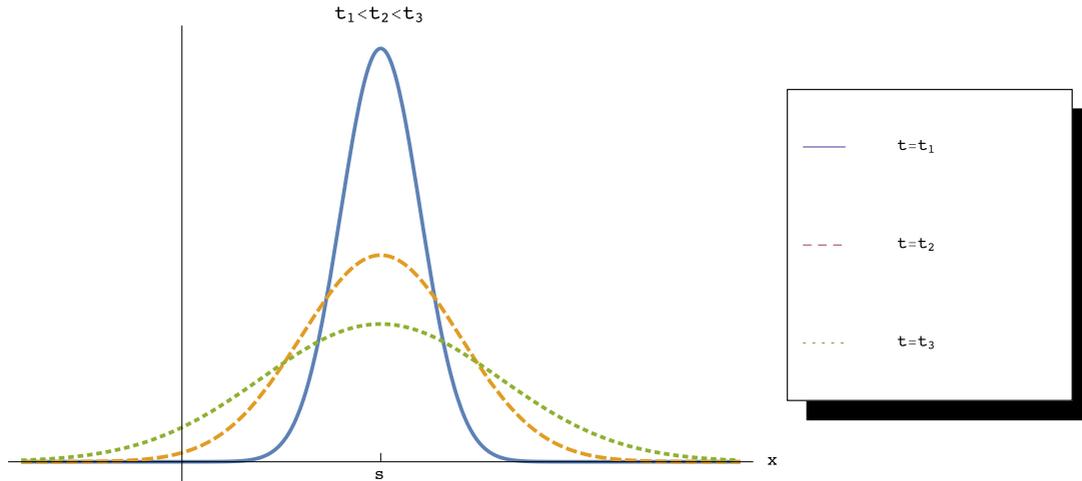


Figura 9.2: Gráficas de  $\frac{1}{2\sqrt{\pi\beta t}} f(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\beta t}}$ .

En este caso, la temperatura es

$$u(x, t) = \frac{50}{\sqrt{\pi\beta t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\beta t}} ds = \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-x}{2\sqrt{\beta t}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz,$$

que representa el área bajo una curva gaussiana. Como  $e^{-z^2}$  es par,

$$\int_{\frac{-x}{2\sqrt{\beta t}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz + \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\beta t}}} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\beta t}}} e^{-z^2} dz.$$

Luego,

$$u(x, t) = 50 + \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\beta t}}} e^{-z^2} dz.$$

El área bajo la curva gaussiana se puede calcular numéricamente. Podemos expresar la solución en términos de la *función error*,  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ , o de la *función error complementaria*,  $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(z)$ . Así,

$$u(x, t) = 50 \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\beta t}} \right) \right) = 50 \left( 2 - \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\beta t}} \right) \right). \quad \blacktriangleleft$$

### La ecuación de Laplace en un semiplano

Veamos ahora cuál es la solución del problema de Dirichlet en un semiplano,

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad y > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{(valores de contorno)}. \end{cases}$$

Fijamos  $y$  y calculamos la TF con respecto a  $x$ ,

$$\mathcal{F}(u(x, y))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{-i\omega x} dx = U(\omega, y),$$

de manera que el problema inicial se transforma en

$$\begin{cases} U_{yy}(\omega, y) - \omega^2 U(\omega, y) = 0, \\ U(\omega, 0) = F(\omega). \end{cases}$$

La solución general de la EDO es

$$U(\omega, y) = A(\omega) e^{\omega y} + B(\omega) e^{-\omega y},$$

donde  $A(\omega)$  y  $B(\omega)$  son constantes en  $y$ .

Si buscamos soluciones  $u(x, y)$  acotadas cuando  $y \rightarrow \infty$ , también debe estarlo  $U(\omega, y)$ . Así,  $A(\omega) = 0$  si  $\omega > 0$  y  $B(\omega) = 0$  si  $\omega < 0$ . Podemos entonces escribir

$$U(\omega, y) = C(\omega) e^{-|\omega|y}.$$

Además, como  $U(\omega, 0) = F(\omega)$ , entonces  $C(\omega) = F(\omega)$  y, en consecuencia,

$$U(\omega, y) = F(\omega) e^{-|\omega|y}.$$

A continuación, aplicamos la transformada inversa de Fourier

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)G(\omega))(x) = (f * g)(x),$$

donde  $g(x) = \mathcal{F}^{-1}(G(\omega))(x)$  y  $G(\omega) = e^{-|\omega|y}$ . Por la propiedad 7 de la tabla de TF dada en la sección 9.4, tenemos

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\omega|y})(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} = g(x),$$

función que se conoce como *núcleo de Poisson*. Finalmente, obtenemos la solución

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s) ds = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{(x-s)^2 + y^2} ds. \quad (9.1)$$

En general, la solución del anterior problema de Dirichlet no es única. Por ejemplo, si consideramos la función  $v(x, y) = Cy$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , vemos que  $v(x, y)$  satisface  $\Delta u = 0$  y es igual a cero en el eje  $x$ . Luego, si  $u(x, y)$  es una solución del anterior problema de Dirichlet, la función  $u(x, y) + Cy$  también lo es. Por tanto, la solución del problema no es única. Lo que está ocurriendo es que no hemos puesto suficientes condiciones al problema para garantizar la unicidad de solución. Para evitar este problema, se suelen exigir condiciones adicionales al problema, como por ejemplo que la solución esté acotada cuando  $y \rightarrow \infty$ . En este caso, el problema resultante, tal y como hemos visto, tiene una única solución, la dada por (9.1), siempre que la función  $f$  que aparece en la condición de contorno esté acotada.

**Ejemplo 9.10.** Se obtiene una solución sencilla, pero interesante, si

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Esta condición de contorno corresponde al caso de una placa calentada uniformemente a dos temperaturas diferentes. Calculamos la distribución de temperaturas en equilibrio para  $y > 0$ . A partir de (9.1), obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{y}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(x-s)^2 + y^2} = -\frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{x-s}{y} \right) \Big|_{s=0}^{s=+\infty} \\ &= -\frac{1}{\pi} \left( \arctan(-\infty) - \arctan \left( \frac{x}{y} \right) \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \left( \frac{x}{y} \right) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{x}{y} \right). \end{aligned}$$

Hay que tener cuidado a la hora de evaluar la arcotangente sobre una rama continua. Si introducimos el ángulo  $\theta$  desde el eje de ordenadas de manera que  $x = r \sin \theta$  e  $y = r \cos \theta$  (coordenadas polares rotadas), entonces  $\theta = \arctan \left( \frac{x}{y} \right) \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ , al ser  $y > 0$ , y la distribución de temperaturas se puede escribir como

$$u(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{\theta}{\pi}, \quad \text{con } \theta \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad (9.2)$$

que presenta un comportamiento radial de la temperatura.

Podemos comprobar la solución anterior de forma independiente. Para ello, consideramos el problema en coordenadas polares rotadas. La ecuación de Laplace es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

y las condiciones de contorno son  $u \left( r, \frac{\pi}{2} \right) = 1$  y  $u \left( r, -\frac{\pi}{2} \right) = 0$ . Como la solución depende solo del ángulo, entonces  $u(r, \theta) = u(\theta)$  y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad u \left( \frac{\pi}{2} \right) = 1, \quad u \left( -\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

que corrobora la solución (9.2). ◀

### 9.3. Transformadas de Fourier en coseno y en seno

Introducimos las series de Fourier para resolver problemas de EDP en un intervalo acotado  $x \in [-\ell, \ell]$  con condiciones de contorno periódicas. Acabamos de ver que podemos utilizar la TF en el caso de un intervalo no acotado  $x \in (-\infty, +\infty)$ . En esta sección, bosquejamos cómo resolver problemas de EDP en un intervalo semiacotado  $x \in (0, +\infty)$ . La cuestión básica es cómo utilizar la TF cuando la función  $f(x)$  está definida solo para  $x > 0$ . Después de lo visto hasta ahora, es fácil imaginar que la respuesta conlleva extensiones pares e impares no periódicas de  $f(x)$ . Para dominios semiacotados, las TF en coseno y TF en seno son particularmente apropiadas para resolver problemas de EDP.

Por conveniencia, introducimos las TF en coseno y seno de  $f$ , respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c(f)(\omega) &= F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx, \quad \omega \geq 0, \\ \mathcal{F}_s(f)(\omega) &= F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx, \quad \omega \geq 0, \end{aligned}$$

cuyas transformadas inversas son respectivamente

$$\mathcal{F}_c^{-1}(F_c)(x) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos(\omega x) d\omega, \quad x \geq 0,$$

$$\mathcal{F}_s^{-1}(F_s)(x) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \operatorname{sen}(\omega x) d\omega, \quad x \geq 0.$$

Observamos que las TF en coseno y seno son las mismas que las transformadas inversas de Fourier en coseno y en seno.

Como el dominio es  $x \geq 0$ , las funciones dejan de tener significado físico para  $x < 0$ . Entonces, podemos definir estas funciones como queramos para  $x < 0$ . En particular, consideramos la extensión par a  $x < 0$  de  $f(x)$  en el caso de la TF en coseno y la extensión impar a  $x < 0$  de  $f(x)$  en el caso de la TF en seno.

Hemos visto que las TF de las derivadas de una función y las derivadas de la TF eran fundamentales en la resolución de problemas de EDP. Mostramos a continuación resultados análogos para las TF en coseno y en seno. Así,

(a) *Transformadas de las derivadas.* Si  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces

$$\mathcal{F}_c(f'(x))(\omega) = \omega F_s(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0),$$

$$\mathcal{F}_s(f'(x))(\omega) = -\omega F_c(\omega).$$

Además, si  $f'(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces

$$\mathcal{F}_c(f''(x))(\omega) = -\omega^2 F_c(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0),$$

$$\mathcal{F}_s(f''(x))(\omega) = -\omega^2 F_s(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f(0).$$

(b) *Derivadas de las transformadas:*

$$\mathcal{F}_c(xf(x))(\omega) = \frac{d}{d\omega} F_s(\omega),$$

$$\mathcal{F}_s(xf(x))(\omega) = -\frac{d}{d\omega} F_c(\omega).$$

A partir de las expresiones anteriores, deducimos una importante consecuencia. Si queremos utilizar la TF en coseno para resolver un problema de EDP que contiene una derivada segunda y está definida en un intervalo semi-infinito, debemos conocer  $f'(0)$ . Por otra parte, podemos utilizar la TF en seno si se conoce  $f(0)$ .

A la hora de resolver problemas de EDP en intervalos semi-infinitos o en regiones no acotadas en el plano, como semiplanos, cuartos de planos o bandas, utilizaremos las TF en coseno y en seno en vez de la TF. El método de resolución es completamente análogo al de la TF. En la sección 9.4 podemos encontrar una pequeña tabla con TF en coseno y en seno.

La elección de la transformada apropiada es crucial en la aplicación del método. Esta elección viene sugerida por el tipo de región y las condiciones de contorno.

**Ejemplo 9.11.** (La ecuación del calor en una varilla semi-infinita.) El problema de difusión del calor en una varilla semi-infinita con distribución inicial de temperatura  $f(x)$  y con un extremo a  $0^\circ$  está dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Como la condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$  involucra a la variable  $x$ , el problema sugiere una transformación en  $x$  y no en  $t$ . La condición  $u(0, t) = 0$  nos indica que la TF en seno es la elección adecuada para este problema, puesto que la TF en coseno de la segunda derivada  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  requiere el valor de  $\frac{\partial u}{\partial t}(0, t)$ , cantidad que no está dada en el problema. En general, para aplicar una transformada con éxito, debemos utilizar las condiciones iniciales para obtener los valores que se necesiten en las fórmulas pertinentes.

Fijamos entonces  $t$  y calculamos la TF en seno con respecto a  $x$ . Así,

$$\mathcal{F}_s(u(x, t))(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x, t) \operatorname{sen}(\omega x) dx = U_s(\omega, t).$$

Aplicando las propiedades de la TF en seno y teniendo en cuenta que

$$\mathcal{F}_s(u_t(x, t))(\omega) = \frac{dU_s(\omega, t)}{dt},$$

$$\mathcal{F}_s(u_{xx}(x, t))(\omega) = -\omega^2 U_s(\omega, t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega u(0, t) = -\omega^2 U_s(\omega, t),$$

el problema anterior se transforma en

$$\begin{cases} \frac{dU_s(\omega, t)}{dt} = -\beta \omega^2 U_s(\omega, t), \\ U_s(\omega, 0) = F_s(\omega). \end{cases}$$

La solución general de la EDO de primer orden en  $t$  es

$$U_s(\omega, t) = A(\omega) e^{-\beta \omega^2 t},$$

donde  $A(\omega)$  es constante en  $t$ . Si  $t = 0$ , entonces

$$U_s(\omega, 0) = A(\omega) = F_s(\omega) \quad \text{y} \quad U_s(\omega, t) = F_s(\omega) e^{-\beta \omega^2 t}.$$

Tomando la transformada inversa de Fourier en seno, obtenemos la solución

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U_s(\omega, t) \operatorname{sen}(\omega x) d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(\omega) e^{-\beta \omega^2 t} \operatorname{sen}(\omega x) d\omega. \quad \blacktriangleleft$$

**Nota.** Terminamos el capítulo con dos observaciones.

1. Acabamos de introducir la TF para resolver problemas de EDP en dominios no acotados. Los problemas a los que hemos aplicado la TF estaban dados en coordenadas cartesianas. Otra transformada que se puede utilizar es la *transformada de Laplace* (abreviadamente, TL). Si una de las variables del problema está definida en la semirecta  $[0, +\infty)$ , a menudo se puede aplicar la TL con respecto a esta variable de la misma forma que se hace con las TF en coseno y en seno. Para problemas con variables distintas a las cartesianas, hay otras transformaciones que son más naturales y útiles. Por ejemplo, en problemas no acotados con simetría radial en el plano o en el espacio, cuyas coordenadas más apropiadas son polares, cilíndricas o esféricas, la transformación para la variable radial involucra funciones de Bessel. Esta transformación, que depende del orden de la función de Bessel implicada, se conoce como *transformación de Hankel*.

2. *Relación entre la TF y la TL.* Si  $f(x)$  es una función que es cero para  $x < 0$ , entonces

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Tomando  $\omega = -is$ , la expresión anterior queda

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(-is) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx.$$

El miembro derecho de la igualdad anterior se llama *transformada de Laplace* de  $f(x)$  y se denota por

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(-is).$$

La última igualdad dice que la TL de  $f$  en  $s$  es esencialmente la TF de  $f$  evaluada en  $-is$ , poniendo de manifiesto las muchas propiedades que ambas transformadas tienen en común. El factor de descomposición  $e^{-sx}$  ( $s > 0$ ) permite aplicar la TL a una amplia variedad de funciones que no necesitan decaer cuando  $x \rightarrow +\infty$ . De hecho, la TL está definida para  $s$  suficientemente grande si  $|f(x)| \leq K e^{ax}$ , para ciertas constantes  $K$  y  $a$ . Así, podemos aplicar la TL para resolver sistemas de EDO con coeficientes constantes, puesto que se sabe que las soluciones crecen a lo sumo exponencialmente. Además, las condiciones iniciales para tales sistemas se pueden codificar muy bien en el problema algebraico resultante. Sin embargo, para las funciones que no son idénticamente cero cuando  $x < 0$ , la TL ignora los valores de  $f(x)$  para  $x < 0$  y, en este caso, tales funciones no pueden ser, en general, completamente recuperadas a partir de sus TL. Por tanto, a pesar de los requisitos de descomposición más estrictos, la TF es normalmente preferible a la TL, cuando se desea transformar funciones de una variable no restringida (por ejemplo,  $f(x)$  para  $x \in (-\infty, +\infty)$ ).

## 9.4. Tablas de transformadas de Fourier

Conviene tener cuidado con los cambios de notación de unas tablas a otras porque, como dijimos anteriormente, la definición de TF no es universal y depende de la bibliografía utilizada.

### Transformadas de Fourier

$f(x)$	$\mathcal{F}(f)(\omega) = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$
1. $H(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$	$\frac{-i e^{-i\omega a}}{\sqrt{2\pi\omega}}$
2. Delta de Dirac: $\delta(x - a)$	$\frac{e^{-i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}$
3. $\begin{cases} 1, &  x  \leq a \\ 0, & a <  x  \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega} \right)$
4. $\begin{cases} c, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$	$\frac{ic}{\sqrt{2\pi\omega}} (e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a})$
5. $\begin{cases} -1, & -a < x < 0 \\ 1, & 0 < x < a \\ 0, & a \leq  x  \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{\cos(a\omega) - 1}{i\omega} \right)$
6. $\begin{cases} 1 -  x /2, &  x  < 2 \\ 0, & 2 \leq  x  \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{\text{sen}^2 \omega}{\omega^2} \right)$
7. $\frac{2a}{a^2 + x^2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-a \omega }$
8. $e^{-ax} H(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + i\omega)}$
9. $x e^{-ax} H(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + i\omega)^2}$
10. $e^{-a x }$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{a}{a^2 + \omega^2} \right)$
11. $x e^{-a x }$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{2a\omega i}{(a^2 + \omega^2)^2} \right)$
12. $e^{-ax^2}$	$\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}$
13. $x e^{-ax^2}$	$\frac{\sqrt{2}\omega i}{4a\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
14. $x^2 e^{-ax^2}$	$-\frac{\sqrt{2}\omega^2}{8a^2\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
15. $\frac{e^{-a x }}{\sqrt{ x }}$	$\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + \omega^2}}{a^2 + \omega^2}}$
16. $e^{- x } \text{sen } x$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\omega i}{4 + \omega^4}$

## Propiedades de la transformada de Fourier

---

	$f(x)$	$\mathcal{F}(f)(\omega) = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$
<hr/>		
<i>Linealidad:</i>	$a f_1(x) + b f_2(x)$	$a F_1(\omega) + b F_2(\omega)$
<i>Desplazamiento:</i>	$f(x - a)$	$e^{-i\omega a} F(\omega)$
<i>Escala:</i>	$f(ax)$	$\frac{F(\omega/a)}{ a }$
<i>Diferenciación:</i>	$f^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n F(\omega)$
	$x^n f(x)$	$i^n \frac{d^n \mathcal{F}(f)(\omega)}{d\omega^n}$
<i>Convolución:</i>	$(f_1 * f_2)(x)^\dagger$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

---

**Nota:**

$$^\dagger (f_1 * f_2)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-s) f_2(s) ds$$

La **delta de Dirac** es una distribución o una función generalizada. (Una *distribución* o *función generalizada* es un objeto matemático que generaliza la noción de función y la de medida, [14, 17].) Se escribe como

$$\delta(x - x_0) = \delta_{x_0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq x_0, \\ \infty, & \text{si } x = x_0, \end{cases}$$

y tiene la propiedad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{si } x_0 \in [a, b], \\ 0, & \text{si } x_0 \notin [a, b], \end{cases}$$

donde  $f$  es una función continua en un intervalo cualquiera  $[a, b]$ .

### Transformadas de Fourier coseno

$f(x)$	$\mathcal{F}_c(f(x))(\omega) = F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(\omega x) dx$
1. $f(ax)$	$\frac{F_c(\omega/a)}{a}$
2. $e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}, \quad a > 0$
3. $x^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{\omega}}$
4. $e^{-ax^2}$	$\frac{e^{-\omega^2/(4a)}}{\sqrt{2a}}, \quad a > 0$
5. $\frac{a}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a\omega}, \quad a > 0$
6. $x^2 f(x)$	$-F_c''(\omega)$
7. $\frac{\text{sen } ax}{x}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} H(a - \omega)$
8. $\delta(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
9. $H(a - x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen } a\omega}{\omega}$
10. $\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x^2 + a^2}$	$\frac{e^{-a\omega}}{\sqrt{\omega}}$
11. $\text{sen}(a^2 x^2)$	$\frac{\pi}{4a} \left( \cos \frac{\omega^2}{4a^2} - \text{sen } \omega^2 4a^2 \right)$
12. $\text{cos}(a^2 x^2)$	$\frac{\pi}{4a} \left( \cos \frac{\omega^2}{4a^2} + \text{sen } \omega^2 4a^2 \right)$

**Nota:** Si  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces:

$$\mathcal{F}_c(f'(x))(\omega) = \omega F_s(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0).$$

Si además  $f'(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces:

$$\mathcal{F}_c(f''(x))(\omega) = -\omega^2 F_c(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0).$$

Por otra parte,  $\mathcal{F}_c(xf(x))(\omega) = \frac{d}{d\omega} F_s(\omega)$ .

### Transformadas de Fourier seno

---

$f(x)$	$\mathcal{F}_s(f(x))(\omega) = F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(\omega x) dx$
1. $f(ax)$	$\frac{F_s(\omega/a)}{a}$
2. $e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$
3. $x^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{\omega}}$
4. $1/x$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
5. $\frac{x}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\omega}$
6. $\arctan(a/x)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{-a\omega}}{\omega}$
7. $x^2 f(x)$	$-F_s''(\omega)$
8. $\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right), \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - e^{-a\omega^2}}{\omega}$
9. $H(a - x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos a\omega}{\omega}$
10. $x e^{-a^2 x^2}$	$\frac{\pi\omega}{4\sqrt{2}a^3} e^{-\omega^2/(4a^2)}$
11. $\frac{e^{-a/x}}{\sqrt{x}}, \quad  \operatorname{Arg} a  < \pi/2$	$\frac{e^{-\sqrt{2a\omega}}}{\sqrt{\omega}} (\cos \sqrt{2a\omega} + \operatorname{sen} \sqrt{2a\omega})$
12. $\frac{\operatorname{sen} bx}{x^2 + a^2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ab}}{a} \operatorname{senh}(a\omega), & 0 < \omega < b \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\omega}}{a} \operatorname{senh}(ab), & b < \omega < \infty \end{cases}$

---

**Nota:** Si  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces:

$$\mathcal{F}_s(f'(x))(\omega) = -\omega F_c(\omega).$$

Si además  $f'(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces:

$$\mathcal{F}_s(f''(x))(\omega) = -\omega^2 F_s(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f(0).$$

Por otra parte,  $\mathcal{F}_s(xf(x))(\omega) = -\frac{d}{d\omega} F_c(\omega)$ .

Notas de ecuaciones en derivadas parciales

## 9.5. Ejercicios

1. Calcúlense las TF de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \text{sen } x$  si  $|x| \leq \pi$  y  $f(x) = 0$  si  $|x| > \pi$ .

b)  $f(x) = 1 - |x|$  si  $|x| \leq 1$  y  $f(x) = 0$  si  $|x| > 1$ .

c)  $f(x) = e^{-ax^2}$ .

d)  $f(x) = 0$  si  $x < 0$  y  $f(x) = xe^{-ax}$  si  $x > 0$ .

e)  $f(x) = 0$  si  $x < b$  y  $f(x) = e^{-a^2x^2}$  si  $0 < b < x$ .

2. a) Calcúlese  $\mathcal{F}(h(x))(\omega)$ , donde  $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$

b) Calcúlese  $\mathcal{F}(\delta(x-a))(\omega)$  y  $\mathcal{F}(\delta(x-a) + \delta(x+a))(\omega)$ , donde  $\delta$  es la delta de Dirac.

c) Pruébese que  $\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)e^{ia\omega}) = f(x+a)$ .

d) Compruébese que si  $f(x) \rightarrow 0$ , cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , entonces  $\mathcal{F}(f'(x))(\omega) = i\omega F(\omega)$ .

3. Resuélvase

a)  $\begin{cases} u_t + u_x = g(x), & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$       b)  $\begin{cases} t^2u_t - u_x = g(x), & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 1) = 0, \end{cases}$

de dos formas diferentes: a partir de las características y utilizando la TF.

4. Sea  $u_t + (\cos t)u_x = u$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ .

a) Hállese la solución de la EDP con  $u(x, 0) = f(x)$  de dos formas diferentes: a partir de las características y utilizando la TF.

b) Estúdiase si existe más de una solución de la EDP tal que  $u(0, t) = 0$ .

5. Resuélvase el problema de Dirichlet en el semiplano:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

6. a) Pruébese que si

$$I(a, x) = \int_0^\infty e^{-a\omega^2} \cos(\omega x) d\omega, \quad a > 0,$$

entonces  $\frac{dI}{dx} = -\frac{x}{2a}I$  e  $I(a, 0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$ . Hállese  $I(a, x)$  y utilícese para calcular  $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\omega)$  y  $\mathcal{F}^{-1}(e^{-a\omega^2})(x)$ .

b) Resuélvase:  $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-x^2}. \end{cases}$

c) Resuélvase:  $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-x^2/2}. \end{cases}$

7. Resuélvase:

$$a) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad b) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \delta(x), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0 = u_t(x, 0). \end{cases}$$

8. Resuélvase

$$\begin{cases} -u_{xx} + u_{tt} + 2u_t + u = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

de dos formas diferentes: utilizando la TF y haciendo el cambio  $u = z e^{-t}$ .

9. Resuélvase

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xt} + u_{tt} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

de dos formas diferentes: reduciendo la ecuación a forma canónica y utilizando la TF.

10. Aplíquese la TF en coseno o en seno para resolver los siguientes problemas:

$$a) \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & k \in \mathbb{R}_+, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = c \quad (c \in \mathbb{R}_+). \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & k \in \mathbb{R}_+, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = -c \quad (c \in \mathbb{R}_+). \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_x(0, t) = g(t). \end{cases}$$

# Epílogo

Las EDP surgieron de la necesidad de explicar determinados fenómenos físicos relacionados con la dinámica de los medios continuos, como el movimiento de fluidos o la deformación de cuerpos no rígidos. Esta relación entre los modelos físicos y las EDP se mantiene vigente hoy en día y es uno de los grandes campos de aplicación de las matemáticas. Pero, más allá de su papel en la creación de modelos físicos, los matemáticos se han preocupado de estudiar de forma rigurosa estas ecuaciones, dando lugar a nuevas e interesantes ideas que han contribuido al desarrollo de las matemáticas, no solo en el campo de las EDP, sino también en diferentes ramas, como el análisis complejo, la geometría diferencial de superficies y un largo etcétera. A modo de ejemplo, el tratamiento riguroso de la solución de una EDP, sujeta a condiciones de contorno, puede considerarse el origen del Análisis Funcional, con el posterior desarrollo del análisis armónico, un campo de investigación activo y con múltiples aplicaciones en diferentes ámbitos.

Esa conexión bidireccional entre los modelos físicos y el desarrollo de un marco riguroso que dé soporte al estudio de dichos modelos hace de las EDP una fuente constante de nuevas aplicaciones y teorías matemáticas. Parte de esto se ha puesto de manifiesto a lo largo de estas notas cuando se han introducido las series de Fourier y la transformada de Fourier. Conscientemente, no hemos profundizado en estos temas, ya que los estudiantes los pueden ver con detalle cursando una asignatura de Análisis Funcional, presente en cualquier Grado en Matemáticas.

Por otra parte, en estas notas se han tratado los aspectos clásicos de las EDP, quedando algunas ideas fuera del contenido de las mismas. Una de ellas, que tiene especial relevancia en muchos aspectos en el estudio de la solución de problemas de contorno, es el concepto de solución débil. Sin entrar en demasiados detalles, consideremos la ecuación de Poisson en un dominio  $D$  con condiciones homogéneas de Dirichlet

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in D, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial D. \quad (1)$$

Esta es la que podríamos llamar formulación fuerte de la EDP y la solución tiene que ser una función dos veces derivable. Desafortunadamente, esta formulación es demasiado restrictiva en la práctica en el sentido de que muchos problemas físicos de interés no poseen soluciones tan regulares. Sin embargo, usando integración por partes, es posible relajar las condiciones de regularidad de una solución. La idea de cómo hacerlo surge del paralelismo que se puede establecer entre la resolución de una EDP y la resolución de una ecuación lineal en un espacio vectorial de dimensión finita. De hecho, resolver la EDP puede verse como encontrar una

función que vive en un determinado espacio de funciones que satisface la ecuación definida por un operador lineal. En un espacio vectorial de dimensión finita, pongamos  $\mathbb{R}^n$ , si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son dos vectores, entonces  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  si y solo si, cualquiera que sea  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , se verifica  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ . Podemos decir que estamos poniendo a prueba la identidad  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  frente a un vector test arbitrario  $\mathbf{w}$ . Esto mismo lo podemos hacer con nuestra EDP, eligiendo convenientemente unas funciones test  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ , suficientemente regulares, que se anulan en  $\partial D$  y con estructura de espacio vectorial. Así, si  $\varphi$  es una función test arbitraria, entonces

$$-\int_D \Delta u(x) \varphi(x) dx = \int_D f(x) \varphi(x) dx, \quad u(x) \varphi(x) = 0, \quad x \in \partial D.$$

Usando integración por partes se llega a que

$$\int_D \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_D f(x) \varphi(x) dx, \quad (2)$$

cualquiera que sea la función test  $\varphi$ . Entonces, si existe una función  $u$  que verifica (2), para toda función test, decimos que  $u$  es una solución débil de la EDP (1). Lo más interesante de esta formulación es que no aparecen derivadas de orden dos, como en la formulación original, por lo que no necesariamente una solución de (2) tiene que ser dos veces derivable. En este sentido, esta formulación es más débil que la original y, en general, más fácil de abordar en su resolución.

Por otra parte, existen numerosas EDP que tienen soluciones débiles, pero no fuertes. Incluso en los casos en que exista una solución fuerte, a menudo es más fácil probar que existe una solución débil y luego verificar que también es fuerte, antes que buscar esta directamente. Además, una solución débil se puede describir como combinación lineal de una base de funciones en espacios de dimensión infinita. Así, las soluciones débiles viven en espacios de funciones especiales, que son los espacios de Sobolev, y juegan un papel crucial en la moderna teoría de EDP, tanto desde el punto de vista analítico como numérico. De hecho, esta formulación conduce al método de Galerkin y es la base del método de elementos finitos, quizás el más usado en la resolución numérica de EDP.

Más allá del amplio panorama que se abre con la formulación débil de una EDP definida por un operador lineal, no podemos terminar sin mencionar las ecuaciones no lineales, algunas de las cuales representan un reto para la comunidad matemática y que son objeto de constante investigación. Entre ellas tenemos las ecuaciones de Navier-Stokes, que describen el movimiento de un fluido viscoso y que se usan en los modelos atmosféricos o en el movimiento de las masas oceánicas. Uno de los fenómenos que despiertan mayor interés es el de la turbulencia, que podría estar relacionado con la aparición de singularidades en las soluciones y que mantiene ocupados a buen número de investigadores en estos momentos. Otra de las ecuaciones más estudiadas es la de Korteweg-de Vries que se usa para la descripción de la propagación de ondas en diferentes medios. A pesar de que pueden encontrarse soluciones de manera analítica, sigue habiendo cuestiones abiertas pendientes de resolver. Podríamos seguir enumerando otras ecuaciones pero, basta echar un vistazo a la lista de ecuaciones no lineales en Wikipedia para darse cuenta de la relevancia de estas ecuaciones en múltiples áreas de la Física y la Ingeniería.

Lo dicho hasta ahora no es más que una pequeña muestra de lo que suponen las EDP en el desarrollo de las matemáticas y las ciencias experimentales. Para el estudiante interesado, remitimos a una revisión minuciosa de Brezis y Browder [5] sobre la influencia de las EDP en el ámbito de las matemáticas y la física. Con todo esto, esperemos que estas notas y estos comentarios finales sirvan como estímulo para profundizar en un campo tan amplio y multidisciplinar como son las EDP.



# Bibliografía

- [1] D. Álvarez. *Lo mínimo que uno debe saber sobre superficies mínimas*. Gaceta de la RSME, 17 (2014), no. 1, 49–70.
- [2] J. Aranda. *Métodos Matemáticos II*. Disponible en <https://teorica.fis.ucm.es/pparanda/EDPs.html>
- [3] N. H. Asmar. *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*. Prentice-Hall, New Jersey, 2004.
- [4] D. Bleecker y G. Csordas. *Basic partial differential equations*. International Press, Cambridge, 1996.
- [5] H. Brezis y F. Browder. *Partial differential equations in the 20th century*. Advances in Mathematics, 135 (1998), 76–144.
- [6] R. Courant y D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*. Volumen II. Partial differential equations. John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [7] M. Delgado. *The Lagrange-Charpit method*. SIAM Review, 39 (1997), no. 2, 298–304.
- [8] J. Duoandikoetxea. *Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier*. UNAN, Managua, 2003.
- [9] L. A. Fernández. *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*. Disponible en <https://personales.unican.es/lafernandez/Intro-EDP.pdf>
- [10] E. Goursat. *A course in Mathematical Analysis*. Vol. I, Dover, New York, 1959.
- [11] R. Habermann. *Ecuaciones en derivadas parciales, con series de Fourier y problemas de contorno*. Prentice-Hall, Madrid, 2003.
- [12] M. Humi y W. B. Miller. *Boundary value problems and partial differential equations*. PWS-KENT, Boston, 1992.
- [13] F. John. *Partial differential equations*. Springer, New York, 1991.
- [14] R. P. Kanwal. *Generalized functions, theory and applications*. Springer, New York, 2004.

- [15] M. J. Lighthill y G. B. Whithman. *On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 229 (1955), no. 1178, 317–345.
- [16] F. Marcellán, L. Casasús y A. Zarzo. *Ecuaciones diferenciales: problemas lineales y aplicaciones*. McGraw-Hill, Madrid, 1990.
- [17] M. Marin y A. Öchsner. *Essentials of partial differential equations*. Springer, Cham, 2019.
- [18] T. Myint-U. *Partial differential equations of mathematical physics*. 2ª edición, North-Holland, New York-Oxford, 1980.
- [19] R. K. Naggle y E. B. Saff. *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*. Addison-Wesley Iberoamericana, Delaware, 1992.
- [20] P. J. Olver. *Introduction to partial differential equations*. Springer, New York, 2014 (revisado 2020).
- [21] I. Peral. *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales*. Disponible en <http://matematicas.uam.es/~ireneo.peral/libro.pdf>
- [22] Y. Pinchover y J. Rubinstein. *An introduction to partial differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [23] P. Puig Adam. *Curso teórico-práctico de ecuaciones diferenciales aplicado a la física y técnica*. 11ª edición, Biblioteca Matemática, Madrid, 1970.
- [24] P. I. Richards. *Shock waves on the high way*. Operation Research, 4 (1956), no. 1, 42–51.
- [25] S. L. Ross. *Ecuaciones diferenciales*. Reverté, Barcelona, 1979.
- [26] G. F. Simmons. *Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill, Madrid, 2000.
- [27] G. Stephenson. *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*. Reverté, Barcelona, 1982.
- [28] A. Tveito y R. Winther. *Introduction to partial differential equations. A computational approach*. Springer, New York, 2005.
- [29] E. C. Zachmanoglou y D. W. Thoe. *Introduction to partial differential equations with applications*. Dover, New York, 1976.
- [30] E. Zauderer. *Partial differential equations of applied mathematics*. 3ª edición, John Wiley & Sons, New Jersey, 2006.





**UNIVERSIDAD  
DE LA RIOJA**

Servicio de Publicaciones  
Biblioteca Universitaria  
C/ Piscinas, s/n  
26006 Logroño (La Rioja)  
Teléfono: 941 299 187

<http://publicaciones.unirioja.es>  
[www.unirioja.es](http://www.unirioja.es)